0.1 复数的几何表示

定义 0.1

一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x, y) 惟一地确定,(x, y) 就称为复数 z 的实数对形式. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$.z 的极坐标设为 (r, θ), 那么 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数, 故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 $\mathbb{C}$ 表示.

在复平面上, 从原点到点 $z = x + \mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 这种对应关系使复数的加 (减) 法与向量的加 (减) 法之间保持一致.

♣

注 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 $z_2 - z_1$, 因而 $|z_2 - z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 $z_1 + z_2$; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 $z_1 - z_2$(图 1). 现在再来看命题**??**(ii) 的不等式 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

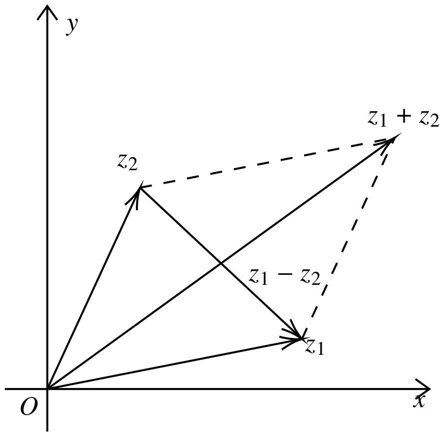

图 1

定义 0.2 (辐角)

设 $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $z = x + \mathrm{i}y$ 也可写成极坐标形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \text{其中} r = |z|, \theta = \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

称 θ 为复数 z 的**辐角**, 记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$. 显然

$$\mathrm{Arg}z = \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

因此 z 的辐角有无穷多个. 但只有一个辐角在 $(-\pi, \pi]$ 中, 称这个辐角为 z 的**辐角主值**, 记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

注意 0 的辐角没有意义.

♣

命题 0.1

设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}/\{0\}$, 注意到 $-\pi<\arg z\leqslant\pi,-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$, 故 z 的主辐角与反正切 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 的关系如下:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\in\mathbb{R};\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}\quad (z\neq 0)$$

证明

□

定理 0.1

设 z_1,z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$

(3) $\mathrm{Arg}\,(\alpha z)=\mathrm{Arg}z\,(\alpha>0)\,,\quad \mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z\,(n\in\mathbb{N})\,,\quad \mathrm{Arg}\sqrt[n]{z}=\dfrac{\mathrm{Arg}z}{n}\,(n\in\mathbb{N})\,.$

笔记 在 (1) 中, 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按反时针方向转动 $\dfrac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

(2) 由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

(3)

□

命题 0.2 (复数的几何性质)

(1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 则

(i) $\mathrm{Re}\overline{z_1}z_2 = z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\cos\langle z_1, z_2\rangle$.

(ii) $z_1 \perp z_2 \iff z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \iff \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0$.

(iii) $z_1 \mathbin{/\!/} z_2 \iff \iff z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0 \iff \mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}) = 0$.

(2) 证明:$\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(3) 证明: 三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(4) 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $z_1 \neq z_2$, 证明:

(i) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开线段上, 当且仅当存在 $\lambda \in (0,1)$, 使得

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2;$$

(ii) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开圆弧上, 当且仅当存在 $\theta\ (0 < |\theta| < \pi)$, 使得

$$\arg\frac{z-z_1}{z-z_2} = \theta.$$

(5) 设 L 是由方程

$$az\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + d = 0$$

所确定的点的轨迹, 其中 a, d 是实数,β 是复数. 证明:

(i) 当 $a = 0, \beta \neq 0$ 时,L 是一直线.
反之, 任何直线 l 都存在 d 是实数,$\beta \neq 0$ 是复数, 使得 l 上的点都满足方程 $\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + d = 0$.

(ii) 当 $a \neq 0, |\beta|^2 - ad > 0$ 时,L 是一圆周, 其圆心为 $\dfrac{\beta}{a}$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{|\beta|^2 - ad}}{a}$.
反之, 任何圆周 C 都存在 a, d 是实数,β 是复数, 满足 $a \neq 0, |\beta|^2 - ad > 0$, 且 C 上的点都满足方程 $az\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + d = 0$.

