## 0.1 同态和子群

**定义 0.1 (同态)**

假设 $G$ 和 $H$ 是半群. 函数 $f: G \to H$ 叫作**同态**, 是指对于所有的 $a, b \in G$,

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

假如 $f$ 作为集合的映射是单射, 称 $f$ 为**单同态**, 如果 $f$ 是满射,$f$ 叫作**满同态**. 如果 $f$ 是一一对应,$f$ 便叫作**同构**.

若存在同构 $f: G \to H$, 则我们称 $G$ 和 $H$ 是同构的 (写成 $G \cong H$). 同态 $f: G \to G$ 叫作 $G$ 的**自同态**, 而同构 $f: G \to G$ 叫作 $G$ 的**自同构**.

♣

**定理 0.1**

(1) 如果 $f: G \to H$ 和 $g: H \to K$ 均是半群的同态, 则,$gf: G \to K$ 也是同态.
同样地, 单同态的合成是单同态, 而对于满同态、同构和自同构则有类似的论断.

(2) 如果 $G$ 和 $H$ 是群, 它们的幺元素分别为 $e_G$ 和 $e_H$, 而 $f: G \to H$ 是一个同态, 则 $f(e_G) = e_H$. 此外, 对于所有 $a \in G, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

♡

注 (2) 的结论对于幺半群是不正确的.

证明

1.
2.

□

**定义 0.2 (子幺半群)**

令 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 若 $T \subset S$, $e \in T$, 且 $T$ 在乘法下封闭, 即

$$e \in T,$$
$$\forall x, y \in T, x \cdot y \in T.$$

则我们称 $(T, \cdot)$ 是 $(S, \cdot)$ 的一个**子幺半群**

♣

**命题 0.1 (子幺半群也是幺半群)**

若 $(T, \cdot)$ 是 $(S, \cdot)$ 的一个子幺半群, 则 $(T, \cdot)$ 是个幺半群.

♠

证明 就二元运算的定义而言, 子群第一个条件 (封闭性) 就满足了, 这使得我们后面的谈论是有意义的. 首先, 结合律对于 $S$ 中元素都满足, 当然对 $T$ 中元素也满足 ($T$ 是子集). 接下来, 类似地,$e$ 对于所有 $S$ 中元素都是单位元, 固然对于 $T$ 中元素亦是单位元. □

**定义 0.3 (两个幺半群的直积)**

令 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个幺半群, 我们记 $(G \times G', *)$ 为 $(G, \cdot_1)$ 和 $(G', \cdot_2)$ 的**直积**. 满足对于 $(x, y), (x', y') \in G \times G'$, 有

$$(x, y) * (x', y') = (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y').$$

♣

**命题 0.2 (两个幺半群的直积仍是幺半群)**

若 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个幺半群, 则它们的直积 $(G \times G', *)$ 还是一个幺半群.

♠

证明 封闭性: 因为 $G$ 在 $\cdot_1$ 下封闭,$G'$ 在 $\cdot_2$ 下封闭, 而 $G \times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的, 则 $G \times G'$ 在 $* = (\cdot_1, \cdot_2)$

下也是封闭的.

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律.

单位元: 设 $e, e'$ 分别是 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 的单位元, 则不难想象,$(e, e')$ 是直积的单位元. 对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 我们有 $(x, y) * (e, e') = (x \cdot_1 e, y \cdot_2 e') = (x, y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 $(e, e')$ 是直积的单位元. □

**定义 0.4 (一族幺半群的直积)**

令 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族幺半群, 其中 $I$ 是一个指标集. 我们记它们的**直积**为 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$. 满足对于 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 有

$$(x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i \in I}.$$

♣

**命题 0.3 (一族幺半群的直积仍是幺半群)**

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族幺半群, 则它们的直积 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个幺半群.

