0.1 Gram-Schmidt 正交化方法和正交补空间

设 V 为 n 维内积空间, 则由命题??可知, 任一 n 阶正定实对称矩阵（正定 Hermite 矩阵）H 都能成为 V 的某组基的 Gram 矩阵. 特别地, 取 $H = I_n$, 则存在 V 的一组基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, 使得它的 Gram 矩阵就是单位矩阵 I_n, 即 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 由命题??我们也可以具体地构造出一组标准正交基, 以下不妨设 V 是欧氏空间. 首先, 任取 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 设其 Gram 矩阵为 G, 则 G 是正定实对称矩阵. 其次, 通过对称初等变换法可将 G 化为单位矩阵 I_n, 即存在 n 阶非异实矩阵 $C = (c_{ij})$, 使得 $C'GC = I_n$. 最后, 令

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)C,$$

即 $f_j = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}e_i$, 则 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 V 的一组基, 并且它的 Gram 矩阵就是 $C'GC = I_n$. 从上述过程不难看出, 因为当 $n \geq 2$ 时, 过渡矩阵 C 有无穷多种选法, 所以可构造出 V 的无穷多组标准正交基.

从几何的层面上看, 上述构造标准正交基的代数方法虽然简单, 但缺乏几何直观和意义. 然而,Gram - Schmidt 方法却是一个从几何直观入手的向量组的正交化方法, 具有重要的几何意义.Gram - Schmidt 方法粗略地说就是, 如果前 $k-1$ 个向量 $v_1, \cdots, v_{k-1}$ 已经两两正交, 那么只要将第 k 个向量 u_k 减去其在 $v_1, \cdots, v_{k-1}$ 张成子空间上的正交投影, 即可得到与 $v_1, \cdots, v_{k-1}$ 都正交的向量 v_k. 特别地, 若 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组基, 则通过 Gram - Schmidt 方法可得到一组正交基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 再将每个基向量标准化, 即可得到 V 的一组标准正交基 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. 这 3 组基之间的关系为

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)B = (w_1, w_2, \cdots, w_n)C,$$

其中 B 是主对角元全为 1 的上三角矩阵,C 是主对角元全为正实数的上三角矩阵. 设 $A = G(u_1, u_2, \cdots, u_n), D = G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 分别是对应的 Gram 矩阵, 则 A 是正定实对称矩阵,D 是正定对角矩阵, 由命题?? 可得 A 的如下分解:

$$A = B'DB = C'C,$$

这就是命题?? 中关于正定实对称矩阵 A 的两种分解, 再由命题?? 后面的注可知上述两种分解的唯一性. 因此, 基 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 的 Gram 矩阵的分解 $A = B'DB$ 一一对应于通过 Gram - Schmidt 方法得到的正交基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 而 Gram 矩阵的 Cholesky 分解 $A = C'C$ 则一一对应于通过 Gram - Schmidt 正交化和标准化得到的标准正交基 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$.

除了求标准正交基之外,Gram - Schmidt 方法还有许多其他的应用. 设 V 是内积空间,u 是 V 中的向量,$\{w_1, \cdots, w_k\}$ 是子空间 W 的一组标准正交基, 则由 Gram - Schmidt 方法可知 $v = u - \sum\limits_{i=1}^{k}(u, w_i)w_i$ 与 $w_1, \cdots, w_k$ 正交. 令 $w = \sum\limits_{i=1}^{k}(u, w_i)w_i$, 则 $u = v + w$ 且 $(v, w) = 0$, 于是 $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. 由此可得

(1) Bessel 不等式: $\|u\|^2 \geq \|w\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |(u, w_i)|^2$;

(2) 向量 u 到子空间 W 的距离为 $\|v\|$, 即 $\min\limits_{x \in W} \|u - x\| = \|v\|$.

