0.1 循环行列式

循环行列式关于单位根的计算公式见命题??.

例题 0.1 设 a,n 是给定互素正整数, 按 Euild 除法 (带余除法), 存在唯一确定的整数对 (s,t) 使得 $a=sn+t, 0\leqslant t\leqslant n-1$.

令

$$u_i=\begin{cases} s+1, & 0\leqslant i<t \\ s, & t\leqslant i\leqslant n-1 \end{cases}$$

若 t 与 n 互素, 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_0 & \cdots & u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_0 \end{vmatrix}$$

证明 记 $f(x)\triangleq\sum_{i=1}^{n}u_ix^i, w_j\triangleq e^{\frac{2\pi ji}{n}}, j=0,1,2,\cdots,n-1$, 则由命题??可知

$$D_n=\prod_{k=0}^{n}f\left(w_k\right)=f\left(1\right)\prod_{k=0}^{n-1}f\left(w_k\right).$$

由条件可知

$$f(1)=\sum_{i=0}^{t-1}(s+1)+\sum_{i=t}^{n-1}s=(s+1)t+(n-t)s=ns+t=a.$$

从而

$$\begin{aligned} D_n&=a\prod_{k=0}^{n-1}f(w_k)=a\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{t-1}(s+1)w_k^i+\sum_{i=t}^{n-1}sw_k^i\right] \\ &=a\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{t-1}w_k^i+s\sum_{i=0}^{n-1}w_k^i\right]=a\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-w_k^t}{1-w_k}+s\frac{1-w_k^n}{1-w_k}\right). \end{aligned}$$

由 $w_k^n=1, w_k=w_1^k$ 可知

$$D_n=a\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k}.$$

由群论可知 $\{1,w_1,\cdots,w_1^{n-1}\}$ 是一个循环群且 w_1 的阶为 n, 再根据群论的 Lagrange 定理及 $(t,n)=1$ 可知, w_1^t 的阶为 $\frac{n}{(n,t)}=n$. 因此 $w_1^t=w_1$, 故 $\langle w_1\rangle=\{1,w_1,w_1^2,\cdots,w_1^{n-1}\}=\{1,w_1^t,w_2^{2t},\cdots,w_1^{(n-1)t}\}$. 于是 $w_1^k=w_1^{tk}, k=1,2,\cdots,n-1$, 故

$$D_n=a\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k}=a.$$

□

例题 0.2 计算:

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+d & \cdots & a+(n-1)d \\ a+(n-1)\,d & a & \cdots & a+(n-2)d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+d & a+2d & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

证明 记 $f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}(a+jd)w_k^j$, 其中 $w_k=e^{\frac{2\pi k\mathrm{i}}{n}}, k=0,1,2,\cdots,n-1$. 由命题**??**可知

$$D_n=f(w_0)f(w_1)\cdots f(w_{n-1})=\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(a+jd)w_k^j=\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(a+jd)w_k^j$$

$$\xlongequal{\text{错位相减}}\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{aw_k^{n+1}-aw_k^n-aw_k+a-dw_k^{n+1}-dnw_k^n+dw_k}{(w_k-1)^2}$$

$$\xlongequal{w_k^n=1}\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{dn}{w_k-1}=\frac{2an+n(n-1)d}{2}\cdot(dn)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{w_k-1}.$$

注意到 $w_k-1, k=1,2,\cdots,n-1$ 是 $(x+1)^n-1=0$ 的 $n-1$ 个复根, 这些根和 $w_0-1=0$ 一起就是 $(x+1)^n-1=0$ 的全部复根. 从而由 Vieta 定理可得, $(x+1)^n-1$ 的一次项系数乘 $(-1)^{n-1}$ 为

$$(-1)^{n-1}n=\sum_{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leqslant n-1}(w_{i_1}-1)(w_{i_2}-1)\cdots(w_{i_{n-1}}-1)=\prod_{k=1}^{n-1}(w_k-1).$$

故

$$D_n=\frac{2an+n(n-1)d}{2}\cdot(dn)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{w_k-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot(nd)^{n-1}.$$

□