0.1 微分不等式问题

0.1.1 一阶/二阶构造类

命题 0.1 (Gronwall 不等式)

设 $\alpha, \beta, \mu \in C[a,b]$ 且 β 非负, 若还有

$$\mu(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\mu(s)\mathrm{d}s, \forall t \in [a,b]. \tag{1}$$

证明:

$$\mu(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s, \forall t \in [a,b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t) \leqslant \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s}, \forall t \in [a,b].$$

笔记 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)\mathrm{d}s$, 则

$$F'(t) = \beta(t)\mu(t) \leqslant \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y' = \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)y \Rightarrow y = ce^{\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s} + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

故得到构造函数

$$c(t) = \frac{F(t) - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s}{e^{\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s}} = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s, t \in [a,b].$$

证明 令

$$c(t) = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s, t \in [a,b], \tag{2}$$

这里 $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)\mathrm{d}s$. 由不等式(1)知

$$F'(t) \leqslant \alpha(t)\beta(t) + F(t)\beta(t), \forall t \in [a,b]. \tag{3}$$

于是由(2)和(3)可知

$$c'(t) = [F'(t) - \alpha(t)\beta(t) - \beta(t)F(t)]e^{\int_t^a \beta(s)\mathrm{d}s} \leqslant 0,$$

因此 $c(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 从而

$$c(t) \leqslant c(a) = 0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s} \leqslant \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

再用一次不等式(1), 即得

$$\mu(t) \leqslant \alpha(t) + F(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s, \forall t \in [a,b].$$

特别的, 当 α 递增, 对 $\forall t \in [a,b]$, 固定 t, 记 $G(s) = \int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u$, 我们有不等式

$$\begin{aligned}\mu(t) &\leqslant \alpha(t) + \alpha(t)\int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s = \alpha(t) + \alpha(t)\int_a^t -G'(s)\,e^{G(s)}\mathrm{d}s \\ &= \alpha(t) - \alpha(t)\int_a^t e^{G(s)}\mathrm{d}G(s) = \alpha(t) + \alpha(t)\left[e^{G(a)} - 1\right] = \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s}.\end{aligned}$$

□

例题 0.1 设

$$E \triangleq \left\{u \in C[0,1] : u^2(t) \leqslant 1 + 4\int_0^t s|u(s)|\,\mathrm{d}s, \forall t \in [0,1]\right\},$$

计算

$$\max_{u\in E} \int_0^1 \left[u^2(s) - u(s)\right] \mathrm{d}s.$$

笔记 $g(x)$ 的构造思路: 解微分方程常数变易法. 具体如下

$$F'(x) \leqslant 4x\sqrt{F(x)} \Longrightarrow \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}} \leqslant 2x,$$

两边同时积分得

$$\sqrt{F(x)} \leqslant x^2 + C \Longrightarrow C \geqslant \sqrt{F(x)} - x^2.$$

故取 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$.

证明 记 $F(x) = 1 + 4\int_0^x s|u(s)|\mathrm{d}s$, 则

$$F'(x) = 4x|u(x)| \Longrightarrow |u(x)| = \frac{F'(x)}{4x}.$$

由条件可得, 当 $u(x) \in E$ 时, 对 $\forall x \in [0,1]$, 有

$$u^2(x) \leqslant F(x) \Longleftrightarrow |u(x)| \leqslant \sqrt{F(x)} \Longleftrightarrow \frac{F'(x)}{4x} \leqslant \sqrt{F(x)} \Longleftrightarrow F'(x) \leqslant 4x\sqrt{F(x)}.$$

令 $g(x) \triangleq \sqrt{F(x)} - x^2$, 则

$$g'(x) = \frac{F'(x) - 4x\sqrt{F(x)}}{2\sqrt{F(x)}} \leqslant 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

故对 $\forall x \in [0,1]$, 有

$$g(x) \leqslant g(0) = 1 \Longrightarrow \sqrt{F(x)} \leqslant 1 + x^2.$$

因此利用 $|u(x)| \leqslant \sqrt{F(x)}$ 和上式可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[u^2(x) - u(x)\right] \mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 u(x)\left[u(x) - 1\right] \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |u(x)|\left(|u(x)| + 1\right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \sqrt{F(x)}\left(\sqrt{F(x)} + 1\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\left(2 + x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{16}{5}.\end{aligned}$$

