

0.1 微分不等式问题

0.1.1 一阶/二阶构造类

命题 0.1 (Gronwall 不等式)

设 $\alpha, \beta, \mu \in C[a, b]$ 且 β 非负, 若还有

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds, \forall t \in [a, b]. \quad (1)$$

证明:

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

 **笔记** 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$, 则

$$F'(t) = \beta(t)\mu(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y' = \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)y \Rightarrow y = ce^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t) = \frac{F(t) - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds}{e^{\int_a^t \beta(s)ds}} = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b].$$

证明 令

$$c(t) = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b], \quad (2)$$

这里 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$. 由不等式(1)知

$$F'(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + F(t)\beta(t), \forall t \in [a, b]. \quad (3)$$

于是由(2)和(3)可知

$$c'(t) = [F'(t) - \alpha(t)\beta(t) - \beta(t)F(t)]e^{\int_t^a \beta(s)ds} \leq 0,$$

因此 $c(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 从而

$$c(t) \leq c(a) = 0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds.$$

再用一次不等式(1), 即得

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + F(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

特别的, 当 α 递增, 对 $\forall t \in [a, b]$, 固定 t , 记 $G(s) = \int_s^t \beta(u)du$, 我们有不等式

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds = \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t -G'(s)e^{G(s)}ds \\ &= \alpha(t) - \alpha(t) \int_a^t e^{G(s)}dG(s) = \alpha(t) + \alpha(t) [e^{G(a)} - 1] = \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}. \end{aligned}$$

□

例题 0.1 设

$$E \triangleq \left\{ u \in C[0, 1] : u^2(t) \leqslant 1 + 4 \int_0^t s|u(s)| \, ds, \forall t \in [0, 1] \right\},$$

计算

$$\max_{u \in E} \int_0^1 [u^2(s) - u(s)] \, ds.$$

 **笔记** $g(x)$ 的构造思路: 解微分方程常数变易法. 具体如下

$$F'(x) \leqslant 4x\sqrt{F(x)} \implies \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}} \leqslant 2x,$$

两边同时积分得

$$\sqrt{F(x)} \leqslant x^2 + C \implies C \geqslant \sqrt{F(x)} - x^2.$$

故取 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$.

证明 记 $F(x) = 1 + 4 \int_0^x s|u(s)| \, ds$, 则

$$F'(x) = 4x|u(x)| \implies |u(x)| = \frac{F'(x)}{4x}.$$

由条件可得, 当 $u(x) \in E$ 时, 对 $\forall x \in [0, 1]$, 有

$$u^2(x) \leqslant F(x) \iff |u(x)| \leqslant \sqrt{F(x)} \iff \frac{F'(x)}{4x} \leqslant \sqrt{F(x)} \iff F'(x) \leqslant 4x\sqrt{F(x)}.$$

令 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$, 则

$$g'(x) = \frac{F'(x) - 4x\sqrt{F(x)}}{2\sqrt{F(x)}} \leqslant 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

故对 $\forall x \in [0, 1]$, 有

$$g(x) \leqslant g(0) = 1 \implies \sqrt{F(x)} \leqslant 1 + x^2.$$

因此利用 $|u(x)| \leqslant \sqrt{F(x)}$ 和上式可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u^2(x) - u(x)] \, dx &\leqslant \int_0^1 u(x)[u(x) - 1] \, dx \leqslant \int_0^1 |u(x)|(|u(x)| + 1) \, dx \\ &\leqslant \int_0^1 \sqrt{F(x)}(\sqrt{F(x)} + 1) \, dx \leqslant \int_0^1 (1+x^2)(2+x^2) \, dx = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

当且仅当 $u(x) = -1 - x^2$ 等号成立. 故

$$\max_{u \in E} \int_0^1 [u^2(x) - u(x)] \, dx = \frac{16}{5}.$$

□

例题 0.2 设 f 在 $[0, +\infty)$ 二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geqslant 0, f''(x) \geqslant f(x), \forall x \geqslant 0. \quad (4)$$

证明:

$$f(x) \geqslant f(0) + f'(0)x, \forall x \geqslant 0. \quad (5)$$

 **笔记** 通过 $f'' - f' = f - f'$ 视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑 $f''f' = ff'$, 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

