0.1 矩阵的运算

命题 0.1 (标准单位向量和基础矩阵)

1. 标准单位向量

n 维标准单位列向量是指下列 n 个 n 维列向量:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

向量组 $e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 则被称为 n 维标准单位行向量, 容易验证标准单位向量有下列基本性质:

1. 若 $i\neq j$, 则 $e_i'e_j=0$, 而 $e_i'e_i=1$;
2. 若 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则 Ae_i 是 A 的第 i 个列向量;$e_i'A$ 是 A 的第 i 个行向量;
3. 若 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $e_i'Ae_j=a_{ij}$;
4. **判定准则:** 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 则 $A=B$ 当且仅当 $Ae_i=Be_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 成立, 也当且仅当 $e_i'A=e_i'B(1\leqslant i\leqslant m)$ 成立.

2. 基础矩阵

n 阶基础矩阵 (又称初级矩阵) 是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n\}$. 这里 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵, 它的第 (i,j) 元素等于 1, 其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积:$E_{ij}=e_ie_j^T$. 由此不难证明基础矩阵的下列性质:

1. 若 $j\neq k$, 则 $E_{ij}E_{kl}=0$;
2. 若 $j=k$, 则 $E_{ij}E_{kl}=E_{il}$;
3. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A=(a_{ij})$, 则 $A=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$;
4. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A=(a_{ij})$, 则 $E_{ij}A$ 的第 i 行是 A 的第 j 行,$E_{ij}A$ 的其他行全为零;
5. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A=(a_{ij})$, 则 AE_{ij} 的第 j 列是 A 的第 i 列,AE_{ij} 的其他列全为零;
6. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A=(a_{ij})$, 则 $E_{ij}AE_{kl}=a_{jk}E_{il}$.

笔记 标准单位向量和基础矩阵虽然很简单, 但如能灵活应用就可以得到意外的结果. 我们在今后将经常应用它们, 因此请读者熟记这些结论.(借助单位矩阵进行记忆)

一些常见的想法:

1. 可以将一般的矩阵写成标准单位列向量或基础矩阵的形式 (这个形式可以是和式的形式, 也可以是分块的形式).

2. 如果要证明两个矩阵相等, 那么我们就可以考虑判定法则.

3. 如果某种等价关系蕴含了一种递减的规律 (项数减少, 阶数降低等), 那么我们就可以考虑数学归纳法, 去尝试根据这个规律得到一些结论.

定义 0.1 (循环矩阵)

1. 下列形状的 n 阶矩阵称为 n 阶基础循环矩阵:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}.$$

2. 下列形状的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

笔记 记 $C_n(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{K}$ 上所有 n 阶循环矩阵构成的集合.

命题 0.2 (循环矩阵的性质)

1. 若 $\boldsymbol{J}$ 为 n 阶基础循环矩阵, 则

$$\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

2. 若 A 是循环矩阵, 即

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

则循环矩阵 A 可以表示为基础循环矩阵 J 的多项式:

$$A=a_1I_n+a_2J+a_3J^2+\cdots+a_nJ^{n-1}.$$

反之, 若一个矩阵能表示为基础循环矩阵 J 的多项式, 则它必是循环矩阵.

3. 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.
4. 基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的逆仍是循环矩阵, 并且

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{pmatrix} O & I_k \\ I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

笔记 循环矩阵的性质及应用详见谢启鸿博客.

证明

1. 将 $\boldsymbol{J}$ 写作 $(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$, 其中 e_i 是标准单位列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$. 由分块矩阵乘法并注意到 $\boldsymbol{J}e_i$ 就是 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 列, 可得

$$\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{J}\left(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1}\right)=\left(\boldsymbol{J}e_n, \boldsymbol{J}e_1, \cdots, \boldsymbol{J}e_{n-1}\right)=\left(e_{n-1}, e_n, \cdots, e_{n-2}\right).$$

不断这样做下去就可以得到结论.

2. 由循环矩阵和基础循环矩阵的定义和循环矩阵的性质 1容易得到证明.

3. 由循环矩阵的性质 2可知两个循环矩阵之积可写为基础循环矩阵 J 的两个多项式之积. 又由循环矩阵的性质 1, 可知 $J^n = I_n$. 因此两个循环矩阵之积可以表示为基础循环矩阵 J 的多项式, 故由循环矩阵的性质 1即得结论.
4. 利用矩阵初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} O & \boldsymbol{I}_{n-k} & \boldsymbol{I}_{n-k} & O \\ \boldsymbol{I}_k & O & O & \boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & O & O & \boldsymbol{I}_k \\ O & \boldsymbol{I}_{n-k} & \boldsymbol{I}_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

从而 $\boldsymbol{J}^{-1} = \begin{pmatrix} O & \boldsymbol{I}_k \\ \boldsymbol{I}_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$

□

命题 0.3 (循环行列式关于 n 次方根的计算公式)

已知下列循环矩阵 A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

则 A 的行列式的值为:

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根.

笔记 关键是要注意到

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

然后再利用命题??就能得到分解 $AV = V\Lambda$.