例题 0.1 设 $V = \mathbb{R}[x]_n$ 为次数小于等于 n 的实系数多项式构成的欧氏空间, 对任意的 $f(x), g(x)$, 其内积定义为 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$(参考例题??(5)). 设 $u_0(x) = 1$,$u_k(x) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k]$（$k \geq 1$）,$m_k = \sqrt{\dfrac{2^{k+1}k!(2k)!}{(2k+1)!!}}$（$k \geq 0$）. 求证: 从基 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 出发, 由 Gram - Schmidt 正交化方法得到的标准正交基为 $\left\{\dfrac{u_k(x)}{m_k}, 0 \leq k \leq n\right\}$, 称之为 Legendre 多项式.

证明 证法一: 由 Gram - Schmidt 正交化方法, 从 $1, x, x^2, x^3$ 可得标准正交基中前 4 个基向量分别为 $w_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,$w_1(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}x$,$w_2(x) = \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3x^2-1)$,$w_3(x) = \sqrt{\dfrac{7}{8}}(5x^3-3x)$, 读者不难验证这就是 Legendre 多项式的前 4 个多项式. 不过这样的计算很难推广到一般的情形, 但我们可以通过验证 $\{u_k(x)\}$ 是一组正交基以及 Cholesky 分解与 Gram - Schmidt 正交化和标准化之间的一一对应来证明结论.

首先注意到, 对任意的 $j<k$, 有 $\left.\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}[(x^2-1)^k]\right|_{x=\pm1}=0$, 故由分部积分可得

$$(u_k(x),x^j)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k]x^j\,\mathrm{d}x=-j\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}[(x^2-1)^k]x^{j-1}\mathrm{d}x.$$

不断做下去可知, 当 $j<k$ 时,$(u_k(x),x^j)=0$;$(u_k(x),x^k)=(-1)^k k!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k\mathrm{d}x$. 注意到 $u_k(x)$ 是一个 k 次多项式且首项系数为 $2k(2k-1)\cdots(k+1)$, 由上述结果并且经过进一步的计算可知,

$$\|u_k(x)\|^2=\frac{2^{k+1}k!(2k)!}{(2k+1)!!},\quad (u_k(x),u_l(x))=0\ (k>l),$$

因此 $\left\{\frac{u_k(x)}{m_k},0\leq k\leq n\right\}$ 是 V 的一组标准正交基. 设从基 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 到基 $\left\{\frac{u_k(x)}{m_k},0\leq k\leq n\right\}$ 的过渡矩阵为 P, 基 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 的 Gram 矩阵为 A, 则 P 是一个主对角元全大于零的上三角矩阵, 且由命题**??**可得 $I_{n+1}=P'AP$, 从而 $A=(P^{-1})'P^{-1}$ 是 Cholesky 分解. 由 Cholesky 分解的唯一性以及它与 Gram - Schmidt 正交化和标准化之间的一一对应可知,$\left\{\frac{u_k(x)}{m_k},0\leq k\leq n\right\}$ 就是从基 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 出发由 Gram - Schmidt 正交化方法得到的标准正交基.

证法二:设 V_k 是由次数小于等于 k 的实系数多项式构成的子空间,$w_k(x)=\frac{u_k(x)}{m_k}(0\leq k\leq n)$, 同证法 1 的计算可知这是一组两两正交的单位向量.

下面用归纳法来证明结论. 当 $k=0$ 时结论显然成立, 假设从 $1,x,\cdots,x^k$ 出发, 经过 Gram - Schmidt 正交化方法得到 V_k 的一组标准正交基为 $w_0(x),w_1(x),\cdots,w_k(x)$.

