0.1 映射与集合的基数

0.1.1 映射

定义 0.1 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f, 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f : A \to B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subset B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

♣

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) 对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应; 并且 f 的一个像可以存在多个原像.

(2) $f(A) \subset B$, 不一定有 $f(A) = B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad 和 \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subset 2^A$, 定义 $\phi : \mathcal{D} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 0.2 (单射、满射和双射)

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为**单射**.

若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \varnothing, \forall y \in B$, 则称 f 为**满射** (或**映上的**).

既单且满的映射, 称为**一一映射** (或**双射**).

♣

定义 0.3 (逆映射)

设 $f : A \to B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \to A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的**逆映射**.

♣

笔记 逆映射是反函数概念的推广, 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

定义 0.4 (复合映射和映射的延拓)

设映射 $f : A \to B, g : B \to C$, 定义 $g \circ f : A \to C$ 为

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 f 与 g 的**复合映射**.

设映射 $f : A \to B, A_0 \subset A$, 若 $g : A_0 \to B$ 满足

$$g(x) = f(x), \quad x \in A_0$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的限制, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**.

♣

命题 0.1

设一列映射 $f_i : A_i \to A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.

(2) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.

(3) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

证明

(1)

(2)

(3)

□

定义 0.5 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数** (**示性函数**) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 0.2 (特征函数的基本性质)

(1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$;

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$;

(3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

证明 证明都是显然的. □

命题 0.3 (映射的基本性质)

对于映射 $f : C \to D, A \subset C, B \subset D$, 下列事实成立:

(i) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$;

(ii) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$;

(iii) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时, "=" 成立;

(iv) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$, 当且仅当 f 为满射时, "=" 成立;

$A \subset f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时, "=" 成立;

(v) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

笔记 (iv) 中第一条的直观理解是:B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是:$C - A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$(即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subset f(f^{-1}(B))$, 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subset A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾. □

定义 0.6

设 A_0 是集合 A 的子集. 由等式 $i(x) = x\,(\forall x \in A_0)$ 定义的映射 $i : A_0 \to A$ 称为 A_0 到 A 中的**嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是一一映射.

又若映射 $f : A_0 \to B$ 与映射 $g : A \to B$ 满足 $gi = f$, 即 $g(x) = f(x)\,(\forall x \in A_0)$, 则称 g 为 f 的**开拓**, f 为 g 在 A_0 上的**限制**, 记为 $f = g|_{A_0}$. 即图 1为交换图.

♣

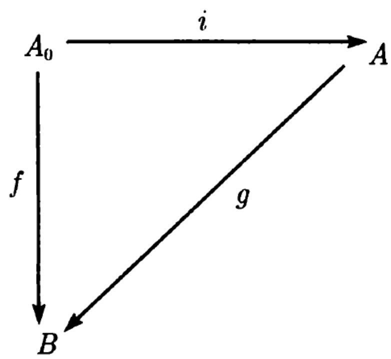

图 1

0.1.2 集合的对等

定义 0.7 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$. 规定 $\varnothing \sim \varnothing$.

笔记 A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 0.1

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

(1) (反身性)$A \sim A$;

(2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

证明 证明是显然的. □

命题 0.4

(1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$.

证明

(1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f : A \to C$ 和 $g : B \to D$. 于是令

$$\varphi : A \times B \to C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall (a, b) \in A \times B$, 由 $f(a) \in C, g(b) \in D$ 可知 $(f(a), g(b)) \in C \times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f, g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 0.1 自然数集 $\mathbb{N} \sim$ 正偶数集 $\sim$ 正奇数集 $\sim$ 整数集 $\mathbb{Z}$.

证明 正偶数集 $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 正奇数集 $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

例题 0.2 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

证明 $f(x) = \tan \dfrac{\pi}{2} x$. □

例题 0.3 {去掉一点的圆周} $\sim \mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 2, 设圆周为 C, 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点 P) 的直线表示实轴 $\mathbb{R}$. 对于 $C - \{P\}$ 上的每一点 c, 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x. 建立一一对应: $s : \mathbb{R} \to C - \{P\}$ 为 $s(x) = c$. (点 P 对应 ∞)

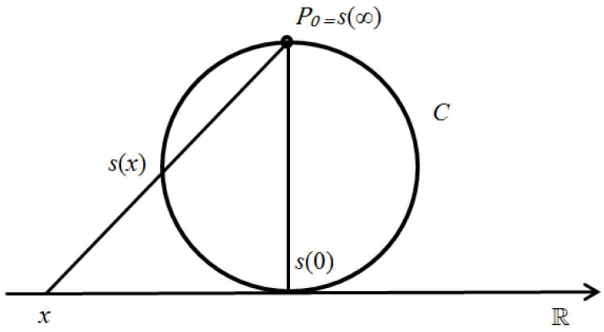

图 2: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 0.1

设 A, B 为非空集, 若 $f: A \to B, g: B \to A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

