

0.1 一般可测函数的积分

0.1.1 积分的定义与初等性质

定义 0.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 若积分

$$\int_E f^+(x)dx, \quad \int_E f^-(x)dx$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分; 当上式右端两个积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**. 在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

定理 0.1

若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上可积等价于 $|f(x)|$ 在 E 上可积, 且有

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

证明 由非负可测函数积分的线性性质可知

$$\int_E |f(x)|dx = \int_E [f^+(x) + f^-(x)]dx = \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx$$

成立, 故知在 $f(x)$ 可测的条件下, $f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的, 且有

$$\left| \int_E f(x)dx \right| = \left| \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx \right| \leq \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx = \int_E |f(x)|dx.$$

□

定理 0.2 (积分的基本性质)

- (1) 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.
- (2) 若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.
- (3) 若 $E \in \mathcal{M}$, 且 $f(x) = 0, a. e. x \in E$, 则 $\int_E f(x)dx = 0$.
- (4) (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, $g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \leq g(x), a. e. x \in E$ ($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**控制函数**), 则 $f \in L(E)$.
- (ii) 若 $f \in L(E), e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.
- (5) 若 $f(x) \leq g(x), a. e. x \in E$, 则 $\int_E f(x)d\mu \leq \int_E g(x)d\mu$.
- (6) (i) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbf{R}^n: |x| \geq N\}} |f(x)|dx = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得

$$\int_{\{x: |x| \geq N\}} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

(ii) 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{x \in E: |x| \geq N\}$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E \cap E_N} f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_N} f(x)dx = 0.$$

□

注 (3) 反过来并不成立, 例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ -1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$

证明

- (1) 不妨设 $|f(x)| \leq M$ ($x \in E$), 由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数, 故有

$$\int_E |f(x)| dx \leq \int_E M dx = Mm(E) < +\infty.$$

因此由定理 0.1 可知 $f \in L(E)$.

- (2) 由 $f \in L(E)$ 及定理 0.1 可知, 非负可测函数 $|f(x)|$ 在 E 上也可积. 从而由定理 ?? 可知, $|f(x)|$ 在 E 上几乎处处有限, 即

$$m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

故 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

- (3) 因为 $|f(x)| = 0$, a. e. $x \in E$, 且 $|f(x)|$ 非负可测, 所以由命题 ?? 可得

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx = 0.$$

故 $\int_E f(x) dx = 0$.

- (4) (i) 由非负可测函数的积分性质 (1) 可知

$$\int_E |f(x)| dx \leq \int_E g(x) dx < +\infty.$$

故 $|f| \in L(E)$, 因此由定理 0.1 可知 $f \in L(E)$.

- (ii) 若 $f \in L(E)$, $e \subset E$ 是可测集, 则非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_e |f(x)| dx = \int_E |f(x)| \chi_e(x) dx = \int_E |f(x)| \chi_e(x) dx \leq \int_E |f(x)| dx < +\infty.$$

故 $|f| \in L(e)$, 因此由定理 0.1 可知 $f \in L(e)$.

- (5) 因为 $f(x) \leq g(x)$, a. e. $x \in E$, 所以 $f^+(x) \leq g^+(x)$, $f^-(x) \geq g^-(x)$, a. e. $x \in E$. 由非负可测函数积分的性质 (1) 可知

$$\int_E f^+(x) d\mu \leq \int_E g^+(x) d\mu, \quad \int_E f^-(x) d\mu \geq \int_E g^-(x) d\mu$$

从而

$$\int_E f(x) d\mu = \int_E f^+(x) d\mu - \int_E f^-(x) d\mu \leq \int_E g^+(x) d\mu - \int_E g^-(x) d\mu = \int_E g(x) d\mu$$

故结论成立.

- (6) (i) 记 $E_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geq N\}$, 则 $\{|f(x)|\chi_{E_N}(x)\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

由此可知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_N} |f(x)| dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x) dx \xrightarrow{\text{推论 ??}} \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{N \rightarrow \infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) dx = 0.$$

- (ii) 由 $f \in L(E)$ 及非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x) dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_E(x) dx = \int_E |f(x)| dx < +\infty.$$

因此 $f \cdot \chi_{E_N} \in L(\mathbf{R}^n)$. 又 $E_N \subset E \cap \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geq N\}$, 故由非负可测函数的积分性质 (3) 及 (i) 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E \cap E_N} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_N} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geq N\}} f(x) \chi_{E_N}(x) dx = 0.$$

□

定理 0.3 (积分的线性性质)

若 $f, g \in L(E)$, $C \in \mathbf{R}$, 则

- (i) $\int_E Cf(x) dx = C \int_E f(x) dx$, 进而 $Cf \in L(E)$;

- (ii) $f + g \in L(E)$ 且 $\int_E (f(x) + g(x)) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx$.
 (iii) 若 $f \in L(E)$, $g(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 则 $f \cdot g \in L(E)$.

