0.1 矩阵空间上的经典线性映射

定理 0.1 (AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致)

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 则 AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致, 即 AB 和 BA 的非零特征值对应的 Jordan 块的形状和数量完全一样.

注 由推论??可得,AB 和 BA 有完全一样的非 0 特征值且重数也相同. 但这个定理的结论显然更强.

证明 考虑 $PAQQ^{-1}BP^{-1}, Q^{-1}BP^{-1}PAQ$ 可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}, B_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r},$$

这里 B 的分块和 A 对应. 于是直接计算有

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

从 (1) 可以看到 AB, BA 非 0 特征值都集中在 B_1 上, 所以非 0 特征值完全一致. 设 $\lambda \neq 0$ 是 AB, BA 特征值. 则回忆定理??, 决定 C 的 Jordan 块分布, 我们知道只需决定 $(\lambda E - C)^k, k \in \mathbb{N}_0$ 的秩即可. 于是对每个 $k \in \mathbb{N}_0$, 我们有

$$(\lambda E_m - AB)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, (\lambda E_n - BA)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

作初等变换

$$\begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\lambda E_n - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix},$$

于是我们证明了

$$r\left((\lambda E_m - AB)^k\right) + n = r\left((\lambda E_n - BA)^k\right) + m, \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

AB 和 BA 的主对角元为 $\lambda_j(\neq 0)$ 的 Jordan 块中 k 阶 Jordan 块的个数分别记为 $N_j(k)$ 和 $M_j(k)$, 于是由定理??可知

$$\begin{aligned} N_j(k) &= r\left((\lambda E_m - AB)^{k+1}\right) + r\left((\lambda E_m - AB)^{k-1}\right) - 2r\left((\lambda E_m - AB)^k\right) \\ &= r\left((\lambda E_n - BA)^{k+1}\right) + m - n + r\left((\lambda E_n - BA)^{k-1}\right) + m - n - 2r\left((\lambda E_n - BA)^k\right) - 2(m-n) \\ &= r\left((\lambda E_n - BA)^{k+1}\right) + r\left((\lambda E_n - BA)^{k-1}\right) - 2r\left((\lambda E_n - BA)^k\right), \end{aligned}$$

$$M_j(k) = r\left((\lambda E_n - BA)^{k+1}\right) + r\left((\lambda E_n - BA)^{k-1}\right) - 2r\left((\lambda E_n - BA)^k\right).$$

故 $N_j(k) = M_j(k)$. 这就证明了 AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致. □

推论 0.1 ($E + MN$ 和 $E + NM$ 秩相同)

设 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 $E + MN$ 和 $E + NM$ 有相同的秩.

证明 因为 $E + MN$ 和 $E + NM$ 的秩分别完全由 MN 和 NM 的特征值 -1 的 Jordan 块块数决定, 因此由定理 0.1 知结论成立. □

推论 0.2

设 A, B 都是 n 阶复矩阵, 则 $AB \sim BA$ 充要条件是

$$r\left((AB)^i\right) = r\left((BA)^i\right), i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

证明 必要性显然成立. 再证充分性. 由定理 0.1, 只需考虑 0 特征值对应的 Jordan 块的形状和个数. 因此再由定理??可知,AB 和 BA 的 0 特征值对应的 Jordan 块的形状和个数完全一致. 于是 $AB \sim BA$, 故结论成立. □

例题 0.1

1. 已知
$$AB=\begin{pmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{pmatrix},A\in\mathbb{C}^{3\times 2},B\in\mathbb{C}^{2\times 3},$$
求 BA.
2. 设 $A\in\mathbb{C}^{4\times 2},B\in\mathbb{C}^{2\times 4}$ 满足
$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix},$$
求 BA.

笔记 此类问题肯定就是通过定理 0.1来确定.

注 与纯量阵相似的矩阵只有纯量阵, 因为 $P^{-1}(kI)P=kI$.

证明

1. 计算得 $AB\sim\mathrm{diag}\{0,9,9\}$. 故 $BA\sim\mathrm{diag}\{9,9\}$. 因为与纯量阵相似的矩阵只有纯量阵, 且 $BA\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, 所以 $BA=9E_2$.
2. 计算得
$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$
又 $BA\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, 故 $BA\sim\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, 因此 $BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

□

例题 0.2 设 n 阶复矩阵 A,B 满足 $r(ABA)=r(B)$, 证明 $AB\sim BA$.

