实变函数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合之间的运算

定理 1.1

设有集合 A, B 与 C, 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

♡

定义 1.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : \text{存在}\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : \text{对一切}\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

♣

定理 1.2

(1) 广义交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) 分配律:

(i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(A \cap B_\alpha)$;

(ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

(3) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

♡

(1)

(2)

(3) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in I$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$. 故 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

定义 1.2

设 A,B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A - B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的 "大" 集合 X 的子集, 我们称 X 为全集. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

命题 1.1 (集合的差与补的基本性质)

(1) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, (A^c)^c = A, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.

(2) $A - B = A \cap B^c$.

(3) 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subset B^c$.

(4) $A - B^c = B - A^c$.

证明

(1)

(2)

(3)

(4) $x \in A - B^c \iff x \in A 且 x \notin B^c \iff x \in A 且 x \in B \iff x \in B 且 x \notin A^c \iff x \in B - A^c$.

□

定理 1.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

证明 以 (i) 为例. 若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说, 对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$. 故得 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

反之, 若 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 则对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

□

定义 1.3 (集合的对称差)

设 A,B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

命题 1.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.

(ii) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$.

(iii) 结合律:$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(v) $A^c \triangle B^c = A \triangle B; A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.
(vi) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E \triangle A = B$(实际上 $E = B \triangle A$).

定义 1.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

命题 1.3

1. 当 $\{A_k\}$ 为递减集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.
2. 当 $\{A_k\}$ 为递增集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.

证明

1. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递减集合列可得

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \cdots.$$

因此 $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$.

2. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递增集合列可得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$

因此 $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$.

□

定义 1.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 1.4 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(i) E\setminus \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}(E\setminus A_k);\quad (ii) E\setminus \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}}(E\setminus A_k).$$

定理 1.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x: 对任一自然数 j, 存在 k(k\geqslant j), x\in A_k\} = \{x: \forall j\in\mathbb{N}, \exists k\geqslant j 且 k\in\mathbb{N}\ s.t.\ x\in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \{x: 存在自然数 j_0, 当 k\geqslant j_0 时, x\in A_k\} = \{x: \exists j_0\in\mathbb{N}, \forall k\geqslant j_0 且 k\in\mathbb{N}, x\in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 以 (ii) 为例. 若 $x\in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x\in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k\geqslant j_0$ 时, 有 $x\in A_k$. 反之, 若存在自然数 j_0, 当 $k\geqslant j_0$ 时, 有 $x\in A_k$, 则得到

$$x\in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x\in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

由 (i)(ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

□

定义 1.6 (直积集)

设 X, Y 是两个集合, 称一切有序“元素对”(x, y)(其中 $x\in X, y\in Y$) 形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X\times Y$, 即

$$X\times Y = \{(x,y): x\in X, y\in Y\},$$

其中 $(x,y)=(x',y')$ 是指 $x=x', y=y'$. $X\times X$ 也记为 X^2.

1.2 映射与基数

定义 1.7 (映射的像集)

对于 $f: X\to Y$ 以及 $A\subset X$, 我们记

$$f(A)=\{y\in Y: x\in A, y=f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的**(映) 像集** ($f(\varnothing)=\varnothing$).

命题 1.5 (映射的像集的基本性质)

对于 $f: X\to Y$, 我们有

(i) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)(A_\alpha\in X,\alpha\in I)$;

(ii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)(A_\alpha\in X,\alpha\in I)$.

定义 1.8 (映射的原像集)

对于 $f: X\to Y$ 以及 $B\subset Y$, 我们记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**.

命题 1.6 (映射的原像集的基本性质)

对于 $f: X\to Y$, 我们有

(i) 若 $B_1\subset B_2$, 则 $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)(A\subset Y)$;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha\subset Y,\alpha\in I)$;

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha\subset Y,\alpha\in I)$;

(iv) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c(B\subset Y)$.

定义 1.9 (示性函数)

一般地, 对于 X 中的子集 A, 我们作

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

且称 $\chi_A: X\to\mathbb{R}$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**或**示性函数**.

命题 1.7 (示性函数的基本性质)

对于 X 中的子集 A, B, 我们有

(i) $A\neq B$ 等价于 $\chi_A\neq\chi_B$.

(ii) $A\subset B$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$.

(iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$.
(v) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1-\chi_B(x))$.
(vi) $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

定义 1.10 (幂集)
设 X 是一个非空集合, 由 X 的一切子集 (包括 $\varnothing, X$ 自身) 为元素形成的集合称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathcal{P}(X)$.

笔记 例如, 由 n 个元素形成的集合 E 之幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

例题 1.1 单调映射的不动点 设 X 是一个非空集合, 且有 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A\subset B$ 的任意 A,B, 必有 $f(A)\subset f(B)$, 则存在 $T\subset\mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T)=T$.

证明 作集合 S,T:

$$S=\{A: A\in\mathcal{P}(X)\ 且 A\subset f(A)\},$$
$$T=\bigcup_{A\in S}A(\in\mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T)=T$.

事实上, 因为由 $A\in S$ 可知 $A\subset f(A)$, 从而由 $A\subset T$ 可得 $f(A)\subset f(T)$. 根据 $A\in S$ 推出 $A\subset f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A\in S}A\subset f(T),\quad T\subset f(T).$$

另一方面, 又从 $T\subset f(T)$ 可知 $f(T)\subset f(f(T))$. 这说明 $f(T)\in S$, 我们又有 $f(T)\subset T$. □

定义 1.11 (集合之间的对等关系)
设有集合 A 与 B. 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射, 则称集合 A 与 B **对等**, 记为 $A\sim B$.

命题 1.8 (对等关系的基本性质)
设有集合 A 与 B, 则
(i) $A\sim A$;
(ii) 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$;
(iii) 若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$.

引理 1.1 (映射分解定理)
若有 $f:X\to Y, g:Y\to X$, 则存在分解

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},$$

其中 $f(A)=B, g(B^{\sim})=A^{\sim}, A\cap A^{\sim}=\varnothing$ 以及 $B\cap B^{\sim}=\varnothing$.

证明 对于 X 中的子集 E(不妨假定 $Y\setminus f(E)\neq\varnothing$), 若满足

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing,$$

则称 E 为 X 中的分离集. 现将 X 中的分离集的全体记为 Γ, 且作其并集

$$A=\bigcup_{E\in\Gamma}E.$$

我们有 $A\in\Gamma$. 事实上, 对于任意的 $E\in\Gamma$, 由于 $A\supset E$, 故从

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing$$

可知 $E\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$, 从而有 $A\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$. 这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元.

现在令 $f(A)=B, Y\setminus B=B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim})=A^{\sim}$. 首先知道

$$Y=B\cup B^{\sim}.$$

其次, 由于 $A\cap A^{\sim}=\varnothing$, 故又易得 $A\cup A^{\sim}=X$. 事实上, 若不然, 那么存在 $x_0\in X$, 使得 $x_0\notin A\cup A^{\sim}$. 现在作 $A_0=A\cup\{x_0\}$, 我们有

$$B=f(A)\subset f(A_0),\quad B^{\sim}\supset Y\setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim}\supset g(Y\setminus f(A_0))$. 这就是说,$A$ 与 $g(Y\setminus f(A_0))$ 不相交. 由此可得

$$A_0\cap g(Y\setminus f(A_0))=\varnothing.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾. □

定理 1.5 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等,Y 与 X 的某个真子集对等, 则 $X\sim Y$. ♡

笔记 特例: 设集合 A,B,C 满足下述关系:

$$C\subset A\subset B.$$

若 $B\sim C$, 则 $B\sim A$.

证明 由题设知存在单射 $f:X\to Y$ 与单射 $g:Y\to X$, 根据映射分解定理知

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},\quad f(A)=B,\quad g(B^{\sim})=A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f:A\to B$ 以及 $g^{-1}:A^{\sim}\to B^{\sim}$ 是一一映射, 因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A,\\ g^{-1}(x), & x\in A^{\sim}.\end{cases}$$

这说明 $X\sim Y$. □

定义 1.12 (集合的基数 (或势))

设 A,B 是两个集合, 如果 $A\sim B$, 那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的, 记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 可见, 凡是互相对等的集合均具有相同的基数.

如果用 α 表示这一相同的基数, 那么 $\overline{\overline{A}}=\alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B, 记 $\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β, 记为

$$\alpha\leqslant\beta.$$

若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则称 α 小于 β(或 β 大于 α), 记为

$$\alpha<\beta\quad(\text{或}\beta>\alpha).$$

显然, 若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\beta\leqslant\alpha$, 则由Cantor - Bernstein 定理可知 $\alpha=\beta$. ♣

定义 1.13 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合. 如果存在自然数 n, 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 为**有限集**, 且用同一符号 n 记 A 的基数. 由此可见, 对于有限集来说, 其基数可以看作集合中元素的数目. 若一个集合不是有限集, 则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数. ♣

定义 1.14 (自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数・可列集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$(读作阿列夫 (Aleph, 希伯来文) 零). 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$, 则 A 叫作**可列集**. 这是由于 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, 而 $A\sim\mathbb{N}$, 故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来, 附以下

标, 就有

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

定理 1.6

任一无限集 E 必包含一个可列子集.

笔记 这个定理说明, 在众多的无限集中, 最小的基数是 $\aleph_0$.

证明 任取 E 中一元, 记为 a_1; 再从 $E\setminus\{a_1\}$ 中取一元, 记为 $a_2,\cdots$. 设已选出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 因为 E 是无限集, 所以

$$E\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\varnothing.$$

于是又从 $E\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中可再选一元, 记为 a_{n+1}. 这样, 我们就得到一个集合

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集. □

定理 1.7

设 A 是无限集且其基数为 α. 若 B 是至多可列集, 则 $A\cup B$ 的基数仍为 α.

证明 不妨设 $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$,$A\cap B=\varnothing$, 且

$$A=A_1\cup A_2,\quad A_1=\{a_1,a_2,\cdots\}.$$

我们作映射 f 如下:

$$f(a_i)=a_{2i},\quad a_i\in A_1;$$
$$f(b_i)=a_{2i-1},\quad b_i\in B;$$
$$f(x)=x,\quad x\in A_2.$$

显然,f 是 $A\cup B$ 到 A 上的一一映射. □

定理 1.8

集合 A 为无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等.

证明 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取 A 中一个非空有限子集 B, 则由定理 1.7立即可知

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{((A\setminus B)\cup B)}}=\overline{\overline{(A\setminus B)}}.$$

故 $A\sim(A\setminus B)$. □

定理 1.9

$[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 不是可数集.