♡

注 不妨假定 f, g 都是实值函数 (即处处有限) 的原因: (i) 假设结论对处处有限的函数成立. 若 f 不是处处有限的函数, 则由 $f \in L(E)$ 及可积函数的基本性质 (ii) 可知, 令 $E_1 = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$, 则 $m(E_1) = 0$, 再令 $E_2 = E \setminus E_1$, 则由假设可知

$$\int_{E_2} C f(x) dx = C \int_{E_2} f(x) dx. \quad (1)$$

由非负可测函数积分线性性质及定理 1.3(3) 可得

$$\begin{aligned} \int_E C f(x) dx &= \int_E (C f(x))^+ dx - \int_E (C f(x))^- dx \\ &= \int_E (C f(x))^+ \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx - \int_E (C f(x))^- \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx \\ &= \int_E (C f(x))^+ \chi_{E_1}(x) dx + \int_E (C f(x))^+ \chi_{E_2}(x) dx - \int_E (C f(x))^- \chi_{E_1}(x) dx - \int_E (C f(x))^- \chi_{E_2}(x) dx \\ &= \int_{E_1} (C f(x))^+ dx + \int_{E_2} (C f(x))^+ dx - \int_{E_1} (C f(x))^- dx - \int_{E_2} (C f(x))^- dx \\ &= \int_{E_2} (C f(x))^+ dx - \int_{E_2} (C f(x))^- dx \stackrel{(1) \text{式}}{=} \int_{E_2} C f(x) dx \\ &= C \int_{E_2} f(x) dx = C \int_{E_2} f^+(x) dx - C \int_{E_2} f^-(x) dx \\ &= C \left(\int_{E_1} f^+(x) dx + \int_{E_2} f^+(x) dx - \int_{E_1} f^-(x) dx - \int_{E_2} f^-(x) dx \right) \\ &= C \left(\int_E f^+(x) \chi_{E_1}(x) dx + \int_E f^+(x) \chi_{E_2}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_1}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_2}(x) dx \right) \\ &= C \left(\int_E f^+(x) \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx \right) \\ &= C \left(\int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \right) = C \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

故对一般情况结论也成立.

(ii) 由 (i) 同理可证.

证明 不妨假定 f, g 都是实值函数 (即处处有限).

(i) 由公式

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \quad (2)$$

立即可知: 当 $C \geq 0$ 时, $(Cf)^+ = Cf^+$, $(Cf)^- = Cf^-$. 根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质, 可得

$$\begin{aligned} \int_E C f(x) dx &= \int_E C f^+(x) dx - \int_E C f^-(x) dx \\ &= C \left(\int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \right) = C \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

当 $C = -1$ 时, 由 (2) 式可知 $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$. 同理可得

$$\int_E (-f(x)) dx = \int_E f^-(x) dx - \int_E f^+(x) dx = - \int_E f(x) dx.$$

当 $C < 0$ 时, 由 (2) 式可知 $Cf(x) = -|C|f(x)$. 由上述结论可得

$$\begin{aligned} \int_E C f(x) dx &= \int_E -|C|f(x) dx = - \int_E |C|f(x) dx \\ &= -|C| \int_E f(x) dx = C \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

综上可得

$$\int_E |Cf(x)| dx = |C| \int_E |f(x)| dx < +\infty, \forall C \in \mathbb{R}.$$

故 $Cf(x) \in L(E)$.

(ii) 首先, 由于有 $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, 故可知 $f + g \in L(E)$. 其次, 注意到

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

进而

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f + g)^+(x) dx + \int_E f^-(x) dx + \int_E g^-(x) dx = \int_E (f + g)^-(x) dx + \int_E f^+(x) dx + \int_E g^+(x) dx.$$

因为式中每项积分值都是有限的, 所以可移项且得到

$$\int_E (f(x) + g(x)) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

(iii) 注意到

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot \sup_{x \in E} |g(x)|, \quad x \in E.$$

由 g 在 E 上有界, 故 $\sup_{x \in E} |g(x)| \in \mathbb{R}$. 从而由 (i) 可得 $|f(x)| \cdot \sup_{x \in E} |g(x)| \in L(E)$, 于是再由 **定理 0.2(4)(i)** 可知 $f \cdot g \in L(E)$.

□

推论 0.1

若 $f \in L(E)$, 且 $f(x) = g(x)$, a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx.$$



笔记 这个推论表明: 改变可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.