证明 类似定理 0.1的证明, 不妨设
$$A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},B_1\in\mathbb{C}^{r\times r}.$$
则
$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right).$$
于是
$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}B_1\\B_3\end{pmatrix}\right)\geqslant r(B_1),$$
以及
$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\right)\geqslant r(B_1).$$
故
$$r\left(\begin{pmatrix}B_1\\B_3\end{pmatrix}\right)=r(B_1)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\right).$$
由线性方程组有解的充要条件, 我们知道存在 X,Y 使得 $B_2=B_1X,B_3=YB_1$, 从而有
$$AB=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&B_1X\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相似初等变换}}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}B_1&0\\B_3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&0\\YB_1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相似初等变换}}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

我们证明了 $AB\sim BA$. □

定理 0.2 (Lie 映射经典性质)

给定 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义 $l_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}, X\to AX-XA$, 我们有

1. A 所有特征值相同等价 l_A 幂零.
2. l_A 可对角化等价于 A 可对角化.

笔记 一个处理本题的经典技巧是考虑 l_A 在基 $\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$ 下的表示矩阵形如 $A\otimes I-I\otimes A^T$, 但我们引入的考虑自然同构的技巧可以完美且简洁的替代这个方法.

笔记 考虑线性映射 $l:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n\times n}), A\mapsto l_A$, 则从证明可以看到

$$\ker l=\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}: A\text{ 是数量矩阵}\}.$$

证明 1. **必要性**: 若 A 所有特征值相同, 则对 $\lambda\neq 0$,

$$l_AX=\lambda X\Leftrightarrow AX=X(\lambda E+A)$$

显然 $A,A+\lambda E$ 没有公共特征值, 由命题**??**知我们知道 $l_AX=\lambda X$ 只有 0 解. 现在 l_A 特征值全为 0 知 l_A 是幂零矩阵.

充分性: 若 A 有两个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, 则 A 和 $(\lambda_2-\lambda_1)E+A$ 有公共特征值 λ_2. 于是由命题**??**, 存在 $X_0\in\mathbb{C}^{n\times n}\setminus\{0\}$ 使得

$$AX_0=X_0((\lambda_2-\lambda_1)E+A).$$

于是 $l_AX_0=(\lambda_2-\lambda_1)X_0$. 这表明 l_A 有非 0 特征值, 这就是一个矛盾! 故 A 所有特征值相同.

2. **充分性**: 若 A 可对角化, 可不妨设 A 是对角矩阵, 这是因为设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP=\tilde{A}$ 为对角矩阵, 那么注意到交换图

$$\begin{tikzcd}\mathbb{C}^{n\times n}\arrow[r,"l_A"]\arrow[d,"\tau"'] & \mathbb{C}^{n\times n}\arrow[d,"\tau"]\\ \mathbb{C}^{n\times n}\arrow[r,"l_{\tilde{A}}"'] & \mathbb{C}^{n\times n},\end{tikzcd}$$

这里 $\tau(X)=P^{-1}XP,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 从而

$$\tau\circ l_A(X)=P^{-1}(AX-XA)P=\widetilde{A}P^{-1}XP-P^{-1}XP\widetilde{A}.$$
$$l_{\widetilde{A}}\circ\tau(X)=\widetilde{A}P^{-1}XP-P^{-1}XP\widetilde{A}.$$

又因为 τ 可逆, 所以 $l_A=\tau^{-1}\circ l_{\tilde{A}}\circ\tau\sim l_{\tilde{A}}$. 换言之, 在同构 τ 下, $l_A,l_{\tilde{A}}$ 应该 (在相似的等价关系下) 有相同的线性代数性质, 所以我们可以不妨设 A 为对角矩阵. 不妨设

$$A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n$$

于是直接计算表明

$$l_A(E_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij},\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$$

这就证明了 l_A 是可对角化的.

