0.1 群集合上的作用

定义 0.1 (群作用)

设 G 是一个群,X 是一个非空集合. 若 $G \times X$ 到 X 的映射 f 满足

(1) $f(e,x) = x, \forall x \in X$, e 为 G 的幺元;

(2) $f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)), \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$,

则称 f 决定了**群 G 在 X 上的一个作用**.

群 G 可以多种方式作用在一个集合 X 上. 在不需要特别指出映射 f(即固定好一种作用方式) 时, 常记

$$f(g,x) = g(x), \quad \forall g \in G, x \in X.$$

此时 f 满足的条件 (1), (2) 相应地变为

(1) $e(x) = x, \forall x \in X$,$e$ 为 G 的幺元;

(2) $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall x \in X, g_1, g_2 \in G$.

♣

定理 0.1

1. 设 G 是一个群, 取 $X = G$,
   (a). 若定义 f 为
   $$f(g,x) = L_g(x) = gx, \quad \forall g, x \in G.$$
   则 f 定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为**左平移作用**.
   (b). 若定义 f_1 为
   $$f_1(g,x) = R_{g^{-1}}(x) = xg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$
   则 f_1 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为**右平移作用**.
   (c). 若定义 f_2 为
   $$f_2(g,x) = \mathrm{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$
   则 f_2 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 称为**伴随作用**.
2. 设 H 为群 G 的子群, 取 $X = G/H$(H 在 G 中全体左陪集的集合). 定义 f 为
   $$f(g, xH) = gxH, \quad \forall g \in G, xH \in G/H,$$
   则 f 定义了 G 在 G/H 上的作用 (**左平移作用**). 特别地, 当 $H = \{e\}$ 时,f 恰是 G 在 G 上的左平移作用.

♡

证明

□

定义 0.2

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$, 使 $y = g(x)$, 则称 G 在 X 上的作用是**可递的**,X 称为 (对于 G 的) **齐性空间**.

♣

定义 0.3

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $g(x) = x(\forall g \in G, \forall x \in X)$, 则称 G 在 X 上的作用是**平凡的**.

♣

注 显然, 对任意群 G, 任意非空集合 X, 总可定义 G 在 X 上的平凡作用. 由上述定义知 G 在 G 上的伴随作用为平凡作用当且仅当 G 为 Abel 群.

定义 0.4

设群 G 作用在集合 X 上,e 为 G 的幺元, 若当且仅当 $g=e$ 时,$g(x)=x(\forall x\in X)$ 成立, 则称 G 在 X 上的作用是**有效的**.

命题 0.1

群 G 在 G 上的左平移作用与右平移作用既是可递的又是有效的, 而 G 在 G/H 上的左平移作用是可递的.

注 G 在 G 上的伴随作用的可递性与有效性都不能肯定.

G 在 G/H 上的左平移作用不一定是有效的.

证明

□

定义 0.5

设群 G 作用在集合 X 上,$x\in X$. 称 X 中的子集

$$O_x=\{g(x)\in X\mid g\in G\}$$

为 x 的**轨道**. G 中子集

$$S_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$$

称为 x 的**迷向子群**. 也称为 x 在 G 中的**稳定子**或**稳定化子**.

注 容易验证 x 的迷向子群是 G 的子群.

命题 0.2

群 G 在集合 X 上的作用是可递的充要条件是对 $\forall x\in X$, 有 $X=O_x$.

进而对 $\forall x\in X$,G 在 O_x 上的作用都是可递的.

证明 **必要性**: 对 $\forall x\in X$, 固定 x. 再对 $\forall y\in X$, 则由 G 在 X 上的作用是可递的知, 存在 $g\in G$, 使得 $y=g(x)\in O_x$. 故由 y 的任意性知 $X\subseteq O_x$. 又显然 $O_x\subseteq X$, 故 $X=O_x$.

充分性: 若对 $\forall x\in X$, 有 $X=O_x$, 则对 $\forall y\in X$, 都存在 $g\in G$, 使得 $y=g(x)$. 因此由 x,y 的任意性知 G 在 X 上的作用是可递的.

