0.1 合同标准型的应用

引进标准型的目的是为了简化问题的讨论. 应用对称矩阵的合同标准型 (复相合标准型) 可以简化二次型和对称矩阵 (Hermite 型和 Hermite 矩阵) 有关问题的讨论. 其方法是先对标准型证明所需结论, 若结论在合同 (复相合) 变换下不变, 就可以过渡到一般的情形. 这种做法和相抵标准型、相似标准型是完全类似的.

命题 0.1 (对称矩阵的秩 1 分解)

秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

注 这里没说是在哪个数域上的对称矩阵, 因此我们应该考虑一般数域. 只能使用对称矩阵的合同标准型.

证明 设 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0\},$$

其中 $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq r)$, 则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}^{-1})' a_1 \boldsymbol{E}_{11} \boldsymbol{C}^{-1} + \cdots + (\boldsymbol{C}^{-1})' a_r \boldsymbol{E}_{rr} \boldsymbol{C}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ii}$ 是第 (i,i) 元素为 1, 其余元素全为 0 的基础矩阵, 从而每个 $(\boldsymbol{C}^{-1})' a_i \boldsymbol{E}_{ii} \boldsymbol{C}^{-1}$ 都是秩等于 1 的对称矩阵. □

命题 0.2

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复对称矩阵且秩等于 r, 求证: $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 是秩等于 r 的 n 阶复矩阵.

证明 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' \operatorname{diag}\{c_1, \cdots, c_r, 0, \cdots, 0\} \boldsymbol{C},$$

其中 $c_i \neq 0 (1 \leq i \leq r)$. 令 $d_i = \sqrt{c_i}$(取定一个平方根即可),

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}\{d_1, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0\},$$

则 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{D}\boldsymbol{C})'(\boldsymbol{D}\boldsymbol{C})$. 令 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}$ 即得结论. □

命题 0.3

求证: 任一 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都相似于一个复对称矩阵.

证明 由命题??可得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是复对称矩阵, 并且可以随意指定 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 中的一个为非异阵. 不妨设 $\boldsymbol{C}$ 是非异阵, 则由命题 0.2可得 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 是非异复矩阵. 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$ 相似于 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}'$, 这是一个复对称矩阵. □

命题 0.4

设实二次型 f 和 g 的系数矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 求证: f 和 g 有相同的正负惯性指数.

证明 设 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1})' = (\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{-1} = \operatorname{diag}\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1}\}.$$

因为 a_i 和 a_i^{-1} 有相同的正负性, 所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有相同的正负惯性指数. □

命题 0.5

设 f 是 n 元实二次型, 其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 求证: 必存在一组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) < 0.$$

证明 设 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ 为对角矩阵. 注意到 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|^2 = |\boldsymbol{B}|$, 故 $|\boldsymbol{B}| < 0$. 因为对调对角矩阵的主对角元后得到的矩阵和原矩阵合同, 故不失一般性, 可设 $\boldsymbol{B}$ 的主对角元前 r 个为负, 后 $n-r$ 个为正, 于是 r 必是

奇数. 作 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\cdots,1,0,\cdots,0)'$, 其中有 r 个 1. 又令 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)'=\boldsymbol{C\alpha}$, 则 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(\boldsymbol{C\alpha})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C\alpha})=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{B\alpha}<0$.

也可用反证法来证明, 若结论不成立, 则 f 是半正定型, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵, 于是 $|\boldsymbol{A}|\geq 0$, 矛盾! □

命题 0.6

如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 仅在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时为零, 证明: f 必是正定型或负定型.

证明 设 f 的正负惯性指数分别为 p,q, 秩为 r, 我们分情况来讨论.

若 f 是不定型, 即 $p>0$ 且 $q>0$, 则存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$, 使得 f 可化简为如下规范标准型:

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

取 $\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 其中 $b_1=b_{p+1}=1$, 其他 b_i 全为零, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 是一个非零列向量, 但 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$, 这与假设矛盾, 所以 f 不是不定型.

