0.1 估计和式的常用方法

0.1.1 和式放缩成积分

命题 0.1

设 f 在 $(0,1)$ 单调且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 f 递减, 则一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

0.1.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分

例题 0.1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}.$$

笔记 证明的想法要么是凑定积分定义. 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

注 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

解 解法一:注意到

$$\frac{i}{n}<\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}<\frac{i+1}{n}, i=1,2,\cdots,n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

解法二:注意到

$$0\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\left(n+\frac{i^2+1}{n}\right)\left(n+\frac{i^2}{n}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}\to 0, n\to\infty,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

□

例题 0.2 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}.$$

笔记 长得神似定积分定义且很容易观察到 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}$ 和 $\frac{i}{n^2}$ 没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方法, 即做差 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}$ 强估证明不影响极限.

证明 注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|=\left|\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}\right)\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^2\left(n^2+\frac{1}{i}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^4}=\frac{2n(4n^2-1)}{n^4},\end{aligned}$$

于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{n^4}=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n}\sin^4\frac{\pi i}{n}\\&=\int_0^2x\sin^4\pi x\mathrm{d}x\xlongequal[\text{令}x=2-y]{\text{区间再现}}\int_0^2(2-y)\sin^4\pi(2-y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^2(2-y)\sin^4\pi y\mathrm{d}y=\int_0^2\sin^4\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

□

0.1.3 和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)

当和式内部对 n 可求极限时, 极限号与求和号可以换序.(当和式内部对 n 求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 等都不能换序) 本质上就是**控制收敛定理**的应用.

注 不能按照极限号与求和号可换序的想法书写过程, 应该利用不等式放缩、夹逼准则和上下极限进行严谨地书写证明.

例题 0.3 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

笔记 求这种前 n 项和关于 n 的极限 (n 既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$, 使得对 $\forall n>N_0$, 都有

$$\varepsilon>\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}-\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|=\left|\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}-\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|>\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对 $\forall N > N_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=0$.

因此对 $\forall N > N_0$, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}.$$

再令 $N\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2$.

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2(如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不发散).

注意: 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2. (上述论证实际上就是一种" 猜测" 这种极限的值的方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的 "度"). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前 N 项的极限, 原和式除前 N 项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前 N 项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

注: 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

注 上述思路本质上就是**控制收敛定理**的应用, 也可以使用 Toplitz 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去书写证明过程 (夹逼定理和 Toplitz 定理).

解 解法一 (夹逼定理):

一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, 于是 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$.

另一方面, 注意到对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k},\forall n>N$. 从而

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k},\forall N\in\mathbb{N}_+.$$

于是令 $N\to+\infty$, 得到 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2$.

综上所述, 我们有 $2\leqslant\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant 2$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=2$.

解法二 (Toplitz 定理): □

例题 0.4 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

注 注意倒序求和与顺序求和相等.(看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下倒序求和)

笔记 解法一的思路: 我们利用上一题的想法计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}$. 先假设级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$ 收敛, 则由 *Cauchy*

收敛准则可知, 存在 $N'>0$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k},\forall N>N'.$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

解 解法一: 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用 $\ln(1+x)\leqslant x,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}e^{1-k},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$.

另一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall N\in\mathbb{N}_+$. 两边同时对 n 取下极限, 可得对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n&\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k}\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geqslant\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\frac{e}{e-1}$.

解法二 (单调有界定理): 因为

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$S_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

所以证明 $\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},1\leqslant k\leqslant n-1$ 即可, 这等价于 $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\leqslant\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$. 实际上 $a_k=\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n},1\leqslant k\leqslant n$ 是单调递减数列, 因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}}=\frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right),x=k+1\in[2,n].$$

又由于

$$n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leqslant-\frac{n}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-n}{x^2}\leqslant0,\forall x=k+1\in[2,n].$$

从而 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leqslant e^0=1,\forall x=k+1\in[2,n]$, 故 $a_{k+1}\leqslant a_k,\forall1\leqslant k\leqslant n$. 于是 $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}=a_k\geqslant a_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, 也即 S_n 单调递增. 注意

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n-1}e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为 S. 对任意正整数 $n>m$, 先固定 m, 对 n 取极限有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{m}e^{-k}$$

这对任意正整数 m 均成立, 再令 $m\to\infty$ 有 $S\geqslant\dfrac{1}{e-1}$, 从而所求极限为 $\dfrac{1}{e-1}$. □

0.1.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 n,k 不同阶)

只有当和式内部 n,k 不同阶时, 我们才可以直接利用 Taylor 展开进行计算. 但是书写过程不能用 Taylor 展开书写 (关于 o 和 O 余项的求和估计不好说明), 这样书写不严谨 (见例题 0.5 证法一).

