

0.1 估计和式的常用方法

0.1.1 和式放缩成积分

命题 0.1

设 f 在 $(0, 1)$ 单调且 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

证明 不妨设 f 递减, 则一方面, 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_0^1 f(x) dx.$$

另一方面, 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

故


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

□

0.1.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分

例题 0.1 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}.$$

 **笔记** 证明的想法要么是凑定积分定义, 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

注 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

解 解法一: 注意到

$$\frac{i}{n} < \frac{\sqrt{i^2+1}}{n} < \frac{i+1}{n}, i = 1, 2, \dots, n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

解法二: 注意到

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \left(n + \frac{i^2+1}{n} \right) \left(n + \frac{i^2}{n} \right)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$


故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

□

例题 0.2 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n}.$$

 **笔记** 长得神似定积分定义且很容易观察到 $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}}$ 和 $\frac{i}{n^2}$ 没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方法, 即做差 $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2}$ 强估证明不影响极限.

证明 注意到

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| = \left| \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2} \right) \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^2 (n^2 + \frac{1}{i})} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^4} = \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4}, \end{aligned}$$

于是

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \\ &= \int_0^2 x \sin^4 \pi x dx \stackrel{\substack{\text{区间再现} \\ \text{令 } x=2-y}}{=} \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi (2-y) dy \\ &= \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi y dy = \int_0^2 \sin^4 \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□


0.1.3 和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)

当和式内部对 n 可求极限时, 极限号与求和号可以换序. (当和式内部对 n 求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 等都不能换序) 本质上就是控制收敛定理的应用.

注 不能按照极限号与求和号可换序的想法书写过程, 应该利用不等式放缩、夹逼准则和上下极限进行严谨地书写证明.

例题 0.3 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

 **笔记** 求这种前 n 项和关于 n 的极限 (n 既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得对 $\forall n > N_0$, 都有

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} - \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| = \left| \sum_{k>N_0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}} - \cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| > \sum_{k>N_0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对 $\forall N > N_0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 0$.

因此对 $\forall N > N_0$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}.$$

再令 $N \rightarrow +\infty$, 得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2$.

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2 (如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不收敛).

注意: 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2.

(上述论证实际上就是一种“猜测”这种极限的值得方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的“度”). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前 N 项的极限, 原和式除前 N 项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前 N 项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

注: 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

注 上述思路本质上就是控制收敛定理的应用, 也可以使用 *Toplitz* 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去书写证明过程 (夹逼定理和 *Toplitz* 定理).

解 解法一 (夹逼定理):

$$\text{一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 于是 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$\text{另一方面, 注意到对 } \forall N \in \mathbb{N}_+, \text{ 都有 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}, \forall n > N. \text{ 从而}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+.$$


$$\text{于是令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2.$$

$$\text{综上所述, 我们有 } 2 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq 2. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 2.$$

解法二 (Toplitz 定理):

例题 0.4 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

注 注意倒序求和与顺序求和相等. (看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下倒序求和)

 **笔记** 解法一的思路: 我们利用上一题的想法计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}$. 先假设级数 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$ 收敛, 则由 *Cauchy*

收敛准则可知, 存在 $N' > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k}, \forall N > N'.$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}$. 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

解 解法一: 注意到

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用 $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \leq \sum_{k=1}^n e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^n e^{1-k}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{令 } n \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{1-k} = \frac{e}{e-1}.$$

另一方面, 注意到 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \geq \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall N \in \mathbb{N}_+$. 两边同时对 n 取下极限, 可得对 $\forall N \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \\ &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k} \end{aligned}$$

$$\text{令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \underline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}.$$

解法二 (单调有界定理): 因为

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

所以证明 $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, 1 \leq k \leq n-1$ 即可, 这等价于 $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \leq \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$. 实际上 $a_k = \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}, 1 \leq k \leq n$ 是单调递减数列, 因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}} = \frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right), x = k+1 \in [2, n].$$

又由于

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq -\frac{n}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x^2} \leq 0, \forall x = k+1 \in [2, n].$$