证明 令 $h(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$, 由(4)知

$$h'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x \geqslant 0.$$

故

$$h(x) \geqslant h(0) = f'(0) - f(0) \Rightarrow [f'(x) - f(x)]e^x \geqslant f'(0) - f(0) = h(0).$$

继视为一阶构造类可得

$$c(x) = \frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}, c'(x) = \frac{[f'(x) - f(x)]e^x - h(0)}{e^{3x}} \geq 0.$$

于是

$$\frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x} \geq f(0) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{f'(0) + f(0)}{2}.$$

继续利用(4)即得

$$f(x) \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2}f(0) + \frac{e^x - e^{-x}}{2}f'(0) \geq f(0) + f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq x.$$

可以分别利用均值不等式和求导进行证明.

□

例题 0.3 设 $f \in C^1[0, +\infty) \cap D^2(0, +\infty)$ 且满足

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0, f(0) = 1, f'(0) = 0. \quad (6)$$

证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geq 0. \quad (7)$$

笔记 显然如果把式(6)得不等号改为等号, 则微分方程的解为 $3e^{2x} - 2e^{3x}$. 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(7)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2,3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(6)改写为

$$f''(x) - 2f'(x) \geq 3(f'(x) - 2f(x)).$$

考虑 $g_1(x) = f'(x) - 2f(x)$, 则上式可化为

$$g_1'(x) \geq 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为 $g_2(x) = \frac{g_1(x)}{e^{3x}}$. 于是有

$$g_2'(x) \geq 0 \Rightarrow g_2(x) \geq g_2(0) = -2 \Rightarrow f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + 2e^x, g_3'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}}{e^{2x}} \geq 0,$$

于是

$$g_3(x) \geq g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

我们完成了证明.

□

例题 0.4 设 f 在 \mathbb{R} 上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geq 0. \quad (8)$$

证明 f 在 \mathbb{R} 上有界.

笔记 $f + f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数 $g(x)$, 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑 $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$, 两边同时积分得到 $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$. 由此得到构造函数 $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$.

证明 构造 $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 则由(8)知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty, 0]$ 递增, $[0, +\infty)$ 递减. 现在我们有

$$h(x) \leq h(0) \implies |f(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \leq h(0),$$

即 f 有界.

□

例题 0.5 设 $f \in C^2[0, +\infty), g \in C^1[0, +\infty)$ 且存在 $\lambda > 0$ 使得 $g(x) \geq \lambda, \forall x \geq 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x) + g(x)f(x) = 0, \quad \forall x \geq 0,$$

证明: f 在 $[0, +\infty)$ 有界.

笔记 形式计算分析需要的构造函数: 由条件解微分方程可得

$$\begin{aligned} y'y'' = -gyy' \implies \frac{(y')^2}{2} = - \int gyy' dx = -\frac{1}{2} \int g dy^2 = -\frac{1}{2} gy^2 + \frac{1}{2} \int y^2 dg \implies (y')^2 + gy^2 = \int y^2 dg; \\ y'y'' = -gyy' \implies \frac{y'y''}{g} = -yy' \implies \int \frac{y'y''}{g} dx = - \int yy' dx \implies \int \frac{1}{2g} d(y')^2 = -\frac{1}{2} y^2 \\ \implies \frac{(y')^2}{2g} - \frac{1}{2} \int (y')^2 \left(\frac{1}{g}\right)' dx = -\frac{1}{2} y^2 \implies \frac{(y')^2}{g} + y^2 = \int (y')^2 \left(\frac{1}{g}\right)' dx. \end{aligned}$$

于是考虑构造函数 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X > 0$, 使得 $g'(x) \neq 0, \forall x \geq X$. 从而由导数介值性可知, g' 在 $[X, +\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), x \geq X$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得

$$F'_1(x) = \frac{2f'f''g - g'(f')^2 + 2ff'g^2}{g^2} = \frac{-2f'fg^2 - g'(f')^2 + 2ff'g^2}{g^2} = -\frac{g'(f')^2}{g^2}. \quad (9)$$

