

## 0.1 模

### 定义 0.1 (模)

设  $R$  是幺环,  $M$  是 Abel 群, 其运算为加法. 若有  $R \times M$  到  $M$  的映射:  $(a, x) \rightarrow ax (a \in R, x \in M)$ , 对  $\forall a, b \in R, x, y \in M$  满足

- (1)  $a(x + y) = ax + ay;$
- (2)  $(a + b)x = ax + bx;$
- (3)  $(ab)x = a(bx);$
- (4)  $1 \cdot x = x,$

则称  $M$  为  $R$  上的一个左模, 或称  $M$  是左  $R$  模,  $ax$  称为  $a$  与  $x$  的积, 相应地说,  $R$  与  $M$  间有一个乘法.

类似地, 可定义右  $R$  模, 即有映射  $(x, a) \rightarrow xa (a \in R, x \in M)$ , 对  $\forall a, b \in R, x, y \in M$  满足

- (1)  $(x + y)a = xa + ya;$
- (2)  $x(a + b) = xa + xb;$
- (3)  $x(ab) = (xa)b;$
- (4)  $x \cdot 1 = x.$

若  $M$  既是左  $R$  模, 又是右  $R$  模且满足

$$(ax)b = a(xb), \quad \forall a, b \in R, x \in M,$$

则称  $M$  是  $R$  双模, 或称  $R$  模.



**注** 假设  $R$  交换环且  $M$  是左或右  $R$  模, 又对  $a \in R, x \in M$ , 令  $xa = ax$ , 则易证  $M$  是一个  $R$  模, 今后对于交换环  $R$  上的模都指这种意义上的模.

**例题 0.1** 数域  $P$  上的线性空间  $V$  就是一个  $P$  模. 一般地, 域  $F$  上的模都称为  $F$  上的线性空间.

**证明**



**例题 0.2** 设  $R$  是幺环,  $R$  对加法是 Abel 群, 记为  $R_+$ . 考虑  $R \times R_+$  到  $R_+$  的映射

$$(r, x) \rightarrow rx, \quad r \in R, x \in R_+$$

及  $R_+ \times R$  到  $R_+$  的映射

$$(x, s) \rightarrow xs, \quad x \in R_+, s \in R,$$

使  $R_+$  变成一个  $R$  模, 因而  $R$  可看成它自身上的模.

**证明**



**例题 0.3** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $\mathcal{A}$  是  $V$  的一个线性变换, 令  $R = P[\lambda]$  为  $P$  上的一元多项式环, 则  $R \times V$  到  $V$  的映射  $(f(\lambda), x) \rightarrow f(\mathcal{A})x, f(\lambda) \in R (x \in V)$ , 使  $V$  成为一个左  $R$  模.

**证明**



**例题 0.4** 设  $M$  是一个 Abel 群, 运算为加法, 则  $\text{End}M$  为  $M$  的自同态环, 并且  $\text{End}M \times M$  到  $M$  的映射  $(\eta, x) \rightarrow \eta(x) (\eta \in \text{End}M, x \in M)$ , 使  $M$  成为一个左  $\text{End}M$  模.

**证明**



### 定理 0.1

设  $M$  是一个  $R$  模, 则

(1)  $\forall a, a_i \in R, x, x_i \in M, 1 \leq i \leq n,$

$$a \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n ax_i, \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) x = \sum_{i=1}^n a_i x.$$

(2)  $\forall a \in R, x \in M,$

$$a0 = 0a = 0, \quad a(-x) = (-a)x = -ax.$$



### 证明

(1)

(2)



### 定义 0.2

设  $M$  是一个  $R$  模,  $M$  的子集  $N$  若满足

- (1)  $N$  是  $M$  的子群;
- (2)  $\forall a \in R, x \in N$  有  $ax \in N$ , 即对  $\forall x \in N$ , 有  $Rx \subseteq N$

则称  $N$  为  $M$  的一个子模. 显然,  $\{0\}$  与  $M$  都是  $M$  的子模, 称为平凡子模.