♠

证明 证明与命题 0.2同理.. 封闭性与结合律是显然的. 单位元是 $(e_i)_{i \in I}$. □

**命题 0.4 (一族交换幺半群的直积仍是交换幺半群)**

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族交换幺半群, 则它们的直积 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个交换幺半群.

♠

证明 由命题 0.3可知 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个幺半群. 下面证明它还是交换幺半群.

由 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族交换幺半群可得, 对 $\forall (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 都有

$$(x_i)_{i \in I} \cdot (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i \in I} = (y_i \cdot_i x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \cdot (x_i)_{i \in I}.$$

故 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个交换幺半群. □

**定义 0.5 (幺半群同态)**

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个幺半群, 且 $f : S \to T$ 是一个映射, 我们称 $f$ 是一个**幺半群同态**, 当 $f$ 保持了乘法运算, 且把单位元映到了单位元. 此即

$$\forall x, y \in S, f(x \cdot y) = f(x) * f(y),$$
$$f(e) = e'.$$

其中,$e$ 和 $e'$ 分别是 $(S, \cdot)$ 和 $(T, *)$ 的单位元.

♣

**定义 0.6 (由子集生成的子幺半群)**

设 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集. 我们称 $S$ 中所有包含了 $A$ 的子幺半群的交集为**由 $A$ 生成的子幺半群**, 记作 $\langle A \rangle$. 此即

$$\langle A \rangle = \bigcap \{T \subset S : T \supset A, T \text{ 是子幺半群}\}.$$

♣

**命题 0.5 (由子集生成的子幺半群是包含了这个子集的最小的子幺半群)**

设 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集. 则 $\langle A \rangle$ 也是一个子幺半群. 因此, 这是包含了 $A$ 的最小的子幺半群.

♠

注 这里说的“最小”, 指的是在包含关系下最小的, 也就是, 它包含于所有包含 $A$ 的子幺半群.

**证明** 要证明 $\langle A\rangle$ 是子幺半群, 只需要证明它包含了 $e$, 并在乘法运算下封闭. 首先, 因为集族中每一个 $T$, 作为子幺半群, 都会包含 $e$; 因此 $\langle A\rangle$ 作为这些集合的交集也会包含 $e$, 这就证明了第一点. 而对于第二点, 我们首先假设 $x, y \in \langle A\rangle$, 而想要证明 $x \cdot y \in \langle A\rangle$. 注意到, 因为 $x, y \in \langle A\rangle$, 任取一个包含了 $A$ 的子幺半群 $T$(集族中的集合), 我们都有 $x, y \in T$, 于是有 $x \cdot y \in T$. 而 $x \cdot y \in T$ 对于所有这样的 $T$ 都成立, 我们就有 $x \cdot y$ 属于它们的交集, 也就是 $\langle A\rangle$. 这样, 我们就证明了第二点. 综上, 由一个幺半群 $S$ 的任意子集 $A$ 生成的子幺半群都确实是一个子幺半群. □

**命题 0.6**

设 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 且 $s \in S$, 则

$$\langle s\rangle = \{1, s, s^2, \cdots\}.$$

**证明** 一方面, 设 $(T, \cdot) < (S, \cdot)$ 且 $s \in T$, 则 $1 \in T$. 假设 $s^n \in T$, 则

$$s^{n+1} = s \cdot s^n \in T.$$

从而由数学归纳法可知 $s^n \in T, \forall n \in \mathbb{N}_1$. 因此 $T \supset \{1, s, s^2, \cdots\}$, 故由 $T$ 的任意性可知,$\langle s\rangle \supset \{1, s, s^2, \cdots\}$.

另一方面, 显然有 $s \in \{1, s, s^2, \cdots\}$. 因此我们只需证明 $\{1, s, s^2, \cdots\} < (S, \cdot)$ 即可. 而显然有 $1 \in \{1, s, s^2, \cdots\}$, 对 $\forall s^m, s^n \in \{1, s, s^2, \cdots\}$, 由推论**??**可得

$$s^m \cdot s^n = s^{m+n}.$$

故 $\{1, s, s^2, \cdots\} < (S, \cdot)$. 因此 $\{1, s, s^2, \cdots\} \supset \langle s\rangle$.

