

0.1 级数证明

例题 0.1 设 $f \in \mathbb{R}[x]$ 是只有正实根的多项式, 求 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $x=0$ 幂级数展开和收敛域.

证明 设 $f(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_n)^{k_n}$, 其中 $a \neq 0$, 并且

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, k_i \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= [\ln f(x)]' = [\ln a + k_1 \ln(x-x_1) + k_2 \ln(x-x_2) + \cdots + k_n \ln(x-x_n)]' \\ &= \frac{k_1}{x-x_1} + \frac{k_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-x_n} = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x-x_j} \\ &= -\frac{k_j}{x_j} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-\frac{x}{x_j}} = -\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_j}\right)^m \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j^{m+1}} x^m. \end{aligned}$$

显然收敛半径就是 x_1 , 注意到

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j^{m+1}} x_1^m = \frac{k_1}{x_1} \neq 0,$$

故收敛域为 $(-x_1, x_1)$. □

例题 0.2 设 $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$, $a_n > 0$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

证明 显然 $e^{b_n} = e^{a_n} - a_n \geq 1$, 故 $b_n \geq 0$, 并且由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $a_n \rightarrow 0$. 于是

$$\begin{aligned} b_n &= \ln(e^{a_n} - a_n) = \ln e^{a_n} + \ln(1 - a_n e^{-a_n}) \\ &= a_n + O(a_n e^{-a_n}), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

注意到 $O(a_n e^{-a_n}) \leq a_n$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} O(a_n e^{-a_n})$ 也收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. □

例题 0.3 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1.$$

证明 由条件可知对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \leq a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1},$$


故 $A \leq 1$. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} &\geq \frac{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1 - \frac{a_1 - a_{2n+1}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} \\ &\geq 1 - \frac{a_1}{\frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{2} + \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{2}} = 1 - \frac{2a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故 $A \geq 1$. 因此 $A = 1$. □

命题 0.1

设 a_n 递减到 0, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

 **笔记** (1)式可由 Abel 变换直接得到, 也可以采用下述证明一样的强行凑裂项的思路.

证明 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n [ka_k - (k+1)a_{k+1}] + \sum_{k=1}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_{k+1}] \\ &= a_1 - (n+1)a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

充分性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由命题??可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. 再由(1)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

必要性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 则由 $\{a_n\}$ 的单调性知, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq m$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \geq \sum_{k=1}^m a_k + (n-m)a_n.$$

又由(1)式和 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛知, 存在 $A > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k - na_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故

$$A \geq \sum_{k=1}^n a_k - na_n \geq \sum_{k=1}^m a_k + (n-m)a_n - na_n = \sum_{k=1}^m a_k - ma_n.$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $\sum_{k=1}^m a_k \leq A$. 再由 m 的任意性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 此时由命题??可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 再由(1)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

例题 0.4 设 a_n 递减到 0, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx$$

发散, 这里 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$.

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故 $f(x)$ 的收敛域为 \mathbb{R} . 显然 $f > 0, x > 0$, 且 f 在 $(0, +\infty)$ 上递增. 待定 $\{b_n\}$ 满足: $b_n \nearrow +\infty$. 从而

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx &\geq \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(b_n)}{x^2} dx = \ln f(b_n) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ &\geq \ln(a_n^n b_n^n) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = n \ln(a_n b_n) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

取 $b_n = \frac{C}{a_n}$, $C > \max\{1, a_1\}$, 则

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq n \ln(a_n b_n) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{\ln C}{C} n(a_n - a_{n+1}).$$

由命题 0.1 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 发散. 故

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \frac{\ln C}{C} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = +\infty.$$

□


例题 0.5 证明:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leq p, \forall p \in (1, +\infty).$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geq p, \forall p \in (0, 1).$$

 笔记 注意强行凑裂项和熟悉 Bernoulli 不等式.

