0.1 集合及其运算

定义 0.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A,B,C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的**元素** (或**元**).

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a **属于** A, 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a **不属于** A, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$.

我们用 $\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N}\cup 0$. ♣

注 集合的表示方法:

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A=\{a,b,c\},\quad B=\{1,3,\cdots,2n-1\}.$$

(2) 描述法——$A=\{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f=\{x : f(x)=0\}=\{x \mid f(x)=0\}.$$

定义 0.2

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B **相等**, 记为 $A=B$.

若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$, 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A\subset B$.

集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的**幂集**, 记为 2^A 或 $\mathcal{P}(A)$. ♣

注 $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

由 n 个元素形成的集合 E 的幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

定义 0.3

设 $\forall\alpha\in\Gamma, A_\alpha$ 都是集合, 则 $\{A_\alpha : \alpha\in\Gamma\}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为**集族**或集合族, 称 Γ 为**指标集**,α 为**指标**. 特别地, 当 $\Gamma=\mathbb{N}$ 时, 集族称为**集列**或**集合列**, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$. ♣

定义 0.4

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x : \exists\alpha\in I,\ \text{s.t. } x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x : \forall\alpha\in I, x\in A_\alpha\}.$$

设 A,B 为两个集合, 若 $A\cap B=\varnothing$, 则称 A 与 B **互不相交**. ♣

定义 0.5

设 A,B 是两个集合, 称 $\{x : x\in A, x\notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$.

在上述定义中, 当 $B\subset A$ 时, 称 $A\setminus B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集, 我们称 X 为**全集**. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的**补集**或**余集**, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c=X\setminus B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集.

于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

定义 0.6 (笛卡尔积/直积集)

设 $n \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^n$ 为集族, 称

$$\{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡尔积**, 记为 $A_1 \times \cdots \times A_n$.

若 $(x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots, x_n') \in A_1 \times \cdots \times A_n$, 则 $(x_1, \cdots, x_n) = (x_1', \cdots, x_n')$ 当且仅当 $x_i = x_i', i = 1, 2, \cdots, n$.

特别地, 记 $\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{n\text{个}} = A_1^n$.

♣

定理 0.1 (集合的运算及性质)

设 A, B, E 为全集 X 中的子集,$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(1) **广义交换律和结合律**: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) $A \cup A = A, A \cap A = A$.

(3) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing$,

$A \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A \cap B_\alpha), \quad A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(A \cup B_\alpha)$.

(7) $X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.

(8) $A \setminus B = A \cap B^c$.

(9) 若 $A \supseteq B$, 则 $A^c \subseteq B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subseteq B^c$.

(10) $A \setminus B^c = B \setminus A^c$.

(11) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$.

(13) $B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Leftrightarrow B^c = E$.

♡

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10) $x \in A \setminus B^c \Longleftrightarrow x \in A \text{且} x \notin B^c \Longleftrightarrow x \in A \text{且} x \in B \Longleftrightarrow x \in B \text{且} x \notin A^c \Longleftrightarrow x \in B \setminus A^c$.

(11) 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in \Gamma$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

故 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in \Gamma$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$, 即 $x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$. 故 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$.

(13) 证法一:

$$\begin{aligned}B &= (E\cap A)^c \cap (E^c \cup A) = (E^c \cup A^c)\cap(E^c\cup A)\\ &= E^c \cup (A^c \cap A) = E^c \cup \varnothing = E^c\\ &\Longleftrightarrow B^c = E.\end{aligned}$$

证法二:显然 $B = (E\cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Longleftrightarrow B^c = ((E\cap A)^c \cap (E^c\cup A))^c$, 故

$$\begin{aligned}B^c &= ((E\cap A)^c \cap (E^c\cup A))^c\\ &= (E\cap A)\cup(E^c\cup A)^c = (E\cap A)\cup(E\cap A^c)\\ &= E\cap(A\cup A^c) = E\cap X = E.\end{aligned}$$

