0.1 CMC 真题和红宝书高代习题

例题 0.1 设 $n \geqslant 3$, n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

计算 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} (n-1)a+1 & a & \cdots & a \\ (n-1)a+1 & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)a+1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix}$$
$$= [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}.$$

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq \dfrac{1}{1-n}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$. 若 $a = 1$, 易知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$. 若 $a = \dfrac{1}{1-n}$, 容易看出 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行、$n-1$ 列构成的子矩阵为严格对角占优矩阵, 由命题**??**知其行列式不为 0. 所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n-1$. □

例题 0.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2023 阶非零实矩阵. A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式且 $A_{ij} = a_{ij}$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的秩与行列式.

解 由于 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 不妨设 $a_{kl} \neq 0$. $\boldsymbol{A}$ 按第 k 行展开有

$$|\boldsymbol{A}| = a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + \cdots + a_{kn}^2 \neq 0.$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2023$.

由已知有 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 所以由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 两边取行列式有

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|^{2023}.$$

注意到 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|^{2021} = 1$. 又 $|\boldsymbol{A}|$ 为实数, 所以 $|\boldsymbol{A}| = 1$. □

例题 0.3 设 1013 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化且满足

$$\boldsymbol{A}^2 - 1013\boldsymbol{A} + 2022\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$$

和

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = 3.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 故 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数等于其几何重数. 令 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则有

$$\lambda^2 - 1013\lambda + 2022 = 0,$$

即

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1011) = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1011.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能是 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1011$. 注意到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = 3 < 1013$. 所以 $|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}| = 0$, 故 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

由于可对角化, 特征值 2 的代数重数等于其几何重数. 由于 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间维数为 $1013 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = 1010$, 因此 2 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 其代数重数为 1010. 故 $\boldsymbol{A}$ 还有其他特征值, 且一定为 1011. 其代数重数为 $1013 - 1010 = 3$. 至此 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 = 2\,(1010\ 重), \lambda_2 = 1011\,(3\ 重)$. □

例题 0.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$ 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

求: (1) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值. (2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2<3$, 知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

得到 $-1,1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $0,1,-1$.

(2) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量.

由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量正交. 设 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量, 则有

$$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_1-x_3=0,\end{cases}$$

得到 $x_1=x_3=0$, x_2 为自由未知量. 从而 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}$, 其中 $c\neq 0$.

取 $c=1$, 则有

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

例题 0.5 设 $n \geqslant 3$ 且 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 为正交的非零实向量. 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

的全部特征值.

解 解法一:首先计算 $|A|$ 以便确定 0 是否为 A 的特征值. 易知

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

故 0 是 A 的特征值. 下面确定 0 的代数重数.

由于 $\operatorname{rank}(A-0E) = \operatorname{rank}(A) \leqslant 2$, 因此 0 的代数重数 $\geqslant$ 0 的几何重数 $\geqslant n-2$, 即 A 至少有 $n-2$ 个特征值为 0.

由于 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$, 因此

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_1a_2 + \cdots + a_1a_n \\ a_1a_2 + a_2^2 + \cdots + a_2a_n \\ \vdots \\ a_1a_n + a_2a_n + \cdots + a_n^2 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

故 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 也是 A 的特征值, 而

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

故 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 是 A^{T} 的特征值. 从而也是 A 的特征值.

现在设 A 的 n 个特征值为 $\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-2}, \lambda_{n-1}, \lambda_n$. 于是

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_{n-1} + \lambda_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

若 $a_1+a_2+\cdots+a_n \neq 0$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为 A 的一个非零特征值, 从而 λ_{n-1} 与 λ_n 中一个为 $a_1+a_2+\cdots+a_n$, 另一个为 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

同理, 当 $b_1+b_2+\cdots+b_n \neq 0$ 时, λ_{n-1} 与 λ_n 也是一个为 $a_1+a_2+\cdots+a_n$, 另一个为 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

最后考察 $a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n = 0$ 的情形.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 λ^{n-2} 的系数是 $\boldsymbol{A}$ 的所有二阶主子式之和. 从而

