0.1 同态基本定理

定义 0.1 (同态核)

1. 设 f 是群 G_1 到群 G_2 的同态,G_2 的幺元 e_2 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$$
称为 f 的**核**或**同态核**.
G_1 中所有元素的像集合
$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G_1\} \subseteq G_2.$$
称为 f 的**像**.
2. 设 f 是环 R_1 到环 R_2 的同态,R_2 的零元素 0 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in R_1 | f(x) = 0\}$$
称为 f 的**核**或**同态核**.
G_1 中所有元素的像集合
$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in R_2 : \exists x \in R_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in R_1\} \subseteq R_2.$$
称为 f 的**像**.
3. 设 R 是一个环,M_1, M_2 都是 R 模,f 是 M_1 到 M_2 的模同态. M_2 的零元素 0 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in M_1 | f(x) = 0\}$$
称为 f 的**核**或**同态核**.
G_1 中所有元素的像集合
$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in M_2 : \exists x \in M_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in M_1\} \subseteq M_2.$$
称为 f 的**像**.

♣

命题 0.1

(1) 设 f 是群 G 到群 G' 的同态, 则 $\ker f$ 是 G 的子群,$f(G)$ 是 G' 的子群.
(2) 设 f 是环 R 到环 R' 的同态, 则 $f(R)$ 是 R' 的子环.
(3) 设 R 是一个环,M_1, M_2 都是 R 模,f 是 M_1 到 M_2 的模同态, 则 $f(M_1)$ 是 M_2 的子模.

♠

注 $\ker f$ 在大多情况下都不是 R 的子环.

证明

(1) 设 e, e' 分别是 G, G' 的幺元, 由群同态与同构的基本性质知 $f(e) = e'$, 故 $e \in \ker(f)$. 设 $x, y \in \ker(f)$, 利用同态的性质,$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e'e'^{-1} = e'$, 这就证明了 $xy^{-1} \in \ker(f)$. 故 $\ker f$ 是 G 的子群.
同样由群同态与同构的基本性质知 $f(e) = e'$, 我们有 $e' \in \operatorname{im}(f)$. 设 $y = f(x), y' = f(x') \in \operatorname{im}(f)$, 同样利用同态的性质,$yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \operatorname{im}(f)$. 故 $f(G)$ 是 G' 的子群.

(2) 由结论 (1) 知 $f(R)$ 构成 R' 的加法子群. 由 R 对加法构成 Abel 群知 $f(R)$ 对加法也构成 Abel 群. 由同态的性质易知 f 对乘法构成半群, 故 $f(R)$ 是 R' 的子环.

(3)

□

命题 0.2

(1) 设 H 是群 G 的正规子群. π 是 G 到商群 G/H 的自然同态 (见定理??), 则有 $\ker \pi = H$.
(2) 设 I 是环 R 的理想,π 是 R 到商环 R/I 的自然同态 (见定理??), 则有 $\ker \pi = I$.

(3) 设 N 是 R 模 M 的子模,π 是 M 到商模 M/N 的自然同态 (见定理**??**), 则有 $\ker\pi = N$.

证明

(1)

(2)

(3)

□

命题 0.3

1. 设 f 是群 G_1 到群 G_2 的同态,G_1 的幺元是 e_1, 则 f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{e_1\}$.
2. 设 f 是环 R_1 到环 R_2 的同态, 则 f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{0\}$.
3. 设 R 是一个环,M_1, M_2 都是 R 模,f 是 M_1 到 M_2 的模同态, 则 f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{0\}$.

证明

□

定理 0.1 (群的同态基本定理)

设 f 是群 G 到群 H 上的同态, 则有下列结论:

(1) $\ker f \lhd G$;

(2) 设 π 为 G 到商群 $G/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 上的群同构映射 $\overline{f}$, 使得

$$f = \overline{f}\cdot\pi, \tag{1}$$

进而

$$G\backslash\ker f \cong f(G).$$

如图 1所示.

笔记

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G\backslash\ker f \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ f(G) & \end{tikzcd}$$

图 1

证明

(1) 设 e, e' 分别为 G, H 的幺元, 于是 $f(e) = e'$, 又设 $x, y \in \ker f, z \in G$, 则

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e',$$

因此 $xy^{-1} \in \ker f$, 故知 $\ker f$ 是 G 的子群, 而且有

$$f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1} = e',$$

即 $zxz^{-1} \in \ker f$, 由此知 $\ker f \lhd G$.

