0.1 利用留数定理计算定积分

0.1.1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

定理 0.1

设 f 在上半平面 $\{z: \mathrm{Im}z>0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z: \mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k). \tag{1}$$

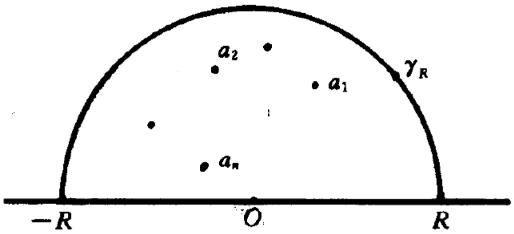

图 1

证明 图 1所示, 取充分大的 R, 使得 $a_1,\cdots,a_n$ 包含在半圆盘 $\{z:|z|<R,\mathrm{Im}z>0\}$ 中, 记 $\gamma_R=\{z: z=Re^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$, 由留数定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k). \tag{2}$$

记 $M(R)=\max\{|f(z)|: z\in\gamma_R\}$, 由假定, $\lim\limits_{R\to\infty} RM(R)=0$, 因而

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \pi RM(R)\to 0\,(R\to\infty).$$

在 (2) 式中令 $R\to\infty$, 即得公式 (1). □

推论 0.1

设 P 和 Q 是两个既约多项式,Q 没有实的零点, 且 $\deg Q-\deg P\geqslant 2$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right),$$

这里,$a_k(k=1,\cdots,n)$ 为 Q 在上半平面中的全部零点,$\deg P,\deg Q$ 分别为 P 和 Q 的次数.

证明 令 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 则 f 满足定理 0.1的条件, 由定理 0.1即得本推论. □

例题 0.1 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, 它满足推论 0.1的条件. 容易看出, 分母 $Q(z)=z^4+10z^2+9$ 有 4 个零点 $\pm\mathrm{i}$ 和 $\pm 3\mathrm{i}$, 但在上半平面中的零点只有 $a_1=\mathrm{i}$ 和 $a_2=3\mathrm{i}$ 两个. 容易算得

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{-1-\mathrm{i}}{16},\quad \mathrm{Res}(f,3\mathrm{i})=\frac{3-7\mathrm{i}}{48},$$

故得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x = \frac{5}{12}\pi.$$

□

例题 0.2 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$, 它显然满足推论 0.1的条件, 且在上半平面中只有一个 $n+1$ 阶极点 $z=\mathrm{i}$. 应命题??, 通过直接计算得

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

于是得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}.$$

□

引理 0.1 (Jordan 引理)

设 f 在 $\{z: R_0 \leqslant |z| < \infty, \mathrm{Im}z \geqslant 0\}$ 上连续, 且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}z\geqslant 0}} f(z)=0$, 则对任意 $\alpha>0$, 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

这里,$\gamma_R = \{z: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, R\geqslant R_0\}$.

注 在计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)\mathrm{d}x$ 这种类型的积分时, 需要应用 Jordan 引理.

证明 记 $M(R)=\max\{|f(z)|: z\in\gamma_R\}$, 则由假定,$M(R)\to 0 (R\to\infty)$. 因为

$$\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant RM(R)\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}M(R)(1-\mathrm{e}^{-\alpha R}) \to 0\ (R\to\infty).\end{aligned}$$

这里, 我们已经利用了不等式

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

□

定理 0.2

设 f 在上半平面 $\{z: \mathrm{Im}z>0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z: \mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 那么对任意 $\alpha>0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z), a_k). \tag{3}$$

证明 取充分大的 R, 使得 $a_1,\cdots,a_n$ 都包含在半圆盘 $\{z: |z|<R, \mathrm{Im}z>0\}$ 中. 对函数

$$F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)$$

用留数定理, 得

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z), a_k). \tag{4}$$

根据Jordan 引理, 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

在(4)式的两端让 $R\to\infty$, 即得公式(3). □

推论 0.2

设 f 在上半平面 $\{z : \mathrm{Im}z > 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z : \mathrm{Im}z \geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, 那么对任意 $\alpha > 0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z), a_k)\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z), a_k)\right\}.$$

