

## 0.1 复数的几何表示

### 定义 0.1

一个复数  $z = x + iy$  本质上由一对有序实数  $(x, y)$  惟一地确定,  $(x, y)$  就称为复数  $z$  的实数对形式. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以借助于横坐标为  $x$ 、纵坐标为  $y$  的点来表示复数  $z = x + iy$ .  $z$  的极坐标设为  $(r, \theta)$ , 那么  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

由于  $x$  轴上的点对应着实数, 故  $x$  轴称为实轴;  $y$  轴上的非原点的点对应着纯虚数, 故  $y$  轴称为虚轴. 这样表示复数  $z$  的平面称为复平面或  $z$  平面. 复平面也常用  $\mathbb{C}$  表示.

在复平面上, 从原点到点  $z = x + iy$  所引的向量与这个复数  $z$  也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.



**注** 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数  $z_1$  和  $z_2$ , 那么这个向量所表示的复数便是  $z_2 - z_1$ , 因而  $|z_2 - z_1|$  就表示  $z_1$  与  $z_2$  之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量  $z_1$  和  $z_2$  的起点取在原点, 以  $z_1$  和  $z_2$  为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示  $z_1 + z_2$ ; 以  $z_2$  为起点,  $z_1$  为终点的向量就表示  $z_1 - z_2$  (图 1). 现在再来看命题??(ii) 的不等式  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

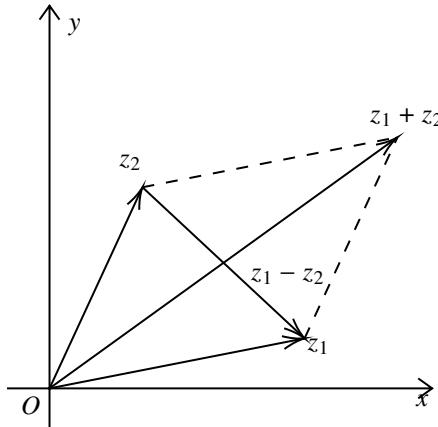


图 1

### 定义 0.2 (辐角)

设  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , 则  $z = x + iy$  也可写成极坐标形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ 其中 } r = |z|, \theta = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

称  $\theta$  为复数  $z$  的辐角, 记为  $\theta = \operatorname{Arg} z$ . 显然

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

因此  $z$  的辐角有无穷多个. 但只有一个辐角在  $(-\pi, \pi]$  中, 称这个辐角为  $z$  的辐角主值, 记为  $\arg z$ . 因而

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

注意 0 的辐角没有意义.



**注** 设  $z = x + iy \in \mathbb{C}/\{0\}$ , 注意到  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$ , 故  $z$  的主辐角与反正切  $\arctan \frac{y}{x}$  的关系如下:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \in \mathbb{R}; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (z \neq 0)$$

### 定理 0.1

设  $z_1, z_2$  是两个复数, 则

- (1)  $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ,  $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2$ .
- (2)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $\operatorname{Arg}\left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2$ .
- (3)  $\operatorname{Arg}(\alpha z) = \operatorname{Arg}z (\alpha > 0)$ ,  $\operatorname{Arg}z^n = n \operatorname{Arg}z (n \in \mathbb{N})$ .



**笔记** 在(1)中, 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数  $w$  乘复数  $z$ , 相当于把  $z$  沿反时针方向转动大小为  $\arg w$  的角, 再让  $z$  的长度伸长  $|w|$  倍. 特别地, 如果  $w$  是单位向量, 那么  $w$  乘  $z$  的结果就是把  $z$  沿反时针方向转动大小为  $\arg w$  的角. 例如, 已知  $i$  是单位向量, 它的辐角为  $\frac{\pi}{2}$ , 因此  $iz$  就是把  $z$  按反时针方向转动  $\frac{\pi}{2}$  角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在(2)中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角可以用  $\operatorname{Arg}\left( \frac{z_1}{z_2} \right)$  来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

**证明** 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2.$$

(2) 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

所以

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2.$$

(3)



### 命题 0.1

- (1) 向量  $z_1$  与  $z_2$  垂直的充要条件是  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .
- (2) 向量  $z_1$  与  $z_2$  平行的充要条件为  $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .



**证明**

- (1) 这是因为  $z_1$  与  $z_2$  垂直就是  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角为  $\pm\frac{\pi}{2}$ , 即  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ , 这说明  $\frac{z_1}{z_2}$  是一个纯虚数, 因而  $z_1\bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$  也是一个纯虚数, 即  $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$ .
- (2) 这是因为  $z_1$  与  $z_2$  平行就是  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角为  $\pm\pi$ , 即  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\pi$ , 这说明  $\frac{z_1}{z_2}$  是一个实数, 因而  $z_1\bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$  也是一个实数, 即  $\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$ .