从而 $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e^{n \ln(1 - \frac{1}{x^2}) + \ln(1 + \frac{1}{x})} \leq e^0 = 1, \forall x = k+1 \in [2, n]$, 故 $a_{k+1} \leq a_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 于是 $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n} = a_k \geq a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, 也即 S_n 单调递增. 注意

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为 S . 对任意正整数 $n > m$, 先固定 m , 对 n 取极限有


$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^m e^{-k}$$

这对任意正整数 m 均成立, 再令 $m \rightarrow \infty$ 有 $S \geq \frac{1}{e-1}$, 从而所求极限为 $\frac{1}{e-1}$. \square

0.1.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 n, k 不同阶)

只有当和式内部 n, k 不同阶时, 我们才可以直接利用 Taylor 展开进行计算. 但是书写过程不能用 Taylor 展开书写 (关于 o 和 O 余项的求和估计不好说明), 这样书写不严谨 (见例题 0.5 证法一).

我们可以采用拟合法 (见例题 0.6)、夹逼准则 (见例题 0.7)、 $\varepsilon - \delta$ 语言 (见例题 0.5 证法二) 严谨地书写过程

 **笔记** 虽然这三种方法都比较通用, 但是更推荐拟合法和夹逼准则, 一般比较简便.

虽然 $\varepsilon - \delta$ 语言书写起来比较繁琐, 但是当有些和式不容易放缩、拟合的时候, 用这个方法更简单.

这类和式内部 n, k 不同阶的问题的处理方式: 先利用 Taylor 展开计算极限 (可以先不算出极限), 并判断到底要展开多少项, 然后根据具体问题综合运用拟合法、夹逼准则、 $\varepsilon - \delta$ 语言严谨地书写过程 (怎么书写简便就怎么写).

注 这类和式内部 n, k 不同阶的问题, Taylor 公式是本质, 拟合法、夹逼准则、 $\varepsilon - \delta$ 语言只是形式上的过程.

例题 0.5 设 f 在 0 处可微, $f(0) = 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

 **笔记** 本题如果使用例题 0.3 的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot 0) = +\infty \cdot 0.$$

而 $+\infty \cdot 0$ 我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述 “ $+\infty \cdot 0$ ” 的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们使用 Taylor 展开并引入余项方法和 $\varepsilon - \delta$ 方法更加精细地估计原级数的阶.

注 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的 $\varepsilon - \delta$ 语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的 $\varepsilon - \delta$ 语言进行证明.

证明 证法一 (不严谨的余项方法): 由 f 在 0 处可微且 $f(0) = 0$ 和带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可知

$$f(x) = f'(0)x + o(x), x \rightarrow 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) &= \sum_{i=1}^n \left[f'(0) \cdot \frac{i}{n^2} + o\left(\frac{i}{n^2}\right) \right] = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{i}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{f'(0)}{2}, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

证法二 ($\varepsilon - \delta$ 严谨的证明): 由 Taylor 定理, 可知对 $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta > 0$, 当 $|x| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f'(0)x| \leq \varepsilon|x|$.

只要 $n > \frac{1}{\delta}$, 有 $\left|\frac{i}{n^2}\right| \leq \delta, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 故 $\left|f\left(\frac{i}{n^2}\right) - f'(0)\frac{i}{n^2}\right| \leq \varepsilon \frac{i}{n^2}, i = 1, 2, \dots, n$.

从而

$$f'(0)(1 - \varepsilon) \frac{i}{n^2} \leq f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1 + \varepsilon) \frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1 - \varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n} = f'(0)(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{f'(0)}{2}(1 + \varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n}.$$

于是


$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2} \leq \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leq \frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left| \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| \leq \frac{|f'(0)|}{2} \varepsilon.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{f'(0)}{2}$. □

例题 0.6 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right)$.

 **笔记** 本题采用**拟合法**书写过程.

解 由于对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{\sqrt{k}}{n} \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, 故由 Taylor 定理可得, 对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{1}{n + \sqrt{k}} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{k}{n^2} + \cdots \right), n \rightarrow \infty.$$

于是考虑拟合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right).$$

又由于


$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Stolz公式或定积分定义}} \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.7 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$.