证明

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} &\leq p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \\ \iff \sqrt[p]{n} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) &= 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq \frac{1}{p(n+1)} \\ \iff \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} &\leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

下证 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x} - \frac{x}{p}$, 则

$$f'(x) = -\frac{1}{p} (1-x)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} [1 - (1-x)^{\frac{1}{p}-1}] < 0.$$

故

$$f(x) \leq f(0) = 1 \iff \sqrt[p]{1-x} \leq 1 - \frac{x}{p}.$$

令 $x = \frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$, 从而 (2) 式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = p.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} &\geq p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \\ \iff \sqrt[p]{n} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) &= 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{p(n+1)} \\ \iff \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} &\geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

下证 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x} - \frac{x}{p}$, 则

$$f'(x) = -\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left[1 - (1-x)^{\frac{1}{p}-1} \right] > 0.$$

故

$$f(x) \geq f(0) = 1 \iff \sqrt[p]{1-x} \geq 1 - \frac{x}{p}.$$

令 $x = \frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$, 从而(3)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = p.$$

□

例题 0.6 对 $t \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} dx.$$

证明


$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} dx &= \int_0^1 e^{-tx \ln x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tx \ln x)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-tx \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx \\ &\stackrel{x=e^{-y}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y} y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! (n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^n dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Gamma(n+1)}{n! (n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^n}. \end{aligned}$$

□

命题 0.2

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_n > 0$, 则存在 A_n 使得 $a_n = o(A_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $a_n > 0$, 则存在 A_n 使得 $A_n = o(a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 发散.

▲

 **笔记** 这个命题说明: 没有收敛最慢的级数, 也没有发散最慢的级数.

证明

1. 令

$$A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} < +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} \right)}{a_n} = 0.$$

故 $a_n = o(A_n), n \rightarrow \infty$.

2. 令

$$A_1 = 1, \quad A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{a_1} \right) = +\infty. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} \right)} = 0. \end{aligned}$$

故 $A_n = o(a_n), n \rightarrow \infty$.

□

例题 0.7 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} < \infty.$$

注 本题的想法就是把 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2}$ 放大为阶更小的量, 从而其收敛.

证明 记 $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n p_k$, 则对 $N \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} &= \sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2} = \sum_{n=2}^N \frac{n^2 (S_n - S_{n-1})}{S_n^2} \\ &= \sum_{n=2}^N n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^2} dx \leq \sum_{n=2}^N n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^2} dx = \sum_{n=2}^N n^2 \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \left[\frac{n^2}{S_{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{S_n} \right] + \sum_{n=2}^N \frac{(n+1)^2 - n^2}{S_n} \\ &= \frac{4}{S_1} - \frac{(N+1)^2}{S_N} + \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{S_n} \\ &\leq \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} = \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^N \left(\frac{n\sqrt{p_n}}{S_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right) \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{4}{S_1} + 3 \sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \cdot \sum_{n=2}^N \frac{1}{p_n} \\ &\leq \frac{4}{S_1} + C \sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}. \end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \leq \frac{4}{S_1} \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}} + C.$$

若 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}$ 发散, 则对上式令 $N \rightarrow +\infty$ 得 $+\infty \leq C$ 矛盾! 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} < +\infty$. □

例题 0.8

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 0.$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 设 $\alpha \in (0, 1), \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$.

注 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}} = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛可知 $\sum_{k=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 收敛, 故 $\sum_{k=1}^n o\left(\frac{1}{k^2}\right) = O(1), \forall n \in \mathbb{N}$.

