0.1 凸函数与上半连续函数

0.1.1 凸函数

定义 0.1 (下凸函数的定义)

对集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 我们称

1. $f : S \to \mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

2. $f : S \to \mathbb{R}$ 是一个严格 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

3. 称 $f : S \to \mathbb{R}$ 是一个下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall \lambda \in [0,1].$$

4. 称 $f : S \to \mathbb{R}$ 是一个严格下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall \lambda \in (0,1).$$

♣

注 同理可以定义上凸函数.

笔记

1. 我们常用 $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$ 来表示连接 x, y 的线段.
2. 显然 f 在 S 上各种凸的充要条件都是对任何含于 S 的线段 ℓ, 都有 $f|_\ell$ 上是对应的那种一元凸函数.
3. 开集上的二阶可微函数为下凸函数等价于 Hess 矩阵半正定可以在任何一般数学分析教材上找到.
4. 显然下凸蕴含 Jensen 下凸, 实际运用中我们更偏爱下凸而不是 Jensen 下凸, 推导二者的联系是重要的命题.

命题 0.1

闭区间上的连续函数如果在开区间内是下凸函数, 则必然在闭区间上也是下凸函数.

♠

证明

□

命题 0.2 (下凸函数的基本性质)

1. **下凸函数恒在割线下方**

(1) 设 I 为一区间, $f : I \to \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对任何 $[s,t] \subset I$ 成立

$$f(x) \leqslant \frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s) + f(s), \forall x \in [s,t].$$

(2) 设 I 为一区间,$f: I \to \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对任何 $[s,t] \subset I$ 成立

$$f(x) < \frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s), \forall x \in (s,t),$$

2. **下凸函数割线斜率递增**

(1) 设 I 为一区间,$f: I \to \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对 $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(2) 设 I 为一区间,$f: I \to \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上严格下凸的充要条件是对 $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

3. **可微的下凸函数恒在切线上方**

(1) 设 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a,b) 下凸的充要条件是对任何 $x_0 \in (a,b)$, 我们都有

$$f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \forall x \in (a,b).$$

(2) 设 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a,b) 严格下凸的充要条件是对任何 $x_0 \in (a,b)$, 我们都有

$$f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}.$$

注 上述下凸函数的性质都可以通过几何作图直观地得到.

笔记 **下凸函数割线斜率递增**也表明: 下凸函数对 $\forall x_0 \in I$, 都有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 单调递增.(但是不能由这个结论推出 f 下凸)

证明

1. 函数恒在割线下方

(1) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 对 $\forall [s,t] \subset I, \forall x \in [s,t]$, 可设 $x = \lambda s+(1-\lambda)t$, 其中 $\lambda \in [0,1]$. 由 f 在 I 上下凸可知, 对 $\forall x \in [s,t]$, 有

$$f(x) = f(\lambda s+(1-\lambda)t) \leqslant \lambda f(s)+(1-\lambda)f(t) = (\lambda-1)[f(s)-f(t)]+f(s).$$

再结合 $\lambda = \dfrac{x-t}{s-t}$ 可得

$$f(x) \leqslant \left(\frac{x-t}{s-t}-1\right)[f(s)-f(t)]+f(s) = \frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s), \quad \forall x \in [s,t].$$

接着证明必要性 ($\Leftarrow$): 对 $\forall s,t \in I$, 不妨设 $s<t$, 则 $[s,t] \subset I$. 对 $\forall x \in [s,t]$, 可设 $x = \lambda s+(1-\lambda)t$, 其中 $\lambda \in [0,1]$. 则由条件可知, 对 $\forall x \in [s,t]$, 有

$$f(x) = f(\lambda s+(1-\lambda)t) \leqslant \frac{f(s)-f(t)}{s-t}(\lambda s+(1-\lambda)t-s)+f(s) = \lambda f(s)+(1-\lambda)f(t).$$