(6) 如果 $z_1, \cdots, z_n$ 都位于过原点的直线的一侧, 证明 $\dfrac{1}{z_1}, \cdots, \dfrac{1}{z_n}$ 也必位于该直线关于 x 轴对称的直线的某一侧, 而且满足

$$z_1 + \cdots + z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

(7) 证明: 方程

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k\ (0 < k \neq 1, z_1 \neq z_2)$$

表示 z 平面上一个圆周 (通常称为 **Apollonius 圆**), 其圆心为 z_0, 半径为 ρ, 且

$$z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}, \rho = \frac{k\,|z_1 - z_2|}{|1-k^2|}.$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, 方程等价于 $|z - z_1| = |z - z_2|$ 表示一条直线.

(8) (i) 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是单位圆周 (以原点为中心、半径为 1 的圆周) 上的 n 个点, 如果 $z_1, \cdots, z_n$ 是正 n 边形的 n 个顶点, 证明:

$$z_1 + \cdots + z_n = 0.$$

(ii) 设 z_1, z_2, z_3 是单位圆周上的三个点, 证明: 这三个点是一正三角形三个顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

(iii) 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是单位圆周上的四个点, 证明: 这四个点是一矩形顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

(9) 证明: 平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\Big/\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \tag{1}$$

证明

(1) (i) 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 则

$$\mathrm{Re}\overline{z_1}z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\cos\langle z_1, z_2\rangle.$$

(ii) 证法一:注意到

$$z_1 \perp z_2 \Longleftrightarrow \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \pm\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \mathrm{i}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{两端平方}} \frac{z_1^2}{z_2^2} = -\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = -\frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Longleftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0.$$

证法二: 由勾股定理知

$$z_1 \perp z_2 \quad\Longleftrightarrow\quad |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0.$$

(iii) 注意到

$$z_1 \mathbin{/\!/} z_2 \Longleftrightarrow \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \pm\pi \Longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \pm\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$$\xLeftrightarrow{\text{两端平方}} \frac{z_1^2}{z_2^2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Longleftrightarrow z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0.$$

(2) **充分性**: 由充分性假设知

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \overline{z_1 - z_3} \\ z_2 - z_3 & \overline{z_2 - z_3} \end{vmatrix} = (z_1 - z_3)\left(\overline{z_2 - z_3}\right) - \left(\overline{z_1 - z_3}\right)(z_2 - z_3) = 0.$$

由命题 0.2(1)(iii)知 $z_1 - z_3 \parallel z_2 - z_3$. 显然 $z_1 - z_3, z_2 - z_3$ 有过同一点 z_3, 故 $z_1 - z_3, z_2 - z_3$ 重合, 即 z_1, z_2, z_3 共线.

必要性: 若 z_1, z_2, z_3 共线, 则 $z_1 - z_3 \parallel z_2 - z_3$. 由命题 0.2(1)(iii)知

$$0 = (z_1 - z_3)\left(\overline{z_2 - z_3}\right) - \left(\overline{z_1 - z_3}\right)(z_2 - z_3) = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \overline{z_1 - z_3} \\ z_2 - z_3 & \overline{z_2 - z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

(3) $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似等价于

$$\begin{cases} \angle z_3 = \arg\left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \arg\left(\dfrac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}\right) = \angle w_3, \\ \dfrac{|z_1 - z_3|}{|w_1 - w_3|} = \dfrac{|z_2 - z_3|}{|w_2 - w_3|}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z_1 - z_3}{w_1 - w_3} = \frac{z_2 - z_3}{w_2 - w_3} \Longleftrightarrow (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) = (z_2 - z_3)(w_1 - w_3).$$

又

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & w_1 - w_3 & 0 \\ z_2 - z_3 & w_2 - w_3 & 0 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & w_1 - w_3 \\ z_2 - z_3 & w_2 - w_3 \end{vmatrix} = (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) - (z_2 - z_3)(w_1 - w_3),$$

故

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) = (z_2 - z_3)(w_1 - w_3).$$

因此结论得证.

