0.1 辐角原理和 Rouché 定理

定理 0.1

设 $f \in H(D)$,γ 是 D 中一条可求长的简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点, 在 γ 内部有零点

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

它们的阶数分别为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{1}$$

♡

注 公式 (1) 有明确的几何意义. 我们先作一个自然的约定: **如果 a 是 f 的 m 阶零点, 我们就把 a 看成是 f 的 m 个重合的 1 阶零点.** 这样, 公式 (1) 右边就表示 f 在 γ 内部的零点个数的总和, 我们记之为 N. 于是, 公式 (1) 可写为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N. \tag{2}$$

证明 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 作圆盘 $B(a_k, \varepsilon)$,$k = 1, \cdots, n$, 使得这 n 个圆盘都在 γ 内部, 且两两不相交. 于是,$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$ 中全纯. 记 γ 的内部为 E, 则 $f \in H\left(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)\right) \cap C\left(\overline{E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)}\right)$. 应用多连通区域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z, \tag{3}$$

其中,$\gamma_k = \partial B(a_k, \varepsilon)$,$k = 1, \cdots, n$.

因为 a_k 是 f 的 α_k 阶零点, 由命题**??** 知道,f 在 a_k 的邻域中可以写成

$$f(z) = (z - a_k)^{\alpha_k} g_k(z),$$

这里,g_k 在 a_k 的邻域中全纯, 且 $g_k(a_k) \neq 0$. 于是

$$f'(z) = \alpha_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} g_k(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} g_k'(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}.$$

因为 $\dfrac{g_k'}{g_k}$ 在 $\overline{B(a_k, \varepsilon)}$ 中全纯, 于是由 Cauchy 积分定理及命题**??** 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \left[\frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}\right] \mathrm{d}z = \alpha_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

把它代入 (3) 式, 即得公式 (1).

□

定理 0.2 (辐角原理)

设 $f \in H(D)$,γ 是 D 中的可求长简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点, 那么当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时, 函数 $f(z)$ 在相应的曲线 γ 上转动的总圈数恰好等于 f 在 γ 内部的零点的个数.

♡

注 例如, 设 $w = f(z) = (z^2 + 1)(z - 1)^5$, 则当 z 沿着圆周 $\{z : |z| = 3\}$ 的正方向转动一圈时,$f(z)$ 在 w 平面上绕原点转动 7 圈. 这是因为 f 在 $B(0, 3)$ 中共有 7 个零点, 其中,$\pm\mathrm{i}$ 是 1 阶零点, 而 1 则是 5 阶零点.

笔记 实际上, 这个定理就是 (2) 式左端积分的几何意义.

证明 设 Γ 是 w 平面上一段不通过原点的连续曲线, 它的方程记为 $w=\lambda(t), a\leqslant t\leqslant b$. 对于每个 t, 选取 $\lambda(t)$ 的一个辐角 $\theta(t)$, 使得 $\theta(t)$ 是 t 的连续函数, 我们称 $\theta(b)-\theta(a)$ 为 w 沿曲线 Γ 的辐角的变化, 记为

$$\Delta_\Gamma \mathrm{Arg} w=\theta(b)-\theta(a).$$

今设 Γ 是一条不通过原点的可求长简单闭曲线, 显然有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg} w=\begin{cases}1, & \text{如果原点在}\Gamma\text{ 内部;}\\ 0, & \text{如果原点不在}\Gamma\text{ 内部.}\end{cases}$$

另一方面, 由命题**??**可知

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{1}{w}\mathrm{d}w=\begin{cases}1, & \text{如果原点在}\Gamma\text{ 内部;}\\ 0, & \text{如果原点不在}\Gamma\text{ 内部.}\end{cases}$$

于是得到

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg} w. \tag{4}$$

一般来说, 当 Γ 是一条不通过原点的任意可求长闭曲线时, $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w}$ 等于 Γ 绕原点的圈数, 称为 Γ 关于原点的环绕指数, 因而 (4) 式对于一般的不通过原点的可求长闭曲线都是成立的.

