0.1 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如 $\int_a^b [f(x)]^n g(x)\,dx, n \to \infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a,b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界; 或者 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)dy, x \to +\infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a,b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b [f(x)]^n g(x)\,dx = \int_a^b e^{n \ln f(x)} g(x)\,dx.$$

若参变量 n, x 在积分区间上, 或者估计的不是 $n, x \to +\infty$ 处的渐近展开式, 而是其他点处 $(x \to x_0)$ 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)dy, x \to +\infty$, 其中 $f, g \in C[a,b]$.

思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有 $e^{f(x)}$, 则积分得到的结果中一定仍含有 $e^{f(x)}$), 我们可以大致估计积分 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)dy, x \to +\infty$ 的结果是 $C_1 h_1(x) e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x) e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$, 其中 C 为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$. 而我们注意到到改变指数函数 e^{px+q} 的幂指数部分的常数 p 会对这个指数函数的阶 $(x \to +\infty)$ 产生较大影响, 而改变 q 不会影响这个指数函数的阶. 比如,e^{2x} 比 e^x 高阶 $(x \to +\infty)$. 由此我们可以发现 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$ 中的幂指数部分中 $f(x,a), f(x,b)$ 中除常数项外的含 x 项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的 $f(x,y)$ 和积分区间决定的, 但是在实际问题中 $f(x,y)$ 的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间 $[a,b]$ 上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量 x 固定时, 并且当积分区间为某一点 y_0 附近时, 只要被积函数的 $e^{f(x,y)}$ 在 y_0 处 (关于 y) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与 x 轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在 y_0 附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量 x 固定时,$f(x,y)$(关于 y) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0(余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 *Taylor* 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 *Taylor* 定理将主体部分的被积函数的指数部分 $f(x,y)$ 在最大值点附近 (关于 y) 展开 (注意: 此时最多展开到 x^2 项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到 $\infty + \infty$ 或 $0 \cdot \infty$ 等这一类无效的结果). *Taylor* 展开之后, 我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处不为 0, 则 $g(x)$ 只会影响渐进展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理 $g(x)$ 的方法:(i) 在余项部分, 直接将 $g(x)$ 放缩成其在相应区间上的上界或下界即可.(ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在 $f(x,y)$(关于 y) 的某些最大值点 y_i 的邻域内, 所以结合 $g(x)$ 的连续性, 直接将 $g(x)$ 用 $g(y_i)$ 代替即可 (将 $g(x)$ 放缩成 $g(y_i) \pm \varepsilon$ 即可). 即相应的主体部分 (y_i 点附近) 乘以 $g(x)$ 相应的函数值 $g(y_i)$. 具体例题见例题 0.9. 也可以采取拟合法处理 $g(x)$, 具体例题见例题 0.10.

若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处为 0, 则在估计积分的阶的时候就要将 $g(x)$ 考虑进去. 需要结合 $g(x)$ 的具体结构、性质进行分析.

严谨的证明过程最好用上下极限和 $\varepsilon - \delta$ 语言书写. 具体严谨的证明书写见例题:例题 0.4,例题 0.5,例题 0.6,例题 0.9.

笔记 *Laplace* 方法的思路蕴含了一些常用的想法: **分段估计、Taylor 定理估阶**. 而严谨的证明书写也使用一些常用方法: **上下极限、$\varepsilon - \delta$ 语言、拟合法**.

注 上述 *Laplace* 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和

技巧 (比如 *Puiseux* 级数展开 (见清疏讲义) 等).

例题 0.1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m > 0, m \in \mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1\le j\le m} a_j.$$

注 熟知, 极限蕴含在 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的最大值中.

证明 显然

$$\max_{1\le j\le m} a_j = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{1\le j\le m} a_j^n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \max_{1\le j\le m} a_j \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \max_{1\le j\le m} a_j, \tag{1}$$

从而我们证明了(1). □

例题 0.2 设非负函数 $f \in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

注 熟知, 极限蕴含在 f 的最大值中.