我们可以采用**拟合法** (见例题 0.6)、**夹逼准则** (见例题 0.7)、$\varepsilon-\delta$ **语言** (见例题 0.5 证法二) 严谨地书写过程

笔记 虽然这三种方法都比较通用, 但是更推荐**拟合法**和**夹逼准则**, 一般比较简便.

虽然 $\varepsilon-\delta$ **语言**书写起来比较繁琐, 但是当有些和式不容易放缩、拟合的时候, 用这个方法更简单.

这类和式内部 n,k 不同阶的问题的处理方式: 先利用 Taylor 展开计算极限 (可以先不算出极限), 并判断到底要展开多少项, 然后根据具体问题综合运用**拟合法**、**夹逼准则**、$\varepsilon-\delta$ **语言**严谨地书写过程 (怎么书写简便就怎么写).

注 这类和式内部 n,k 不同阶的问题,Taylor 公式是本质, **拟合法**、**夹逼准则**、$\varepsilon-\delta$ **语言**只是形式上的过程.

例题 0.5 设 f 在 0 处可微,$f(0)=0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

笔记 本题如果使用例题 0.3的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f\left(0\right)=\lim_{N\to\infty}\left(N\cdot 0\right)=+\infty\cdot 0.$$

而 $+\infty\cdot 0$ 我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述“$+\infty\cdot 0$”的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们使用 Taylor 展开并引入余项方法和 $\varepsilon-\delta$ 方法更加精细地估计原级数的阶.

注 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言进行证明.

证明 证法一 (不严谨的余项方法): 由 f 在 0 处可微且 $f(0)=0$ 和带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$f(x)=f'(0)x+o(x),x\to 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left[f'(0)\cdot\frac{i}{n^2}+o\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{i}{n^2}\right)\\&=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\to\frac{f'(0)}{2},n\to+\infty.\end{aligned}$$

证法二 ($\varepsilon-\delta$ 严谨的证明): 由 *Taylor* 定理, 可知对 $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists\delta>0$, 当 $|x|\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x)-f'(0)x|\leqslant\varepsilon|x|$.

只要 $n>\dfrac{1}{\delta}$, 有 $\left|\dfrac{i}{n^2}\right|\leqslant\delta,\forall i=1,2,\cdots,n$, 故 $\left|f\left(\dfrac{i}{n^2}\right)-f'(0)\dfrac{i}{n^2}\right|\leqslant\varepsilon\dfrac{i}{n^2},i=1,2,\cdots,n.$

从而

$$f'(0)(1-\varepsilon)\frac{i}{n^2}\leqslant f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leqslant f'(0)(1+\varepsilon)\frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1-\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}=f'(0)(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leqslant f'(0)(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{f'(0)}{2}(1+\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}.$$

于是

$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2} \leqslant \frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leqslant \frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left|\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2}\right| \leqslant \frac{|f'(0)|}{2}\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = \frac{f'(0)}{2}$. □

例题 0.6 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$.

笔记 本题采用**拟合法**书写过程.

解 由于对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{\sqrt{k}}{n}\to+\infty, n\to\infty$, 故由 Taylor 定理可得, 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}+\cdots\right), n\to\infty.$$

于是考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right).$$

又由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \xlongequal{Stolz\text{公式或定积分定义}} \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

笔记 本题采用**夹逼准则**书写过程. 注意 n,k 不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉, 然后使用夹逼准则即可.

证明 注意到

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \leqslant \sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \leqslant \frac{k}{2n^2}, \forall k\in\mathbb{N}.$$

所以

$$\frac{n+1}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是 $\frac{1}{4}$. □

例题 0.8 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n$.

笔记 证法二综合运用了拟合法和夹逼准则书写过程 (只用其中一种方法的话, 书写起来很麻烦).