证明 令 $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$, $E_2 = E \setminus E_1$, $m(E_1) = 0$, 则

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \stackrel{\text{定理??(3)}}{=} \int_E f^+(x) \chi_E(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_E(x) dx \\ &= \int_E f^+(x) \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_1 \cup E_2}(x) dx \\ &= \int_E f^+(x) [\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)] dx - \int_E f^-(x) [\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)] dx \\ &= \int_E f^+(x) \chi_{E_1}(x) dx + \int_E f^+(x) \chi_{E_2}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_1}(x) dx - \int_E f^-(x) \chi_{E_2}(x) dx \\ &\stackrel{\text{定理??(3)}}{=} \int_{E_1} f^+(x) dx + \int_{E_2} f^+(x) dx - \int_{E_1} f^-(x) dx - \int_{E_2} f^-(x) dx \\ &\stackrel{\text{定理??(5)(ii)}}{=} \int_{E_2} f^+(x) dx - \int_{E_2} f^-(x) dx = \int_{E_2} g^+(x) dx - \int_{E_2} g^-(x) dx \\ &\stackrel{\text{定理??(5)(ii)}}{=} \int_{E_1} g^+(x) dx + \int_{E_2} g^+(x) dx - \int_{E_1} g^-(x) dx - \int_{E_2} g^-(x) dx \\ &\stackrel{\text{定理??(3)}}{=} \int_E g^+(x) \chi_{E_1}(x) dx + \int_E g^+(x) \chi_{E_2}(x) dx - \int_E g^-(x) \chi_{E_1}(x) dx - \int_E g^-(x) \chi_{E_2}(x) dx \\ &= \int_E g^+(x) [\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)] dx - \int_E g^-(x) [\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)] dx \\ &= \int_E g^+(x) \chi_E(x) dx - \int_E g^-(x) \chi_E(x) dx = \int_E g^+(x) dx - \int_E g^-(x) dx \\ &= \int_E g(x) dx. \end{aligned}$$

□

例题 0.1 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的可测函数, 且有

$$\int_{[0,1]} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) dx < +\infty,$$

则 $f \in L([0, 1])$.

证明 为了阐明 $f \in L([0, 1])$, 自然想到去寻求可积的控制函数. 题设告诉我们 $|f(x)| \ln(1 + |f(x)|)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数, 难道它能控制 $|f(x)|$ 吗? 显然, 这只是在 $\ln(1 + |f(x)|) \geq 1$ 或 $|f(x)| \geq e - 1$ 时才行. 但注意到 $|f(x)| < e - 1$ 时, 由于区间 $[0, 1]$ 的测度是有限的, 故常数 $e - 1$ 本身就是控制函数. 也就是说, 可在不同的定义区域寻求不同的控制函数.

为此, 作点集

$$E_1 = \{x \in [0, 1] : |f(x)| \leq e\}, \quad E_2 = [0, 1] \setminus E_1,$$

则我们有

$$|f(x)| \leq e, \quad x \in E_1;$$

$$|f(x)| \leq |f(x)| \ln(1 + |f(x)|), \quad x \in E_2.$$

这就是说 $f \in L(E_1)$ 且 $f \in L(E_2)$, 从而

$$f \in L(E_1 \cup E_2) = L([0, 1]).$$

□

定理 0.4

设 $f \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E), \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in E),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

♡

证明 令 $F_n(x) = f(x) - f_n(x) (n \in \mathbf{N}, x \in E)$, 则 $\{F_n(x)\}$ 是 E 上非负渐降收敛于 0 的可积函数列, 从而由非负渐降函数列积分定理可知

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E f(x) dx - \int_E f_n(x) dx \right) = \int_E f(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx,$$

即得所证.

□

命题 0.1

设 $g \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbf{N})$. 若 $f_n(x) \geq g(x), a. e. x \in E$, 则

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx.$$

♣

证明 根据 Fatou 引理, 我们有

$$\begin{aligned} \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - g(x)] dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E [f_n(x) - g(x)] dx \right) \\ \iff \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx - \int_E g(x) dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx - \int_E g(x) dx \\ \iff \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx. \end{aligned}$$

证毕.

□

定理 0.5 (Jensen 不等式)

设 $w(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上的正值可测函数, 且

$$\int_E w(x) dx = 1;$$

$\varphi(x)$ 是区间 $I = [a, b]$ 上的 (下) 凸函数; $f(x)$ 在 E 上可测, 且值域 $R(f) \subset I$. 若 $fw \in L(E)$, 则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x) dx\right) \leq \int_E \varphi(f(x))w(x) dx.$$



注 因为 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上下凸, 所以由定理 6.7 可知 $\varphi \in C([a, b])$. 从而由定理 ?? 可知 $\varphi(f(x))$ 在 E 上也可测.

证明 注意到 $a \leq f(x) \leq b$, 我们有

$$a = \int_E aw(x) dx \leq y_0 = \int_E f(x)w(x) dx \leq \int_E bw(x) dx = b.$$

故 $y_0 \in [a, b]$.

