0.1 素理想与极大理想

定义 0.1 (素理想)

若交换幺环 R 的理想 P 满足

(1) $P \neq R$;

(2) 若 $ab \in P$, 则 $a \in P$ 或 $b \in P$,

则称 P 为 R 的**素理想**.

定义 0.2 (极大理想)

设环 R 中的理想 $M \neq R$ 且不存在 R 的理想 A, 使 $M \subset A \subset R$, 则称 M 为 R 的**极大理想**.

注 由定义可知

$$A\text{为环}R\text{的极大理想} \Longleftrightarrow \forall A \subset M \subseteq R, \text{有}M = R \Longleftrightarrow \forall A \subseteq M \subseteq R, \text{有}M = R\text{或}M = A.$$

命题 0.1

(1) 设 p 为素数, 则 $\langle p\rangle = p\mathbf{Z}$ 为 $\mathbf{Z}$ 的素理想, 同时也是 $\mathbf{Z}$ 的极大理想.

(2) $\mathbf{Z}$ 中非平凡理想 $I = m\mathbf{Z}$ 为素理想或极大理想当且仅当 m 为素数 (或负素数).

证明

(1) 设 $ab \in \langle p\rangle = p\mathbf{Z}$, 即 $p \mid ab$. 由 p 为素数知 $p \mid a$ 或 $p \mid b$, 亦即 $a \in p\mathbf{Z} = \langle p\rangle$ 或 $b \in p\mathbf{Z} = \langle p\rangle$, 因而 $\langle p\rangle$ 为素理想.

其次, 设 $\mathbf{Z}$ 的理想 A 满足 $\langle p\rangle \subseteq A \subseteq \mathbf{Z}$. 由命题**??**知 $\mathbf{Z}$ 为 p.i.d., 故有 $A = \langle n\rangle$. 由 $p \in \langle n\rangle$, 因而 $n \mid p$. 因 p 为素数, 故 $n = \pm 1$ 或 $n = \pm p$. 若 $n = \pm 1$, 则 $A = \mathbf{Z}$; 若 $n = \pm p$, 则 $A = \langle p\rangle$. 由此知 $\langle p\rangle$ 是 $\mathbf{Z}$ 的极大理想.

(2) 若 $m = m_1m_2(m_i \neq \pm 1, i = 1, 2)$, 则 $m_1m_2 = m \in I$. 但 $m_i \notin I(i = 1, 2)$, 故 I 不是素理想. 又 $m\mathbf{Z} \subset m_1\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$, 故 I 不是极大理想.

□

引理 0.1

设 R 为交换幺环, 则有

(1) $\{0\}$ 是 R 的素理想当且仅当 R 为整环;

(2) $\{0\}$ 是 R 的极大理想当且仅当 R 为域.

证明

(1) 设 R 为整环. 若 $a \neq 0$,$b \neq 0$, 即 $a \notin \{0\}$,$b \notin \{0\}$, 则 $ab \neq 0$, 即 $ab \notin \{0\}$, 因而由素理想的逆否定义知 $\{0\}$ 为素理想.

反之, 设 $\{0\}$ 为素理想. 又 $a, b \notin \{0\}$, 故 $ab \notin \{0\}$, 即 $a \neq 0$,$b \neq 0$ 得出 $ab \neq 0$. 又 R 是交换幺环, 故 R 为整环.

(2) 设 $\{0\}$ 为极大理想.$\forall a \in R$ 且 $a \neq 0$ 有 $\langle a\rangle \supset \{0\}$, 故 $\langle a\rangle = R$. 由 R 含有幺元 1, 故 $1 \in \langle a\rangle = aR$. 因而 $\exists a^{-1} \in R$, 使得 $aa^{-1} = 1$. 再由 R 可交换知 R 是一个域.

反之, 设 R 是一个域,A 为 R 的理想且 $A \neq \{0\}$, 即 $\exists a \in A$,$a \neq 0$. 又 R 为域, 故 $\exists a^{-1}$, 使 $1 = a^{-1}a$, 再由 A 为 R 的理想知 $= a^{-1}a \in A$. 进而对 $\forall b \in R$ 有 $b = b \cdot 1 \in A$, 因而 $A = R$, 故 $\{0\}$ 为极大理想.

