0.1 练习

✍ **练习 0.1** 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_n^1\\1&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

笔记 组合数公式: $\mathrm{C}_m^{k-1}+\mathrm{C}_m^k=\mathrm{C}_{m+1}^k$.

于是有

$$\mathrm{C}_m^k=\mathrm{C}_{m+1}^k-\mathrm{C}_m^{k-1}$$
$$\mathrm{C}_m^{k-1}=\mathrm{C}_{m+1}^k-\mathrm{C}_m^k$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_n^1\\1&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot r_{i-1}+r_i}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_0^0&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_2^1-\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_3^2-\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2-\mathrm{C}_n^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}-\mathrm{C}_{2n-3}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathrm{C}_0^0&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_1^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\0&\mathrm{C}_2^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_2^1-\mathrm{C}_1^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1-\mathrm{C}_{n-2}^1\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_3^2-\mathrm{C}_2^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}-\mathrm{C}_{2n-4}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-2}^0\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分, 并具有相同的规律. 不断这样做下去, 最后可得 $|\boldsymbol{A}|=1$

✍ **练习 0.2** 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!$$

练习 0.3 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-a_i)r_1+r_i}a_1\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n\\ a_1b_2-a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & a_3b_n-a_nb_3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}}(-1)^{n+1}a_1b_n\begin{vmatrix}a_1b_2-a_2b_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

$$=a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1}).$$

练习 0.4 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}.$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} a^n + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^n - a^{n-2}.$$

注 本题也可由命题**??**直接得到,$|A| = a^n - a^{n-2}$.

练习 0.5 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 *Vieta* 定理可知,$x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 因此, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3]{r_i + r_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

练习 0.6 设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{11} & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{21} & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n1} & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i + j_1} \begin{vmatrix} (n-1)\,(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (n-1)\,(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)\,(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)j_1 + j_i} (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i + j_1} (n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

练习 0.7 计算 n 阶行列式:

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.
$$

解

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).
$$

注 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果.

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{命题1.2}} -\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}(n-1).
$$

练习 0.8 计算 n 阶行列式:

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.
$$

笔记 既可以将 $|\boldsymbol{A}|$ 看作命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.

也可以利用求和法将 $|\boldsymbol{A}|$ 化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题??}} (a_1+b)\,b^{n-1}-\sum_{i=2}^{n} b^{n-2}a_i\,(-b)=b^{n-1}\left[(a_1+b)+\sum_{i=2}^{n} a_i\right]=\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)b^{n-1}.$$

解法二:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-a_i\cdot j_1+j_i} (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)b^{n-1}.$$

练习 0.9 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

笔记 求和法的经典应用.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\3&4&5&\cdots&1&2\\2&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&2-n&2-n\\1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-j_1+j_i}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\n-2&-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&0&\cdots&-n&-n\\1&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}-\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&-n&-n\\0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{n(n+1)}{2}(-n)^{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

练习 0.10 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\cdots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\cdots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&\vdots\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\cdots&(a_n+b_n)^n\end{vmatrix}$.

解 由二项式定理可知

$$(a_i+b_j)^n=a_i{}^n+\mathrm{C}_n^1a_i{}^{n-1}b_j+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_ib_j{}^{n-1}+b_j{}^n,\text{其中}i,j=0,1,\cdots,n.$$

从而

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0{}^n+\mathrm{C}_n^1a_0{}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0b_0{}^{n-1}+b_0{}^n&\cdots&a_0{}^n+\mathrm{C}_n^1a_0{}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0b_n{}^{n-1}+b_n{}^n\\a_1{}^n+\mathrm{C}_n^1a_1{}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1b_0{}^{n-1}+b_0{}^n&\cdots&a_1{}^n+\mathrm{C}_n^1a_1{}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1b_n{}^{n-1}+b_n{}^n\\\vdots&&\vdots\\a_{n-1}{}^n+\mathrm{C}_n^1a_{n1}{}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}b_0{}^{n-1}+b_0{}^n&\cdots&a_{n-1}{}^n+\mathrm{C}_n^1a_{n-1}{}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}b_n{}^{n-1}+b_n{}^n\\a_n{}^n+\mathrm{C}_n^1a_n{}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_nb_0{}^{n-1}+b_0{}^n&\cdots&a_n{}^n+\mathrm{C}_n^1a_n{}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_nb_n{}^{n-1}+b_n{}^n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_0{}^n&a_0{}^{n-1}&\cdots&a_0&1\\a_1{}^n&a_1{}^{n-1}&\cdots&a_1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1}{}^n&a_{n-1}{}^{n-1}&\cdots&a_{n-1}&1\\a_n{}^n&a_n{}^{n-1}&\cdots&a_n&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\\mathrm{C}_n^1b_0&\mathrm{C}_n^1b_1&\cdots&\mathrm{C}_n^1b_{n-1}&\mathrm{C}_n^1b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\mathrm{C}_n^{n-1}b_0{}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}b_1{}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_n^{n-1}b_{n-1}{}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}b_n{}^{n-1}\\b_0{}^n&b_1{}^n&\cdots&b_{n-1}{}^n&b_n{}^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1&a_0&\cdots&a_0{}^{n-1}&a_0{}^n\\1&a_1&\cdots&a_1{}^{n-1}&a_1{}^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n{}^{n-1}&a_n{}^n\end{vmatrix}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\b_0&b_1&\cdots&b_{n-1}&b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b_0{}^{n-1}&b_1{}^{n-1}&\cdots&b_{n-1}{}^{n-1}&b_n{}^{n-1}\\b_0{}^n&b_1{}^n&\cdots&b_{n-1}{}^n&b_n{}^n\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0\le j<i\le n}(a_i-a_j)\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}(b_i-b_j) == \prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}(a_j-a_i)(b_i-b_j).$$