证法三:

$$\begin{aligned}B &= (E\cap A)^c \cap (E^c \cup A) = (E^c \cup A^c)\cap(E^c\cup A)\\ &= (E^c\cap E^c)\cup(A^c\cap E^c)\cup(A^c\cap A)\cup(E^c\cap A)\\ &= E^c \cup (A\cup E)^c \cup \varnothing \cup (E^c\cap A)\\ &= E^c \cup (A\cup E)^c = (E\cap(A\cup E))^c = E^c\\ &\Longleftrightarrow B^c = E.\end{aligned}$$

□

定理 0.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$;　　(ii) $(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

♡

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall\alpha \in \Gamma$,$x \notin A_\alpha$, 即 $\forall\alpha\in\Gamma$,$x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$, 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$. 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证.

□

定义 0.7 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A\triangle B$.

♣

笔记 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 0.3 (集合对称差的性质)

(1) $A\triangle B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

(2) 交换律:$A\triangle\varnothing = A$,$A\triangle A = \varnothing$,$A\triangle A^c = X$,$A\triangle X = A^c$.

(3) 结合律:$A\triangle B = B\triangle A$.

(4) 交与对称差满足分配律:$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

(5) $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

(6) $A^c\triangle B^c = A\triangle B$;$A = A\triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.

(7) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E\triangle A=B$(实际上 $E=B\triangle A$).

证明

(1) 由对称差集的定义及定理 0.1(6)可得

$$\begin{aligned} A\triangle B&=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=\left[(A\cap B^c)\cup B\right]\cap\left[(A\cap B^c)\cup A^c\right]\\ &=(A\cup B)\cap(A^c\cap B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\ &=(A\cup B)\setminus(A\cap B). \end{aligned}$$

(2) 证明是显然的.

(3) 证明是显然的.

(4) $x\in A\setminus B\triangle C\Leftrightarrow x\in A;\ x\notin B\triangle C=(B\setminus C)\cup(C\setminus B)\Leftrightarrow x\in A;\ x\in B\cap C$, 或$x\notin B$且$x\notin C\Leftrightarrow x\in A\setminus B\setminus C$或$x\in A\cap B\cap C\Leftrightarrow x\in(A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)$, 即

$$A\setminus B\triangle C=(A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C).$$

于是

$$\begin{aligned} A\triangle(B\triangle C)&=(A\setminus B\triangle C)\cup(B\triangle C\setminus A)\\ &=(A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\setminus C\setminus A)\cup(C\setminus B\setminus A)\\ &=(A\setminus B\setminus C)\cup(B\setminus A\setminus C)\cup(C\setminus A\setminus B)\cup(A\cap B\cap C)\\ &=((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\setminus C)\cup(C\setminus A\triangle B)\\ &=(A\triangle B\setminus C)\cup(C\setminus A\triangle B)\\ &=(A\triangle B)\triangle C. \end{aligned}$$

即

$$A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C.$$

(5) $x\in A\cap(B\setminus C)\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B\setminus C\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B,x\notin C\Leftrightarrow x\in A\cap B$且$x\notin A\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$, 即

$$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C).$$

于是

$$\begin{aligned} A\cap(B\triangle C)&=A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\\ &=(A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B))\\ &=(A\cap B\setminus A\cap C)\cup(A\cap C\setminus A\cap B)\\ &=(A\cap B)\triangle(A\cap C). \end{aligned}$$

(6) $x\in A^c\setminus B^c\Leftrightarrow x\in A^c,x\notin B^c\Leftrightarrow x\notin A,x\in B\Leftrightarrow x\in B\setminus A$, 即

$$A^c\setminus B^c=B\setminus A.$$

于是

$$A^c\triangle B^c=(A^c\setminus B^c)\cup(B^c\setminus A^c)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\triangle B.$$

(7) 若 $E\triangle A=B$, 则

$$E=E\triangle\varnothing=E\triangle(A\triangle A)=(E\triangle A)\triangle A=B\triangle A.$$

反之, 令 $E=B\triangle A$, 则

$$E\triangle A=(B\triangle A)\triangle A=B\triangle(A\triangle A)=B\triangle\varnothing=B.$$

所以, $\exists E$, s.t. $E\triangle A=B$.