(2) 由命题 0.1知 $f(G)$ 是 G 的子群. 注意到 f 是 G 到 $f(G)$ 上的满映射, 故由定理**??**知 f 在 G 中诱导一个等价关系

$$R : xRy, \quad x, y \in G,$$

当且仅当 $f(x)=f(y)$, 即

$$f(x)=f(y) \iff f(x)^{-1}f(y)=f(x^{-1}y)=e' \iff x^{-1}y\in\ker f.$$

因而 f 诱导的等价关系恰好是 G 的正规子群 $\ker f$ 诱导的同余关系, 即有商群 $G/R=G/\ker f$ 且

$$\pi(x)=\pi(y)\ \text{当且仅当}\ f(x)=f(y).$$

又由定理**??**知有 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 的一一对应 $\overline{f}$, 使得 $\overline{f}\cdot\pi=f$, 又 $\forall x,y\in G$ 有

$$\overline{f}(\pi(x)\pi(y))=\overline{f}(\pi(xy))=f(xy)=f(x)f(y)=\overline{f}(\pi(x))\cdot\overline{f}(\pi(y)).$$

由此知 $\overline{f}$ 是 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 上的群同构.

□

定理 0.2

设 f 是群 G 到群 H 上的满同态,f 的核为 K, 即 $K=\ker f$,G 中包含 K 的子群的集合为 Σ,H 的子群的集合为 Γ, 则有下列结论:

(1) f 是 $\Sigma\to\Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 $G_1\lhd G$,$G_1\supseteq K$, 则

$$f(G_1)\lhd H.$$

若 $H_1\lhd H$, 则

$$f^{-1}(H_1)\lhd G.$$

(3) 若 $G_1\lhd G$,$G_1\supseteq K$, 则

$$G/G_1\cong H/f(G_1). \tag{2}$$

♡

证明

(1) 对 $\forall G_1\in\Sigma$, 由 $f(G_1)$ 是 G_1 在 $f|_{G_1}$ 下的像, 又 f 是群同态, 故 $f(G_1)$ 为 H 的子群, 即 $f(G_1)\in\Gamma$. 由此知 f 是 Σ 到 Γ 的良定义的映射. 设 $H_1\in\Gamma$,H_1 在 f 下原像的集合

$$G_1=f^{-1}(H_1)=\{x\in G|f(x)\in H_1\}\supseteq\{x\in G|f(x)=e',\ e'\ \text{为}H\ \text{的幺元}\}=K,$$

而且对 $\forall x,y\in G_1$,$f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}\in H_1$, 故 $xy^{-1}\in G_1$, 因而 G_1 为 G 的子群, 故 $G_1\in\Sigma$, 因此 f^{-1} 可视为 Γ 到 Σ 的良定义的映射.

由 f 是 $G\to H$ 上的满同态知 $f(G_1)=f(f^{-1}(H_1))=H_1$, 由 H_1 的任意性知 $ff^{-1}=\mathrm{id}_\Gamma$. 反之, 设 $G_1\in\Sigma$, 显然有 $G_1\subseteq f^{-1}(f(G_1))$. 若 $u\in f^{-1}(f(G_1))$, 即有 $v\in G_1$, 使得 $f(u)=f(v)$, 从而

$$f(uv^{-1})=f(u)f(v)^{-1}=e'.$$

因而 $uv^{-1}\in K\subseteq G_1$, 故 $u\in G_1$, 即有 $f^{-1}(f(G_1))=G_1$, 由 G_1 的任意性知 $f^{-1}f=\mathrm{id}_\Sigma$.

综上所述知 f 是 $\Sigma\to\Gamma$ 的一一对应,f^{-1} 是其逆映射. 故结论 (1) 成立.

(2) 设 $G_1\supset K$ 且 $G_1\lhd G$, 即 $G_1\in\Sigma$ 且 $G_1\lhd G$, 则由 (1) 可知 $f(G_1)$ 是 H 的子群. 对 $\forall g\in f(G_1), y\in H$, 因为 f 是满同态, 所以存在 $a\in G_1$,$x\in G$, 使得 $f(a)=g$, $f(x)=y$. 从而

$$ygy^{-1}=f(x)f(a)f(x)^{-1}=f(xax^{-1})\in f(G_1).$$

故知 $f(G_1)\lhd H$.