□

定理 0.1

设 R 为交换幺环,P 与 M 为 R 的理想, 则

(1) 当且仅当 R/P 为整环时,P 为素理想;

(2) 当且仅当 R/M 为域时,M 为极大理想.

证明

(1) 设 π 为 R 到 R/P 上的自然同态. 若 P 为素理想, 由 π 为满同态, 故可设 $\pi(a),\pi(b)\in R/P$ 且 $\pi(a)\neq 0$,$\pi(b)\neq 0$, 亦即 $a,b\notin P$, 则由 P 为素理想知 $ab\notin P$, 即 $\pi(ab)=\pi(a)\pi(b)\neq 0$, 因而 R/P 为整环.

反之, 若 R/P 为整环且 $ab\in P$, 则有 $\pi(ab)=\pi(a)\pi(b)=0$, 因而 $\pi(a)=0$ 或 $\pi(b)=0$, 即 $a\in P$ 或 $b\in P$, 所以 P 是素理想.

(2) 设 R 的理想 A 满足 $M\subseteq A\subseteq R$, 于是由推论??知 A/M 是 R/M 的理想. 当 M 为极大理想时有 $M=A$ 或 $R=A$. 故 R/M 仅有的理想为 $M/M=M=\{0\}$ 与 R/M, 即 $\{0\}$ 为极大理想, 故由引理 0.1知 R/M 为域.

反之, 设 R 的理想 A 满足 $M\subset A\subseteq R$, 由推论??知 A/M 是 R/M 的理想且 $A/M\neq M=\{0\}$. 若 R/M 为域, 则由引理 0.1知 $\{0\}$ 为 R/M 的极大理想, 于是 $A/M=R/M$. 故 $A=R$, 即 M 为极大理想.

□

推论 0.1

交换幺环 R 的极大理想 M 必为素理想.

证明 事实上, 由定理 0.1(2)知 R/M 为域, 由命题??知 R/M 是整环, 所以再由定理 0.1(1)知 M 为素理想.

□

定理 0.2

设 R,R' 都是交换幺环,σ 是 R 到 R' 上的同态,$N=\ker\sigma$.

若 H 是 R 中包含 N 的素理想 (或极大理想), 则 $\sigma(H)$ 是 R' 中的素理想 (或极大理想).

反之, 若 H' 是 R' 的素理想 (或极大理想), 则

$$\sigma^{-1}(H')=\{x\in R|\sigma(x)\in H'\}$$

为 R 中包含 N 的素理想 (或极大理想).

证明 根据定理????有 $R/H\cong R'/\sigma(H)$, 故由定理 0.1知 $H(H\supseteq N)$ 为素理想 (或极大理想) 当且仅当 R/H 为整环 (或域) 当且仅当 $R'/\sigma(H)$ 为整环 (或域), 也当且仅当 $\sigma(H)$ 为素理想 (或极大理想).

□

定理 0.3

若 R 是交换整环,$a\in R^*$, 则由 a 生成的主理想 $\langle a\rangle$ 为素理想的充分必要条件是 a 为素元素.

证明 由定理????知当且仅当 a 为 R 的单位, 即 $a\in U$ 时,$\langle a\rangle=R$, 故可设 $a\in R^*\setminus U$. 由 $bc\in\langle a\rangle=aR\iff a\mid bc$, 故 $\langle a\rangle$ 为素理想当且仅当 $b\in\langle a\rangle$ 或 $c\in\langle a\rangle$ 当且仅当 $a\mid b$ 或 $a\mid c$ 当且仅当 a 为素元素.

□

推论 0.2

设 R 为唯一析因环,$a\in R^*$, 则 $\langle a\rangle$ 为素理想当且仅当 a 为不可约元素.

注 从这里可认为素理想的概念在一定意义下是素元素概念的推广.

证明 由定理 0.3知 $\langle a\rangle$ 为素理想当且仅当 a 为素元素. 又由定理??的注知 a 为素元素当且仅当 a 不可约, 故结论得证.