(i) 若 $g'(x) > 0, \forall x \geq X$, 则由(9)式可知 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可知, 存在 $C > 0$, 使得

$$f^2(x) \leq F_1(x) \leq C, \quad \forall x \geq X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上有界. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故 f 在 $[0, X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(ii) 若 $g'(x) < 0, \forall x \geq X$, 令 $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得

$$F'_2(x) = 2f'f'' + g'f^2 + 2gff' = -2f'fg + g'f^2 + 2gff' = g'f^2 \leq 0. \quad (10)$$

从而 $F_2(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减, 于是存在 $C' > 0$, 使得

$$g(x)f^2(x) \leq F_2(x) \leq C, \quad \forall x \geq X.$$

进而由 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可得

$$f^2(x) \leq \frac{C}{g(x)} \leq \frac{C}{\lambda}, \quad \forall x \geq X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上有界. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故 f 在 $[0, X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

□

例题 0.6 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 f, f', f'' 都是正值函数. 若存在 $a, b > 0$ 使得

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

求 $f'(x) \leq cf(x)$ 恒成立的最小的 c .

注 若存在 $c < x_1$, 使得 $f'(x) \leq cf(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 则

$$f'(x) \leq cf(x) < x_1f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x) = e^{x_1 x}$ 时, 从而 $f'(x) = cf(x) = x_1f(x)$, 于是 $c = x_1$ 矛盾! 故 $c_{\min} = x_1$.

证明 考虑微分方程 $y'' = ay + by'$, 其特征方程为

$$x^2 - bx - a = 0 \implies x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} < 0.$$

于是

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x) \iff f''(x) - x_1 f'(x) \leq x_2 [f'(x) - x_1 f(x)].$$

令 $g(x) \triangleq f'(x) - x_1 f(x)$, 则 $g'(x) \leq x_2 g(x)$. 再令 $c(x) \triangleq \frac{g(x)}{e^{x_2 x}}$, 则

$$c'(x) = \frac{g'(x) - x_2 g(x)}{e^{x_2 x}} \leq 0 \Rightarrow c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由 $f'', f', f > 0$ 可知 f, f' 递增有下界. 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ 都存在. 从而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$, 否则由命题??知 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 矛盾! 再结合 $x_1, f > 0, x_2 < 0$ 可得

$$c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{e^{x_2 x}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

即

$$f'(x) \leq x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

取 $f(x) = e^{x_1 x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min} = x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$.

□

例题 0.7 设 $f \in C[0, +\infty) \cap D^1(0, +\infty)$ 满足

$$f(0) \geq 0, f'(x) \geq f^3(x), \forall x > 0.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geq 0.$$

笔记 $y' = y^3$ 这个微分方程有三种解法得到三个不同的构造函数, 即分别考虑 $\frac{y'}{y^3} = 1$, $\frac{y'}{y} y^2 = y$, $\frac{y'}{y} = y^2$ 得到

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} = x + C_1 \Rightarrow C = x + \frac{1}{2y^2};$$

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int y dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int y dx \Rightarrow C - \frac{1}{y} = \int y dx \Rightarrow C = \frac{1}{y} + \int y dx;$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int y^2 dx \Rightarrow \ln y = \int y^2 dx \Rightarrow y = C e^{\int y^2 dx} \Rightarrow C = \frac{y}{e^{\int y^2 dx}}.$$

第二个构造函数实际上在本题中没发挥作用.

证明 由条件可知

$$\left[\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y) dy}} \right]' = \frac{f'(x) - f^3(x)}{e^{\int_0^x f^2(y) dy}} \geq 0.$$

从而

$$\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y) dy}} \geq \frac{f(0)}{1} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

于是

$$f'(x) \geq f^3(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

若存在 $a \geq 0$, 使得 $f(a) > 0$, 则由 $f' \geq 0$ 知

$$f(x) \geq f(a) > 0, \forall x > a. \tag{11}$$

注意到对 $\forall x \in (a, A)$, 有

$$\left[x + \frac{1}{f^2(x)} \right]' = \frac{f^3(x) - f'(x)}{f^3(x)} \leq 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{f^2(x)} \right] \leq a + \frac{1}{2f^2(a)} < +\infty. \tag{12}$$

而由 $f' \geq 0$ 可知 f 递增, 再结合(11)式和命题??知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^2(x)} = 0$. 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{f^2(x)} \right] = +\infty$, 这与(12)式矛盾!