解 证法一 (不严谨的余项方法):注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}.$$

由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{k}{2n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]=\frac{1}{n}\left[n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2n^2}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{n+1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

证法二 (严谨地书写过程): 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}. \tag{1}$$

因为对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 有 $\dfrac{k}{n^2}\to 0,n\to\infty$, 所以利用 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=1-\frac{k}{2n^2}+\cdots,n\to\infty.$$

从而考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)\right].$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}+\frac{k}{2n^3}\right)-1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^3}\right)-1=\frac{n+1}{4n^2}\to 0,n\to\infty.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^3}=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-\sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}.\end{aligned} \tag{2}$$

注意到

$$-\frac{n+1}{2\left(n+1+\sqrt{n^2+n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{2n^2}=-\frac{n+1}{4n},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$, 则由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}=-\frac{1}{4}$. 再结合(1)(2)式可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

□

0.1.5 分段估计 (Toeplitz 定理)

对于估计级数或积分的极限或阶的问题, 当问题难以直接处理时, 我们可以尝试分段估计, 分段点的选取可以直接根据级数或积分的性质选取, 也可以根据我们的需要待定分段点 m, 然后再选取满足我们需要的 m 作为分段点.

定理 0.1 (Toeplitz 定理)

(a): 设 $\{t_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a. \tag{3}$$

(b): 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=a. \tag{4}$$

♡

笔记 无需记忆 *Toeplitz* 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 *Toeplitz* 定理, 即当 n 比较小的时候, 用 t_{nk} 趋于 0 来控制, 当 n 比较大的时候, 用 a_n 趋于 a 来控制.

我们需要熟悉蕴含在 *Toeplitz* 定理当中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

Toeplitz 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项), 另一部分是余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项) 和余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项).

注 注意区分 (a),(b) 两者的条件: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}t_{nk}\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}$.

证明 (a): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

故(3)式成立.

(b): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} t_{nk}a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{nk}a_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} t_{nk}a_k\right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}a_k\right| \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N} t_{nk}a_k\right| + \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk}a_k| \leqslant \sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \sup_{k\geqslant N+1}|a_k|, \forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}a_k\right| \leqslant \lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k| = \overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n| = \overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n = \lim_{n\to+\infty}a_n = 0.$$

故(4)式成立. □

例题 0.9 设 $p_k>0, k=1,2,\cdots,n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

笔记 理解到本质之后不需要记忆Toeplitz 定理, 但是这里可以直接套用 Toeplitz 定理我们就引用了. 今后我们不再直接套用 Toeplitz 定理, 而是利用 Toeplitz 定理的证明方法解决问题.

证明 记 $t_{nk}=\dfrac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geqslant 0, k=1,2,\cdots,n$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=1$. 又因为

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}t_{nk}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n+k+1}}=0.$$

所以由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 故由Toeplitz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a.$$

□

命题 0.2

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $b_n\geqslant 0$. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS.$$

证明 (i) 若 $S=0$, 则 $b_n\equiv 0$. 此时结论显然成立.

(ii) 若 $S>0$, 则令 $t_{nk}=\dfrac{1}{S}b_{n-k+1}, k=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}S_n=1.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 存在, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=S\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}.$$

不妨设 $a=0$, 则对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$0\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=N+1}^{n}t_{nk}\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}.$$

令 $n \to +\infty$, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k t_{nk}\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}\right) = \sup_{k\geq N+1}|a_k|, \forall N\in\mathbb{N}.$$

再令 $N \to +\infty$, 可得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k t_{nk}\right| \leqslant \lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geq N+1}|a_k| = \varlimsup_{n\to+\infty}|a_k| = \lim_{n\to+\infty}|a_k| = \lim_{n\to+\infty}a_k = 0.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k t_{nk} = a$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1 b_n) = S\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k t_{nk} = aS$. □

例题 0.10 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$. 且存在常数 $K>0$, 使得 $\sum\limits_{j=0}^{n}|y_j| \leqslant K, \forall n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i} = 0.$$

证明 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_{n-i}\right| + \left|\sum_{i=N+1}^{n} x_i y_{n-i}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_{n-i}\right| + \sup_{i\geqslant N+1}|x_i|\cdot\sum_{i=N+1}^{n}|y_{n-i}| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_{n-i}\right| + K\cdot\sup_{i\geqslant N+1}|x_i|.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}\right| \leqslant K\cdot\sup\limits_{i\geqslant N+1}|x_i|$.

