


0.1 级数基本结论

0.1.1 级数的敛散性

定理 0.1 (交错级数不等式)

设 $\{a_n\}$ 递减非负数列, 则对 $m, p \in \mathbb{N}_0$, 必有

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} (-1)^n a_n \right| \leq a_m. \quad (1)$$

 **笔记** 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m = 0$, 则

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为偶数} \\ a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-2} - a_{p-1}) - a_p & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \leq a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-2} - a_{p-1}) + a_p & , p \text{ 为偶数} \\ (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \geq 0,$$

这就证明了不等式(1). □

定理 0.2 (A-D 判别法)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 满足下列条件之一时收敛.

1. $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, b_n 递减到 0;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, b_n 单调有界.

证明 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \sum_{j=n}^k a_j + b_m \sum_{k=n}^m a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M = 2 \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|,$$

我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M |b_m| = M b_n \rightarrow 0, \text{ 当 } n, m \rightarrow \infty.$$

对于第二种情况, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任何 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大, 对任何 $p \in \mathbb{N}_0$, 必有

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

于是当 n, m 充分大, 我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + \varepsilon |b_m| = \varepsilon |b_m - b_n| + \varepsilon |b_m| \leq 3\varepsilon \sup_{n \geq 1} |b_n|.$$

因此无论如何都有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

定理 0.3 (积分判别法)

若 f 是 $[1, +\infty)$ 的单调不变号函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 同敛散.



笔记 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

证明 不妨设 f 非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x) dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

由夹逼准则即证. □

定理 0.4 (比值判别法)

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0, 1)$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \delta, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.



注 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.

定理 0.5 (Cauchy 链)

设正值递增函数 $F \in C^1[a, +\infty), \frac{F'}{F}$ 在 $[a, +\infty)$ 递减. 若满足 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散, 则对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 有如下判别法:

极限版:

1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \quad (2)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \quad (3)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, \forall n \geq N,$$


则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, \forall n \geq N,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.



 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (3) 为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq 1$, 则 $\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$ 仍然可能在 n 充分大时严格超过 1.

注 取 $F(x) = e^x$, 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{n - \ln a_n}{n} = 1 - \ln \sqrt[n]{a_n},$$

这恰好是**根值判别法**.

取 $F(x) = x$, 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{-\ln a_n}{\ln n},$$

这恰好是**对数判别法**.

证明 Step 1 先证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty. \quad (4)$$

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$, 则**积分判别法**表明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_a^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln F(x) \Big|_a^{\infty},$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)}$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{A}$, 这就和 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散矛盾! 故我们证明了 (4).

Step 2 当 (2) 成立, 再利用 (4) 式, 存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, F(N) > 1, \forall n \geq N.$$

因此

$$\frac{F'(n)}{a_n} \geq e^{c \ln F(n)} \Rightarrow \frac{F'(n)}{F^c(n)} \geq a_n, \forall n \geq N.$$

结合 $\frac{F'(n)}{F^c(n)} = \frac{F'(n)}{F(n)} \cdot \frac{1}{F^{c-1}(n)}$ 递减, 由**积分判别法**, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F^c(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F^c(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y^c} dy < \infty,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Step 3 若存在 $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, F(n) \geq 1, \forall n \geq N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有 $\frac{F'(n)}{F(n)} \leq \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leq a_n, \forall n \geq N$ 以及由 **积分判别法** 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.6 (对数判别法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq c, \forall n \geq N,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 0.7 (根值判别法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \geq 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 而应该是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. 也不应是无穷多个 n , 而是任何 $n \geq N$. 所以我们需要一些加强的证明.

证明 若存在 $c \geq 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则存在 $n_k \rightarrow \infty$, 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq c \geq 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.8 (Kummer 链)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \dots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$


有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n < 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ 使得 $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_n \leq 0, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$.

注 当 $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$. 我们有 $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$, 这恰好就是比值判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有 $K_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$, 这恰好是拉比判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n \ln n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) \\ &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln n - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n \cdot \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

即得一个较为广泛的判别法. 要注意我们在阶的层面对 K_n 做了变形, 因此不再给出不等式版本的较为广泛的判别法.

