0.1 级数基本结论

0.1.1 级数的敛散性

定理 0.1 (交错级数不等式)

设 $\{a_n\}$ 递减非负数列, 则对 $m,p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}(-1)^n a_n\right|\leqslant a_m. \tag{1}$$

笔记 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m=0$, 则

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为偶数}\\ a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p & ,p\text{为奇数}\end{cases}\leqslant a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}(a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-2}-a_{p-1})+a_p & ,p\text{为偶数}\\ (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为奇数}\end{cases}\geqslant 0,$$

这就证明了不等式(1). □

定理 0.2 (A-D 判别法)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 满足下列条件之一时收敛.

1. $\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, b_n 递减到 0;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, b_n 单调有界.

证明 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^{m}a_kb_k=\sum_{k=n}^{m-1}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=n}^{k}a_j+b_m\sum_{k=n}^{m}a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M=2\sup_{n\geqslant1}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|,$$

我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant M\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}|+M|b_m|=Mb_n\to0,\text{当}n,m\to\infty.$$

对于第二种情况, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 故对任何 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大, 对任何 $p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|\leqslant\varepsilon.$$

于是当 n,m 充分大, 我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}|+\varepsilon|b_m|=\varepsilon|b_m-b_n|+\varepsilon|b_m|\leqslant3\varepsilon\sup_{n\geqslant1}|b_n|.$$

因此无论如何都有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

定理 0.3 (积分判别法)

若 f 是 $[1,+\infty)$ 的单调不变号函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

笔记 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

证明 不妨设 f 非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

由夹逼准则即证. □

定理 0.4 (比值判别法)

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0,1)$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.

定理 0.5 (Cauchy 链)

设正值递增函数 $F \in C^1[a,+\infty), \frac{F'}{F}$ 在 $[a,+\infty)$ 递减. 若满足 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散, 则对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 有如下判别法:

极限版:

1. 若
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \tag{2}$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \tag{3}$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c>1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c, \forall n\geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c\leqslant 1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant c, \forall n\geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (3)为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant 1$, 则 $\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$ 仍然可能在 n 充分大严格超过 1.

注 取 $F(x)=e^x$, 则
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{n-\ln a_n}{n}=1-\ln\sqrt[n]{a_n},$$
这恰好是根值判别法.

取 $F(x)=x$, 则
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{-\ln a_n}{\ln n},$$
这恰好是对数判别法.

证明 **Step 1** 先证明
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty. \tag{4}$$
设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A$, 则积分判别法表明
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\sim\int_a^{\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx=\ln F(x)\Big|_a^{\infty},$$
即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{A}$, 这就和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F'(n)$ 发散矛盾! 故我们证明了 (4).

Step 2 当 (2) 成立, 再利用(4)式, 存在 $c>1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c, F(N)>1, \forall n\geqslant N.$$
因此
$$\frac{F'(n)}{a_n}\geqslant e^{c\ln F(n)}\Rightarrow\frac{F'(n)}{F^c(n)}\geqslant a_n, \forall n\geqslant N.$$
结合 $\frac{F'(n)}{F^c(n)}=\frac{F'(n)}{F(n)}\cdot\frac{1}{F^{c-1}(n)}$ 递减, 由积分判别法, 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F^c(n)}\sim\int_N^{\infty}\frac{F'(x)}{F^c(x)}\,dx=\int_{F(N)}^{\infty}\frac{1}{y^c}\,dy<\infty,$$
因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

Step 3 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leqslant c, F(n) \geqslant 1, \forall n \geqslant N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有 $\frac{F'(n)}{F(n)} \leqslant \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leqslant a_n, \forall n \geqslant N$ 以及由积分判别法有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y}\, dy = \infty,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.6 (对数判别法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 0.7 (根值判别法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 而应该是 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. 也不应是无穷多个 n, 而是任何 $n \geqslant N$. 所以我们需要一些加强的证明.

证明 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则存在 $n_k \to \infty$, 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant c \geqslant 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.8 (Kummer 链)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \cdots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} K_n > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} K_n < 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ 使得 $K_n \geqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_n \leqslant 0, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$.

注 当 $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$. 我们有 $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$, 这恰好就是比值判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有 $K_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$, 这恰好是拉比判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n \ln n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \\ &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

即得一个较为广泛的判别法. 要注意我们在阶的层面对 K_n 做了变形, 因此不再给出不等式版本的较为广泛的判别法.