当且仅当 $u(x) = -1 - x^2$ 等号成立. 故

$$\max_{u\in E} \int_0^1 \left[u^2(x) - u(x)\right] \mathrm{d}x = \frac{16}{5}.$$

□

例题 0.2 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geqslant 0, f''(x) \geqslant f(x), \forall x \geqslant 0. \tag{4}$$

证明:

$$f(x) \geqslant f(0) + f'(0)x, \forall x \geqslant 0. \tag{5}$$

笔记 通过 $f'' - f' = f - f'$ 视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑 $f''f' = ff'$, 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

证明 令 $h(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$, 由(4)知

$$h'(x) = \left(f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x)\right)e^x = \left(f''(x) - f(x)\right)e^x \geqslant 0.$$

故

$$h(x) \geqslant h(0) = f'(0) - f(0) \Rightarrow [f'(x) - f(x)]e^x \geqslant f'(0) - f(0) = h(0).$$

继视为一阶构造类可得

$$c(x)=\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x},c'(x)=\frac{[f'(x)-f(x)]e^x-h(0)}{e^{3x}}\geqslant 0.$$

于是

$$\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}\geqslant f(0)+\frac{1}{2}h(0)=\frac{f'(0)+f(0)}{2}.$$

继续利用(4)即得

$$f(x)\geqslant\frac{e^x+e^{-x}}{2}f(0)+\frac{e^x-e^{-x}}{2}f'(0)\geqslant f(0)+f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1,\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\geqslant x.$$

可以分别了利用均值不等式和求导进行证明.

□

例题 0.3 设 $f\in C^1[0,+\infty)\cap D^2(0,+\infty)$ 且满足

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0,f(0)=1,f'(0)=0. \tag{6}$$

证明:

$$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x},\forall x\geqslant 0. \tag{7}$$

笔记 显然如果把式(6)得不等号改为等号,则微分方程的解为 $3e^{2x}-2e^{3x}$. 现在对于不等号,自然应该期望有不等式(7)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2,3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(6)改写为

$$f''(x)-2f'(x)\geqslant 3(f'(x)-2f(x)).$$

考虑 $g_1(x)=f'(x)-2f(x)$, 则上式可化为

$$g_1'(x)\geqslant 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数,解得构造函数为 $g_2(x)=\dfrac{g_1(x)}{e^{3x}}$. 于是有

$$g_2'(x)\geqslant 0\Rightarrow g_2(x)\geqslant g_1(0)=-2\Rightarrow f'(x)-2f(x)\geqslant -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数,解得构造函数:

$$g_3(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}+2e^x,g_3'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)+2e^{3x}}{e^{2x}}\geqslant 0,$$

于是

$$g_3(x)\geqslant g_3(0)=3\Rightarrow f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}.$$

我们完成了证明.

□

例题 0.4 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且满足等式

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x),g(x)\geqslant 0. \tag{8}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

笔记 $f+f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2+|f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数 $g(x)$, 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑 $f+f''=0\Leftrightarrow ff'=-f''f'$, 两边同时积分得到 $\dfrac{1}{2}f^2=-\dfrac{1}{2}(f')^2+C$. 由此得到构造函数 $C(x)=|f(x)|^2+|f'(x)|^2$.

证明 构造 $h(x)=|f(x)|^2+|f'(x)|^2$, 则由(8)知

$$h'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=-2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty,0]$ 递增,$[0,+\infty)$ 递减. 现在我们有

$$h(x)\leqslant h(0)\Longrightarrow |f(x)|^2\leqslant |f(x)|^2+|f'(x)|^2\leqslant h(0),$$

即 f 有界.