练习 0.11 求证:n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \cos nx.$$

解 解法一:

设 $|\boldsymbol{A}| = D_n$, 其中 n 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 的阶数 $(n \ge 0)$. 易知 $D_0 = 1, D_1 = \cos x$.

从而 $|\boldsymbol{A}| = D_n \xlongequal[\text{命题??}]{\text{按最后一列展开}} 2\cos x D_{n-1} - D_{n-2}\ (n \ge 2)$.

其对应的特征方程为 $\lambda^2 = 2\cos x\lambda - 1$, 解得 $\lambda_1 = \cos x + i\sin x, \lambda_2 = \cos x - i\sin x$.

于是当 $n \ge 2$ 时, 我们有 $D_n = (\lambda_1+\lambda_2)D_{n-1} + \lambda_1\lambda_2 D_{n-2}$.

进而

$$\begin{aligned} D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= \lambda_2(D_n - \lambda_1 D_{n-1}), \\ D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= \lambda_1(D_n - \lambda_2 D_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

由此可得

$$\begin{aligned} D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= {\lambda_2}^{n-1}(D_1 - \lambda_1 D_0) = -i\sin x \cdot {\lambda_2}^{n-1}, \\ D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= {\lambda_1}^{n-1}(D_1 - \lambda_2 D_0) = i\sin x \cdot {\lambda_1}^{n-1}. \end{aligned}$$

若 $x \ne k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 则联立上面两式, 解得

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{i\sin x\cdot{\lambda_1}^n + i\sin x\cdot{\lambda_2}^n}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{i\sin x\cdot(\cos x + i\sin x)^n + i\sin x\cdot(\cos x - i\sin x)^n}{2i\sin x} \\ &\xlongequal[e^{ix}=\cos x+i\sin x,e^{-ix}=\cos x-i\sin x.]{Euler\text{公式}} \frac{i\sin x\cdot e^{nxi} + i\sin x\cdot e^{-nxi}}{2i\sin x} = \frac{i\sin x\cdot(\cos nx + i\sin nx) + i\sin x\cdot(\cos nx - i\sin nx)}{2i\sin x} \\ &= \frac{2i\sin x\cdot\cos nx}{2i\sin x} = \cos nx. \end{aligned}$$

若 $x = k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos k\pi$. 从而由(1)式可得,$D_n - \cos k\pi D_{n-1} = -i\sin x\cdot(\cos k\pi) = 0$.

于是

$$D_n = \cos k\pi D_{n-1} = (\cos k\pi)^2 D_{n-2} = \cdots = (\cos k\pi)^n D_0 = (\cos k\pi)^n = (-1)^{kn} = \cos(nk\pi) = \cos nx.$$

解法二:仿照练习0.13中的数学归纳法证明.

练习 0.12 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 观察原行列式我们可以得到,D_n 的每列和有一定的规律, 即除了第一列和最后一列, 中间每列和均为 0. 并且 D_n 是三对角行列式. 因此, 我们既可以直接应用三对角行列式的结论 (即命题??), 又可以使用求和法进行求解. 如果我们直接应用三对角行列式的结论 (即命题??), 按照对一般的三对角行列式展开的方法能得到相应递推式, 但是这样得到的递推式并不是相邻两项之间的递推, 后续求解通项并不简便. 又因为使用求和法计算行列式后续

计算一般比较简便所以我们先采用求和法进行尝试.

解 解法一: 当 $n \geq 1$ 时, 我们有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} -a_1D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$= 1 - a_1D_{n-1}.$$

其中 D_{n-i} 表示 D_{n-i+1} 去掉第一行和第一列得到的 $n-i$ 阶行列式,$i = 1,2,\cdots,n-1$. (或者称 D_{n-i} 表示以 $a_{i+1},\cdots,a_n$ 为未定元的 $n-i$ 阶行列式,$i = 1,2,\cdots,n-1$)

由递推不难得到

$$D_n = 1 - a_1(1 - a_2D_{n-2}) = 1 - a_1 + a_1a_2D_{n-2} = \cdots = 1 - a_1 + a_1a_2 - a_1a_2a_3 + \cdots + (-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

解法二:仿照练习0.13中的数学归纳法证明.

