0.1 内积空间与 Gram 阵

注 因为实数的共轭等于自身, 所以实内积空间的定义相容于复内积空间的定义. 因此在后面很多例题的叙述和解答的过程中, 除非题目已标明是哪一类内积空间, 否则我们一般都按照复内积空间的情形来处理.

命题 0.1

设 V 为内积空间, 求证:

(1) 若 $(\alpha,\beta)=0$ 对任意的 $\beta\in V$ 都成立, 则 $\alpha=0$; 若 $(\alpha,\beta)=0$ 对任意的 $\alpha\in V$ 都成立, 则 $\beta=0$;

(2) 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基, 若 $(\alpha,e_i)=(\beta,e_i)$ 对任意的 i 都成立, 则 $\alpha=\beta$.

证明 (1) 若 $(\alpha,\beta)=0$ 对任意的 $\beta\in V$ 都成立, 令 $\beta=\alpha$, 可得 $(\alpha,\alpha)=0$, 由内积的正定性即得 $\alpha=0$. 同理可证另一情形.

(2) 若 $(\alpha,e_i)=(\beta,e_i)$ 对任意的 i 都成立, 则 $(\alpha-\beta,e_i)=0$ 对任意的 i 都成立. 设 $\alpha-\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie_i$, 则由内积的第二变量的共轭线性可得

$$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha-\beta,\sum_{i=1}^{n}c_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}(\alpha-\beta,e_i)=0$$

再由内积的正定性即得 $\alpha=\beta$. □

命题 0.2

设 V 为 n 维内积空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 分别是 V 的两组基. 设基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的 Gram 矩阵为 G, 基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的 Gram 矩阵为 H, 从基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵为 C. 求证: 若 V 为欧氏空间, 则 $H=C'GC$; 若 V 为酉空间, 则 $H=C'\overline{G}\overline{C}$.

证明 设 V 为酉空间,$G=(g_{ij})$,$H=(h_{ij})$,$C=(c_{ij})$, 则 $f_k=\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ik}e_i$, 于是

$$h_{kl}=(f_k,f_l)=(\sum_{i=1}^{n}c_{ik}e_i,\sum_{j=1}^{n}c_{jl}e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ik}\overline{c_{jl}}(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ik}g_{ij}\overline{c_{jl}}.$$

上式左边是 H 的第 (k,l) 元素, 右边是 $C'\overline{G}\overline{C}$ 的第 (k,l) 元素, 从而结论得证. □

推论 0.1

若向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 满足 $\alpha_j=\sum\limits_{i=1}^{k}c_{ij}\beta_i$（$1\le j\le m$）, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)C$, 其中 $C=(c_{ij})_{k\times m}$, 则有

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=C'G(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)C.$$

证明 采用与命题 0.2类似的讨论即可证明. □

命题 0.3

设 V 是 n 维实（复）内积空间,H 是一个 n 阶正定实对称矩阵（正定 Hermite 矩阵）, 求证: 必存在 V 上的一组基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, 使得它的 Gram 矩阵就是 H.

注 这个命题 0.3告诉我们, 若给定一个 n 维实（复）内积空间 V, 则从 V 所有的基构成的集合到所有 n 阶正定实对称矩阵（n 阶正定 Hermite 矩阵）构成的集合有一个满射, 它将 V 的一组基映为这组基的 Gram 矩阵. 这个映射当然不会是单射, 请读者自行思考其中的原因.

证明 任取 V 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 设其 Gram 矩阵为 G, 这也是一个 n 阶正定实对称矩阵（正定 Hermite 矩

阵），于是 G 与 H 合同（复相合），即存在 n 阶非异阵 $C=(c_{ij})$，使得 $H=C'GC$（$H=C'\overline{G}C$）. 令 $f_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}e_i$（$1\le j\le n$），则由 C 非异可知 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是 V 的一组基，并且从基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵恰为 C，再由命题 0.2可知，基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的 Gram 矩阵就是 $C'GC=H$（$C'\overline{G}C=H$）. □

命题 0.4

证明：在 n 维欧氏空间 V 中，两两夹角大于直角的向量个数至多是 $n+1$ 个.