证明 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ 使得 $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$, 则

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \right) \geq a_{n+1}, \forall n \geq N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^m a_{k+1} \leq \sum_{k=N}^m \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_k}{d_k} - \frac{a_{k+1}}{d_{k+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{d_N} - \frac{a_{m+1}}{d_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a_N}{d_N},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_n \leq 0, \forall n \geq N$. 则 $\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \geq \frac{a_n}{d_n}, \forall n \geq N$. 现在

$$a_{n+1} \geq \frac{a_N}{d_N} d_{n+1}, \forall n \geq N, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

这就完成了证明. □

定理 0.9 (拉比判别法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 1$ 使得 $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \delta, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \forall n \geq N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 □

定理 0.10 (较为广泛的判别法)


对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版 1:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

极限版 2:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

 **笔记** 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是 **Kummer 链** 的 $d_n = \frac{1}{n \ln n}$ 的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设 $t > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\ln n \left[n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > t, \forall n \geq N.$$

然后

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{n} + \frac{t}{n \ln n}, \forall n \geq N.$$

现在求和得

$$\ln \frac{a_N}{a_{n+1}} > \sum_{k=N}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right), \forall n \geq N.$$

于是

$$a_{n+1} < a_N e^{-\sum_{k=N}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)}, \forall n \geq N.$$

现在由例 0.1(2) 和例 0.2, 我们有

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1), \sum_{k=N}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

于是

$$e^{-\sum_{k=N}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)} = e^{-\ln n - \ln \ln n + O(1)} = \frac{e^{O(1)}}{n \ln^t n}.$$

结合积分判别法有

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy < \infty,$$

我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 设 $0 < t < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\ln n \left[n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < t, \forall n \geq N.$$

然后相似第 1 问的证明和

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy = +\infty,$$

我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

□

定理 0.11 (Herschfeld 判别法)

设 $p > 1$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$. 定义

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}}, n \in \mathbb{N},$$

然后 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

显然 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增.

♡

证明 必要性: 若 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \geq \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{p^n}}$$

和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界知 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

充分性: 若 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界, 则设 $a_n^{\frac{1}{p^n}} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, 于是我们有 $a_n \leq M^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 因此

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \leq \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}} \\ &= M \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}}_{n \text{ 个根号}}, \end{aligned}$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1 = \sqrt[p]{1}, x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}.$$


注意到 $x_2 = \sqrt[p]{2} > 1 = x_1$, 不动点 $x_0 > 1$ 满足 $x_0^p - x_0 - 1 = 0$. 因此由命题??知 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 递增有上界, 从而极限存在.

□

命题 0.1

若 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = 0$.



 **笔记** 这个命题是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人卡住.

这个命题是命题??的离散版本.

注 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理就可以的. 笔记如果我们直接使用 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在, 而 Stolz 定理不可以逆用.

证明 记 $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$, 则由 Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} [k - (k+1)] s_k + n s_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_n - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} s_k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0. \end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛, 则

1. 若 a_n 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
2. 若 $n a_n$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$.
3. 若 $n \ln n \cdot a_n$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$.



证明

1. 不妨设 a_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道 a_n 递减到 0. 注意到由 a_n 递

减知

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \quad 0 \leq (2n-1)a_{2n-1} \leq 2na_{2n-1} \leq 2 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0.$$

由命题??知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

2. 不妨设 na_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = c \neq 0$ 会导致 $a_n \sim \frac{c}{n}$, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以我们知道 na_n 递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{ka_k}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \\ &= na_n \int_{[\sqrt{n}]}^n \frac{1}{x} dx = na_n \ln \frac{n}{[\sqrt{n}]} \geq na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} na_n \ln n \geq 0, \end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$.

3. 不妨设 $n \ln n \cdot a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = c \neq 0$. 注意到 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = 0$, 从而 $a_n \geq 0$.

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} a_k &= \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{k \ln k \cdot a_k}{k \ln k} \geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{1}{k \ln k} \\ &\geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = n \ln n \cdot a_n \int_{[\ln n]}^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]} \geq n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln n}{\ln \ln n} \sim n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n, \end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$.

□

定理 0.12 (级数的控制收敛定理)

设 $a_n(s), n = 1, 2, \dots$ 满足

$$|a_n(s)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及 $\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$.

则

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里 \lim_s 表示 s 趋于某个 $s_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

♡

证明 事实上由极限保号性, 我们知道 $|b_n| \leq c_n, n = 1, 2, \dots$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n(s) - b_n| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n. \end{aligned}$$

对 s 取极限得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

由 m 任意性及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| = 0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

例题 0.1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left| \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) \right| \leq e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq e^{n \cdot (-\frac{k}{n})} = e^{-k}.$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} < \infty$, 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \\ &= \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}. \end{aligned}$$

□

定理 0.13 (级数的 Levi 定理)


若非负 $a_n(s), n = 1, 2, \dots$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是 $s \rightarrow s_0^+$, 那么应该是关于 s 的递减函数) 且

$$\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

♡

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 那么由于 $0 \leq a_n(s) \leq b_n$, 取控制级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$ 也单调递增, 故 $\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$ 广义存在. 假设

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

此时对任何 $N \in \mathbb{N}$, 都有


$$\sum_{n=1}^N b_n = \lim_s \sum_{n=1}^N a_n(s) \leq \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

引理 0.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列 $a_n(s), n = 1, 2, \dots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_s a_n(s) \leq \liminf_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s).$$

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 不妨设 $s \rightarrow +\infty$, 考虑 $g_n(s) \triangleq \inf_{t \geq s} a_n(t)$, 则 g_n 关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_s a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_s g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geq s} a_n(t) \leq \liminf_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s),$$

这就完成了证明. □

定理 0.14 (级数的 Fubini 定理)


满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \quad (5)$$

1. $a_{m,n} \geq 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$;

2.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

 **笔记** 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

证明

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到 $\{\sum_{n=1}^N a_{m,n}\}$ 关于 N 非负递增, 于是有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad (6)$$

这就是 (5).

2. 注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^N a_{m,n} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

于是由级数的控制收敛定理知 (6) 仍然成立, 这就是 (5). □

定理 0.15 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.

2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致. ♥

证明

1. 设加括号后新的级数是 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$, 其中 n_k 递增趋于 $+\infty$. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$

这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, n_1 = 0$, 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$ 收敛且对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots, a_{n_{k+1}}$

将符号相同, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (7)$$

事实上, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $n_m < n \leq n_{m+1}$, 此时

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j + \sum_{j=n_m+1}^n a_j.$$

则当 $a_j \geq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$, 我们有

$$\sum_{j=1}^n a_j \geq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j, \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j - \sum_{j=n_m+1}^n a_j \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (8)$$

若 $a_j \leq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$, 可得 (8) 的类似式


$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \leq \sum_{j=1}^n a_j \leq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (9)$$

让 $n \rightarrow +\infty$, 我们由 (8), (9) 和夹逼准则得 (7). 这就完成了证明. \square

命题 0.3

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty), S_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不恒为 0, 不妨设 $a_1 \neq 0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} \begin{cases} \text{收敛,} & p > 1 \\ \text{和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 同敛散,} & 0 < p \leq 1 \end{cases}.$$

 **笔记** 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right), \sum \left(\frac{\ln \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

证明 当 $p > 1$, 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^p} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} dx = \int_{S_1}^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \frac{1}{x^p} dx,$$

可以看到无论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性如何都有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

当 $0 < p \leq 1$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则有 $\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{a_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p} = ca_n, n \rightarrow \infty$, 其中 c 是某个常数, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. 当

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 我们对任何充分大的 $m, k \in \mathbb{N}$ 都有

$$1 - \frac{S_k}{S_{k+m}} = \frac{S_{k+m} - S_k}{S_{k+m}} = \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_{k+m}} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n^p}.$$

让 $m \rightarrow +\infty$, 利用 $S_{k+m} \rightarrow +\infty$, 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散. 这就完成了证明. \square

0.1.2 幂级数阶与系数阶的关系

定理 0.16 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

(1) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1) \quad (10)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (11)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (12)$$

(2) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (13)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (14)$$

(3) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \quad (16)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (17)$$

(4) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (18)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \quad (19)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (20)$$

注 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

证明

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{g(x)} = 0.$$

由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (11) 即得 (12).

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ 和 (1) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (14).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \leq \frac{b_n x^n}{b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + b_{n+1} x},$$

即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = 0$. 由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (16) 我们就得到 (17).

(4) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ 和 (3) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (20).

□

例题 0.2 设 p 是 \mathbb{R} 上实解析函数且 $0 < \prod_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(0) < \infty$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)}$.

证明 注意到

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\prod_{n=0}^{m+1} p^{(n)}(0)}{\prod_{n=0}^m p^{(n)}(0)} = \lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)}(0),$$

所以 $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, 故

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

在 \mathbb{R} 上有定义且收敛. 于是

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n+1)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

由定理 0.16(3), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 1.$$

□

例题 0.3 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

解 注意到

$$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty.$$

由定理 0.16 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \stackrel{\text{例题??}}{=} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

□

例题 0.4 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(1-y)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}} = -\frac{1}{2}.$$

证明 注意到

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &= \int_0^1 \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} y^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] y^{2k} \\ &\stackrel{x=\cos \theta}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta d\theta \right] y^{2k} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 y^{2k}. \end{aligned}$$

又由 Wallis 公式知

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \sqrt{\pi k}, k \rightarrow \infty.$$

