0.1 可解群和幂零群

定义 0.1

幺元为 1 的群 G 中的子群序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}.$$

若满足 $G_i \lhd G_{i-1}(2 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称之为**次正规序列**,$t$ 称为此序列的**长度**.$G_{i-1}/G_i(2 \leqslant i \leqslant t+1)$ 称为此序列的**因子**. 若在上述序列中还有 $G_i \lhd G(1 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称此序列为**正规序列**.
若两个次正规序列 (正规序列)

$$G = G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \cdots \supseteq G'_r \supseteq G'_{r+1} = \{1\},$$

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}$$

满足 $\forall G'_i(1 \leqslant i \leqslant r+1), \exists G_{i_j} = G'_i(1 \leqslant i_j \leqslant t+1)$, 则称此序列 $\{G_j\}$ 是序列 $\{G'_i\}$ 的**加细**. ♣

例题 0.1 $S_3 \supset A_3 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_3 的正规序列.
证明

□

例题 0.2 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的正规序列, 而 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \langle(12)(34)\rangle \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的次正规序列, 后者是前者作为次正规序列的加细.
证明

□

定义 0.2

在群 G 中分别归纳地定义 G 的子群序列 $\{G^{(k)}\}$,$\{\Gamma_k(G)\}$,$\{C_k(G)\}$ 为

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad k > 0;$$

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)], \quad k > 1;$$

$$C_0(G) = \{1\}, \quad C_k(G)/C_{k-1}(G) = C(G/C_{k-1}(G)), \quad k > 0.$$

分别称群 G 中序列

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots,$$

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots,$$

$$C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq C_2(G) \subseteq \cdots$$

为 G 的**导出列**、**降中心列**和**升中心列**.
若有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $G^{(k)} = \{1\}$, 则称 G 是**可解群**. 若有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$, 则称 G 是**幂零群**. ♣

注 显然有

$$G^{(0)} = G \supseteq [G, G] = G^{(1)}.$$

假设 $G^{(k-1)} \supseteq G^{(k)}$, 则由引理????可得

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \supseteq [G^{(k)}, G^{(k)}] = G^{(k+1)}.$$

故由数学归纳法知

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots.$$

因此 G 的导出列是良定义的.

显然有

$$\Gamma_1(G)=G\supseteq[G,G]=\Gamma_2(G).$$

假设 $\Gamma_{k-1}(G)\supseteq\Gamma_k(G)$, 则由引理**????**可得

$$\Gamma_k(G)=[G,\Gamma_{k-1}(G)]\supseteq[G,\Gamma_k(G)]=\Gamma_{k+1}(G).$$

故由数学归纳法知

$$G=\Gamma_1(G)\supseteq\Gamma_2(G)\supseteq\cdots.$$

因此 G 的降中心列是良定义的.

由定理**????**知 $C_1(G)=C(G)\lhd G$. 设 π_1 是 G 到 $G/C_1(G)$ 上的自然同态. 令

$$C_2(G)=\pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))),$$

则由定理**????**知 $\pi_1(C_2(G))=C(G/C_1(G))\lhd G/C_1(G)$, 再由定理**????**知 $C_2(G)\lhd\pi_1^{-1}(G/C_1(G))=G$. 因为 $\pi_1(C_1(G))=\{1\}\subseteq C(G/C_1(G))$, 所以

$$C_1(G)\subseteq\pi_1^{-1}(C(G/C_1(G)))=C_2(G).$$

从而由命题**????**知 $C_1(G)\lhd C_2(G)$. 将 π_1 看作限制在 $C_2(G)$ 上的同态, 则由群的同态基本定理知

$$C_2(G)/C_1(G)=C_2(G)/\ker\pi_1|_{C_2(G)}\cong\pi_1|_{C_2(G)}(C_2(G))=C(G/C_1(G)).$$

因此

$$C_2(G)/C_1(G)=C(G/C_1(G)).$$

再令 π_2 是 G 到 $G/C_2(G)$ 上的自然同态, 则

$$C_3(G)=\pi_2^{-1}(C(G/C_2(G))),$$

同理可得

$$C_2(G)\lhd C_3(G),\quad C_3(G)/C_2(G)=C(G/C_2(G)).$$

如此进行下去, 即得所有 $C_k(G)$. 因此 G 的升中心列是良定义的.