**例题 0.5** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $V$  的子模即  $V$  的线性子空间. 一般域  $F$  上的线性空间的子模, 也称为  $V$  的线性子空间或子空间.

### 证明



**例题 0.6** 设  $M$  是一个 Abel 群, 其运算为加法. 映射

$$(m, x) \rightarrow mx, \quad m \in \mathbb{Z}, x \in M,$$

使  $M$  变成一个  $\mathbb{Z}$  模. 并且  $M$  的子集  $N$  为子模当且仅当  $N$  为  $M$  的子群.

### 证明



### 命题 0.1

设  $R$  是一个么环,  $R$  可看成左  $R$  模、右  $R$  模或  $R$  模. 又设  $N$  是  $R$  的子集, 则  $N$  是左  $R$  模 (或右  $R$  模、 $R$  模)  $R$  的子模当且仅当  $N$  是  $R$  的左理想 (或右理想、理想).



### 证明



**例题 0.7** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $\mathcal{A}$  是  $V$  上的一个线性变换. 在定理 0.3 中, 从  $\mathcal{A}$  出发定义了  $P[\lambda]$  模  $V$ 、 $V$  的子集  $V_1$  是  $P[\lambda]$  子模当且仅当  $V_1$  是  $\mathcal{A}$  的不变子空间.

### 证明



### 定理 0.2

设  $M$  是一个  $R$  模, 则

- (1)  $M$  中任意多个子模之交仍为子模.
- (2)  $M$  中有限多个子模  $N_1, N_2, \dots, N_r$  之和

$$N_1 + N_2 + \dots + N_r = \{x_1 + x_2 + \dots + x_r \mid x_i \in N_i\}$$

仍为  $M$  的子模.

- (3) 设  $S$  为  $M$  的子集, 则  $M$  中包含  $S$  的最小子模是所有包含  $S$  的子模之交, 称为由  $S$  生成的子模. 若

$S = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  为有限集, 则  $S$  生成的子模为

$$Ry_1 + Ry_2 + \dots + Ry_k = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i y_i \mid a_i \in R \right\}.$$

特别地, 由一个元素  $x$  生成的子模  $Rx$  称为**循环子模**. 若  $M$  是由一个元素  $x$  生成, 即  $M = Rx$ , 则称  $M$  为**循环模**.



**注** 循环群就是循环  $\mathbb{Z}$  模. 环  $R$  就是循环  $R$  模.

**证明**

(1)

(2)

(3)



### 定理 0.3

设  $N$  为  $R$  模  $M$  的子模.  $\overline{M} = M/N$  为  $M$  对  $N$  的商群, 定义  $R \times \overline{M}$  到  $\overline{M}$  的映射

$$(a, x + N) \rightarrow ax + N, \quad \forall x \in M, a \in R,$$

则  $\overline{M}$  为  $R$  模, 称为  $M$  对  $N$  的**商模**.



**证明** 因为  $N$  为  $M$  的子模, 所以  $N$  为 Abel 群  $M$  的子群, 从而  $N \triangleleft M$ . 因此商群  $\overline{M}$  是良定义的.

先上述映射是单值的, 即  $R$  中元素  $\overline{M}$  中元素所作乘法运算的合理性.

设  $x_1, x_2 \in M$  且  $x_1 + N = x_2 + N$ , 于是  $x_1 - x_2 \in N$ , 因而, 由  $N$  为子模有  $a(x_1 - x_2) = ax_1 - ax_2 \in N$ , 故  $ax_1 + N = ax_2 + N$ , 即上面映射是单值的, 即是良定义的映射.

以下只要验证  $R$  模的 4 个定义条件. 这些验证不难.



