

## 0.1 不变因子

### 定义 0.1 ( $k$ 阶行列式因子)

设  $A(\lambda)$  是  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵,  $k$  是小于等于  $n$  的正整数. 如果  $A(\lambda)$  有一个  $k$  阶子式不为零, 则定义  $A(\lambda)$  的  $k$  阶行列式因子  $D_k(\lambda)$  为  $A(\lambda)$  的所有  $k$  阶子式的最大公因子 (首一多项式). 如果  $A(\lambda)$  的所有  $k$  阶子式都等于零, 则定义  $A(\lambda)$  的  $k$  阶行列式因子  $D_k(\lambda)$  为零.

### 引理 0.1

设  $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_r(\lambda)$  是  $A(\lambda)$  的非零行列式因子, 则

$$D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

**证明** 设  $A_{i+1}$  是  $A(\lambda)$  的任一  $i+1$  阶子式, 即在  $A(\lambda)$  中任意取出  $i+1$  行及  $i+1$  列组成的行列式. 将这个行列式按某一行展开, 则它的每一个展开项都是一个多项式与一个  $i$  阶子式的乘积. 由于  $D_i(\lambda)$  是所有  $i$  阶子式的公因子, 因此  $D_i(\lambda) \mid A_{i+1}$ . 而  $D_{i+1}(\lambda)$  是所有  $i+1$  阶子式的最大公因子, 因此  $D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda)$  对一切  $i = 1, 2, \dots, r-1$  成立.  $\square$

### 定义 0.2 (不变因子)

设  $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_r(\lambda)$  是  $\lambda$ -矩阵  $A(\lambda)$  的非零行列式因子, 则

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= D_1(\lambda), \\ g_2(\lambda) &= D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \\ &\dots \\ g_r(\lambda) &= D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda) \end{aligned}$$

称为  $A(\lambda)$  的不变因子.

**笔记** 由不变因子和行列式因子的定义可知, 不变因子和行列式因子相互唯一确定.

**注** 以后特征矩阵  $\lambda I - A$  的行列式因子和不变因子均简称为  $A$  的行列式因子和不变因子.

### 命题 0.1

求下列矩阵的行列式因子和不变因子:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r(\lambda) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $d_i(\lambda)$  为非零首一多项式且  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ).

**解**  $A(\lambda)$  的行列式因子为

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= d_1(\lambda), \\ D_2(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda), \\ &\dots\dots\dots \\ D_r(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda). \end{aligned}$$

$$D_{r+1}(\lambda) = \cdots = D_n(\lambda) = 0.$$

根据不变因子的定义可知  $A(\lambda)$  的不变因子分别为:  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0$ . □

### 定理 0.1

相抵的  $\lambda$ -矩阵有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子. ♡

**证明** 我们只需证明行列式因子在三类初等变换下不改变就可以了. 对第一类初等变换, 交换  $\lambda$ -矩阵  $A(\lambda)$  的任意两行 (列), 显然  $A(\lambda)$  的  $i$  阶子式最多改变一个符号, 因此行列式因子不改变.

对第二类初等变换,  $A(\lambda)$  的  $i$  阶子式与变换后矩阵的  $i$  阶子式最多差一个非零常数, 因此行列式因子也不改变.

对第三类初等变换, 记变换后的矩阵为  $B(\lambda)$ , 则  $B(\lambda)$  与  $A(\lambda)$  的  $i$  阶子式可能出现以下 3 种情形: 子式完全相同;  $B(\lambda)$  子式中的某一行 (列) 等于  $A(\lambda)$  中相应子式的同一行 (列) 加上该子式中某一行 (列) 与某个多项式之积;  $B(\lambda)$  子式中的某一行 (列) 等于  $A(\lambda)$  中相应子式的同一行 (列) 加上不在该子式中的某一行 (列) 与某个多项式之积. 在前面两种情形, 行列式的值不改变, 因此不影响行列式因子. 现在来讨论第三种情形. 设  $B_i$  为  $B(\lambda)$  的  $i$  阶子式, 相应的  $A(\lambda)$  的  $i$  阶子式记为  $A_i$ , 则由行列式的性质得

$$B_i = A_i + f(\lambda)\tilde{A}_i,$$

其中  $\tilde{A}_i$  由  $A(\lambda)$  中的  $i$  行与  $i$  列组成, 因此它与  $A(\lambda)$  的某个  $i$  阶子式最多差一个符号.  $f(\lambda)$  是乘以某一行 (列) 的那个多项式, 于是  $A(\lambda)$  的行列式因子  $D_i(\lambda) \mid A_i, D_i(\lambda) \mid \tilde{A}_i$ , 故  $D_i(\lambda) \mid B_i$ . 这说明,  $D_i(\lambda)$  可整除  $B(\lambda)$  的所有  $i$  阶子式, 因此  $D_i(\lambda)$  可整除  $B(\lambda)$  的  $i$  阶行列式因子  $\tilde{D}_i(\lambda)$ . 但  $B(\lambda)$  也可用第三类初等变换变成  $A(\lambda)$ , 于是  $\tilde{D}_i(\lambda) \mid D_i(\lambda)$ . 由于  $D_i(\lambda)$  及  $\tilde{D}_i(\lambda)$  都是首一多项式, 因此必有  $D_i(\lambda) = \tilde{D}_i(\lambda)$ . □

### 推论 0.1

设  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵  $A(\lambda)$  的法式为

$$\Lambda = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中  $d_i(\lambda)$  是非零首一多项式且  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \cdots, r-1$ ), 则  $A(\lambda)$  的不变因子组为  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ . 特别地, 法式和不变因子之间相互唯一确定. ♡

**证明** 首先, 由定理 0.1 可知,  $A(\lambda)$  与  $\Lambda$  有相同的不变因子. 再由命题 0.1 可知,  $\Lambda$  的不变因子为  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0$ , 从而它们也是  $A(\lambda)$  的不变因子. 故  $A(\lambda)$  的法式可以唯一确定其不变因子.

