## 0.1 由乘法交换性诱导的同时性质

**命题 0.1 (矩阵乘法可交换的基本性质)**

若两个矩阵或线性变换 $A,B$ 乘法可交换, 即 $AB=BA$, 则有 $(AB)^m=A^mB^m$, $f(A)g(B)=g(B)f(A)$ 以及二项式定理

$$(A+B)^m=A^m+\mathrm{C}_m^1A^{m-1}B+\cdots+\mathrm{C}_m^{m-1}AB^{m-1}+B^m$$

等成立, 其中 $m\geq 1$, $f(x),g(x)$ 为多项式.

特别地, 一个矩阵或线性变换 $A$ 一定与其自身可交换, 从而也满足 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$, 其中 $f(x),g(x)$ 为多项式.

证明 证明是显然的. □

### 0.1.1 特征子空间互为不变子空间

**命题 0.2 (特征子空间互为不变子空间)**

1. 设 $\varphi,\psi$ 是复线性空间 $V$ 上乘法可交换的线性变换, 即 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 求证: $\varphi$ 的特征子空间是 $\psi$ 的不变子空间, $\psi$ 的特征子空间是 $\varphi$ 的不变子空间.
2. 若 $n$ 阶复矩阵 $A,B$ 乘法可交换, 即 $AB=BA$, 则 $A,B$ 的特征子空间互为不变子空间.

注 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如, $A=I_2$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 显然 $A,B$ 乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上, $B$ 在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是 $\pm\mathrm{i}$), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域 $\mathbb{F}$ 上, 我们必须假设 $A,B$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中.

证明

1. 由代数基本定理以及线性方程组的求解理论可知, $n(n\geq 1)$ 维复线性空间上的线性变换或 $n$ 阶复矩阵至少有一个特征值和特征向量. 任取线性变换 $\varphi$ 的一个特征值 $\lambda_0$, 设 $V_0$ 是特征值 $\lambda_0$ 的特征子空间, 则对任意的 $\alpha\in V_0$, 有
$$\varphi\psi(\alpha)=\psi\varphi(\alpha)=\psi(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\psi(\alpha),$$
即 $\psi(\alpha)\in V_0$, 因此 $V_0$ 是 $\psi$ 的不变子空间. 同理可证 $\psi$ 的特征子空间是 $\varphi$ 的不变子空间.
2.

□

**命题 0.3**

设 $V$ 为 $n$ 维复线性空间, $S$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的非空子集, 满足: $S$ 中的全体线性变换没有非平凡的公共不变子空间. 设线性变换 $\varphi$ 与 $S$ 中任一线性变换乘法均可交换, 证明: $\varphi$ 是纯量变换.

证明 任取 $\varphi$ 的特征值 $\lambda_0$ 及其特征子空间 $V_0$. 任取 $\psi\in S$, 则 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 由命题 0.2可知 $V_0$ 是 $\psi-$ 不变子空间, 从而是 $S$ 中全体线性变换的公共不变子空间. 又 $V_0\neq 0$(特征向量均非零), 故 $V_0=V$, 从而 $\varphi=\lambda_0I_V$ 为纯量变换. □

### 0.1.2 有公共的特征向量

**命题 0.4**

1. 设 $\varphi,\psi$ 是复线性空间 $V$ 上乘法可交换的线性变换, 求证: $\varphi,\psi$ 至少有一个公共的 (复) 特征向量.
2. 若 $n$ 阶复矩阵 $A,B$ 乘法可交换, 即 $AB=BA$, 则 $A,B$ 至少有一个公共的 (复) 特征向量.

注 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如, $A=I_2, B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 显然 $A,B$ 乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上, $B$ 在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是 $\pm\mathrm{i}$), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域 $\mathbb{F}$ 上, 我们必须假设 $A,B$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中.