证明 只需讨论 $(0,1]$. 为此, 采用二进位制小数表示法:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1. 显然,$(0,1]$ 与全体二进位制小数一一对应.

若在上述表示式中把 $a_n=0$ 的项舍去, 则得到 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}$, 这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1=n_1,\quad k_i=n_i-n_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$, 则 $(0,1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应.

现在假定 $(0,1]$ 是可数的, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{array}{l}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \cdots, k_i^{(1)}, \cdots),\\ (k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \cdots, k_i^{(2)}, \cdots),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \cdots, k_i^{(i)}, \cdots),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

但这是不可能的, 因为 $(k_1^{(1)}+1, k_2^{(2)}+1, \cdots, k_i^{(i)}+1, \cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$, 而它并没有被排列出来. 这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的, 也就是说 $(0,1]$ 是不可数集. □

定义 1.15 ($\mathbb{R}$ 的基数 · 不可数集)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$). ♣

笔记 易知 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c = \aleph_1$.

定理 1.10

设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 A_k 的基数都是连续基数, 则其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数. ♡

证明 不妨假定 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$, 且 $A_k \sim [k, k+1)$, 我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

□

定理 1.11 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合, 则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$(由 A 的一切子集所构成的集合族) 不对等. ♡

笔记 易知集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等, 即存在一一映射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$. 我们作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

于是有 $y \in A$, 使得 $f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$. 现在分析一下 y 与 B 的关系:

(i) 若 $y \in B$, 则由 B 的定义可知 $y \notin f(y) = B$;

(ii) 若 $y \notin B$, 则由 B 的定义可知 $y \in f(y) = B$.

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射, 即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的. □

1.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

1.3.1 点集的直径、点的 (球) 邻域、矩体

定义 1.16 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的运算)

记一切有序数组 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体为 $\mathbb{R}^n$, 其中 $\xi_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是实数, 称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标, 并定义运算如下:

(i) 加法: 对于 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 以及 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 令

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_n);$$

(ii) 数乘: 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令 $\lambda x = (\lambda\xi_1, \cdots, \lambda\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.
在上述两种运算下构成一个向量空间. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 记

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),$$

其中除第 i 个坐标为 1, 外其余皆为 0.$e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的基底, 从而 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的 n 维向量空间, 并称 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**向量**或**点**. 当每个 ξ_i 均为有理数时,$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 称为**有理点**.

定义 1.17

设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$|x| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的**模**或**长度**.

命题 1.9 (向量的模的性质)

设 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则
(i) $|x| \geqslant 0, |x| = 0$ 当且仅当 $x = (0, \cdots, 0)$;
(ii) 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有 $|ax| = |a||x|$;
(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
(iv) 设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 则有

$$(\xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n)^2 \leqslant (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)(\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2).$$

证明 (i),(ii) 的结论是明显的;(iii) 是 (iv) 的推论. 因此我们只证明 (iv).

只需注意到函数

$$f(\lambda) = (\xi_1 + \lambda\eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n + \lambda\eta_n)^2$$

是非负的 (对一切 λ), 由 λ 的二次方程 $f(\lambda)$ 的判别式小于或等于零即得.(iv) 就是著名的 Cauchy - Schwarz 不等式.
□

定义 1.18 (距离空间)

一般地说, 设 X 是一个集合. 若对 X 中任意两个元素 x 与 y, 有一个确定的实数与之对应, 记为 $d(x, y)$, 它满足下述三条性质: 对 $\forall, x, y, z \in X$, 都有
(i) $d(x, y) \geqslant 0, d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$,
则认为在 X 中定义了距离 d, 并称 (X, d) 为**距离空间**.

笔记 因而 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间, 其中 $d(x, y) = |x - y|$. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为 ***n* 维欧氏空间**.
注 由 (iii) 可直接推出对 $\forall, x, y, z \in X$, 都有

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

定义 1.19 (点集的直径与有界集)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合, 令

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\},$$

称为点集 E 的**直径**. 若 $\operatorname{diam}(E) < +\infty$, 则称 E 为**有界集**.

命题 1.10 (有界集的充要条件)

E 是有界集的充要条件是, 存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in E$ 都满足 $|x| \leqslant M$.

证明 由有界集的定义易得. □

定义 1.20 (点的 (球) 邻域)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,$\delta > 0$, 称点集

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的**开球**, 也称为 x_0 的 **(球) 邻域**, 记为 $B(x_0, \delta)$, 从而称

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

为**闭球**, 记为 $C(x_0, \delta)$.$\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的球面是

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \delta\}.$$

定义 1.21 (矩体)

设 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆为实数, 且 $a_i < b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 称点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : a_i < \xi_i < b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开矩体** ($n = 2$ 时为矩形,$n = 1$ 时为区间), 即直积集

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

类似地,$\mathbb{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],$$

称 $b_i - a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为**矩体的边长**. 若各边长都相等, 则称矩体为**方体**.
矩体也常用符号 I, J 等表示, 其**体积**用 $|I|$,$|J|$ 等表示.

命题 1.11 (矩体的直径与体积)

若 $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, 则

$$\operatorname{diam}(I) = [(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

定义 1.22

设 $x_k \in \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - x| = 0,$$

则称 $x_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**收敛 (于 x 的) 点列**, 称 x 为它的**极限**, 并简记为

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

定义 1.23 (Cauchy 列)

称 $\{x_k\}$ 为 **Cauchy 列**或**基本列**, 若 $\lim\limits_{l,m \to \infty} |x_l - x_m| = 0$. 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $k, l > N$ 时, 有

$$|x_k - x_l| < \varepsilon.$$

定理 1.12

$x_k(k=1,2,\cdots)$ 是收敛列的充分必要条件是 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 即

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0.$$

证明 若令 $x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\}$,$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i|\leqslant|x_k-x|\leqslant|\xi_1^{(k)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(k)}-\xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立. 故可知 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 收敛于 x 的充分必要条件是, 对每个 i, 实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i. 由此根据实数列收敛的 Cauchy 收敛准则可知结论成立. □

1.3.2 点集的极限点

定义 1.24 (极限点、导集与完全集)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,$x\in\mathbb{R}^n$. 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称 x 为 E 的**极限点**或**聚点**.E 的极限点全体记为 E', 称为 E 的**导集**.

若 $E=E'$, 则 E 称为**完全集**.

笔记 显然, 有限集是不存在极限点的.

定理 1.13 (一个点是极限点的充要条件)

若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 $x\in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta>0$, 有

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing.$$

证明 若 $x\in E'$, 则存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$|x_k-x|\to0\quad(k\to\infty),$$

从而对任意的 $\delta>0$, 存在 k_0, 当 $k\geqslant k_0$ 时, 有 $|x_k-x|<\delta$, 即

$$x_k\in B(x,\delta)\quad(k\geqslant k_0).$$

反之, 若对任意的 $\delta>0$, 有 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$, 则令 $\delta_1=1$, 可取 $x_1\in E$,$x_1\neq x$ 且 $|x-x_1|<1$. 令

$$\delta_2=\min\left(|x-x_1|,\frac{1}{2}\right),$$

可取 $x_2\in E$,$x_2\neq x$ 且 $|x-x_2|<\delta_2$. 继续这一过程, 就可得到 E 中互异点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x-x_k|<\delta_k$, 即

$$\lim_{k\to\infty}|x-x_k|=0.$$

这说明 $x\in E'$. □

定义 1.25 (孤立点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 E 中的点 x 不是 E 的极限点, 即存在 $\delta>0$, 使得

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing,$$

则称 x 为 E 的**孤立点**, 即 $x\in E\setminus E'$.

定理 1.14 (导集的性质)

设 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$, 则 $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$.

证明 因为 $E_1 \subset E_1 \cup E_2$,$E_2 \subset E_1 \cup E_2$, 所以

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)',$$

从而有 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$. 反之, 若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$, 则存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

显然, 在 $\{x_k\}$ 中必有互异点列 $\{x_{k_i}\}$ 属于 E_1 或属于 E_2, 而且

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x.$$

在 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 时, 有 $x \in E_1'$, 否则 $x \in E_2'$. 这说明

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'.$$

□

定理 1.15 (Bolzano - Weierstrass 定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

♡

证明 首先从 E 中取出互异点列 $\{x_k\}$. 显然,$\{x_k\}$ 仍是有界的, 而且 $\{x_k\}$ 的第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个坐标所形成的实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是有界数列. 其次, 根据 $\mathbb{R}^1$ 的 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 从 $\{x_k\}$ 中可选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$, 使得 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第一个坐标形成的数列是收敛列; 再考查 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第二个坐标形成的数列, 同理可从中选出 $\{x_k^{(2)}\}$, 使其第二个坐标形成的数列成为收敛列, 此时其第一坐标数列仍为收敛列 (注意, 收敛数列的任一子列必收敛于同一极限),⋯⋯至第 n 步, 可得到 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_k^{(n)}\}$, 其一切坐标数列皆收敛, 从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是收敛点列, 设其极限为 x. 由于 $\{x_k^{(n)}\}$ 是互异点列, 故 x 为 E 的极限点. □

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

1.4.1 闭集

定义 1.26 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \supset E'$(即 E 包含 E 的一切极限点), 则称 E 为**闭集** (这里规定空集为闭集). 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包** (E 为闭集就是 $E = \overline{E}$).

♣

定义 1.27 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

♣

定理 1.16 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;

(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F = \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集.

(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n(\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha}.$$

♡

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = (0,1]$. 此例还说明

$$[0,1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0,1]\,.$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}\end{aligned}$$

可知, 若 F_1, F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$. 即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 1.17 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k,F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切} k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

1.4.2 开集

定义 1.28 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 1.18 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集 (有限个开集的交集是开集);

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$.

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c(\alpha \in I)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G_k^c(k = 1, 2, \cdots, m)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcup_{k=1}^{m} G_k^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x \in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x \notin G^c$, 可知存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$.

反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$, 则

$$B(x, \delta) \cap G^c = \varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 1.29 (内点与边界点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 对 $x \in E$, 若存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x \in \overline{E}$ 但 $x \notin \mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E. ♣

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 1.19 (开集构造定理)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间 (这里也包括 $(-\infty, a)$,$(b, +\infty)$ 以及 $(-\infty, +\infty)$) 的并集;

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集. ♡

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(a - \delta, a + \delta) \subset G$. 现在令

$$a' = \inf\{x : (x, a) \subset G\}, \quad a'' = \sup\{x : (a, x) \subset G\}$$

(这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$), 显然 $a' < a < a''$ 且 $(a', a'') \subset G$. 这是因为对区间 (a', a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a' < z \leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a' < x < z$ 且 $(x, a) \subset G$, 即 $z \in G$. 我们称这样的开区间 (a', a'') 为 G(关于点 a) 的**构成区间**I_a.