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1}\lambda_n &= \boldsymbol{A}\text{的所有阶主子式之和}\\ &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\begin{vmatrix} a_j+b_j & a_j+b_i\\ a_i+b_j & a_i+b_i\end{vmatrix}\\ &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)(b_j-b_i)\\ &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_ib_j+a_jb_i)-\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_ib_i+a_jb_j),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_ib_j+a_jb_i) &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ib_j+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_jb_i=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n a_ib_j\\ &= \sum_{i=1}^n a_i\sum_{j=1}^n b_j-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)=0,\end{aligned}$$

$$\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_ib_i+a_jb_j)=(n-1)(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)=0.$$

因此 $\lambda_{n-1}\lambda_n=0$, 又 $\lambda_{n-1}+\lambda_n=0$, 从而 $\lambda_{n-1}=\lambda_n=0$. 这时 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值均为 0 (n 重).

解法二:根据题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{BC},$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}.$$

利用行列式降阶公式, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式可化为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BC}|=\lambda^{n-2}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{CB}|.$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^n a_kb_k=0$, 所以

$$\boldsymbol{CB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n a_k & n\\ \sum\limits_{k=1}^n a_kb_k & \sum\limits_{k=1}^n b_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n a_k & n\\ 0 & \sum\limits_{k=1}^n b_k\end{pmatrix},$$

从而有

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix}\lambda-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k & -n\\ 0 & \lambda-\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\end{vmatrix}=\lambda^{n-2}\left(\lambda-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\lambda-\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0\ (n-2$ 重$)$, $\lambda_2=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\lambda_3=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. □

例题 0.6 计算 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$ 的迹.

注 注意到 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是第一类正交矩阵, 其几何意义表示平面上的旋转变换, 所以也可直接得到

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}.$$

解 容易计算

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}.$$

利用数学归纳法容易证明

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}.$$

从而

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=2\cos n\theta.$$

□

例题 0.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 且 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 得到

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$$

由于

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}[(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]&=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{ABA}-\boldsymbol{BA}^2+\boldsymbol{AB}^2-\boldsymbol{BAB}\right)\\&=\left[\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABA})-\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{BA}^2\right)\right]+\left[\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{AB}^2\right)-\operatorname{tr}(\boldsymbol{BAB})\right]\\&=0+0=0,\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{tr}\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\right]=0$. 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的所有元素的平方和为 0. 又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为实矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. □

例题 0.8 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵,λ 为 A 的模最小的一个特征值. 证明

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|.$$

证明 由 Schur(舒尔) 分解知, 存在酉矩阵 U 使得

$$T=UAU^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

这里 $U^*=\overline{U}^{\mathrm{T}}=U^{-1}$(共轭转置).

进而

$$\operatorname{tr}(TT^*) = \operatorname{tr}(UAU^*UA^*U^*) = \operatorname{tr}(UAA^*U^*) = \operatorname{tr}(AA^*).$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant n^2 \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2.$$

因此

$$n|\lambda|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant n^2 \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2,$$

即

$$|\lambda|^2 \leqslant n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2.$$

故

$$|\lambda| \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|.$$

□

例题 0.9 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 且它们的基础解系中含 m 个线性无关的解向量. 证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \leqslant n - m$.

注 $N(B)$ 表示 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间.

证明 若 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 因而 $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 故 $N(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$. 因此

$$n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = \dim N(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \geqslant \dim N(\boldsymbol{B}) = m,$$

从而

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \leqslant n - m.$$

□

例题 0.10 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. 证明

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}).$$

证明 由 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$. 从而

$$N(\boldsymbol{A}) \cap N(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}).$$

