



集合论

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集	1
1.1 集合及其运算	1
1.1.1 集合的基本概念	1
1.1.2 集合的运算	1
1.1.3 上限集与下限集	3
1.2 映射与集合的基数	5
1.2.1 映射	5
1.2.2 集合的对等	7
1.2.3 集合的基数 (势)	9
1.3 可列集与不可列集	11
1.3.1 可列集	11
1.3.2 不可列集	13

第1章 集合与点集

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 1.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的元素 (或元), 通常用小写字母如 a, b, c 等表示.

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A , 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为空集, 用 \emptyset 表示; 只含有限个元素的集合称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 \mathbb{N}_0 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$$

(2) 描述法—— $A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的幂集, 记为 2^A .

1.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合, 由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交.

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为集族, 其中 Γ 为指标集 (有限或无限), α 为指标. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为列集, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{A_n\}$.

1.1.2.0.1 集族的并:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha} = \{x : \exists \alpha_0 \in \Gamma \text{ 使得 } x \in A_{\alpha_0}\}$$

1.1.2.0.2 集族的交:

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha} = \{x : x \in A_{\alpha}, \forall \alpha \in \Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集, X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X - A$, 称为 A 的余集, 记为 A^c , 即

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

注 补集是相对概念, 若 $A \subset B$, 则 $B - A$ 称为 A 关于 B 的补集. 特别地, 余集是集合关于全集的补集.

笛卡尔积

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

例如, n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ 个}}$.

集合的运算及性质

- (1) $A \cup A = A, A \cap A = A$;
- (2) $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$;
- (3) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_{\alpha}), A \cup (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_{\alpha})$;
- (6) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset$;
- (7) $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$;
- (8) $A - B = A \cap B^c$.

定理 1.1 (De Morgan 定律)

设 $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为一集族, 则

$$(i) (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha})^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha}^c;$$

$$(ii) (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha})^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha}^c.$$

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha})^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha}$, 故对 $\forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_{\alpha}$, 即 $\forall \alpha \in \Gamma, x \in A_{\alpha}^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha}^c$, 因

此, $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c$. 因此, $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$.
(ii) 类似可证. □

1.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列, 若 $\{A_n\}$ 单调递增, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

定义 1.2 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{C_n\}$ 单调递减, 故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**上限集**, 记为 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 或 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \cdots \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \cdots$$

记 $D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{D_n\}$ 单调递增, 故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**下限集**, 记为 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 或 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则称 $\{A_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. ♣

命题 1.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 则

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_n\} \\ &= \{x : \text{对 } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ 都存在 } n_k \text{ 使得 } x \in A_{n_k}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : \text{除有限个 } A_n \text{ 外, 都含有 } x\} \\ &= \{x : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in A_n, \forall n \geq n_0\}\end{aligned}$$

◆

证明 (1) 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此, x 属于无穷多个 A_n .

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n , 不妨设 $x \in A_{n_k}, k=1, 2, \cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$$(2) x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \iff x \in A_n, \forall n \geq n_0. \quad \square$$

例题 1.1 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n=0, 1, 2, \cdots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n=1, 2, \cdots$, 求 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 与 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解 注意到

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 2)$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ (与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

即当 $n \geq n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能“除有限个 A_n 外, 都含有 x ”, 即 $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$; (ii) “ x 属于无穷多个 A_n ”, 故 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1], \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2)$. \square

例题 1.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则“ $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ ”, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geq k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

 \square

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德 摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

1.2 映射与集合的基数

1.2.1 映射

定义 1.3 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f , 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f: A \rightarrow B$, 其表达式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$. B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subset B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

- (1) 对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应; 并且 f 的一个像可以存在多个原像.
- (2) $f(A) \subset B$, 不一定有 $f(A) = B$;
- (3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

- (4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

- (5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subset 2^A$, 定义 $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 1.4 (单射、满射和双射)

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射.

若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为满射 (或到上的).

既单且满的映射, 称为一一映射 (或双射).