 **笔记** 本题采用**夹逼准则**书写过程. 注意 n, k 不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉, 然后使用夹逼准则即可.

证明 注意到


$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \leq \frac{k}{2n^2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

所以

$$\frac{n+1}{2n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是 $\frac{1}{4}$. □

例题 0.8 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \right)^n$.

 **笔记** **证法二** 综合运用了拟合法和夹逼准则书写过程 (只用其中一种方法的话, 书写起来很麻烦).

解 证法一 (不严谨的余项方法): 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)}.$$

由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 - \frac{k}{2n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right] = \frac{1}{n} \left[n - \frac{\sum_{k=1}^n k}{2n^2} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{n+1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \left(-\frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

证法二 (严谨地书写过程): 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)}. \quad (1)$$

因为对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 所以利用 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = 1 - \frac{k}{2n^2} + \cdots, n \rightarrow \infty.$$

从而考虑拟合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 + \frac{k}{2n^2} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n^2} \right) \right].$$

由于

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 + \frac{k}{2n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} + \frac{k}{2n^3} \right) - 1 \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{k}{2n^3} \right) - 1 = \frac{n+1}{4n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n^2} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^3} = 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n - \sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{\sqrt{n^2+k} (n + \sqrt{n^2+k})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2 + k + n\sqrt{n^2+k}}. \end{aligned} \quad (2)$$

注意到

$$-\frac{n+1}{2(n+1+\sqrt{n^2+n})} = \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{2n^2} = -\frac{n+1}{4n}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则由夹逼准则可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} = -\frac{1}{4}$. 再结合(1)(2)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

□

0.1.5 分段估计 (Toeplitz 定理)

对于估计级数或积分的极限或阶的问题, 当问题难以直接处理时, 我们可以尝试分段估计, 分段点的选取可以直接根据级数或积分的性质选取, 也可以根据我们的需要待定分段点 m , 然后再选取满足我们需要的 m 作为分段点.

定理 0.1 (Toeplitz 定理)


(a): 设 $\{t_{nk}\}_{1 \leq k \leq n} \subset [0, +\infty)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a. \quad (3)$$

(b): 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^\infty \subset [0, +\infty)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} = 1$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} a_k = a. \quad (4)$$

♡

 **笔记** 无需记忆 Toeplitz 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 Toeplitz 定理, 即当 n 比较小的时候, 用 t_{nk} 趋于 0 来控制, 当 n 比较大的时候, 用 a_n 趋于 a 来控制.

我们需要熟悉蕴含在 Toeplitz 定理其中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

Toeplitz 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项), 另一部分是余项 (从 $N+1$ 项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项) 和余项 (从 $N+1$ 项开始包括后面的所有项).

注 注意区分 (a), (b) 两者的条件: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m t_{nk} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk}$.

证明 (a): 事实上, 不妨设 $a = 0$, 否则用 $a_n - a$ 代替 a_n 即可.

对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k|.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N \rightarrow +\infty$, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

故(3)式成立.

(b): 事实上, 不妨设 $a = 0$, 否则用 $a_n - a$ 代替 a_n 即可.

对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k|.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N \rightarrow +\infty$, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$


故(4)式成立. □

例题 0.9 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a.$$

 **笔记** 理解到本质之后不需要记忆 **Toeplitz 定理**, 但是这里可以直接套用 **Toeplitz 定理** 我们就引用了. 今后我们不再直接套用 **Toeplitz 定理**, 而是利用 **Toeplitz 定理** 的证明方法解决问题.

证明 记 $t_{nk} = \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$. 则 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{\sum_{k=1}^n p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 1$. 又因为

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n+k+1}} = 0.$$

所以由夹逼准则可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 故由 **Toeplitz 定理** 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

□

例题 0.10 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 且 $b_n \geq 0$. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n) = aS.$$

证明 (i) 若 $S = 0$, 则 $b_n \equiv 0$. 此时结论显然成立.