(i) 设 $y_0 \in (a, b)$, 由 $\varphi(x)$ 之 (下) 凸性可知有

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_0) + k(y - y_0), \quad y \in [a, b].$$

(其中由定理 6.7 及下凸函数的切线放缩可知 $k = \varphi'_+(y_0)$) 以 $f(x)$ 代 y 得

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(y_0) + k(f(x) - y_0), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

在上式两端乘以 $w(x)$, 并在 E 上作积分, 则

$$\begin{aligned} \int_E \varphi(f(x))w(x) dx &\geq \int_E \varphi(y_0)w(x) dx + k \int_E (f(x) - y_0)w(x) dx \\ &= \varphi(y_0) + k \left(\int_E f(x)w(x) dx - y_0 \right) \\ &= \varphi(y_0) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x) dx\right). \end{aligned}$$

(ii) 若 $y_0 = b$ (或 a), 易知此时有

$$\int_E (b - f(x))w(x) dx = 0,$$

由非负可测函数积分的性质 (5)(i) 可知 $f(x) = b$, a. e. $x \in E$, 从而

$$\int_E \varphi(f(x))w(x) dx = \int_E \varphi(b)w(x) dx = \varphi(b) \int_E w(x) dx = \varphi(b) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x) dx\right).$$

证毕. □

注 Jensen 不等式在 \mathbf{R}^n 上也成立, 只需将区间 I 用凸集代替. 下面是一个特例:

设 $E \subset \mathbf{R}$, 且 $m(E) = 1$, $f(x)$ 在 E 上正值可积, 且记 $A = \int_E f(x) dx$, 则

$$\sqrt{1 + A^2} \leq \int_E \sqrt{1 + f^2(x)} dx \leq 1 + A.$$

实际上, 考查 $\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/2}$, 易知 $\varphi(x)$ 是 (下) 凸函数. 根据 Jensen 不等式 ($w(x) \equiv 1$), 有 $\left(A^2 \leq \int_E f^2(x) dx\right)$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + A^2} &\leq \left(1 + \int_E f^2(x) dx\right)^{1/2} = \left(\int_E (1 + f^2(x)) dx\right)^{1/2} \\ &\leq \int_E \sqrt{1 + f^2(x)} dx \leq \int_E (1 + f(x)) dx = 1 + A. \end{aligned}$$

定理 0.6 (积分对定义域的可数可加性)

设 $E_k \in \mathcal{M} (k = 1, 2, \dots)$, $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积, 则

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx.$$

♡

证明 根据 $f \in L(E)$ 以及非负可测函数积分的可数可加性, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x) dx = \int_E f^{\pm}(x) dx \leq \int_E |f(x)| dx < +\infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{E_k} f^+(x) dx - \int_{E_k} f^-(x) dx \right) = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

□

定理 0.7 (可积函数几乎处处为零的一种判别法)

设函数 $f(x) \in L([a, b])$. 若对任意的 $c \in [a, b]$, 有

$$\int_{[a, c]} f(x) dx = 0,$$

则 $f(x) = 0, a. e. x \in [a, b]$.

♡

证明 若结论不成立, 则存在 $E \subset [a, b], m(E) > 0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零. 不妨假定在 E 上 $f(x) > 0$. 由定理??, 可作闭集 $F, F \subset E$, 且 $m(F) > 0$, 并令 $G = (a, b) \setminus F$, 则 G 为开集. 于是由开集构造定理可知, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, 其中 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间. 由积分对定义域的可数可加性, 我们有

$$\int_G f(x) dx + \int_F f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = 0.$$

因为 $\int_F f(x) dx > 0$, 所以

$$\sum_{n \geq 1} \int_{[a_n, b_n]} f(x) dx = \int_G f(x) dx = - \int_F f(x) dx > 0 \neq 0,$$

从而存在 n_0 , 使得

$$\int_{[a_{n_0}, b_{n_0}]} f(x) dx \neq 0.$$

又由积分对定义域的可数可加性可知

$$\int_{[a, b_{n_0}]} f(x) dx = \int_{[a, a_{n_0}] \cup [a_{n_0}, b_{n_0}]} f(x) dx = \int_{[a, a_{n_0}]} f(x) dx + \int_{[a_{n_0}, b_{n_0}]} f(x) dx.$$

于是

$$\int_{[a, b_{n_0}]} f(x) dx - \int_{[a, a_{n_0}]} f(x) dx = \int_{[a_{n_0}, b_{n_0}]} f(x) dx \neq 0 \Rightarrow \int_{[a, b_{n_0}]} f(x) dx \neq \int_{[a, a_{n_0}]} f(x) dx.$$

由此可知

$$\int_{[a, a_{n_0}]} f(x) dx \neq 0 \quad \text{或} \quad \int_{[a, b_{n_0}]} f(x) dx \neq 0.$$

这与假设矛盾.

□

命题 0.2

设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L(E)$, 都有 $fg \in L(E)$, 则除一个零测集 Z 外, $g(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的有界函数.

注 比较命题??.

