0.1 Vandermode 行列式相关

本节我们用 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 阶 Vandermonde 行列式.

对 $1\leqslant i\leqslant n, V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示删除 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 行 $(x_1^{i-1},x_2^{i-1},\cdots,x_n^{i-1})$ 之后新添第 n 行 $(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n)$ 所得 n 阶行列式.

$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示将 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 n 行换成 $(x_1^{n+1},x_2^{n+1},\cdots,x_n^{n+1})$ 所得 n 阶行列式.

命题 0.1

设初等对称多项式

$$\sigma_j=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j}, j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

证明 (加边法) 不妨设 $x_i, 1\leqslant i\leqslant n$ 互不相同. 设

$$D_n(x)\triangleq\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-x&x_1&x_2&\cdots&x_n\\(-x)^2&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(-x)^n&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}.$$

由行列式性质我们知道 D_n 是 n 次多项式且有 n 个根 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$. 于是我们有

$$D_n(x)=c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n). \tag{2}$$

把 $D_n(x)$ 按第一列展开得

$$D_n(x)=\sum_{i=1}^{n}V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}+V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^n. \tag{3}$$

于是比较(2)式和(3)式最高次项系数, 我们有 $c=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 定义 $\sigma_0=1$, 利用根和系数的关系 (Vieta 定理), 结合(2)式和(3)式得

$$D_n(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}+V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^n,$$

比较上式等号两边 $x^i(1\leq i\leq n)$ 的系数就能得到(1). □