□

例题 0.8 设可导函数 $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ 且 $xf'(x) + f(x-1) = 0, \forall x \geq 1$. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

笔记 本题关键是由 $f(x) = \frac{\int_{x-1}^x f(t) dt}{x}$ 看出只需证 f 有界, 然后由

$$f(x) = \frac{\int_{x-1}^x f(t) dt}{x} \leqslant \frac{\max_{y \in [x-1, x]} f(y)}{x} < \frac{\max_{y \in [0, x]} f(y)}{x} \leqslant \max_{y \in [0, x]} f(y), \forall x > 1.$$

发现 f 的最大值就在在某个有限区间内取到.

证明 注意到

$$\left(xf(x) - \int_{x-1}^x f(t) dt \right)' = xf'(x) + f(x-1) = 0, \forall x \geq 1.$$

故

$$xf(x) - \int_{x-1}^x f(t) dt = 1 \cdot f(1) - \int_0^1 f(t) dt = 0, \forall x \geq 1. \quad (13)$$

下面不妨设 f 不恒为 0, 否则结论是平凡的. 对 $\forall x \geq 1$, 都有

$$|f(x)| \leq \max_{y \in [0, x]} |f(y)|. \quad (14)$$

设 $x^* \geq 1$, 满足

$$|f(x^*)| = \max_{y \in [0, x^*]} |f(y)|.$$

由(13)式可得

$$\max_{y \in [0, x^*]} |f(y)| = |f(x^*)| = \frac{\int_{x^*-1}^{x^*} f(t) dt}{x^*} \leqslant \frac{\max_{y \in [0, x^*]} |f(y)|}{x^*} \leqslant \max_{y \in [0, x^*]} |f(y)|,$$

故 $\frac{\max_{y \in [0, x^*]} |f(y)|}{x^*} = \max_{y \in [0, x^*]} |f(y)| = \frac{\int_{x^*-1}^{x^*} f(t) dt}{x^*}$, 进而要么 $x^* = 1$, 要么 $\max_{y \in [0, x^*]} |f(y)| = 0$. 显然若 $\max_{y \in [0, x^*]} |f(y)| = 0$, 则 $f(x) = 0, \forall x \in [0, x^*]$. 即(14)式等号成立的充要条件就是 $x^* = 1$ 或 $f(x) = 0, \forall x \in [0, x^*]$. 又 f 不恒为 0, 故存在 $X > 1$, 使得对 $\forall x \geq X$, 都有

$$|f(x)| < \max_{y \in [0, x]} |f(y)|. \quad (15)$$

我们断言

$$|f(x)| \leq \max_{y \in [0, X]} |f(y)|, \forall x > 1. \quad (16)$$

否则, 存在 $x_0 > 1$, 使得

$$|f(x_0)| > \max_{y \in [0, X]} |f(y)|.$$

记

$$x_1 \triangleq \inf \left\{ x \in [X, x_0] \mid |f(x)| > \max_{y \in [0, X]} |f(y)| \right\},$$

则由 f 的连续性和(15)式知

$$\max_{y \in [0, X]} |f(y)| \leq |f(x_1)| < \max_{y \in [0, x_1]} |f(y)|.$$

于是再由 f 的连续性知, 存在 $x_2 \in (X, x_1)$, 使得

$$\max_{y \in [0, X]} |f(y)| \leq |f(x_1)| < \max_{y \in [0, x_1]} |f(y)| = |f(x_2)|.$$

这与 x_1 的下确界定义矛盾! 故(16)式成立, 即 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 因此再由(13)式可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x-1}^x f(t) dt}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x)|}{x} = 0.$$

□

0.1.2 双绝对值微分不等式问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

例题 0.9 对某个 $D > 0$,

1. 设 $f \in D(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, 使得

$$|f'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

证明 $f \equiv 0$.