□

例题 0.1 设 $X=\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间,$G=SO(n)$ 为 X 的特殊正交群,G 以通常方式作用在 X 上. 又设 $X=(1,0,\cdots,0)'$, 则易得

$$O_x=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}\in X,|\boldsymbol{y}|=1\}=S^{n-1}$$

是 X 中 $n-1$ 维单位球面, 其中,$|\boldsymbol{y}|$ 为向量 $\boldsymbol{y}$ 的长度,

$$S_x=\{\mathrm{diag}(1,A)\mid A\in SO(n-1)\},$$

故 S_x 与 $n-1$ 维特殊正交群 $SO(n-1)$ 同构.

证明

□

定理 0.2

设群 G 作用在集合 X 上. 则有

(1) $O_x=O_y\iff O_x\cap O_y\neq\varnothing$.

(2) 在 X 中定义关系 R:

$$xRy\iff \exists g\in G,\text{使}\,y=g(x).$$

则 R 为等价关系且 x 所在的等价类为 x 的轨道 O_x, 进而 X 等价类 (所有轨道) 集合是 X 的一个分划. 即 X 是所有不同轨道的并

$$X = \bigsqcup_{x} O_x,$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.

(3) 如果 X 为有限集, 则

$$|X| = \sum_{x \in X} |O_x|,$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.

证明

(1) 设 $O_x \cap O_y \neq \varnothing$. 任取 $z \in O_x \cap O_y$, 则存在 $g_1, g_2 \in G$, 使

$$g_1 x = z = g_2 y.$$

于是 $y = g_2^{-1} g_1 x \in O_x$, 由此得 $O_y \subseteq O_x$. 同理可证 $O_x \subseteq O_y$. 所以 $O_x = O_y$.

(2) 对 $\forall x, y, z \in X$, 由 $e(x) = x$ 知 $xRx\ (\forall x \in X)$, 由 $g(x) = y$ 得 $g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$, 即 $xRy \Rightarrow yRx$, 再由 xRy, yRz 知 $\exists g_1, g_2 \in G$, 使得 $y = g_1(x), z = g_2(y)$, 故 $z = g_2 g_1(x)$, 即 xRz. 这就说明 R 是等价关系, 由 R 的定义知 x 的等价类为 O_x.

(3) 因为 X 是有限集, 所以至多只有有限多个不同的轨道. 由定理 0.2(2)知

$$X = \bigsqcup_{x \in X} O_{x_i}.$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素. 又因为 $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \varnothing (i \neq j)$, 所以

$$|X| = \sum_{x \in X} |O_x|.$$

□

定理 0.3

设群 G 作用在集合 X 上.

(1) 对 $\forall g \in G$, 定义 X 到 X 的映射 σ 满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X \tag{1}$$

则定义的 σ_g 是 X 的可逆变换, 即 $\sigma_g \in S_X$.

(2) 定义的 G 到 S_X 的映射 σ 满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \forall g \in G.$$

其中 σ_g 的定义如(1)式. 则

(i) σ 是一个同态映射, 并且 G 在 X 上的作用有效当且仅当 σ 是单同态.

(ii) $\ker \sigma \lhd G$, G 在 O_x 上作用有效当且仅当 S_x 中所包含的 G 的正规子群仅为 $\{e\}$.

(3) 若 σ 是群 G 到 S_X 的同态, 则由

$$g(x) = \sigma(g)(x), \quad \forall g \in G, x \in X \tag{2}$$

定义了 G 在 X 的作用.

证明

(1) 任取 $g \in G$, 由式(1)有

$$\sigma_{g^{-1}} \sigma_g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

同样有

$$\sigma_g\sigma_{g^{-1}}(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

故

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g = \sigma_g\sigma_{g^{-1}} = \mathrm{id}_X,$$

因而 $\sigma_g \in S_X$ 且 $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$.

