第一章 线性映射

1.1 基本定理和命题

命题 1.1 (满射的复合仍是满射)

若 f,g 均为满射, 则 $f\circ g$ 也是满射.

注 单射的复合不一定是单射.

证明 设 $f:V_1\to V_2, g:V_2\to V_3$, 则对 $\forall\alpha\in V_3$, 由 g 为满射可知, 存在 $\beta\in V_2$, 使得 $\alpha=g(\beta)$. 又由 f 为满射可知, 存在 $\gamma\in V_1$, 使得 $\beta=f(\gamma)$. 从而 $(g\circ f)(\gamma)=g(f(\gamma))=g(\beta)=\alpha$. 故 $g\circ f$ 也是满射. □

定义 1.1 (线性映射的表示矩阵)

设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射, 分别取 V 和 U 的基如下:

$$V:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\ U:\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m.$$

假设有

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{e}_1)=a_{11}\boldsymbol{f}_1+a_{21}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{f}_m,\\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)=a_{12}\boldsymbol{f}_1+a_{22}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{f}_m,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)=a_{1n}\boldsymbol{f}_1+a_{2n}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{f}_m,\end{cases}$$

则矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为线性映射 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m\}$ 下的表示矩阵.

注 若 φ 是向量空间 V 上的线性变换, 则取 V 的一组基, 而不取两组基.

推论 1.1

设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射, 分别取 V 和 U 的基如下:

$$V:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\quad U:\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m.$$

并且设 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 则有

$$(\varphi(\boldsymbol{e}_1),\varphi(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m)\boldsymbol{A}.$$

$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)=(\varphi(\boldsymbol{e}_1),\varphi(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.

定理 1.1

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间,φ 是 V 上的线性变换,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的两组基,从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 假设 φ 在第一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 在第二组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即向量空间上同一个线性变换在不同基下的表示矩阵必相似.

1.2 线性映射及其运算

在许多问题中, 常常需要定义向量空间之间的线性映射 (或某一向量空间上的线性变换). 一般来说, 无须对向量空间中的每个元素进行定义, 我们可采用下列两种方法来简化定义: 第一, 只要对向量空间的基向量进行定义即可; 第二, 若向量空间可分解为两个 (或多个) 子空间的直和, 则只要对每个子空间进行定义即可. 这两点可由下面两个定理 (定理 1.2和定理定理 1.3) 得到.

定理 1.2 (线性扩张定理)

设 V 和 U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基,$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 是 U 中 n 个向量, 求证: 存在唯一的 V 到 U 的线性映射 φ, 使得 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{u}_i$.

注 这个线性扩张定理表明只要选定 V 的一组基和 U 中 n 个向量, 则有且仅有一个线性映射将基向量映到对应的向量. 后面我们将经常采用线性扩张定理来构造线性映射以及判定两个线性映射是否相等.

笔记 这个线性扩张定理表明:

1. 在向量空间上定义线性映射只要对向量空间的基向量进行定义即可.
2. 判定两个线性映射是否相等只要判断这个两个线性映射原像空间的基向量的像是否相等即可.

证明 先证存在性. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$, 则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 被 $\boldsymbol{\alpha}$ 唯一确定. 令

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{u}_n,$$

则 φ 是 V 到 U 的映射. 若另有 $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n$, 则

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(a_1+b_1)\boldsymbol{u}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(a_n+b_n)\boldsymbol{u}_n=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta}).$$

又对 $\mathbb{F}$ 中的任意元素 k, 有

$$\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=ka_1\boldsymbol{u}_1+ka_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+ka_n\boldsymbol{u}_n=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).$$

因此 φ 是线性映射, 显然它满足 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{u}_i$.

设另有 V 到 U 的线性映射 ψ 满足 $\psi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{u}_i$, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\alpha})&=\psi(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n)\\&=a_1\psi(\boldsymbol{e}_1)+a_2\psi(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+a_n\psi(\boldsymbol{e}_n)\\&=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{u}_n=\varphi(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

因此 $\psi=\varphi$, 这就证明了唯一性. □

定理 1.3

设线性空间 $V = V_1 \oplus V_2$, 并且 φ_1 及 φ_2 分别是 V_1, V_2 到 U 的线性映射, 求证: 存在唯一的从 V 到 U 的线性映射 φ, 当 φ 限制在 V_i 上时等于 φ_i.

注 定理 1.3可以推广到多个子空间的情形: 设 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, 给定线性映射 $\varphi_i : V_i \to U(1 \le i \le m)$, 则存在唯一的线性映射 $\varphi : V \to U$, 使得 $\varphi|_{V_i} = \varphi_i(1 \le i \le m)$. 我们可以把这样的线性映射 φ 简记为 $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_m$.

笔记 这个定理表明: 在向量空间上定义线性映射, 若这个向量空间可分解为两个 (或多个) 子空间的直和, 则只要对每个子空间进行定义即可.

证明 因为 $V = V_1 \oplus V_2$, 故对任意的 $\alpha \in V, \alpha$ 可唯一地写为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$. 令 $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2)$, 则 φ 是 V 到 U 的映射. 不难验证 φ 保持加法和数乘, 因此 φ 是线性映射. 若另有线性映射 ψ, 它在 V_i 上的限制等于 φ_i, 则

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2) = \varphi(\alpha).$$

因此 $\psi = \varphi$, 唯一性得证. □

例题 1.1 设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的线性映射, 求证: 必存在 U 到 V 的线性映射 ψ, 使得 $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

笔记 可以直接定义 ψ 是 U 到 V 的线性映射的原因: 由线性扩张定理可知存在唯一的线性映射 ψ, 使得它在基上的作用为

$$\psi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{e}_i, 1 \le i \le r; \psi(\boldsymbol{f}_j) = \boldsymbol{0}, r+1 \le j \le m.$$

以后这种利用线性扩张定理得到线性映射的存在性不再额外说明, 而是直接定义.

证明 证法一: 设 V 和 U 的维数分别是 n 和 m. 由命题 1.11可知, 存在 V 和 U 的基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}, \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$, 使得 φ 在这两组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

这就是 $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{f}_i, 1 \le i \le r; \varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{0}, r+1 \le j \le n$.定义 ψ 是 U 到 V 的线性映射, 它在基上的作用为

$$\psi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{e}_i, 1 \le i \le r; \psi(\boldsymbol{f}_j) = \boldsymbol{0}, r+1 \le j \le m,$$

则在 V 的基上, 有

$$\varphi\psi\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \varphi\psi(\boldsymbol{f}_i) = \varphi(\boldsymbol{e}_i), 1 \le i \le r;$$
$$\varphi\psi\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \varphi\psi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} = \varphi(\boldsymbol{e}_j), r+1 \le j \le n.$$

于是 $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

证法二 (代数方法):取定 V 和 U 的两组基, 设 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则由例题**??**可知, 存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$. 由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可定义从 U 到 V 的线性映射 ψ, 它适合 $\varphi\psi\varphi = \varphi$. □

命题 1.2

设有数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间 V, V', 又 U 是 V 的子空间,φ 是 U 到 V' 的线性映射. 求证: 必存在 V 到 V' 的线性映射 ψ, 它在 U 上的限制就是 φ.

笔记 可以直接定义 ψ 为 V 到 V' 的线性映射的原因: 由定理 1.3可知, 存在唯一的从 V 到 V' 的线性映射 ψ, 使得它在 U 上的限制是 φ, 它在 W 上的限制是零线性映射.

以后这种利用定理 1.3得到线性映射的存在性不再额外说明, 而是直接定义.

证明 令 W 是子空间 U 在 V 中的补空间, 即 $V = U \oplus W$. 定义 ψ 为 V 到 V' 的线性映射, 它在 U 上的限制是 φ, 它在 W 上的限制是零线性映射, 这样的 ψ 即为所求. □

命题 1.3

设 V,U 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,φ 是 V 到 U 的线性映射, 求证:

(1) φ 是单映射的充要条件是存在 U 到 V 的线性映射 ψ, 使 $\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$, 这里 Id_V 表示 V 上的恒等映射;

(2) φ 是满映射的充要条件是存在 U 到 V 的线性映射 η, 使 $\varphi\eta=\mathrm{Id}_U$, 这里 Id_U 表示 U 上的恒等映射.

证明 证法一:

(1) 若 $\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$, 则对任意的 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}\varphi,\boldsymbol{v}=\psi(\varphi(\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi=0$, 从而 φ 是单映射.

反之, 若 φ 是单映射, 则定义映射 $\varphi_1:V\to\mathrm{Im}\varphi$, 它与 φ 有相同的映射法则, 但值域变为 $\mathrm{Im}\varphi$. 因为 φ_1 与 φ 有相同的映射法则, 所以对 $\forall\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi_1$, 有 $\varphi(\alpha)=\varphi_1(\alpha)=0$. 于是 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi_1\subset\mathrm{Ker}\varphi$. 又由 φ 是单射可知,$\mathrm{Ker}\varphi=0$. 因此 $\mathrm{Ker}\varphi_1=0$, 即 φ_1 也是单射. 因为 φ_1 与 φ 有相同的映射法则, 所以对 $\forall\beta\in\mathrm{Im}\varphi$, 存在 $b\in V$, 使得 $\beta=\varphi(b)=\varphi_1(b)\in\mathrm{Im}\varphi_1$. 故 $\mathrm{Im}\varphi\subset\mathrm{Im}\varphi_1$. 又根据 φ_1 的定义可知,$\mathrm{Im}\varphi_1\subset\mathrm{Im}\varphi$. 因此 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\varphi_1$, 即 φ_1 是满射. 故 φ_1 是双射. 由于 φ_1 与 φ 有相同的映射法则, 因此容易验证 φ_1 是线性映射. 综上,φ_1 是线性同构.

设 U_0 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 在 U 中的补空间, 即 $U=\mathrm{Im}\varphi\oplus U_0$. 定义 ψ 为 U 到 V 的线性映射, 它在 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的限制为 φ_1^{-1}, 它在 U_0 上的限制是零线性映射, 则容易验证 $\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$ 成立.

(2) 若 $\varphi\eta=\mathrm{Id}_U$, 则对任意的 $\boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{u}=\varphi(\eta(\boldsymbol{u}))$, 从而 φ 是满映射.

反之, 若 φ 是满映射, 则可取 U 的一组基 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m$, 一定存在 V 中的向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$, 使得 $\varphi(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{f}_i(1\le i\le m)$. 定义 η 为 U 到 V 的线性映射, 它在基上的作用为 $\eta(\boldsymbol{f}_i)=\boldsymbol{v}_i(1\le i\le m)$, 则容易验证 $\varphi\eta=\mathrm{Id}_U$ 成立.

证法二 (代数方法):

充分性同证法一, 现只证必要性. 取定 V 和 U 的两组基, 设 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(1) 若 φ 是单映射, 则由命题 1.13可知 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵. 再由命题**??**(1) 可知, 存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$. 由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可定义从 U 到 V 的线性映射 ψ, 它适合 $\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$.

(2) 若 φ 是满映射, 则由命题 1.13可知 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵. 再由命题**??**(2) 可知, 存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}_m$. 由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可定义从 U 到 V 的线性映射 η, 它适合 $\varphi\eta=\mathrm{Id}_U$.

□

命题 1.4

(1) 设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,$\varphi,\psi:V\to U$ 是两个线性映射, 证明: 存在 U 上的线性变换 ξ, 使得 $\psi=\xi\varphi$ 成立的充要条件是 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$.

(2) 设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,$\varphi,\psi:V\to U$ 是两个线性映射, 证明: 存在 V 上的线性变换 ξ, 使得 $\psi=\varphi\xi$ 成立的充要条件是 $\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$.