现在让 z 在 z 平面上沿曲线 γ 的正方向走一圈, 相应的函数 $w=f(z)$ 的值在 w 平面上画出一条相应的闭曲线 Γ(见图 1). 根据 (4) 式, 我们有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z). \tag{5}$$

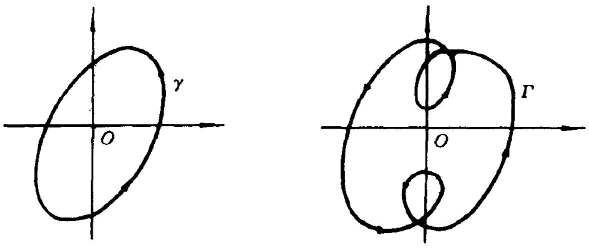

图 1

由此可知, 积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 就表示当 z 沿着 γ 的正方向走一圈时, 函数 $f(z)$ 在 Γ 上的辐角变化再除以 2π. 由 (2) 式和 (5) 式, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)=N. \tag{6}$$

□

定理 0.3 (Rouché(鲁歇) 定理)

设 $f,g\in H(D)$,γ 是 D 中可求长的简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果当 $z\in\gamma$ 时, 有不等式

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \tag{7}$$

那么 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

证明 由 (7) 式知道,f 和 g 在 γ 上都没有零点. 用 $|f(z)|$ 去除 (7) 式的两端, 得

$$\left|1-\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1.$$

若记 $w=\frac{g}{f}$, 则有 $|w-1|<1$. 这说明当 z 在 γ 上变动时,w 落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 因而 $\Delta_\Gamma \mathrm{Arg} w=0$,

于是由定理??可得

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg} g(z).$$

由辐角原理即知 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

□

定理 0.4 设 f 是区域 D 中的全纯函数,$z_0 \in D$, 记 $w_0 = f(z_0)$, 如果 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 那么对于充分小的 $\rho > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $a \in B(w_0, \delta)$,$f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点.

证明 根据全纯函数零点的孤立性, 必存在充分小的 $\rho > 0$, 使得 $f(z) - w_0$ 在 $\overline{B(z_0, \rho)}$ 中除 z_0 外没有其他的零点. 记

$$\min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = \rho\} = \delta > 0,$$

于是当 $|z - z_0| = \rho$ 时,$|f(z) - w_0| \geqslant \delta$. 今任取 $a \in B(w_0, \delta)$, 则当 z 在圆周 $|z - z_0| = \rho$ 上时, 有

$$|f(z) - w_0| \geqslant \delta > |w_0 - a|. \tag{8}$$

若记 $F(z) = f(z) - w_0$,$G(z) = f(z) - a$, 则 (8) 式可写成

$$|F(z)| > |F(z) - G(z)|.$$

由 Rouché 定理,F 和 G 在 $B(z_0, \rho)$ 中的零点个数相同, 因而 $G(z) = f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点.

□

推论 0.1 设 $f \in H(D)$,$z_0 \in D$,$w_0 = f(z_0)$, 则对充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(B(z_0, \rho)) \supseteq B(w_0, \delta).$$

证明 显然 z_0 至少是 $f(z) - w_0$ 的 1 阶零点, 由定理 0.4可知, 对充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $a \in B(w_0, \delta)$, 都有 $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中有一个零点 t_a, 即

$$t_a \in B(z_0, \rho), \quad 且 \quad f(t_a) = a.$$

再由 a 的任意性可知

$$f(B(z_0, \rho)) \supseteq B(w_0, \delta).$$

□

定理 0.5 (开映射定理) 设 f 是区域 D 上非常数的全纯函数, 那么 $f(D)$ 也是 $\mathbb{C}$ 中的区域.

注 如果 f 是区域 D 上非常数的连续函数, 那么 $f(D)$ 未必是一个区域. 例如, 函数 $f(z) = |z|$ 是单位圆盘上的连续函数, 它把单位圆盘映为线段 $[0, 1)$. 但是, 由这个定理可知, 区域 D 上非常数的全纯函数则一定把区域映为区域.

笔记 这个定理说明**非常数的全纯函数把开集映为开集**, 因此称为**开映射定理**.

证明 我们证明 $f(D)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的连通开集. 先证 $f(D)$ 是开集. 任取 $w_0 \in f(D)$, 由推论 0.1 知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(w_0, \delta) \subset f(D)$, 这说明 w_0 是 $f(D)$ 的内点, 所以 $f(D)$ 是开集.

再证 $f(D)$ 是连通的. 任取 $w_1, w_2 \in f(D)$, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 使得 $f(z_1) = w_1$,$f(z_2) = w_2$. 因为 D 是连通的, 故在 D 中存在连续曲线 $z = \gamma(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 连接 z_1 和 z_2, 于是 $w = f(\gamma(t))(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 是 $f(D)$ 中连接 w_1, w_2 的曲线, 因而 $f(D)$ 是连通的.

□

定理 0.6

如果 f 是区域 D 中单叶的全纯函数, 那么对于 D 内每一点 z, 有 $f'(z) \neq 0$.

注 这个定理的逆定理是不成立的, 即若 f' 在 D 中处处不为零,f 未必是 D 中的单叶函数.$f(z) = e^z$ 就是最简单的例子.