练习 0.13 设 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$A_n = a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

笔记 用**数学归纳法**证明与行列式有关的结论.

练习0.11和练习0.12都可同理使用用数学归纳法证明 (对阶数 n 进行归纳即可).

证明 (数学归纳法) 对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1,2$ 时, 结论显然成立. 假设阶数小于 n 结论成立.

现证明 n 阶的情形. 注意到

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} = (a_{n-1}+a_n)A_{n-1} - a_{n-1}^2A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子中得

$$\begin{aligned} A_n &= (a_{n-1}+a_n)A_{n-1} - a_{n-1}^2A_{n-2} \\ &= (a_{n-1}+a_n)a_0a_1\cdots a_{n-1}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right) - a_{n-1}^2a_0a_1\cdots a_{n-2}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}}\right) \\ &= a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right) + a_0a_1\cdots a_{n-2}a_{n-1}^2\frac{1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0a_1\cdots a_{n-1}\left[a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+1\right]\\
&= a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right).
\end{aligned}
$$

故由数学归纳法可知, 结论对任意正整数 n 都成立. □

练习 0.14 设 $n(n>2)$ 阶行列式 $|A|$ 的所有元素或为 1 或为 -1, 求证:$|A|$ 的绝对值小于等于 $\frac{2}{3}n!$.

解 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=3$ 时, 将 $|A|$ 的第一列元素为-1 的行都乘以-1, 再将 $|A|$ 的第一行元素为 1 的列都乘以-1,$|A|$ 的绝对值不改变.

因此不妨设 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & a_0 & b_0\\ 1 & c_0 & d_0\end{vmatrix}$, 其中$a_0,b_0,c_0,d_0=1$或$-1$.

从而

$$
|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & a_0 & b_0\\ 1 & c_0 & d_0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{j_1+j_i}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & b\\ 1 & c & d\end{vmatrix}, \text{其中}a,b,c,d=0\text{或}2.
$$

于是

$$
abs\left(|A|\right)=abs\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & b\\ 1 & c & d\end{vmatrix}\right)=abs\left(ad-bc\right)\leqslant 4=\frac{2}{3}\cdot 3!
$$

假设 n-1 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形. 将 $|A|$ 按第一行展开得

$$
|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \text{其中}a_{1i}=1\text{或}-1\,(i=1,2\cdots,n)\,.
$$

从而由归纳假设可得

$$
\begin{aligned}
abs\left(|A|\right)&=abs\left(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\right)\leqslant abs\left(A_{11}\right)+abs\left(A_{12}\right)+\cdots+abs\left(A_{1n}\right)\\
&\leqslant \frac{2}{3}\left(n-1\right)!+\frac{2}{3}\left(n-1\right)!+\cdots+\frac{2}{3}\left(n-1\right)!\\
&= n\cdot\frac{2}{3}\left(n-1\right)!=\frac{2}{3}n!.
\end{aligned}
$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

练习 0.15 计算 n 阶行列式:

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix}.
$$

笔记 解法一 (大拆分法): 注意到

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0\\ b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}a-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}A_i=(a-b)^n+\sum_{i=1}^{n}A_i.
\end{aligned}
$$

其中 A_i 是第 i 行元素全为 b, 主对角元素除了 (i,i) 元外都为 $a-b$, 其他元素都为 0 的 n 阶行列式.

又因为

$$A_i = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{vmatrix} a-b & & & & \\ & \ddots & & & \\ b & \cdots & b & \cdots & b \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix} = b\left(a-b\right)^{n-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$|\boldsymbol{A}| = (a-b)^n + \sum_{i=1}^{n} A_i = (a-b)^n + nb\left(a-b\right)^{n-1} = \left[a + (n-1)\,b\right](a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \cdots & b \\ b+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b)\,D_{n-1} = b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1}.(n \geq 2)$$

从而由上式递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1} \\ &= b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)\left[b\left(a-b\right)^{n-2} + (a-b)\,D_{n-2}\right] = 2b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\ &= \cdots = (n-1)\,b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\ &= (n-1)\,b\left(a-b\right)^{n-1} + (a-b)^{n-1}\,a \\ &= \left[a+(n-1)\,b\right](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法三 (求和法):

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} a+(n-1)\,b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)\,b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)\,b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[a+(n-1)\,b\right] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \left[a+(n-1)\,b\right] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = \left[a+(n-1)\,b\right](a-b)^{n-1}.$$

解法四 (" 爪" 型行列式的推广):

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-j_i+j_1}\begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a-(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

✍ **练习 0.16** 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一 (大拆分法): 令

$$|\boldsymbol{A}(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| + tu, u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

当 $t=-b$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-b)| = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| - bu = (a-b)^n.$$

当 $t=-c$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-c)| = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| - cu = (a-c)^n.$$