反之, 若 $H_1\lhd H$ 且对 $\forall b\in f^{-1}(H_1)$,$y\in G$, 由

$$f(yby^{-1})=f(y)f(b)f(y)^{-1}\in H_1$$

知 $yby^{-1}\in f^{-1}(H_1)$, 故知 $f^{-1}(H_1)\lhd G$, 即结论 (2) 成立.

(3) 设 $G_1\in\Sigma$ 且 $G_1\lhd G$. 由结论 (2) 的证明知 $f(G_1)\lhd H$. 令 π' 是 H 到商群 $H/f(G_1)$ 的自然同态, 由此可知有

G 到 $H/f(G_1)$ 上的同态映射 $\pi' \cdot f$, 注意到 $H/f(G_1)$ 的幺元为 $f(G_1)$, 则知

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in G | \pi' f(x) = f(G_1)\} \\ &= \{x \in G | f(x) \in f(G_1)\} \\ &= f^{-1}(f(G_1)) = G_1.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 设 π 为 G 到 G/G_1 的自然同态, 又因为自然同态 π' 是满同态且 f 也是满同态, 所以由群的同态基本定理知有 G/G_1 到 $H/f(G_1)$ 的群同构 $\overline{f}$, 使得 $\pi' f = \overline{f} \cdot \pi$, 亦使图 2为交换图, 即式(2)成立.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi' f"] & H \arrow[d, "\pi'"] \\ G/G_1 \arrow[r, "\overline{f}"'] & H/f(G_1) \end{tikzcd}$$

图 2

□

推论 0.1

设 N 为群 G 的正规子群,π 为 G 到商群 G/N 上的自然同态,G 中包含 N 的子群的集合为 Σ,G/N 的子群的集合为 Γ, 则

(1) π 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 $H \lhd G$,$H \supseteq N$, 则

$$\pi(H) \lhd G/N.$$

若 $H' \lhd G/N$, 则

$$\pi^{-1}(H') \lhd G.$$

(3) 若 $H \lhd G$,$H \supseteq N$, 则

$$G/H \cong (G/N)/(H/N).$$

♡

证明 事实上, 由于自然同态必是满同态, 故只要在定理 0.2中将 H 换成 G/N,f 换成 π, 即得本推论. 对于 (3), 由命题????知 $\pi(H) = H/N$, 故我们有如下交换图.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi''"'] \arrow[dr, "\pi' \pi"] & G/N \arrow[d, "\pi'"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{\pi}"'] & (G/N)/(H/N) \end{tikzcd}$$

图 3

□

定理 0.3

设 N 是群 G 的正规子群,π 是 G 到商群 G/N 上的自然同态,H 是 G 的一个子群, 则有下列结论:

(1) HN 是 G 中包含 N 的子群且

$$N \lhd HN = \pi^{-1}(\pi(H)). \tag{3}$$

(2) $H \cap N \lhd H$ 且 $H \cap N = \ker(\pi|_H)$,$\pi|_H$ 表示 π 在 H 上的限制;

(3)

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$

证明

(1) 显然,$HN \supseteq N$. 设 $h_i n_i \in HN(i = 1, 2)$, 则由 $N \lhd G$ 有

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 h_2^{-1} (h_2 (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in HN.$$

故 HN 是 G 中含 N 的子群且 $\pi(h_1 n_1) = \pi(h_1)\pi(n_1) = \pi(h_1) \in \pi(H)$, 故 $HN \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$.
又设 $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$, 则 $\pi(x) \in \pi(H)$, 从而存在 $h \in H$, 使得

$$\pi(x) = \pi(h) \iff xN = hN \iff x^{-1}h \in N.$$

于是存在 $n \in N$, 使得 $x^{-1}h = n$. 故 $x = hn^{-1} \in HN$. 因此 $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$. 综上可知 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$. 因为 H 是 G 的包含 N 的子群且 $N \lhd G$, 所以由命题**????**知 $N \lhd HN$.

(2) 由于 $N \lhd G$, 对 $\forall h \in H$,$a \in N \cap H$ 有 $hah^{-1} \in N \cap H$, 故 $N \cap H \lhd H$. 又 $\pi|_H(h) = \pi(h)$ 且 $\ker \pi = N$, 于是 $\ker(\pi|_H) = H \cap N$.