□

例题 0.1 设 F 是一个域,$R=F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是 F 上 n 元多项式环. 由定理??,定理 0.3及推论 0.2知对 $f\in R$,$\langle f\rangle$ 为素理想当且仅当 f 为不可约多项式. 因 $R/\langle x_1,x_2\rangle\cong F[x_3,\cdots,x_n]$, 故由定理 0.1知由 x_1,x_2 生成的理想 $\langle x_1,x_2\rangle$ 也是素理想, 而 $\langle x_1,x_2\rangle$ 不是主理想. 当 $n>2$ 时, 看到 $\langle x_1,x_2\rangle$ 也不是极大理想.

定理 0.4

设 R 为主理想整环,$a \in R^*$, 则 $\langle a \rangle$ 为极大理想的充分必要条件是 a 为素元素.

证明 若 $\langle a \rangle$ 为极大理想, 由推论 0.1知 $\langle a \rangle$ 为素理想, 再由定理 0.3知 a 为素元素.

反之, 设 a 为素元素. 若有 R 的理想 A, 使得 $\langle a \rangle \subseteq A \subseteq R$. 由于 R 为 p.i.d., 故有 $n \in R$, 使得 $A = \langle n \rangle$. 于是由 $a \in \langle n \rangle = nR$ 得 $n \mid a$. 因为 a 为素元素, 所以由引理**??**知 a 也是不可约元素. 从而 $n \sim 1$ 或 $n \sim a$, 于是由定理**????**有 $A = \langle n \rangle = R$ 或 $A = \langle n \rangle = \langle a \rangle$, 故 $\langle a \rangle$ 为极大理想.

□

定理 0.5

设 F 是一个域,$F[x]$ 是 F 上的一元多项式环,S 为交换整环且 $F \subseteq S$,F, S 有相同的幺元.

(1) 若 $u \in S$ 是 F 上的代数元, 则 $F[u]$ 是一个域且存在不可约多项式 $p(x) \in F[x]$, 使得

$$F[u] \cong F[x]/\langle p(x) \rangle, \ \langle p(x) \rangle \cap F = \{0\};$$

反之, 若 $p(x)$ 是不可约多项式, 则 $F[x]/\langle p(x) \rangle$ 是 F 的扩域 (即 F 为 $F[x]/\langle p(x) \rangle$ 的子域).

(2) 若 $u \in S$ 是域 F 上的超越元, 则 $F[u] \cong F[x]$.

证明 从推论**??**知 u 是超越元时上述结论成立, 即 (2) 成立. 故只需讨论 u 为代数元时的情形, 即只需证 (1). 此时由代数元的定义知

$$I = \{f(x) \in F[x] | f(u) = 0\} \neq \{0\}.$$

由定理**????**知 $F[x]$ 为 Euclid 环, 故再由定理**??**知 I 为主理想环, 进而也是唯一析因环. 于是 $I = \langle p(x) \rangle$,$p(x) \neq 0$. 令 g 为 $F[x]$ 到 $F[u]$ 的映射, 满足

$$g|_F = \mathrm{id}_F, \quad g(x) = u.$$

显然 g 为 $F[x]$ 到 $F[u]$ 的同态且

$$g(f(x)) = f(u), \forall f(x) \in F[x].$$

从而 $\ker g = I$. 于是由环的同态基本定理知

$$F[u] \cong F[x]/\langle p(x) \rangle.$$

又由 S 为整环知 $F[u]$ 为 S 上添加 u 生成的子环也是整环, 故由定理 0.1知 $\langle p(x) \rangle$ 为素理想. 由推论 0.2知 $p(x)$ 也是不可约多项式, 再由定理 0.1知 $p(x)$ 为 $F[x]$ 中的素元素, 再结合定理 0.4知 $\langle p(x) \rangle$ 为极大理想, 由定理 0.1知 $F[u] \cong F[x]/\langle p(x) \rangle$ 为域.

反之, 若 $p(x)$ 是不可约多项式, 则由推论 0.2知 $\langle p(x) \rangle$ 为素理想, 再由定理 0.3知 $p(x)$ 为 $F[x]$ 中的素元素, 于是由定理 0.4知 $\langle p(x) \rangle$ 为极大理想. 故由定理 0.1知 $F[x]/\langle p(x) \rangle$ 是域, 显然 $F[x]/\langle p(x) \rangle \supseteq F$, 故 $F[x]/\langle p(x) \rangle$ 是 F 的扩域.

□