0.1 可测集与测度

定义 0.1 (可测集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为 **Lebesgue 可测集** (或 **m^*-可测集**) 或 E **可测**, 简称为**可测集**, 其中 T 称为**试验集** (这一定义可测集的等式也称为 **Carathéodory 条件**). 可测集的全体称为**可测集类**, 简记为 $\mathscr{M}$.

定理 0.1 (集合可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E \in \mathscr{M}$ 的充要条件是对任一点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(T) < +\infty$, 都有

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{1}$$

成立.

注 往后经常利用这个定理的充分性来证明一个集合可测. 但这个定理的必要性要弱于可测集的定义.

证明 必要性由可测集的定义立得. 下证充分性. 由外测度的次可加性可得

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \mathbb{R}^n\right) = m^*\left(T \cap (E \cup E^c)\right) = m^*\left((T \cap E) \cap (T \cup E^c)\right) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

总是成立的. 又因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (1) 式总成立, 故对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

即 $E \in \mathscr{M}$. □

定义 0.2 (零测集)

外测度为零的点集称为**零测集**.

注 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集. 从而根据外测度的次可加性知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集.

命题 0.1

1. 零测集的任一子集是零测集.
2. 零测集一定可测, 即若 $m^*(E) = 0$, 则 $E \in \mathscr{M}$.

证明

1. 由外测度的单调性立得.
2. 事实上, 此时我们有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T).$$

再由定理 0.1立得.

□

命题 0.2

若 $E_1 \subset S$, $E_2 \subset S^c$, $S \in \mathscr{M}$, 则有

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

注 这个命题表明: 当两个集合由一个可测集分离开时, 其外测度就有可加性.

证明 事实上, 此时取试验集 $T = E_1 \cup E_2$, 从 S 是可测集的定义得

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap S) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap S^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

□

推论 0.1

当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*((T\cap E_1)\cup(T\cap E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

证明 注意到 $T\cap E_1\in E_1, T\cap E_2\in E_1^c$, 而 $E_1\in\mathscr{M}$, 故由集合运算的性质和命题 0.2可知

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*((T\cap E_1)\cup(T\cap E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

□

推论 0.2

当 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^n E_k\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^n(T\cap E_k)\right)=\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k).$$

证明 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n=m$ 时结论成立, 考虑 $n=m+1$ 的情况. 由于 $E_1,E_2,\cdots,E_{m+1}$ 皆互不相交, 因此 $\bigcup_{k=1}^m E_k$ 和 E_{m+1} 也互不相交. 于是由集合运算的性质和推论 0.1以及归纳假设可得

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^{m+1}(T\cap E_k)\right)=m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{k=1}^{m}E_k\cup E_{m+1}\right)\right)=m^*\left(\left(T\cap\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)\cup(T\cap E_{m+1})\right)$$
$$=m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)+m^*(T\cap E_{m+1})=\sum_{k=1}^m m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap E_{m+1})=\sum_{k=1}^{m+1}m^*(T\cap E_k).$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

定理 0.2 (可测集的性质)

(1) $\varnothing\in\mathscr{M}$.

(2) 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $E^c\in\mathscr{M}$.

(3) 若 $E_1\in\mathscr{M}, E_2\in\mathscr{M}$, 则 $E_1\cup E_2, E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$. (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(4) 若 $E_i\in\mathscr{M}\ (i=1,2,\cdots)$, 则其并集 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right)=\sum_{i=1}^\infty m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足**可数可加性** (或称为 $\sigma-$ 可加性).

(5) 若 $E_i\in\mathscr{M}\ (i=1,2,\cdots)$, 则其交集 $\bigcap_{i=1}^\infty E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$.

(6) 如果 A 和 B 分别为 p 维和 q 维空间的可测集, 那么 $A\times B$ 是 $p+q$ 维空间的可测集, 测度为

$$m(A\times B)=m(A)\cdot m(B).$$

证明

(1) 显然成立.

(2) 注意到 $(E^c)^c=E$, 从定义可立即得出结论.

(3) 对于任一集 $T\subset\mathbb{R}^n$, 根据集合分解 (参阅图 1) 与外测度的次可加性, 我们有

$$\begin{aligned}m^*(T)&\le m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c)\\&=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c)\end{aligned}$$

$$\leq m^*((T\cap E_1)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1)\cap E_2^c)$$
$$+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c).$$

又由 E_1, E_2 的可测性知, 上式右端就是

$$m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c)=m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T)=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c).$$

也就是说 $E_1\cup E_2$ 是可测集.