♡

证明 注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} = \cos\alpha x + \mathrm{i}\sin\alpha x,$$

在公式(3)的两端分别取实部和虚部, 即得. □

例题 0.3 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x\ (a>0,\ b>0).$$

解 令 $f(z) = \dfrac{1}{b^2+z^2}$, 它满足定理 0.2的条件. 因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{iaz}}{b^2+z^2}$ 在上半平面中只有一个 1 阶极点 $z = bi$, 且

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{iaz}}{b^2+z^2}, bi\right) = \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2bi},$$

根据推论 0.2, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-ab}.$$

□

引理 0.2

设 f 在扇状域

$$G = \{z = a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : 0 < \rho \leqslant \rho_0,\ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0+\alpha\}$$

上连续, 如果 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, 那么

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}A\alpha,$$

这里,$\gamma_\rho = \{z = a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0+\alpha\}$, 它的方向是沿着辐角增加的方向.

♡

注 遇到 f 在实轴上有奇点的情况时, 常要使用这个引理.

证明 令 $g(z) = (z-a)f(z) - A$, 则 $\lim\limits_{z\to a} g(z) = 0$. 若记 $M_\rho = \sup\{|g(z)| : z = a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0+\alpha\}$, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0} M_\rho = 0$. 于是

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\frac{g(a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\rho\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant M_\rho\alpha \to 0\ (\rho\to 0).$$

由此即得

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\rho} \frac{A}{z-a}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \frac{A}{\rho e^{\mathrm{i}\theta}}\rho \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta + \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$
$$= \mathrm{i}A\alpha + \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z \to \mathrm{i}A\alpha\ (\rho \to 0).$$

□

例题 0.4 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

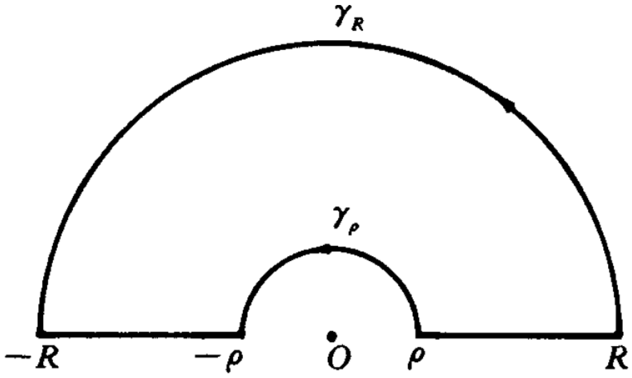

图 2

解 取函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$, 取围道如图 2所示, 它由线段 $[-R,-\rho]$,$[\rho,R]$ 和半圆周 γ_ρ,γ_R 组成. 在此围道围成的域中,f 是全纯的, 因而由 Cauchy 积分定理得

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\rho^-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z + \int_{\rho}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0. \tag{5}$$

由引理 0.1知道

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

由引理 0.2得

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho^-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi.$$

在 (5) 式中令 $\rho \to 0$,$R \to \infty$, 于是得

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi,$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi.$$

两边取虚部, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi,$$

因而

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

□

0.1.2 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

用留数定理计算 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 这种类型的积分, 往往要借助于对数函数, 不像计算 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 型积分直接.

例题 0.5 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x,$$

这里,m 是正整数,p 不是整数,$0 < p < m$.

