0.1 孤立奇点

定义 0.1

如果 f 在无心圆盘 (即除去圆心后的圆盘)$\{z: 0<|z-z_0|<R\}$ 中全纯, 但在 z_0 处不全纯, 就称 z_0 是 f 的**孤立奇点**.

f 在孤立奇点 z_0 附近可能有三种情形:

(i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$,$a$ 是一有限数, 这时称 z_0 是 f 的**可去奇点**;

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 这时称 z_0 是 f 的**极点**;

(iii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在, 这时称 z_0 是 f 的**本性奇点**.

♣

定理 0.1 (Riemann 定理)

z_0 是 f 的可去奇点的充分必要条件是 f 在 z_0 附近有界.

♡

证明 必要性是显然的, 因为如果 z_0 是 f 的可去奇点, 那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$,$f$ 在 z_0 附近当然有界. 现在设 f 在 z_0 附近有界, 即存在 $\varepsilon>0$, 使得当 z 满足 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,$|f(z)|<M$. 因为 f 在无心圆盘 $D=\{z: 0<|z-z_0|<R\}$ 中全纯, 根据定理**??**,f 在 D 中有 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z\in D, \tag{1}$$

其中,$a_n=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$,$0<\rho<R$,$\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}$. 今取 $0<\rho<\varepsilon$, 故当 $\zeta\in\gamma_\rho$ 时,$|f(\zeta)|<M$. 于是, 由长大不等式得

$$|a_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\leq\frac{M}{2\pi\rho^{-n+1}}\cdot 2\pi\rho=M\rho^n,$$

让 $\rho\to 0$, 即得 $a_{-n}=0$,$n=1,2,\cdots$. 这说明在 f 的 Laurent 展开式 (1) 中, 所有负次幂的系数都是零, 因而展开式 (1) 是一个幂级数. 所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$, 即 z_0 是一个可去奇点. □

注 从上面的证明可以看出,f 在可去奇点处的特征是 Laurent 展开式没有主要部分, 只有全纯部分. 在 z_0 是 f 的可去奇点的情形下,f 在 $\{z: 0<|z-z_0|<R\}$ 中的展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

只要令 $f(z_0)=a_0$, 上式便在圆盘 $B(z_0,R)$ 中成立了, 因而 f 在 z_0 处全纯. 换句话说, 在这种情形下, 只要适当定义 f 在 z_0 处的值, 便能使 f 在 z_0 处全纯. 这就是称 z_0 为 f 的可去奇点的原因.

命题 0.1

z_0 是 f 的极点的充分必要条件是 z_0 为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点.

♠

证明 如果 z_0 是 f 的极点, 即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 那么存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,$f(z)$ 不等于零. 故 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在上述无心圆盘中全纯, 且 $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$, 即 z_0 是 φ 的可去奇点, 且 $\varphi(z_0)=0$.

反之, 如果 z_0 是 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty,$$

即 z_0 是 f 的极点. □

定义 0.2

如果 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点, 就称 z_0 是 f 的 m **阶极点**.

♣

定理 0.2

z_0 是 f 的 m 阶极点的充分必要条件是 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots, \tag{2}$$

其中,$a_{-m}\neq 0$.

♡

注 从这个定理可以看出,f 在极点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分只有有限项.

证明 如果 z_0 是 f 的 m 阶极点, 根据定义, 它是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点. 由命题**??**, 它在 z_0 的邻域中可以表示为 $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$, 这里,$g$ 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$, 因而 $\frac{1}{g}$ 也在 z_0 处全纯. 设 $\frac{1}{g}$ 在 z_0 处的 Taylor 展开为

$$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

这里,$c_0\neq 0$, 于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-m}=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-z_0}+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots.$$

记 $a_n=c_{n+m}, n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots$, 即得展开式 (**??**).

反之, 如果 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为 (**??**) 式, 那么

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

若记上式右端的幂级数为 $\varphi(z)$, 则 φ 在 z_0 处全纯, 且 $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$. 因而 $\frac{1}{\varphi}$ 也在 z_0 处全纯, 于是

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}$$

在 z_0 附近成立. 由命题**??**,z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 所以是 f 的 m 阶极点. □

定理 0.3 (Weierstrass 定理)

设 z_0 是 f 的本性奇点, 那么对任意 $A\in\mathbb{C}_\infty$, 必存在趋于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A$.

