第 1 章 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑性质

1.1 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集及其性质

1.1.1 n 维欧氏空间

我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间, 即

$$\mathbb{R}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

其中, ξ_i 称为 x 的第 i 个坐标.

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$, 按如下的加法、数乘

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

$$kx = (k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n)$$

构成线性空间.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

表示点 x 到 y 的距离. 容易验证, 距离满足下列性质:

(i) (非负性) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) (三角不等式) 对任意的 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

通常记 $d(x, 0) = \|x\|$, 表示 x 的范数, 若 $x \in \mathbb{R}^1$, 则 $\|x\|$ 即为 x 的绝对值.

定义 1.1

设 $\{x_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0$$

则称 $\{x_k\}$ 收敛于 x, 记为 $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ 或 $x_k \to x (k \to \infty)$.

♣

命题 1.1

设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\{x_k\}$ 是收敛数列, 当且仅当

$$\lim_{i, j \to \infty} d(x_i, x_j) = 0$$

♠

证明 设 $x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$. 注意到

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i| \leqslant d(x_k, x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(k)} - \xi_i|$$

易证 $x_k \to x$, 当且仅当对每个坐标位置 i, 都有 $\xi_i^{(k)} \to \xi_i (k \to \infty)$. 再由柯西收敛准则即可得到证明. □

1.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中的开集及其性质

定义 1.2 (邻域、内点、内部和开集)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$, 定义

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

为 x_0 的 $\varepsilon-$ **邻域**.

设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in A$, 若存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x, \varepsilon_0) \subset A$, 则称 x 为 A 的**内点**. A 的全体内点, 记为 A°, 也称为 A 的**内部**.

若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 为**开集**.

笔记 $(a, b), (-\infty, a), (a, +\infty)$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的开集; 邻域 $U(x_0, r)$, 又称以 x_0 为心、以 r 为半径的开球, 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集; A° 也是开集.

命题 1.2 (开集的性质)

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是开集;

(2) 任意个开集的并集是开集;

(3) 有限个开集的交集是开集.

注 无限个开集的交集不一定是开集. 例如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

证明

(1) 显然.

(2) 设 $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 为一族开集. 任取 $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$, 则存在 $\alpha_0 \in \Gamma$ 使得 $x \in G_{\alpha_0}$. 由于 G_{α_0} 是开集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$U(x, \varepsilon_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$$

故 x 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ 的内点. 再由 x 的任意性知 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 为开集, 任取 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, 则 $x \in G_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 由于 G_i 是开集, 故存在 $\varepsilon_i > 0$ 使得

$$U(x, \varepsilon_i) \subset G_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$, 则 $\varepsilon > 0$ 且 $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, 故 x 是 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ 的内点. 再由 x 的任意性知 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ 是开集.

□

定理 1.1

设 A 为非空集合, 则 A° 为开集.

证明 任取 $x \in A^\circ$, 则存在 $r > 0$ 使得 $U(x, r) \subset A$. 对 $\forall y \in U(x, r)$, 令 $\delta = r - d(x, y)$, 则易知 $U(y, \delta) \subset A$, 故 $y \in A^\circ$. 从而 $U(x, r) \subset A^\circ$, 因此, A° 是开集. □

1.1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集及其性质

定义 1.3 (聚点、极限点和孤立点)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有

$$U(x_0, \varepsilon) \cap (A - \{x_0\}) \neq \varnothing$$

则称 x_0 为 A 的**聚点**或**极限点**.
不是聚点, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \varnothing$$

则称 x_0 为 A 的**孤立点**.

注 (i) $\mathbb{R}^n$ 空间, 聚点 = 内点 + 边界点, 故聚点不一定属于 A, 比如边界点. 例如, $A = (0, 1)$, 则 $[0, 1]$ 都是 A 的聚点.
(ii) 若 x_0 是 A 的聚点, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $U(x, \varepsilon)$ 中含有无穷多 A 中的点.

