



# 集合论

作者: 实空

组织: 无

时间: November 26, 2025

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

# 目录

第 1 章 集合与点集	1
1.1 集合及其运算	1
1.2 映射	7
1.3 集合的基数 (势)	11
1.4 可列集与不可列集	15
1.5 整数	21

# 第1章 集合与点集

## 1.1 集合及其运算

### 定义 1.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如  $A, B, C$  等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的**元素** (或**元**).

若  $a$  是集合  $A$  的元素, 则称  $a$  **属于**  $A$ , 记为  $a \in A$ ; 若  $a$  不是集合  $A$  的元素, 则称  $a$  **不属于**  $A$ , 记为  $a \notin A$ . 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为  $\emptyset$ .

我们用  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用  $\mathbb{N}_0$  表示  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**注** 集合的表示方法:

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 3, \dots, 2n-1\}.$$

(2) 描述法—— $A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}$ . 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

### 定义 1.2

若集合  $A$  和  $B$  具有完全相同的元素, 则称  $A$  与  $B$  **相等**, 记为  $A = B$ .

若  $A$  中的每个元素都是  $B$  的元素, 则称  $A$  为  $B$  的**子集**, 记为  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ .

若  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ , 则称  $A$  为  $B$  的**真子集**, 记为  $A \subset B$ .

集合  $A$  的所有子集的全体, 称为  $A$  的**幂集**, 记为  $2^A$  或  $\mathcal{P}(A)$ .

**注**  $A = B \iff A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$ .

由  $n$  个元素形成的集合  $E$  的幂集  $\mathcal{P}(E)$  共有  $2^n$  个元素.

### 定义 1.3

设  $\forall \alpha \in \Gamma, A_\alpha$  都是集合, 则  $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  称为**集族**或**集合族**, 称  $\Gamma$  为**指标集**,  $\alpha$  为**指标**. 特别地, 当  $\Gamma = \mathbb{N}$  时, 集族称为**集列**或**集合列**, 记为  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  或  $\{A_n\}$ .

### 定义 1.4

设有集合族  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, \text{ s.t. } x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

设  $A, B$  为两个集合, 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A$  与  $B$  **互不相交**.

### 定义 1.5

设  $A, B$  是两个集合, 称  $\{x : x \in A, x \notin B\}$  为  $A$  与  $B$  的**差集**, 记作  $A - B$  或  $A \setminus B$ .

在上述定义中, 当  $B \subset A$  时, 称  $A \setminus B$  为集合  $B$  相对于集合  $A$  的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合  $X$  的子集, 我们称  $X$  为**全集**. 此

时, 集合  $B$  相对于全集  $X$  的补集就简称为  $B$  的**补集**或**余集**, 并记为  $B^c$  或  $\mathcal{C}B$ , 即

$$B^c = X \setminus B.$$

今后, 凡没有明显标出全集  $X$  时, 都表示取补集运算的全集  $X$  预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是  $B^c$  也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

### 定义 1.6 (笛卡尔积/直积集)

设  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{A_i\}_{i=1}^n$  为集族, 称

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**笛卡尔积**, 记为  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

若  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ , 则  $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$  当且仅当  $x_i = x'_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

特别地, 记  $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_1}_{n \text{ 个}} = A_1^n$ .

### 定理 1.1 (集合的运算及性质)

(1) **广义交换律和结合律**: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

$$(2) A \cup A = A, A \cap A = A.$$

$$(3) A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(4) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

$$(5) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(6) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha), A \cup \left( \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_\alpha), A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset.$$

$$(7) X^c = \emptyset, \emptyset^c = X.$$

$$(8) A \setminus B = A \cap B^c.$$

$$(9) \text{若 } A \supseteq B, \text{ 则 } A^c \subseteq B^c; \text{ 若 } A \cap B = \emptyset, \text{ 则 } A \subseteq B^c.$$

$$(10) A \setminus B^c = B \setminus A^c.$$

$$(11) \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

$$(12) \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

### 证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

$$(10) x \in A \setminus B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \notin B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \iff x \in B \text{ 且 } x \notin A^c \iff x \in B \setminus A^c.$$

- (11) 对  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ , 存在  $\alpha_x \in I$ , 使  $x \in A_{\alpha_x}$ , 并且  $x \notin B_{\alpha_x}, \forall \alpha \in I$ . 从而  $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$ . 故  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$ .
- (12) 对  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha)$ , 都存在  $\alpha_x \in I$ , 使得  $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$ . 于是  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  且  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ , 即  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ . 故  $\bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ .

□

**定理 1.2 (De Morgan 定律)**

设  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  为一族, 则

$$(i) \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c; \quad (ii) \left( \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c.$$

♥

**证明** (i) 设  $x \in \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$ , 则  $x \notin \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ , 故对  $\forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$ , 即  $\forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c$ . 从而  $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$ , 因此,  $\left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$ . 上述推理反过来也成立, 故  $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c \subseteq \left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$ . 因此,  $\left( \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$ .


(ii) 类似可证.

□

**定义 1.7 (对称差集)**

设  $A, B$  为两个集合, 称集合  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  为  $A$  与  $B$  的**对称差集**, 记为  $A \Delta B$ .

♣

 **笔记** 对称差集是由既属于  $A, B$  之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

**定理 1.3 (集合对称差的性质)**

- (i)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
- (ii)  $A \Delta \emptyset = A, A \Delta A = \emptyset, A \Delta A^c = X, A \Delta X = A^c$ .
- (iii)  $A \Delta B = B \Delta A$ .
- (iv)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
- (v)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .
- (vi)  $A^c \Delta B^c = A \Delta B; A = A \Delta B$  当且仅当  $B = \emptyset$ .
- (vii) 对任意的集合  $A$  与  $B$ , 存在唯一的集合  $E$ , 使得  $E \Delta A = B$  (实际上  $E = B \Delta A$ ).