证明 用反证法证明. 假设存在 $n+2$ 个两两夹角大于直角的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}\in V$，则由 $\dim V=n$ 可知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 必线性相关，即存在不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$，使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n+1}\alpha_{n+1}=\mathbf{0}$. 将此式按照系数正负整理为如下形式：

$$\sum_{c_i>0}c_i\alpha_i=\sum_{c_j<0}(-c_j)\alpha_j. \tag{1}$$

由 $c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}$ 不全为零不妨设存在某个 $c_i>0$. 若 (1) 式两边都等于零，则有

$$0=(\sum_{c_i>0}c_i\alpha_i,\alpha_{n+2})=\sum_{c_i>0}c_i(\alpha_i,\alpha_{n+2})<0,$$

矛盾. 因此 (1) 式两边都非零，从而也存在某个 $c_j<0$，于是

$$0<(\sum_{c_i>0}c_i\alpha_i,\sum_{c_i>0}c_i\alpha_i)=(\sum_{c_i>0}c_i\alpha_i,\sum_{c_j<0}(-c_j)\alpha_j)=\sum_{c_i>0}\sum_{c_j<0}c_i(-c_j)(\alpha_i,\alpha_j)<0,$$

矛盾. 例如，不妨设 $V=\mathbb{R}^n$（取标准内积），则向量 $\alpha_1=(n,-1,\cdots,-1)'$,$\alpha_2=(-1,n,\cdots,-1)'$,$\alpha_n=(-1,-1,\cdots,n)'$,$\alpha_{n+1}=(-1,-1,\cdots,-1)'$ 就满足两两夹角大于直角. 因此,$n+1$ 就是两两夹角大于直角的向量个数的最佳上界，结论得证.

□

推论 0.2

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 是 n 维欧氏空间 V 中两两夹角大于直角的 $n+1$ 个向量，则

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量必线性无关;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 中任一向量必为其余向量的负系数线性组合.

证明 利用与命题 0.4的证明完全类似的讨论就能得到证明. □

命题 0.5

设 V 是 n 维欧氏空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个实数，求证：存在唯一的向量 $\alpha\in V$，使得对任意的 i,$(\alpha,e_i)=c_i$.

证明 设 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，则 $(\alpha,e_i)=c_i$（$1\le i\le n$）等价于如下线性方程组：

$$\begin{cases}(e_1,e_1)x_1+(e_1,e_2)x_2+\cdots+(e_1,e_n)x_n=c_1,\\(e_2,e_1)x_1+(e_2,e_2)x_2+\cdots+(e_2,e_n)x_n=c_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(e_n,e_1)x_1+(e_n,e_2)x_2+\cdots+(e_n,e_n)x_n=c_n.\end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵是基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的 Gram 矩阵，即系数矩阵是度量矩阵，从而系数矩阵是正定矩阵，故其行列式非零，从而上述方程组有唯一解，于是满足条件的 α 存在且唯一. □

命题 0.6

设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间，任取

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\quad g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m,$$

证明: 如下定义的二元运算是 V 上的内积:

$$(f,g)=\sum_{i,j}\frac{a_ib_j}{i+j+1}.$$

证明 容易验证 $(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$, 故由例题**??**(5) 即得结论. 因为 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 是 V 中一组线性无关的向量, 所以由命题**??** 知其 Gram 矩阵 $A=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{n\times n}$ 是一个正定阵, 这也给出了例题**??**(2) 的几何证明. □

命题 0.7

设 A 是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 对任意的 n 维实列向量 x,y, 有

$$(x'Ay)^2\le(x'Ax)(y'Ay).$$

证明 证法一: 由命题**??**可知, 对任意正实数 t,$A+tI_n$ 都是正定阵, 这决定了 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积, 故由 Cauchy - Schwarz 不等式可得

$$(x'(A+tI_n)y)^2\le(x'(A+tI_n)x)(y'(A+tI_n)y).$$

注意到上式两边都是关于 t 的连续函数, 同时取极限, 令 $t\to0^+$, 即得结论.