### 定义 0.3

设  $M, M'$  为两个  $R$  模. 如果  $M$  到  $M'$  的映射  $\eta$  满足  $\forall a \in R, x, y \in M$  有

- (1)  $\eta(x + y) = \eta(x) + \eta(y)$ , 即  $\eta$  是群同态;
- (2)  $\eta(ax) = a\eta(x)$ ,

则称  $\eta$  为  $M$  到  $M'$  的一个**模同态**或**R 同态**.

若  $\eta$  还是满映射, 则称  $\eta$  为**满同态**, 此时称  $M$  与  $M'$  同态.

$\eta$  若还是一一对应, 则称  $\eta$  为**模同构**或**R 同构**, 此时称  $M$  与  $M'$  同构, 记为  $M \cong M'$ .



**注** 模同态的定义知模同态必为群同态.

### 命题 0.2

设  $M, M'$  是两个 Abel 群,  $\eta$  是  $M$  到  $M'$  的群同态, 则  $\eta$  也是  $\mathbb{Z}$  模  $M$  到  $\mathbb{Z}$  模  $M'$  的模同态;

若  $\eta$  为群同构, 则  $\eta$  也是模同构.



**证明**



### 定理 0.4

设  $N$  是  $R$  模  $M$  的子模,  $\pi$  是  $M$  到商模  $\overline{M} = M/N$  的自然映射, 即  $\pi(x) = x + N (\forall x \in M)$ .

若已知  $\pi$  是群同态, 又对  $\forall a \in R, x \in M$  有  $\pi(ax) = ax + N = a(x + N) = a\pi(x)$ , 故  $\pi$  也是模同态, 称  $\pi$  是  $M$  到  $M/N$  上的**自然(模)同态**.



证明

□

**命题 0.3**

设  $N$  是  $R$  模  $M$  的子模, 记  $M$  到商模  $M/N$  的自然映射为  $\pi$ , 则

- (1) 若  $M_1$  是模  $M$  的子模且  $M_1 \supseteq N$ , 则  $\pi(M_1) = M_1/N$ .

◆

证明

- (1)

□

**例题 0.8** 假设  $V$  是域  $F$  上的线性空间.  $V$  到自身的模同态  $\mathcal{A}$ , 称为  $V$  的线性变换. 显然, 当  $F$  为数域时,  $\mathcal{A}$  就是线性代数中讲的线性空间的线性变换.

证明

□

**定理 0.5**

设  $M$  是一个  $R$  模,

- (1) 设  $\eta$  是  $M$  到  $M'$  的  $R$  同态, 则  $\eta(M)$  是  $M'$  的子模且  $\eta$  是  $M$  到  $\eta(M)$  上的同态. 进而若  $M_1$  是  $M$  的子模, 则  $\eta(M_1)$  也是  $M'$  的子模.
- (2) 设  $\eta$  是  $R$  模  $M$  到  $R$  模  $M'$  的同态,  $\eta'$  是  $R$  模  $M'$  到  $R$  模  $M''$  的同态, 则  $\eta'\eta$  是  $M$  到  $M''$  的模同态 (图 1).
- (3)  $R$  模之间的同构关系是等价关系.

♡

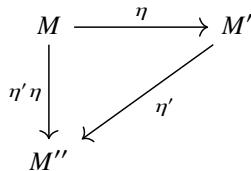


图 1

证明

- (1) 后者注意到  $\eta|_{M_1}$  是  $M_1 \rightarrow M'$  上的模同态, 故由前面的结论知  $\eta(M_1)$  也是  $M'$  的子模.

- (2)

- (3)

□

**定义 0.4 (单模)**

无非平凡子模的  $R$  模  $M$  称为单模.

♣

**定理 0.6**

$R$  模  $M$  为单模当且仅当对  $\forall x \in M, x \neq 0$  有  $M = Rx$ .

♡

**证明** 设  $x \in M, a, b \in R$ , 于是  $ax - bx = (a - b)x \in Rx$ , 故  $Rx$  是  $M$  的子群. 又  $aRx \subseteq Rx$ . 因此  $Rx$  为  $M$  的子模, 显然  $x \neq 0$ , 则  $Rx \neq 0$ .