证明 作多项式 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$, 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

从而 $V^{-1}AV = \Lambda$, 又因为 ε_i 互不相同, 所以 $|V| \neq 0$, 故

$$|A| = |V^{-1}AV| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

□

命题 0.4 (b-循环矩阵)

设 b 为非零常数, 下列形状的矩阵称为 b -循环矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 同阶 b -循环矩阵的乘积仍然是 b-循环矩阵;

(2) 求上述 b-循环矩阵 A 的行列式的值.

证明

(1) (证明类似于循环矩阵的性质3.) 设 $J_b=\begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ b & O \end{pmatrix}$, 则 $J_b^k=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ bI_k & O \end{pmatrix}$, $0\le k\le n-1$. 从而 $J_b^n=bI_n$ 且 $A=a_1I_n+a_2J_b+a_3J_b^2+\cdots+a_nJ_b^{n-1}$. 因此同阶 $b-$ 循环阵的乘积仍然可以写成 J_b 的 $n-1$ 次多项式, 故同阶 $b-$ 循环阵的乘积仍然是 $b-$ 循环矩阵.

(2) (证明完全类似循环行列式计算公式的证明) 作多项式 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$, 令 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 b 的所有 n 次方根. 又令

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}=V\Lambda$$

从而 $V^{-1}AV=\Lambda$, 又因为 ε_i 互不相同, 所以 $|V|\neq 0$, 故

$$|A|=|V^{-1}AV|=|\Lambda|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

□

命题 0.5 (基础幂零 Jordan 块)

设 n 阶基础幂零 Jordan 块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A^k=\begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}, 1\leqslant k\leqslant n.$$

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 写为 $\boldsymbol{A}=(0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$, 其中 $\mathbf{e}_i$ 是标准单位列向量. 由分块矩阵乘法并注意 $\boldsymbol{A}\mathbf{e}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列, 因此

$$\boldsymbol{A}^2=(0,\boldsymbol{A}\mathbf{e}_1,\boldsymbol{A}\mathbf{e}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\mathbf{e}_{n-1})=(0,0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_{n-2})$$

不断这样做下去就可得到结论. □

命题 0.6

设 A 为 n 阶幂零矩阵, 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k\leqslant n$, 使得 $A^k=O$.

证明 由幂零矩阵的定义知, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $A^k=O$.. 由于幂零矩阵的秩都为 0, 因此 A 的特征多项式为 x^n, 由 Cayley-Hamilton 定理知 $A^n=O$, 故 $k\leqslant n$. □

例题 0.1 设 A 是 n 阶矩阵,A 适合 $A^n=O$ 时,I_n-A 必是可逆矩阵.

证明 注意到

$$I_n=I_n-A^n=(I_n-A)\left(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1}\right).$$

故此时 I_n-A 必是可逆矩阵. □

例题 0.2 设 A 是 n 阶幂零矩阵,A 适合 $AB+BA=B$ 对任意 n 阶矩阵 B 成立, 那么 $B=O$.

笔记 若已知矩阵乘法的相关等式, 可以尝试得到一些递推等式.

证明 假设 $A^k=O$, 其中 k 为某个正整数. 由条件可得 $AB=B(I_n-A)$, 于是

$$O=A^kB=A^{k-1}B(I_n-A)=A^{k-2}B(I_n-A)^2=\cdots=B(I_n-A)^k.$$

由例题 0.1知 I_n-A 是可逆矩阵, 从而 $B=O$. □

命题 0.7 (多项式的友矩阵和 Frobenius 块)

设首一多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,$f(x)$ 的友阵

$$\boldsymbol{C}(f(x))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

则 $|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{C}(f(x))|=f(x)$.

$\boldsymbol{C}(f(x))$ 的转置 $F(f(x))$ 称为 $f(x)$ 的 Frobenius 块. 即

$$\boldsymbol{C}^T(f(x))=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

并且容易验证 $C(f(x))$ 具有以下性质, 其中 e_i 是标准单位列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$:

$$C(f(x))e_i = e_{i+1}\ (1\leqslant i\leqslant n-1),\ C(f(x))e_n = -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}e_i.$$

证明 $|xI_n - C(f(x))| = f(x)$ 的证明见友矩阵的特征多项式. □

例题 0.3 求下列矩阵的逆矩阵 $(a_n\neq 0)$:

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

解 用初等变换法不难求得

$$F^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

□

命题 0.8

和所有 n 阶对角矩阵乘法可交换的矩阵必是对角矩阵.

证明 由矩阵乘法易得. □

命题 0.9 (纯量矩阵的刻画)

1. 和所有 n 阶奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.
2. 和所有 n 阶非奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.
3. 和所有 n 阶正交阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.
4. 和所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

证明 首先设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

1. 设 $E_{ij}(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$ 为基础矩阵, 因为基础矩阵都是奇异阵, 所以由条件可知 $E_{ij}A = AE_{ij}$. 注意到 $E_{ij}A$ 是将 A 的第 j 行变为第 i 行而其他行都是零的 n 阶矩阵,AE_{ij} 是将 A 的第 i 列变为第 j 列而其他列都是零的 n 阶矩阵, 于是我们有

$$\begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & & & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \end{array}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ij}=0(i\neq j)$,$a_{ii}=a_{jj}(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$, 因此 A 是纯量阵.