命题 0.1

(1) 若 G 是一个群, 则 $G^{(k_1+k_2)}=(G^{(k_1)})^{(k_2)},\Gamma_{k_1+k_2}(G)=\Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right),\ \forall k_1,k_2\in\mathbb{N}$.

(2) 若 A 是群 B 的子群, 则 $A^{(k)}\subseteq B^{(k)},\Gamma_k(A)\subseteq\Gamma_k(B),\ \forall k\in\mathbb{N}$.

(3) 若 f 是群 G 到群 B 的同态, 则 $(f(G))^{(k)}=f(G^{(k)}),\Gamma_k(f(G))=f(\Gamma_k(G)),\ \forall k\in\mathbb{N}$.

(4) 设 A,B 是两个群, 则

$$(nA\times B)^{(k)}=A^{(k)}\times B^{(k)},\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

$$\Gamma_k(A\times B)=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(5) 设 π_k 群是 G 到 $G/C_k(G)(k\in\mathbb{N})$ 上的自然同态, 则

$$C_{k+1}(G)=\pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(6) 设 G 是一个群, 则对 $\forall a\in G$, 有

$$a\in C_{k+1}(G)\Longleftrightarrow[a,b]\in C_k(G),\forall b\in G.$$

(7) 设 G 是一个群, 则

$$G^{(k+1)}\lhd G^{(k)},\quad G^{(k)}\lhd G,\quad k=0,1,\cdots.$$

$$\Gamma_{k+1}(G)\lhd\Gamma_k(G),\quad\Gamma_k(G)\lhd G,\quad k=0,1,\cdots.$$

$$C_k(G)\lhd C_{k+1}(G),\quad C_k(G)\lhd G,\quad k=0,1,\cdots.$$

♠

证明

(1) 对 $\forall k_1 \in \mathbb{N}$, 都有

$$G^{(k_1+1)} = [G^{(k_1)}, G^{(k_1)}] = (G^{(k_1)})^{(1)}.$$

假设 $G^{(k_1+k_2-1)} = (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}$, 则

$$G^{(k_1+k_2)} = [G^{(k_1+k_2-1)}, G^{(k_1+k_2-1)}] = [(G^{(k_1)})^{(k_2-1)}, (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}] = (G^{(k_1)})^{(k_2)}.$$

故由数学归纳法知

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由 k_1 的任意性可得

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

对 $\forall k_1 \in \mathbb{N}$, 都有

$$\Gamma_{k_1+1}(G) = \left[G, \Gamma_{k_1}(G)\right] = \Gamma_1\left(\Gamma_{k_1}(G)\right).$$

假设 $\Gamma_{k_1+k_2-1}(G) = \Gamma_{k_2-1}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right)$, 则

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \left[G, \Gamma_{k_1+k_2-1}(G)\right] = \left[G, \Gamma_{k_2-1}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right)\right] = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right), \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由 k_1 的任意性可得

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right), \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

(2) 由条件知 $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$. 假设 $A^{(k-1)} \subseteq B^{(k-1)}$, 则由引理**????**知

$$A^{(k)} = \left[A^{(k-1)}, A^{(k-1)}\right] \subseteq \left[B^{(k-1)}, B^{(k-1)}\right] = B^{(k)}.$$

故由数学归纳法知

$$A^{(k)} \subseteq B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由条件知 $\Gamma_1(A) = A \subseteq B = \Gamma_1(B)$. 假设 $\Gamma_{k-1}(A) \subseteq \Gamma_{k-1}(B)$, 则由引理**????**知

$$\Gamma_k(A) = [A, \Gamma_{k-1}(A)] \subseteq [B, \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(3) 显然 $f\left(G^{(0)}\right) = f(G) = (f(G))^{(0)}$. 假设 $f\left(G^{(k-1)}\right) = (f(G))^{(k-1)}$. 任取 $f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f\left(\left[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\right]\right) = f\left(G^{(k)}\right)$, 则 $a, b \in G^{(k-1)}$, 进而

$$f(a), f(b) \in f\left(G^{(k-1)}\right) = (f(G))^{(k-1)}.$$

从而

$$f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) = f(a)^{-1} f(b)^{-1} f(a) f(b) \in \left[(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}\right] = (f(G))^{(k)}.$$