必要性: 运用 Jordan 分解, 我们知道 $A=B+C, B$ 可对角化, C 幂零, $BC=CB$, 则 $l_A=l_B+l_C$. 由充分性知 l_B 可对角化, 由第一问知 l_C 幂零. 由 $BC=CB$, 容易验证 $l_C\circ l_B=l_B\circ l_C$, 于是我们知道 $l_A=l_B+l_C$ 这是 l_A 的 Jordan 分解. 现在 $l_A=l_A+0$ 也是一个 Jordan 分解, 故由 Jordan 分解的唯一性知 $l_B=l_A, l_C=0$. 现在 $CX=XC,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 由命题**??**(2), 我们知道 C 为数量矩阵, 所以结合 C 幂零, 我们知道 $C=O$, 故 $A=B$ 可对角化, 这就完成了证明.

□

例题 0.3

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n},B\in\mathbb{C}^{k\times p}$, 考虑 $T_{A,B}:\mathbb{C}^{n\times k}\to\mathbb{C}^{m\times p},X\mapsto AXB$, 求
$$\dim \mathrm{Ker}T_{A,B},\dim\mathrm{Im}\,T_{A,B}.$$
2. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n},B\in\mathbb{C}^{k\times p}$, 求 $T_{A,B}:\mathbb{C}^{n\times k}\to\mathbb{C}^{m\times p},X\mapsto AXB$ 在基
$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1k},E_{21},\cdots,E_{2k},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nk}\}$$
和基
$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1p},E_{21},\cdots,E_{2p},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mp}\}$$
下的表示矩阵.

证明

1. 考虑等价标准型
$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},RBS=\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}\tag{2}$$
于是记
$$\widetilde{T_{A,B}}=T_{\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}},\tau:\mathbb{C}^{n\times k}\to\mathbb{C}^{n\times k},X\mapsto Q^{-1}XR^{-1},\tau':\mathbb{C}^{m\times p}\to\mathbb{C}^{m\times p},X\mapsto PXS$$
就有交换图
$$\begin{tikzcd}\mathbb{C}^{n\times k}\arrow[r,"T_{A,B}"]\arrow[d,"\tau"']&\mathbb{C}^{m\times p}\arrow[d,"\tau'"]\\\mathbb{C}^{n\times k}\arrow[r,"\widetilde{T_{A,B}}"']&\mathbb{C}^{m\times p}\end{tikzcd}.$$
容易验证在同构映射 τ,τ' 下,$\widetilde{T_{A,B}}$ 和 $T_{A,B}$(相抵) 等价, 从而 $\widetilde{T_{A,B}}$ 和 $T_{A,B}$(在相抵的等价关系下) 有相同的线性代数性质. 故可不妨设
$$A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}$$
于是对 $X=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix},X_1\in\mathbb{C}^{r\times s}$, 我们有
$$T_{A,B}(X)=\begin{pmatrix}X_1&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\dim\mathrm{Im}\,T_{A,B}=rs,$$
以及
$$T_{A,B}(X)=\begin{pmatrix}X_1&0\\0&0\end{pmatrix}\overset{\text{维数公式}}{\Rightarrow}\dim\mathrm{Ker}T_{A,B}=nk-rs.$$
2. 注意到
$$(A\otimes B^T)_{((t-1)p+r,(t'-1)k+r')}=a_{tr}b_{r'r},1\leqslant t\leqslant m,1\leqslant t'\leqslant n,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant r'\leqslant \ell$$
现在表示矩阵 $\widetilde{T}_{A,B}$ 的 $((t-1)p+r,(t'-1)k+r')$ 元为
$$(T_{A,B}(E_{t'r'})_{(tr)}=(AE_{t'r'}B)_{(tr)}=a_{tr}b_{r'r}=(A\otimes B^T)_{((t-1)p+r,(t'-1)k+r')}$$
因此, 我们知道 $\widetilde{T}_{A,B}=A\otimes B^T$.

□

例题 0.4 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明: $\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AXA$ 可对角化的充要条件是 A 可对角化.

笔记 下述证明只考虑了 $J_{n_1}(\lambda_1)$ 对应的 α_i 和 $J_{n_1}(\lambda_1)$ 对应的 β_j^T 的乘积构成的子空间, 得到特征值 λ_1^2. 实际上, 我

们可以类似地考虑 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 对应的 α_i 和 $J_{n_j}(\lambda_j)$ 对应的 β_j^T 的乘积构成的子空间, 这样得到特征值就是 $\lambda_i\lambda_j$. 这些子空间合起来就是 A 对角化的过渡矩阵, 并且 A 的所有特征值就是 $\lambda_i\lambda_j$.