证明 如果结论不成立, 那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : k_i \leq |g(x)| < k_{i+1}\}) = m(E_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

现在作函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}g(x)}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

因为

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+(1/2)}m(E_i)} m(E_i) < +\infty, \end{aligned}$$

所以 $f \in L^1(E)$, 但我们有

$$\int_E f(x)g(x) dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i^{1+(1/2)}m(E_i)} m(E_i) = +\infty,$$

这说明 $fg \notin L(E)$, 矛盾. □

定理 0.8 (积分的绝对连续性)

若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\left| \int_e f(x) dx \right| \leq \int_e |f(x)| dx < \varepsilon.$$

证明 不妨假定 $f(x) \geq 0$, 否则用 $|f(x)|$ 代替 $f(x)$. 根据简单函数逼近定理可知, 存在非负简单可测函数渐升列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$. 再由 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f(x) - \varphi_n(x)) dx = \int_E \left(f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \right) dx = \int_E f(x) dx - \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = 0.$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在可测简单函数 $\varphi(x), 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) (x \in E)$, 使得

$$\int_E (f(x) - \varphi(x)) dx = \int_E f(x) dx - \int_E \varphi(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在设 $\varphi(x) \leq M$, 取 $\delta = \varepsilon/(2M)$, 则当 $e \subset E$, 且 $m(e) < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \int_e f(x) dx &= \int_e f(x) dx - \int_e \varphi(x) dx + \int_e \varphi(x) dx \\ &\leq \int_E (f(x) - \varphi(x)) dx + \int_e \varphi(x) dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + Mm(e) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

推论 0.2

设 $f \in L(E) (E \subset \mathbf{R})$, 且

$$0 < A = \int_E f(x) dx < +\infty,$$

则存在 E 中可测子集 e , 使得

$$\int_e f(x) dx = \frac{A}{3}.$$

♡

证明 设 $E_t = E \cap (-\infty, t), t \in \mathbf{R}$, 并记

$$g(t) = \int_{E_t} f(x) dx,$$

则由积分的绝对连续性可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta t| < \delta$, 由积分对定义域的可数可加性, 就有

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| = \left| \int_{E \cap [t, t + \Delta t)} f(x) dx \right| \leq \int_{E \cap [t, t + \Delta t)} |f(x)| dx \leq \int_{[t, t + \Delta t)} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

这说明 $g \in C(\mathbf{R})$. 因为 $g(x)$ 是递增函数, 且有

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = g(-\infty) = \int_{\emptyset} f(x) dx = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = g(+\infty) = A,$$

而 $0 < A/3 < A$, 所以根据连续函数介值定理可知, 存在 $t_0: -\infty < t_0 < +\infty$, 使得 $g(t_0) = A/3$:

$$g(t_0) = \int_{E \cap (-\infty, t_0)} f(x) dx = \frac{A}{3}.$$

令 $e = E \cap (-\infty, t_0)$, 即得所证. □

定理 0.9 (积分变量的平移变换定理)

若 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则对任意的 $y_0 \in \mathbf{R}^n, f(x + y_0) \in L(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

♡

注 $E - \{y_0\} = \{x - y_0 : x \in E\}$ 是向量差集, 不是集合的差.

证明 只需考虑 $f(x) \geq 0$ 的情形. 首先看 $f(x)$ 是非负可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

显然有

$$f(x + y_0) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{E_i}(x + y_0) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{E_i - \{y_0\}}(x),$$

它仍是非负可测简单函数. 注意到 $E - \{y_0\} = E + \{-y_0\}$, 故由外测度的平移不变性知

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0) dx = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i - \{y_0\}) = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

其次, 考虑一般非负可测函数 $f(x)$. 此时根据简单函数逼近定理可知, 存在非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x), x \in \mathbf{R}^n$. 显然, $\{\varphi_k(x + y_0)\}$ 仍为渐升列, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x + y_0) = f(x + y_0), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

从而先前的讨论及 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x + y_0) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

□

例题 0.2 设 $f \in L([0, +\infty))$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n) = 0, \quad \text{a. e. } x \in \mathbf{R}.$$

证明 因为 $f(x + n) = f(x + 1 + (n - 1))$, 所以只需考查 $[0, 1]$ 中的点即可. 为证此, 又只需指出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x + n)|$ 在

$[0, 1]$ 上几乎处处收敛即可. 应用积分的手段, 由于

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)| \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f(x+n)| \, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1]} |f(x)| \, dx = \int_{[1,\infty)} |f(x)| \, dx < +\infty,\end{aligned}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 作为 x 的函数是在 $[0, 1]$ 上可积的, 因而是几乎处处有限的, 即级数是几乎处处收敛的. \square

命题 0.3

设 $I \subset \mathbf{R}$ 是区间, $f \in L(I)$, $a \neq 0$, 记 $J = \{x/a : x \in I\}$, $g(x) = f(ax)$ ($x \in J$), 则 $g \in L(J)$, 且有

$$\int_I f(x) \, dx = |a| \int_J g(x) \, dx.$$

注 这只是积分变量替换的一个特殊情形.