证明

(1) 先证必要性: 任取 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 则 $\psi(\boldsymbol{v})=\xi\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 即有 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}\psi$, 从而 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$.

再证充分性: 设 $\dim V=n,\dim U=m,\dim\mathrm{Ker}\varphi=n-r$. 取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 由推论 1.4可知,$\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_r)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基, 将其扩张为 U 的一组基 $\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_r),\boldsymbol{g}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{g}_m$. 定义 ξ 为 U 上的线性变换, 它在基上的作用为:$\xi(\varphi(\boldsymbol{e}_i))=\psi(\boldsymbol{e}_i)(1\le i\le r),\xi(\boldsymbol{g}_j)=\mathbf{0}(r+1\le j\le m)$. 由于 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$, 故容易验证 $\psi(\boldsymbol{e}_i)=\xi\varphi(\boldsymbol{e}_i)(1\le i\le n)$ 成立, 从而 $\psi=\xi\varphi$.

(2) 先证必要性: 任取 $\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\psi(\boldsymbol{v})=\varphi(\xi(\boldsymbol{v}))\in\mathrm{Im}\varphi$, 从而 $\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$.

再证充分性: 取 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 则 $\psi(\boldsymbol{e}_i)\in\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$, 从而存在 $\boldsymbol{f}_i\in V$, 使得 $\varphi(\boldsymbol{f}_i)=\psi(\boldsymbol{e}_i)(1\le i\le n)$. 定义 ξ 为 V 上的线性变换, 它在基上的作用为:$\xi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{f}_i(1\le i\le n)$. 容易验证 $\psi(\boldsymbol{e}_i)=\varphi\xi(\boldsymbol{e}_i)(1\le i\le n)$ 成立, 从而 $\psi=\varphi\xi$.

□

命题 1.5

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,$\alpha \in V$. 若 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq \mathbf{0}$, 而 $\varphi^m(\alpha) = \mathbf{0}$, 求证:$\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关.

证明 设有 m 个数 $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$, 使得

$$a_0\alpha + a_1\varphi(\alpha) + \cdots + a_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha) = \mathbf{0}.$$

上式两边同时作用 φ^{m-1}, 则有 $a_0\varphi^{m-1}(\alpha) = \mathbf{0}$, 由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq \mathbf{0}$, 故 $a_0 = 0$. 上式两边同时作用 φ^{m-2}, 则有 $a_1\varphi^{m-1}(\alpha) = \mathbf{0}$, 由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq \mathbf{0}$, 故 $a_1 = 0$. 不断这样做下去, 最后可得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, 于是 $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关. □

推论 1.2

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,φ 是 V 上的幂零线性变换, 满足 $\mathrm{r}(\varphi) = n - 1$. 求证: 存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 由假设存在正整数 m, 使得 $\varphi^m = 0, \varphi^{m-1} \neq 0$, 从而存在 $\alpha \in V$, 使得 $\varphi^m(\alpha) = 0, \varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$. 由命题 1.5可知,$\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关, 于是 $m \leq \dim V = n$. 另一方面, 由 Sylvester 不等式以及 $\mathrm{r}(\varphi) = n - 1$ 可知,$\mathrm{r}(\varphi^2) \geq 2\mathrm{r}(\varphi) - n = n - 2$. 不断这样讨论下去, 最终可得 $0 = \mathrm{r}(\varphi^m) \geq n - m$, 即有 $m \geq n$, 从而 $m = n$. 于是 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的一组基,φ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$. □

1.3 线性同构

线性同构刻画了不同线性空间之间的相同本质, 即同构的线性空间具有相同的线性结构 (或从线性结构的观点来看没有任何区别). 要证明线性映射 $\varphi : V \to U$ 是线性同构, 通常一方面需要验证 φ 是单映射 (或等价地验证 $\mathrm{Ker}\varphi = 0$), 另一方面需要验证 φ 是满映射 (或等价地验证 $\mathrm{Im}\varphi = U$). 但若已知前后两个线性空间的维数相等, 则由线性映射的维数公式容易证明,φ 是线性同构当且仅当 φ 是单映射, 也当且仅当 φ 是满映射, 从而只需验证 φ 是单映射或满映射即可得到 φ 是线性同构.

命题 1.6

设 V, U 为两个线性空间, 若 $\dim V = \dim U$, 则线性映射 $\varphi : V \to U$ 是线性同构当且仅当 φ 是单映射, 也当且仅当 φ 是满映射.

证明 由线性映射的维数公式容易证明. □

推论 1.3

设 V 为线性空间, 则线性变换 $\varphi : V \to V$ 是自同构当且仅当 φ 是单映射, 也当且仅当 φ 是满映射.

证明 由命题 1.6立得. □

引理 1.1

设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中 $n+1$ 个不同的数,V 是 $\mathbb{F}$ 上次数不超过 n 的多项式全体组成的线性空间. 设 φ 是 V 到 $n+1$ 维行向量空间 U 的映射:

$$\varphi(f) = (f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_n)),$$

求证:φ 是线性同构.

证明 不难验证 φ 是一个线性映射. 若 $f(x) \in \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $f(a_i) = 0(0 \le i \le n)$. 因为 $f(x)$ 的次数不超过 n, 故由多项式根的有限性可知 $f(x) = 0$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi = 0$, 这证明了映射 φ 是单映射. 注意到线性空间 V 和 U 的维数都等于 $n+1$, 因此由命题 1.6可知 φ 是线性同构. □

定理 1.4 (Lagrange 插值公式)

设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中 $n+1$ 个不同的数,$b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中任意 $n+1$ 个数, 求证: 必存在 $\mathbb{F}$ 上次数不超过 n 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(a_i) = b_i(0 \le i \le n)$, 并将 $f(x)$ 构造出来.

证明 由引理 1.1可知映射 φ 是映上的 (满射), 因此存在性已经证明. 现来构造 $f(x)$. 设 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)(1 \le i \le n+1)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n+1$ 维标准单位行向量. 对任意的 $0 \le i \le n$, 令

$$f_i(x) = \frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},$$

则 $f_i(a_i) = 1, f_i(a_j) = 0(j \ne i)$, 于是 $\varphi(f_i) = \boldsymbol{e}_{i+1}(0 \le i \le n)$. 再令

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \cdots + b_n f_n(x),$$

则容易验证 $\varphi(f) = (b_0, b_1, \cdots, b_n)$, 即 $f(a_i) = b_i(0 \le i \le n)$ 成立. □

1.3.1 证明线性变换可逆的方法

要证明某个有限维线性空间 V 上的线性变换 φ 是自同构 (可逆线性变换), 通常有 3 种方法. 一是可尝试直接构造出 φ 的逆变换. 二是证明 φ 是单映射或者 φ 是满映射 (两者只需其一)(命题 1.6). 三是用矩阵方法, 即选取 V 的一组基, 设 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 设法证明 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

对于无限维线性空间之间的线性映射, 我们并没有定义表示矩阵这一概念, 也没有维数公式等结论, 因此研究线性映射或线性变换, 无限维线性空间的情形远比有限维线性空间的情形难得多, 也常出现对有限维线性空间成立的结论在无限维线性空间却不成立的情况. 例如, 要证明无限维线性空间上的线性变换是自同构, 只能按照定义证明它既是单映射又是满映射, 而不能像有限维线性空间上的线性变换那样, 只验证它是单映射或满映射即可.

例题 1.2 设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 上的线性变换, 若存在正整数 n 以及 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$, 使得

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varphi + a_n I_V = 0,$$

其中 I_V 表示恒等变换并且 $a_n \ne 0$, 求证:φ 是 V 上的自同构.

证明 由条件可得

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varphi = -a_n I_V,$$

从而

$$\varphi\left(-\frac{1}{a_n}(\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}I_V)\right) = I_V,$$

于是

$$\varphi^{-1} = -\frac{1}{a_n}(\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}I_V).$$

□

命题 1.7

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明:φ 是可逆变换的充要条件是 φ 将 V 的基变为基.

证明 若 φ 是可逆变换, 则显然 φ 将 V 的基变为基.

反之,证法一: 若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V 的两组基, 使得 $\varphi(e_i)=f_i(1\le i\le n)$, 则对任意 $\alpha\in V$,$\alpha=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_n f_n$, 有 $\varphi(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n)=\alpha$, 即 φ 是满映射, 从而是自同构.(我们也可以证明 φ 是单映射, 从而是自同构.)

证法二:若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V 的两组基, 使得 $\varphi(e_i)=f_i(1\le i\le n)$. 设从基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵为 P, 则 φ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的表示矩阵就是 P, 这是一个可逆矩阵, 从而 φ 是可逆变换. □

命题 1.8

设 U_1,U_2 是 n 维线性空间 V 的子空间, 假设它们维数相同. 求证: 存在 V 上的可逆线性变换 φ, 使得 $U_2=\varphi(U_1)$.

证明 取 U_1 的一组基 $e_1,\cdots,e_m$, 并扩张为 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n$; 取 U_2 的一组基 $f_1,\cdots,f_m$, 并扩张为 V 的一组基 $f_1,\cdots,f_m,f_{m+1},\cdots,f_n$. 定义 φ 为 V 上的线性变换, 它在基上的作用为:$\varphi(e_i)=f_i(1\le i\le n)$, 则由命题 1.7可知,$\varphi$ 是可逆线性变换, 再由定义容易验证 $\varphi(U_1)=U_2$ 成立. □

例题 1.3 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 若对 V 中任一向量 α, 总存在正整数 m(m 可能和 α 有关), 使得 $\varphi^m(\alpha)=0$. 求证:$I_V-\varphi$ 是自同构.

证明 证法一: 首先证明线性变换 φ 是幂零的. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性空间 V 的一组基. 对每个 e_i, 都有 m_i, 使得 $\varphi^{m_i}(e_i)=0$, 令 m 为诸 m_i 中最大者. 对 V 中任一向量 v, 设 $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, 则有

$$\varphi^m(v)=a_1\varphi^m(e_1)+a_2\varphi^m(e_2)+\cdots+a_n\varphi^m(e_n)=\mathbf{0}.$$

因此 $\varphi^m=0$.

注意到下列等式:

$$(I_V-\varphi)(I_V+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^{m-1})=I_V-\varphi^m=I_V.$$

由此即知 $I_V-\varphi$ 是自同构.

证法二: 只要证明 $I_V-\varphi$ 是单映射即可. 任取 $\alpha\in\mathrm{Ker}(I_V-\varphi)$, 即 $(I_V-\varphi)(\alpha)=0$, 则 $\varphi(\alpha)=\alpha$. 设 m 为正整数, 使得 $\varphi^m(\alpha)=0$, 则 $0=\varphi^m(\alpha)=\varphi^{m-1}(\alpha)=\cdots=\varphi(\alpha)=\alpha$, 故 $\mathrm{Ker}(I_V-\varphi)=0$, 即 $I_V-\varphi$ 是单映射. □

例题 1.4 设 $V=M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵全体组成的线性空间,A,B 是两个 n 阶矩阵, 定义 V 上的变换:$\varphi(X)=AXB$. 求证:φ 是 V 上的线性变换,φ 是可逆变换的充要条件是 A 和 B 都是可逆矩阵.

注 用命题 1.9的结论来看这个例题, 就能发现 D 之所以不是可逆变换, 是因为它的右逆变换除了 S 之外, 还有无穷多个.

证明 容易验证 φ 是线性变换. 若 A,B 都是可逆矩阵, 则 $\psi(X)=A^{-1}XB^{-1}$ 是 φ 的逆线性变换. 下面用两种方法来证明必要性.

