

0.1 其他

例题 0.1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 A 成立: $f(PAP^{-1}) = f(A)$. 证明: 存在非零常数 c , 使得 $P'P = cI_n$.

证明 证法一: 由假设知 $f(A) = \text{tr}(AA')$, 因此

$$f(PAP^{-1}) = \text{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P') = \text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA').$$

以下设 $P'P = (c_{ij})$, $(P'P)^{-1} = (d_{ij})$. 注意 $P'P$ 是对称矩阵, 后面要用到. 令 $A = E_{ij}$, 其中 $1 \leq i, j \leq n$. 并将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned} (P'P)A(P'P)^{-1}A' &= (P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji} \\ &= \begin{pmatrix} & j & \\ c_{1i} & & \\ c_{2i} & & \\ \vdots & & \\ c_{ii} & & \\ \vdots & & \\ c_{ni} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & i & \\ d_{1j} & & \\ d_{2j} & & \\ \vdots & & \\ d_{jj} & & \\ \vdots & & \\ d_{nj} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & i & \\ c_{1i}d_{jj} & & \\ c_{2i}d_{jj} & & \\ \vdots & & \\ c_{ii}d_{jj} & & \\ \vdots & & \\ c_{ni}d_{jj} & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是 $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = c_{ii}d_{jj}$. 而 $\text{tr}(AA') = \text{tr}(E_{ij}E_{ji}) = \text{tr}(E_{ii}) = 1$. 则由 $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj} = 1. \quad (1)$$

再令 $A = E_{ij} + E_{kl}$, 其中 $1 \leq i, j, k, l \leq n$. 不妨设 $k \geq i, l \geq j$, 将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$(P'P)A(P'P)^{-1}A' = (P'P)(E_{ij} + E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji} + E_{lk})$$

$$= \left[\begin{pmatrix} & j & \\ c_{1i} & & \\ c_{2i} & & \\ \vdots & & \\ c_{ii} & & \\ \vdots & & \\ c_{ki} & & \\ \vdots & & \\ c_{ni} & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & l & \\ c_{1k} & & \\ c_{2k} & & \\ \vdots & & \\ c_{ik} & & \\ \vdots & & \\ c_{kk} & & \\ \vdots & & \\ c_{nk} & & \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} & i & \\ d_{1j} & & \\ d_{2j} & & \\ \vdots & & \\ d_{jj} & & \\ \vdots & & \\ d_{lj} & & \\ \vdots & & \\ d_{nj} & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & k & \\ d_{1l} & & \\ d_{2l} & & \\ \vdots & & \\ d_{jl} & & \\ \vdots & & \\ d_{ll} & & \\ \vdots & & \\ d_{nl} & & \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} & j & & l \\ c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & \cdots & c_{kk} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & i & & k \\ d_{1j} & \cdots & d_{1l} \\ d_{2j} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{jj} & \cdots & d_{jl} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{lj} & \cdots & d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{nj} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & i & & k \\ c_{1i}d_{jj} + c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl} + c_{1k}d_{ll} \\ c_{2i}d_{jj} + c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl} + c_{2k}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii}d_{jj} + c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl} + c_{ik}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki}d_{jj} + c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl} + c_{kk}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni}d_{jj} + c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl} + c_{nk}d_{ll} \end{pmatrix}$$

从而 $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = c_{ii}d_{jj} + c_{kk}d_{ll} + c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj}$. 而

$$\text{tr}(AA') = \text{tr}((E_{ij} + E_{kl})(E_{ji} + E_{lk})) = \text{tr}(E_{ij}E_{ji} + E_{ij}E_{lk} + E_{kl}E_{ji} + E_{kl}E_{lk}) = 2 + 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

于是由 $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj} + c_{kk}d_{ll} + c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj} = 2 + 2\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2)$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号. 由上述(1)(2)两式可得

$$c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

在上式中令 $j = l, i \neq k$, 注意到 $d_{jj} \neq 0$, 故有 $c_{ik} + c_{ki} = 0$, 又因为 $P'P$ 是对称矩阵, 所以 $c_{ik} = c_{ki}$. 故 $c_{ik} = 0, \forall i \neq k$. 于是 $P'P$ 是一个对角矩阵, 从而由(1)式可得 $d_{jj} = c_{jj}^{-1}$, 由此可得 $c_{ii} = c_{jj}, \forall i, j$. 因此 $P'P = cI_n$, 其中 $c = c_{11} \neq 0$.

