

## 0.1 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

### 定理 0.1

线性变换  $\varphi$  的特征值  $\lambda_1$  的度数等于  $\varphi$  的 Jordan 标准型中属于特征值  $\lambda_1$  的 Jordan 块的个数,  $\lambda_1$  的重数等于所有属于特征值  $\lambda_1$  的 Jordan 块的阶数之和.



**证明** 设  $V$  是  $n$  维复线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换. 设  $\varphi$  的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \quad (1)$$

定理??告诉我们, 存在  $V$  的一组基  $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r_1}; e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2r_2}; \dots; e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kr_k}\}$ , 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

上式中每个  $J_i$  是相应于初等因子  $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$  的 Jordan 块, 其阶正好为  $r_i$ . 令  $V_i$  是由基向量  $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir_i}$  生成的子空间, 则

$$\begin{aligned} \varphi(e_{i1}) &= \lambda_i e_{i1}, \\ \varphi(e_{i2}) &= e_{i1} + \lambda_i e_{i2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(e_{ir_i}) &= e_{i,r_i-1} + \lambda_i e_{ir_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

这表明  $\varphi(V_i) \subseteq V_i$ , 即  $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是  $\varphi$  的不变子空间. 显然我们有

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

线性变换  $\varphi$  限制在  $V_1$  上 (仍记为  $\varphi$ ) 便成为  $V_1$  上的线性变换. 这个线性变换在基  $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r_1}\}$  下的表示矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

注意到  $J_1$  的特征值全为  $\lambda_1$ , 并且  $\lambda_1 I - J_1$  的秩等于  $r_1 - 1$ , 故  $J_1$  只有一个线性无关的特征向量, 不妨选为  $e_{11}$ . 显然  $e_{11}$  也是  $\varphi$  作为  $V$  上线性变换关于特征值  $\lambda_1$  的特征向量. 不失一般性, 不妨设在  $\varphi$  的初等因子组即(1)式中

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s, \quad \lambda_i \neq \lambda_1 (i = s+1, \dots, k),$$

则  $J_1, \dots, J_s$  都以  $\lambda_1$  为特征值, 且相应于每一块有且只有一个线性无关的特征向量. 相应的特征向量可取为

$$e_{11}, e_{21}, \dots, e_{s1}, \quad (3)$$

显然这是  $s$  个线性无关的特征向量. 如果  $\lambda_i \neq \lambda_1$ , 则容易看出  $r(\lambda_1 I - J_i) = r_i$ , 于是

$$r(\lambda_1 I - J) = \sum_{i=1}^k r(\lambda_1 I - J_i) = (r_1 - 1) + \dots + (r_s - 1) + r_{s+1} + \dots + r_k = n - s.$$

因此  $\varphi$  关于特征值  $\lambda_1$  的特征子空间  $V_{\lambda_1}$  的维数等于  $n - r(\lambda_1 I - J) = s$ , 从而特征子空间  $V_{\lambda_1}$  以(3)式中的向量为一组基. 又  $\lambda_1$  是  $\varphi$  的  $r_1 + r_2 + \dots + r_s$  重特征值, 因此  $\lambda_1$  的重数与度数之差等于

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_s) - s.$$

□

**定义 0.1 (循环子空间)**

设  $V_0$  是线性空间  $V$  的  $r$  维子空间,  $\psi$  是  $V$  上的线性变换. 若存在  $\alpha \in V_0$ , 使  $\{\alpha, \psi(\alpha), \dots, \psi^{r-1}(\alpha)\}$  构成  $V_0$  的一组基, 则称  $V_0$  为关于线性变换  $\psi$  的**循环子空间**.

♣

**定义 0.2 (根子空间)**

设  $\lambda_0$  是  $n$  维复线性空间  $V$  上线性变换  $\varphi$  的特征值, 则

$$R(\lambda_0) = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_0 I)^n(v) = 0\}$$

构成了  $V$  的一个子空间, 称为属于特征值  $\lambda_0$  的**根子空间**.

♣

**定理 0.2**

设  $\varphi$  是  $n$  维复线性空间  $V$  上的线性变换.