♥

**证明**

- (i) 由对称差集的定义及定理 1.1(6) 可得

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

- (ii)
- (iii)
- (iv)
- (v)
- (vi)
- (vii)

□

**定义 1.8 (递增、递减集合列)**

设  $\{A_k\}$  是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ ; 若  $\{A_k\}$  满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称  $\{A_k\}$  为**递增集合列**, 此时称其并集  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  为  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

**命题 1.1**

1. 当  $\{A_k\}$  为递减集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .

2. 当  $\{A_k\}$  为递增集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .

**证明**

1. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递减集合列可得

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \dots.$$

因此  $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ .

2. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递增集合列可得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$

因此  $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ .

□

**定义 1.9 (上、下极限集)**

设  $\{A_k\}$  是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \dots),$$

显然有  $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \dots)$ . 我们称

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列  $\{A_k\}$  的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说  $\{A_k\}$  的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

### 命题 1.2

设  $\{A_k\}$  是一个集合列, 我们有

1. 若  $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$ , 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

2. 若  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$ , 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

### 证明

1. 由于  $\{A_k\}$  为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k. \\ \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j. \end{aligned}$$

2. 由于  $\{A_k\}$  为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j. \\ \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k. \end{aligned}$$

□

### 命题 1.3 (上、下极限集的性质)

设  $\{A_k\}$  是一集合列,  $E$  是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} (E \setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (E \setminus A_k).$$

▲

### 证明

□

## 定理 1.4

若  $\{A_k\}$  为一集合列, 则

$$(i) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geq j \text{ 且 } k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$(ii) \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x : \text{除有限个 } A_k \text{ 外, 都含有 } x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j_0 \text{ 且 } k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k \supset \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$



**证明** (i) 设  $x \in \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ , 则对  $n=1$ , 有  $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , 故  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ , 使得  $x \in A_{n_1}$ ; 对  $n = n_1 + 1$ , 有  $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$ , 故  $\exists n_2 > n_1$ , 使得  $x \in A_{n_2}$ ; 以此类推, 得到一列  $\{n_k\}$  满足  $n_1 < n_2 < \dots$ , 且  $x \in A_{n_k}, \forall k$ . 因此  $x$  属于无穷多个  $A_n$ .

反之, 若  $x$  属于无穷多个  $A_n$ , 不妨设  $x \in A_{n_k}, k=1, 2, \dots$ , 且  $n_1 < n_2 < \dots$ , 则对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都存在  $n_k > n$ . 从而  $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . 因此  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

(ii) 若  $x \in \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$ , 则存在自然数  $j_0$ , 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ . 自然除了  $A_1, \dots, A_{j_0-1}$  这有限个集合外, 其他  $A_k (k \geq j_0)$  都含有  $x$ .

反之, 若除有限个  $A_k$  外, 都含有  $x$ , 则存在自然数  $j_0$ , 当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ , 从而得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

由 (i)(ii) 可知,  $\{A_k\}$  的上限集是由属于  $\{A_k\}$  中无穷多个集合的元素所形成的;  $\{A_k\}$  的下限集是由只不属于  $\{A_k\}$  中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k \supset \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

□

**例题 1.1** 设  $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n=0, 1, 2, \dots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n=1, 2, \dots$ , 求  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  与  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**解** 注意到

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 2]$$

故只需考察  $(1, 2)$  中的点. 对  $\forall x \in (1, 2)$ , 存在  $n_0 \in \mathbb{N}$  (与  $x$  有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

即当  $n \geq n_0$  时, 有  $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$ . 这说明: (i)  $x$  不能“除有限个  $A_n$  外, 都含有  $x$ ”, 即  $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ; (ii) “ $x$  属于无穷多个  $A_n$ ”, 故  $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ . 因此,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1], \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2]$ .

□

**例题 1.2** 设  $f_n(x), f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的实值函数, 则所有  $\{f_n(x)\}$  不收敛于  $f(x)$  的点  $x$  构成的集合  $D$  可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

**注** 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由De Morgan 定律, 所有  $\{f_n(x)\}$  收敛于  $f(x)$  的点  $x$  构成的集合  $C$  可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

**证明** 若  $x \in D$ , 则 “ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ”, 即  $\exists \varepsilon_0 > 0$ , 对  $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geq k$ , 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

记  $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}$ , 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到  $\varepsilon_0$  的取法, 不妨设  $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$ . 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

□

## 1.2 映射

### 定义 1.10 (映射)

设  $A, B$  为非空集, 若存在对应法则  $f$ , 使得对每个  $x \in A$  都有唯一确定的  $y \in B$  与之对应, 则称对应法则  $f$  为从  $A$  到  $B$  的映射. 记为  $f: A \rightarrow B$ , 其表达式为  $y = f(x), x \in A$ .

$A$  称为  $f$  的**定义域**, 记为  $D(f)$ .  $B$  称为  $f$  的**陪域**.  $A$  在  $f$  下的象称为  $f$  的**值域**, 记为  $R(f)$ , 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合  $B_0 \subseteq B$  在  $f$  下的**原象**, 记为  $f^{-1}(B_0)$ , 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

♣

**注** 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

- (1) 对每一个  $x \in A$ , 只能有唯一的  $y \in B$  与它对应; 并且  $f$  的一个像可以存在多个原像.
- (2)  $f(A) \subseteq B$ , 不一定有  $f(A) = B$ ;
- (3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

- (4) 值域中的元可以是集合. 例如  $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$ ;
- (5) 定义域中的元也可以是集合. 例如  $A$  可列,  $\mathcal{D} \subseteq 2^A$ , 定义  $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$  为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

### 定义 1.11 (单射、满射和双射)


设  $f: A \rightarrow B$ , 则

1. 若  $B$  中每个元素最多只有一个原像, 即对  $\forall y \in B, f^{-1}(y)$  所含元素个数为 0 或 1, 则称  $f$  为**单射**或**一一映射**.
2. 若  $f(A) = B$ , 即  $\forall y \in B$ , 都存在  $x \in A$  使得  $f(x) = y$ , 亦即  $f^{-1}(y) \neq \emptyset, \forall y \in B$ , 则称  $f$  为**满射**或**映上的**.
3. 若  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为**双射**或**一一对应**.