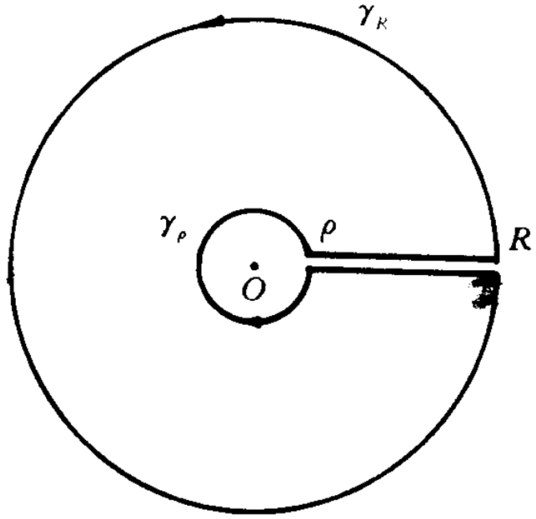

图 3

解 取 $f(z) = \dfrac{z^{p-1}}{(1+z)^m}$, 因为 p 不是整数, 所以

$$z^{p-1} = \mathrm{e}^{(p-1)\log z}$$

是一个多值函数. 在复平面上, 取正实轴作割线得一域,z^{p-1} 在这个域中能分出单值的全纯分支. 今取定在正实轴上沿取实值的那个全纯分支, 即主支:$z^{p-1} = \mathrm{e}^{(p-1)\log z}$. 让 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m}$ 沿如下的闭曲线 Γ 积分: 先沿正实轴的上沿从 ρ 到 $R(0 < \rho < 1 < R < \infty)$, 再按反时针方向, 沿以原点为中心、$R$ 为半径的圆周 γ_R 回到出发处, 再沿正实轴的下沿从 R 到 ρ, 最后按顺时针方向沿以原点为中心、ρ 为半径的圆周 γ_ρ 回到原来的出发处 (图 3). 在正实轴上沿, 有

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{(p-1)\log x}}{(1+x)^m} = \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m};$$

在正实轴下沿, 由于

$$\log z = \log|z| + 2\pi\mathrm{i},$$

所以

$$\mathrm{e}^{(p-1)\log z} = \mathrm{e}^{(p-1)(\log x + 2\pi\mathrm{i})} = x^{p-1}\mathrm{e}^{(p-1)2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}x^{p-1},$$

因而

$$f(z) = \mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}.$$

显然,f 在由 Γ 围成的域中只有一个 m 阶极点 $z=-1$. 由留数定理, 有

$$\int_\rho^R \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z + \mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\int_R^\rho \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\rho}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}, -1\right). \tag{6}$$

当 $z\in\gamma_R$ 时,$z=Re^{i\theta}$,$\log z=\log R+i\theta$, 所以

$$\frac{|z^{p-1}|}{|1+z|^m}=\frac{|e^{(p-1)\log z}|}{|1+z|^m}\leqslant\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}.$$

同样道理, 当 $z\in\gamma_\rho$ 时, 有

$$\frac{|z^{p-1}|}{|1+z|^m}\leqslant\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}.$$

于是

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}dz\right|\leqslant\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}2\pi R=2\pi\frac{R^p}{(R-1)^m}\to 0\ (R\to\infty),$$
$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}dz\right|\leqslant\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}2\pi\rho=2\pi\frac{\rho^p}{(1-\rho)^m}\to 0\ (\rho\to 0).$$

在 (6) 式中令 $\rho\to 0$,$R\to\infty$, 即得

$$(1-e^{2p\pi i})\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m},-1\right).$$

由命题??, 容易算出, 当 $m=1$ 时

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{1+z},-1\right)=e^{(p-1)\pi i}=-e^{p\pi i};$$

当 $m>1$ 时

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m},-1\right)=-\frac{1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p)e^{p\pi i}.$$

由此即得

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\ (0<p<1),$$
$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p).$$

□

注 上面的方法可用来计算一般的积分

$$\int_0^\infty f(x)x^{p-1}dx\ (0<p<1).$$

例题 0.6 计算积分

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx.$$

解 解法一:取函数 $f(z)=\dfrac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}$, 取围道如图 3所示. 在正实轴的上沿, 有

$$f(z)=\frac{\log^2 x}{(1+x^2)^2};$$

在正实轴的下沿, 由于 $\log z=\log x+2\pi i$, 所以

$$\log^2 z=(\log x+2\pi i)^2=\log^2 x+4\pi i\log x-4\pi^2,$$

因而

$$f(z)=\frac{\log^2 x}{(1+x^2)^2}+4\pi i\frac{\log x}{(1+x^2)^2}-4\pi^2\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

