0.1 Lagrange 插值定理

定义 0.1 (插值基函数)

若 n 次多项式 $l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j\end{cases}\quad j,k=0,1,\cdots,n.$$

就称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 ***n* 次插值基函数**.

定理 0.1

证明: 节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{1}$$

证明 下面先讨论 $n=1$ 的简单情形, 此时假定给定区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k=f(x_k)$,$y_{k+1}=f(x_{k+1})$, 要求线性插值多项式 $L_1(x)$, 使它满足

$$L_1(x_k)=y_k,\quad L_1(x_{k+1})=y_{k+1}$$

$y=L_1(x)$ 的几何意义就是通过两点 (x_k,y_k) 与 (x_{k+1},y_{k+1}) 的直线, 如图 1所示,$L_1(x)$ 的表达式可由几何意义直接给出

$$\begin{cases}L_1(x)=y_k+\dfrac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k) & (\text{点斜式}),\\ L_1(x)=\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}y_k+\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1} & (\text{两点式})\end{cases}$$

由两点式看出,$L_1(x)$ 是由两个线性函数

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\quad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}.$$

线性组合得到的, 其系数分别为 y_k 及 y_{k+1}, 即

$$L_1(x)=y_kl_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x).$$

显然,$l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 也是线性插值多项式, 在节点 x_k 及 x_{k+1} 上分别满足条件

$$l_k(x_k)=1,\quad l_k(x_{k+1})=0;$$
$$l_{k+1}(x_k)=0,\quad l_{k+1}(x_{k+1})=1$$

我们称函数 $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 为**线性插值基函数**, 它们的图形见图 1.

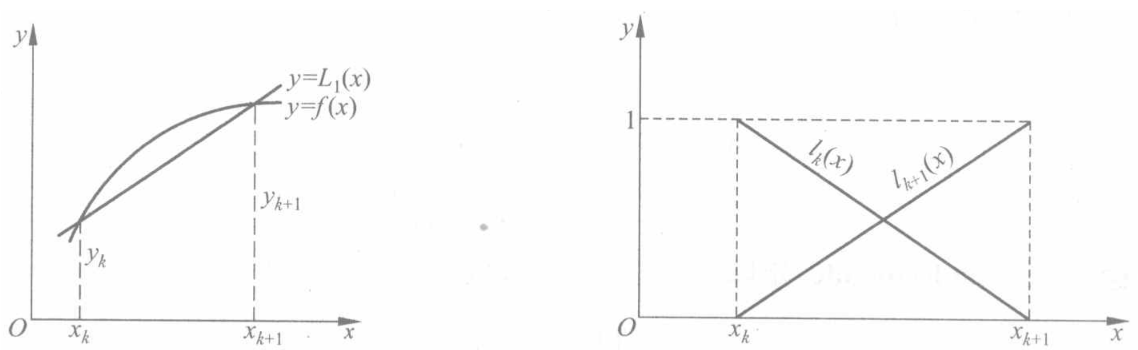

图 1

下面讨论 $n=2$ 的情况. 此时假定插值节点为 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, 要求二次插值多项式 $L_2(x)$, 使它满足

$$L_2(x_j)=y_j, \quad j=k-1,k,k+1$$

我们知道 $y=L_2(x)$ 在几何上就是通过三点 $(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$ 的抛物线. 为了求出 $L_2(x)$ 的表达式, 可采用基函数方法, 此时基函数 $l_{k-1}(x), l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 是二次函数, 且在节点上分别满足条件

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1})=1, l_{k-1}(x_j)=0, & j=k,k+1; \\ l_k(x_k)=1, l_k(x_j)=0, & j=k-1,k+1; \\ l_{k+1}(x_{k+1})=1, l_{k+1}(x_j)=0, & j=k-1,k \end{cases}$$

满足上述条件的插值基函数是很容易求出的, 例如求 $l_{k-1}(x)$, 因它有两个零点 x_k 及 x_{k+1}, 故可表示为

$$l_{k-1}(x)=A(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

其中 A 为待定系数, 可由条件 $l_{k-1}(x_{k-1})=1$ 定出

$$A=\frac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}.$$

于是

$$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}.$$

同理可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

二次插值基函数 $l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ 上的图形见图 2.