♣

**定义 1.12 (逆映射)**

设  $f: A \rightarrow B$  为一一映射, 则对每个  $y \in B$ , 都有唯一确定的  $x \in A$  满足  $y = f(x)$ . 定义  $f^{-1}: B \rightarrow A$  为  $f^{-1}(y) = x$ , 则称  $f^{-1}$  为  $f$  的**逆映射**. 自然  $f$  也是  $f^{-1}$  的逆映射, 即  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

 **笔记** 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

**定理 1.5**

设  $f: A \rightarrow B$ , 则

1.  $f$  为单射的充要条件是

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

也即

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

亦即

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

2.  $f$  为双射的充要条件是存在  $g: B \rightarrow A$ , 使得

$$gf = \text{id}_A, \quad fg = \text{id}_B.$$

此时必有  $f = f^{-1}$ . 即有两个交换图, 如图 1.1 所示.

 **笔记**

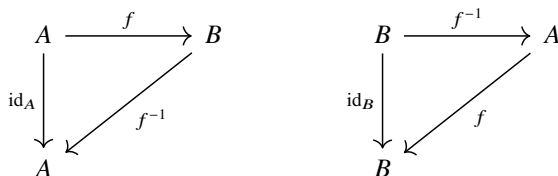


图 1.1

**证明**

□

**定义 1.13 (映射的乘积)**

设映射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ , 定义  $g \circ f: A \rightarrow C$  为


$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为  $g$  与  $f$  的**复合映射**或**乘积**.  $g \circ f$  也常简记为  $gf$ .

**定理 1.6 (映射的乘法满足结合律)**

若有  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ , 则有

$$h(gf) = (hg)f.$$

 **笔记** 由映射的乘法满足结合律可知在多个映射相乘时, 可以不加括号. 特别地,  $h(gf)$  与  $(hg)f$  均可简记作  $hgf$ .

**证明** 事实上, 对  $\forall x \in A$  有

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$= (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x).$$

□

**定义 1.14**

设映射  $f: A \rightarrow B$ ,  $A_0 \subseteq A$ , 定义映射  $i: A_0 \rightarrow A$  满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称  $i$  为  $A_0$  到  $A$  中的**嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射  $f: A \rightarrow B$  与映射  $g: A_0 \rightarrow B$  满足  $gi = f$ , 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称  $g$  为  $f$  在  $A_0$  上的**限制**, 记为  $g = f|_{A_0}$ , 也称  $f$  为  $g$  在  $A$  上的**延拓**或**开拓**. 即图 1.2 为交换图.

♣

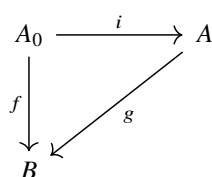
 **笔记**

图 1.2

**命题 1.4**

设一系列映射  $f_i: A_i \rightarrow A_{i+1}$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- (1) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是单射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是单射.
- (2) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是满射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是满射.
- (3) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是双射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是双射.

♣

**证明**

- (1)
- (2)
- (3)


□

**命题 1.5 (映射的基本性质)**

对于映射  $f: C \rightarrow D, A \subseteq C, B \subseteq D, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq C, \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq D$ , 则下列事实成立:

- (i) 若  $A \subseteq B$ , 则  $f(A) \subseteq f(B)$ ; 若  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq D$ , 则  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ .
- (ii)  $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha); f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$
- (iii)  $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha);$   
 $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ , 当且仅当  $f$  为单射时 “=” 成立.
- (iv)  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ , 当且仅当  $f$  为满射时 “=” 成立;  
 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ , 当且仅当  $f$  为单射时 “=” 成立.
- (v)  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$

♣

 **笔记** (iv) 中第一条的直观理解是:  $B$  中某些元素不一定有原像 (即  $f$  可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是:  $C \setminus A$  中的某些元素的像也可能在  $f(A)$  (即  $f$  可能不是单射).

**证明** (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到  $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ , 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

故  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ .

设  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ , 则  $y \in f(A_1)$  且  $y \in f(A_2)$ , 故存在  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$  使得  $y = f(x_1) = f(x_2)$ . 由于  $f$  是单射, 则必有  $x_1 = x_2 = x$ . 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

因此, “=” 成立.

反之, 假设  $f$  不是单射, 则存在  $x_1 \neq x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ . 构造集合  $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$ , 则  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , 从而  $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ . 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

故  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ . 矛盾.

(iv) (1) 设  $y \in f(f^{-1}(B))$ , 则存在  $x \in f^{-1}(B)$  使得  $y = f(x)$ . 故  $y = f(x) \in B$ . 因此,  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ .

设  $y \in B$ ,  $f$  为满射, 则存在  $x \in A$  使得  $y = f(x)$ . 故  $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$ , 从而  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ , 于是  $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ , 因此, “=” 成立.

反之, 假设  $f$  不是满射, 则  $f(A) \subsetneq B$ . 由于  $f^{-1}(B) \subseteq A$ , 故

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \subsetneq B$$

与  $B = f(f^{-1}(B))$  矛盾.

(2) 设  $x \in A$ , 则  $f(x) \in f(A)$ , 故  $x \in f^{-1}(f(A))$ . 因此,  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .

设  $x \in f^{-1}(f(A))$ , 则  $f(x) \in f(A)$ . 再由  $f$  是单射, 则必有  $x \in A$ . 从而  $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ . 因此, “=” 成立.

反之, 假设  $f$  不是单射, 则存在  $x_1 \neq x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ . 构造集合  $A = \{x_1\}$ , 则  $f(A) = \{f(x_1)\}$ . 故  $\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(f(A))$ , 从而  $A \neq f^{-1}(f(A))$ . 矛盾.

