0.1 逼近方法

0.1.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在 $[a,b]$ 上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设 $[a,b]=[0,1]$.

定义 0.1 (一维 Bernstein 多项式)

设 $f\in C[0,1], n\in\mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}.$$

设 $f\in C[a,b], n\in\mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

♣

注 $[a,b]$ 区间上的 Bernstein 多项式可由 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设 $f\in C[a,b], n\in\mathbb{N}_0$, 令 $x=(b-a)y+a,\forall x\in[a,b]$, 则 $y\in[0,1]$, 并且

$$y=\frac{x-a}{b-a},1-y=\frac{b-x}{b-a}.$$

再令 $g(y)=f((b-a)y+a)$, 则由 $f\in C[a,b]$ 可知 $g\in C[0,1]$. 于是 g 在 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g,y)\triangleq\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)C_n^ky^k(1-y)^{n-k}.$$

故 $[a,b]$ 区间上 f 的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

引理 0.1

1. $B_n(C,x)=C\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=C.$
2. $B_n(x,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=x.$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=0.$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$

♡

证明

1. 由二项式定理可得 $B_n(C,x)=C\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=C(x+1-x)^n=C.$
2. $B_n(x,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{(1-x)^n}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^ky^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^ky^k\right)'=\left[(1+y)^n\right]'=n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^ky^k=ny(1+y)^{n-1}.$$

故

$$
\begin{aligned}
B_n(x,x) &= \frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1} \\
&= \frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} = x.
\end{aligned}
$$

3. 由 2 的结论可直接得到.
4. 首先, 展开得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = (1-x)^n\sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2xk}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right) \\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

接着, 计算 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^k$ 和 $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k y^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$
\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y^k\right)' = \left[(1+y)^n\right]' = n(1+y)^{n-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k y^k &= y\left[\left(\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^k\right)'\right] = y\left[\left(y\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y^k\right)'\right)'\right] \\
&= y\left[\left(y\left((1+y)^n\right)'\right)'\right] = y\left[\left(ny(1+y)^{n-1}\right)'\right] \\
&= y\left[n(1+y)^{n-1}+n(n-1)y(1+y)^{n-2}\right] \\
&= ny(1+y)^{n-2}\left[(1+y)+(n-1)y\right] \\
&= ny(1+y)^{n-2}(ny+1).
\end{aligned}
$$

令 $y=\dfrac{x}{1-x}$, 则由上式可得

$$
\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1} = \frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} = \frac{nx}{(1-x)^n}.
$$

$$
\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-2}\left(\frac{nx}{1-x}+1\right) = \frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2}\frac{(n-1)x+1}{1-x} = \frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n}.
$$

将上式代入(1)可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n}\cdot\frac{nx}{(1-x)^n} + \frac{(1-x)^n}{n^2}\cdot\frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n} \\
&= x^2-2x^2+\frac{(n-1)x^2+x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}
$$

□

定理 0.1 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设 $\varphi(x) = n\left[f\left(\dfrac{n-1}{n}x+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)\right]$, $n=1,2,3,\cdots$, 则有

$$
B_n'(f,x) = B_{n-1}(\varphi,x), n\in\mathbb{N}. \qquad (2)
$$

(2) 若 f 递增或者递减, 则 $B_n(f,x)$,$n\in\mathbb{N}_0$ 也递增或者递减.

(3) 若 f 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数, 则对每个 $n\in\mathbb{N}_0$ 都有 $B_n(f,x)$ 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数.

(4) 设 $f\in C^k[0,1], k\in\mathbb{N}_0$, 则关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_n(f,x)=f(x),\ \lim_{n\to\infty}B_n'(f,x)=f'(x),\cdots,\ \lim_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f,x)=f^{(k)}(x). \tag{3}$$

♡

注 性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!

即当 $f\in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f,x)=f^{(k)}(x)$ 不成立!

也即当 $f\in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在一个 N（与 k 无关, 公共的 N）, 使得 $\forall n>N$, 都有 $B_n^{(k)}(f,x)\rightrightarrows f^{(k)}(x)$ 不成立!