现设 x^{k+1} 经过 Gram - Schmidt 正交化方法得到的单位向量为 $\widetilde{w}_{k+1}(x)$, 满足 $(w_i(x),\widetilde{w}_{k+1}(x))=0(0\leq i\leq k)$, 于是 $V_{k+1}=V_k\perp L(w_{k+1}(x))=V_k\perp L(\widetilde{w}_{k+1}(x))$. 因此 $L(w_{k+1}(x))=L(\widetilde{w}_{k+1}(x))$ 是 V_k 在 V_{k+1} 中的正交补空间, 注意到 $w_{k+1}(x)$ 和 $\widetilde{w}_{k+1}(x)$ 都是范数为 1 且首项系数为正数的 $k+1$ 次多项式, 故 $\widetilde{w}_{k+1}(x)=w_{k+1}(x)$, 结论得证. □

例题 0.2 设 $V=\mathbb{R}[x]_3$ 为次数小于等于 3 的实系数多项式构成的欧氏空间, 其内积定义同例题 0.1, 试求 $\min\limits_{f(x)\in V}\int_{-1}^{1}(e^x-f(x))^2\mathrm{d}x$.

解 本题即求 $\min\limits_{f(x)\in V}\|e^x-f(x)\|^2$. 由例题 0.1 可知,$V$ 的一组标准正交基为 $w_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$w_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x$,$w_2(x)=\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$,$w_3(x)=\sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3-3x)$, 经计算可得 $(e^x,w_0(x))=\frac{\sqrt{2}}{2}(e-e^{-1})$,$(e^x,w_1(x))=\sqrt{6}e^{-1}$,$(e^x,w_2(x))=\frac{\sqrt{10}}{2}(e-7e^{-1})$,$(e^x,w_3(x))=\frac{\sqrt{14}}{2}(37e^{-1}-5e)$. 因此, 由 Gram - Schmidt 方法的几何意义可得

$$\begin{aligned}\min_{f(x)\in V}\|e^x-f(x)\|^2&=\|e^x-\sum_{i=0}^{3}(e^x,w_i(x))w_i(x)\|^2\\&=\|e^x-\frac{1}{2}(e-e^{-1})-3e^{-1}x-\frac{5}{4}(e-7e^{-1})(3x^2-1)-\frac{7}{4}(37e^{-1}-5e)(5x^3-3x)\|^2\\&\approx 0.00002228887.\end{aligned}$$

□

命题 0.1

设 V 是 n 维欧氏空间,A 是 m 阶半正定实对称矩阵且 $\mathrm{r}(A)=r\leq n$, 求证: 必存在 V 上的向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, 使得其 Gram 矩阵就是 A.

证明 因为 A 是秩为 r 的 m 阶半正定阵, 故由命题**??**可知, 存在 $r\times m$ 实矩阵 T, 使得 $A=T'T$. 取 V 的一组标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 令

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(e_1,e_2,\cdots,e_r)T,$$

则由推论**??**即得

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=T'G(e_1,e_2,\cdots,e_r)T=T'T=A.$$

□

命题 0.2

对任意内积空间 V, 证明: 若用 Gram-Schmidt 方法将线性无关的向量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 变成正交向量组 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$, 则这两组向量的 Gram 矩阵的行列式值不变, 即

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)|=|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m)|=\|\boldsymbol{v}_1\|^2\|\boldsymbol{v}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{v}_m\|^2.$$

证明 由 Gram-Schmidt 正交化过程可得

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个主对角元全为 1 的上三角矩阵, 再由命题 0.1的证明过程可得

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{B}.$$

注意到 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m)$ 是主对角元分别为 $\|\boldsymbol{v}_1\|^2,\|\boldsymbol{v}_2\|^2,\cdots,\|\boldsymbol{v}_m\|^2$ 的对角矩阵, 故上式两边同取行列式即得结论. □

命题 0.3

对任意内积空间 V, 证明下列不等式:

$$0\le|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)|\le\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{u}_m\|^2,$$

后一个等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{u}_i$ 两两正交或者某个 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{0}$.

