

## 0.1 线性空间

## 定理 0.1 (Lie 映射经典性质)

给定  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 定义  $l_A: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX - XA$ , 我们有

1.  $A$  所有特征值相同等价  $l_A$  幂零.
2.  $l_A$  可对角化等价于  $A$  可对角化.



**笔记** 一个处理本题的经典技巧是考虑  $l_A$  在基  $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn}\}$  下的表示矩阵形如  $A \otimes I - I \otimes A^T$ , 但我们引入的考虑自然同构的技巧可以完美且简洁的替代这个方法.

**笔记** 考虑线性映射  $l: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{n \times n}), A \mapsto l_A$ , 则从证明可以看到

$$\ker l = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A \text{ 是数量矩阵}\}.$$

**证明** 1. 必要性: 若  $A$  所有特征值相同, 则对  $\lambda \neq 0$ ,

$$l_A X = \lambda X \Leftrightarrow AX = X(\lambda E + A)$$

显然  $A, A + \lambda E$  没有公共特征值, 由命题??知我们知道  $l_A X = \lambda X$  只有 0 解. 现在  $l_A$  特征值全为 0 知  $l_A$  是幂零矩阵.

**充分性:** 若  $A$  有两个不同特征值  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , 则  $A$  和  $(\lambda_2 - \lambda_1)E + A$  有公共特征值  $\lambda_2$ . 于是由命题??, 存在  $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n} \setminus \{0\}$  使得

$$AX_0 = X_0((\lambda_2 - \lambda_1)E + A).$$

于是  $l_A X_0 = (\lambda_2 - \lambda_1)X_0$ . 这表明  $l_A$  有非 0 特征值, 这就是一个矛盾! 故  $A$  所有特征值相同.

2. 充分性: 若  $A$  可对角化, 可不妨设  $A$  是对角矩阵, 这是因为设可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP = \tilde{A}$  为对角矩阵, 那么注意到交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n \times n} & \xrightarrow{l_A} & \mathbb{C}^{n \times n} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{C}^{n \times n} & \xrightarrow{l_{\tilde{A}}} & \mathbb{C}^{n \times n}, \end{array}$$

这里  $\tau(X) = P^{-1}XP, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 从而

$$\tau \circ l_A(X) = P^{-1}(AX - XA)P = \tilde{A}P^{-1}XP - P^{-1}XP\tilde{A}.$$

$$l_{\tilde{A}} \circ \tau(X) = \tilde{A}P^{-1}XP - P^{-1}XP\tilde{A}.$$

又因为  $\tau$  可逆, 所以  $l_A = \tau^{-1} \circ l_{\tilde{A}} \circ \tau \sim l_{\tilde{A}}$ . 换言之, 在同构  $\tau$  下,  $l_A, l_{\tilde{A}}$  应该 (在相似下) 有相同的线性代数性质, 所以我们可以不妨设  $A$  为对角矩阵. 不妨设

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$$

于是直接计算表明

$$l_A(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

这就证明了  $l_A$  是可对角化的.

**必要性:** 运用 Jordan 分解, 我们知道  $A = B + C, B$  可对角化,  $C$  幂零,  $BC = CB$ , 则  $l_A = l_B + l_C$ . 由充分性知  $l_B$  可对角化, 由第一问知  $l_C$  幂零. 由  $BC = CB$ , 容易验证  $l_C \circ l_B = l_B \circ l_C$ , 于是我们知道  $l_A = l_B + l_C$  这是  $l_A$  的 Jordan 分解. 现在  $l_A = l_A + 0$  也是一个 Jordan 分解, 故由 Jordan 分解的唯一性知  $l_B = l_A, l_C = 0$ . 现在  $CX = XC, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 由命题??(2), 我们知道  $C$  为数量矩阵, 所以结合  $C$  幂零, 我们知道  $C = O$ , 故  $A = B$  可对角化, 这就完成了证明.

□

## 例题 0.1

1. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{k \times p}$ , 考虑  $T_{A,B} : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto AXB$ , 求

$$\dim \operatorname{Ker} T_{A,B}, \dim \operatorname{Im} T_{A,B}.$$

2. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{k \times p}$ , 求  $T_{A,B} : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto AXB$  在基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1k}, E_{21}, \dots, E_{2k}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nk}\}$$

和基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{m1}, \dots, E_{mp}\}$$

下的表示矩阵.