证明 因为命题**??**知 $A \sim A^T$, 所以存在

$$P = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

是可逆矩阵并使得 $P^{-1}AP = Q^{-1}A^TQ$ 是相似标准型. 由命题**??**知 $\alpha_i\beta_j^T, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ 必然线性无关.

当 A 可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, A^T\beta_j = \lambda_j\beta_j, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

我们有

$$\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^TA = \lambda_i\lambda_j\alpha_i\beta_j^T, 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

这就证明了 φ 有 n^2 个线性无关的特征向量从而可对角化.

反之, 当 φ 可对角化, 若 A 不可对角化, 设 P, Q 可逆, 且

$$\begin{gathered}
P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\
Q^{-1}A^TQ = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\
P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), Q = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).
\end{gathered}$$

考虑 $U \triangleq \operatorname{span}\{\alpha_i\beta_j^T : 1 \leqslant i, j \leqslant n_1\}$, 注意到

$$\begin{gathered}
A\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1}\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1}\right) J_{n_1}(\lambda_1), \quad A^T\left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1}\right) = \left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1}\right) J_{n_1}(\lambda_1). \\
\Rightarrow A\alpha_j = \alpha_{j-1} + \lambda_1\alpha_j, \quad A^T\beta_j = \beta_{j-1} + \lambda_1\beta_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant n_1.
\end{gathered}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha_1\beta_1^T) = A\alpha_1\beta_1^TA = \lambda_1^2\alpha_1\beta_1^T \\
&\varphi(\alpha_1\beta_j^T) = A\alpha_1\beta_j^TA = \lambda_1\alpha_1\beta_{j-1}^T + \lambda_1^2\alpha_1\beta_j^T, 2 \leqslant j \leqslant n_1 \\
&\varphi(\alpha_i\beta_1^T) = A\alpha_i\beta_1^TA = \lambda_1\alpha_{i-1}\beta_1^T + \lambda_1^2\alpha_i\beta_1^T, 2 \leqslant i \leqslant n_1 \\
&\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^TA = \alpha_{i-1}\beta_{j-1}^T + \lambda_1\alpha_{i-1}\beta_1^T + \lambda_1\alpha_1\beta_{j-1}^T + \lambda_1^2\alpha_i\beta_j^T, 2 \leqslant i, j \leqslant n_1
\end{aligned}$$

即 U 是 $\varphi-$ 不变子空间. 由引理**??**知 $\varphi|_U$ 可对角化. 在基 $\{\alpha_1\beta_1^T, \alpha_1\beta_2^T, \cdots, \alpha_1\beta_{n_1}^T, \alpha_2\beta_1^T, \alpha_2\beta_2^T, \cdots, \alpha_2\beta_{n_1}^T, \cdots, \alpha_{n_1}\beta_1^T, \alpha_{n_1}\beta_2^T, \cdots, \alpha_{n_1}\beta_{n_1}^T\}$ 下 $\varphi|_U$ 的表示矩阵形如对角线为 λ_1^2 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和 $\varphi|_U$ 可对角化矛盾! 我们完成了证明. □

例题 0.5 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \varphi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, X \mapsto AX - XB$. 证明: φ 可对角化的充要条件是 A, B 可对角化.

证明 若 A, B 可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, B^T\beta_i = \mu_i\beta_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, i = 1, 2, \cdots, n$$

且 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_i\}_{i=1}^n$ 是两组线性无关的向量组. 由命题**??**知 $\alpha_i\beta_j^T, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ 必然线性无关.

现在

$$\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^T - \alpha_i\beta_j^TB = (\lambda_i - \mu_j)\alpha_i\beta_j^T, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

即我们证明了 φ 可对角化且特征值为

$$\lambda_i - \mu_j, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

若 A, B 有一个不可对角化, 不妨设 A 不可对角化. 于是可设可逆矩阵 $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\begin{gathered}
P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\
Q^{-1}B^TQ = \operatorname{diag}\{J_{m_1}(\mu_1), J_{m_2}(\mu_2), \cdots, J_{m_t}(\mu_t)\}.
\end{gathered}$$

设

$$L \triangleq \operatorname{span}\{\alpha_i\beta_j^T : 1 \leqslant i \leqslant n_1, 1 \leqslant j \leqslant m_1\}$$

由命题**??**知 $\alpha_i\beta_j^T : 1 \leqslant i \leqslant n_1, 1 \leqslant j \leqslant m_1$ 是 L 的基.