由 N 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i} = \lim_{N\to\infty}\sup_{i\geq N+1}|x_i| = \varlimsup_{n\to\infty}|x_n| = \lim_{n\to\infty}x_n = 0.$$

□

命题 0.3

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

笔记 可以不妨设 $a=b=0$ 的原因: 假设当 $a=b=0$ 时, 结论成立. 则当 a,b 至少有一个不为零时, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0, \lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b)=0$. 从而由假设可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_{n-k+1}-b)}{n} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}}{n} + ab - a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n} - b\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n} = 0$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n} = \lim_{n\to\infty}a_n = a, \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n} = \lim_{n\to\infty}b_n = b.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}}{n} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n} + b\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n} - ab = ab.$

证明 不妨设 $a=b=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n, 用 b_n-b 代替 b_n. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}}{n}\right| \leqslant \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{N}a_k b_{n-k+1}\right|}{n} + \frac{\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_k b_{n-k+1}\right|}{n}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_{n-k+1}\right| + \sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|b_{n-k+1}|$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_{n-k+1}\right| + \sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right| \leqslant \sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|}{n} \leqslant \sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = 0.$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = 0.$ □

例题 0.11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$.

注 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$ 的原因: 我们希望找到一个合适的分段点 m, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 由 $\sum\limits_{k=2}^{m}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\dfrac{(m-1)\sqrt{n}}{n}=\dfrac{(m-1)}{\sqrt{n}}$ 可知, 我们可以希望 $\dfrac{(m-1)}{\sqrt{n}}\to 0$, 即 $m=o(\sqrt{n})$. 又由上述证明的积分放缩可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}$, 从而我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{m}}=1$, 也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{m}=0$.

综上, 我们希望当 $n\to\infty$ 时,m 的阶比 $\sqrt{n}$ 低但比 $\ln n$ 高, 于是我们考虑 $\ln n$ 和 $\sqrt{n}$ 的几何平均, 即令 $m=\sqrt{\sqrt{n}\ln n}$, 恰好满足需要. 又由于 m 表示求和项数, 因此取整保证严谨性.

笔记 本题核心想法是: **分段估计**. 分段后的估计方式和分段点的选取方法较多.(清疏讲义上有另一种分段估计的做法)

注意: 本题使用 Stolz 定理解决不了, 直接放缩也不行.

证明 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$, 考虑 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1+\sum\limits_{k=2}^{m}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}+\sum\limits_{k=m}^{n}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$. 不难发现

$$\frac{m}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{n}\to 0, n\to\infty.$$
$$\sum_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\to 0, n\to\infty.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 并且一方面, 我们有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{k}}dx\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{n}\int_{m-1}^{n}n^{\frac{1}{x}}dx$$
$$=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{n^x}{x^2}dx\leqslant\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{x^2}dx=\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1).$$

另一方面, 我们有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{k}}dx\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{n}\int_{m}^{n+1}n^{\frac{1}{x}}dx$$
$$=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{n^x}{x^2}dx\leqslant\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x^2}dx=\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1).$$

又注意到

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{m-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{m}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}} = 1.$$

故

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1) = 1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=m}^{n} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{m} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} + \sum\limits_{k=m}^{n} \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\right) = 1 + 0 + 1 = 2.$ □

0.1.6 Euler-Maclaurin 公式 (E-M 公式)

定理 0.2 (0 阶 Euler-Maclaurin 公式)

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $f \in D[a, b]$, $f' \in L^1[a, b]$, 让我们有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即可), 再使用.

E-M 公式求和通项与求和号上限无关.

笔记 在 $[0, 1)$ 上 $x - [x] - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$, 它也是 $x - \frac{1}{2}$ 做周期 1 延拓得到的函数. 故 $-\frac{1}{2} \leqslant x - [x] - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=a}^{b-1} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x+k)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} \left[\frac{1}{2} f(1+k) + \frac{1}{2} f(k) - \int_0^1 f(x+k)\mathrm{d}x\right] \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} \left[\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b-1} [f(k) + f(k+1)] - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