f 在 Γ 所围成的域中有两个 2 阶极点 $z=\pm i$. 对 f 用留数定理, 得

$$\int_\rho^R\frac{\log^2 x}{(1+x^2)^2}dx+\int_{\gamma_R}\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}dz+\int_R^\rho\frac{\log^2 x}{(1+x^2)^2}dx$$
$$+4\pi i\int_R^\rho\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx-4\pi^2\int_R^\rho\frac{dx}{(1+x^2)^2}+\int_{\gamma_\rho}\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}dz$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2},-\mathrm{i}\right)\right]. \tag{7}$$

(7) 式左端的第一个和第三个积分互相抵消了.γ_R 和 γ_ρ 上两个积分的估计与例题 0.5一样:

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{(\log R+\mathrm{i}\theta)^2}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^2}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\pi R\frac{(\log R+2\pi)^2}{(R^2-1)^2}\to 0\ (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{(\log\rho+\mathrm{i}\theta)^2}{(1+\rho^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^2}\rho\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\pi\rho\frac{(\log\rho+2\pi)^2}{(1-\rho^2)^2}\to 0\ (\rho\to 0).$$

直接计算留数, 得

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right) = \frac{-4\pi+\pi^2\mathrm{i}}{16},\quad \mathrm{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2},-\mathrm{i}\right) = \frac{12\pi-9\pi^2\mathrm{i}}{16}.$$

在 (7) 式中令 $\rho\to 0, R\to\infty$, 并取两端的虚部, 即得

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

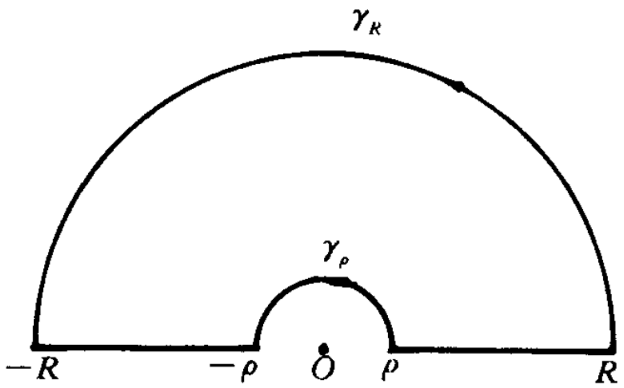

图 4

解法二: 在计算过程中我们发现, 如果取 $f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$, 则所需计算的积分将被抵消掉, 这是取 $f(z) = \frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}$ 的原因. 但若改变围道如图 4所示, 那么取 $f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$ 也是可以的. 这时,f 在 Γ 围成的域中只有一个 2 阶极点 $z=\mathrm{i}$. 当 $z\in[-R,-\rho]$ 时,$\log z = \log|x| + \mathrm{i}\pi$. 对 f 在 Γ 上应用留数定理, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{-\rho}\frac{\log|x|}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_{-R}^{-\rho}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} + \int_{\gamma_\rho}\frac{\log z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\\ &+\int_\rho^R\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R}\frac{\log z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

与上面的做法一样, 可证

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{\log z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0,\quad \lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{\log z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0,$$

而

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{8}+\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

在 (8) 式两端令 $\rho\to 0, R\to\infty$, 得

$$2\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\mathrm{i}}{4}\right),$$

两边取实部, 即得

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

与第一种方法所得的结果一样. □

0.1.3 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

我们讨论两种重要类型的有穷限积分. 一种是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

类型的积分, 其中,$R(X,Y)$ 是两个变量 X,Y 的有理函数. 这种类型的积分可以化为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 型积分来讨论. 事实上, 因为被积函数是周期为 2π 的函数, 所以

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

作变换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$, 那么

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

右端积分中的被积函数是 t 的有理函数, 这是刚讨论过的积分.

计算这种积分的另外一种方法是把它化为单位圆周上的积分. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 那么

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z.$$

右端积分中的被积函数是 z 的有理函数, 积分在单位圆周上进行, 因而可用残数定理来计算.