如果 $I_a = (a', a'')$,$I_b = (b', b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a < b$. 若

$$I_a \cap I_b \neq \varnothing,$$

则有 $b' < a''$. 于是令 $\min\{a', b'\} = c$,$\max\{a'', b''\} = d$, 则有 $(c, d) = (a', a'') \cup (b', b'')$. 取 $x \in I_a \cap I_b$, 则 $I_x = (c, d)$ 是构成区间, 且

$$(c, d) = (a', a'') = (b', b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点 (坐标皆为整数) 分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\dfrac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G \setminus \bigcup_{J \in H_0} J$$

(J 表示半开闭二进方体) 内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个

Γ_k 中的方体. 这说明

$$G=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{J\in H_k}J,\quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{B\left(x,\frac{1}{k}\right):x\mathbb{R}^n,k\right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x,x')<1/k$, 其中 $k>2/\delta$, 从而有

$$x\in B(x',1/k)\subset B(x,\delta)\subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x',1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 1.30 (开覆盖)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x\in E$, 存在 $G\in\Gamma$, 使得 $x\in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma'\subset\Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ(关于 E) 的一个**子覆盖**. ♣

引理 1.2

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖. ♡

定理 1.20 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n},\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 1.2, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma=\{G_1,G_2,\cdots,G_i,\cdots\}.$$

令

$$H_k=\bigcup_{i=1}^{k}G_i,\quad L_k=F\cap H_k^c\quad(k=1,2,\cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k\supset L_{k+1}(k=1,2,\cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F\subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0\in L_k(k=1,2,\cdots)$, 即 $x_0\in F$ 且 $x_0\in H_k^c(k=1,2,\cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 1.21

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集. ♡

证明 设 $y\in E^c$, 则对于每一个 $x\in E$, 存在 $\delta_x>0$, 使得

$$B(x,\delta_x)\cap B(y,\delta_x)=\varnothing.$$

显然,$\{B(x,\delta_x):x\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1,\delta_{x_1}),\quad\cdots,\quad B(x_m,\delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 1.31 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**. ♣

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 1.21表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 1.32 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点** (在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续). 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$. ♣

命题 1.12 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数. ♠

1.4.3 Borel 集

定义 1.33 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集. ♣

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 1.2 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$$

为 F_σ 集.

例题 1.3 函数连续点的结构 若 $f(x)$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集.

证明 令 $\omega_f(x)$ 为 $f(x)$ 在 x 点的振幅, 易知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0) = 0$. 由此可知 $f(x)$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

因为 $\{x \in G : \omega_f(x) < 1/k\}$ 是开集, 所以 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集. □

定义 1.34 (σ-代数)

设 Γ 是由集合 X 的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

(i) $\varnothing \in \Gamma$;

(ii) 若 $A \in \Gamma$, 则 $A^c \in \Gamma$;

(iii) 若 $A_n \in \Gamma\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$,

这时称 Γ 是 (X 上的) 一个 **σ-代数**.

命题 1.13 (σ-代数的基本性质)

若 Γ 是 X 上的一个 σ-代数, 则

(i) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,$\bigcap_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,;

(ii) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma;$$

(iii) 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \setminus B \in \Gamma$;

(iv) $X \in \Gamma$.

证明 由 σ-代数的定义立得. □

定义 1.35 (生成 σ-代数)

设 Σ 是集合 X 的一些子集所构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ-代数 Γ(即若 $A \in \Sigma$, 必有 $A \in \Gamma$, 这样的 Γ 是存在的, 如 $\mathcal{P}(X)$). 记包含 Σ 的最小 σ-代数为 $\Gamma(\Sigma)$. 也就是说, 对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ', 若 $A \in \Gamma(\Sigma)$, 则 $A \in \Gamma'$, 称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 Σ **生成的 σ-代数**.

定义 1.36 (Borel 集)

由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 **Borel 集**.

命题 1.14 (Borel 集的基本性质)

$\mathbb{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集皆为 Borel 集;

任一 Borel 集的补集是 Borel 集;Borel 集列的并、交、上 (下) 限集皆为 Borel 集.

笔记 例如,$F_{\sigma\delta}$ 集 (可数个 F_σ 集的交集) 是 Borel 集.

证明 证明是显然的. □

例题 1.4 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)\ (k = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $f(x)$ 的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$$

是 G_δ 型集, 其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$.

证明 (i) 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 $f(x)$ 的连续点. 由题设知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0, 使得 $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3, \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3, \quad x \in U(x_0, \delta),$$

从而对 $x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad U(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\varepsilon)$. 又由 ε 的任意性, 可推知

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设 $x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$. 对 $\varepsilon > 0$, 取 $m > 3/\varepsilon$. 由于 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$, 故存在 k_0, 使得 $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 从而可得 $U(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 即

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_0).$$

注意到 $f_{k_0}(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 又有 $\delta_1 > 0$, 使得

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_1).$$

记 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 这说明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. □

定义 1.37 (Baire 第一函数类)

称区间 I 上连续函数列的极限函数 $f(x)$ 的全体为 **Baire 第一函数类**, 记为 $f \in B_1(I)$. ♣

定理 1.22

若 $f_n \in B_1(\mathbb{R})$, 且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f \in B_1(\mathbb{R})$. ♡

证明 事实上, 由题设知, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n_k \in \mathbb{N}$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^{k+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

这里不妨认定 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. 考查 $\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$, 因为我们有

$$\begin{aligned} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| &\leqslant |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

所以 $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \in B_1(\mathbb{R})$. 显然有 $g(x) = f(x) - f_{n_1}(x)$, 即 $f(x) = g(x) + f_{n_1}(x)$. 证毕. □

命题 1.15

$\mathbb{R}$ 中存在非 $F_{\sigma\delta}$ 集、非 $F_{\delta\delta\sigma}$ 集等等. ♠

定理 1.23 (Baire 定理)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 即 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, F_k\ (k = 1, 2, \cdots)$ 是闭集. 若每个 F_k 皆无内点, 则 E 也无内点. ♡

证明 若 E 有内点, 设为 x_0, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使 $\overline{B}(x_0, \delta_0) \subset E$. 因为 F_1 是无内点的, 所以必存在 $x_1 \in B(x_0, \delta_0)$, 且有 $x_1 \notin F_1$. 又因为 F_1 是闭集, 所以可以取到 $\delta_1 (0 < \delta_1 < 1)$, 使得

$$\overline{B}(x_1, \delta_1) \cap F_1 = \varnothing,$$

同时有 $\overline{B}(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$. 再从 $\overline{B}(x_1, \delta_1)$ 出发以类似的推理使用于 F_2, 则可得 $\overline{B}(x_2, \delta_2) \cap F_2 = \varnothing$, 同时有 $\overline{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, \delta_1)$, 这里可以要求 $0 < \delta_2 < 1/2$. 继续这一过程, 可得点列 $\{x_k\}$ 与正数列 $\{\delta_k\}$, 使得对每个自然

数 k, 有

$$\overline{B}(x_k,\delta_k)\subset B(x_{k-1},\delta_{k-1}),\quad \overline{B}(x_k,\delta_k)\cap F_k=\varnothing,$$

其中 $0<\delta_k<1/k$. 由于当 $l>k$ 时, 有 $x_l\in B(x_k,\delta_k)$, 故

$$|x_l-x_k|<\delta_k<\frac{1}{k}.$$

这说明 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列 (Cauchy 列), 从而是收敛列, 即存在 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$.

此外, 从不等式

$$|x-x_k|\leqslant|x-x_l|+|x_l-x_k|<|x-x_l|+\delta_k,\quad l>k$$

立即可知 (令 $l\to\infty$)$|x-x_k|\leqslant\delta_k$. 这说明 $x\in\overline{B}(x_k,\delta_k)$, 即对一切 k,$x\notin F_k$. 这与 $x\in E$ 发生矛盾. □

例题 1.5 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

证明 事实上, 令 $\mathbb{Q}=\{r_k:k=1,2,\cdots\}$, 假定 $\mathbb{Q}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$, 式中 G_i $(i=1,2,\cdots)$ 是开集, 则有表示式

$$\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^c\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}\right),$$

这里的每个单点集 $\{r_k\}$ 与 G_i^c 皆为闭集, 而且从 $\overline{G_i}=\mathbb{R}^1$ 可知每个 G_i^c 是无内点的. 这说明 $\mathbb{R}$ 是可列个无内点之闭集的并集. 从而由 Baire 定理可知 $\mathbb{R}$ 也无内点, 这一矛盾说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集. □

定义 1.38

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 $\overline{E}=\mathbb{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**稠密集**; 若 $\mathring{\overline{E}}=\varnothing$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**无处稠密集**; 可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**. ♣

例题 1.6 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列, 则 $G_0=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明 只需指出对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭球 $\overline{B}=\overline{B}(x,\delta)$, 均有 $G_0\cap\overline{B}\neq\varnothing$ 即可. 采用反证法: 假定存在闭球 $\overline{B}_0=\overline{B}(x_0,\delta_0)$, 使得 $G_0\cap\overline{B}_0=\varnothing$, 则易知

$$\mathbb{R}^n=(G_0\cap\overline{B}_0)^c=G_0^c\cup(\overline{B}_0)^c,$$
$$\overline{B}_0=\mathbb{R}^n\cap\overline{B}_0=G_0^c\cap\overline{B}_0=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\right)^c\cap\overline{B}_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k^c\cap\overline{B}_0).$$

注意到 G_k^c 是无内点的闭集, 故由Baire 定理可知,$\overline{B}_0$ 也无内点, 矛盾. □

例题 1.7 设 $f_k\in C(\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$, 则 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集.