□

例题 0.5 设 $f\in C^2[0,+\infty)$,$g\in C^1[0,+\infty)$ 且存在 $\lambda>0$ 使得 $g(x)\geqslant\lambda,\forall x\geqslant 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x)+g(x)f(x)=0,\quad \forall x\geqslant 0,$$

证明:f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

笔记 形式计算分析需要的构造函数: 由条件解微分方程可得

$$y'y''=-gyy'\Longrightarrow \frac{(y')^2}{2}=-\int gyy'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int g\mathrm{d}y^2=-\frac{1}{2}gy^2+\frac{1}{2}\int y^2\mathrm{d}g\Longrightarrow (y')^2+gy^2=\int y^2\mathrm{d}g;$$

$$y'y''=-gyy'\Longrightarrow \frac{y'y''}{g}=-yy'\Longrightarrow \int\frac{y'y''}{g}\mathrm{d}x=-\int yy'\mathrm{d}x\Longrightarrow \int\frac{1}{2g}\mathrm{d}(y')^2=-\frac{1}{2}y^2$$
$$\Longrightarrow \frac{(y')^2}{2g}-\frac{1}{2}\int (y')^2\left(\frac{1}{g}\right)'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}y^2\Longrightarrow \frac{(y')^2}{g}+y^2=\int (y')^2\left(\frac{1}{g}\right)'\mathrm{d}x.$$

于是考虑构造函数 $F_1(x)\triangleq\dfrac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x)$,$F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X>0$, 使得 $g'(x)\neq 0,\forall x\geqslant X$. 从而由导数介值性可知,$g'$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x)\triangleq\dfrac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x),x\geqslant X$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_1'(x)=\frac{2f'f''g-g'(f')^2+2ff'g^2}{g^2}=\frac{-2f'fg^2-g'(f')^2+2ff'g^2}{g^2}=-\frac{g'(f')^2}{g^2}.\tag{9}$$

(i) 若 $g'(x)>0,\forall x\geqslant X$, 则由(9)式可知 $F'(x)\leqslant 0$, 即 $F(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x)>\lambda>0,\forall x>0$ 可知, 存在 $C>0$, 使得

$$f^2(x)\leqslant F_1(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(ii) 若 $g'(x)<0,\forall x\geqslant X$, 令 $F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_2'(x)=2f'f''+g'f^2+2gff'=-2f'fg+g'f^2+2gff'=g'f^2\leqslant 0.\tag{10}$$

从而 $F_2(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减, 于是存在 $C'>0$, 使得

$$g(x)f^2(x)\leqslant F_2(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

进而由 $g(x)>\lambda>0,\forall x>0$ 可得

$$f^2(x)\leqslant\frac{C}{g(x)}\leqslant\frac{C}{\lambda},\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

□

例题 0.6 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 且 f,f',f'' 都是正值函数. 若存在 $a,b>0$ 使得

$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

求 $f'(x)\leqslant cf(x)$ 恒成立的最小的 c.

注 若存在 $c<x_1$, 使得 $f'(x)\leqslant cf(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 则

$$f'(x)\leqslant cf(x)<x_1f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x)=e^{x_1x}$ 时, 从而 $f'(x)=cf(x)=x_1f(x)$, 于是 $c=x_1$ 矛盾! 故 $c_{\min}=x_1$.

证明 考虑微分方程 $y''=ay+by'$, 其特征方程为

$$x^2-bx-a=0\Rightarrow x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>0,\quad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}<0.$$

于是

$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)\Longleftrightarrow f''(x)-x_1f'(x)\leqslant x_2\left[f'(x)-x_1f(x)\right].$$

令 $g(x)\triangleq f'(x)-x_1f(x)$, 则 $g'(x)\leqslant x_2g(x)$. 再令 $c(x)\triangleq \frac{g(x)}{e^{x_2x}}$, 则

$$c'(x)=\frac{g'(x)-x_2g(x)}{e^{x_2x}}\leqslant 0\Rightarrow c(x)\leqslant \lim_{x\to-\infty}c(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

由 $f'',f',f>0$ 可知 f,f' 递增有下界. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 都存在. 从而 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$, 否则由命题**??**知 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 矛盾! 再结合 $x_1,f>0,x_2<0$ 可得

$$c(x)\leqslant \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}}\leqslant \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{e^{x_2x}}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

即

$$f'(x)\leqslant x_1f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

取 $f(x)=e^{x_1x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min}=x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

□

例题 0.7 设 $f\in C[0,+\infty)\bigcap D^1(0,+\infty)$ 满足

$$f(0)\geqslant 0,f'(x)\geqslant f^3(x),\forall x>0.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\geqslant 0.$$

笔记 $y'=y^3$ 这个微分方程有三种解法得到三个不同的构造函数, 即分别考虑 $\frac{y'}{y^3}=1,\frac{y'}{,}y^2=y,\frac{y'}{y}=y^2$ 得到

