0.1 积分不等式的应用

例题 0.1 设 f 在区间 $[0,1]$ 上可积且满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1.$$

求证: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 4$.

证明 证法一: 对于任意常数 a 和 b 有 $\int_0^1 (f(x)-ax-b)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$. 由此并根据条件可得

$$\int_0^1 (f(x)-ax-b)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)\,f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
$$\Longrightarrow \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x = 2(a+b) - \frac{1}{3}a^2 - ab - b^2.$$

取 $a=6, b=-2$ 即得所证.

证法二:对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left[\int_0^1 (ax+b)f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = (a+b)^2.$$

从而

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{(a+b)^2}{\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x} = \frac{a^2+2ab+b^2}{\frac{a^2}{3}+ab+b^2} = 3 - \frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}.$$

再由 a,b 的任意性知

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 3 + \sup_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}\right\}. \tag{1}$$

令 $g(x) = -\dfrac{3x+6}{x^2+3x+3}$, 则

$$g'(x) = \frac{3(x+1)(x+3)}{(x^2+3x+3)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, -3.$$

又 $g(-1) = -3 < 1 = g(-3)$, 故 $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. 因此

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}\right\} = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 1.$$

再由(1)式可知

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

并且这个不等式右边不可改进.

□

例题 0.2 设 $f\in C^1[0,1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

注 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知
$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y=\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y.$$
从而
$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y=x\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
于是对上式两边同时积分可得
$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
2. 由牛顿莱布尼兹公式 (带积分型余项的插值公式) 可得
$$f(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\quad f(x)=\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y,x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$
从而
$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y=x\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$
$$|f(x)|^2=\left|\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_x^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant(1-x)\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y,x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$
于是对上面两式两边同时积分可得
$$\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
将上面两式相加得
$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
□

例题 0.3 opial 不等式

特例:

1. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明
$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$
2. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0,f(b)=0$, 证明
$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

一般情况:

1. 设 $f\in C^1[a,b],p\geqslant 0,q\geqslant 1$ 且 $f(a)=0$. 证明
$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{2}$$
2. 若还有 $f(b)=0$. 证明
$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{3}$$

笔记 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

证明 特例:

1. 令 $F(x) \triangleq \int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y$, 则 $F'(x) = |f'(x)|, F(a) = 0$. 从而

$$f(x) = \int_0^x f'(y)\mathrm{d}y \Rightarrow |f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y = F(x).$$

于是

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}F^2(b) = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 由第 1 问可知

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

将上面两式相加可得

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

一般情况:

1. 只证 $q > 1$. $q = 1$ 可类似得到. 考虑

$$f(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y, F(x) = \int_a^x |f'(y)|^q\mathrm{d}y.$$

则由 Hold 不等式, 我们知道

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y\right)^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_a^x 1^{\frac{q}{q-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p(q-1)}{q}} = F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. 于是

$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}|f'(x)|^q\mathrm{d}x = \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}dF(x)$$
$$\leqslant (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)dF(x) = \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}F^{\frac{p+q}{q}}(b)$$
$$= \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b |f'(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p+q}{q}}$$
$$\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant} \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b |f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{q+p}}\left(\int_a^b 1^{(\frac{p+q}{q-1})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q-1}{q+p}}$$
$$= \frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b |f'(y)|^{p+q}\mathrm{d}y,$$

这就证明了不等式(2).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x,$$

对称得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.$$

故上面两式相加得到(3)式.

□

例题 0.4 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 从条件 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 来看, 我们待定 $a\in\mathbb{R}$, 一定有

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x-a)f(x)\mathrm{d}x.$$

然后利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1(x-a)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1(x-a)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_0^1(x-a)^2\mathrm{d}x$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a=\frac{1}{2}$ 就是达到最小值的 a.

证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

这就证明了(**??**)式.

□

例题 0.5 设 $f\in C^1[0,1],\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 27\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

笔记 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0)=g(1)=0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x)=\begin{cases}x-1, & c\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 0\leqslant x\leqslant c\end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c=c-1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}.$$

证明 令

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x - 2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

结合 $\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{27}$, 这就完成了证明.

□

例题 0.6 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 $f(a) = f(b) = 0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

注 不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$ 的原因: 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0$ 则用 $-f$ 代替 f, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 是平凡的.

证明 证法一:反证, 若 $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \triangleq M$, 则不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$, 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta_1 \in (a,x)$,$\theta_2 \in (x,b)$, 使得

$$f(x) = f(a) + f'(\theta_1)(x-a) \leqslant M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$f(x) = f(b) + f'(\theta_2)(x-b) \leqslant -M(x-b) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x = \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

于是结合 f 的连续性可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

故 f 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处不可导, 这与 $f \in D(a,b)$ 矛盾!