即 $\forall s,t \in I$, 都有 $f(\lambda s+(1-\lambda)t) \leqslant \lambda f(s)+(1-\lambda)f(t)$. 故 f 在 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 取 $\lambda = \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \in (0,1)$. 因为函数 f 在区间 I 上下凸, 所以有

$$f(x_2) = f(\lambda x_3+(1-\lambda)x_1) \leqslant \lambda f(x_3)+(1-\lambda)f(x_1) = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1).$$

即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

接下来证明必要性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

这等价于

$$f(x_2) \leqslant \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1). \tag{1}$$

进而, 对于任意的 $x_1, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_3$, 以及任意的 $\lambda \in [0,1]$, 令 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda) x_3 \in (x_1, x_3)$, 此时 $\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$. 于是, 根据(1)式可以得到

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda) x_3)=f(x_2) \leqslant \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda) f(x_3).$$

所以, 函数 f 在区间 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

3. **可微的下凸函数恒在切线上方**

(1) 首先证明充分性 ($\Longrightarrow$): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0 \in (a,b)$, 函数 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a,b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in (x_0, x)$, 根据 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}.$$

令 $x' \rightarrow x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}=f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in (x, x_0)$, 由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}.$$

令 $x'' \rightarrow x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \lim_{x'' \rightarrow x_0^-} \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}=f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0 \in (a,b)$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

接下来证明必要性 ($\Longleftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$f(x_1) \geqslant f'(x_2)(x_1-x_2)+f(x_2), \quad f(x_3) \geqslant f'(x_2)(x_3-x_2)+f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2) \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸.

(2) 首先证明充分性 ($\Longrightarrow$): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0 \in (a,b)$, 函数 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a,b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in \left(x_0, \dfrac{x+x_0}{2}\right)$, 根据 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0}>\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}.$$

令 $x' \rightarrow x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} \geqslant \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}=f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in \left(x_0, \dfrac{x+x_0}{2}\right)$, 由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0}>\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}.$$

令 $x'' \to x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} \geqslant \lim_{x''\to x_0^-}\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = f'(x_0), \quad \forall x\in(a,x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0\in(a,b)$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

接下来证明必要性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 都有

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1-x_2)+f(x_2), \quad f(x_3) > f'(x_2)(x_3-x_2)+f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < f'(x_2) < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸.

□

例题 0.1 导数递增则割线斜率也递增 函数 f 在 (a,b) 可导, 证明:

1. f' 递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
2. f' 严格递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明

(1) 首先证明必要性 ($\Rightarrow$): 对于满足 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1\in(x_1,x_2)$,$y_2\in(x_2,x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(y_1) \leqslant f'(y_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于满足 $a<x_1<x_2<b$ 的情况, 取 $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 则有

$$\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}, \quad \forall s\in(a,x_1),$$
$$\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} \leqslant \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}, \quad \forall t\in(x_2,b).$$

令 $s\to x_1^-$,$t\to x_2^+$, 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s\to x_1^-}\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}, \quad \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} \leqslant \lim_{t\to x_2^+}\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2} = f'(x_2).$$

所以有 $f'(x_1) \leqslant \dfrac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} \leqslant f'(x_2)$. 再由 x_1,x_2 的任意性可知,f' 单调递增.

(2) 首先证明必要性 ($\Rightarrow$): 对于满足 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1\in(x_1,x_2)$,$y_2\in(x_2,x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(y_1) < f'(y_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 ($\Leftarrow$): 由条件可知, 对于满足 $a<x_1<x_2<b$ 的情况, 取 $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 则有

$$\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1} < \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}, \quad \forall s\in(a,x_1),$$
$$\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} < \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}, \quad \forall t\in(x_2,b).$$

令 $s \to x_1^-, t \to x_2^-$, 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s\to x_1^-}\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}, \quad \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} \leqslant \lim_{t\to x_2^-}\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2} = f'(x_2).$$

故 $f'(x_1) \leqslant \dfrac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2} \leqslant f'(x_2)$. 若 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 则由命题**??**可知,f 在 $[x_1, x_2]$ 上为线性函数. 设 $f(x) = cx + d, x \in [x_1, x_2]$, 其中 $c, d \in \mathbb{R}$. 从而

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = c = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}.$$

这与已知条件矛盾! 故 $f'(x_1) < f'(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $a < x_1 < x_2 < b$, 即 f' 递增.

