0.1 其他

定理 0.1 (Gauss-Lucas 定理)

设 $f \in \mathbb{C}[x]$ 且 $\deg f \geq 1$, 证明 f' 所有零点位于 f 的零点的凸包内.

笔记

证明 设 $f(z) = c\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{m_i}, m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \cdots, m, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i}{z-z_i}.$$

设 $f'(z_0) = 0, f(z_0) \neq 0$, 则

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i}{z_0 - z_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i(\overline{z_0} - \overline{z_i})}{|z_0 - z_i|^2} \implies \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i z_0}{|z_0 - z_i|^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i z_i}{|z_0 - z_i|^2},$$

即

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i, \lambda_i = \frac{m_i}{|z_0 - z_i|^2 \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{m_j}{|z_0 - z_j|^2}} \in [0, 1], j = 1, 2, \cdots, m.$$

当 $f'(z_0) = 0 = f(z_0)$, 此时当然定理更成立. 我们完成了证明. □

例题 0.1 如果 $f \in \mathbb{R}[x]$ 是非负的, 证明: 存在 $\varphi, \psi \in \mathbb{R}[x]$ 使得

$$f = \varphi^2 + \psi^2.$$

证明 当 f 为常数多项式则显然, 下面假设 $\deg f \geq 1$.

设

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r} g(x),$$

这里 $a_0 > 0$ 且 $k_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 都是正偶数且 g 没有实根.

设

$$g(x) = (x-\beta_1)(x-\overline{\beta_1})(x-\beta_2)(x-\overline{\beta_2})\cdots(x-\beta_s)(x-\overline{\beta_s}),$$

我们有

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_s) = \mu(x) + i\nu(x), \mu, \nu \in \mathbb{R}[x].$$

注意到

$$(x-\overline{\beta_1})(x-\overline{\beta_2})\cdots(x-\overline{\beta_s}) = \mu(x) - i\nu(x),$$

于是

$$g(x) = \mu^2(x) + \nu^2(x).$$

考虑

$$\varphi(x) \triangleq \sqrt{a_0}\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{\frac{k_i}{2}}\mu(x), \psi(x) \triangleq \sqrt{a_0}\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{\frac{k_i}{2}}\nu(x),$$

就有

$$f = \varphi^2 + \psi^2.$$

□

例题 0.2 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上无重根的非常数多项式且满足

$$f(f(x)) = f^n(x) + a_{n-1}f^{n-1}(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0,$$

这里 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. 证明 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 且若 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为奇数, 则 f 无偶整数根.

证明 因为 f 值域包含无穷多个点, 并且由条件知

$$f(x), x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

在无穷多个点上相等, 所以

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

若 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为奇数, 由有理根的性质, 我们知道 f 的整数根 q 必须满足 $q|a_0$, 从而 q 为奇数, 这就完成了证明. □

命题 0.1

设 $f, g \in \mathbb{C}[x]$ 是次数大于等于 1 的互素多项式, 证明必然存在唯一的 $u, v \in \mathbb{C}[x]$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且 $\deg u < \deg g, \deg v < \deg f$.

证明 存在性: 因为 $(f, g) = 1$, 故必然存在 $k, h \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $fh + gk = 1$. 若 $\deg h > \deg g$, 则做带余除法

$$h = gq + u, \deg u < \deg g.$$

于是

$$f(gq + u) + gk = 1 \implies fu + g(fq + k) = 1.$$

令 $v = fq + k$, 则由 $fu + g(fq + k) = 1$ 和比较两边次数知 $\deg v < \deg f$. 现在我们证明了存在性.

唯一性: 若还有 $u_1, v_1 \in \mathbb{C}[x]$ 满足条件, 则

$$f(u - u_1) = g(v_1 - v).$$

又 f, g 互素, 故 $g|(u - u_1), f|(v_1 - v)$, 又 $\deg(u - u_1) < \deg g$, $\deg(v - v_1) < \deg f$, 故 $u = u_1, v = v_1$. 这就证明了唯一性. □

例题 0.3 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $f, g \in \mathbb{F}[x], \deg g \geq 1$, 证明: 存在唯一的 $(f_0, f_1, \cdots, f_r, 0, 0, \cdots) \in (\mathbb{C}[x])^\infty$, 使得

$$\deg f_i < \deg g \text{或者} f_i = 0, 0 \leq i \leq r$$

且

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)g(x) + f_2(x)g^2(x) + \cdots + f_r(x)g^r(x).$$

注 $(\mathbb{C}[x])^\infty$ 表示 $\mathbb{C}[x]$ 的可数笛卡尔积. 为书写方便, 我们可以记 $f_i = 0, i \geq r + 1$.

