## 0.1 多项式函数与根

**定义 0.1** (多项式的重根)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$，$b \in \mathbb{K}$，若存在正整数 $k$，使 $(x-b)^k \mid f(x)$，但 $(x-b)^{k+1}$ 不能整除 $f(x)$，则称 $b$ 是 $f(x)$ 的一个 **$k$ 重根**。若 $k=1$，则称 $b$ 为**单根**。

**定理 0.1** (多项式没有重因式的充要条件)

数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

**证明** 设多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $m(m>1)$ 重因式, 则 $f(x)=p(x)^m g(x)$, 故

$$f'(x)=mp(x)^{m-1}p'(x)g(x)+p(x)^m g'(x).$$

于是 $p(x)^{m-1} \mid f'(x)$, 这表明 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公因式 $p(x)^{m-1}$. 反之, 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式, 可设 $f(x)=p(x)g(x)$, $p(x)$ 不能整除 $g(x)$. 于是

$$f'(x)=p'(x)g(x)+p(x)g'(x).$$

若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因式, 则 $p(x) \mid p'(x)g(x)$. 但 $p(x)$ 不能整除 $g(x)$ 且 $p(x)$ 不可约, 故 $p(x) \mid p'(x)$. 而 $p'(x) \neq 0$ 且 $\deg p'(x) < \deg p(x)$, 这是不可能的. 若 $f(x)$ 无重因式, 则在 $f(x)$ 的标准分解式(**??**)中, $e_i=1$ 对一切 $i=1,2,\cdots,m$ 成立, 于是 $p_i(x)$ 都不能整除 $f'(x)$. 由于 $p_i(x)$ 为不可约多项式, 故 $(p_i(x), f'(x))=1$, 由互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 可知

$$(p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x), f'(x))=1,$$

即 $(f(x), f'(x))=1$. □

**定理 0.2**

设 $d(x)=(f(x), f'(x))$, 则 $f(x)/d(x)$ 是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同 (不计重数).

**证明** 设 $f(x)$ 有如(**??**)式的标准分解式, 则

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ce_1 p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_s(x)^{e_s}p_1'(x)\\
&\quad + ce_2 p_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s}p_2'(x)\\
&\quad + \cdots\\
&\quad + ce_s p_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_s(x)^{e_s-1}p_s'(x).
\end{aligned}$$

因此 $p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1}$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式. 注意到 $f(x)$ 的因式一定具有 $p_1(x)^{k_1}p_2(x)^{k_2}\cdots p_s(x)^{k_s}$ 的形状. 不妨设 $h(x)$ 是 $f(x), f'(x)$ 的公因式. 注意到 $p_1(x)^{e_1}$ 可以整除(**??**)式中右边除第一项外的所有项, 但不能整除第一项, 因此 $p_1(x)^{e_1}$ 不能整除 $f'(x)$. 同理, $p_i(x)^{e_i}$ 不能整除 $f'(x)$. 由此我们不难看出

$$h(x) \mid p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1},$$

即 $p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1}=d(x)$. 显然 $f(x)/d(x)$ 没有重因式且与 $f(x)$ 含有相同的不可约因式. □

**命题 0.1** (多项式有 k 重根的充要条件)

求证：$a$ 是多项式 $f(x)$ 的 $k$ 重根的充要条件是：

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0, \quad f^{(k)}(a)\neq 0.$$

**证明** 若 $a$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重根, 可设 $f(x)=(x-a)^k g(x)$, $g(x)$ 不含因式 $x-a$。通过对 $f(x)$ 求导可发现, $x-a$ 可整

除 $f^{(j)}(x)\ (1 \le j \le k-1)$。因此

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

而 $f^{(k)}(a) = k!g(a) \neq 0$, 故必要性得证。

反之, 若 $a$ 是 $f(x)$ 的 $m$ 重根, 若 $m > k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(k)}(a) = 0$, 这与已知矛盾。同样, 若 $m < k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(m)}(a) \neq 0$, 这也与已知矛盾, 于是只能 $m = k$. □

**命题 0.2**

设 $\deg f(x) = n \ge 1$，若 $f'(x) \mid f(x)$，证明：$f(x)$ 有 $n$ 重根.

**证明** 证法一: 设 $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$，现证明 $a$ 是 $f(x)$ 的 $n$ 重根。假设 $a$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重根，$f(x) = (x-a)^k g(x)$，$k < n$ 且 $g(x)$ 不含因式 $x-a$，则

$$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x) + (x-a)^k g'(x) = n(x-a)^{k-1}g(x).$$

于是 $g(x) \mid (x-a)g'(x)$，而 $g(x)$ 与 $x-a$ 互素，故将有 $g(x) \mid g'(x)$。引出矛盾。

证法二: 设 $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$，则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = b(x-a), \quad b \neq 0.$$

由定理**??**可知，$x-a$ 是 $f(x)$ 唯一的不可约因式，因此 $f(x) = b(x-a)^n$。□

**命题 0.3**

数域 $\mathbb{F}$ 上任意一个不可约多项式在复数域 $\mathbb{C}$ 中无重根.

**证明** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式, 则 $\deg f(x) < \deg f'(x)$. 从而 $f(x) \nmid f'(x)$, 于是 $(f(x), f'(x)) = 1$. 故由多项式没有重因式的充要条件可知 $f(x)$ 复数域 $\mathbb{C}$ 中无重根. □

**引理 0.1 (次数不为 1 得到不可约多项式没有根)**

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \ge 2$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中没有根。

**证明** 用反证法，设 $b \in \mathbb{K}$ 是 $f(x)$ 的根，由余数定理 知 $(x-b) \mid f(x)$，即 $f(x) = (x-b)g(x)$ 可分解为两个低次多项式之积，这与 $f(x)$ 不可约矛盾。□

**定理 0.3 (多项式根的有限性)**

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n$ 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中最多只有 $n$ 个根.