显然

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{BA}),$$

$$N(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{AB}).$$

又 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 因此 $N(\boldsymbol{BA}) = N(\boldsymbol{AB})$. 进而 $N(\boldsymbol{A}) + N(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{AB})$. 所以

$$\begin{aligned}
n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) &= \dim(N(\boldsymbol{AB})) \geqslant \dim(N(\boldsymbol{A}) + N(\boldsymbol{B}))\\
&= \dim(N(\boldsymbol{A})) + \dim(N(\boldsymbol{B})) - \dim(N(\boldsymbol{A}) \cap N(\boldsymbol{B}))\\
&\geqslant (\dim(N(\boldsymbol{A})) + \dim(N(\boldsymbol{B}))) - \dim(N(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}))\\
&= (n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})) + (n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})) - (n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}))\\
&= n - (\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}),
\end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$. □

例题 0.11 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称实矩阵. 证明关于 $\boldsymbol{X}$ 的矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X}$ 只有零解.

证明 证法一:注意到

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X}\text{只有零解}$$

$$\Longleftrightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}\text{只有零解}$$
$$\Longleftrightarrow 1\text{不是是}\boldsymbol{A}\text{的特征值}.$$

设 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 为对应特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$. 又由命题??知 $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A\alpha}=0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=0$. 这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 为特征向量矛盾!

证法二: 由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$, 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)&=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\right)=\operatorname{tr}\left(\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\right)^{\mathrm{T}}\right)\\&=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)=-\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\right)=-\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right),\end{aligned}$$

从而 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)=0$, 所以由命题??知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$. □

例题 0.12 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, 且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值的模均小于 1. 证明 $0<|\boldsymbol{A}|<2^n$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的复特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n$. 故对任意 i,

$$|1-\lambda_i|<1.$$

若 λ_i 为实数, 由 $|1-\lambda_i|<1$ 得 $-1<1-\lambda_i<1$, 即 $0<\lambda_i<2$. 若 λ_i 为非实数, 则 $\overline{\lambda_i}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 此时

$$|\lambda_i|=|1-(1-\lambda_i)|\leqslant 1+|1-\lambda_i|<2.$$

这时

$$\lambda_i\overline{\lambda_i}=|\lambda_i|^2<2^2.$$

由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 可得 $0<|\boldsymbol{A}|<2^n$. □

例题 0.13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 且满足

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB},\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=r.$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 至少有 r 个相同的特征值 (包括重数).

证明 由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=r$, 故存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PCQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$ 得到

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}\boldsymbol{PCQQ}^{-1}=\boldsymbol{PAC}=\boldsymbol{PCB}=\boldsymbol{PCQQ}^{-1}\boldsymbol{B},$$

即

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B},$$

或

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}.$$

令

$$\boldsymbol{H}=\begin{array}{c}\\ r\\ m-r\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}r & m-r\end{array}\\\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}\end{pmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}=\begin{array}{c}\\ r\\ n-r\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}r & n-r\end{array}\\\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11}&\boldsymbol{T}_{12}\\\boldsymbol{T}_{21}&\boldsymbol{T}_{22}\end{pmatrix}\end{array}$$

则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11}&\boldsymbol{T}_{12}\\\boldsymbol{T}_{21}&\boldsymbol{T}_{22}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11}&\boldsymbol{T}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

故有 $\boldsymbol{H}_{11}=\boldsymbol{T}_{11},\boldsymbol{T}_{12}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{H}_{21}=\boldsymbol{O}$. 结果

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{T}_{21} & \boldsymbol{T}_{22}\end{pmatrix}.$$

这里用到 $\boldsymbol{H}_{11}$ 有 r 个特征值, 这对任意数域不一定成立. 但显然复数域上的矩阵 $\boldsymbol{H}_{11}$ 有 r 个特征值, 且这 r 个特征值是 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的公共特征值. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 相似. 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 有相同的特征值, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 有相同的特征值. 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 至少有 r 个相同的特征值. □

例题 0.14 计算

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{2023}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2000}.$$

解 注意到

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

都是初等矩阵. 前一个在

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

左边相乘, 即对

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

作初等行变换: 把第 3 行加到第 2 行.

后一个在

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

右边相乘, 即对矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

作初等列变换: 交换第 1,3 两列.