证明 (i) 对实内积空间:

证法一: 由命题**??**可知 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 是一个半正定实对称矩阵, 故由命题**??**(2) 可知 $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)|\ge 0$. 对第二个不等式, 我们分情况讨论. 若 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 是非正定的半正定阵, 则 $0=|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)|\le\|\boldsymbol{u}_1\|^2\ \|\boldsymbol{u}_2\|^2\cdots\ \|\boldsymbol{u}_m\|^2$, 并且等号成立的充要条件是某个 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 是正定阵, 则由命题**??**可知 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 线性无关. 由 Gram-Schmidt 正交化过程可得

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{u}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\boldsymbol{v}_j.$$

再由勾股定理可得 $\|\boldsymbol{u}_i\|^2=\|\boldsymbol{v}_i\|^2+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)^2}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\ge\|\boldsymbol{v}_i\|^2>0$. 最后由命题 0.2可得

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)|=\|\boldsymbol{v}_1\|^2\|\boldsymbol{v}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{v}_m\|^2\le\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{u}_m\|^2,$$

等号成立当且仅当 $\|\boldsymbol{v}_i\|^2=\|\boldsymbol{u}_i\|^2(1\le i\le m)$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{u}_i(1\le i\le m)$, 从而当且仅当 $\boldsymbol{u}_i$ 两两正交.

证法二: 由命题**??**可知 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 是一个半正定实对称矩阵, 故再由命题**??**立得.

(ii) 对复内积空间: 由命题**??**可知 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ 是一个半正定 Hermite 阵, 故由 (i) 同理可证. □

命题 0.4

(1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵, 证明下列 Hadamard 不等式:

$$|\boldsymbol{A}|^2\le\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, 证明下列 Hadamard 不等式:

$$|\det\boldsymbol{A}|^2\le\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

证明 (1)证法一:设 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量, 则 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 可以看成是 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下

的 Gram 矩阵. 由命题 0.3可得

$$|A|^2 = |A'A| = |G| \le \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|^2 = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2.$$

证法二:由命题??(2) 可知 $A'A$ 是半正定阵, 并且主对角元为 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 (1 \le j \le n)$. 故再由命题??立得.

(2) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 A 的 n 个列向量, 则 $G = A'\overline{A}$ 可以看成是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 在 $\mathbb{C}^n$ 的标准内积下的 Gram 矩阵. 由命题 0.3及命题??可得

$$|\det A|^2 = |A|\,|\overline{A}| = |A'|\,\left|\overline{A}\right| = |A'\overline{A}| = |G| \le \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|^2 = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2.$$

□

推论 0.1

若 n 阶实矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $|a_{ij}| \le M(1 \le i, j \le n)$, 则 $|A| \le M^n \cdot n^{\frac{n}{2}}$.

证明 由命题 0.4可得

$$|A|^2 \le \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \le \prod_{j=1}^{n} M^2 n \le M^{2n} n^n.$$

故 $|A| \le M^n \cdot n^{\frac{n}{2}}$. □

命题 0.5

设 U_1, U_2, U 是 n 维内积空间 V 的子空间, 求证:

(1) $(U^\perp)^\perp = U$;

(2) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$;

(3) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$;

(4) $V^\perp = \mathbf{0}, \mathbf{0}^\perp = V$.

证明

(1) 因为 $V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$, 故 $\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U$. 另一方面, 显然有 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, 因此 $(U^\perp)^\perp = U$.

(2) 任取 $\alpha \in (U_1 + U_2)^\perp$, 则 $(\alpha, U_1 + 0) = (\alpha, 0 + U_2) = 0$, 故 $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp$, $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_2^\perp$, 于是 $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$. 反之, 对任一 $\alpha \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$, $\beta \in U_1 + U_2$, 记 $\beta = \beta_1 + \beta_2$, 其中 $\beta_1 \in U_1, \beta_2 \in U_2$, 则

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2) = 0,$$

故 $\alpha \in (U_1 + U_2)^\perp$, 于是 $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$. 因此 $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(3) 由 (1) 及 (2), 有 $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$.

(4) 显然成立.