证明 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>0$ 使得 $K_n\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\geqslant a_{n+1},\forall n\geqslant N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^{m}a_{k+1}\leqslant\sum_{k=N}^{m}\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_k}{d_k}-\frac{a_{k+1}}{d_{k+1}}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{d_N}-\frac{a_{m+1}}{d_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\cdot\frac{a_N}{d_N},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $K_n\leqslant 0,\forall n\geqslant N$. 则 $\dfrac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\geqslant\dfrac{a_n}{d_n},\forall n\geqslant N$. 现在

$$a_{n+1}\geqslant\frac{a_N}{d_N}d_{n+1},\forall n\geqslant N,\sum_{n=1}^{\infty}d_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,$$

这就完成了证明. □

定理 0.9 (拉比判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>1$ 使得 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

♡

证明

□

定理 0.10 (较为广泛的判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版 1:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

极限版 2:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

♡

笔记 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是Kummer 链的 $d_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ 的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设 $t>1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>t, \forall n\geqslant N.$$

然后

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{1}{n}+\frac{t}{n\ln n}, \forall n\geqslant N.$$

现在求和得

$$\ln\frac{a_N}{a_{n+1}}>\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right), \forall n\geqslant N.$$

于是

$$a_{n+1}<a_N e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}, \forall n\geqslant N.$$

现在由例题**??**(2) 和例题**??**, 我们有

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1), \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+O(1), n\to\infty.$$

于是

$$e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}=e^{-\ln n-\ln\ln n+O(1)}=\frac{e^{O(1)}}{n\ln^t n}.$$

结合积分判别法有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}dy<\infty,$$

我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2. 设 $0<t<1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<t, \forall n\geqslant N.$$

然后相似第 1 问的证明和

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}dy=+\infty,$$

我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

□

定理 0.11 (Herschfeld 判别法)

设 $p>1$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$. 定义

$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}, n\in\mathbb{N},$$

然后 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.
显然 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增.

证明 **必要性**: 若 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由

$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}\geqslant\sqrt[p]{0+\sqrt[p]{0+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}=a_n^{\frac{1}{p^n}}$$

和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界知 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

充分性: 若 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界, 则设 $a_n^{\frac{1}{p^n}} \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$, 于是我们有 $a_n \leqslant M^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 因此

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \leqslant \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}} \\ &= M\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} \leqslant M \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}}_{n\text{ 个根号}}, \end{aligned}$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1 = \sqrt[p]{1},\ x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

注意到 $x_2 = \sqrt[p]{2} > 1 = x_1$, 不动点 $x_0 > 1$ 满足 $x_0^p - x_0 - 1 = 0$. 因此由命题**??**知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增有上界, 从而极限存在.
□

命题 0.1

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$.

证明 记 $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, 则由 Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} [k - (k+1)]\, s_k + n s_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(s_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k}{n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0. \end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

1. 若 a_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.
2. 若 $n a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln n \cdot a_n = 0$.
3. 若 $n \ln n \cdot a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot a_n = 0$.

证明

1. 不妨设 a_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道 a_n 递减到 0. 注意到由 a_n 递减知

$$0 \leqslant 2n a_{2n} \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k,\ 0 \leqslant (2n-1)a_{2n-1} \leqslant 2n a_{2n-1} \leqslant 2\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n\to\infty} 2n a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2n-1) a_{2n-1} = 0.$$

由命题**??**知 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

2. 不妨设 $n a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = c \neq 0$ 会导致 $a_n \sim \dfrac{c}{n}$, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以我们知道

na_n 递减到 0.

我们有

$$\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} a_k=\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{ka_k}{k}\geqslant na_n\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}\geqslant na_n\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$
$$=na_n\int_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n}\frac{1}{x}dx=na_n\ln\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\geqslant na_n\ln\frac{n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}na_n\ln n\geqslant 0,$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\cdot a_n=0$.

3. 不妨设 $n\ln n\cdot a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n)=c\neq 0$. 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n)=0$, 从而 $a_n\geqslant 0$.

注意到

$$\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}a_k=\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}\frac{k\ln k\cdot a_k}{k\ln k}\geqslant n\ln n\cdot a_n\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k\ln k}$$
$$\geqslant n\ln n\cdot a_n\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx=n\ln n\cdot a_n\int_{[\ln n]}^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx$$
$$=n\ln n\cdot a_n\cdot\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]}\geqslant n\ln n\cdot a_n\cdot\ln\frac{\ln n}{\ln\ln n}\sim n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n,$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n=0$.

□

定理 0.12 (级数的控制收敛定理)

设 $a_n(s), n=1,2,\cdots$ 满足

$$|a_n(s)|\leqslant c_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty,$$

以及 $\lim\limits_{s} a_n(s)=b_n\in\mathbb{R}$.