(3) 由 (1) 的结论知 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$, 再由自然同态是满同态知

$$\pi(HN) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H).$$

由群的同态基本定理知

$$HN/\ker\pi|_{HN} \cong \pi(HN) = \pi(H) \cong H/\ker\pi|_H.$$

又注意到 $\ker(\pi|_{HN}) = HN \cap N = N$,$\ker \pi|_H = H \cap N$, 故

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$

□

定理 0.4 (环的同态基本定理)

设 f 是环 R 到环 R' 上的同态, 则有下列结论:

(1) $\ker f$ 是 R 的理想;

(2) 设 π 是 R 到商环 $R/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $R/\ker f$ 到 $f(R)$ 上的环同构映射 $\overline{f}$, 使得

$$f = \overline{f} \cdot \pi. \tag{4}$$

即

$$R/\ker f \cong f(R).$$

证明

(1) 设 $x, y \in \ker f$, 则有 $f(x-y) = 0$, 故 $x - y \in \ker f$. 又显然有 $\ker f$ 对乘法满足结合律且加法与乘法间满足左右分配律, 因此 $\ker f$ 是 R 的子环. 又设 $a \in R$, 则 $f(ax) = f(a)f(x) = 0$,$f(xa) = f(x)f(a) = 0$, 即 $ax, xa \in \ker f$, 故 $\ker f$ 为 R 的理想.

(2) 由命题 0.1知 $f(R)$ 是 R' 的子环. 又 f 为环同态, 故也是加法群 R 到加法群 $f(R)$ 上的同态,π 也是加法群 R 到商群 $R/\ker f$ 上的自然同态, 于是由群的同态基本定理知有加法群 $R/\ker f$ 到加法群 $f(R)$ 上的同构 $\overline{f}$, 使 $f = \overline{f} \cdot \pi$.
另外,$\forall a, b \in R$ 有

$$\begin{aligned}\overline{f}(\pi(a)\pi(b)) &= \overline{f}(\pi(ab)) = f(ab) = f(a)f(b)\\ &= \overline{f}(\pi(a))\overline{f}(\pi(b)),\end{aligned}$$

因而 $\overline{f}$ 也是环 $R/\ker f$ 到环 $f(R)$ 上的环同构.

□

定理 0.5

设 f 是环 R 到环 R' 上的满同态, 又 $K = \ker f$,R 中包含 K 的子环集合为 Σ,R' 的子环集合为 Γ, 则有下列结论:

(1) f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 H 为 R 的理想且 $H \supseteq K$, 则 $f(H)$ 为 R' 的理想;
若 H' 为 R' 的理想, 则 $f^{-1}(H')$ 为 R 的理想;

(3) 若 I 是 R 的理想且 $I \supseteq K$, 则

$$R/I \cong R'/f(I). \tag{5}$$

证明

(1) 设 H 为 R 的子环且 $H \supseteq K$, 由环同态的基本性质**??**知 $f(H)$ 为 R' 的子环. 故 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 上的良定义的映射. 反之, 若 H' 为 R' 的子环, 则 H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 f 建立了加法群 R 中包含 K 的子群与加法群 R' 的子群间的一一对应, 故 $f^{-1}(H')$ 是 R 中唯一包含 K 的加法子群. 又若 $a, b \in f^{-1}(H')$, 则有 $f(ab) = f(a)f(b) \in H'$, 即 $ab \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 对乘法构成半群. 再设 $c \in f^{-1}(H')$, 则

$$f((a+b)c) = f(a+b)f(c) = f(a)f(c) + f(b)f(c) \in H',$$
$$f(c(a+b)) = f(c)f(a+b) = f(c)f(a) + f(c)f(b) \in H'.$$

因而 $f^{-1}(H')$ 是 R 中包含 K 的子环, 故 f^{-1} 可视为 $\Gamma \to \Sigma$ 上的良定义的映射.
对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 H 也是 R 中包含 K 的加法子群,H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 H 的任意性知 $f^{-1}f = \mathrm{id}_\Sigma, ff^{-1} = \mathrm{id}_\Gamma$. 故 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应,f^{-1} 是其逆映射. 即结论 (1) 成立.

(2) 对 $\forall a', b' \in R', h \in H$, 由环同态都是满同态知存在 $a, b \in R$, 使得 $f(a) = a', f(b) = b'$. 于是再由 H 是 R 的理想知

$$a'f(a)b' = f(a)f(h)f(b) = f(ahb) \in f(H).$$

故 $f(H)$ 为 R' 的理想.
反之, 设 H' 为 R' 的理想. 对 $\forall b \in R, x \in f^{-1}(H')$, 由 H' 是 R' 的理想知

$$f(bx) = f(b)f(x) \in H', f(xb) = f(x)f(b) \in H'.$$

即 $bx, xb \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 为 R 的理想. 由此知结论 (2) 成立.