**笔记** 由命题**??**可知, 若一个 $n$ 次多项式的根超过 $n$ 个, 则这个多项式一定恒为零.

**证明** 将 $f(x)$ 作标准因式分解，则由次数不为 1 得到不可约多项式没有根知 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中根的个数等于该分解式中一次因式的个数，它不会超过 $n$。□

**推论 0.1 (两个多项式相等的判定准则)**

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的次数不超过 $n$ 的两个多项式，若存在 $\mathbb{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$，使

$$f(b_i) = g(b_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

则 $f(x) = g(x)$.

**证明** 作 $h(x) = f(x) - g(x)$，显然 $h(x)$ 次数不超过 $n$。但它有 $n+1$ 个不同的根，因此只可能 $h(x) = 0$，即 $f(x) = g(x)$。□

**例题 0.1** 求证：$f(x) = \sin x$ 在实数域内不能表示为 $x$ 的多项式。

**证明** 注意到 $f(x) = \sin x$ 在实数域内有无穷多个根，而任一非零多项式只能有有限个根，因此 $f(x) = \sin x$ 在实

数域内不能表示为 $x$ 的多项式。 □

**例题 0.2** 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式，若对 $\mathbb{F}$ 中某个非零常数 $a$，有 $f(x+a)=f(x)$，求证：$f(x)$ 必是常数多项式。

**证明** 假设 $f(x)$ 不是常数多项式，则 $f(x)-f(a)$ 也不是常数多项式，但由 $f(x+a)=f(x)$ 可知，$ka\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 $f(x)-f(a)$ 的无穷多个根，矛盾。 □

**例题 0.3** 设 $f(x)$ 是非常数多项式且 $f(x)$ 可以整除 $f(x^m)\ (m\in\mathbb{N}_+)$，求证：$f(x)$ 的根只能是 0 或 1 的某个方根。

**证明** 将 $f(x)$ 看成复数域上的多项式，则 $f(x^m)=f(x)g(x)$。假设 $c$ 是 $f(x)$ 的一个复根，即 $f(c)=0$，则 $f(c^m)=0$，即 $c^m$ 也是 $f(x)$ 的根。由此可知 $c^m,c^{m^2},c^{m^3},\dots$ 也都是 $f(x)$ 的根。由于 $f(x)$ 只有有限个不同的复根，故存在正整数 $k>t$，使得 $c^{m^k}=c^{m^t}$。因此若 $c\neq 0$，取 $n=m^k-m^t\in\mathbb{N}_+$，则有 $c^n=1$。 □

**定理 0.4 (余数定理)**

设 $f(x)\in\mathbb{F}[x], b\in\mathbb{F}$, 则存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x)=(x-b)g(x)+f(b).$$

特别地,$b$ 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-b)\mid f(x)$.

**笔记** 利用余数定理可以实现求根与判断整除性之间的相互转换.

**证明** 由带余除法知

$$f(x)=(x-b)g(x)+r(x),$$

其中 $\deg r(x)<1$，因此 $r(x)$ 为常数多项式。在上式中用 $b$ 代替 $x$，即得 $r(x)=f(b)$。 □

**例题 0.4** 设 $n$ 是奇数，求证：$(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$。

**证明** 将多项式 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 看成是未定元 $x$ 的多项式。当 $x=-y$ 时，$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n=0$，因此由余数定理可知 $x+y$ 是 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 的因式。同理 $x+z, y+z$ 也是因式。又这 3 个因式互素，故 $(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$。 □

**例题 0.5** 设 $f(x)$ 是一个 $n$ 次多项式，若当 $k=0,1,\dots,n$ 时有 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，求 $f(n+1)$。

**证明** 解令 $g(x)=(x+1)f(x)-x$，则 $0,1,\dots,n$ 是 $g(x)$ 的根，因此

$$g(x)=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

即

$$(x+1)f(x)-x=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

其中 $c$ 是一个常数。令 $x=-1$，可求出 $c=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$。从而

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}+x\right),$$

故

$$f(n+1)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}+n+1\right).$$

当 $n$ 是奇数时，$f(n+1)=1$；当 $n$ 是偶数时，$f(n+1)=\frac{n}{n+2}$。 □

**例题 0.6** 设 $(x^4+x^3+x^2+x+1)\mid(x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5))$，这里 $f_i(x)\ (1\le i\le 4)$ 都是实系数多项式，求证：$f_i(1)=0\ (1\le i\le 4)$。

**证明** 设 $\varepsilon_i\ (1\le i\le 4)$ 是 1 的五次虚根，则 $\varepsilon_i\ (1\le i\le 4)$ 都适合 $x^5-1$，从而由余数定理可知

$$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

故

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

因此 $\varepsilon_i$ $(1 \le i \le 4)$ 都是 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的根. 由条件可得

$$\varepsilon_i^3 f_1(1)+\varepsilon_i^2 f_2(1)+\varepsilon_i f_3(1)+f_4(1)=0 \quad (1 \le i \le 4)$$

这是一个由 4 个未知数、4 个方程式组成的线性方程组（将 $f_i(1)$ 看成是未知数），其系数行列式是一个 Vandermonde 行列式，显然其值不等于零，因此 $f_i(1)=0$。 $\square$