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^3}=\int\mathrm{d}x\Longrightarrow -\frac{1}{2y^2}=x+C_1\Longrightarrow C=x+\frac{1}{2y^2};$$

$$\int\frac{y\prime}{y^2}\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}x\Longrightarrow\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int y\mathrm{d}x\Longrightarrow C-\frac{1}{y}=\int y\mathrm{d}x\Longrightarrow C=\frac{1}{y}+\int y\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{y'}{y}\mathrm{d}x=\int y^2\mathrm{d}x\Longrightarrow \ln y=\int y^2\mathrm{d}x\Longrightarrow y=Ce^{\int y^2\mathrm{d}x}\Longrightarrow C=\frac{y}{e^{\int y^2\mathrm{d}x}}.$$

第二个构造函数实际上在本题中没发挥作用.

证明 由条件可知

$$\left[\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}}\right]'=\frac{f'(x)-f^3(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}}\geqslant 0.$$

从而

$$\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}}\geqslant\frac{f(0)}{1}\geqslant 0\Longrightarrow f(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

于是

$$f'(x)\geqslant f^3(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

若存在 $a\geqslant 0$, 使得 $f(a)>0$, 则由 $f'\geqslant 0$ 知

$$f(x)\geqslant f(a)>0,\forall x>a. \tag{11}$$

注意到对 $\forall x\in(a,A)$, 有

$$\left[x+\frac{1}{f^2(x)}\right]'=\frac{f^3(x)-f'(x)}{f^3(x)}\leqslant 0.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{f^2(x)}\right]\leqslant a+\frac{1}{2f^2(a)}<+\infty. \tag{12}$$

而由 $f' \geqslant 0$ 可知 f 递增, 再结合(11)式和命题??知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f^2(x)} = 0$. 于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x + \dfrac{1}{f^2(x)}\right] = +\infty$, 这与(12)式矛盾!

□

例题 0.8 设可导函数 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(1)$ 且 $xf'(x) + f(x-1) = 0, \forall x \geqslant 1$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

笔记 本题关键是由 $f(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 看出只需证 f 有界, 然后由

$$f(x) = \frac{\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{\max\limits_{y\in[x-1,x]} f(y)}{x} < \frac{\max\limits_{y\in[0,x]} f(y)}{x} \leqslant \max_{y\in[0,x]} f(y), \forall x > 1.$$

发现 f 的最大值就在在某个有限区间内取到.

证明 注意到

$$\left(xf(x) - \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = xf'(x) + f(x-1) = 0, \forall x \geqslant 1.$$

故

$$xf(x) - \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \cdot f(1) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \forall x \geqslant 1. \tag{13}$$

下面不妨设 f 不恒为 0, 否则结论是平凡的. 对 $\forall x \geqslant 1$, 都有

$$|f(x)| \leqslant \max_{y\in[0,x]} |f(y)|. \tag{14}$$

设 $x^* \geqslant 1$, 满足

$$\left|f\left(x^*\right)\right| = \max_{y\in[0,x^*]} |f(y)|.$$

由(13)式可得

$$\max_{y\in[0,x^*]} |f(y)| = \left|f\left(x^*\right)\right| = \frac{\int_{x^*-1}^{x^*} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^*} \leqslant \frac{\max\limits_{y\in[0,x^*]} |f(y)|}{x^*} \leqslant \max_{y\in[0,x^*]} |f(y)|,$$

故 $\dfrac{\max\limits_{y\in[0,x^*]} |f(y)|}{x^*} = \max\limits_{y\in[0,x^*]} |f(y)| = \dfrac{\int_{x^*-1}^{x^*} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^*}$, 进而要么 $x^* = 1$, 要么 $\max\limits_{y\in[0,x^*]} |f(y)| = 0$. 显然若 $\max\limits_{y\in[0,x^*]} |f(y)| = 0$, 则 $f(x) = 0, \forall x \in \left[0, x^*\right]$. 即(14)式等号成立的充要条件就是 $x^* = 1$ 或 $f(x) = 0, \forall x \in \left[0, x^*\right]$. 又 f 不恒为 0, 故存在 $X > 1$, 使得对 $\forall x \geqslant X$, 都有

$$|f(x)| < \max_{y\in[0,x]} |f(y)|. \tag{15}$$

我们断言

$$|f(x)| \leqslant \max_{y\in[0,X]} |f(y)|, \forall x > 1. \tag{16}$$

否则, 存在 $x_0 > 1$, 使得

$$|f(x_0)| > \max_{y\in[0,X]} |f(y)|.$$

记

$$x_1 \triangleq \inf\left\{x \in [X, x_0] \mid |f(x)| > \max_{y\in[0,X]} |f(y)|\right\},$$