□

### 命题 1.6 (单调映射的不动点)

设  $X$  是一个非空集合, 且有  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . 若对  $\mathcal{P}(X)$  中满足  $A \subseteq B$  的任意  $A, B$ , 必有  $f(A) \subseteq f(B)$ , 则存在  $T \subset \mathcal{P}(X)$ , 使得  $f(T) = T$ .

◆

**证明** 作集合  $S, T$ :

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且 } A \subseteq f(A)\}, \quad T = \bigcup_{A \in S} A (\in \mathcal{P}(X)),$$

则有  $f(T) = T$ .

事实上, 因为由  $A \in S$  可知  $A \subseteq f(A)$ , 从而由  $A \subseteq T$  可得  $f(A) \subseteq f(T)$ . 根据  $A \in S$  推出  $A \subseteq f(T)$ , 这就导致

$$\bigcup_{A \in S} A \subseteq f(T), \quad T \subseteq f(T).$$


另一方面, 又从  $T \subseteq f(T)$  可知  $f(T) \subseteq f(f(T))$ . 这说明  $f(T) \in S$ , 我们又有  $f(T) \subseteq T$ .

□

**定义 1.15 (特征函数 (示性函数))**

集合  $E$  的**特征函数 (示性函数)** 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

 **笔记** 特征函数  $\chi_E$  在一定意义上反映出集合  $E$  本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

**命题 1.7 (特征函数的基本性质)**

- (1)  $A = B \iff \chi_A(x) = \chi_B(x)$ ;
- (2)  $A \subseteq B \iff \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ ;
- (3)  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
- (4)  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) \setminus \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
- (5)  $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)[1 \setminus \chi_B(x)]$ ;
- (6)  $\chi_{A \Delta B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$ .

**证明**

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)

□

## 1.3 集合的基数 (势)

**定义 1.16 (集合的对等)**

设  $A, B$  为非空集, 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则称  $A$  与  $B$  **对等**, 记为  $A \sim B$ . 规定  $\emptyset \sim \emptyset$ .

 **笔记**  $A$  与  $B$  对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

**定理 1.7**

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

- (1) (反身性)  $A \sim A$ ;
- (2) (对称性) 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ ;
- (3) (传递性) 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .

**证明** 证明是显然的.

□

**命题 1.8**

- (1) 设  $A, B, C, D$  都是非空集合, 若  $A \sim C, B \sim D$ , 则  $A \times B \sim C \times D$ .
- (2) 设  $A_i, B_i$  都是非空集合, 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 若  $A_i \sim B_i$ , 则  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ .

**证明**

(1) 由  $A \sim C, B \sim D$  可知, 存在双射  $f: A \rightarrow C$  和  $g: B \rightarrow D$ . 于是令

$$\varphi: A \times B \rightarrow C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对  $\forall (a, b) \in A \times B$ , 由  $f(a) \in C, g(b) \in D$  可知  $(f(a), g(b)) \in C \times D$ . 故  $\varphi$  是良定义的. 由  $f, g$  都是双射易知  $\varphi$  也是双射. 故  $A \times B \sim C \times D$ .

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明. □

**例题 1.3** 自然数集  $\mathbb{N} \sim$  正偶数集  $\sim$  正奇数集  $\sim$  整数集  $\mathbb{Z}$ .

**证明** 正偶数集  $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ; 正奇数集  $= \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ ;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1} \lfloor n/2 \rfloor : n \in \mathbb{N}\}.$$
□

**例题 1.4**  $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$ .

**证明**  $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$ . □

**例题 1.5**  $\{\text{去掉一点的圆周}\} \sim \mathbb{R}$ .

**笔记** 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

**证明** 如图 1.3, 设圆周为  $C$ , 从除去的点  $P$  作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点  $P$ ) 的直线表示实轴  $\mathbb{R}$ . 对于  $C \setminus \{P\}$  上的每一点  $c$ , 从点  $P$  作过点  $c$  的直线必与实轴相交于某点, 记为  $x$ . 建立一一对应:  $s: \mathbb{R} \rightarrow C \setminus \{P\}$  为  $s(x) = c$ . (点  $P$  对应  $\infty$ )

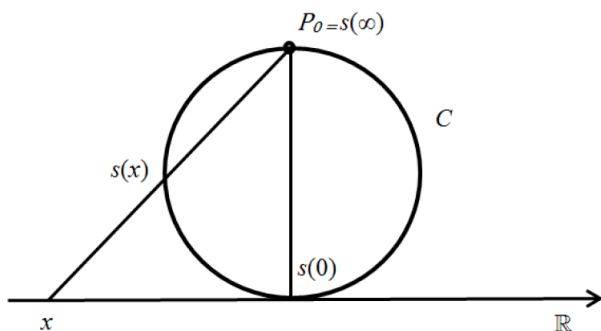


图 1.3: 去掉一点的圆周与实轴对等 □

#### 引理 1.1 (映射分解定理)

设  $A, B$  为非空集, 若  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 则  $A$  与  $B$  存在如下分解:

- (i)  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ ;
  - (ii)  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ;
  - (iii)  $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$ .
- ♥

**证明** 作集族

$$\Gamma = \{E \subseteq A : E \cap g(B \setminus f(E)) = \emptyset\}.$$

令  $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$ , 则  $A_1 \in \Gamma$ . 实际上, 对任意的  $E \in \Gamma$ , 都有  $E \subseteq A_1$ , 再由  $E \cap g(B \setminus f(E)) = \emptyset$  知

$$E \cap g(B \setminus f(A_1)) = \emptyset$$

从而

$$A_1 \cap g(B \setminus f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B \setminus f(E))] = \emptyset$$

因此,  $A_1$  是  $A$  中隔离集, 且是  $\Gamma$  中的最大元.

现在令  $B_1 = f(A_1)$ ,  $B_2 = B \setminus B_1$ ,  $A_2 = g(B_2)$ , 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B \setminus f(A_1)) = \emptyset$$

下面只需验证  $A_1 \cup A_2 = A$ .

