

0.1 群集合上的作用

定义 0.1 (群作用)

设 G 是一个群, X 是一个非空集合. 若 $G \times X$ 到 X 的映射 f 满足

- (1) $f(e, x) = x, \forall x \in X, e$ 为 G 的么元;
- (2) $f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)), \forall g_1, g_2 \in G, x \in X,$

则称 f 决定了群 G 在 X 上的一个作用.

群 G 可以多种方式作用在一个集合 X 上. 在不需要特别指出映射 f (即固定好一种作用方式) 时, 常记

$$f(g, x) = g(x), \quad \forall g \in G, x \in X.$$

此时 f 满足的条件 (1), (2) 相应地变为

- (1) $e(x) = x, \forall x \in X, e$ 为 G 的么元;
- (2) $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall x \in X, g_1, g_2 \in G.$



定理 0.1

1. 设 G 是一个群, 取 $X = G$,

(a). 若定义 f 为

$$f(g, x) = L_g(x) = gx, \quad \forall g, x \in G.$$

则 f 定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为左平移作用.

(b). 若定义 f_1 为

$$f_1(g, x) = R_{g^{-1}}(x) = xg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则 f_1 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为右平移作用.

(c). 若定义 f_2 为

$$f_2(g, x) = \text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则 f_2 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 称为伴随作用.

2. 设 H 为群 G 的子群, 取 $X = G/H$ (H 在 G 中全体左陪集的集合). 定义 f 为

$$f(g, xH) = gxH, \quad \forall g \in G, xH \in G/H,$$

则 f 定义了 G 在 G/H 上的作用 (左平移作用). 特别地, 当 $H = \{e\}$ 时, f 恰是 G 在 G 上的左平移作用.



证明



定义 0.2

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$, 使 $y = g(x)$, 则称 G 在 X 上的作用是可逆的, X 称为 (对于 G 的) 齐性空间.



定义 0.3

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $g(x) = x (\forall g \in G, \forall x \in X)$, 则称 G 在 X 上的作用是平凡的.



注 显然, 对任意群 G , 任意非空集合 X , 总可定义 G 在 X 上的平凡作用. 由上述定义知 G 在 G 上的伴随作用为平凡作用当且仅当 G 为 Abel 群.

定义 0.4

设群 G 作用在集合 X 上, e 为 G 的幺元, 若当且仅当 $g = e$ 时, $g(x) = x (\forall x \in X)$ 成立, 则称 G 在 X 上的作用是有效的.

命题 0.1

群 G 在 G 上的左平移作用与右平移作用既是可递的又是有效的, 而 G 在 G/H 上的左平移作用是可递的.



注 G 在 G 上的伴随作用的可递性与有效性都不能肯定.

G 在 G/H 上的左平移作用不一定是有效的.

证明

定义 0.5

设群 G 作用在集合 X 上, $x \in X$. 称 X 中的子集

$$O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}$$

为 x 的轨道. G 中子集

$$S_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

称为 x 的迷向子群. 也称为 x 在 G 中的稳定子或稳定化子.



注 容易验证 x 的迷向子群是 G 的子群.

命题 0.2

群 G 在集合 X 上的作用是可递的充要条件是对 $\forall x \in X$, 有 $X = O_x$.

进而对 $\forall x \in X$, G 在 O_x 上的作用都是可递的.



证明 必要性: 对 $\forall x \in X$, 固定 x . 再对 $\forall y \in X$, 则由 G 在 X 上的作用是可递的知, 存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x) \in O_x$. 故由 y 的任意性知 $X \subseteq O_x$. 又显然 $O_x \subseteq X$, 故 $X = O_x$.

充分性: 若对 $\forall x \in X$, 有 $X = O_x$, 则对 $\forall y \in X$, 都存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 因此由 x, y 的任意性知 G 在 X 上的作用是可递的.



例题 0.1 设 $X = \mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, $G = SO(n)$ 为 X 的特殊正交群, G 以通常方式作用在 X 上. 又设 $X = (1, 0, \dots, 0)'$, 则易得

$$O_x = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X, |\mathbf{y}| = 1\} = S^{n-1}$$

是 X 中 $n-1$ 维单位球面, 其中, $|\mathbf{y}|$ 为向量 \mathbf{y} 的长度,

$$S_x = \{\text{diag}(1, A) \mid A \in SO(n-1)\},$$

故 S_x 与 $n-1$ 维特殊正交群 $SO(n-1)$ 同构.