证法一: 若 A 是不可逆矩阵, 则我们可证明 φ 不是单映射, 即存在 $X\ne O$, 使得 $\varphi(X)=AXB=O$, 从而 φ 不是可逆变换. 事实上, 若 A 的秩等于 $r<n$, 则存在可逆矩阵 P 和 Q, 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$. 令 $C=\begin{pmatrix} O & O\\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}$, 则 $PAQC=O$, 而 P 是可逆矩阵, 故 $AQC=O$, 再令 $X=QC$ 即可. 同理, 若 B 的秩小于 n, 也可以证明 φ 不是可逆变换.

证法二: 若 A 是不可逆矩阵, 则对任意的 n 阶矩阵 X,$\varphi(X)=AXB$ 总是不可逆矩阵 (行列式一定为零). 因此 φ 不可能是映上的 (可逆矩阵不在值域里但是在像空间中). 同理, 若 B 是不可逆矩阵,φ 也不是映上的. □

例题 1.5 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 定义 V 上的变换 D,S 如下:

$$D(f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\ S(f(x))=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明:D,S 均为 V 上的线性变换且 $DS=I_V$, 但 $SD\neq I_V$.

证明 简单验证即得结论. 由 $DS=I_V$ 可知,S 是单线性映射,D 是满线性映射. 又容易看出 S 不是满映射 (值域不包含常数),D 不是单映射, 从而它们都不是自同构. □

命题 1.9

设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的无限维线性空间,φ,ψ 是 V 上的线性变换.

(1) 证明:φ 和 ψ 都是可逆变换的充要条件是 $\varphi\psi$ 和 $\psi\varphi$ 都是可逆变换;

(2) 若 $\psi\varphi=I_V$, 则称 ψ 是 φ 的左逆变换,φ 是 ψ 的右逆变换. 证明:φ 是可逆变换的充要条件是 φ 有且仅有一个左逆变换 (右逆变换).

笔记 这个命题对有限维空间仍成立.

证明

(1) 若 φ 和 ψ 都是可逆变换, 则 $(\psi^{-1}\varphi^{-1})(\varphi\psi)=(\varphi\psi)(\psi^{-1}\varphi^{-1})=I_V$,$(\varphi^{-1}\psi^{-1})(\psi\varphi)=(\psi\varphi)(\varphi^{-1}\psi^{-1})=I_V$, 因此 $\varphi\psi$ 和 $\psi\varphi$ 都是可逆变换. 反之, 若 $\varphi\psi$ 和 $\psi\varphi$ 都是可逆变换, 则存在 V 上的线性变换 ξ,η, 使得 $\varphi\psi\xi=\xi\varphi\psi=I_V$,$\psi\varphi\eta=\eta\psi\varphi=I_V$. 由 $\varphi\psi\xi=I_V$ 及命题 1.12(2)可得 φ 是满映射, 由 $\eta\psi\varphi=I_V$ 及命题 1.12(1)可得 φ 是单映射, 从而 φ 是可逆变换. 同理可证 ψ 也是可逆变换.

(2) 若 φ 是可逆变换, 任取 φ 的一个左逆变换 ψ, 则

$$\psi=\psi I_V=\psi\varphi\varphi^{-1}=I_V\varphi^{-1}=\varphi^{-1},$$

即 φ 的任一左逆变换都是逆变换 φ^{-1}. 由逆变换的唯一性可知,φ 有且仅有一个左逆变换. 反之, 若 φ 有且仅有一个左逆变换 ψ, 则 $\psi\varphi=I_V$, 且有

$$(\psi+\varphi\psi-I_V)\varphi=\psi\varphi+\varphi\psi\varphi-\varphi=I_V+\varphi-\varphi=I_V,$$

即 $\psi+\varphi\psi-I_V$ 也是 φ 的左逆变换, 从而 $\psi+\varphi\psi-I_V=\psi$, 即 $\varphi\psi=I_V$. 因此 ψ 也是 φ 的右逆变换, 从而 φ 是可逆变换. 同理可证关于右逆变换的结论.

□

例题 1.6 试构造无限维线性空间 V 以及 V 上的线性变换 φ,ψ, 使得 $\varphi\psi-\psi\varphi=I_V$.

解 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 线性变换 φ,ψ 定义为: 对任一 $f(x)\in V$,$\varphi(f(x))=f'(x)$,$\psi(f(x))=xf(x)$. 容易验证 $\varphi\psi-\psi\varphi=I_V$ 成立.

注 事实上, 满足上述性质的线性变换 φ,ψ 绝不可能存在于有限维线性空间 V 上. 若存在, 取 V 的一组基并设 φ,ψ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则有 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 成立. 上式两边同时取迹, 可得

$$0=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I})=\dim V,$$

导出矛盾.

1.4 线性映射与矩阵

线性映射与矩阵的关系是这一章的核心. 线性映射是一个几何概念, 矩阵是一个代数概念, 它们之间的关系需要掌握以下几点:

(1) 记数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维向量空间 V 到 m 维向量空间 U 的线性映射全体为 $\mathcal{L}(V,U)$,$\mathbb{F}$ 上 $m\times n$ 矩阵全体为 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. 各自取定 V 和 U 的一组基, 设 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$ 在给定基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\varphi\mapsto\boldsymbol{A}$ 定义了从 $\mathcal{L}(V,U)$ 到 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一一对应, 这个对应还是一个线性同构. 若 $m=n$, 则在这个对应下, 线性同构 (可逆线性映射) 对应于可逆矩阵. 特别地, 若 $V=U$, 上述对应还定义了一个代数同构, 即除了保持加法与数乘外, 还保持乘法. 因此, 两个向量空间之间线性映射的运算完全可以归结为矩阵的运算.

(2) 设线性映射 φ 在给定基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi$ 和齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解空间同构,$\mathrm{Im}\varphi$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的全体列向量张成的向量空间同构. 因此 $\dim\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, $\dim\mathrm{Ker}\varphi=n-\mathrm{r}(\varphi)=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

这两点由定理 1.5的结论即得.

定理 1.5

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射. 令 $\mathbb{F}^n$ 和 $\mathbb{F}^m$ 分别是 $\mathbb{F}$ 上 n 维和 m 维列向量空间. 又设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m$ 分别是 V 和 U 的基,φ 在给定基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 记 $\eta_1: V\to\mathbb{F}^n$ 为 V 中向量映射到它在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标向量的线性同构,$\eta_2: U\to\mathbb{F}^m$ 为 U 中向量映射到它在基 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m$ 下的坐标向量的线性同构,$\boldsymbol{A}:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 为矩阵乘法诱导的线性映射, 即 $\boldsymbol{A}(\alpha)=\boldsymbol{A}\alpha$. 求证:$\eta_2\varphi=\boldsymbol{A}\eta_1$, 即下列图交换, 并且 $\eta_1:\mathrm{Ker}\varphi\to\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$, $\eta_2:\mathrm{Im}\varphi\to\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 都是线性同构.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \eta_1\downarrow & & \downarrow\eta_2 \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\boldsymbol{A}} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

证明

□

命题 1.10

设 φ 是线性空间 V 到 U 的线性映射,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的两组基,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 是 U 的两组基,$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 到 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$. 又设 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 和基 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}$. 求证:$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

特别地, 若 φ 是线性空间 V 上的线性变换,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的两组基,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 又设 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 φ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵 $B=P^{-1}AP$.

证明 任取 $\boldsymbol{v}\in V$, 设它在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 则它在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. $\varphi(\boldsymbol{v})$ 在基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 在基 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 由于从 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 到 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$, 故

$$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'.$$

因为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 是任意的, 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. □

命题 1.11

设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的线性映射, 求证: 必存在 V 和 U 的两组基, 使线性映射 φ 在两组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

证明 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基,$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 是 U 的一组基,φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 由相抵标准型理论可知, 存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$,n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 设 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的一组新基, 使得从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$; 设 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 是 U 的一组新基, 使得从 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 到 $\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_m\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$, 则由命题 1.10可知,φ 在两组新基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. □

注 利用这个命题可以得到 $\mathrm{Ker}\varphi=L(\boldsymbol{f}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{f}_n)$, $\mathrm{Im}\varphi=L(\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_r)$, 由此即得线性映射的维数公式.

命题 1.12 (线性映射维数公式)

设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,$\varphi: V\to U$ 是线性映射,$\varphi: V\to U$ 为线性映射, 求证:

$$\dim\mathrm{Ker}\varphi+\dim\mathrm{Im}\varphi=\dim V.$$

证明 证法一: 设 $\dim V = n, \dim \mathrm{Ker}\varphi = k$, 我们只要证明 $\dim \mathrm{Im}\varphi = n - k$ 即可. 取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha} = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{e}_k + c_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$, 则 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = c_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + c_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$, 即 $\mathrm{Im}\varphi$ 中任一向量都是 $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ 的线性组合. 下证 $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ 线性无关. 设 $\lambda_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0}$, 则 $\varphi(\lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0}$, 即 $\lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n \in \mathrm{Ker}\varphi$, 故可设 $\lambda_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k$, 再由 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关可知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. 因此 $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基, 从而 $\dim \mathrm{Im}\varphi = n - k$, 结论得证.

证法二 (从商空间的角度): 设由 φ 诱导的线性映射 $\overline{\varphi} : V/\mathrm{Ker}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi, \overline{\varphi}(\boldsymbol{v} + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(\boldsymbol{v})$. 先证是 $\overline{\varphi}$ 线性同构的.

首先,$\overline{\varphi}$ 的定义不依赖于 $\mathrm{Ker}\varphi-$ 陪集代表元的选取. 事实上, 若 $\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{Ker}\varphi = \boldsymbol{v}_2 + \mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $0 = \varphi(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) - \varphi(\boldsymbol{v}_2)$, 即 $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \varphi(\boldsymbol{v}_2)$. 其次, 容易验证 $\overline{\varphi}$ 是一个线性映射. 再次, 由 $\overline{\varphi}$ 的定义不难看出它是满射. 最后, 由 $\overline{\varphi}$ 的定义可知 $\mathrm{Ker}\overline{\varphi} = \{\boldsymbol{0} + \mathrm{Ker}\varphi\}$ 是商空间 $V/\mathrm{Ker}\varphi$ 的零子空间, 故为单射, 从而 $\overline{\varphi} : V/\mathrm{Ker}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi$ 是线性同构. 由商空间的维数公式可得

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim(V/\mathrm{Ker}\varphi) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi,$$

由此即得线性映射的维数公式. □

推论 1.4

设 $\varphi : V \to U$ 为线性映射,$\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基为 $\boldsymbol{e}_{r+1} \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. 则 $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_r)$ 一定是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基.

证明 由命题 1.12的证法一立得.

□

命题 1.13

设 φ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射,φ 在给定基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 求证:$\varphi$ 是满映射的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m(\boldsymbol{A}$ 行满秩),φ 是单映射的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n(\boldsymbol{A}$ 列满秩).

笔记 $\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 和 $\dim \mathrm{Ker}\varphi = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 的原因见线性映射与矩阵基本结论 (2).

证明 注意到 $\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 并且 φ 是满映射的充要条件是 $\mathrm{Im}\varphi = U$, 这也等价于 $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim U = m$, 故第一个结论成立.

注意到 $\dim \mathrm{Ker}\varphi = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 并且 φ 是单映射的充要条件是 $\mathrm{Ker}\varphi = 0$, 这也等价于 $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 0$, 故第二个结论成立. □

命题 1.14

设 $\varphi : V \to U$ 为线性映射且 φ 的秩为 r, 证明: 存在 r 个秩为 1 的线性映射 $\varphi_i : V \to U(1 \le i \le r)$, 使得 $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_r$.