证明

1. 由条件可知, 存在 $c > 0, N \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall n \geq N$ 有

$$b_n \leq \frac{c}{2}n, \quad b_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > c > 0.$$

不妨设 $N = 1$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{c}{b_n} \Rightarrow a_1 > a_{n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{b_k} \right).$$

于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_1 \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{c}{b_k}} = a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{c}{b_k}\right)} \\ &\leq a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)} = a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]} \\ &= a_1 e^{-2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O(1)} = a_1 e^{-2[\ln n + O(1)] + O(1)} \\ &= a_1 e^{-2 \ln n + O(1)} \sim \frac{C}{n^2}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 由条件可知, 当 n 充分大时, 有

$$n^{\alpha} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

从而不妨设 $\{a_n\}$ 递减. 再根据条件可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$n^{\alpha} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > \frac{\lambda}{2}, \forall n \geq N.$$

故

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\lambda}{2n^{\alpha}}, \forall n \geq N.$$

于是对 $\forall n \geq N$, 有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_N \prod_{k=N}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2k^{\alpha}}} = a_N e^{-\sum_{k=N}^n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{2k^{\alpha}}\right)} \\ &= a_N e^{-\sum_{k=N}^n \left[\frac{\lambda}{2k^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right]} \stackrel{\text{命题??}}{=} a_N e^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} + O(n^{1-\alpha}) + O(n^{1-2\alpha})\right]} \end{aligned}$$

$$= a_N e^{-\left[\frac{1}{2(1-\alpha)} + O(n^{1-\alpha})\right]} \leq a_N e^{-Cn^{1-\alpha}}, n \rightarrow \infty.$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Cn^{1-\alpha}} < +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.


□

命题 0.3

证明:

1. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 且 $\sum b_n$ 部分和有界.
2. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调有界且 $\sum b_n$ 部分和收敛.

▲

 **笔记** 这个命题说明:A-D 判别法是级数收敛的“充要条件”. 积分版本见命题??.

证明 充分性就是由级数收敛的 A-D 判别法. 下证必要性.

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 存在 $n_i \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} u_n \right| \leq \frac{1}{i^3}, \forall k \geq n_i, p \in \mathbb{N}.$$

定义

$$a_0 = 1, \quad a_n \triangleq \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq n_1 \\ \frac{1}{i}, & n_i < n \leq n_{i+1} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{u_n}{a_n}.$$

显然 $a_n \searrow 0$. 当 $1 \leq n \leq n_1$ 时, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n_1} |u_k|.$$

当 $n > n_1$ 时, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $n_k < n \leq n_{k+1}$, 于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n b_j \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} i u_j + k \sum_{j=n_k+1}^n u_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} i \left| \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} u_j \right| + k \left| \sum_{j=n_k+1}^n u_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i^3} + \frac{k}{k^3} \leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由第 1 问可知, 存在 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 使得 $u_n = \alpha_n \beta_n$, 并且 $\{\alpha_n\}$ 单调递减趋于 0, $\sum \beta_n$ 部分和有界. 令

$$a_n \triangleq \sqrt{\alpha_n}, \quad b_n \triangleq \beta_n \sqrt{\alpha_n} = \beta_n a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

显然 $a_n \searrow 0$, 进而 $\{a_n\}$ 单调有界. 又 $\sum \beta_n$ 部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知, $\sum b_n$ 部分和收敛.

□

例题 0.9 设实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t \neq s$ 是一个重排. 证明: 对任何 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|n - f(n)| > N$.

证明 若 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|n - f(n)| \leq N$, 那么对 $\forall m > N$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \text{ 中一定不包含 } a_1, a_2, \dots, a_m, a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(m-N)}.$$

并且 $\sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k$ 至多含有 $m + N + m - (2m - N) = 2N$ 项.

故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n| \leq \varepsilon$. 于是对 $\forall m > N_1$, 就有

$$\left| \sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq 2N\varepsilon.$$

令 $m \rightarrow +\infty$ 得 $|s - t| \leq 2N\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $s = t$, 矛盾! \square

例题 0.10

1. 设 f 满足: 对任何绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 都有 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 绝对收敛, 证明 $f(x) = O(x), x \rightarrow 0$.
2. 设 f 满足: 对任何收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 都有 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 收敛, 证明存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x) = kx$.