笔记 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

证明 事实上记 $f(x_0) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x), x_0 \in [a,b]$, 不失一般性我们假设 $x_0 \in (a,b)$. 那么对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 我们由积分中值定理知道存在 $\theta_n \in (x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n})$, 使得

$$f(\theta_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} f^n(x)dx} \le \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} \le \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0)dx} = f(x_0)\sqrt[n]{b-a}. \tag{2}$$

两边取极限即得(2). □

例题 0.3 设非负严格递增函数 $f \in C[a,b]$, 由积分中值定理我们知道存在 $x_n \in [a,b]$, 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 由(上一题) 例题 0.2, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b-a}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} = f(b).$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, 我们知道对任何 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) = f(b)$. 又由于 f 为严格递增函数, 因此只能有 $c = b$, 利用命题**??**的 (a)(Heine 归结原理), 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. 证毕! □

定理 0.1 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

注 我们只需要记住 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to +\infty$ 及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

笔记 (3)式等价于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \sqrt{\pi n}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}. \tag{4}$$

证明的想法是把(4)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

证明 我们只证明 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to +\infty$, 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{5}$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln\sin^2 x = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{6}$$

即 $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})}\dfrac{\ln\sin^2 x}{-(x-\frac{\pi}{2})^2} = -1$. 于是利用(6), 对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 我们知道存在 $\delta\in(0,1)$, 使得对任何 $x\in[\dfrac{\pi}{2}-\delta,\dfrac{\pi}{2}]$, 都有

$$-(1+\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqslant \ln\sin^2 x \leqslant -(1-\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2. \tag{7}$$

利用(7)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n\ln\sin^2 x}dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n\ln\sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)}dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2}dx\\
&= (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\varepsilon)y^2}dy\\
&= (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}}\int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}} e^{-z^2}dz\\
&\leqslant (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz.
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2}dx = \int_0^{\delta} e^{-n(1+\varepsilon)y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-z^2}dz.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

由 ε 任意性即可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx = \int_0^{\infty}e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(5)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1.$$

故 $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to+\infty$. □

例题 0.4 求 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}dx, n\to\infty$ 的等价无穷小.

解 由 *Taylor* 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2 \leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}dx &= \frac{1}{2^n}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx = \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx + \int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta} e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}dx + \int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta} e^{-n\left(\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\right)}dx + \int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}dx\right)
\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{令} y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} e^{-y^2}dy+\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right).$$

于是

$$\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

另外一方面，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}dx&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}dx\\&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}dx\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2\right)}dx\\&\xlongequal{\text{令} y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\frac{1}{2^n\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\geqslant\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}dy.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2}^{n})dx\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}dy=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

因此，再结合 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx$, 我们就有

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 即 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}+o\left(\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\right), n\to\infty$. □

例题 0.5 求 $\int_0^x e^{-y^2}dy, x\to+\infty$ 的渐近估计 (仅两项).

笔记 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以实际上只需要估计

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy-\int_0^x e^{-y^2}dy=\int_x^{\infty}e^{-y^2}dy, x\to+\infty.$$