□

**例题 0.1** 在图 2 的三角形中,  $AB = AC, PQ = RS, M$  和  $N$  分别是  $PR$  和  $QS$  的中点. 证明:  $MN \perp BC$ .

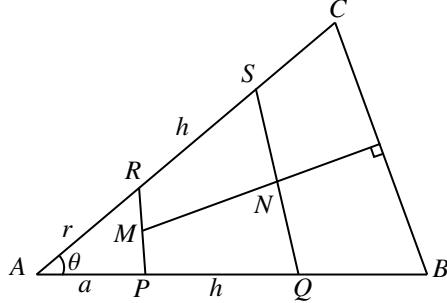


图 2

**证明** 把  $A$  取作坐标原点,  $AB$  所在的直线取作  $x$  轴, 那么  $P, Q$  的坐标分别为  $a$  和  $a+h$ . 如果用  $e^{i\theta}$  记  $\cos\theta + i\sin\theta$ , 那么  $R$  点和  $S$  点可分别用复数  $re^{i\theta}$  和  $(r+h)e^{i\theta}$  表示. 由于  $M$  和  $N$  分别是  $PR$  和  $SQ$  的中点, 所以  $M$  和  $N$  可以分别用复数表示为

$$M : \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}),$$

$$N : \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}].$$

若记  $z_1 = \overrightarrow{MN}$ , 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}] - \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}) = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta}).$$

如果记  $B$  的坐标为  $b$ , 因为  $AB = AC$ , 所以  $C$  的坐标为  $be^{i\theta}$ . 若记  $z_2 = \overrightarrow{BC}$ , 则

$$z_2 = be^{i\theta} - b = b(e^{i\theta} - 1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta})b(e^{-i\theta} - 1) = \frac{bh}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -ibh \sin\theta,$$

因而  $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$ . 所以由命题 0.1(1) 可知  $z_1$  垂直  $z_2$ , 即  $MN \perp BC$ .

□

**例题 0.2** 证明: 平面上四点  $z_1, z_2, z_3, z_4$  共圆的充要条件为

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \quad (1)$$

**证明** 从图 3 可以看出,  $z_1, z_2, z_3, z_4$  四点共圆的充要条件是向量  $z_1 - z_3$  和  $z_1 - z_4$  的夹角等于向量  $z_2 - z_3$  和  $z_2 - z_4$  的夹角或互补 (当  $z_2$  在  $z_3$  与  $z_4$  之间时), 此时由命题 0.1(2) 立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数  $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$  在实轴上, 因而等式(1)成立.

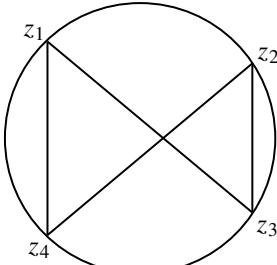


图 3

□

**定理 0.2 (De Moivre 公式)**对任意整数  $n$ , 都有  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ .

♡

**证明** 设  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \dots, z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  是给定的  $n$  个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)].$$

特别当  $z_1 = \cdots = z_n$  都是单位向量时, 就有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta = \cos(-n)\theta + i \sin(-n)\theta.$$

□

**命题 0.2**设  $w$  是一个复数, 则满足方程  $z^n = w$  的复数根有  $n$  个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

◆

**注** 这  $n$  个复数恰好是以原点为中心、 $\sqrt[n]{|w|}$  为半径的圆的内接正  $n$  边形的顶点. 当  $w = 1$  时, 若记  $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , 则  $\sqrt[n]{1}$  的  $n$  个值为

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1},$$

称为  $n$  个单位根. 如果用  $\sqrt[n]{w}$  记  $w$  的任一  $n$  次根, 那么  $w$  的  $n$  个  $n$  次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w}, \sqrt[n]{w}\omega, \dots, \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

**证明** 现在设  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  是给定的, 要求的  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . 由 De Moivre 公式,  $z^n = w$  等价于

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \iff \begin{cases} \rho^n \cos n\varphi = r \cos \theta \\ \rho^n \sin n\varphi = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = r \\ \cos n\varphi = \cos \theta \\ \sin n\varphi = \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

故方程  $z^n = w$  的根为

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对  $\forall k \geq n$ , 都存在  $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in [0, n - 1] \cap \mathbb{Z}$ , 使  $k = p_k n + q_k$ . 于是

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2q_k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2q_k\pi}{n} \right).$$

又注意到  $\sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n - 1$  互不相同, 故方程  $z^n = w$  的根只有  $n$  个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

□