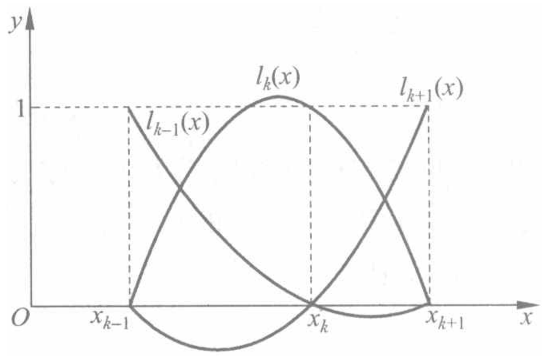

图 2

对 $n=1$ 及 $n=2$ 时的情况上述已经讨论. 用类似的推导方法, 可得到 n 次插值基函数为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

□

定理 0.2

记通过 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x)$, 假定它满足条件

$$L_n(x_j)=y_j, \quad j=0,1,\cdots,n. \tag{2}$$

则插值多项式 $L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x). \tag{3}$$

其中 $l_k(x), k=0,1,\cdots,n$ 是节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数. 由 $l_k(x)$ 的定义, 知

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j)=y_j,\quad j=0,1,\cdots,n. \tag{4}$$

形如 (3) 式的插值多项式 $L_n(x)$ 称为 **Lagrange(拉格朗日) 插值多项式**.

若引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{5}$$

容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

于是再结合定理 0.1可将公式 (3)改写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

注 当 $n=1$ 时,$L_1(x)$ 也称为**线性插值多项式**. 假定给定区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k=f(x_k)$,$y_{k+1}=f(x_{k+1})$,$L_1(x)$ 的表达式可由几何意义直接给出

$$\begin{cases} L_1(x)=y_k+\dfrac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k) \quad (\text{点斜式}),\\ L_1(x)=\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}y_k+\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1} \quad (\text{两点式}) \end{cases} \tag{6}$$

当 $n=2$ 时,$L_1(x)$ 也称为**抛物线插值多项式**. 假定插值节点为 x_{k-1},x_k,x_{k+1}, 及端点函数值 $y_{k-1}=f(x_{k-1})$,$y_k=f(x_k)$,$y_{k+1}=f(x_{k+1})$,$L_2(x)$ 的表达式可由(4)直接给出

$$L_2(x)=y_{k-1}l_{k-1}(x)+y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x), \tag{7}$$

其中 $l_i(x), i=k-1,k,k+1$ 是节点 x_{k-1},x_k,x_{k+1} 上的插值基函数.

注 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式, 特殊情况下次数可能小于 n. 例如, 对于通过三点 (x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2) 的二次插值多项式 $L_2(x)$, 如果三点共线, 则 $y=L_2(x)$ 就是一直线, 而不是抛物线, 这时 $L_2(x)$ 是一次多项式.

证明 由插值基函数的定义易知 $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$ 满足条件(2). □

定义 0.2

若在 $[a,b]$ 上用 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$, 则其截断误差为 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$, 也称为**插值多项式的余项**.

定理 0.3

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, 节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$,$L_n(x)$ 是满足条件

$$L_n(x_j)=y_j,\quad j=0,1,\cdots,n.$$

的插值多项式, 则对任何 $x\in[a,b]$, 插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{8}$$

这里 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x, $\omega_{n+1}(x)$ 由 (5) 式所定义.

注 应当指出, 余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用.ξ 在 (a,b) 内的具体位置通常不可能给出, 如果我们可以求出 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$, 那么插值多项式 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差限是

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|. \tag{9}$$

当 $n=1$ 时, 线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\quad \xi\in[x_0,x_1]. \tag{10}$$

当 $n=2$ 时, 抛物线插值的余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\quad \xi\in[x_0,x_2]. \tag{11}$$

证明 由给定条件知 $R_n(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上为零, 即 $R_n(x_k)=0(k=0,1,\cdots,n)$, 于是

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x), \tag{12}$$

其中 $K(x)$ 是与 x 有关的待定函数.

现把 x 看成 $[a,b]$ 上的一个固定点, 作函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

根据 f 的假设可知 $\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内存在. 根据插值条件及余项定义, 可知 $\varphi(t)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 及 x 处均为零, 故 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个零点, 根据 Rolle(罗尔) 定理,$\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的两个零点间至少有一个零点, 故 $\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 $n+1$ 个零点. 对 $\varphi'(t)$ 再应用 Rolle 定理, 可知 $\varphi''(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 n 个零点. 依此类推,$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点, 记为 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0.$$

于是

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad \xi\in(a,b), \text{且依赖于} x.$$

将它代入 (12) 式, 就得到余项表达式 (8). 证毕. □

命题 0.1

(1) 设 $l_k(x),k=0,1,\cdots,n$ 是节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数, 则

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\ k=0,1,\cdots,n.$$

特别当 $k=0$ 时, 有 $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)=1$.