现在

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_1\beta_1^T) &= A\alpha_1\beta_1^T - \alpha_1\beta_1^T B = (\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1\beta_1^T \\
\varphi(\alpha_1\beta_j^T) &= A\alpha_1\beta_j^T - \alpha_1\beta_j^T B = -\alpha_1\beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1\beta_j^T, 2 \leqslant j \leqslant m_1 \\
\varphi(\alpha_i\beta_1^T) &= A\alpha_i\beta_1^T - \alpha_i\beta_1^T B = \alpha_{i-1}\beta_1^T + (\lambda_1 - \mu_1)\alpha_i\beta_1^T, 2 \leqslant i \leqslant n_1 \\
\varphi(\alpha_i\beta_j^T) &= A\alpha_i\beta_j^T - \alpha_i\beta_j^T B = \alpha_{i-1}\beta_j^T - \alpha_i\beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1)\alpha_i\beta_j^T, 2 \leqslant i \leqslant n_1, 2 \leqslant j \leqslant m_1
\end{aligned}$$

现在 L 是 $\varphi-$ 不变子空间且在基

$$\{\alpha_1\beta_1^T, \alpha_1\beta_2^T, \cdots, \alpha_1\beta_{m_1}^T, \alpha_2\beta_1^T, \alpha_2\beta_2^T, \cdots, \alpha_2\beta_{m_1}^T, \cdots, \alpha_{n_1}\beta_1^T, \alpha_{n_1}\beta_2^T, \cdots, \alpha_{n_1}\beta_{m_1}^T\}$$

下 $\varphi|_L$ 的表示矩阵形如对角线为 $\lambda_1 - \mu_1$ 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即 $\varphi|_L$ 不可对角化. 由引理**??**可知 $\varphi|_L$ 可对角化, 矛盾! 我们完成了证明. □

例题 0.6 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\varphi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, X \mapsto AX$. 证明: φ 可对角化的充要条件是 A 可对角化.

证明 **充分性**: 设可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 考虑 $\psi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, X \mapsto PX$, 则

$$\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(X) = P^{-1}APX, \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

故不妨设 A 为相似标准型. 因此若

$$A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, n$$

则 $\varphi(E_{ij}) = \lambda_i E_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 在基

$$\{E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{n1}, \cdots, E_{nn}\}$$

下的矩阵为对角矩阵.

必要性: 设可逆矩阵 $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1$$

设

$$L \triangleq \operatorname{span}\{\alpha_i\alpha_j^T : 1 \leqslant i, j \leqslant n_1\}$$

我们有

$$\begin{aligned}
A\alpha_1\alpha_j^T &= \lambda_1\alpha_1\alpha_j^T, 1 \leqslant j \leqslant n_1 \\
A\alpha_i\alpha_j^T &= \alpha_{i-1}\alpha_j^T + \lambda_i\alpha_i\alpha_j^T, 2 \leqslant i \leqslant n_1, 1 \leqslant j \leqslant n_1
\end{aligned}$$

即 L 是 φ 不变子空间. 由引理**??**知 $\varphi|_L$ 可对角化. 由命题**??**知 $\alpha_i\alpha_j^T, 1 \leqslant i, j \leqslant n_1$ 必然线性无关.

在基 $\{\alpha_1\alpha_1^T, \alpha_1\alpha_2^T, \cdots, \alpha_1\alpha_{n_1}^T, \alpha_2\alpha_1^T, \alpha_2\alpha_2^T, \cdots, \alpha_2\alpha_{n_1}^T, \cdots, \alpha_{n_1}\alpha_1^T, \alpha_{n_1}\alpha_2^T, \cdots, \alpha_{n_1}\alpha_{n_1}^T\}$ 下 $\varphi|_L$ 的表示矩阵形如对角线为 λ_1 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和 $\varphi|_L$ 可对角化矛盾! 我们完成了证明. □