**证明**

1. 考虑等价标准型

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, RBS = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

于是记

$$\widetilde{T_{A,B}} = T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times k}, X \mapsto Q^{-1}XR^{-1}, \tau' : \mathbb{C}^{m \times p} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto PXS$$

就有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n \times k} & \xrightarrow{T_{A,B}} & \mathbb{C}^{m \times p} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau' \\ \mathbb{C}^{n \times k} & \xrightarrow{\widetilde{T_{A,B}}} & \mathbb{C}^{m \times p} \end{array}.$$

容易验证在同构映射  $\tau, \tau'$  下,  $\widetilde{T_{A,B}}$  和  $T_{A,B}$  等价, 从而  $\widetilde{T_{A,B}}$  和  $T_{A,B}$  (在等价下) 有相同的线性代数性质. 故可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是对  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, X_i \in \mathbb{C}^{r \times s}$ , 我们有

$$T_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_{A,B} = rs,$$

以及

$$T_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{维数公式}} \dim \operatorname{Ker} T_{A,B} = nk - rs.$$

2. 注意到

$$(A \otimes B^T)_{((t-1)p+r, (t'-1)k+r')} = a_{tr} b_{r'r}, 1 \leq t \leq m, 1 \leq t' \leq n, 1 \leq r \leq k, 1 \leq r' \leq \ell$$

现在表示矩阵  $\widetilde{T_{A,B}}$  的  $((t-1)p+r, (t'-1)k+r')$  元为

$$(T_{A,B}(E_{t'r'}))_{(tr)} = (AE_{t'r'}B)_{(tr)} = a_{tr} b_{r'r} = (A \otimes B^T)_{((t-1)p+r, (t'-1)k+r')}$$

因此, 我们知道  $\widetilde{T_{A,B}} = A \otimes B^T$ .

□

**例题 0.2** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 证明:  $\varphi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AXA$  可对角化的充要条件是  $A$  可对角化.



**笔记** 下述证明只考虑了  $J_{n_1}(\lambda_1)$  对应的  $\alpha_i$  和  $J_{n_1}(\lambda_1)$  对应的  $\beta_j^T$  的乘积构成的子空间, 得到特征值  $\lambda_1^2$ . 实际上, 我们可以类似地考虑  $J_{n_i}(\lambda_i)$  对应的  $\alpha_i$  和  $J_{n_j}(\lambda_j)$  对应的  $\beta_j^T$  的乘积构成的子空间, 这样得到特征值就是  $\lambda_i \lambda_j$ . 这些子空间合起来就是  $A$  对角化的过渡矩阵, 并且  $A$  的所有特征值就是  $\lambda_i \lambda_j$ .

**证明** 因为命题??知  $A \sim A^T$ , 所以存在

$$P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

是可逆矩阵并使得  $P^{-1}AP = Q^{-1}A^TQ$  是相似标准型. 由命题??知  $\alpha_i\beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$  必然线性无关.

当  $A$  可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, A^T\beta_j = \lambda_j\beta_j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

我们有

$$\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^TA = \lambda_i\lambda_j\alpha_i\beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$$

这就证明了  $\varphi$  有  $n^2$  个线性无关的特征向量从而可对角化.

反之, 当  $\varphi$  可对角化, 若  $A$  不可对角化, 设  $P, Q$  可逆, 且

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1,$$

$$Q^{-1}A^TQ = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1,$$

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

考虑  $U \triangleq \text{span}\{\alpha_i\beta_j^T : 1 \leq i, j \leq n_1\}$ , 注意到

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}) J_{n_1}(\lambda_1), \quad A^T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_1}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_1}) J_{n_1}(\lambda_1).$$

$$\Rightarrow A\alpha_j = \alpha_{j-1} + \lambda_1\alpha_j, \quad A^T\beta_j = \beta_{j-1} + \lambda_1\beta_j, \quad 2 \leq j \leq n_1.$$

于是

$$\varphi(\alpha_1\beta_1^T) = A\alpha_1\beta_1^TA = \lambda_1^2\alpha_1\beta_1^T$$

$$\varphi(\alpha_1\beta_j^T) = A\alpha_1\beta_j^TA = \lambda_1\alpha_1\beta_{j-1}^T + \lambda_1^2\alpha_1\beta_j^T, 2 \leq j \leq n_1$$

$$\varphi(\alpha_i\beta_1^T) = A\alpha_i\beta_1^TA = \lambda_1\alpha_{i-1}\beta_1^T + \lambda_1^2\alpha_i\beta_1^T, 2 \leq i \leq n_1$$

$$\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^TA = \alpha_{i-1}\beta_{j-1}^T + \lambda_1\alpha_{i-1}\beta_j^T + \lambda_1\alpha_i\beta_{j-1}^T + \lambda_1^2\alpha_i\beta_j^T, 2 \leq i, j \leq n_1$$

即  $U$  是  $\varphi$ -不变子空间. 由引理??知  $\varphi|_U$  可对角化. 在基  $\{\alpha_1\beta_1^T, \alpha_1\beta_2^T, \dots, \alpha_1\beta_{n_1}^T, \alpha_2\beta_1^T, \alpha_2\beta_2^T, \dots, \alpha_2\beta_{n_1}^T, \dots, \alpha_{n_1}\beta_1^T, \alpha_{n_1}\beta_2^T, \dots, \alpha_{n_1}\beta_{n_1}^T\}$  下  $\varphi|_U$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1^2$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和  $\varphi|_U$  可对角化矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.3** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\varphi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX - XB$ . 证明:  $\varphi$  可对角化的充要条件是  $A, B$  可对角化.