若 f 是半正定型, 但非正定型, 即 $p=r<n$, 则存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$, 使得 f 可化简为如下规范标准型:

$$f=y_1^2+\cdots+y_r^2.$$

取 $\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 其中 $b_n=1$, 其他 b_i 全为零, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 是一个非零列向量, 但 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$, 这与假设矛盾, 所以 f 不是非正定型的半正定型. 同理可证 f 也不是非负定型的半负定型.

综上所述,f 必是正定型或负定型. □

命题 0.7

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 求证: $\boldsymbol{A}^*$ 也半正定.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 故存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

若 $r=n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 上式两边同取伴随可得 $\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}^*)'=\boldsymbol{I}_n^*=\boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定阵. 若 $r=n-1$, 则上式两边同取伴随可得

$$\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}^*)'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的正惯性指数为 1, 秩也为 1, 从而是半正定阵. 若 $r<n-1$, 则由定理**??**可知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 结论自然成立. □

命题 0.8 (正定和半正定阵的判定准则之一)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 求证:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充要条件是存在 n 阶非异实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充要条件是存在 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 特别地, $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}|^2\geq 0$.

证明 (1) 由定理**??**可知, $\boldsymbol{A}$ 是正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{I}_n$, 即存在非异实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

(2) 由定理**??**可知, $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}$, 即存在非异实矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}\boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 反之, 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 是实矩阵, 则对任一 n 维实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C\alpha}=(\boldsymbol{C\alpha})'(\boldsymbol{C\alpha})\geq 0$, 由定义可知 $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵. □

引理 0.1

设 A,B,P,Q 都是 n 阶矩阵,α,β 为 n 维列向量, 则

$$\alpha'AP\alpha+\beta'B\beta-2\alpha'\beta=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & -I_n\\ -I_n & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},$$

$$P'AP+Q'BQ-2P'Q=\begin{pmatrix}P' & Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & -I_n\\ -I_n & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}.$$

证明 由矩阵乘法显然成立. □

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维实列向量, 证明: $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\geq 2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$, 且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

证明 证法一: 由命题 0.8可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 为非异实矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}')^{-1}$. 再设 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 为 n 维实列向量, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}\\&=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})+((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta})'((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta})\\&=\sum_{i=1}^n(a_i^2+b_i^2)\geq 2\sum_{i=1}^n a_ib_i=2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})'((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta})=2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 $a_i=b_i(1\leq i\leq n)$, 即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}$, 也即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

证法二: 将要证的不等式整理为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}' & \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}\geq 0,$$

这等价于证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$ 是半正定阵, 而这就是命题**??**的结论. 由命题**??**可知, 上述不等式的等号成立当且仅当 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 即当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

证法三: 设 P 是正交矩阵, 使得 $A=P'\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P$, 其中 $\lambda_i>0$ 是 A 的特征值, 则

$$A^{-1}=P'\mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\}P$$

设 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},P\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',P\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 则

$$\begin{aligned}\alpha'A\alpha+\beta'A^{-1}\beta&=(P\alpha)'\Lambda(P\alpha)+(P\beta)'\Lambda^{-1}(P\beta)\\&=(\lambda_1a_1^2+\lambda_1^{-1}b_1^2)+(\lambda_2a_2^2+\lambda_2^{-1}b_2^2)+\cdots+(\lambda_na_n^2+\lambda_n^{-1}b_n^2)\\&\geq 2a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+2a_nb_n=2(P\alpha)'(P\beta)=2\alpha'\beta\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\lambda_ia_i=b_i\ (1\leq i\leq n)$, 即 $\Lambda(P\alpha)=(P\beta)$, 也即 $(P'\Lambda P)\alpha=\beta$, 从而当且仅当 $A\alpha=\beta$ 成立. □

例题 0.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维实列向量, 证明: $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2\leq(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta})$, 且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例.