例题 0.7 计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}.$$

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} = 2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(\mathrm{i}+2)z^2+6\mathrm{i}z+\mathrm{i}-2}.$$

右端积分中的被积函数有两个 1 阶极点

$$a_1 = -\frac{1+2\mathrm{i}}{5},\quad a_2 = -1-2\mathrm{i},$$

但只有 a_1 在单位圆内, 被积函数在 a_1 处的留数为 $\dfrac{1}{4\mathrm{i}}$, 因而

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} = 4\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}} = \pi.$$

□

用类似的方法可以计算积分

$$\int_0^{2\pi} R(\sin n\theta, \cos n\theta)\mathrm{d}\theta,$$

这是因为

$$\int_0^{2\pi} R(\sin n\theta, \cos n\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right), \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,$$

这里,n 是整数.

如果要计算积分

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta$$

或

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,$$

则先利用公式

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{z^{n-1}}{\mathrm{i}}\mathrm{d}z$$

算出左端的积分, 然后取实部或虚部, 即得上述两个积分.

另一种重要类型的有穷限积分是

$$\int_a^b (x-a)^r(b-x)^s f(x)\mathrm{d}x,$$

这里,$-1 < r, s < 1$, 且 $r + s = -1, 0$ 或 1.

引理 0.3

设 f 在

$$G = \{z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \rho \geqslant R_0, \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha\}$$

中连续, 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = A$, 那么

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}A\alpha,$$

这里,$\gamma_\rho = \{z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha\}$, 它的方向是沿着辐角增加的方向.

证明 证明的方法与引理 0.2完全一样. □

定理 0.3

设 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $a_1, \cdots, a_n$ 外是全纯的,$a_1, \cdots, a_n$ 都不在区间 $[a, b]$ 上; 设 $-1 < r, s < 1$,$s \neq 0$, 且 $r + s$ 是整数. 如果

$$\lim_{z\to\infty} z^{r+s+1} f(z) = A \neq \infty,$$

那么

$$\int_a^b (x-a)^r(b-x)^s f(x)\mathrm{d}x = -\frac{A\pi}{\sin s\pi} + \frac{\pi}{\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(F, a_k), \tag{9}$$

这里,$F(z) = (z-a)^r(b-z)^s f(z)$.

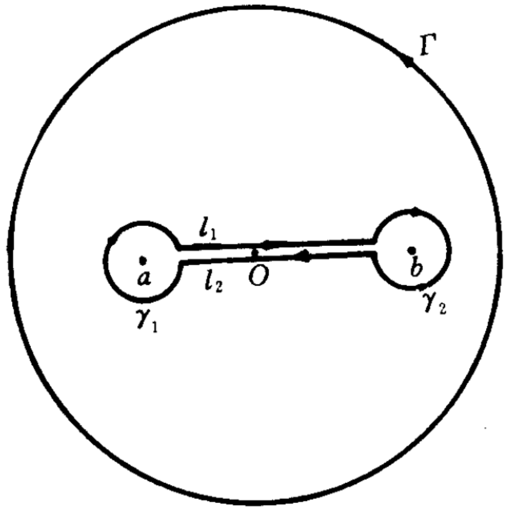

图 5

证明 联接 a 和 b, 我们证明在线段 $[a,b]$ 外部,$F(z)=(z-a)^r(b-z)^s f(z)$ 能分出单值全纯的分支.

事实上, 记 $z-a=\rho_1 e^{i\theta_1}$,$z-b=\rho_2 e^{i\theta_2}$, 当 z 沿线段 $[a,b]$ 外部的任意简单闭曲线转一圈时,$z-a$ 和 $z-b$ 的辐角都要增加 2π,$(z-a)^r(z-b)^s$ 的值将由原来的 $\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)}$ 变为

$$\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)+2\pi(r+s)i}=\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)},$$

等式成立是因为 $r+s$ 是整数, 这就是说 $F(z)$ 的值不变.