笔记 对 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(ax) \, dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \, dx.$$

证明 (i) 若 $f(x) = \chi_E(x)$, E 是 I 中的可测集, 则 $a^{-1}E \subset J$. 由于 $\chi_E(ax) = \chi_{a^{-1}E}(x)$, 故有

$$\int_J g(x) \, dx = \frac{1}{|a|} m(E) = \frac{1}{|a|} \int_I f(x) \, dx.$$

由此可知当 $f(x)$ 是简单可测函数时, 结论也真.

(ii) 对 $f \in L(I)$, 设简单可测函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty, x \in I$), 且 $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ ($n = 1, 2, \dots, x \in I$), 则令 $\psi_n(x) = \varphi_n(ax)$ ($x \in J, n = 1, 2, \dots$), $\psi_n(x) \rightarrow g(x)$ ($n \rightarrow \infty, x \in J$), 我们有

$$|a| \int_J g(x) \, dx = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \psi_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) \, dx = \int_I f(x) \, dx.$$

\square

0.1.2 控制收敛定理

定理 0.10 (控制收敛定理)

设 $f_k \in L(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E. \quad (3)$$

若存在 E 上的可积函数 $F(x)$, 使得

$$|f_k(x)| \leq F(x), \quad \text{a. e. } x \in E \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx.$$

(通常称 $F(x)$ 为函数列 $\{f_k(x)\}$ 的**控制函数**.)

\heartsuit

证明 显然, 由推论??可知 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 且由 $|f_k(x)| \leq F(x)$ (a. e. $x \in E$) 及(3)式可知 $|f(x)| \leq F(x)$, a. e. $x \in E$. 因此, 由积分的基本性质 (4)(i)可知 $f(x)$ 也是 E 上的可积函数. 作函数列

$$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则 $g_k \in L(E)$, 且 $0 \leq g_k(x) \leq 2F(x)$, a. e. $x \in E$ ($k = 1, 2, \dots$). 注意到 $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = 0$, 显然 $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$ 在 E 上也可积.

根据 Fatou 引理, 我们有

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} (2F(x) - g_k(x)) \, dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (2F(x) - g_k(x)) \, dx.$$

因为 $F(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ 以及每个 $g_k(x)$ 都是可积的, 所以由积分的线性性质可得

$$\int_E 2F(x) \, dx - \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \, dx \leq \int_E 2F(x) \, dx - \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) \, dx.$$

消去 $\int_E 2F(x) \, dx$, 并注意到 $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = 0$, a. e. $x \in E$, 可得

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) \, dx = 0.$$

又由积分的线性性质及定理 0.1 可知 ($k = 1, 2, \dots$)

$$\left| \int_E f_k(x) \, dx - \int_E f(x) \, dx \right| = \left| \int_E (f_k(x) - f(x)) \, dx \right| \leq \int_E g_k(x) \, dx$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E f_k(x) \, dx - \int_E f(x) \, dx \right| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) \, dx = 0.$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E f_k(x) \, dx - \int_E f(x) \, dx \right| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E f_k(x) \, dx - \int_E f(x) \, dx \right| = 0,$$

从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_E f_k(x) \, dx - \int_E f(x) \, dx \right] = 0$. 因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx$. □

注 注意 (i) 在上述定理的推演中, 实际上证明了更强的结论:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \, dx = 0. \quad (4)$$

今后, 我们将称式(4)为 $f_k(x)$ 在 E 上依 L^1 的意义收敛于 $f(x)$. 一般来说, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx$ 不能推出(4)成立 (在非负情形有例外).

此外, 当式(4)成立时, 也不一定有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

不过可以得出 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的结论. 实际上, 因为对任意的 $\sigma > 0$, 记

$$E_k(\sigma) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \sigma\},$$

就有

$$\begin{aligned} \sigma m(E_k(\sigma)) &= \int_{E_k(\sigma)} \sigma \, dx \leq \int_{E_k(\sigma)} |f_k(x) - f(x)| \, dx \\ &\leq \int_E |f_k(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以 $m(E_k(\sigma)) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

由此, 进一步又可知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

(ii) 上述控制收敛定理的一个特例是有界收敛定理:

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, $m(E) < +\infty$, 且对 $x \in E$ 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad |f_k(x)| \leq M \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则 $f \in L(E)$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx.$$

为阐明这一点, 只需注意常数函数 M 就是 E 上的控制函数.

例题 0.3 设 $f_n \in C^{(1)}((a, b)) (n = 1, 2, \dots)$, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = F(x), \quad x \in (a, b).$$

若 $f'(x), F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 则 $f'(x) = F(x), x \in (a, b)$.