(ii) 若 $S > 0$, 则令 $t_{nk} = \frac{1}{S} b_{n-k+1}, k = 1, 2, \dots, n$. 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{n-k+1} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk}.$$

不妨设 $a = 0$, 则对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk}.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk} \right) = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

再令 $N \rightarrow +\infty$, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = a$. 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = S \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = aS$. \square

例题 0.11 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. 且存在常数 $K > 0$, 使得 $\sum_{j=0}^n |y_j| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = 0.$$

证明 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \left| \sum_{i=N+1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \sup_{i \geq N+1} |x_i| \cdot \sum_{i=N+1}^n |y_{n-i}| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|$.


由 N 任意性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{i \geq N+1} |x_i| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

\square

例题 0.12 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

 **笔记** 可以不妨设 $a = b = 0$ 的原因: 假设当 $a = b = 0$ 时, 结论成立. 则当 a, b 至少有一个不为零时, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b) = 0$. 从而由假设可知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_{n-k+1} - b)}{n} = 0. \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} + ab - a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} - b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = 0 \end{aligned}$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} + b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} - ab = ab$.

证明 不妨设 $a = b = 0$, 否则用 $a_n - a$ 代替 a_n , 用 $b_n - b$ 代替 b_n . 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} \right| \leq \frac{\left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right|}{n} + \frac{\left| \sum_{k=N+1}^n a_k b_{n-k+1} \right|}{n}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |b_{n-k+1}| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \right| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |b_k|}{n} \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = 0$. □

例题 0.13 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$.


注 取 $m = [\sqrt{\sqrt{n} \ln n}] + 1$ 的原因: 我们希望找到一个合适的分段点 m , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 0$. 由

$\sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \frac{(m-1)\sqrt{n}}{n} = \frac{(m-1)}{\sqrt{n}}$ 可知, 我们可以希望 $\frac{(m-1)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, 即 $m = o(\sqrt{n})$. 又由上述证明的积分放缩可

知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n - m + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}-1}$, 从而我们希望 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}-1} = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{m}} = 1$, 也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{m} = 0.$$

综上, 我们希望当 $n \rightarrow \infty$ 时, m 的阶比 \sqrt{n} 低但比 $\ln n$ 高, 于是我们考虑 $\ln n$ 和 \sqrt{n} 的几何平均, 即令 $m = \sqrt{\sqrt{n} \ln n}$, 恰好满足需要. 又由于 m 表示求和项数, 因此取整保证严谨性.

 **笔记** 本题核心想法是: **分段估计**. 分段后的估计方式和分段点的选取方法较多. (清疏讲义上有另一种分段估计的做法)

注意: 本题使用 Stolz 定理解决不了, 直接放缩也不行.

证明 取 $m = [\sqrt{\sqrt{n} \ln n}] + 1$, 考虑 $\sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1 + \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} + \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$. 不难发现

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\sqrt{\sqrt{n} \ln n}}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \frac{(m-1)\sqrt{n}}{n} \leq \frac{\sqrt{\sqrt{n} \ln n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 0$. 并且一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_{k-1}^k n^{\frac{1}{k}} dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_{k-1}^k n^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n} \int_{m-1}^n n^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}} \frac{n^x}{x^2} dx \leq \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{x^2} dx = \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} (n - m + 1). \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} n^{\frac{1}{k}} dx \geq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} n^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n} \int_m^{n+1} n^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{n^x}{x^2} dx \leq \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x^2} dx = \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n - m + 1). \end{aligned}$$

又注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{m} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{m} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 1.$$

故

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n - m + 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} (n - m + 1) = 1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} + \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \right) = 1 + 0 + 1 = 2.$ □

0.1.6 欧拉麦克劳林公式 (E-M 公式)

命题 0.2 (0 阶欧拉麦克劳林公式 (0 阶 E-M 公式))

设 $a, b \in \mathbb{Z}, f \in D[a, b], f' \in L^1[a, b]$, 让我们有

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.$$

注 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即可), 再使用.

E-M 公式求和通项与求和号上限无关.

