

0.1 微分不等式问题

0.1.1 一阶/二阶构造类

命题 0.1 (Gronwall 不等式)

设 $\alpha, \beta, \mu \in C[a, b]$ 且 β 非负, 若还有


$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds, \forall t \in [a, b]. \quad (1)$$

证明:

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

 **笔记** 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$, 则

$$F'(t) = \beta(t)\mu(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y' = \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)y \Rightarrow y = ce^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t) = \frac{F(t) - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds}{e^{\int_a^t \beta(s)ds}} = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b].$$

证明 令

$$c(t) = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b], \quad (2)$$

这里 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$. 由不等式(1)知

$$F'(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + F(t)\beta(t), \forall t \in [a, b]. \quad (3)$$

于是由(2)和(3)可知

$$c'(t) = [F'(t) - \alpha(t)\beta(t) - \beta(t)F(t)]e^{\int_t^a \beta(s)ds} \leq 0,$$

因此 $c(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 从而

$$c(t) \leq c(a) = 0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds.$$

再用一次不等式(1), 即得

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + F(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

特别的, 当 α 递增, 对 $\forall t \in [a, b]$, 固定 t , 记 $G(s) = \int_s^t \beta(u)du$, 我们有不等式

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds = \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t -G'(s)e^{G(s)}ds \\ &= \alpha(t) - \alpha(t) \int_a^t e^{G(s)}dG(s) = \alpha(t) + \alpha(t) [e^{G(a)} - 1] = \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}. \end{aligned}$$


□

例题 0.1 设

$$E \triangleq \left\{ u \in C[0, 1] : u^2(t) \leq 1 + 4 \int_0^t s|u(s)| \, ds, \forall t \in [0, 1] \right\},$$

计算

$$\max_{u \in E} \int_0^1 [u^2(s) - u(s)] \, ds.$$

 **笔记** $g(x)$ 的构造思路: 解微分方程常数变易法. 具体如下

$$F'(x) \leq 4x\sqrt{F(x)} \implies \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}} \leq 2x,$$

两边同时积分得

$$\sqrt{F(x)} \leq x^2 + C \implies C \geq \sqrt{F(x)} - x^2.$$

故取 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$.**证明** 记 $F(x) = 1 + 4 \int_0^x s|u(s)| \, ds$, 则

$$F'(x) = 4x|u(x)| \implies |u(x)| = \frac{F'(x)}{4x}.$$

由条件可得, 当 $u(x) \in E$ 时, 对 $\forall x \in [0, 1]$, 有

$$u^2(x) \leq F(x) \iff |u(x)| \leq \sqrt{F(x)} \iff \frac{F'(x)}{4x} \leq \sqrt{F(x)} \iff F'(x) \leq 4x\sqrt{F(x)}.$$

令 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$, 则

$$g'(x) = \frac{F'(x) - 4x\sqrt{F(x)}}{2\sqrt{F(x)}} \leq 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

故对 $\forall x \in [0, 1]$, 有

$$g(x) \leq g(0) = 1 \implies \sqrt{F(x)} \leq 1 + x^2.$$

因此利用 $|u(x)| \leq \sqrt{F(x)}$ 和上式可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u^2(x) - u(x)] \, dx &\leq \int_0^1 u(x)[u(x) - 1] \, dx \leq \int_0^1 |u(x)|(|u(x)| + 1) \, dx \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{F(x)}(\sqrt{F(x)} + 1) \, dx \leq \int_0^1 (1 + x^2)(2 + x^2) \, dx = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

当且仅当 $u(x) = -1 - x^2$ 等号成立. 故

$$\max_{u \in E} \int_0^1 [u^2(x) - u(x)] \, dx = \frac{16}{5}.$$


□

例题 0.2 设 f 在 $[0, +\infty)$ 二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geq 0, f''(x) \geq f(x), \forall x \geq 0. \quad (4)$$

证明:

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x, \forall x \geq 0. \quad (5)$$

 **笔记** 通过 $f'' - f' = f - f'$ 视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑 $f''f' = ff'$, 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.**证明** 令 $h(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$, 由(4)知

$$h'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x \geq 0.$$

故

$$h(x) \geq h(0) = f'(0) - f(0) \implies [f'(x) - f(x)]e^x \geq f'(0) - f(0) = h(0).$$

继续视为一阶构造类可得

$$c(x) = \frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}, c'(x) = \frac{[f'(x) - f(x)]e^x - h(0)}{e^{3x}} \geq 0.$$

于是

$$\frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x} \geq f(0) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{f'(0) + f(0)}{2}.$$

继续利用(4)即得

$$f(x) \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2}f(0) + \frac{e^x - e^{-x}}{2}f'(0) \geq f(0) + f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq x.$$

可以分别利用均值不等式和求导进行证明.