证明

1. 任取 $\varphi$ 的特征值 $\lambda_0$ 及其特征子空间 $V_0$, 由命题 0.2可知, $V_0$ 是 $\psi-$ 不变子空间. 将线性变换 $\psi$ 限制在 $V_0$ 上, 由于 $V_0$ 是维数大于零的复线性空间, 故由命题??可知 $\psi|_{V_0}$ 至少有一个特征值 $\mu_0$ 及其特征向量 $\alpha\in V_0$, 从而 $\varphi(\alpha)=\lambda_0\alpha, \psi(\alpha)=\mu_0\alpha$, 于是 $\alpha$ 就是 $\varphi,\psi$ 的公共特征向量.
2.

□

**命题 0.5**

1. 设 $\varphi,\psi$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $V$ 上的乘法可交换的线性变换, 且 $\varphi,\psi$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: $\varphi,\psi$ 的特征子空间互为不变子空间, 并且 $\varphi,\psi$ 至少有一个公共的特征向量.
2. 若数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 乘法可交换, 且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 则 $A,B$ 的特征子空间互为不变子空间, 并且 $A,B$ 在 $\mathbb{F}^n$ 中至少有一个公共的特征向量.

证明

1. 由线性方程组的求解理论可知, 若数域 $\mathbb{F}$ 上的线性变换或 $\mathbb{F}$ 上的矩阵在 $\mathbb{F}$ 中有一个特征值, 则在 $\mathbb{F}$ 上的线性空间或 $\mathbb{F}$ 上的列向量空间中必存在对应的特征向量. 任取线性变换 $\varphi$ 的一个特征值 $\lambda_0\in\mathbb{F}$, 设 $V_0$ 是特征值 $\lambda_0$ 的特征子空间, 则对任意的 $\alpha\in V_0$, 有
$$\varphi\psi(\alpha)=\psi\varphi(\alpha)=\psi(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\psi(\alpha),$$
即 $\psi(\alpha)\in V_0$, 因此 $V_0$ 是 $\psi-$ 不变子空间. 取 $V_0$ 的一组基并扩张为 $V$ 的一组基, 则 $\psi$ 在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵 $\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$, 其中 $A$ 是 $\psi|_{V_0}$ 在给定基下的表示矩阵, 于是 $|\lambda I_V-\psi|=|\lambda I-A||\lambda I-B|$. 因为 $\psi$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 故 $A$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 于是 $\psi|_{V_0}$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中. 任取 $\psi|_{V_0}$ 的一个特征值 $\mu_0\in\mathbb{F}$ 及其特征向量 $\alpha\in V_0$, 则 $\varphi(\alpha)=\lambda_0\alpha, \psi(\alpha)=\mu_0\alpha$, 于是 $\alpha$ 就是 $\varphi,\psi$ 的公共特征向量.
2.

□

### 0.1.3 可同时上三角化

**命题 0.6**

1. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: $A$ 在 $\mathbb{F}$ 上可上三角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.
2. 设数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $V$ 上的线性变换 $\varphi$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 则存在 $V$ 的一组基, 使得 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵是上三角矩阵.

证明

1. 对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设对 $n-1$ 阶矩阵结论成立, 现对 $n$ 阶矩阵 $A$ 进行证明. 设 $\lambda_1\in\mathbb{F}$ 是 $A$ 的一个特征值, 则由线性方程组的求解理论可知, 存在特征向量 $e_1\in\mathbb{F}^n$, 使得 $Ae_1=\lambda_1e_1$. 由基扩张定理, 可将 $e_1$ 扩张为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 于是
$$(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix},$$
其中 $A_1$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶矩阵. 令 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, 则 $P$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶可逆矩阵, 且由上式可得 $AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}$, 即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}$. 由此可得 $|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)|\lambda I_{n-1}-A_1|$, 又 $A$ 的特征值全在 $\mathbb{F}$ 中, 从而 $A_1$ 的特征值也全在 $\mathbb{F}$ 中, 故由归纳假设, 存在 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶可逆矩阵 $Q$, 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 是上三角矩阵. 令
$$R=P\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix},$$
则 $R$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶可逆矩阵, 且
$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O \\ O & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q\end{pmatrix}$$
是上三角矩阵.