证明 注意到 $f(x)$ 的连续点集的表示, 只需指出 (例题 1.4)

$$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c\quad\left(G\left(\frac{1}{m}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

是第一纲集. 对 $\varepsilon>0$, 令

$$F_k(\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n:|f_k(x)-f_{k+i}(x)|\leqslant\varepsilon\},$$

易知 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)$,$F_k(\varepsilon)\subset E_k(\varepsilon)$, 从而有

$$\mathring{F}_k(\varepsilon)\subset\mathring{E}_k(\varepsilon)\subset G(\varepsilon),\quad\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k(\varepsilon)\subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$[G(\varepsilon)]^c=\mathbb{R}^n\setminus G(\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k(\varepsilon)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \setminus \mathring{F}_k(\varepsilon)] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon).$$

因为 $F_k(\varepsilon)$ 是闭集, 所以 $\partial F_k(\varepsilon)$ 是无处稠密集. 这说明 $(G(\varepsilon))^c$ 是第一纲集. □

例题 1.8 设 $f \in C([0,1])$, 且令

$$f_1'(x) = f(x), f_2'(x) = f_1(x), \cdots, f_n'(x) = f_{n-1}(x), \cdots.$$

若对每一个 $x \in [0,1]$, 都存在自然数 k, 使得 $f_k(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 只需指出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中的一个稠密集上为 0 即可. 对此, 我们在 $[0,1]$ 中任取一个闭子区间 I, 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然, 每个 F_k 都是闭集, 且 $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. 根据Baire 定理可知, 存在 F_{k_0}, 它包含一个区间 (α, β). 因为在 (α, β) 上 $f_{k_0}(x) = 0$, 所以 $f(x) = 0, x \in (\alpha, \beta)$. 注意到 $(\alpha, \beta) \subset I$, 即得所证. □

1.4.4 Cantor(三分) 集

定义 1.39

设 $[0,1] \subset \mathbb{R}$, 将 $[0,1]$ 三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为 F_1, 即

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2};$$

再将 F_1 中的区间 $[0, 1/3]$ 及 $[2/3, 1]$ 各三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad 及 \quad I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

记 F_1 中留存的部分为 F_2, 即

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$
$$= F_{2,1} \cup F_{2,2} \cup F_{2,3} \cup F_{2,4}.$$

一般地说 (归纳定义), 设所得剩余部分为 F_n, 则将 F_n 中每个 (互不相交) 区间三等分, 并移去中央三分开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而我们得到集合列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

作点集 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 我们称 C 为 **Cantor(三分) 集**. ♣

定理 1.24 (Cantor 集的基本性质)

(1) C 是非空有界闭集, 因此是紧集.

(2) $C = C'$, 即 C 为完全集.

(3) C 无内点.

(4) Cantor 集的基数是 c.

(5) $[0,1] \setminus C$ 的长度的总和为 1. ♡

证明

(1) 因为每个 F_n 都是非空有界闭集, 而且 $F_n \supset F_{n+1}$, 所以根据 Cantor 闭集套定理, 可知 C 不是空集 (实际上,F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 中每个闭区间的端点都是没有被移去的, 即都是 C 中的点). 显然,C 是闭集.

(2) 设 $x \in C$, 则 $x \in F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即对每个 n,x 属于长度为 $1/3^n$ 的 2^n 个闭区间中的一个. 于是, 对任一

$\delta > 0$, 存在 n, 满足 $1/3^n < \delta$, 使得 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 此闭区间有两个端点, 它们是 C 中的点且总有一个不是 x. 这就说明 x 是 C 的极限点, 故得 $C' \supset C$. 由 (i) 知 $C = C'$.

(3) 设 $x \in C$, 给定任一区间 $(x-\delta, x+\delta)$, 取 $2/3^n < \delta$. 因为 $x \in F_n$, 所以 F_n 中必有某个长度为 $1/3^n$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 然而, 在构造 C 集的第 $n+1$ 步时, 将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间. 这说明 $(x-\delta, x+\delta)$ 不含于 C.

(4) 事实上, 将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0, 2$$

一一对应. 从而知 C 为连续基数集 (与 $(0,1]$ 的二进位小数比较).

(5) 由 C 的定义可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

□

定义 1.40 (类 Cantor 集)

设 δ 是 $(0,1)$ 内任意给定的数, 考虑在 $[0,1]$ 区间, 取 $p = (1+2\delta)/\delta$, 采用类似于 Cantor 集的构造过程:
第一步, 移去长度为 $1/p$ 的同心开区间;
第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间;
第三步, 在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间. 继续此过程, 可得一列移去的开区间, 记其并集为 G(开集), 我们称 $C_p = [0,1] \setminus G$ 为**类 Cantor 集** (当 $p = 3$ 时,C_p 就是 Cantor(三分) 集). 类 Cantor 集也称为 **Harnack 集**.

♣

注 若要在 $\mathbb{R}^n$ 的单位方体 $[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ 中构造具有类似性质的集合, 则只需取 $C \times C \times \cdots \times C$($C$ 是 $[0,1]$ 中的类 Cantor 集) 即可.

定理 1.25 (类 Cantor 集的基本性质)

(1) G 的总长度为 $\delta(0 < \delta < 1$ 是任意给定的数) 的稠密开集.

(2) C_p 是非空完全集, 且没有内点.

♡

证明

(1) 由 G 的定义可知 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

(2)

□

定义 1.41 (Cantor 函数)

设 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, 其中的点我们用三进位小数

$$x = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

来表示.

(i) 作定义在 C 上的函数 $\varphi(x)$. 对于 $x \in C$, 定义

$$\varphi(x) = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

(ii) 作定义在 $[0,1]$ 上的 $\Phi(x)$. 对于 $x \in [0,1]$, 定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}.$$

我们称 $\Phi(x)$ 为 **Cantor 函数**.

定理 1.26 (Cantor 函数的性质)

设 $\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}$ 为 Cantor 函数, 则有下列性质:

(1) $\varphi(C) = [0,1]$, 即 φ 是满射. 并且 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数.

(2) $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增连续函数. 此外, 在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上, $\Phi(x)$ 都是常数.

证明

(1) 因为 $[0,1]$ 中的点可用二进位小数表示, 所以由 φ 的定义有 $\varphi(C) = [0,1]$..

下面证明 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots$ 是取 0 或 1 的数, 而且它们所表示的 C 中的数有下述关系:

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i} < 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记 $k = \min\{i : \alpha_i \neq \beta_i\}$, 则我们有

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} &= \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k}\frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} \\ &\leqslant \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k}\frac{2}{3^i} = \frac{\beta_k - \alpha_k + 1}{3^k}. \end{aligned}$$

由此可知 $(\alpha_k < \beta_k)\alpha_k = 0, \beta_k = 1$, 从而得到

$$\begin{aligned} \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i} = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}\right). \end{aligned}$$

(2) 由 (2) 的结论及 Φ 的定义即得 Φ 的递增性. 因为 $\Phi([0,1]) = [0,1]$, 所以由命题 6.7可知 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

□

例题 1.9 $E \subset \mathbb{R}$ 是完全集当且仅当 $E = \left(\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(a_n, b_n)\right)^c$, 其中 (a_i, b_i) 与 (a_j, b_j) $(i \neq j)$ 无公共端点.

证明 **必要性**: 若 E 是完全集, 则 E 是闭集. 从而 E^c 是开集, 它是 E^c 内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的, 否则 E 中就会有孤立点了, 这是不可能的.

充分性: 首先, 由题设知 E 是闭集. 其次, 对任意的 $x \in E$, 如果 $x \notin E'$, 那么存在 $\delta > 0$, 使得 $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \{x\}$. 这说明 x 是某两个开区间的端点, 与假设矛盾. □

例题 1.10 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是完全集, 则 E 是不可数集.

证明 用反证法. 假定 $E = \{x_n \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \cdots\}$.

(i) 选取 $y_1 \in E \setminus \{x_1\}$, 则点 x_1 到 y_1 的距离大于 0. 存在以 y_1 为中心的闭正方形 Q_1,$Q_1 \cap E$ 是紧集.

(ii) 看 $E \setminus \{x_2\}$. 因为 y_1 是 $E \setminus \{x_2\}$ 的极限点, 所以 $\mathring{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\}) \neq \varnothing$. 又取 $y_2 \in \mathring{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\})$, 并作以 y_2 为中心的闭正方形 Q_2:$Q_2 \subset Q_1$,$x_1 \notin Q_2$,$x_2 \notin Q_2$, 可知 $(Q_1 \cap E) \supset (Q_2 \cap E)$ 是紧集. 如此继续做下去, 可得有界闭

集套列 $\{Q_n \cap E\}$:$(Q_{n-1} \cap E) \supset (Q_n \cap E)$ $(n \in \mathbb{N})$, 而且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不在其内. 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap E) = \varnothing,$$

导致矛盾. □

命题 1.16

任一非空完全集的基数均为 c.

证明 证明见那汤松著《实变函数论》的上册, 有高等教育出版社出版的中译本,1955 年. □

例题 1.11 设 $E = \left\{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n, a_n = 2 \text{ 或} 7\right\}$, 我们有

(i) E 是闭集;

(ii) $\overline{E} = c$;

(iii) E 在 $[0,1]$ 中不稠密.

证明 (i) 若有 $\{x_m\} \subset E$:$x_m \to x(m \to \infty)$, 则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/10^n \quad (b_n = 0, 1, 2, \cdots, 9).$$

如果 $|x_m - x| < 10^{-p}$, 那么在 $x \in E$ 时,$b_n = 2$ 或$7(n = 1, 2, \cdots, p-1)$. 这说明 E 是闭集.

(ii) 与 0 和 1 组成的数列类似,$\overline{E} = c$.

(iii) 注意到 $E \cap (0.28, 0.7) = \varnothing$, 故 E 不是稠密集. □

1.5 点集间的距离

定义 1.42

设 $x \in \mathbb{R}^n$,E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**; 若 E_1,E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的**距离**. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} \quad \text{或} \quad \inf\{d(E_1, y) : y \in E_2\}.$$

命题 1.17 (点集间的距离的性质)

(1) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n, F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个非空点集, 则

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

(2) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空点集, 若 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$, 则 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$.

(3) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空闭集, 若 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$, 则 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$.

注 若 (3) 中去掉 E_i 是闭集这个条件, 则结论不一定成立 (例如, 两个开球相切).

证明

(1) 由 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \supset E_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 可知

$$\left\{(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \supset \{(x, y) | x \in F, y \in E_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此

$$d\left(F,\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\inf\left\{d(x,y)|x\in F,y\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right\}\geqslant\inf\{d(x,y)|x\in F,y\in E_i\}=d(F,E_i)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

故

$$d\left(F,\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\geqslant\min_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}.$$

对 $\forall x\in F,y\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, 都存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $y\in E_j$. 于是

$$d(x,y)\geqslant d(F,E_j)\geqslant\min_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}.$$

故 $\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}$ 是 $\left\{d(x,y)|x\in F,y\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right\}$ 的一个下界. 因此

$$d\left(F,\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\inf\left\{d(x,y)|x\in F,y\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right\}\geqslant\min_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}.$$

综上,$d\left(F,\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}$.