□

定义 0.8 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

♣

命题 0.1

设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为两个集列.

(1) 当 $\{A_n\}$ 为递减集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n (\forall N \in \mathbb{N})$.

当 $\{A_n\}$ 为递增集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n (\forall N \in \mathbb{N})$.

(2) 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i (n \geqslant 2)$. 证明:$\{B_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为一个彼此不相交的集列, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n=1,2,\cdots;$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(3) 如果 $\{A_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为单调减 (即 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$) 的集列, 证明:

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

并且其中各项互不相交.

(4) 证明: $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. 反之并不成立, 并举例说明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \not\supseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

特别地, 如果 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n=1,2,\cdots)$ 都是单调增的集列, 证明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

♠

笔记 这个命题 (2) 给出了一种构造互不相交集列 (不改变其并集) 的方法.

证明

(1) 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_n \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n$. 另一方面, 由 $\{A_n\}$ 为递减集合列可得

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{N-1} \supseteq A_n, \forall k = N, N+1, \cdots.$$

因此 $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_n \supseteq \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n$, 故再根据 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_n \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap_{k=N}^{\infty} A_n$.

对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_n \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n$. 另一方面, 由 $\{A_n\}$ 为递增集合列可得

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_{N-1} \subseteq A_N.$$

因此 $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_n \subseteq A_N \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n$, 故再根据 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_n \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_n$.

(2) 证法一: 显然, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \subseteq A_i$, 故 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

反之, 若 $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ①$x \in A_1$, 则 $x \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$; ②$x \notin A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, $x \in A_{m+1}$, 则 $x \in A_{m+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i = B_{m+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 因此, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 综上得到

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

易见, 由 $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \subseteq A_i$ 知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

反之, 若 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ①$x \in A_1$, 则 $x \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$; ②$x \notin A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, $x \in A_{m+1}$, 则 $x \in A_{m+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i = B_{m+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 因此, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 综上得到

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

证法二 (归纳法):当 $n = 1$ 时, 有

$$\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1 = B_1 = \bigcup_{i=1}^{1} B_i.$$

假设 $n = k$ 时, 有 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = B_{k+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \left(A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i.$$

因此, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 事实上, 由

$$A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{i} A_j = \bigcup_{j=1}^{i} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 同理, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. (或者由 $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} A_j \subseteq A_i$ 推得上式). 于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(3) 因为 $A_1 \setminus A_2 \subseteq A_1, A_2 \setminus A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1, \cdots, A_n \setminus A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1$, 所以

$$(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq A_1.$$

反之, 对 $\forall x \in A_1$, 有两种情形:

①$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$;

②$x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使 $x \notin A_{i_0}$, 且 $x \in A_i, i = 1, 2, \cdots, i_0 - 1$, 则 $x \in A_{i_0-1} \setminus A_{i_0}$. 于是

$$x \in (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

$$A_1 \subseteq (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

综合上述得到

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(4) 因为 $A_n \cap B_n \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; $A_n \cap B_n \subseteq B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right). \tag{1}$$

反之, 设 $A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$; $B_1 = \varnothing$, $B_n = \{n-1\}, n = 2, 3, \cdots$. 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing \not\supseteq \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

特别地, 由(1)式知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

另一方面, 对 $\forall x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, 即 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 且 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 则必有 $x \in A_{n_1}, x \in B_{n_2}$, 不妨设 $n_1 \leqslant n_2$. 又因 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为递增集列, 故

$$x \in A_{n_1} \subseteq A_{n_2},$$

于是

$$x \in A_{n_2} \cap B_{n_2} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n),$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n).$$

综合上述, 有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

□

定义 0.9 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 0.2

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列, 我们有

1. 若 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$, 则
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$
2. 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$, 则
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明

1. 由于 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 故
$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$
又由命题 0.1可知
$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$
于是
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$
$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$
2. 由于 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 故
$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.1可知

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

□

命题 0.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$\text{(i)}E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k); \quad \text{(ii)}E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k).$$

证明

□

定理 0.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

$$\text{(i)}\ \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个} A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j \text{且} k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$\text{(ii)}\ \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x : \text{ 除有限个} A_k \text{ 外, 都含有} x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 \text{且} k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supseteq \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 (i) 设 $x \in \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此 x 属于无穷多个 A_n.