2.

□

**命题 0.7**

1. 设 $A,B$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵, 满足: $AB=BA$ 且 $A,B$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: $A,B$ 在 $\mathbb{F}$ 上可同时上三角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
2. 设数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $V$ 上的线性变换 $\varphi,\psi$ 乘法可交换, 且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 则存在 $V$ 的一组基, 使得 $\varphi,\psi$ 在这组基下的表示矩阵都是上三角矩阵.

♠

**证明**

1. 对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设对 $n-1$ 阶矩阵结论成立, 现对 $n$ 阶矩阵进行证明. 因为 $AB=BA$ 且 $A,B$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 故由命题 0.5可知, $A,B$ 有公共的特征向量 $e_1\in\mathbb{F}^n$, 不妨设
$$Ae_1=\lambda_1e_1,\ Be_1=\mu_1e_1,$$
其中 $\lambda_1,\mu_1\in\mathbb{F}$ 分别是 $A,B$ 的特征值. 由基扩张定理, 可将 $e_1$ 扩张为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 令 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, 则 $P$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶可逆矩阵, 从而有
$$\begin{gathered}A\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix},\\ B\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow BP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1\end{pmatrix}.\end{gathered}\tag{1}$$
其中 $A_1,B_1$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶矩阵. 由 $AB=BA$ 及(1)式可得到
$$\begin{aligned}&\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}BP\right)=P^{-1}ABP=P^{-1}BAP=\left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}AP\right)\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & A_1B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ O & B_1A_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$
从而 $A_1B_1=B_1A_1$. 又由(1)式可得
$$|\lambda I_n-A|=|\lambda-\lambda_1|\,|\lambda I_{n-1}-A_1|,\quad |\lambda I_n-B|=|\lambda-\lambda_1|\,|\lambda I_{n-1}-B_1|.$$

因此 $A_1, B_1$ 的特征值也是 $A, B$ 的特征值. 又由于 $A, B$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 故 $A_1, B_1$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中. 故由归纳假设, 存在 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶可逆矩阵 $Q$, 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 和 $Q^{-1}B_1Q$ 都是上三角矩阵. 令

$$R = P\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则 $R$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶可逆矩阵, 且

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix},$$

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix}$$

都是上三角矩阵.

2.

□

### 0.1.4 可同时对角化

**命题 0.8**

1. 设 $\varphi, \psi$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换, 满足: $\varphi\psi = \psi\varphi$ 且 $\varphi, \psi$ 都可对角化, 求证: $\varphi, \psi$ 可同时对角化, 即存在 $V$ 的一组基, 使得 $\varphi, \psi$ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵.
2. 设 $A, B$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵, 满足: $AB = BA$ 且 $A, B$ 都在 $\mathbb{F}$ 上可对角化, 则 $A, B$ 在 $\mathbb{F}$ 上可同时对角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵.

**证明**

1. 对空间维数进行归纳. 当 $n = 1$ 时结论显然成立, 设对维数小于 $n$ 的线性空间结论成立, 现对 $n$ 维线性空间进行证明. 设 $\varphi$ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{F}$, 对应的特征子空间分别为 $V_1, \cdots, V_s$, 则由 $\varphi$ 可对角化可知

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

若 $s = 1$, 则 $\varphi = \lambda_1 I_V$ 为纯量变换, 此时只要取 $V$ 的一组基, 使得 $\psi$ 在这组基下的表示矩阵为对角矩阵, 则 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为 $\lambda_1 I_n$, 结论成立. 若 $s > 1$, 则 $\dim V_i < n$. 注意到 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 且 $\varphi, \psi$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 由命题 0.2可知 $V_i$ 都是 $\psi-$ 不变子空间. 考虑线性变换的限制 $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$: 它们乘法可交换, 且由可对角化线性变换的性质可知它们都可对角化, 故由归纳假设可知, $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 可同时对角化, 即存在 $V_i$ 的一组基, 使得 $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵. 将 $V_i$ 的基拼成 $V$ 的一组基, 则 $\varphi, \psi$ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵, 即 $\varphi, \psi$ 可同时对角化.

