0.1 第二型曲线积分

定义 0.1

设函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 定义在平面有向可求长度曲线 $L:\overset{\frown}{AB}$ 上. 对 L 的任一分割 T, 它把 L 分成 n 个小弧段

$$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $M_0=A, M_n=B$. 记各小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i, 分割 T 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i$. 又设 T 的分点 M_i 的坐标为 (x_i,y_i), 并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 在每个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i), 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在且与分割 T 和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 沿有向曲线 L 上的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\quad 或\quad \int_{\overset{\frown}{AB}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

上述积分(1)也可写作

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{AB}}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

为书写简洁起见,(1)式常简写成

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\quad 或\quad \int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

若 L 为封闭的有向曲线, 则记为

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

若记 $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)), \mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, 则(1)式可写成向量形式

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\quad 或\quad \int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

♣

定义 0.2

倘若 L 为空间有向可求长度曲线,$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 为定义在 L 上的函数, 则可按定义 0.1类似地定义沿空间有向曲线 L 上的**第二型曲线积分**, 并记为

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{2}$$

或简写成

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

当把 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ 看作三维向量时,(2)式也可表示成向量形式

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

♣

定理 0.1

(1) 若 $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 存在, 则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

(2) 若 $\int_L P_i\mathrm{d}x + Q_i\mathrm{d}y\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 存在, 则 $\int_L \left(\sum_{i=1}^{k} c_i P_i\right)\mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i\right)\mathrm{d}y$ 也存在, 且

$$\int_L \left(\sum_{i=1}^{k} c_i P_i\right)\mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i\right)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k} c_i\left(\int_L P_i\mathrm{d}x + Q_i\mathrm{d}y\right),$$

其中 $c_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为常数.

(3) 若有向曲线 L 是由有向曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 首尾相接而成, 且 $\int_{L_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 存在, 则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 也存在, 且

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

♡

证明

□

定理 0.2

(1) 设平面曲线

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导函数, 且点 A 与 B 的坐标分别为 $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ 与 $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. 又设 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 为 L 上的连续函数, 则沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分

$$\int_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{3}$$

(2) 设空间有向光滑曲线 L 的参量方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

起点为 $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, 终点为 $(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$, 则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

这里要注意曲线方向与积分上下限的确定应该一致.

♡

证明

□

定理 0.3 (两类曲线积分的联系)

设 L 为从 A 到 B 的有向光滑曲线, 它以弧长 s 为参数, 于是

$$L: \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

其中 l 为曲线 L 的全长, 且点 A 与 B 的坐标分别为 $(x(0), y(0))$ 与 $(x(l), y(l))$. 曲线 L 上每一点的切线方向指向弧长增加的一方. 现以 $(\widehat{t,x}), (\widehat{t,y})$ 分别表示切线方向 t 与 x 轴和 y 轴正向的夹角, 则在曲线上的每一点的切线方向余弦是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos(\widehat{t,x}), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos(\widehat{t,y}). \tag{4}$$

若 $P(x,y), Q(x,y)$ 为曲线 L 上的连续函数, 则由(3)式得

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \int_0^l \left[P(x(s), y(s))\cos(\widehat{t,x}) + Q(x(s), y(s))\cos(\widehat{t,y})\right] \mathrm{d}s \\ &= \int_L \left[P(x,y)\cos(\widehat{t,x}) + Q(x,y)\cos(\widehat{t,y})\right] \mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{5}$$

这里必须指出, 当(5)式左边第二型曲线积分中 L 改变方向时, 积分值改变符号, 相应在(5)式右边第一型曲线积分中, 曲线上各点的切线方向指向相反的方向 (即指向弧长减少的方向). 这时夹角 $(\widehat{t,x})$ 和 $(\widehat{t,y})$ 分别与原来的夹角相差一个弧度 π, 从而 $\cos(\widehat{t,x})$ 和 $\cos(\widehat{t,y})$ 都要变号. 因此, 一旦方向确定了, 公式(5)总是成立的.

类似讨论可以得到

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L \left[P(x,y,z)\cos(\widehat{t,x}) + Q(x,y,z)\cos(\widehat{t,y}) + R(x,y,z)\cos(\widehat{t,z})\right] \mathrm{d}s,$$

其中 P, Q, R 为空间有向曲线 L 上的连续函数,$(\cos(\widehat{t,x}), \cos(\widehat{t,y}), \cos(\widehat{t,z}))$ 为曲线 L 正切向的方向余弦. ♡

证明

□