综上, 我们就有 $\langle s\rangle = \{1, s, s^2, \cdots\}$. □

**定义 0.7 (幺半群同构)**

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个幺半群, 且 $f : S \to T$ 是一个映射, 我们称 $f$ 是一个**幺半群同构**, 当 $f$ 是一个双射, 且是一个同态.

$$f \text{ 是双射},$$
$$\forall x, y \in S, f(x \cdot y) = f(x) * f(y),$$
$$f(e) = e'.$$

其中,$e$ 和 $e'$ 分别是 $(S, \cdot)$ 和 $(T, *)$ 的单位元.

**注** 容易验证同构是一个等价关系.

**命题 0.7 (幺半群同构的逆是幺半群同态)**

若 $f : (S, \cdot) \to (T, *)$ 是一个幺半群同构, 则 $f^{-1} : T \to S$ 是一个幺半群同态. 因此,$f^{-1}$ 也是个幺半群同构.

**证明** 令 $x', y' \in T$, 我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$. 为了方便起见, 根据 $f$ 是一个双射, 从而存在 $x, y \in S$, 使得 $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 并且 $f(x) = x', f(y) = y'$. 我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y$. 而由于 $f$ 是幺半群同态, 所以 $f(x \cdot y) = f(x) * f(y) = x' * y'$. 反过来说,$f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$. 这就证明了这个命题. □

**引理 0.1**

令 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 令 $G$ 是其所有可逆元素构成的子集, 则 $(G, \cdot)$ 是个群.

**注** 我们称呼幺半群中的可逆元素为“**单位**”, 因此 $G$ 是由所有该运算下的单位构成的集合 (在这里甚至是群).

**证明** 首先结合律完全继承自 $S$, 不需要证明. 而单位元是可逆的, 因此 $e \in G$. 剩下要证明 $G$ 中每个元素都有 ($G$ 中的) 逆元, 而这几乎是显然的. 假设 $x \in G$, 则 $x$ 是可逆元素, 我们取 $y \in S$, 使得 $x \cdot y = y \cdot x = e$(这里要注意我们只能首先保证 $y$ 在全集 $S$ 中). 接下来我们要证明 $y \in G$, 即 $y$ 可逆, 而这是显然的, 因为 $x$ 正是它的逆. 所以 $y \in G$. 这样, 就证明了 $(G, \cdot)$ 是个群. □

**定义 0.8 (子群)**

设 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $H\subset G$. 我们称 $H$ 是 $G$ 的**子群**, 记作 $H<G$, 当其包含了单位元, 在乘法和逆运算下都封闭, 即

$$e\in H,$$
$$\forall x,y\in H, x\cdot y\in H,$$
$$\forall x\in H, x^{-1}\in H.$$

♣

**命题 0.8 (子群也是群)**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群. 若 $H$ 是 $G$ 的子群, 则 $(H,\cdot)$ 也是个群.

♠

**证明** 就二元运算的良定义性而言, 子群第一个条件 (封闭性) 就满足了, 这使得我们后面的谈论是有意义的. 首先, 结合律肯定满足, 因为它是个子集. 其次, 根据子群的第二个条件,$e\in H$ 是显然的. 再次, 我们要证明每个 $H$ 中元素有 $H$ 中的逆元, 而这是子群的第三个条件. □

**推论 0.1 (子群的传递性)**

若 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $H<G$,$K<H$, 则一定有 $K<G$. 因此我们可以将 $H<G$,$K<H$ 简记为 $K<H<G$.