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x \in A_{n_k}, k = 1, 2, \cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

(ii) 若 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 自然除了 $A_1, \cdots, A_{j_0-1}$ 这有限个集合外, 其他 $A_k (k \geqslant j_0)$ 都含有 x.

反之, 若除有限个 A_k 外, 都含有 x, 则存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 从而得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

由 (i)(ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于

$\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supseteq \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

□

例题 0.1 设 $A_{2k-1} = \left(0, \frac{1}{k}\right), A_{2k} = (0, k), k = 1, 2, \cdots$, 求 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$.

解 解法一: 由定理 0.4可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{x \mid \exists \text{无穷个} n, \text{s. t.} x \in A_n\} = (0, +\infty).$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{x \mid \text{只有有限个} n, \text{s. t.} x \notin A_n\} = \varnothing.$$

解法二: 根据上、下限集的定义知

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} (0, +\infty) = (0, +\infty).$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing.$$

□

例题 0.2 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n = 0, 1, 2, \cdots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n = 1, 2, \cdots$, 求 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 与 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

解 注意到

$$[0, 1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [0, 2)$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能 "除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 2)$.

□

命题 0.4

设 $f(x)$ 为 E 上的一个实函数,c 为任何实数,

$$E(f > c) = \{x \in E \mid f(x) > c\}, \quad E(f \leqslant c) = \{x \in E \mid f(x) \leqslant c\}$$

等. 证明:

(1) $E(f > c) \cup E(f \leqslant c) = E$.

(2) $E(f \geqslant c) = E(f > c) \cup E(f = c)$.

(3) 当 $c \leqslant d$ 时,$E(f > c) \cap E(f \leqslant d) = E(c < f \leqslant d)$.

(4) 当 $c \geqslant 0$ 时,$E(f^2 > c) = E(f > \sqrt{c}) \cup E(f < -\sqrt{c})$.

(5) 当 $f \geqslant g$ 时,$E(f > c) \supseteq E(g > c)$.

(6) $E(f \geqslant c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(c \leqslant f < c + n)$.

(7) $E(f < c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(f \leqslant c - \frac{1}{n}\right)$.

证明

(1)

$$\begin{aligned} E(f > c) \cup E(f \leqslant c) &= \{x \in E \mid f(x) > c\} \cup \{x \in E \mid f(x) \leqslant c\} \\ &= \{x \in E \mid f(x) > c \text{ 或 } f(x) \leqslant c\} = E. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}E(f>c)\cup E(f=c)&=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cup\{x\in E\mid f(x)=c\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>c\text{ 或}f(x)=c\}=\{x\in E\mid f(x)\geqslant c\}=E(f\geqslant c).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}E(f>c)\cap E(f\leqslant d)&=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cap\{x\in E\mid f(x)\leqslant d\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>c\text{ 且}f(x)\leqslant d\}=\{x\in E\mid c<f(x)\leqslant d\}\\&=E(c<f\leqslant d).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})&=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}\}\cup\{x\in E\mid f(x)<-\sqrt{c}\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}\text{ 或}f(x)<-\sqrt{c}\}=\{x\in E\mid f^2(x)>c\}\\&=E(f^2>c).\end{aligned}$$

(5) $x\in E(g>c)\Leftrightarrow x\in E,$ 且$g(x)>c\Rightarrow x\in E,$ 且$f(x)\geqslant g(x)>c\Leftrightarrow x\in E(f>c)$. 等价于

$$E(f>c)\supseteq E(g>c).$$

(6) 显然,$E(c\leqslant f<c+n)\subseteq E(f\geqslant c)$, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)\subseteq E(f\geqslant c).$$