2. 设 $D = \mathrm{diag}\{1, 2, \cdots, n\}$ 为对角阵, 因为 D 为非奇异阵, 所以由条件可知 $AD = DA$. 进而

$$
\begin{aligned}
&AD = DA \\
\Leftrightarrow\ & A\,(\boldsymbol{e}_1, 2\boldsymbol{e}_2, \cdots, n\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, 2\boldsymbol{e}_2, \cdots, n\boldsymbol{e}_n)\,A \\
\Leftrightarrow\ & (A\boldsymbol{e}_1, 2A\boldsymbol{e}_2, \cdots, nA\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1 A, 2\boldsymbol{e}_2 A, \cdots, n\boldsymbol{e}_n A) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $ja_{ij} = ia_{ij}\,(i \neq j)$, 从而 $(i-j)\,a_{ij} = 0\,(i \neq j)$, 于是 $a_{ij} = 0\,(i \neq j)$. 故 $A = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ 也为对角阵.

设 $P_{ij}(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为非奇异阵, 所以由条件可知 $AP_{ij} = P_{ij}A$. 进而可得

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & \cdots & a_{jj} & & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& & a_{ii} & \cdots & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & \cdots & a_{ii} & & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& & a_{jj} & \cdots & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ii} = a_{jj}(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$, 于是 A 为纯量阵.

3. 设第二类初等阵 $P_i(-1)(1 \leqslant i \leqslant n)$, 因为 $P_i(-1)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是正交阵, 所以由条件可知 $P_i(-1)A = AP_i(-1)$. 进而可得

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & -a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ij} = -a_{ij}\,(i \neq j)$, 从而 $a_{ij} = 0\,(i \neq j)$. 于是 $A = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ 为对角阵.

设 $P_{ij}(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为正交阵, 所以由条件可知 $AP_{ij} = P_{ij}A$. 进而

可得

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \phantom{a_{nn}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & a_{jj} & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & a_{ii} & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \phantom{a_{nn}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & a_{ii} & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & a_{jj} & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ii} = a_{jj}(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$, 于是 A 为纯量阵.

4. 可以由上面 (1)(2)(3) 中任意一个证明得到. 注意如果此时用 (3) 的证明方法, 那么我们可以先考虑 A 与第一类初等矩阵 $P_i(c)(c \neq 1, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 的乘法交换性. 而不是像 (3) 中只能考虑 $P_i(-1)(1 \leqslant i \leqslant n)$.

□

命题 0.10 (零矩阵的充要条件)

1. $m \times n$ 实矩阵 $A = O$ 的充要条件是适合条件 $AA' = O$ 或 $\mathrm{tr}(AA') \geqslant 0$, 等号成立;
2. $m \times n$ 复矩阵 $A = O$ 的充要条件是适合条件 $A\overline{A}' = O$ 或 $\mathrm{tr}(A\overline{A}') \geqslant 0$, 等号成立.

♠

证明

1. (1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 AA' 的第 (i, i) 元素等于零, 即
$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$
又因为 a_{ij} 都是实数, 所以必有 $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 故 $A = O$.
(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则通过计算可得
$$\mathrm{tr}(AA') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0,$$
等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$, 即 $A = O$.
2. (1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 $A\overline{A'}$ 的第 (i, i) 元素等于零, 即
$$|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$
又因为 a_{ij} 都是复数, 所以可设 $a_{ij} = b_{ij} + \mathrm{i}c_{ij}$, 其中 $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 于是
$$b_{i1}^2 + c_{i1}^2 + b_{i2}^2 + c_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 + c_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$
再结合 $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, 可知 $b_{ij} = c_{ij} = 0$. 即 $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 故 $A = O$.
(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则通过计算可得
$$\mathrm{tr}(A\overline{A}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geqslant 0,$$
等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$, 即 $A = O$.

□

命题 0.11 (对称阵是零矩阵的充要条件)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有
$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

♠

证明 只要证明充分性. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 令 $\alpha = \boldsymbol{e}_i$, 是第 i 个标准单位列向量. 因为 $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 (i, i) 元素, 故

$a_{ii}=0$. 又令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j(i\neq j)$, 则

$$0=(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, 故 $a_{ij}=a_{ji}$, 又上面已经证明 $a_{ii}=a_{jj}=0$, 从而 $a_{ij}=0$, 这就证明了 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. □

命题 0.12 (反对称阵的充要条件)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是反称阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

证明 必要性 ($\Rightarrow$): 若 $\boldsymbol{A}$ 是反称阵, 则对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'=-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 而 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是数, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 比较上面两个式子便有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$.

充分性 ($\Leftarrow$): 若上式对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立, 则由 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是数, 可知 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\right)'=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}=0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{\alpha}=0$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵, 故由对称阵是零矩阵的充要条件可得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 是反称阵. □

命题 0.13

任一 n 阶方阵均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和.

笔记 构造思路: 设 $A=B+C$, 且 B 为对称矩阵,C 为反称矩阵. 则两边取转置可得

$$\begin{cases} A=B+C \\ A'=(B+C)'=B-C \end{cases}$$

解得:$B=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'),C=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 是反对称阵, 并且

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}').$$

□

注 上例中的 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对称化,$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的反对称化.