证明 用反证法. 如果存在 $z_0 \in D$, 使得 $f'(z_0) = 0$, 那么 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 m 级零点, 这里,$m \geqslant 2$. 因为 $f'(z_0) \neq 0$, 所以 $f(z)$ 非常数. 从而由定理**??**, 可取 ρ 充分小, 使得 $f'(z)$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点. 由定理 0.4, 对于 $0 < \eta < \rho$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $a \in B(f(z_0), \delta)$,$f(z) - a$ 在 $B(z_0, \eta)$ 中至少有两个零点, 设为 z_1, z_2. 由于 $f'(z_1) \neq 0$,$f'(z_2) \neq 0$, 故 z_1, z_2 都是 $f(z) - a$ 的 1 阶零点. 这就是说, 存在 $z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2) = a$, 这与 f 的单叶性相矛盾.

□

定理 0.7

设 f 是区域 D 中的全纯函数, 如果对于 $z_0 \in D$,$f'(z_0) \neq 0$, 那么 f 在 z_0 的邻域中是单叶的.

证明 因为 $f'(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 1 阶零点. 由定理 0.4, 存在 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $a \in B(f(z_0), \delta)$,$f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中只有一个零点. 由 f 的连续性, 对 $\delta > 0$, 存在 $\rho_1 < \rho$, 使得对任意 $z \in B(z_0, \rho_1)$, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \iff f(z) \in B(f(z_0), \delta).$$

即

$$f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta),$$

设 $z_1, z_2 \in B(z_0, \rho_1)$ 且 $z_1 \neq z_2$, 则 $f(z_1), f(z_2) \in f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta)$. 又因为 $f(z) - f(z_2)$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中只有一个零点 z_2, 所以

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

因而 f 在 $B(z_0, \rho_1)$ 中是单叶的.

□

定理 0.8

设 f 是区域 D 上的单叶全纯函数, 那么它的反函数 f^{-1} 是 $G = f(D)$ 上的全纯函数, 而且

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \ w \in G,$$

其中,$w = f(z)$.

笔记 由于这个定理, 故单叶全纯函数也称为**双全纯函数**或**双全纯映射**.

证明 先证明 f^{-1} 在 G 上连续. 任取 $w_0 \in G$, 则存在 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = w_0$. 由定理 0.4或推论 0.1, 对于充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|w - w_0| < \delta$ 时, 相应的 z 满足 $|z - z_0| < \rho$, 即 $|f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < \rho$, 这说明 f^{-1} 在 w_0 处是连续的. 现在

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

即

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

这里, 我们已经利用了定理 0.6的结果.

□

定理 0.9 (Hurwitz 定理)

设 $\{f_n\}$ 是区域 D 中的一列全纯函数, 它在 D 中内闭一致收敛到不恒为零的函数 f. 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线, 它的内部属于 D, 且不经过 f 的零点. 那么必存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时,f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相同.

证明 由 Weierstrass 定理,f 在 D 中是全纯的. 因为 f 在 γ 上没有零点, 所以

$$\min\{|f(z)| : z \in \gamma\} = \varepsilon > 0.$$

另一方面, 对于上面的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时,$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在 γ 上成立. 于是, 当 $n \geqslant N$ 时, 在 γ 上有不等式

$$|f(z)| \geqslant \varepsilon > |f_n(z) - f(z)|.$$

根据 Rouché 定理,f 和 f_n 在 γ 内有相同个数的零点.

□

定理 0.10

设 $\{f_n\}$ 是区域 D 上一列单叶的全纯函数, 它在 D 上内闭一致收敛到 f, 如果 f 不是常数, 那么 f 在 D 中也是单叶的全纯函数.

证明 由 Weierstrass 定理,f 是 D 上的全纯函数. 如果 f 在 D 上不是单叶的, 那么一定存在 z_1, z_2,$z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2)$. 令

$$F(z) = f(z) - f(z_1),$$

那么 F 在 D 中有两个零点 z_1 和 z_2. 因为 $F \not\equiv 0$, 故由定理**??**可知 z_1 和 z_2 是孤立的. 选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \varnothing$, 且 F 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中除去 z_1 和 z_2 外不再有其他的零点. 令

$$F_n(z) = f_n(z) - f(z_1),$$

则 F_n 在 D 中内闭一致收敛到 F. 由 Hurwitz 定理, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,F_n 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中各有一个零点, 设为 z_1' 和 z_2'. 显然 $z_1' \neq z_2'$, 由此即得

$$f_n(z_1') = f_n(z_2') = f(z_1).$$

这与 f_n 在 D 内的单叶性相矛盾.