(2) 反证, 假设存在 $i\neq j$, 使得 $E_i\cap E_j\neq\varnothing$, 则任取 $x_0\in E_i\cap E_j$, 又由 $d(E_i,E_j)>0$ 可知, 对 $\forall x\in E_i,y\in E_j$, 都有 $d(x,y)\geq d(E_i,E_j)>0$. 这与 $d(x_0,x_0)=0,x_0\in E_i\cap E_j$ 矛盾!

(3) 反证, 假设存在 $i\neq j$, 使得 $d(E_i,E_j)=0$. 由 $d(E_i,E_j)=\inf\{d(x,y)\mid x\in E_i,y\in E_j\}$ 及下确界的定义可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in E_i$,$y_n\in E_j$, 使得 $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=c.$$

再由 E_i,E_j 都是闭集可知 $c\in E_i\cap E_j$, 这与 $E_i\cap E_j=\varnothing$ 矛盾!

□

例题 1.12 在 $\mathbb{R}^2$ 中作点集

$$E_1=\{x=(\xi,\eta):-\infty<\xi<+\infty,\eta=0\},$$
$$E_2=\{y=(\xi,\eta):\xi\cdot\eta=1\},$$

则 $d(E_1,E_2)=0$.

证明 事实上, 当我们取 $x=(\xi,0)\in E_1$ 且 $y=(\xi,\eta)\in E_2$ 时, 由

$$d(E_1,E_2)\leqslant d(x,y)=|\eta|=\frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1,E_2)<\varepsilon$. 由此得

$$d(E_1,E_2)=0.$$

显然, 若 $x\in E$, 则 $d(x,E)=0$. 但反之, 若 $d(x,E)=0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x\notin E$ 时, 必有 $x\in E'$. □

定理 1.27

若 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0\in F$, 有

$$|x_0-y_0|=d(x_0,F).$$

证明 作闭球 $\overline{B}=\overline{B}(x_0,\delta)$, 使得 $\overline{B}\cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0,F)=d(x_0,\overline{B}\cap F).$$

$\overline{B}\cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0-y|$ 看作定义在 $\overline{B}\cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\overline{B}\cap F$ 上达到最小值, 即存在

$y_0 \in \overline{B} \cap F$, 使得

$$|x_0 - y_0| = \inf\{|x_0 - y| : y \in \overline{B} \cap F\},$$

从而有 $|x_0 - y_0| = d(x_0, F)$. □

定理 1.28

若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空点集, 则 $d(x, E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 x, y. 根据 $d(y, E)$ 的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $z \in E$, 使得 $|y - z| < d(y, E) + \varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leqslant |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \\ &< |x - y| + d(y, E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$d(x, E) - d(y, E) \leqslant |x - y|.$$

同理可证 $d(y, E) - d(x, E) \leqslant |x - y|$. 这说明

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leqslant |x - y|.$$

□

推论 1.1

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1 \in F_1$,$x_2 \in F_2$, 使得

$$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2).$$

引理 1.3

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得

(i) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$;

(ii) $F_1 = \{x : f(x) = 1\}$,$F_2 = \{x : f(x) = 0\}$.

证明 构造函数 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

它就是所求的函数. □

定理 1.29 (连续延拓定理)

若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)| \leqslant M, \quad g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

注 1. 上述定理在 $f(x)$ 无界时也成立 (研究 $\arctan f(x)$).

2. $\mathbb{R}^2$ 中存在由某些有理点构成的稠密集, 其中任意两点的距离为无理数.

证明 把 F 分成三个点集:

$$A = \left\{x \in F : \frac{M}{3} \leqslant f(x) \leqslant M\right\},$$

$$B = \left\{x \in F : -M \leqslant f(x) \leqslant \frac{-M}{3}\right\},$$

$$C = \left\{x \in F : \frac{-M}{3} < f(x) < \frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x) = \frac{M}{3} \cdot \frac{d(x,B) - d(x,A)}{d(x,B) + d(x,A)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集, 所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 此外, 还有

$$|g_1(x)| \leqslant \frac{M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|f(x) - g_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}M, \quad x \in F.$$

再在 F 上来考查 $f(x)-g_1(x)$(相当于上述之 $f(x)$), 并用类似的方法作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$. 此时由于 $f(x)-g_1(x)$ 的界是 $2M/3$, 故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad x \in F.$$

继续这一过程, 可得在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k M, \quad x \in F \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

上面的第一式表明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 是一致收敛的. 若记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 上面的第二式表明

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in F.$$

最后, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 得到

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \frac{M}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) \\ &\leqslant \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = M. \end{aligned}$$

□

第 2 章 Lebesgue 测度

2.1 点集的 Lebesgue 外测度

定义 2.1 (Lebesgue 外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体, 且有

$$E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 **L-覆盖** (显然, 这样的覆盖有很多, 且每一个 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum\limits_{k \geq 1} |I_k|$ (可以是 $+\infty$, $|I_k|$ 表示 I_k 的体积)). 称

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为} E \text{ 的} L - \text{覆盖} \right\}$$

为点集 E 的 **Lebesgue 外测度**, 简称**外测度**.

♣

注 显然, 若 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k \geq 1} |I_k| = +\infty,$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

定理 2.1 ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)

(1) 非负性: $m^*(E) \geq 0$, $m^*(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$;

(3) 次可加性: $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

♡

证明

(1) 这可从定义直接得出.

(2) 这是因为 E_2 的任一个 $L-$ 覆盖都是 E_1 的 $L-$ 覆盖.

(3) 不妨设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及每个自然数 k, 存在 E_k 的 $L-$ 覆盖 $\{I_{k,l}\}$, 使得

$$E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |I_{k,l}| < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

由此可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} |I_{k,l}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

显然, $\{I_{k,l} : k, l = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 $L-$ 覆盖, 从而有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论成立.

□

命题 2.1

$\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_0\}) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$. 同理, $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t_0, \xi_i, \cdots, \xi_n) : a_j \le \xi_j \le b_j, j \ne i\}$$

($n-1$ 维超平面块) 的外测度也为零.

证明 这是因为可作一开矩体 I, 使得 $x_0 \in I$ 且 $|I|$ 可任意地小. □

推论 2.1

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数点集, 则 $m^*(E) = 0$.

注 由此可知有理点集的外测度 $m^*(\mathbb{Q}^n) = 0$. 这里我们看到了一个虽然处处稠密但外测度为零的可列点集.

证明 由外测度的次可加性不难证明. □

命题 2.2

$[0, 1]$ 中的 Cantor 集 C 的外测度是零.

注 这个命题 2.2说明外测度为零的点集不一定是可列集.

证明 事实上, 因为 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中的 F_n (在构造 C 的过程中第 n 步所留存下来的) 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并集, 所以我们有

$$m^*(C) \le m^*(F_n) \le 2^n \cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C) = 0$. □

命题 2.3

设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(I) = m^*(\bar{I}) = |I|$.

证明 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作一开矩体 J, 使得 $J \supset \bar{I}$ 且 $|J| < |I| + \varepsilon$, 从而由外测度的单调性有

$$m^*(\bar{I}) \le |J| < |I| + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $m^*(\bar{I}) \le |I|$. 现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意的 $L-$ 覆盖, 则因为 $\bar{I}$ 是有界闭集, 所以存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖

$$\{I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_l}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{l} I_{i_j} \supset \bar{I}.$$

由外测度的单调性和次可加性可得

$$|I| \le \sum_{j=1}^{l} |I_{i_j}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

再由下确界是最大的下界可得 $|I| \le m^*(\bar{I})$, 从而我们有 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

又因为 $I \subset \bar{I}$, 所以由外测度的单调性可得 $m^*(I) \le m^*(\bar{I}) = |I|$. 同理可证 $|I| \le m^*(I)$, 故 $m^*(I) = |I| = m^*(\bar{I})$. □

引理 2.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\delta > 0$. 令

$$m^*_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E, \text{每个开矩体} I_k \text{ 的边长} < \delta\right\},$$

则 $m^*_\delta(E) = m^*(E)$.

笔记 这个引理告诉我们,今后可以对点集 E 的 L-覆盖中的每个开矩体的边长做任意限制,而不影响 E 的外测度的值.

证明 显然有 $m_\delta^*(E) \geq m^*(E)$. 为证明其反向不等式也成立,不妨设 $m^*(E) < +\infty$. 由外测度的定义可知,对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

对于每个 k, 我们把 I_k 分割成 $l(k)$ 个开矩体:

$$I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,l(k)},$$

它们互不相交且每个开矩体的边长都小于 $\delta/2$. 现在保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动,边长扩大 $\lambda(1 < \lambda < 2)$ 倍做出开矩体,并记为 $\lambda I_{k,i}$, 显然,对每个 k, 有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|.$$

易知 $\{\lambda I_{k,i} : i = 1, 2, \cdots, l(k); k = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 的边长小于 δ 的 $L-$ 覆盖,且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon),$$

从而可知 $m_\delta^*(E) \leq \lambda^n (m^*(E)+\varepsilon)$. 令 $\lambda \to 1$ 并注意到 ε 的任意性,我们得到 $m_\delta^*(E) \leq m^*(E)$. 这说明 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.
□

定理 2.2

设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集. 若 $d(E_1, E_2) > 0$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

♡

证明 由外测度的次可加性可知,只需证明 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$ 即可. 为此,不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < +\infty$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作 $E_1 \cup E_2$ 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon,$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}(n \geq 2)$. 现在将 $\{I_k\}$ 分为如下两组:

$$\text{(i)} J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_1; \quad \text{(ii)} J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{l_k} \supset E_2. \tag{2.1}$$

且其中任一矩体皆不能同时含有 E_1 与 E_2 中的点. 否则,若对任意的 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_1$ 或 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_2$, 其中 $J_{i_k} \in \{I_k\}$, 都存在 $m \in [1, k] \cap \mathbb{N}$, 使得 J_{i_m} 中同时含有 E_1 和 E_2 中的点. 设 $x_1 \in J_{i_m} \cap E_1$,$x_2 \in J_{i_m} \cap E_2$, 则由 $d(E_1, E_2) > 0$ 可知

$$d(x_1, x_2) \geqslant d(E_1, E_2) > 0.$$

又因为 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}(n \geq 2)$, 所以

$$d(x_1, x_2) \leqslant \frac{\sqrt{2} d\left(E_1, E_2\right)}{\sqrt{n}} < d(E_1, E_2) < d(x_1, x_2).$$

上式显然矛盾!(最大的矩体应为正方体, $\dfrac{\sqrt{2} d\left(E_1, E_2\right)}{\sqrt{n}}$ 为最大的矩体的对角线长) 故(2.1)式成立. 从而得

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon > \sum_{k \geq 1} |I_k| &= \sum_{k \geq 1} |J_{i_k}| + \sum_{k \geq 1} |J_{l_k}| \\ &\geq m^*(E_1) + m^*(E_2). \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可知 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$. □

推论 2.2

设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个点集. 若 $d(E_i, E_j) > 0 (i \neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i).$$

证明 当 $n=1$ 时结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时结论成立, 现在考虑 $n=k+1$ 的情形. 由点集间的距离的性质及 $d(E_i, E_j) > 0 (i \neq j)$ 可知

$$d\left(E_{k+1}, \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \min_{i=1,2,\cdots,k} d(E_{k+1}, E_i) > 0.$$

故再由定理 2.2和归纳假设可得

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right) = m^*\left(E_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = m^*(E_{k+1}) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$$
$$= m^*(E_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} m^*(E_i) = \sum_{i=1}^{k+1} m^*(E_i).$$

因此由数学归纳法可知结论成立. □

命题 2.4

设 $E \subset [a,b]$, $m^*(E) > 0$, $0 < c < m^*(E)$, 则存在 E 的子集 A, 使得 $m^*(A) = c$.