证法二: 我们把数域限定在实数域上, 并取 $V = M_n(\mathbb{R})$ 上的 **Frobenius 内积**, 则 $f(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|^2$. 设 $\varphi(A) = PAP^{-1}$ 为 V 上的线性变换, 则题目条件可改写为 $\|\varphi(A)\| = \|A\|$ 对任意的 $A \in V$ 成立, 于是由定理??-2 可知 φ 是正交算子, 从而由命题??(2) 即得结论. \square

0.1.1 矩阵方幂的计算

计算方阵的方幂一般有三种方法:

- (1) 基于相似变换的计算法, 更常见的情形是利用相似标准形 (比如 Jordan 标准形) 来进行计算.
- (2) 利用递推公式法或者说数学归纳法.
- (3) 基于方阵分解. 然后利用二项式定理来进行计算.

例题 0.2 设 A, B 均是 n 阶方阵且满足 $A^2 = A, B^2 = B, (A+B)^2 = A+B$, 求 AB .

解 由 $(A+B)^2 = A+B$ 得到

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A + B,$$

又 $A^2 = A, B^2 = B$, 所以

$$AB = -BA,$$

从而

$$A \cdot AB = -A \cdot BA,$$

$$AB \cdot A = -BA \cdot A,$$

即

$$AB = -ABA;$$

$$-BA = ABA,$$

因此

$$AB = BA.$$

由此得到 $2AB = O$, 故有 $AB = O$.

□

例题 0.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$B = Q^{-1}AQ$, 其中 Q 为任意 3 阶可逆矩阵 (或者说 B 与 A 相似). 求 $B^{2024} - 2A^2$.

解 计算得到

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^4 = E$. 故 $B^{2024} = Q^{-1}A^{2024}Q = E$. 所以

$$B^{2024} - 2A^2 = E - 2 \begin{pmatrix} -E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

k 为正整数, 求 A^k .

注 不难发现 A 是实对称矩阵, 且是正交矩阵, 因此 A 一定可以对角化.

解 注意到 $A^2 = 4E = 2^2E$, 所以

$$A^3 = A^2 \cdot A = 4A = 2^2A, \quad A^4 = 2^4E.$$

故由归纳法可知

$$A^k = \begin{cases} 2^{k-1}A, & k \text{ 为奇数,} \\ 2^kE, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

□

例题 0.5 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{100} .

解 设

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 A 可写为如下分块形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix},$$

于是

$$A^{100} = \begin{pmatrix} A_1^{100} & \\ & A_2^{100} \end{pmatrix}.$$

将 A_1, A_2 分解为

$$A_1 = 2E + 3S, \quad \text{其中} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = E + 2H, \quad \text{其中} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 S 与 E, H 与 E 均可交换且

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^i = O \ (i \geq 3), \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^i = O \ (i \geq 3).$$

由二项式定理

$$\begin{aligned} A_1^{100} &= (2E + 3S)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} (2E)^{100-i} (3S)^i \\ &= \binom{100}{0} (2E)^{100} + \binom{100}{1} (2E)^{99} \cdot 3S + \binom{100}{2} (2E)^{98} (3S)^2 \\ &= 2^{100} E + 300S \cdot 2^{99} E + \frac{100 \times 99}{2} \cdot 9S^2 \cdot 2^{98} E \\ &= 2^{100} E + 300 \cdot 2^{99} \cdot S + 50 \cdot 99 \cdot 9 \cdot 2^{98} \cdot S^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{101} & 2^{100} & 0 \\ 11 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{99} & 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{101} & 2^{100} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{100} &= (E + 2H)^{100} = E^{100} + 100 \cdot E^{99} \cdot (2H) + \frac{100 \times 99}{2} \cdot E^{98} \cdot (2H)^2 \\ &= E + 200H + 19800H^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 200 & 19800 \\ 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{101} & 2^{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{99} & 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{101} & 2^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 200 & 19800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

0.1.2 矩阵可逆的判定及计算

求逆矩阵的方法通常有下面三种.

(1) 公式法, 利用公式 $A \cdot A^* = |A|E$, 即 $A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$, 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

(2) 初等行变换法, 即

$$(A|E) \longrightarrow (E|P),$$

则 $A^{-1} = P$.

(3) 定义法, 由 $AX = E$ 求出 X .