证法二:记上式右端为 M. 假设对一切 $c \in [a,b]$ 有 $|f'(c)| \leqslant M$, 下面推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于 $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 存在 $\xi \in (a,x)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(x-a), \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \tag{5}$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{6}$$

再根据微分中值定理, 对于 $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 存在 $\eta \in (x,b)$, 使得

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\eta)(x-b),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(b-x), \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \tag{7}$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{8}$$

将式 (6) 与式 (8) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这说明式 (6) 与式 (8) 必须是等式, 因而式 (5) 与式 (4) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right], \\ M^2(b-x)^2, & x \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right], \end{cases}$$

此分段函数在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 不可导, 这与 f 在 $[a,b]$ 可导矛盾!

□

例题 0.7 设 $f \in C^1[0,\pi]$ 且满足 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t}, \forall x \in [0,\pi].$$

注 原不等式等价于

$$f^2(x) \leqslant \frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t, \forall x \in [0,\pi].$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 先待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t \int_0^\pi g^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2, \forall x \in [0,\pi]. \tag{9}$$

此时, 我们希望对 $\forall x \in [0,\pi]$, 固定 x, 都有 $\displaystyle\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t = kf(x)$, 其中 k 为某一常数. 因此 $g(t)$ 必和 x 有关, 于是令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

再代入(9)式验证即可.

实际上, 回忆定理**??**中的 Green 函数, 可以发现上述构造的 $g(x) = \dfrac{\mathrm{d}k\,(x,t)}{\mathrm{d}x}$, $x,t \in [0,\pi]$.

希望 $\displaystyle\int_0^\pi f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(x)$, 考虑广义导数, 使得 $g'(x) = \delta(x)$. 实际上, 这里的 g 就是 H 函数 (详细参考 rudin 的泛函分析).

证明 令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

则对 $\forall x \in [0,\pi]$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 &= \left(\int_x^\pi (t-\pi)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(-(x-\pi)f'(x) - \int_x^\pi f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\ &= \pi^2|f(x)|^2\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi g^2(t)\mathrm{d}t = \int_x^\pi (t-\pi)^2\mathrm{d}t + \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2)$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\pi}{3}(3x^2-3\pi x+\pi^2)\int_0^{\pi}|f'(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|f'(t)|^2\mathrm{d}t\int_0^{\pi}g^2(t)\mathrm{d}t\geqslant\left(\int_0^{\pi}f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2=\pi^2|f(x)|^2,\forall x\in[0,\pi]$$

即

$$|f(x)|^2\leqslant\frac{1}{3\pi}(3x^2-3\pi x+x^2)\int_0^{\pi}|f'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{3}\int_0^{\pi}|f'(t)|^2\mathrm{d}t,\forall x\in[0,\pi]$$

□

命题 0.1 (反向 Cauchy 不等式)

设 $f,g\in R[a,b],g\geqslant 0,0<m\leqslant f\leqslant M$, 证明

$$\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)g(x)}\cdot\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b\left[\sqrt{f(x)g(x)}\right]^2\mathrm{d}x\int_a^b\left[\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\right]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

故第一个不等式成立. 下证第二个不等式. 由条件和均值不等式可知

$$\int_a^b\frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0\Longleftrightarrow\int_a^b\frac{Mf(x)+mf(x)-mM-f^2(x)}{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow(M+m)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant mM\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{mM}\sqrt{\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

故

$$\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left[\frac{(M+m)}{2\sqrt{mM}}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

即

$$\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

□

例题 0.8 设 $f,g\in R[a,b]$ 满足

$$0<m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 待定常数 k, 由条件 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b(f(x)-k)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b(f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是我们希望

$$\int_a^b(f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

从而希望

$$(f(x)-k)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x).$$

又因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 所以只需要下式成立即可

$$(t-k)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t^2, \quad \forall t \in [m, M]. \tag{10}$$

我们只需要找到出一个合适的 k, 使这个 k 满足上式即可.

现在, 我们先求不等式 $(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \forall t \in [m, M]$ 的最佳系数 C. 即求最小的 $C > 0$, 存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得

$$(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \quad \forall t \in [m, M].$$

上式等价于

$$\left(1-\frac{k}{t}\right)^2 \leqslant C, \quad \forall t \in [m, M] \Longleftrightarrow \left(1-\frac{k}{M}\right)^2, \left(1-\frac{k}{m}\right)^2 \leqslant C.$$

令 $h(x) \triangleq \max\left\{\left(1-\frac{x}{M}\right)^2, \left(1-\frac{x}{m}\right)^2\right\}$, 则 $C = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} h(x)$,$k$ 是 $h(x)$ 的最小值点.