(2) (i) 取 $g_1, g_2 \in G$, 对 $\forall x \in X$ 有

$$\sigma(g_1g_2)(x) = \sigma_{g_1g_2}(x) = g_1g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) = \sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x),$$

即

$$\sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

因而 σ 是 G 到 S_X 的同态. 注意到

$$g \in \ker\sigma \iff \sigma(g) = \sigma_g = \mathrm{id}_X,$$

即

$$g(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

故 G 在 X 上作用有效当且仅当 $\ker\sigma = \{e\}$, 即 σ 是单射.

(ii) 设 σ 为 G 到 S_{O_x} 的映射, 满足 $\sigma(g)y = g(y)(\forall y \in O_x)$. 于是由定理 0.3知 σ 是同态且 G 在 O_x 上作用有效当且仅当 $\ker\sigma = \{e\}$. 由命题**????**知道 $\ker\sigma \lhd G$. 注意到

$$g \in \ker\sigma \iff \sigma(g) = \mathrm{id}_X \iff g(x) = x(\forall x \in X) \iff g \in S_x. \tag{3}$$

故 $\ker\sigma \subseteq S_x$, 因而若 S_x 中所含 G 的正规子群仅为 $\{e\}$, 则必有 $\ker\sigma = \{e\}$. 从而 G 在 O_x 上作用有效.
设 $N \lhd G, N \subseteq S_x$. 任取 $h \in N$, 对 $\forall y \in O_x$, 都存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 由 $N \lhd G$ 知 $g^{-1}hg \in N \subseteq S_x$, 因而

$$h(y) = h(g(x)) = gg^{-1}hg\,(x) = g(g^{-1}hg(x)) = g(x) = y, \quad \forall y \in O_x.$$

由(3)式知 $h \in \ker\sigma$, 即 $N \subseteq \ker\sigma$. 所以若 G 在 O_x 上作用有效, 则 $\ker\sigma = \{e\}$, 由此知 $N = \{e\}$, 即 $\{e\}$ 为 S_x 所包含的唯一的 G 的正规子群.

(3) 因 σ 是 G 到 S_X 的同态, 由式(2)有

$$e(x) = \sigma(e)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

$$g_1(g_2(x)) = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)(x)) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x) = \sigma(g_1g_2)(x) = g_1g_2(x), \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G,$$

即 σ 定义了 G 在 X 上的作用.

□

定义 0.6

设群 G 作用在集合 X 与 X' 上, 若有 X 到 X' 上的一一对应 ϕ, 使

$$g(\phi(x)) = \phi(g(x)), \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称 G 在 X, X' 上的**作用等价**.

♣

注 如果将 g 引起的 X, X' 上的置换仍以 g 来表示, 那么 G 在 X, X' 上的作用等价也就是对任何 $g \in G$,图 1是交换图.

如果在 G 作用的集合之间规定关系 $R : XRX'$, 若 G 在 X, X' 上作用等价. 这显然是一个等价关系, 因而从抽象的观点来看, 等价作用可以看成是一样的.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & X' \end{tikzcd}$$

图 1

定理 0.4

设群 G 在 X 上的作用可递,$x \in X$, 则 G 在 X 上的作用与 G 在 G/S_x 上的作用 (左平移作用) 等价.

注 这个定理表明 G 在每个轨道上的作用相当于 G 在某个左陪集空间上的作用.

证明 因 G 在 X 上的作用可递, 于是由命题 0.2有

$$X = O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

作 G/S_x 到 X 的映射 ϕ 如下:

$$\phi(gS_x) = g(x), \quad \forall g \in G.$$

显然 ϕ 是满射. 由于 $g_1S_x = g_2S_x$ 当且仅当 $g_1^{-1}g_2 \in S_x$, 当且仅当 $g_1^{-1}g_2(x) = x$, 当且仅当 $g_1(x) = g_2(x)$, 因而 ϕ 是单射. 故 ϕ 是 G/S_x 到 X 上的一一对应. 又对 $\forall h \in G$ 有

$$\phi(h(gS_x)) = \phi(hgS_x) = hg(x) = h(\phi(gS_x)),$$

故 G 在 G/S_x 与 X 上的作用等价.