解 由 $Taylor$ 定理可知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时，有

$$2x-\varepsilon x\leqslant x^2+2x\leqslant 2x+\varepsilon x.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy &\xlongequal{令y=xu} x\int_1^{\infty} e^{-(xu)^2}du \xlongequal{令t=u-1} x\int_0^{\infty} e^{-(xt+x)^2}dt \\
&= x\int_0^{\infty} e^{-(xt)^2-2x^2t-x^2}dt = xe^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)}dt \\
&= xe^{-x^2}\left(\int_0^{\delta} e^{-x^2(t^2+2t)}dt + \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)}dt\right) \\
&\leqslant xe^{-x^2}\left(\int_0^{\delta} e^{-x^2(2t+\varepsilon t)}dt + \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2(t+2)}e^{-x^2\delta}dt\right) \\
&= xe^{-x^2}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{(2+\varepsilon)x^2} + \frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2}\right) \\
&= \frac{e^{-x^2}}{x}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}\right).
\end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令 $x \to +\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}\right) = \frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \frac{1}{2}$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy &\xlongequal{令y=xu} x\int_1^{\infty} e^{-(xu)^2}du \xlongequal{令t=u-1} x\int_0^{\infty} e^{-(xt+x)^2}dt \\
&= x\int_0^{\infty} e^{-(xt)^2-2x^2t-x^2}dt = xe^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)}dt \\
&\geqslant xe^{-x^2}\int_0^{\delta} e^{-x^2(t^2+2t)}dt \geqslant xe^{-x^2}\int_0^{\delta} e^{-x^2(2t-\varepsilon t)}dt \\
&= xe^{-x^2}\cdot\frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.
\end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \geqslant \frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令 $x \to +\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \geqslant \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2} = \frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \geqslant \frac{1}{2}$.

因此, 再结合 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \varlimsup\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy$, 我们就有

$$\frac{1}{2} \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy \leqslant \frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{2}$, 即 $\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \to +\infty$.

因此 $\int_0^{x} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \to +\infty.$ □

例题 0.6 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx$.

解 由 $Taylor$ 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$-t-\varepsilon t\leqslant\ln(1-\sin t)\leqslant -t+\varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \xlongequal{令x=nt} n\int_0^{10}(1-|\sin t|)^n dt=n\int_0^{10}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt\\
&=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt\\
&\quad+n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt\\
&=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}dt\\
&\quad+n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt+n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt.
\end{aligned}\tag{8}$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned}
n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}dt&\xlongequal{令u=\pi-t}-n\int_{\delta}^{0}e^{n\ln(1-\sin(\pi-u))}du=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}dt&\xlongequal{令u=t-\pi}n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}du=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}dt&\xlongequal{令u=t-\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}du=\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt&\xlongequal{令u=t-2\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin(2\pi+u))}du=\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du.
\end{aligned}$$

从而

$$n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt=n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt=2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt.$$

同理,$n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt=n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}dt=2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt$. 于是原积分(8)式可化为

$$\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt.$$

进而, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx&=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt\\
&\leqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t+\varepsilon t)}dt+3n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin\delta)}dt\\
&=7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1}+3ne^{n\ln(1-\sin\delta)}(\pi-2\delta).
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left[7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1}+3ne^{n\ln(1-\sin\delta)}(\pi-2\delta)\right]=\frac{7}{1-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\leqslant 7.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx&=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt\\
&\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}dt\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t-\varepsilon t)}dt=7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\geqslant\varliminf_{n\to\infty}7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}=\frac{7}{\varepsilon+1}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\geqslant\frac{7}{\varepsilon+1}.$

因此, 再结合 $\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx$, 我们就有

$$7\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx\leqslant 7.$$

故 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n dx=7.$ □

例题 0.7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}$.

证明 首先注意到

$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n+1}\Big|_1^0=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).\tag{9}$$

接着, 由 Taylor 定理可知

$$\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)=-\frac{3}{4}x+o\left(x\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\leqslant\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)\leqslant-\frac{3}{4}x+\varepsilon x,\forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^\delta e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right)=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^\delta e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^\delta e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&=\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\left(1-\delta\right).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\left(1-\delta\right)\leqslant n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right).$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 得

$$-\frac{1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

故 $\int_0^1 \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \left(1-\frac{x}{4}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. 于是再结合(9)式可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \left(1-\frac{x}{4}\right)^n \mathrm{d}x}{\int_0^1 \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.8 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_0^1 \ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x}$ 存在并求其值.

笔记 原式可写成 $\frac{\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n \mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x}$, 求导可知 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增, 故原式分子和分母的阶都集中在 $x=0$ 处. 因为分母积分的被积函数除指数部分外,x 在 0 处取值也为 0, 所以我们在估阶的时候需要将 x 也考虑进去. 利用 Laplace 方法估计分子、分母的阶, 但是此时 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 在极值点 $x=0$ 处间断, 故我们需要先对 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 补充定义, 使相关函数光滑, 才能进行 Taylor 展开.

证明 由 Taylor 公式可知

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x} = \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right) = -\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x} = \ln\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right) = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2 \leqslant \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \leqslant -\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2, \forall x\in[-\delta,\delta],$$

$$-\frac{x}{2}-\varepsilon x \leqslant \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \leqslant -\frac{x}{2}+\varepsilon x, \forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^1 x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^\delta x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^\delta x e^{n\left(-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x e^{n\left(-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty x e^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x + e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}(1-\delta) = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}(1-\delta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n \mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^\delta e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^\delta e^{n\left(-\frac{x}{2}+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{x}{2}+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x + e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).
\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^1 x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^\delta x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x e^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_0^\delta x e^{n\left(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 x e^{n\left(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty x e^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x + e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta) = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta).
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^\delta e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&\geqslant \int_0^{\delta} e^{n\left(-\frac{x}{2}-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1} e^{n\left(-\frac{x}{2}-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1} e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant \frac{1}{n}\int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta)=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta).\end{aligned}$$

因此, 我们就有

$$-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}+ne^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}+ne^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta),$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).$$

令 $n\to\infty$, 得

$$-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon}\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x=2.$$

故

$$\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad \int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 \ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3}.$$

□

例题 0.9 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\,dx}$.

笔记 我们首先可以求解出被积函数带 n 次幂部分的最大值点即 $1-x^2+x^3$ 的最大值点为 $x=0,1$. 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

注 注意由 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1$. 得到的是 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1$. 而不是.

证明 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3)=-x^2+o(x^2),x\to 0;$$

$$\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1.$$

从而对 $\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, 存在 $\delta_1\in(0,\frac{1}{10})$, 使得

$$-x^2-\varepsilon x^2\leqslant\ln(1-x^2+x^3)\leqslant -x^2+\varepsilon x^2,\forall x\in(0,\delta_1);$$

$$x-1-\varepsilon(x-1)\leqslant\ln(1-x^2+x^3)\leqslant x-1+\varepsilon(x-1),\forall x\in(1-\delta_1,1).$$

设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0),f(1)\neq 0$, 则由连续函数最大值、最小值定理可知,f 在闭区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上都存在最大值和最小值. 设 $M_1=\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f(x)$,$M_2=\sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} f(x)$. 又由连续性可知, 对上述 ε, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon,\forall x\in[0,\delta_2];$$

$$f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon,\forall x\in[1-\delta_2,1].$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则一方面我们有

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\int_0^{\delta}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\delta} e^{n\ln(1-x^2+x^3)} f(x)dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx \\
&\leqslant (f(0)+\varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)} dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} M_1 \left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n dx \\
&= \frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + M_1 \left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2}-\delta\right),
\end{aligned}
$$

又易知 $1-x^2+x^3$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{3},1]$ 上单调递增. 再结合 $\delta<\frac{1}{10}$ 可知,$1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3<1-(\frac{1}{10})^2+(\frac{1}{10})^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3$. 从而当 $x\in(\frac{1}{2},1-\delta)$ 时, 我们就有 $1-x^2+x^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3<1$. 进而可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx + \int_{1-\delta}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx + \int_{1-\delta}^{1} e^{n\ln(1-x^2+x^3)} f(x)dx \\
&\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} M_2 \left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n dx + (f(1)+\varepsilon)\int_{1-\delta}^{1} e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]}dx \\
&= M_2 \left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n \left(\frac{1}{2}-\delta\right) + \frac{f(1)+\varepsilon}{n(1+\varepsilon)} \left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).
\end{aligned}
$$

于是就有

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\leqslant \frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \sqrt{n} M_1 \left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2}-\delta\right), \\
n \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\leqslant n M_2 \left(\frac{3}{4}+(1-\delta)^3\right)^n \left(\frac{1}{2}-\delta\right) + \frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).
\end{aligned}
$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\leqslant \frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}} (f(0)+\varepsilon), \\
\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\leqslant \frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0), \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx \leqslant f(1)$.