若 $b \neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b=c$, 则由练习0.15可知

$$|\boldsymbol{A}| = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1} = b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1}$$

$$= b(a-c)^{n-1} + + (a-b)D_{n-1}. (n \geq 2)$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c+(a-c)&b&\cdots&b\\c+0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c+0&c&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c&b&\cdots&b\\c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&\cdots&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a-c&b&\cdots&b\\0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&c&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=c\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b\\1&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c&\cdots&a\end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}=c\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c-b&\cdots&a-b\end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}$$

$$=c\,(a-b)^{n-1}++(a-c)\,D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

若 $b\neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}|=D_n=\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b=c$, 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|=D_n&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}\\&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\left[b\,(a-b)^{n-2}+(a-b)\,D_{n-2}\right]=2b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^2\,D_{n-2}\\&=\cdots=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,D_1\\&=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,a\\&=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.\end{aligned}$$

当 $b=c$ 时, 也可以由练习0.15可知

$$|\boldsymbol{A}|=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

练习 0.17 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式, 求证: 对任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 均有

$$\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_2(a_1)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

证明 证法一 (大拆分法): 因为 $f_k(x)(1\leq k\leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以它们都是单项式 $1,x,\cdots,x^{n-2}$ 的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这 $n-1$ 个单项式进行拆分, 最后得到至多 $(n-1)!$ 个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有 n 列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

证法二 (多项式根的有限性): 令 $f(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)&f_2(a_1)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(x)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(x)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}$, 则将 $f(x)$ 按第一列展开得到

$$f(x)=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x).$$

其中 k_i 为行列式 $f(x)$ 的第 $(i,1)$ 元素的代数余子式,$i=1,2,\cdots,n$.

注意 k_i 与 x 无关, 均为常数. 若 $f(x)$ 不恒为 0, 则又因为 $f_k(x)(1\leq k\leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以 $deg f(x)\leq n-2$. 但是, 注意到 $f(a_2)=f(a_3)=\cdots=f(a_n)=0$, 即 $f(x)$ 有 $n-1$ 个根. 于是由余数定理可知,$(x-a_2)\cdots(x-a_n)\,|\,f(x)$. 从而 $n-1=deg\,(x-a_2)\cdots(x-a_n)\geq deg f(x)$. 这与 $deg f(x)\leq n-2$ 矛盾. 故 $f(x)\equiv 0$, 当然也有 $f(a_1)=0$.

证法三:

设多项式

$$f_k(x)=c_{k,n-2}x^{n-2}+\cdots+c_{k1}x+c_{k0}, 1\le k\le n.$$

则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0}\\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2}\end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是 $n\times(n-1)$ 和 $(n-1)\times n$ 矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零. □

命题 0.1

计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y\\ z & x_2 & y & \cdots & y & y\\ z & z & x_3 & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y\\ z & z & z & \cdots & z & x_n\end{vmatrix}.$$

解 (小拆分法) 对第 n 列进行拆分即可得到递推式: (对第 1 或 n 行 (或列) 拆分都可以得到相同结果)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y+0\\ z & x_2 & y & \cdots & y & y+0\\ z & z & x_3 & \cdots & y & y+0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y+0\\ z & z & z & \cdots & z & y+x_n-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y\\ z & x_2 & y & \cdots & y & y\\ z & z & x_3 & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y\\ z & z & z & \cdots & z & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0\\ z & x_2 & y & \cdots & y & 0\\ z & z & x_3 & \cdots & y & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & 0\\ z & z & z & \cdots & z & x_n-y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x_2-z & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3-z & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-z & 0\\ z & z & z & \cdots & z & y\end{vmatrix}+(x_n-y)D_{n-1}=y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-z)+(x_n-y)D_{n-1}. \tag{2}$$

将原行列式转置后, 同理可得

$$D_n=D_n^T=\begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z+0\\ y & x_2 & z & \cdots & z & z+0\\ y & y & x_3 & \cdots & z & z+0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z+0\\ y & y & y & \cdots & y & z+x_n-z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z\\ y & x_2 & z & \cdots & z & z\\ y & y & x_3 & \cdots & z & z\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z\\ y & y & y & \cdots & y & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & 0\\ y & x_2 & z & \cdots & z & 0\\ y & y & x_3 & \cdots & z & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & 0\\ y & y & y & \cdots & y & x_n-z\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + (x_n-z)\,D_{n-1}^T = z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-z)\,D_{n-1}. \tag{3}$$

若 $z\neq y$, 则联立(2)(3)式, 解得

$$D_n=\frac{1}{z-y}\left[z\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)-y\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)\right];$$

若 $z=y$, 则由(2)式递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\,D_{n-1} \\ &= y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\left(y\prod_{i=1}^{n-2}(x_i-y)+(x_{n-1}-y)\,D_{n-2}\right) \\ &= y\prod_{j\neq n}(x_i-y)+y\prod_{j\neq n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\,(x_{n-1}-y)\,D_{n-2} \\ &= \cdots = y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)D_0 \\ &= y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y). \end{aligned}$$

练习 0.18 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

笔记 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的 t 对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的 t_i, 所以推广的大拆分也不行)