定义 1.5 (逆映射)

设 $f: A \rightarrow B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的逆映射.

笔记 逆映射是反函数概念的推广, 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

定义 1.6 (复合映射和映射的延拓)

设映射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 定义 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 f 与 g 的**复合映射**.

设映射 $f: A \rightarrow B, A_0 \subset A$, 若 $g: A_0 \rightarrow B$ 满足

$$g(x) = f(x), \quad x \in A_0$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的**限制**, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**.

命题 1.2

设一系列映射 $f_i: A_i \rightarrow A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$.

- (1) 若 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.
- (2) 若 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.
- (3) 若 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.



证明


- (1)
- (2)
- (3)

**定义 1.7 (特征函数 (示性函数))**

集合 E 的**特征函数 (示性函数)** 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$



 **笔记** 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 1.3 (特征函数的基本性质)

- (1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$;
- (2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$;
- (3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
- (4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;
- (5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.




证明 证明都是显然的.

**命题 1.4 (映射的基本性质)**

对于映射 $f: C \rightarrow D, A \subset C, B \subset D$, 下列事实成立:

- (i) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$;
- (ii) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$;
- (iii) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;
- (iv) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, 当且仅当 f 为满射时, “=” 成立;
 $A \subset f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;
- (v) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.



 **笔记** (iv) 中第一条的直观理解是: B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是: $C - A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$ (即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subset f(f^{-1}(B))$, 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subset A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾. \square

1.2.2 集合的对等

定义 1.8 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$. 规定 $\emptyset \sim \emptyset$.

 **笔记** A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 1.2

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

- (1) (反身性) $A \sim A$;
- (2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

证明 证明是显然的. \square

命题 1.5

- (1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.
- (2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$.

证明

- (1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f: A \rightarrow C$ 和 $g: B \rightarrow D$. 于是令

$$\varphi: A \times B \rightarrow C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall (a, b) \in A \times B$, 由 $f(a) \in C, g(b) \in D$ 可知 $(f(a), g(b)) \in C \times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f, g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 1.3 自然数集 $\mathbb{N} \sim$ 正偶数集 \sim 正奇数集 \sim 整数集 \mathbb{Z} .

证明 正偶数集 $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 正奇数集 $= \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1} \lfloor n/2 \rfloor : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

例题 1.4 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

证明 $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$.

□

例题 1.5 {去掉一点的圆周} $\sim \mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 1.1, 设圆周为 C , 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点 P) 的直线表示实轴 \mathbb{R} . 对于 $C - \{P\}$ 上的每一点 c , 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x . 建立一一对应: $s : \mathbb{R} \rightarrow C - \{P\}$ 为 $s(x) = c$. (点 P 对应 ∞)

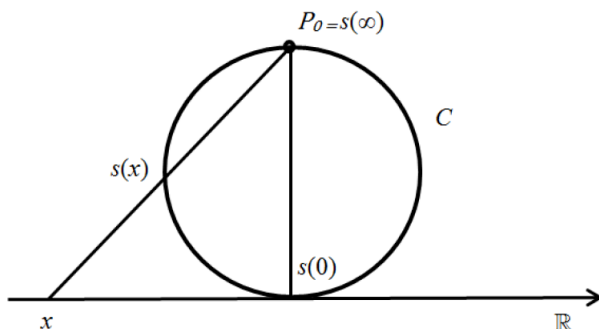


图 1.1: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 1.1

设 A, B 为非空集, 若 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

- (i) $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$;
- (ii) $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
- (iii) $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

♥

证明 作集族

$$\Gamma = \{E \subset A : E \cap g(B - f(E)) = \emptyset\}$$

Γ 中的元称为 A 中的隔离集. 令 $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$, 则 $A_1 \in \Gamma$. 实际上, 对任意的 $E \in \Gamma$, 都有 $E \subset A_1$, 再由 $E \cap g(B - f(E)) = \emptyset$ 知

$$E \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

从而

$$A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B - f(E))] = \emptyset$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1 = f(A_1), B_2 = B - B_1, A_2 = g(B_2)$, 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$, 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此


