0.1 可积函数与连续函数的关系

引理 0.1

设 $f(x)$ 在 E 上可积, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 都存在 E 上的简单函数 $\varphi(x)$ 使得

$$\int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

此时称 $f(x)$ 可由 $\varphi(x)$ **平均逼近**.

证明 记 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$. 由非负可测函数积分的定义 (上确界的定义) 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在非负简单函数 $\varphi^+\leqslant f^+,\varphi^-\leqslant f^-$ 使得

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E\varphi^+(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x-\int_E\varphi^-(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$, 则 $\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数, 且

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x&=\int_E\left|\left[f^+(x)-f^-(x)\right]-\left[\varphi^+(x)-\varphi^-(x)\right]\right|\\&\leqslant\int_E|f^+(x)-\varphi^+(x)|\mathrm{d}x+\int_E|f^-(x)-\varphi^-(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_E[f^+(x)-\varphi^+(x)]\mathrm{d}x+\int_E[f^-(x)-\varphi^-(x)]\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故引理得证. □

定理 0.1

若 $f\in L(E)$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

注 上述事实表明, 若 $f\in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 f 的分解:

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x),\quad x\in E,$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$|f_2(x)|$ 在 E 上的积分小于 ε. 即**可积函数可以被 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数逼近.**

证明 由于 $f\in L(E)$, 故由引理 0.1可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $|\varphi(x)|\leqslant M$, 又由定理**??**(6)(ii), 故不妨设 E 是有界集. 根据推论**??**可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得 $|g(x)|\leqslant M(x\in\mathbb{R}^n)$, 且有

$$m(\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{4M},$$

从而可得

$$\begin{aligned}\int_E|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x&=\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|=0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant 2Mm(\{x:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

最后, 我们有

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x + \int_E |\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

推论 0.1

设 $f \in L(E)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

(i)

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x = 0;$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

♡

证明

(i) 由定理 0.1可知, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在具有紧支集的连续函数 g_k, 使得

$$\int_E |f(x)-g_k(x)|\ \mathrm{d}x < \frac{1}{k}.$$

令 $k \to \infty$, 得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-g_k(x)|\ \mathrm{d}x = 0$.

(ii)

□

推论 0.2

设 $f \in L([a,b])$, 则存在其支集在 (a,b) 内的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

(i)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} |f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x = 0;$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

♡

证明

(i)

(ii)

□

例题 0.1 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$. 若对一切 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x) = 0$,a. e. $x \in \mathbb{R}^n$.

证明 采用反证法. 不妨假设 $f(x)$ 在有界正测集 E 上有 $0 < f(x)$, 则可作具有紧支集的连续函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x = 0,$$
$$|\varphi_k(x)| \leqslant 1 \quad (k = 1,2,\cdots),$$
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = \chi_E(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

由于 $|f(x)\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|, x \in E$, 故知

$$\begin{aligned} 0 < \int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

矛盾. □

例题 0.2 设 $f \in L([a,b])$. 若对其支集在 (a,b) 内且可微的任一函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_{[a,b]} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x) = c$(常数),a. e. $x \in [a,b]$.

证明 对任意的支集在 (a,b) 内的连续函数 $g(x)$, 作 $h(x)$: 支集在 (a,b) 内的连续函数, 且满足 $\int_{[a,b]} h(x)\mathrm{d}x = 1$. 令

$$\varphi(x) = \int_{[a,x]} g(t)\mathrm{d}t - \int_{[a,x]} h(t)\mathrm{d}t \cdot \int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

易知 $\varphi(x)$ 的支集在 (a,b) 内, 且有

$$\varphi'(x) = g(x) - h(x)\int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

从而由题设可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[a,b]} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\left(g(x) - h(x)\int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_{[a,b]} f(x)h(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} \left(f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)\mathrm{d}t\right) g(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{a. e. } x \in [a,b],$$

即得所证. □

定理 0.2 (平均连续性)

若 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

♡

证明 由定理 0.1可知, 任给 $\varepsilon > 0$, 作分解 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$f_2(x)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于紧集上的连续函数是一致连续的, 故 $f_1(x)$ 具有紧支集且在紧支集上是一致连续函数. 不妨设 $|f_1(x)| < M$, 由于 f_1 在 $\mathrm{supp} f_1$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得当 $|h| < \delta$ 时, 有

$$|f_1(x+h) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2m(\mathrm{supp} f_1 - \{h\})}, \quad \forall x \in \mathrm{supp} f_1 - \{h\}.$$

由外测度的平移不变性可知

$$m(\mathrm{supp} f_1) = m(\mathrm{supp} f_1 - \{h\}).$$

于是

$$m(\mathrm{supp} f_1 \backslash (\mathrm{supp} f_1 - \{h\})) = 0.$$

注意到

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \backslash (\mathrm{supp} f_1 \cup (\mathrm{supp} f_1 - \{h\}))) \cup (\mathrm{supp} f_1 - \{h\}) \cup \mathrm{supp} f_1 \backslash (\mathrm{supp} f_1 - \{h\}).$$

