

## 0.1 映射与集合的基数

### 0.1.1 映射

#### 定义 0.1 (映射)

设  $A, B$  为非空集, 若存在对应法则  $f$ , 使得对每个  $x \in A$  都有唯一确定的  $y \in B$  与之对应, 则称对应法则  $f$  为从  $A$  到  $B$  的映射. 记为  $f : A \rightarrow B$ , 其表达形式为  $y = f(x), x \in A$ .

$A$  称为  $f$  的 **定义域**, 记为  $D(f)$ .  $B$  称为  $f$  的 **陪域**.  $A$  在  $f$  下的象称为  $f$  的 **值域**, 记为  $R(f)$ , 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合  $B_0 \subset B$  在  $f$  下的原象, 记为  $f^{-1}(B_0)$ , 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$



**注** 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

- (1) 对每一个  $x \in A$ , 只能有唯一的  $y \in B$  与它对应; 并且  $f$  的一个像可以存在多个原像.
- (2)  $f(A) \subset B$ , 不一定有  $f(A) = B$ ;
- (3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\phi(n) = B_n$ ;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如  $A$  可列,  $\mathcal{D} \subset 2^A$ , 定义  $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$  为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

#### 定义 0.2 (单射、满射和双射)

设  $f : A \rightarrow B$ , 则

1. 若  $B$  中每个元素最多只有一个原像, 即对  $\forall y \in B, f^{-1}(y)$  所含元素个数为 0 或 1, 则称  $f$  为 **单射**或**一映射**.
2. 若  $f(A) = B$ , 即  $\forall y \in B$ , 都存在  $x \in A$  使得  $f(x) = y$ , 亦即  $f^{-1}(y) = \emptyset, \forall y \in B$ , 则称  $f$  为 **满射**或**映上的**.
3. 若  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为**双射**或**一一对应**.



#### 定义 0.3 (逆映射)

设  $f : A \rightarrow B$  为一一映射, 则对每个  $y \in B$ , 都有唯一确定的  $x \in A$  满足  $y = f(x)$ . 定义  $f^{-1} : B \rightarrow A$  为  $f^{-1}(y) = x$ , 则称  $f^{-1}$  为  $f$  的**逆映射**. 自然  $f$  也是  $f^{-1}$  的逆映射, 即  $(f^{-1})^{-1} = f$ .



**笔记** 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

#### 定理 0.1

设  $f : A \rightarrow B$ , 则

1.  $f$  为单射的充要条件是

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

也即

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

亦即

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

2.  $f$  为双射的充要条件是存在  $g : B \rightarrow A$ , 使得

$$gf = \text{id}_A, \quad fg = \text{id}_B.$$

此时必有  $f = f^{-1}$ . 即有两个交换图, 如图 1 所示.



## 笔记

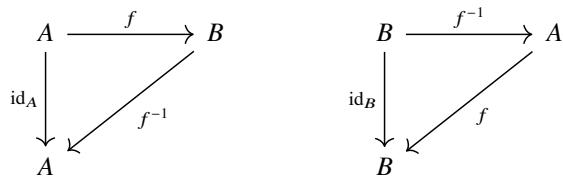


图 1

## 证明

□

### 定义 0.4 (映射的乘积)

设映射  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ , 定义  $g \circ f : A \rightarrow C$  为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为  $g$  与  $f$  的复合映射或乘积.  $g \circ f$  也常简记为  $gf$ .



### 定义 0.5

设映射  $f : A \rightarrow B, A_0 \subseteq A$ , 定义映射  $i : A_0 \rightarrow A$  满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称  $i$  为  $A_0$  到  $A$  中的嵌入映射. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射  $f : A \rightarrow B$  与映射  $g : A_0 \rightarrow B$  满足  $gi = f$ , 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称  $g$  为  $f$  在  $A_0$  上的限制, 记为  $g = f|_{A_0}$ , 也称  $f$  为  $g$  在  $A$  上的延拓或开拓. 即图 2 为交换图.



## 笔记

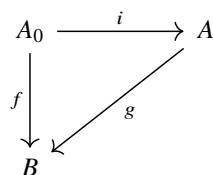


图 2

### 命题 0.1

设一列映射  $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- (1) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是单射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是单射.
- (2) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是满射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是满射.

(3) 若  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都是双射, 则  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  也是双射.