则由 f 的连续性和(15)式知

$$\max_{y\in[0,X]} |f(y)| \leqslant |f(x_1)| < \max_{y\in[0,x_1]} |f(y)|.$$

于是再由 f 的连续性知, 存在 $x_2 \in (X, x_1)$, 使得

$$\max_{y\in[0,X]} |f(y)| \leqslant |f(x_1)| < \max_{y\in[0,x_1]} |f(y)| = |f(x_2)|.$$

这与 x_1 的下确界定义矛盾! 故(16)式成立, 即 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 因此再由(13)式可得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f(x)|}{x}=0.$$

□

0.1.2 双绝对值微分不等式问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

例题 0.9 对某个 $D>0$,

1. 设 $f\in D(\mathbb{R}), f(0)=0$, 使得
$$|f'(x)|\leqslant D|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{17}$$
证明 $f\equiv 0$.
2. 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}), f^{(j)}(0)=0,\forall j\in\mathbb{N}_0$, 使得
$$|xf'(x)|\leqslant D|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{18}$$
证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y'=Dy, y'=-Dy$ 得构造函数

$$C_1(x)=\frac{y(x)}{e^{Dx}}, C_2(x)=y(x)e^{Dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x)=\dfrac{f^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2(x)=f^2(x)e^{2Dx}$, 我们有
$$C_1'(x)=\frac{2f(x)f'(x)-2Df^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2'(x)=[2f(x)f'(x)+2Df^2(x)]e^{2Dx}.$$
由条件(17), 我们知道
$$\pm f'(x)f(x)\leqslant|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$
于是 C_1 递减, C_2 递增, 故
$$\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}}\leqslant\frac{f^2(0)}{e^{20}}=0,\forall x\geqslant 0, f^2(x)e^{2Dx}\leqslant f^2(0)e^{20}=0,\forall x\leqslant 0,$$
于是就得到了 $f\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}$.
2. 构造 $C(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^{2D}}, x>0$(因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以我们只考虑一边), 则
$$C'(x)=\frac{2f(x)f'(x)x-2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$
由(18), 我们有
$$xf'(x)f(x)\leqslant x|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$
即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x)=o(x^m),\forall m\in\mathbb{N}\cap(2D,+\infty)$, 于是
$$C(x)\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{f^2(x)}{x^{2D}}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x^m)}{x^{2D}}=0,$$
故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

例题 0.10 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及

$$|f''(x)|^2\leqslant|f(x)f'(x)|,\forall x\geqslant 0.$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 本题的加强版本见命题 0.2.

证明 令 $M=3$, 考虑

$$g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right], x\geqslant 0.$$

利用 $1+t^2\geqslant\sqrt{t},\forall t\geqslant 0$, 我们有

$$1+\frac{|f|^2}{|f'|^2}\geqslant\sqrt{\frac{|f|}{|f'|}}\Rightarrow |f'|^2+|f|^2\geqslant |f|^{\frac{1}{2}}|f'|^{\frac{M}{2}}=|f'|\sqrt{|ff'|}. \tag{19}$$

于是

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|\sqrt{|ff'|}-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\overset{(19)}{\leqslant} e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[|f|^2+|f'|^2+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]=0.
\end{aligned}$$

于是 g 递减, 从而 $0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

□

例题 0.11 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant |f'(x)|+|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

笔记 本题的加强版本见命题 0.3.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]$, 则

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2f'\left(|f|+|f'|\right)-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2(f')^2+f^2+(f')^2-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&=e^{-Mx}\left[(2-M)f^2+(4-M)(f')^2\right].
\end{aligned}$$