2.

□

### 0.1.5 个数的推广

**命题 0.9**

设数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两乘法可交换, 且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: 它们在 $\mathbb{F}^n$ 中至少有一个公共的特征向量.

**证明** 对 $m$ 进行归纳, $m = 2$ 时就是命题 0.4. 设矩阵个数小于 $m$ 时结论成立, 现证 $m$ 个矩阵的情形. 将所有的 $A_i$ 都看成是列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换, 任取 $A_1$ 的一个特征值 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ 及其特征子空间 $V_1 \subseteq \mathbb{F}^n$. 注意到 $A_1A_i = A_iA_1$, 故由命题 0.2可知, $V_1$ 是 $A_2, \cdots, A_m$ 的不变子空间. 将 $A_2, \cdots, A_m$ 限制在 $V_1$ 上, 它们仍然两两乘法可交换且特征

值都在 $\mathbb{F}$ 中, 故由归纳假设可得 $A_2|_{V_1},\cdots,A_m|_{V_1}$ 有公共的特征向量 $\alpha\in V_1$. 注意到 $\alpha$ 也是 $A_1$ 的特征向量, 于是 $\alpha$ 是 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的公共特征向量. □

**命题 0.10**

设数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两乘法可交换, 且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中, 求证: 它们在 $\mathbb{F}$ 上可同时上三角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}A_iP(1\le i\le m)$ 都是上三角矩阵.

**证明** 完全类似于命题 0.7的证明, 其中利用命题 0.9得到 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的公共特征向量, 请读者自行补充相关的细节. □

**命题 0.11**

设数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 阶矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两乘法可交换, 且它们都在 $\mathbb{F}$ 上可对角化, 求证: 它们在 $\mathbb{F}$ 上可同时对角化, 即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}A_iP(1\le i\le m)$ 都是对角矩阵.

**证明** 若 $A_i$ 都是纯量矩阵, 则结论显然成立. 以下不妨设 $A_1$ 不是纯量矩阵, 余下的证明完全类似于命题 0.8的证明, 请读者自行补充相关的细节. □

**例题 0.1** 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶矩阵且 $AB=BA$. 若 $A$ 是幂零矩阵, 求证: $|A+B|=|B|$.

**证明** 证法一: 由命题 0.7可知, $A,B$ 可同时上三角化, 即存在可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵. 因为上三角矩阵的主对角元是矩阵的特征值, 而幂零矩阵的特征值全为零, 所以 $|P^{-1}AP+P^{-1}BP|=|P^{-1}BP|$, 即有 $|A+B|=|B|$.

证法二: 先假设 $B$ 是可逆矩阵, 则 $|A+B|=|I_n+AB^{-1}||B|$, 只要证明 $|I_n+AB^{-1}|=1$ 即可. 由 $AB=BA$ 可知 $AB^{-1}=B^{-1}A$, 再由 $A$ 是幂零矩阵容易验证 $AB^{-1}$ 也是幂零矩阵, 从而其特征值全为零. 因此 $I_n+AB^{-1}$ 的特征值全为 1, 故 $|I_n+AB^{-1}|=1$.

对于一般的矩阵 $B$, 可取到一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 $t_kI_n+B$ 是可逆矩阵. 由可逆情形的证明可得 $|A+t_kI_n+B|=|t_kI_n+B|$. 注意到上式两边都是 $t_k$ 的多项式, 从而关于 $t_k$ 连续. 将上式两边同时取极限, 令 $t_k\to 0$, 即得结论. □