进而由积分对定义域的可数可加性可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x+h) - f_1(x)|\,dx = &\int_{\mathbb{R}^n \backslash (\mathrm{supp} f_1 \cup (\mathrm{supp} f_1 - \{h\}))} |f_1(x+h) - f_1(x)|\,dx + \int_{\mathrm{supp} f_1 - \{h\}} |f_1(x+h) - f_1(x)|\,dx \\ &+ \int_{\mathrm{supp} f_1 \backslash (\mathrm{supp} f_1 - \{h\})} |f_1(x+h) - f_1(x)|\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 0\cdot m\left(\mathbb{R}^n \backslash \left(\operatorname{supp} f_1 \cup \left(\operatorname{supp} f_1 - \{h\}\right)\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2m\left(\operatorname{supp} f_1 - \{h\}\right)}\cdot m\left(\operatorname{supp} f_1 - \{h\}\right) + M\cdot 0\\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

从而我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x+h) - f_1(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x+h) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x+h)|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{积分变量的平移变换定理}} \frac{\varepsilon}{2} + 2\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

命题 0.1

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界可测集, 则

$$
\lim_{|h|\to 0} m(E \cap (E + \{h\})) = m(E), \quad h \in \mathbb{R}^n.
$$

证明 考查特征函数 $\chi_E(x)$. 对于 $h \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$
\chi_{E+\{h\}}(x) = \chi_E(x-h), \quad \chi_{E\cap(E+\{h\})}(x) = \chi_E(x-h)\cdot\chi_E(x),
$$

从而可得

$$
m(E \cap (E + \{h\})) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\cdot\chi_E(x-h)\,dx.
$$

因为

$$
m(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E^2(x)\,dx,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\left|m(E \cap (E + \{h\})) - m(E)\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\chi_E(x)\right|\left|\chi_E(x-h) - \chi_E(x)\right|\,dx\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\chi_E(x-h) - \chi_E(x)\right|\,dx.
\end{aligned}
$$

根据可积函数的平均连续性可知, 上式右端当 $|h| \to 0$ 时趋于零, 即得所证. □

推论 0.3

若 $f \in L(E)$, 则存在具有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$,a. e. $x \in E$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx = 0$.

证明 根据定理 0.1可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得

$$
\int_E |f(x) - g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

不妨设 $g(x)$ 的支集含于某个闭方体

$$
I = \{x = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) : -k_0 \leqslant \zeta_i \leqslant k_0 (i = 1, \cdots, n), k_0\ \text{是自然数}\}
$$

内, 由 $g(x)$ 的一致连续性不难证明, 存在支集含于 I 内的阶梯函数 $\varphi(x)$, 使得

$$
\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{I_i}(x), \quad \int_I |g(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},
$$

其中每个 I_i 可以是含于 I 内的二进方体. 从而我们有

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)-\varphi(x)|\,dx &\leqslant \int_E |f(x)-g(x)|\,dx + \int_E |g(x)-\varphi(x)|\,dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_I |g(x)-\varphi(x)|\,dx = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_k = 1/k(k=1,2,\cdots)$, 就可取到具有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-\varphi_k(x)|\,dx = 0.$$

对任给 $\sigma>0$, 令 $E_k(\sigma)=\{x\in E: |f(x)-\varphi_k(x)|\geqslant\sigma\}$, 则由于

$$\sigma m(E_k(\sigma)) \leqslant \int_E |f(x)-\varphi_k(x)|\,dx,$$

可知 $m(E_k(\sigma))\to 0(k\to\infty)$, 即 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 根据 Riesz 定理, 存在 $\{\varphi_k(x)\}$ 中的子列几乎处处收敛于 $f(x)$, 此子列满足 (i) 与 (ii). □

定理 0.3 (Riemann-Lebesgue 引理的推广)

若 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列, 且满足

(i) $|g_n(x)|\leqslant M(x\in[a,b])(n=1,2,\cdots)$;

(ii) 对任意的 $c\in[a,b]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,c]} g_n(x)\,dx = 0,$$

则对任意的 $f\in L([a,b])$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)g_n(x)\,dx = 0.$$

♡

证明 由推论 0.3可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 可作阶梯函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_{[a,b]} |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

不妨设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p} y_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),\quad x\in[a,b),$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$. 因为

$$\left|\int_{[a,b]}\varphi(x)g_n(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p}\left|y_i\int_{[x_{i-1},x_i]} g_n(x)\,dx\right|,$$

且从假设可知存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 上式右端小于 $\varepsilon/2$, 所以

$$\left|\int_{[a,b]}\varphi(x)g_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\quad n\geqslant n_0.$$

最后, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f(x)g_n(x)\,dx\right| &\leqslant \left|\int_{[a,b]}(f(x)-\varphi(x))g_n(x)\,dx\right| + \left|\int_{[a,b]}\varphi(x)g_n(x)\,dx\right| \\ &\leqslant M\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

例题 0.3 设 $\{\lambda_n\}$ 是实数列, 且 $\lambda_n\to+\infty(n\to\infty)$, 则点集

$$A \overset{\text{def}}{=} \left\{x\in\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty}\sin\lambda_n x \text{ 存在}\right\}$$

是零测集.

