0.1 练习

练习 0.1 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(A)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 A 成立:$f(PAP^{-1})=f(A)$. 证明: 存在非零常数 c, 使得 $P'P=cI_n$.

证明 由假设知 $f(A)=\mathrm{tr}(AA')$, 因此

$$f(PAP^{-1})=\mathrm{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P')=\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\mathrm{tr}(AA').$$

以下设 $P'P=(c_{ij}),(P'P)^{-1}=(d_{ij})$. 注意 $P'P$ 是对称矩阵, 后面要用到. 令 $A=E_{ij}$, 其中 $1\le i,j\le n$. 并将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned}(P'P)A(P'P)^{-1}A'&=(P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji}\\
&=\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} c_{1i}\\ c_{2i}\\ \vdots\\ c_{ii}\\ \vdots\\ c_{ni}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} d_{1j}\\ d_{2j}\\ \vdots\\ d_{jj}\\ \vdots\\ d_{nj}\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} c_{1i}d_{jj}\\ c_{2i}d_{jj}\\ \vdots\\ c_{ii}d_{jj}\\ \vdots\\ c_{ni}d_{jj}\end{pmatrix}\end{array}\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}\left((P'P)\,A\,(P'P)^{-1}\,A'\right)=c_{ii}d_{jj}$. 而 $\mathrm{tr}\,(AA')=\mathrm{tr}\left(E_{ij}E_{ji}\right)=\mathrm{tr}\,(E_{ii})=1$. 则由 $\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\mathrm{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj}=1. \tag{1}$$

再令 $A=E_{ij}+E_{kl}$, 其中 $1\le i,j,k,l\le n$. 不妨设 $k\ge i,l\ge j$, 将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned}&(P'P)A(P'P)^{-1}A'=(P'P)(E_{ij}+E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji}+E_{lk})\\
&=\left[\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} c_{1i}\\ c_{2i}\\ \vdots\\ c_{ii}\\ \vdots\\ c_{ki}\\ \vdots\\ c_{ni}\end{pmatrix}\end{array}+\begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} c_{1k}\\ c_{2k}\\ \vdots\\ c_{ik}\\ \vdots\\ c_{kk}\\ \vdots\\ c_{nk}\end{pmatrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} d_{1j}\\ d_{2j}\\ \vdots\\ d_{jj}\\ \vdots\\ d_{lj}\\ \vdots\\ d_{nj}\end{pmatrix}\end{array}+\begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} d_{1l}\\ d_{2l}\\ \vdots\\ d_{jl}\\ \vdots\\ d_{ll}\\ \vdots\\ d_{nl}\end{pmatrix}\end{array}\right]\end{aligned}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} j & \qquad & l \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & \cdots & c_{kk} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} i & \qquad & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} d_{1j} & \cdots & d_{1l} \\ d_{2j} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{jj} & \cdots & d_{jl} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{lj} & \cdots & d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{nj} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & \qquad\qquad\qquad & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{1i}d_{jj}+c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl}+c_{1k}d_{ll} \\ c_{2i}d_{jj}+c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl}+c_{2k}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii}d_{jj}+c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl}+c_{ik}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki}d_{jj}+c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl}+c_{kk}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni}d_{jj}+c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl}+c_{nk}d_{ll} \end{pmatrix} \end{array}$$

从而 $\operatorname{tr}\left((P'P)\,A\,(P'P)^{-1}\,A'\right) = c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}$. 而

$$\operatorname{tr}(AA') = \operatorname{tr}\left(\left(E_{ij}+E_{kl}\right)\left(E_{ji}+E_{lk}\right)\right) = \operatorname{tr}\left(E_{ij}E_{ji}+E_{ij}E_{lk}+E_{kl}E_{ji}+E_{kl}E_{lk}\right) = 2+2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

于是由 $\operatorname{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \operatorname{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj} = 2+2\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{2}$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号. 由上述(**??**)(**??**)两式可得

$$c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

在上式中令 $j=l, i\neq k$, 注意到 $d_{jj}\neq 0$, 故有 $c_{ik}+c_{ki}=0$, 又因为 $P'P$ 是对称矩阵, 所以 $c_{ik}=c_{ki}$. 故 $c_{ik}=0, \forall i\neq k$. 于是 $P'P$ 是一个对角矩阵, 从而由(**??**)式可得 $d_{jj}=c_{jj}^{-1}$, 由此可得 $c_{ii}=c_{jj}, \forall i,j$. 因此 $P'P=cI_n$, 其中 $c=c_{11}\neq 0$.

第一章 线性空间与线性方程组