0.1 复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系, 实数对 (a, b) 就表示平面上的一个点, 所以复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 可以看成平面上以 a 为横坐标、以 b 为纵坐标的一个点 (图 1). 这个点的极坐标设为 (r, θ), 那么

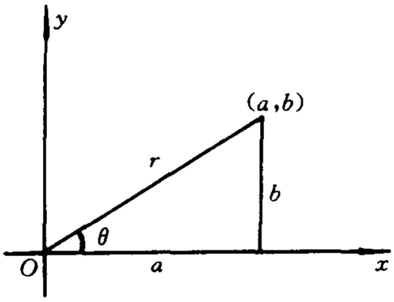

图 1

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta,$$

因而复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 也可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

这里,$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 就是前面定义过的 z 的模,θ 称为 z 的**辐角**, 记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$. 容易看出, 如果 θ 是 z 的辐角, 那么 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐角, 这里,k 是任意的整数, 因此 z 的**辐角有无穷多个**. 但是在 $\mathrm{Arg}z$ 中, 只有一个 θ 满足 $-\pi < \theta \leqslant \pi$, 称这个 θ 为 z 的**辐角的主值**, 把它记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z},$$

这里,$\mathbf{Z}$ 表示整数的全体. 注意,0 的辐角没有意义.

我们还可把复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 看成在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 a 和 b 的一个向量, 这时我们就把复数和向量作为同义语来使用. 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 $z_2 - z_1$, 因而 $|z_2 - z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 $z_1 + z_2$; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 $z_1 - z_2$(图 2). 现在再来看命题**??**(ii) 的不等式 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

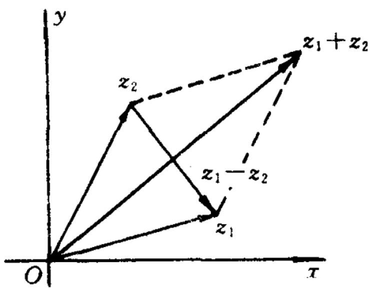

图 2

定理 0.1

设 z_1, z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$.

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$.

笔记 在 (1) 中, 第一个等式在命题??(iv) 中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按反时针方向转动 $\dfrac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

(2) 再看复数的除法, 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

□

命题 0.1

(1) 向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(2) 向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

证明

(1) 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$, 这说明 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是一个纯虚数, 因而 $z_1\bar{z}_2 = \dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个纯虚数, 即 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(2) 这是因为 z_1 与 z_2 平行就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\pi$, 即 $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \pm\pi$, 这说明 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是一个实数, 因而 $z_1\bar{z}_2 = \dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个实数, 即 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

□

例题 0.1 在图 3的三角形中,$AB = AC$,$PQ = RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN \perp BC$.

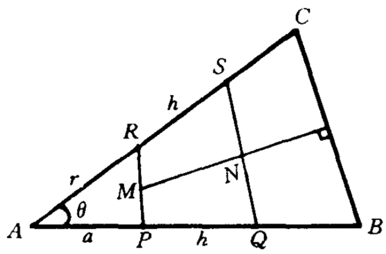

图 3

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M:\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N:\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1=\overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1=\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]-\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB=AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2=\overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-b=b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1)=\frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 所以由命题 0.1(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN\perp BC$. □

例题 0.2 证明: 平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0. \tag{1}$$

证明 从图 4可以看出,z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆的充要条件是向量 z_1-z_3 和 z_1-z_4 的夹角等于向量 z_2-z_3 和 z_2-z_4 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 0.1(2)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 在实轴上, 因而等式(1)成立.

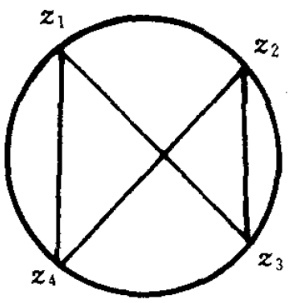

图 4

□

定理 0.2 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \cdots, z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n = r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1 = \cdots = z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta} \\ &= \cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta = \cos(-n)\theta + \mathrm{i}\sin(-n)\theta.\end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n = w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

证明 现在设 $w = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的, 要求的 $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n = w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

由此即得 $\rho = \sqrt[n]{r}$,$n\varphi = \theta + 2k\pi$,$k = 0, 1, \cdots, n-1$. 这就是说, 共有 n 个复数满足 $z^n = w$, 它们是

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w = 1$ 时, 若记 $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w}, \sqrt[n]{w}\omega, \cdots, \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

□