□

例题 0.1 求方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在单位圆内的零点个数.

解 令

$$f(z) = -4z^5,$$
$$g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1.$$

在单位圆周上,$|f(z)| = 4$, 于是

$$|f(z) - g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leqslant |z|^8 + |z|^2 + 1 = 3 < |f(z)|.$$

根据 Rouché 定理,g 和 f 在 $|z| < 1$ 中的零点个数相同. 而 f 在 $z = 0$ 处有 1 个 5 阶零点, 因而原方程在 $|z| < 1$ 中有 5 个零点.

□

例题 0.2 试求方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 中根的个数.

解 我们只需分别算出它在圆盘 $|z| \leqslant 1$ 和 $|z| < 2$ 中根的个数, 二者之差即为在圆环 $1 < |z| < 2$ 中根的个数.

利用例题 0.1 中的方法, 容易知道原方程在 $|z| < 1$ 中只有 1 个根. 而在圆周 $|z| = 1$ 上, 由于

$$|z^4 - 6z + 3| \geqslant 6 - |z^4 + 3| \geqslant 2,$$

故在圆周 $|z|=1$ 上不可能有零点. 所以, 在 $|z|\leqslant 1$ 中只有 1 个根.

为了计算 $|z|<2$ 中根的个数, 令 $f(z)=z^4$,$g(z)=z^4-6z+3$, 于是在圆周 $|z|=2$ 上, 有

$$|f(z)-g(z)|\leqslant |6z|+3=15<16=|f(z)|.$$

故由 Rouché 定理,$g(z)=z^4-6z+3$ 和 $f(z)=z^4$ 在 $|z|<2$ 中的零点个数相同, 因而原方程在 $|z|<2$ 中有 4 个根. 由此即知原方程在圆环 $1<|z|<2$ 中有 3 个根.

□

例题 0.3 证明: 方程 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限内各有一个根.

证明 记

$$P(z)=z^4+2z^3-2z+10,$$

我们直接用辐角原理来证明它在第一象限内只有一个零点. 为此, 取围道如图 2所示, 为了应用辐角原理, 我们要证明 P 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 上都没有零点. 当 R 充分大时,P 在 γ_2 上没有零点是显然的.

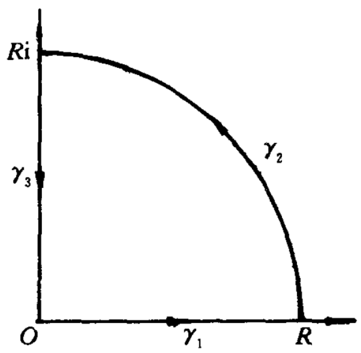

图 2

当 $z\in\gamma_1$ 时,$z=x>0$, 于是

$$P(z)=P(x)=x^4+2x^3-2x+10=(x^2-1)(x+1)^2+11.$$

故当 $x>1$ 时,$P(x)>11$; 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$P(x)\geqslant -2+11=9$. 因此,P 在 γ_1 上取正值. 当 $z\in\gamma_3$ 时,$z=iy$,$y>0$, 显然

$$P(iy)=y^4+10-2iy(y^2+1)\neq 0.$$

现在来计算 P 在 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ 上辐角的变化. 由于 P 在 γ_1 上取正值, 所以

$$\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z)=0. \tag{9}$$

当 $z\in\gamma_2$ 时, 有

$$P(z)=z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)=z^4Q(z),$$

这里,$Q(z)=1+\dfrac{2z^3-2z+10}{z^4}$. 当 $|z|$ 充分大时, 有

$$|Q(z)-1|=\left|\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right|<1,$$

即 $Q(z)$ 落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 所以 $\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}Q(z)=0$, 于是

$$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z)=4\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}z+\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}Q(z)=2\pi. \tag{10}$$

当 $z\in\gamma_3$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}P(z)&=\mathrm{Arg}P(0)-\mathrm{Arg}P(iR)\\&=-\mathrm{Arg}\{R^4+10-2iR(R^2+1)\}\\&=-\mathrm{Arg}(R^4+10)\left(1-\frac{2iR(R^2+1)}{R^4+10}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{Arg}\left(1 - \frac{2iR(R^2+1)}{R^4+10}\right) \\
&= 0\,(R\ \text{充分大时}). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由 (9),(10) 和 (11) 式即得

$$
\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}P(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z) = 1.
$$

根据辐角原理,P 在第一象限内只有一个零点.

由于 P 是实系数多项式, 它的零点是共轭出现的, 故在第四象限内也有一个零点.

用与前面相同的方法, 可以证明 P 在负实轴上没有零点, 因此剩下的两个零点当然就在第二、第三象限中了.

□