

0.1 关系

定义 0.1 ((二元) 关系)

所谓在集合 A 中定义了二元素间的一个(二元)关系 R , 也就是给出了集合 $A \times A$ 中元素的一个性质 R , 若 $a, b \in A$, (a, b) 有性质 R , 则称 a 与 b 有关系 R , 记为 aRb .



笔记 事实上, 集合 A 中关系 R 可由 $A \times A$ 中子集

$$S \triangleq \{(a, b) \mid a, b \in A, aRb\}$$

来刻画. 即若 aRb , 则 $(a, b) \in S$.

反之, 由 $A \times A$ 的一个子集 S , 也可确定 A 一个关系 R . 即若 $(a, b) \in S$, 则 aRb .

定义 0.2 (等价关系)

1. 集合 A 中关系若满足以下条件:

- (1) **自反性** $aRa, \forall a \in A$;
- (2) **对称性** 若 aRb , 则 bRa ;
- (3) **传递性** 若 aRb, bRc , 则 aRc ,

则称 R 为 A 的一个等价关系.

2. 若仍以 R 表示 A 中关系所确定的 $A \times A$ 的子集, 则 R 为等价关系当且仅当下列三个条件同时成立:

- (1) $(a, a) \in R, \forall a \in A$;
- (2) 若 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$;
- (3) 若 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R$.



注 在等价关系定义中的三个条件是互相独立的, 缺一不可.

定义 0.3 (等价类和代表元素)

若 R 是集合 A 的一个等价关系且 $a \in A$, 则 A 中所有与 a 有关系 R 的元素集合

$$K_a = \{b \in A \mid bRa\}$$

称为 a 所在的等价类, a 称为这个等价类的代表元素.



定义 0.4 (分划/分类)

集合 A 的一个子集族 $\{A_\alpha\}$ 称为 A 的一个分划或分类, 如果满足

$$A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha, \quad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset, \quad \text{若 } \alpha \neq \beta.$$

也称 A 是 $\{A_\alpha\}$ 中所有不相交的集合的并或无交并.



定理 0.1

设 R 是集合 A 的等价关系, 则由所有不同的等价类构成的子集族 $\{K_a\}$ 是 A 的分划.

反之, 若 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的分划, 则可在 A 中定义等价关系 R ,

$$aRb, \quad \text{若 } \exists A_\alpha \text{ 使 } a, b \in A_\alpha.$$

并且使得每个 A_α 是一个等价类.



证明 设 R 是 A 的等价关系. 由 $\forall a \in A, aRa$ 知 $a \in K_a$, 于是 $A = \bigcup_a K_a$. 设 $K_a \cap K_b \neq \emptyset$, 即 $\exists c \in K_a \cap K_b$, 对 $\forall x \in K_a$ 有 cRa, xRa , 因而 xRc . 又 cRb , 故 xRb , 即 $x \in K_b$, 从而得 $K_a \subseteq K_b$. 同样可得 $K_b \subseteq K_a$, 故 $K_a = K_b$, 亦即若 $K_a \neq K_b$, 则 $K_a \cap K_b = \emptyset$. 这样就证明了 $\{K_a\}$ 是 A 的分划.

反之, 设 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个分划. 在 A 中定义关系 R ,

$$aRb, \quad \text{若 } \exists A_\alpha, \text{ 使 } a, b \in A_\alpha.$$

因 $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$, 故对 $\forall a \in A, \exists A_\alpha$, 使 $a \in A_\alpha$, 因此 $a, a \in A_\alpha$, 即 aRa . 其次, 若 aRb , 即 $\exists A_\alpha$, 使 $a, b \in A_\alpha$. 自然 $b, a \in A_\alpha$, 故 bRa . 再次, 若 aRb, bRc , 即有 A_α, A_β , 使 $a, b \in A_\alpha$ 且 $b, c \in A_\beta$, 故 $b \in A_\alpha \cap A_\beta$. 由 $\{A_\alpha\}$ 为 A 的分划知 $A_\alpha = A_\beta$, 因而 aRc . 这样就证明了 R 是等价关系. 由 R 的定义知若 $a \in A_\alpha$, 则 a 所在的等价类 $K_a = A_\alpha$.

□

定义 0.5 (商集和自然映射)

设 R 是集合 A 的等价关系. 以关于 R 的等价类为元素的集合 $\{K_a\}$ 称为 A 对 R 的商集合或商集. 记为 A/R . 由

$$\pi(a) = K_a, \quad \forall a \in A$$

定义的 A 到 A/R 上的映射 π 称为 A 到 A/R 上的自然映射.



