## 0.1 常见问题

**例题 0.1** 已知椭球面

$$\Sigma_0:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>b,$$

的外切柱面 $\Sigma_\varepsilon(\varepsilon=1$ 或 $-1)$ 平行于已知直线

$$l_\varepsilon:\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与 $\Sigma_\varepsilon$ 交于一个圆周的平面的所有可能的法方向.

注: 本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

**解** 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 $\Sigma_0$ 与 $\Sigma_\varepsilon$ 的切点, 则由条件可设 $\Sigma_\varepsilon$ 上过 $M_1$ 点的直母线为

$$l:\begin{cases}x=x_1\\ y=y_1+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}t\\ z=z_1+ct\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

将上式与 $\Sigma_0$ 的方程联立得

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(y_1+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}t)^2}{b^2}+\frac{(z_1+ct)^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

又因为 $M_1\in\Sigma_0$, 所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

再联立(2)(3)式可得

$$\frac{a^2}{b^2}t^2+\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{2}{c}z_1\right)t=0.$$

由 $l$ 与 $\Sigma_0$ 相切可知上述方程只有 $t=0$ 这一个解, 故

$$\frac{2\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{2}{c}z_1=0. \tag{4}$$

再将 $\Sigma_0$ 的方程与(4)(1)式联立消去 $x_1,y_1,z_1,t$ 得

$$\Sigma_\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2}{a^2c^2}=1.$$

再设与 $\Sigma_\varepsilon$ 交于一个圆周的平面为

$$\pi:Ax+By+Cz=0.$$

记 $K=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, 现在做如下正交变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{AC}{K^2}&\frac{BC}{K^2}&\frac{-A^2-B^2}{K^2}\\-\frac{B}{K}&\frac{A}{K}&0\\\frac{A}{K}&\frac{B}{K}&\frac{C}{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

将 $Oxyz$ 坐标系变为 $Ox'y'z'$ 坐标系. 在新坐标系 $Ox'y'z'$ 下

$$\pi:z'=0.$$

$$\Sigma_\varepsilon:\frac{\left(\frac{AC}{K^2}x'-\frac{B}{K}y'+\frac{A}{K}z'\right)^2}{a^2}+\frac{1}{a^2c^2}\left[c\left(\frac{BC}{K^2}x'+\frac{A}{K}y'+\frac{B}{K}z'\right)-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{-A^2-B^2}{K^2}x'+\frac{C}{K}z'\right)\right]^2=1.$$

故

$$\pi\cap\Sigma_\varepsilon:\frac{\left(\frac{AC}{K^2}x'-\frac{B}{K}y'\right)^2}{a^2}+\frac{1}{a^2c^2}\left[c\left(\frac{BC}{K^2}x'+\frac{A}{K}y'\right)-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{-A^2-B^2}{K^2}x'\right)\right]^2=1.$$

注意到交线 $\pi \cap \Sigma_\varepsilon$ 为圆周的充要条件是上式中的 $x'^2, y'^2$ 的系数相等且不为 0,$x'y'$ 的系数为 0. 此即

$$\begin{cases} \dfrac{2\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot \dfrac{A}{C}\left(1+\dfrac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot \dfrac{B}{C}\right)=0 \\ 1+\dfrac{4(a^2-b^2)}{c^2} \cdot \dfrac{A^2}{C^2}=\left(1+\dfrac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot \dfrac{B}{C}\right)^2 \neq 0 \end{cases},$$

上式也等价于

$$\begin{cases} \dfrac{2\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot A\left(C+\dfrac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot B\right)=0 \\ C^2+\dfrac{4(a^2-b^2)}{c^2} \cdot A^2=\left(C+\dfrac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot B\right)^2 \neq 0 \end{cases},$$

从而 $A=0$, 此时

$$\begin{aligned} C^2=\left(C+\frac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot B\right)^2 &\Longleftrightarrow C+\frac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot B= \pm C \\ &\Longleftrightarrow \frac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{c} \cdot B=0\text{或}-2C \\ &\Longleftrightarrow B=0\text{或}\frac{B}{C}=-\frac{2c}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}. \end{aligned}$$

故 $\pi$ 的法向量只可能为 $(0,0,1)$ 或 $(0,-2c,\varepsilon\sqrt{a^2-b^2})$.

□