故 $f\left(G^{(k)}\right) \subseteq (f(G))^{(k)}$. 再任取 $f(a)^{-1} f(b)^{-1} f(a) f(b) \in \left[(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}\right] = (f(G))^{(k)}$, 则

$$f(a), f(b) \in (f(G))^{(k-1)} = f\left(G^{(k-1)}\right),$$

进而由命题**????**知 $a, b \in G^{(k-1)}$. 从而

$$f(a)^{-1} f(b)^{-1} f(a) f(b) = f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f\left(\left[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\right]\right) = f\left(G^{(k)}\right).$$

故 $f\left(G^{(k)}\right) \supseteq (f(G))^{(k)}$. 因此 $f\left(G^{(k)}\right) = (f(G))^{(k)}$. 故由数学归纳法知 $f\left(G^{(k)}\right) = (f(G))^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.
显然 $\Gamma_1(f(G)) = f(G) = f(\Gamma_1(G))$. 假设 $\Gamma_{k-1}(f(G)) = f(\Gamma_{k-1}(G))$. 任取 $f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f([G, \Gamma_{k-1}(G)]) =$

$f(\Gamma_k(G))$, 则 $a\in G, b\in\Gamma_{k-1}(G)$, 进而

$$f(a)\in f(G),\quad f(b)\in f(\Gamma_{k-1}(G))=\Gamma_{k-1}(f(G)).$$

从而

$$f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right)=f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b)\in\left[f(G),\Gamma_{k-1}(f(G))\right]=\Gamma_k(f(G)).$$

因此 $f(\Gamma_k(G))\subseteq\Gamma_k(f(G))$. 再任取 $f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b)\in\left[f(G),\Gamma_{k-1}(f(G))\right]=\Gamma_k(f(G))$, 则

$$f(a)\in f(G),\quad f(b)\in\Gamma_{k-1}(f(G))=f(\Gamma_{k-1}(G)).$$

进而由命题**????**知 $a\in G, b\in\Gamma_{k-1}(G)$. 从而

$$f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b)=f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right)\in f([G,\Gamma_{k-1}(G)])=f(\Gamma_k(G)).$$

因此 $\Gamma_k(f(G))\subseteq f(\Gamma_k(G))$. 综上可知 $\Gamma_k(f(G))=f(\Gamma_k(G))$. 故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(f(G))=f(\Gamma_k(G)),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(4) 显然 $(A\times B)^{(0)}=A\times B=A^{(0)}\times B^{(0)}$. 假设 $(A\times B)^{(k-1)}=A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}$, 则

$$(A\times B)^{(k)}=\left[(A\times B)^{(k-1)},(A\times B)^{(k-1)}\right]=\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right].\tag{1}$$

下证 $\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right]=A^{(k)}\times B^{(k)}$. 任取 $[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]\in\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right]$, 则

$$a_i\in A^{(k-1)},\quad b_i\in B^{(k-1)},\quad i=1,2.$$

从而

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]&=\left(a_1^{-1},b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1},b_2^{-1}\right)(a_1,b_1)(a_2,b_2)=\left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2,b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right)\\&=([a_1,a_2],[b_1,b_2])\in\left[A^{(k-1)},A^{(k-1)}\right]\times\left[B^{(k-1)},B^{(k-1)}\right]=A^{(k)}\times B^{(k)}.\end{aligned}$$

故 $\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right]\subseteq A^{(k)}\times B^{(k)}$. 再任取

$$([a_1,a_2],[b_1,b_2])\in A^{(k)}\times B^{(k)}=\left[A^{(k-1)},A^{(k-1)}\right]\times\left[B^{(k-1)},B^{(k-1)}\right],$$