□

例题 0.3 设 $f \in C^1[0, +\infty) \cap D^2(0, +\infty)$ 且满足

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0, f(0) = 1, f'(0) = 0. \quad (6)$$

证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geq 0. \quad (7)$$

 **笔记** 显然如果把式(6)得不等号改为等号, 则微分方程的解为 $3e^{2x} - 2e^{3x}$. 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(7)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2, 3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(6)改写为

$$f''(x) - 2f'(x) \geq 3(f'(x) - 2f(x)).$$

考虑 $g_1(x) = f'(x) - 2f(x)$, 则上式可化为

$$g_1'(x) \geq 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为 $g_2(x) = \frac{g_1(x)}{e^{3x}}$. 于是有

$$g_2'(x) \geq 0 \Rightarrow g_2(x) \geq g_2(0) = -2 \Rightarrow f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + 2e^x, g_3'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}}{e^{2x}} \geq 0,$$

于是

$$g_3(x) \geq g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$


我们完成了证明.

□

例题 0.4 设 f 在 \mathbb{R} 上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geq 0. \quad (8)$$

证明 f 在 \mathbb{R} 上有界.

 **笔记** $f + f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数 $g(x)$, 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑 $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$, 两边同时积分得到 $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$. 由此得到构造函数 $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$.

证明 构造 $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 则由(8)知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty, 0]$ 递增, $[0, +\infty)$ 递减. 现在我们有

$$h(x) \leq h(0) \implies |f(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \leq h(0),$$

即 f 有界.

□

0.1.2 双绝对值问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

例题 0.5 对某个 $D > 0$,

1. 设 $f \in D(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, 使得


$$|f'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

证明 $f \equiv 0$.

2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(0) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$, 使得

$$|xf'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

 **笔记** 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y' = Dy, y' = -Dy$ 得构造函数

$$C_1(x) = \frac{y(x)}{e^{Dx}}, C_2(x) = y(x)e^{Dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x) = \frac{f^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2(x) = f^2(x)e^{2Dx}$, 我们有

$$C_1'(x) = \frac{2f(x)f'(x) - 2Df^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2'(x) = [2f(x)f'(x) + 2Df^2(x)]e^{2Dx}.$$

由条件(9), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x) \leq |f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

于是 C_1 递减, C_2 递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}} \leq \frac{f^2(0)}{e^{20}} = 0, \forall x \geq 0, f^2(x)e^{2Dx} \leq f^2(0)e^{20} = 0, \forall x \leq 0,$$

于是就得到了 $f \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. 构造 $C(x) = \frac{f^2(x)}{x^{2D}}, x > 0$ (因为只需证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$, 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x) = \frac{2f(x)f'(x)x - 2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(10), 我们有

$$xf'(x)f(x) \leq x|f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x) = o(x^m), \forall m \in \mathbb{N} \cap (2D, +\infty)$, 于是

$$C(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{x^{2D}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^m)}{x^{2D}} = 0,$$


故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

例题 0.6 设 $f \in D^2[0, +\infty)$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 以及

$$|f''(x)|^2 \leq |f(x)f'(x)|, \forall x \geq 0.$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

 **笔记** 本题的加强版本见命题??.

证明 令 $M = 3$, 考虑

$$g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2], x \geq 0.$$

利用 $1+t^2 \geq \sqrt{t}, \forall t \geq 0$, 我们有

$$1 + \frac{|f|^2}{|f'|^2} \geq \sqrt{\frac{|f|}{|f'|}} \Rightarrow |f'|^2 + |f|^2 \geq |f|^{\frac{1}{2}} |f'|^{\frac{M}{2}} = |f'| \sqrt{|ff'|}. \quad (11)$$

于是

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'| \sqrt{|ff'|} - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{(11)}{\leq} e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [|f|^2 + |f'|^2 + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] = 0. \end{aligned}$$

于是 g 递减, 从而 $0 \leq g(x) \leq g(0) = 0$, 故 $f(x) \equiv 0$.