(2) 若被插值函数 $f(x)\in H_n(H_n$ 代表次数小于等于 n 的多项式集合), 记 $L_n(x)$ 是 $L_n(x)$ 的 Lagrange 插值多项式,$R_n(x)$ 为其插值余项, 则 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0$, 即它的插值多项式 $L_n(x)=f(x)$.

笔记 上述命题中的 (1) 也是插值基函数的性质, 利用它们还可求一些和式的值.

证明

(1) 利用余项表达式(8), 当 $f(x)=x^k(k\leqslant n)$ 时, 由于 $f^{(n+1)}(x)=0$, 于是有

$$R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0$$

由此得

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

特别当 $k=0$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1.$$

(2) 利用余项表达式(8), 由于 $f^{(n+1)}(x)=0$, 故 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0$, 即它的插值多项式 $L_n(x)=f(x)$.

□

例题 0.1 证明 $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=0$, 其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_5$ 的插值基函数.

解 利用公式命题 0.1(1)可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x) &= \sum_{i=0}^{5}(x_i^2-2x_ix+x^2)l_i(x)\\
&= \sum_{i=0}^{5}x_i^2 l_i(x)-2x\sum_{i=0}^{5}x_i l_i(x)+x^2\sum_{i=0}^{5}l_i(x)\\
&= x^2-2x^2+x^2=0.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.2 已给 $\sin 0.32=0.314567,\sin 0.34=0.333487,\sin 0.36=0.352274$, 用线性插值及抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 的值并估计截断误差.

解 由题意取 $x_0=0.32,y_0=0.314567,x_1=0.34,y_1=0.333487,x_2=0.36,y_2=0.352274$.

用线性插值计算, 由于 0.3367 介于 x_0,x_1 之间, 故取 x_0,x_1 进行计算, 由公式(6)得

$$
\begin{aligned}
\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) &= y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(0.3367-x_0)\\
&= 0.314567+\frac{0.01892}{0.02}\times 0.0167=0.330365.
\end{aligned}
$$

由 (10) 式得其截断误差

$$
|R_1(x)|\leqslant \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,
$$

其中 $M_2=\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|f''(x)|$. 因 $f(x)=\sin x,f''(x)=-\sin x$, 可取 $M_2=\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|\sin x|=\sin x_1\leqslant 0.3335$, 于是

$$
\begin{aligned}
|R_1(0.3367)| &= |\sin 0.3367-L_1(0.3367)|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\times 0.3335\times 0.0167\times 0.0033\leqslant 0.92\times 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

用抛物线插值计算 $\sin 0.3367$ 时, 由公式 (7) 得

$$
\begin{aligned}
\sin 0.3367 &\approx y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\
&= L_2(0.3367)=0.314567\times\frac{0.7689\times 10^{-4}}{0.0008}+0.333487\\
&\times\frac{3.89\times 10^{-4}}{0.0004}+0.352274\times\frac{-0.5511\times 10^{-4}}{0.0008}=0.330374.
\end{aligned}
$$

这个结果与 6 位有效数字的正弦函数表完全一样, 这说明查表时用二次插值精度已相当高了. 由 (9) 式得其截断误差限

$$
|R_2(x)|\leqslant \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,
$$

其中

$$
M_3=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|=\cos x_0<0.9493.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|R_2(0.3367)| &= |\sin 0.3367-L_2(0.3367)|\\
&\leqslant \frac{1}{6}\times 0.9493\times 0.0167\times 0.033\times 0.0233<2.0132\times 10^{-6}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.3 设 $f\in C^2[a,b]$, 试证:

$$
\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2,
$$

其中 $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$. 记号 $C^2[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上二阶导数连续的函数空间.

解 通过两点 $(a, f(a))$ 及 $(b, f(b))$ 的线性插值为

$$L_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

于是由(10)式可得

$$\begin{aligned}
&\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \\
&= \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - L_1(x)| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right| \\
&\leqslant \frac{M_2}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-a)(x-b)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2.
\end{aligned}$$

□