(3) 设 π 是 R 到 R/I 的自然同态,π' 是 R' 到 $R'/f(I)$ 的自然同态. 由命题**????**知 $\pi' f$ 是 R 到 $R'/f(I)$ 上的环同态. 注意到

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in R : \pi' f(x) = f(I)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(I)\} \\ &= f^{-1}(f(I)) = I.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 于是由环的同态基本定理得式(5)成立.

□

推论 0.2

设 A, B 均为环 R 的理想且 $A \subseteq B$, 则有

$$R/B \cong (R/A)/(B/A).$$

证明 事实上, 只要在定理 0.5中取 $R' = R/A$,f 为 R 到 R/A 的自然同态, 并且由定理**????**知 $\pi(B) = B/A$, 因此即得本推论.

□

定理 0.6

设 H 为环 R 的子环,K 为 R 的理想,π 是环 R 到商环 R/K 上的自然同态, 则有

(1) $H+K$ 为 R 中包含 K 的子环,K 是 $H+K$ 的理想, 并且

$$H+K=\pi^{-1}(\pi(H)).$$

(2) $H\cap K$ 为 H 的理想且 $H\cap K=\ker\pi|_H$.

(3)

$$(H+K)/K\cong H/(H\cap K).\tag{6}$$

证明

(1) 显然 $H+K\supseteq K$. 设 $h_i+k_i\in H+K(i=1,2)$,$r\in R$, 则 $(h_1+k_1)-(h_2+k_2)=h_1-h_2+k_1-k_2\in H+K$. 于是 $H+K$ 是 R 的加法子群. 由 $H+K\subseteq R$ 知 $H+K$ 对乘法满足结合律且加法与乘法间满足左右分配律. 故 $H+K$ 是 R 中含 K 的子环. 又注意到 $\pi(h_1+k_1)=h_1+k_1+K=h_1+K\in\pi(H)$. 故 $h_1+k_1\in\pi^{-1}(\pi(H))$, 因此 $H+K\subseteq\pi^{-1}(\pi(H))$.

反之, 设 $x\in\pi^{-1}(\pi(H))$, 则 $\pi(x)\in\pi(H)$. 从而存在 $h'\in H$, 使得 $\pi(x)=\pi(h')\Longleftrightarrow x+K=h'+K\Longleftrightarrow -x+h'\in K$. 于是存在 $k'\in K$, 使得 $-x+h'=k'$, 从而 $x=h'-k'\in H+K$. 故 $\pi^{-1}(\pi(H))\subseteq H+K$. 综上可知 $H+K=\pi^{-1}(\pi(H))$. 因为 H 为环 R 的子环,K 为 R 的理想且 $H+K\supseteq K$, 所以由定理**????**知 K 是 $H+K$ 的理想.

(2) 由 H,K 都是 R 的子环知 $H\cap K$ 是 R 的子环. 又因为 $H\supseteq H\cap K$, 所以 $H\cap K$ 也是 H 的子环. 对 $\forall x\in H\cap K,h\in H$, 由 K 是 R 的理想知 $hx,xh\in H\cap K$. 故 $H\cap K$ 是 H 的理想. 又 $\pi|_H(h)=\pi(h)$ 且 $\ker\pi=K$, 故 $\ker\pi|_H=H\cap K$.

(3) 由结论 (1) 知 $H+K=\pi^{-1}(\pi(H))$, 再由自然同态都是满同态知

$$\pi(H+K)=\pi(\pi^{-1}(\pi(H)))=\pi(H).$$

于是由环的同态基本定理知

$$(H+K)/\ker\pi|_{H+K}\cong\pi(H+K)=\pi(H)\cong H/\ker\pi|_H.$$

注意到 $\ker\pi|_{H+K}=(H+K)\cap K=K$,$\ker\pi|_H=H\cap K$, 故

$$(H+K)/K\cong H/(H\cap K).$$

□

定理 0.7 (模同态的基本定理)

设 M,M' 都是幺环 R 上的模,f 是模 M 到模 M' 上的同态,M 中包含 N 的子模集合为 Σ,M' 中子模集合为 Γ, 则有下面结论:

(1) $\ker f=N$ 是 M 的子模.