证明

**定理 0.2**

设群 G 作用在集合 X 上. 则有

$$(1) \quad O_x = O_y \iff O_x \cap O_y \neq \emptyset.$$

(2) 在 X 中定义关系 R :

$$xRy \iff \exists g \in G, \text{ 使 } y = g(x).$$

则 R 为等价关系且 x 所在的等价类为 x 的轨道 O_x , 进而 X 等价类(所有轨道)集合是 X 的一个分划.
即 X 是所有不同轨道的并

$$X = \bigsqcup_x O_x,$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.

(3) 如果 X 为有限集, 则

$$|X| = \sum_{x \in X} |O_x|,$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.



证明

(1) 设 $O_x \cap O_y \neq \emptyset$. 任取 $z \in O_x \cap O_y$, 则存在 $g_1, g_2 \in G$, 使

$$g_1x = z = g_2y.$$

于是 $y = g_2^{-1}g_1x \in O_x$, 由此得 $O_y \subseteq O_x$. 同理可证 $O_x \subseteq O_y$. 所以 $O_x = O_y$.

(2) 对 $\forall x, y, z \in X$, 由 $e(x) = x$ 知 xRx ($\forall x \in X$), 由 $g(x) = y$ 得 $g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$, 即 $xRy \Rightarrow yRx$,
再由 xRy, yRz 知 $\exists g_1, g_2 \in G$, 使得 $y = g_1(x), z = g_2(y)$, 故 $z = g_2g_1(x)$, 即 xRz . 这就说明 R 是等价关系, 由 R
的定义知 x 的等价类为 O_x .

(3) 因为 X 是有限集, 所以至多只有有限多个不同的轨道. 由定理 0.2(2) 知

$$X = \bigsqcup_{x \in X} O_{x_i}.$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素. 又因为 $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset (i \neq j)$, 所以

$$|X| = \sum_{x \in X} |O_x|.$$



定理 0.3

设群 G 作用在集合 X 上.

(1) 对 $\forall g \in G$, 定义 X 到 X 的映射 σ 满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X \tag{1}$$

则定义的 σ_g 是 X 的可逆变换, 即 $\sigma_g \in S_X$.

(2) 定义的 G 到 S_X 的映射 σ 满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \forall g \in G.$$

其中 σ_g 的定义如(1)式. 则

(i) σ 是一个同态映射, 并且 G 在 X 上的作用有效当且仅当 σ 是单同态.

(ii) $\ker \sigma \triangleleft G$, G 在 O_x 上作用有效当且仅当 S_x 中所包含的 G 的正规子群仅为 $\{e\}$.

(3) 若 σ 是群 G 到 S_X 的同态, 则由

$$g(x) = \sigma(g)(x), \quad \forall g \in G, x \in X \tag{2}$$

定义了 G 在 X 的作用.



证明

(1) 任取 $g \in G$, 由式(1)有

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

同样有

$$\sigma_g \sigma_{g^{-1}}(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

故

$$\sigma_{g^{-1}} \sigma_g = \sigma_g \sigma_{g^{-1}} = \text{id}_X,$$

因而 $\sigma_g \in S_X$ 且 $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$.

(2) (i) 取 $g_1, g_2 \in G$, 对 $\forall x \in X$ 有

$$\sigma(g_1 g_2)(x) = \sigma_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) = \sigma_{g_1} \sigma_{g_2}(x) = \sigma(g_1) \sigma(g_2)(x),$$

即

$$\sigma(g_1 g_2) = \sigma(g_1) \sigma(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

因而 σ 是 G 到 S_X 的同态. 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \sigma_g = \text{id}_X,$$

即

$$g(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

故 G 在 X 上作用有效当且仅当 $\ker \sigma = \{e\}$, 即 σ 是单射.