(4) (i) z 位于 z_1 和 z_2 为端点的开线段上等价于 $z - z_1$ 和 $z_2 - z$ 两个非零向量共线, 也等价于

$$\exists k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \text{s.t. } z - z_1 = k(z_2 - z), \text{即} z = \frac{1}{1+k} z_1 + \frac{k}{1+k} z_2.$$

令 $\lambda = \dfrac{1}{1+k} \in (0,1)$, 则上式等价于

$$\exists \lambda \in (0,1),\ \text{s.t. } z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2.$$

反之, 则令 $k = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii) **必要性**: 若 z 在以 z_1 和 z_2 为端点的开圆弧上, 则 z 在过 z_1, z_2 的圆上且不在直线 $z_1 z_2$ 上. 由同弧所对的圆周角相等知, 有向角 $\angle z_1 z z_2$ 为定值 θ. 因为 $z \neq z_1, z_2$, 所以 $0 < |\theta| < \pi$. 而 $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \angle z_1 z z_2$ 即 $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \theta$.

充分性: 若存在 θ 满足 $0 < |\theta| < \pi$, 使得 $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \theta$, 则 z 与 z_1, z_2 不共线. 由 z, z_1, z_2 这三点可唯一确定一个圆 C. 注意到

$$\angle z_1 z z_2 = \arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \theta,$$

不难发现以 z_1 和 z_2 为端点的开圆弧 $D = \{z : \angle z_1 z z_2 = \theta\}$, 则 $z \in D$, 即结论成立.

(5) (i) 当 $a = 0, \beta \neq 0$ 时, 有

$$\overline{\beta} z + \beta \overline{z} + d = 0 \Longleftrightarrow 2\mathrm{Re}\overline{\beta} z + d = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\overline{\beta} z = -\frac{d}{2}.$$

故此时 L 表示一条垂直于 x 轴的直线.

反之, 设直线 l 与 x 轴的夹角为 θ, 与 x 轴的交点为 $b \in \mathbb{R}$, 则对 $\forall z \in l$, 都有

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{Re}(z-b)}{\mathrm{Im}(z-b)} = \frac{\mathrm{Re}(z-b)}{\mathrm{Im} z} = \frac{z - b + \overline{z - b}}{z - \overline{z}} \mathrm{i} = \frac{z + \overline{z} - 2b}{z - \overline{z}} \mathrm{i} \Longleftrightarrow (1 + \mathrm{i}\tan\theta) z + (1 - \mathrm{i}\tan\theta)\overline{z} - 2b = 0.$$

令 $\beta = 1 - \mathrm{i}\tan\theta, d = -2b$, 则上式等价于

$$\overline{\beta} z + \beta \overline{z} + d = 0.$$

(ii) 设 $z = x + \mathrm{i}y, \beta = p + \mathrm{i}q$, 则

$$a z \overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + d = a\left(x^2 + y^2\right) + 2px + 2qy + d = 0,$$

此即

$$\left(x + \frac{p}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{a}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 - ad}{a^2} = \frac{|\beta|^2 - ad}{a^2}.$$

故此时 L 是一圆周, 其圆心为 $\dfrac{\beta}{a}$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{|\beta|^2 - ad}}{a}$.

反之, 设圆周 $C : |z - z_0| = r$, 则两边同时平方得

$$r^2 = |z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2\mathrm{Re}\overline{z_0} z = z\overline{z} - 2\overline{z_0} z - 2 z_0 \overline{z} + |z_0|^2,$$

即

$$z\overline{z}-2\overline{z_0}z-2z_0\overline{z}+|z_0|^2-r^2=0.$$

取 $a=1,\beta=-2z_0,d=|z_0|^2-r^2$, 即得

$$az\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+d=0.$$

(6) 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 都在与 x 轴夹角为 $\theta\in[0,2\pi]$ 的直线 l 的某一侧, 不妨设

$$\arg z_i\in(-\pi+\theta,\theta),\ i=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\arg\frac{1}{z_i}=\arg 1-\arg z_i=-\arg z_i\in(-\theta,\pi-\theta),\ i=1,2,\cdots,n.$$

因此 $\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\cdots,\frac{1}{z_n}$ 都在与 x 轴夹角为 $-\theta$ 的直线 l' 的某一侧, 显然 l 与 l' 关于 x 轴对称. 因为 l,l' 都过原点, 所以由命题 0.2(5)(i)知存在 $\beta\in\mathbb{Z}$, 使得

$$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}=0,\forall z\in l,$$

$$\frac{\overline{\beta}}{z}+\frac{\beta}{\overline{z}}=0,\forall z\in l'.$$

又 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 在直线 l 的同一侧,$\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\cdots,\frac{1}{z_n}$ 在直线 l' 的同一侧, 故可不妨设

$$\overline{\beta}z_i+\beta\overline{z_i}>0,\quad \frac{\overline{\beta}}{z_i}+\frac{\beta}{\overline{z_i}}>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\overline{\beta}\sum_{i=1}^{n}z_i+\beta\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i}>0,\quad \overline{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}+\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{z_i}}>0.$$

从而 $\sum_{i=1}^{n}z_i,\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}\neq 0$, 否则与上式矛盾!