所以最后结果是把矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

第 3 行加到第 2 行 2023 次, 再把得到的矩阵第 1,3 列互换 2000 次. 故

$$原式=\begin{pmatrix}1&2&3\\4+2023\times7&5+2023\times8&6+2023\times9\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\14165&16189&18213\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

□

例题 0.15【例 1.2.38】设
$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\4&1&3\\-3&-1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
问: (1) 是否存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$. 若存在, 则求出一个这样的 P.

(2) 求满足 $XA=B$ 的所有三阶矩阵 X.

解 解 (1) $PA=B$ 等价于对 A 施行一系列初等行变换得到 B. 因此
$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\4&1&3\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=B,$$
所以存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$.

此时可求出一个 P 为
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$
(2) 将 $XA=B$ 变形为 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$.
$$\left(A^{\mathrm{T}}\mid B^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}1&4&-3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\1&3&-2&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&-1&0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&4&-3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&-4&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$
$A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=O$ 的基础解系为 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=x_3,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}-k\\k\\k\end{pmatrix}$.

令 $X^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则
$$\beta_1=\begin{pmatrix}1-k_1\\k_1\\k_1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}-4-k_2\\1+k_2\\k_2\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-k_3\\k_3\\k_3\end{pmatrix}.$$
从而
$$X=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\beta_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1&k_1&k_1\\-4-k_2&1+k_2&k_2\\-k_3&k_3&k_3\end{pmatrix},$$
其中 k_1,k_2,k_3 为任意数. 取 $k_1=k_2=0,k_3=1$ 即得 (1) 中的 P. □

例题 0.16 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 个数,
$$A=\begin{pmatrix}0&&&-a_n\\1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&\ddots&-a_2\\&&1&-a_1\end{pmatrix}.$$
试求 A 的不变因子及 Smith(史密斯) 标准形.

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & & a_n\\ -1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & a_2\\ & & -1 & \lambda+a_1\end{pmatrix}\xrightarrow[\lambda^{n-1}r_n+r_1]{\substack{\lambda r_2+r_1\\ \lambda^2 r_3+r_1\\ \cdots\cdots}}\begin{pmatrix}0 & & & f(\lambda)\\ -1 & \lambda & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & a_2\\ & & -1 & \lambda+a_1\end{pmatrix}$$

或

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & & a_n\\ -1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & a_2\\ & & -1 & \lambda+a_1\end{pmatrix}\xrightarrow[\lambda r_2+r_1]{\substack{\lambda r_n+r_1\\ \lambda r_{n-1}+r_1\\ \cdots\cdots}}\begin{pmatrix}0 & & & f(\lambda)\\ -1 & 0 & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \lambda^2+a_1\lambda+a_2\\ & & -1 & \lambda+a_1\end{pmatrix},$$

其中 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$. 于是 $\det(\lambda E-A)=f(\lambda)$, 从而行列式因子为

$$D_n(\lambda)=f(\lambda),\quad D_{n-1}(\lambda)=1,\quad \cdots,\quad D_0(\lambda)=1.$$

因此

$$d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=f(\lambda),\quad d_{n-1}(\lambda)=\cdots=d_1(\lambda)=1.$$

故 A 的 Smith 标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & f(\lambda)\end{pmatrix},$$

不变因子为

$$1,1,\cdots,f(\lambda).$$

□

例题 0.17 设 B 为 p 阶复方阵,

$$B=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1}\\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & a_0 & a_1\\ & & & & a_0\end{pmatrix}.$$

试求 B 的初等因子.

解 显然, B 的特征多项式为 $(\lambda-a_0)^p$, B 的特征值都等于 a_0.

(1) 当 $a_1\neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(B-a_0E)=p-1$, 特征值 a_0 的几何重数为 1. 故 B 的 Jordan 标准形中只能有一个 Jordan 块, 即 B 只有一个初等因子 $(\lambda-a_0)^p$.

(2) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0, a_k\neq 0$,$k=2,3,\cdots,p-1$ 时, 为找出 B 的所有初等因子, 我们先来确定 B 的 Jordan 标准形中 Jordan 块的形状和个数.