证明 取定 V 和 U 的两组基, 设 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\varphi) = r$. 由矩阵的秩 1 分解可知, 存在 r 个秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}_i(1 \le i \le r)$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_r$. 由于线性映射和表示矩阵之间一一对应, 故存在线性映射 $\varphi_i : V \to U(1 \le i \le r)$, 使得 $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_r$, 且 $\mathrm{r}(\varphi_i) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_i) = 1$. □

命题 1.15

设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, 若它在 V 的任一组基下的表示矩阵都相同, 求证:φ 是纯量变换, 即存在常数 k, 使得 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha}$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 都成立.

证明 取定 V 的一组基, 设 φ 在这组基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}$. 由已知条件可知, 对任意一个同阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和任意一个可逆矩阵乘法可交换, 于是由命题**??**可知 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}_n$, 由此即知 φ 是纯量变换. □

1.4.1 将矩阵问题转化为线性映射问题

我们将线性映射的问题转化为矩阵问题来处理. 反之, 我们也可将矩阵问题转化为线性映射 (线性变换) 问题来处理. 一般的处理方式如下:

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, 定义列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射:$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, 容易验证在 $\mathbb{F}^n$ 和 $\mathbb{F}^m$ 的标准单位列向量构成的基下,φ 的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$. 同理, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 定义 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换:$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, 容易验证在 $\mathbb{F}^n$ 的标准单位列向量构成的基下,φ 的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$.

因此, 我们有时就把这个线性映射 (线性变换) 写为 $\boldsymbol{A}$. 上述把代数问题转化成几何问题的语言表述, 在后面的章节中一直会用到. 某些矩阵问题采用这种方式转化为线性映射 (线性变换) 问题后, 往往变得比较容易解决或者可以充分利用几何直观去得到解题思路.

例题 1.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, 求证: 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$ 同解的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$.

证明 因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 充分性是显然的. 现通过两种方法来证明必要性.

证法一 (代数方法): 由条件可得方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0,\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0$ 都同解, 从而有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

注意到结论 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ 就是说 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以通过初等行变换相互转化, 因此在证明的过程中, 对 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 实施初等行变换不影响结论的证明. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$$

分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行分块. 不妨对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都进行行对换, 故可设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组,$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的极大无关组. 由于 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r$, 故由命题**??**可知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的两组极大无关组. 设 $\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}c_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j(1\le i\le r)$, 则容易验证 r 阶方阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是非异阵. 设 $\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}d_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j(r+1\le i\le m)$,$\boldsymbol{D}=(d_{ij})$ 是 $(m-r)\times r$ 矩阵, 则容易验证 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{D}&\boldsymbol{I}_{m-r}\end{pmatrix}$ 是 m 阶非异阵, 并且满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$.

证法二 (几何方法): 将问题转化成几何的语言即为: 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间,U 是 $\mathbb{F}$ 上的 m 维线性空间,$\varphi,\psi:V\to U$ 是两个线性映射. 求证: 若 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$, 则存在 U 上的自同构 σ, 使得 $\psi=\sigma\varphi$.

设 $\mathrm{r}(\varphi)=r$, 则 $\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\mathrm{Ker}\psi=n-r$. 取 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 根据推论 1.4可知,$\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_r)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基, 故可将其扩张为 U 的一组基 $\varphi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_r),\boldsymbol{f}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{f}_m$. 同理可知,$\psi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\psi(\boldsymbol{e}_r)$ 是 $\mathrm{Im}\psi$ 的一组基, 故可将其扩张为 U 的一组基 $\psi(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\psi(\boldsymbol{e}_r),\boldsymbol{g}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{g}_m$. 定义 U 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma(\varphi(\boldsymbol{e}_i))=\psi(\boldsymbol{e}_i),1\le i\le r;\ \sigma(\boldsymbol{f}_j)=\boldsymbol{g}_j,r+1\le j\le m.$$

因为 σ 把 U 的一组基映射为 U 的另一组基, 故 σ 是 U 的自同构. 又对 $r+1\le j\le n$,$\sigma(\varphi(\boldsymbol{e}_j))=0=\psi(\boldsymbol{e}_j)$, 故 $\sigma\varphi=\psi$ 成立. □

命题 1.16

若数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似, 求证: 它们可以看成是某个线性空间上同一个线性变换在不同基下的表示矩阵.

笔记 由下面的证明可知这个线性变换 φ 就是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法诱导的线性变换. 两组不同的基就是标准基与可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量.

证明 令 $V=\mathbb{F}^n$ 是 n 维列向量空间,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是由 n 维标准单位列向量构成的基,φ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法诱导的线性变换, 容易验证 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$. 已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)$ 为其列分块, 由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 线性无关, 从而是 V 的一组基. 注意到从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵就是 $\boldsymbol{P}$, 因此线性变换 φ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. □

例题 1.8 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵全体构成的线性空间,φ 是 V 上的线性变换:$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}'$. 证明: 存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵是一个对角矩阵且主对角元素全是 1 或 -1, 并求出 1 和 -1 的个数.

证明 设 V_1 是由 n 阶对称矩阵组成的子空间,V_2 是由反对称矩阵组成的子空间, 则由命题**??**可得

$$V=V_1\oplus V_2.$$

取 V_1 的一组基和 V_2 的一组基拼成 V 的一组基, 则 φ 在这组基下的表示矩阵是对角矩阵且主对角元素或为 1 或为 -1. 因为 $\dim V_1=\frac{1}{2}n(n+1)$,$\dim V_2=\frac{1}{2}n(n-1)$, 故 1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$,-1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$. □

例题 1.9 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,φ,ψ 是 V 上的线性变换且 $\varphi^2=0$,$\psi^2=0$,$\varphi\psi+\psi\varphi=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 是 V 上的恒等变换. 求证:

(1) $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\psi$;

(2) 若 V 是二维空间, 则存在 V 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, 使得 φ,ψ 在这组基下的表示矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};$$

(3) V 必是偶数维空间且若 V 是 $2k$ 维空间, 则存在 V 的一组基, 使得 φ,ψ 在这组基下的表示矩阵分别为下列分块对角矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{A}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

其中主对角线上分别有 k 个 $\boldsymbol{A}$ 和 k 个 $\boldsymbol{B}$.

证明

(1) 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 则由 $\boldsymbol{I}=\varphi\psi+\psi\varphi$ 得到 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})+\psi\varphi(\boldsymbol{\alpha})$. 注意到 $\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\varphi$,$\psi\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\psi$, 因此 $V=\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}\psi$. 又若 $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}\psi$, 则 $\boldsymbol{\beta}=\varphi\psi(\boldsymbol{\beta})+\psi\varphi(\boldsymbol{\beta})=0$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}\psi=0$. 于是 $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\psi$.

(2) 取 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{e}_1\in\mathrm{Ker}\psi$,$\boldsymbol{e}_2=\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, 则 $\varphi(\boldsymbol{e}_2)=\varphi^2(\boldsymbol{e}_1)=0$, 即 $\boldsymbol{e}_2\in\mathrm{Ker}\varphi$. 又若 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{e}_1\in\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}\psi=0$, 和假设矛盾, 于是 $\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 组成 V 的一组基, 不难验证在这组基下,φ,ψ 的表示矩阵符合要求 $(\psi(\boldsymbol{e}_2)=\psi(\varphi(\boldsymbol{e}_1))=\psi\varphi(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}_1)-\varphi\psi(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1)$.

(3) 设 $\dim\mathrm{Ker}\psi=k$, 并取 $\mathrm{Ker}\psi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k$. 令 $\boldsymbol{e}_{k+1}=\varphi(\boldsymbol{e}_1)$,$\boldsymbol{e}_{k+2}=\varphi(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}=\varphi(\boldsymbol{e}_k)$, 则由 $\varphi^2=0$ 可得 $\boldsymbol{e}_{k+1},\boldsymbol{e}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}$ 都属于 $\mathrm{Ker}\varphi$. 我们先证明向量组 $\boldsymbol{e}_{k+1},\boldsymbol{e}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}$ 是线性无关的. 设有

$$c_1\boldsymbol{e}_{k+1}+c_2\boldsymbol{e}_{k+2}+\cdots+c_k\boldsymbol{e}_{2k}=\boldsymbol{0},$$

两边作用 ψ, 可得

$$c_1\psi(\boldsymbol{e}_{k+1})+c_2\psi(\boldsymbol{e}_{k+2})+\cdots+c_k\psi(\boldsymbol{e}_{2k})=\boldsymbol{0}.$$

注意到 $\boldsymbol{e}_1=\varphi\psi(\boldsymbol{e}_1)+\psi\varphi(\boldsymbol{e}_1)=\psi(\boldsymbol{e}_{k+1})$, 同理 $\boldsymbol{e}_2=\psi(\boldsymbol{e}_{k+2}),\cdots,\boldsymbol{e}_k=\psi(\boldsymbol{e}_{2k})$. 因此上式就是

$$c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}.$$

而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 线性无关, 故 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$, 即向量组 $\boldsymbol{e}_{k+1},\boldsymbol{e}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}$ 线性无关. 特别地, 我们有 $\dim\mathrm{Ker}\varphi\geq k=\dim\mathrm{Ker}\psi$. 由于 φ,ψ 的地位是对称的, 故同理可证 $\dim\mathrm{Ker}\psi\geq\dim\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\mathrm{Ker}\psi=k$, 并且 $\boldsymbol{e}_{k+1},\boldsymbol{e}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基. 因为 $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\psi$, 故 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{2k}$

组成 V 的一组基. 现将基向量排列如下:

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{k+1}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_{k+2}, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{2k}.$$

不难验证, 在这组基下 φ, ψ 的表示矩阵即为所求.

□

1.5 像空间和核空间

命题 1.17

设 φ 是向量空间 V 上的线性变换, 则

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1} \supseteq \cdots,$$

$$\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^n \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq V.$$

证明 由像空间和核空间的定义易证. □

例题 1.10 设线性空间 V 上的线性变换 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

求 φ 的核空间与像空间 (用基的线性组合来表示).

证明 像空间通过坐标向量同构于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的子空间, 通过计算可得 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 2, 且 $\boldsymbol{A}$ 的第一、第二列向量线性无关, 于是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的基的坐标向量为 $(1,-1,1,2)', (0,2,2,-2)'$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi = k_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) + k_2(2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4)$. 核空间通过坐标向量同构于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的解空间, 通过计算可得该方程组的基础解系为 $(-4,-3,2,0)', (-1,-2,0,1)'$, 此即 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基的坐标向量, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi = k_1(-4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) + k_2(-\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4)$. □

命题 1.18

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上的非零线性变换. 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0 (1 \leq i \leq k)$.

证明 因为 $\varphi_i \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 是 V 的真子空间. 由命题**??**可知, 有限个真子空间 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 不能覆盖全空间 V, 故必存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 不属于任意一个 $\mathrm{Ker}\varphi_i$, 从而结论得证. □

命题 1.19

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上互不相同的线性变换. 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}), \varphi_2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi_k(\boldsymbol{\alpha})$ 互不相同.

证明 令 $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j (1 \leq i < j \leq k)$, 则 φ_{ij} 是 V 上的非零线性变换. 由命题 1.18可知, 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, 即 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \neq \varphi_j(\boldsymbol{\alpha}) (1 \leq i < j \leq k)$, 从而结论得证. □

命题 1.20

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \cdots$.