命题 0.14 (上三角阵性质)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶上三角阵且主对角线上元素全为零, 则 $\boldsymbol{A}^n=O$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶上三角阵, 若 $i<j$, 则 $A_{ij}=M_{ij}=0$.

(3) 上 (下) 三角阵的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆仍然是上 (下) 三角阵, 并且所得上 (下) 三角阵的主对角元是原上 (下) 三角阵对应主对角元的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆.

证明 (1) 证法一 (抽屉原理): 设 $A=(a_{ij})$, 当 $i\geqslant j$ 时,$a_{ij}=0$. 将 A 表示为基础矩阵 E_{ij} 之和:

$$A=\sum_{i>j}a_{ij}E_{ij}$$

因为当 $j\neq k$ 时,$E_{ij}E_{kl}=\boldsymbol{O}$, 故在 A^n 的乘法展开式中, 可能非零的项只能是具有形式 $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_{n-1}j_{n-1}}$, 但足标必须满足条件 $1\leqslant i_1<j_1<i_2<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant n$. 根据可知, 这样的项也不存在, 因此 $A^n=\boldsymbol{O}$.

证法二 (数学归纳法): 由假设 $Ae_i=a_{i1}e_1+\cdots+a_{i,i-1}e_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$, 我们只要用归纳法证明:$A^ke_k=0$ 对任意的 $1\leqslant k\leqslant n$ 都成立, 则 $A^ne_i=A^{n-i}\cdot A^ie_i=A^{n-i}\cdot 0=0$ 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$ 都成立, 从而由判定法则可知 $A^n=O$ 成立. 显然,$Ae_1=0$ 成立. 假设 $A^ke_k=0$ 对任意的 $1<k<n$ 都成立, 则

$$\begin{aligned}A^ke_k&=A^{k-1}(Ae_k)=A^{k-1}(a_{k1}e_1+\cdots+a_{k,k-1}e_{k-1})\\&=a_{k1}A^{k-1}e_1+\cdots+a_{k,k-1}A^{k-1}e_{k-1}=0.\end{aligned}$$

(2) 根据条件可设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则当 $i < j$ 时, 有

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

故 $A_{ij} = M_{ij} = 0$.

(3) 只证上三角阵的情形, 下三角阵的情形完全类似. 上三角阵的加减、数乘、乘积 (幂) 以及多项式结论的证明是显然的. 下面我们来证明伴随和求逆的结论. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶上三角阵, 即满足 $a_{ij} = 0, (\forall i > j)$. 由(2)可知 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式 $A_{ij} = 0, \forall i < j$. 于是

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是上三角阵. 而对 $\forall i \in [1,n] \cap N$, 有

我们又将 $A_{ii} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}$ 这个数称为 a_{ii} 的伴随. 这就完成了 $\boldsymbol{A}^*$ 结论的证明.

$$A_{ii} = (-1)^{2i} M_{ii} = M_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots\widehat{a_{ii}}\cdots a_{nn}.$$

由于当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 我们有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 故由上三角阵的数乘结论可知,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角阵, 其主对角元为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}A_{ii} = a_{ii}^{-1}$. 结论得证. □

命题 0.15

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是由非负实数组成的矩阵且 AB 有一行等于零, 则或者 $\boldsymbol{A}$ 有一行为零, 或者 $\boldsymbol{B}$ 有一行为零.

证明 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times s}$. 假设 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB},\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times s}$ 的第 i 行全为零. 则对 $\forall j \in [1,s] \cap N$, 都有

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{nj} = 0.$$

已知对 $\forall i \in [1,n] \cap N, j \in [1,m] \cap N$, 有 $a_{ij} \geqslant 0$; 对 $\forall i \in [1,m] \cap N, j \in [1,s] \cap N$, 有 $b_{ij} \geqslant 0$. 从而

$$a_{i1}b_{1j} = a_{i2}b_{2j} = \cdots = a_{im}b_{nj} = 0, \forall j \in [1,s] \cap N.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行不全为零, 不妨设 $a_{ik} \neq 0, k \in [1,m]\cap N$, 则由 $a_{ik}b_{kj} = 0, \forall j \in [1,s]\cap N$ 可得 $b_{kj} = 0$, 对 $\forall j \in [1,s]\cap N$ 都成立, 即 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行全为零. □

命题 0.16 (矩阵行和和列和的一种刻画)

(1) n 阶矩阵 A 第 i 行元素之和为 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 当且仅当

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

特别地,n 阶矩阵 A 的每一行元素之和等于 c 当且仅当 $A\alpha = c\cdot\alpha$, 其中 $\alpha = (1,1,\cdots,1)'$.

(2) n 阶矩阵 A 第 i 列元素之和为 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}.$$

特别地,n 阶矩阵 A 的每一列元素之和等于 c 当且仅当 $\alpha A = c\cdot\alpha$, 其中 $\alpha = (1,1,\cdots,1)$.

证明 由矩阵乘法容易得到证明. □

例题 0.4 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和等于常数 c, 求证:

(1) 对任意的正整数 k,$\boldsymbol{A}^k$ 的每一行元素之和等于 c^k;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵, 则 $c \neq 0$ 并且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每一行元素之和等于 c^{-1}.