(1) 若  $\varphi$  的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

则  $V$  可分解为  $k$  个不变子空间的直和:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k, \quad (4)$$

其中  $V_i$  是维数等于  $r_i$  的关于  $\varphi - \lambda_i I$  的循环子空间;

(2) 若  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  是  $\varphi$  的全体不同特征值, 则  $V$  可分解为  $s$  个不变子空间的直和:

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \dots \oplus R(\lambda_s),$$

其中  $R(\lambda_i)$  是  $\lambda_i$  的根子空间,  $R(\lambda_i)$  的维数等于  $\lambda_i$  的重数, 且每个  $R(\lambda_i)$  又可分解为(4)式中若干个  $V_j$  的直和.

♡

**证明** 在定理 0.1 的证明的基础上, 现在再来看  $J_1$  所对应的子空间  $V_1$ , 由 (2) 式中诸等式可知

$$(\varphi - \lambda_1 I)(e_{1r_1}) = e_{1, r_1-1}, \dots, (\varphi - \lambda_1 I)(e_{12}) = e_{11}, (\varphi - \lambda_1 I)(e_{11}) = 0,$$

因此, 若记  $\alpha = e_{1r_1}$ ,  $\psi = \varphi - \lambda_1 I$ , 则

$$\psi(\alpha) = e_{1, r_1-1}, \psi^2(\alpha) = e_{1, r_1-2}, \dots, \psi^{r_1-1}(\alpha) = e_{11}, \psi^{r_1}(\alpha) = 0.$$

也就是说

$$\{\alpha, \psi(\alpha), \psi^2(\alpha), \dots, \psi^{r_1-1}(\alpha)\}$$

构成了  $V_1$  的一组基.

上面的事实说明, 每个 Jordan 块  $J_i$  对应的子空间  $V_i$  是一个循环子空间. 把属于同一个特征值, 比如属于  $\lambda_1$  的所有循环子空间加起来构成  $V$  的一个子空间:

$$R(\lambda_1) = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

若  $v \in R(\lambda_1)$ , 则不难算出  $(\varphi - \lambda_1 I)^s(v) = 0$ , 其中

$$s = \dim R(\lambda_1) = r_1 + \dots + r_s.$$

事实上, 我们可以证明

$$R(\lambda_1) = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_1 I)^n(v) = 0\}. \quad (5)$$

为证明 (5) 式成立, 设  $U = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_1 I)^n(v) = 0\}$ , 则由上面的分析知道,  $R(\lambda_1) \subseteq U$ . 另一方面, 任取  $v \in U$ , 设  $v = v_1 + v_2$ , 其中  $v_1 \in R(\lambda_1)$ ,  $v_2 \in V_{s+1} \oplus \dots \oplus V_k$ . 因为  $(\lambda - \lambda_1)^n$  与  $(\lambda - \lambda_{s+1})^n \dots (\lambda - \lambda_k)^n$  互素, 故存在多项式

$p(\lambda), q(\lambda)$ , 使

$$(\lambda - \lambda_1)^n p(\lambda) + (\lambda - \lambda_{s+1})^n \cdots (\lambda - \lambda_k)^n q(\lambda) = 1.$$

将  $\lambda = \varphi$  代入上式并作用在  $\mathbf{v}$  上可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= p(\varphi)(\varphi - \lambda_1 \mathbf{I})^n(\mathbf{v}) + q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}) \\ &= q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_1) + q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_2) \\ &= q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_1) \in R(\lambda_1). \end{aligned}$$

这就证明了 (5) 式.

上面的结果表明: 特征值  $\lambda_0$  的根子空间可表示为若干个循环子空间的直和, 每个循环子空间对应于一个 Jordan 块. 虽然我们前面的讨论是对特征值  $\lambda_1$  进行的, 其实对任一特征值  $\lambda_i$  均适用.  $\square$

### 命题 0.1

证明: 复数域上的方阵  $A$  必可分解为两个对称阵的乘积.

**证明** 设  $P$  是非异阵且使  $P^{-1}AP = J$  为  $A$  的 Jordan 标准型, 于是  $A = PJP^{-1}$ . 设  $J_i$  是  $J$  的第  $i$  个 Jordan 块, 则

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & & & \lambda_i \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

即  $J_i$  可分解为两个对称阵之积. 因此  $J$  也可以分解为两个对称阵之积, 记为  $S_1, S_2$ , 于是

$$A = PJP^{-1} = PS_1S_2P^{-1} = (PS_1P')(P^{-1})'S_2P^{-1}.$$

显然  $PS_1P'$  和  $(P^{-1})'S_2P^{-1}$  都是对称矩阵, 故  $A$  必可分解为两个对称阵的乘积.  $\square$

**例题 0.1** 已知

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算  $A^k$ .

