0.1 线性方程组的解及其应用

0.1.1 线性方程组的解的讨论

命题 0.1

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 记 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 求证: 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

证明 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$, 由已知, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组也是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的极大无关组. 因此,$\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合. □

例题 0.2 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 是 m 个方程式 n 个未知数的线性方程组, 求证: 它有解的充要条件是方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{\alpha}$ 均适合等式 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=0$.

证明 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解当且仅当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 当且仅当 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')$, 当且仅当方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 同解, 而这当且仅当 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{\alpha}$ 均适合等式 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=0$. □

例题 0.3 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0,\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1.\end{cases}\tag{2}$$

求证: 方程组(1)有解的充要条件是方程组(2)无解.

证明 设第一个线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 常数向量为 $\boldsymbol{\beta}$, 则第二个线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix},\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{\beta}' & 1\end{pmatrix}.$$

显然, 由矩阵初等变换可知, 我们有 $\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{B}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')+1=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$.

若方程组(1)有解, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{B}})$. 因此, 方程组(2)无解.

反之, 若方程组(1)无解, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{B}})$. 因此, 方程组(2)有解. □

命题 0.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵, 求证: 必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

证明 考虑线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, 它有 $n-r$ 个基础解系, 不妨设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})$, 则 $\boldsymbol{AB}=$

$(A\beta_1,\cdots,A\beta_{n-r})=O$, 结论得证. □

例题 0.4 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}(m<n),$$

已知 $Ax=0$ 的基础解系为 $\beta_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})'(1\le i\le n-m)$, 试求齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j=0(i=1,2,\cdots,n-m)$$

的基础解系.

解 令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m})$, 则 $AB=O, B'A'=O$. 因为 $Ax=0$ 有 $n-m$ 个基础解系, 所以 A 的秩为 m. 又由于 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B)=n-m$, 因此 $B'y=0$ 的基础解系有 m 个. 故 $B'y=0$ 的基础解系为 A' 的全部列向量, 即 A 的所有行向量.

命题 0.3

设 V_0 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维列向量空间的真子空间, 求证: 必存在矩阵 A, 使得 V_0 是 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间.

证明 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是子空间 V_0 的一组基. 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$, 这是一个 $n\times r$ 矩阵. 考虑齐次线性方程组 $B'x=0$, 因为 B 的秩等于 r, 故其基础解系含 $n-r$ 个向量, 记为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$. 令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})'$, 这是个 $(n-r)\times n$ 矩阵且秩为 $n-r$. 由 $B'A'=O$ 可得 $AB=O$, 因此齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系是 $\beta_1,\cdots,\beta_r$, 其解空间就是 V_0. □

注 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是子空间 V_0 的一组基. 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$, 这是一个 $n\times r$ 矩阵. 也可以由命题 0.2直接得到存在矩阵 A, 使得 $AB=O$, 因此齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系是 $\beta_1,\cdots,\beta_r$, 其解空间就是 V_0..

例题 0.5 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个基础解系. 求证: 必存在 $n-r$ 阶可逆矩阵 P, 使得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})P.$$

证明 设 U 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间, 则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 是 U 的两组基. 令 P 是这两组基之间的过渡矩阵, 则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})P.$$

□

定理 0.1

1. 设 A,B 为 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵,X 为 $n\times p$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}(A\ B)=\mathrm{r}(A)$.
2. 设 A,B 为 $m\times n$ 和 $p\times n$ 矩阵,X 为 $p\times m$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $XA=B$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\mathrm{r}(A)$.

证明

1. 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), B=(\beta_1,\cdots,\beta_p), X=(x_1,\cdots,x_p)$ 为对应的列分块. 设 $\mathrm{r}(A)=r$ 且 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 A 的列向量的极大无关组. 注意到矩阵方程 $AX=B$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $Ax_i=\beta_i(1\le i\le p)$ 都有解.

   因此, 若 $AX=B$ 有解, 则每个 β_i 都是 A 的列向量的线性组合, 从而是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 的线性组合, 于是

$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ 的列向量的极大无关组, 故 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B}) = r$.

反之, 若 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B}) = r$, 则由命题??(1) 可知,$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ 的列向量的极大无关组, 于是每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解.

2. 线性方程组 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 两边取转置可得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{B}'$, 从而

$$\text{线性方程组}\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\text{有解} \Leftrightarrow \text{线性方程组}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}'\text{有解}.$$

又由第一问可知

$$\text{线性方程组}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}'\text{有解} \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}'\end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}').$$

而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}'\end{pmatrix} = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}'\end{pmatrix}'\right) = \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 故

$$\text{线性方程组}\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\text{有解} \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

□

命题 0.4

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{\beta}_i(1\le i\le p)$ 都有解. 从而每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合.

