

0.1 函数构造类

0.1.1 单中值点问题

例题 0.1

1. 设 $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$ 满足 $f(0) = f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$. 则存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得


$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$

2. 设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, 证明: 存在 $u \in (0, 1)$, 使得

$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 设 $f \in C[-1, 2] \cap D(-1, 2)$ 且有 $f(-1) = f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$. 证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都存在 $\xi \in (-1, 2)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

 **笔记** 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

注

1. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \frac{2x-y}{x}$, 解得 $y = \frac{c}{x} + x$.

Step2 分离常数 c 得 $c = x(y-x)$, 常数变易得构造函数 $c(x) = x(f(x) - x)$.

2. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \frac{xy}{1-x}$, 解得 $y = \frac{ce^{-x}}{x-1}$.

Step2 分离常数 c 得 $c = e^x(x-1)y$, 常数变易得构造函数 $c(x) = e^x(x-1)f(x)$.

3. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \lambda \left[y - \frac{x}{2} \right] + \frac{1}{2}$, 解得 $y = ce^{\lambda x} + \frac{x}{2}$.

Step2 分离常数 c 得 $c = \frac{y - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$, 常数变易得构造函数 $c(x) = \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$.

证明

1. 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ 及 $f \in C[0, 2]$ 可知

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) + 2 = 2.$$

从而

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5.$$

构造函数 $c(x) = x(f(x) - x)$, 我们求得

$$c'(x) = f(x) - 2x + xf'(x). \quad (1)$$

注意到

$$c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4.$$

于是由 Lagrange 中值定理得 $\alpha \in (0, 1), \beta \in (1, 2)$, 使得

$$c'(\alpha) = \frac{c(1) - c(0)}{1 - 0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1) - c(2)}{1 - 2} = -5.$$

由导数介值定理知存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $c'(\xi) = 0$. 由(1)知

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$

这就完成了证明.

2. 构造 $c(x) = e^x(x-1)f(x)$, 则 $c(0) = c(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $u \in (0, 1)$, 使得 $c'(u) = 0$, 这恰好是

$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 构造 $c(x) = \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$. 注意到

$$c(-1) = 0, c(2) = -\frac{3}{2e^{2\lambda}}, c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

由零点定理知存在 $\theta \in (\frac{1}{2}, 2)$, 使得 $c(\theta) = 0$. 再由罗尔中值定理知存在 $\xi \in (-1, \theta) \subset (-1, 2)$, 使 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

□

例题 0.2 设 $f \in D[0, 1]$ 且 $f(0) > 0, f(1) > 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

注 虽然本题直接考虑微分方程: $y' + 3y^2 = 0$ 解出 y , 然后常数变易也不难得到构造函数. 但是下述证明的方法旨在介绍一种新的解决这类问题的方法.

笔记 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是要把部分 f 视为已知函数来构造, 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数. 考虑 $y' + 3f^2y = 0$. 解得 $y = ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 分离变量得构造函数 $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$.

证明 证法一: 构造函数 $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt} [f'(x) + 3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0) > 0, f(1) > 0$, 我们知道 $f(x) > 0, \forall x \in [0, \theta) \cup (\theta, 1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)dx > 0$, 这就是一个矛盾! 于是存在 $\theta_1 \neq \theta_2$, 使得 $f(\theta_1) = f(\theta_2) = 0$. 现在就有 $c(\theta_1) = c(\theta_2) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

证法二: 构造函数 $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt} [f'(x) + 3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

从而 $c(\theta) = 0$. 因为 $f(0), f(1) > 0$, 所以 $c(0), c(1) > 0$. 又由 $c \in C[0, 1]$, 故 $c(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可取到最大、最小值. 由于 $c(\theta) = 0 < c(0), c(1)$, 因此 $c(x)$ 只能在 $(0, 1)$ 上可取到最小值, 即存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $c(\xi) \leq c(x), \forall x \in [0, 1]$. 由费马引理可知 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

□

例题 0.3 设 $f \in C^1[0, 1]$, 证明存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$f'(\xi) = \int_0^1 (12x - 6)f(x)dx.$$

笔记 核心想法: 分部积分转移导数, 但是需要控制非积分部分为零.