□

推论 0.1

设有限群 G 作用在集合 X 上,O_x 为 $x \in X$ 的轨道, 则 O_x 中元素个数 $|O_x| = [G : S_x]$, 因而

$$|G| = |O_x|\,|S_x|.$$

如果 X 还是有限集, 则

$$|X| = \sum_{x \in X}[G : S_{x_i}], \tag{4}$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素. 公式(4)称为**轨道公式**.

证明 由定理 0.2(2)知 G 在 O_x 上作用可递, 故由定理 0.4知,G 在 X 上的作用与 G 在 G/S_x 上的作用等价, 即存在 X 到 G/S_x 的双射. 因此 $|O_x| = [G : S_x]$. 再由 Lagrange 定理知

$$|G| = [G : S_x]\,|S_x| = |O_x|\,|S_x|,$$

再由定理 0.2(3)可得

$$|X| = \sum_{x \in X}[G : S_{x_i}],$$

其中 x 取遍 X 的不同轨道的代表元素.

□

定理 0.5

设 G 是一个群, 在伴随作用下. 对 $\forall g \in G$, 则 G 上的内自同构$\mathrm{ad}g$:

$$\mathrm{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G. \tag{5}$$

满足

$$S_{g(x)} = \mathrm{ad}g(S_x) = gS_xg^{-1}.$$

证明 设 $g(x)=y$ 且 $g_1\in S_y$, 即有 $y=g_1(y)$, 则 $g_1g(x)=g(x)$, 因而 $g_2=g^{-1}g_1g\in S_x$, 故 $g_1=gg_2g^{-1}\in \mathrm{ad}g(S_x)$. 反之, 若 $g_2\in S_x$, 则有

$$gg_2g^{-1}(y)=gg_2g^{-1}(g(x))=g(x)=y,$$

故 $gg_2g^{-1}\in S_y$. 这样就证明了 $S_y=\mathrm{ad}g(S_x)$.

□

定义 0.7

设 G 是一个群,$g\in G$, g 在伴随作用下的轨道称为以 g 为代表的**共轭类**, 记为 C_g. 若 $h\in C_g$, 则称 h 与 g **共轭**.

g 在伴随作用下的迷向子群, 称为 g 在 G 中的**中心化子**, 记作 $C_G(g)$. 在不混淆时, 简称为 g 的**中心化子**, 记作 $C(g)$. 若 $H\subseteq G$, 则将 H 中每个元素在 G 中的中心化子之交

$$C_G(H)=\bigcap_{h\in H}C_G(h)=\bigcap_{h\in H}F_h$$

称为 H 在 G 中的**中心化子**.

在伴随作用下, 对 $\forall g\in G$, 则 G 上的内自同构adg:

$$\mathrm{ad}g(x)=gxg^{-1},\quad \forall x\in G.$$

也称 adg 为群 G 的**共轭变换**,x 在共轭变换下的像 gxg^{-1} 称为 x 的**共轭元**.

再定义 G 到 Int$G$ 的同态ad 满足

$$\mathrm{ad}: g\longrightarrow \mathrm{ad}g,\quad \forall g\in G.$$

称 ker ad 为 G 的**中心**, 记作 $C(G)$ 或 $Z(G)$.

♣

定理 0.6

设 G 是一个群,$H\subseteq G$,$g\in G$, 在伴随作用下, 有

(1) $C_g=\{kgk^{-1}\mid k\in G\}$.

(2) $g,h\in G$共轭 $\Longleftrightarrow \exists k\in G$, 使$h=kgk^{-1}$.

(3) $C_G(g)=C(g)=\left\{k\in G\mid kgk^{-1}=g\right\}=\{k\in G\mid kg=gk\}$.

(4) $C_G(H)=\{g\in G\mid hgh^{-1}=g\}=\{g\in G\mid hg=gh,\forall\in H\}$.