□

命题 0.3

设 f 在 (a, b) 上的下凸函数, 则 f 在 (a, b) 有上界的充要条件是 $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

笔记 由这个命题及命题 0.1可知: 如果下凸函数 f 在 (a, b) 上有上界, 则 f 可连续延拓到 $[a, b]$(补充定义端点的函数值等于端点的左右极限即可), 使得 f 在 $[a, b]$ 上仍是下凸函数.

证明 $(\Leftarrow)$: 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知,f 在 (a, b) 上连续. 又因为 $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在, 所以由 Cantor 定理可知,f 可以连续延拓到 $[a, b]$ 上, 故 f 在 $[a, b]$ 上有界, 从而在 (a, b) 上有界.

$(\Rightarrow)$: 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, 有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上递增. 由 f 在 (a, b) 上有上界可知, 存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant M, \forall x \in (a, b). \tag{2}$$

由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性及(2)式可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{M-f(x_0)}{x-x_0}, \forall x \in (x_0, b). \tag{3}$$

又因为 $\lim_{x\to b^-}\dfrac{M-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{M-f(x_0)}{b-x_0}$, 所以 $\dfrac{M-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (x_0, b) 上有界. 从而存在 $K > 0$, 使得

$$\frac{M-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant K, \forall x \in (x_0, b). \tag{4}$$

于是结合(3)(4)式可知,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant K, \forall x \in (x_0, b)$. 进而由单调有界定理可知 $\lim_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在. 于是

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) + f(x_0)\right] = (b-x_0)\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0).$$

故 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 也存在. 同理可得 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 也存在.

□

命题 0.4 (下凸函数的单调性刻画)

1. **闭区间凸函数的单调性刻画**

   设 f 是 $[a, b]$ 上的下凸函数, 则 f 只有下述三种情况:

   (1) f 在 $[a, b)$ 递减,

   (2) f 在 $(a, b]$ 递增,

   (3) 存在 $c \in (a, b)$, 使得 f 在 $[a, c]$ 递减, 在 $[c, b]$ 递增.

2. **开区间凸函数的单调性刻画**

   设 f 是 (a, b) 上的下凸函数,a 允许取 $-\infty$,b 允许取 $+\infty$, 则 f 只有下述三种情况:

   (1) f 在 (a, b) 递减;

   (2) f 在 (a, b) 递增;

   (3) 存在 $c \in (a, b)$, 使得 f 在 $(a, c]$ 递减, 在 $[c, b)$ 递增.