笔记 在 $[0, 1)$ 上 $x - [x] - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$, 它也是 $x - \frac{1}{2}$ 做周期 1 延拓得到的函数. 故 $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

证明

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x+k) dx \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[\frac{1}{2} f(1+k) + \frac{1}{2} f(k) - \int_0^1 f(x+k) dx \right] \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[\frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b-1} [f(k) + f(k+1)] - \int_a^b f(x) dx \\ &= -\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

□

注 假设已知 $f'(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 记 $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于 $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, 因此直接将 $b_1(x)$ 放大成 $\frac{1}{2}$ 就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见 **例题 0.14**.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对 $b_1(x)$ 使用分部积分. 但是由于 b_1 并非连续函数, 为了把 $\int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$ 继续分部积分, 我们需要寻求 b_1 的原函数 b_2 使得

$$\int_a^b b_1(x) f'(x) dx = \int_a^b f'(x) db_2(x),$$

即期望 $b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 的一个原函数并且仍然有周期 1 (因为求导不改变周期性, 又由于 $b_1(x)$ 周期为 1, 故原函数 $b_2(x)$ 的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, b_2(x+1) = b_2(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(构造 $b_2(x)$ 的想法: 先找到 $x \in [0, 1)$ 这个特殊情况下的 $b_2(x)$, 再由此构造出 $x \in \mathbb{R}$ 这个一般情况下的 $b_2(x)$, 即由特殊推广到一般)

先考虑 $x \in [0, 1)$ 的情况 (因为此时 $[x] \equiv 0$, 方便后续计算得到原函数 $b_2(x)$), 于是就需要 $\int_0^1 b_1(x) dx = b_2(1) = b_2(0) = 0$. 显然

$$b_2(1) = \int_0^1 b_1(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0 = b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要 $b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy = \int_0^x \left(y - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ (其中 c 为任意常数), $x \in [0, 1)$. 又因为我们需要 $b_2(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且周期为 1, 所以再将 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ 做周期 1 延拓到 \mathbb{R} 上, 得到在 \mathbb{R} 上连续且周期为 1 的 $b_2(x)$ (易知此时 $b_2(x)$ 在 \mathbb{R} 上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到 $b_2(x)$ 在 \mathbb{R} 上的表达式为

$$b_2(x) = b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y) dy = \int_0^{x-[x]} \left(y - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

此时又由 $\int_0^1 b_1(y) dy = 0$ 可得

$$\begin{aligned} b_2(x) &= b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y) dy = \int_{[x]}^x b_1(y - [x]) dy = \int_{[x]}^x b_1(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y+k) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy = \int_0^{[x]} b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy \\ &= \int_0^x b_1(y) dy, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的 $b_2(x)$ 恰好就是 $b_1(x)$ 的一个原函数. 即 $b_1(x)$ 在 \mathbb{R} 上有连续且周期为 1 的原函数 $b_2(x)$, $f'(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续. 因此我们可以对 $b_1(x)$ 进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x) f'(x) dx = \int_a^b f'(x) db_2(x)$$

成立. 并且此时 $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 其中 c 为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要 $b_3(x)$ 是 $b_2(x)$ 的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望 $b_3(1) = b_3(0)$ 和 $b_3(x) = \int_0^x b_2(y) dy, \forall x \in [0, 1)$. 即

$$\begin{aligned} \int_0^1 b_2(x) dx &= b_3(1) = b_3(0) = 0, \\ b_3(x) &= \int_0^x b_2(y) dy, \forall x \in [0, 1). \end{aligned}$$

然后以此构造出 $[0, 1)$ 上的 $b_3(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 \mathbb{R} 上的 $b_3(x)$, 并且 $b_3(x)$ 满足在 \mathbb{R} 上连续且周期为 1. 进而可以利用这个 $b_3(x)$ 继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由 $\int_0^1 b_2(x) dx = b_3(1) = b_3(0) = 0$ 可知

$$\int_0^1 b_2(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c\right) dx = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时 $b_1(x)$ 的原函数 $b_2(x)$ 就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么 c 可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的 $c = \frac{1}{12}$). 此时这个唯一

确定的 $b_2(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1);$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

依次下去我们给出计算 $b_n, n \in \mathbb{N}$ 的算法.

定义 0.1 ($b_n(x)$ 定义和算法)

我们令 $b_1(x)$ 为 $x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1)$ 的周期 1 延拓. 对所有 $n = 2, 3, \dots, b_n(x)$ 是 $b_{n-1}(x)$ 的一个原函数.

笔记 $b_n(x)$ 的算法:

根据上述构造 $b_2(x), b_3(x)$ 的想法可知, 我们只需期望 $b_n(1) = b_n(0)$ 和 $b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y) dy, \forall x \in [0, 1)$. 即

$$\int_0^1 b_{n-1}(x) dx = b_n(1) = b_n(0) = 0,$$

$$b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y) dy, \forall x \in [0, 1).$$

然后以此构造出 $[0, 1)$ 上的 $b_n(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 \mathbb{R} 上的 $b_n(x)$, 并且 $b_n(x)$ 满足在 \mathbb{R} 上连续且周期为 1. 并且根据 $\int_0^1 b_{n-1}(x) dx = b_n(1) = b_n(0) = 0$ 我们可唯一确定 $b_{n-1}(x)$ 在 $[0, 1)$ 上的表达式. 从而可以唯一确定 $b_n(x)$ 之前的所有 $b_{n-1}(x)$ 在 \mathbb{R} 上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一确定所有的 $b_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述 $b_n(x)$ 的定义和算法, 可知 $b_n(x)$ 是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在 $M_n > 0$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $|b_n(x)| \leq M_n$.

注 我们可以利用这些 $b_n(x)$ 不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见例题??, 例题 0.14.

结论 我们计算一些 $b_n(x)$ 以备:

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1).$$

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, |b_1(x)| \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_3(x) = \frac{(x - [x])^3}{6} - \frac{(x - [x])^2}{4} + \frac{(x - [x])}{12}, |b_3(x)| \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{36}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}, x \in [0, 1).$$

$$b_4(x) = \frac{(x - [x])^4}{24} - \frac{(x - [x])^3}{12} + \frac{(x - [x])^2}{24} - \frac{1}{720}, |b_4(x)| \leq \frac{1}{720}, x \in \mathbb{R}.$$

例题 0.14 估计 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \rightarrow \infty$.

解 解法一: 一方面, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

另一方面, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 我们也有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n.$$

于是对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

从而对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$. 即 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, n \rightarrow \infty$.

解法二 (E-M 公式): 由 E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1+\frac{1}{n}}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx. \quad (5)$$

因为 $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$ 存在, 所以可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq C < \infty.$$

于是 $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx$. 从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left[C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx\right] \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

故 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. 此时令 $\frac{1}{2} - C = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq \gamma$ (欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

由 $b_n(x)$ 的构造和分部积分可知, 上述结果只是对 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记 $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}$. 则不难发现 $b_2(x)$ 是连续且周期为 1 的函数, $b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 在 \mathbb{R} 上的一个原函数, 并且 $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$. 而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx$

收敛, 于是设 $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \triangleq C$. 从而再对(5)分部积分得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left(\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} db_2(x) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{b_2(x)}{x^2} \Big|_n^{+\infty} + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2}. \quad (7) \end{aligned}$$

又由 $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知

$$\left| 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} \right| \leq 2 \left| \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \right| + \frac{|b_2(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{6} \left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \right| + \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即

$$2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

再结合(7)和(8)式可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$


记 $\gamma \triangleq \frac{1}{2} - C$ (γ 为欧拉常数), 则我们就得到了比(6)式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

例题 0.15 计算

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$$

 **笔记** 估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.

解 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + (-1)^{2m-2} \frac{\ln(2m-1)}{2m-1} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2m-1)}{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列 $\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ 即可. 又注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^m \left[(-1)^{2n-2} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + (-1)^{2n-1} \frac{\ln 2n}{2n} \right] = \sum_{n=1}^m \left[\frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln 2n}{2n} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n}. \end{aligned} \quad (10)$$

由例题 0.14 可知

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln 2}{n} = \ln 2(\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

又由 E-M 公式可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

因为

$$\left| \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

并且 $\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ 收敛, 所以 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C < \infty$. 即

$$\int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

于是结合 (12)(13) 式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (14)$$

因此由 (10)(11)(14) 式可得


$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 2m + C + o(1) - \left[\ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 2m - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) \\ &= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

即 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. 再结合 (9) 式可得

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

故 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. □

例题 0.16 设 $f \in C^1[1, +\infty)$ 且 $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$, 证明 $\int_1^\infty f(x) dx$ 收敛等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$ 存在.

 **笔记** 关键想法参考: E-M 公式和命题 ??.

证明 由 E-M 公式可知

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(x) dx + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx. \quad (15)$$

注意到 $0 \leq \left| \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \right| \leq \frac{1}{2} |f'(x)|$, 并且 $\int_1^\infty |f'(x)| dx$ 收敛, 因此 $\int_1^\infty \left| \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \right| dx$ 也收敛.

从而 $\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx$ 也收敛, 故由 Henie 归结原则可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx$ 存在.

(1) 若 $\int_1^\infty f(x) dx$ 存在, 则由 Henie 归结原则可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在. 又由 $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$ 可知 $\int_1^\infty f'(x) dx$

收敛. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f'(y) dy = \int_1^{\infty} f'(x) dx < \infty.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 从而由 Henie 归结原则可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ 也存在. 又由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx$ 存在, 再结合(15)式可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$ 存在.

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$. 又由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx$ 存在, 再结合(15)式可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ 也存在. 于是对 $\forall x \geq 1$, 一定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leq x < n+1$. 从而可得

$$\int_1^x f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^x f(x) dx. \quad (16)$$

并且

$$\int_n^x f(x) dx \leq \int_n^x |f(x)| dx \leq \int_n^{n+1} |f(x)| dx \leq \sup_{y \geq n} |f(y)|. \quad (17)$$

对(17)式两边同时令 $x \rightarrow +\infty$, 则 $n \rightarrow +\infty$. 进而可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \geq n} |f(y)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|.$$

由于此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 因此 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = 0$. 于是再对(16)式两边同时令 $x \rightarrow +\infty$, 则 $n \rightarrow +\infty$. 从而可得

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx.$$

又因为此时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在, 所以 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 也存在. □


例题 0.17

1. 先证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n \right)$$

存在.

2. 再用积分放缩法求 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, n \rightarrow \infty$ 的等价无穷大.

 **笔记** 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

证明

1. 设

$$a_n \triangleq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n, n = 2, 3, \dots$$

我们有

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln \ln(n+1) + \ln \ln n \\
 &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln \left[\ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] + \ln \ln n \\
 &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln \ln n - \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \right) + \ln \ln n \\
 &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right).
 \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \right| < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n \ln n} \right] = -\frac{1}{2 \ln 2},$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=2}^n (a_{k+1} - a_k) + a_2 \right]$$

存在.

2. 注意到对 $\forall n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k} dx \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln(n+1) - \ln \ln 2. \quad (18)$$

同时, 也有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k \ln k} dx \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln n. \quad (19)$$

从而对 $\forall n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 由(18)(19)式可得

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \ln \ln n.$$

于是对 $\forall n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\frac{\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2}{\ln \ln n} \leq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} \leq 1.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼准则可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} = 1$. 即 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln \ln n, n \rightarrow \infty$.

□

例题 0.18 用积分放缩法得到 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, x \rightarrow 1^-$ 的等价无穷大.

证明 注意到对 $\forall x \in (0, 1)$, 固定 x , 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2} dt \geq -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2} dt = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (20)$$

同时也有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{t^2} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (21)$$

又由于 $x \in (0, 1)$, 因此 $\ln x \in (-\infty, 0)$. 从而

$$\int_0^{\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{t^2 \ln x} dt \stackrel{\text{令 } y=t\sqrt{-\ln x}}{=} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

故 $\int_0^\infty x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$ 收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \int_0^\infty x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \quad (22)$$

从而对 $\forall x \in (0, 1)$, 结合(20)(21)(22)式可得

$$-1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{t^2} dt \leq \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x \in (0, 1).$$

令 $x \rightarrow 1^-$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 即 $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}, x \rightarrow 1^-$.

又由 $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$ 可知 $-\ln x = -\ln(1+x-1) \sim 1-x, x \rightarrow 1^-$. 因此

$$\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

□