则

$$a_i\in A^{(k-1)},\quad b_i\in B^{(k-1)},\quad i=1,2.$$

从而

$$\begin{aligned}([a_1,a_2],[b_1,b_2])&=\left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2,b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right)=\left(a_1^{-1},b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1},b_2^{-1}\right)(a_1,b_1)(a_2,b_2)\\&=[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]\in\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right].\end{aligned}$$

故 $A^{(k)}\times B^{(k)}\subseteq\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right]$. 因此 $\left[A^{(k-1)}\times B^{(k-1)},A^{(k-1)}\times B^{(k-1)}\right]=A^{(k)}\times B^{(k)}$. 再结合(1)式可得

$$(A\times B)^{(k)}=A^{(k)}\times B^{(k)}.$$

故由数学归纳法可知

$$(A\times B)^{(k)}=A^{(k)}\times B^{(k)},\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

显然 $\Gamma_1(A\times B)=A\times B=\Gamma_1(A)\times\Gamma_1(B)$. 假设 $\Gamma_{k-1}(A\times B)=\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)$, 则

$$\Gamma_k(A\times B)=[A\times B,\Gamma_{k-1}(A\times B)]=[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)].\tag{2}$$

下证 $[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)$. 任取 $[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]\in[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]$, 则

$$a_1\in A,\quad b_1\in B,\quad a_2\in\Gamma_{k-1}(A),\quad b_2\in\Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]=\left(a_1^{-1},b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1},b_2^{-1}\right)(a_1,b_1)(a_2,b_2)=\left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2,b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right)$$

$$= ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in [A, \Gamma_{k-1}(A)] \times [B, \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B).$$

因此 $[A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)] \subseteq \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B)$. 再任取

$$([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B) = [A, \Gamma_{k-1}(A)] \times [B, \Gamma_{k-1}(B)],$$

则

$$a_1 \in A, \quad a_2 \in \Gamma_{k-1}(A), \quad b_1 \in B, \quad b_2 \in \Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$\begin{aligned}([a_1, a_2], [b_1, b_2]) &= \left(a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2, b_1^{-1} b_2^{-1} b_1 b_2\right) = \left(a_1^{-1}, b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1}, b_2^{-1}\right)(a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)].\end{aligned}$$

因此 $\Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B) \subseteq [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)]$. 故 $[A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B)$. 再由(2)式可得

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(5) 由 G 的升中心列的定义可得

$$\pi_k(C_{k+1}(G)) = C_{k+1}(G)/C_k(G) = C(G/C_k(G)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(6) 由命题 0.1(5)可得

$$\begin{aligned} a \in C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))) &\iff \pi_k(a) \in \pi_k(C_{k+1}(G)) \\ &\iff aC_k(G) \in C_{k+1}(G)/C_k(G) = C(G/C_k(G)) \\ &\iff (aC_k(G))(bC_k(G)) = (bC_k(G))(aC_k(G)), \forall b \in G \\ &\iff [a, b]C_k(G) = a^{-1}b^{-1}abC_k(G) = C_k(G), \forall b \in G \\ &\iff [a, b] \in C_k(G), \forall b \in G. \end{aligned}$$

(7) 由引理**????**知

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(i-1)}] \lhd G^{(k-1)}, k = 1, 2, \cdots.$$

又显然 $G^{(0)} = G \lhd G$. 假设 $G^{(k-1)} \lhd G$, 则由引理**????**可得

$$G^{(k)} = \left[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\right] \lhd G.$$

故由数学归纳法知 $G^{(k)} \lhd G, k = 1, 2, \cdots$.