证明

1. **闭区间凸函数的单调性刻画**

   由下凸函数恒在割线下方, 我们有
   $$f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a), \forall x \in [a,b].$$
   因此 f 在 $[a,b]$ 上有上界. 于是由命题 0.3可知,f 可以连续延拓到 $[a,b]$, 并且仍然在 $[a,b]$ 上下凸. 记这个连续延拓函数为 $\overline{f}$, 则 $\overline{f} \in C[a,b]$ 且 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 上也下凸.
   下证
   $$f(a) \geqslant \tilde{f}(a), f(b) \geqslant \tilde{f}(b). \tag{5}$$
   事实上, 由下凸函数割线斜率递增可知 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(x_0,b]$ 递增, 从而
   $$\begin{aligned}\tilde{f}(b) &= \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right]\\ &\leqslant \lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}+f(x_0)\right] = f(b),\end{aligned}$$
   类似可得 $f(a) \geqslant \tilde{f}(a)$, 这就证明了(5). 下面证明 $\overline{f}$ 的单调性.
   由上述证明可知 $\overline{f} \in C[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上下凸. 不妨设 $\overline{f}$ 最小值为 0. 现在设 $c \in [a,b]$ 是 f 的最小值点. 若 $c \in (a,b)$, 则对 $b \geqslant x_2 > x_1 > c$, 我们有
   $$\frac{\overline{f}(x_2)-\overline{f}(c)}{x_2-c} \geqslant \frac{\overline{f}(x_1)-\overline{f}(c)}{x_1-c} \Rightarrow \overline{f}(x_2) \geqslant \frac{x_2-c}{x_1-c}\overline{f}(x_1) \geqslant \overline{f}(x_1). \tag{6}$$
   故 $\overline{f}$ 在 $[c,b]$ 递增. 类似可知 $\overline{f}$ 在 $[a,c]$ 递减. 这就证明了第三种情况. 若 $c=a$, 则不等式(6)也成立, 故 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 递增. 同样的若 $c=b$ 则 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 递减.
   于是再结合(5)可知
   (i) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c=b$ 时, 若 $f(b) > \overline{f}(b)$, 则 f 只在 $[a,b)$ 上单调递减; 若 $f(b)=\overline{f}(b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上单调递减. 故此时无论如何,f 一定在 $[a,b)$ 上单调递减.
   (ii) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c=a$ 时, 若 $f(a) > \overline{f}(a)$, 则 f 只在 $(a,b]$ 上单调递增; 若 $f(a)=\overline{f}(a)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上单调递增. 故此时无论如何,f 一定在 $(a,b]$ 上单调递增.
   (iii) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c \in (a,b)$ 时,f 的单调性与 $\overline{f}$ 相同, 即 f 在 $[c,b]$ 递增, 在 $[a,c]$ 递减.
   因此结论得证.
2. **开区间凸函数的单调性刻画** 由 (1) 的证明类似, 只是不再额外需要考虑 f 的两个端点, 同理证明即可.

□

命题 0.5 (Jensen 不等式)

对集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 设 $f: S \to \mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 则对完全含于 S 内的一条线段上的点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \lambda_k \in [0,1] \cap \mathbb{Q},$$
我们有
$$f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k). \tag{7}$$
特别的,
$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m} f(x_k). \tag{8}$$

笔记 初等的, 如果 S 性质足够好且 f 二阶可微, 读者可以通过把 f 在 $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$ Taylor 展开, 然后丢掉二阶微分那

项来得到不等式 $f\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k f(x_k)$. 本部分的证明尽可能追求一般性.

证明 首先不等式(8)的建立是经典高中数学习题，一个参考可以见Jensen 不等式. 我们归纳证明不等式(7), 当 $m=2$, 设有理数 $\frac{p}{q}\in[0,1], q>0$, 运用不等式(8), 我们有

$$f\left(\frac{p}{q}x+\left(1-\frac{p}{q}\right)y\right)=f\left(\underbrace{\frac{x}{q}+\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{p}+\underbrace{\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdots+\frac{y}{q}}_{q-p}\right)\leqslant\frac{p}{q}f(x)+\left(1-\frac{p}{q}\right)f(y).$$

这就证明了(7)的 $m=2$ 的情况. 假定 m 时不等式(7)成立, 当 $m+1$ 时, 我们不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\neq 0$, 否则不等式(7)是平凡的. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j f(x_j)&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}f(x_j)+\lambda_{m+1}f(x_{m+1})\\&\geqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot f\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x_j\right)+\lambda_{m+1}f(x_{m+1})\\&\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x_j+\lambda_{m+1}x_{m+1}\right)=f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_i x_j\right),\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 $m=2$ 时的不等式. 于是就对一般的 $m\in\mathbb{N}$, 我们证明了(7). □

引理 0.1

设 f 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是 Jensen 下凸函数, 若 $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)<\infty$, 则 f 在 x_0 连续.

证明 要证 f 在 x_0 连续, 只须证 $f(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$.

