0.1 压缩映象原理

定义 0.1

设 $\mathscr{X}$ 是一个非空集.$\mathscr{X}$ 叫做**距离 (度量) 空间**, 是指在 $\mathscr{X}$ 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$, 满足下列三个条件:

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)\ (\forall x,y,z \in \mathscr{X})$.

这里 ρ 叫做 $\mathscr{X}$ 上的一个**距离**; 以 ρ 为距离的距离空间 $\mathscr{X}$ 记做 $(\mathscr{X},\rho)$.

注 距离概念是欧氏空间中两点间距离的抽象. 事实上, 如果对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$\rho(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

容易看到 (1),(2),(3) 都满足. 以后当说到欧氏空间时, 我们始终用这个 ρ 规定其上的距离.

笔记 引进距离的目的是刻划“收敛”.

例题 0.1 空间 C[a,b]

区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体记为 $C[a,b]$, 按距离

$$\rho(x,y) \triangleq \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1}$$

形成距离空间 $(C[a,b],\rho)$, 以后简记作 $C[a,b]$. 以后当说到**连续函数空间** $C[a,b]$ 时, 我们始终用(1)规定的 ρ 作为其上的距离, 除非另外说明.

证明 证明是显然的. □

定义 0.2

距离空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做收敛到 x_0 的是指:$\rho(x_n,x_0)\to 0\,(n\to\infty)$. 这时记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 或简单地记作 $x_n\to x_0$.

注 在 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 是指:$\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x_0(t)$.

笔记 与实数集合一样, 对于一般的度量空间可引进闭集和完备性等概念.

定义 0.3

度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的一个子集 E 称为**闭集**, 是指:$\forall\{x_n\}\subset E$, 若 $x_n\to x_0$, 则 $x_0\in E$.

定义 0.4

距离空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做**基本列**, 是指:$\rho(x_n,x_m)\to 0\,(n,m\to\infty)$. 这也就是说:$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$, 使得 $m,n\geqslant N(\varepsilon)\Rightarrow\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 如果空间中所有基本列都是收敛列, 那末就称该空间是**完备的**.

例题 0.2 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是完备的.

证明

□

例题 0.3 $(C[a,b],\rho)$ 是完备的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $(C[a,b],\rho)$ 中的一串基本列, 那么 $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$, 使得对 $\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)$ 有

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon,$$

因此, 对 $\forall t\in[a,b]$,

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon\quad(\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)). \tag{2}$$

固定 $t \in [a,b]$, 我们看到数列 $\{x_n(t)\}$ 是基本的, 由于 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是完备的, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ 存在. 让我们用 $x_0(t)$ 表示此极限, 在(2)中令 $m \to \infty$ 得到 $|x_0(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon(\forall n \geqslant N(\varepsilon))$. 由此可见 $x_n(t)$ 一致收敛到 $x_0(t)$, 从而 $x_0(t)$ 连续并在 $C[a,b]$ 中 x_n 收敛到 x_0. □

定义 0.5

设 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$ 是一个映射, 称它是**连续的**, 如果对于 $\mathscr{X}$ 中的任意点列 $\{x_n\}$ 和点 x_0,

$$\rho(x_n,x_0)\to 0 \Rightarrow r(Tx_n,Tx_0)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

命题 0.1 (连续映射充要条件)

$T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$ 是连续的的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0,\forall x_0\in\mathscr{X},\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$, 使得

$$\rho(x,x_0)<\delta\Rightarrow r(Tx,Tx_0)<\varepsilon \quad (\forall x\in\mathscr{X}). \tag{3}$$

证明 必要性. 若(3)不成立, 必 $\exists x_0\in\mathscr{X},\exists\varepsilon>0$, 使得 $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n$ 使得 $\rho(x_n,x_0)<1/n$, 但 $r(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} r(Tx_n,Tx_0)\neq 0$, 矛盾.

充分性. 设(3)成立, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$, 那么 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\delta(x_0,\varepsilon))$, 使得当 $n>N$ 时,$\rho(x_n,x_0)<\delta$. 从而 $r(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty} r(Tx_n,Tx_0)=0$. □

定义 0.6

设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个距离空间, 称映射 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 满足 **Lipschitz 条件**,L 是 **Lipschitz 常数**. 如果存在 $L>0$, 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant L\rho(x,y)\,(\forall x,y\in\mathscr{X}).$$

定理 0.1

设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个距离空间, 映射 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 满足 Lipschitz 条件,L 是 Lipschitz 常数, 则的映射 T 是连续的.