显然 $\Gamma_1(G) = G \lhd G$. 假设 $\Gamma_{k-1}(G) \lhd G$, 则由引理**????**可得

$$\Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)] \lhd G.$$

故由数学归纳法知 $\Gamma_k(G) \lhd G, k = 1, 2, \cdots$. 又 $\Gamma_k(G) \subseteq \Gamma_{k-1}(G), k = 1, 2, \cdots$, 再由命题**????**知

$$\Gamma_k(G) \lhd \Gamma_{k-1}(G), \ k = 1, 2, \cdots.$$

显然 $C_0(G) = \{1\} \lhd G$. 假设 $C_k(G) \lhd G$. 设 π_k 是 G 到 $G/C_k(G)$ 的自然同态, 则由命题 0.1(5)知

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

由定理**????**知 $C(G/C_k) \lhd G/C_k$. 再由定理**????**知

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))) \lhd G, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

故由数学归纳法知

$$C_k(G) \lhd G, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

再由命题????知

$$C_k(G) \lhd C_{k+1}(G), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

□

命题 0.2

Abel 群是幂零群, 也是可解群. 特别地, 循环群都是幂零群, 也都是可解群.

证明

因为循环群都是 Abel 群, 所以循环群都是幂零群, 也都是可解群.

□

例题 0.3 设 $G = S_3$, 于是 $G^{(1)} = \Gamma_2(G) = A_3$, 因而 $G^{(2)} = \{1\}$, 但 $\Gamma_3(G) = A_3 = \Gamma_2(G)$, 故当 $k \geqslant 2$ 时均有 $\Gamma_k(G) = A_3 \neq \{1\}$, 故 S_3 是可解群但不是幂零群.

证明

□

定理 0.1

(1) 设 G 是可解群,A 是可解群 G 的子群, 则 A 也是可解群.

(2) 设 G 是可解群,f 是群 G 到群 G_1 的同态, 则 $f(G)$ 也是可解群.

(3) 设群 G 是群 B 过群 A 的扩张, 则 G 可解的充分必要条件是 A, B 都是可解群.

证明

(1) 由 G 是可解群知, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)} = \{1\}$. 再由命题 0.1(2)知 $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)} = \{1\}$, 故 $A^{(k_0)} = \{1\}$, 即 A 是可解群.

(2) 由 G 是可解群知, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)} = \{1\}$. 再由命题 0.1(3)知 $(f(G))^{(k_0)} = f\left(G^{(k_0)}\right) = \{1\}$, 故 $f(G)$ 是可解群.

(3) 由 G 是 B 过 A 的扩张, 故可假定 $A \lhd G, B = G/A$. 又设 π 是 G 到 B 的自然同态. 由命题 0.1(2)知

$$A^{(k)} \subseteq G^{(k)}, \ k = 0, 1, \cdots. \tag{3}$$

由命题 0.1(3)知

$$B^{(k)} = \pi(G^{(k)}), \ k = 0, 1, \cdots. \tag{4}$$

若 G 可解, 则存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)} = \{1\}$. 于是由(3)式得 $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)} = \{1\}$, 故 $A = \{1\}$, 即 A 可解. 再由(4)式得 $B^{(k_0)} = \pi(G^{(k_0)}) = \pi(\{1\}) = \{1\}$, 故 B 可解.

反之, 若 A, B 可解, 则存在 k_1, k_2, 使 $A^{(k_1)} = B^{(k_2)} = \{1\}$, 故由(4)式得 $\pi(G^{(k_2)}) = B^{k_2} = \{1\}$, 即 $G^{(k_2)} \subseteq \ker \pi = A$. 由命题 0.1(2)知 $(G^{(k_1)})^{(k)} \subseteq A^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$. 因而再由命题 0.1(1)知 $G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)} \subseteq A^{(k_2)} = \{1\}$, 故 $G^{(k_1+k_2)} = \{1\}$, 于是 G 可解.

□

定理 0.2

设 G 是有限群, 则下列条件等价:

(1) G 是可解群;

(2) 存在 G 的正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使 G_i/G_{i+1} 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 G 的次正规序列

$$G = G_1' \supseteq G_2' \supseteq \cdots \supseteq G_s' = \{1\},$$

使 G_i'/G_{i+1}' 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant s-1$;

(4) 存在 G 的次正规序列

$$G = G_1'' \supseteq G_2'' \supseteq \cdots \supseteq G_t'' = \{1\},$$

使 G_i''/G_{i+1}'' 为素数阶群,$1 \leqslant i \leqslant t-1$.