证明 假设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

令

$$\delta = \min\{|x_0 - x_i| : i = 1, 2, \cdots, n\}$$

则 $U(x_0, \delta)$ 中不含 A 中异于 x_0 的点, 这与 x_0 是 A 的聚点矛盾. □

定义 1.4 (导集、完全集、闭包和闭集)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则 A 的聚点的全体, 称为 A 的**导集**, 记为 A'. 若 $A' = A$, 则称 A 为**完全集** (无孤立点). $A - A'$ 中的点, 即为所有孤立点.
$A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**, 记为 $\overline{A}$. 开集的余集, 称为**闭集**.

笔记 例如, $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭集; 以 x_0 为心, 以 r 为半径的闭球 $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leqslant r\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集; A', $\overline{A}$ 也是闭集.

命题 1.3

(1) 若 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$;
(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明 利用导集的定义容易验证. □

命题 1.4 (闭集的性质)

(1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是闭集;
(2) 任意个闭集的交集是闭集;
(3) 有限个闭集的并集是闭集.

注 无限个闭集的并集不一定是闭集. 例如, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[1/n, 1] = (0, 1]$.

证明 由命题 1.2, 闭集的定义以及定理??, 容易验证. □

命题 1.5

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则
(1) $x \in A' \Leftrightarrow \exists\{x_n\} \subset (A - \{x\})$ 使得 $x_n \to x$;
(2) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\{x_n\} \subset A$ 使得 $x_n \to x$.

证明 (1) "$\Rightarrow$". 若 $x \in A'$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 $U(x,\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$. 特别地, 依次令 $\varepsilon_n = 1/n, n = 1,2,\cdots$, 取 $x_n \in U(x,1/n) \cap (A - \{x_0\})$, 则 $x_n \to x$.

"$\Leftarrow$". 设 $\{x_n\} \subset (A - \{x\})$ 满足 $x_n \to x$. 由于 $x_n \to x$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $d(x_n,x) < \varepsilon$, 即 $x_n \in U(x,\varepsilon)$. $\forall n \geqslant N$. 又 $x_n \neq x$, 故 $U(x,\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$. 因此, $x \in A'$.

(2) "$\Rightarrow$". $\overline{A} = A \cup A'$. 若 $x \in A$, 令 $x_n = x, n \in \mathbb{N}$, 则 $x_n \to x$. 若 $x \in A'$, 由 (i) 知, 结论仍然成立.

"$\Leftarrow$". 设 $\{x_n\} \subset A$ 满足 $x_n \to x$. 若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x_{n_0} = x$, 则 $x \in A \subset \overline{A}$. 否则 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $x_n \neq x$, 则由 (i) 知, $x \in A' \subset \overline{A}$. □

定理 1.2

A 为闭集 $\Leftrightarrow A' \subset A$.

证明 "$\Rightarrow$". 设 A 为闭集, 则 A^c 为开集. 任取 $x \in A'$, 往证 $x \in A$, 即 $x \notin A^c$. 若 $x \in A^c$, 由于 A^c 是开集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x,\varepsilon_0) \subset A^c$. 故 $U(x,\varepsilon_0) \cap A = \varnothing$, 从而 $U(x,\varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \varnothing$. 这与 $x \in A'$ 矛盾.

"$\Leftarrow$". 设 $A' \subset A$, 往证 A 是闭集, 即 A^c 是开集. 任取 $x \in A^c$, 由于 $A' \subset A$, 则 $x \notin A'$. 故 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x,\varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \varnothing$, 从而

$$U(x,\varepsilon_0) \subset (A - \{x\})^c = (A \cap \{x\}^c)^c = A^c \cup \{x\} = A^c$$

因此, A^c 是开集. □

定理 1.3

A 为闭集 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

注 闭集 $A = \overline{A}$, 再由命题 1.5(2)知, 闭集中任一点都能找到闭集中的一个点列收敛到该点. 这也是闭集才具有的好的性质.

证明 "$\Rightarrow$". A 为闭集, 则 $A' \subset A$. 故 $\overline{A} = A \cup A' \subset A \subset \overline{A}$. 因此, $A = \overline{A}$.

"$\Leftarrow$". 若 $A = \overline{A}$, 则 $A' \subset \overline{A} = A$, 故 A 是闭集. □

定理 1.4

设 A 为一个非空集合, 则 A' 为闭集.

证明 只需证明 $(A')' \subset A'$. 设 $x \in (A')'$, 由命题 1.5(1), 存在 $\{x_n\} \subset A' - \{x\}$ 使得 $x_n \to x$. 往证 $x \in A'$, 即存在 $\{y_n\} \subset A - \{x\}$ 使得 $y_n \to x$.

对于固定的 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $x_n \in A'$, 则存在 $y_n \in A - \{x, x_n\}$ 使得 $d(y_n, x_n) < 1/n$. 于是

$$d(y_n,x) \leqslant d(y_n,x_n) + d(x_n,x) \to 0, \quad n \to \infty$$

故 $y_n \to x$. □

定义 1.5 (连续映射)

设 X, Y 为距离空间, 称映射 $f: X \to Y$ 在点 $x_0 \in X$ 处连续, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

若 f 在任意点 $x \in X$ 都连续, 则称 f 为 X 上的**连续映射**.

注 f 在 x_0 点连续可等价地用集合语言描述如下:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得} f(U(x_0,\delta)) \subset U(f(x_0),\varepsilon)$$

定理 1.5 (连续映射的充要条件)

设 $f: X \to Y$ 是映射, 则下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) Y 的任一开集在 f 下的原象是 X 中的开集;
(3) Y 的任一闭集在 f 下的原象是 X 中的闭集.

注 若上述定理的 (2) 换成"X 的任一开集在 f 下的象是 Y 中的开集",结论不一定成立. 因为连续映射在开集上的象未必是开集. 例如, $f(x)=|x|$, 则 f 在开区间 $(-1,1/2)$ 上连续, 但 f 的象是 $[0,1)$, 不是开集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 f 连续, $G\subset Y$ 为开集. 不妨设 $f^{-1}(G)\neq\varnothing$, 任取 $x_0\in f^{-1}(G)$, 则 $f(x_0)\in G$. 由于 G 是开集, 则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $U(f(x_0),\varepsilon)\subset G$. 又 f 连续, 则对上述 ε, $\exists\delta>0$ 使得

$$f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x_0),\varepsilon)\subset G$$

从而 $U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G)$. 这就证明了 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点. 因此, $f^{-1}(G)$ 是开集.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 $x_0\in X$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 都有 $U(f(x_0),\varepsilon)$ 是 Y 中的开集, 从而由 (2) 知 $f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$ 是 X 中的开集. 又 $x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$, 则存在 $\delta>0$ 使得

$$U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$$

故 $f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x_0),\varepsilon)$, 从而 f 在点 x_0 连续, 再由 x_0 的任意性知 f 连续.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $F\subset Y$ 为闭集, 则 F^c 是开集, 故由 (2) 知 $f^{-1}(F^c)$ 是 X 中的开集. 于是, $f^{-1}(F)=(f^{-1}(F^c))^c$ 是 X 中的闭集.

(3) $\Rightarrow$ (2) 类似. □

1.2 $\mathbb{R}^n$ 中点集的距离

1.2.1 点集距离概念及性质

定义 1.6

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为非空集, 则 A 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

若 $\operatorname{diam}(A)<\infty$, 则称 A 为有界集. 容易验证: A 有界, 当且仅当存在 $M\geqslant 0$ 使得 $d(\mathbf{0},x)\leqslant M$, $\forall x\in A$.

设 $x\in\mathbb{R}^n$, 则点 x 到集合 A 的距离定义为

$$d(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$$

设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ 为非空集, 则集合 A 到 B 的距离定义为

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$$

命题 1.6

设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 $d(x,E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 设 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 由 $d(y,E)$ 的定义, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $z\in E$ 使得 $d(y,z)<d(y,E)+\varepsilon$. 从而

$$d(x,E)\leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+d(y,E)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性, $d(x,E)-d(y,E)\leqslant d(x,y)$. 同理可证 $d(y,E)-d(x,E)\leqslant d(x,y)$. 从而

$$|d(x,E)-d(y,E)|\leqslant d(x,y),\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

因此, $d(x,E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续. □

命题 1.7

设 F_1, F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足:

(i) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 1\}, F_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$.

证明 定义函数

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

则由命题**??**以及连续函数四则运算封闭性知 $f(x)$ 连续. 容易验证 $f(x)$ 满足条件 (i), (ii). □

命题 1.8

$\mathbb{R}^n$ 中每个闭集可表示为可列个开集的交集; 每个开集可表示为可列个闭集的并集.

证明 首先证明: 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, $r > 0$, 则 $G = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < r\}$ 是开集. 实际上, 任取 $x \in G$, 则 $d(x, A) < r$. 令 $h = r - d(x, A)$, 则对 $\forall y \in U(x, h/2)$, 有

$$d(y, A) \leqslant d(y, x) + d(x, A) < \frac{h}{2} + d(x, A) = \frac{r}{2} + \frac{d(x, A)}{2} < r$$

故 $U(x, h/2) \subset G$. 从而 x 是 G 的内点, 因此, G 是开集.

(1) 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集, 令

$$G_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$$

则 G 是开集. 下面证 $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

设 $x \in F$, 则 $d(x, F) = 0 < 1/n, n = 1, 2, \cdots$, 故 $x \in G_n, n = 1, 2, \cdots$, 于是 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. 从而 $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 $x \in G_n, n = 1, 2, \cdots$, 故 $d(x, F) < 1/n, n = 1, 2, \cdots$. 令 $n \to \infty$, 可得 $d(x, F) = 0$. 又 F 是闭集, 故 $x \in F$. 从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$.

(2) 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 则 G^c 是闭集. 由 (1) 知 $G^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中, G_n 为开集. 从而 $G = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n^c$, 其中 G_n^c 为闭集.

特别地, 对于一维的闭区间与开区间, 有

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right), \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

□

1.2.2 $\mathbb{R}^n$ 上的完备性定理及应用

我们知道, 数学分析中学过的实数集完备性的基本定理是构建极限理论和数学分析的基础. 实际上这些结果在 $\mathbb{R}^n$ 中仍然成立.

定理 1.6 (致密性定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任意有界点列都存在收敛子列.

证明 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 为有界点列, 记

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \cdots$$

注意到 $|x_i^{(k)}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}|^2\right)^{1/2} = d(x_k, \mathbf{0})$, 则 $\{x_1^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界数列, 由 $\mathbb{R}$ 上的致密性定理, 存在 $\{x_1^{(k)}\}$ 的子列 $\{x_1^{(k_i)}\}$ 满足 $x_1^{(k_i)} \to x_1$; 同理, 实数列 $\{x_2^{(k_i)}\}$ 进而 $\{x_2^{(k_{i_j})}\}$ 有界, 由 $\mathbb{R}$ 上的致密性定理, 存在 $\{k_{i_j}\}$ 的子列 $\{k_{i_{j_l}}\}$ 使得 $x_2^{(k_{i_{j_l}})} \to x_2$; 以此类推 $\cdots\cdots$; 存在 $\{k_{n-1}\}$ 的子列 $\{k_n\}$ 使得 $x_n^{(k_n)} \to x_n$. 令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则

$$d(x_{k_n}, x) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k_n)} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

因此, $x_{k_n} \to x$, $k_n \to \infty$. □

定理 1.7 (闭集套定理)

设 $\{A_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一列单调递减的非空闭集列, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为非空有界闭集. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为单点集.

证明 $A_n \neq \varnothing$, 取 $x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $\{x_n\}$ 有界. 由致密性定理, 存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $x_{n_k} \to x_0$, $k \to \infty$.

由于 $\{A_n\}$ 单调递减, 则对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots \in A_{n_k}$. 注意到 $x_{n_k} \to x_0$ 以及 A_{n_k} 是闭集, 可得 $x_0 \in A_{n_k} \subset A_k$ (因为 $n_k \geqslant k$). 因此, $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. 若存在 $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $y_0 \neq x_0$, 则

$$\operatorname{diam}(A_n) \geqslant \operatorname{diam}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant d(x_0, y_0)$$

这与 $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ 矛盾. □

定理 1.8 (有限覆盖定理)

设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 若 $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$, 其中 G_α 为开集, 则存在 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$.

证明 令 $E_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, $F_n = E_n^c \cap A$. 只需证存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $F_{n_0} = \varnothing$.

若对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $F_n \neq \varnothing$. 注意到 $\{E_n\}$ 是单调递增的开集列, A 是有界闭集, 则 $\{F_n\}$ 是有界单调递减的非空闭集列. 由闭集套定理知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$, 则存在 $x_0 \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 又 $F_n = E_n^c \cap A$, 从而 $x_0 \in A$, 且 $x_0 \notin E_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 故 $x_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$. 这与 $x_0 \in A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ 矛盾. □

定义 1.7 (紧集)

若 X 的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖, 则称 X 为**紧集**.

定理 1.9

$\mathbb{R}^n$ 中的紧集等价于有家闭集.

证明 见豌豆讲义. □

定理 1.10

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为非空闭集, $x \in \mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0 \in A$ 使得

$$d(x, A) = d(x, y_0).$$

证明 由下确界的定义, 存在点列 $\{y_n\} \subset A$ 满足

$$d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n)$$

故存在 $M > 0$ 使得 $d(x, y_n) \leqslant M$. 再由

$$d(\mathbf{0}, y_n) \leqslant d(\mathbf{0}, x) + d(x, y_n) \leqslant d(\mathbf{0}, x) + M$$

知 $\{y_n\}$ 有界, 利用致密性定理, 存在子列 $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ 满足 $y_{n_k} \to y_0$, $k \to \infty$. 又 A 是闭集, 故 $y_0 \in A$, 从而

$$d(x, y_0) = \lim_{k\to\infty} d(x, y_{n_k}) = d(x, A)$$

□

定理 1.11

设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 且其中之一有界, 则存在 $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ 使得 $d(A, B) = d(x_0, y_0)$. 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $d(A, B) > 0$.

注 若这个定理中的 A, B 均为无界闭集, 则上述结论不一定成立. 例如

$$A = \{n\}, \quad B = \{n + 1/2n\}$$

则 $A' = B' = \varnothing$, 从而 A, B 是闭集. 显然, $d(A, B) = 0$, 而 $A \cap B = \varnothing$, 故不存在 $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ 使得 $d(x_0, y_0) = 0$.

证明 由 $d(A, B)$ 的定义, 存在 $\{x_n\} \subset A$ 与 $\{y_n\} \subset B$ 满足

$$d(A, B) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

故存在 $M \geqslant 0$ 使得 $d(x_n, y_n) \leqslant M$.

不妨设 A 有界, 则 $\{x_n\}$ 有界. 由致密性定理, 存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $x_{n_k} \to x_0$, $k \to \infty$. 又 A 是闭集, 故 $x_0 \in A$. 注意到

$$d(\mathbf{0}, y_n) \leqslant d(\mathbf{0}, x_n) + d(x_n, y_n) \leqslant d(\mathbf{0}, x_n) + M$$

以及 $\{x_n\}$ 的有界性, 则有 $\{y_n\}$ 有界. 再由致密性定理, 存在子列 $\{y_{n_{k'}}\} \subset \{y_n\}$ 满足 $y_{n_{k'}} \to y_0$, $k' \to \infty$. 同样, B 是闭集保证了 $y_0 \in B$. 于是

$$d(x_0, y_0) = \lim_{k'\to\infty} d(x_{n_{k'}}, y_{n_{k'}}) = d(A, B)$$

若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $x_0 \neq y_0$, 从而 $d(A, B) = d(x_0, y_0) > 0$. □

定理 1.12

设 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, 若 $d(F_1, F_2) > 0$, 则存在开集 G_1, G_2 满足 $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

证明 由于 $d(F_1, F_2) > 0$, 则对 $\forall x \in F_1$, 都有 $d(x, F_2) \geqslant d(F_1, F_2) > 0$. 同理, 对 $\forall y \in F_2$, 都有 $d(y, F_1) \geqslant d(F_1, F_2) > 0$. 令

$$G_1 = \bigcup_{x\in F_1} U\left(x, \frac{d(x, F_2)}{2}\right), \quad G_2 = \bigcup_{y\in F_2} U\left(y, \frac{d(y, F_1)}{2}\right)$$

则 G_1, G_2 是开集, 且 $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$. 下面证明 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

若存在 $z \in G_1 \cap G_2$, 即 $z \in G_1$ 且 $z \in G_2$, 则存在 $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$ 使得

$$z \in U\left(x_0, \frac{d(x_0, F_2)}{2}\right), \quad z \in U\left(y_0, \frac{d(y_0, F_1)}{2}\right)$$

不妨设 $d(y_0, F_1) \leqslant d(x_0, F_2)$, 则有

$$\begin{aligned} d(x_0, F_2) &\leqslant d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0, z) + d(z, y_0) \\ &< \frac{d(x_0, F_2)}{2} + \frac{d(y_0, F_1)}{2} \\ &\leqslant d(x_0, F_2) \end{aligned}$$

矛盾. □

定理 1.13 (分离定理)

设 F_1, F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 且 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, 则存在开集 G_1, G_2 满足 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. ♡

证明 由于 F_1, F_2 是闭集, 且 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, 则 $\forall x \in F_1$ 都有 $d(x, F_2) > 0$; $\forall y \in F_2$ 都有 $d(y, F_1) > 0$. 由定理**??**知结论成立. □

定理 1.14 (连续函数延拓定理 (Tietze 扩张定理))

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, $f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in F$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足:

(i) $g(x) = f(x), \forall x \in F$;

(ii) $|g(x)| \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. ♡

注 $f(x)$ 无界时, 定理中连续延拓的结论仍成立.

证明 (1) 把 F 分为三个点集

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x \in F : M/3 \leqslant f(x) \leqslant M\} \\ F_2 &= \{x \in F : -M \leqslant f(x) \leqslant -M/3\} \\ F_3 &= \{x \in F : -M/3 < f(x) < M/3\} \end{aligned}$$

则 F_1, F_2 是互不相交的闭集, 作 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$g_1(x) = \frac{M}{3} \cdot \frac{d(x, F_2) - d(x, F_1)}{d(x, F_2) + d(x, F_1)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

由命题**??**以及连续函数四则运算封闭性, 知 $g_1(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 又容易验证

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leqslant \frac{M}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ |f(x) - g_1(x)| &\leqslant \frac{2M}{3}, \quad \forall x \in F \end{aligned}$$

(2) 用 (1) 的方法在 F 上考察函数 $f(x) - g_1(x)$(相当于上述的 $f(x)$). 由于 $|f(x) - g_1(x)| \leqslant 2M/3$, 故得到 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $g_2(x)$ 满足

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ |f(x) - g_1(x) - g_2(x)| &\leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad \forall x \in F \end{aligned}$$

(3) 依次做下去, 得到一列 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $\{g_k(x)\}$ 满足

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{1.1}$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k M, \quad \forall x \in F, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

式(**??**)表明函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 一致收敛, 记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 连续 (连续函数项级数一致收敛的和函数

是连续函数). 令式 (**??**)中的 $k \to \infty$ 得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = g(x), \quad \forall x \in F$$

(4) 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \frac{M}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = M$$

定理得证. □