0.1 常用初等不等式

命题 0.1 (常用不等式)

(1) $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0 \iff \ln x < \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x > 1.$

(2) $e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$

(3) $e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant e^{x^2-x}, \forall x > 0.$

证明

(1) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x \geqslant 0$, 则

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x}-x-2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+x-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x > 0.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减, 又 $f \in C[0,+\infty)$, 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上也严格单调递减. 从而

$$f(x) \leqslant f(0) = 0, \forall x > 0.$$

即 $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2) 注意到

$$(e^x - 1)(x^y - 1) > 0, \forall x, y > 0,$$

故

$$e^x + e^y < e^{x+y} + 1 \Longrightarrow e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$$

(3) 由 $e^x \geqslant 1 + x, \forall x > 0$ 可得

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leqslant \frac{1}{1+y}, \forall x > 0.$$

$$e^{x^2-x} \geqslant 1 + x^2 - x = \frac{1+x^3}{1+x} \geqslant \frac{1}{1+x}, \forall x > 0.$$

□