注 由这个定理的证明知: **群 G 是可解群的充要条件是 G 的导出列都是正规序列且因子都是 Abel 群.**

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由于 G 可解, 故有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $G^{(k)} = \{1\}$. 再由命题 0.1(7)知 G 中有正规序列

$$G = G^0 \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(k)} = \{1\}.$$

因为 $G^{(i)} = \left[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}\right], G^{(i)} \lhd G^{(i-1)}$, 所以由命题**????**知 $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ 是 Abel 群, 故 G 的导出列满足 (2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由于正规序列必为次正规序列, 故条件 (2) 成立一定有条件 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $G = G_1' \supseteq G_2' \supseteq \cdots \supseteq G_s' = \{1\}$ 是 G 的次正规序列, 并且 G_i'/G_{i+1}' 为 Abel 群. 由于 G 是有限群, 故 G_i'/G_{i+1}' 也是有限群. 如果对某个 i 有

$$|G_i'/G_{i+1}'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中 $k \geqslant 1, p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相等的素数,$\sum\limits_{j=1}^{k} a_j > 1$. 令 P_j 是 Abel 群 G_i'/G_{i+1}' 的 Sylow p_j 子群, 则 $|P_j| = p_j^{a_j}$. 由命题**????**知 P_j 是 G_i'/G_{i+1}' 的正规子群. 由命题**??**知有内直积分解

$$G_i'/G_{i+1}' = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

又设 P_k' 为 P_k 的 $p_k^{a_k-1}$ 阶子群, 则 P_k' 也为 Abel 群 G_i'/G_{i+1}' 的子群, 由命题**????**知 $P_k' \lhd G_i'/G_{i+1}'$. 由定理**????**知

$$H' \triangleq P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_{k-1} \otimes P_k' \lhd G_i'/G_{i+1}'.$$

再利用 Lagrange 定理及定理**????**可得

$$|H'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1},$$
$$[G_i'/G_{i+1}' : H'] = \frac{\left|G_i'/G_{i+1}'\right|}{|H'|} = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1}} = p_k. \tag{5}$$

设 π 为 G_i' 到 G_i'/G_{i+1}' 上的自然同态, 令 $H = \pi^{-1}(H')$, 则由 $1 \in H'$ 和推论**????**知

$$G_{i+1}' = \ker \pi = \pi^{-1}(1) \subseteq \pi^{-1}(H') = H = \pi^{-1}(H') \lhd G_i'.$$

于是由定理**????**可得

$$G_{i+1}' \lhd H \lhd G_i', \quad G_i'/H \cong \left(G_i'/G_{i+1}'\right)/\pi(H) = \left(G_i'/G_{i+1}'\right)/H'.$$

将 π 限制在 H 上, 则 $\pi|_H$ 是 H 到 H' 的满同态. 再利用定理**????**可得

$$H/G_{i+1}' \cong \pi(H)/\pi\left(G_{i+1}'\right) = \pi(H)/\{1\} = H'.$$

再结合(5)式可得

$$[G_i' : H] = [G_i'/G_{i+1}' : H'] = p_k,$$
$$[H : G_{i+1}'] = |H'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k-1}.$$

故 G_i'/H 是素数阶群,H/G_{i+1}' 仍是 Abel 群. 同理可由 Abel 群 H/G_{i+1}' 得到 H_1, 使得 $G_{i+1}' \lhd H_1 \lhd H$,H/H_1 是素数阶群,H_1/G_{i+1}' 仍是 Abel 群且

$$\left[H_1 : G_{i+1}'\right] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k-2}.$$

依次进行下去, 因为 $\left[G_i' : G_{i+1}'\right]$ 的阶有限, 所以这个操作必会在有限步后终止, 最终得到

$$G_{i+1}' \lhd H_m \lhd \cdots \lhd H_2 \lhd H_1 \lhd H, \quad m = \sum_{i=1}^{k} a_i - 2,$$

$H/H_1,H_k/H_{k+1},k=1,2,\cdots m$ 都是素数阶群，并且 $\left[H_m:G'_{i+1}\right]=p_1$，故 H_m/G'_{i+1} 也是素数阶群. 根据 i 的任意性，我们在每个 G'_i,G'_{i+1} 之间都可以像这样插入一列群，最终得到一个新的次正规序列，并且这个新的次正规序列的因子都是素数阶群.