注 上例说明, 存在集合 E 上的一致有界可积函数列 $\{f_n(x)\}$, 虽然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=0$, 但其任一子列 $\{f_{n_k}(x)\}$,

均不满足

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=0,\quad \text{a. e. } x\in E.$$

证明 令 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_A(x)\sin\lambda_n x, x\in\mathbb{R}$, 则由上例可知, 对任意的 $m(B)<+\infty$ 的可测集 B, 有 (有界收敛定理)

$$\int_B f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_B \chi_A(x)\sin\lambda_n x\,dx=0.$$

这说明 $f(x)=0$,a. e. $x\in\mathbb{R}$.

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_B f^2(x)\,dx&=\lim_{n\to\infty}\int_{B\cap A}\sin^2\lambda_n x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{B\cap A}(1-\cos 2\lambda_n x)\,dx\\&=\frac{1}{2}m(B\cap A)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{B\cap A}\cos 2\lambda_n x\,dx=\frac{1}{2}m(B\cap A).\end{aligned}$$

由此可知 $m(B\cap A)=0$. 注意到 B 的任意性, 必有 $m(A)=0$. □

例题 0.4 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的有界可测函数. 若有

$$I_n=\int_{[0,1]}x^n f(x)\,dx=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x)=0$,a. e. $x\in[0,1]$.

证明 令 $F(x)=xf(x)(x\in[0,1])$, 则得

$$\int_{[0,1]}x^n F(x)\,dx=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

由此知, 对任一多项式 $P(x)$, 也有

$$\int_{[0,1]}P(x)F(x)\,dx=0.$$

现在, 对任意的 $g\in C([0,1])$ 以及 $\varepsilon>0$, 可作多项式 $P(x)$, 使得 $|g(x)-P(x)|<\varepsilon(x\in[0,1])$. 因此, 我们有

$$\left|\int_{[0,1]}g(x)F(x)\,dx\right|=\left|\int_{[0,1]}(g(x)-P(x))F(x)\,dx\right|\leqslant\int_{[0,1]}|g(x)-P(x)||F(x)|\,dx\leqslant\varepsilon\int_{[0,1]}|F(x)|\,dx.$$

根据 ε 的任意性, 可得 $\int_{[0,1]}g(x)F(x)\,dx=0$. 又根据 $g(x)$ 的任意性, 我们有

$$F(x)=0,\ \text{a. e. } x\in[0,1],\qquad f(x)=0,\ \text{a. e. } x\in[0,1].$$

□

例题 0.5 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数, 则

(i) 存在递增闭集列 $\{F_n\}$:$m\left(\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=0$, 使得 $f\in C(F_n)(n\in\mathbb{N})$;

(ii) 存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的上半连续函数列 $\{f_n(x)\}$:

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x)\quad(x\in\mathbb{R}),$$

使得 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,a. e. $x\in\mathbb{R}$.

证明 (i) 作 $\varphi_n\in C(\mathbb{R})(n\in\mathbb{N})$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-\varphi_n(x)|\,dx\leqslant 4^{-n},\qquad\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),\ \text{a. e. } x\in\mathbb{R}.$$

即存在 $Z\subset\mathbb{R}$:$m(Z)=0$, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in\mathbb{R}\setminus Z)$.

取开集列 $\{G_n\}$:$G_n\supset G_{n+1}$,$G_n\supset Z(n\in\mathbb{N})$,$m(G_n)<2^{-n}$, 以及作闭集列:

$$F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}:|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|\leqslant 2^{-k}\right\}\setminus G_n\quad(n\in\mathbb{N}),$$

显然有 $F_n\subset F_{n+1}(n\in\mathbb{N})$, 且 $\varphi_k(x)$ 在 F_n 上一致收敛到 $f(x)$. 因此 $f\in C(F_n)$.

下面指出 $m\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^c\right)=0$. 实际上, 对 $k\in\mathbb{N}$, 记 $W_k=\left\{x\in\mathbb{R}:|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|>2^{-k}\right\}$, 则 W_k 是开集,

且 $\chi_{W_k}(x) \leqslant 2^k|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)|(x \in \mathbb{R})$, 以及

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{W_k}(x)\,dx \leqslant 2^k \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)|\,dx \leqslant 2^k \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi_{k+1}(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx \right\} \leqslant 2^{-k+1}.$$

因为 $\mathbb{R} \setminus F_n \subset G_n \cup \left(\bigcup\limits_{k \geqslant n}^{\infty} W_k \right)$, 所以

$$m\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus F_n) \right) = 0.$$

(ii) 令 F_n 同 (i),$f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{F_n}(x)(n \in \mathbb{N})$. □