0.1 孤立奇点

定义 0.1

如果 f 在无心圆盘 (即除去圆心后的圆盘)$\{z:0<|z-z_0|<R\}$ 中全纯, 但在 z_0 处不全纯, 就称 z_0 是 f 的**孤立奇点**.

f 在孤立奇点 z_0 附近可能有三种情形:

(i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$,$a$ 是一有限数, 这时称 z_0 是 f 的**可去奇点**;

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 这时称 z_0 是 f 的**极点**;

(iii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在, 这时称 z_0 是 f 的**本性奇点**.

♣

定理 0.1 (Riemann 定理)

z_0 是 f 的可去奇点的充分必要条件是 f 在 z_0 附近有界.

♡

证明 必要性是显然的, 因为如果 z_0 是 f 的可去奇点, 那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$,$f$ 在 z_0 附近当然有界. 现在设 f 在 z_0 附近有界, 即存在 $\varepsilon>0$, 使得当 z 满足 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,$|f(z)|<M$. 因为 f 在无心圆盘 $D=\{z:0<|z-z_0|<R\}$ 中全纯, 根据定理**??**,f 在 D 中有 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z\in D, \tag{1}$$

其中,$a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$,$0<\rho<R$,$\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}$. 今取 $0<\rho<\varepsilon$, 故当 $\zeta\in\gamma_\rho$ 时,$|f(\zeta)|<M$. 于是, 由长大不等式得

$$|a_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{M}{2\pi\rho^{-n+1}}\cdot 2\pi\rho=M\rho^n,$$

让 $\rho\to 0$, 即得 $a_{-n}=0$,$n=1,2,\cdots$. 这说明在 f 的 Laurent 展开式 (1) 中, 所有负次幂的系数都是零, 因而展开式 (1) 是一个幂级数. 所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$, 即 z_0 是一个可去奇点.

□

注 从上面的证明可以看出,f 在可去奇点处的特征是 Laurent 展开式没有主要部分, 只有全纯部分. 在 z_0 是 f 的可去奇点的情形下,f 在 $\{z:0<|z-z_0|<R\}$ 中的展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

只要令 $f(z_0)=a_0$, 上式便在圆盘 $B(z_0,R)$ 中成立了, 因而 f 在 z_0 处全纯. 换句话说, 在这种情形下, 只要适当定义 f 在 z_0 处的值, 便能使 f 在 z_0 处全纯. 这就是称 z_0 为 f 的可去奇点的原因.

命题 0.1

z_0 是 f 的极点的充分必要条件是 z_0 为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点.

♠

证明 如果 z_0 是 f 的极点, 即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 那么存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,$f(z)$ 不等于零. 故 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在上述无心圆盘中全纯, 且 $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$, 即 z_0 是 φ 的可去奇点, 且 $\varphi(z_0)=0$.

反之, 如果 z_0 是 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty,$$

即 z_0 是 f 的极点.

□

定义 0.2

如果 z_0 是 $\dfrac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 就称 z_0 是 f 的 m **阶极点**.

♣

定理 0.2

z_0 是 f 的 m 阶极点的充分必要条件是 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots, \tag{2}$$

其中 $a_{-m}\neq 0$.

♡

注 从这个定理可以看出,f 在极点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分只有有限项.

证明 如果 z_0 是 f 的 m 阶极点, 根据定义, 它是 $\dfrac{1}{f}$ 的 m 阶零点. 由命题??, 它在 z_0 的邻域中可以表示为 $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$, 这里,$g$ 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$, 因而 $\dfrac{1}{g}$ 也在 z_0 处全纯. 设 $\dfrac{1}{g}$ 在 z_0 处的 Taylor 展开为

$$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

这里,$c_0\neq 0$, 于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-m}=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-z_0}+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots.$$

记 $a_n=c_{n+m}, n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots$, 即得展开式 (2).

反之, 如果 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为 (2) 式, 那么

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

若记上式右端的幂级数为 $\varphi(z)$, 则 φ 在 z_0 处全纯, 且 $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$. 因而 $\dfrac{1}{\varphi}$ 也在 z_0 处全纯, 于是

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}$$

在 z_0 附近成立. 由命题??,z_0 是 $\dfrac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 所以是 f 的 m 阶极点.

□

推论 0.1

z_0 为 f 的 m 阶极点的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以表示为

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{3}$$

这里 g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$.

♡

证明 若 z_0 为 f 的 m 阶极点, 则由定理 0.2知 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

其中 $a_{-m}\neq 0$. 令

$$g(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

则 g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$. 并且

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

反之，若(3)式成立，则

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{g(z)}$$

在 z_0 处全纯，直接计算即知 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，即 z_0 为 f 的 m 阶极点.