(7) 因为 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$, 从而 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|^2=k^2$, 因而 $\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z}-\overline{z_2}}\right)=k^2$, 所以

$$|z|^2-z\overline{z_1}-\overline{z}z_1+|z_1|^2=k^2\left(|z|^2-z\overline{z_2}-\overline{z}z_2+|z_2|^2\right),$$

即

$$|z|^2(1-k^2)-\overline{z}(z_1-k^2z_2)-z(\overline{z_1}-k^2\overline{z_2})=k^2|z_2|^2-|z_1|^2,$$

亦即

$$|z|^2-\overline{z}\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}-z\frac{\overline{z_1}-k^2\overline{z_2}}{1-k^2}+\frac{|z_1-k^2z_2|^2}{(1-k^2)^2}=\frac{k^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-k^2}+\frac{|z_1-k^2z_2|^2}{(1-k^2)^2},$$

亦即

$$\left(z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)\left(\overline{z}-\frac{\overline{z_1}-k^2\overline{z_2}}{1-k^2}\right)=\frac{(1-k^2)(k^2|z_2|^2-|z_1|^2)+(z_1-k^2z_2)(\overline{z_1}-k^2\overline{z_2})}{(1-k^2)^2},$$

从而

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|^2=\frac{k^2(|z_2|^2+|z_1|^2-z_2\overline{z_1}-\overline{z_2}z_1)}{(1-k^2)^2}=\frac{k^2|z_1-z_2|^2}{(1-k^2)^2},$$

故

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|},$$

这表示圆心在 $z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$, 半径为 $\rho=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$ $(0<k\neq 1,z_1\neq z_2)$ 的圆.

(8) (i) 记 $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$, 则由条件可知 $z_k = e^{ik\theta}, k = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$z_1 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}\left(1 - e^{in\theta}\right)}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\left(1 - e^{2\pi i}\right)}{1 - e^{i\theta}} = 0.$$

(ii) **必要性**: 设 $z_k = e^{i\theta_k}, k = 1, 2, 3$. 不妨设 $0 \leqslant \theta_3 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant 2\pi$, 则由 z_1, z_2, z_3 是一正三角形三个顶点知

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3 = \frac{2\pi}{3}.$$

从而

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{3}.$$

于是

$$z_1 + z_2 + z_3 = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3} = e^{i\theta_1}\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) = \frac{e^{i\theta_1}\left(1 - e^{2\pi i}\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = 0.$$

充分性: 由 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 可得

$$|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1,$$

两边同时平方得

$$2\mathrm{Re}\overline{z_1}z_2 = -1 \Longrightarrow \mathrm{Re}\overline{z_1}z_2 = -\frac{1}{2}.$$

而由命题 0.2(1)(i)知 $\mathrm{Re}\overline{z_1}z_2 = z_1 \cdot z_2 = \cos\langle z_1, z_2\rangle$, 故 z_1, z_2 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$. 同理可证 z_1, z_3 的夹角和 z_2, z_3 的夹角都为 $\dfrac{2\pi}{3}$. 因此 z_1, z_2, z_3 是一正三角形三个顶点.

(iii) **必要性**: 若 z_1, z_2, z_3, z_4 是一矩形顶点, 则

$$z_1 = -z_3, \quad z_2 = -z_4 \Longrightarrow z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

充分性: 若 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 则

$$|z_1 + z_3| = |-z_2 - z_4|,$$

两边同时平方得

$$\mathrm{Re}\overline{z_1}z_3 = \mathrm{Re}\overline{z_2}z_4 \Longrightarrow |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_4|^2 \Longrightarrow |z_1 - z_3| = |z_2 - z_4|.$$

这说明以 z_1, z_2, z_3, z_4 为顶点的四边形的对角线相等, 故 z_1, z_2, z_3, z_4 是一矩形顶点.