**解** 用初等变换把  $\lambda I - A$  化为对角  $\lambda$ -矩阵并求出它的初等因子组为

$$(\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2.$$

因此,  $A$  的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = J^k,$$

故先计算  $J^k$ . 注意  $J$  是分块对角阵, 它的  $k$  次方等于将各对角块  $k$  次方, 因此

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k+1 & k & 0 & 0 \\ -4k & -2k+1 & 0 & 0 \\ 6k & k & k+1 & k \\ -14k & -5k & -k & -k+1 \end{pmatrix}.$$

□

### 定理 0.3 (Jordan-Chevalley 分解)

设  $A$  是  $n$  阶复矩阵, 则  $A$  可分解为  $A = B + C$ , 其中  $B, C$  适合下面条件:

- (1)  $B$  是一个可对角化矩阵;
- (2)  $C$  是一个幂零阵;
- (3)  $BC = CB$ ;
- (4)  $B, C$  均可表示为  $A$  的多项式.

不仅如此, 上述满足条件 (1) (3) 的分解是唯一的.

♡

**证明** 先对  $A$  的 Jordan 标准型  $J$  证明结论. 设  $A$  的全体不同特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  且

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中  $J_i$  是属于特征值  $\lambda_i$  的根子空间对应的块, 其阶设为  $m_i$ . 显然对每个  $i$  均有  $J_i = M_i + N_i$ , 其中  $M_i = \lambda_i I$  是对角阵,  $N_i$  是幂零阵且  $M_i N_i = N_i M_i$ . 令

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ & & & M_s \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ & & & N_s \end{pmatrix},$$

则  $J = M + N$ ,  $MN = NM$ ,  $M$  是对角阵,  $N$  是幂零阵.

因为  $(J_i - \lambda_i I)^{m_i} = O$ , 所以  $J_i$  适合多项式  $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ . 而  $\lambda_i$  互不相同, 因此多项式  $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$  两两互素. 由中国剩余定理, 存在多项式  $g(\lambda)$  满足条件

$$g(\lambda) = h_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{m_i} + \lambda_i,$$

对所有  $i = 1, 2, \dots, s$  成立 (这里  $h_i(\lambda)$  也是多项式). 代入  $J_i$  得到

$$g(J_i) = h_i(J_i)(J_i - \lambda_i I)^{m_i} + \lambda_i I = \lambda_i I = M_i.$$

于是

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(J_1) & & & \\ & g(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{pmatrix} = M.$$

又因为  $N = J - M = J - g(J)$ , 所以  $N$  也是  $J$  的多项式.

现考虑一般情形, 设  $P^{-1}AP = J$ , 则  $A = PJP^{-1} = P(M + N)P^{-1}$ . 令  $B = PMP^{-1}$ ,  $C = PNP^{-1}$ , 则  $B$  是可对角化矩阵,  $C$  是幂零阵,  $BC = CB$  并且

$$g(A) = g(PJP^{-1}) = Pg(J)P^{-1} = PMP^{-1} = B,$$

从而  $C = A - g(A)$ .

最后证明唯一性. 假设  $A$  有另一满足条件 (1) (3) 的分解  $A = B_1 + C_1$ , 则  $B - B_1 = C_1 - C$ . 由  $B_1C_1 = C_1B_1$  不难验证  $AB_1 = B_1A$ ,  $AC_1 = C_1A$ . 因为  $B = g(A)$ , 故  $BB_1 = B_1B$ . 同理  $CC_1 = C_1C$ . 设  $C^r = O$ ,  $C_1^t = O$ , 用二项式定理即知  $(C_1 - C)^{r+t} = O$ . 于是

$$(B - B_1)^{r+t} = (C_1 - C)^{r+t} = O.$$

因为  $BB_1 = B_1B$ , 它们都是可对角化矩阵, 由命题??知它们可同时对角化, 即存在可逆阵  $Q$ , 使  $Q^{-1}BQ$  和  $Q^{-1}B_1Q$  都是对角阵. 注意到

$$(Q^{-1}BQ - Q^{-1}B_1Q)^{r+t} = (Q^{-1}(B - B_1)Q)^{r+t} = Q^{-1}(B - B_1)^{r+t}Q = O,$$

两个对角阵之差仍是一个对角阵, 这个差的幂要等于零矩阵, 则这两个矩阵必相等, 由此即得  $B = B_1$ , 从而  $C = C_1$ .

□