证明 对 $\forall\varepsilon>0,\forall x_0\in\mathscr{X}$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$, 使得当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时, 有

$$\rho\left(Tx,Tx_0\right)\leqslant L\rho\left(x,x_0\right)<\varepsilon\quad\left(\forall x\in\mathscr{X}\right).$$

故由命题 0.1知 T 是连续的. □

定义 0.7

设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个距离空间, 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个**压缩映射**, 如果存在 $0<\alpha<1$, 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)\,(\forall x,y\in\mathscr{X}).$$

笔记 显然压缩映射满足 Lipschitz 条件. 进而由定理 0.1可知**压缩映射一定是连续的**.

例题 0.4 设 $\mathscr{X}=[0,1]$,$T(x)$ 是 $[0,1]$ 上的一个可微函数, 满足条件:

$$T(x)\in[0,1]\quad(\forall x\in[0,1]), \tag{4}$$

以及

$$|T'(x)|\leqslant\alpha<1\quad(\forall x\in[0,1]), \tag{5}$$

则映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是一个压缩映射.

证明 由 Lagrange 中值定理可知

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=|T(x)-T(y)|=|T'(\theta x+(1-\theta)y)(x-y)|\\&\leqslant\alpha|x-y|=\alpha\rho(x,y)\quad(\forall x,y\in\mathscr{X},0<\theta<1).\end{aligned}$$

□

定理 0.2 (Banach 不动点定理——压缩映象原理)

设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个完备的距离空间,T 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 到其自身的一个压缩映射, 则 T 在 $\mathscr{X}$ 上存在唯一的不动点. ♡

笔记 压缩映射原理就是距离空间上的一个很简单而基本的不动点定理, 也是泛函分析中的一个最常用、最简单的存在性定理.

证明 任取初始点 $x_0 \in \mathscr{X}$. 考察迭代产生的序列

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

从而对 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x_{n+P}, x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{p}\rho(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \to 0.$$

(当 $n\to\infty$, 对 $\forall P \in \mathbb{N}$ 一致). 由此可见 $\{x_n\}$ 是一个基本列. 因为 $(\mathbb{R}^1,\rho)$ 是完备的, 所以 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. 又 T 是连续的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx^*$. 于是对 $x_{n+1} = Tx_n$ 两边同时取极限得 $x^* = Tx^*$, 即 x^* 是 T 在 $\mathscr{X}$ 上的一个不动点. 若 x^*, x^{**} 都是不动点, 则

$$\rho\left(x^*, x^{**}\right) = \rho\left(Tx^*, Tx^{**}\right) \leqslant \alpha\rho\left(x^*, x^{**}\right) \Longrightarrow (1-\alpha)\rho\left(x^*, x^{**}\right) \leqslant 0.$$

由此推出 $x^* = x^{**}$. □

注 我们可以把一些问题转化为不动点问题. 比如下面的例子和定理 0.3.

设 φ 是 $\mathbb{R}^1$ 上定义的实函数, 求方程

$$\varphi(x) = 0$$

的根的问题可以看成 $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 的映射

$$f(x) = x - \varphi(x)$$

的不动点问题. 即求 $x \in \mathbb{R}^1$ 满足:

$$f(x) = x.$$

命题 0.2

证明: 完备空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集. ♠

证明 (1) 设 X 是完备度量空间,$M \subset X$ 是闭的. 要证 M 是一个完备的子空间.

$$\forall\, x_m, x_n \in M, \|x_m - x_n\| \to 0(m,n\to\infty) \implies \forall\, x_m, x_n \in X, \|x_m - x_n\| \to 0(m,n\to\infty).$$

因为 X 是完备度量空间, 所以 $\exists\, x \in X$, 使得 $x_n \to x$. 于是

$$\begin{cases} x_n \in M,\ x_n \to x \\ M \subset X \text{ 是闭的} \end{cases} \implies x \in M.$$

$\forall\, x_m, x_n \in M, \|x_m - x_n\| \to 0, (m,n\to\infty)$ 因为 X 是完备度量空间, 所以 $\exists\, x \in M$, 使得 $x_n \to x$. 故 M 是一个完备的子空间.

(2) 设 X 是一度量空间,M 是 X 的一个完备子空间.

要证 M 是闭子集. 即, 若 $x_n \in M, x_n \to x$, 要证 $x \in M$.

