0.1 练习

练习 0.1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(A) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 A 成立:$f(PAP^{-1}) = f(A)$. 证明: 存在非零常数 c, 使得 $P'P = cI_n$.

证明 证法一: 由假设知 $f(A) = \mathrm{tr}(AA')$, 因此

$$f(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P') = \mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \mathrm{tr}(AA').$$

以下设 $P'P = (c_{ij})$,$(P'P)^{-1} = (d_{ij})$. 注意 $P'P$ 是对称矩阵, 后面要用到. 令 $A = E_{ij}$, 其中 $1 \le i, j \le n$. 并将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned}(P'P)A(P'P)^{-1}A' &= (P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji} \\ &= \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{jj} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} c_{1i}d_{jj} \\ c_{2i}d_{jj} \\ \vdots \\ c_{ii}d_{jj} \\ \vdots \\ c_{ni}d_{jj} \end{pmatrix} \end{array}\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}\left(\left(P'P\right)A\left(P'P\right)^{-1}A'\right) = c_{ii}d_{jj}$. 而 $\mathrm{tr}\,(AA') = \mathrm{tr}\left(E_{ij}E_{ji}\right) = \mathrm{tr}\,(E_{ii}) = 1$. 则由 $\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \mathrm{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj} = 1. \tag{1}$$

再令 $A = E_{ij} + E_{kl}$, 其中 $1 \le i, j, k, l \le n$. 不妨设 $k \ge i, l \ge j$, 将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$(P'P)A(P'P)^{-1}A' = (P'P)(E_{ij} + E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji} + E_{lk})$$

$$= \left[\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{ki} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{ik} \\ \vdots \\ c_{kk} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{jj} \\ \vdots \\ d_{lj} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} d_{1l} \\ d_{2l} \\ \vdots \\ d_{jl} \\ \vdots \\ d_{ll} \\ \vdots \\ d_{nl} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$
= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j & \quad & l \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & \cdots & c_{kk} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \quad & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} d_{1j} & \cdots & d_{1l} \\ d_{2j} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{jj} & \cdots & d_{jl} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{lj} & \cdots & d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{nj} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \qquad\qquad & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{1i}d_{jj}+c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl}+c_{1k}d_{ll} \\ c_{2i}d_{jj}+c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl}+c_{2k}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii}d_{jj}+c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl}+c_{ik}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki}d_{jj}+c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl}+c_{kk}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni}d_{jj}+c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl}+c_{nk}d_{ll} \end{pmatrix} \end{array}
$$

从而 $\mathrm{tr}\left(\left(P'P\right)A\left(P'P\right)^{-1}A'\right) = c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}$. 而

$$\mathrm{tr}\left(AA'\right) = \mathrm{tr}\left(\left(E_{ij}+E_{kl}\right)\left(E_{ji}+E_{lk}\right)\right) = \mathrm{tr}\left(E_{ij}E_{ji}+E_{ij}E_{lk}+E_{kl}E_{ji}+E_{kl}E_{lk}\right) = 2+2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

于是由 $\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \mathrm{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj} = 2+2\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{2}$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号. 由上述(1)(2)两式可得

$$c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

在上式中令 $j=l,i\neq k$, 注意到 $d_{jj}\neq 0$, 故有 $c_{ik}+c_{ki}=0$, 又因为 $P'P$ 是对称矩阵, 所以 $c_{ik}=c_{ki}$. 故 $c_{ik}=0,\forall i\neq k$. 于是 $P'P$ 是一个对角矩阵, 从而由(1)式可得 $d_{jj}=c_{jj}^{-1}$, 由此可得 $c_{ii}=c_{jj},\forall i,j$. 因此 $P'P=cI_n$, 其中 $c=c_{11}\neq 0$.

证法二: 我们把数域限定在实数域上, 并取 $V=M_n(\mathbb{R})$ 上的 Frobenius 内积, 则 $f(A)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2=\|A\|^2$. 设 $\varphi(A)=PAP^{-1}$ 为 V 上的线性变换, 则题目条件可改写为 $\|\varphi(A)\|=\|A\|$ 对任意的 $A\in V$ 成立, 于是由定理**??**-2 可知 φ 是正交算子, 从而由命题**??**(2) 即得结论. $\square$