若不然, 则存在  $x_0 \in A$ ,  $x_0 \notin A_1 \cup A_2$ . 令  $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$ , 由于  $B_1 = f(A_1) \subseteq f(A_0)$ , 故

$$B \setminus f(A_0) \subseteq B \setminus B_1 = B_2$$

从而

$$g(B \setminus f(A_0)) \subseteq g(B_2) = A_2$$

再由  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  以及  $x_0 \notin A_2$  知

$$A_1 \cap g(B \setminus f(A_0)) = \emptyset, \quad x_0 \notin g(B \setminus f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B \setminus f(A_0)) = \emptyset$$


故  $A_0 \in \Gamma$ . 这与  $A_1$  是  $\Gamma$  中的最大元矛盾.

□

### 定义 1.17 (集合的基数 (势))

设  $A, B$  为两个集合, 若  $A \sim B$ , 则称  $A$  与  $B$  的**基数**或**势**相同, 记为  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

♣

 **笔记** 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

### 定理 1.8

- (1) 自反性:  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (2) 对称性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (3) 传递性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ,  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ .

♥

**证明** 由定理 1.7 及集合的基数 (势) 的定义可直接得到.

□

### 定义 1.18

对于集合  $A, B$ , 若有  $B_0 \subseteq B, A \sim B_0$ , 则称  $A$  的基数小于等于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ .

若  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$  且  $A$  与  $B$  不对等, 则称  $A$  的基数小于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ .

同理可定义  $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$  和  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ .

♣

### 命题 1.9 (映射与基数之间的关系)

- (1) 若存在从  $A$  到  $B$  的单射, 则  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ ;
- (2) 若存在从  $A$  到  $B$  的满射, 则  $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$ ;
- (3) 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

♠

**证明**

- (1)
- (2)
- (3)

□

**定理 1.9 (Bernstein 定理)**

Bernstein 定理的两个等价形式:

- (1) 若  $A$  与  $B$  的某子集对等,  $B$  与  $A$  的某子集对等, 则  $A \sim B$ .
- (2) 若集合  $A, B$  满足  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .



**证明** 由题设存在单射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 利用映射分解定理可得到  $A$  与  $B$  的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . 注意到  $f: A_1 \rightarrow B_1, g^{-1}: A_2 \rightarrow B_2$  是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则  $F: A \rightarrow B$  是一一映射, 从而  $A \sim B$ . 故 (1) 得证. 再由定义 1.17 和定义 1.18 可知 (2)  $\Leftrightarrow$  (1).



**例题 1.6**  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

**证明** 由例题 1.4 可知,  $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ ; 又  $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . 由 Bernstein 定理 (1) 可知,  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

**定理 1.10**

对于集合  $A, B, \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  中的任意两个不会同时成立.



**证明** 由定义 1.18 可知, 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $A$  与  $B$  对等, 另外两个不会成立; 假设  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$  与  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  同时成立, 则存在  $B_0 \subseteq B, A_0 \subseteq A$ , 使得  $A \sim B_0, B \sim A_0$ . 使用 Bernstein 定理 (1) 得出  $A \subseteq B$ , 进而  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 显然矛盾, 证毕.

**定义 1.19 (有限集与无限集)**

设  $A$  是一个非空集合, 若存在自然数  $n$ , 使得  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ , 则称  $A$  为**有限集**, 并记  $\overline{\overline{A}} = n$ . 若  $A$  不是有限集, 则称  $A$  为**无限集**. 特别地, 规定  $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$ .



**笔记** 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

**定理 1.11**

设  $A$  是非空集合, 则

- (1)  $A$  是有限集的充要条件是  $A$  不与其任何真子集对等.
- (2)  $A$  是无限集的充要条件是  $A$  与其某个真子集对等.



**笔记** 这就是有限集与无限集的本质区别.

**证明**

- (1) **必要性:** 设  $\overline{\overline{A}} = n$ , 用数学归纳法证明,  $n = 1$ , 显然. 假设  $n = k$  时, 结论成立.

当  $n = k + 1$  时, 若存在  $A$  的某个真子集  $A_0$  使得  $A \sim A_0$ , 则存在一一映射  $\varphi: A \rightarrow A_0$ . 下面分两种情况:

- (i)  $\exists a \in A$ , 使得  $\varphi(a) = a$ .

令  $A_1 = A \setminus \{a\}, A_2 = A_0 \setminus \{a\}$ , 则  $A_2$  是  $A_1$  的真子集,  $\overline{\overline{A_1}} = k$ . 而  $\varphi|_{A_1}$  是  $A_1$  到  $A_2$  的一一映射, 故  $A_1 \sim A_2$ . 这与假设矛盾.

- (ii)  $\forall a \in A$ , 都有  $\varphi(a) \neq a$ .

$A_0$  是  $A$  的真子集, 则存在  $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$ . 令

$$A_3 = A \setminus \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 \setminus \{\varphi(x_0)\}$$

注意到  $x_0 \notin A_0$  以及  $A_0$  是  $A$  的真子集, 则  $A_4$  是  $A_3$  的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subseteq A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故  $\varphi(x_0) \in A \setminus \{x_0\} = A_3$ , 而  $\varphi(x_0) \notin A_0 \setminus \{\varphi(x_0)\} = A_4$ . 从而  $A_4$  是  $A_3$  的真子集, 于是  $\overline{\overline{A_3}} = k, \varphi|_{A_3}$  是  $A_3$  到  $A_4$  的一一映射, 故  $A_3 \sim A_4$ . 这与假设矛盾.