□

例题 0.7 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

 **笔记** 本题的加强版本见命题??.

证明 令 $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2]$, 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2f'(|f| + |f'|) - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2(f')^2 + f^2 + (f')^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &= e^{-Mx} [(2-M)f^2 + (4-M)(f')^2]. \end{aligned}$$

取充分大的 M , 就有 $g'(x) \leq 0$. 于是 $g(x) \leq g(0) = 0, \forall x \geq 0$. 又注意到 $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2] \geq 0$, 因此 $g(x) \equiv 0, \forall x \geq 0$. 故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

□

例题 0.8 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geq 0.$$

注 与例题 0.6 不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 0.6 的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含 M 的项的次数大于系数含 M 的项, 从而无法直接通过控制 M 的取值, 使得 $g'(x) \leq 0$. 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 0.5 类比, 采用同样的方法. 因为只需证明 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$, 所以将原不等式视为 (等式) 函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是 $f'' = f f'$. 我们将其中的 f 看作已知函数, 考虑的微分方程转化为 $y'' = f y'$, 则

$$y'' = f y' \Rightarrow \frac{y''}{y'} = f \Rightarrow \ln y' = \int_0^x f(t) dt + C \Rightarrow y' = C e^{\int_0^x f(t) dt}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$.

证明 令 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$, 则

$$C'(x) = \frac{2f'(x)f''(x) - 2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}.$$

又因为

$$f'f'' \leq |f'f''| \leq |f|(f')^2.$$

所以 $C'(x) \leq 0$, 故 $C(x) \leq C(0) = 0$. 又注意到 $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}} \geq 0$, 故 $C(x) \equiv 0$. 于是 $f'(x) = 0, \forall x \geq 0$. 进而 f 就是常值函数, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$. □

0.1.3 极值原理

例题 0.9 设 $f \in C^2[0, 1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 若还有

$$f''(x) - g(x)f'(x) = f(x). \quad (12)$$

证明: $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

证明 如果 f 在 $(0, 1)$ 取得在 $[0, 1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c) > 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$, 代入(12)式知 $f''(c) = f(c) > 0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0, 1)$ 取得在 $[0, 1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c) < 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$, 代入(12)式知 $f''(c) = f(c) < 0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上, f 在 $(0, 1)$ 上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即


$$0 \leq f(x) \leq 0.$$

$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. □

例题 0.10 设 $f \in C(a, b)$ 且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] du \right\} = 0, \forall x \in (a, b),$$

证明: f 是线性函数.

 **笔记** 还可以不妨设 $a = 0, b = 1$, 否则用 $f(a(1-x) + bx) = f((b-a)x + a)$ 代替 f 即可. 这样就可以直接不妨设 $f \in C[0, 1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$.

不妨设 $a = 0, b = 1$ 的原因: 令 $g(x) \triangleq f((b-a)x + a)$, 则对 $\forall x \in (0, 1)$, 记 $y = (b-a)x + a \in [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [g(x+u) + g(x-u) - 2g(x)] du \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y+(b-a)u) + f(y-(b-a)u) - 2f(y)] du \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\ &= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)^3 h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\ &= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} = 0. \end{aligned}$$

因此 g 仍然满足题目条件. 若已证 $g \equiv 0$, 就有

$$f((b-a)x + a) = 0, \forall x \in [0, 1] \iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

故可以不妨设 $a = 0, b = 1$.

证明 不妨设 $f \in C[a, b]$, 否则内闭的考虑或修改 f 在端点的值即可. 用 $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$ 代替 f 可以不妨设 $f(a) = f(b) = 0$. 此时只需证 $f \equiv 0$ 即可.

若

$$f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x) > 0,$$

则 $x_0 \in (a, b)$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得

$$f(x_0) + \varepsilon(x_0 - a)(x_0 - b) > 0.$$

考虑

$$f_\varepsilon(x) \triangleq f(x) + \varepsilon(x - a)(x - b),$$

则存在 $x_1 \in (a, b)$, 使得

$$f_\varepsilon(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_0) > 0.$$

现在

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1) + f_\varepsilon(x_1) - 2f_\varepsilon(x_1)] \, du \right\} \\ &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1 + u) + f_\varepsilon(x_1 - u) - 2f_\varepsilon(x_1)] \, du \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h 2\varepsilon u^2 \, du}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}\varepsilon h^3}{h^3} = \frac{2}{3}\varepsilon > 0, \end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此我们有

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq 0 \implies f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

考虑 $-f$, 令 $-f_\varepsilon(x) = -f(x) - \varepsilon(x - a)(x - b)$, 同理可得

$$\max_{x \in [a, b]} (-f(x)) \leq 0 \implies -f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \implies f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$$

现在就有

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b],$$

即所求函数 f 为线性函数.

□