♡

**证明** 证明是显然的. □

**命题 0.9 (子群的等价条件)**

设 $(G,\cdot)$ 是一个群,$H\subset G$, 则 $(H,\cdot)$ 是子群等价于

$$e\in H,$$
$$\forall x,y\in H, x\cdot y^{-1}\in H.$$

♠

**证明** 设 $(H,\cdot)$ 是子群. 令 $x,y\in H$, 利用逆元封闭性得到 $y^{-1}\in H$, 再利用乘法封闭性得到 $x\cdot y^{-1}\in H$.

反过来, 假设上述条件成立. 令 $x\in H$, 则 $e\cdot x^{-1}=x^{-1}\in H$, 这证明了逆元封闭性. 接下来, 令 $x,y\in H$, 则利用逆元封闭性,$y^{-1}\in H$, 故 $x\cdot(y^{-1})^{-1}=x\cdot y\in H$. 这就证明了乘法封闭性.

综上, 这的确是子群的等价条件. □

**命题 0.10 (子群的任意交仍是子群)**

设 $G$ 是一个群, $(N_i)_{i\in I}$ 是一族 $G$ 的子群, 则它们的交集仍然是 $G$ 的子群, 即

$$\bigcap_{i\in I}N_i<G.$$

♠

**证明** 首先, 设 $e$ 是 $G$ 的单位元, 则由子群对单位元封闭可知,$e\in N_i$,$\forall i\in I$. 从而 $e\in\bigcap_{i\in I}N_i$.

其次, 对 $\forall x,y\in\bigcap_{i\in I}N_i$, 都有 $x,y\in N_i$,$\forall i\in I$. 根据子群对逆元封闭可知,$y^{-1}\in N_i$,$\forall i\in I$. 于是再由子群对乘法封闭可知,$xy^{-1}\in N_i$,$\forall i\in I$. 故 $xy^{-1}\in\bigcap_{i\in I}N_i$.

综上,$\bigcap_{i\in I}N_i<G$. □

**定义 0.9 (一般线性群)**

我们对于那些 $n*n$ 可逆实矩阵构成的乘法群, 称为 **(实数上的)**$n$ **阶一般线性群**, 记作 $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$. 由于一

个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零, 因此

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}.$$

**定义 0.10 (特殊线性群)**

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n*n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的)$n$ 阶特殊线性群**, 记作 $(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, 即

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

**命题 0.11**

$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ 是个群.

**证明** 根据定义,$SL(n,\mathbb{R})$ 首先是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子集, 那么只要证明它是个子群即可. 首先, 乘法单位元单位矩阵的行列式恰好是 1(这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因), 这就证明了 $I \in SL(n,\mathbb{R})$($I = I_n$ 指的是 $n$ 阶单位矩阵). 另外, 我们要证明 $SL(n,\mathbb{R})$ 在乘法下封闭. 令 $A, B$ 是两个行列式为 1 的 $n*n$ 实矩阵. 由于行列式满足 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, 因此 $AB$ 的行列式也是 1, 也就在特殊线性群中. 这就证明了特殊线性群确实是个群. 至于逆元封闭性, 我们利用 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. 假设 $\det(A) = 1$, 则 $\det(A^{-1}) = 1$, 于是 $A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$. 综上, 特殊线性群确实是个群. □

**定义 0.11 (群同态)**

令 $(G,\cdot),(G',*)$ 是两个群, 且 $f : G \to G'$ 是一个映射. 我们称 $f$ 是一个**群同态**, 当其保持了乘法运算, 即

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

**命题 0.12**

若 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个群同态, 则 $f(e) = e'$,$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

**笔记** 也就是说,$f$ 不仅把乘积映到乘积, 而且把单位元映到单位元, 把逆元映到逆元. 在这个意义下, 实际上 $f$ 将所有群 $G$ 的"信息"都保持到了 $G'$ 上, 包括单位元, 乘法和逆元. 至于结合律 (或者更基础的封闭性), 显然两边本来就有, 就不必再提.

**证明** 首先, 因为 $e \cdot e = e$, 所以利用同态的性质,$f(e) = f(e \cdot e) = f(e) * f(e)$. 这时, 两边同时左乘 $f(e)^{-1}$, 就可以各约掉一个 $f(e)$, 得到 $e' = f(e)$, 这就证明了 $f$ 把单位元映到单位元.