若  $M$  为单模,  $x \in M, x \neq 0$ . 于是  $Rx$  是  $M$  的非零子模, 因此  $M = Rx$ .

反之, 设  $\forall x \in M, x \neq 0$  有  $M = Rx$ . 若  $M_1$  是  $M$  的非零子模. 于是有  $x \in M_1, x \neq 0$ . 于是  $M = Rx \subseteq M_1 \subseteq M$ , 故  $M_1 = M$ , 即  $M$  为单模.

□

**定义 0.5**

一个  $R$  模  $M$  到自身的同态称为  $M$  的  $R$  自同态, 简称自同态.  $R$  模  $M$  的  $R$  自同态的集合记为  $\text{End}_R M$ . 以  $\text{End}M$  表示 Abel 群  $M$  的所有群自同态的集合.

♣

**注** 由模同态的定义知模同态必为群同态, 故有  $\text{End}_R M \subseteq \text{End}M$ . 另一方面, 可以验证在  $\text{End}M$  中可定义加法与乘法使  $\text{End}M$  是一个环.

**定理 0.7**

设  $M$  是一个  $R$  模, 则  $M$  的  $R$  自同态的集合  $\text{End}_R M$  是 Abel 群  $M$  的自同态环  $\text{End}M$  的子环.  $\text{End}_R M$  称为  $R$  模  $M$  的模自同态环.

♡

**证明** 显然,  $\text{id}_M \in \text{End}_R M$ , 故  $\text{End}_R M \neq \emptyset$ , 又若  $\eta_1, \eta_2 \in \text{End}_R M, x, y \in M, a \in R$ , 则有

$$(\eta_1 - \eta_2)(x + y) = \eta_1(x + y) - \eta_2(x + y) = (\eta_1 - \eta_2)(x) + (\eta_1 - \eta_2)(y),$$

可知  $\eta_1 - \eta_2 \in \text{End}_R M$ , 故  $\text{End}_R M$  对加法成群. 又由同态性质知  $\eta_1\eta_2 \in \text{End}_R M$ , 由此可知  $\text{End}_R M$  是  $\text{End}M$  的子环.

□

**例题 0.9** 设  $M$  为 Abel 群, 于是  $M$  为  $\mathbb{Z}$  模. 则由**命题 0.2**知  $\text{End}_{\mathbb{Z}} M = \text{End}M$ .

**证明**

□

**例题 0.10** 设  $R$  是一个幺环, 则  $R$  作为左  $R$  模有  $\text{End}_R R = R_r$ .

**注** 设  $M$  是一个左  $R$  模, 一般把  $M$  的模自同态环记为  ${}_R \text{End}M$ . 若  $M$  是右  $R$  模, 则将  $M$  的模自同态环记为  $\text{End}_R M$ . 交换幺环上的模, 可自然地看成双模, 故这时没必要区分这两种记号, 统一地以  $\text{End}_R M$  表示.

**证明**  $\forall a \in R$ , 可定义  $a$  的右乘变换  $a_r$  为  $a_r(x) = xa (\forall x \in R)$ . 显然, 对  $\forall x, y, a, b \in R$  有  $a_r(x + y) = a_r(x) + a_r(y)$ ,  $a_r(bx) = bxa = ba_r(x)$ , 故  $a_r \in \text{End}_R R$ . 令  $R_r = \{a_r | a \in R\}$ , 即有  $R_r \subseteq \text{End}_R R$ . 现设  $\eta \in \text{End}_R R$ ,  $\eta(1) = a$ , 于是  $\eta(x) = \eta(x \cdot 1) = x\eta(1) = xa = a_r(x)$ , 即  $\eta = a_r$ . 故  $\eta \in R_r$ , 这样就证明了幺环  $R$  作为左  $R$  模有  $\text{End}_R R = R_r$ .

□