证明 证明是显然的. □

命题 0.5

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵, 证明: 存在 $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

证明 必要性由秩的不等式 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 即得.

充分性由秩的不等式可知 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\,(\boldsymbol{AB}) \le \mathrm{r}\,(\boldsymbol{AB}\,|\,\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{I}_n)) \le \mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})$. 故 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\,(\boldsymbol{AB}\,|\,\boldsymbol{B})$. 于是由定理 0.1可知, 矩阵方程 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}$ 有解. 即存在 $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$. □

0.1.2 线性方程组的公共解

对两个非齐次线性方程组, 若只已知它们的通解, 而不知道方程组本身, 要求它们的公共解, 我们可以这样来做: 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}_2$ 是两个含 n 个未知数的非齐次线性方程组. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 有特解 $\boldsymbol{\gamma}$ 且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$. 方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}_2$ 有特解 $\boldsymbol{\delta}$ 且 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s}$.

方法一: 假设它们的公共解为 $\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 则 $\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因此可以表示为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s}$ 的线性组合. 于是矩阵 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s},\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\delta})$ 的秩等于 $n-s$. 由此可以求出 $t_1,\cdots,t_{n-r}$, 从而求出公共解.

方法二:假设它们的公共解为 $\boldsymbol{\zeta}$, 则

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{\delta}+(-u_1)\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+(-u_{n-s})\boldsymbol{\xi}_{n-s}.$$

要求公共解 $\boldsymbol{\zeta}$ 等价于求解下列关于未定元 $t_1,\cdots,t_{n-r};u_1,\cdots,u_{n-s}$ 的线性方程组:

$$t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+u_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+u_{n-s}\boldsymbol{\xi}_{n-s}=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma}.$$

例题 0.6 设有两个非齐次线性方程组 (I), (II), 它们的通解分别为

$$\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2;\boldsymbol{\delta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}=(5,-3,0,0)',\boldsymbol{\eta}_1=(-6,5,1,0)',\boldsymbol{\eta}_2=(-5,4,0,1)';\boldsymbol{\delta}=(-11,3,0,0)',\boldsymbol{\xi}_1=(8,-1,1,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(10,-2,0,1)'$. 求这两个方程组的公共解.

证明 解法一: 设公共解为

$$\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}5-6t_1-5t_2\\-3+5t_1+4t_2\\t_1\\t_2\end{pmatrix}.$$

注意矩阵 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\delta}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2)$ 的秩等于 2, 对此矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}8&10&16-6t_1-5t_2\\-1&-2&-6+5t_1+4t_2\\1&0&t_1\\0&1&t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\8&10&16-6t_1-5t_2\\-1&-2&-6+5t_1+4t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\0&0&16-14t_1-15t_2\\0&0&-6+6t_1+6t_2\end{pmatrix}$$

可得关于 t_1,t_2 的方程组

$$\begin{cases}14t_1+15t_2=16,\\6t_1+6t_2=6.\end{cases}$$

解得 $t_1=-1,t_2=2$, 所以公共解为 (只有一个向量)$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1,2)'$.

解法二: 求公共解等价于求解下列线性方程组:

$$t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2+u_1\boldsymbol{\xi}_1+u_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma}.$$

对其增广矩阵实施初等行变换, 可得

$$\begin{pmatrix}-6&-5&8&10&-16\\5&4&-1&-2&6\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

故 (t_1,t_2,u_1,u_2) 只有唯一解 $(-1,2,1,-2)$. 因此, 公共解为 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,2)'$. □

例题 0.7 设有非齐次线性方程组 (I):

$$\begin{cases}7x_1-6x_2+3x_3=b,\\8x_1-9x_2+ax_4=7.\end{cases}$$

又已知方程组 (II) 的通解为

$$(1,1,1,0)'+t_1(1,0,-1,0)'+t_2(2,3,0,1)'.$$

若这两个方程组有无穷多组公共解, 求出 a,b 的值并求出公共解.

