0.1 复变函数的导数

定义 0.1

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 D 内有定义, 如果极限

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (\Delta z \neq 0), \tag{1}$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可导**或**可导**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在区域 D 中每点都可导, 就称 f 是区域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**或**正则函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**.

♣

定义 0.2

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析, 但在 z_0 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点, 则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**奇点**.

♣

定义 0.3

设函数 $w = f(z)$ 在点 z 可导, 于是

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

即

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0,$$

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \varepsilon,$$

其中 $|\varepsilon| = |\eta \cdot \Delta z|$ 为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小. 称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w = f(z)$ 在点 z 的**微分**, 记为 $\mathrm{d}w$ 或 $\mathrm{d}f(z)$, 此时也称 $f(z)$ 在点 z **可微**, 即

$$\mathrm{d}w = f'(z)\Delta z. \tag{2}$$

特别, 当 $f(z) = z$ 时,$\mathrm{d}z = \Delta z$. 于是式(2)变为

$$\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z,$$

即

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

由此可见:$f(z)$ 在点 z 可导与 $f(z)$ 在点 z 可微是等价的.

♣

命题 0.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续.

♠

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{3}$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续.

□

例题 0.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

注 但容易看出这个函数在 $\mathbb{C}$ 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这

种例子很多, 例如 $f(z)=\mathrm{Re}z, f(z)=|z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z\in\mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=-1$. 因此, 当 $\Delta z\to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbb{C}$ 中处处不可导.

□

定理 0.1

(1) 若 f 和 g 在区域 D 中全纯, 那么 $f\pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z\in D, g(z)\neq 0$, 那么 $\frac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) **复合函数的求导法则:** 设 D_1, D_2 是 $\mathbb{C}$ 中的两个区域, 且

$$f: D_1\to D_2,$$
$$g: D_2\to\mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h=g\circ f$ 是 $D_1\to\mathbb{C}$ 的全纯函数, 记 $\zeta=f(z)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}h(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}g(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z},$$

这里 $g\circ f$ 是 f 和 g 的复合函数:$g\circ f(z)=g(\zeta)=g[f(z)]$.

(3) **反函数的求导法则:** 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内是单叶解析的, 其反函数 $z=g(w)$ 在区域 $E=f(D)$ 内连续, 则 $g(w)$ 在 E 内解析, 且

$$\frac{\mathrm{d}g(w)}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)}.$$

♡

证明

(1)

(2) 设 z_0 是 D 内任意一点. 由条件知 $\zeta_0=f(z_0)\in E, g(\zeta)$ 在 ζ_0 可导, 所以

$$g(\zeta)-g(\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\rho(\zeta-\zeta_0),$$
$$\Delta g=g'(\zeta_0)\Delta\zeta+\rho\Delta\zeta,$$

其中 ρ 是随 $\Delta\zeta\to 0$ 而趋于零的复数. 将 $\zeta=f(z),\zeta_0=f(z_0)$ 代入上式, 并用 Δz 除等式两边, 得到

$$\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'(\zeta_0)\frac{\Delta f}{\Delta z}+\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}.$$

因为 f 在 z_0 处可导, 所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

从而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\rho f'(z_0)=0,$$

于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'(\zeta_0)f'(z_0).$$

因为 z_0 是 D 内任意一点, 所以

$$h'(z)=g'(\zeta_0)f'(z)$$

在 D 内成立.

(3) 设 $w_0\in E, z_0=g(w_0)$, 由 $z=g(w)$ 是 $w=f(z)$ 的反函数知,$w=f[g(w)]$, 故

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{g(w)-g(w_0)}{f[g(w)]-f[g(w_0)]}=\frac{1}{\frac{f[g(w)]-f[g(w_0)]}{g(w)-g(w_0)}}.$$

因为 $g(w)$ 在 w_0 连续, 所以 $\lim\limits_{w\to w_0}g(w)=g(w_0)$, 于是

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{f'[g(w_0)]},$$

定理证毕.

□

定理 0.2 (复变函数 L'Hospital 法则)

若 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在点 z_0 解析, 且 $f(z_0)=g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$, 则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

证明 因为 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 点解析, 则 $f'(z_0)$ 及 $g'(z_0)$ 存在. 所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□