笔记 核心想法是利用命题 0.16.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,\cdots,1)'$, 则由矩阵乘法可知,$\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和等于 c 当且仅当 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 成立.

(1) 由 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 不断递推可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = c^k\cdot\boldsymbol{\alpha}$, 故结论成立.

(2) 若 $c = 0$, 则由 $\boldsymbol{A}$ 可逆以及 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 矛盾. 在 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 的两边同时左乘 $c^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 可得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = c^{-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}$, 由此即得结论. □

命题 0.17 (矩阵可逆的等价命题)

(1)n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(2) 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$(这个等式同时也说明 $\boldsymbol{B}$ 可逆).

(3)$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(4)$\boldsymbol{A}$ 等价 (相抵) 于 n 阶单位矩阵.

(5)$\boldsymbol{A}$ 可以表示为有限个初等矩阵的积.

(6)$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量 (列向量) 线性无关.

命题 0.18

(1) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R},\lambda_1\neq 0$, 并且 $\lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3=0$ 无实根 (即原等式左边不可因式分解成 $(a_1\boldsymbol{I}_n+a_2\boldsymbol{A})(b_1\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{A})$), 则对任何 $c,d\in\mathbb{R}$, 都有 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

(2) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=(a_1\boldsymbol{A}+b_1\boldsymbol{I}_n)(a_2\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 且 $\lambda_1=a_1a_2,\lambda_2=a_1b_2+a_2b_1,\lambda_3=b_1b_2,a_1\neq 0,a_2\neq 0$. 则对任何实数对 $(c,d)\neq(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, 都有 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

笔记 **构造逆矩阵的方法:** 不妨设 $k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$, 其中 k,p,q 为待定系数. 则

$$(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\cdot k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=pc\boldsymbol{A}^2+(cq+dp)\boldsymbol{A}+dq\boldsymbol{I}_n=k\boldsymbol{I}_n.$$

令 $pc=\lambda_1,cq+dp=\lambda_2$, 则 $p=\dfrac{\lambda_1}{c},q=\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}$. 于是由已知条件可得

$$(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\left(\frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\frac{\lambda_2}{c}-\frac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)=\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+d\left(\frac{\lambda_2}{c}-\frac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n=\left(\frac{\lambda_2d}{c}-\frac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3\right)\boldsymbol{I}_n.$$

从而 $k=\dfrac{\lambda_2d}{c}-\dfrac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3$. 因此 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=\dfrac{1}{k}(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=\dfrac{1}{\frac{\lambda_2d}{c}-\frac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3}\left(\dfrac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)$.

实际做题中只需要先设 $k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$, 其中 k,p,q 为待定系数. 则有 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=k\boldsymbol{I}_n$. 然后通过比较二次项和一次项的系数得到方程组 $\begin{cases}pc=\lambda_1\\cq+dp=\lambda_2\end{cases}$ (即要凑出合适的 p,q, 使得 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$ 与 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n$ 的二次项和一次项的系数相等), 解出 p,q 的值. 最后将已知条件 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$ 代入 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=k\boldsymbol{I}_n$ 即可得到 k 的值.

熟悉这种方式之后就能快速构造出我们需要的逆矩阵.

证明 (1) 和 (2) 的证明相同. 如下 (这里我们是利用了上述构造逆矩阵的方法直接构造出逆矩阵, 再根据逆矩阵的定义直接得到证明):

当 $c=0$ 时,$c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n=d\boldsymbol{I}_n$ 显然可逆.

当 $c\neq 0$ 时, 注意到 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\left(\dfrac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)=\left(\dfrac{\lambda_2d}{c}-\dfrac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3\right)\boldsymbol{I}_n$, 故 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆. □

例题 0.5 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合等式 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 求证:$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 都是可逆阵, 而若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}_n$, 则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 必不是可逆阵.

笔记 这里构造逆矩阵利用了命题 0.18.

证明 由已知得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}_n)=-2\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵. 又 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n=-6\boldsymbol{I}_n$, 于是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n)=-6\boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 也是可逆阵.

另一方面, 由已知等式可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$, 如果 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 和假设不合, 因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 不是可逆阵. □

命题 0.19

(1) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{AB}+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{B}+\lambda_4\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R},\lambda_1\neq 0$, 并且 $\lambda_1x^2+(\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_4=0$ 无实根 (即原等式左边不可因式分解成 $(a_1\boldsymbol{I}_n+a_2\boldsymbol{A})(b_1\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{B})$), 则对任何 $c,d\in\mathbb{R}$, 都有 $a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{A},c\boldsymbol{I}_n+d\boldsymbol{B}$

可逆.

(2) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{AB}+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{B}+\lambda_4\boldsymbol{I}_n=(a_1\boldsymbol{I}_n+b_1\boldsymbol{A})(a_2\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 且 $\lambda_1=b_1b_2,\lambda_2=a_2b_1,\lambda_3=a_1b_2,\lambda_4=a_1a_2,b_1\neq0,b_2\neq0$. 则对任何实数对 $(a,b),(c,d)\neq(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, 都有 $a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{A},c\boldsymbol{I}_n+d\boldsymbol{B}$ 可逆.

