0.1 多元函数的连续性和微分

我们的极限采用聚点定义, 即只需要沿着有定义的地方趋近即可.

例题 0.1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明 f 沿着每条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha, & t>0,\alpha\in[0,2\pi)\\ y=t\sin\alpha, & t>0,\alpha\in[0,2\pi)\end{cases}$ 趋于 $(0,0)$ 时都趋于 0, 但是 f 在 $(0,0)$ 不连续.

笔记 本结果表明, 使用极坐标求二重极限不一定正确. 实际上, 我们用极坐标求二重根极限时, 都是固定 α, 再令 $t\to 0$ 求极限. 因此得到的只是沿着每个过原点的射线 (与 x 轴的夹角为 α) 趋于 $(0,0)$ 的极限, 比如还可以沿 $y=kx^2$ 这条曲线趋于 $(0,0)$.

证明 一方面,

$$\lim_{t\to0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3\cos\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0,$$

另外一方面

$$\lim_{x\to0^+}f(x,kx^2)=\lim_{x\to0^+}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

故 f 在 $(0,0)$ 不连续. 矛盾! □

注 实际上, 使用极坐标变换求极限时, 只需要在 $t\to 0$ 的时候让 α 也发生变化 (不再固定 α), 再求极限才能得到正确的极限值, 但这样反而不方便求极限.

那么什么时候固定 α 后求出来的极限就是原函数的极限呢? 实际上只需要极限关于 $\alpha\in[0,2\pi)$ 一致, 因为你直接考察定义 $\varepsilon-\delta$ 语言即可. 实际做题中可以体现为

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{\alpha\in[0,2\pi)}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|=0$$

更直白的, 你需要得到形如

$$|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|\le g(t)$$

的不等式且 $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=0$.

命题 0.1

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某个去心邻域内有定义, 若对 $\forall\alpha\in[0,2\pi)$, 都有

$$\lim_{t\to0^+}f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)=A\in\mathbb{R},$$

并且

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{\alpha\in[0,2\pi)}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|=0,$$

或者存在函数 $g(t)$ 满足对 $\forall\alpha\in[0,2\pi)$, 都有

$$|f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-A|\leqslant g(t),\quad \lim_{t\to0^+}g(t)=0,$$

则

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=A.$$

证明 显然条件 $\lim\limits_{t\to0^+}\sup\limits_{\alpha\in[0,2\pi)}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|=0$ 和条件存在函数 $g(t)$ 满足对 $\forall\alpha\in[0,2\pi)$, 都有

$$|f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-A|\leqslant g(t),\quad \lim_{t\to0^+}g(t)=0$$

等价. 由 $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=0$ 知,$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|g(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in(0,\delta).$$

对 $\forall(x,y)$, 满足 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$, 令

$$t=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\ \alpha=\arctan\frac{y-b}{x-a},$$

则 $x=a+t\cos\alpha, y=b+t\sin\alpha$. 于是

$$|f(x,y)-A|=|f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-A|\leqslant g(t)<\varepsilon,\ \forall(x,y)\in B((a,b),\delta).$$

□

例题 0.2 计算

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x+y}$$

证明 考虑

$$|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)|=t^2\left|\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|=t^2|\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha|\le 2t^2,$$

于是

$$0\le\lim_{t\to0^+}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)|\le 2\lim_{t\to0^+}t^2=0$$

故我们得到了

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x+y}=0.$$

□

例题 0.3 设 f 在 $(0,0)$ 连续且满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a>0$$

求 a 的范围使得 f 在 $(0,0)$ 一定取到极值. 再求 a 的范围使得 f 在 $(0,0)$ 一定取不到极值.

笔记 注意到 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 但是

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}$$

即猜测 $\frac{1}{2}$ 是 a 的分界点.

证明 由条件容易得到

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a\\ \Longrightarrow&\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=a\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)+\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy=0\\ \Longrightarrow&f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\end{aligned}$$

以及

$$f(x,y)=(a+g(x,y))(x^2+y^2)+xy,\qquad\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0.$$

当 $a>\frac{1}{2}$, 当 (x,y) 足够靠近 0 使得 $g(x,y)>\frac{1}{2}-a$. 此时我们有

$$f(x,y)=(a+g(x,y))(x^2+y^2)+xy>\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy=\frac{1}{2}(x+y)^2\ge0$$

故 $a>\frac{1}{2}$ 时,f 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

当 $0<a<\frac{1}{2}$, 当 (x,y) 足够靠近 0 使得 $-a<g(x,y)<\frac{1-2a}{4}$, 则此时当 $x>0,y>0$ 有 $f(x,y)>0$. 但是

$$f(x,y)=(a+g(x,y))(x^2+y^2)+xy<\frac{1+2a}{4}(x^2+y^2)+xy$$

又 $\frac{1+2a}{4}(x^2+y^2)+xy$ 在 $y=-x$ 上有

$$\frac{1+2a}{4}2x^2-x^2=\frac{2a-1}{2}x^2<0,$$

故此时 $(0,0)$ 不是 f 的极值点.

当 $a=\frac{1}{2}$ 问题无法判断, 这是因为考虑 $f(x,y)=xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+x^2(x^2+y^2)$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2+x^2(x^2+y^2)>0,$$

即 $(0,0)$ 是极值. 但是考虑 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy-x(x^2+y^2)$, 就有

$$f(x,-x)=x^2-x^2-2x^3=-2x^3<0, x>0,$$

$$f(x,x)=x^2+x^2-2x^3=2x^2-2x^3>0, 0<x<1.$$

即 $(0,0)$ 不是极值. □

定理 0.1

设 $u=f(x,y), v=g(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数, 则 u 与 v 之间有函数关系当且仅当

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0.$$

证明 必要性. 假定 u,v 满足 $F(u,v)=0$, 则由 $F(u,v)=F[f(x,y),g(x,y)]$ 可知

$$F_u'\cdot f_x'+F_v'g_x'=0,\quad F_u'f_y'+F_v'g_y'=0.$$

注意到 F_u',F_v' 不同时为 0, 故上述方程组存在非零解, 从而有 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

充分性. 若 u_x',u_y',v_x',v_y' 全为 0, 则 u,v 是常数, 从而有关系 $u=cv$. 若上述四个值有一个非 0, 例如是 $v_y'\neq0$, 则由隐函数存在定理, 可从 $v=g(x,y)$ 可确定函数 $y=\psi(x,v)$. 代入 $u=f(x,y)$ 可得 $u=f(x,\psi(x,v))$, 记为 $F(x,v)$. 因此, 我们有

$$0=J=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_x'+F_v'v_x' & F_v'v_y'\\ v_x' & v_y'\end{vmatrix}=F_x'v_y'.$$

由此知 $F_x'=0$. 这说明 F 不是 x 的函数, 即 $u=F(v)$. □

例题 0.4 设 $xf_x'+yf_y'=0$, 证明 f 是 $\frac{y}{x}$ 的函数.

证明 注意到

$$\begin{vmatrix}f_x' & f_y'\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}\left(xf_x'+yf_y'\right)=0, \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}, \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

我们由定理 0.1知 f 是 $\frac{y}{x}$ 的函数. □

定理 0.2 (用矩阵判定极值)

设 f 是某个区域 $V\subset\mathbb{R}^n$ 的二阶连续可微函数, 我们定义其 Hess(黑塞) 矩阵为

$$Hf=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

则对 $\mathbf{x}_0\in V$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=0, i=1,2,\cdots,n$ 有

1. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是正定的, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 严格极小值点;
2. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是负定的, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 严格极大值点;
3. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是不定的 (既不是正定, 也不是负定), 则 $\mathbf{x}_0$ 不是 f 极值点;
4. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 极小值点, 则 $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是半正定的;

5. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 极大值点, 则 $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是半负定的.

证明

$\square$

定义 0.1

我们称 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为**齐 $n(n\in\mathbb{N})$ 次函数**, 如果 f 满足

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R},t>0.$$

命题 0.2 (齐次函数基本性质)

若 $f\in D^2(\mathbb{R}^2)$, 则 f 是齐 n 次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

证明 若 f 是齐 n 次函数, 则

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R},t>0.$$

两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y),$$

于是

$$tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^nf(x,y)=nf(tx,ty),$$

再令 $\mathbf{x}=tx,\mathbf{y}=ty$, 即证.