证明 只需指出在 (a, b) 的一个稠密子集上有 $f'(x) = F(x)$ 即可. 为此, 任取 (a, b) 中的子区间 $[c, d]$, 且记

$$E_n = \{x \in [c, d] : |f'_k(x) - F(x)| \leq 1, k \geq n\},$$

易知每个 E_n 皆闭集, 且 $[c, d] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 从而根据 Baire 定理 (定理 1.23) 可知, 存在 n_0 以及区间 $[c', d']$, 使得 $E_{n_0} \supset [c', d']$. 由于

$$|f'_k(x) - F(x)| \leq 1 \quad (k \geq n_0, x \in [c', d']),$$

故知 $k \geq n_0$ 时, $\{f'_k(x)\}$ 在 $[c', d']$ 上一致有界. 这样, 由等式

$$\int_{[c', x]} f'_k(t) dt = f_k(x) - f_k(c'), \quad c' < x < d'$$

可知 (有界收敛定理)

$$\int_{[c', x]} F(t) dt = f(x) - f(c'), \quad c' < x < d'.$$

在等式两端对 x 求导可得

$$F(x) = f'(x), \quad c' < x < d',$$

即得所证. □

定理 0.11 (依测度收敛型控制收敛定理)

设 $f_k \in L(\mathbb{R}^n) (k = 1, 2, \dots)$, 且 $f_k(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上依测度收敛于 $f(x)$. 若存在 $F \in L(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$|f_k(x)| \leq F(x) \quad (k = 1, 2, \dots; \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n),$$

则 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

证明 (下述证法虽繁, 但习之也不无益处.) 设 ε 是任意给定的正数, 则只需指出存在 K , 使得 $k > K$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx < \varepsilon.$$

首先, 由题设知, 存在 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

从而在 $|f_{k_i}(x)| \leq F(x)$ 中令 $i \rightarrow \infty$, 即知 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $|f(x)| \leq F(x), \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n$.

其次, 把 \mathbb{R}^n 分解如下:

(i) 由 $F \in L(\mathbb{R}^n)$ 可知, 存在 N , 使得

$$\int_{\{x: |x| \geq N\}} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{6}.$$

自然同时对一切 $k = 1, 2, \dots$, 也有

$$\int_{\{x: |x| \geq N\}} |f_k(x) - f(x)| dx \leq 2 \int_{\{x: |x| \geq N\}} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(ii) 由 $F(x)$ 的积分绝对连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\int_e F(x) dx < \frac{\varepsilon}{6}.$$

自然, 同时对一切 $k = 1, 2, \dots$, 也有

$$\int_e |f_k(x) - f(x)| dx \leq 2 \int_e F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(iii) 再看 $B = B(0, N)$, 记 $m(B) = l$. 由 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ 可知, 对 $\varepsilon/(3l)$ 以及 δ , (记 $E_k = \{x \in B : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/(3l)\}$) 必存在 K , 当 $k \geq K$ 时, 有 $m(E_k) < \delta$.

(iv) 对 $k \geq K$ 作分解

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx &= \int_{\{x: |x| \geq N\}} |f_k(x) - f(x)| dx + \int_B |f_k(x) - f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \int_{E_k} |f_k(x) - f(x)| dx + \int_{B \setminus E_k} |f_k(x) - f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{B \setminus E_k} \frac{\varepsilon}{3l} dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3l} \int_B dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

注 对于 E 上依测度收敛于 $f \in L(E)$ 的非负可积函数列 $\{f_k(x)\}$, 若有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx = 0.$$

记 $m_k(x) = \min_{x \in E} \{f_k(x), f(x)\}$, $M_k(x) = \max_{x \in E} \{f_k(x), f(x)\}$, 则对 $\sigma > 0$, 由于 $\{x \in E : f(x) - m_k(x) > \sigma\} \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \sigma\}$, 故知 $m_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 再注意到 $0 \leq m_k(x) \leq f(x) (x \in E)$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E m_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

又因为 $M_k(x) = f(x) + f_k(x) - m_k(x) (x \in E)$, 所以有

$$\begin{aligned} \int_E M_k(x) dx &= \int_E f(x) dx + \int_E f_k(x) dx - \int_E m_k(x) dx \\ &\rightarrow \int_E f(x) dx \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

最后, 根据 $|f_k(x) - f(x)| = M_k(x) - m_k(x)$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E M_k(x) dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E m_k(x) dx = 0.$$

例题 0.4 $\int_{[0,1]} \frac{x \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx = o\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty, \alpha > 1).$

证明 往证

$$\int_{[0,1]} \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

令

$$g(x) = 1 + (nx)^\alpha - nx^{3/2} \quad (g(0) = 1, g(1) = 1 + n^\alpha - n),$$

易知, 在 $1 < \alpha \leq 3/2$ 且 n 充分大时, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中有极值点, 从而在 n 充分大时, 不难得出

$$0 < \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in [0, 1]).$$

根据控制收敛定理即得所证. □

例题 0.5 $\int_{[a,+\infty)} \frac{xe^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx = o\left(\frac{1}{n^2}\right) (n \rightarrow \infty, a > 0).$

证明 只需指出

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,+\infty)} \frac{n^2 xe^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx = 0$$