**充分性:** 设  $A$  不与其任何真子集对等, 假设  $A$  是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此  $A$  不是无限集, 故  $A$  是有限集.

- (2) **证法一: 必要性:** 设  $A$  是无限集. 先证明在任一无限集  $A$  中, 一定能取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ . 事实上, 在  $A$  中任取一个元素, 记为  $a_1$ . 因为  $A$  是无限集, 集  $A \setminus \{a_1\}$  显然不空, 这时再从集  $A \setminus \{a_1\}$  取一个元素  $a_2$ , 同样,  $A \setminus \{a_1, a_2\}$  决不空. 可以继续做下去, 将从  $A$  中取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ , 记余集为  $\hat{A} = A \setminus \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ . 在  $A$  中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \dots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作  $A$  与  $\tilde{A}$  之间的映射  $\varphi$ :

$$\varphi(a_i) = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然,  $\varphi$  是  $A$  到  $\tilde{A}$  上的一一对应, 证毕.

**充分性:** 设  $A$  与其某个真子集对等, 假设  $A$  是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此  $A$  是不是有限集. 故  $A$  一定是无限集.

**证法二:** 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取  $A$  中一个非空有限子集  $B$ , 则由定理 1.12(6) 立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{(A \setminus B) \cup B}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故  $A \sim (A \setminus B)$ .

□

## 1.4 可列集与不可列集

### 定义 1.20

记自然数集  $\mathbb{N}$  的基数为  $\aleph_0$  (读作阿列夫 (Aleph, 希伯来文) 零). 若集合  $A$  的基数为  $\aleph_0$ , 则  $A$  叫作**可列集**或**可数集**. 不是可数集的无限集称为**不可列集**或**不可数集**.

♣

### 命题 1.10

$A$  是可列集当且仅当  $A$  可以写成  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

♣

**证明**  $A$  可列, 则存在  $\mathbb{N}$  到  $A$  的一一映射  $\varphi$ , 记为  $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$ , 则  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 反过来, 若  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 将每个  $a_n$  与其下标  $n$  建立一一映射, 则  $A$  与  $\mathbb{N}$  对等, 从而是可列集

□

### 定理 1.12 (可列集的性质)

- (1) 任何无限集必包含一个可列子集.
- (2) 可列集的任何无限子集都是可列集.

- (3) 有限集与可列集的并集是可列集.  
 (4) 有限个可列集的并集是可列集.  
 (5) 可列个可列集的并集是可列集.  
 (6) 若  $A$  为无限集,  $B$  为有限集或可列集, 则  $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ .  
 (7) 设  $A, B$  为可列集, 则  $A \times B$  是可列集.  
 (8) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  可列, 则  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  可列.



**笔记** (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数  $\aleph_0$ .

**证明**

- (1) 设  $A$  为无限集. 从  $A$  中任取一元  $a_1$ ; 由于  $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ , 取  $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ ; 又  $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ , 取  $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ ;  $\dots$ , 因为  $A$  是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到  $A$  的一个可列子集  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .  
 (2) 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ .  $B$  是  $A$  的无限子集. 按照  $A$  中元素的次序依次寻找  $B$  中元素, 分别记为  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ , 则  $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$  为可列集.  
 (3) 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . 不妨设  $A \cap B = \emptyset$ , 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots\}$$

可列.

- (4) 设  $A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  为可列集, 则  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \dots\} \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n)}, a_3^{(1)}, \dots\}$$

可列.

- (5) 设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  为一列可列集, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \rightarrow a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \dots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \dots\} \\ A_3 &= \{a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \dots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & a_4^{(n)} \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \dots, a_{2n+1}^{(n)}, \dots\}$$

(依次是下标之和等于  $2, 3, \dots, 2n+2, \dots$ ) 可列.

- (6) **证法一:** 不妨设  $A \cap B = \emptyset$ , 否则用  $B \setminus A$  代替  $B$  即可.  $A$  为无限集, 由 (1) 可知,  $A$  包含一个可列子集  $A_1$ . 由于

$A_1 \cup B$  是可列集, 故  $A_1 \cup B \sim A_1$ . 注意到  $(A \setminus A_1) \cap (A_1 \cup B) = \emptyset$ , 则有

$$A \cup B = (A \setminus A_1) \cup A_1 \cup B = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \setminus A_1) \cup A_1 = A.$$

因此,  $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ .

**证法二:** 不妨设  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

我们作映射  $f$  如下:

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad a_i \in A_1;$$

$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad b_i \in B;$$

$$f(x) = x, \quad x \in A_2.$$

显然,  $f$  是  $A \cup B$  到  $A$  上的双射.

(7) 由 **命题 1.10** 可设  $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ , 则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j). \end{aligned}$$

由(5)可知, 对  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$  都可列. 于是再由(5)可知  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$  也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明.

□

**例题 1.7** 有理数集  $\mathbb{Q}$  是可列集.

**证明**  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ , 其中  $\mathbb{Q}^+$ ,  $\mathbb{Q}^-$  分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质(3)和可列集的性质(4), 只需证明  $\mathbb{Q}^+$  可列.

对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 令

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \right\}$$

则  $A_n$  可列. 又  $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  (除去重复元), 由可列集性质(5)知  $\mathbb{Q}^+$  可列.

□

#### 命题 1.11

实轴  $\mathbb{R}$  上互不相交的开区间至多有可列个.

▲

**证明** 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成  $\mathbb{Q}$  的一个子集. 又  $\mathbb{Q}$  是可列集, 故这样的开区间至多有可列个.

□

**例题 1.8** 整系数多项式的全体  $\mathbb{P}$  是可列集.

**证明** 对每个  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , 令

$$P_n = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$$

由 **命题 1.12(8)** 知  $P_n$  可列. 又  $\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ , 由可列集性质知  $\mathbb{P}$  可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集.

□

**命题 1.12**

$\mathbb{R}$  上单调函数的间断点至多有可列个.