故由定理 0.16 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &\sim \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{\pi k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y^2)^k}{k} = -\frac{1}{2} \ln(1-y^2) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-y) - \frac{1}{2} \ln(1+y) \sim -\frac{1}{2} \ln(1-y), y \rightarrow 1^-. \end{aligned}$$

□

例题 0.5 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

证明 注意到 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ 在 $(-1, 1)$ 上绝对收敛, 由 Cauchy 积收敛定理及推论 0.1 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \stackrel{\text{推论 0.1}}{=} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n.$$

下证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$. 一方面, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln(n-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}}{\ln(n-1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

另一方面, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} &\leq \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{(n-k) \ln k} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \\ &\leq \frac{1}{n(1-\varepsilon)} \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{\ln 2} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln \varepsilon n} \\ &\leq \frac{\varepsilon n}{n(1-\varepsilon) \ln 2} + \frac{\sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{k}}{\ln \varepsilon + \ln n}. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \ln 2} + 1.$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq 1.$$

故由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$. 于是由定理 0.16 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n \sim \sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

$$\text{即 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

□

例题 0.6 设

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{5}{4}, a_n = \frac{(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}}{4n}, n = 2, 3, \dots$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.



笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的 f 的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的 f , 对这个 f 来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了 a_n 的通项. 此外考虑 $\frac{1}{1-x} f(x)$ 的幂级数并用 Cauchy 积可以导出 $\sum_{k=0}^n a_k$ 的信息.

如果要严谨地证明, 就是用数学归纳法证明下述求出来的 a_n 通项表达式 (其实就是下面解出来的 f 的 Taylor 展开式中的通项) 就是满足题目条件的 a_n , 再直接计算其极限即可.

证明 记 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. 由条件可得

$$\begin{aligned} 4n a_n &= (2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} [(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}] x^n \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4a_1 x &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n x^{n+2} \\ \Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5x &= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5x &= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 5x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2 + 5x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x)f'(x) + (x^2 + 5x)f(x) = 0.$$

又注意到 $f(0) = a_0 = 1, f'(0) = a_1 = \frac{5}{4}$, 故分离变量解上述微分方程得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x+2}}{1-x}.$$

因为 $\sqrt{x+2} \in C^\infty(\mathbb{R})$, 所以可记 $\sqrt{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则 $\sqrt{3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. 由 **Cauchy 积收敛定理** 及 **推论 0.1** 知

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) x^n.$$

因此 $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n b_k$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. □

0.1.3 Cauchy 积

定义 0.1 (Cauchy 积)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy(乘)积**. 我们记

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, B_n = \sum_{k=0}^n b_k, S_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

注 我们暂时并不清楚 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

结论 延续 **定义 0.1**, 我们有

$$\begin{cases} a_0 b_0 = c_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2 \\ \vdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = c_n \end{cases}$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则当 $a_0 \neq 0$, 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

例题 0.7 设 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n = 0, 1, \dots$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

注 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

证明 事实上, 我们有

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+1)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \rightarrow 2,$$

上式的放缩实际上利用了二次函数 $(n-k+1)(k+1) = -k^2 + nk + n+1$ 的最值大值点 $k = \frac{n}{2}$. 这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散. □

命题 0.4

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (21)$$

证明 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^n S_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n A_{n-i} B_i$$

由命题??可得(21). □

推论 0.1

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则它们的 Cauchy 积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

证明 延续定义 0.1, 充分性显然成立, 下证必要性. 由命题 0.4 及 Stolz 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

□

定理 0.17 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义 0.1, 我们有

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 有一个绝对收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

♥

证明 1. 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

因此我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设 (否则, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, 则用 $B_n - B$ 代替 B_n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

于是运用命题 ?? 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot |B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot 0 = 0$$

这就证明了 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.

2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \left(|a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right)$$

于是由命题 ?? 就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(|a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

这就证明了 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

□

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

命题 0.5

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛.} \quad (22)$$

♣

证明 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

即 $\sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n c_k$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^n b_{n-j} - \sum_{j=k}^n b_{n-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \left(\sum_{k=0}^n a_k - a_0 \right) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n c_k \end{aligned}$$

由于 Cauchy 积收敛, 则由 **推论 0.1**, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛}$$

□

例题 0.8 设递减数列 $a_n, b_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ 收敛, 记 $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ 收敛} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (23)$$

证明 左推右显然, 现在假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, 由 **命题 0.5**, 我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} = 0$$

现在

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| &\leq \sum_{k=1}^n a_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} = c_{n+1} \end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于 **交错级数不等式**. 于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| = 0$$

我们证明了 (23).

□