(4) ⇒ (1). 因 $G''_{t-1},G''_{t-2}/G''_{t-1}$ 都是素数阶群，故由命题??知 $G''_{t-1},G''_{t-2}/G''_{t-1}$ 都是循环群，因而由命题 0.2知它们都可解. 注意到短正合序列

$$1\longrightarrow G''_{t-1}\xrightarrow{\lambda}G''_{t-2}\xrightarrow{\mu}G''_{t-2}/G''_{t-1}\longrightarrow 1,$$

故 G''_{t-2} 是循环群 G''_{t-2}/G''_{t-1} 过可解群 G''_{t-1} 的扩张，由定理 0.1知 G''_{t-2} 是可解群. 假设 G''_{i+1} 为可解群，则同理可得 G''_i 是循环群 G''_i/G''_{i+1} 过可解群 G''_{i+1} 的扩张，故由定理 0.1知 G''_i 是可解群. 因此由数学归纳法知当 $i=1$ 时知 G 为可解群.

□

例题 0.4 在 A_4 中有正规序列

$$A_4\supseteq K_4\supseteq\{\mathrm{id}\}.$$

A_4/K_4 是 3 阶群,K_4 是 Abel 群，于是 A_4 是可解群.

证明

□

定理 0.3

(1) 设 G 是幂零群,A 是幂零群 G 的子群，则 A 也是幂零群.

(2) 设 G 是幂零群,f 是群 G 到群 G_1 的同态，则 $f(G)$ 也是幂零群.

(3) 设 G 是幂零群 B 过幂零群 A 的扩张，若 G 是中心扩张或平凡扩张，则 G 也是幂零群.

♡

证明

(1) 由 G 是幂零群知，存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得 $\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$. 再由命题 0.1(2)知 $\Gamma_{k_0}(A)\subseteq\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$，故 $\Gamma_{k_0}(A)=\{1\}$. 由此知 A 也为幂零群.

(2) 由 G 是幂零群知，存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得 $\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$. 再由命题 0.1(2)知 $\Gamma_{k_0}(f(G))=f(\Gamma_{k_0}(G))=f(\{1\})=\{1\}$，故 $\Gamma_{k_0}(f(G))=\{1\}$. 由此知 G_1 也是幂零群.

(3) 若 G 是中心扩张，则由条件知 $A\subseteq C(G),G/A=B$，又设 π 是 G 到 B 上的自然同态. 由 B 幂零知，存在 $k_1\in\mathbb{N}$，使得

$$\pi(\Gamma_{k_1}(G))=\Gamma_{k_1}(B)=\{1\},$$

因而 $\Gamma_{k_1}(G)\subseteq\ker\pi=A\subseteq C(G)$. 故 $\forall a\in\Gamma_{k_1}(G),b\in G$ 有

$$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab=a^{-1}a=1.$$

于是 $\Gamma_{k_1+1}(G)=[G,\Gamma_{k_1}(G)]=\{1\}$，这就证明了 G 是幂零群.

若 G 是平凡扩张，则由定理??知 $G\cong A\times B$ 且 A,B 都是幂零群. 由命题 0.1(4)知

$$\Gamma_k(G)=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B),\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

又由 A,B 是幂零群知，存在 $k_1,k_2\in\mathbb{N}$，使得 $\Gamma_{k_1}(A)=\Gamma_{k_2}(B)=\{1\}$. 又因为

$$\Gamma_{k_1}(A)\supseteq\Gamma_k(A),\ \forall k\geqslant k_1;\quad \Gamma_{k_2}(B)\supseteq\Gamma_k(B),\ \forall k\geqslant k_2.$$

所以

$$\Gamma_k(A)=\{1\},\ \forall k\geqslant k_1;\quad \Gamma_k(B)=\{1\},\ \forall k\geqslant k_2.$$

于是取 $K=\max\{k_1,k_2\}$，则

$$\Gamma_K(G)=\Gamma_K(A)\times\Gamma_K(B)=\{1\}\times\{1\}=\{1\}.$$

故 G 也为幂零群.