证法二: 由于 A 半正定, 故存在实矩阵 C, 使得 $A=C'C$. 考虑 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积, 由 Cauchy - Schwarz 不等式可得

$$(x'Ay)^2=((Cx)'(Cy))^2=(Cx,Cy)^2\le\|Cx\|^2\|Cy\|^2=(Cx,Cx)(Cy,Cy)=(Cx)'(Cx)(Cy)'(Cy)=(x'Ax)(y'Ay).$$

证法三: 因为 A 是半正定阵, 故对任意的实数 t, 有

$$(x'Ax)t^2+2(x'Ay)t+(y'Ay)=(tx+y)'A(tx+y)\ge0.$$

若 $x'Ax=0$, 则由命题**??**可知 $Ax=0$, 从而 $x'Ay=(Ax)'y=0$, 又 A 是半正定阵, 于是结论成立. 若 $x'Ax\neq0$, 则上述关于 t 的二次方程恒大于等于零当且仅当其判别式小于等于零, 由此即得要证的结论. □

引理 0.1

在 $\mathbb{C}^n$(取标准内积) 中, 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$, 都有

$$(\varphi(\alpha),\beta)=\frac14(\varphi(\alpha+\beta),\alpha+\beta)-\frac14(\varphi(\alpha-\beta),\alpha-\beta)+\frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha+\mathrm{i}\beta),\alpha+\mathrm{i}\beta)-\frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha-\mathrm{i}\beta),\alpha-\mathrm{i}\beta).$$

证明

$$\begin{aligned}
&\frac14(\varphi(\alpha+\beta),\alpha+\beta)-\frac14(\varphi(\alpha-\beta),\alpha-\beta)+\frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha+\mathrm{i}\beta),\alpha+\mathrm{i}\beta)-\frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha-\mathrm{i}\beta),\alpha-\mathrm{i}\beta)\\
&=\frac14\left[(\varphi(\alpha),\alpha)+(\varphi(\alpha),\beta)+(\varphi(\beta),\alpha)+(\varphi(\beta),\beta)\right]-\frac14\left[(\varphi(\alpha),\alpha)-(\varphi(\alpha),\beta)-(\varphi(\beta),\alpha)+(\varphi(\beta),\beta)\right]\\
&\quad+\frac{\mathrm{i}}{4}\left[(\varphi(\alpha),\alpha)+(\varphi(\alpha),\mathrm{i}\beta)+(\varphi(\mathrm{i}\beta),\alpha)+(\varphi(\mathrm{i}\beta),\mathrm{i}\beta)\right]-\frac{\mathrm{i}}{4}\left[(\varphi(\alpha),\alpha)-(\varphi(\alpha),\mathrm{i}\beta)-(\varphi(\mathrm{i}\beta),\alpha)+(\varphi(\mathrm{i}\beta),\mathrm{i}\beta)\right]\\
&=\frac12\left[(\varphi(\alpha),\beta)+(\varphi(\beta),\alpha)\right]+\frac{\mathrm{i}}{2}\left[(\varphi(\alpha),\mathrm{i}\beta)+(\varphi(\mathrm{i}\beta),\alpha)\right]\\
&=\frac12\left[(\varphi(\alpha),\beta)+(\varphi(\beta),\alpha)\right]+\frac{\mathrm{i}}{2}\left[-\mathrm{i}(\varphi(\alpha),\beta)+\mathrm{i}(\varphi(\beta),\alpha)\right]\\
&=\frac12\left[(\varphi(\alpha),\beta)+(\varphi(\beta),\alpha)\right]-\frac12\left[-(\varphi(\alpha),\beta)+(\varphi(\beta),\alpha)\right]\\
&=(\varphi(\alpha),\beta).
\end{aligned}$$

□

命题 0.8

证明: 在 $\mathbb{R}^n$（取标准内积）中存在一个非零线性变换 φ, 使 $\varphi(\alpha) \perp \alpha$ 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 成立, 但是在 $\mathbb{C}^n$（取标准内积）中这样的非零线性变换不存在.