接着, 设  $A(\lambda)$  的不变因子为  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ , 由定理 ??, 可设  $A(\lambda)$  相抵于对角阵

$$B(\lambda) = \text{diag}\{d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_r(\lambda); 0, \cdots, 0\}, \quad (1)$$

其中  $d'_i(\lambda)$  是非零首一多项式且  $d'_i(\lambda) \mid d'_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \cdots, r-1$ ). 再由命题 0.1 可知,  $B(\lambda)$  的不变因子为  $d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_r(\lambda)$ . 由定理 0.1 可知,  $A(\lambda)$  和  $B(\lambda)$  的不变因子相同, 故根据  $d_i(\lambda), d'_i(\lambda)$  的整除关系, 我们就有

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= d'_1(\lambda), \\ d_2(\lambda) &= d'_2(\lambda), \\ &\cdots \cdots \cdots \\ d_r(\lambda) &= d'_r(\lambda). \end{aligned}$$

因此  $A(\lambda)$  的相抵于对角阵

$$\Lambda = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中  $d_i(\lambda)$  是非零首一多项式且  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \cdots, r-1$ ). 上式也就是  $A(\lambda)$  的法式. 故  $A(\lambda)$  的不变因子可以唯一确定其法式. □

**推论 0.2**

设  $A(\lambda), B(\lambda)$  为  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵, 则  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  相抵当且仅当它们有相同的法式.

♡

**证明** 若  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  有相同的法式, 显然它们相抵. 若  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  相抵, 由 **定理 0.1** 知  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  有相同的不变因子, 从而由 **推论 0.1** 可知,  $A(\lambda)$  与  $B(\lambda)$  有相同的法式.  $\square$

**推论 0.3**

$n$  阶  $\lambda$ -矩阵  $A(\lambda)$  的法式与初等变换的选取无关.

♡

**证明** 设  $\Lambda_1, \Lambda_2$  是  $A(\lambda)$  通过不同的初等变换得到的两个法式, 则  $\Lambda_1$  与  $\Lambda_2$  相抵, 由 **推论 0.2** 可得  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ .  $\square$

**定理 0.2**

数域  $\mathbb{K}$  上  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  相似的充分必要条件是它们的特征矩阵  $\lambda I - A$  与  $\lambda I - B$  具有相同的行列式因子或不变因子.

♡

**证明** 显然不变因子与行列式因子之间相互唯一确定. 再由 **定理 ??**、**推论 0.2** 及 **推论 0.1** 即得结论.  $\square$

**推论 0.4**

设  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$  是两个数域,  $A, B$  是  $\mathbb{F}$  上的两个矩阵, 则  $A$  与  $B$  在  $\mathbb{F}$  上相似的充分必要条件是它们在  $\mathbb{K}$  上相似.

♡



**笔记** 这个推论告诉我们: **矩阵的相似关系在基域扩张下不变**. 事实上, 这个推论的证明过程也说明: **矩阵的不变因子在基域扩张下也不变**. 此即即 **矩阵的相似关系与数域无关**.

**证明** 若  $A$  与  $B$  在  $\mathbb{F}$  上相似, 由于  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ , 它们当然在  $\mathbb{K}$  上也相似. 反之, 若  $A$  与  $B$  在  $\mathbb{K}$  上相似, 则  $\lambda I - A$  与  $\lambda I - B$  在  $\mathbb{K}$  上有相同的不变因子, 也就是说它们有相同的法式. 由 **推论 0.3** 可知, 求法式与初等变换的选取无关. 注意到  $\lambda I - A$  与  $\lambda I - B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $\lambda$ -矩阵, 故可用  $\mathbb{F}$  上  $\lambda$ -矩阵的初等变换就能将它们变成法式, 其中只涉及  $\mathbb{F}$  中数的加、减、乘、除运算以及  $\mathbb{F}$  上的多项式的加、减、乘、数乘运算, 最后得到法式中的不变因子  $d_i(\lambda)$  仍是  $\mathbb{F}$  上的多项式. 这就是说存在  $\mathbb{F}$  上的可逆  $\lambda$ -矩阵  $P(\lambda), Q(\lambda), M(\lambda), N(\lambda)$ , 使

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = M(\lambda)(\lambda I - B)N(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\},$$

从而

$$M(\lambda)^{-1}P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda)N(\lambda)^{-1} = \lambda I - B,$$

即  $\lambda I - A$  与  $\lambda I - B$  在  $\mathbb{F}$  上相抵, 由 **定理 ??** 可得  $A$  与  $B$  在  $\mathbb{F}$  上相似.  $\square$