证明

(1) 对 $n\geqslant 1$, 直接计算得

$$\begin{aligned}
B_n'(f,x)&=\left[\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right]'\\
&=\sum_{k=1}^{n}kf\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}x^k(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}-(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}-(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[nf\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}-nf\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C_{n-1}^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n-1}\right)C_{n-1}^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=B_{n-1}(\varphi,x),
\end{aligned}$$

这就给出了式(2).

(2) 如果 f 递增, 那么就有 $\varphi\geqslant 0$, 则由(2)知 $B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x)\geqslant 0$, 故 $B_n(f,x)$ 递增. 类似可得递减.

(3) 如果 f 下凸, 对 $n=1$ 的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设 $n\geqslant 2$. 注意继续由(2)知

$$B_n''(f,x)=B_{n-1}'(\varphi,x)=B_{n-2}(\psi,x),\psi(x)=(n-1)\left[\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x+\frac{1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right)\right],$$

从而由 f 的下凸性可得

$$\begin{aligned}
B_{n-2}(\psi,x)&=\sum_{j=0}^{n-2}\psi\left(\frac{j}{n-2}\right)C_{n-2}^k(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&=\sum_{j=0}^{n-2}\left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&=n\sum_{j=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{j+2}{n}\right)-f\left(\frac{j+1}{n}\right)-f\left(\frac{j+1}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{j+1}{n}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{\frac{j+2}{n}+\frac{j}{n}}{2}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

这就证明了 $B_n(f,x)$ 下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明 $k=0$ 时命题成立. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|x-y|\leqslant\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
|B_n(f,x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leqslant \varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|+2\sup|f|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\overset{\text{类似Chebeshev不等式的证明}}{\leqslant} \varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\sup|f|}{\delta^2}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant \varepsilon+\frac{2\sup|f|}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\overset{0.1}{=} \varepsilon+\frac{2\sup|f|}{n\delta^2}x(1-x),
\end{aligned}
$$

于是从上式立得

$$\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{\sup|f|}{2n\delta^2}.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|=0.$$

故我们得到了 $k=0$ 时, 式(3)成立.

Step2 $(*)$ 我们定义

$$T_nf(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right], n\in\mathbb{N}.$$

$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(T_nf,x),\forall n\in\mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1}\cdots T_nf(x)=(n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right),\forall j\in\mathbb{N}.$$

事实上, 当 $j=1$, 由(2)可知命题显然成立, 假设命题对 $j\in\mathbb{N}$ 成立, 则

$$
\begin{aligned}
&T_{n-j}\cdots T_nf(x)\\
=&T_{n-j}\left((n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kT_{n-j}\left(f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)\\
&=\frac{n!(n-j)}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right]\\
&=\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)\\
&\quad-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&\quad-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&=\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{j+1}{n}\right)-\frac{n!}{(n-j-1)!}(-1)^jf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)\\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1+j}(C_j^{k-1}+C_j^k)f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&=\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^{k+1+j}C_{j+1}^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}
$$

因此我们证明了对 $j+1$, 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有 $j\in\mathbb{N}$, 命题都成立.

Step3 $(*)$ 我们证明一个中值定理的结果. 由 Hermite 插值定理, 对 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in[0,1]$, 我们有

$$
f(x)=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(x-\frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n})}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(x-\frac{s+i}{n}\right).
$$

特别的存在 $\theta\in[\frac{i}{n},\frac{i+j}{n}]$, 使得

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{i}{n}\right)&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n})}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{s}{s-k}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}C_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j},
\end{aligned}
$$

从而

$$
\sum_{k=0}^{j}(-1)^kC_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)=\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}.
$$

Step4 (*) 注意到

$$B_n^{(j)}(f,x)=B_{n-j}(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf,x),1\leqslant j\leqslant k,n>k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned}
&|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)|\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+|B_{n-j}(f^{(j)},x)-B_{n-j}(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf,x)|\\
&\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf\left(\frac{i}{n-j}\right)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&=|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&=|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!f^{(j)}(\theta)}{(n-j)!n^j}|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-f^{(j)}(\theta)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-j}\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|\cdot|f^{(j)}(\theta)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}.
\end{aligned}$$

Step5 (*) **Step1** 告诉我们关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_n\left(f^{(j)},x\right)=f^{(j)}(x),j=0,1,2,\cdots,k.$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right)=0,$$