(9) 从图 2可以看出,z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件是向量 $z_1 - z_3$ 和 $z_1 - z_4$ 的夹角等于向量 $z_2 - z_3$ 和 $z_2 - z_4$ 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 0.2(1)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ 在实轴上, 因而等式(1)成立.

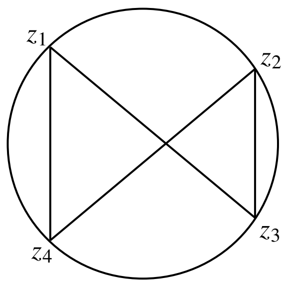

图 2

□

定理 0.2 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \cdots, z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n = r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1 = \cdots = z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta} = \cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta = \cos(-n)\theta + \mathrm{i}\sin(-n)\theta.$$

□

命题 0.3

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n = w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

进而

$$z^n - w = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z - \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right].$$

注 这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w = 1$ 时, 若记 $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w}, \sqrt[n]{w}\omega, \cdots, \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

证明 现在设 $w = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的, 要求的 $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n = w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n\cos n\varphi = r\cos\theta \\ \rho^n\sin n\varphi = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ \cos n\varphi = \cos\theta \\ \sin n\varphi = \sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

故方程 $z^n = w$ 的根为

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

对 $\forall k \geq n$, 都存在 $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$, 使 $k = p_k n + q_k$. 于是

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2q_k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2q_k\pi}{n}\right).$$

又注意到 $\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, n-1$ 互不相同, 故方程 $z^n = w$ 的根只有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

□

定理 0.3 (Gauss-Lucas 定理)

设 $f \in \mathbb{C}[x]$ 且 $\deg f \geqslant 1$, 证明 f' 所有零点位于 f 的零点的凸包内 (包含 f 的零点的最小凸集).

注 对于 f 的有限 n 个零点而言, 这有限 n 个零点的凸包就是凸 n 边形或线段.

证明 设 $f(z) = c\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{m_i}, m_i \in \mathbb{N}, i = 1,2,\cdots,m, c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{z-z_i}.$$

设 $f'(z_0) = 0, f(z_0) \neq 0$, 则

$$0 = \sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{z_0-z_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{m_i(\overline{z_0}-\overline{z_i})}{|z_0-z_i|^2} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{m_i z_0}{|z_0-z_i|^2} = \sum_{i=1}^{m}\frac{m_i z_i}{|z_0-z_i|^2},$$

即

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i, \quad \lambda_i = \frac{m_i}{|z_0-z_i|^2\sum_{j=1}^{m}\frac{m_j}{|z_0-z_j|^2}} \in [0,1], j = 1,2,\cdots,m.$$

当 $f'(z_0) = 0 = f(z_0)$, 此时定理当然更成立. 我们完成了证明.

□

推论 0.1

设 $z_1,\cdots,z_n$ 是一个凸 n 边形的 n 个顶点, 如果 a 满足关系

$$\frac{1}{z_1-a}+\cdots+\frac{1}{z_n-a} = 0,$$

那么 a 必在这个凸 n 边形的内部.

证明 令 $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$, 则

$$-\frac{P'(a)}{P(a)} = \frac{1}{z_1-a}+\frac{1}{z_2-a}+\cdots+\frac{1}{z_n-a} = 0.$$

从而 $P'(a) = 0$. 由Gauss-Lucas 定理知 a 一定在这个凸 n 边形的内部.

□

例题 0.1 在图 3的三角形中,$AB = AC$,$PQ = RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN \perp BC$.

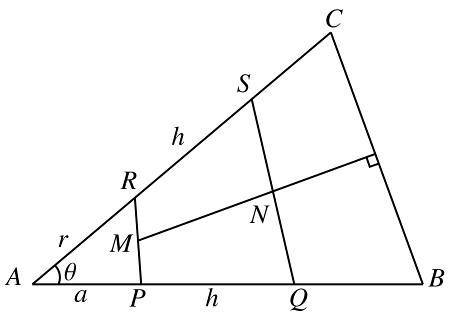

图 3

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M : \frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N : \frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1 = \overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] - \frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB = AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2 = \overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2 = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - b = b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1) = \frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$. 所以由命题 0.2(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN \perp BC$.

□