注 $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx$ 的原因: 我们希望利用分部积分后能够直接转移导数而没有多余

部分, 因此我们待定 $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)'f(x)dx$, 即 $12x - 6 = (ax^2 + bx + c)'$. 分部积分得到

$$\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)'f(x)dx = (ax^2 + bx + c)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (ax^2 + bx + c)f'(x)dx.$$

我们希望 $(ax^2 + bx + c)f(x)\Big|_0^1 = (a + b + c)f(1) - cf(0) = 0$, 即希望 $x = 0, 1$ 恰好是 $ax^2 + bx + c$ 的根, 并且 $12x - 6 = (ax^2 + bx + c)'$. 从而

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \\ 2a = 12 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -6 \\ c = 0 \end{cases}.$$

由此可知, 满足我们期望的二次函数只有 $6x^2 - 6x$, 即 $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx$.

证明

$$\begin{aligned} \int_0^1 (12x - 6)f(x)dx &= \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} - \int_0^1 (6x^2 - 6x)f'(x)dx \\ &\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} f'(\xi) \int_0^1 (6x - 6x^2)dx = f'(\xi), \xi \in [0, 1]. \end{aligned}$$

□

例题 0.4

1. 设 $f \in D^2[0, 1]$ 使得 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得

$$f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1 - \eta}.$$

2. 设 $f \in D^2[0, \frac{\pi}{4}]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得

$$f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

注

1. 考虑微分方程 $y'' = \frac{2y'}{1-x}$, 解得 $y' = \frac{c}{(1-x)^2}$, 常数变易得到构造函数 $c(x) = (1-x)^2 f'(x)$.
2. 虽然我们可以通过解微分方程得到构造函数, 但是也不要忘记直接猜测构造函数的想法. 当需要考虑的微分方程比较难解时, 就只能猜测构造函数.

考虑微分方程: $y'' = 2yy'$, 解得 $y' = y^2 + c$, 得到构造函数 $c(x) = f'(x) - f^2(x)$. 但是根据这个构造函数结合已知条件再利用中值定理无法得到结论. ($f(\frac{\pi}{4}) = 1$ 用不了) 因此需要构造更加具体的函数才行.

然而原问题等价于利用 Rolle 中值定理找一个中值点 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得 $c'(\xi) = 0$. 但由条件只能得到 $c(0) = 1, c(\frac{\pi}{4})$ 无法确定. 因此我们希望还能找一个点 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得 $c(x_0) = f'(x_0) - f^2(x_0) = 1$.

将这个看作一个新的中值问题, 即已知设 $f \in D^2[0, \frac{\pi}{4}]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, 证明: 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得

$$c(x_0) = f'(x_0) - f^2(x_0) = 1.$$

考虑微分方程: $y' - y^2 = 1$, 解得 $\arctan y = x + C$, 常数变易得到新的构造函数 $g(x) = \arctan f(x) - x$. 由条件可知 $g(0) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$, 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - f^2(x_0) = 1$. 从而找到了满足我们需求的中值点 x_0 , 故结论得证. (具体证明见下述证明)

证明

1. 令 $c(x) = (1-x)^2 f'(x)$, 则 $c'(x) = 2(x-1)f'(x) + (1-x)^2 f''(x)$. 由 $f(0) = f(1)$ 及 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$. 从而 $c(1) = c(\xi) = 0$, 再根据 Rolle 中值定理可得, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得

$$c'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$

2. 令 $c(x) = f'(x) - f^2(x)$, $g(x) = \arctan f(x) - x$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f^2(x) - 1}{1 + f^2(x)}$. 进而由条件可得 $g(0) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$, $g'(0) = 0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $a \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(a) = 0$, 即 $f'(a) = f^2(a) + 1$. 从而 $c(a) = 1$, $c(0) = f'(0) - f^2(0) = 1$, 故再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得


$$c(1) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

□

0.1.2 多中值点问题

例题 0.5 设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

 **笔记** 核心想法: 插入一个点 c , 将两个中值点问题转换为如何确定这单个插入点 c 的问题.

注 思路分析: 待定 $c \in (0, 1)$, 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0, c), \mu \in (c, 1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