由条件可知

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2},\quad\forall x\in U(0).$$

令 $x\to 0$ 并取下极限, 得到

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to 0}f(x_0-x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to 0}f(x_0+x)=\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x).\tag{9}$$

根据条件可得

$$f(x)\leqslant\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2},\quad\forall x\in U(x_0).$$

令 $x\to x_0$ 并取上极限, 则

$$\varlimsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2}\leqslant\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(2x-x_0)=\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x).$$

于是 $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 将其代入 (9) 式得到

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\Rightarrow f(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to x_0}f(x).$$

因此 $f(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 即 f 在 x_0 处连续. □

定理 0.1 (开区间下凸函数左右导数处处存在)

(a,b) 上的下凸函数 f 在每一点左右导数都存在, 从而 f 在 (a,b) 连续.

证明 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0 \in (a,b)$, 有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上递增. 从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2}-x_0}, \quad \forall x \in (a,x_0),$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2}-x_0}, \quad \forall x \in (x_0,b).$$

于是 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a,x_0) 上有上界 $\dfrac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2}-x_0}$,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (x_0,b) 上有下界 $\dfrac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2}-x_0}$.

故由单调有界定理可知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 都存在, 即 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在. 进而

$$\lim_{x\to x_0^+}[f(x)-f(x_0)] = f'_+(x_0)\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0) = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0^-}[f(x)-f(x_0)] = f'_-(x_0)\lim_{x\to x_0^-}(x-x_0) = 0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 即 f 在 $x=x_0$ 处连续, 再根据 x_0 的任意性可知,f 在 (a,b) 上连续. □

定理 0.2 (开区间上的下凸函数内闭 Lipschitz 连续)

(a,b) 上的下凸函数 f 一定内闭 Lipschitz 连续.

证明 对 $\forall [A,B]\subset(a,b)$, 任取 $s\in(a,A)$,$t\in(B,b)$, 固定 s,t. 则由下凸函数割线斜率递增可知

$$\frac{f(A)-f(s)}{A-s} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(t)-f(B)}{t-B}, \quad \forall x,y\in[A,B].$$

记 $L=\max\left\{\left|\dfrac{f(A)-f(s)}{A-s}\right|,\left|\dfrac{f(t)-f(B)}{t-B}\right|\right\}$, 则

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant L \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y|, \quad \forall x,y\in[A,B].$$

故 f 在 (a,b) 上内闭 Lipschitz 连续. □

定理 0.3

设 f 在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是下凸函数, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 连续.

笔记 下述证明表明:n 元下凸函数一定也关于单变量下凸.

证明 仅证明 $n=2$ 的情形, 一般情况是类似的.

由条件可知, 当 $n=2$ 时, 设 $\delta>0$,f 在 $(x_0-\delta,y_0-\delta)\times(x_0+\delta,y_0+\delta)$ 上下凸, 则对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[x_0-\delta,y_0-\delta]\times[x_0+\delta,y_0+\delta]$,$\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) \leqslant \lambda f(x_1,y_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2). \tag{10}$$

$\forall x'\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 固定 x', 在 (10)式中令 $x_1=x_2=x'$, 则对 $\forall y_1,y_2\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$, 都有

$$f(x',\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) = f(\lambda x'+(1-\lambda)x',\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) \leqslant \lambda f(x',y_1)+(1-\lambda)f(x',y_2).$$

故 f 关于单变量 y 在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上下凸. 同理可得 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上下凸. 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上连续, 关于单变量 y 在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上连续. 因此对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1\in(0,\delta)$, 使得当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时, 有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

任取 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 固定 x, 从而此时 $f(x,y)$ 是在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上关于 y 的一元连续下凸函数. 于是由开区间上的下凸函数一定内闭 Lipschitz 连续可知,$f(x,y)$ 在 $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 上内闭 Lipschitz 连续. 进而存在 $\delta_2\in(0,\delta)$, 使得对 $\forall y\in[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$, 有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant\max\left\{\frac{f(x,y_0-\delta_2)-f(x,y_0-\delta_2)}{\delta_2},\frac{f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0+\delta_2)}{\delta_2}\right\}\cdot|y-y_0|. \tag{12}$$