▲

**证明** 不妨只讨论  $f$  是开区间  $(a, b)$  上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f$  的一个间断点, 则有  $f(x_0^-) < f(x_0^+)$ . 这时  $f$  在点  $x_0$  的函数值满足不等式  $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ . 称  $(f(x_0^-), f(x_0^+))$  为与间断点  $x_0$  对应的一个跳跃区间. 对  $f$  的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设  $x_1$  是  $f$  的另一个间断点, 且  $x_0 < x_1$ . 我们要证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \emptyset. \quad (1.1)$$

为此在  $x_0$  和  $x_1$  之间插入  $x, x'$  如下:

$$x_0 < x < x' < x_1$$

则有不等式

$$f(x) \leq f(x')$$

固定  $x'$ , 令  $x \rightarrow x_0^+$ , 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的保不等式性, 得到

$$f(x_0^+) \leq f(x')$$

再令  $x' \rightarrow x_1^-$ , 又得到

$$f(x_0^+) \leq f(x_1^-)$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leq f(x_1^-) < f(x_1^+)$$

即所要证明的 (1.1). 这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 而由命题 1.11 可知这些跳跃区间至多有可列个. 这就证明了单调函数的间断点至多有可列个.

□

**定理 1.13**

$(0, 1], [0, 1]$  都是不可列集.

♥

**证明 证法一:** 只需讨论  $(0, 1]$ . 为此, 采用二进制小数表示法:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中  $a_n$  等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个  $a_n$  等于 1. 显然,  $(0, 1]$  与全体二进制小数一一对应.

若在上述表示式中把  $a_n = 0$  的项舍去, 则得到  $x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$ , 这里的  $\{n_i\}$  是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1 = n_1, \quad k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

则  $\{k_i\}$  是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为  $\mathcal{H}$ , 则  $(0, 1]$  与  $\mathcal{H}$  一一对应.

现在假定  $(0, 1]$  是可数的, 则  $\mathcal{H}$  是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{aligned} & (k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_i^{(1)}, \dots), \\ & (k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_i^{(2)}, \dots), \\ & \dots\dots\dots \\ & (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_i^{(i)}, \dots), \end{aligned}$$

.....

但这是不可能的, 因为  $(k_1^{(1)} + 1, k_2^{(2)} + 1, \dots, k_i^{(i)} + 1, \dots)$  属于  $\mathcal{H}$ , 而它并没有被排列出来. 这说明  $\mathcal{H}$  是不可数的, 也就是说  $(0, 1]$  是不可数集.

**证法二:** 假设  $[0, 1]$  可列, 则可表示为  $[0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 把  $[0, 1]$  三等分为:  $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$ , 则其中至少有一个闭区间不包含  $x_1$ , 记该区间为  $I_1$ , 则  $x_1 \notin I_1$ ; 把  $I_1$  三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含  $x_2$ , 记该区间为  $I_2$ , 则  $x_2 \notin I_2, I_2 \subset I_1; \dots$ , 依次做下去, 可得到一列闭区间  $\{I_n\}$  满足:

(i)  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ ;

(ii)  $x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N}$ ;

(iii)  $I_n$  的长度为  $1/3^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

由闭区间套定理, 存在  $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . 由于  $\xi \in [0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 则必存在  $n_0 \in \mathbb{N}$  使得  $\xi = x_{n_0}$ . 而  $x_{n_0} \notin I_{n_0}$ , 这与  $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  矛盾. □

### 定义 1.21 ( $\mathbb{R}$ 的基数)

我们称  $(0, 1]$  的基数为**连续基数**, 记为  $c$  (或  $\aleph_1$ ). ♣

### 定理 1.14

对  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 都有  $\overline{[a, b]} = \overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{\mathbb{R}} = \aleph$ . ♡

**证明** 对  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 映射  $f(x) = a + (b - a)x$  建立了  $[0, 1]$  与  $[a, b]$  之间的一一对应, 故  $\overline{[a, b]} = \aleph$ . 又  $(a, b)$  和  $[a, b]$  与  $[a, b]$  分别只差一个点和两个点, 由**可列集的性质 (6)**知  $\overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b]} = \aleph$ . 最后, 由  $\mathbb{Q}$  与  $\mathbb{R}$  对等] 例 1.6 以及刚证明的结论可得,  $\overline{\mathbb{R}} = \overline{[-1, 1]} = \aleph$ . □

### 推论 1.1

无理数的基数为  $\aleph$ . ♡

**证明** 记无理数集为  $\mathbf{I}$ , 注意到  $\mathbf{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , 且  $\mathbb{Q}$  可列, 由**可列集的性质 (6)**可得  $\overline{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I} \cup \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}} = \aleph$ . □

### 定理 1.15

设有集合列  $\{A_n\}$ . 若对每个  $n$  都有  $\overline{A_n} = \aleph$ , 则  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \aleph$ . ♡

**证明** 不妨假定  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ , 且  $A_k \sim [n, n+1)$ , 我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

□

### 定义 1.22

设  $A$  为集合, 记  $2^A$  为  $A$  的幂集. 若  $A$  为含有  $n$  个元素的有限集, 则  $2^A$  由 1 个空集,  $C_n^1$  个单元素集,  $C_n^2$  个两元素集,  $\dots, C_n^n$  个  $n$  元素集, 所以,  $2^A$  中元素的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n = 2^{\overline{A}}$$

更一般地, 设  $\overline{\overline{A}} = \mu$ , 定义  $\overline{\overline{2^A}} = 2^\mu$ .

### 命题 1.13

设  $A, B$  都是非空集合, 则  $A \sim B$  的充要条件是  $2^A \sim 2^B$ .

**证明** 必要性: 由  $A \sim B$  可知  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ . 于是  $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$ . 故  $2^A \sim 2^B$ .

充分性: 假设  $A$  与  $B$  不对等, 则不妨设  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ , 则  $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$ , 这与  $2^A \sim 2^B$  矛盾! 故  $A \sim B$ .

□

### 引理 1.2

设  $A$  是一个非空集合, 则  $A$  上所有特征函数的全体  $\mathcal{F}_A$  与  $2^A$  对等, 即  $\mathcal{F}_A \sim 2^A$ . 进而  $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$ .

♥

**证明** 对于每个  $E \in 2^A$ , 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明  $A$  上所有特征函数的全体  $\mathcal{F}_A$  与  $2^A$  对等.