另一方面, 令 $x \in G$, 则 $e' = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$. 同理 $e' = f(x^{-1}) * f(x)$. 于是由定义,$f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元, 即 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. 这就证明了这个命题. □

**定义 0.12 (群同态的核与像)**

令 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个群同态, 则我们定义 $f$ 的**核与像**, 记作 $\ker(f)$ 与 $\mathrm{im}(f)$, 分别为

$$\ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\} \subset G,$$

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in G' : \exists x \in G, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G\} \subset G'.$$

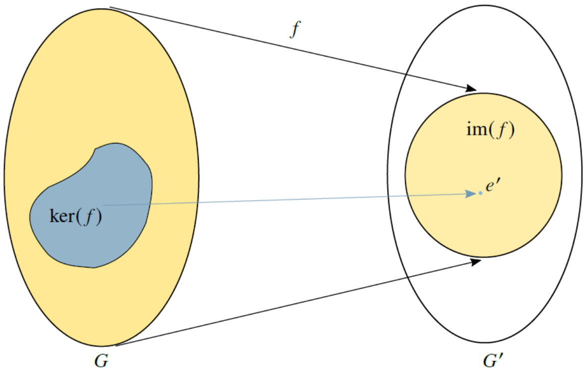


图 1: 群同态的核与像示意图

**命题 0.13**

令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态, 则核是定义域的子群, 像是陪域的子群, 即

$$\ker(f)<G,\quad \operatorname{im}(f)<G'.$$

注 根据群同构第一定理进一步可知,$\ker f\lhd G$. 但是注意同态的像 $(\operatorname{im}(f))$ 未必是 $G'$ 的正规子群, 往往只是普通的子群.

证明 先证明第一个子群关系. 我们利用 $f(e)=e'$ 来说明 $e\in\ker(f)$. 接着, 设 $x,y\in\ker(f)$, 只需证明 $xy^{-1}\in\ker(f)$. 利用同态的性质,$f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}=e'e'^{-1}=e'$, 这就证明了 $xy^{-1}\in\ker(f)$. 第一个子群关系得证.

再证明第二个子群关系. 同样由于 $f(e)=e'$, 我们有 $e'\in\operatorname{im}(f)$. 接着, 设 $y=f(x), y'=f(x')\in\operatorname{im}(f)$, 只需证明 $yy'^{-1}\in\operatorname{im}(f)$. 同样利用同态的性质,$yy'^{-1}=f(x)f(x')^{-1}=f(xx'^{-1})\in\operatorname{im}(f)$. 第二个子群关系也得证. 这样我们就证完了整个命题. □

例题 0.1 证明:$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)<(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$.

证明 由命题??可知,$\det: GL(n,\mathbb{R})\to(\mathbb{R}^{\times},\cdot)$ 是一个乘法群同态. 注意到 $\ker(det)=(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, 因此由命题 0.13可知,$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)=\ker(det)<(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$. □

**定义 0.13 (满同态与单同态)**

令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态, 我们称 $f$ 是一个**满同态**当 $f$ 是满射, 称 $f$ 是一个**单同态**当 $f$ 是单射.

**命题 0.14**

令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态, 则

1. $f$ 是一个单同态当且仅当 $\ker(f)=\{e\}$. 也就是说, 一个群同态是单的当且仅当核是平凡的.
2. $f$ 是一个满同态当且仅当 $\operatorname{im}(f)=G'$. 也就是说, 一个群同态是满的当且仅当值域等于陪域.

