## 0.1 伴随

**定义 0.1 (伴随)**

设 $\varphi$ 是内积空间 $V$ 上的线性算子, 若存在 $V$ 上的线性算子 $\varphi^*$, 使等式

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta))$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则称 $\varphi^*$ 是 $\varphi$ 的**伴随算子**, 简称为 $\varphi$ 的**伴随**.

**定理 0.1**

设 $V$ 是 $n$ 维内积空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的线性变换, 则存在 $V$ 上唯一的线性变换 $\varphi^*$, 使对一切 $\alpha, \beta \in V$, 成立

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)).$$

笔记 这个定理表明: **对有限维内积空间 $V$ 上的任一线性算子, 它的伴随必存在且唯一.**

证明 只需证明唯一性. 若 $\varphi^\sharp$ 是 $V$ 上的线性变换且

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^\sharp(\beta))$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则 $(\alpha, \varphi^\sharp(\beta)) = (\alpha, \varphi^*(\beta))$ 对一切 $\alpha \in V$ 成立, 即 $(\alpha, \varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta)) = 0$ 对一切 $\alpha \in V$ 成立, 特别, 对 $\alpha = \varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta)$ 也成立. 由内积定义即知 $\varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta) = 0$, 即 $\varphi^\sharp(\beta) = \varphi^*(\beta)$. 而 $\beta$ 是任意的, 故有 $\varphi^\sharp = \varphi^*$.
□

**定理 0.2**

设 $V$ 是 $n$ 维内积空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $V$ 的一组标准正交基. 若 $V$ 上的线性算子 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为 $A$, 则

(1) 当 $V$ 是酉空间时,$\varphi^*$ 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{A}'$, 即 $A$ 的共轭转置;

(2) 当 $V$ 是欧氏空间时,$\varphi^*$ 的表示矩阵为 $A'$, 即 $A$ 的转置.

证明 由伴随的唯一性知道本节一开始由 $\overline{A}'$ 定义的线性变换 $\psi$ 就是 $\varphi$ 的伴随, 而 $\psi$ 的表示矩阵就是 $\overline{A}'$. □

**定理 0.3 (伴随算子的性质)**

设 $V$ 是有限维内积空间, 若 $\varphi$ 及 $\psi$ 是 $V$ 上的线性变换,$c$ 为常数, 则

(1) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(2) $(c\varphi)^* = \overline{c}\varphi^*$;

(3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

(4) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

证明 由矩阵和线性变换的一一对应关系及矩阵共轭转置的性质即得. □

**命题 0.1**

设 $V$ 是 $n$ 维内积空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的线性算子.

(1) 若 $U$ 是 $\varphi$ 的不变子空间, 则 $U^\perp$ 是 $\varphi^*$ 的不变子空间;

(2) 若 $\varphi$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $\varphi^*$ 的全体特征值为 $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots, \overline{\lambda}_n$.

证明

(1) 任取 $\alpha \in U, \beta \in U^\perp$, 因为

$$(\alpha, \varphi^*(\beta)) = (\varphi(\alpha), \beta) = 0,$$

所以 $U^\perp$ 是 $\varphi^*$ 的不变子空间.

(2) 取 $V$ 的一组标准正交基, 设 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为 $A$, 则无论 $V$ 是酉空间还是欧氏空间,$\varphi^*$ 的表示矩阵总可写为 $\overline{A}'$. 由假设

$$|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

则容易验证

$$|\lambda I_n - \overline{A}'| = (\lambda - \overline{\lambda}_1)(\lambda - \overline{\lambda}_2)\cdots(\lambda - \overline{\lambda}_n),$$

故结论成立.

□