

## 0.1 拆分法

## 命题 0.1 (大拆分法)


设  $t$  是一个参数,

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  在  $|A(0)|$  中的代数余子式.

 **笔记** 大拆分法的想法: 将行列式的每一行/列拆分成两行/列, 得到

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{j=1}^n |A_j|, \text{ 其中 } A_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成  $2^n$  个行列式.(不一定需要公共的  $t$ ). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

**注** 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1 加到后面每一列上, 得到

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开, 不断这样做下去就可得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix} = |A(0)| + \sum_{j=1}^n |A_j|.$$

其中  $A_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$ . 将  $A_j$  按第  $j$  列展开可得

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t(A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{nj}) = t \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

从而

$$|A(t)| = |A(0)| + \sum_{i=1}^n A_i = |A(0)| + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

□

### 推论 0.1 (推广的大拆分法)


设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1, t_2, \dots, t_n)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t_1 & a_{12} + t_2 & \cdots & a_{1n} + t_n \\ a_{21} + t_1 & a_{22} + t_2 & \cdots & a_{2n} + t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t_1 & a_{n2} + t_2 & \cdots & a_{nn} + t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^n \left( t_j \sum_{i=1}^n A_{ij} \right).$$

♡

 **笔记** 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即将行列式的每一行/列拆分成两行/列).

这里推广的大拆分法的关键也是**要找到合适的**  $t_1, t_2, \dots, t_n$  进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式.

**注** 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 运用大拆分法的证明方法不难得到.

□

### 命题 0.2 (小拆分法)


设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且  $a_{in}$  可以拆分成  $b_{in} + c_{in}, i = 1, 2, \dots, n$ .

则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} + c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 记忆小拆分法的想法 (即拆边列/行, 再展开得到递推式).

**注** 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列, 则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方法将这一行或一列变成最后一列, 再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 由行列式的性质可直接得到结论. □

### 命题 0.3

计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

**解 解法一 (大拆分法):** 注意到

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + (a - b) & b + 0 & \cdots & b + 0 \\ b + 0 & b + (a - b) & \cdots & b + 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b + 0 & b + 0 & \cdots & b + (a - b) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n A_i = (a - b)^n + \sum_{i=1}^n A_i. \end{aligned}$$

其中  $A_i$  是第  $i$  行元素全为  $b$ , 主对角元素除了  $(i, i)$  元外都为  $a - b$ , 其他元素都为 0 的  $n$  阶行列式.

又因为

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & a - b & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ i & b & \cdots & b & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & & \\ n & & & & a - b \end{vmatrix} = b(a - b)^{n-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$|A| = (a - b)^n + \sum_{i=1}^n A_i = (a - b)^n + nb(a - b)^{n-1} = [a + (n - 1)b](a - b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为  $D_n$ , 其中  $n$  为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \cdots & b \\ b+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}. (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

从而由上式递推可得

$$\begin{aligned}
 D_n &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \\
 &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)[b(a-b)^{n-2} + (a-b)D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\
 &= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\
 &= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\
 &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

解法三 (求和法):

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{-r_1+r_i} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

解法四 (”爪”型行列式的推广):

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{-j_i+j_1} \begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a-(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

□

## 命题 0.4

计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$



解 解法一 (大拆分法): 令

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |A| + tu, u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

当  $t = -b$  时, 可得

$$|A(-b)| = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} = |A| - bu = (a-b)^n.$$

当  $t = -c$  时, 可得

$$|A(-c)| = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} = |A| - cu = (a-c)^n.$$

若  $b \neq c$ , 则联立上面两式可得

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若  $b = c$ , 则由命题 0.1 可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为  $D_n$ , 其中  $n$  为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} \\ &= b(a-c)^{n-1} + (a-b) D_{n-1}. (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+(a-c) & b & \cdots & b \\ c+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= c \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} \\
&= c(a-b)^{n-1} + (a-c) D_{n-1}. (n \geq 2)
\end{aligned}$$

若  $b \neq c$ , 则联立上面两式可得

$$|A| = D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若  $b = c$ , 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned}
|A| &= D_n = b(a-b)^{n-1} + (a-b) D_{n-1} \\
&= b(a-b)^{n-1} + (a-b) [b(a-b)^{n-2} + (a-b) D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\
&= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\
&= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\
&= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

当  $b = c$  时, 也可以由 **命题 0.1** 可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

□

**例题 0.1** 设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  是次数不超过  $n-2$  的多项式, 求证: 对任意  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

**证明 证法一 (大拆分法):** 因为  $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$  的次数不超过  $n-2$ , 所以它们都是单项式  $1, x, \dots, x^{n-2}$  的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这  $n-1$  个单项式进行拆分, 最后得到至多  $(n-1)!$  个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有  $n$  列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

**证法二 (多项式根的有限性):** 令  $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$ , 则将  $f(x)$  按第一列展开得到

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x).$$

其中  $k_i$  为行列式  $f(x)$  的第  $(i, 1)$  元素的代数余子式,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

注意  $k_i$  与  $x$  无关, 均为常数. 若  $f(x)$  不恒为 0, 则又因为  $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$  的次数不超过  $n-2$ , 所以  $\deg f(x) \leq n-2$ . 但是, 注意到  $f(a_2) = f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$ , 即  $f(x)$  有  $n-1$  个根. 于是由 **余数定理** 可知,  $(x-a_2) \cdots (x-a_n) | f(x)$ . 从而  $n-1 = \deg(x-a_2) \cdots (x-a_n) \geq \deg f(x)$ . 这与  $\deg f(x) \leq n-2$  矛盾. 故  $f(x) \equiv 0$ , 当然也有  $f(a_1) = 0$ .

证法三:

设多项式

$$f_k(x) = c_{k,n-2}x^{n-2} + \cdots + c_{k1}x + c_{k0}, 1 \leq k \leq n.$$


则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2} \end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是  $n \times (n-1)$  和  $(n-1) \times n$  矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零.  $\square$

**例题 0.2** 求下列  $n$  阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

 **笔记** 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的  $t$  对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的  $t_i$ , 所以推广的大拆分也不行)

**解 (小拆分法)** 将  $D_n$  最后一列拆成两列得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

若  $a_n \neq 0$ , 则由上式可得

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \xrightarrow[i=1,2,\dots,n]{\text{对第一个行列式: } -a_i j_n + j_i} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} = a_n^2 + D_{n-1}. (n \geq 2)$$

若  $a_n = 0$ , 则上面第一个行列式等于 0, 进而  $D_n = D_{n-1} (n \geq 0)$ . 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n = a_n^2 + D_{n-1} = a_n^2 + (a_{n-1}^2 + D_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=2}^n a_i^2 + D_1 = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

 $\square$