证明 记 $f(x) = m^*([a,x) \cap E)$, $a \le x \le b$, 则 $f(a) = 0$, $f(b) = m^*(E)$. 考查 x 与 $x + \Delta x$. 不妨设 $a \le x < x + \Delta x \le b$, 则由

$$[a, x+\Delta x) \cap E = ([a,x) \cap E) \cup ([x, x+\Delta x) \cap E)$$

可知 $f(x+\Delta x) \le f(x) + \Delta x$, 即

$$f(x+\Delta x) - f(x) \le \Delta x.$$

对 $\Delta x < 0$ 也可证得类似不等式. 总之, 我们有

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \le |\Delta x|, \quad a \le x \le b.$$

这说明 $f \in C([a,b])$. 根据连续函数中值定理, 对 $f(a) < c < f(b)$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = c$. 取 $A = [a,\xi) \cap E$, 即得证. □

定理 2.3 (外测度的平移不变性)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 记 $E + \{x_0\} = \{x + x_0, x \in E\}$, 则

$$m^*(E + \{x_0\}) = m^*(E). \tag{2.2}$$

注 对集合做相同的平移并不会改变集合之间的关系 (交、并、差、补、子集等).

证明 首先, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体 I, 易知 $I + \{x_0\}$ 仍是一个开矩体且其相应边长均相等, $|I| = |I + \{x_0\}|$. 其次, 对 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k + \{x_0\}\}$ 仍是 $E + \{x_0\}$ 的 $L-$ 覆盖. 从而由

$$m^*(E + \{x_0\}) \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k + \{x_0\}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

可知 (对一切 $L-$ 覆盖取下确界)

$$m^*(E + \{x_0\}) \le m^*(E).$$

反之, 考虑对 $E + x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移, 可得原点集 E. 同理又有

$$m^*(E) \le m^*(E + \{x_0\}).$$

□

定理 2.4 (外测度的数乘)

设 $E \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

♡

证明 因为 $E \subset \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n)$ 等价于 $\lambda E \subset \bigcup_{n\geq 1}\lambda(a_n, b_n)$, $m^*([a_n, b_n]) = m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间 (α, β), 有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda| m^*((\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$. □

定义 2.2 (集合上的外测度)

设 X 是一个非空集合, μ^* 是定义在幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个取广义实值的集合函数, 且满足:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0, \mu^*(E) \geq 0\ (E \subset X)$;

(ii) 若 $E_1, E_2 \subset X, E_1 \subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;

(iii) 若 $\{E_n\}$ 是 X 的子集列, 则有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**外测度**.

若 (X, d) 是一个距离空间, 且其上的外测度 μ^* 还满足**距离外测度性质**: 当 $d(E_1, E_2) > 0$ 时, 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**距离外测度** (利用距离外测度性质可以证明开集的可测性).

♣

2.2 可测集与测度

定义 2.3 (可测集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为 **Lebesgue 可测集** (或 **m^*-可测集**) 或 E **可测**, 简称为**可测集**, 其中 T 称为**试验集** (这一定义可测集的等式也称为 **Carathéodory 条件**). 可测集的全体称为**可测集类**, 简记为 $\mathscr{M}$.

♣

定理 2.5 (集合可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E \in \mathscr{M}$ 的充要条件是对任一点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(T) < +\infty$, 都有

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{2.3}$$

成立.

♡

注 往后经常利用这个定理的充分性来证明一个集合可测. 但这个定理的必要性要弱于可测集的定义.

证明 必要性由可测集的定义立得. 下证充分性. 由外测度的次可加性可得

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \mathbb{R}^n\right) = m^*\left(T \cap (E \cup E^c)\right) = m^*\left((T \cap E) \cap (T \cup E^c)\right) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

总是成立的. 又因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (2.3) 式总成立, 故对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

即 $E \in \mathscr{M}$. □

定义 2.4 (零测集)

外测度为零的点集称为**零测集**.

注 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集. 从而根据外测度的次可加性知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集.

命题 2.5

1. 零测集的任一子集是零测集.
2. 零测集一定可测, 即若 $m^*(E) = 0$, 则 $E \in \mathscr{M}$.

证明

1. 由外测度的单调性立得.
2. 事实上, 此时我们有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T).$$

再由定理 2.5立得.

□

命题 2.6

若 $E_1 \subset S, E_2 \subset S^c, S \in \mathscr{M}$, 则有

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

注 这个命题表明: 当两个集合由一个可测集分离开时, 其外测度就有可加性.

证明 事实上, 此时取试验集 $T = E_1 \cup E_2$, 从 S 是可测集的定义得

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap S) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap S^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

□

推论 2.3

当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*((T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

证明 注意到 $T \cap E_1 \in E_1$,$T \cap E_2 \in E_1^c$, 而 $E_1 \in \mathscr{M}$, 故由集合运算的性质和命题 2.6可知

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*((T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

□

推论 2.4

当 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*\left(T \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} (T \cap E_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(T \cap E_k).$$

证明 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n = m$ 时结论成立, 考虑 $n = m + 1$ 的情况. 由于 $E_1, E_2, \cdots, E_{m+1}$ 皆互不相交, 因此 $\bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$ 和 E_{m+1} 也互不相交. 于是由集合运算的性质和推论 2.3以及归纳假设可得

$$\begin{aligned} m^*\left(T \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} E_k\right) &= m^*\left(\bigcup_{k=1}^{m+1} (T \cap E_k)\right) = m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k \cup E_{m+1}\right)\right) = m^*\left(\left(T \cap \bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) \cup (T \cap E_{m+1})\right) \\ &= m^*\left(T \cap \bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) + m^*\left(T \cap E_{m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m} m^*\left(T \cap E_k\right) + m^*\left(T \cap E_{m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m+1} m^*\left(T \cap E_k\right). \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

定理 2.6 (可测集的性质)

(1) $\varnothing \in \mathscr{M}$.

(2) 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $E^c \in \mathscr{M}$.

(3) 若 $E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$, 则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 以及 $E_1 \setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$. (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(4) 若 $E_i \in \mathscr{M}\ (i = 1, 2, \cdots)$, 则其并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i \cap E_j = \varnothing\ (i \neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足**可数可加性** (或称为 $\sigma-$ 可加性).

(5) 若 $E_i \in \mathscr{M}\ (i = 1, 2, \cdots)$, 则其交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$.

证明

(1) 显然成立.

(2) 注意到 $(E^c)^c = E$, 从定义可立即得出结论.

(3) 对于任一集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 根据集合分解 (参阅图 2.1) 与外测度的次可加性, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &\leq m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\ &= m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\ &\leq m^*((T \cap E_1) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1) \cap E_2^c) \\ &\quad + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c). \end{aligned}$$

又由 E_1, E_2 的可测性知, 上式右端就是

$$m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c) = m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T) = m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

也就是说 $E_1 \cup E_2$ 是可测集.

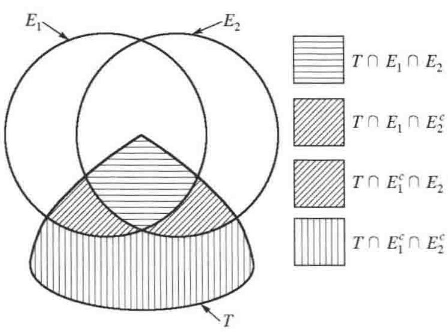

图 2.1

为证 $E_1 \cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ 即可. 又由 $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ 可知, $E_1 \setminus E_2$ 是可测集.

(4) 首先, 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交, 并令

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由 (3) 知每个 S_k 都是可测集, 从而对任一集 T, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(T \cap S_k) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T \cap E_i)\right) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &\overset{\text{推论 2.4}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S_k^c). \end{aligned}$$

由于 $T \cap S_k^c \supset T \cap S^c$, 可知

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

令 $k \to \infty$, 就有

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

再由外测度的次可加性可得

$$\begin{aligned} m^*(T) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c) \geqslant m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T \cap E_i)) + m^*(T \cap S^c) \\ &= m^*(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + m^*(T \cap S^c) = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c). \end{aligned}$$

这说明 $S \in \mathscr{M}$. 此外, 在公式

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c)$$

中以 $T \cap S$ 替换 T, 则又可得

$$m^*(T \cap S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

又由外测度的次可加性可知反向不等式总是成立的, 因而实际上有

$$m^*(T \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

在这里再取 T 为全空间 $\mathbb{R}^n$, 就可证明可数可加性质:

$$m^*(S) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

其次, 对于一般的可测集列 $\{E_i\}$, 我们令

$$S_1 = E_1, \quad S_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right), \quad k \geq 2,$$

则 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 而由 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ 可知, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集.

(5) 由 (2) 可知 $E_i^c \in \mathscr{M}$, 再由 (4) 可知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$. 于是再利用 (2) 和 De Morgan 定律可得

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{M}.$$

□

推论 2.5

$\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数.

证明 由可测集的性质 (1)(2)(4)立得. □

命题 2.7

证明:Cantor 集 C 是可测的, 并且 $m(C) = 0$.

证明 开区间是可测的. 由开集构造定理, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中的开集是开区间的可数并, 因此也可测. 因此, 闭集也是可测的. 显然, 每个 C_n 都是闭集. 并且

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

于是 C 也是闭集. 因此 C 是可测的.

下面, 我们用两种方法计算康托集的测度.

法一:根据我们的构造, C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 $1/3$ 的 C_n 的测度. 换言之,

$$m(C_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) m(C_n) = \frac{2}{3} m(C_n)$$

递归地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0) = 1 < \infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理,

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

此即得证.