取充分大的 M, 就有 $g'(x)\leqslant 0$. 于是 $g(x)\leqslant g(0)=0,\forall x\geqslant 0$. 又注意到 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]\geqslant 0$, 因此 $g(x)\equiv 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

例题 0.12 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant |f'(x)f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\geqslant 0.$$

注 与例题 0.10不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 0.10的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含 M 的项的次数大于系数含 M 的项, 从而无法直接通过控制 M 的取值, 使得 $g'(x)\leqslant 0$. 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 0.9类比, 采用同样的方法. 因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以将原不等式视为 (等式) 函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是 $f''=ff'$. 我们将其中的 f 看作已知函数, 考虑的微分方程转化为 $y''=fy'$, 则

$$y''=fy'\Rightarrow\frac{y''}{y'}=f\Rightarrow\ln y'=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C\Rightarrow y'=Ce^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}}$.

证明 令 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}}$, 则

$$C'(x)=\frac{2f'(x)f''(x)-2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}}.$$

又因为

$$f'f''\leqslant |f'f''|\leqslant |f|(f')^2.$$

所以 $C'(x)\leqslant 0$, 故 $C(x)\leqslant C(0)=0$. 又注意到 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}}\geqslant 0$, 故 $C(x)\equiv 0$. 于是 $f'(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 进而 f 就是常值函数, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

命题 0.2

设 $f\in D^s(0,+\infty)\cap C[0,+\infty),s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,s-1.$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i=1,C>0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leqslant C\left|f(x)\right|^{\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{\lambda_s},\forall x\geqslant 0. \tag{20}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 我们把下述证明中左右两边各项次数均相同的不等式:$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$ 称为**齐次不等式**.(虽然也可以直接利用幂平均不等式得到, 但这里我们旨在介绍如何利用**齐次化方法**证明**一般的齐次不等式**.)

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+(f'')^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right],M>0$, 显然 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件 (20) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M(f')^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+(f')^2+(f'')^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M(f')^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{(20)\text{式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)(f')^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

我们先证明 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$.

令 $S\triangleq\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K>0$, 使得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S. \tag{22}$$

对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$, 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取

$$L=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}>0,$$

考虑 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2=1$, 因此 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)\in S$. 从而由(22)式可知

$$(Lx_1)^{2\lambda_1}(Lx_2)^{2\lambda_2}\cdots(Lx_n)^{2\lambda_n}\leqslant K.$$

于是

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant\frac{K}{L^{2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_n}}=\frac{K}{L^2}=K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意性可得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. \tag{23}$$

因此由(21) (23) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+KC^2\left(f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right]\\
&=e^{-Mx}\left[\left(KC^2+1-M\right)f^2+\left(KC^2+2-M\right)\left(f'\right)^2+\cdots+\left(KC^2+2-M\right)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M>KC^2+2$, 利用上式就有 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x)\leqslant g(0)=0$. 又因为 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$, 所以 $g(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(s-1)}(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

例题 0.13 设 $f\in C^n(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N},f^{(k)}(x_0)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$. 若对某个 $M>0$ 和 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2}\geqslant 0,\lambda_{n-1}\geqslant 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M\prod_{k=0}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k},\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

笔记 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)}=f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}.$$

$$f^{(n)}=-f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=-g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=-\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{-\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}.$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x)\triangleq\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}},c_2(x)\triangleq f^{(n-1)}(x)e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x)\triangleq c_1^2(x)=\dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}},C_2(x)\triangleq c_2^2(x)=[f^{(n-1)}(x)]^2e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant|f^{(n-1)}(x)|\cdot g(x),$$

其中 $g(x)=M\prod\limits_{k=1}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k-1}$. 从而 $f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)\leqslant|f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)|\leqslant|f^{(n-1)}(x)|^2\cdot g(x)$.