$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾. □

1.2.3 集合的基数 (势)

定义 1.9 (集合的基数 (势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的**基数或势**相同, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. ♣

 **笔记** 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 1.3

- (1) 自反性: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$.
- (2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.
- (3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$. ♥

证明 由定理 1.2 及集合的基数 (势) 的定义可直接得到. □

定义 1.10

对于集合 A, B , 若有 $B_0 \subset B, A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$. 若 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. 同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. ♣

命题 1.6 (映射与基数之间的关系)

- (1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$;
- (2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$;
- (3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. ♠

证明

- (1)
 - (2)
 - (3)
-

定理 1.4 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:

- (1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.

(2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.



证明

(1) 由题设存在单射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$, 利用引理 1.1 可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$. 注意到 $f: A_1 \rightarrow B_1, g^{-1}: A_2 \rightarrow B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F: A \rightarrow B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$.

(2) 由定义 1.9 和定义 1.10 可知 (2) \Leftrightarrow (1).



例题 1.6 $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.

证明 由例题 1.4 可知, $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subset [-1, 1]$; 又 $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. 由 Bernstein 定理 (1) 可知, $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.



定理 1.5

对于集合 $A, B, \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立.



证明 由定义 1.10 可知, 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 A 与 B 对等, 另外两个不会成立; 假设 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 同时成立, 则存在 $B_0 \subset B, A_0 \subset A$, 使得 $A \sim B_0, B \sim A_0$. 使用 Bernstein 定理 (1) 得出 $A \subset B$, 进而 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 显然矛盾, 证毕.



定义 1.11 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n , 使得 $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}} = n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$.



笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 1.6

设 A 是非空集合, 则

- (1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.
- (2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.



笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设 $\overline{\overline{A}} = n$, 用数学归纳法证明, $n = 1$, 显然. 假设 $n = k$ 时, 结论成立.

当 $n = k + 1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A \sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi: A \rightarrow A_0$. 下面分两种情况:

(i) $\exists a \in A$, 使得 $\varphi(a) = a$.

令 $A_1 = A - \{a\}, A_2 = A_0 - \{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}} = k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1 \sim A_2$. 这与假设矛盾.

(ii) $\forall a \in A$, 都有 $\varphi(a) \neq a$.

A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$. 令

$$A_3 = A - \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 - \{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0 \notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subset A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故 $\varphi(x_0) \in A - \{x_0\} = A_3$, 而 $\varphi(x_0) \notin A_0 - \{\varphi(x_0)\} = A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}} = k$, $\varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3 \sim A_4$. 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 a_1, a_2, \dots . 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1 . 因为 A 是无限集, 集 $A - \{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A - \{a_1\}$ 取一个元素 a_2 , 同样, $A - \{a_1, a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 a_1, a_2, \dots , 记余集为 $\hat{A} = A - \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \dots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作 A 与 \tilde{A} 之间的映射 φ :

$$\varphi(a_i) = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 \tilde{A} 上的一一对应, 证毕.

再证 (1)(2) 的充分性.

(1) 的充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 的充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 是不是有限集. 故 A 一定是无限集. \square

1.3 可列集与不可列集

1.3.1 可列集

定义 1.12 (可列集)

与自然数集 \mathbb{N} 对等的集合称为**可列集**, 其基数记为 \aleph_0 (读作阿列夫零). 有限集和可列集统称为**可数集**.


命题 1.7

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 A 可列, 则存在 \mathbb{N} 到 A 的一一映射 φ , 记为 $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 \mathbb{N} 对等, 从而是可列集. \square

命题 1.8 (可列集的性质)

- (1) 任何无限集必包含一个可列子集.
- (2) 可列集的任何无限子集都是可列集.
- (3) 有限集与可列集的并集是可列集.
- (4) 有限个可列集的并集是可列集.
- (5) 可列个可列集的并集是可列集.
- (6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{A \cup B} = \overline{A}$.
- (7) 设 A, B 为可列集, 则 $A \times B$ 是可列集.
- (8) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 可列, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 可列.