证明 证明方法与命题 0.18类似, 构造逆矩阵的方法也与其类似. 这里不再赘述. □

例题 0.6

1. 求证: 不存在 n 阶奇异矩阵 A, 适合条件 $A^2+A+I_n=O$.
2. 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $A^2=A$, 求证:I_n-2A 是可逆矩阵.
3. 若 A 是 n 阶矩阵, 且 $2A(A-I_n)=A^3$, 求证:I_n-A 可逆.

笔记 这类问题构造逆矩阵的方法 (以3.为例): 已知条件等价于 $A^3-2A^2+2A=O$, 设 $(I_n-A)^{-1}=aA^2+bA+cI_n$, 其中 a,b,c 为待定系数, 使得

$$(I_n-A)\left(aA^2+bA+cI_n\right)=A^3-2A^2+2A+kI_n=kI_n, k\text{为待定常数}.$$

比较等式两边系数可得

$$\begin{cases}-a=1\\a-b=-2\\b-c=2\\c=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\k=c=-1\end{cases}$$

于是 $(I_n-A)\left(-A^2+A-I_n\right)=-I_n$. 从而 $(I_n-A)^{-1}=A^2-A+I_n$.

证明

1. (反证也可以) 由已知 $A^2+A+I_n=O$, 则 $(A-I_n)(A^2+A+I_n)=A^3-I_n=O$, 即 $A^3=I_n$, 于是 A 是可逆矩阵.
2. 因为 $(I_n-2A)^2=I_n-4A+4A^2=I_n$, 故 I_n-2A 是可逆矩阵.
3. 由已知 $A^3-2A^2+2A-I_n=-I_n$, 即 $(A-I_n)(A^2-A+I_n)=-I_n$, 于是 $(I_n-A)^{-1}=A^2-A+I_n$.

□

命题 0.20

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 求证:$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 因为

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n,$$

所以 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵. 另一方面, 由上式可得 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})$, 故

$$\boldsymbol{I}_n=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA},$$

从而 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$. □

命题 0.21 (矩阵转置的性质)

设矩阵 A,B, 则有

1. $(A')'=A$;
2. $(A+B)'=A'+B'$;
3. $(kA)'=kA'$;
4. $(AB)'=B'A'$.

证明 由矩阵的性质易证. □

命题 0.22 (矩阵的逆运算)

设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆, 则有

常规逆运算:

1. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}$.
4. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\right)^{-1}$.

凑因子:

1. $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.
2. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\right)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})$.

笔记 无需额外记忆这些公式, 只需要知道**凑因子**的想法, 即**在矩阵可逆的条件下, 我们可以利用矩阵 $\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的性质, 将原本矩阵没有的因子凑出来, 然后提取我们需要的矩阵因子到矩阵逆的外面或将其乘入矩阵逆的内部, 从而达到化简原矩阵的目的.**

证明 由矩阵的运算性质不难证明. □

注 凑因子想法的应用:例题 0.7,例题 0.8,例题 0.27.

命题 0.23

设 $A,B,A-B$ 都是 n 阶可逆阵, 证明:

$$B^{-1}-A^{-1}=(B+B(A-B)^{-1}B)^{-1}.$$

笔记 直接运用逆矩阵的定义验证即可.

证明

$$\begin{aligned}
&\left(B^{-1}-A^{-1}\right)\left(B+B(A-B)^{-1}B\right)\\
&=I_n+(A-B)^{-1}B-A^{-1}B-A^{-1}B(A-B)^{-1}B\\
&=I_n+(A-B)^{-1}B-A^{-1}B\left(I_n+(A-B)^{-1}B\right)\\
&=\left(I_n-A^{-1}B\right)\left(I_n+(A-B)^{-1}B\right)\\
&=A^{-1}(A-B)\left[(A-B)^{-1}(A-B+B)\right]\\
&=A^{-1}(A-B)(A-B)^{-1}A=I_n.
\end{aligned}$$

□

命题 0.24 (Sherman-Morrison 公式)

设 A 是 n 阶可逆阵,α,β 是 n 维列向量, 且 $1+\beta'A^{-1}\alpha\neq 0$. 求证:

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}.$$

笔记 直接运用逆矩阵的定义验证即可, 注意 $\beta'A^{-1}\alpha$ 是一个数可以提出来.

证明

$$\begin{aligned}
&(A+\alpha\beta')\left(A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}\right)\\
&=I_n-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}+\alpha\beta'A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\left(\beta'A^{-1}\alpha\right)\beta'A^{-1}\\
&=I_n+\alpha\beta'A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}-\frac{\beta'A^{-1}\alpha}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}
\end{aligned}$$

$$= I_n + \alpha\beta' A^{-1} - \frac{1+\beta' A^{-1}\alpha}{1+\beta' A^{-1}\alpha}\alpha\beta' A^{-1} = I_n.$$

□

命题 0.25 (一些矩阵等式)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵. 则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) = (\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$.
2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则有 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}$.
3. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{B}^2$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$.

笔记 这是一些常见的矩阵等式. 可以通过反复凑因子得到.

证明 由矩阵的运算性质不难证明. □

例题 0.7 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n}$ 都是 n 阶可逆阵, 证明:$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆, 并求它们的逆矩阵.

笔记 核心想法是利用命题 0.22和命题 0.25.