(画图) 易知 $h(x)$ 的最小值就在 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2$ 和 $\left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 中间的一个交点处取到, 即 $k \in \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{m}\right)$. 于是由 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2 = \left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 可得

$$\text{(i)} \quad 1-\frac{x}{M} = 1-\frac{x}{m} \Longrightarrow x = 0, \quad h(0) = 1,$$

$$\text{(ii)} \quad 1-\frac{x}{M} = \frac{x}{m} - 1 \Longrightarrow 2 = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)x \Longrightarrow x = \frac{2mM}{M+m}, \quad h\left(\frac{2mM}{M+m}\right) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

故 $k = \frac{2mM}{M+m}$,$C = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$. 再结合 (10) 式, 可知原不等式的系数就是最佳系数, 并且此时我们找到了证明需要的 $k = \frac{2mM}{M+m}$. 证明只需要将 $k = \frac{2mM}{M+m}$ 代入上述步骤验证即可.

证明 由条件 $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 &= \left(\int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right) g(x)\,dx\right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 dx \int_a^b g^2(x)\,dx.\end{aligned} \tag{11}$$

注意到

$$\left(t - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t = \frac{4mM(t-M)(m-t)}{(m+M)^2} \leqslant 0, \quad \forall t \in [m, M].$$

因此由 $f(x) \in [m, M], \forall x \in \mathbb{R}$ 可得

$$\left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是再结合 (11) 式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 dx \int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

例题 0.9 设 $f \in C^2[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$. 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geqslant 4.$$

注 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx &\geqslant \left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,dx\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx\right)^2\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

将上式两边与要证不等式对比, 我们希望 $g''(x)\equiv 0$, 从而 $\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=0$, 于是上式可化为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant g^2(1)\\ \Longleftrightarrow &\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}.\end{aligned}\tag{12}$$

因此只要 $g(x)$ 还满足 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant 4$ 即可.

因为 $g''(x)\equiv 0$, 所以我们可以设 $g(x)$ 为一次函数, 即 $g(x)=ax+b,a\neq 0$. 又因为 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 越大, 不等式 (12) 越强, 所以现在我们想要找到一个一次函数 $g(x)$ 使得 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 达到最大值.

不妨设 $g(x)=ax-1,a\neq 0$, 否则用 $-bg(x)$ 代替 $g(x)$, 不改变 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 的取值. 此时, 我们有

$$\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=3\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2-3a+3}=3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right).$$

令 $h(a)=\frac{a}{a^2-3a+3}$, 则由 $h'(a)=\frac{3-a^2}{(a^2-3a+3)^2}=0$ 可得 h 的极大值点为 $a=\sqrt{3}$. 又因为

$$\lim_{a\to-\infty}h(a)=\lim_{a\to-\infty}\frac{a}{a^2-3a+3}=0,\quad h(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

所以 $\max\limits_{a\in\mathbb{R}}h(a)=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$. 从而

$$\max_{a\in\mathbb{R}}\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{a\in\mathbb{R}}3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right)=3\left(1+\max_{a\in\mathbb{R}}h(a)\right)=6+2\sqrt{3}>4.$$

综上, 取 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 就能得到

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=6+2\sqrt{3}>4.$$

实际上,$6+2\sqrt{3}$ 就是原不等式的最佳下界. 只需要再将 $g(x)=\sqrt{3}x-1$ 代入最开始的 Cauchy 不等式验证即可.

证明 令 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 则

$$g''(x)\equiv 0,\quad g(1)=\sqrt{3}-1.$$

于是由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ \xlongequal{\text{分部积分}}&\left(g(1)-\int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\int_0^1(\sqrt{3}x-1)^2\,\mathrm{d}x}=6+2\sqrt{3}>4.$$

□

例题 0.10 设 $f\in C^2[0,2]$, 证明:

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}[f(0)+f(2)-2f(1)]^2.$$

注 不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的原因:

(1) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)=0$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0$ 时, 则待定 a,b,c, 令 $g(x)=cf(x)-ax-b$, 希望 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

注意到上述方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{vmatrix}=f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0.$$

故由 Cramer 法则可知, 存在唯一的解 $a=a_0,b=b_0,c=c_0$ 满足方程组 (13). 即 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$ 满足 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$.