法二:设 $n \geq 2$. C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间, 每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$. 因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

因此

$$m(C) = 1 - 1 = 0.$$

□

命题 2.8

$\mathscr{M}$ 的基数是 2^c.

证明 由命题 2.7可知 Cantor 集是零测集, 不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 2^c, 但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 2^c, 于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 2^c. □

定义 2.5 (Lebesgue 测度)

对于可测集 E, 其外测度称为**测度**, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

定义 2.6 (测度)

设 X 是非空集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数, 且满足:

(i) $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$ $(E \in \mathscr{A})$;

(ii) $\mu(\varnothing)=0$;

(iii) μ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的,

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) **测度**. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) **可测集**, 有序组 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 称为**测度空间**.

注 由推论 2.5可知 $\mathscr{M}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数, 故本节所建立的测度空间就是 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{M},m)$.

定理 2.7 (测度的基本性质)

(1) 非负性: 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $m(E)\geq 0, m(\varnothing)=0$;

(2) 单调性: 若 $E_1,E_2\in\mathscr{M}$ 且 $E_1\subset E_2$, 则 $m(E_1)\leq m(E_2)$, 并且 $m(E_2\setminus E_1)=m(E_1)-m(E_2)$;

(3) 可数可加性: 若 $E_i\in\mathscr{M}\ (i=1,2,\cdots)$ 且 $E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$, 则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i).$$

证明

(1) 由R^n 中点集的外测度性质立得.

(2) 由R^n 中点集的外测度性质可知 $m(E_1)\leq m(E_2)$. 再根据 E_1 可测可知

$$m^*(E_2)=m^*(E_2\cap E_1)+m^*\left(E_2\cap E_1^c\right)=m^*(E_1)+m^*(E_2\setminus E_1).$$

又由可测集的性质可知 $E_2\setminus E_1$ 可测, 又因为 E_1,E_2 可测, 所以上式等价于

$$m(E_2)=m(E_2\cap E_1)+m\left(E_2\cap E_1^c\right)=m(E_1)+m(E_2\setminus E_1).$$

(3) 由可测集的性质立得.

□

定理 2.8 (递增可测集列的测度运算)

若有递增可测集列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\cdots$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k). \tag{2.4}$$

证明 若存在 k_0, 使得 $m(E_{k_0})=+\infty$, 则

$$m^*\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)\geqslant m^*(E_{k_0}).$$

因此 $m^*\left(\lim\limits_{k\to\infty}E_k\right)=+\infty$. 又由 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 递增可知

$$m^*(E_k)\geqslant m^*(E_{k_0}),\quad \forall k\geqslant k_0.$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=+\infty$. 故此时定理自然成立.

现在假定对一切 k, 有 $m(E_k)<+\infty$. 由假设 $E_k\in\mathscr{M}(k=1,2,\cdots)$, 故 E_{k-1} 与 $E_k\setminus E_{k-1}$ 是互不相交的可测集. 由测度的可加性知 $m(E_{k-1})+m(E_k\setminus E_{k-1})=m(E_k)$. 因为 $m(E_{k-1})$ 是有限的, 所以移项得 $m(E_k\setminus E_{k-1})=m(E_k)-m(E_{k-1})$. 令 $E_0=\varnothing$, 可得 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k\setminus E_{k-1})$. 再应用测度的可数可加性, 我们有

$$\begin{aligned}m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)&=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\setminus E_{k-1})\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1}))=\lim_{k\to\infty}m(E_k).\end{aligned}$$

□

推论 2.6 (递减可测集列的测度运算)

若有递减可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, 且 $m(E_1) < +\infty$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \tag{2.5}$$

证明 由可测集的性质 (5)可知 $\lim\limits_{k\to\infty} E_k$ 是可测集, 再由测度的单调性可知 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k) \leq m(E_1) < +\infty$. 因为 $E_1 \setminus E_k \subset E_1 \setminus E_{k+1}, k = 2, 3, \cdots$, 所以由可测集的性质 (2)可知 $\{E_1 \setminus E_k\}$ 是递增可测集合列. 于是由递增可测集列的测度运算可知

$$m\left(E_1 \setminus \lim_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty} (E_1 \setminus E_k)\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_1 \setminus E_k).$$

由于 $m(E_1) < +\infty$, 故由测度的基本性质 (2)上式可写为 $m(E_1) - m\left(\lim\limits_{k\to\infty} E_k\right) = m(E_1) - \lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)$. 消去 $m(E_1)$, 我们有 $m\left(\lim\limits_{k\to\infty} E_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)$. □

定理 2.9

(1) 若有可测集列 $\{E_k\}$, 且有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$, 则

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = 0.$$

(2) 设 $\{E_k\}$ 是可测集列, 则

$$m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k), \quad m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k).$$

注 也称结论

$$m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} m(E_n), \quad m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} m(E_n)$$

为测度论中的 Fatou 引理 (见第四章).

证明

1.

$$\begin{aligned} m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{测度的基本性质 (3)}} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = 0. \end{aligned}$$

2. 因为 $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k, \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} E_i \supset E_k (k = 1, 2, \cdots)$, 所以有

$$m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant m(E_k), \quad m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \geqslant m(E_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令 $k \to \infty$, 则得 ($\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} E_j$ 随 k 增大而递增,$\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} E_i$ 随 k 增大而递减)

$$m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right)$$

$$\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right)$$
$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} m(E_k).$$

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right)$$
$$\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right)$$
$$\geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

□

2.3 可测集与 Borel 集的关系

引理 2.2 (Carathéodory 引理)

设 $G \neq \mathbb{R}^n$ 是开集,$E \subset G$, 令 $E_k = \{x \in E : d(x, G^c) \geqslant 1/k\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$, 则
$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

证明 (i) 易知 $\{E_k\}$ 是递增列, 且 $\lim_{k\to\infty} E_k \subset E$. 又对 $x \in E$, 由于 x 是 G 的内点, 因此 $d(x, y) > 0, \forall y \in G^c$, 否则, 存在 $y_0 \in G^c$, 使得 $d(x, y_0) = 0$, 从而 $x = y_0 \in G^c$ 矛盾! 于是
$$d(x, G^c) = \inf\{d(x, y) | y \in G^c\} \geq 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}.$$
进而存在充分大的 $k > 0$, 使得 $d(x, G^c) \geqslant \dfrac{1}{k}$, 即此时 $x \in E_k$.

故当 k 充分大时, 必有 $x \in E_k$, 这说明 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{k\to\infty} E_k$. 从而可知
$$E = \lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(ii) 由外测度的单调性可知 $m^*(E_k) \leq m^*(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 从而 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*(E)$. 为证反向不等式, 不妨假定 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 令
$$A_k = E_{k+1} \setminus E_k = \left\{x \in E : d\left(x, G^c\right) \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)\right\} (k = 1, 2, \cdots),$$
则
$$A_{2k} = \left\{x \in E : d\left(x, G^c\right) \in \left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)\right\} (k = 1, 2, \cdots).$$
对 $\forall i, j \in \mathbb{N}$ 且 $i \neq j$, 不妨设 $j > i$, 则 $j - i \geq 1$. 任取 $x \in A_{2i}, y \in A_{2j}$, 则
$$d(x, G^c) \in \left[\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i}\right), \quad d(y, G^c) \in \left[\frac{1}{2j+1}, \frac{1}{2j}\right).$$
再由三角不等式可知
$$d\left(x, y\right) \geqslant \left|d\left(x, G^c\right) - d\left(y, G^c\right)\right| \geqslant \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j} = \frac{2\left(j-i\right)-1}{2j\left(2i+1\right)} > 0.$$

因此 $d(A_{2i},A_{2j})\geqslant\dfrac{2(j-i)-1}{2j(2i+1)}>0(i\neq j)$. 再注意到 $E_{2k}\supset\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}A_{2j}$, 可得

$$m^*(E_{2k})\geqslant m^*\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}A_{2j}\right)\overset{\text{推论 2.2}}{=\!=\!=}\sum_{j=1}^{k-1}m^*(A_{2j}).$$

这说明 (令 $k\to\infty$)

$$\sum_{j=1}^{\infty}m^*(A_{2j})<+\infty.\quad\left(\text{类似地可知}\sum_{j=1}^{\infty}m^*\left(A_{2j+1}\right)<+\infty\right)$$

因为对任意的 k, 我们有

$$E\overset{\text{命题 1.3}}{=\!=\!=}\bigcup_{j=2k}^{\infty}E_j=E_{2k}\cup\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}A_{2j}\right)\cup\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}A_{2j+1}\right),$$

所以对任意的 k, 就有

$$m^*(E)\leqslant m^*(E_{2k})+\sum_{j=k}^{\infty}m^*(A_{2j})+\sum_{j=k}^{\infty}m^*(A_{2j+1}).$$

现在, 令 $k\to\infty$, 并注意上式右端后两项趋于零, 因此又知

$$m^*(E)\leqslant\lim_{k\to\infty}m^*(E_k),$$

即得所证. □

定理 2.10

非空闭集 F 是可测集.

证明 对任一试验集 T, 由于 $T\setminus F\subset F^c=G$ 是开集, 故由Carathéodory 引理知, 存在 $T\setminus F$ 中的集列 $\{F_k\}$:

$$d(F_k,F)\geqslant 1/k>0(k=1,2,\cdots),\quad\lim_{k\to\infty}m^*(F_k)=m^*(T\setminus F).$$

从而由外测度的单调性我们有 (对任一试验集 T)

$$m^*(T)\geqslant m^*[T\cap(F\cup F_k)]=m^*[(T\cap F)\cup F_k]\overset{\text{推论 2.2}}{=\!=\!=}m^*(T\cap F)+m^*(F_k).$$

再令 $k\to\infty$, 可得

$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap F)+m^*(T\setminus F)=m^*(T\cap F)+m^*(T\cap F^c).$$

这说明 F 是可测集.

□

推论 2.7

Borel 集是可测集.

证明 由闭集的可测性及可测集的性质 (2)可知开集是可测集. 又因为可测集类是一个 σ-代数, 所以由Borel 集的定义可知可测集包含 Borel σ-代数, 故任一 Borel 集皆可测. □

定理 2.11

若 $E\in\mathscr{M}$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 我们有

(i) 存在包含 E 的开集 G, 使得 $m(G\setminus E)<\varepsilon$;

(ii) 存在含于 E 的闭集 F, 使得 $m(E\setminus F)<\varepsilon$.