(24)

令 $C_1(x)\triangleq\dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}$, 则由 (24) 式可知

$$C_1'(x)=\frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)-2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}\leqslant 0.$$

故 $C_1(x)\leqslant C_1(x_0)=0,\forall x\geqslant x_0$. 因此 $C_1(x)=0,\forall x\geqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x)=0,\forall x\geqslant x_0$. 令 $C_2(x)\triangleq[f^{(n-1)}(x)]^2e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$, 则由 (24) 式可知

$$C_2'(x)=\left[2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)+2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2\right]e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}\geqslant 0.$$

故 $C_2(x)\leqslant C_2(x_0)=0,\forall x\leqslant x_0$. 因此 $C_2(x)=0,\forall x\leqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x)=0,\forall x\leqslant x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x)\equiv 0,x\in\mathbb{R}$. 从而 $f^{(n-2)}(x)=K,K\in\mathbb{R}$, 又 $f^{(n-2)}(x_0)=0$, 故 $f^{(n-2)}(x)\equiv 0$. 又 $f^{(k)}(x_0)=0,k=0,1,\cdots,n-1$, 依此类推可得 $f(x)\equiv 0$.

□

命题 0.3

设 $f\in D^s(0,+\infty)\cap C[0,+\infty), s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0, j=0,1,2,\cdots,s-1.$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geqslant 0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leqslant\lambda_1|f(x)|+\lambda_2|f'(x)|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}(x)\right|,\forall x\geqslant 0. \tag{25}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+(f'')^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right], M>0$, 显然 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件(25)式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M(f')^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+(f')^2+(f'')^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M(f')^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{(25)\text{式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)(f')^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2|f'|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right].
\end{aligned}\tag{26}$$

我们先证明 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$.

令 $S\triangleq\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K>0$, 使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant K,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S. \tag{27}$$

对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$, 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}>0$, 考虑 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2=1$, 因此 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)\in S$. 从而由 (27) 式可知

$$(\lambda_1Lx_1+\lambda_2Lx_2+\cdots+\lambda_sLx_s)^2\leqslant K.$$

于是

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant\frac{K}{L^2}=K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意性可得

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. \tag{28}$$

因此由 (26) (28)式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)(f')^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2|f'|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)(f')^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+K\left(f^2+(f')^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right]\\
&=e^{-Mx}\left[(K+1-M)f^2+(K+2-M)(f')^2+\cdots+(K+2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M>K+2$, 利用上式就有 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x)\leqslant g(0)=0$. 又因为 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$, 所以 $g(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(s-1)}(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

0.1.3 极值原理

例题 0.14 设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$, 若还有

$$f''(x)-g(x)f'(x)=f(x). \tag{29}$$

证明: $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

证明 如果 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c)>0, f'(c)=0, c\in(0,1)$, 代入(29)式知 $f''(c)=f(c)>0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c)<0, f'(c)=0, c\in(0,1)$, 代入(29)式知 $f''(c)=f(c)<0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上,f 在 $(0,1)$ 上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即

$$0\leqslant f(x)\leqslant 0.$$

故 $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

□

例题 0.15 令 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为连续的, 满足 $f(0)=f(1)=0$. 假设 f'' 在 $(0,1)$ 内存在, 且具有 $f''+2f'+f\geqslant 0$. 证明对所有 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有 $f(x)\leqslant 0$ 成立.

证明 反证, 假设 f 存在正的最大值, 记

$$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]} f(x),$$

由 $f(0)=f(1)=0$ 知 $x_0\in(0,1)$. 再记

$$x_1=\inf\{x\in(x_0,1]:f(x)=0\}.$$

由 $f\in C[0,1]$ 知 $f(x_1)=0$. 并且

$$f(x)>0, \forall x\in(x_0,x_1).$$

否则, 存在 $x_2\in(x_0,x_1)$, 使得 $f(x_2)=0$, 这与 x_1 的下确界定义矛盾! 于是

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x)}{x-x_1}\leqslant 0, \quad \forall x\in(x_0,x_1).$$

令 $x\to x_1^-$ 得

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant 0. \tag{30}$$

注意到

$$f''+f'\geqslant -(f'+f),$$

令 $g(x)=f'(x)+f(x)$, 则

$$g'(x)+g(x)\geqslant 0.$$

再令 $C(x)=e^x g(x)$, 则

$$C'(x)=e^x[g'(x)+g(x)]\geqslant 0.$$

从而 $C(x)$ 递增. 由(30)式知 $f'(x_1)\leqslant 0$, 故

$$0<e^{x_0}f(x_0)=C(x_0)\leqslant C(x_1)=e^{x_1}[f'(x_1)+f(x_1)]=e^{x_1}f'(x_1)\leqslant 0$$

显然矛盾!

□