因为收敛列是基本列, 所以 $x_n \in M, \|x_m - x_n\| \to 0, (m,n\to\infty)$, 又 M 是完备度量空间, 所以 $\exists\, x' \in M$, 使得

$x_n \to x'$. 于是

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ x_n \longrightarrow x' \end{cases} \implies x = x' \in M.$$

□

定理 0.3 (常微分方程初值问题解的局部存在唯一性)

设 $\xi \in \mathbb{R}$, 考虑常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t,x), \\ x(t_0) = \xi \end{cases} \tag{6}$$

其中 $F(t,x)$ 是在矩形域

$$D : |t-t_0| \leqslant h_0, |x-\xi| \leqslant \delta$$

上的二元连续函数, 并且对变元 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件:$\exists L > 0$, 使得当 $|t-t_0| \leqslant h_0, |x_1(t) - \xi| \leqslant \delta, |x_2(t) - \xi| \leqslant \delta$ 时, 有

$$|F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leqslant L|x_1(t) - x_2(t)|, \tag{7}$$

则当 $h \leqslant \min\{\dfrac{\delta}{M}, h_0\}, M = \max\limits_{(t,x)\in D} |F(t,x)|$ 时, 微分方程(6)的初值问题在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在唯一连续解.

♡

注

1. 在这里我们把常数 ξ 看成是 $[-h_0, h_0]$ 上恒等于 ξ 的常值函数.

2. 本题中我们不能直接取 $C[-h_0, h_0]$ 为Banach 不动点定理——压缩映象原理中的距离空间 $\mathscr{X}$, 因为当 $Lh_0 < 1$ 时,T 只是在 $C[-h_0, h_0]$ 的子集 $\bar{B}(\xi, \delta)$ 上才是压缩的.

证明 不妨设 $t_0 = 0$, 否则用 $x(t+t_0)$ 代替 $x(t)$ 即可. 注意到 (6)式或它的等价形式, 即求连续函数 $x(t)$ 满足下列积分方程的问题:

$$x(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

可以看成是一个不动点问题. 为此, 在以 $t=0$ 为中心的某区间 $[-h_0, h_0]$ 上考察距离空间 $C[-h_0, h_0]$, 并引入映射

$$(Tx)(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

则(8)等价于求 $C[-h_0, h_0]$ 上的一个点 x, 使得 $x = Tx$, 即求 T 的不动点.

现在我们已经把这个问题化归为一个求不动点的问题了. 先在 $C[-h_0, h_0]$ 上考察由(9)定义的映射 T, 注意到

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= \max_{|t|\leqslant h_0} \left| \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^t F(\tau, y(\tau))\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leqslant \int_0^{h_0} |F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau))| \,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant h_0 \max_{|t|\leqslant h_0} |F(t, x(t)) - F(t, y(t))|, \end{aligned}$$

再结合(7)式就有

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant h_0 \max_{|t|\leqslant h_0} |F(t, x(t)) - F(t, y(t))| \leqslant Lh_0 \max_{|t|\leqslant h_0} |x(t) - y(t)| = Lh_0 \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in \bar{B}(\xi, \delta)), \tag{10}$$

其中 $\bar{B}(\xi, \delta) \triangleq \{x(t) \in C[-h_0, h_0] \big| \max\limits_{|t|\leqslant h_0} |x(t) - \xi| \leqslant \delta\}$. 我们取 $\mathscr{X} = \bar{B}(\xi, \delta)$, 令 $T_1 = \begin{cases} T & ,x \in \overline{B}(\xi, \delta) \\ 0 & ,x \notin \overline{B}(\xi, \delta) \end{cases}$, 再设

$$M \triangleq \max\{|F(t,x)| \big| (t,x) \in [-h_0, h_0] \times [\xi - \delta, \xi + \delta]\},$$

则当 $h \leqslant \min\{\frac{\delta}{M}, h_0\}$ 时, 对 $\forall x \in \bar{B}(\xi,\delta)$ 有

$$\max |(Tx)(t) - \xi| = \max \left| \int_0^t F(t, x(\tau))\mathrm{d}\tau \right| \leqslant Mh \leqslant \delta \Longrightarrow Tx \in \bar{B}(\xi,\delta),$$

故 $T_1 : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. 再结合(10)式知 T_1 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 上的压缩映射. 由于 $(C[-h,h],\rho)$ 是一个完备的距离空间, 而 $\mathscr{X}$ 又是它的一个闭子集, 因此 $(\mathscr{X},\rho)$ 还是一个完备的距离空间 (命题 0.2). 于是由压缩映象原理可知,T_1 在 $(\mathscr{X},\rho)$ 存在唯一不动点, 故结论得证. □