另一方面, 对 $\forall x\in E(f\geqslant c)$, 即 $f(x)\geqslant c$. 则必有充分大的 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $c\leqslant f(x)<c+n_0$, 故 $x\in E(c\leqslant f<c+n_0)$. 于是

$$x\in E(c\leqslant f<c+n_0)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

这就得到

$$E(f\geqslant c)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

综合上述, 有

$$E(f\geqslant c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

(7) 因为 $f(x)\leqslant c-\frac{1}{n}\Rightarrow f(x)\leqslant c-\frac{1}{n}<c$, 故

$$E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subseteq E(f<c),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subseteq E(f<c).$$

另一方面, 对 $\forall x\in E(f<c)$, 即 $x\in E$ 且 $f(x)<c$. 则必有 $n_0\in\mathbb{N}$, s. t. $f(x)\leqslant c-\frac{1}{n_0}$. 即 $x\in E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n_0}\right)$. 从而

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right),\quad E(f<c)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$

综合上述, 有

$$E(f<c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$

□

命题 0.5

设 $\{f_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为 E 上的实函数列, 且关于 n 单调增, 即

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots,\quad \forall x\in E,$$

并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$. 证明: 对任何实数 c, 有

(1) $E(f>c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)=\lim\limits_{n\to+\infty}E(f_n>c)$.

(2) $E(f\leqslant c)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim\limits_{n\to+\infty}E(f_n\leqslant c)$.

证明

(1) 证法一: 设 $x\in E(f>c)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)>c$. 于是,$\exists N\in\mathbb{N}$,s.t. 当 $n_0>N$ 时, 有 $f_{n_0}(x)>c$. 从而,$x\in E(f_{n_0}>c)\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$,$E(f>c)\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$.

反之, 如果 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$, 则 $\exists n_0\in\mathbb{N}$,s.t.$x\in E(f_{n_0}>c)$. 由于 f_n 关于 n 单调增, 故有 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant f_{n_0}(x)>c$,$x\in E(f>c)$. 从而,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)\subseteq E(f>c)$.

综合上述, 有

$$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

因为 f_n 单调增, 故 $E(f_n>c)\subseteq E(f_{n+1}>c)$, 从而

$$\lim_{n\to+\infty}E(f_n>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

证法二: 如果命题 0.5(2)不是利用命题 0.5(1)的结论证得, 则

$$E(f>c)=E\setminus E(f\leqslant c)\xlongequal{\text{命题 0.5(2)}}E\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus E(f_n\leqslant c))=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

(2) 证法一: 因为 f_n 关于 n 单调增, 故 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant f_n(x)$, 从而

$$E(f\leqslant c)\subseteq E(f_n\leqslant c),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$E(f\leqslant c)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$

另一方面, 如果 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)$, 则 $x\in E(f_n\leqslant c),\forall n\in\mathbb{N}$, 即 $f_n(x)\leqslant c,\forall n\in\mathbb{N}$. 于是,$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\leqslant c$,$x\in E(f\leqslant c)$,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)\subseteq E(f\leqslant c)$.

综合上述, 有

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$

由于 f_n 关于 n 单调增, 故 $E(f_n\leqslant c)$ 关于 n 单调减, 从而

$$\lim_{n\to+\infty}E(f_n\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$

证法二: 如果命题 0.5(1)不是利用命题 0.5(2)的结论证得, 则

$$E(f \leqslant c) = E \setminus E(f > c) \xlongequal{\text{命题 } 0.5(1)} E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c) \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus E(f_n > c)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c).$$

□

例题 0.3 设 $\{f_i(x)\}(i = 1, 2, \cdots)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数列, 试用点集

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

表示点集 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varlimsup_{i \to +\infty} f_i(x) > 0\}$.

解

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varlimsup_{i \to +\infty} f_i(x) > 0\} &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{存在无穷个 } i, \text{使 } f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \varlimsup_{i \to +\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{i=N}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\}.
\end{aligned}$$

□