**证明**

(1)

(2)

(3)



### 定义 0.6 (特征函数 (示性函数))

集合  $E$  的特征函数 (示性函数) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$



**笔记** 特征函数  $\chi_E$  在一定意义上反映出集合  $E$  本身的特点, 可以通过它来表示各种集合关系.

### 命题 0.2 (特征函数的基本性质)

- (1)  $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x);$
- (2)  $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x);$
- (3)  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (4)  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (5)  $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)].$



**证明** 证明都是显然的.



### 命题 0.3 (映射的基本性质)

对于映射  $f : C \rightarrow D, A \subset C, B \subset D$ , 下列事实成立:

- (i) 若  $A \subset B$ , 则  $f(A) \subset f(B);$
- (ii)  $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha);$
- (iii)  $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ , 当且仅当  $f$  为单射时, “=” 成立;
- (iv)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ , 当且仅当  $f$  为满射时, “=” 成立;
- (v)  $A \subset f^{-1}(f(A))$ , 当且仅当  $f$  为单射时, “=” 成立;
- (vi)  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .



**笔记** (iv) 中第一条的直观理解是:  $B$  中某些元素不一定有原像 (即  $f$  可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是:  $C - A$  中的某些元素的像也可能在  $f(A)$  (即  $f$  可能不是单射).

**证明** (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到  $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$ , 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ .

设  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ , 则  $y \in f(A_1)$  且  $y \in f(A_2)$ , 故存在  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$  使得  $y = f(x_1) = f(x_2)$ . 由于  $f$  是单射, 则必有  $x_1 = x_2 = x$ . 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此，“=”成立.

反之，假设  $f$  不是单射，则存在  $x_1 \neq x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ . 构造集合  $A_1 = \{x_1\}$ ,  $A_2 = \{x_2\}$ , 则  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , 从而  $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ . 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

故  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ . 矛盾.

(iv) (1) 设  $y \in f(f^{-1}(B))$ , 则存在  $x \in f^{-1}(B)$  使得  $y = f(x)$ . 故  $y = f(x) \in B$ . 因此,  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

设  $y \in B$ ,  $f$  为满射, 则存在  $x \in A$  使得  $y = f(x)$ . 故  $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$ , 从而  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ , 于是  $B \subset f(f^{-1}(B))$ , 因此, “=”成立.

反之, 假设  $f$  不是满射, 则  $f(A) \subsetneq B$ . 由于  $f^{-1}(B) \subset A$ , 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与  $B = f(f^{-1}(B))$  矛盾.

(2) 设  $x \in A$ , 则  $f(x) \in f(A)$ , 故  $x \in f^{-1}(f(A))$ . 因此,  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

设  $x \in f^{-1}(f(A))$ , 则  $f(x) \in f(A)$ . 再由  $f$  是单射, 则必有  $x \in A$ . 从而  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ . 因此, “=”成立.

反之, 假设  $f$  不是单射, 则存在  $x_1 \neq x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ . 构造集合  $A = \{x_1\}$ , 则  $f(A) = \{f(x_1)\}$ . 故  $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$ , 从而  $A \neq f^{-1}(f(A))$ . 矛盾.

□

## 0.1.2 集合的对等

### 定义 0.7 (集合的对等)

设  $A, B$  为非空集, 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则称  $A$  与  $B$  对等, 记为  $A \sim B$ . 规定  $\emptyset \sim \emptyset$ .



**笔记**  $A$  与  $B$  对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

### 定理 0.2

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

- (1) (反身性)  $A \sim A$ ;
- (2) (对称性) 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ ;
- (3) (传递性) 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .



**证明** 证明是显然的.

□

### 命题 0.4

- (1) 设  $A, B, C, D$  都是非空集合, 若  $A \sim C, B \sim D$ , 则  $A \times B \sim C \times D$ .
- (2) 设  $A_i, B_i$  都是非空集合, 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 若  $A_i \sim B_i$ , 则  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ .



**证明**

- (1) 由  $A \sim C, B \sim D$  可知, 存在双射  $f : A \rightarrow C$  和  $g : B \rightarrow D$ . 于是令

$$\varphi : A \times B \rightarrow C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对  $\forall (a, b) \in A \times B$ , 由  $f(a) \in C, g(b) \in D$  可知  $(f(a), g(b)) \in C \times D$ . 故  $\varphi$  是良定义的. 由  $f, g$  都是双射易知  $\varphi$  也是双射. 故  $A \times B \sim C \times D$ .