□

命题 0.6

设 S 是 n 维内积空间 V 的子集, 证明:

(1) $S^\perp = \{\alpha \in V \mid (\alpha, S) = 0\}$ 是 V 的子空间;

(2) 设由 S 生成的子空间 (由 S 中所有向量张成的子空间) 为 U, 则 $S^\perp = U^\perp$. 进而,$(S^\perp)^\perp = U$.

注 注意这里的 S 只是一个子集, 而不是子空间. 对 S 取两次正交补实际上将 S 扩充成 V 的一个子空间.

证明

(1) 显然成立, 下证明 (2). 设 S 生成的子空间为 U, 显然 $U \subseteq S$, 从而一方面有 $U^\perp \subseteq S^\perp$. 另一方面, 对任一 $v \in S^\perp$, $u \in U$, 将 u 表示为 S 中向量的线性组合, $u = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$, 其中 $x_i \in S$. 由 $(x_i, v) = 0$ 可得 $(u, v) = 0$, 于是 $v \in U^\perp$, 从而 $S^\perp \subseteq U^\perp$, 因此 $S^\perp = U^\perp$. 最后由命题 0.5(1) 可知 $(S^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp = U$.

□

命题 0.7

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵, 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 U, 求 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组.

解 设 A 的秩为 r, 则解空间 U 是 $\mathbb{R}^n$ (取标准内积) 的 $n-r$ 维子空间. 取 U 的一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 令 $B=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$ 为 $n\times(n-r)$ 实矩阵, 则由命题 0.6(2)的证明可得

$$U^{\perp}=(L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}))^{\perp}=\{\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}\}^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|(\eta_i,\boldsymbol{x})=\eta_i\boldsymbol{x}=0,1\le i\le n-r\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=0\}$$

故 $U^{\perp}$ 就是线性方程组 $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间, 即 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组为 $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. □

推论 0.2

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵,$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 A 的列分块, 齐次线性方程组 $Ax=O$ 的解空间为 U, 任取 U 的一组基 $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}$, 令 $B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$, 则在 $\mathbb{R}^n$(取标准内积) 中, 就有

$$\begin{aligned}(L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))^{\perp}&=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|(\alpha_i,\boldsymbol{x})=\alpha_i\boldsymbol{x}=0,1\le i\le n\}\\&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\}=L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})=U\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}U^{\perp}&=(L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}))^{\perp}=\{\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}\}^{\perp}\\&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|(\eta_i,\boldsymbol{x})=\eta_i\boldsymbol{x}=0,1\le i\le n-r\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=0\}\end{aligned}\tag{2}$$

因此 $U^{\perp}$ 就是线性方程组 $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间, 即 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组为 $B'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

证明 (1)式由命题 0.7同理可证,(2)可由命题 0.7直接得到. □

命题 0.8

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵, 求证: 非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解的充要条件是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 属于齐次线性方程组 $A'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 解空间的正交补空间.

证明 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为列分块,$U=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\mathbb{R}^m$ (取标准内积) 的子空间, 则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{\beta}\in U$. 另一方面, 由推论 0.2可知 $A'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的解空间即为 $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\mid(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{y})=0,1\le i\le n\}=U^{\perp}$, 注意到 $U=(U^{\perp})^{\perp}$, 故结论得证. □

命题 0.9

设 V 为 n 阶实矩阵全体构成的欧氏空间（取 Frobenius 内积）,V_1,V_2 分别为 n 阶实对称矩阵全体和 n 阶实反对称矩阵全体构成的子空间, 求证:

$$V=V_1\perp V_2$$

证明 一方面, 由命题**??**可知 $V=V_1\oplus V_2$. 另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{A}\in V_1$,$\boldsymbol{B}\in V_2$, 由迹的交换性可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}')=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}')=-(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=-(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

于是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$, 从而 $V_1\perp V_2$, 因此 $V=V_1\perp V_2$. □