注意到

$$B=a_0E+a_1H^1+\cdots+a_{p-1}H^{p-1},\quad H=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^j=a_k^j\boldsymbol{H}^{kj}+\text{若干}\boldsymbol{H}\text{的更高幂次项}.$$

所以

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^j=\begin{cases}0, & kj>p,\\ p-kj, & kj\leqslant p.\end{cases} \tag{1}$$

解法一:记 N_j 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型 J 中 $j(1\leqslant j\leqslant p)$ 阶 Jordan 块的个数, 也即 $\boldsymbol{B}$ 的初等因子中 $(\lambda-\lambda_0)^j$ 的个数, 则由定理**??**可知

$$N_j=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^{j+1}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^{j-1}-2\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^j,\ j=1,2,\cdots,p.$$

①当 $p\leqslant kj-k$ 或 $p\geqslant kj+k$ 时, 由 (1) 式, 此时有

$$N_j=0,\ j\in\{j=1,2,\cdots,p|p\leqslant kj-k\ \text{或}p\geqslant kj+k\}.$$

②当 $kj-k<p<kj+k$ 时, 由式, 此时有

$$N_j=p-kj+k-2\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^j,\ j\in\{j=1,2,\cdots,p|kj-k<p<kj+k\}. \tag{2}$$

由带余除法可知, 存在 $q,h\in\mathbb{N}$, 且 $0\leqslant h<k$, 使得

$$p=qk+h. \tag{3}$$

(i) 若 $p<kj$, 则此时有

$$\begin{aligned}&kj-k<p<kj,\ j\in\mathbb{N}\\ \Longleftrightarrow\ & q\leqslant q+\frac{h}{k}<j<q+1+\frac{h}{k}<q+2,\ j\in\mathbb{N}\\ \Longleftrightarrow\ & j=q+1.\end{aligned}$$

于是由(1)(2)(3)式可得

$$N_{q+1}=p-k(q+1)+k=h.$$

(ii) 若 $p\geqslant kj$, 则此时有

$$\begin{aligned}&kj\leqslant p<kj+k,\ j\in\mathbb{N}\\ \Longleftrightarrow\ & q-1\leqslant q-1+\frac{h}{k}<j\leqslant q+\frac{h}{k}<q+1,\ j\in\mathbb{N}\\ \Longleftrightarrow\ & j=q.\end{aligned}$$

于是由(1)(2)(3)式可得

$$N_q=p-kq+k-2(p-kq-k)=k-h.$$

综上可知, 当 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0, a_k\neq 0, k=2,3,\cdots,p-1$ 时 $\boldsymbol{B}$ 的初等因子有: $k-h$ 个 $(\lambda-a_0)^q$, h 个 $(\lambda-a_0)^{q+1}$.

解法二: 由(1)式可知

$$d_j=p-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-a_0\boldsymbol{E})^j=\min\{p,kj\}.$$

记 $p=qk+h(0\leqslant h<k)$ (带余除法), 则

$$d_1=k, d_2=2k,\cdots,d_q=qk, d_{q+1}=d_{q+2}=\cdots=p.$$

现假设 $\boldsymbol{B}$ 的初等因子有 g_1 个 $(\lambda-a_0), g_2$ 个 $(\lambda-a_0)^2,\cdots,g_m$ 个 $(\lambda-a_0)^m(g_m\geqslant 1)$. 对此 $\boldsymbol{B}$ 有相应的 Jordan 标准

形. 从 $\boldsymbol{B}$ 的这个 Jordan 标准形又可定义出各个 $d_j = p - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B} - a_0\boldsymbol{E})^j$ 的值:

$$\begin{cases} d_1 = g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_m, \\ d_2 = g_1 + 2g_2 + 2g_3 + \cdots + 2g_m, \\ d_3 = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + \cdots + 3g_m, \\ \cdots\cdots \\ d_m = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + \cdots + mg_m, \\ d_{m+1} = d_{m+2} = \cdots = d_p. \end{cases}$$

