0.1 复变函数的极限和连续性

定义 0.1

设 E 是复平面上一点集,如果对每一个 $z \in E$,按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应,我们就说在 E 上确定了一个**单值复变函数**,记为 $w = f(z)$ 或 $f : E \to \mathbb{C}.E$ 称为 f 的**定义域**,点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 称为 f 的**值域**.$w = f(z)$ 的值域所在的平面称为 $\boldsymbol{w}$ **平面**.

如果对于 $z \in E$,对应的 w 有几个或无穷多个,则称在 E 上确定了一个**多值函数**.

复变函数是定义在复平面上的,它的值域也在复平面上,因此复变函数也称为**映射**或**变换**,它把一个复平面上的平面点集映成另一个复平面上的平面点集.与 $z \in E$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 在映射 f 下的**像点**,z 就称为 w 的**原像**.点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 也称为 E 在映射 f 下的**像**,记为 $f(E)$.如果 $f(E) \subseteq F$,就说 f 把 E **映入** F,或者说 f 是 E 到 F 中的映射.如果 $f(E) = F$,就说 f 把 E **映为** F,或者说 f 是 E 到 F 上的**满变换**. ♣

注 我们知道,任意一个复数 $z(z \neq 0)$ 都有无穷多个辐角.因此,辐角函数 $w = \mathrm{Arg}\, z$ 是一个多值函数.它的定义域是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$(在 $z = 0$ 处辐角无意义).

定义 0.2

设 L 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内一条简单曲线,z_0 是 L 的起点,z_1 是 L 的终点.当 z 沿 L 从 z_0 连续变动到 z_1 时,$\overrightarrow{Oz}$ 所旋转的角称作 $\mathrm{Arg}\, z$ 在 L 上的改变量,简称**辐角改变量**,记作 $\Delta_L \arg z$.显然必存在 $k \in \mathbb{Z}$,使得

$$\Delta_L \arg z = \arg z_2 - \arg z_1 + 2k\pi.$$

♣

定义 0.3

若 $w = f(z)$ 是复平面点集 E 到 F 的满变换,且对 F 中的每一点 w,在 E 中有一个(或至少有两个)点与之相对应,则在 F 上确定了一个单值(或多值)函数,记作 $z = f^{-1}(w)$,它就称为函数 $w = f(z)$ 的**反函数**或称为变换 $w = f(z)$ 的**逆变换**;若 $z = f^{-1}(w)$ 也是 F 到 E 的单值变换,则称 $w = f(z)$ 是 E 到 F 的**双方单值变换**或**一一变换**. ♣

注 从上述反函数的定义可以看出

$$w = f[f^{-1}(w)], \quad \forall w \in F.$$

且当反函数也是单值函数时,还有

$$z = f^{-1}[f(z)], \quad \forall z \in E.$$

定义 0.4

设 $f : D \to \mathbb{C}$ 是一个复变函数,如果对区域 D 中任意两点 $z_1, z_2(z_1 \neq z_2)$,必有 $f(z_1) \neq f(z_2)$,就称 f 在 D 中是**单叶的**,D 称为 f 的**单叶性区域**. ♣

命题 0.1

如果 f 在 D 中是单叶的,$f(D) = G$,那么 f 是 D 到 G 之上的一一映射. ♠

证明 由单叶的定义和双射的定义立得.

□

定理 0.1

设 $z = x + \mathrm{i}y$,用 u 和 v 记 $w = f(z)$ 的实部和虚部,则有

$$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

♡

注 这个定理表明: 一个复变函数等价于两个二元的实变函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$.

笔记 例如 $w=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$, 它等价于 $u=x^2-y^2$ 和 $v=2xy$ 两个二元函数;
再如 $w=|z|$, 它等价于 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $v=0$ 这两个二元函数.

定义 0.5

设 f 是定义在点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在与 ε 有关的 $\delta>0$, 使得当 $z\in E$ 且 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有 $|f(z)-a|<\varepsilon$, 就说当 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 有极限 a, 记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$.

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在与 ε 有关的正数 δ, 使得当 $z\in B(z_0,\delta)\cap E$ 且 $z\neq z_0$ 时有 $f(z)\in B(a,\varepsilon)$.

特别地, $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=a$ 定义为: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $R(\varepsilon)>0$, 使得当 $|z|>R(\varepsilon)$ 且 $z\in E$ 时, 有 $f(z)\in B(a,\varepsilon)$.

$\lim\limits_{z\to z_0}\lim f(z)=\infty$ 定义为: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $z\in B(z_0,\delta(\varepsilon))\cap E$ 时, 有 $|f(z)|>\varepsilon$.

