0.1 组合类问题

例题 0.1 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵, 其中元素 $A(i,j)\in\{-1,1\}$, 且 A 的行向量两两正交. 若对任意的 $i\in\{1,2,\dots,k\}$,$j\in\{1,2,\dots,l\}$, 都有 $A(i,j)=1$, 证明:$kl\leqslant n$.

证明 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_k$ 是矩阵 A 的前 k 个行向量. 根据题意, 这些向量两两正交. 即对于任意 $i\neq j$ 且 $1\leq i,j\leq k$, 我们有:

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j=\sum_{p=1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0.$$

我们可以将这个求和式分解为两部分: 前 l 个分量和后 $n-l$ 个分量.

$$\sum_{p=1}^{l}A(i,p)A(j,p)+\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0$$

根据题设, 对于 $1\leq i\leq k$ 和 $1\leq p\leq l$, 都有 $A(i,p)=1$. 所以, 对于任意 $1\leq i,j\leq k$ 且 $i\neq j$, 上式的第一部分为:

$$\sum_{p=1}^{l}A(i,p)A(j,p)=\sum_{p=1}^{l}(1)(1)=l$$

将此结果代入, 我们得到:

$$l+\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0\implies\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=-l$$

现在, 我们定义 k 个新的向量 $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\dots,\mathbf{c}_k\in\mathbb{R}^{n-l}$, 其中每个向量 $\mathbf{c}_i$ 由对应行向量 $\mathbf{a}_i$ 的后 $n-l$ 个分量构成:

$$\mathbf{c}_i=(A(i,l+1),A(i,l+2),\dots,A(i,n)).$$

对于这些新向量, 我们有如下的点积关系:

(i) 对于 $i\neq j$,$\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j=\sum\limits_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=-l$.

(ii) 对于 $i=j$,$\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_i=\sum\limits_{p=l+1}^{n}(A(i,p))^2=\sum\limits_{p=l+1}^{n}1^2=n-l$, 因为 $A(i,p)\in\{-1,1\}$.

考虑这些向量的和向量 $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^{k}\mathbf{c}_i$. 我们来计算其模的平方 $\|\mathbf{v}\|^2$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}&=\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{c}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\mathbf{c}_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j)=\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_i)+\sum_{1\leq i\neq j\leq k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j).\end{aligned}$$

在上式中, 对角线上的项 $(i=j)$ 有 k 个, 非对角线上的项 $(i\neq j)$ 有 $k(k-1)$ 个. 代入我们之前计算的点积值:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2&=k\cdot(n-l)+k(k-1)\cdot(-l)=kn-kl-k^2l+kl\\&=kn-k^2l=k(n-kl)\end{aligned}$$

因为向量模的平方必须是非负的, 所以 $\|\mathbf{v}\|^2\geq 0$.

$$k(n-kl)\geqslant 0$$

根据题意,k 是行数, 所以 $k\geq 1$(如果 $k=0$ 或 $l=0$, 则 $kl=0\leq n$ 显然成立). 故

$$n-kl\geqslant 0.$$

这直接导出了我们要证明的结论:

$$kl\leq n$$

证明完毕.

□

例题 0.2 设 $n \geq 4$. 设 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = \pm 1$ 且它的行向量两两正交. 证明:

(1) A 的列向量两两正交.

(2) n 是偶数, 并且 n 是 4 的倍数.

证明

(1) 设 A 的列向量分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则由 A 的行向量两两正交可知

$$AA^T = nI_n \Longrightarrow A^T A = nI_n \Longrightarrow \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

故 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$. 因此 A 的列向量也两两正交.

(2) 不妨设 A 的第一行全为 1, 否则对第一行中 -1 所在列乘 -1. 由 A 的第一行与第二行正交知

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} = 0.$$

从而 A 的第二行元素中 1 和 -1 的个数相同, 因此 $2|n$. 不妨设

$$a_{2j} = 1, \quad j = 1, \cdots, \frac{n}{2};$$
$$a_{2j} = -1, \quad j = \frac{n}{2} + 1, \cdots, n.$$

再由 A 的第三行与第一行正交以及第三行与第二行正交可得

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} a_{1j}a_{3j} + \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} a_{1j}a_{3j} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} a_{3j} + \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} a_{3j} = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} a_{2j}a_{3j} + \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} a_{2j}a_{3j} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} a_{3j} - \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} a_{3j} = 0.$$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} a_{3j} = \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n} a_{3j} = 0.$$

因此 $a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3,\frac{n}{2}}$ 中 -1 和 1 的个数相同, 故 $2|\frac{n}{2}$, 即 $4|n$.

□