注 假设已知 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 记 $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于 $-\frac{1}{2} \leqslant x - [x] - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, 因此直接将 $b_1(x)$ 放大成 $\frac{1}{2}$ 就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见例题 0.12.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对 $b_1(x)$ 使用分部积分. 但是由于 b_1 并非连续函数, 为了把 $\int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x)\mathrm{d}x$ 继续分部积分, 我们需要寻求 b_1 的原函数 b_2 使得

$$\int_a^b b_1(x) f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x) d b_2(x),$$

即期望 $b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 的一个原函数并且仍然有周期 1(因为求导不改变周期性, 又由于 $b_1(x)$ 周期为 1, 故原函数 $b_2(x)$ 的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y, b_2(x+1)=b_2(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

(构造 $b_2(x)$ 的想法: 先找到 $x\in[0,1)$ 这个特殊情况下的 $b_2(x)$, 再由此构造出 $x\in\mathbb{R}$ 这个一般情况下的 $b_2(x)$, 即**由特殊推广到一般**)

先考虑 $x\in[0,1)$ 的情况 (因为此时 $[x]\equiv 0$, 方便后续计算得到原函数 $b_2(x)$), 于是就需要 $\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=b_2(1)=b_2(0)=0$. 显然

$$b_2(1)=\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=0=b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要 $b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$(其中$c$为任意常数), $x\in[0,1)$. 又因为我们需要 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1, 所以再将 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ 做周期 1 延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 得到在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1 的 $b_2(x)$(易知此时 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式为

$$b_2(x)=b_2(x-[x])=\int_0^{x-[x]}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x-[x]}\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c, \forall x\in\mathbb{R}.$$

此时又由 $\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y=0$ 可得

$$\begin{aligned}
b_2(x)&=b_2(x-[x])=\int_0^{x-[x]}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^x b_1(y-[x])\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y+k)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{[x]} b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的 $b_2(x)$ 恰好就是 $b_1(x)$ 的一个原函数. 即 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续且周期为 1 的原函数 $b_2(x)$, $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 因此我们可以对 $b_1(x)$ 进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)db_2(x)$$

成立. 并且此时 $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c, \forall x\in\mathbb{R}$. 其中 c 为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要 $b_3(x)$ 是 $b_2(x)$ 的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望 $b_3(1)=b_3(0)$ 和 $b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0,$$

$$b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_3(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_3(x)$, 并且 $b_3(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 进而可以利用这个 $b_3(x)$ 继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由 $\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0$ 可知

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow c=\frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时 $b_1(x)$ 的原函数 $b_2(x)$ 就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么 c 可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的 $c=\frac{1}{12}$). 此时这个唯一

确定的 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1,并且

$$b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},x\in[0,1);$$

$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y,|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}.$$

依次下去我们给出计算 $b_n,n\in\mathbb{N}$ 的算法.

定义 0.1 ($b_n(x)$ 定义和算法)

我们令 $b_1(x)$ 为 $x-\frac{1}{2},x\in[0,1)$ 的周期 1 延拓. 对所有 $n=2,3,\cdots,b_n(x)$ 是 $b_{n-1}(x)$ 的一个原函数. ♣

笔记 **$b_n(x)$ 的算法:**

根据上述构造 $b_2(x),b_3(x)$ 的想法可知, 我们只需期望 $b_n(1)=b_n(0)$ 和 $b_n(x)=\int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x=b_n(1)=b_n(0)=0,$$

$$b_n(x)=\int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_n(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_n(x)$, 并且 $b_n(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 并且根据 $\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x=b_n(1)=b_n(0)=0$ 我们可唯一确定 $b_{n-1}(x)$ 在 $[0,1)$ 上的表达式. 从而可以唯一确定 $b_n(x)$ 之前的所有 $b_{n-1}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一确定所有的 $b_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述 $b_n(x)$ 的定义和算法, 可知 $b_n(x)$ 是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在 $M_n>0$, 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $|b_n(x)|\leqslant M_n$.

注 我们可以利用这些 $b_n(x)$ 不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见例题**??**,例题 0.12.