□

定理 0.4

设 G 是群, 则下列条件等价:

(1) G 是一个幂零群;

(2) G 中有正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$,$1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $C_k(G) = G$.

注 由这个定理的证明知: **群 G 是幂零群的充要条件是 G 的降中心列都是正规序列且 $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \subseteq C(G/\Gamma_{i+1})$.**

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 因 G 是幂零群, 故有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$. 再由命题 0.1(7)知 G 中有正规序列

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_k(G) = \{1\},$$

因而由命题**????**知 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq G/\Gamma_{i+1}(G)$. 设 π 为 G 到 $G/\Gamma_{i+1}(G)$ 的自然同态, 由命题 0.1(3)及 $[G, \Gamma_i(G)] = \Gamma_{i+1}(G)$ 知

$$[G/\Gamma_{i+1}(G), \Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G)] = [\pi(G), \pi(\Gamma_i(G))] = \pi([G, \Gamma_i(G)]) = \pi(\Gamma_{i+1}(G)) = \{1\},$$

因而由引理**????**知 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq C(G/\Gamma_{i+1}(G))$, 故 G 的降中心列满足条件 (2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3). 用反序归纳法证明 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$, 其中 $C_0(G) = \{1\}$. 当 $i = r$ 时,$G_r = \{1\} = C_0(G) = C_{r-r}(G)$. 设 $i+1$ 时已成立, 因而 $G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G)$. 又 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$, 由推论**????**知

$$[G_i, G] \subseteq G_{i+1}.$$

即对 $\forall a \in G_i$, 有

$$[a, b] \in G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G), \forall b \in G.$$

因而由命题 0.1(6)知 $a \in C_{r-i}(G)$, 故 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$. 特别地, 有 $G_1 = G \subseteq C_{r-1}(G)$, 即取 $k = r-1$ 知条件 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $C_k(G) = G$, 再结合命题 0.1(7)知 G 中有正规序列

$$G = C_k(G) \supseteq C_{k-1}(G) \supseteq \cdots \supseteq C_1(G) \supseteq C_0(G) = \{1\}.$$

用数学归纳法证明 $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G), i = 1, 2, \cdots$. 当 $i = 1$ 时, 显然成立. 假设结论对 i 成立, 现在考虑 $i+1$ 的情形. 由于 $C_{k-i+1}(G)/C_{k-i}(G) = C(G/C_{k-i}(G))$, 故由推论**????**有 $[G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G)$, 于是再结合引理**????**得

$$\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \subseteq [G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G).$$

故由数学归纳法知 $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G), i = 1, 2, \cdots$. 特别地, 有 $\Gamma_{k+1}(G) \subseteq C_0(G) = \{1\}$, 故 $\Gamma_{k+1} = \{1\}$. 因而 G 是幂零群.

□

定理 0.5

设 p 是一个素数, 则有限 p 群都是幂零群.

证明 由命题 0.2知阶数为 p 的有限 p 群都是幂零群. 假设结论对阶数小于等于 p^{n-1} 的有限 p 群都成立, 现设 $|G| = p^n$, 则由定理**????**知 $C(G) \neq \{1\}$, 从而 $|C(G)| > 1$. 若 $|C(G)| = |G|$, 则 G 是 Abel 群, 由命题 0.2知 G 是幂零群. 下设 $|C(G)| = p^k (1 \leqslant k < n)$, 则由 Lagrange 定理得

$$|G| = [G : C(G)] \cdot |C(G)| \Longleftrightarrow [G : C(G)] = p^{n-k} < p^n.$$

于是由归纳假设知 $G/C(G), C(G)$ 都是幂零群. 又显然 G 是 $G/C(G)$ 过 $C(G)$ 的中心扩张, 故由定理 0.3(3)知 G 为幂零群. 因此由数学归纳法知任何有限 p 群都是幂零群.

□

例题 0.5 设 H 是四元数体,$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, 其中 $1, i, j, k \in H$ 如命题**??**所述, 则 G 是 8 阶群. 这是一个非 Abel 幂零群的例子.

证明

□