证明 由命题 0.8可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 为非异实矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}')^{-1}$. 再设 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 为 n 维实列向量, 则由 Cauchy - Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2=((\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})'((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}))^2&=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\\&=((\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}))(((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta})'((\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 a_i 与 b_i 对应成比例, 即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 成比例, 也即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例. □

命题 0.9

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵的充要条件是对任意的 n 阶正定实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})>0$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵的充要条件是对任意的 n 阶半正定实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\geq 0$.

注 特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) > 0$;

若 $\boldsymbol{A}$ 为半定阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \geq 0$.

证明 证法一: (1) 先证必要性. 由命题 0.8可设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 为非异实矩阵, 则由迹的交换性可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{CB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{CBC}')$. 由 $\boldsymbol{B}$ 的正定性可知 $\boldsymbol{CBC}'$ 为正定阵, 又由于命题**??**(2), 故 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{CBC}') > 0$.

再证充分性. 用反证法, 若可逆实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不正定, 则存在非异实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_p, -\boldsymbol{I}_q\}\boldsymbol{C}$, 其中负惯性指数 $q > 0$. 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_p, c\boldsymbol{I}_q\}(\boldsymbol{C}^{-1})'$, 其中正数 $c > p/q$, 则 $\boldsymbol{B}$ 是正定实对称矩阵, 且

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}'\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_p, -c\boldsymbol{I}_q\}(\boldsymbol{C}')^{-1}\right) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_p, -c\boldsymbol{I}_q\}) = p - cq < 0,$$

这与假设矛盾!

(2) 由 (1) 同理可证.

证法二: (2) 先证必要性. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 为半正定阵, 则由命题**??**可知 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = (a_{ij}b_{ij})$ 也为半正定阵, 于是

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha} \geq 0.$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)'$. 再证充分性. 令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{xx}' = (x_ix_j)$ 为半正定阵, 于是

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{Ax} \geq 0$$

由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性即得 $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵.

(1) 的必要性与 (2) 的必要性的证明完全类似, 下证充分性. 对任意的半正定阵 $\boldsymbol{B}$ 和任意的正实数 t, $\boldsymbol{B} + t\boldsymbol{I}_n$ 为正定阵, 从而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + t\boldsymbol{I}_n)) > 0$. 令 $t \to 0^+$, 可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) \geq 0$, 于是由 (2) 的结论可知 $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵, 又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故由推论**??**可知 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

证法三: (1) 先证必要性. 若 A 为正定阵, 则由命题**??**(3) 可知,AB 的特征值全大于零, 从而 $\mathrm{tr}(AB) > 0$. 再证充分性. 用反证法, 设 A 不是正定阵, 则由 A 可知 A 至少有一个特征值小于零, 不妨设 $\lambda_1 < 0$. 设 P 为正交矩阵, 使得

$$P'AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

令 $B = P\mathrm{diag}\{N, 1, \cdots, 1\}P'$, 其中 N 是充分大的正实数, 则 B 为正定阵, 且

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left((P'AP)(P'BP)\right) = N\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n < 0$$

这与假设矛盾. 因此 A 必为正定阵.

(2) 利用命题**??**(2) 即可证明必要性, 而充分性的证明与 (1) 完全类似. □

命题 0.10

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = 0$.

证明 证法一: 必要性显然, 下证充分性. 由命题 0.8可设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{DD}'$, 其中 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是 n 阶实矩阵, 则由迹的交换性可得

$$0 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{CDD}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{CD}) = \mathrm{tr}\left((\boldsymbol{CD})'(\boldsymbol{CD})\right),$$

再由迹的正定性可知 $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{CD})\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{O}$.

证法二: 必要性是显然的, 下证充分性. 注意到 $0 = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})$, 并且 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 为半正定阵, 故 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 的主对角元或特征值全为零. 由命题**??**或实对称矩阵的正交相似标准型可知

$$O = B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} = (A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})'(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})$$

于是 $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = O$, 从而 $AB = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}} = O$. □