2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(0) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$, 使得

$$|xf'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

 **笔记** 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y' = Dy, y' = -Dy$ 得构造函数

$$C_1(x) = \frac{y(x)}{e^{Dx}}, C_2(x) = y(x)e^{Dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x) = \frac{f^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2(x) = f^2(x)e^{2Dx}$, 我们有

$$C'_1(x) = \frac{2f(x)f'(x) - 2Df^2(x)}{e^{2Dx}}, C'_2(x) = [2f(x)f'(x) + 2Df^2(x)]e^{2Dx}.$$

由条件(17), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x) \leq |f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

于是 C_1 递减, C_2 递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}} \leq \frac{f^2(0)}{e^{20}} = 0, \forall x \geq 0, f^2(x)e^{2Dx} \leq f^2(0)e^{20} = 0, \forall x \leq 0,$$

于是就得到了 $f \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. 构造 $C(x) = \frac{f^2(x)}{x^{2D}}, x > 0$ (因为只需证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$, 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x) = \frac{2f(x)f'(x)x - 2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(18), 我们有

$$xf'(x)f(x) \leq x|f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x) = o(x^m), \forall m \in \mathbb{N} \cap (2D, +\infty)$, 于是

$$C(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{x^{2D}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^m)}{x^{2D}} = 0,$$

故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

例题 0.10 设 $f \in D^2[0, +\infty)$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 以及

$$|f''(x)|^2 \leq |f(x)f'(x)|, \forall x \geq 0.$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.



笔记 本题的加强版本见**命题 0.2**.

证明 令 $M = 3$, 考虑

$$g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2], x \geq 0.$$

利用 $1 + t^2 \geq \sqrt{t}, \forall t \geq 0$, 我们有

$$1 + \frac{|f|^2}{|f'|^2} \geq \sqrt{\frac{|f|}{|f'|}} \Rightarrow |f'|^2 + |f|^2 \geq |f|^{\frac{1}{2}} |f'|^{\frac{M}{2}} = |f'| \sqrt{|ff'|}. \quad (19)$$

于是

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'| \sqrt{|ff'|} - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{(19)}{\leq} e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [|f|^2 + |f'|^2 + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] = 0. \end{aligned}$$

于是 g 递减, 从而 $0 \leq g(x) \leq g(0) = 0$, 故 $f(x) \equiv 0$.

□

例题 0.11 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$



笔记 本题的加强版本见**命题 0.3**.

证明 令 $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2]$, 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2f' (|f| + |f'|) - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2(f')^2 + f^2 + (f')^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &= e^{-Mx} [(2-M)f^2 + (4-M)(f')^2]. \end{aligned}$$

取充分大的 M , 就有 $g'(x) \leq 0$. 于是 $g(x) \leq g(0) = 0, \forall x \geq 0$. 又注意到 $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2] \geq 0$, 因此 $g(x) \equiv 0, \forall x \geq 0$. 故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

例题 0.12 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geq 0.$$

注 与**例题 0.10**不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用**例题 0.10**的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含 M 的项的次数大于系数含 M 的项, 从而无法直接通过控制 M 的取值, 使得 $g'(x) \leq 0$. 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与**例题 0.9**类比, 采用同样的方法. 因为只需证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$, 所以将原不等式视为(等式)函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是 $f'' = ff'$. 我们将其中的 f 看作已知函数, 考虑的微分方程转化为 $y'' = fy'$, 则

$$y'' = fy' \Rightarrow \frac{y''}{y'} = f \Rightarrow \ln y' = \int_0^x f(t) dt + C \Rightarrow y' = Ce^{\int_0^x f(t) dt}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|dt}}$.

证明 令 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|dt}}$, 则

$$C'(x) = \frac{2f'(x)f''(x) - 2|f(x)||f'(x)|^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|dt}}.$$

又因为

$$f'f'' \leq |f'f''| \leq |f|(f')^2.$$

所以 $C'(x) \leq 0$, 故 $C(x) \leq C(0) = 0$. 又注意到 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|dt}} \geq 0$, 故 $C(x) \equiv 0$. 于是 $f'(x) = 0, \forall x \geq 0$. 进而 f 就是常值函数, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

命题 0.2

设 $f \in D^s(0, +\infty) \cap C[0, +\infty), s \in \mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

若还存在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, C > 0$, 满足

$$\left| f^{(s)}(x) \right| \leq C |f(x)|^{\lambda_1} |f'(x)|^{\lambda_2} \cdots \left| f^{(s-1)}(x) \right|^{\lambda_s}, \forall x \geq 0. \quad (20)$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

笔记 我们把下述证明中左右两边各项次数均相同的不等式: $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ 称为齐次不等式.(虽然也可以直接利用幂平均不等式得到, 但这里我们旨在介绍如何利用齐次化方法证明一般的齐次不等式.)

