

0.1 环

定义 0.1 (环)

我们称 $(R, +, \cdot)$ 是一个**环**, 当 $(R, +)$ 是个阿贝尔群, (R, \cdot) 是个么半群, 且乘法对加法有左右分配律, 即

$$\forall a, b, c \in R, a(b + c) = ab + ac,$$

$$\forall a, b, c \in R, (a + b)c = ac + bc.$$

定义 0.2 (交换环)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个环, 我们称 R 是一个**交换环**, 当 R 对乘法有交换律, 即

$$\forall a, b \in R, ab = ba.$$

例题 0.1

证明

□

命题 0.1

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个环, 而 $a, b, c \in R$, 则

$$(1) \ a0 = 0a = 0,$$

$$(2) \ a(-b) = (-a)b = -(ab),$$

$$(3) \ (-a)(-b) = ab.$$

证明

(1) 首先, 利用分配律,

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

因此 $a0 = 0$. 根据对称性, $0a = a$.

(2) 根据对称性, 我们只须证明 $a(-b) = -(ab)$. 而这是因为

$$a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0.$$

(3) 利用两次 (2), 我们就得到

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

□