**证明** 若  $A, B$  可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, B^T\beta_i = \mu_i\beta_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, i = 1, 2, \dots, n$$

且  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_i\}_{i=1}^n$  是两组线性无关的向量组. 由命题??知  $\alpha_i\beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$  必然线性无关.

现在

$$\varphi(\alpha_i\beta_j^T) = A\alpha_i\beta_j^T - \alpha_i\beta_j^TB = (\lambda_i - \mu_j)\alpha_i\beta_j^T, i, j = 1, 2, \dots, n$$

即我们证明了  $\varphi$  可对角化且特征值为

$$\lambda_i - \mu_j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

若  $A, B$  有一个不可对角化, 不妨设  $A$  不可对角化. 于是可设可逆矩阵  $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1,$$

$$Q^{-1}B^TQ = \text{diag}\{J_{m_1}(\mu_1), J_{m_2}(\mu_2), \dots, J_{m_t}(\mu_t)\}.$$

设

$$L \triangleq \text{span}\{\alpha_i\beta_j^T : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1\}$$

由命题??知  $\alpha_i\beta_j^T : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1$  是  $L$  的基.

现在

$$\varphi(\alpha_1 \beta_1^T) = A \alpha_1 \beta_1^T - \alpha_1 \beta_1^T B = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 \beta_1^T$$

$$\varphi(\alpha_1 \beta_j^T) = A \alpha_1 \beta_j^T - \alpha_1 \beta_j^T B = -\alpha_1 \beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 \beta_j^T, 2 \leq j \leq m_1$$

$$\varphi(\alpha_i \beta_1^T) = A \alpha_i \beta_1^T - \alpha_i \beta_1^T B = \alpha_{i-1} \beta_1^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_i \beta_1^T, 2 \leq i \leq n_1$$

$$\varphi(\alpha_i \beta_j^T) = A \alpha_i \beta_j^T - \alpha_i \beta_j^T B = \alpha_{i-1} \beta_j^T - \alpha_i \beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_i \beta_j^T, 2 \leq i \leq n_1, 2 \leq j \leq m_1$$

现在  $L$  是  $\varphi$ -不变子空间且在基

$$\{\alpha_1 \beta_1^T, \alpha_1 \beta_2^T, \dots, \alpha_1 \beta_{m_1}^T, \alpha_2 \beta_1^T, \alpha_2 \beta_2^T, \dots, \alpha_2 \beta_{m_1}^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_1^T, \alpha_{n_1} \beta_2^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_{m_1}^T\}$$

下  $\varphi|_L$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1 - \mu_1$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即  $\varphi|_L$  不可对角化. 由引理??可知  $\varphi|_L$  不可对角化, 矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.4** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\varphi: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX$ . 证明:  $\varphi$  可对角化的充要条件是  $A$  可对角化.

**证明** 充分性: 设可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 考虑  $\psi: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto PX$ , 则

$$\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(X) = P^{-1} A P X, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

故不妨设  $A$  为相似标准型. 因此若

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$$

则  $\varphi(E_{ij}) = \lambda_i E_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ . 在基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn}\}$$

下的矩阵为对角矩阵.

**必要性:** 设可逆矩阵  $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$P^{-1} A P = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1$$

设

$$L \triangleq \text{span}\{\alpha_i \alpha_j^T : 1 \leq i, j \leq n_1\}$$

我们有

$$A \alpha_1 \alpha_j^T = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_j^T, 1 \leq j \leq n_1$$

$$A \alpha_i \alpha_j^T = \alpha_{i-1} \alpha_j^T + \lambda_i \alpha_i \alpha_j^T, 2 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_1$$

即  $L$  是  $\varphi$  不变子空间. 由引理??知  $\varphi|_L$  可对角化. 由命题??知  $\alpha_i \alpha_j^T, 1 \leq i, j \leq n_1$  必然线性无关.

在基  $\{\alpha_1 \alpha_1^T, \alpha_1 \alpha_2^T, \dots, \alpha_1 \alpha_{n_1}^T, \alpha_2 \alpha_1^T, \alpha_2 \alpha_2^T, \dots, \alpha_2 \alpha_{n_1}^T, \dots, \alpha_{n_1} \alpha_1^T, \alpha_{n_1} \alpha_2^T, \dots, \alpha_{n_1} \alpha_{n_1}^T\}$  下  $\varphi|_L$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和  $\varphi|_L$  可对角化矛盾! 我们完成了证明.  $\square$