现取定在 $[a,b]$ 上岸

$$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=0$$

的一支来讨论. 取 R 充分大,ε 充分小, 使得由圆周 $\Gamma=\{z:|z|=R\}$ 的内部以及圆周 $\gamma_1=\{z:|z-a|=\varepsilon\}$ 和圆周 $\gamma_2=\{z:|z-b|=\varepsilon\}$ 的外部所构成的域 D 包含 f 的全部奇点 $a_1,\cdots,a_n$(见图 5). 在域 D 上对函数 F 用留数定理, 得

$$\int_\Gamma F(z)dz+\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{l_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz+\int_{l_2}F(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F,a_k), \tag{10}$$

这里,l_1,l_2 分别是 $[a,b]$ 上、下岸上的一段. 当 $z\in l_1$ 时,$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=0$, 所以

$$(z-a)^r=e^{r\log(z-a)}=e^{r\log|z-a|}=e^{r\log(x-a)}=(x-a)^r,$$
$$(b-z)^s=e^{s\log(b-z)}=e^{s\log|b-z|}=e^{s\log(b-x)}=(b-x)^s.$$

当 $z\in l_2$ 时,$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=-2\pi$, 所以,

$$(z-a)^r=(x-a)^r,$$
$$(b-z)^s=e^{s(\log(b-x)+i\arg(b-z))}=e^{-2s\pi i}(b-x)^s.$$

于是,(10) 式可写为

$$\int_\Gamma F(z)dz+\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz+(1-e^{-2s\pi i})\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}(x-a)^r(b-x)^s f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F,a_k).$$

因为 -1 的辐角取 π, 所以

$$\lim_{z\to\infty}zF(z)=\lim_{z\to\infty}z(z-a)^r(b-z)^s f(z)=e^{-s\pi i}\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=e^{-s\pi i}A,$$

故由引理 0.3得

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma F(z)dz=2\pi i e^{-s\pi i}A.$$

由于 $r+1>0, s+1>0$, 所以

$$\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=\lim_{z\to a}(z-a)^{r+1}(b-z)^{s}f(z)=0,$$
$$\lim_{z\to b}(b-z)F(z)=\lim_{z\to b}(z-a)^{r}(b-z)^{s+1}f(z)=0,$$

故由引理 0.2得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1}F(z)\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2}F(z)\mathrm{d}z=0.$$

在 (0.1.3) 式中令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$, 即得

$$\int_a^b(x-a)^r(b-x)^sf(x)\mathrm{d}x=-\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}A}{1-\mathrm{e}^{-2s\pi\mathrm{i}}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-2s\pi\mathrm{i}}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,a_k)=-\frac{\pi A}{\sin s\pi}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,a_k).$$

这就是要证明的公式 (9). □

例题 0.8 计算积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$$

解 题中,$r=-\dfrac{2}{3},s=-\dfrac{1}{3},r+s=-1$, 是一个整数,$f(z)\equiv 1$, 所以

$$\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=1.$$

由公式 (9) 即得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi.$$

□

例题 0.9 计算积分

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

解 题中,$r=\dfrac{2}{3},s=\dfrac{1}{3},r+s=1,f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^3}$, 因而

$$\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{(1+z)^3}=0.$$

f 在全平面上只有一个 3 阶极点 $z=-1$, 于是由公式 (9) 即得

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(1+z)^3},-1\right).\tag{11}$$

根据命题??, 有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(1+z)^3},-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}.\tag{12}$$

易知

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}=-\frac{2}{9}z^{-\frac{4}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{9}z^{-\frac{1}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(1-z)^{-\frac{5}{3}}z^{\frac{2}{3}},$$

为了计算它在 $z=-1$ 处的值, 注意当 $z=-1$ 时,$\arg z=\pi,\arg(1-z)=0$, 于是

$$\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}=-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}\sqrt[3]{2}-\frac{4}{9}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}2^{-\frac{5}{3}}.$$

代入 (12) 式后再代入 (11) 式, 即得

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt[3]{2}\pi}{18\sqrt{3}}.$$

□

0.1.4 两个特殊的积分

上面只是大致归纳了一下用残数定理计算积分的类型, 但它适用的范围还是相当有限的. 这里介绍的两个积分便不能用第 2 小节中的方法来计算.