证明 证法一 (代数方法): 由秩的不等式可得

$$n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) \geq \cdots \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) \geq 0.$$

上述 $n+2$ 个整数都在 $[0, n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0, n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1})$. 对任意的

$k \geq m$, 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k),$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$ 对任意的 $k \geq m$ 成立, 结论得证.

证法二 (几何方法): 令 φ 为在 n 维列向量空间上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导的线性变换, 则 φ 在标准基下的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$, 并且不难发现对 $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k$ 在标准基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}^k$. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k) = \dim \mathrm{Im}\varphi^k$, 故原命题等价于 $\dim \mathrm{Im}\varphi^n = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+2} = \cdots$. 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geq m, \mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面, $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\boldsymbol{\beta})) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geq m$ 成立, 取维数后即得结论. □

推论 1.5

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则一定存在整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+2}) = \cdots$.

(2) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 则必存在整数 $m \in [0,n]$, 使得

$$\dim \mathrm{Im}\varphi^m = \dim \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

证明

(1) 证法一 (代数方法): 由秩的不等式可得

$$n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) \geq \cdots \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) \geq 0.$$

上述 $n+2$ 个整数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1})$. 对任意的 $k \geq m$, 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k),$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$ 对任意的 $k \geq m$ 成立, 结论得证.

证法二 (几何方法): 令 φ 为在 n 维列向量空间上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导的线性变换, 则 φ 在标准基下的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$, 并且不难发现对 $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k$ 在标准基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}^k$. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k) = \dim \mathrm{Im}\varphi^k$, 故原命题等价于 $\dim \mathrm{Im}\varphi^n = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+2} = \cdots$. 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geq m, \mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面, $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\boldsymbol{\beta})) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geq m$ 成立, 取维数后即得结论.

(2) 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geq m, \mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面, $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$,

从而

$$\alpha = \varphi^k(\beta) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\gamma)) = \varphi^{k+1}(\gamma) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geq m$ 成立, 取维数后即得结论.

□

命题 1.21

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在整数 $m \in [0, n]$, 使得

$$\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \cdots, \mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^{m+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{m+2} = \cdots, V = \mathrm{Im}\varphi^m \oplus \mathrm{Ker}\varphi^m.$$

证明 根据推论 1.5(2)可知, 存在整数 $m \in [0, n]$, 使得

$$\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

注意到对任意的正整数 i,$\mathrm{Ker}\varphi^i \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{i+1}$. 再由维数公式可知, 对任意的 $i \geq m$,$\dim \mathrm{Ker}\varphi^i = \dim V - \dim \mathrm{Im}\varphi^i = n - \dim \mathrm{Im}\varphi^m$ 是一个不依赖于 i 的常数, 因此由命题**??**可得

$$\mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^{m+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

若 $\alpha \in \mathrm{Im}\varphi^m \cap \mathrm{Ker}\varphi^m$, 则 $\alpha = \varphi^m(\beta)$,$\varphi^m(\alpha) = 0$. 于是 $0 = \varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$, 即 $\beta \in \mathrm{Ker}\varphi^{2m} = \mathrm{Ker}\varphi^m$, 从而 $\alpha = \varphi^m(\beta) = 0$, 这证明了 $\mathrm{Im}\varphi^m \cap \mathrm{Ker}\varphi^m = 0$. 又对 V 中任一向量 α, 因为 $\varphi^m(\alpha) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{2m}$, 所以 $\varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$, 其中 $\beta \in V$. 我们有分解式

$$\alpha = \varphi^m(\beta) + (\alpha - \varphi^m(\beta)).$$

注意到 $\varphi^m(\alpha - \varphi^m(\beta)) = 0$, 即 $\alpha - \varphi^m(\beta) \in \mathrm{Ker}\varphi^m$, 这就证明了 $V = \mathrm{Im}\varphi^m + \mathrm{Ker}\varphi^m$. 因此

$$V = \mathrm{Im}\varphi^m \oplus \mathrm{Ker}\varphi^m.$$

□

注 也可不证明 $\mathrm{Im}\varphi^m \cap \mathrm{Ker}\varphi^m = 0$, 改由线性映射维数公式$\dim \mathrm{Im}\varphi^m + \dim \mathrm{Ker}\varphi^m = n$ 直接得到 $V = \mathrm{Im}\varphi^m \oplus \mathrm{Ker}\varphi^m$.

命题 1.22

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,φ 是 V 上的线性变换, 证明以下 9 个结论等价:

(1) $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$;

(2) $V = \mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Im}\varphi$;

(3) $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = 0$;

(4) $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi^2$, 或等价地,$\dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathrm{Ker}\varphi^2$;

(5) $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi^2 = \mathrm{Ker}\varphi^3 = \cdots$, 或等价地,$\dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathrm{Ker}\varphi^2 = \dim \mathrm{Ker}\varphi^3 = \cdots$;

(6) $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2$, 或等价地,$\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(\varphi^2)$;

(7) $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2 = \mathrm{Im}\varphi^3 = \cdots$, 或等价地,$\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(\varphi^2) = \mathrm{r}(\varphi^3) = \cdots$;

(8) $\mathrm{Ker}\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 U, 使得 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus U$(实际上,$U = \mathrm{Im}\varphi$);

(9) $\mathrm{Im}\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 W, 使得 $V = \mathrm{Im}\varphi \oplus W$(实际上,$W = \mathrm{Ker}\varphi$).

证明 由直和的定义可知 (1) $\Leftrightarrow$ (2) + (3), 于是 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) 都是显然的. 根据交空间维数公式和线性映射维数公式可知

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Im}\varphi) &= \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi - \dim(\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi)\\ &= \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi),\end{aligned}$$

于是 (2) $\Leftrightarrow$ (3) 成立, 从而前 3 个结论两两等价.

(3) $\Rightarrow$ (4): 显然 $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2$ 成立. 任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi^2$, 则 $\varphi(\alpha) \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = 0$, 于是 $\varphi(\alpha) = 0$, 即 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$ 也成立, 故 (4) 成立.

(4) $\Rightarrow$ (3): 任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi$, 则存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \varphi(\beta)$, 于是 $0 = \varphi(\alpha) = \varphi^2(\beta)$, 即 $\beta \in \mathrm{Ker}\varphi^2 = \mathrm{Ker}\varphi$,

从而 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\boldsymbol{\beta}) = 0$,(3) 成立.

(5) $\Rightarrow$ (4) 是显然的, 下证 (4) $\Rightarrow$ (5): 设 $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ 已对正整数 k 成立, 先证 $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ 也成立, 然后用归纳法即得结论. $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ 是显然的. 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$, 即 $0 = \varphi^{k+2}(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi^{k+1}(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1} = \mathrm{Ker}\varphi^k$, 从而 $\varphi^{k+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi^k(\varphi(\boldsymbol{\alpha})) = 0$, 即 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi^{k+2} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ 也成立.

(3) $\Leftrightarrow$ (6): 考虑 φ 在不变子空间 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的限制变换 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi} : \mathrm{Im}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi$, 由限制的定义可知它的核等于 $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi$, 它的像等于 $\mathrm{Im}\varphi^2$. 由于有限维线性空间上的线性变换是单射当且仅当它是满射, 当且仅当它是同构, 故 (3) $\Leftrightarrow$ (6) 成立.

(7) $\Rightarrow$ (6) 是显然的, 下证 (6) $\Rightarrow$ (7): 设 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 已对正整数 k 成立, 先证 $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$ 也成立, 然后用归纳法即得结论. $\mathrm{Im}\varphi^{k+2} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 是显然的. 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$, 即存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^k(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 于是 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\beta}) = \varphi(\varphi^k(\boldsymbol{\beta})) = \varphi(\varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+2}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$ 也成立.

(1) $\Rightarrow$ (8) 是显然的, 下证 (8) $\Rightarrow$ (1). 我们先证 $\mathrm{Im}\varphi \subseteq U$: 任取 $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\varphi$, 由直和分解可设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}$, 其中 $\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}\varphi, \boldsymbol{u} \in U$, 则由 U 的 $\varphi-$ 不变性可得 $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) + \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}) \in U$. 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\varphi \oplus U) = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim U \geq \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V,$$

从而只能是 $U = \mathrm{Im}\varphi$, 于是 (1) 成立.

(1) $\Rightarrow$ (9) 是显然的, 下证 (9) $\Rightarrow$ (1). 我们先证 $W \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$: 任取 $\boldsymbol{w} \in W$, 则由 W 的 $\varphi-$ 不变性可得 $\varphi(\boldsymbol{w}) \in \mathrm{Im}\varphi \cap W = 0$, 即有 $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\varphi$. 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\varphi \oplus W) = \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim W \leq \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V,$$

从而只能是 $W = \mathrm{Ker}\varphi$, 于是 (1) 成立. □

命题 1.23

设 U, W 是 n 维线性空间 V 的子空间且 $\dim U + \dim W = \dim V$. 求证: 存在 V 上的线性变换 φ, 使得 $\mathrm{Ker}\varphi = U, \mathrm{Im}\varphi = W$.

证明 取 U 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 再取 W 的一组基 $\boldsymbol{f}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_n$. 定义 φ 为 V 上的线性变换, 它在基上的作用为:$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}(1 \leq i \leq m), \varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{f}_j(m+1 \leq j \leq n)$. 注意到 $\boldsymbol{f}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 是 W 的一组基, 故通过简单的验证可得 $\mathrm{Ker}\varphi = U, \mathrm{Im}\varphi = W$. □

例题 1.11 设 $V = M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵全体构成的线性空间,$\varphi : V \to \mathbb{F}$ 是迹函数, 即对任意的 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in V$,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

求证:φ 是 V 到一维空间 $\mathbb{F}$ 上的线性映射, 并求 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的维数及其一组基.

证明 容易验证 φ 是线性映射且是映上的. 注意到 V 是 n^2 维线性空间, 由线性映射的维数公式可知

$$\dim\mathrm{Ker}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathbb{F} = n^2 - 1.$$

记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 n 阶基础矩阵, 即第 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵. 容易验证下列 $n^2 - 1$ 个矩阵迹为零且线性无关, 因此它们组成了 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基:

$$\boldsymbol{E}_{ij}(i \neq j), \boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{22} - \boldsymbol{E}_{33}, \cdots, \boldsymbol{E}_{n-1,n-1} - \boldsymbol{E}_{nn}.$$

□

例题 1.12 设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的线性映射, 且 V 的维数大于 U 的维数, 求证:$\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$.

证明 由线性映射的维数公式

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi,$$

以及 $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim U < \dim V$ 可得 $\dim \mathrm{Ker}\varphi > 0$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$. □

例题 1.13 设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的满线性映射, 求证: 必存在 V 的子空间 W, 使得 $V = W \oplus \mathrm{Ker}\varphi$, 且 φ 在 W 上的限制是 W 到 U 上的线性同构.

证明 证法一:取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$,并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 令 $W=L(\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 则显然 $V=W\oplus\mathrm{Ker}\varphi$. 由推论 1.4可知,$\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi=U$ 的一组基, 故 φ 在 W 上的限制将 W 的一组基 $\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 映射为 U 的一组基 $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}),\cdots,\varphi(\boldsymbol{e}_n)$, 从而由命题 1.7可知 $\varphi|_W$ 必为线性同构.