解 (小拆分法) 将 D_n 最后一列拆成两列得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

若 $a_n \neq 0$, 则由上式可得

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{\text{对第一个行列式}:-a_ij_n+j_i} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} = a_n^2 + D_{n-1}.\ (n \geq 2)$$

若 $a_n = 0$, 则上面第一个行列式等于 0, 进而 $D_n = D_{n-1}(n \geq 0)$. 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n = a_n^2 + D_{n-1} = a_n^2 + \left(a_{n-1}^2 + D_{n-2}\right) = \cdots = \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + D_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

练习 0.19 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}.$$

解 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\begin{aligned} &\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k \\ &= \cos^k\theta + \mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta - \mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta - \cdots \\ &= \cos^k\theta + \mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta - \mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + \mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta - \cdots \end{aligned}$$

比较实部可得

$$\begin{aligned} \cos k\theta &= \cos^k\theta\left(1 + \mathrm{C}_k^2 + \mathrm{C}_k^4 + \cdots\right) - \mathrm{C}_k^2\cos^{k-2} + \mathrm{C}_k^4\cos^{k-4} - \cdots \\ &= 2^{k-1}\cos^k\theta - \mathrm{C}_k^2\cos^{k-2} + \mathrm{C}_k^4\cos^{k-4} - \cdots \end{aligned}$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成 $\cos\theta_j (j = 2, 3, \cdots, n)$ 的多项式.

再利用行列式的性质, 可依次将第 $3, 4, \cdots, n$ 列消去除最高次项外的其他项, 从而得到

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & 2\cos^2\theta_n & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{1\leq i<j\leq n} \left(\cos\theta_j - \cos\theta_i\right).$$

结论 组合式计算常用公式:

(1)$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^m + \mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$

(2)$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$

证明:(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^m &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!\,(n-m)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \mathrm{C}_{n-1}^m + \mathrm{C}_{n-1}^{m-1} \end{aligned}$$

(2)(i) 当 n 为奇数时, 由 $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, 可得

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n$$

由于 $C_{n-1}^n = 0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

(ii) 当 n 为偶数时, 由 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$, 可得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^n=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4\cdots+C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^n$$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4+C_{n-1}^5+\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}$$

由于 $C_{n-1}^n=0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

综上所述,$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$.

练习 0.20 求下列行列式式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & \sin2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1\\ \sin\theta_2 & \sin2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\theta_n & \sin2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n\end{vmatrix}.$$

笔记 可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论.

解 根据和差化积公式, 可得

$$\sin k\theta-\sin(k-2)\theta=2\sin\theta\cos(k-1)\theta, k=2,3,\cdots,n.$$

再结合上一题结论, 可得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & \sin2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1\\ \sin\theta_2 & \sin2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\theta_n & \sin2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & 2\sin\theta_1\cos\theta_1 & \cdots & 2\sin\theta_1\cos(n-1)\theta_1\\ \sin\theta_2 & 2\sin\theta_2\cos\theta_2 & \cdots & 2\sin\theta_2\cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\theta_n & 2\sin\theta_n\cos\theta_n & \cdots & 2\sin\theta_n\cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=2^{n-1}\prod_{i=1}^n\sin\theta_i\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \cos2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ \cos\theta_2 & \cos2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\theta_n & \cos2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}=2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1}\prod_{i=1}^n\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i)$$

$$=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^n\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i).$$

练习 0.21 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}.$$

笔记 本题也可以使用大拆分法进行求解. 但我们以本题为例介绍利用**升阶法**计算行列式.

解 解法一升阶法:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{小拆分法}}\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&0\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=2x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&\cdots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$=2x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$=[2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

解法二 (大拆分法): 设 $|\boldsymbol{B}(t)|=\begin{vmatrix}x_1+t&x_1^2+t&\cdots&x_1^n+t\\x_2+t&x_2^2+t&\cdots&x_2^n+t\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n+t&x_n^2+t&\cdots&x_n^n+t\end{vmatrix}$, 且 B_{ij} 是 $|\boldsymbol{B}(0)|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式.

根据行列式的性质将 $|\boldsymbol{A}|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 t 所在的列展开得到

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}(1)|=|\boldsymbol{B}(0)|+\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij},$$

$$|\boldsymbol{B}(-1)|=|\boldsymbol{B}(0)|-\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}.$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{B}(0)|-|\boldsymbol{B}(-1)|$. 注意到

$$|\boldsymbol{B}(0)|=\begin{vmatrix}x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^n\\1&x_2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

又由行列式性质可得

$$|\boldsymbol{B}(-1)|=\begin{vmatrix}x_1-1&x_1^2-1&\cdots&x_1^n-1\\x_2-1&x_2^2-1&\cdots&x_2^n-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n-1&x_n^2-1&\cdots&x_n^n-1\end{vmatrix}=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\begin{vmatrix}1&x_1+1&\cdots&x_1^{n-1}+x_1^{n-2}\cdots+x_1+1\\1&x_2+1&\cdots&x_2^{n-1}+x_2^{n-2}\cdots+x_2+1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n+1&\cdots&x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\cdots+x_n+1\end{vmatrix}$$

$$=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\begin{vmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&\cdots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

故可得

$$|\boldsymbol{A}| = 2|\boldsymbol{B}(0)| - |\boldsymbol{B}(-1)| = 2x_1x_2\cdots x_n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$
$$= [2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

结论 **升阶法:** 将原行列式加上一行和一列使得到到新行列式的阶数比原行列式要高一阶.