以及

$$\left|\frac{i}{n}-\frac{i}{n-j}\right|=\frac{ji}{n(n-j)}\leqslant\frac{j}{n},\left|\frac{i+j}{n}-\frac{i}{n-j}\right|\leqslant\frac{2j}{n},\forall n>j.$$

我们同时假设

$$M_j\triangleq\sup_{x\in[0,1]}|f^{(j)}(x)|,j=0,1,2,\cdots,k.$$

并注意到 $f^{(j)}$ 是一致连续的. 现在对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x\in[0,1],$$
$$\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|<\frac{\varepsilon}{3M_j},\forall n>N,$$
$$\left|f^{(j)}(x)-f^{(j)}(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall|x-y|<\delta,x,y\in[0,1].$$

因此当正整数 $n>\max\left\{\frac{2j}{\delta},j,N\right\}$, 利用 **Step4**, 我们有

$$\left|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)\right|<\varepsilon,\forall x\in[a,b],$$

这就完成了证明.

□

例题 0.1 设 $f\in C[0,1]$ 使得

$$\int_0^1f(x)x^ndx=0,\forall n=0,1,2,\cdots.$$

证明

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

注 $p_n(x)$ 的良定义性可由Bernstein 多项式的性质 (4)得到. 实际上, 我们这里取的 $p_n(x)$ 就是 g 的 Bernstein 多项式

$B_n(g,x)$.

证明 由条件可知, 对任意实系数多项式 $p(x)$, 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)\mathrm{d}x = 0, \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

对 $\forall g \in C[0,1]$, 取 $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $p_n(x) \rightrightarrows g(x)$, 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x)p_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \forall g \in C[a,b].$$

再取 $g = f$, 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

□

定理 0.2

设 $f(x) \in C^k[a,b]$, 这里 $a < b, a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\left|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)\right| \leqslant \varepsilon, \forall x \in [a,b], s = 0,1,2,\cdots,k.$$

注 $q(x)$ 的良定义性可由 $f^{(k)}$ 的连续性和 Bernstein 多项式的性质 (4) 直接得到. 实际上, $q(x) = B(f^{(k)}, x)$.

证明 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)\mathrm{d}t.$$

对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $q \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$|q(x) - f^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in [a,b]. \tag{4}$$

设

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}q(t)\mathrm{d}t,$$

则对 p 求导可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$p^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}q(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$f^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}f^{(k)}(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

于是利用(4)(5)(6)式可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| = \left|\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}[f^{(k)}(t) - q(t)]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!}, \forall x \in [a,b].$$

故结论得证. □

例题 0.2 设多项式列 $p_n, n = 1,2,\cdots$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f, 证明 f 为多项式.

证明 由条件可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$|p_m(x) - p_n(x)| \leqslant 1, \forall m > n \geqslant N, x \in \mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此 $p_m(x) - p_n(x) = C, \forall m > n \geqslant N, x \in \mathbb{R}$. 其中 C 是一个常数. 故

$$p_n(x) = p_N(x) + c_n, \forall n \geqslant N, x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

其中 $\{c_n\}$ 是一个常数列. 从而任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)=f(x)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}[p_n(x_0)-p_N(x_0)]=f(x_0)-p_N(x_0).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 存在. 于是由 x_0 的任意性可得

$$c=\lim_{n\to\infty}c_n=f(x)-p_N(x),x\in\mathbb{R}.$$

即 $f(x)=p_N(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}$. 因此结论得证. 或者对(7)式两边同时令 $n\to\infty$, 也能得到

$$f(x)=p_N(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}.$$

□

0.1.2 可积函数的逼近

定理 0.3 (可积被连续函数逼近)

(1) 设 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon. \tag{8}$$

(2) 设 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_c(a,b)$, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

这里 $g\in C_c(a,b)$ 表示 g 是有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.

(3) 设 $p\geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx<\infty$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g(x)|^p dx<\varepsilon.$$

这里 $g\in C_c(a,b)$ 表示 g 是有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.