□

定理 0.3 (Weierstrass 定理)

设 z_0 是 f 的本性奇点，那么对任意 $A \in \mathbb{C}_\infty$，必存在趋于 z_0 的点列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

注 f 在本性奇点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分有无穷多项. 实际上，这个定理证明了更深刻的结果.

证明 先设 $A=\infty$. 因为 z_0 是 f 的本性奇点，故 f 在 z_0 附近无界. 于是对任意自然数 n，总能找到 z_n，使得 $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$，但 $|f(z_n)| > n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

再设 A 是一个有限数. 令 $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)-A}$，我们证明 φ 在 z_0 的邻域中无界. 不然的话，z_0 是 φ 的可去奇点，适当选择 $\varphi(z_0)$ 的值，可使 φ 在 z_0 处全纯. 如果 $\varphi(z_0) \neq 0$，则因 $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)} + A$，$f$ 也在 z_0 处全纯，这不可能. 故必有 $\varphi(z_0)=0$，由命题 0.1可知 z_0 是 $f(z)-A$ 的极点，也不可能. 所以，φ 在 z_0 的邻域中无界. 于是，对任意自然数 n，存在 z_n，使得 $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$，但 $\dfrac{1}{|f(z)-A|} > n$，即 $|f(z)-A| < \dfrac{1}{n}$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

□

定理 0.4 (Picard 定理)

全纯函数在本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有穷复值，最多只有一个例外.

注 例如，考虑函数 $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$，它在 $z=0$ 附近是全纯的. 若让 z 沿着 x 轴分别从 0 的左边和右边趋于 0，可得

$$\lim_{z=x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{z=x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

这说明 $\lim\limits_{z\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 不存在，所以 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 对于任意复数 $a \neq 0$，若取 $z_n = (\log a + 2n\pi\mathrm{i})^{-1}$，则 $f(z_n) = \mathrm{e}^{\log a + 2n\pi\mathrm{i}} = a$. 由于 $z_n \to 0$，这说明 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的邻域中可以无穷多次地取到非零值 a，但 0 是它的唯一的例外值.

定义 0.3

如果 f 在无穷远点的邻域 (不包括无穷远点) $\{z : 0 \leqslant R < |z| < \infty\}$ 中全纯，就称 ∞ 是 f 的孤立奇点.

注 在这种情形下，作变换 $z = \dfrac{1}{\zeta}$，记

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

则 g 在 $0 < |\zeta| < \dfrac{1}{R}$ 中全纯，即 $\zeta = 0$ 是 g 的孤立奇点.

定义 0.4

设 $g(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$，如果 $\zeta=0$ 是 g 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点，那么我们相应地称 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点.

命题 0.2

设 $g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, 且 g 在原点的邻域中有 Laurent 展开:

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R},$$

则 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,$$

其中,$b_n=a_{-n},n=0,\pm1,\cdots$. 特别地, 如果 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点或 f 在 $z=\infty$ 处全纯, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}. \tag{4}$$

如果 $z=\infty$ 是 f 的 m 阶极点, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots, \tag{5}$$

如果 $z=\infty$ 是 f 的本性奇点, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=\cdots+b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots. \tag{6}$$

这时, 我们称 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 为 f 的**主要部分**, $\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}$ 为 f 的**全纯部分**.

证明 因为 g 在原点的邻域中有 Laurent 展开:

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R},$$

所以 f 在 $R<|z|<\infty$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,$$

其中,$b_n=a_{-n},n=0,\pm1,\cdots$.

特别地, 如果 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点, 即 $\zeta=0$ 是 g 的可去奇点, 因而由Riemann 定理的证明可知 $a_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$. 如果 f 在 $z=\infty$ 处全纯, 由Riemann 定理的注可知 $a_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$. 所以此时 f 的 Laurent 展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}.$$

同样道理, 如果 $z=\infty$ 分别是 f 的 m 阶极点或本性奇点, 那么 f 在 $R<|z|<\infty$ 中分别有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

或

$$f(z)=\cdots+b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots.$$

□

命题 0.3

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 则

(1) 当 $m>n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点;

当 $m>n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶极点;

当 $m=n$ 时, 若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点;
若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 大于 m 阶的零点.

(2) z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 当 $n>m$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点;
当 $m>n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点;
当 $m=n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 所以由推论??知

$$\begin{aligned} f(z)&=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots \\ g(z)&=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $a_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0, b_n=\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.