证法二: 取 W 为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 在 V 中的补空间. 对任意的 $\boldsymbol{u}\in U$, 由于 φ 是映上的, 故存在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_1$, 其中 $\boldsymbol{w}\in W,\boldsymbol{v}_1\in\mathrm{Ker}\varphi$, 使得 $\boldsymbol{u}=\varphi(\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{w})$, 于是 φ 在 W 上的限制也是映上的, 故 $\dim U=\dim\mathrm{Im}\varphi|_W$. 另一方面, 由维数公式可知,$\dim W=\dim V-\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\mathrm{Im}\varphi=\dim U$. 再对 φ 在 W 上的限制用线性映射维数公式可知,$\dim\mathrm{Ker}\varphi|_W=\dim W-\dim\mathrm{Im}\varphi|_W=\dim U-\dim\mathrm{Im}\varphi|_W=0$. 从而它必是单映射, 于是 φ 在 W 上的限制是 W 到 U 上的线性同构. □

例题 1.14 设 φ 是有限维线性空间 V 到 V' 的线性映射,U 是 V' 的子空间且 $U\subseteq\mathrm{Im}\varphi$, 求证:$\varphi^{-1}(U)=\{\boldsymbol{v}\in V|\varphi(\boldsymbol{v})\in U\}$ 是 V 的子空间, 且

$$\dim U+\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\varphi^{-1}(U).$$

笔记 注意对线性映射做限制这个操作.

证明 容易验证 $\varphi^{-1}(U)$ 是 V 的子空间. 将 φ 限制在 $\varphi^{-1}(U)$ 上, 它是到 U 上的线性映射. 因为 $\mathbf{0}\in U$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\varphi^{-1}(U)$. 从而 $\mathrm{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}=\mathrm{Ker}\varphi\cap\varphi^{-1}(U)=\mathrm{Ker}\varphi$, 又显然 $\mathrm{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}=U$. 再对 φ 在 $\varphi^{-1}(U)$ 上的限制用线性映射维数公式即得

$$\dim\varphi^{-1}(U)=\dim\mathrm{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}+\dim\mathrm{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}=\dim U+\dim\mathrm{Ker}\varphi.$$

□

注 $\varphi^{-1}(U)=\{\boldsymbol{v}\in V|\varphi(\boldsymbol{v})\in U\}$ 称为 U 在线性映射 φ 下的原像集.

命题 1.24

设 U 是有限维线性空间 V 的子空间,φ 是 V 上的线性变换, 求证:

(1) $\dim U-\dim\mathrm{Ker}\varphi\le\dim\varphi(U)\le\dim U$;

(2) $\dim\varphi^{-1}(U)\le\dim U+\dim\mathrm{Ker}\varphi$.

证明

(1) 注意到当 φ 限制在 U 上时,$\mathrm{Ker}(\varphi|_U)=U\cap\mathrm{Ker}\varphi$, 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim U=\dim(U\cap\mathrm{Ker}\varphi)+\dim\varphi(U)\leqslant\dim\mathrm{Ker}\varphi+\dim\varphi(U).$$

于是

$$\dim U-\dim\mathrm{Ker}\varphi\le\dim\varphi(U),$$

而由线性映射维数公式, 可知 $\dim U=\dim\mathrm{Ker}\varphi|_U+\dim\varphi(U)$. 进而 $\dim\varphi(U)\le\dim U$.

(2) 设 $\overline{\varphi}$ 是线性变换 φ 在子空间 $\varphi^{-1}(U)$ 上的限制, 则 $\mathrm{Im}\overline{\varphi}=U\cap\mathrm{Im}\varphi$. 因为 $\mathbf{0}\in U$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\varphi^{-1}(U)$. 从而 $\mathrm{Ker}\overline{\varphi}=\mathrm{Ker}\varphi\cap\varphi^{-1}(U)=\mathrm{Ker}\varphi$. 由线性映射的维数公式可得

$$\dim\varphi^{-1}(U)=\dim(U\cap\mathrm{Im}\varphi)+\dim\mathrm{Ker}\varphi.$$

显然, 由 $\dim(U\cap\mathrm{Im}\varphi)\le\dim U$ 可推出

$$\dim\varphi^{-1}(U)\le\dim U+\dim\mathrm{Ker}\varphi.$$

□

例题 1.15 证明: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶方阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n\le\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\le\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

证明 令 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维列向量空间, 则将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 看成是 V 上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 乘法诱导的线性变换. 又令 $U=\boldsymbol{B}(V)$, 注意到 $\boldsymbol{A}(U)=\boldsymbol{AB}(V)$, 故 $\dim\boldsymbol{A}(U)=\dim\boldsymbol{AB}(V)=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$,$\dim\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 即线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间维数. 而 $\dim U=\dim\boldsymbol{B}(V)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 由命题 1.24(1)的结论, 可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n=\dim U-\dim\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}\leqslant\dim\boldsymbol{A}(U)=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\dim U=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

又显然有 $\dim \boldsymbol{A}(U) \le \dim \boldsymbol{A}(V)$, 故得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. □

1.6 不变子空间

例题 1.16 设线性空间 V 上的线性变换 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求证:$U = L(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ 和 $W = L(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4)$ 都是 φ 的不变子空间.

证明 要证明由若干个向量生成的子空间是某个线性变换的不变子空间, 通常只需证明这些向量在线性变换的作用下仍在这个子空间中即可. 因此只需证明这些子空间的一组基在线性变换的作用下仍在这个子空间中即可. 注意到 $\varphi(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)$ 的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即 $\varphi(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \in U$. 同理可计算出

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4) &= (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) + (\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4) \in U, \\ \varphi(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) &= (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + (\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4) \in U, \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) &= \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4 \in W, \end{aligned}$$

因此结论成立. □

命题 1.25

设 V_1, V_2 是 V 上线性变换 φ 的不变子空间, 任取 $V_0 \subset V$, 求证:,V_0,$V_1 \cap V_2$,$V_1 + V_2$ 也是 φ 的不变子空间.

证明 V_0 是 $\varphi-$ 不变子空间是显然的.

任取 $\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$, 则由 $\boldsymbol{v} \in V_i$ 可得 $\varphi(\boldsymbol{v}) \in V_i(i = 1, 2)$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{v}) \in V_1 \cap V_2$, 从而 $V_1 \cap V_2$ 是 $\varphi-$ 不变子空间.

任取 $\boldsymbol{v} \in V_1 + V_2$, 则 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, 其中 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, 故 $\varphi(\boldsymbol{v}_i) \in V_i(i = 1, 2)$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) + \varphi(\boldsymbol{v}_2) \in V_1 + V_2$, 从而 $V_1 + V_2$ 是 $\varphi-$ 不变子空间. □

命题 1.26

设 φ 是 $n(n \ge 2)$ 维线性空间 V 上的线性变换, 证明以下 $n + 1$ 个结论等价:

(1) V 的任一 1 维子空间都是 $\varphi-$ 不变子空间;

......

(r) V 的任一 r 维子空间都是 $\varphi-$ 不变子空间;

......

(n - 1) V 的任一 $n - 1$ 维子空间都是 $\varphi-$ 不变子空间;

(n)V 本身就是 $\varphi-$ 不变子空间;

(n+1) φ 是纯量变换.

证明 (n+1) $\Rightarrow$ (n) 是显然的. 注意到当 $1 \le i \le n - 2$ 时, 任一 i 维子空间 V_0 都可表示为两个 $i + 1$ 维子空间 V_1, V_2 的交; 而 V 的任意 $n - 1$ 维子空间都是 V 的子空间. 于是由命题 1.25可知:(n) $\Rightarrow$ (n - 1) $\Rightarrow$ (n - 2) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (1) 显然成立, 剩下只要证明 (1) $\Rightarrow$ (n+1) 即可. 取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 由 (1) 可知 $L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), \cdots, L(\boldsymbol{e}_n)$ 都是 $\varphi-$ 不变子空间, 设 $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i (1 \le i \le n)$. 只要证明 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ 即可得到 φ 为纯量变换. 用反证法, 不妨

设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则由 $L(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间可设 $\varphi(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\lambda_0(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$, 于是 $(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-\lambda_0)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$, 从而由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 线性无关可知 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$, 矛盾. □

命题 1.27

设 φ,ψ 是线性空间 V 上的线性变换且 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 求证:$\mathrm{Im}\varphi$ 及 $\mathrm{Ker}\varphi$ 都是 ψ 的不变子空间. 同理,$\mathrm{Im}\psi$ 及 $\mathrm{Ker}\psi$ 也都是 φ 的不变子空间.

笔记 显然 $\mathrm{Im}\varphi$ 及 $\mathrm{Ker}\varphi$ 都是 φ 自身的不变子空间,$\mathrm{Im}\psi$ 及 $\mathrm{Ker}\psi$ 也都是 ψ 自身的不变子空间.

证明 任取 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Im}\varphi$, 即 $\boldsymbol{v}=\varphi(\boldsymbol{u})$, 则 $\psi(\boldsymbol{v})=\psi\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi\psi(\boldsymbol{u})\in\mathrm{Im}\varphi$, 即 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 ψ 的不变子空间.

任取 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\varphi(\boldsymbol{v})=0$, 则 $\varphi\psi(\boldsymbol{v})=\psi\varphi(\boldsymbol{v})=0$. 因此,$\psi(\boldsymbol{v})\in\mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 ψ 的不变子空间. □

命题 1.28

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,W 为 $\varphi-$ 不变子空间,φ 在 W 上的限制为 $\varphi|_W$, 则 $\varphi|_W$ 的像集与原像集相同且均为 W, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$,$(\varphi|_W)^k$ 有意义并且 $\varphi^k|_W=(\varphi|_W)^k$.

证明 因为 W 为 $\varphi-$ 不变子空间, 所以 $\varphi|_W$ 的像集与原像集相同且均为 W 是显然的. 并且对 $\forall\alpha\in W$, 有 $\varphi|_W(\alpha)\in W$. 因此对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $(\varphi|_W)^k(\alpha)\in W$. 故 $(\varphi|_W)^k$ 有意义. 下证 $\varphi^k|_W=(\varphi|_W)^k$.

对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 显然 $\varphi^k|_W$ 和 $(\varphi|_W)^k$ 的定义域都是 W. 从而对 $\forall a\in W$, 有

$$\varphi^k|_W(a)=\varphi^k(a),$$
$$(\varphi|_W)^k(a)=(\varphi|_W)^{k-1}\varphi|_W(a)=(\varphi|_W)^{k-1}\varphi(a)=\cdots=\varphi^k(a).$$

因此 $\varphi^k|_W(a)=(\varphi|_W)^k(a)=\varphi^k(a)$. 故 $\varphi^k|_W=(\varphi|_W)^k$. □

命题 1.29

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的自同构,W 为 $\varphi-$ 不变子空间,φ 在 W 上的限制为 $\varphi|_W$, 则 $\varphi|_W$ 的像集与原像集相同且均为 W,$\varphi|_W$ 是 W 上的自同构并且 $(\varphi|_W)^{-1}=\varphi^{-1}|_W$.

证明

□

例题 1.17 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶幂零阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 求证:$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

注 因为 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}-$ 不变子空间, 所以 $\boldsymbol{A}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}(\mathrm{Im}\boldsymbol{B})\in\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$. 因此 $(\boldsymbol{A}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}})^k$ 有意义. 对于一般的限制 W,$(\boldsymbol{A}|_W)^k$ 不一定有意义. 见命题 1.28.

证明 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都看成是 $\mathbb{K}^n$ 上 (由矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 乘法诱导) 的线性变换, 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, 其中 k 为正整数. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 以及命题 1.27可知 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}-$ 不变子空间. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ 上的限制 $\boldsymbol{A}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$, 其像空间的维数 $\dim\boldsymbol{AB}(\mathbb{K}^n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\dim\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$, 故 $\boldsymbol{A}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$ 是 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ 上的满线性变换. 于是由命题 1.28和满射的复合仍是满射可知 $(\boldsymbol{A}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}})^k=\boldsymbol{A}^k|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{O}|_{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$ 也是 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ 上的满线性变换, 从而只能是 $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}=0$, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. □

命题 1.30

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的自同构, 若 W 是 φ 的不变子空间, 求证:W 也是 φ^{-1} 的不变子空间.