若矩阵 A 没有具体给出, 是抽象的, 则首先想到的是用定义来求 A^{-1} .

命题 0.1

设 A 为 n 阶矩阵, 则有

$$\begin{aligned} A \text{ 可逆} &\Leftrightarrow \exists B \text{ 使得 } BA = E \\ &\Leftrightarrow \exists C \text{ 使得 } AC = E \\ &\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n \\ &\Leftrightarrow A \sim E \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的最简行阶梯形为 } E \\ &\Leftrightarrow |A| \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{齐次线性方程组 } Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ &\Leftrightarrow \text{线性方程组 } Ax = b \text{ 有唯一解} \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的特征值均不为 } 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的伴随矩阵 } A^* \text{ 可逆} \\ &\Leftrightarrow A \text{ 是一些初等矩阵之积.} \end{aligned}$$

例题 0.6 设 A_1 为 m 阶可逆矩阵, A_4 为 n 阶可逆矩阵, A_2 为 $m \times n$ 矩阵, A_3 为 $n \times m$ 矩阵. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

判断何时矩阵 A 可逆. 并在 A 可逆时求 A^{-1} .

解 解法一: 若 A 可逆, 则存在矩阵 X 使得 $AX = E_{m+n}$. 令

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix},$$

则有

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1X_1 + A_2X_3 & A_1X_2 + A_2X_4 \\ A_3X_1 + A_4X_3 & A_3X_2 + A_4X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_3 = E_m, \\ A_1X_2 + A_2X_4 = O, \\ A_3X_1 + A_4X_3 = O, \\ A_3X_2 + A_4X_4 = E_n, \end{cases}$$

由于 A_4 可逆, 所以 $X_3 = -A_4^{-1}A_3X_1$. 进而

$$A_1X_1 + A_2(-A_4^{-1}A_3)X_1 = E_m,$$

即

$$(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)X_1 = E_m.$$

所以 $A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ 可逆, 且 $X_1 = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}$. 由此得到

$$X_3 = -A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}.$$

同理, 由 A_1 可逆得到 $X_2 = -A_1^{-1}A_2X_4$, 从而

$$(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)X_4 = E_n.$$

故 $A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 可逆且 $X_4 = (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}$. 由此可得

$$X_2 = -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}.$$

这样, 若 A 可逆, 则 $A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆.

反之, 若 $A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆, 令

$$X = \begin{pmatrix} (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \\ -A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix},$$

则有 $AX = E_{m+n}$. 这便得到 A 可逆当且仅当 $A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆且

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \\ -A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

解法二: 由打洞原理可知

$$|A| = |A_1| |A_4 - A_3A_1^{-1}A_2| = |A_4| |A_1 - A_2A_4^{-1}A_3|.$$

故当且仅当 $A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆时 A 可逆. 注意到

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -A_3A_1^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A_1^{-1}A_2 \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix} = E.$$

故

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} E & O \\ -A_3A_1^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & -A_1^{-1}A_2 \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} E & -A_1^{-1}A_2 \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -A_3A_1^{-1} & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \\ O & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -A_3A_1^{-1} & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \\ - (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

实际上, 到这一步已经完成了这题. 接下来的证明是为了与解法一相互验证 (也可以类似命题??的解法二进行验证). 注意到

$$\begin{aligned} &(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3) \left(A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} \right) \\ &= E + A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} - A_2A_4^{-1}A_3A_1^{-1} - A_2A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} \\ &= E + A_2 \left[(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} - A_4^{-1} - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \right] A_3A_1^{-1} \\ &= E + A_2(E - A_4^{-1}(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2) - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2)(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} \\ &= E + A_2(E - E + A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2 - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2)(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}A_3A_1^{-1} \end{aligned}$$

$$= E,$$

$$\begin{aligned} A_4^{-1} A_3 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} &= A_4^{-1} A_3 \left(A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1} \right) \\ &= A_4^{-1} A_3 A_1^{-1} + A_4^{-1} A_3 A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1} \\ &= (A_4^{-1} (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2) + A_4^{-1} A_3 A_1^{-1} A_2) (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1} \\ &= (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1}. \end{aligned}$$

故

$$(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} = A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1}.$$

$$A_4^{-1} A_3 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} = (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \\ -(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_3 A_1^{-1} & (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} & -A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \\ -A_4^{-1} A_3 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} & (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□