由 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上连续可知,$f(x,y_0-\delta_2),f(x,y_0-\delta_2),f(x,y_0+\delta_2),f(x,y_0+\delta_2)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上都有界, 从而我们记

$$L=\max\left\{\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\frac{f(x,y_0-\delta_2)-f(x,y_0-\delta_2)}{\delta_2},\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\frac{f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0+\delta_2)}{\delta_2}\right\}.$$

令 $\delta'=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{\varepsilon}{2L}\}$, 于是由 (12) 式可知, 对 $\forall(x,y)\in[x_0-\delta',x_0+\delta']\times[y_0-\delta',y_0+\delta']$, 都有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|. \tag{13}$$

利用 (11) (13) 式可得, 对上述 ε,δ', 当 $(x,y)\in[x_0-\delta',x_0+\delta']\times[y_0-\delta',y_0+\delta']$ 时, 我们都有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 在 (x_0,y_0) 连续. □

推论 0.1 (开集上的下凸函数必连续)

开集上的下凸函数是连续函数. ♡

0.1.2 上半连续函数

定义 0.2 (半连续函数定义)

拓扑空间 X 上的一个函数 $f:X\to[-\infty,+\infty)$ 被称为**上半连续的**, 如果对每个 $c\in\mathbb{R}$ 都有

$$\{x\in X:f(x)<c\}$$

是 X 的开集. ♣

注 下半连续函数同理定义.

笔记

(1) 显然 f 连续等价于 f 上半连续且下半连续.

(2) 上半连续等价于对 $\forall x_0\in X$, 都有 $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$.

命题 0.6 (上半连续函数基本性质)

设 X 是拓扑空间,

(1) 若 f_α 是一族 X 上的上半连续函数, 则 $f=\inf\limits_{\alpha}f_\alpha$ 也是上半连续函数.

(2) 若 f 是 X 上的上半连续函数, 则对每一个紧集 $K\subset X$ 有 $a\in K$ 使得 $f(x)\leq f(a),\forall x\in K$.

(3) 设 $I\subset[-\infty,+\infty)$ 是开区间, 如果 $f:X\to I$ 和 $g:I\to[-\infty,+\infty)$ 是上半连续函数且 g 递增, 则 $g\circ f$ 是上半连续函数. ♠

注 下半连续函数同理也有相应的性质.

笔记 (2) 是说紧集上的上半连续函数一定有上界且取得最大值. 一个经典的技巧是, 很多时候如果一个命题对所有紧集成立, 则等价于这个命题局部上成立, 即对每个点, 都存在一个邻域使得在这个邻域上成立. 现在我们注意到对每个点 x, 如果其所有邻域上, 上半连续函数 f 无上界, 那么取 $x_n\to x$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$, 则 f 在紧集 $\{x_n\}\cup\{x\}$ 上无上界, 这就是一个矛盾!

证明

1. 对任何 $x_0 \in X,\beta$, 由 f_α 下半连续和下确界的定义, 我们有

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\inf_{\alpha} f_\alpha(x) \leq \overline{\lim_{x\to x_0}} f_\beta(x) \leq f_\beta(x_0).$$

两边对 β 取下确界即得

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\inf_{\alpha} f_\alpha(x) \leq \inf_{\beta} f_\beta(x_0).$$

故 $f = \inf\limits_{\alpha} f_\alpha$ 也是上半连续函数.