(2) 根据(1)的结论,再利用数学归纳法不难证明.

□

**例题 0.1** 自然数集  $\mathbb{N} \sim$  正偶数集  $\sim$  正奇数集  $\sim$  整数集  $\mathbb{Z}$ .

**证明** 正偶数集  $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ; 正奇数集  $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ ;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

**例题 0.2**  $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$ .

**证明**  $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$ .

□

**例题 0.3**  $\{\text{去掉一点的圆周}\} \sim \mathbb{R}$ .

**笔记** 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

**证明** 如图 3, 设圆周为  $C$ , 从除去的点  $P$  作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切(不过点  $P$ )的直线表示实轴  $\mathbb{R}$ . 对于  $C - \{P\}$  上的每一点  $c$ , 从点  $P$  作过点  $c$  的直线必与实轴相交于某点, 记为  $x$ . 建立一一对应:  $s : \mathbb{R} \rightarrow C - \{P\}$  为  $s(x) = c$ . (点  $P$  对应  $\infty$ )

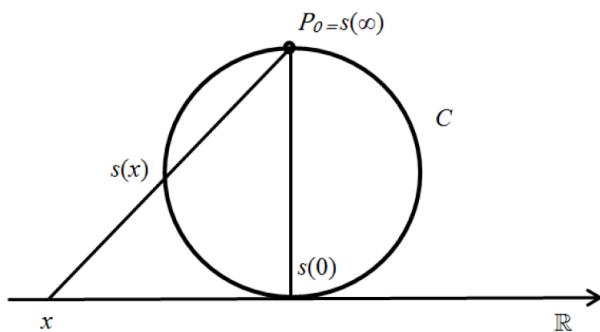


图 3: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

### 引理 0.1

设  $A, B$  为非空集, 若  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ , 则  $A$  与  $B$  存在如下分解:

- (i)  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ ;
- (ii)  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ;
- (iii)  $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$ .

♡

**证明** 作集族

$$\Gamma = \{E \subset A : E \cap g(B - f(E)) = \emptyset\}$$

$\Gamma$  中的元称为  $A$  中的隔离集. 令  $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$ , 则  $A_1 \in \Gamma$ . 实际上, 对任意的  $E \in \Gamma$ , 都有  $E \subset A_1$ , 再由  $E \cap g(B - f(E)) = \emptyset$  知

$$E \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

从而

$$A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B - f(E))] = \emptyset$$

因此,  $A_1$  是  $A$  中隔离集, 且是  $\Gamma$  中的最大元.

现在令  $B_1 = f(A_1), B_2 = B - B_1, A_2 = g(B_2)$ , 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

下面只需验证  $A_1 \cup A_2 = A$ .

若不然, 则存在  $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$ . 令  $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$ , 由于  $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$ , 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  以及  $x_0 \notin A_2$  知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset$$

故  $A_0 \in \Gamma$ . 这与  $A_1$  是  $\Gamma$  中的最大元矛盾.

□

### 0.1.3 集合的基数 (势)

#### 定义 0.8 (集合的基数 (势))

设  $A, B$  为两个集合, 若  $A \sim B$ , 则称  $A$  与  $B$  的基数或势相同, 记为  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

♣

 **笔记** 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

#### 定理 0.3

- (1) 自反性:  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (2) 对称性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (3) 传递性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ .

♡

**证明** 由定理 0.2 及集合的基数 (势) 的定义可直接得到.

□

#### 定义 0.9

对于集合  $A, B$ , 若有  $B_0 \subset B, A \sim B_0$ , 则称  $A$  的基数小于等于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ . 若  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$  且  $A$  与  $B$  不对等, 则称  $A$  的基数小于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ . 同理可定义  $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$  和  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ .

♣

#### 命题 0.5 (映射与基数之间的关系)

- (1) 若存在从  $A$  到  $B$  的单射, 则  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ ;
- (2) 若存在从  $A$  到  $B$  的满射, 则  $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$ ;
- (3) 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

◆

**证明**

- (1)
- (2)
- (3)

□

**定理 0.4 (Bernstein 定理)**

Bernstein 定理的两个等价形式:

- (1) 若  $A$  与  $B$  的某子集对等,  $B$  与  $A$  的某子集对等, 则  $A \sim B$ .
- (2) 若集合  $A, B$  满足  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

**证明**

- (1) 由题设存在单射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 利用引理 0.1 可得到  $A$  与  $B$  的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . 注意到  $f: A_1 \rightarrow B_1, g^{-1}: A_2 \rightarrow B_2$  是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则  $F: A \rightarrow B$  是一一映射, 从而  $A \sim B$ .