另外一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\geqslant \int_0^{\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx = \int_0^{\delta} e^{n\ln(1-x^2+x^3)} f(x)dx \\
&\geqslant (f(0)-\varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2-\varepsilon x^2)} dx = \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\
\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\geqslant \int_{1-\delta}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx = \int_{1-\delta}^{1} e^{n\ln(1-x^2+x^3)} f(x)dx \\
&\geqslant (f(1)-\varepsilon) \int_{1-\delta}^{1} e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]} dx = \frac{f(1)-\varepsilon}{n(1+\varepsilon)} \left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).
\end{aligned}
$$

于是就有

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\geqslant \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\
n \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2+x^3)^n f(x)dx &\geqslant \frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).
\end{aligned}
$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx \geqslant \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}(f(0)-\varepsilon),$$

$$\varliminf_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx \geqslant \frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0), \varliminf\limits_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx \geqslant f(1)$.

因此, 我们就有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),$$

$$f(1)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx\leqslant f(1).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0), \lim\limits_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=f(1)$. 从而

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n\to\infty;$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$$

故 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)dx=\frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$.

从而当 $f\equiv 1$ 时, 上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$; 当 $f(x)=\ln(x+2)$ 时, 上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)dx=\frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}}+\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)dx}{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}}+\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\ln 2.$$

□

例题 0.10 设 $f\in R[0,1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n dx=f(1).$$

笔记 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 如果要求解/证明的是极限值, 而不是估计函数或数列的阶, 那么也可以用拟合法进行书写.

证明 由于 $f\in R[0,1]$, 因此存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[0,1]$. 于是对 $\forall n\in\mathbb{N}_+, \forall\delta\in(0,1)$, 有

$$\left|n\int_0^1 f(x)x^n dx-n\int_0^1 f(1)x^n dx\right|=\left|n\int_0^1[f(x)-f(1)]x^n dx\right|$$
$$\leqslant n\int_0^1|[f(x)-f(1)]x^n|dx=n\int_0^{\delta}|f(x)-f(1)|x^n dx+n\int_{\delta}^1|f(x)-f(1)|x^n dx$$
$$\leqslant n\int_0^{\delta}|M+f(1)|\delta^n dx+n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_{\delta}^1 x^n dx$$
$$\leqslant n|M+f(1)|\delta^{n+1}+n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_0^1 x^n dx$$
$$=n|M+f(1)|\delta^{n+1}+\frac{n}{n+1}\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|.$$

上式两边同时令 $n \to \infty$, 并取上极限可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n\int_0^1 f(x)x^n dx - n\int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leqslant \sup_{x\in[\delta,1]} |f(x)-f(1)|, \quad \forall \delta \in (0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \to 1^-$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n\int_0^1 f(x)x^n dx - n\int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leqslant \lim_{\delta\to 1^-} \sup_{x\in[\delta,1]} |f(x)-f(1)| = \overline{\lim_{\delta\to 1^-}} |f(x)-f(1)|.$$

又因为 f 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\overline{\lim\limits_{\delta\to 1^-}} |f(x)-f(1)| = 0$. 故

$$0 \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \left| n\int_0^1 f(x)x^n dx - n\int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n\int_0^1 f(x)x^n dx - n\int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leqslant 0.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n dx = \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(1)x^n dx = f(1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = f(1)$. □

例题 0.11 Possion 核 设 $f \in R[0,1]$ 且 f 在 $x=0$ 连续, 证明

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证明 因为 $f \in R[0,1]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [0,1]$. 于是对 $\forall \delta \in (0,1)$, 固定 δ, 再对 $\forall t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} |f(x)-f(0)|dx \\
&= \int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|dx + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|dx \\
&\leqslant \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)-f(0)| \int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}dx + \int_0^1 \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|dx \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)-f(0)| \arctan\frac{x}{t}\Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)| \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)-f(0)| \cdot \arctan\frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $t \to 0^+$ 并取上极限, 可得

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)-f(0)|, \forall \delta \in (0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \to 0^+$ 可得

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{x\in[0,\delta]} |f(x)-f(0)| = \frac{\pi}{2} \overline{\lim_{x\to 0^+}} |f(x)-f(0)|.$$

又由于 f 在 $x=0$ 处连续, 从而 $\overline{\lim\limits_{x\to 0^+}} |f(x)-f(0)| = 0$. 故

$$0 \leqslant \underline{\lim_{t\to 0^+}} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx \right| \leqslant \overline{\lim_{t\to 0^+}} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx \right| \leqslant 0.$$

因此 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0)dx = f(0)\lim\limits_{t\to 0^+}\arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} f(0)$. □

例题 0.12 Fejer 核 设 f 在 $x=0$ 连续且在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 可积, 则

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)} f(x)\,dx = f(0).$$

证明 因为 $f \in R\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 又因为 $\sin x \sim x, x \to 0$, 所以对

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|x| \leqslant \delta_0$ 时, 有 $\sin x \geqslant (1-\varepsilon)x$. 于是对 $\forall \delta \in \min\left\{\frac{1}{2}, \delta_0\right\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|dx \\
&= \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|dx + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|dx \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)| \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}dx + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}|M+f(0)|dx \\
&\leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon} \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{(\pi x)^2}dx + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}dx \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon} \int_{|y|\leqslant N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}dx \\
&= \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}dx.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $N \to +\infty$ 并取上极限, 得到

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| \leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy.$$

又由 *Dirichlet* 判别法, 可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy$ 收敛. 从而根据 δ 的任意性, 上式两边同时令 $\delta \to 0^+$, 再结合 f 在 $x=0$ 处连续, 可得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| \\
&\leqslant \lim_{\delta\to0^+}\frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy}{1-\varepsilon}\lim_{x\to0^+}|f(x)-f(0)| = 0.
\end{aligned}$$

从而

$$0 \leqslant \underline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| \leqslant \overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| \leqslant 0.$$

故 $\lim\limits_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]dx\right| = 0$. 即 $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(x)dx = \lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx$.
而一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx \geqslant \lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{(\pi x)^2}f(0)dx \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)dy = f(0).
\end{aligned}$$

另一方面, 对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx + \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx \\
&\leqslant f(0)\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{\sin^2(\pi x)}dx + \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}f(0)dx \leqslant \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi N x)}{(\pi x)^2}dx \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|y|\leqslant N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy = \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}dy = \frac{f(0)}{1-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

再根据 ε 的任意性, 可知

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx\leqslant f(0).$$

因此, 由夹逼准则, 可知 $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)dx=f(0).$ □

例题 0.13 设 $\varphi_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2},n=1,2,\cdots,f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\varphi_n(x-y)dy=f(x).$$

证明 由条件可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}$. 于是对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x, 再对 $\forall\delta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\\
&\leqslant\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}2M\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2\delta^2}dy\\
&\xlongequal{令 z=n(x-y)}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\\
&=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|.
\end{aligned}$$

令 $\delta\to0^+$, 再结合 f 在 $\forall x\in\mathbb{R}$ 上连续, 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\right|\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|=\lim_{y\to x}|f(y)-f(x)|=0.$$

故

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\\
&=f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}dy\xlongequal{令 z=n(x-y)}f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\\
&=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz=f(x).
\end{aligned}$$

□

例题 0.14 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f'(0)$ 存在, 证明: 对任意正整数 m, 在 $n\to\infty$ 时有

$$\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{\ln^k x}{k!}dx+O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

注 这里积分换元之后, 再 Taylor 展开, 但是后续的积分与求和的换序以及余项的估计并不好处理.