升阶法的应用:

(1) 当原行列式每一行具有相同的结构时, 我们可以在原行列式的基础上加上一行和一列, 新加上的一列和一行需要满足: 新的一列除了与新的一行交叉位置的元素为 1 外其余全为 0(这样才能保证新的行列式按新的一行或一列展开后与原行列式相同), 并且新加上的一行除 1 以外其他位置的元素就取原行列式中每一行所具有的相同结构 (这样可以利用行列式的性质将每一行中的相同的结构减去, 进而达到简化原行列式的目的). 具体例子见练习0.21.

(2) 当原行列式是我们由熟悉的行列式去掉某一行、或某一列、或某一行和一列得到的, 我们可以在原行列式的基础上补充上缺少的那一行和一列, 再进行计算得到新行列式的式子. 再将新行列式按照新添加的一行或一列展开得到的对应元素乘与其对应的代数余子式, 而新添加的一行和一列交叉位置的元素对应的余子式就是原行列式, 最后两边式子比较系数一般就能得到原行列式的值. 具体例子见练习0.22.

练习 0.22 求下列 n 阶行列式的值 $(1\leq i\leq n-1)$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解 令

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix} = (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{4}$$

而上式右边是关于 y 的 n 次多项式, 并且其 y^i 前的系数是

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leqslant n}(-1)^{n-i}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开, 得

$$|\boldsymbol{B}| = A_{n1} + A_{n2}y + \cdots + A_{ni}y^i + \cdots + A_{nn}y^n,$$

其中 A_{nk} 为 $|\boldsymbol{B}|$ 的 (n,k) 位置元素的代数余子式,$k=1,2,\cdots,n$.

注意到 A_{nk} 均与 y 无关. 因此 $|\boldsymbol{B}|$ 作为关于 y 的 n 次多项式, 其 y^i 前的系数是

$$A_{ni} = (-1)^{n+1+i+1}|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+i}|\boldsymbol{A}|.$$

再结合(4)式, 可知

$$(-1)^{n+i}|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leqslant n}(-1)^{n-i}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

故 $|\boldsymbol{A}| = x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

练习 0.23 求下列 n 阶行列式的值, 其中 $a_i \neq 0(1 \leq i \leq n)$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

笔记 解法一中不仅使用了升阶法还使用了分块" 爪" 型行列式的计算方法. 观察到各行各列有不同的公共项, 因此可以利用升阶法将各行各列的公共项消去.

解 解法一 (升阶法):

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal{升阶} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n+1]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix} \xlongequal{升阶} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ -a_2 & 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,3,4\cdots,n+2]{j_1+j_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4\cdots,n+2]{\substack{-\frac{1}{2}j_i+j_1 \\ \frac{1}{2a_{i-2}}j_i+j_2}} \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{S}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{T}{2} & 1-\frac{n}{2} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$. 注意到上述行列式是分块上三角行列式, 从而可得

$$|\boldsymbol{A}| = (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{(n-2)^2 - ST}{4} = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})].$$

解法二 (直接计算两个矩阵和的行列式):

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|$.

从而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right)\tag{5}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式.

我们先来计算 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$,$k=1,2,\cdots,n$. 拆分 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的第一列得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}&=\begin{vmatrix}a_{i_1}+a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2}+a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k}+a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{i_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{i_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{j_1} & a_{i_1} & \cdots & a_{i_1}\\ a_{j_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k} & \cdots & a_{i_k}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

因此当 $k\geqslant 3$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=0$; 当 $k=2$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{i_1} & a_{j_2}\\ a_{i_2} & a_{j_2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{j_1} & a_{i_1}\\ a_{j_1} & a_{i_2}\end{vmatrix}=$ $(a_{i_1}a_{j_2}-a_{i_2}a_{j_2})(a_{i_2}a_{j_1}-a_{i_1}a_{j_1})$; 当 $k=1$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1\\ j_1\end{pmatrix}=a_{i_1}+a_{j_1}$.

又注意到 $|\boldsymbol{C}|$ 只有主子式非零, 而其主子式 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=(-2)^k a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$. 于是当 $\exists m\in\{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $i_m\neq j_m$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=0$; 当 $i_m\neq j_m$,$m=1,2,\cdots,k$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=$ $(-2)^{n-k}a_1\cdots\hat{a}_{i_1}\cdots\hat{a}_{i_2}\cdots\hat{a}_{i_k}\cdots a_n$.