证明 将 φ 限制在 W 上, 得到 $\varphi: W\to W$. 它是 W 上的线性变换. 由于 φ 是单映射, 故它在 W 上的限制也是单映射, 从而由推论 1.3可知,φ 在 W 上的限制也是满映射, 即它是 W 上的自同构, 于是结合命题 1.29可知 $W=\varphi|_W(W)=\varphi(W)$, 对其两边同时取 φ^{-1} 可得 $\varphi^{-1}(W)=W$. 故结论得证. □

注 如果 V 是无限维线性空间, 则这个命题的结论一般并不成立. 例如,$V=\mathbb{K}[x^{-1},x]$ 是由数域 $\mathbb{K}$ 上的 Laurent 多项式 $f(x)=\sum\limits_{i=-m}^{n}a_ix^i(m,n\in\mathbb{N})$ 构成的线性空间,V 上的线性变换 φ,ψ 定义为 $\varphi(f(x))=xf(x)$,$\psi(f(x))=x^{-1}f(x)$. 显然,φ,ψ 互为逆映射, 从而都是自同构. 注意到 $W=\mathbb{K}[x]$ 是 V 的 $\varphi-$ 不变子空间, 但 W 显然不是 $\varphi^{-1}-$ 不变子空

间.

例题 1.18 设 V 是次数小于 n 的实系数多项式组成的线性空间,D 是 V 上的求导变换. 求证:D 的任一 $k(k \geq 1)$ 维不变子空间必是由 $\{1, x, \cdots, x^{k-1}\}$ 生成的子空间. 特别地, 向量 1 包含在 D 的任一非零不变子空间中.

证明 任取 D 的一个 $k(k \geq 1)$ 维不变子空间 V_0, 再取出 V_0 中次数最高的一个多项式 (不唯一)$f(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_l \neq 0$. 注意到 V_0 是 $D-$ 不变子空间, 由 $D^l f(x) = a_l l! \in V_0$ 可得 $1 \in V_0$; 由 $D^{l-1} f(x) = a_l l! x + a_{l-1}(l-1)! \in V_0$ 可得 $x \in V_0$; $\cdots$; 由 $Df(x) = a_l l x^{l-1} + a_{l-1}(l-1)x^{l-2} + \cdots + a_1 \in V_0$ 可得 $x^{l-1} \in V_0$; 最后由 $f(x) \in V_0$ 可得 $x^l \in V_0$. 因为 V_0 中所有多项式的次数都小于等于 l, 所以 $\{1, x, \cdots, x^l\}$ 构成了 V_0 的一组基, 于是 $k = \dim V_0 = l+1$, 即 $l = k-1$, 从而结论得证. □

例题 1.19 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,φ 在 V 的一组基下的表示矩阵为对角阵且主对角线上的元素互不相同, 求 φ 的所有不变子空间.

证明 设 φ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 互不相同, 则 $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = d_i \boldsymbol{e}_i$. 对任意的指标集 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$, 容易验证 $U = L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_r})$ 是 φ 的不变子空间. 注意到 $1, 2, \cdots, n$ 的子集共有 2^n 个 (空集对应于零子空间), 故上述形式的 $\varphi-$ 不变子空间共有 2^n 个. 下面我们证明 φ 的任一不变子空间都是上述不变子空间之一.

任取 φ 的非零不变子空间 U, 设指标集

$$I = \{i \in [1, n] | \text{存在某个} \boldsymbol{\alpha} \in U, \text{使得} \boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{e}_i + \cdots, \text{其中} c \neq 0\}.$$

因为 $U \neq 0$, 故 $I \neq \varnothing$, 不妨设 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$. 由指标集 I 的定义可知,$U \subseteq L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_r})$. 下面我们证明 $\boldsymbol{e}_{i_j} \in U (j = 1, 2, \cdots, r)$ 成立. 不失一般性, 我们只需证明 $\boldsymbol{e}_{i_1} \in U$ 即可. 由指标集 I 的定义可知, 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in U$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = c_1 \boldsymbol{e}_{i_1} + c_2 \boldsymbol{e}_{i_2} + \cdots + c_k \boldsymbol{e}_{i_k},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 都是非零常数. 将上式作用 φ^l, 可得

$$\varphi^l(\boldsymbol{\alpha}) = c_1 d_{i_1}^l \boldsymbol{e}_{i_1} + c_2 d_{i_2}^l \boldsymbol{e}_{i_2} + \cdots + c_k d_{i_k}^l \boldsymbol{e}_{i_k}, l = 1, 2, \cdots, k-1.$$

因此, 我们有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_k}) \begin{pmatrix} c_1 & c_1 d_{i_1} & \cdots & c_1 d_{i_1}^{k-1} \\ c_2 & c_2 d_{i_2} & \cdots & c_2 d_{i_2}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_k & c_k d_{i_k} & \cdots & c_k d_{i_k}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

上式右边的矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 由于 $|\boldsymbol{A}| = c_1 c_2 \cdots c_k \prod\limits_{1 \leq r < s \leq k} (d_{i_s} - d_{i_r}) \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, 从而

$$(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_k}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}))\boldsymbol{A}^{-1},$$

特别地,$\boldsymbol{e}_{i_1}$ 可以表示为 $\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 的线性组合. 因为 U 是 φ 的不变子空间, 故 $\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 都是 U 中的向量, 从而 $\boldsymbol{e}_{i_1} \in U$, 因此 $U = L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_r})$. 综上所述,$\varphi$ 的不变子空间共有 2^n 个. □

定理 1.6

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 上的线性变换,W 是 φ 的不变子空间. 若取 W 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r\}$, 再扩张为 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$, 则 φ 在这组基下的表示矩阵具有下列分块上三角矩阵的形状:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是一个 r 阶矩阵.

定理 1.7

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 上的线性变换,$V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是 φ 的不变子空间且 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$. 若

取 V_i 的基拼成 V 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 则 φ 在这组基下的表示矩阵具有下列分块对角矩阵的形状:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{mm} \end{pmatrix}.$$

命题 1.31

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,U 是 r 维 $\varphi-$ 不变子空间. 取 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\}$, 并扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 设 φ 在这组基下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 为分块上三角阵, 其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是 φ 在不变子空间 U 上的限制 $\varphi|_U$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\}$ 下的表示矩阵. 证明:φ 诱导的变换 $\overline{\varphi}(\boldsymbol{v}+U)=\varphi(\boldsymbol{v})+U$ 是商空间 V/U 上的线性变换, 并且在 V/U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_{r+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}_{22}$.

证明 由 U 是 $\varphi-$ 不变子空间容易验证 $\overline{\varphi}$ 的定义不依赖于 $U-$ 陪集代表元的选取, 从而是定义好的变换. $\overline{\varphi}$ 的线性由 φ 的线性即得. 由 φ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 再结合 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\cdots,\boldsymbol{e}_r\in U$ 及 U-陪集的性质 (2) 和商空间的加法和数乘的定义可得

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}\left(\boldsymbol{e}_{r+1}+U\right) &= \varphi\left(\boldsymbol{e}_{r+1}\right)+U=a_{1,r+1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_{r,r+1}\boldsymbol{e}_r+a_{r+1,r+1}\boldsymbol{e}_{r+1}+\cdots+a_{n,r+1}\boldsymbol{e}_n+U \\
&= a_{r+1,r+1}\boldsymbol{e}_{r+1}+\cdots+a_{n,r+1}\boldsymbol{e}_n+U=a_{r+1,r+1}\left(\boldsymbol{e}_{r+1}+U\right)+\cdots+a_{n,r+1}\left(\boldsymbol{e}_n+U\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{\varphi}(\boldsymbol{e}_n+U) &= a_{r+1,n}(\boldsymbol{e}_{r+1}+U)+\cdots+a_{n,n}(\boldsymbol{e}_n+U),
\end{aligned}$$

故 $\overline{\varphi}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_{r+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}_{22}$. □

1.7 幂等变换

定义 1.2 (幂等变换)

线性变换 φ 若满足 $\varphi^2=\varphi$, 则称为**幂等变换**.

定义 1.3 (投影变换)

设 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 为线性空间 V 关于子空间 $V_i(1\le i\le m)$ 的直和分解, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{v}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_m$, 其中 $\boldsymbol{v}_i\in V_i$. 定义 $\varphi_i:V\to V,\varphi_i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_i(1\le i\le m)$, 容易验证 φ_i 是 V 上的线性变换, 称为 V 到 V_i 上的**投影变换**.

命题 1.32 (投影变换的性质)

设 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 为线性空间 V 关于子空间 $V_i(1\le i\le m)$ 的直和分解,φ_i 为 V 到 V_i 上的投影变换. 投影变换 φ_i 满足如下性质:

(1) $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=\boldsymbol{0}(i\ne j),\boldsymbol{I}_V=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$;

(2) $\mathrm{Im}\varphi_i=V_i,\mathrm{Ker}\varphi_i=\bigoplus\limits_{j\ne i}V_j,V=\mathrm{Im}\varphi_i\oplus\mathrm{Ker}\varphi_i$.

(3) 投影变换 φ_i 都是幂等变换;

(4) 若取 V_i 的一组基拼成 V 的一组基, 则 φ_i 在这组基下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$, 其中有 $\dim V_i$ 个 1;

(5) $V = \mathrm{Im}\varphi_1 \oplus \mathrm{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\varphi_m$;

(6) $\mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\varphi_m = 0$.

笔记 提示: 两个集合相等等价于这两个集合相互包含.

证明

(1) 证明是显然的.

(2) 证明是显然的.

(3) 由 (1) 易得.

(4) 由 (2) 易得.

(5) 由 (2) 易知 $V = \mathrm{Im}\varphi_1 \oplus \mathrm{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\varphi_m$.

(6) 任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\varphi_m$. 由投影变换性质 (2), 可知 $\mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} V_j$. 于是对任意整数 $i, j \in [1, m]$ 且 $i \neq j$, 有 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi_i \cap \mathrm{Ker}\varphi_j = \bigoplus\limits_{k\neq i} V_k \cap \bigoplus\limits_{k\neq j} V_k$. 从而

$$\alpha = v_1 + \cdots + v_{i-1} + v_{i+1} + \cdots + v_m = u_1 + \cdots + u_{j-1} + u_{j+1} + \cdots + u_m,$$

其中 $v_k, u_k \in V_k$. 上式经整理可得 $v_j - u_i = \sum\limits_{k\neq i,j} (u_k - v_k) \in \bigoplus\limits_{k\neq i,j} V_k$. 又 $v_j - u_i \in V_i \oplus V_j$. 故 $v_j - u_i \in (V_i \oplus V_j) \cap \bigoplus\limits_{k\neq i,j} V_k$. 而由于 $V = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} V_k$, 因此 $(V_i \oplus V_j) \cap \bigoplus\limits_{k\neq i,j} V_k = \mathbf{0}$. 故 $v_j - u_i = \mathbf{0}$, 从而 $v_j = u_i \in V_i \cap V_j$. 又因为 $V_i \oplus V_j$, 所以 $V_i \cap V_j = \mathbf{0}$. 故 $v_j = u_i = \mathbf{0}$. 再由 i, j 的任意性可知,$v_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, \cdots, m$. 因此 $\alpha = \sum\limits_{k\neq i} v_k = \mathbf{0}$. 故 $\mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\varphi_m = \mathbf{0}$.