结论 我们计算一些 $b_n(x)$ 以备用:

$$b_1(x)=x-\frac{1}{2},x\in[0,1).$$

$$b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2},|b_1(x)|\leqslant\frac{1}{2},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},x\in[0,1).$$

$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12},x\in[0,1).$$

$$b_3(x)=\frac{(x-[x])^3}{6}-\frac{(x-[x])^2}{4}+\frac{(x-[x])}{12},|b_3(x)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}-3}{36},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}-\frac{1}{720},x\in[0,1).$$

$$b_4(x)=\frac{(x-[x])^4}{24}-\frac{(x-[x])^3}{12}+\frac{(x-[x])^2}{24}-\frac{1}{720},|b_4(x)|\leqslant\frac{1}{720},x\in\mathbb{R}.$$

命题 0.4 ($b_n(x)$ 的傅立叶级数表达式)

对 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

$$b_1(x) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n},$$

$$b_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}},$$

$$b_{2k+1}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}}.$$

注 $b_1(x)$ 的傅立叶级数并不总是收敛到 $b_1(x)$. 事实上, 由狄利克雷收敛定理, 我们知道

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n} = \begin{cases} b_1(x), & x\text{不是整数} \\ 0, & x\text{是整数} \end{cases}.$$

证明

□

命题 0.5 ($b_n(x)$ 基本性质)

对每个 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

1.
$$b_{2k+1}(0) = 0, \quad b_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}.$$

   其中 B_{2k} 是 Bernoulli 数.

2.
$$|b_k(x)| \leqslant \frac{2\zeta(k)}{(2\pi)^k}.$$

   其中 $\zeta(x)$ 是 Riemann Zeta 函数, 定义为

$$\zeta(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\ x > 1 \quad \text{或} \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\mathrm{d}x,\ s > 1.$$

证明

□

定理 0.3 (Euler-Maclaurin 公式)

设 $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, f \in D^{2m}[a,b], f^{(2m)} \in L^1[a,b]$. 则有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] b_{2k}(0) - \int_a^b b_{2m}(x)f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理 0.2, 我们有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

现在利用 b_2 周期性和分部积分得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}b_2(x) = [f'(b) - f'(a)]b_2(0) - \int_a^b b_2(x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

代入等式 (5), 就证明了定理中 $m = 2$ 的情况, 类似的反复分部积分即可对一般 m 得到等式

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=2}^{m}\left[f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right] b_k(0) + (-1)^{m+1}\int_a^b b_m(x)f^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$$

又因为命题 0.5中的 $b_{2k+1}(0)=0,k\in\mathbb{N}$, 代入上式, 这就完成了定理的证明. □

例题 0.12 估计 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k},n\to\infty$.

解 解法一: 一方面, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1).$$

另一方面, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 我们也有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\leqslant1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n.$$

于是对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\ln(n+1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant1+\ln n.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln n}+1.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$. 即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n,n\to\infty$.

解法二 (E-M 公式): 由E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.\tag{6}$$

因为 $\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{n}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$ 存在, 所以可设

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq C<\infty.$$

于是 $\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=C-\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\left[C-\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\ln n+\frac{1}{2}-C++O\left(\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}$. 此时令 $\frac{1}{2}-C=\frac{1}{2}-\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq\gamma$(欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}.\tag{7}$$

由$b_n(x)$ 的构造和分部积分可知, 上述结果只是对 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2},b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12}$. 则不难发现$b_2(x)$ 是连续且周期为

1 的函数,$b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, 并且 $|b_2(x)| \leqslant \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$. 而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx$ 收敛, 于是设 $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \triangleq C$. 从而再对(6)分部积分得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left(\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \right) \\
&= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} db_2(x) \\
&= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{b_2(x)}{x^2}\Big|_n^{+\infty} + 2\int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \\
&= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + 2\int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

又由 $|b_2(x)| \leqslant \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知

$$\left| 2\int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} \right| \leqslant 2\left| \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \right| + \frac{|b_2(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{6}\left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \right| + \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即

$$2\int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

再结合(8)和(9)式可得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

记 $\gamma \triangleq \frac{1}{2} - C$($\gamma$ 为欧拉常数), 则我们就得到了比(7)式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

例题 0.13 计算

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$$

笔记 **估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.**

解 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + (-1)^{2m-2} \frac{\ln(2m-1)}{2m-1} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2m-1)}{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + o(1), m \to +\infty. \tag{10}$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列 $\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ 即可. 又注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{m} \left[(-1)^{2n-2} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + (-1)^{2n-1} \frac{\ln 2n}{2n} \right] = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln 2n}{2n} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{n}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2 + \ln n}{n}. \tag{11}$$

