0.1 矩阵与二次型

0.1.1 用矩阵方法来讨论二次型问题

引理 0.1

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则

$$f(x) = x'Ax + 2a\beta' x + a^2 c = \begin{pmatrix} x' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}.$$

注 上述 $f(x)$ 仍是一个二次型, 只不过有 1 个变量恒为常数而已.

证明 由矩阵乘法易证.

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: 函数 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x} + c$ 的极小值等于 $c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, \cdots, b_n)', b_i$ 和 c 都是实数.

证明 注意到

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}' \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可作如下对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}.$$

由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix}$ 可解出 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$, 于是

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}' \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \geqslant c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

因此, 当 $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 时, $f(\boldsymbol{x})$ 取到极小值 $c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

□

命题 0.1

设实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$$

其中 a_{ij} 都是实数, 求证 f 是半正定型且 f 的秩等于下列矩阵的秩:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

证明 f 的半正定性由定义即得. 注意到 $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$, 故 f 的相伴矩阵为 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, 于是命题**??**(1) 可知, $\mathrm{r}(f) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

□

0.1.2 用二次型方法来讨论矩阵问题

定义 0.1 (矩阵的 Hadamard 积)

设 $\mathbb{F}$ 是数域且 $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 我们定义

$$(A\circ B)_{(i,j)}=a_{ij}b_{ij}, 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n.$$

定理 0.1 (矩阵的 Hadamard 积的性质)

当下述表达式有意义时, 必有

1. $r(A\circ B)\leqslant r(A)\cdot r(B)$;
2. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 或 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 若 A, B 半正定或 Hermite 半正定, 我们有
$$\lambda_{\min}(A\circ B)\geqslant\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B),$$
这里 $\lambda_{\min}$ 表示最小特征值. 特别的, $A\circ B$ 半正定.

证明 注意到

$$A\circ B=(E_{1,1}+E_{2,m+2}+\cdots+E_{m,m^2})(A\otimes B)(E_{1,1}+E_{n+2,2}+\cdots+E_{n^2,n})=P(A\otimes B)Q, \tag{1}$$

这里 $P\in\mathbb{F}^{m\times m^2}, Q\in\mathbb{F}^{n^2\times n}$. 当 $m=n$, 有 $Q=P^T$, 此时 $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 主子阵.

1. 子矩阵的秩当然不小于等于原矩阵的秩, 于是由(1)和矩阵的 Kronecker 积的基本性质, 我们知道
$$r(A\circ B)\leqslant r(A\otimes B)=r(A)\cdot r(B).$$
2. $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 主子式, 不妨设在 $A\otimes B$ 左上角, 否则同时交换行列 [14] 即可. 现在记
$$A\otimes B=T=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}, A\circ B=T_1.$$
我们由矩阵的 Kronecker 积的基本性质知 T 最小特征值为 $\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B)$. 考虑
$$\lambda\triangleq\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B)\geqslant 0,$$
则 $T-\lambda I=\begin{pmatrix}T_1-\lambda I & T_2\\ T_3 & T_4-\lambda I\end{pmatrix}$ 还是半正定的, 故 $T_1-\lambda I$ 半正定. 这就证明了
$$\lambda_{\min}(A\circ B)\geqslant\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B).$$

□

命题 0.2

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}), \boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 乘积 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})$ 也是正定阵.

证明 因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定阵, 故由命题**??**可知, 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}c_{kj}$. 作二次型

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ij}(c_{ki}c_{kj})\right)x_ix_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(c_{ki}x_i)(c_{kj}x_j)\right)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}_k'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}_k=(c_{k1}x_1, c_{k2}x_2, \cdots, c_{kn}x_n)'$. 因为 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 所以当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 至少有一个 $\boldsymbol{y}_k\neq\boldsymbol{0}$, 因此由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性可得 $f(\boldsymbol{x})>0$, 于是 f 是正定型, 从而 $\boldsymbol{H}$ 是正定阵.

□

例题 0.2 求下列实二次型的标准型:

1. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\max\{i,j\}x_ix_j$;
2. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|i-j|x_ix_j$.

解

1. f 的系数矩阵是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=\max\{i,j\}$. 由例题??可知, $\boldsymbol{A}$ 的第 k 个顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|=(-1)^{k-1}k(1\leqslant k\leqslant n)$, 再由命题??可知, f 的规范标准型为 $y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2$.
2. f 的系数矩阵是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$. 由于 $a_{11}=0$, 故先做对称初等变换: 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行上, 再将第二列加到第一列上, 得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 其中 $b_{11}=2$, 即 $|\boldsymbol{B}_1|=2$. 由于第三类初等变换不改变行列式的值, 故由例题??可知, $\boldsymbol{B}$ 的第 k 个顺序主子式 $|\boldsymbol{B}_k|=(-1)^{k-1}(k-1)2^{k-2}(2\leqslant k\leqslant n)$, 再由命题??可知, f 的规范标准型为 $y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2$.

□

命题 0.3

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实对称矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是 n 阶实反对称矩阵且 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$, 求证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}$ 是可逆矩阵.

证明 证法一:对任一 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 我们有

$$\begin{aligned}\alpha'(A+S)'(A+S)\alpha &= \alpha'(A'A+A'S+S'A+S'S)\alpha\\ &= \alpha'(A'A)\alpha+\alpha'(A'S+S'A)\alpha+\alpha'(S'S)\alpha\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AS}-\boldsymbol{SA}=\boldsymbol{O}$, 故上式等于 $\alpha'(A'A)\alpha+\alpha'(S'S)\alpha$. 由命题?? 可知, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定阵, $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}$ 是半正定阵, 所以上式总大于零, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})$ 是正定阵, 于是 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|^2>0$, 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}$ 是可逆矩阵.

证法二:由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S})$, 故只要证明 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 可逆即可. 由 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$ 可知 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{SA}^{-1}$, 于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S})'=\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{A}^{-1})'=\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{A}')^{-1}=-\boldsymbol{SA}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵, 最后由命题??(2) 即得结论.

□