(5) $C(G)=\left\{k\in G\mid kgk^{-1}=g,\forall g\in G\right\}=\{k\in G\mid kg=gk,\forall g\in G\}$.

♡

证明

(1) 由定义知

$$C_g=\{\mathrm{ad}k\,(g)\in G\mid k\in G\}=\left\{kgk^{-1}\in G\mid k\in G\right\}.$$

(2) 由定理 0.6(1)知

$$C_g=\left\{kgk^{-1}\in G\mid k\in G\right\},$$

则

$$g,h\in G\text{共轭}\Longleftrightarrow h\in C_g\Longleftrightarrow \exists k\in G,\text{使}h=kgk^{-1}.$$

(3) 由定义知

$$\begin{aligned}C_G(H)&=\bigcap_{h\in H}C_G(h)=\bigcap_{h\in H}F_h=\bigcap_{h\in H}\{g\in G\mid ghg^{-1}=h\}\\&=\left\{g\in G\mid ghg^{-1}=h,\forall h\in H\right\}=\{g\in G\mid gh=gh,\forall h\in H\}.\end{aligned}$$

(4) 由定义知

$$C_G(g)=C(g)=\{k\in G\mid \mathrm{ad}k\,(g)=g\}=\left\{k\in G\mid kgk^{-1}=g\right\}=\{k\in G\mid kg=gk\}.$$

(5) 由定义知

$$\begin{aligned} C(G) &= \ker \mathrm{ad} = \{k \in G \mid \mathrm{ad}\,(k) = \mathrm{id}_G\} = \{k \in G \mid \mathrm{ad}k = \mathrm{id}_G\} \\ &= \left\{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\right\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}. \end{aligned}$$

□

定理 0.7

设 G 是一个群,$g \in G$, 则有

(1) $C(g) = C(g^{-1})$.

(2) 设 $A < G$, 则 $C_G(C_G(C_G(A))) = C_G(A)$.

(3) $C(G)$ 是 G 的正规子群且 $\mathrm{ad}G \cong G/C(G)$.

(4) G 中共轭关系为等价关系, 因而 G 的共轭类的集合是 G 的一个分划. 即 X 是所有不同轨道的并

$$X = \bigsqcup_x O_x,$$

其中 x 取遍 X 的不同共轭类的代表元素.

(5) 若 G 是有限群, 则 $|C_g| = [G : C(g)]$, 并且

$$|G| = |C(G)| + \sum_{x \in G} [G : C(x)], \tag{6}$$

其中 x 取遍非中心的元素的共轭类的代表元. 公式(6)称为**群方程**.

(6) $h \in C(G) \iff |C_h| = 1 \iff h \in \bigcap\limits_{g \in G} C(g)$. 进而 $C(G) = \bigcap\limits_{g \in G} C(g)$.

证明

(1) 只需注意到

$$C(g) = \left\{k \in G \mid kgk^{-1} = g\right\} = \left\{k \in G \mid \left(kgk^{-1}\right)^{-1} = g^{-1}\right\} = \left\{k \in G \mid kg^{-1}k^{-1} = g^{-1}\right\} = C\left(g^{-1}\right).$$

(2) 令 $B = C_G(C_G(A))$, 要证 $C_G(B) = C_G(A)$. 利用定理 0.6(4).

设 $x \in C_G(A)$. 对于任一 $y \in B = C_G(C_G(A))$, 则 y 与 x 可换, 即 x 和 y 可换, 即 $x \in C_G(B)$. 故 $C_G(A) \subseteq C_G(B)$. 反之, 设 $y \in C_G(B)$, 即 y 与 B 中任一元可换. 因为 $C_G(A)$ 中任一元与 A 中任一元可换, 故 A 中任一元与 $C_G(A)$ 中的元可换, 于是

$$A \subseteq C_G(C_G(A)) = B.$$

从而 y 与 A 中任一元可换, 即 $y \in C_G(A)$. 故 $C_G(B) \subseteq C_G(A)$. 从而 $C_G(B) = C_G(A)$.