 **笔记** (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 \aleph_0 .

证明

- (1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1 ; 由于 $A - \{a_1\} \neq \emptyset$, 取 $a_2 \in A - \{a_1\}$; 又 $A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, 取 $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$; \cdots , 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- (2) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots , 则 $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$ 为可列集.
- (3) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. 不妨设 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\}$$

可列.

- (4) 设 $A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \cdots\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 为可列集, 则 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \cdots\} \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(n)}, a_3^{(1)}, \cdots\}$$

可列.

- (5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可列集, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \rightarrow a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \cdots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \cdots\} \\ A_3 &= \{a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & a_4^{(n)} \cdots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \cdots, a_{2n+1}^{(n)}, \cdots\}$$

(依次是下标之和等于 $2, 3, \cdots, 2n+2, \cdots$) 可列.

- (6) 不妨设 $A \cap B = \emptyset$, 否则用 $B - A$ 代替 B 即可. A 为无限集, 由 (1) 可知, A 包含一个可列子集 A_1 . 由于 $A_1 \cup B$ 是可列集, 故 $A_1 \cup B \sim A_1$. 注意到 $(A - A_1) \cap (A_1 \cup B) = \emptyset$, 则有

$$A \cup B = (A - A_1) \cup A_1 \cup B = (A - A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A - A_1) \cup A_1 = A.$$

因此, $\overline{A \cup B} = \overline{A}$.

- (7) 由命题 1.7 可设 $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j). \end{aligned}$$

由(5)可知, 对 $\forall i \in \mathbb{N}, \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明. □

例题 1.7 有理数集 \mathbb{Q} 是可列集.

证明 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, 其中 $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质 (3) 和可列集的性质 (4), 只需证明 \mathbb{Q}^+ 可列.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (除去重复元), 由可列集性质 (5) 知 \mathbb{Q}^+ 可列. □

例题 1.8 实轴上互不相交的开区间至多有可列个.

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 \mathbb{Q} 的一个子集. 又 \mathbb{Q} 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个. □

例题 1.9 整系数多项式的全体 \mathbf{P} 是可列集.

证明 对每个 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, 令

$$P_n = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$$

由命题 1.8(8) 知 P_n 可列. 又 $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, 由可列集性质知 \mathbf{P} 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集. □

例题 1.10 \mathbb{R} 上单调函数的不连续点至多有可列个.

证明 不妨设 f 单调递增, 若 x_0 是 f 的不连续点, 则

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

故 x_0 就对应着一个开区间 $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$. 显然, 若 x_1, x_2 是 f 的不同不连续点, 则对应区间 $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ 与 $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$ 互不相交. 而 \mathbb{R} 上互不相交的开区间至多有可列个, 故 f 的不连续点也至多有可列个. □

1.3.2 不可列集

定义 1.13 (不可列集)

不是可列集的无限集称为不可列集. ♣

定理 1.7

$[0, 1]$ 是不可列集. ♡

证明 假设 $[0, 1]$ 可列, 则可表示为 $[0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0, 1]$ 三等分为: $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1 , 记该区间为 I_1 , 则 $x_1 \notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2 , 记该区间为 I_2 , 则 $x_2 \notin I_2, I_2 \subset I_1; \dots$, 依次做下去, 可得到一系列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

- (i) $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$;
- (ii) $x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N}$;
- (iii) I_n 的长度为 $1/3^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

由闭区间套定理, 存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾. \square

定义 1.14

若 $A \sim [0, 1]$, 则称 A 具有**连续基数**, 记 $\overline{\overline{A}} = \aleph$.

定理 1.8

对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a, b]}} = \overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$.