(ii) 设 σ 为 G 到 S_{O_x} 的映射, 满足 $\sigma(g)y = g(y) (\forall y \in O_x)$. 于是由定理 0.3 知 σ 是同态且 G 在 O_x 上作用有效当且仅当 $\ker \sigma = \{e\}$. 由命题????知道 $\ker \sigma \triangleleft G$. 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \text{id}_X \iff g(x) = x (\forall x \in X) \iff g \in S_x. \quad (3)$$

故 $\ker \sigma \subseteq S_x$, 因而若 S_x 中所含 G 的正规子群仅为 $\{e\}$, 则必有 $\ker \sigma = \{e\}$. 从而 G 在 O_x 上作用有效.

设 $N \triangleleft G$, $N \subseteq S_x$. 任取 $h \in N$, 对 $\forall y \in O_x$, 都存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 由 $N \triangleleft G$ 知 $g^{-1}hg \in N \subseteq S_x$, 因而

$$h(y) = h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(g^{-1}hg(x)) = g(x) = y, \quad \forall y \in O_x.$$

由(3)式知 $h \in \ker \sigma$, 即 $N \subseteq \ker \sigma$. 所以若 G 在 O_x 上作用有效, 则 $\ker \sigma = \{e\}$, 由此知 $N = \{e\}$, 即 $\{e\}$ 为 S_x 所包含的唯一的 G 的正规子群.

(3) 因 σ 是 G 到 S_X 的同态, 由式(2)有

$$e(x) = \sigma(e)(x) = \text{id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

$$g_1(g_2(x)) = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)(x)) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x) = \sigma(g_1g_2)(x) = g_1g_2(x), \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G,$$

即 σ 定义了 G 在 X 上的作用.

□

定义 0.6

设群 G 作用在集合 X 与 X' 上, 若有 X 到 X' 上的一一对应 ϕ , 使

$$g(\phi(x)) = \phi(g(x)), \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称 G 在 X, X' 上的作用等价.

♣

注 如果将 g 引起的 X, X' 上的置换仍以 g 来表示, 那么 G 在 X, X' 上的作用等价也就是对任何 $g \in G$, 图 1 是交换图.

如果在 G 作用的集合之间规定关系 $R : XRX'$, 若 G 在 X, X' 上作用等价. 这显然是一个等价关系, 因而从抽象的观点来看, 等价作用可以看成是一样的.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{\phi} & X' \end{array}$$

图 1

定理 0.4

设群 G 在 X 上的作用可递, $x \in X$, 则 G 在 X 上的作用与 G 在 G/S_x 上的作用(左平移作用)等价.



注 这个定理表明 G 在每个轨道上的作用相当于 G 在某个左陪集空间上的作用.

证明 因 G 在 X 上的作用可递, 于是由**命题 0.2**有

$$X = O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

作 G/S_x 到 X 的映射 ϕ 如下:

$$\phi(gS_x) = g(x), \quad \forall g \in G.$$

显然 ϕ 是满射. 由于 $g_1S_x = g_2S_x$ 当且仅当 $g_1^{-1}g_2 \in S_x$, 当且仅当 $g_1^{-1}g_2(x) = x$, 当且仅当 $g_1(x) = g_2(x)$, 因而 ϕ 是单射. 故 ϕ 是 G/S_x 到 X 上的一一对应. 又对 $\forall h \in G$ 有

$$\phi(h(gS_x)) = \phi(hgS_x) = hg(x) = h(\phi(gS_x)),$$

故 G 在 G/S_x 与 X 上的作用等价.

**推论 0.1**

设有限群 G 作用在集合 X 上, O_x 为 $x \in X$ 的轨道, 则 O_x 中元素个数 $|O_x| = [G : S_x]$, 因而

$$|G| = |O_x| |S_x|.$$

如果 X 还是有限集, 则

$$|X| = \sum_{x \in X} [G : S_x], \tag{4}$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素. 公式(4)称为轨道公式.



证明 由**定理 0.2(2)**知 G 在 O_x 上作用可递, 故由**定理 0.4**知, G 在 X 上的作用与 G 在 G/S_x 上的作用等价, 即存在 X 到 G/S_x 的双射. 因此 $|O_x| = [G : S_x]$. 再由 Lagrange 定理知

$$|G| = [G : S_x] |S_x| = |O_x| |S_x|,$$

再由**定理 0.2(3)**可得

$$|X| = \sum_{x \in X} [G : S_x],$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.