故当 $n\geqslant 3$ 时,(5)式可化为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right)\\ &=|\boldsymbol{C}|+\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant j_1\leqslant n}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1\\ j_1\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1\\ j_1\end{pmatrix}+\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} = |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \\
&= (-2)^n a_1a_2\cdots a_n + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} 2a_i(-2)^{n-1}a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[(a_ia_j-a_j^2)(a_ia_j-a_i^2)(-2)^{n-2}a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_n] \\
&= (-2)^n a_1a_2\cdots a_n - (-2)^n\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_1a_2\cdots\cdots a_n + (-2)^{n-2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[-(a_i-a_j)^2a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_n] \\
&= (-2)^n a_1a_2\cdots a_n - (-2)^n na_1a_2\cdots\cdots a_n - (-2)^{n-2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[(a_i-a_j)^2a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_n] \\
&= (-2)^n\prod_{i=1}^n a_i(1-n) - (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j} \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i})] \\
&= (-2)^n\prod_{i=1}^n a_i(1-n) - (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j} \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_j}{a_i}+\frac{a_i}{a_j}-2\right)\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n-\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{a_i}{a_j}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n-\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{a_i}{a_j}-\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{a_i}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n 2\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n-\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{a_i}{a_j}-n\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[4-4n+n+n\,(n-1)-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{a_i}{a_j}\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left[n^2-4n+4-\sum_{i=1}^n a_i\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j}\right] \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i})].
\end{aligned}
$$

解法三: 令 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}$, 则

$$
A = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = B + \Lambda I_2^{-1}\Lambda'.
$$

于是由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\begin{aligned}
|A| &= |I|\left|B+\Lambda I_2^{-1}\Lambda'\right| = \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & B\end{vmatrix} = |B|\left|I_2-\Lambda' B^{-1}\Lambda\right| \\
&= \begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix} \cdot \left| I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & & & \\ & -\frac{1}{2a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & -\frac{1}{2a_2} & \cdots & -\frac{1}{2a_n} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \right| = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} \frac{n+2}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & \frac{n+2}{2} \end{vmatrix} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[(n+2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \right].
\end{aligned}$$

结论 **对角矩阵行列式的子式和余子式:**

设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, 则其 k 阶子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 k 阶主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外都为零, 其中 $k=1,2,\cdots,n$.

记 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式 ($n-k$ 阶). 于是 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外也都为零, 其中 $k=1,2,\cdots,n$.

并且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k},$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_1\cdots \hat{a}_{i_1}\cdots \hat{a}_{i_2}\cdots \hat{a}_{i_k}\cdots a_n$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$.

练习 0.24 若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 证明:$|A|=0$.

解 证明由行列式的组合定义可得

$$|A| = \sum_{1\le k_1 k_2\cdots k_n\le n} (-1)^{\tau(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

由于 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 故 $a_{k_1 1},a_{k_2 2},\cdots,a_{k_n n}$ 中至少有一个为零, 从而 $a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}=0$, 因此 $|A|=0$. 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 由抽屉原理可知,$|A|$ 至少有一列其零元素的个数大于等于 $\left[\frac{n^2-n}{n}\right]+1=n$, 即 $|A|$ 至少有一列其元素全为零, 因此 $|A|=0$.

练习 0.25 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n(n\ge 2)$ 阶非异整数方阵, 满足对任意的 i,j,$|A|$ 均可整除 a_{ij}, 证明:$|A|=\pm 1$.

解 $|A|$ 可整除每个元素 $a_{i,j}$, 故由行列式的组合定义

$$\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

可知 $|A|^n$ 可整除 $|A|$ 中每个单项 $a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$, 从而 $|A|^n$ 可整除 $|A|$, 即有 $|A|^{n-1}$ 可整除 1, 于是 $|A|^{n-1}=\pm 1$. 又由行列式的组合定义可知 $|A|$ 是整数, 从而只能是 $|A|=\pm 1$.

✍ **练习 0.26** 利用行列式的 $Laplace$ 定理证明恒等式:

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd)+(ad'-a'd)(bc'-b'c)=0.$$

解 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 $Laplace$ 定理按第一、二列展开得

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0.$$

整理可得

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd)+(ad'-a'd)(bc'-b'c)=0.$$

✍ **练习 0.27** 求 $2n$ 阶行列式的值 (空缺处都是零):

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

解 设原行列式为 D_{2n}, 其中 $2n$ 为行列式的阶数. 不断用 $Laplace$ 定理按第一行及最后一行展开, 可得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行及最后一行展开}} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2n-2}=\left(a^2-b^2\right)D_{2(n-1)}.$$

进而, 由上述递推式可得

$$D_{2n}=\left(a^2-b^2\right)D_{2(n-1)}=\left(a^2-b^2\right)^2D_{2(n-2)}=\cdots=\left(a^2-b^2\right)^{n-1}D_2$$

$$= \left(a^2-b^2\right)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \left(a^2-b^2\right)^n.$$

✍ **练习 0.28** 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的”爪”型行列式.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x-x^2 & x^2-2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x-x^2 & 0 & \cdots & x^2-2a_nx \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{”爪”型行列式}} (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\left(2a_1x-x^2\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{(x^2-2a_ix)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n} a_i^2\left(x^2-2a_1x\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{(x^2-2a_ix)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= \left[\left(x^2-2a_1x\right)+a_1^2\right]\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right).$$

