0.0.1 齐次微分不等式问题

命题 0.1

设 $f \in D^s(0,+\infty) \cap C[0,+\infty), s \in \mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, s-1.$$

若还存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, C > 0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right| \leq C\left|f(x)\right|^{\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{\lambda_s}, \forall x \geq 0. \tag{1}$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

笔记 我们把下述证明中左右两边各项次数均相同的不等式:$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n} \leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 称为**齐次不等式**.(虽然也可以直接利用幂平均不等式得到, 但这里我们旨在介绍如何利用**齐次化方法**证明**一般的齐次不等式**.)

证明 令 $g(x) = e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right], M > 0$, 显然 $g(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件 (1) 式可得, 对 $\forall x \geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right] \\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right] \\
&\overset{(1)\text{式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right].
\end{aligned} \tag{2}$$

我们先证明 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n} \leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$.

令 $S \triangleq \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = 1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K > 0$, 使得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n} \leqslant K, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S. \tag{3}$$

对 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$, 固定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} > 0$, 考虑 $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2 = 1$, 因此 $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n) \in S$. 从而由(3)式可知

$$(Lx_1)^{2\lambda_1}(Lx_2)^{2\lambda_2}\cdots(Lx_n)^{2\lambda_n} \leqslant K.$$

于是

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n} \leqslant \frac{K}{L^{2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_n}} = \frac{K}{L^2} = K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意性可得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n} \leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0. \tag{4}$$

因此由(2) (4) 式可得, 对 $\forall x \geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x) &\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right] \\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+KC^2\left(f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right] \\
&= e^{-Mx}\left[\left(KC^2+1-M\right)f^2+\left(KC^2+2-M\right)\left(f'\right)^2+\cdots+\left(KC^2+2-M\right)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M > KC^2+2$, 利用上式就有 $g'(x) \leqslant 0, \forall x \geq 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x) \leqslant g(0) = 0$. 又因为 $g(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0$, 所以 $g(x) = 0, \forall x \geqslant 0$. 故 $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(s-1)}(x) = 0, \forall x \geqslant 0$. □

命题 0.2

设 $f\in D^{s}(0,+\infty)\cap C[0,+\infty)$,$s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,s-1.$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geq 0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leq\lambda_1\left|f(x)\right|+\lambda_2\left|f'(x)\right|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}(x)\right|,\forall x\geq 0. \tag{5}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geq 0$.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right],M>0$, 显然 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件(5) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{(5)\text{式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2\left|f'\right|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right].
\end{aligned}\tag{6}$$

我们先证明 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$.

令 $S\triangleq\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K>0$, 使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant K,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S. \tag{7}$$

对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$, 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}>0$, 考虑 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2=1$, 因此 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)\in S$. 从而由 (7) 式可知

$$(\lambda_1Lx_1+\lambda_2Lx_2+\cdots+\lambda_sLx_s)^2\leqslant K.$$

于是

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant\frac{K}{L^2}=K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意性可得

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. \tag{8}$$

因此由 (6) (8)式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2\left|f'\right|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+K\left(f^2+\left(f'\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right]\\
&=e^{-Mx}\left[(K+1-M)f^2+(K+2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(K+2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M>K+2$, 利用上式就有 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x)\leqslant g(0)=0$. 又因为 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$, 所以 $g(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(s-1)}(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □