

## 0.1 环

### 定义 0.1 (环)

我们称  $(R, +, \cdot)$  是一个**环**, 当  $(R, +)$  是个阿贝尔群,  $(R, \cdot)$  是个么半群, 且乘法对加法有左右分配律, 即

$$\forall a, b, c \in R, a(b + c) = ab + ac,$$

$$\forall a, b, c \in R, (a + b)c = ac + bc.$$

### 定义 0.2 (交换环)

设  $(R, +, \cdot)$  是一个环, 我们称  $R$  是一个**交换环**, 当  $R$  对乘法有交换律, 即

$$\forall a, b \in R, ab = ba.$$

### 命题 0.1

设  $(R, +, \cdot)$  是一个环, 而  $a, b, c \in R$ , 则

$$(1) \ a0 = 0a = 0,$$

$$(2) \ a(-b) = (-a)b = -(ab),$$

$$(3) \ (-a)(-b) = ab.$$

### 证明

(1) 首先, 利用分配律,

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

因此  $a0 = 0$ 。根据对称性,  $0a = a$ 。

(2) 根据对称性, 我们只须证明  $a(-b) = -(ab)$ . 而这是因为

$$a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0.$$

(3) 利用两次 (2), 我们就得到

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

□