证明 令 $g(x) = e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2]$, $M > 0$, 显然 $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. 则利用均值不等式和条件 (20) 式可得, 对 $\forall x \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} \left[2ff' + 2f'f'' + 2f''f''' + \cdots + 2f^{(s-1)}f^{(s)} - Mf^2 - M(f')^2 - \cdots - M(f^{(s-1)})^2 \right] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} \left[f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2 + \left| f^{(s)} \right|^2 - Mf^2 - M(f')^2 - \cdots - M(f^{(s-1)})^2 \right] \\ &\stackrel{(20) \text{ 式}}{\leq} e^{-Mx} \left[(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + C^2 |f(x)|^{2\lambda_1} |f'(x)|^{2\lambda_2} \cdots \left| f^{(s-1)}(x) \right|^{2\lambda_s} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

我们先证明 $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

令 $S \triangleq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$, 则 S 是 \mathbb{R}^n 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n}$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K > 0$, 使得

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S. \quad (22)$$

对 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, 固定 x_1, x_2, \dots, x_n . 不妨设 x_1, x_2, \dots, x_n 不全为零, 否则结论显然成立. 取

$$L = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} > 0,$$

考虑 $(Lx_1, Lx_2, \dots, Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2 + (Lx_2)^2 + \cdots + (Lx_n)^2 = 1$, 因此 $(Lx_1, Lx_2, \dots, Lx_n) \in S$. 从而由(22)式可知

$$(Lx_1)^{2\lambda_1} (Lx_2)^{2\lambda_2} \cdots (Lx_n)^{2\lambda_n} \leq K.$$

于是

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq \frac{K}{L^{2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_n}} = \frac{K}{L^2} = K (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

故由 x_1, x_2, \dots, x_n 的任意性可得

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \quad (23)$$

因此由(21)(23)式可得, 对 $\forall x \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &\leq e^{-Mx} \left[(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + C^2 |f(x)|^{2\lambda_1} |f'(x)|^{2\lambda_2} \cdots |f^{(s-1)}(x)|^{2\lambda_s} \right] \\ &\leq e^{-Mx} \left[(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + KC^2 (f^2 + (f')^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2) \right] \\ &= e^{-Mx} \left[(KC^2 + 1 - M)f^2 + (KC^2 + 2 - M)(f')^2 + \cdots + (KC^2 + 2 - M)(f^{(s-1)})^2 \right]. \end{aligned}$$

于是任取 $M > KC^2 + 2$, 利用上式就有 $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x) \leq g(0) = 0$. 又因为 $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$, 所以 $g(x) = 0, \forall x \geq 0$. 故 $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(s-1)}(x) = 0, \forall x \geq 0$. \square

例题 0.13 设 $f \in C^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 若对某个 $M > 0$ 和 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2} \geq 0, \lambda_{n-1} \geq 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \prod_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明 $f(x) \equiv 0$.

 **笔记** 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$\begin{aligned} f^{(n)} = f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = \int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}. \\ f^{(n)} = -f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = -g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = -\int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{-\int_{x_0}^x g(y) dy}. \end{aligned}$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x) \triangleq \frac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}}, c_2(x) \triangleq f^{(n-1)}(x) e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x) \triangleq c_1^2(x) = \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}}, C_2(x) \triangleq c_2^2(x) = [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)| \cdot g(x),$$

其中 $g(x) = M \prod_{k=1}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k}$. 从而 $f^{(n)}(x) f^{(n-1)}(x) \leq |f^{(n)}(x) f^{(n-1)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)|^2 \cdot g(x)$.

(24)

令 $C_1(x) \triangleq \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}}$, 则由 (24) 式可知

$$C'_1(x) = \frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) - 2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}} \leq 0.$$

故 $C_1(x) \leq C_1(x_0) = 0, \forall x \geq x_0$. 因此 $C_1(x) = 0, \forall x \geq x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \geq x_0$. 令 $C_2(x) \triangleq [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}$, 则由 (24) 式可知

$$C'_2(x) = [2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) + 2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2] e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy} \geq 0.$$

故 $C_2(x) \leq C_2(x_0) = 0, \forall x \leq x_0$. 因此 $C_2(x) = 0, \forall x \leq x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \leq x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 从而 $f^{(n-2)}(x) = K, K \in \mathbb{R}$, 又 $f^{(n-2)}(x_0) = 0$, 故 $f^{(n-2)}(x) \equiv 0$. 又 $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$, 依此类推可得 $f(x) \equiv 0$. \square