将这组 d_j 的值与前面已经得到的值进行比较, 可得

$$\begin{gathered} m = q + 1, \\ g_1 = 2d_1 - d_2 = 2k - 2k = 0, \\ g_2 = 2d_2 - d_1 - d_3 = 2(2k) - k - 3k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q-1} = 2d_{q-1} - d_{q-2} - d_q = 2(q-1)k - (q-2)k - qk = 0, \\ g_q = 2d_q - d_{q-1} - d_{q+1} = 2qk - (q-1)k - p = k - h, \\ g_{q+1} = 2d_{q+1} - d_q - d_{q+2} = 2p - qk - p = h, \\ g_{q+2} = g_{q+3} = \cdots = 0. \end{gathered}$$

所以当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0, a_k \neq 0, k = 2, 3, \cdots, p-1$ 时 $\boldsymbol{B}$ 的初等因子有: $k-h$ 个 $(\lambda - a_0)^q$, h 个 $(\lambda - a_0)^{q+1}$.

(3) 最后, 显然当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0$ 时,$\boldsymbol{B}$ 是纯量阵, 此时 $\boldsymbol{B}$ 有 p 个初等因子, 它们都是 $\lambda - a_0$. □

例题 0.18 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABA}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, 且设

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 皆为可逆方阵,$\boldsymbol{B}_1$ 为 r 阶方阵. 则有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

由题设知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABA}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_1),$$

故由推论**??**知, 存在矩阵 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 使得

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_1,$$

从而有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q},$$

$$\boldsymbol{AB} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \sim \boldsymbol{BA}.$$

□

例题 0.19 设

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2022 & 2023 \\ 0 & 0 & 2024 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明矩阵方程 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明 反证法. 设矩阵方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$. 注意到 B 的特征值全为 0, 所以 A 的特征值全为 0, 因此 A 的 Jordan 标准形 J 只能是下列 4 种情形之一:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(J^2) \leqslant 1$, 但题设矩阵 B 的秩显然等于 2, 矛盾. □

例题 0.20 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \quad 与 \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

相似, 求 x, y 及满足 $Q^{-1}AQ = B$ 的正交矩阵 Q.

解 A 与 B 相似 $\Rightarrow$ A 与 B 有相同的迹和行列式. 进而得

$$\begin{cases} 2 + x = 2 + y + (-1), \\ -2 = |A| = -2y, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$ 直接验证可知, 当 $x = 0, y = 1$ 时, A 与 B 相似. 接下来, 求出 Q.

显然, A 的三个特征值为 $2, 1, -1$.

相应于 $\lambda_1 = 2$, A 的一个特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, V_{λ_1} 中的单位向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

相应于 $\lambda_2 = 1$, A 的一个特征向量为 $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, V_{λ_2} 中的单位向量为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

相应于 $\lambda_3=-1$, $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, V_{λ_3} 中的单位向量为

$$\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵, 所以由推论??知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交. 因此, 所求的 $\boldsymbol{Q}$ 共有 8 个, 为

$$\left\{(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)\,|\,\boldsymbol{q}_1\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\boldsymbol{q}_2\in\left\{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\},,\boldsymbol{q}_3\in\left\{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}\right\}.$$

□

例题 0.21 设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域上的 4 阶幂等阵 (即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$). 证明: 存在 $c_0,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 相似于

$$\begin{pmatrix}c_0&c_1&c_2&c_3\\c_3&c_0&c_1&c_2\\c_2&c_3&c_0&c_1\\c_1&c_2&c_3&c_0\end{pmatrix}.$$

笔记 显然上述矩阵是一个循环矩阵, 由命题??可知其特征值, 由此不难得到证明思路.