则

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

这里 $\lim\limits_{s}$ 表示 s 趋于某个 $s_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

♡

证明 事实上由极限保号性, 我们知道 $|b_n|\leqslant c_n, n=1,2,\cdots$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 从而

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s)-b_n)\right|+\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n(s)-b_n|$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s)-b_n)\right|+2\sum_{n=m+1}^{\infty}c_n.$$

对 s 取极限得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|\leqslant 2\sum_{n=m+1}^{\infty}c_n.$$

由 m 任意性及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|=0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

例题 0.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)\right|\leqslant e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leqslant e^{n\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}.$$

又 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-k}<\infty$, 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n&=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}\\&=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

□

定理 0.13 (级数的 Levi 定理)

若非负 $a_n(s),n=1,2,\cdots$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是 $s\to s_0^+$, 那么应该是关于 s 的递减函数) 且

$$\lim_{s}a_n(s)=b_n\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 那么由于 $0\leqslant a_n(s)\leqslant b_n$, 取控制级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ 也单调递增, 故 $\lim\limits_{s}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ 广义存在. 假设

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=m<\infty,$$

此时对任何 $N\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{n=1}^{N}b_n=\lim_{s}\sum_{n=1}^{N}a_n(s)\leqslant\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=m<\infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

引理 0.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列 $a_n(s),n=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\lim_{s}}\,a_n(s)\leqslant\underline{\lim_{s}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s).$$

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 不妨设 $s \to +\infty$, 考虑 $g_n(s) \triangleq \inf_{t \geqslant s} a_n(t)$, 则 g_n 关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{\lim}_{s} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geqslant s} a_k(t) \leqslant \underline{\lim}_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_k(s),$$

这就完成了证明. □

定理 0.14 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{5}$$

1. $a_{m,n} \geqslant 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$;
2. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

笔记 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

证明

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到 $\{\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\}$ 关于 N 非负递增, 于是有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \tag{6}$$

这就是 (5).

2. 注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

于是由级数的控制收敛定理知 (6) 仍然成立, 这就是 (5).

□

定理 0.15 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致.

证明

1. 设加括号后新的级数是 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$, 其中 n_k 递增趋于 $+\infty$. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$

这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, n_1 = 0$, 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$ 收敛且对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \cdots, a_{n_{k+1}}$ 将符号相同, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \tag{7}$$

事实上, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $n_m<n\leqslant n_{m+1}$, 此时

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j+\sum_{j=n_m+1}^{n}a_j.$$

则当 $a_j\geqslant 0, n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j,\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j-\sum_{j=n+1}^{n_{m+1}}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{8}$$

若 $a_j\leqslant 0, n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 可得 (8) 的类似式

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{9}$$

让 $n\to+\infty$, 我们由 (8),(9) 和夹逼准则得 (7). 这就完成了证明.

□

命题 0.3

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty),S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}$. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不恒为 0, 不妨设 $a_1\neq 0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{和}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{同敛散}, & 0<p\leqslant 1\end{cases}.$$

笔记 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right),\sum\left(\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

证明 当 $p>1$, 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{S_1}^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,$$

可以看到无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性如何都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则有 $\frac{a_n}{S_n^p}\sim\frac{a_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)^p}=ca_n,n\to\infty$, 其中 c 是某个常数, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 我们对任何充分大的 $m,k\in\mathbb{N}$ 都有

$$1-\frac{S_k}{S_{k+m}}=\frac{S_{k+m}-S_k}{S_{k+m}}=\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_{k+m}}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n^p}.$$

让 $m\to+\infty$, 利用 $S_{k+m}\to+\infty$, 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 发散. 这就完成了证明.

□

0.1.2 幂级数阶与系数阶的关系

定理 0.16 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

(1) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1) \tag{10}$$

满足

$$b_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,\ \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty, \tag{11}$$

则

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{12}$$

(2) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1)$$

满足

$$b_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1,\ \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty, \tag{13}$$

则

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{14}$$

(3) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in\mathbb{R} \tag{15}$$

满足

$$b_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \tag{16}$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{17}$$

注 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

证明

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{g(x)}=0.$$

由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (11) 即得 (12).

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$ 和 1 问知

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0,$$

即得 (14).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}\leqslant\frac{b_nx^n}{b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}}=\frac{b_n}{b_n+b_{n+1}x},$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=0$. 由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (16) 我们就得到 (17).

□

例题 0.2 设 p 是 $\mathbb{R}$ 上实解析函数且 $0<\prod\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(0)<\infty$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}$.

证明 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}p^{(n)}(0)=1$, 所以 $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, 故

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ p'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}x^n,\forall x\in\mathbb{R}.$$

由幂级数系数的阶蕴含和函数的阶 (3), 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=1.$$

□

0.1.3 Cauchy 积

定义 0.1 (Cauchy 积)

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n,c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 的 **Cauchy(乘) 积**. 我们记

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,S_n=\sum_{k=0}^{n}c_k.$$

♣

注 我们暂时并不清楚 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n.$$

例题 0.3 设 $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},n=0,1,\cdots$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

注 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

证明 事实上，我们有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}\right|=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}}=\frac{n+1}{\frac{n}{2}+1}\to 2,$$

这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散. □