□

命题 1.33

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的幂等变换, 证明:$V = U \oplus W$, 其中 $U = \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}_V - \varphi)$,$W = \mathrm{Im}(\boldsymbol{I}_V - \varphi) = \mathrm{Ker}\varphi$, 且 φ 就是 V 到 U 上的投影变换.

笔记 由上述命题可知**n 维线性空间 V 上的幂等变换 φ 也是 V 到 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换**. 于是由命题 1.33和命题 1.32可知, 投影变换可以看作幂等变换, 幂等变换也可以看作投影变换.(即幂等变换和投影变换等价)

证明 因为 $\varphi^2 = \varphi$, 故 $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$,$\mathrm{Im}(\boldsymbol{I} - \varphi) \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$,$(\boldsymbol{I} - \varphi)(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{Ker}\varphi$, 于是 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{I} - \varphi)(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$, 从而 $V = \mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$. 任取 $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$, 则 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{I} - \varphi)(\boldsymbol{\beta}) + \varphi(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi) = 0$. 因此,$V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$. 特别地, 由维数公式可得 $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$,$\dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{I} - \varphi) = \dim \mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$,$\mathrm{Im}(\boldsymbol{I} - \varphi) = \mathrm{Ker}\varphi$.

令 $U = \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{I} - \varphi)$,$W = \mathrm{Im}(\boldsymbol{I} - \varphi) = \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $V = U \oplus W$. 注意到对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,$\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{I} - \varphi)(\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in U$,$(\boldsymbol{I} - \varphi)(\boldsymbol{\alpha}) \in W$, 故 φ 就是 V 到 U 上的投影变换. □

推论 1.6

对线性空间 V 上的幂等变换 φ, 总存在 V 的一组基 (它由 $\mathrm{Im}\varphi$ 的基和 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基拼成), 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为下列对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 r 阶单位矩阵,r 等于 $\dim \mathrm{Im}\varphi$, 即 φ 的像空间的维数.

证明 由这个命题 1.33和投影变换的性质容易证明. □

命题 1.34

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶幂等矩阵, 求证:

(1) 存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 看成是 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上 (由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导) 的线性变换, 则它是幂等变换, 因此由推论 1.6即得 (1).

注意到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 故 (2) 也成立. □

例题 1.20 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶幂等矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同, 求证: 必存在 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

证明 由命题 1.34可知,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均相似于矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. □

命题 1.35

设 φ,ψ 是 n 维线性空间 V 上的幂等线性变换, 求证:

(1) $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$ 的充要条件是 $\varphi\psi=\psi,\psi\varphi=\varphi$;

(2) $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$ 的充要条件是 $\varphi\psi=\varphi,\psi\varphi=\psi$.

笔记 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

证明 (1) 由 $\psi=\varphi\psi$ 可得 $\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$. 同理由 $\varphi=\psi\varphi$ 可得 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Im}\psi$. 因此 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$.

反之, 若 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V,\psi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Im}\psi=\mathrm{Im}\varphi$, 故存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 使得 $\psi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi(\boldsymbol{\beta})$. 注意到 $\varphi^2=\varphi$, 故 $\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^2(\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\beta})=\psi(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $\varphi\psi=\psi$. 同理可证 $\psi\varphi=\varphi$.

(2) 设 $\varphi\psi=\varphi,\psi\varphi=\psi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$, 有 $\psi(\boldsymbol{\alpha})=\psi\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\psi$, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$. 同理可证 $\mathrm{Ker}\psi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$, 因此 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$.

反之, 设 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\psi(\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha}))=\psi(\boldsymbol{\alpha})-\psi^2(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{0}$, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $\varphi=\varphi\psi$. 同理可证 $\psi\varphi=\psi$. □

命题 1.36

设 φ,ψ 是 n 维线性空间 V 上的幂等线性变换, 求证:

(1) $\varphi+\psi$ 是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$;

(2) $\varphi-\psi$ 是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$.

笔记 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

证明 充分性容易验证, 下面证明必要性.

(1) 若 $(\varphi+\psi)^2=\varphi+\psi$, 则 $\varphi\psi+\psi\varphi=0$, 即 $\varphi\psi=-\psi\varphi$. 将上式两边分别左乘及右乘 φ, 可得 $\varphi\psi\varphi=-\varphi\psi=-\psi\varphi$. 因此 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$.

(2) 若 $(\varphi-\psi)^2=\varphi-\psi$, 则 $\varphi\psi+\psi\varphi=2\psi$. 将上式两边分别左乘及右乘 φ, 可得 $\varphi\psi\varphi=\varphi\psi=\psi\varphi$. 因此 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$. □

命题 1.37

设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2=\varphi_i,\ \varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j),\ \mathrm{Ker}\varphi_1\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=0.$$

求证:$V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus\mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\varphi_m$.

证明 任取 $\alpha\in \mathrm{Im}\varphi_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}\mathrm{Im}\varphi_j)$, 设 $\alpha=\varphi_i(\beta)$, 其中 $\beta\in V$, 则 $\varphi_i(\alpha)=\varphi_i^2(\beta)=\varphi_i(\beta)=\alpha$. 又可设

$$\alpha=\varphi_1(\alpha_1)+\cdots+\varphi_{i-1}(\alpha_{i-1})+\varphi_{i+1}(\alpha_{i+1})+\cdots+\varphi_m(\alpha_m),$$

于是

$$\alpha=\varphi_i(\alpha)=\varphi_i(\varphi_1(\alpha_1)+\cdots+\varphi_{i-1}(\alpha_{i-1})+\varphi_{i+1}(\alpha_{i+1})+\cdots+\varphi_m(\alpha_m))=0.$$

因此 $\mathrm{Im}\varphi_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}\mathrm{Im}\varphi_j)=0$.

对 V 中任一向量 α 以及任意的 i, 有

$$\varphi_i(\alpha-(\varphi_1(\alpha)+\cdots+\varphi_m(\alpha)))=\varphi_i(\alpha)-\varphi_i^2(\alpha)=0,$$

因此

$$\alpha-(\varphi_1(\alpha)+\cdots+\varphi_m(\alpha))\in \mathrm{Ker}\varphi_1\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=0,$$

从而 $\alpha-(\varphi_1(\alpha)+\cdots+\varphi_m(\alpha))=0$, 即 $\alpha=\varphi_1(\alpha)+\cdots+\varphi_m(\alpha)$, 于是 $V=\mathrm{Im}\varphi_1+\cdots+\mathrm{Im}\varphi_m$. 这就证明了 V 是 $\mathrm{Im}\varphi_1,\cdots,\mathrm{Im}\varphi_m$ 的直和. □

命题 1.38

设 $\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足:$\varphi^2=\varphi$ 且 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$. 求证:$\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$ 成立的充要条件是 $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j)$.

笔记 $\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$ 等价于 $\dim\mathrm{Im}\varphi=\dim\mathrm{Im}\varphi_1+\dim\mathrm{Im}\varphi_2+\cdots+\dim\mathrm{Im}\varphi_m$.

证明 证法一 (几何方法): 令 $V_0=\mathrm{Im}\varphi,V_i=\mathrm{Im}\varphi_i$, 则由 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$ 可得 $V_0\subseteq V_1+V_2+\cdots+V_m$.

先证充分性. 由 $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j)$ 可得 $\varphi_i=(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)\varphi_i=\varphi\varphi_i$, 故 $V_i\subseteq V_0$, 从而 $V_0=V_1+V_2+\cdots+V_m$. 要证上述和为直和, 只要证明零向量表示唯一即可. 设

$$\mathbf{0}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,\alpha_i=\varphi_i(v_i)\in V_i(1\leq i\leq m),$$

则 $\mathbf{0}=\varphi_i(\varphi_1(v_1))+\varphi_i(\varphi_2(v_2))+\cdots+\varphi_i(\varphi_m(v_m))=\varphi_i^2(v_i)=\varphi_i(v_i)=\alpha_i$. 因此 $V_0=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$. 两边同取维数即得 $\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$.

再证必要性. 由于 $V_0\subseteq V_1+V_2+\cdots+V_m$, 于是

$$\dim V_0\leq\dim(V_1+V_2+\cdots+V_m)\leq\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m,$$

故由 $\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$ 可得 $\dim V_0=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m$, 从而上式中的不等号只能取等号. 由命题**??**及直和的充要条件可知,$V_1+V_2+\cdots+V_m$ 是直和, 并且

$$V_0=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m.$$

因为 $\mathrm{Im}\varphi_i=V_i\subseteq V_0=\mathrm{Im}\varphi$, 故对 V 中任一向量 α, 存在 $\beta\in V$, 使得 $\varphi_i(\alpha)=\varphi(\beta)$, 从而

$$\begin{aligned}\varphi_i(\alpha)=\varphi(\beta)=\varphi^2(\beta)&=(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)\varphi(\beta)\\&=(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)\varphi_i(\alpha)\\&=\varphi_1\varphi_i(\alpha)+\varphi_2\varphi_i(\alpha)+\cdots+\varphi_m\varphi_i(\alpha).\end{aligned}$$

由直和表示的唯一性可知

$$\varphi_i^2(\alpha)=\varphi_i(\alpha),\varphi_j\varphi_i(\alpha)=0\ (j\neq i),$$

于是 $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j)$.

证法二 (代数方法):把问题转换成代数的语言: 设 $A,A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2=A$ 且 $A=A_1+A_2+\cdots+A_m$, 求证:$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)$ 成立的充要条件是 $A_i^2=A_i,A_iA_j=O\ (i\neq j)$.

先证充分性. 若 $A_i^2=A_i$, 则由命题 1.34可知 $\mathrm{r}(A_i)=\mathrm{tr}(A_i)$, 从而

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$

$$= \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_1) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m).$$

再证必要性. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵, 故由命题**??**可得 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 从而 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)$. 构造如下分块对角矩阵并对其实施分块初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} & & & & \\ & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & & & & \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ \boldsymbol{A}_2 & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_m & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ \boldsymbol{A}_2 & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_m & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1^2 & -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 & \cdots & -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2^2 & \cdots & -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_m - \boldsymbol{A}_m^2 \end{pmatrix}.$$

由 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)$ 可得最后一个矩阵的右下角部分必为零矩阵, 从而 $\boldsymbol{A}_i^2 = \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{O}\ (i \neq j)$. □

推论 1.7

若取 $\boldsymbol{I}_V$ 为 n 维线性空间 V 上的恒等变换, 并且此时线性变换 φ_i 满足 $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m = \boldsymbol{I}_n$. 如果下列条件之一成立:

(1) $\dim V = \dim \operatorname{Im}\varphi_1 + \dim \operatorname{Im}\varphi_2 + \cdots + \dim \operatorname{Im}\varphi_m$;

(2) $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0\ (i \neq j)$,

则 $V = \operatorname{Im}\varphi_1 \oplus \operatorname{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}\varphi_m$, 并且 φ_i 就是 V 到 $\operatorname{Im}\varphi_i$ 上的投影变换.

♡

证明 由命题 1.38可知条件 (1)(2) 等价, 并且由命题 1.38 证法一的必要性证明过程可直接由条件 (1) 推出 $V = \operatorname{Im}\varphi_1 \oplus \operatorname{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}\varphi_m$(直和的证明也可由条件 (2) 及投影变换的性质直接得到). 又因为幂等变换和投影变换等价, 故由条件 (2) 可直接得到 φ_i 就是 V 到 $\operatorname{Im}\varphi_i$ 上的投影变换. 因此结论得证. □