证明 (1) 由命题??知, 幂等阵可对角化. 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_4)=\boldsymbol{O}$ 知其特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 要么为 1, 要么为 0, 因此有

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{pmatrix}.$$

(2) 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^4=\boldsymbol{E}_4.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda^4-1$, 故 $\boldsymbol{B}$ 有 4 个各不相同的特征值: ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4, 进而

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}\xi_1&&&\\&\xi_2&&\\&&\xi_3&\\&&&\xi_4\end{pmatrix}.$$

考察关于 a_0, a_1, a_2, a_3 的线性方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_1^2 + a_3\xi_1^3 = \lambda_1, \\ a_0 + a_1\xi_2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_2^3 = \lambda_2, \\ a_0 + a_1\xi_3 + a_2\xi_3^2 + a_3\xi_3^3 = \lambda_3, \\ a_0 + a_1\xi_4 + a_2\xi_4^2 + a_3\xi_4^3 = \lambda_4, \end{cases}$$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式, 它显然不为零, 故有唯一解: c_0, c_1, c_2, c_3. 令

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

则有 $f(\xi_i) = \lambda_i,\ i = 1, 2, 3, 4$. 所以

$$f(\boldsymbol{B}) \sim \begin{pmatrix} f(\xi_1) & & & \\ & f(\xi_2) & & \\ & & f(\xi_3) & \\ & & & f(\xi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix} \sim \boldsymbol{A}.$$

而

$$f(\boldsymbol{B}) = c_0\boldsymbol{E} + c_1\boldsymbol{B} + c_2\boldsymbol{B}^2 + c_3\boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix},$$

因此本题获证. □

例题 0.22 设 $\mathbb{F}$ 为数域, $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{F})$. 证明: $M_n(\mathbb{F})$ 中存在可逆的对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{AQ}$ 仍为对称矩阵.

证明 首先注意到存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\mathbb{F}}\boldsymbol{P}^{-1}$, 其中

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的有理标准形. 现在分别对 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \ldots, \boldsymbol{B}_s$ 进行分析. 设 $\boldsymbol{B}_t$ 的阶数为 r, 则

$$\boldsymbol{B}_t = \begin{pmatrix} 0 & & & -b_r \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -b_2 \\ & & 1 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{W}_t = \begin{pmatrix} b_{r-1} & b_{r-2} & b_{r-3} & \cdots & b_1 & 1 \\ b_{r-2} & b_{r-3} & b_{r-4} & \cdots & 1 & \\ b_{r-3} & b_{r-4} & b_{r-5} & \iddots & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ b_1 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{W}_t$ 为对称可逆矩阵, 且通过直接计算可知

$$\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{W}_t = \begin{pmatrix} -b_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{r-2} & b_{r-3} & \cdots & b_1 & 1 \\ 0 & b_{r-3} & b_{r-4} & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \\ 0 & b_1 & \iddots & & & \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

为对称矩阵. 若令

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{W}_s \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\mathbb{F}}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\mathbb{F}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{W}_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{W}_s^{-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{W}_s \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{W}_s^{-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}. \end{aligned}$$

再令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{W}_s \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{W}_s^{-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

则 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 皆为对称矩阵, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}$ 可逆. 若记 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S}$ 为对称矩阵, 且 $\boldsymbol{Q}$ 对称可逆. □

例题 0.23 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (1, t_i, t_i^2, \cdots, t_i^{n-1})^{\mathrm{T}}, i = 1, 2, \cdots, m$. 试讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性.

解 第一种情形: 当 $n = m$, 且 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 互异时, 由 Vandermonde 行列式知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

第二种情形: 当 $m > n$ 时, 此时向量组中的向量个数大于这些向量所在的向量空间的维数, 因此必线性相关.

第三种情形: 当 $m < n$ 时, 考察矩阵

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & \cdots & t_m^{n-1} \end{pmatrix}.$$

若 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 各不相同, 则 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 有 m 阶子式不为 0, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 若 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 有两个相同, 则 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 至少有两列相同, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □

例题 0.24

证明

□

例题 0.25

解

□

例题 0.26

证明

□

例题 0.27

解

□

例题 0.28

证明

□

例题 0.29

解

□

例题 0.30

证明

□