(1) 如果 $m>n$, 那么由(7)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^n\left[\pm b_n\pm b_{n+1}(z-z_0)\pm\cdots\pm(a_m\pm b_m)(z-z_0)^{m-n}+\cdots\right],$$

从而 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点.
如果 $n>m$, 那么同理可得 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点.
如果 $m=n$, 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$ 时, 由(7)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^m\left[(a_m\pm b_m)+(a_{m+1}\pm b_{m+1})(z-z_0)+\cdots\right],$$

从而此时 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点; 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$ 时, 此时零点 z_0 的阶数大于 m.

(2) 由(7)式可得

$$f(z)\cdot g(z)=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+(a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n)(z-z_0)^{m+n+1}+\cdots,$$

故 z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 由(7)式可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)}{(z-z_0)^n(b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}.$$

当 $m>n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点.
当 $m<n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.
当 $m=n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

□

命题 0.4

函数 $f(z),g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 阶极点及 n 阶极点. 则

(1) 当 $m\neq n$ 时,$z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点;
当 $m=n$ 时, 若 $\left[f(z)(z-a)^m\pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}\neq 0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点或高于 0 阶零点;
若 $\left[f(z)(z-a)^m\pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点.

(2) $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 当 $m>n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点.
当 $m<n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点.

当 $m=n$ 时,$z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 $z=a$ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 级极点, 所以由推论 0.1知

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{g_1(z)}{(z-a)^n},\tag{8}$$

其中 $f_1(z)$ 与 $g_1(z)$ 在 $z=a$ 全纯, 且 $f_1(a)\neq 0, g_1(a)\neq 0$. 并且 $\left[f(z)(z-a)^m+g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=f_1(a)+g_1(a)$.

(1) 由(8)可得

$$f(z)\pm g(z)=\begin{cases}\dfrac{f_1(z)\pm(z-a)^{m-n}g_1(z)}{(z-a)^m}, & m>n,\\ \dfrac{(z-a)^{n-m}f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & n>m,\\ \dfrac{f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & m=n.\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\neq 0$. 当 $n>m$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $g_1(a)\neq 0$. 当 $m=n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\pm g_1(a)$, 各个分子显然在 $z=a$ 是全纯的, 所以有以下结论:

当 $m\neq n$ 时, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点; 当 $m=n$ 时, 若 $f_1(a)\pm g_1(a)\neq 0$, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶极点; 若 $f_1(a)\pm g_1(a)=0$, 设 a 是 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 的 k 阶零点, 则由命题**??**知 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 在 a 的邻域内可以表示为

$$f_1(z)\pm g_1(z)=(z-a)^k h(z),$$

其中 h 在 a 点全纯且 $h(a)\neq 0$.

从而此时

$$f(z)\pm g(z)=\frac{(z-a)^k h(z)}{(z-a)^n}=\begin{cases}\dfrac{h(z)}{(z-a)^{n-k}}, & k<n,\\ (z-a)^{k-n}h(z), & k\geqslant n.\end{cases}$$

因此当 $k<n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $n-k$ 阶极点; 当 $k=n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的可去奇点; 当 $k>n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $k-n$ 阶零点. 故此时点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点或高于 0 阶零点.

(2) 由(8)可得 $f(z)\cdot g(z)=\frac{f_1(z)g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$, 因为 $f_1(z)g_1(z)$ 在 $z=a$ 解析, 且 $f_1(a)g_1(a)\neq 0$, 所以 $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 由(8)可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\cdot\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m>n, & a\text{是}m-n\text{阶极点},\\ (z-a)^{n-m}\cdot\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m<n, & a\text{是}n-m\text{阶零点},\\ \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m=n, & a\text{是可去奇点}.\end{cases}$$

□

命题 0.5

设函数 $f(z)$ 不恒为零且以 $z=a$ 为解析点或极点, 而函数 $\varphi(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点, 则 $z=a$ 是 $\varphi(z)\pm f(z), \varphi(z)\cdot f(z)$ 及 $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明 反证, 如果 $z=a$ 不是 $\varphi(z)\pm f(z),\varphi(z)\cdot f(z)$ 及 $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点, 则

$$\varphi(z)=\left[\varphi(z)\pm f(z)\right]\mp f(x),\quad \varphi(z)=\frac{\varphi(z)}{f(z)}\cdot f(x)\quad,\varphi(z)=\frac{\varphi(z)\cdot f(z)}{f(x)}.$$

由命题 0.3和命题 0.4知 $\varphi(z)$ 就以 $z=a$ 为可去奇点或极点或零点, 这与题设矛盾.

□