0.1 其他

例题 0.1 (1) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 试求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

(2) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

解 (1) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

依次将第 i 行乘以 -1 加到第 $i-1$ 行上去 $(i=2,\cdots,n)$, 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}n$. 此即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\,n.$$

(2) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

从最后一列起每一列减去前一列, 再将得到的行列式的最后一行加到前面的每一行上去, 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. 此即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n+2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\,(n-1)\,2^{n-2}.$$

□

例题 0.2 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的" 爪" 型行列式.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x-x^2 & x^2-2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x-x^2 & 0 & \cdots & x^2-2a_nx \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{\text{"爪"型行列式}} (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(2a_1x-x^2\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)
$$

$$
=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(x^2-2a_1x\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)
$$

$$
=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)
$$

$$
=\left[\left(x^2-2a_1x\right)+a_1^2\right]\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)
$$

$$
=\prod_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right).
$$

□

例题 0.3 求下列行列式式的值:

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}.
$$

解 *解法一:*

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-j_1+j_i}\begin{vmatrix}(a+b)^2-c^2 & c^2 & 0\\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2\end{vmatrix}
$$

$$
=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-r_i+r_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ -2b & 2bc & -2c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2} & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b\end{vmatrix}
$$

$$
=2abc(a+b+c)^3.
$$

解法二 (求根法): □

例题 0.4 证明: 若一个 $n(n>1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数. □

例题 0.5 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

解

$$
|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|
$$

$$
=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\sum_{2\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{matrix}\\ |\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_1+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_2+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|\end{array}
$$

$$
+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\sum_{2\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{matrix}\\ |\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_1+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_2+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|\end{array}.
$$

$$
=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|=c+(-1)^{n-1}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|
$$

$$= c + (-1)^{n-1}\, c = \begin{cases} 0\ , n\text{为偶数} \\ 2c, n\text{为奇数} \end{cases}$$

□

例题 0.6 令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)}{(a_2 a_3 \cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n \leqslant k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n = k$ 时, 将行列式 $(a_1 a_2, \cdots, a_k)$ 按第一列展开得

$$(a_1 a_2 \cdots a_k) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (a_2 a_3 \cdots a_k) + (a_3 a_4 \cdots a_k)\,.$$

从而

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3 a_4 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

例题 0.7 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij} = \max\{i,j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-r_i + r_{i-1}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, n.$$

□

例题 0.8 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij} = |i-j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&1&1\\2&-1&-1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix}n-1&0&0&\cdots&0&0\\n&-2&0&\cdots&0&0\\n+1&-2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)^{n-2}(n-1).$$

□

例题 0.9 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时,但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整.此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律,再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式,而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式. 后续求解很繁琐, 因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&x_1-a&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2-a&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n-a&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\\1&y-a&y(y-a)&y^2(y-a)&\cdots&y^{n-1}(y-a)\end{vmatrix}$, 则

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&x_2^3&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&x_n^3&\cdots&x_n^n\\1&y&y^2&y^3&\cdots&y^n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由上式可知,$|\boldsymbol{B}|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开得到

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}B_{n+1,i}y^{i-1},\text{其中}B_{ni}\text{是}|\boldsymbol{B}|\text{的第}(n+1,i)\text{元的余子式},i=1,2,\cdots,n+1.$$

从而

$$|\boldsymbol{B}|=(-1)^{n+2}B_{n+1,1}+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i+1}B_{n+1,i}y^{i-2}(y-a)=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{1}$$

又易知 $B_{n+1,2}=|\boldsymbol{A}|$, 而当 $a=0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(1)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_1)\cdots(-x_{i-1})(-x_{i+1})\cdots(-x_n)\right).$$

于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right) = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right)$.

当 $a\neq 0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(1)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k). \tag{2}$$

又因为

$$\begin{aligned}
B_{n+1,1} &= \begin{vmatrix} x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).
\end{aligned}$$

所以再结合等式(2)可得

$$\begin{aligned}
-a(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}| = -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k) - (-1)^{n+2}B_{n+1,1} \\
&= (-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) + (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \\
&= (-1)^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left[\prod_{k=1}^{n}x_k - \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right].
\end{aligned}$$

故此时 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k - \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)$. □

例题 0.10 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}$, 则 $I = \dfrac{G(n)}{n}$ 且 $G(0) = 0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$G'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = n!x\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\prod_{k=0}^{n}(x-k).$$

因此

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{G(n)}{n} = \frac{\int_0^n G'(x)\mathrm{d}x}{n} = (n-1)! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n \prod_{k=0}^{n}(x-k)\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{区间再现}}{=} (n-1)! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n \prod_{k=0}^{n}(n-k-x)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n+1}(n-1)! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n \prod_{k=0}^{n}(x-k)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n+1} I.
\end{aligned}
$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1}=-1$. 于是 $I=-I$. 故 $I=0$. □

例题 0.11 解方程

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.
$$

解 由行列式的性质

$$
\text{方程左边} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}.
$$

这是一 Vandermonde(范德蒙德) 行列式, 它为关于 x 的次数 $\leqslant 3$ 的多项式. 所以上述方程最多有 3 个不同的根. 由行列式性质直接观察可知 $x=1,3,4$ 是方程的根. 故方程的根为 $x_1=1, x_2=3, x_3=4$. □

例题 0.12 计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} \sin(\alpha_1-\beta_1) & \sin(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_1-\beta_n) \\ \sin(\alpha_2-\beta_1) & \sin(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\alpha_n-\beta_1) & \sin(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.
$$

解 $D_1=\sin(\alpha_1-\beta_1)$. 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$
D_n = \left| \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n \end{pmatrix} \right|.
$$

所以当 $n=2$ 时,

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 \end{vmatrix} \\
&= (\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2)(-\sin\beta_2\cos\beta_1 + \cos\beta_2\sin\beta_1) \\
&= \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2).
\end{aligned}
$$

当 $n \geqslant 3$ 时,

$$D_n = \left|\begin{pmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

□

例题 0.13 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} + \frac{x}{a_1^2} & a_2^{n-1} + \frac{x}{a_2^2} & \cdots & a_n^{n-1} + \frac{x}{a_n^2} \end{vmatrix}$, $n \geqslant 2$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \frac{x}{a_1^2} & \frac{x}{a_2^2} & \cdots & \frac{x}{a_n^2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) + \frac{x}{a_1^2} A_{n1} + \frac{x}{a_2^2} A_{n2} + \cdots + \frac{x}{a_n^2} A_{nn},$$

其中

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j),$$

$$A_{nt} = (-1)^{n+t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{t-1} & a_{t+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{t-1}^{n-2} & a_{t+1}^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+t} \prod_{\substack{1 \leqslant j < i \leqslant n, \\ i \neq t, j \neq t}} (a_i - a_j),$$

$$A_{nn} = (-1)^{n+n} \prod_{\substack{j < i \\ i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}}} (a_i - a_j),$$

所以

$$D=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{n+t}\frac{x}{a_t^2}\prod_{\substack{j<i\\ i,j\in[n]\setminus\{t\}}}(a_i-a_j),$$

其中 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$. $\square$