0.1 凸性相关积分不等式

命题 0.1

设 f 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 则有

$$f(t) \leqslant \frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\ t(1-t)f(t) \leqslant (1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 记忆这不等式以及这个不等式的证明!

证明 设 $t \in (0,1)$, 对于 $x \in [0,1]$, 有

$$t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leqslant (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$

上式对变量 x 在 $[a,b]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leqslant (1-t)\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x + t\int_0^1 f(1-x+tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

例题 0.1 设 f 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 求证:

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \left(t^3+(1-t)^3\right) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

笔记 利用凸函数积分不等式命题 0.1.

证明 设 $t \in (0,1)$, 对于 $x \in [0,1]$, 有

$$t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leqslant (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$

上式对变量 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leqslant (1-t)\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x + t\int_0^1 f(1-x+tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因而

$$t(1-t)f(t) \leqslant (1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\ t \in [0,1].$$

积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 \left[(1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t + \int_0^1 \left[t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[f(x)\int_x^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[f(x)\int_0^x t^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3+(1-x)^3\right) f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x\in[a,b]$, 都有

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

注 **Step2** 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

笔记 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x)=f(x)-p(x)$(其中 $p(x)$ 是 f 过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

证明 证法一:利用割线不等式可得, 对 $\forall x\in[a,b]$, 都有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y\\
&\geqslant\int_a^x\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)+f(a)\right]\mathrm{d}y+\int_x^b\left[\frac{f(b)-f(x)}{b-x}(y-b)+f(b)\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{f(x)+f(a)}{2}(x-a)+\frac{f(x)+f(b)}{2}(b-x)\\
&=\frac{b-a}{2}f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2}\\
&\geqslant\frac{b-a}{2}f(x).
\end{aligned}$$

证法二:由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to b^-}f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f\in C[a,b]$. 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

Step1 当

$$f(a)=f(b)=0,x_0\text{是}f(x)\text{最大值点},x_0\in(a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases}f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x\in[0,x_0]\\ f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1), & x\in[x_0,1]\end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{x_0}\frac{f(x_0)}{x_0}x\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(1).

当 $x_0=a$或b 时, 由 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 非负可知, 此时 $f(x)\equiv0$ 结论显然成立.

Step2 一般情况可设

$$g(x)=f(x)-\left[f(1)-f(0)\right]x-f(0),$$

从而 $g(0)=g(1)=0$, 于是 g 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(1)知

$$g(x)\leqslant2\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1]. \tag{2}$$

于是利用(2)知

$$f(x)-\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\leqslant2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1].$$

从而

$$f(x)-2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1].$$

注意到对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}&\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y\leqslant 0\\ \Leftrightarrow\ &\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant 2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant f(1)+f(0)\\ \Leftrightarrow\ &\left[f(1)-f(0)\right]x\leqslant f(1)\\ \Leftrightarrow\ &f(1)(1-x)+f(0)x\geqslant 0\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x \in [0,1], f(1), f(0) \geqslant 0$ 直接得到. 于是我们完成了证明.

□

例题 0.2 设 $f \in C^2[0,1]$ 是下凸函数且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leqslant \max\{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0,1].$$

证明 因为 $f \in C^2[0,1]$ 且下凸, 所以由下凸函数的单调性刻画知 f 的单调性只可能是递增、递减、先减后增其中一种. 无论是哪种情况, 都有 f 的最大值一定在端点 $0,1$ 处取到. 记 f 的最大值点为 $c \in \{0,1\}$, f 的最小值点 $d \in [0,1]$, 则 $f(c) = \max\{f(0), f(1)\}$. 由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 及积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 故 $f(c) \geqslant 0$. 于是利用命题 0.2可得, 有

$$f(c)-f(d)\leqslant f(c)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(c) \Longrightarrow f(d)\geqslant 0\geqslant -f(c).$$

故对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}-\max\{f(0), f(1)\} = -f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(c) = \max\{f(0), f(1)\}\\ \Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant \max\{f(0), f(1)\}.\end{aligned}$$

□

例题 0.3 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数,f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的下凸函数, 即对任意 $x, y \in [-1,1]$ 及 $t \in (0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y) \leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)\mathrm{d}x.$$

因而

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)dx \tag{3}$$

令 $h(x) = g(x)+g(-x)$, 则对 $\forall 0 \leqslant a < b \leqslant 1$, 固定 a, b.

(i) 当 $a > 0$ 时, 由 g 的下凸性知

$$\frac{g(a)-g(0)}{a} \leqslant \frac{g(b)-g(a)}{b-a}. \tag{4}$$

注意到 $-b < -a < 0$, 再利用 g 的下凸性知

$$\frac{g(-a)-g(-b)}{-a-(-b)} \leqslant \frac{g(0)-g(-a)}{0-(-a)} \Longleftrightarrow \frac{g(-a)-g(-b)}{b-a} \leqslant \frac{g(0)-g(-a)}{a}. \tag{5}$$

由 g 的下凸性还有

$$g(0) \leqslant \frac{g(a)+g(-a)}{2} \Longleftrightarrow g(a)-g(0) \geqslant g(0)-g(-a). \tag{6}$$

由(4)(5)(6)式可得

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \geqslant \frac{g(a)-g(0)}{a} \geqslant \frac{g(0)-g(-a)}{a} \geqslant \frac{g(-a)-g(-b)}{b-a}.$$

故

$$g(b)-g(a) \geqslant g(-a)-g(-b) \Longleftrightarrow g(b)+g(-b) \geqslant g(a)+g(-a).$$

即 $h(b) \geqslant h(a)$.

(ii) 当 $a=0$ 时, 由 g 的下凸性知

$$h(0)=2g(0) \leqslant g(b)+g(-b)=h(b).$$

综上可知 h 在 $[0,1]$ 上递增. 故对任意 $x,y \in [0,1]$, 有

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big) \geqslant 0$$

因而

$$\int_0^1\int_0^1 \big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0$$

由此可得

$$2\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

结合(3)即得结论.

□