证明 任取一个 n 阶非零实反对称矩阵 A, 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\varphi(\alpha) = A\alpha$, 则由命题**??**可得 $(\alpha, \varphi(\alpha)) = \alpha' A\alpha = 0$. 下面给出 $\mathbb{C}^n$ 情形的 3 种证法. 用反证法来证明, 设在 $\mathbb{C}^n$（取标准内积）中存在满足条件的非零线性变换 φ.

证法一: 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准单位列向量,φ 在这组基下的表示矩阵为 $A = (a_{ij})$, 则对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}^n$,$\varphi(\alpha) = A\alpha$. 由假设可知, 对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 有 $(\varphi(\alpha), \alpha) = \alpha' A' \overline{\alpha} = 0$. 取 $\alpha = e_i$, 代入条件可得 $a_{ii} = 0$（$1 \leq i \leq n$）. 取 $\alpha = e_i + e_j$, 代入条件可得 $a_{ij} + a_{ji} = 0$（$1 \leq i < j \leq n$）. 取 $\alpha = e_i + \mathrm{i}e_j$, 代入条件可得 $a_{ij} - a_{ji} = 0$（$1 \leq i < j \leq n$）. 于是 $a_{ij} = a_{ji} = 0$（$1 \leq i < j \leq n$）, 从而 $A = O$, 这与 $\varphi \neq 0$ 矛盾!

证法二: 首先, 我们证明 φ 的特征值全部为零. 设 λ_0 是 φ 的特征值,α 是对应的特征向量, 则 $0 = (\varphi(\alpha), \alpha) = (\lambda_0\alpha, \alpha) = \lambda_0(\alpha, \alpha)$, 由于 $(\alpha, \alpha) \neq 0$, 故只能是 $\lambda_0 = 0$. 其次, 由 Jordan 标准型理论可知, 存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{J_{r_1}(0), J_{r_2}(0), \cdots, J_{r_k}(0)\}$. 若 φ 不可对角化, 则必存在某个 $r_i > 1$, 不妨设 $r_1 > 1$, 于是 $\varphi(e_1) = 0$,$\varphi(e_2) = e_1$. 由 $(\varphi(e_2), e_2) = 0$ 可得 $(e_1, e_2) = 0$, 再由 $(\varphi(e_1 + e_2), e_1 + e_2) = 0$ 可得 $(e_1, e_1) = 0$, 从而 $e_1 = 0$, 这与假设矛盾, 于是 φ 可对角化. 最后, 由 φ 的 Jordan 标准型是零矩阵可知 $\varphi = 0$, 这与假设矛盾.

证法三: 由引理 0.1可知, 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi(\alpha), \beta) &= \frac{1}{4}(\varphi(\alpha + \beta), \alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\varphi(\alpha - \beta), \alpha - \beta) \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha + \mathrm{i}\beta), \alpha + \mathrm{i}\beta) - \frac{\mathrm{i}}{4}(\varphi(\alpha - \mathrm{i}\beta), \alpha - \mathrm{i}\beta) = 0.\end{aligned}$$

令 $\beta = \varphi(\alpha)$, 由内积的正定性可得 $\varphi(\alpha) = 0$ 对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 成立, 即 $\varphi = 0$, 这与假设矛盾. 因此在 $\mathbb{C}^n$ 中满足条件的非零线性变换不存在. □