由例题例题 0.12可知

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2}{n} = \ln 2(\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1), m \to +\infty. \tag{12}$$

又由E-M 公式可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{13}$$

因为

$$\left|\int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2} \left|\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x\right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

并且 $\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = C < \infty$. 即

$$\int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = C + o(1), m \to +\infty. \tag{14}$$

于是结合(13)(14)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \\ &= o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \to +\infty. \end{aligned} \tag{15}$$

因此由(11)(12)(15)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2 + \ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 2m + C + o(1) - \left[\ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1)\right] \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 2m - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) \\ &= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1), m \to +\infty. \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. 再结合(10)式可得

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

故 $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. □

例题 0.14 设 $f \in C^1[1, +\infty)$ 且 $\int_1^\infty |f'(x)| \mathrm{d}x < \infty$, 证明 $\int_1^\infty f(x) \mathrm{d}x$ 收敛等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$ 存在.

笔记 关键想法参考:E-M 公式和命题??.

证明 由E-M 公式可知

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(x) \mathrm{d}x + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \mathrm{d}x. \tag{16}$$

注意到 $0 \leqslant \left|\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} |f'(x)|$, 并且 $\int_1^\infty |f'(x)| \mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\int_1^\infty \left|\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\right| \mathrm{d}x$ 也收敛.

从而 $\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 故由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(1) 若 $\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 又由 $\int_1^{\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ 可知 $\int_1^{\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(1)]=\lim_{x\to+\infty}\int_1^{x}f'(y)\mathrm{d}y=\int_1^{\infty}f'(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 从而由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 也存在. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结合(16)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 存在.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结合(16)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. 于是对 $\forall x\geqslant 1$, 一定存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant x<n+1$. 从而可得

$$\int_1^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x+\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

并且

$$\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{x}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{y\geqslant n}|f(y)|\,. \tag{18}$$

对(18)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\geqslant n}|f(y)|=\varlimsup_{x\to+\infty}|f(x)|\,.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 因此 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}|f(x)|=0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x=0$. 于是再对(17)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 从而可得

$$\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_1^{x}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{x\to+\infty}\int_n^{x}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. □

例题 0.15

1. 先证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right)$$

存在.

2. 再用积分放缩法求 $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k},n\to\infty$ 的等价无穷大.

笔记 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

证明

1. 设

$$a_n\triangleq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n,n=2,3,\cdots.$$

我们有

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\ln(n+1) + \ln\ln n \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] + \ln\ln n \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\ln n - \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) + \ln\ln n \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\left|O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right| < \infty, \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n}\right] = -\frac{1}{2\ln 2},
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_2\right]
$$

存在.

2. 注意到对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k\ln k}dx \geqslant \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln(n+1)-\ln\ln 2. \tag{19}
$$

同时, 也有

$$
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k\ln k}dx \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_1^{n}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln n. \tag{20}
$$

从而对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 由(19)(20)式可得

$$
\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \leqslant \ln\ln n.
$$

于是对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$
\frac{\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2}{\ln\ln n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n} \leqslant 1.
$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n} = 1$. 即 $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \sim \ln\ln n, n\to\infty$.

□

例题 0.16 用积分放缩法得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2}, x\to 1^-$ 的等价无穷大.

证明 注意到对 $\forall x \in (0,1)$, 固定 x, 都有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2} = -1+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2} = -1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{n^2}dt \geqslant -1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{t^2}dt = -1+\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}dt. \tag{21}
$$

同时也有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{t^2}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}dt. \tag{22}
$$

又由于 $x\in(0,1)$, 因此 $\ln x \in (-\infty, 0)$. 从而

$$
\int_0^{\infty}x^{t^2}dt = \int_0^{\infty}e^{t^2\ln x}dt \xlongequal{令 y=t\sqrt{-\ln x}} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.
$$

故 $\int_0^{\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$ 收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \tag{23}$$

从而对 $\forall x \in (0,1)$, 结合(21)(22)(23)式可得

$$-1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = -1 + \lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \sqrt{-\ln x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x \in (0,1).$$

令 $x \to 1^-$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{-\ln x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}, x \to 1^-$.

又由 $ln(1+x) \sim x, x \to 0$ 可知 $-\ln x = -\ln(1+x-1) \sim 1-x, x \to 1^-$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x \to 1^-.$$

□