命题 0.3

设 $f \in D^s(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$, $s \in \mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

若还存在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \geq 0$, 满足

$$|f^{(s)}(x)| \leq \lambda_1 |f(x)| + \lambda_2 |f'(x)| + \dots + \lambda_s |f^{(s-1)}(x)|, \forall x \geq 0. \quad (25)$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

证明 令 $g(x) = e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \dots + (f^{(s-1)})^2]$, $M > 0$, 显然 $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. 则利用均值不等式和条件(25)式可得, 对 $\forall x \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' + 2f''f''' + \dots + 2f^{(s-1)}f^{(s)} - Mf^2 - M(f')^2 - \dots - M(f^{(s-1)})^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \dots + (f^{(s-1)})^2 + |f^{(s)}|^2 - Mf^2 - M(f')^2 - \dots - M(f^{(s-1)})^2] \\ &\stackrel{(25)\text{式}}{\leq} e^{-Mx} [(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \dots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + (\lambda_1 |f| + \lambda_2 |f'| + \dots + \lambda_s |f^{(s-1)}|)^2]. \end{aligned} \quad (26)$$

我们先证明 $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s)^2 \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

令 $S \triangleq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, 则 S 是 \mathbb{R}^n 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s)^2$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K > 0$, 使得

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq K, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S. \quad (27)$$

对 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, 固定 x_1, x_2, \dots, x_n . 不妨设 x_1, x_2, \dots, x_n 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} > 0$, 考虑 $(Lx_1, Lx_2, \dots, Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2 + (Lx_2)^2 + \dots + (Lx_n)^2 = 1$, 因此 $(Lx_1, Lx_2, \dots, Lx_n) \in S$. 从而由(27)式可知

$$(\lambda_1 Lx_1 + \lambda_2 Lx_2 + \dots + \lambda_s Lx_s)^2 \leq K.$$

于是

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s)^2 \leq \frac{K}{L^2} = K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

故由 x_1, x_2, \dots, x_n 的任意性可得

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s)^2 \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \quad (28)$$

因此由(26)(28)式可得, 对 $\forall x \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &\leq e^{-Mx} [(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \dots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + (\lambda_1 |f| + \lambda_2 |f'| + \dots + \lambda_s |f^{(s-1)}|)^2] \\ &\leq e^{-Mx} [(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \dots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + K(f^2 + (f')^2 + \dots + (f^{(s-1)})^2)] \\ &= e^{-Mx} [(K+1-M)f^2 + (K+2-M)(f')^2 + \dots + (K+2-M)(f^{(s-1)})^2]. \end{aligned}$$

于是任取 $M > K+2$, 利用上式就有 $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x) \leq g(0) = 0$. 又因为 $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$, 所以 $g(x) = 0, \forall x \geq 0$. 故 $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(s-1)}(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

0.1.3 极值原理

例题 0.14 设 $f \in C^2[0, 1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 若还有

$$f''(x) - g(x)f'(x) = f(x). \quad (29)$$

证明: $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

证明 如果 f 在 $(0, 1)$ 取得在 $[0, 1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c) > 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$, 代入(29)式知 $f''(c) = f(c) > 0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0, 1)$ 取得在 $[0, 1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c) < 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$, 代入(29)式知 $f''(c) = f(c) < 0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上, f 在 $(0, 1)$ 上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即

$$0 \leq f(x) \leq 0.$$

故 $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

□

例题 0.15 令 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续的, 满足 $f(0) = f(1) = 0$. 假设 f'' 在 $(0, 1)$ 内存在, 且具有 $f'' + 2f' + f \geq 0$. 证明对所有 $0 \leq x \leq 1$, 有 $f(x) \leq 0$ 成立.