**定理 0.5**

设 G 是一个群, 在伴随作用下.

(1) 对 $\forall g \in G$, 定义 G 上的变换 $\text{ad}g$ 满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G. \tag{5}$$

则 $\text{ad}g$ 是 G 的可逆变换，并且

$$S_{g(x)} = \text{ad}g(S_x) = gS_xg^{-1}.$$

(2) 定义 G 到 S_G 的映射 ad 满足

$$\text{ad}: g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

其中 $\text{ad}g$ 的定义如(5)式。则 ad 是 G 到 S_G 的同态。



证明

(1) 由定理 0.3(1) 知映射 $\text{ad}g$ 是 G 的可逆变换，即 $\text{ad}g \in S_G$ 。

设 $g(x) = y$ 且 $g_1 \in S_y$ ，即有 $y = g_1(y)$ ，则 $g_1g(x) = g(x)$ ，因而 $g_2 = g^{-1}g_1g \in S_x$ ，故 $g_1 = gg_2g^{-1} \in \text{ad}g(S_x)$ 。反之，若 $g_2 \in S_x$ ，则有

$$gg_2g^{-1}(y) = gg_2g^{-1}(g(x)) = g(x) = y,$$

故 $gg_2g^{-1} \in S_y$ 。这样就证明了 $S_y = \text{ad}g(S_x)$ 。

(2) 由定理 0.3(2) 知映射 ad 是 G 到 S_G 的同态。



定义 0.7

设 G 是一个群， $g \in G$ ， g 在伴随作用下的轨道称为以 g 为代表的共轭类，记为 C_g 。若 $h \in C_g$ ，则称 h 与 g 共轭。

g 在伴随作用下的逆像子群，称为 g 在 G 中的中心化子，记作 $C_G(g)$ 。在不混淆时，简称为 g 的中心化子，记作 $C(g)$ 。若 $H \subseteq G$ ，则将 H 中每个元素在 G 中的中心化子之交

$$C_G(H) = \bigcap_{h \in H} C_G(h) = \bigcap_{h \in H} F_h$$

称为 H 在 G 中的中心化子。

在伴随作用下，对 $\forall g \in G$ ，定义 G 上的可逆变换 $\text{ad}g$ 满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

称 $\text{ad}g$ 为群 G 的共轭变换， x 在共轭变换下的像 gxg^{-1} 称为 x 的共轭元。

再定义 G 到 S_G 的同态 ad 满足

$$\text{ad}: g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

称 $\ker \text{ad}$ 为 G 的中心，记作 $C(G)$ 。



定理 0.6

设 G 是一个群， $H \subseteq G$ ， $g \in G$ ，在伴随作用下，有

- (1) $C_g = \{kgk^{-1} \mid k \in G\}$.
- (2) $g, h \in G$ 共轭 $\iff \exists k \in G$ ，使 $h = kgk^{-1}$.
- (3) $C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}$.
- (4) $C_G(H) = \{g \in G \mid hgh^{-1} = g\} = \{g \in G \mid hg = gh, \forall h \in H\}$.
- (5) $C(G) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}$.



证明

(1) 由定义知

$$C_g = \{\text{ad}k(g) \in G \mid k \in G\} = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\}.$$

(2) 由定理 0.6(1)知

$$C_g = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\},$$

则

$$g, h \in G \text{ 共轭} \iff h \in C_g \iff \exists k \in G, \text{ 使 } h = kgk^{-1}.$$

(3) 由定义知

$$\begin{aligned} C_G(H) &= \bigcap_{h \in H} C_G(h) = \bigcap_{h \in H} F_h = \bigcap_{h \in H} \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} \\ &= \{g \in G \mid ghg^{-1} = h, \forall h \in H\} = \{g \in G \mid gh = gh, \forall h \in H\}. \end{aligned}$$

(4) 由定义知

$$C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid \text{ad}k(g) = g\} = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}.$$

(5) 由定义知

$$\begin{aligned} C(G) &= \ker \text{ad} = \{k \in G \mid \text{ad}(k) = \text{id}_G\} = \{k \in G \mid \text{ad}k = \text{id}_G\} \\ &= \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}. \end{aligned}$$

□

定理 0.7

设 G 是一个群, $g \in G$, 则有

- (1) $C(g) = C(g^{-1})$.
- (2) $C(G)$ 是 G 的正规子群且 $\text{ad}G \cong G/C(G)$.
- (3) G 中共轭关系为等价关系, 因而 G 的共轭类的集合是 G 的一个划分. 即 X 是所有不同轨道的并

$$X = \bigsqcup_x O_x,$$

其中 x 取遍 X 的不同共轭类的代表元素.