证明 为方便, 对 $p \in \mathbb{C}[x]$, 我们约定 $\deg p = -\infty \Leftrightarrow p = 0$.

存在性: 由带余除法, 存在 $r \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\deg q_r < \deg g$(否则,g 就能做无穷次带余除法, 但 g 的次数有限) 且

$$f = q_1g + f_0, \deg f_0 < \deg g, q_1 = q_2g + f_1, \deg f_1 < \deg g$$

$$q_2 = q_3g + f_2, \deg f_2 < \deg g, q_3 = q_4g + f_3, \deg f_3 < \deg g$$

$$\vdots$$

$$q_{r-1} = q_rg + f_{r-1}, \deg f_{r-1} < \deg g,$$

取 $f_r = q_r$, 我们得

$$f = f_0 + (q_2g + f_1)g = f_0 + f_1g + (q_3g + f_2)g^2 = \cdots$$

$$= f_0 + f_1g + \cdots + f_{r-1}g^{r-1} + q_rg^r = f_0 + f_1g + \cdots + f_rg^r.$$

唯一性: 若有两种不同的表示

$$f=\sum_{i=0}^{\infty} f_i g^i=\sum_{i=0}^{\infty} h_i g^i, \deg h_i, \deg f_i<\deg g, i \in \mathbb{N}_0,$$

我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}(f_i-h_i) g^i=0.$$

设上式使得 $f_i-h_i \neq 0$ 的最大的 i 为 k, 则 $\deg[(f_k-h_k) g^k] \geq k \deg g$ 以及

$$\deg[(f_i-h_i) g^i]=\deg(f_i-h_i)+i \deg g<k \deg g, 0 \leq i \leq k,$$

故 $\sum_{i=0}^{\infty}(f_i-h_i) g^i$ 不可能是 0 多项式 (最高次项消不掉), 矛盾! 这就证明了唯一性. □

例题 0.4 设 $p, q \in \mathbb{R}[x]$ 满足

$$p(x^2+x+1)=q(x^2-x+1),$$

证明 $p=q$ 为常数.

笔记 利用等式关系反复迭代来得到无穷个根.

证明 事实上

$$(2 x+1) p'(x^2+x+1)=(2 x-1) q'(x^2-x+1), \forall x \in \mathbb{R},$$

那么 $p'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right)=0$, 因此由 (对称轴是 $x=-\frac{1}{2}$)Vieta 定理知

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+1.$$

从而 $p'\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+1\right)=0$, 类似的从而 $q'\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1\right)=0$, (对称轴是 $x=\frac{1}{2}$) 从而 $q'\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}+1\right)=0$, 从而 $p'\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}+1\right)=0$, 依次下去我们得到 p', q' 有无穷多个根, 因此都为 0, 这样结合 $p(1)=q(1)$ 我们就证明了 $p=q$ 为常数. □

例题 0.5 计算全部 $f \in \mathbb{C}[x]$ 使得

$$f(x^2)=f(x) f(x+1), \forall x \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

证明 当 $f=c \in \mathbb{C}$, 我们有 $c=c^2$, 故 $f=0$ 或者 $f=1$ 为所求.

当 f 不为常数, 设 $f(x_1)=0, x_1 \in \mathbb{C}$, 我们由 (1) 知

$$f(x_1^2)=0.$$

反复运用 (1) 得 $x_1^{2^n}, n \in \mathbb{N}_0$ 都是 f 零点. 又非 0 多项式零点有限, 故设 $x_1^{2^n}=x_1^{2^m}, n>m \geq 0$, 则 $x_1^{2^n-2^m}=1$ 或 $x_1=0$. 当前者发生, 我们有 $|x_1|=1$. 从而 f 的所有根都在单位圆周上或者是 0.

设 $f(x_1)=0, x_1 \in \mathbb{C}$, 由 (1) 知

$$f((x-1)^2)=f(x-1) f(x).$$

故 $f\left((x_1-1)^2\right)=0$. 同理可得 $|x_1-1|=1$ 或 $x_1-1=0$. 因此由 $|x_1|=1,|x_1-1|=1, x_1=0$或1 可知 f 只可能有 $x_1=0,1, e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$ 这四个零点. 但是若 $x_1=e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$ 是 f 的零点, 则由(1)知 $x_1^2=e^{\pm \frac{2\pi}{3} i}$ 也是 f 的零点, 矛盾! 从而 f 的零点只有 0 或者 1. 设 $f(x)=c x^n(x-1)^m$ 代入原方程得

$$\begin{aligned}
f(x^2) & =c x^{2 n}(x^2-1)^m=c x^{2 n}(x-1)^m(x+1)^m \\
& =f(x) f(x+1)=c^2 x^{n+m}(x-1)^m(x+1)^n \\
& \Longrightarrow f(x)=x^n(x-1)^n, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例题 0.6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ 两两不同, 证明:

1. $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明

1. 若 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在 $p,q\in\mathbb{Z}[x]$ 使得
$$f=pq, 1\le \deg p<\deg f, 1\le \deg q<\deg f.$$
于是由 $f(a_i)=p(a_i)q(a_i)=-1, i=1,2,\cdots,n$ 及 $p,q\in\mathbb{Z}[x]$ 知
$$p(a_i)+q(a_i)=0, i=1,2,\cdots,n.$$
但是
$$\deg(p+q)\le\max\{\deg p,\deg q\}<\deg f=n,$$
我们有 $p+q=0$. 但是 f 首系数为 1, 所以 p,q 首系数符号相同, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
2. 若 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在 $p,q\in\mathbb{Z}[x]$ 使得
$$f=pq, 1\le \deg p<\deg g, 1\le \deg q<\deg f.$$
由 $f(a_i)=p(a_i)q(a_i)=1, i=1,2,\cdots,n, f\ge 1$ 和 $p,q\in\mathbb{Z}[x]$ 及介值定理知
$$p(a_i)=1,\forall i=1,2,\cdots,n\text{或者}p(a_i)=-1,\forall i=1,2,\cdots,n.$$
不妨设前者发生, 此时 $q(a_i)=1,\forall i=1,2,\cdots,n$.
注意到 $\deg f=2n, f'(a_i)=0, i=1,2,\cdots,n$, 故由 $f'=p'q+pq'=p'+q'$ 知
$$p'(a_i)+q'(a_i)=0, i=1,2,\cdots,n.$$
又
$$\deg(p+q)<2n, \begin{cases} p(a_i)+q(a_i)=2 \\ p'(a_i)+q'(a_i)=0 \end{cases}, i=1,2,\cdots,n,$$
又因为 $p+q$ 和 $H\equiv 2$ 都是多项式且都满足上述插值条件, 所以由 Hermite 插值多项式的唯一性就有 $p+q\equiv 2$. 现在有 $1\le f=p(2-p)\le 1$, 故 $f=1$ 而矛盾! 至此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

□

例题 0.7 设 $f\in\mathbb{Z}[x]$ 是首 1 不可约的, 若 $|f(0)|$ 不是完全平方数, 则 $f(x^2)$ 不可约.

注 $g(-x)g(x)$ 的奇数次项恰好抵消了.

证明 假设 $f(x^2)$ 可约, 则存在首 1 不可约 $g\in\mathbb{Z}[x], 1\le\deg g<2\deg f$ 使得 $g(x)|f(x^2)$, 显然 $g(-x)|f(x^2)$. 若 $g(x)=g(-x)$, 则 g 的每一项都是偶数次方, 因此 $g(x)=h(x^2), h\in\mathbb{Z}[x]$. 现在 $h(x)|f(x)$ 且 $1\le\deg h<\deg f$, 这就和 f 不可约矛盾! 故 $g(x)\ne g(-x)$. 我们知道 $g(-x),g(x)$ 都是不可约的, 所以 $g(-x)g(x)|f(x^2)$. 同样的再由 f 不可约可得
$$g(-x)g(x)=t(x^2)|f(x^2)\implies t|f\implies \deg t=\deg f\implies \deg g=\deg f,$$
故 $f(x^2)=\pm g(x)g(-x)$, 从而 $|f(0)|=|g(0)|^2$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 $f(x^2)$ 不可约. □

例题 0.8 设 $n\in\mathbb{N}$, 证明多项式 $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x^2+k^2)+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 设 $f(0)=n!^2+1=m^2, m\in\mathbb{N}$, 则有 $(m-n!)(m+n!)=1$, 故由 $m+n!=1, m-n!=1\implies m=\frac{1}{2}$ 知矛盾! 因此我们由例题 0.7知只需证明 $g(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+k^2)+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 若 $g=pq, p,q\in\mathbb{Z}[x], 1\le\deg p,\deg q\le n-1$. 注意到
$$1=g(-k^2)=p(-k^2)q(-k^2), k=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$p(-k^2) - q(-k^2) = 0, k = 1, 2, \cdots, n.$$

现在我们知道 $p = q$. 但是 $g = p^2 \geq 0$ 显然是个矛盾! 因此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. $\square$