✍ **练习 0.29** 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2]{-j_1+j_i} \begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & c^2 & 0 \\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2]{-r_i+r_2} (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2} (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3\begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$= 2abc(a+b+c)^3.$$

解法二 (求根法):

✍ **练习 0.30** 证明: 若一个 $n(n>1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数(注意:零也是偶数),由行列式的基本性质知道,可将因子 2 提出,剩下的行列式的元素都是整数,其值也是整数,乘以 2 后必是偶数. □

练习 0.31 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

解

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}| \\
&= |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}| + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-2} \sum_{2\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n} \begin{array}{c} 1 \ \cdots \ j_1 \ \cdots \ j_2 \ \cdots \ j_k \ \cdots \ n \\ |\boldsymbol{\alpha}_n, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_1+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_2+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_k+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}| \end{array} \\
&\quad + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-2} \sum_{2\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n} \begin{array}{c} 1 \ \cdots \ j_1 \ \cdots \ j_2 \ \cdots \ j_k \ \cdots \ n \\ |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_1+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_2+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_k+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}| \end{array} . \\
&= |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}| \\
&= c + (-1)^{n-1} |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \\
&= c + (-1)^{n-1} c \\
&= \begin{cases} 0\ , n\text{为偶数} \\ 2c, n\text{为奇数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

练习 0.32 令

$$
(a_1a_2\cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},
$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$
a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_2a_3\cdots a_n)}.
$$

解 假设等式对 $\forall n \leq k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n = k$ 时, 将行列式 $(a_1a_2, \cdots, a_k)$ 按第一列展开得

$$
\begin{aligned}
(a_1a_2\cdots a_k) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix} \\
&= a_1 (a_2a_3\cdots a_k) + (a_3a_4\cdots a_k) .
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3a_4\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \cfrac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}.
$$

于是由归纳假设可知

$$
\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \cfrac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.
$$

故由数学归纳法可知结论成立.

练习 0.33 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-r_i+r_{i-1}}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&-1&0&\cdots&0\\3&3&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n.$$

练习 0.34 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&1&1\\2&-1&-1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix}n-1&0&0&\cdots&0&0\\n&-2&0&\cdots&0&0\\n+1&-2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)^{n-2}(n-1).$$

练习 0.35 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时, 但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整. 此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律, 再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式, 而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式. 后续求解很繁琐, 因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&x_1-a&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2-a&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n-a&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\\1&y-a&y(y-a)&y^2(y-a)&\cdots&y^{n-1}(y-a)\end{vmatrix}$, 则

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&x_2^3&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&x_n^3&\cdots&x_n^n\\1&y&y^2&y^3&\cdots&y^n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由上式可知,$|\boldsymbol{B}|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开得到

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}B_{n+1,i}y^{i-1},\text{其中}B_{ni}\text{是}|\boldsymbol{B}|\text{的第}(n+1,i)\text{元的余子式},i=1,2,\cdots,n+1.$$

从而

$$|\boldsymbol{B}|=(-1)^{n+2}B_{n+1,1}+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i+1}B_{n+1,i}y^{i-2}(y-a)=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{6}$$

又易知 $B_{n+1,2}=|\boldsymbol{A}|$, 而当 $a=0$ 时, 由等式(6)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(6)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_1)\cdots(-x_{i-1})(-x_{i+1})\cdots(-x_n)\right).$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right)$.

当 $a\neq 0$ 时, 由等式 (1.1) 可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(6)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1}-a(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k). \tag{7}$$

又因为

$$\begin{aligned}B_{n+1,1}&=\begin{vmatrix}x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a)\\ x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}\\ &=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).\end{aligned}$$

所以再结合等式(7)可得

$$\begin{aligned}-a(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}|=-a(-1)^{n+3}B_{n+1,2}&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k)-(-1)^{n+2}B_{n+1,1}\\ &=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\\ &=(-1)^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left[\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right].\end{aligned}$$

故此时 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)$.

练习 0.36 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1}\\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2}\end{vmatrix}.$$

笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{x^2}{2}&\frac{x^3}{3}&\cdots&\frac{x^{n+1}}{n+1}&\frac{x^{n+2}}{n+2}\end{vmatrix}$, 则 $I=\frac{G(n)}{n}$ 且 $G(0)=0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$G'(x)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\x&x^2&\cdots&x^n&x^{n+1}\end{vmatrix}=n!x\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\1&x&\cdots&x^{n-1}&x^n\end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\prod_{k=0}^{n}(x-k).$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\frac{G(n)}{n}=\frac{\int_0^n G'(x)dx}{n}=(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\&\overset{\text{区间再现}}{=}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(n-k-x)dx\\&=(-1)^{n+1}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\&=(-1)^{n+1}I.\end{aligned}$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1}=-1$. 于是 $I=-I$. 故 $I=0$.