- (4) 若 G 是有限群, 则 $|C_g| = [G : C(g)]$, 并且

$$|G| = |C(G)| + \sum_{x \in G} [G : C(x)], \quad (6)$$

其中 x 取遍非中心的元素的共轭类的代表元. 公式(6)称为群方程.

- (5) $h \in C(G) \iff |C_h| = 1 \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g)$. 进而 $C(G) = \bigcap_{g \in G} C(g)$.

♡

证明

(1) 只需注意到

$$C(g) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \left\{k \in G \mid (kgk^{-1})^{-1} = g^{-1}\right\} = \{k \in G \mid kg^{-1}k^{-1} = g^{-1}\} = C(g^{-1}).$$

(2) 由定理 0.3(2)(ii) 知 $C(G) \triangleleft G$. 再由群的同态基本定理知 $\text{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构.

(3) 由定理 0.2(2) 即得.

(4) 由推论 0.1 得

$$|G| = \sum_x [G : C(x)], \quad (7)$$

其中 x 取遍不同的共轭类的代表元素. 又由于

$$[G : C(x)] = 1 \iff G = C(x) \iff x \in C(G),$$

所以在(7)式中把值为 1 的项加到求和号外面来即得

$$|G| = |C(G)| + \sum_x [G : C(x)],$$

其中 x 取遍非中心的元素的共轭类的代表元.

(5) 由定理 0.6 可得

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff ghg^{-1} = h, \forall g \in G \iff C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} = \{h\} \iff |C_h| = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk\}, \forall g \in G \iff h \in C(g), \forall g \in G \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g). \end{aligned}$$

□

定理 0.8 (Cauchy 定理)

设 G 为有限群, $|G| = n$, 则对 n 的任一素因子 p, G 必有阶为 p 的元素.

♡

证明 对 n 应用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 结论显然成立. 假定结论对所有阶小于 n 的群成立. 考察 n 阶群 G 的群方程:

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^t [G : C(x_i)],$$

其中 x_i 取遍非中心的元素的共轭类的代表元, t 为 G 中所有不同轨道的个数.

(a) 如果 $p \mid |C(G)|$, 则由命题 ?? 知 $C(G)$ 含有阶为 p 的元素, 从而 G 含有阶为 p 的元素.

(b) 如果 $p \nmid |C(G)|$, 则因为 $p \mid |G|$, 所以至少存在一个 x_i , 使 $p \nmid [G : C(x_i)]$, 即 $p \nmid \frac{|G|}{|C(x_i)|}$. 又 $p \mid |G|$, 故 $p \mid |C(x_i)|$. 因为 $\frac{n}{|C(x_i)|} = \frac{|G|}{|C(x_i)|} = [G : C(x_i)] > 1$, 所以 $|C(x_i)| < n$. 由归纳假设知 $C(x_i)$ 含有阶为 p 的元素, 因此 G 含有阶为 p 的元素.

从而由归纳法原理知结论成立.

□

定义 0.8

设群 G 作用在集合 X 上, $g \in G, x \in X$.

- (1) 如果 $g(x) = x$, 则称 x 为 g 的一个不动元素 (fixed element). g 的全部不动元素的集合称为 g 的不动元素集 (the set of fixed elements), 记作 F_g .
- (2) 如果对任意的 $g \in G$, 都有 $g(x) = x$, 则称 x 为 G 的一个不动元素. G 的全部不动元素的集合称为 G 的不动元素集, 记作 F_G .

♣

定理 0.9 (Burnside 引理)

设有限群 G 作用在有限集合 X 上, n 表示 X 在 G 的作用下的不同轨道数, 则

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|, \quad (8)$$

其中 $|F_g|$ 表示 g 的不动元素的个数.