♡

注 f 在本性奇点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分有无穷多项. 实际上, 这个定理证明了更深刻的结果.

证明 先设 $A=\infty$. 因为 z_0 是 f 的本性奇点, 故 f 在 z_0 附近无界. 于是对任意自然数 n, 总能找到 z_n, 使得 $|z_n-z_0|<\frac{1}{n}$, 但 $|f(z_n)|>n$, 这说明 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\infty$.

再设 A 是一个有限数. 令 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$, 我们证明 φ 在 z_0 的邻域中无界. 不然的话,z_0 是 φ 的可去奇点, 适当选择 $\varphi(z_0)$ 的值, 可使 φ 在 z_0 处全纯. 如果 $\varphi(z_0)\neq 0$, 则因 $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}+A$,$f$ 也在 z_0 处全纯, 这不可能. 故必有 $\varphi(z_0)=0$, 由命题 0.1可知 z_0 是 $f(z)-A$ 的极点, 也不可能. 所以,φ 在 z_0 的邻域中无界. 于是, 对任意自然数 n, 存在 z_n, 使得 $|z_n-z_0|<\frac{1}{n}$, 但 $\frac{1}{|f(z)-A|}>n$, 即 $|f(z)-A|<\frac{1}{n}$. 这就证明了 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A$. □

定理 0.4 (Picard 定理)

全纯函数在本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有穷复值, 最多只有一个例外.

♡

注 例如, 考虑函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, 它在 $z=0$ 附近是全纯的. 若让 z 沿着 x 轴分别从 0 的左边和右边趋于 0, 可得

$$\lim_{z=x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,$$
$$\lim_{z=x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty.$$

这说明 $\lim\limits_{z\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 不存在, 所以 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 对于任意复数 $a\neq 0$, 若取 $z_n=(\log a+2n\pi\mathrm{i})^{-1}$, 则 $f(z_n)=\mathrm{e}^{\log a+2n\pi\mathrm{i}}=a$. 由于 $z_n\to 0$, 这说明 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的邻域中可以无穷多次地取到非零值 a, 但 0 是它的唯一的例外值.

定义 0.3

如果 f 在无穷远点的邻域 (不包括无穷远点) $\{z:0\leqslant R<|z|<\infty\}$ 中全纯, 就称 ∞ 是 f 的孤立奇点. ♣

注 在这种情形下, 作变换 $z=\dfrac{1}{\zeta}$, 记

$$g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

则 g 在 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ 中全纯, 即 $\zeta=0$ 是 g 的孤立奇点.

定义 0.4

设 $g(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, 如果 $\zeta=0$ 是 g 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 那么我们相应地称 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点. ♣

命题 0.2

设 g 在原点的邻域中有 Laurent 展开:

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R},$$

则 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,$$

其中,$b_n=a_{-n},n=0,\pm 1,\cdots$. 特别地, 如果 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点或 f 在 $z=\infty$ 处全纯, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}. \tag{3}$$

如果 $z=\infty$ 是 f 的 m 阶极点, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots, \tag{4}$$

如果 $z=\infty$ 是 f 的本性奇点, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=\cdots+b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots. \tag{5}$$

这时, 我们称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 为 f 的**主要部分**, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}$ 为 f 的**全纯部分**. ♠

证明 因为 g 在原点的邻域中有 Laurent 展开:

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R},$$

所以 f 在 $R < |z| < \infty$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n,$$

其中,$b_n = a_{-n}, n = 0, \pm 1, \cdots$.

特别地, 如果 $z = \infty$ 是 f 的可去奇点, 即 $\zeta = 0$ 是 g 的可去奇点, 因而由Riemann 定理的证明可知 $a_n = 0$ $(n = -1, -2, \cdots)$. 如果 f 在 $z = \infty$ 处全纯, 由Riemann 定理的注可知 $a_n = 0$ $(n = -1, -2, \cdots)$. 所以此时 f 的 Laurent 展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}.$$

同样道理, 如果 $z = \infty$ 分别是 f 的 m 阶极点或本性奇点, 那么 f 在 $R < |z| < \infty$ 中分别有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z) = b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + \cdots ,$$

或

$$f(z) = \cdots + b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + \cdots .$$

□