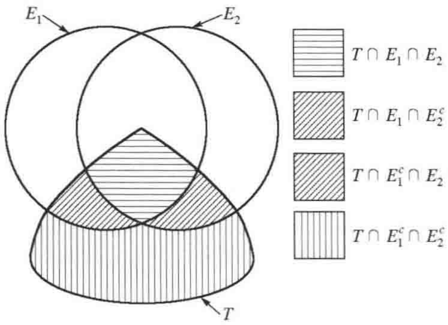

图 1

为证 $E_1\cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1\cap E_2=(E_1^c\cup E_2^c)^c$ 即可. 又由 $E_1\setminus E_2=E_1\cap E_2^c$ 可知, $E_1\setminus E_2$ 是可测集.

(4) 首先, 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交, 并令

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad S_k=\bigcup_{i=1}^{k}E_i,\quad k=1,2,\cdots.$$

由 (3) 知每个 S_k 都是可测集, 从而对任一集 T, 我们有

$$\begin{aligned}m^*(T)&=m^*(T\cap S_k)+m^*(T\cap S_k^c)\\&=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T\cap E_i)\right)+m^*(T\cap S_k^c)\\&\xlongequal{\text{推论 0.2}}\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S_k^c).\end{aligned}$$

由于 $T\cap S_k^c\supset T\cap S^c$, 可知

$$m^*(T)\geq\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c).$$

令 $k\to\infty$, 就有

$$m^*(T)\geq\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c).$$

再由外测度的次可加性可得

$$\begin{aligned}m^*(T)&\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c)\geqslant m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap E_i))+m^*(T\cap S^c)\\&=m^*(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)+m^*(T\cap S^c)=m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c).\end{aligned}$$

这说明 $S\in\mathscr{M}$. 此外, 在公式

$$m^*(T)\geq\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c)$$

中以 $T\cap S$ 替换 T, 则又可得

$$m^*(T\cap S)\geq\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i).$$

又由外测度的次可加性可知反向不等式总是成立的, 因而实际上有

$$m^*(T\cap S)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i).$$

在这里再取 T 为全空间 $\mathbb{R}^n$, 就可证明可数可加性质:

$$m^*(S)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i).$$

其次, 对于一般的可测集列 $\{E_i\}$, 我们令

$$S_1=E_1,\quad S_k=E_k\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i\right),\quad k\geq 2,$$

则 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 而由 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$ 可知, $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 是可测集.

(5) 由 (2) 可知 $E_i^c\in\mathscr{M}$, 再由 (4) 可知 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^c$. 于是再利用 (2) 和 De Morgan 定律可得

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^c\right)^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{M}.$$

(6) 证明见知乎专栏.

□

推论 0.3

$\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数.

证明 由可测集的性质 (1)(2)(4)立得. □

命题 0.3

证明:Cantor 集 C 是可测的, 并且 $m(C)=0$.

证明 开区间是可测的. 由开集构造定理, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中的开集是开区间的可数并, 因此也可测. 因此, 闭集也是可测的. 显然, 每个 C_n 都是闭集. 并且

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$$

于是 C 也是闭集. 因此 C 是可测的.

下面, 我们用两种方法计算康托集的测度.

法一:根据我们的构造, C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 1/3 的 C_n 的测度. 换言之,

$$m(C_{n+1})=\left(1-\frac{1}{3}\right)m(C_n)=\frac{2}{3}m(C_n)$$

递归地, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$m(C_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0)=1<\infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理,

$$m(C)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\lim_{n\to\infty}m(C_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

此即得证.

法二:设 $n\geq 2$. C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间, 每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$. 因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

因此

$$m(C)=1-1=0.$$

□

命题 0.4

$\mathscr{M}$ 的基数是 2^c.

证明 由命题 0.3可知 Cantor 集是零测集, 不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 2^c, 但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 2^c, 于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 2^c. □

定义 0.3 (Lebesgue 测度)

对于可测集 E, 其外测度称为**测度**, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

定义 0.4 (测度)

设 X 是非空集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数, 且满足:

(i) $0\leq\mu(E)\leq+\infty$ $(E\in\mathscr{A})$;

(ii) $\mu(\varnothing)=0$;

(iii) μ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的,

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) **测度**. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) **可测集**, 有序组 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 称为**测度空间**.

注 由推论 0.3可知 $\mathscr{M}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数, 故本节所建立的测度空间就是 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{M},m)$.

