0.1 关系

定义 0.1 ((二元) 关系)

所谓在集合 A 中定义了二元素间的一个 **(二元) 关系** R, 也就是给出了集合 $A\times A$ 中元素的一个性质 R, 若 $a,b\in A$, (a,b) 有性质 R, 则称 a 与 b 有关系 R, 记为 aRb.

笔记 事实上, 集合 A 中关系 R 可由 $A\times A$ 中子集

$$S\triangleq\{(a,b)\mid a,b\in A, aRb\}$$

来刻画. 即若 aRb, 则 $(a,b)\in S$.

反之, 由 $A\times A$ 的一个子集 S, 也可确定 A 一个关系 R. 即若 $(a,b)\in S$, 则 aRb.

定义 0.2 (等价关系)

1. 集合 A 中关系若满足以下条件:
   (1) **自反性** $aRa, \forall a\in A$;
   (2) **对称性**若 aRb, 则 bRa;
   (3) **传递性**若 aRb, bRc, 则 aRc,

   则称 R 为 A 的一个**等价关系**.
2. 若仍以 R 表示 A 中关系所确定的 $A\times A$ 的子集, 则 R 为等价关系当且仅当下列三个条件同时成立:
   (1) $(a,a)\in R, \forall a\in A$;
   (2) 若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$;
   (3) 若 $(a,b)\in R, (b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$.

注 等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不一定能推出第三个条件.

但若 $\sim$ 是集合 A 中的关系, 且 $\sim$ 满足对称性和传递性, 则 $\sim$ 具有自反性.

证明 例如, 实数集 $\mathbb{R}$ 中的关系 $\sim$

$$a\sim b \iff a\leqslant b$$

满足自反性和传递性, 但不满足对称性.

实数集中关系 $\sim$

$$a\sim b \iff |a-b|\leqslant 1$$

满足自反性和对称性, 但不满足传递性.

在非负整数集 $\mathbb{N}_0$ 中定义关系 $\sim$

$$a\sim b \iff a\text{与}b\text{均为正数且有相同的奇偶性}$$

则易见 $\sim$ 满足对称性和传递性, 但不满足自反性, 因为没有 $0\sim 0$.

若 $\sim$ 是集合 A 中的关系, 且 $\sim$ 满足对称性和传递性, 设 $a\sim b$, 则由 $\sim$ 满足对称性知 $b\sim a$, 又由 $\sim$ 满足传递性可得 $a\sim a$.

□

定义 0.3 (等价类和代表元素)

若 R 是集合 A 的一个等价关系且 $a\in A$, 则 A 中所有与 a 有关系 R 的元素集合

$$K_a=[a]=\{b\in A\mid bRa\}$$

称为 a 所在的**等价类**, a 称为这个等价类的**代表元素**.

定义 0.4 (分划/分类)

集合 A 的一个子集族 $\{A_\alpha\}$ 称为 A 的一个**分划**或**分类**或**分析**, 如果满足

$$A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha, \quad A_\alpha \bigcap A_\beta = \varnothing, \quad 若 \alpha \neq \beta.$$

也称 A 是 $\{A_\alpha\}$ 中**所有不相交的集合的并**或**无交并**. 也把上式无交并记为

$$A = \bigsqcup_{\alpha} A_\alpha.$$

♣

定理 0.1

设 R 是集合 A 的等价关系, 则由所有不同的等价类构成的子集族 $\{K_a\}$ 是 A 的分划. 即

$$A = \bigsqcup_{a \in A} K_a.$$

其中 a 取遍不同 A 的等价类的代表元.

反之, 若 $\{A_a\}$ 是 A 的分划, 则可在 A 中定义等价关系 R,

$$aRb, \quad 若 \exists A_\alpha, 使 a, b \in A_\alpha.$$

并且使得每个 A_a 是一等价类.

♡

证明 设 R 是 A 的等价关系. 由 $\forall a \in A, aRa$ 知 $a \in K_a$, 于是 $A = \bigcup_{a} K_a$. 设 $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, 即 $\exists c \in K_a \cap K_b$, 对 $\forall x \in K_a$ 有 cRa, xRa, 因而 xRc. 又 cRb, 故 xRb, 即 $x \in K_b$, 从而得 $K_a \subseteq K_b$. 同样可得 $K_b \subseteq K_a$, 故 $K_a = K_b$, 亦即若 $K_a \neq K_b$, 则 $K_a \cap K_b = \varnothing$. 这样就证明了 $\{K_a\}$ 是 A 的分划.

反之, 设 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个分划. 在 A 中定义关系 R,

$$aRb, \quad 若 \exists A_\alpha, 使 a, b \in A_\alpha.$$

因 $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, 故对 $\forall a \in A, \exists A_\alpha$, 使 $a \in A_\alpha$, 因此 $a, a \in A_\alpha$, 即 aRa. 其次, 若 aRb, 即 $\exists A_\alpha$, 使 $a, b \in A_\alpha$. 自然 $b, a \in A_\alpha$, 故 bRa. 再次, 若 aRb, bRc, 即有 A_α, A_β, 使 $a, b \in A_\alpha$ 且 $b, c \in A_\beta$, 故 $b \in A_\alpha \cap A_\beta$. 由 $\{A_\alpha\}$ 为 A 的分划知 $A_\alpha = A_\beta$, 因而 aRc. 这样就证明了 R 是等价关系. 由 R 的定义知若 $a \in A_\alpha$, 则 a 所在的等价类 $K_a = A_\alpha$. □

定义 0.5 (商集和自然映射)

设 R 是集合 A 的等价关系. 以关于 R 的等价类为元素的集合 $\{K_a\}$ 称为 A 对 R 的**商集合**或**商集**. 记为 A/R. 由

$$\pi(a) = K_a, \quad \forall a \in A$$

定义的 A 到 A/R 上的映射 π 称为 A 到 A/R 上的**自然映射**.

♣

注 显然自然映射都是满射.

定理 0.2

设 $f : A \to B$ 是满映射. 在 A 中定义关系 R,

$$aRb, \quad 若 f(a) = f(b),$$

则 R 是 A 的等价关系. 又设 $\pi : A \to A/R$ 为自然映射, 则有 A/R 到 B 上的一一对应 g 满足

$$g\pi = f. \tag{1}$$

即图 1是交换图.

♡

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A/R \arrow[dl, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

图 1

证明 考虑 $y \in B$ 的原像 $f^{-1}(y)$ 构成的子集族. 显然, $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$. 又若 $y, z \in B$, $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$, 即 $\exists a \in A$, 使 $f(a) = y, f(a) = z$, 即 $y = z$. 故 $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$, 从而 $\{f^{-1}(y)\}$ 是 A 的一个分划. 于是由定理 0.1知, 在 A 中可定义等价关系 $R : aRb$, 若 $\exists f^{-1}(y)$, 使 $a, b \in f^{-1}(y)$, 即 $f(a) = f(b)$. 由此知定理的第一部分成立.

定义 A/R 到 B 的映射 g,

$$g(K_a) = f(a), \quad \forall a \in A.$$

注意到 A 中元素 a 所在等价类 $K_a = f^{-1}(f(a))$, 由于 $K_a = K_b$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$, 故 g 是单射. 又 $f(A) = B$, 故 g 是满射. 因此 g 是一一对应. 由 π 的定义知式 (1) 成立.

□

定义 0.6 (完全代表系)

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系, 则子集 $R \subseteq X$ 称为等价关系 $\sim$ 的**完全代表系**, 当且仅当满足以下条件:

$$|R \cap C| = 1, \ \forall C \in X/\sim.$$

即 R 与每个等价类有且仅有一个公共元素.

♣

定理 0.3

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系, 则必存在 X 的子集 R 为等价关系 $\sim$ 的完全代表系.

♡

注 这个定理表明: 任意等价关系的完全代表系的存在性与选择公理等价.

一个等价关系的完全代表系可以不唯一.

证明 由定理 0.1知

$$\bigcup_{K \in X/\sim} K = X.$$

由选择公理知, 存在一个选择函数

$$f : X/\sim \longrightarrow \bigcup_{K \in X/\sim} K = X,$$

使得对 $\forall K \in X/\sim$, 都有 $f(K) \in K$. 令

$$R = \{f(K) \mid K \in X/\sim\},$$

则对 $\forall C \in X/\sim$, 有 $f(C) \in C$. 再对 $\forall f(K) \in R \setminus \{f(C)\}$, 有 $K \neq C$, 则由定理 0.1知

$$K \cap C = \varnothing.$$

而 $f(K) \in K$, 故 $f(K) \notin C$. 因此 $R \cap C = \{f(C)\}$, 即 $|R \cap C| = 1$.

□

定理 0.4

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系,X 的子集 R 为等价关系 $\sim$ 的**完全代表系**的充分必要条件是满足以下任意一个条件:

(1) 对 $\forall x \in X$, 存在 $r \in R$, 使得 $x \sim r$. 并且对 $\forall r_1, r_2 \in R$ 且 $r_1 \neq r_2$, 有 r_1 与 r_2 不等价.

(2) $X = \bigsqcup_{r \in R} K_r$, 也即

$$X = \bigcup_{r \in R} K_r \text{ 且 } K_{r_1} \cap K_{r_2} = \varnothing, \forall r_1, r_2 \in R \text{且} r_1 \neq r_2.$$

证明

□

定义 0.7 (同余关系和同余类)

设集合中 A 的二元运算, 记作乘法. 若 A 的一个等价关系 $\sim$ 满足

$$\text{若} a \sim b, c \sim d, \text{ 则} ac \sim bd, \forall a, b, c, d \in A.$$

则称 $\sim$ 为 A 的一个**同余关系**. $a \in A$ 的等价类 K_a 此时也称为 a 的**同余类**.

例题 0.1

1. 设 $m \in \mathbb{Z}$(所有整数的集合), $m \neq 0$. 在 $\mathbb{Z}$ 中定义关系

$$a \sim b, \quad \text{若} a \equiv b \pmod{m}.$$

易证 $\sim$ 是等价关系且由 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ 可得 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$. 因而 $\sim$ 对于 $\mathbb{Z}$ 中的加法与乘法都是同余关系.

2. 设 $\mathbb{P}[x]$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上一元多项式的集合. 设 $f(x) \in \mathbb{P}[x]$, $f(x) \neq 0$. 在 $\mathbb{P}[x]$ 中定义关系 $\sim$: $g(x) \sim h(x)$, 若 $f(x) \mid (g(x) - h(x))$. 与第一问类似可证 $\sim$ 对 $\mathbb{P}[x]$ 中的加法与乘法都是同余关系.

3. 以 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上所有 n 阶方阵的集合. 方阵的加法与乘法都是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的二元运算. 对 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 用 $\mathrm{ent}_{ij}\boldsymbol{A}$, $\mathrm{row}_i\boldsymbol{A}$, $\mathrm{col}_j\boldsymbol{A}$ 和 $\det \boldsymbol{A}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素、$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列和 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中由 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$ 确定的关系, 对乘法是同余关系, 但对加法除 $n = 1$ 的情形外不是同余关系.

定理 0.5

设集合 A 有二元运算乘法, $\sim$ 是 A 的一个同余关系. 又 $\pi : A \to A/\sim$ 是自然映射, 则在商集合 $A/\sim$ 中可定义二元运算

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in A.$$

证明 要证明这个二元运算的良定义性, 只需证由 $\pi(a) = \pi(a_1), \pi(b) = \pi(b_1)$ 可得 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$, 其中, $a, b, a_1, b_1 \in A$. 事实上, 由 π 的定义知 $\pi(a) = \pi(a_1)$, 即 $a \sim a_1$, $\pi(b) = \pi(b_1)$, 即 $b \sim b_1$. 因 $\sim$ 是同余关系, 故 $ab \sim a_1b_1$, 所以 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$.

□