(3) 由定理 0.3(2)(ii)知 $C(G) \lhd G$. 再由群的同态基本定理知 $\mathrm{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构.

(4) 由定理 0.2(2)即得.

(5) 由推论 0.1得

$$|G| = \sum_x [G : C(x)], \tag{7}$$

其中 x 取遍不同的共轭类的代表元素. 又由于

$$[G : C(x)] = 1 \iff G = C(x) \iff x \in C(G),$$

所以在(7)式中把值为 1 的项加到求和号外面来即得

$$|G| = |C(G)| + \sum_x [G : C(x)],$$

其中 x 取遍非中心的元素的共轭类的代表元.

(6) 由定理 0.6可得

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff ghg^{-1} = h, \forall g \in G \iff C_h = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\} = \{h\} \iff |C_h| = 1; \end{aligned}$$

$$h \in C(G) \Longleftrightarrow h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \Longleftrightarrow hg = gh, \forall g \in G$$
$$\Longleftrightarrow h \in \{k \in G \mid kg = gk\}, \forall g \in G \Longleftrightarrow h \in C(g), \forall g \in G \Longleftrightarrow h \in \bigcap_{g \in G} C(g).$$

□

定理 0.8 (Cauchy 定理)

设 G 为有限群,$|G| = n$, 则对 n 的任一素因子 p,G 必有阶为 p 的元素.

证明 对 n 应用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 结论显然成立. 假定结论对所有阶小于 n 的群成立. 考察 n 阶群 G 的群方程:

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^{t} [G : C(x_i)],$$

其中 x_i 取遍非中心的元素的共轭类的代表元,t 为 G 中所有不同轨道的个数.

(a) 如果 $p \mid |C(G)|$, 则由命题??知 $C(G)$ 含有阶为 p 的元素, 从而 G 含有阶为 p 的元素.

(b) 如果 $p \nmid |C(G)|$, 则因为 $p \mid |G|$, 所以至少存在一个 x_i, 使 $p \nmid [G : C(x_i)]$, 即 $p \nmid \dfrac{|G|}{|C(x_i)|}$. 又 $p \mid |G|$, 故 $p \mid |C(x_i)|$. 因为 $\dfrac{n}{|C(x_i)|} = \dfrac{|G|}{|C(x_i)|} = [G : C(x_i)] > 1$, 所以 $|C(x_i)| < n$. 由归纳假设知 $C(x_i)$ 含有阶为 p 的元素, 因此 G 含有阶为 p 的元素.

从而由归纳法原理知结论成立.

□

定义 0.8

设群 G 作用在集合 X 上,$g \in G$,$x \in X$.

(1) 如果 $g(x) = x$, 则称 x 为 g 的一个**不动元素** (fixed element).g 的全部不动元素的集合称为 g 的**不动元素集** (the set of fixed elements), 记作 F_g.

(2) 如果对任意的 $g \in G$, 都有 $g(x) = x$, 则称 x 为 G 的一个**不动元素**.G 的全部不动元素的集合称为 G 的**不动元素集**, 记作 F_G.

定理 0.9 (Burnside 引理)

设有限群 G 作用在有限集合 X 上,n 表示 X 在 G 的作用下的不同轨道数, 则

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|, \tag{8}$$

其中 $|F_g|$ 表示 g 的不动元素的个数.