笔记 估计抽象函数的渐近展开一般考虑拟合和分段. 如果考虑积分与求和换序的话并不好处理, 一般只有估计具体函数的渐近才会考虑换序.

这里分段的想法也是将原积分分成主体部分和余项部分. 容易观察 (直观地分析一下即可) 到这里积分的阶的主体部分集中在 0 附近.

证明 记 $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 则由条件可知,$g\in C[0,1]$, 从而

$$|g(x)|\leqslant C,\forall x\in[0,1]. \tag{10}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x-f(0)&=\int_0^1\left[f(x^n)-f(0)\right]\mathrm{d}x\xlongequal{令 y=x^n}\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}\left[f(x)-f(0)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此原问题等价于证明对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \to \infty$ 时, 都有

$$\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x)\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

由 Taylor 公式可知,$\forall x \in [\delta, 1]$, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$e^{\frac{\ln x}{n}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} + O\left(\frac{1}{n^m}\right), n \to \infty.$$

即存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in [\delta, 1]$, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N > 0$, 使得 $\forall n > N$, 都有

$$\left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} \right| \leqslant \frac{M}{n^m}. \tag{11}$$

取 $\delta = \dfrac{1}{n^{2m}} \in (0, 1)$, 则对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 结合 (10)(11) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!n^k} g(x)\,\mathrm{d}x \right| \qquad (12)\\
&= \left| \frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} g(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \frac{1}{n}\int_0^1 \left(e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} \right) g(x)\,\mathrm{d}x \right|\\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\delta \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} \right| g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} \right| g(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_0^\delta \left(x^{\frac{1}{n}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\ln x|^k}{k!n^k} \right) \mathrm{d}x + \frac{C}{n}\int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k!n^k} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{n}\int_0^\delta \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |\ln x|^k \right) \mathrm{d}x + \frac{C}{n}\int_0^1 \frac{M}{n^m}\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{C}{n}\int_0^\delta \left(1 + m\,|\ln x|^{m-1}\right) \mathrm{d}x + \frac{MC}{n^{m+1}} = \frac{C}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \left(1 - m\ln^{m-1} x\right) \mathrm{d}x + \frac{MC}{n^{m+1}}\\
&= \frac{C}{n^{2m+1}} - \frac{mC}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x\mathrm{d}x + \frac{MC}{n^{m+1}} \leqslant \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n}\left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x\mathrm{d}x \right|. \qquad (13)
\end{aligned}$$

注意到

$$\int \ln^n x\mathrm{d}x = x\left(a_0 + a_1\ln x + \cdots + a_n \ln^n x\right) + c = x\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \ln k\right) + c,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, c$ 都是常数. 又因为对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^n x}{x} = 0$, 所以一定存在 $N' > 0$, 使得当 $n > N'$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x\mathrm{d}x \right| &= \left| x\left(b_0 + b_1\ln x + \cdots + b_{m-1}\ln^{m-1} x\right) \Big|_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \right| = \left| \frac{1}{n^{2m}} \left(b_0 + b_1 \ln\frac{1}{n^{2m}} + \cdots + b_{m-1}\ln^{m-1}\frac{1}{n^{2m}} \right) \right|\\
&\leqslant \frac{mB}{n^{2m}} \left| \ln^{m-1} \frac{1}{n^{2m}} \right| = \frac{2m^2 B \ln^{m-1} n}{n^{2m}} \leqslant \frac{2m^2 B}{n^{2m-1}} \leqslant \frac{2m^2 B}{n^m}, \qquad (14)
\end{aligned}$$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$ 都是常数,$B = \max\{b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}\}$. 因此由 (13)(14) 式可得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \max\{N, N'\}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n}\left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x\mathrm{d}x \right|\\
&\leqslant \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \cdot \frac{2m^2 B}{n^m} = \frac{MC + C - 2m^3 BC}{n^{m+1}}.
\end{aligned}$$

即 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x)\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), n \to \infty$. 结论得证. □