2. 注意到开覆盖 $K = \bigcup\limits_{c}\{x \in K : f(x) < c\}$, 由 K 是紧集可知, 必有有限子覆盖

$$K = \bigcup_{i=1}^{n}\{x \in K : f(x) < c_i\}.$$

不妨设 c_1 是 $c_i, i = 1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则 $f(x) < c_1, \forall x \in K$. 即上半连续函数 f 在 K 上有上界. 取 $c = \sup\limits_{K} f$, 如果 f 达不到最大值, 注意到

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{1}{c-f(x)} \leqslant \frac{1}{c-\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)} \leqslant \frac{1}{c-f(x_0)}.$$

故 $\dfrac{1}{c-f(x)}$ 在 K 上上半连续. 因此同理可得 $\dfrac{1}{c-f(x)}$ 在 K 上也有上界. 于是存在 $M > 0$, 使得

$$\frac{1}{c-f(x)} \leqslant M \Rightarrow f(x) \leqslant c - \frac{1}{M} < c.$$

这与 $c = \sup\limits_{K} f$ 矛盾! 从而 f 能取到最大值, 于是一定存在 $a \in K$, 使得 $c = f(a)$, 故 $f(x) < c = f(a), \forall x \in K$.

3. 注意到 $\{x \in X : g(x) < c\} = [-\infty, \alpha_c)$, 因此

$$\{x \in X : g \circ f(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < \alpha_c\},$$

这就证明了 $g \circ f$ 是上半连续函数.

□

定理 0.4 (半连续函数逼近定理)

设 X 是一个度量空间,f 是 X 上的上半连续函数, 则存在递减函数列 $f_n \subset C(X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$$

♡

证明 如果 $f \equiv -\infty$, 取 $f_n = -n, n = 1,2,\cdots$. 现在假定 $f \not\equiv -\infty$, 然后考虑 $g = e^{-f} : X \to (0,+\infty]$ 并定义

$$g_n(x) = \inf_{z\in X}\{g(z) + nd(x,z)\}, n = 1,2,\cdots.$$

显然

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq g(x), \forall x \in X, n = 1,2,\cdots.$$

因为 $g \not\equiv +\infty$, 我们知道 $g_n, n \in \mathbb{N}$ 都是有限函数. 若对某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X$, 有 $g_n(x) = 0$. 则存在 $z_m \in X, m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}[g(z_m) + nd(z_m,x)] = 0,$$

即

$$\lim_{m\to\infty} d(z_m,x) = 0, \lim_{m\to\infty} f(z_m) = +\infty.$$

又由上半连续函数基本性质 (2) 和笔记知 f 局部有上界, 这就是矛盾! 因此我们证明了

$$g_n(x) > 0, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

为了说明 $f_n = -\ln g_n, n \in \mathbb{N}$ 是我们需要的函数, 我们只需证明

$$g_n \in C(X), \lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

事实上, 对任何 $x, y, z \in X$, 我们有

$$g_n(x) \leq g(z) + nd(z, x) \leq g(z) + nd(y, z) + nd(x, y).$$

对 z 取下确界得

$$g_n(x) \leq g_n(y) + nd(x, y),$$

对称得

$$g_n(y) \leq g_n(x) + nd(x, y),$$

即

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leq nd(x, y).$$

故 $g_n \in C(X), \forall n \in \mathbb{N}$.

给定 $x \in X$ 和 $\epsilon > 0$, 因为 g 下半连续, 所以存在 x 的半径为 $\delta > 0$ 的开球邻域 U, 使得

$$g(z) > g(x) - \epsilon, \forall z \in U.$$

于是由 g_n 定义知

$$g_n(x) \geq \min\{g(x) - \epsilon, n\delta\}.$$

当 n 充分大, 我们知道 $g(x) \geq g_n(x) \geq g(x) - \epsilon$, 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. 我们完成了证明. □

定理 0.5 (下凸函数的局部定义)

设开集 $V \subset \mathbb{R}^n$,f 在 V 上半连续, 如果对任何 $x \in V$,$y \in \mathbb{R}^n$,$\delta > 0$, 都存在 $h \in (0, \delta)$, 使得

$$f(x) \leqslant \frac{f(x + hy) + f(x - hy)}{2}. \tag{14}$$

证明 f 是 V 上的下凸函数.

笔记 本定理表明下凸函数是个局部的概念, 只要局部是下凸函数, 整体也是下凸函数. 从证明可以看到, 若对 $y \neq 0$, 不等式(14)改为严格不等号, 则 f 也是严格下凸的.