证明 注意到 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})\boldsymbol{B}^{-1}$, 故 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1}$ 是可逆矩阵, 并且 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})^{-1}$. 注意到如下变形:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1} \\
=&\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})^{-1} - \boldsymbol{I_n}) \\
=&\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB} - (\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n}))(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})^{-1}.
\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 并且 $((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I_n})\boldsymbol{A}$. □

命题 0.26

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵, 使得 $\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}$ 也可逆, 并且

$$(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA})^{-1} = \boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

笔记 命题 0.26的应用: 一般对于求只含有两项的矩阵和式的逆矩阵, 我们可以利用矩阵的逆运算 (凑因子)的方法将原矩阵和式转化为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{AB})$ 或 $(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的形式, 再利用这个命题求得原矩阵的逆.

证明 根据分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA} \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

故 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I_m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}|$. 又因为 $\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}$ 也可逆. 下面给出两种求矩阵逆的方法.

证法一 (矩阵的逆运算): 注意到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) = (\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$, 故 $(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) = \boldsymbol{A}$, 于是 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) = \boldsymbol{BA}$, 从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I_n} &= \boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}) \\
&= (\boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA}).
\end{aligned}$$

于是 $(\boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{BA})^{-1} = \boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I_m} + \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$.

证法二 (打洞原理): 对(1)(2)两式两边分别取逆, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_n} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_n} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I_m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{I_m} - \boldsymbol{BA})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_n} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I_m} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_n - AB)^{-1} & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix}.$$

对右边直接计算得

$$\begin{pmatrix} I_n + A(I_m - BA)^{-1}B & A(I_m - BA)^{-1} \\ -(I_m - BA)^{-1}B & (I_m - BA)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_n - AB)^{-1} & -(I_n - AB)^{-1}A \\ -B(I_n - AB)^{-1} & I_m + B(I_n - AB)^{-1}A \end{pmatrix},$$

所以

$$(I_n - AB)^{-1} = I_n + A(I_m - BA)^{-1}B.$$

□

例题 0.8 设 A, B 均为 n 阶可逆阵, 使得 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 证明:$A + B$ 也可逆, 并且

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

证明 注意到 $A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B$, 故 $A + B$ 可逆. 由命题 0.26可得

$$(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}B = I_n - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned}(A + B)^{-1} &= (A(I_n + A^{-1}B))^{-1} = (I_n + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.\square\end{aligned}$$

□

命题 0.27 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式)

设 A 为 n 阶可逆阵,C 为 m 阶可逆阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,D 为 $m\times n$ 矩阵, 使得 $C^{-1}+DA^{-1}B$ 可逆. 求证:$A+BCD$ 也可逆, 并且

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

注 若已知矩阵逆的表达式, 也可以采取利用矩阵逆的定义直接验证的方法进行证明.

证明 注意到 $A+BCD = A(I_n+A^{-1}BCD)$, 将 $A^{-1}B$ 和 CD 分别看成整体, 此时 $I_m+(CD)(A^{-1}B) = C(C^{-1}+DA^{-1}B)$ 可逆, 故由命题 0.26的结论可知 $I_n + (A^{-1}B)(CD)$ 也可逆, 并且

$$\begin{aligned}(I_n + A^{-1}BCD)^{-1} &= I_n - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CD \\ &= I_n - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D.\end{aligned}$$

于是 $A + BCD = A(I_n + A^{-1}BCD)$ 也可逆, 并且

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

□

0.1.1 练习

练习 0.1 计算下列矩阵的 k 次幂, 其中 k 为正整数:

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix};\quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

笔记 第 (2) 问核心想法是利用命题??.

解 (1) 设 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = aI_3 + J$. 注意到 aI_3 和 J 乘法可交换,J 是幂零阵并且 $J^3 = O$, 因此我们可用二

项式定理来求 A 的 k 次幂:

$$A^k=(aI_3+J)^k=(aI_3)^k+C_k^1(aI_3)^{k-1}J+C_k^2(aI_3)^{k-2}J^2$$
$$=a^kI_3+C_k^1a^{k-1}J+C_k^2a^{k-2}J^2=\begin{pmatrix}a^k & C_k^1a^{k-1} & C_k^2a^{k-2}\\ 0 & a^k & C_k^1a^{k-1}\\ 0 & 0 & a^k\end{pmatrix}$$

(2) 注意到 A 的列向量成比例, 故可设 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,2,4)$, 则 $A=\alpha\beta'$. 由矩阵乘法的结合律并注意到 $\beta\alpha'=17$, 可得

$$A^k=(\alpha\beta')(\alpha\beta')\cdots(\alpha\beta')=\alpha(\beta'\alpha)(\beta'\alpha)\cdots(\beta'\alpha)\beta'$$
$$=(\beta'\alpha)^{k-1}\alpha\beta'=17^{k-1}A=\begin{pmatrix}17^{k-1} & 2\cdot17^{k-1} & 4\cdot17^{k-1}\\ 2\cdot17^{k-1} & 4\cdot17^{k-1} & 8\cdot17^{k-1}\\ 3\cdot17^{k-1} & 6\cdot17^{k-1} & 12\cdot17^{k-1}\end{pmatrix}$$

□

练习 0.2 设 k 是正整数, 计算 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k$.

解 已知 $k=1$ 时, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 假设 $k=n$ 时, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$. 则当 $k=n+1$ 时, 有

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta & \cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta\cos\theta\\ -(\cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta\cos\theta) & \cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta\\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta\end{pmatrix}.$$

从而由数学归纳法可知, 对任意正整数 k, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$. □

练习 0.3 求矩阵 A 的逆阵:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}.$$

解 对 $\begin{pmatrix}A & I_n\end{pmatrix}$ 用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 再将第一行乘以 s^{-1}, 其中 $s=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s}\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right).$$

从第二行起依次减去下一行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

消去第一列除第一行外的所有元素后, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

从第二行到第 $n-1$ 行分别乘以 $-\frac{1}{n}$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将第一行依次减去第二行, 第三行,$\cdots$, 第 $n-1$ 行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将最后一行加到第一行, 再将最后一行乘以 -1, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}.$$

□

✍ **练习 0.4** 求下列 n 阶矩阵的逆阵, 其中 $a_i \neq 0(1 \leqslant i \leqslant n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

解 对 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ 用初等变换法, 将第 i 行乘以 $a_i^{-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$, 有

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

将下面的行都加到第一行上, 并令 $s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, 则上面的矩阵变为

$$\begin{pmatrix} s & s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{sa_2-1}{sa_2^2} & -\frac{1}{sa_3a_2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_3} & -\frac{1}{sa_2a_3} & \frac{sa_3-1}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & -\frac{1}{sa_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{sa_n^2} \end{pmatrix}.$$

再消去第一行的后 $n-1$ 个 1 就得到

$$A^{-1}=-\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ -\frac{1}{a_1a_2} & \frac{sa_2-1}{a_2^2} & -\frac{1}{a_3a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_na_2}\\ -\frac{1}{a_1a_3} & -\frac{1}{a_2a_3} & \frac{sa_3-1}{a_3^2} & \cdots & -\frac{1}{a_na_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{a_1a_n} & -\frac{1}{a_2a_n} & -\frac{1}{a_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{a_n^2}\end{pmatrix}.$$

□

练习 0.5 求下列 n 阶矩阵的逆矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

笔记 解法一和解法三的核心想法是: 先假设 (猜测) 矩阵 A 的逆矩阵与其具有相似的结构, 再结合逆矩阵的定义, 使用待定系数法求出矩阵 A 的逆矩阵.

解 解法一: 设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)'$, 则 $A=-I_n+\alpha\alpha'$. 设 $B=cI_n+d\alpha\alpha'$, 其中 c,d 为待定系数. 则 $AB=-cI_n+(c+(n-1)d)\alpha\alpha'$. 令 $c=-1,c+(n-1)d=0$, 则 $d=\frac{1}{n-1}$. 于是 $AB=I_n$, 从而 $A^{-1}=B=-I_n+\frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$.

解法二(Sherman-Morrison 公式):设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)'$, 则 $A=-I_n+\alpha\alpha'$. 由Sherman-Morrison 公式可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)^{-1}=(-\boldsymbol{I}_n)^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\alpha}'(-\boldsymbol{I}_n)^{-1}\boldsymbol{\alpha}}(-\boldsymbol{I}_n)^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(-\boldsymbol{I}_n)^{-1}=-\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'.$$

解法三 (循环矩阵): 设 J 为基础循环矩阵, 则 $A=J+J^2+\cdots+J^{n-1}$. 设 $B=cI_n+J+J^2+\cdots+J^{n-1}$(因为循环矩阵的逆仍是循环矩阵), 其中 c 为待定系数. 则

$$AB=(n-1)I_n+(c+n-2)(J+J^2+\cdots+J^{n-1})$$

只要令 $c=2-n$, 则 $AB=(n-1)I_n$. 于是 $A^{-1}=\frac{1}{n-1}B=\frac{2-n}{n-1}I_n+J+J^2+\cdots+J^{n-1}$.

解法四 (初等变换):本题是练习 0.4的特例, 都利用相同的初等变换方法求逆矩阵. □

练习 0.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是非零实矩阵且 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}'$. 求证:$\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}, 由已知,$a_{ij}=A_{ij}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是非零实矩阵, 故必有某个 $a_{rs}\neq 0$, 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 r 行展开, 可得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{r1}A_{r1}+\cdots+a_{rs}A_{rs}+\cdots+a_{rn}A_{rn}=a_{r1}^2+\cdots+a_{rs}^2+\cdots+a_{rn}^2>0.$$

特别地,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵. □

练习 0.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{I}_n$ 且 $|\boldsymbol{A}|>0$, 证明:$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是奇异阵.

证明 由 $1=|\boldsymbol{I}_n|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}'|=|\boldsymbol{A}|^2$ 以及 $|\boldsymbol{A}|>0$ 可得 $|\boldsymbol{A}|=1$. 因为

$$|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{I}_n|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)'|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n|=(-1)^n|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|.$$

又 n 是奇数, 故 $|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$, 从而 $|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=0$, 即 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是奇异阵. □

练习 0.8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$ 且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 求证:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是奇异阵.

证明 由已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆阵且 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$, 因此

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|.$$

于是 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$, 即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是奇异阵. □