证明

1. 反证, 若 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x = 0$ 邻域内无界, 则 $\exists x_n \rightarrow 0$, 使得

$$\left| \frac{f(x_n)}{x_n} \right| > n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$|x_{n_k}| < \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\frac{2}{k^2 |x_{n_k}|} - \frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} = \frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} > 1,$$

于是存在正整数 m_k , 使得

$$\frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} < m_k < \frac{2}{k^2 |x_{n_k}|}. \quad (5)$$

令

$$a_n \triangleq x_{n_k}, \quad m_{k-1} < n \leq m_k.$$

则由(5)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k |x_{n_k}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < +\infty.$$

由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(a_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k |f(x_{n_k})| < +\infty. \quad (6)$$

又由(4)(5)式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f(a_n)| &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k |f(x_{n_k})| \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_k n_k |x_{n_k}| \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} k m_k |x_{n_k}| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \end{aligned}$$

这与(6)式矛盾!

2. 目标证明 f 在 $x = 0$ 邻域满足 Cauchy 方程. 考虑 $g(x, y) = f(x+y) + f(-x) + f(-y)$. 如果对任何 0 的开邻域 U 都有 g 在 $U \times U$ 上不恒为 0, 那么存在 $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ 使得 $g(x_n, y_n) \neq 0$.

考虑

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x_1 + y_1) - x_1 - y_1, (x_1 + y_1) - x_1 - y_1, \dots, (x_1 + y_1) - x_1 - y_1 +}_{m_1} \\ &\underbrace{(x_2 + y_2) - x_2 - y_2, (x_2 + y_2) - x_2 - y_2, \dots, (x_2 + y_2) - x_2 - y_2 +}_{m_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

上述级数的部分和只可能出现 $x_n + y_n, y_n, 0$, 而当 $n \rightarrow +\infty$ 时它们都趋于 0, 因此上述级数收敛. 由题目条件, 我们有

$$\underbrace{(f(x_1) + f(y_1)) + f(-x_1) + f(-y_1), \dots, (f(x_1) + f(y_1)) + f(-x_1) + f(-y_1))}_{m_1} +$$

$$\underbrace{(f(x_2) + f(y_2)) + f(-x_2) + f(-y_2), \dots, (f(x_2) + f(y_2)) + f(-x_2) + f(-y_2))}_{m_2} +$$

$$\vdots$$

收敛. 由收敛级数加括号也收敛, 我们知道对任何一组 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 都有 $\sum_{n=1}^{\infty} m_n g(x_n, y_n)$ 收敛. 这显然不可能! 因此我们证明了 $f(x+y) + f(-x) + f(-y)$ 在某个 $U \times U$ 上恒为 0, 这里 U 是一个开区间. 现在由

$$f(0) + f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

知

$$f(x-x) + f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f \text{ 是奇函数,}$$

即 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

再证明 f 在 $x=0$ 连续. 设 $x_n \rightarrow 0$, 我们考虑收敛级数 $x_1 - x_1 + x_2 - x_2 + \dots$, 故级数

$$f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) - f(x_2) + \dots$$

收敛. 考虑上述级数部分和可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, 从而 f 在 $x=0$ 连续. 现在由定理??知存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x) = kx$.

□

例题 0.11 给定 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = +\infty(-\infty),$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty(-\infty),$$

并指出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| = +\infty \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = +\infty.$$

 **笔记** 熟记命题??.

证明 记 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, 不妨设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

于是对任意 $C > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N$, 成立 $S_n \geq C$. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{f(x)}{1-x} \stackrel{\text{命题??}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[\sum_{n=0}^N S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n \right] \\&\geq \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[\sum_{n=0}^N S_n x^n + C \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right] \\&= C \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{x^{N+1}}{1-x} = C,\end{aligned}$$

由 C 任意性, 我们证明了

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f(x) = \frac{x-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) x^n.$$

□

命题 0.4

1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是两两不同的实数, C_1, C_2, \dots, C_n 为复数. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j x} = 0 \Leftrightarrow C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. 设 $m \geq 2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{C}$. 若

$$\lambda_j - \lambda_k \neq 2\ell\pi, \forall 1 \leq j < k \leq m, \ell \in \mathbb{Z},$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{n i \lambda_j} = 0 \Leftrightarrow C_j = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$



笔记 想法即类比傅立叶系数, 做积分使得系数暴露出来. 离散版本可以类似连续版本证明, 连续的处理方式核心是乘上某个 $e^{-i\lambda x}$ 均值形式的积分取极限, 从而离散的时候应该是乘上某个 $e^{-i\lambda y}$ 均值的取和.