证明 对任意的 $x \in X$,$g \in G$, 定义

$$\delta(g, x) = \begin{cases} 1, & g(x) = x, \\ 0, & g(x) \neq x. \end{cases}$$

由定义知

$$|F_g| = \sum_{x \in X} \delta(g, x), \quad |S_x| = \sum_{g \in G} \delta(g, x),$$

则

$$\sum_{g \in G} |F_g| = \sum_{g \in G} \left(\sum_{x \in X} \delta(g, x) \right) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{g \in G} \delta(g, x) \right) = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

如果 $x \in O_{x_i}$, 则 $O_x = O_{x_i}$, 从而由推论 0.1可得

$$|S_x| = \frac{|G|}{|O_x|} = \frac{|G|}{|O_{x_i}|} = |S_{x_i}|,$$

所以, 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个不同轨道的代表元素, 则由定理 0.2(2)和推论 0.1可得

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G}|F_g| &= \sum_{x\in X=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}} |S_x| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in O_{x_i}}|S_x| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in O_{x_i}}|S_{x_i}| = \sum_{i=1}^{n}|O_{x_i}||S_{x_i}| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|G| = n|G|.
\end{aligned}$$

由此得

$$n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F_g|.$$

□

定理 0.10

设 H 是群 G 的子群, 则

(1) $\forall g \in G, H_1 = gHg^{-1}$ 也是 G 的子群, 并且 $H_1 \cong G$, 称 H_1 为 H 的**共轭子群**;

(2) 群 G 的子集 $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ 也是 G 的子群, 而且 $H \lhd N_G(H)$,$N_G(H)$ 称为 H 在 G 中的**正规化子**, 也简称为 H 的**正规化子**.

♡

证明

(1) 以 e 表示 G 的幺元. 因为 $e = geg^{-1} \in H_1$, 故 $H_1 \neq \varnothing$. 设 $h_1, h_2 \in H$, 于是

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1},\ (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in H_1.$$

由此知 H_1 是 G 的子群.

令

$$\begin{aligned}\phi : H &\longrightarrow gHg^{-1} \\ x &\longmapsto gxg^{-1}.\end{aligned}$$

显然, ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的一个良定义的映射.

设 $x, y \in H$, 如果 $\phi(x) = \phi(y)$, 即 $gxg^{-1} = gyg^{-1}$, 则 $x = y$, 所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的单映射.

对任意的 $x \in gHg^{-1}$, 有 $y = g^{-1}xg \in H$, 使

$$\phi(y) = gyg^{-1} = g(g^{-1}xg)g^{-1} = x,$$

所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 满映射.

对任意的 $x, y \in H$, 有

$$\phi(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \phi(x)\phi(y).$$

所以 ϕ 为 H 到 gHg^{-1} 的同构映射, 即

$$\phi:\ H \cong gHg^{-1}.$$

(2) G 在 G 的伴随作用下,H 的迷向子群恰为 $N_G(H)$, 故 $N_G(H)$ 是 G 的子群. 因 H 是 G 的子群且 $H \subseteq N_G(H)$, 故 H 是 $N_G(H)$ 的子群. 又 $\forall g \in N_G(H), gHg^{-1} = H$, 因此 $H \lhd N_G(H)$.

□

定理 0.11

设 H 是群 G 的子群, 则

(1) G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G:N_G(H)]$;

(2) $H \lhd G \iff N_G(H)=G$.

证明

(1) 设 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的映射 f, 满足

$$f(gHg^{-1})=gN_G(H), \quad \forall g\in G.$$

显然 f 是满射. 因为 $gHg^{-1}=g_1Hg_1^{-1}$ 当且仅当 $H=g^{-1}g_1H(g^{-1}g_1)^{-1}$ 当且仅当 $g^{-1}g_1\in N_G(H)$ 当且仅当 $gN_G(H)=g_1N_G(H)$, 所以 f 是单射. 因此 f 是 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的双射. 从而 G 中与 H 共轭的子群的个数与 $|G/N|$ 相等, 即 G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G:N_G(H)]$.

(2) 因为 $H\lhd G$ 当且仅当 $\forall g\in G, gHg^{-1}=H$, 所以由 $N_G(H)$ 的定义知 $N_G(H)=G$.

□

命题 0.3

有限群 G 的一个真子群的全部共轭子群之并不能覆盖整个群 G.