(2) 设 π 是 M 到 M/N 上的自然模同态, 则有 M/N 到 $f(M)$ 的模同构 $\overline{f}$, 使得

$$\overline{f}\cdot\pi=f\tag{7}$$

即

$$M/N\cong f(M).$$

证明

(1) 对 $\forall x,y\in\ker f$, 由 f 是模同态知 $f(x-y)=f(x)-f(y)=0$. 从而 $x-y\in\ker f$, 于是 $\ker f=N$ 是加法群 M 的子群, 设 $a\in R$,$x\in N$, 则 $f(ax)=af(x)=0$, 因而 $ax\in N$, 故 N 是 M 的子模.

(2) 由命题 0.1知 $f(M)$ 是 M' 的子模. 由群的同态基本定理知有加法群 M/N 到加法群 $f(M)$ 上的同构 $\overline{f}$, 使 $\overline{f}\cdot\pi=f$. 现只需证 $\overline{f}$ 是模同构. 又设 $a\in R$,$x\in M$, 于是有

$$\overline{f}(a\pi(x))=\overline{f}(\pi(ax))=f(ax)=af(x)=a\overline{f}(\pi(x)),$$

即 $\overline{f}$ 为模同构.

□

定理 0.8

设 M, M' 都是幺环 R 上的模,f 是模 M 到模 M' 上的满同态,M 中包含 N 的子模集合为 Σ,M' 中子模集合为 Γ, 则有下面结论:

(1) f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应.

(2) 若 M_1 是 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$, 则

$$M/M_1 \cong M'/f(M_1) \tag{8}$$

♡

证明

(1) 若 M_1 为 M 的子模, 则由定理**????**知 $f(M_1)$ 为 M' 的子模. 故 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 上的良定义的映射.

反之, 若 M_1' 为 M' 的子模, 则 M_1' 也是 M' 的加法子群. 从而由定理 0.2(1)知 $f^{-1}(M_1')$ 是 M 中唯一包含 N 的加法子群. 又设 $a \in R, x \in f^{-1}(M_1')$. 由 $f(ax) = af(x) \in M_1'$ 知 $ax \in f^{-1}(M_1')$, 即 $f^{-1}(M')$ 是 M 的子模. 故 f^{-1} 可视为 $\Gamma \to \Sigma$ 上的良定义的映射.

对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 H 也是 R 中包含 K 的加法子群,H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 H 的任意性知 $f^{-1}f = \mathrm{id}_\Sigma, ff^{-1} = \mathrm{id}_\Gamma$. 故 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应,f^{-1} 是其逆映射, 即结论 (1) 成立.

(2) 设 M_1 为 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$. 又设 π_1 是 M 到 M/M_1 的自然同态,π' 是 M' 到 $M'/f(M_1)$ 的自然同态. 于是 $\pi' f$ 是 M 到 $M'/f(M_1)$ 上的同态, 而且

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in R : \pi' f(x) = f(M_1)\}\\ &= \{x \in R : f(x) \in f(M_1)\}\\ &= f^{-1}(f(M_1)) = M_1.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由结论 (1) 知 f 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 故由模同态的基本定理可知式(8)成立.

□

推论 0.3

设 M_1, N 都是 R 模 M 的子模, 而且 $M_1 \supseteq N$, 则有模同构

$$M/M_1 \cong (M/N)/(M_1/N).$$

♡

证明 事实上, 只要在定理 0.8(2)中取 $M' = M/N$,f 为 M 到 $M' = M/N$ 的自然同态, 再由命题**????**知 $f(M_1) = M_1/N$, 即得本推论.

□

定理 0.9

设 H, N 为 R 模 M 的子模, 则有模同构

$$(H+N)/N \cong H/(H \cap N) \tag{9}$$

♡

证明 设 π 为模 M 到商模 M/N 的自然模同态, 由于 N 为商群 M/N 中的加法幺元, 即商模 M/N 中的零元, 于是有 $\pi(H+N) = \pi(H) + N = \pi(H)$, 因而由模同态的基本定理 (1)知

$$H+N/\ker(\pi|_{H+N}) \cong \pi(H+N) = \pi(H) \cong H/\ker(\pi|_H).$$

由 $\ker(\pi|_{H+N}) = (H+N) \cap N = N, \ker(\pi|_H) = H \cap N$, 即得式(9)成立.

□