需要

$$2 = f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c} \left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1} \right],$$

只需找到一个 $c \in (0, 1)$ 使得上式成立. 但是直接考虑上式比较困难, 我们希望能找到一个特殊的 c 从而将上式化简. 因此待定 k , 我们希望 $f(c)$ 同时满足 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = k$ (这里期望 $f(c)$ 满足 $\frac{f(c)}{c} = k$ 也可以), 从而上式就转化为

$$2 = \frac{kc - k + 1}{c} \cdot (k + 1) \Leftrightarrow (k^2 + k - 2)c - (k^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (k - 1)[(k + 2)c - k - 1] = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ 或 } k = \frac{1 - 2c}{c - 1}.$$

若取 $k = 1$, 则我们只需找到一个 $c \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = 1$, 即 $f(c) = c$. 此时令 $g(x) = f(x) - x$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0, 1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 但是由条件可知 $g(0) = g(1) = 0$, 无法用中值定理直接找出 $c \in (0, 1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = 1$ 不能找到满足我们的需求的 c .

若取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 则我们只需找到一个 $c \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 此时令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0, 1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$ 能找到满足我们的需求的 c , 进而就确定了满足题目要求的 λ 和 μ .

证明 令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0, c), \mu \in (c, 1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$


再结合 $f(c) = 2 - 2c$ 可得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c} \left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1} \right] = 2.$$

故结论得证. □

例题 0.6 设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 正实数满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, 1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1.$$

 **笔记** 核心想法: 插入 $n - 1$ 个点 y_i , 将 n 个中值点问题转换为如何确定这些插入点 y_i 的问题.

注 思路分析: 证明的想法就是插入 $n-1$ 个点 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$ 之后用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是需要满足

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(y_i - y_{i-1})}{f(y_i) - f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n. \quad (2)$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = 1.$$

而为了得到(2), 我们只需反复用介值定理即可. 由条件可知 $0 = f(0) < \lambda_1 < f(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1 \in (0, 1)$, 使得 $f(y_1) = \lambda_1$. 进而 $\lambda_1 = f(y_1) < \lambda_1 + \lambda_2 < f(1) = 1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2 \in (y_1, 1)$, 使得 $f(y_2) = \lambda_1 + \lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

其中 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$.

证明 由条件可知 $0 = f(0) < \lambda_1 < f(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1 \in (0, 1)$, 使得 $f(y_1) = \lambda_1$. 进而 $\lambda_1 = f(y_1) < \lambda_1 + \lambda_2 < f(1) = 1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2 \in (y_1, 1)$, 使得 $f(y_2) = \lambda_1 + \lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

其中 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$. 再利用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(y_i - y_{i-1})}{f(y_i) - f(y_{i-1})} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = 1.$$

故结论得证. □

0.1.3 只能猜的类型

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.


例题 0.7 设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 且 $f(0) = 0$ 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1)$, 证明对任何 $\alpha > 0$, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$\alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

注 注意到

$$\alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) f(1-\xi) - f(\xi) f'(1-\xi) = 0.$$

因此想到构造函数 $g(x) = f^\alpha(x)f(1-x)$.

 **笔记** 不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$ 的原因: 如果 $f(x) < 0$, 则 $f^\alpha(x)$ 可能无意义.

由 $f \in C[0, 1]$ 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1]$ 可知, $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 要么恒大于零, 要么恒小于零. 否则由零点存在定理得到矛盾! 假设结论对 $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$ 成立, 则当 $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1]$ 时, 令 $F(x) = -f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$, 则 $F(0) = 0$. 从而由假设可知, 对 $\forall \alpha > 0$, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$\alpha \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = \frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)} \Leftrightarrow \alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$. 对 $\forall \alpha > 0$, 令 $g(x) = f^\alpha(x)f(1-x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$. 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) = \alpha f^{\alpha-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi) - f^\alpha(\xi)f'(1-\xi) \Rightarrow \alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□