定理 0.2

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=\alpha,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=\beta.$$

笔记 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

证明 设 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta,z_0=x_0+\mathrm{i}y_0,f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 由下面的不等式

$$|u(x,y)-\alpha|\leqslant|f(z)-a|\leqslant|u(x,y)-\alpha|+|v(x,y)-\beta|,$$

$$|v(x,y)-\beta|\leqslant|f(z)-a|\leqslant|u(x,y)-\alpha|+|v(x,y)-\beta|$$

知道, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=\alpha,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=\beta.$$

□

命题 0.2

设 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\eta$, 试证函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某一去心邻域内是有界的.

证明 因

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\eta,$$

则对任给的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 只要 $0<|z-z_0|<\delta$, 就有

$$|f(z)-\eta|<\varepsilon,$$

由此可得

$$|f(z)|-|\eta|<\varepsilon,$$

于是

$$|f(z)|<|\eta|+\varepsilon,$$

所以, 在点 z_0 的去心邻域 $N_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}$ 内 $f(z)$ 是有界的.

□

定义 0.6

我们说 f 在点 $z_0 \in E \subseteq \mathbb{C}$ 连续, 如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

如果 f 在集 E 中每点都连续, 就说 f 在集 E 上**连续**.

♣

定理 0.3

复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0) 处连续.

♡

证明 由定理 0.2易得.

□

命题 0.3

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 连续, 且 $f(z_0) \neq 0$, 试证 $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内恒不为零.

♠

证明 因 $f(z)$ 在点 z_0 连续, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 只要 $|z - z_0| < \delta$, 就有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

特别, 取 $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$, 则由上面的不等式得

$$|f(z)| > |f(z_0)| - \varepsilon = |f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0,$$

因此,$f(z)$ 在点 z_0 的 δ 邻域 $N_\delta(z_0)$ 内就恒不为零.

□

定义 0.7

f 在 $E \subseteq \mathbb{C}$ 上**一致连续**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$, 对 E 上任意的 z_1, z_2, 只要 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

♣

定理 0.4

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集,$f : E \to \mathbb{C}$ 在 E 上连续, 那么

(1) f 在 E 上有界;

(2) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值, 即存在 $a, b \in E$, 使得对每个 $z \in E$, 都有

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(b)|;$$

(3) f 在 E 上一致连续.

♡

证明

(1) 由 Heine-Borel 定理, 只需证明 $f(E)$ 是紧集. 为此, 取 $f(E)$ 的一个开覆盖 $\mathcal{F}$. 任取开集 $U \in \mathcal{F}$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(U)$ 是开集, 因此 $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{F}\}$ 是 E 的开覆盖. 由 E 的紧性, 该开覆盖存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_k) | 1 \leqslant k \leqslant m\}$. 由此得 $f(E)$ 的有限子覆盖 $\{U_k | 1 \leqslant k \leqslant m\}$.

(2) 记 $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$, 于是对每一自然数 n, 必有 $z_n \in E$, 使得

$$M - \frac{1}{n} \leqslant |f(z_n)| \leqslant M. \tag{1}$$

因为 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, 由 Heine-Borel 定理,E 为有界闭集. 再由 Bolzano-Weierstrass 定理,$\{z_n\}$ 必有极限点, 即有一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 设其极限为 a, 则 $a \in E$. 把(1)式写成

$$M - \frac{1}{n_k} \leqslant |f(z_{n_k})| \leqslant M,$$

让 $k \to \infty$, 并注意到 f 在 a 处的连续性, 即得 $|f(a)| = M$. 同理可证, 存在 $b \in E$, 使得 $|f(b)| = \inf\{|f(z)| : z \in E\}$.

(3) 任取 $\varepsilon > 0$. 对任意 $z \in E$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2}))$ 为包含 z 的开集. 因此有 $\delta_z > 0$, 使

$$B(z, \delta_z) \subseteq f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2})). \tag{2}$$

显然集族 $\{B(z, \frac{\delta_z}{2}) \mid z \in E\}$ 是 E 的开覆盖. 由 E 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{B(z_k, \frac{\delta_k}{2}) \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \supseteq E$. 取 $\delta = \frac{\min\{\delta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}}{2}$. 对任意 $p, q \in E$ 且满足 $|p - q| < \delta$, 不妨设 $p \in B(z_1, \frac{\delta_1}{2})$. 由命题**??**, 有

$$|z_1 - q| \leqslant |z_1 - p| + |p - q| < \frac{\delta_1}{2} + \delta \leqslant \delta_1.$$

因此 $p, q \in B(z_1, \delta_1)$, 再由(2)式知 $f(p), f(q) \in B(f(z_1), \frac{\varepsilon}{2})$, 从而

$$|f(p) - f(q)| \leqslant |f(p) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此得 f 在 E 上一致连续.

□