□

### 定理 1.16

$\aleph = 2^{\aleph_0}$ .

♥

**证明** 用  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  表示  $\mathbb{N}$  上特征函数的全体, 只需证  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  与  $(0, 1]$  对等.

对任意的  $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ , 作映射

$$f: \varphi \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0, 1\}.$$

易知,  $f$  是从  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  到  $(0, 1]$  的单射, 故命题 1.18 可知  $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} \leq \overline{\overline{(0, 1]}}$ .

另一方面, 对每一个  $x \in (0, 1]$ , 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0, 1\}.$$

定义映射

$$g: x \rightarrow \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

易知,  $g$  是从  $(0, 1]$  到  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  的单射, 故由命题 1.18 可知  $\overline{\overline{(0, 1]}} \leq \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$ .

由 Bernstein 定理可知  $\overline{\overline{(0, 1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$ . 再由引理 1.2 可得  $\aleph = \overline{\overline{(0, 1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = 2^{\aleph_0}$ .

□

**例题 1.9**  $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ .

**证明** 由定理 1.16 及命题 1.13 和  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$  可知  $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ .

□

**例题 1.10** 用  $M$  表示  $[0, 1]$  上实值有界函数的全体, 则  $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$ .

**证明** 设  $E$  为  $[0, 1]$  的任一子集, 则  $E$  唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] - E \end{cases}$$

显然,  $\chi_E \in M$ . 故  $\overline{\overline{M}} \geq \overline{\overline{2^{[0, 1]}}} = 2^{\aleph}$ .

另一方面, 对每一个  $f \in M$ , 其图像  $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$  为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故  $\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph}$ . 由伯恩斯坦定理,  $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$ .

□

### 定理 1.17 (无最大基数定理)

若  $A$  是非空集合, 则  $A$  与其幂集  $\mathcal{P}(A)$  (由  $A$  的一切子集所构成的集合族) 不对等, 即  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$ .

♡

**证明** 假定  $A$  与其幂集  $\mathcal{P}(A)$  对等, 即存在一一映射  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ . 我们作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

于是有  $y \in A$ , 使得  $f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$ . 现在分析一下  $y$  与  $B$  的关系:

(i) 若  $y \in B$ , 则由  $B$  的定义可知  $y \notin f(y) = B$ ;

(ii) 若  $y \notin B$ , 则由  $B$  的定义可知  $y \in f(y) = B$ .

这些矛盾说明  $A$  与  $\mathcal{P}(A)$  之间并不存在一一映射, 即  $A$  与  $\mathcal{P}(A)$  并不是对等的. 集合  $A$  的基数小于其幂集  $\mathcal{P}(A)$  的基数是显然的.

□

## 1.5 整数

### 定理 1.18 (递归定理)

假设  $S$  是一个集合,  $a \in S$ , 并且对于每个  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : S \rightarrow S$  均是函数, 则存在唯一的函数  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$ , 使得  $\varphi(0) = a$  并且  $\varphi(n+1) = f_n(\varphi(n)) (\forall n \in \mathbb{N})$ .

♡

**证明** 我们将构造  $\mathbb{N} \times S$  上的一个关系  $R$ , 使得它是满足上述性质的函数  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$  的图象, 令

$$\mathcal{F} = \{Y \subset \mathbb{N} \times S \mid (0, a) \in Y, \text{ 并且 } (n, x) \in Y \Rightarrow (n+1, f_n(x)) \in Y (\forall n \in \mathbb{N})\}$$

由于  $\mathbb{N} \times S \in \mathcal{F}$ , 从而  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . 令  $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$ , 则  $R \in \mathcal{F}$ . 又设  $M$  为子集合

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{存在唯一的 } x_n \in S, \text{ 使得 } (n, x_n) \in R\}$$

我们归纳证明  $M = \mathbb{N}$ . 如果  $0 \notin M$ , 则有  $(0, b) \in R$ , 其中  $b \neq a$ , 并且集合  $R - \{(0, b)\} \subset \mathbb{N} \times S$  属于  $\mathcal{F}$ . 从而  $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \subset R - \{(0, b)\}$ , 这就导致矛盾. 因此  $0 \in M$ . 现在假定  $n \in M$  (即有唯一的  $x_n \in S$ , 使得  $(n, x_n) \in R$ ), 则  $(n+1, f_n(x_n)) \in R$ . 如果又有  $(n+1, c) \in R$ , 而  $c \neq f_n(x_n)$ , 则  $R - \{(n+1, c)\} \in \mathcal{F}$  (验证!), 由此又可象上面那样导致矛盾. 因此  $x_{n+1} = f_n(x_n)$  是  $S$  中唯一的元素, 使得  $(n+1, x_{n+1}) \in R$ . 于是由归纳法 (定理 6.1) 可知  $\mathbb{N} = M$ , 即  $n \mapsto x_n$  定义了一个函数  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$ , 它的图象为  $R$ . 由于  $(0, a) \in R$ , 从而  $\varphi(0) = a$ . 对于每个  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n, x_n) = (n, \varphi(n)) \in R$ . 由于  $R \in \mathcal{F}$ , 从而  $(n+1, f_n(\varphi(n))) \in R$ . 但是  $(n+1, x_{n+1}) \in R$ . 由  $x_{n+1}$  的唯一性推出  $\varphi(n+1) = x_{n+1} = f_n(\varphi(n))$ .

□

**注** 如果  $A$  是非空集合,  $A$  中的序列是一个函数  $\mathbb{N} \rightarrow A$ . 一个序列通常表示成  $\{a_0, a_1, \dots\}, \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  或者  $\{a_i\}$ , 其中  $a_i \in A$  是  $i \in \mathbb{N}$  的象. 类似地, 函数  $\mathbb{N}^* \rightarrow A$  也称作序列, 并且表示成  $\{a_1, a_2, \dots\}, \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  或者  $\{a_i\}$ , 这些符号在课文中不会引起混乱.