(1) Fresnel 积分 $\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$

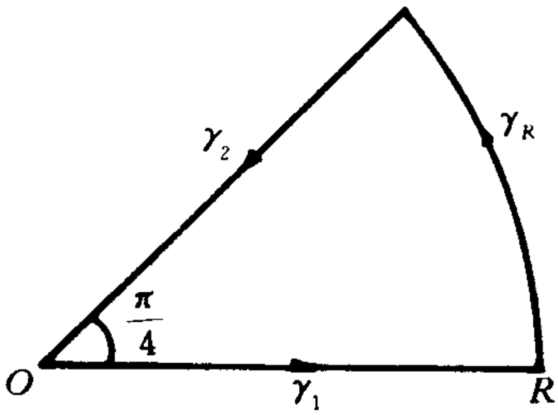

图 6

取函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$, 取围道如图 6所示. 因为 f 是整函数, 由 Cauchy 积分定理, 有

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0. \tag{13}$$

当 $z\in\gamma_R$ 时,$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, 所以

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}|=\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

于是, 当 $R\to\infty$ 时, 有

$$\left|\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2})\to 0.$$

当 $z\in\gamma_2$ 时,$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},0\leqslant r\leqslant R$, 所以

$$\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^R\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

在 (13) 式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}. \tag{14}$$

这里, 我们已经利用了已知的概率积分

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

在 (14) 式两边分别取实部和虚部, 即得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

大家不难利用计算这两个积分的方法算出

$$\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x\ (n>1),$$

和

$$\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x\ (n>1).$$

(2) Poisson 积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x\ (a>0)$

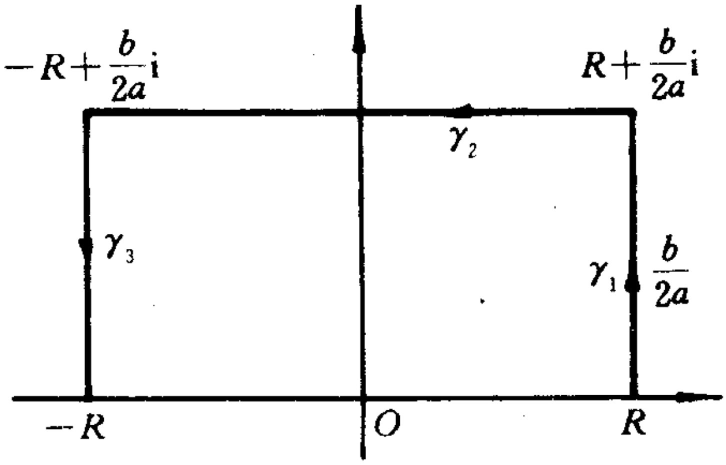

图 7

取函数 $f(z)=\mathrm{e}^{-az^2}$, 取围道如图 7所示. 因为 f 是整函数, 由 Cauchy 积分定理, 有

$$\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z=0. \tag{15}$$

当 $z\in\gamma_1$ 时,$z=R+\mathrm{i}y, 0\leqslant y\leqslant\dfrac{b}{2a}$, 所以

$$\left|\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\frac{b}{2a}}\mathrm{e}^{-a(R^2-y^2)}\mathrm{d}y\leqslant\mathrm{e}^{-aR^2}\cdot\mathrm{e}^{a\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\cdot\frac{b}{2a}\to0\ (R\to\infty).$$

同样道理, 有

$$\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\to0\ (R\to\infty).$$

当 $z\in\gamma_2$ 时,$z=x+\dfrac{b}{2a}\mathrm{i}, -R\leqslant x\leqslant R$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z&=-\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-a\left(x^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}x\mathrm{i}\right)}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-bx\mathrm{i}}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在 (15) 式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=0.$$

由概率积分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

所以

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$