定理 0.4 (隐函数存在定理)

设 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,$U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的一个邻域. 设 f 在 $U \times V$ 内连续并且 $\forall x \in U$, 关于 $y \in V$ 连续可微. 又设

$$f(x_0, y_0) = 0; \quad \left[\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0, y_0) \neq 0,$$

则 $\exists x_0$ 的一个邻域 $U_0 \subset U$ 以及唯一的连续函数 $\varphi : U_0 \to \mathbb{R}^m$, 满足

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x)) = 0 & (\text{当} x \in U_0), \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

注 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 表示 f 关于 y 的 Jacobian(雅可比) 矩阵,det$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 表示 f 关于 y 的 Jacobian(雅可比) 行列式. 我们有

$$\left[\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

证明 考察映射 $T : \varphi \mapsto T\varphi$,

$$(T\varphi)(x) \triangleq \varphi(x) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} f(x,\varphi(x)),$$

其中 $\varphi \in C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$, 这里 $r > 0$,$C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$ 表示定义在闭球 $\bar{B}(x_0, r)$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 上的向量值连续函数空间, 其距离规定为

$$\rho(\varphi,\psi) \triangleq \max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\ 1\leq i\leq m}} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|,$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$;$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$. 对 $x \in \mathbb{R}^n$ 与 $y_i \in \mathbb{R}^m (i = 1, 2, \ldots, m)$, 记

$$D_y f(x, y_1, \ldots, y_m) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y_m) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y_m) \end{pmatrix}.$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $U \times V$ 上连续, 所以 $\exists\delta > 0$, 使得

$$\left| \delta_{ij} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} D_y f(x, y_1, \ldots, y_m)\right]_{ij} \right| < \frac{1}{2m}. \tag{11}$$

$(i, j = 1, 2, \ldots, m, x \in \bar{B}(x_0, \delta), y_1, \ldots, y_m \in \bar{B}(y_0, \delta))$, 其中 $[\cdot]_{ij}$ 表示括号内的矩阵的第 i 行、第 j 列元素, 而

$$\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

记 $d_i(x) \triangleq \varphi_i(x) - \psi_i(x)(i = 1, 2, \ldots, m)$. 根据多元函数微分中值定理和(11)式就有

$$\begin{aligned}
\rho(T\varphi, T\psi) &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| \left[(T\varphi)(x) - (T\psi)(x) \right]_i \right| \\
&= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| \varphi_i(x) - \psi_i(x) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))) \right]_i \right| \\
&= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| d_i(x) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} D_y f(x, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m) (\varphi(x) - \psi(x)) \right]_i \right| \\
&= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| d_i(x) - \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} D_y f(x, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m) \right]_{ij} d_j(x) \right| \\
&< \frac{1}{2} \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} |d_i(x)| = \frac{1}{2} \rho(\varphi, \psi),
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $r < \delta$, 使得 $\varphi(x), \psi(x) \in \bar{B}(y_0, \delta)(\forall x \in \bar{B}(x_0, r))$,$0 < \theta_i = \theta_i(x) < 1$,$\hat{y}_i(x) = \theta_i \varphi(x) + (1 - \theta_i)\psi(x)(i = 1, 2, \ldots, m)$. 今取

$$\mathcal{X} \triangleq \{\varphi \in C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m) | \varphi(x_0) = y_0, \varphi(x) \in \bar{B}(y_0, \delta)\},$$

则 $\mathcal{X}$ 在 $C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$ 中是闭的, 从而是一个完备的度量空间.(12)式表明 T 在 $\mathcal{X}$ 上是压缩的. 剩下来只要再证 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 就够了. 因为根据压缩映象原理,T 存在唯一的不动点, 这就是我们所要证的. 注意到

$$\begin{aligned}
\rho(T\varphi, y_0) &\le \rho(T\varphi, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0) \\
&\le \frac{1}{2} \rho(\varphi, y_0) + \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, y_0) \right]_i \right|,
\end{aligned}$$

又由 f 的连续性,

$$\begin{aligned}
&\max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, y_0) \right]_i \right| \\
&= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \le i \le m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \right]_i \right| \\
&< \frac{\delta}{2} \quad (\text{当} r < \eta \text{ 足够小}).
\end{aligned}$$

因此, 当 $0 < r < \min(\eta, \delta)$ 时,$\rho(T\varphi, y_0) < \delta$. 此外还有

$$(T\varphi)(x_0) = y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x_0, \varphi(x_0)) = y_0,$$

所以 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. □