反过来若

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$$

成立, 固定 $x,y\in\mathbb{R}$ 并考虑 $g(t)=f(tx,ty)$. 则有

$$tg'(t)=tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nf(tx,ty)=ng(t).$$

故解微分方程得 $g(t)=Ct^n$, 从而将 $g(1)=f(x,y)$ 代入得 $C=f(x,y)$, 于是

$$g(t)=f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

这就证明了

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R},t>0.$$

$\square$

例题 0.5 设 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 且 $u(0,y)=y^2,u(x,1)=\cos x$, 求 u.

证明 对 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 两边关于 y 积分得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=C(x)$. 由 $u(x,1)=\cos x$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)=-\sin x\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)+u(x,1)=C(x)=\cos x-\sin x.$$

又

$$\frac{\partial(ue^x)}{\partial x}=e^x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)=e^x(\cos x-\sin x)\Rightarrow ue^x=e^x\cos x+C_2(y),$$

我们有

$$u(x,y)=\cos x+C_2(y)e^{-x}.$$

现在

$$y^2 = u(0, y) = 1 + C_2(y) \Rightarrow C_2(y) = y^2 - 1.$$

故

$$u(x, y) = \cos x + (y^2 - 1)e^{-x}.$$

□

例题 0.6 设 l_1, l_2 夹角为 $\varphi \in (0, \pi)$ 且 f 连续可微, 证明

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \leqslant \frac{2}{\sin^2 \varphi}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right].$$

证明 由可微时方向导数计算公式有

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \cos a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin a \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = \cos(a + \varphi) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(a + \varphi) \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} & \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos (a + \varphi) & \sin (a + \varphi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos (a + \varphi) & \sin (a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 a + \cos^2(a + \varphi) & \sin (a + \varphi) \cos (a + \varphi) + \sin a \cos a \\ \sin (a + \varphi) \cos (a + \varphi) + \sin a \cos a & \sin^2 a + \sin^2(a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

利用

$$\begin{pmatrix} \cos^2 a + \cos^2(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a \\ \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a & \sin^2 a + \sin^2(a + \varphi) \end{pmatrix}$$

的特征值为 $1 \pm \cos \varphi$ 和Rayleigh quotient(瑞丽商) 的基本性质, 我们知道

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \leqslant \frac{1}{1 - |\cos \varphi|}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right] \leqslant \frac{2}{\sin^2 \varphi}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right],$$

即证. 上式最后一个不等式是因为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 - |\cos \varphi|} \geqslant \frac{2}{\sin^2 \varphi} \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - |\cos \varphi| \leqslant \frac{\sin^2 \varphi}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & 2 - 2|\cos \varphi| \leqslant 1 - \cos^2 \varphi \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^2 \varphi - 2|\cos \varphi| + 1 \geqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (|\cos \varphi| - 1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

例题 0.7 设 D 为单位圆盘, 考虑 $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ 且 $|f| \leqslant 1$, 证明: 存在 D 中的一个点 (x_0, y_0) 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|^2 \leqslant 16.$$

笔记 摄动想法, 考虑 $g(x,y)=f(x,y)+\varepsilon(x^2+y^2)$, 其中 ε 待定. 此外很多同学疑惑构造函数咋来的, 实际上这是完全没有必要的! 因为大家几乎都是记的. 本题有一些更高端的技术可以加强到最佳系数.

证明 考虑 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$, 则由 $|f|\leqslant 1$ 知 $g|_{\partial D}\geqslant 1, g(0,0)=f(0,0)\leqslant 1$. 故 g 最小值在 D 内取到. 又由 $g\in C(D)$, 从而存在 D 中的一个 g 的最小值点 (x_0,y_0) 使得 $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=0, \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-4x_0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-4y_0,$$

这就得到了证明. □

命题 0.3

设 $f(x,y)$ 是 D 上的二元函数且偏导数都存在, 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 则

$$r\frac{\partial g}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

证明 直接求导得证. □

例题 0.8 设 $\lim\limits_{r=\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=a>0$, 证明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 取得最小值.

注 本题关键是有一个隐藏条件: 条件极限关于角度 θ 的一致性.

笔记 积累想法设 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 则

$$r\frac{\partial g}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial\theta}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

即联想命题 0.3.

