

0.1 复变函数的导数

定义 0.1

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 D 内有定义, 如果极限

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (\Delta z \neq 0), \quad (1)$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可导**或**可导**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在区域 D 中每点都可导, 就称 f 是区域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**或**正则函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**.

定义 0.2

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析, 但在 z_0 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点, 则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**奇点**.

定义 0.3

设函数 $w = f(z)$ 在点 z 可导, 于是

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

即

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta = 0,$$

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \varepsilon,$$

其中 $|\varepsilon| = |\eta \cdot \Delta z|$ 为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小. 称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w = f(z)$ 在点 z 的**微分**, 记为 dw 或 $df(z)$, 此时也称 $f(z)$ 在点 z **可微**, 即

$$dw = f'(z)\Delta z. \quad (2)$$

特别, 当 $f(z) = z$ 时, $dz = \Delta z$. 于是式(2)变为

$$dw = f'(z)dz,$$

即

$$f'(z) = \frac{dw}{dz}.$$

由此可见: $f(z)$ 在点 z 可导与 $f(z)$ 在点 z 可微是等价的.

命题 0.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续.

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (3)$$

由此即得 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. □

例题 0.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 \mathbb{C} 中处处不可微.

注 但容易看出这个函数在 \mathbb{C} 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这

种例子很多, 例如 $f(z) = \operatorname{Re} z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多.

证明 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时上述极限不存在, 因而在 \mathbb{C} 中处处不可导.

□

定理 0.1

(1) 若 f 和 g 在区域 D 中全纯, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z \in D, g(z) \neq 0$, 那么 $\frac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) **复合函数的求导法则:** 设 D_1, D_2 是 \mathbb{C} 中的两个区域, 且

$$f: D_1 \rightarrow D_2,$$

$$g: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h = g \circ f$ 是 $D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ 的全纯函数, 记 $\zeta = f(z)$, 则

$$\frac{dh(z)}{dz} = \frac{dg(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{df(z)}{dz},$$

这里 $g \circ f$ 是 f 和 g 的复合函数: $g \circ f(z) = g(\zeta) = g[f(z)]$.

(3) **反函数的求导法则:** 若函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内是单叶解析的, 其反函数 $z = g(w)$ 在区域 $E = f(D)$ 内连续, 则 $g(w)$ 在 E 内解析, 且

$$\frac{dg(w)}{dw} = \frac{1}{\frac{d}{dz}f(z)}.$$

♡

证明

(1)

(2) 设 z_0 是 D 内任意一点. 由条件知 $\zeta_0 = f(z_0) \in E, g(\zeta)$ 在 ζ_0 可导, 所以

$$g(\zeta) - g(\zeta_0) = g'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) + \rho(\zeta - \zeta_0),$$

$$\Delta g = g'(\zeta_0)\Delta \zeta + \rho\Delta \zeta,$$

其中 ρ 是随 $\Delta \zeta \rightarrow 0$ 而趋于零的复数. 将 $\zeta = f(z), \zeta_0 = f(z_0)$ 代入上式, 并用 Δz 除等式两边, 得到

$$\frac{\Delta h}{\Delta z} = g'(\zeta_0)\frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{\rho\Delta \zeta}{\Delta z}.$$

因为 f 在 z_0 处可导, 所以

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

从而

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\rho\Delta \zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho f'(z_0) = 0,$$

于是

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta z} = g'(\zeta_0)f'(z_0).$$

因为 z_0 是 D 内任意一点, 所以

$$h'(z) = g'(\zeta_0)f'(z)$$

在 D 内成立.

(3) 设 $w_0 \in E, z_0 = g(w_0)$, 由 $z = g(w)$ 是 $w = f(z)$ 的反函数知, $w = f[g(w)]$, 故

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f[g(w)] - f[g(w_0)]} = \frac{1}{\frac{f[g(w)] - f[g(w_0)]}{g(w) - g(w_0)}}.$$

因为 $g(w)$ 在 w_0 连续, 所以 $\lim_{w \rightarrow w_0} g(w) = g(w_0)$, 于是

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{f'[g(w_0)]},$$

定理证毕. □

定理 0.2 (复变函数 L'Hospital 法则)

若 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在点 z_0 解析, 且 $f(z_0) = g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$



证明 因为 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 点解析, 则 $f'(z_0)$ 及 $g'(z_0)$ 存在. 所以

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