证明 反证, 假设 f 存在正的最大值, 记

$$f(x_0) = \max_{x \in [0, 1]} f(x),$$

由 $f(0) = f(1) = 0$ 知 $x_0 \in (0, 1)$. 再记

$$x_1 = \inf\{x \in (x_0, 1] : f(x) = 0\}.$$

由 $f \in C[0, 1]$ 知 $f(x_1) = 0$. 并且

$$f(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_1).$$

否则, 存在 $x_2 \in (x_0, x_1)$, 使得 $f(x_2) = 0$, 这与 x_1 的下确界定义矛盾! 于是

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x)}{x - x_1} \leq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_1).$$

令 $x \rightarrow x_1^-$ 得

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0. \tag{30}$$

注意到

$$f''(x) + f'(x) \geq -(f'(x) + f(x)),$$

令 $g(x) = f'(x) + f(x)$, 则

$$g'(x) + g(x) \geq 0.$$

再令 $C(x) = e^x g(x)$, 则

$$C'(x) = e^x [g'(x) + g(x)] \geq 0.$$

从而 $C(x)$ 递增. 由(30)式知 $f'(x_1) \leq 0$, 故

$$0 < e^{x_0} f(x_0) = C(x_0) \leq C(x_1) = e^{x_1} [f'(x_1) + f(x_1)] = e^{x_1} f'(x_1) \leq 0$$

显然矛盾!

□

例题 0.16 设 $\alpha > 0$, f 在 $[0, 1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0) = 0$, 且在 $[0, 1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha + 1)f'(\xi) > \alpha f(\xi)$$

 **笔记** 要证明的结论是二阶微分不等式无法直接解微分方程构造函数解决, 因此考虑局部微分构造. 然后通过性态分析来处理.

前面微分不等式的转化可以通过局部解微分方程得到局部构造, 然后进行转化. 这里的构造和转化方式不唯一, 可以随便凑.

证明的关键在于发现矛盾点在 f 的第一个递增区间处.

证明 反证, 假设

$$xf''(x) + (\alpha + 1)f'(x) \leq \alpha f(x), \quad \forall x \in (0, 1)$$

从而对 $\forall x \in (0, 1)$, 有

$$x^{\alpha+1}f''(x) + (\alpha + 1)x^\alpha f'(x) \leq \alpha x^\alpha f(x) \iff [x^{\alpha+1}f'(x)]' \leq \alpha x^\alpha f(x)$$

两边同时积分得, 对 $\forall x \in (0, 1)$, 都有

$$\int_0^x [t^{\alpha+1}f'(t)]' dt \leq \alpha \int_0^x t^\alpha f(t) dt \iff x^{\alpha+1}f'(x) \leq \alpha \int_0^x t^\alpha f(t) dt. \quad (31)$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上非负且不恒为 0, 又 $f(0) = 0$, 故存在 $c \in (0, 1]$, 使得

$$f(c) = \max_{x \in [0, 1]} f(x) > 0,$$

令

$$A = \{x \in (0, 1] : f'(x) = 0 \text{ 且 } f(x) > 0\} \cup \{c\}, \quad x_1 = \inf A.$$

由 f 的连续性可知 $f(x_1) > 0$. 我们断言 f 在 $[0, x_1]$ 上递增. 否则, 假设存在 $0 \leq a < b \leq x_1$, 使得

$$f(a) > f(b) \geq 0$$

从而 $a > 0$. 否则, 利用上式和 f 非负可得

$$0 \leq f(b) < f(0) = 0$$

显然矛盾! 由 $f \in C[a, b]$ 知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \geq f(a) > f(b) > 0$$

于是 $f'(\xi) = 0$ 且 $\xi < b$. 从而 $\xi \in A$, 这与 x_1 的下确界定义矛盾! 故 f 在 $[0, x_1]$ 上递增. 再结合(31)式可得, 对 $\forall x \in [0, x_1]$, 有

$$x^{\alpha+1}f'(x) \leq \alpha \int_0^x t^\alpha f(t) dt \leq \alpha \int_0^x x^\alpha f(x) dt = \alpha x^{\alpha+1}f(x) \iff f'(x) - \alpha f(x) \leq 0$$

再令 $g(x) = e^{-\alpha x}f(x)$, 则

$$g'(x) = e^{-\alpha x} [f'(x) - \alpha f(x)] \leq 0, \quad \forall x \in [0, x_1]$$

故 g 在 $[0, x_1]$ 上递减. 从而

$$e^{-x_1}f(x_1) = g(x_1) \leq g(0) = 0 \implies f(x_1) \leq 0$$

这与 $f(x_1) > 0$ 矛盾!

□