证明 对 $x \in V, y \in \mathbb{R}^n$, 满足 $x + wy \in V, \forall w \in [-1, 1]$, 考虑上半连续函数

$$g(w) = f(x + wy) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2},$$

现在有

$$g(1) = g(-1) = 0.$$

如果存在 $s \in (-1, 1)$, 使得 $g(s) > 0$, 那么记

$$M \triangleq \sup_{[-1,1]} g > 0, A \triangleq \{x \in [-1, 1] : g(x) = M\}.$$

显然 A 是 $(-1, 1)$ 中的紧集, 设 A 的最大值点 w_0, 则 $1 - w_0 > 0$, 现在运用条件不等式(14), 我们知道存在充分小的 $h > 0$, 使得

$$f(x + w_0 y) \leqslant \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2}.$$

于是对这个 h, 我们有

$$\begin{aligned}
g(w_0) &= f(x + w_0 y) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\
&\leqslant \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2} - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\
&= \frac{g(w_0 + h) + g(w_0 - h)}{2} < M,
\end{aligned}$$

这是一个矛盾! 因此

$$g(w) \leqslant 0, \forall w \in [-1, 1],$$

因此

$$g(0) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2},$$

故 f 是 Jensen 下凸函数, 因为 f 上半连续, 所以 f 局部有上界, 所以由引理 0.1知 f 在 V 上连续, 因此我们证明了 f 是下凸函数. □

例题 0.2 设有限函数

$$S(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} u_n(x), u_n \in C[a,b], n \in \mathbb{N}.$$

若 $u_n, n \in \mathbb{N}$ 非负, 证明 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 达到最小值.

证明 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由 $u_n \in C[a,b]$ 且非负可得

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to x_0} S(x) &= \varliminf_{x\to x_0} \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} u_n(x) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{m} u_n(x)\\ &\geqslant \sum_{n=1}^{m} \varliminf_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{m} u_n(x_0).\end{aligned}$$

令 $m \to +\infty$, 则 $\varliminf_{x\to x_0} S(x) \geqslant S(x_0)$, 故 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上下半连续. 由半连续函数的基本性质 (2)可知,$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最小值. □

例题 0.3 设 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$, 若

$$h_n \geq h_{n+1}, g_{n+1} \geq g_n, n = 1, 2, \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} g_n \text{存在}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$ 是连续函数.

证明 记 $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$, 则一方面, 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$h_n(x) \leqslant h_{n-1}(x) \leqslant \cdots \leqslant h_N(x), \forall n > N.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$h(x) \leqslant h_N(x), \forall n > N.$$

$\forall x_0 \in [a,b]$, 令 $x \to x_0$, 并取上极限, 结合 $h_N \in C[a,b]$ 可得

$$\varlimsup_{x\to x_0} h(x) \leqslant \varlimsup_{x\to x_0} h_N(x) = h_N(x_0), \forall n > N.$$

令 $N \to \infty$, 得到 $\varlimsup\limits_{x\to x_0} h(x) \leqslant h(x_0)$. 故 h 在 $[a,b]$ 上上半连续.

另一方面, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$g_n(x) \geqslant g_{n-1}(x) \geqslant \cdots \geqslant g_m(x), \forall n > m.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$g(x) \geqslant h_m(x), \forall n > m.$$

$\forall x_0 \in [a,b]$, 令 $x \to x_0$, 并取上极限, 结合 $g_m \in C[a,b]$ 可得

$$\varliminf_{x\to x_0} g(x) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} g_m(x) = g_m(x_0), \forall n > m.$$

令 $m \to \infty$, 得到 $\varliminf\limits_{x\to x_0} g(x) \geqslant g(x_0)$. 故 g 在 $[a,b]$ 上下半连续. 因此 $h = g$ 在 $[a,b]$ 上既上半连续又下半连续, 从而 $h = g$ 在 $[a,b]$ 上连续. □