证明 注意到

$$\lim_{r\to+\infty} rg_r'=\lim_{r\to+\infty} r\frac{\partial g}{\partial r}=a>0,$$

于是存在 $r_0>0$ 使得 $g_r'>0, \forall r\geqslant r_0$. 则此时

$$g(r,\theta)\geqslant g(r_0,\theta), \forall r\geqslant r_0, \theta\in[0,2\pi),$$

故 g 的最小值在 $D=\{(r,\theta): r\in[0,r_0], \theta\in[0,2\pi)\}$ 取到, 因此 $\min\limits_{\substack{r\in[0,r_0],\\ \theta\in[0,2\pi]}} g(r,\theta)$ 为 g 最小值. □

例题 0.9 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数且 $f(0,1)=f(1,0)$, 证明存在单位圆周上两个不同的点使得 $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$.

笔记 联想命题 0.3.

证明 令 $x=cos\theta, y=\sin\theta$, 考虑 $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$, 注意到

$$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi).$$

由 Rolle 中值定理知, 存在 $\theta_1\neq\theta_2\in[0,2\pi)$, 记 $x_i=\cos\theta_1, y_i=\sin\theta(i=1,2)$, 使得

$$\begin{aligned}
&g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0\\
\Longleftrightarrow&\begin{cases}-\sin\theta_1\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta_1,\sin\theta_1)+\cos\theta_1\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta_1,\sin\theta_1)=0,\\ -\sin\theta_2\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta_2,\sin\theta_2)+\cos\theta_2\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta_2,\sin\theta_2)=0.\end{cases}\\
\Longleftrightarrow&\begin{cases}y_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)=x_1\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1),\\ y_2\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2)=x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2).\end{cases}
\end{aligned}$$

即单位圆周上有两个不同的点, 使得 $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$. □

例题 0.10

1. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2), f(0,0)=0$ 且 $|\nabla f| \leqslant 1$, 证明 $|f(1,2)| \leqslant \sqrt{5}$.
2. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2), f(0,0)=0$ 且
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant 2|x-y|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant 2|x-y|,$$
证明: $|f(5,4)| \leqslant 1$.

注 梯度及其模定义为 $\nabla f \triangleq \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), |\nabla f| \triangleq \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$.

注 第二问如果和上一问完全类似, 取积分路径为连接 $(0,0),(5,4)$ 的线段, 那么由第一型曲线积分和第二型曲面积分的联系和 Cauchy 不等式 (离散版本) 我们有
$$\begin{aligned}
|f(5,4)| &= \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| = \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_{(0,0)}^{(5,4)}|\nabla f|\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{8}\int_{(0,0)}^{(5,4)}|x-y|\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sqrt{8}}{5}\int_0^5 x\sqrt{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{82}.
\end{aligned}$$
其中 $\left(\cos\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right), \sin\left(\widehat{\boldsymbol{t},y}\right)\right)$ 为积分路径曲线正切向的方向余弦. 没能成功的原因就是两类曲线积分转换时的损失, 没有充分利用题目条件: 当 $y=x$ 时,f 的两个偏导数都为 0. 上述证明中选取的积分路径与 $y=x$ 这条直线关系不大.

证明

1. 注意到
$$f(1,2)-f(0,0)=\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$
这里积分路径待定. 于是由第一型曲线积分和第二型曲面积分的联系和 Cauchy 不等式 (离散版本) 得
$$\begin{aligned}
|f(1,2)| &= \left|\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right)\right)\mathrm{d}s\right|, \\
&\leqslant \int_{(0,0)}^{(1,2)}|\nabla f|\mathrm{d}s \leqslant \int_{(0,0)}^{(1,2)}1\mathrm{d}s
\end{aligned}$$
其中 $\left(\cos\left(\widehat{\boldsymbol{t},x}\right), \sin\left(\widehat{\boldsymbol{t},y}\right)\right)$ 为积分路径曲线正切向的方向余弦. 为了得到这个方法最佳的估计, 我们取积分路径为连接 $(0,0),(1,2)$ 的线段, 这恰好给出了 $|f(1,2)| \leqslant \sqrt{5}$.
2. 先沿着 $y=x, 0 \leqslant x \leqslant 4$ 积分, 此时知积分 $\int_{(0,0)}^{(4,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$ 为 0. 于是
$$\begin{aligned}
|f(5,4)| &= \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| = \left|\int_{(4,4)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| \\
&= \left|\int_4^5\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\int_4^5|x-4|\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

□