0.1 级数证明

例题 0.1 设 $f \in \mathbb{R}[x]$ 是只有正实根的多项式, 求 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $x=0$ 幂级数展开和收敛域.

证明 设 $f(x)=a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n}$, 其中 $a\neq 0$, 并且

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n, k_i\in\mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \left[\ln f(x)\right]' = [\ln a + k_1\ln(x-x_1)+k_2\ln(x-x_2)+\cdots+k_n\ln(x-x_n)]' \\
&= \frac{k_1}{x-x_1}+\frac{k_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{k_n}{x-x_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x-x_j} \\
&= -\frac{k_j}{x_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{x}{x_j}} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_j}\right)^m \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x^m.
\end{aligned}$$

显然收敛半径就是 x_1, 注意到

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x_1^m=\frac{k_1}{x_1}\neq 0,$$

故收敛域为 $(-x_1,x_1)$. □

例题 0.2 设 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}, a_n>0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证明 显然 $e^{b_n}=e^{a_n}-a_n\geqslant 1$, 故 $b_n\geqslant 0$, 并且由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $a_n\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
b_n &= \ln\left(e^{a_n}-a_n\right)=\ln e^{a_n}+\ln\left(1-a_ne^{-a_n}\right) \\
&= a_n+O\left(a_ne^{-a_n}\right), n\to\infty.
\end{aligned}$$

注意到 $O\left(a_ne^{-a_n}\right)\leqslant a_n$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}O\left(a_ne^{-a_n}\right)$ 也收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. □

例题 0.3 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1.$$

证明 由条件可知对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\leqslant a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1},$$

故 $A\leqslant 1$. 注意到

$$\begin{aligned}
\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} &\geqslant \frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1-\frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \\
&\geqslant 1-\frac{a_1}{\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{2}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{2}}=1-\frac{2a_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\to 1, n\to\infty.
\end{aligned}$$

故 $A\geqslant 1$. 因此 $A=1$. □

命题 0.1

设 a_n 递减到 0, 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

笔记 (1)式可由 Abel 变换直接得到, 也可以采用下述证明一样的强行凑裂项的思路.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left[k a_k-(k+1) a_{k+1}\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1) a_{k+1}-k a_{k+1}\right] \\ &=a_1-(n+1) a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1} a_k-(n+1) a_{n+1}.\end{aligned} \tag{1}$$

充分性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由命题??可知 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=0$. 再由(1)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k<+\infty .$$

必要性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛, 则由 $\{a_n\}$ 的单调性知, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant m$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+\sum_{k=m+1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k+(n-m) a_n .$$

又由(1)式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛知, 存在 $A>0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k-n a_n \leqslant A, \forall n \in \mathbb{N} .$$

故

$$A \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k-n a_n \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k+(n-m) a_n-n a_n=\sum_{k=1}^{m} a_k-m a_n .$$

令 $n\to+\infty$ 得 $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\leqslant A$. 再由 m 的任意性可知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 此时由命题??可知 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=0$, 再由(1)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

□

例题 0.4 设 a_n 递减到 0, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} d x$$

发散, 这里 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 故 $f(x)$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$. 显然 $f>0, x>0$, 且 f 在 $(0,+\infty)$ 上递增. 待定 $\{b_n\}$ 满足:$b_n \nearrow +\infty$. 从而

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} \mathrm{d}x &\geqslant \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f\left(b_n\right)}{x^2} \mathrm{d}x=\ln f\left(b_n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right) \\ &\geqslant \ln\left(a_n^n b_n^n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=n \ln\left(a_n b_n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right) .\end{aligned}$$

取 $b_n=\dfrac{C}{a_n}, C>\max\{1,a_1\}$, 则
$$\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant n\ln(a_nb_n)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{\ln C}{C}n(a_n-a_{n+1}).$$
由命题 0.1可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 发散. 故
$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\ln C}{C}\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=+\infty.$$
□

例题 0.5 证明:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p,\forall p\in(1,+\infty).$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant p,\forall p\in(0,1).$$

笔记 注意强行凑裂项和熟悉 Bernoulli 不等式.

证明

1. $$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)\tag{2}$$
$$\Longleftrightarrow\sqrt[p]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=1-\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant\frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant1-\frac{1}{p(n+1)}.$$
下证 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant1-\frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x)\triangleq\sqrt[p]{1-x}-\frac{x}{p}$, 则
$$f\prime(x)=-\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right]<0.$$
故
$$f(x)\leqslant f(0)=1\Longleftrightarrow\sqrt[p]{1-x}\leqslant1-\frac{x}{p}.$$
令 $x=\frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant1-\frac{1}{p(n+1)}$, 从而(2)式成立. 故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p.$$
2. $$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)\tag{3}$$
$$\Longleftrightarrow\sqrt[p]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=1-\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant1-\frac{1}{p(n+1)}.$$

下证 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x}-\frac{x}{p}$, 则

$$f'(x)=-\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right]>0.$$

故

$$f(x) \geqslant f(0)=1 \Longleftrightarrow \sqrt[p]{1-x} \geqslant 1-\frac{x}{p}.$$

令 $x=\frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$, 从而(3)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p.$$

□

例题 0.6 对 $t \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n^n}=\int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} dx.$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} \mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-tx\ln x} \mathrm{d}x=\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tx\ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-tx\ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x \mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=e^{-y}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y} y^n \mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^n \mathrm{d}y \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^n}.
\end{aligned}$$

□

命题 0.2

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $a_n=o(A_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $A_n=o(a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 发散.

笔记 这个命题说明: **没有收敛最慢的级数, 也没有发散最慢的级数.**

证明

1. 令

$$A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}-\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}<+\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}}=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}+\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}\right)}{a_n}=0.$$

故 $a_n = o(A_n), n \to \infty$.

2. 令

$$A_1 = 1, \quad A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}, \ n = 2, 3, \cdots.$$

则

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{a_1} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k} \right)} = 0.$$

故 $A_n = o(a_n), n \to \infty$.

□

例题 0.7 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} < \infty.$$

注 本题的想法就是把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}$ 放大为阶更小的量, 从而其收敛.

证明 记 $S_0 = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, 则对 $N \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 (S_n - S_{n-1})}{S_n^2} \\
&= \sum_{n=2}^{N} n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{N} n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N} n^2 \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left[\frac{n^2}{S_{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{S_n} \right] + \sum_{n=2}^{N} \frac{(n+1)^2 - n^2}{S_n} \\
&= \frac{4}{S_1} - \frac{(N+1)^2}{S_N} + \sum_{n=2}^{N} \frac{2n+1}{S_n} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{S_n} = \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{n\sqrt{p_n}}{S_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right) \\
&\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leqslant} \frac{4}{S_1} + 3 \sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} \cdot \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{p_n}} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + C \sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}.
\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \leqslant \frac{4}{S_1} \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}} + C.$$

若 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}$ 发散, 则对上式令 $N \to +\infty$ 得 $+\infty \leqslant C$ 矛盾! 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} < +\infty$. □