下证不妨设成立. 假设原不等式已经对 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的的情况成立, 则对一般的 $f(x)$ 而言, 令 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$, 显然 $g''(x)=c_0f''(x)$, 并且由上述推导可知 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$. 从而此时由假设可得

$$\int_0^2 |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}[g(0)+g(2)-2g(1)]^2.$$

于是

$$\begin{aligned}
&|c_0|^2\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^2|g''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[g(0)+g(2)-2g(1)\right]^2\\
&=\frac{3}{2}\left[(c_0f(0)-b_0)+(c_0f(2)-2a_0-b_0)-2\left(c_0f(1)-a_0-b_0\right)\right]^2\\
&=\frac{3\,|c_0|^2}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.$$

因此不妨设成立.

于是我们可以不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$, 否则用 $c_0f(x)-a_0x-b_0$ 代替即可. 从而只须证

$$\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2=6.$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 因此待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

对上式右边分部积分可得

$$\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(f'(2)g(2)-f'(0)g(0)-\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{14}$$

于是我们希望 $g'(x)\equiv C$, 其中 C 为某一常数,$g(2)=g(0)=0$, 从而设 $g(x)$ 为一次函数, 即设 $g(x)=px+q$. 从而由 $g(2)=g(0)=0$ 可得 $q=p=0$, 进而 $g\equiv 0$, 显然不行!

因此我们猜测 $g(x)$ 为满足 $g(2)=g(0)=0$ 的分段一次函数, 则待定 m, 令

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ m(x-2), & 1<x\leqslant 2 \end{cases}.$$

(因为有 $f(1)=1$ 这个条件, 所以选先 $x=1$ 为分段点) 又由 (14) 式可知需要 f 和 g 都连续才能分部积分, 因此 g

在 $x=1$ 处要连续, 故 $m=1$, 即

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x-2, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}.$$

再代入 (14) 式中验证即可得到证明.

证明 不妨设 $f(0)=f(2)=0, f(1)=1$, 否则用 $c_0f(x)-a_0x-b_0$ 代替即可. 令

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x-2, & 1<x\leqslant 2 \end{cases},$$

则

$$\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad \left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=(-1-1)^2=4.$$

于是由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\Longleftrightarrow\frac{2}{3}\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4\Longleftrightarrow\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 6.$$

□

例题 0.11 设 $f\in C^1[0,1], f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

笔记 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

注 显然要利用 Cauchy 不等式, 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(-\frac{1}{6}g(1)+\frac{1}{6}g(0)-\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{15}$$

将上式与要证不等式对比, 于是我们希望 $g'(x)=C$, 其中 C 为某一常数. 这样才能使

$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=C\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

进而不等式右边才会出现我们需要的 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 从而待定的 $g(x)$ 为线性函数. 设 $g(x)=ax+c, a\neq 0$, 进而不妨设 $g(x)=x+c$, 否则用 $\frac{1}{a}g$ 代替 g 仍有不等式 (15)(因为不等式两边齐次). 于是不等式 (15) 可化为

$$\begin{aligned}\frac{3c^2+3c+1}{3}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 (x+c)^2\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(-\frac{1}{6}(1+c)+\frac{1}{6}c-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{16}$$

因此只需要找到一个合适的 c, 使得上述不等式右边满足

$$\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}. \tag{17}$$

即对 $\forall t=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$, 找到一个 c, 记 $K=\dfrac{3}{3c^2+3c+1}\in\mathbb{R}$, 使得

$$K\left(\frac{1}{6}+t\right)^2\geqslant 2t+\frac{1}{4}\iff\Delta=\frac{12-K}{3}\leqslant 0\iff K\geqslant 12.$$

因此取 $c=-\dfrac{1}{2}$, 得 $K=\dfrac{3}{3c^2+3c+1}=12$.

综上, 令 $g(x)=x-\dfrac{1}{2}$, 则由 (16)和(17) 式可知

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

只需要将 $g(x)=x-\dfrac{1}{2}$ 代入上述步骤进行验证即可得到证明.

证明 令 $g(x)=x-\dfrac{1}{2}$, 则

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12},\quad g(1)=\frac{1}{2},\quad g(0)=-\frac{1}{2}.$$

于是由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\iff\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

注意到 $\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{6}+t\right)^2\geqslant 2t+\dfrac{1}{4}$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 恒成立, 故

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

□

例题 0.12(一类)Hilbert 不等式

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中可积, 证明:

$$\iint_{[0,+\infty)}\frac{f(x)g(y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2\sqrt{\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

2. 设 N 为正整数,a_k,b_k 为实数, 证明:

$$\sum_{m,n=1}^{N}\frac{a_mb_n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}\leqslant 2\sqrt{\sum_{m=1}^{N}a_m^2\cdot\sum_{n=1}^{N}b_n^2}.$$

证明

1.
2.

□