证明

1. 假设 $f$ 是单的, 那么因为 $f(e)=e'$, 因此若 $f(x)=e'$, 则利用单射的性质我们一定有 $x=e$, 这就证明了核是平凡的.(这个方向是显然的)
   另一个方向不那么显然. 我们假设 $\ker(f)=\{e'\}$. 假设 $x,x'\in G$, 使得 $f(x)=f(x')$, 我们只须证明 $x=x'$. 在这里, 我们同时右乘 $f(x')^{-1}$, 得到 $f(x)f(x'^{-1})=f(xx'^{-1})=e'$. 而因为核是平凡的, 所以必须有 $xx'^{-1}=e$. 接下来同时右乘 $x'$, 我们就得到 $x=x'$. 这就证明了这个命题.
2. 因为 $f$ 是满同态, 所以对 $\forall a'\in G'$, 都存在 $a\in G$, 使得 $f(a)=a'$. 故 $a'\in\operatorname{im}(f)$. 因此 $G'\subset\operatorname{im}(f)$.. 又显然有 $\operatorname{im}(f)\subset G'$. 故 $\operatorname{im}(f)=G'$.

□

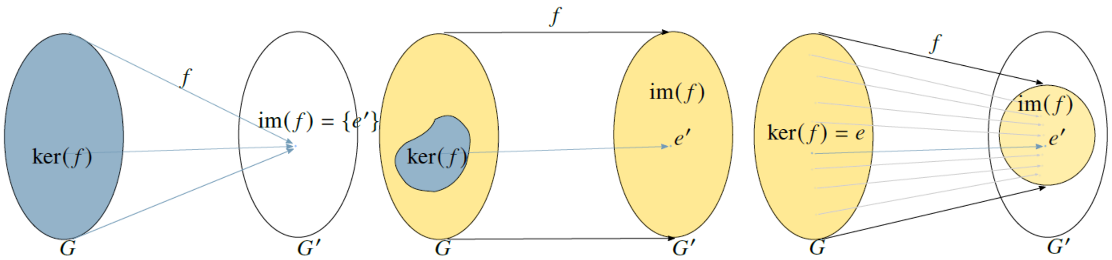


图 2: 平凡群, 满同态和单同态示意图

**例题 0.2** 证明:$\det : GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^\times,\cdot)$ 是一个乘法群同态, 并且是满同态,$\ker(\det) = SL(n,\mathbb{R})$.

**证明** 设 $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$, 则由行列式的 Laplace 定理可知 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. 故 det 是群同态.

任取 $a \in \mathbb{R}^\times$, 令 $C = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $C \in GL(n,\mathbb{R})$ 并且 $\det(C) = a$. 故 det 是满同态.

一方面, 任取 $N \in SL(n,\mathbb{R})$, 则 $\det(N) = 1$, 从而 $N \in \ker(\det)$. 于是 $SL(n,\mathbb{R}) \subset \ker(\det)$. 另一方面, 任取 $M \in \ker(\det)$, 则 $\det(M) = 1$, 从而 $M \in SL(n,\mathbb{R})$. 于是 $\ker(\det) \subset SL(n,\mathbb{R})$. 故 $\ker(\det) = SL(n,\mathbb{R})$. □

**定义 0.14 (群同构)**

令 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个映射, 我们称 $f$ 是一个**群同构**, 当 $f$ 既是一个双射, 又是一个群同态. 简单来说, 同构就是双射的同态. ♣

**命题 0.15 (群同构的逆也是群同构)**

若 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个群同构, 则 $f^{-1}$ 也是群同构. ♠

**证明** 因为 $f^{-1}$ 也是双射, 所以我们只须证明 $f^{-1}$ 是群同态. 令 $x', y' \in G'$, 设 $x' = f(x), y' = f(y)$. 则 $x' * y' = f(x\cdot y)$,$x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 故 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x')\cdot f^{-1}(y')$. 这就完成了证明. □

**定义 0.15 (两个群的直积)**

令 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 是两个群, 我们记 $(G\times G',*)$ 为 $(G,\cdot_1)$ 和 $(G',\cdot_2)$ 的**直积**. 满足对于 $(x,y),(x',y') \in G\times G'$, 有

$$(x,y) * (x',y') = (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y').$$

♣

**命题 0.16 (两个群的直积仍是群)**

若 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 是两个群, 则它们的直积 $(G\times G',*)$ 还是一个群. ♠

**证明** 封闭性: 因为 $G$ 在 $\cdot_1$ 下封闭,$G'$ 在 $\cdot_2$ 下封闭, 而 $G\times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的, 则 $G\times G'$ 在 $* = (\cdot_1,\cdot_2)$ 下也是封闭的.