证明

(i) 首先考虑 $m(E)<+\infty$ 的情形. 由定义知, 存在 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\varepsilon.$$

令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, 则 G 是包含 E 的开集, 且 $m(G)<m(E)+\varepsilon$. 因为 $m(E)<+\infty$, 所以移项后再合并得 $m(G\backslash E)<\varepsilon$. 其次讨论 $m(E)$ 是 $+\infty$ 的情形. 令

$$E_k=E\cap B(0,k),\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

因为 $m(E_k)<\infty(k=1,2,\cdots)$, 所以对任给的 $\varepsilon>0$, 存在包含 E_k 的开集 G_k, 使得 $m(G_k\setminus E_k)<\varepsilon/2^k$. 现在作点集 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$, 则 $G\supset E$ 且为开集. 由定理 1.2(3)我们有

$$G\setminus E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\setminus E_k),$$

从而得

$$m(G\setminus E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k\setminus E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$

(ii) 考虑 E^c. 由 (i) 可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在包含 E^c 的开集 G, 使得 $m(G\setminus E^c)<\varepsilon$. 现在令 $F=G^c$, 显然 F 是闭集且 $F\subset E$. 由命题 1.1(4)可知 $E\setminus F=G\setminus E^c$, 所以得到 $m(E\setminus F)<\varepsilon$.

□

定理 2.12

若 $E\in\mathscr{M}$, 则

(i) $E=H\setminus Z_1$,H 是 G_δ 集,$m(Z_1)=0$;

(ii) $E=K\cup Z_2$,K 是 F_σ 集,$m(Z_2)=0$.

证明

(i) 对于每个自然数 k, 由定理 2.11(i)可知, 存在包含 E 的开集 G_k, 使得 $m(G_k\setminus E)<\frac{1}{k}$. 现在作点集 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, 则 H 为 G_δ 集且 $E\subset H$. 因为对一切 k, 都有

$$m(H\setminus E)\leqslant m(G_k\setminus E)<\frac{1}{k},$$

所以令 $k\to\infty$ 可得 $m(H\setminus E)=0$. 若令 $H\setminus E=Z_1$, 则得 $E=H\setminus Z_1$.

(ii) 对于每个自然数 k, 由定理 2.11(ii)可知, 存在含于 E 的闭集 F_k, 使得 $m(E\setminus F_k)<\frac{1}{k}$. 现在作点集 $K=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 K 是 F_σ 集且 $K\subset E$. 因为对一切 k, 都有

$$m(E\setminus K)\leqslant m(E\setminus F_k)<\frac{1}{k},$$

所以令 $k\to\infty$ 可得 $m(E\setminus K)=0$. 若令 $E\setminus K=Z_2$, 则得 $E=K\cup Z_2$.

□

定理 2.13 (外测度的正则性)

若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则存在包含 E 的 G_δ 集 H, 使得 $m(H)=m^*(E)$.

证明 由外测度的定义和下确界的定义可知, 对于每个自然数 k, 存在包含 E 的开集 G_k, 使得

$$m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}.$$

现在作点集 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, 则 H 是 G_δ 集且 $H\supset E$. 因为

$$m^*(E)\leqslant m(H)\leqslant m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k},$$

所以令 $k\to\infty$ 可得 $m(H)=m^*(E)$. □

定义 2.7 (等测包与等测核)

1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 若存在包含 E 的可测集 H, 使得 $m(H)=m^*(E)$. 我们称如此的 H 为 E 的**等测包**.
2. 设 $E\in\mathscr{M}$, 若存在含于 E 的可测集 K, 使得 $m(K)=m(E)$. 我们称如此的 K 为 E 的**等测核**.

♣

笔记 由外测度的正则性可知上述定义的等测包 (一定存在) 是良定义的. 由定理 2.12(ii)可知上述定义的等测核 (一定存在) 是良定义的.

注 注意, 若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E)<\infty$, 则有

$$m(H)-m^*(E)=0,$$

但 $m^*(H\setminus E)$ 不一定等于零. 不过可以证明 $H\setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集 (见命题 2.9).

命题 2.9

若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E)<\infty$, 则 $H\setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集.

♠

证明 设 A 为 $H\setminus E$ 的可测子集, 则由 $A\subset H\setminus E$ 可知,$A\subset H$ 且 $A\cap E=\varnothing$. 又注意到 $E\subset H$, 故 $E\subset H\setminus A$. 又因 H 可测, 故 $H\setminus A$ 也可测. 从而由外测度的单调性可知

$$m(H\setminus A)\geqslant m^*(E). \tag{2.6}$$

由 $H\setminus A$ 可测得 (H 为试验集)

$$\begin{aligned}
m(H)=m^*(H)&=m^*(H\cap(H\setminus A))+m^*(H\cap(H\setminus A)^c)\\
&=m(H\setminus A)+m^*(H\cap(H\cap A^c)^c)\\
&=m(H\setminus A)+m^*(H\cap(H^c\cup A))\\
&=m(H\setminus A)+m(A).
\end{aligned}$$

又由 H 为 E 的等测包可知 $m(H)=m^*(E)$, 结合上式可得

$$m^*(E)=m(H\setminus A)+m(A).$$

再结合(2.6)式, 有

$$m^*(E)\geqslant m^*(E)+m(A).$$

移项得 $m(A)\leqslant 0$. 故由测度的非负性可知 $m(A)=0$. □

推论 2.8

设 $E_k\subset\mathbb{R}^n(k=1,2,\cdots)$, 则

$$m^*\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m^*(E_k).$$

♡

证明 对每个 E_k 均作等测包 H_k:

$$H_k\supset E_k,\quad m(H_k)=m^*(E_k)\quad(k=1,2,\cdots),$$

则可得

$$m^*\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\overset{\text{外测度的单调性}}{\leqslant} m\left(\varliminf_{k\to\infty}H_k\right)\overset{\text{定理 2.9(2)}}{\leqslant}\varliminf_{k\to\infty}m(H_k)=\varliminf_{k\to\infty}m^*(E_k).$$

□

推论 2.9

若 $\{E_k\}$ 是递增集合列, 则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

证明 记 $E = \lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 则由 $\{E_k\}$ 的递增性可知 $E_k \subset E(k=1,2,\cdots)$, 从而由外测度的单调性可得

$$m^*(E_k) \leqslant m^*(E), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

令 $k\to\infty$, 得 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*(E)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty$, 则结论显然成立. 故不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$.

下证 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*(E)$. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 取 E_k 的等测包 H_k, 则 $m(H_k) = m^*(E_k)$. 令 $F_k = \bigcap\limits_{m=k}^{\infty} H_m$, 则显然 F_k 可测,$\{F_k\}$ 递增,$E_k \subset F_k \subset H_k$. 再令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 F 可测,$E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F$. 于是由外测度的单调性及递增可测集列的测度运算可得

$$m^*(E) \leqslant m(F) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty} F_k\right) \overset{\text{递增可测集列的测度运算}}{=} \lim_{k\to\infty} m(F_k). \tag{2.7}$$

又由 $F_k \subset H_k$ 和测度的单调性以及 $m(H_k) = m^*(E_k)$ 可知

$$\lim_{k\to\infty} m(F_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} m(H_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k). \tag{2.8}$$

故结合(2.7)、(2.8)式可得 $m^*(E) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$. 综上可得,$m^*(E) = \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$. □

定理 2.14

若 $E \in \mathscr{M}$,$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则 $(E + \{x_0\}) \in \mathscr{M}$ 且

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

证明 由定理 2.12可知

$$E = H \setminus Z,$$

其中 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 每个 G_k 都是开集,$m(Z) = 0$. 因为 $G_k + \{x_0\}$ 是开集, 所以

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k + \{x_0\})$$

是可测集. 根据外测度的平移不变性, 可知点集 $Z + \{x_0\}$ 是零测集, 于是从等式

$$E + \{x_0\} = (H + \{x_0\}) \setminus (Z + \{x_0\}) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k + \{x_0\}) \setminus (Z + \{x_0\})\right)$$

立即可知 $E + \{x_0\} \in \mathscr{M}$. 再用外测度的平移不变性得到

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

□

注 一般地说, 若在 Borel σ-代数上定义了测度 μ, 且对紧集 K 有 $\mu(K) < +\infty$, 则称 μ 为 **Borel 测度** (显然,$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度是一种 Borel 测度).

可以证明: 若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的平移不变的 Borel 测度, 则存在常数 λ, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中每一个 Borel 集 B, 均有

$$\mu(B) = \lambda m(B).$$

这就是说, 除了一个常数倍因子外,Lebesgue 测度是 $\mathbb{R}^n$ 上平移不变的唯一的 Borel 测度.

例题 2.1 作 $[0,1]$ 中的第二纲零测集 E.

解 令 $\{r_n\}=[0,1]\cap\mathbb{Q}, I_{n,k}=(r_n-2^{-n-k},r_n+2^{-n-k})(n,k\in\mathbb{N})$, 易知

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}\right)\leqslant 2^{-k+1},\quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}\right)=0.$$

由于每个 $[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}(k\in\mathbb{N})$ 均是无处稠密集, 故可知 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}$ 是第二纲集. □

例题 2.2 设 $A\subset\mathbb{R}$, 且对 $x\in A$, 存在无穷多个数组 $(p,q)(p,q\in\mathbb{Z},q\geqslant 1)$, 使得 $|x-p/q|\leqslant 1/q^3$, 则 $m(A)=0$

证明

(i) 令 $B=[0,1]\cap A$, 注意到 $x+n-(p+nq)/q=x-p/q$, 故 $A=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(B+\{n\})$, 从而只需指出 $m(B)=0$.

(ii) 令 $I_{p,q}=\left[\frac{p}{q}-\frac{1}{q^3},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^3}\right]$, 则 $x\in I_{p,q}$ 等价于

$$qx-\frac{1}{q^2}\leqslant p\leqslant qx+\frac{1}{q^2}. \tag{2.9}$$

易知对 $q\geqslant 2$ 或 $q=1$, 在长度为 $2/q^2$ 的区间中至多有一个或三个整数, 故 $x\in B$ 当且仅当 x 属于无穷多个 B_q: $B_q=[0,1]\cap\left(\bigcup_p I_{p,q}\right)$. 从而又只需指出 $\sum_q m(B_q)<+\infty$. 由(2.9)式知, 对整数 q, 使 $I_{p,q}\cap[0,1]\neq\varnothing$ 就是 $-\frac{1}{q^2}\leqslant p\leqslant q+\frac{1}{q^2}$. 在 $q\geqslant 2$ 时, 这相当于 $0\leqslant p\leqslant q$. 因此, 我们有 $m(B_q)\leqslant 2(q+1)/q^3$, 即得所证. □

2.4 正测度集与矩体的关系

定理 2.15

证明

□