- (2) 由定义 0.8 和定义 0.9 可知 (2)  $\Leftrightarrow$  (1).

**例题 0.4**  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

**证明** 由例题 0.2 可知,  $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subset [-1, 1]$ ; 又  $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ . 由 Bernstein 定理 (1) 可知,  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

**定理 0.5**

对于集合  $A, B$ ,  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  中的任意两个不会同时成立.



**证明** 由定义 0.9 可知, 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $A$  与  $B$  对等, 另外两个不会成立; 假设  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$  与  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  同时成立, 则存在  $B_0 \subset B, A_0 \subset A$ , 使得  $A \sim B_0, B \sim A_0$ . 使用 Bernstein 定理 (1) 得出  $A \subset B$ , 进而  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 显然矛盾, 证毕.

**定义 0.10 (有限集与无限集)**

设  $A$  是一个非空集合, 若存在自然数  $n$ , 使得  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ , 则称  $A$  为**有限集**, 并记  $\overline{\overline{A}} = n$ . 若  $A$  不是有限集, 则称  $A$  为**无限集**. 特别地, 规定  $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$ .



**笔记** 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

**定理 0.6**

设  $A$  是非空集合, 则

- (1)  $A$  是有限集的充要条件是  $A$  不与其任何真子集对等.
- (2)  $A$  是无限集的充要条件是  $A$  与其某个真子集对等.



**笔记** 这就是有限集与无限集的本质区别.

**证明** 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设  $\overline{\overline{A}} = n$ , 用数学归纳法证明,  $n = 1$ , 显然. 假设  $n = k$  时, 结论成立.

当  $n = k + 1$  时, 若存在  $A$  的某个真子集  $A_0$  使得  $A \sim A_0$ , 则存在一一映射  $\varphi: A \rightarrow A_0$ . 下面分两种情况:

(i)  $\exists a \in A$ , 使得  $\varphi(a) = a$ .

令  $A_1 = A - \{a\}, A_2 = A_0 - \{a\}$ , 则  $A_2$  是  $A_1$  的真子集,  $\overline{\overline{A_1}} = k$ . 而  $\varphi|_{A_1}$  是  $A_1$  到  $A_2$  的一一映射, 故  $A_1 \sim A_2$ . 这与假设矛盾.

(ii)  $\forall a \in A$ , 都有  $\varphi(a) \neq a$ .

$A_0$  是  $A$  的真子集, 则存在  $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$ . 令

$$A_3 = A - \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 - \{\varphi(x_0)\}$$

注意到  $x_0 \notin A_0$  以及  $A_0$  是  $A$  的真子集, 则  $A_4$  是  $A_3$  的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subset A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故  $\varphi(x_0) \in A - \{x_0\} = A_3$ , 而  $\varphi(x_0) \notin A_0 - \{\varphi(x_0)\} = A_4$ . 从而  $A_4$  是  $A_3$  的真子集, 于是  $\overline{A_3} = k, \varphi|_{A_3}$  是  $A_3$  到  $A_4$  的一一映射, 故  $A_3 \sim A_4$ . 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设  $A$  是无限集. 先证明在任一无限集  $A$  中, 一定能取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ . 事实上, 在  $A$  中任取一个元素, 记为  $a_1$ . 因为  $A$  是无限集, 集  $A - \{a_1\}$  显然不空, 这时再从集  $A - \{a_1\}$  取一个元素  $a_2$ , 同样,  $A - \{a_1, a_2\}$  决不空. 可以继续做下去, 将从  $A$  中取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ , 记余集为  $\hat{A} = A - \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ . 在  $A$  中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \dots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作  $A$  与  $\tilde{A}$  之间的映射  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\varphi(a_i) &= a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \varphi(x) &= x, \quad x \in \hat{A}\end{aligned}$$

显然,  $\varphi$  是  $A$  到  $\tilde{A}$  上的一一对应, 证毕.

再证 (1)(2) 的充分性.

(1) 的充分性: 设  $A$  不与其任何真子集对等, 假设  $A$  是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此  $A$  不是无限集, 故  $A$  是有限集.

(2) 的充分性: 设  $A$  与其某个真子集对等, 假设  $A$  是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此  $A$  不是有限集. 故  $A$  一定是无限集.

□