注 **这个结论对无限群不成立.** 例如, 令 $G=GL(n,\mathbb{C})$, H 是 n 阶上三角可逆复矩阵作成的真子群. 由 Jordan 标准型知任一 n 阶可逆阵 A 相似于其 Jordan 标准型, 而可逆矩阵的 Jordan 标准型都是 H 中的元, 这表明 G 是 H 的所有共轭子群之并.

证明 设 H 是 G 的真子群, 则由定理 0.11(1)知 H 共有 $[G:N_G(H)]$ 个共轭子群. 令 Σ 是 H 的所有共轭子群之并, 则 (幺元单独计数)

$$|\Sigma|\leqslant(|H|-1)[G:N_G(H)]+1=\frac{|G|}{|N_G(H)|}\cdot|H|-[G:N_G(H)]+1.$$

若 H 是正规子群, 则由定理 0.11(2)知 $N_G(H)=G$, 于是

$$|\Sigma|\leqslant|H|-1+1=|H|<|G|.$$

若 H 不是正规子群, 则由定理 0.11(2)知 $N_G(H)\neq G$, 于是 $[G:N_G(H)]>1$,

$$|\Sigma|\leqslant\frac{|G|}{|H|}\cdot|H|-[G:N_G(H)]+1<|G|-1+1=|G|.$$

综合以上, $|\Sigma|<|G|$, 即 H 的全部共轭子群之并不能覆盖 G.

□

例题 0.2 令 $G=GL(n,\mathbb{C})$, P 是主对角线上的元均为 1 的 $n\times n$ 上三角方阵全体形成的 G 的子群. 确定 $N_G(P), C_G(P)$ 和 P 的中心 $Z(P)$.

解 由矩阵的乘法直接计算可知与任一 n 阶主对角线为 1 的上三角矩阵可换的矩阵必为上三角矩阵, 且形如

$$J_n(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & \mu\\ & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & \lambda & 0\\ & & & & \lambda\end{pmatrix},$$

其中 $\mu\in\mathbb{C}$. 要看出这一点, 只要取主对角线为 1 且 $(i,i+1)$ 处为 1, 其余全为 0 的上三角矩阵即可,$i=1,\cdots,n-1$. 因此

$$C_G(P)=\{J_n(\lambda,\mu)\mid\lambda,\mu\in\mathbb{C},\lambda\neq0\}.$$

由此即知 $Z(P)=\{J_n(1,\mu)\mid\mu\in\mathbb{C}\}$.

下面求

$$\begin{aligned} N_G(P) :&= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AP = PA\} \\ &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AJA^{-1} \subseteq P,\ A^{-1}JA \subseteq P,\ \forall J \in P\}. \end{aligned}$$

首先, 所有 n 阶上三角可逆矩阵均在 $N_G(P)$ 中. 我们断言:$N_G(P)$ 恰是所有 n 阶上三角可逆矩阵作成的群.

设 A 是 n 阶可逆矩阵且 A 不是上三角的. 设 a_{ij} 是 A 中主对角线以下的非零元且 i 最大, 即

$$a_{ij} \neq 0, i > j;\ 且若 a_{st} \neq 0, s > t, 则 i \geqslant s.$$

令 J 是主对角线全为 1 且 $(j, j+1)$ 处为 1, 其余全为 0 的矩阵. 则 AJ 是将 A 的第 j 列加到第 $j+1$ 列后得到的矩阵, 从而 AJ 不是上三角的.

下证 $A \notin N_G(P)$. 否则存在 $B \in P$ 使得 $AJ = BA$, 注意到 AJ 的第 $(i, j+1)$ 处元是

$$a_{i,j} + a_{i,j+1}.$$

但 BA 是对 A 施行一系列初等行变换得到的, 这些行变换是将大数行的若干倍加到小数行. 由 A 的选取知 BA 的 $(i, j+1)$ 处元与 A 的 $(i, j+1)$ 处元相同, 均为 $a_{i,j+1}$, 从而 $AJ \neq BA$, 矛盾. 所以 $A \notin N_G(P)$. 即 $N_G(P)$ 恰是所有 n 阶上三角可逆矩阵作成的群.

$\square$