♡

笔记 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

证明

(1) 对任何 $\varepsilon>0$, 因为 $f\in R[a,b]$, 所以存在一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\varepsilon, w_i(f) \text{ 表示} f \text{ 在}[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n \text{ 的振幅.}$$

连接线段 $(x_{i-1},f(x_{i-1})),(x_i,f(x_i)),i=1,2,\cdots,n$ 得到连续函数 g.(不难发现 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|g|\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$) 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b|f(x)-g(x)|dx&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|dx\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})|dx+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-f(x_{i-1})|dx\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})\right|dx\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n w_i(f)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}dx\\
&=\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(2) 对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 由第 1 问可知, 存在 $g \in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的 $\delta > 0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{16}.$$

再取 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

(a): $0 \leqslant h(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b): $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a+\delta) \cup (b-\delta, +\infty)$;

(c): $h(x) = 1, \forall x \in [a+2\delta, b-2\delta]$.

于是取 $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a,b)$, 由第 1 问可知 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f|$, 从而 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g_1| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f|$. 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-g_1(x)|dx &= \int_a^b |f(x)-g(x)h(x)|dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)-h(x)g(x)|dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x)-g(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_a^b |f(x)-g(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|dx \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)-h(x)g(x)|dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|dx \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + 2\int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|dx + 2\int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|dx \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(3) 证明的想法和第 2 问类似. 由条件可知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得

$$\int_{|x|\geqslant X} |f(x)|^p dx = \int_X^\infty |f(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

因为 f 在 $[-X,X]$ 黎曼可积, 所以由第 2 问, 存在 $g \in C_c(-X,X)$ 使得

$$\int_{-X}^X |f(x)-g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{1+\sup_{[-X,X]} |2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X,X]} |g| \leqslant \sup_{[-X,X]} |f|,$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty |f(x)-g(x)|^p dx &= \int_{|x|\geqslant X} |f(x)|^p dx + \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|^p dx \\
&\leqslant \varepsilon + \sup_{[-X,X]} |f-g|^{p-1} \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|dx \\
&\leqslant \varepsilon + \sup_{[-X,X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|dx \\
&< \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

□

引理 0.2

证明: 若 $A,B,C\in\mathbb{R}$, 则存在 $C_p>0$, 使得

$$|A+B+C|^p\leqslant C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

笔记 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

证明 令

$$S\triangleq\{(A,B,C)\mid |A|^p+|B|^p+|C|^p=1\},$$

则 S 是 $\mathbb{R}^3$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $|A+B+C|^p$ 可以看作紧集 S 上关于 (A,B,C) 的连续函数, 故一定存在 $C_p>0$, 使得

$$|A+B+C|^p\leqslant C_p,\forall(A,B,C)\in S. \tag{9}$$

对 $\forall(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$, 固定 A,B,C, 不妨设 A,B,C 不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$L=\frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p+|B|^p+|C|^p}},$$

考虑 (LA,LB,LC), 则此时

$$|LA|^p+|LB|^p+|LC|^p=1.$$

因此 $(LA,LB,LC)\in S$. 从而由(9)式可知

$$|LA+LB+LC|^p\leqslant C_p.$$

于是

$$|A+B+C|^p\leqslant\frac{C_p}{L^p}=C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

故结论得证. □

定理 0.4 (积分的绝对连续性)

设 $p\geqslant1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx<\infty$, 证明

$$\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx=0. \tag{10}$$

笔记 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

证明 **Step1**: 当 $f\in C_c(\mathbb{R})$ 时, 则存在 $X>0$, 使得

$$f(x)=0,\forall|x|\geqslant X.$$

从而当 $h\in(-1,1)$ 时, 就有

$$f(x)=0,\forall|x|\geqslant X+1.$$

又因为 $f\in C[-X-1,X+1]$, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[-X-1,X+1]$ 上一致连续. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x&=\lim_{h\to0}\int_{|x|\leqslant X+1}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\\&=\int_{|x|\leqslant X+1}\lim_{h\to0}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

Step2: 对一般的 f, 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 由定理 0.3(3)可知, 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-g(x+h)+g(x+h)-g(x)+g(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$

利用齐次化方法得到引理 0.2, 从而可知若 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A+B+C|^p \leqslant C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant C_p\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-g(x+h)|^p\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+h)-g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)\\ &\xlongequal[y=x+h]{\text{换元}} 2C_p\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x+C_p\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+h)-g(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2\varepsilon C_p + C_p\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+h)-g(x)|^p\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{11}$$

由 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 结合 **Step1** 可知

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+h)-g(x)|^p\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

于是由(11)(12) 式可得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon C_p.$$

再由 ε 的任意性得证. □