即可. 令 $u = nx$, 则

$$I = \int_{[na,+\infty)} \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2} du = \int_{[0,+\infty)} \chi_{[na,+\infty)}(u) \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2} du.$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[na, +\infty)}(u)(1 + u^2/n^2)^{-1}ue^{-u^2} = 0,$$

$$0 \leq \chi_{[na, +\infty)}(u)(1 + u^2/n^2)^{-1}ue^{-u^2} \leq ue^{-u^2} \quad (0 \leq u < +\infty),$$

以及 ue^{-u^2} 在 $[0, +\infty)$ 上可积, 故根据控制收敛定理即得所证. \square

推论 0.3 (逐项积分定理)

设 $f_k \in L(E) (k = 1, 2, \dots)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| dx < +\infty,$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛; 若记其和函数为 $f(x)$, 则 $f \in L(E)$, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

证明 作函数 $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, 由非负可测函数的逐项积分定理可知

$$\int_E F(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| dx < +\infty,$$

即 $F \in L(E)$, 从而 $F(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的. 这说明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛. 记其和函数为 $f(x)$. 由于

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = F(x), \quad \text{a. e. } x \in E,$$

故 $f \in L(E)$.

现在令 $g_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) (m = 1, 2, \dots)$, 则

$$|g_m(x)| \leq \sum_{k=1}^m |f_k(x)| \leq F(x) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

于是由控制收敛定理可得

$$\int_E f(x) dx = \int_E \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E \sum_{k=1}^m f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dx.$$

\square

定理 0.12 (积分号下求导)

设 $f(x, y)$ 是定义在 $E \times (a, b)$ 上的函数, 它作为 x 的函数在 E 上是可积的, 作为 y 的函数在 (a, b) 上是可微的. 若存在 $F \in L(E)$, 使得

$$\left| \frac{d}{dy} f(x, y) \right| \leq F(x), \quad (x, y) \in E \times (a, b),$$

则

$$\frac{d}{dy} \int_E f(x, y) dx = \int_E \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

证明 任意取定 $y \in (a, b)$ 以及 $h_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k} = \frac{d}{dy} f(x, y), \quad x \in E,$$

而且当 k 充分大时, 下式成立 (可从微分中值定理考查):

$$\left| \frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k} \right| \leq F(x), \quad x \in E.$$

从而由控制收敛定理可得

$$\frac{d}{dy} \int_E f(x, y) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_E f(x, y + h_k) dx - \int_E f(x, y) dx}{h_k} = \int_E \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

□

例题 0.6 设 $f(x), f_n(x) (n \in \mathbb{N})$ 在 \mathbb{R} 上实值可积. 若对 \mathbb{R} 中任一可测集 E , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, a. e. $x \in \mathbb{R}$. (由此可知, 若存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = g(x)$, a. e. $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(x) = g(x)$, a. e. $x \in \mathbb{R}$.)

证明 作 $g_n(x) = \sup_{k \geq n} \{f_k(x)\}$, 且令

$$p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

则只需指出在 $E(m(E) < +\infty)$ 上, 有 $f(x) \leq p(x)$, a. e. $x \in E$ 即可.

(i) 作点集 $P = \{x \in E : p(x) = -\infty\}$, $P_n = \{x \in E : g_n(x) < 0\} (n \in \mathbb{N})$, 由 $g_n(x)$ 递减收敛于 $p(x)$, 故 $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.

又对任意的闭集 $F \subset P_n$, 均有

$$\int_F f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F f_k(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F g_k(x) dx = \int_F p(x) dx,$$

从而可知 $f(x) \leq p(x)$, a. e. $x \in P_n$, 自然有 $f(x) \leq p(x)$, a. e. $x \in P$. 注意到 $p(x) = -\infty (x \in P)$, 故 $m(P) = 0$.

(ii) 若 $p(x) = +\infty$, 则易知 $f(x) \leq p(x)$.

(iii) 若 $-\infty < p(x) < +\infty$, 则令 $Q_m = \{x \in \mathbb{R} : -m \leq p(x) \leq m\}$, 我们有 $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$. 易知只需考查 Q_m 上 $f(x)$

与 $p(x)$ 的大小.

作点集 $S_n = \{Q_m : g_n(x) - p(x) < 1\}$, 则 $Q_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. 由此又只需指出 $f(x) \leq p(x) (x \in S_n)$. 因为函数 $p(x), g_n(x), g_{n+1}(x), \dots$ 均一致有界, 所以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F g_k(x) dx = \int_F p(x) dx \quad (F \subset S_n).$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_F f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F f_k(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F g_k(x) dx \\ &= \int_F p(x) dx \quad (F \subset S_n). \end{aligned}$$

故得 $f(x) \leq p(x)$, a. e. $x \in S_n$. 当然, 此结论在 \mathbb{R} 上也真.

(iv) 对于前一不等式, 只需注意

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-f_n(x)).$$

□

注 设 $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx} (n \in \mathbb{N})$, 则 $f_n \in L([0, +\infty)) (n \in \mathbb{N})$, 但逐项积分等式不真:

$$\int_{[0, +\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0, +\infty)} f_n(x) dx.$$