0.1 集合及其运算

0.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 0.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**)，通常用大写字母如 A, B, C 等表示。构成一个集合的那些事物称为集合的元素 (或元)，通常用小写字母如 a, b, c 等表示。♣

若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$。对于给定的集合，任一元素要么属于它，要么不属于它，二者必居其一。

不含任何元素的集合称为空集，用 $\emptyset$ 表示；只含有限个元素的集合称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$. 若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体，称为 A 的幂集，记为 2^A.

0.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且} x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$，则称 A 与 B 互不相交。

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为集族，其中 Γ 为指标集 (有限或无限)，α 为指标. 特别地，当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时，集族称为列集，记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$。

0.1.2.0.1 集族的并：

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x : \exists\alpha_0 \in \Gamma \text{ 使得} x \in A_{\alpha_0}\}$$

0.1.2.0.2 集族的交：

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \forall\alpha \in \Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$，即

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且} x \notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集，X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X-A$，称为 A 的余集，记为 A^c，即

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

注 补集是相对概念，若 $A \subset B$，则 $B-A$ 称为 A 关于 B 的补集。特别地，余集是集合关于全集的补集。

笛卡尔积

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

例如，n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ 个}}$。

集合的运算及性质

(1) $A\cup A = A$，$A\cap A = A$；

(2) $A\cup\emptyset = A$，$A\cap\emptyset = \emptyset$；

(3) $A\cup B = B\cup A$，$A\cap B = B\cap A$；

(4) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$；

(5) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$，
$A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$，$A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$；

(6) $A\cup A^c = X$，$A\cap A^c = \emptyset$；

(7) $X^c = \emptyset$，$\emptyset^c = X$；

(8) $A - B = A\cap B^c$。

定理 0.1 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族，则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$；

(ii) $(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$，则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$，故对 $\forall\alpha\in\Gamma$，$x\notin A_\alpha$，即 $\forall\alpha\in\Gamma$，$x\in A_\alpha^c$。从而 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$，因此，

$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。上述推理反过来也成立，故 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$。因此，$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。

(ii) 类似可证。 □

0.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列，若 $\{A_n\}$ 单调递增，即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。若 $\{A_n\}$ 单调递减，即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

定义 0.2 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，则 $\{C_n\}$ 单调递减，故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**上限集**，记为 $\limsup_{n\to\infty} A_n$ 或 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$。又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \cdots \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \cdots$$

记 $D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$，则 $\{D_n\}$ 单调递增，故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集，记为 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ 或 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$。显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$，则称 $\{A_n\}$ 收敛，其极限记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$。

命题 0.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列，则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k &= \{x : x \text{ 属于无穷多个} A_n\}\\ &= \{x:\ \text{对}\forall k\in\mathbb{N}, \text{都存在} n_k \text{ 使得} x\in A_{n_k}\}\end{aligned}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x: \text{除有限个}A_n\text{ 外, 都含有}x\}$$
$$= \{x: \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{使得} x \in A_n, \forall n \geqslant n_0\}$$

证明 (1) 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$；对 $n = n_1+1$, 有 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$，故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$；以此类推，得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此，x 属于无穷多个 A_n.

反之，若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x \in A_{n_k}, k = 1, 2, \cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此，$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(2) $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \iff x \in A_n, \forall n \geqslant n_0$. □

例题 0.1 设 $A_{2n+1} = [0, 2-1/(2n+1)], n = 0, 1, 2, \cdots, A_{2n} = [0, 1+1/2n], n = 1, 2, \cdots$, 求 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ 与 $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

解 注意到

$$[0,1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,2)$$

故只需考察 $(1,2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1,2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能"除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n\to\infty} A_n = [0,1]$, $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,2)$. □

例题 0.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则"$f_n(x) \nrightarrow f(x)$", 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}.$$

□

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德 摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x: |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$