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律.

单位元: 设 $e, e'$ 分别是 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 的单位元, 则不难想象,$(e,e')$ 是直积的单位元. 对于任意 $(x,y) \in G\times G'$, 我们有 $(x,y)*(e,e') = (x\cdot_1 e, y\cdot_2 e') = (x,y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 $(e,e')$ 是直积的单位元.

逆元: 对于任意 $(x,y) \in G\times G'$, 设 $x^{-1}, y^{-1}$ 分别是 $x, y$ 的逆元, 则同样不难想象,$(x^{-1},y^{-1})$ 是 $(x,y)$ 的逆元. □

**定义 0.16 (一族群的直积)**

令 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 其中 $I$ 是一个指标集. 我们记它们的**直积**为 $(\prod\limits_{i\in I} G_i,*)$. 满足对于 $(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I} G_i$, 有

$$(x_i)_{i\in I}*(y_i)_{i\in I}=(x_i\cdot_i y_i)_{i\in I}.$$

♣

**命题 0.17 (一族群的直积仍是群)**

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 则它们的直积 $(\prod\limits_{i\in I} G_i,*)$ 还是一个群.

♠

笔记 最经典的例子就是通过 $n$ 个实数加群 $(\mathbb{R},+)$ 直积得到的 $(\mathbb{R}^n,+)$.

证明 证明与命题 0.16同理. 封闭性与结合律是显然的. 单位元是 $(e_i)_{i\in I}$, 而 $(x_i)_{i\in I}$ 的逆元是 $(x_i^{-1})_{i\in I}$. □

**命题 0.18 (一族 Abel 群的直积仍是 Abel 群)**

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族 Abel 群, 则它们的直积 $(\prod\limits_{i\in I} G_i,*)$ 还是一个 Abel 群.

♠

证明 由命题 0.17可知 $(\prod\limits_{i\in I} G_i,*)$ 还是一个群. 下面证明它还是 Abel 群.

由 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族 Abel 群可得, 对 $\forall (x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I} G_i$, 都有

$$(x_i)_{i\in I}\cdot(y_i)_{i\in I}=(x_i\cdot_i y_i)_{i\in I}=(y_i\cdot_i x_i)_{i\in I}=(y_i)_{i\in I}\cdot(x_i)_{i\in I}.$$

故 $(\prod\limits_{i\in I} G_i,*)$ 还是一个 Abel 群. □

**定义 0.17 (投影映射)**

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群,$j\in I$ 是任意指标, 我们定义映射到指标 $j$ 的**投影映射**为

$$p_j:\prod_{i\in I} G_i\to G_j.$$

对于 $(x_i)_{i\in I}$, 我们称 $p_j((x_i)_{i\in I})=x_j$ 为 $(x_i)_{i\in I}$ 的**投影**.

♣

**命题 0.19 (投影映射是群同态)**

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群,$j\in I$ 是任意指标, 则投影映射 $p_j:\prod\limits_{i\in I} G_i\to G_j$ 是个群同态.

♠

证明 令 $(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I} G_i$, 则

$$p_j((x_i)_{i\in I})=x_j,\quad p_j((y_i)_{i\in I})=y_j$$

$$p_j((x_i)_{i\in I}*(y_i)_{i\in I})=p_j((x_i\cdot_i y_i)_{i\in I})=x_j\cdot_j y_j=p_j((x_i)_{i\in I})\cdot_j p_j((y_i)_{i\in I}).$$

□