证明

1. 充分性显然, 只需证明必要性. 考虑 $f(x) \triangleq \sum_{j=1}^n C_j e^{i\lambda_j x}$, 其中 i 是虚数单位. 对 $T > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} f(x) dx &= \int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} \left(\sum_{j=1}^n C_j e^{i\lambda_j x} \right) dx \\&= \sum_{j=1}^n C_j \int_T^{2T} e^{i(\lambda_j - \lambda_k)x} dx = TC_k + \sum_{j \neq k} C_j \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)2T} - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)T}}{\lambda_j - \lambda_k},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|C_k| &= \frac{\left| \int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} f(x) dx - \sum_{j \neq k} C_j \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)2T} - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)T}}{\lambda_j - \lambda_k} \right|}{T} \\&\leq \frac{\int_T^{2T} |f(x)| dx + \sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|\lambda_j - \lambda_k|}}{T} = \frac{|f(\theta_T)|T + \sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|\lambda_j - \lambda_k|}}{T},\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自积分中值定理且 $\theta_T \in (T, 2T)$. 现在由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 可知

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} C_k = 0, k = 1, 2, \dots, n,$$

这就证明了 $C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$, 必要性得证.

2. 充分性显然, 只需证明必要性. 对 $k = 1, 2, \dots, m$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(C_k + \sum_{j \neq k} C_j e^{in(\lambda_j - \lambda_k)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-in\lambda_k} \sum_{j=1}^m C_j e^{in\lambda_j} \right) = 0.$$

现在由 Stolz 定理我们有

$$\begin{aligned} C_k &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \neq k} C_j e^{in(\lambda_j - \lambda_k)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell=0}^n \sum_{j \neq k} C_j e^{i\ell(\lambda_j - \lambda_k)}}{n+1} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} \sum_{\ell=0}^n C_j e^{i\ell(\lambda_j - \lambda_k)}}{n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j - \lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}}}{n+1}. \end{aligned}$$

结合

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{j \neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j - \lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}} \right|}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|1-e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}|}}{n+1} = 0,$$

我们知道 $C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$, 这就证明了必要性!

□

例题 0.12 设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m \sin(n\alpha_i) = 0.$$

证明: 必有一个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $\frac{\alpha_i}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

 **笔记** 本题是命题 0.4 的一个应用.

证明 由 Euler 公式得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \frac{e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}}{2i} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m (e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0.$$

打开括号得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1, 1\}} (-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)} = 0. \quad (7)$$

注意到若有

$$\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m = \varepsilon_1' \alpha_1 + \varepsilon_2' \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m' \alpha_m + 2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

则

$$e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)} = e^{in(\varepsilon_1' \alpha_1 + \varepsilon_2' \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m' \alpha_m)}.$$

因此将(7)式中满足(8)式的项合并, 得到新的和式的任意两项中的 $\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m$ 的差值都不等于 $2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$. 于是由命题 0.4 知

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1, 1\}} (-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)}$$

恒为 0. 否则, 上式每项系数 $(-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} = 0$ 矛盾! 故现在就有 $\prod_{j=1}^m (e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 取 $n = 1$,

则必存在一个 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得

$$e^{i\alpha_j} - e^{-i\alpha_j} = 0 \Rightarrow e^{2i\alpha_j} = 0 \Rightarrow 2\alpha_j = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\alpha_j}{\pi} = k \in \mathbb{Z}.$$

□