♡

证明 对任意的 $x \in X, g \in G$, 定义

$$\delta(g, x) = \begin{cases} 1, & g(x) = x, \\ 0, & g(x) \neq x. \end{cases}$$

由定义知

$$|F_g| = \sum_{x \in X} \delta(g, x), \quad |S_x| = \sum_{g \in G} \delta(g, x),$$

则

$$\sum_{g \in G} |F_g| = \sum_{g \in G} \left(\sum_{x \in X} \delta(g, x) \right) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{g \in G} \delta(g, x) \right) = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

如果 $x \in O_{x_i}$, 则 $O_x = O_{x_i}$, 从而由推论 0.1 可得

$$|S_x| = \frac{|G|}{|O_x|} = \frac{|G|}{|O_{x_i}|} = |S_{x_i}|,$$

所以, 如果 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个不同轨道的代表元素, 则由定理 0.2(2) 和推论 0.1 可得

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |F_g| &= \sum_{\substack{x \in X \\ x \in \bigsqcup_{i=1}^n O_{x_i}}} |S_x| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in O_{x_i}} |S_x| \\ &= \sum_{i=1}^n |S_{x_i}| = \sum_{i=1}^n |O_{x_i}| |S_{x_i}| \\ &= \sum_{i=1}^n |G| = n|G|. \end{aligned}$$

由此得

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|.$$

□

定理 0.10

设 H 是群 G 的子群, 则

- (1) $\forall g \in G, H_1 = gHg^{-1}$ 也是 G 的子群, 并且 $H_1 \cong G$, 称 H_1 为 H 的共轭子群;
- (2) 群 G 的子集 $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ 也是 G 的子群, 而且 $H \triangleleft N_G(H)$, $N_G(H)$ 称为 H 在 G 中的正规化子, 也简称为 H 的正规化子.

♡

证明

- (1) 以 e 表示 G 的幺元. 因为 $e = geg^{-1} \in H_1$, 故 $H_1 \neq \emptyset$. 设 $h_1, h_2 \in H$, 于是

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1}, (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in H_1.$$

由此知 H_1 是 G 的子群.

令

$$\begin{aligned} \phi : H &\rightarrow gHg^{-1} \\ x &\mapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

显然, ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的一个良定义的映射.

设 $x, y \in H$, 如果 $\phi(x) = \phi(y)$, 即 $gxg^{-1} = gyg^{-1}$, 则 $x = y$, 所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的单映射.

对任意的 $x \in gHg^{-1}$, 有 $y = g^{-1}xg \in H$, 使

$$\phi(y) = gyg^{-1} = g(g^{-1}xg)g^{-1} = x,$$

所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 满映射.

对任意的 $x, y \in H$, 有

$$\phi(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \phi(x)\phi(y).$$

所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的同构映射, 即

$$\phi : H \cong gHg^{-1}.$$

- (2) G 在 G 的伴随作用下, H 的逆像子群恰为 $N_G(H)$, 故 $N_G(H)$ 是 G 的子群. 因 H 是 G 的子群且 $H \subseteq N_G(H)$,

故 H 是 $N_G(H)$ 的子群. 又 $\forall g \in N_G(H), gHg^{-1} = H$, 因此 $H \triangleleft N_G(H)$.

□

定理 0.11

设 H 是群 G 的子群, 则

(1) G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$;

(2) $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$.

♡

证明

(1) 设 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的映射 f , 满足

$$f(gHg^{-1}) = gN_G(H), \quad \forall g \in G.$$

显然 f 是满射. 因为 $gHg^{-1} = g_1Hg_1^{-1}$ 当且仅当 $H = g^{-1}g_1H(g^{-1}g_1)^{-1}$ 当且仅当 $g^{-1}g_1 \in N_G(H)$ 当且仅当 $gN_G(H) = g_1N_G(H)$, 所以 f 是单射. 因此 f 是 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的双射. 从而 G 中与 H 共轭的子群的个数与 $|G/N|$ 相等, 即 G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$.

(2) 因为 $H \triangleleft G$ 当且仅当 $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$, 所以由 $N_G(H)$ 的定义知 $N_G(H) = G$.

□