证明 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x) = a + (b - a)x$ 建立了 $[0, 1]$ 与 $[a, b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a, b]}} = \aleph$. 又 (a, b) 和 $[a, b]$ 与 $[a, b]$ 分别只差一个点和两个点, 由**可列集的性质 (6)**知 $\overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{[a, b]}} = \overline{\overline{[a, b]}} = \aleph$. 最后, 由 \mathbb{Q} 与 \mathbb{R} 对等] 例 1.6 以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[-1, 1]}} = \aleph$. \square

推论 1.1

无理数的基数为 \aleph .

证明 记无理数集为 \mathbb{I} , 注意到 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 且 \mathbb{Q} 可列, 由**可列集的性质 (6)**可得 $\overline{\overline{\mathbb{I}}} = \overline{\overline{\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$. \square

定理 1.9

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph$.

证明 不妨设 $A_i \cap A_j = \emptyset$. 由于 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $A_n \sim (n, n+1]$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}$. \square

定义 1.15

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, \dots, C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{\overline{\overline{A}}}$$

更一般地, 设 $\overline{\overline{A}} = \mu$, 定义 $2^A = 2^\mu$.

命题 1.9

设 A, B 都是非空集合, 则 $A \sim B$ 的充要条件是 $2^A \sim 2^B$.

证明 必要性: 由 $A \sim B$ 可知 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 于是 $2^A = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = 2^{\overline{\overline{B}}}$. 故 $2^A \sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, 则 $2^A = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = 2^{\overline{\overline{B}}}$, 这与 $2^A \sim 2^B$ 矛盾! 故 $A \sim B$. \square

引理 1.2

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 \mathcal{F}_A 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A \sim 2^A$. 进而 $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = \overline{\overline{2^A}}$.

证明 对于每个 $E \in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 \mathcal{F}_A 与 2^A 对等. \square

定理 1.10

$$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 \mathbb{N} 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0, 1]$ 对等.

对任意的 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f: \varphi \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0, 1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0, 1]$ 的单射, 故命题 1.10 可知 $\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \leq \overline{(0, 1]}$.

另一方面, 对每一个 $x \in (0, 1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0, 1\}.$$

定义映射

$$g: x \rightarrow \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

易知, g 是从 $(0, 1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由命题 1.10 可知 $\overline{(0, 1]} \leq \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}$.

由 Bernstein 定理可知 $\overline{(0, 1]} = \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}$. 再由引理 1.2 可得 $\aleph = \overline{(0, 1]} = \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} = \overline{2^{\mathbb{N}}} = 2^{\aleph_0}$. \square

例题 1.11 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

证明 由定理 1.10 及命题 1.9 和 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}}$, 故再由命题 1.5 可得 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$. \square

例题 1.12 用 M 表示 $[0, 1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{M} = 2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0, 1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] - E \end{cases}$$

显然, $\chi_E \in M$. 故 $\overline{M} \supseteq \overline{2^{[0, 1]}} = 2^{\aleph}$.

另一方面, 对每一个 $f \in M$, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{M} \leq \overline{2^{\mathbb{R}^2}} = \overline{2^{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{M} = 2^{\aleph}$. \square

定理 1.11 (无最大基数定理)

设 A 为非空集, 则 $\overline{A} < 2^{\overline{A}}$.

证明 由于 2^A 中的单元素集与 A 对等, 故 $\overline{A} \leq \overline{2^A}$.

若存在集合 A 满足 $\overline{A} = \overline{2^A}$, 则存在 $f: A \rightarrow 2^A$ 为一一映射. 令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

注意到 $\emptyset \in 2^A$, 则存在 $x_0 \in A$ 使得 $f(x_0) = \emptyset$, 故 $x_0 \notin f(x_0)$. 这说明 $x_0 \in B$, 从而 $B \neq \emptyset$.

又 $B \in 2^A$, 则存在 $x_B \in A$ 使得 $f(x_B) = B$. 下面考察 x_B 与 B 的关系: 若 $x_B \in B$, 则 $x_B \notin f(x_B) = B$, 矛盾; 若 $x_B \notin B$, 即 $x_B \notin f(x_B)$, 这又蕴涵 $x_B \in B$, 矛盾. \square