证明 将 (II) 的通解写为 $(1+t_1+2t_2,1+3t_2,-t_1,t_2)'$, 代入方程组 (I) 化简得到

$$\begin{cases}4t_1-4t_2=b-1,\\8t_1+(a-11)t_2=8.\end{cases}$$

要使这两个方程组有无穷多组公共解,t_1,t_2 必须有无穷多组解, 于是上面方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都应该等于 1, 从而 $a=3,b=5$. 解出方程组得到 $t_1=t_2+1$, 因此方程组 (I), (II) 的公共解为

$$(1+t_1+2t_2,1+3t_2,-t_1,t_2)'=(2,1,-1,0)'+t_2(3,3,-1,1)',$$

其中 t_2 为任意数. □

0.1.3 在解析几何上的应用

命题 0.6

求平面上 n 个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 位于同一条直线上的充要条件.

证明 充要条件为第一个点和其余点代表的向量之差属于一个一维子空间, 即 (x_i-x_1,y_i-y_1) 都成比例. 写成矩阵形式为

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \end{pmatrix} \le 1,$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \le 2.$$

□

命题 0.7

求三维实空间中 4 点 $(x_i,y_i,z_i)(1\le i\le 4)$ 共面的充要条件.

证明 设 4 点的向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$, 则 4 点共面的充要条件是: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 的秩不超过 2. 不难将此写成矩阵形式:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{pmatrix} \le 2,$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \le 3.$$

□

例题 0.8 证明: 通过平面内不在一条直线上的 3 点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 的圆方程为

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 圆方程可设为

$$u_1(x^2+y^2)+u_2x+u_3y+u_4=0,$$

于是得到未知数 u_1,u_2,u_3,u_4 的方程组为

$$\begin{cases} (x_1^2+y_1^2)u_1+x_1u_2+y_1u_3+u_4=0, \\ (x_2^2+y_2^2)u_1+x_2u_2+y_2u_3+u_4=0, \\ (x_3^2+y_3^2)u_1+x_3u_2+y_3u_3+u_4=0. \end{cases}$$

上述方程组加上原方程组成一个含 4 个未知数、4 个方程式的齐次线性方程组, 它有非零解的充要条件是系数行

列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由命题 0.6可知 3 点不在一条直线上意味着

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故圆方程不退化. □

命题 0.8

求平面上不在一条直线上的 4 个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ 位于同一个圆上的充要条件.

证明 由例题 0.8可得充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

例题 0.9 已知平面上两条不同的二次曲线 $a_ix^2+b_ixy+c_iy^2+d_ix+e_iy+f_i=0(i=1,2)$ 交于 4 个不同的点 $(x_i,y_i)(1\le i\le 4)$. 求证: 过这 4 个点的二次曲线均可写为如下形状:

$$\lambda_1(a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\lambda_2(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0.$$

证明 显然上述曲线过这 4 个交点. 现设 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 是过这 4 个交点的二次曲线, 则有

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1y_1+cy_1^2+dx_1+ey_1+f=0, \\ ax_2^2+bx_2y_2+cy_2^2+dx_2+ey_2+f=0, \\ ax_3^2+bx_3y_3+cy_3^2+dx_3+ey_3+f=0, \\ ax_4^2+bx_4y_4+cy_4^2+dx_4+ey_4+f=0. \end{cases} \tag{3}$$

视 a,b,c,d,e,f 为未知数, 则线性方程组 (3) 有线性无关的解 $(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1)',(a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2)'$. 如果能证明方程组 (3) 的系数矩阵的秩等于 4, 则这两个解就构成了基础解系, 从而即得结论.

容易验证 4 个交点中的任意 3 个点都不共线, 而且经过坐标轴适当的旋转, 可以假设这 4 个交点的横坐标 x_1,x_2,x_3,x_4 互不相同. 用反证法证明结论, 设方程组 (3) 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4. 由任意 3 个交点不共线以及命题 0.6知,$(x_1,x_2,x_3,x_4)',(y_1,y_2,y_3,y_4)',(1,1,1,1)'$ 线性无关, 从而它们是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组, 于是 $(x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2)'$ 是它们的线性组合, 故可设 $x_i^2=rx_i+sy_i+t(1\le i\le 4)$, 其中 r,s,t 是实数. 由于 x_1,x_2,x_3,x_4 互不相同, 故 $s\neq 0$, 于是 $y_i=\frac{1}{s}x_i^2-\frac{r}{s}x_i-\frac{t}{s}(1\le i\le 4)$. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列、第四列和第六列构成的四阶行列式 $|\boldsymbol{B}|$, 利用 Vander - monde 行列式容易算出 $|\boldsymbol{B}|=-\frac{1}{s}\prod_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 4, 这与假设矛盾. 因此方程组 (3) 的系数矩阵的秩只能等于 4. □