(i) $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$;

(ii) $A_1 \cap A_2 = \varnothing, B_1 \cap B_2 = \varnothing$;

(iii) $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

证明 作集族

$$\Gamma = \{E \subset A : E \cap g(B - f(E)) = \varnothing\}$$

Γ 中的元称为 A 中的隔离集. 令 $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$, 则 $A_1 \in \Gamma$. 实际上, 对任意的 $E \in \Gamma$, 都有 $E \subset A_1$, 再由 $E \cap g(B - f(E)) = \varnothing$ 知

$$E \cap g(B - f(A_1)) = \varnothing$$

从而

$$A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B - f(E))] = \varnothing$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1 = f(A_1), B_2 = B - B_1, A_2 = g(B_2)$, 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \varnothing$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$, 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾. □

0.1.3 集合的基数 (势)

定义 0.8 (集合的基数 (势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的**基数或势相同**, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

笔记 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 0.2

(1) 自反性:$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$.

(2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.

(3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$,$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$.

证明 由定理 0.1及集合的基数 (势) 的定义可直接得到. □

定义 0.9

对于集合 A, B, 若有 $B_0 \subset B$,$A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. 同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.

命题 0.5 (映射与基数之间的关系)

(1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;

(2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$;

(3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1)

(2)

(3)

□

定理 0.3 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:

(1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.

(2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1) 由题设存在单射 $f : A \to B, g : B \to A$, 利用引理 0.1可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 注意到 $f : A_1 \to B_1, g^{-1} : A_2 \to B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F : A \to B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$.

(2) 由定义 0.8和定义 0.9可知 (2)⇔(1).

□

例题 0.4 $[-1,1]\sim\mathbb{R}$.

证明 由例题 0.2可知, $\mathbb{R}\sim(-1,1)\subset[-1,1]$; 又 $[-1,1]\sim[-1,1]\subset\mathbb{R}$. 由Bernstein 定理 (1)可知, $[-1,1]\sim\mathbb{R}$. □

定理 0.4

对于集合 $A,B,\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立.

证明 由定义 0.9可知, 若 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 则 A 与 B 对等, 另外两个不会成立; 假设 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 同时成立, 则存在 $B_0\subset B,A_0\subset A$, 使得 $A\sim B_0,B\sim A_0$. 使用Bernstein 定理 (1)得出 $A\subset B$, 进而 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 显然矛盾, 证毕. □

定义 0.10 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n, 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}}=n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\varnothing}}=0$.

笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 0.5

设 A 是非空集合, 则

(1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.

(2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.

笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设 $\overline{\overline{A}}=n$, 用数学归纳法证明, $n=1$, 显然. 假设 $n=k$ 时, 结论成立.

当 $n=k+1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A\sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi:A\to A_0$. 下面分两种情况:

(i) $\exists a\in A$, 使得 $\varphi(a)=a$.

令 $A_1=A-\{a\}$, $A_2=A_0-\{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}}=k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1\sim A_2$. 这与假设矛盾.

(ii) $\forall a\in A$, 都有 $\varphi(a)\neq a$.

A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0\in A$, $x_0\notin A_0$. 令

$$A_3=A-\{x_0\},\quad A_4=A_0-\{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0\notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0)\in A_0\subset A,\quad \varphi(x_0)\neq x_0$$

故 $\varphi(x_0)\in A-\{x_0\}=A_3$, 而 $\varphi(x_0)\notin A_0-\{\varphi(x_0)\}=A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}}=k$, $\varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3\sim A_4$. 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$. 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1. 因为 A 是无限集, 集 $A-\{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A-\{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样, $A-\{a_1,a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$, 记余集为 $\hat{A}=A-\{a_n|n=1,2,\cdots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2,a_3,\cdots\}\cup\hat{A}=\tilde{A}$$

现作 A 与 $\tilde{A}$ 之间的映射 φ:

$$\varphi(a_i)=a_{i+1},\quad i=1,2,\cdots$$
$$\varphi(x)=x,\quad x\in\hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 $\tilde{A}$ 上的一一对应, 证毕.

再证 (1)(2) 的充分性.

(1) 的充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 的充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 是不是有限集. 故 A 一定是无限集. □