注 显然自然映射都是满射.

定理 0.2

设 $f : A \rightarrow B$ 是满映射. 在 A 中定义关系 R ,

$$aRb, \quad \text{若 } f(a) = f(b),$$

则 R 是 A 的等价关系. 又设 $\pi : A \rightarrow A/R$ 为自然映射, 则有 A/R 到 B 上的一一对应 g 满足

$$g\pi = f. \tag{1}$$

即图 1 是交换图.

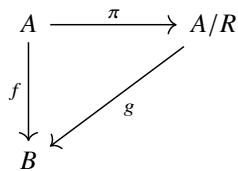


图 1

证明 考虑 $y \in B$ 的原像 $f^{-1}(y)$ 构成的子集族. 显然, $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$. 又若 $y, z \in B, f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$, 即 $\exists a \in A$,

使 $f(a) = y, f(a) = z$, 即 $y = z$. 故 $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$, 从而 $\{f^{-1}(y)\}$ 是 A 的一个分划. 于是由定理 0.1 知, 在 A 中可定义等价关系 $R : aRb$, 若 $\exists f^{-1}(y)$, 使 $a, b \in f^{-1}(y)$, 即 $f(a) = f(b)$. 由此知定理的第一部分成立.

定义 A/R 到 B 的映射 g ,

$$g(K_a) = f(a), \quad \forall a \in A.$$

注意到 A 中元素 a 所在等价类 $K_a = f^{-1}(f(a))$, 由于 $K_a = K_b$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$, 故 g 是单射. 又 $f(A) = B$, 故 g 是满射. 因此 g 是一一对应. 由 π 的定义知式 (1) 成立.

□

定义 0.6 (同余关系和同余类)

设集合中 A 的二元运算, 记作乘法. 若 A 的一个等价关系 \sim 满足

$$\text{若 } a \sim b, c \sim d, \text{ 则 } ac \sim bd, \forall a, b, c, d \in A.$$

则称 \sim 为 A 的一个同余关系. $a \in A$ 的等价类 K_a 此时也称为 a 的同余类.



例题 0.1

1. 设 $m \in \mathbb{Z}$ (所有整数的集合), $m \neq 0$. 在 \mathbb{Z} 中定义关系

$$a \sim b, \quad \text{若 } a \equiv b \pmod{m}.$$

易证 \sim 是等价关系且由 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ 可得 $a+c \equiv b+d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$. 因而 \sim 对于 \mathbb{Z} 中的加法与乘法都是同余关系.

2. 设 $\mathbb{P}[x]$ 是数域 \mathbb{P} 上一元多项式的集合. 设 $f(x) \in \mathbb{P}[x]$, $f(x) \neq 0$. 在 $\mathbb{P}[x]$ 中定义关系 \sim : $g(x) \sim h(x)$, 若 $f(x) | (g(x) - h(x))$. 与第一问类似可证 \sim 对 $\mathbb{P}[x]$ 中的加法与乘法都是同余关系.
3. 以 $\mathbb{P}^{n \times n}$ 表示数域 \mathbb{P} 上所有 n 阶方阵的集合. 方阵的加法与乘法都是 $\mathbb{P}^{n \times n}$ 中的二元运算. 对 $A \in \mathbb{P}^{n \times n}$, 用 $\text{ent}_{ij} A$, $\text{row}_i A$, $\text{col}_j A$ 和 $\det A$ 分别表示 A 的第 i 行第 j 列元素、 A 的第 i 行、 A 的第 j 列和 A 的行列式. $\mathbb{P}^{n \times n}$ 中由 $\det A = \det B$ 确定的关系, 对乘法是同余关系, 但对加法除 $n=1$ 的情形外不是同余关系.

定理 0.3

设集合 A 有二元运算乘法, \sim 是 A 的一个同余关系. 又 $\pi : A \rightarrow A / \sim$ 是自然映射, 则在商集合 A / \sim 中可定义二元运算

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in A.$$



证明 要证明这个二元运算的良定义性, 只需证由 $\pi(a) = \pi(a_1)$, $\pi(b) = \pi(b_1)$ 可得 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$, 其中, $a, b, a_1, b_1 \in A$. 事实上, 由 π 的定义知 $\pi(a) = \pi(a_1)$, 即 $a \sim a_1$, $\pi(b) = \pi(b_1)$, 即 $b \sim b_1$. 因 \sim 是同余关系, 故 $ab \sim a_1b_1$, 所以 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$.