定理 0.3 (测度的基本性质)

(1) 非负性: 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $m(E)\geq 0$, $m(\varnothing)=0$;

(2) 单调性: 若 $E_1,E_2\in\mathscr{M}$ 且 $E_1\subset E_2$, 则 $m(E_1)\leq m(E_2)$, 并且 $m(E_2\setminus E_1)=m(E_1)-m(E_2)$;

(3) 可数可加性: 若 $E_i\in\mathscr{M}$ $(i=1,2,\cdots)$ 且 $E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i\neq j)$, 则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i).$$

(4) 若 $E_1,E_2\in\mathscr{M}$, 则 $m(E_1\cup E_2)=m(E_1)+m(E_2)-m(E_1\cap E_2)$.

证明

(1) 由R^n 中点集的外测度性质立得.

(2) 由R^n 中点集的外测度性质可知 $m(E_1)\leq m(E_2)$. 再根据 E_1 可测可知

$$m^*(E_2)=m^*(E_2\cap E_1)+m^*\left(E_2\cap E_1^c\right)=m^*(E_1)+m^*(E_2\setminus E_1).$$

又由可测集的性质可知 $E_2 \setminus E_1$ 可测, 又因为 E_1, E_2 可测, 所以上式等价于

$$m(E_2) = m(E_2 \cap E_1) + m\left(E_2 \cap E_1^c\right) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1).$$

(3) 由可测集的性质立得.

(4) 注意到 $E_1 \cap (E_2 \backslash E_1 \cap E_2) = \varnothing$, 故由 (2)(3) 可得

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \cup (E_2 \backslash E_1 \cap E_2)) = m(E_1) + m(E_2 \backslash E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2).$$

□

定理 0.4 (递增可测集列的测度运算)

若有递增可测集列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \cdots$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \tag{2}$$

证明 若存在 k_0, 使得 $m(E_{k_0}) = +\infty$, 则

$$m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*(E_{k_0}).$$

因此 $m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = +\infty$. 又由 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 递增可知

$$m^*(E_k) \geqslant m^*(E_{k_0}), \quad \forall k \geqslant k_0.$$

因此 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty$. 故此时定理自然成立.

现在假定对一切 k, 有 $m(E_k) < +\infty$. 由假设 $E_k \in \mathscr{M}(k = 1, 2, \cdots)$, 故 E_{k-1} 与 $E_k \setminus E_{k-1}$ 是互不相交的可测集. 由测度的可加性知 $m(E_{k-1}) + m(E_k \setminus E_{k-1}) = m(E_k)$. 因为 $m(E_{k-1})$ 是有限的, 所以移项得 $m(E_k \setminus E_{k-1}) = m(E_k) - m(E_{k-1})$. 令 $E_0 = \varnothing$, 可得 $\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \setminus E_{k-1})$. 再应用测度的可数可加性, 我们有

$$\begin{aligned} m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \setminus E_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k) - m(E_{k-1})) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k}(m(E_i) - m(E_{i-1})) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \end{aligned}$$

□

推论 0.4 (递减可测集列的测度运算)

若有递减可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, 且 $m(E_1) < +\infty$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \tag{3}$$

证明 由可测集的性质 (5)可知 $\lim_{k\to\infty} E_k$ 是可测集, 再由测度的单调性可知 $\lim_{k\to\infty} m(E_k) \leq m(E_1) < +\infty$. 因为 $E_1 \backslash E_k \subset E_1 \setminus E_{k+1}, k = 2, 3, \cdots$, 所以由可测集的性质 (2)可知 $\{E_1 \setminus E_k\}$ 是递增可测集合列. 于是由递增可测集列的测度运算可知

$$m\left(E_1 \setminus \lim_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}(E_1 \setminus E_k)\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_1 \setminus E_k).$$

由于 $m(E_1) < +\infty$, 故由测度的基本性质 (2)上式可写为 $m(E_1) - m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m(E_k)$. 消去 $m(E_1)$, 我们有 $m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$. □

定理 0.5

(1) 若有可测集列 $\{E_k\}$, 且有 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$, 则

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) = 0.$$

(2) 设 $\{E_k\}$ 是可测集列, 则

$$m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k), \quad m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k).$$

注 也称结论

$$m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, m(E_n), \quad m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(E_n)$$

为测度论中的 Fatou 引理 (见第四章).

证明

1.

$$\begin{aligned} m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{测度的基本性质 (3)}} \lim_{k\to\infty}\sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = 0. \end{aligned}$$

2. 因为 $\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k, \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \supset E_k (k = 1, 2, \cdots)$, 所以有

$$m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant m(E_k), \quad m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \geqslant m(E_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令 $k \to \infty$, 则得 ($\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$ 随 k 增大而递增,$\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$ 随 k 增大而递减)

$$\begin{aligned} m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, E_k\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k). \end{aligned}$$

□