0.1 更弱定义的导数

定理 0.1 (最弱递增条件)

1. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x \to x_0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0,$$
则 f 在 $[a,b]$ 递增.
2. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x \to x_0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \tag{1}$$
则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.
3. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有
$$\underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} > 0.$$
证明 f 在 (a,b) 严格递增.
4. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有
$$\underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \geqslant 0.$$
证明 f 在 (a,b) 递增.

注 只需证明 $f(b) \geqslant f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 的原因: 假设 $f(b) \geqslant f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 已经成立. 任取 $c,d \in (a,b)$ 或 $[a,b]$, 则我们考虑 (c,d) 或 $[c,d]$ 这个区间, 并且已知 f 在 (c,d) 或 $[c,d]$ 上连续且满足上述条件, 于是由假设可知 $f(d) \geqslant f(c)$ 或 $f(d) > f(c)$. 故我们只需证明 $f(b) \geqslant f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 即可.

证明

1. 只需证明 $f(b) \geqslant f(a)$. 由 f 的连续性和极限保号性, 我们只需证明对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $f(b) \geqslant f(a+\varepsilon)$. 考虑
$$F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon).$$
则 $F(b) = F(a+\varepsilon) = 0$, $\overline{\lim\limits_{x \to x_0^+}} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \overline{\lim\limits_{x \to x_0^+}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \dfrac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$, $\forall x_0 \in [a+\varepsilon, b)$. 于是设 F 在 $[a+\varepsilon, b]$ 最大值点为 c,

(i) 当 $c \in [a+\varepsilon, b)$ 时, 则
$$0 \geqslant \overline{\lim_{x \to c^+}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \overline{\lim_{x \to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geqslant -\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$$
故 $f(b) \geqslant f(a+\varepsilon)$.

(ii) 当 $c = b$ 时, 则对 $\forall x \in [a+\varepsilon, b]$, 都有 $0 = F(b) = F(c) \geqslant F(x)$. 从而
$$\begin{aligned}
&F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon) \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} \leqslant \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \\
&\Rightarrow \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geqslant \overline{\lim_{x \to (a+\varepsilon)^+}} \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} > 0 \\
&\Rightarrow f(b) > f(a+\varepsilon)
\end{aligned}$$
证毕.

2. 若 f 在 $[a,b]$ 不严格增, 则存在 $[c,d] \subset [a,b]$ 使得 $f(d) = f(c)$, 注意到由第 1 问可知 f 在 $[c,d]$ 递增, 从而只能为常数, 于是 $f(x) \equiv f(c)$. 不妨设 $[c,d] \subset (a,b)$, 否则任取 $[a,b]$ 一个子区间即可. 因此
$$\overline{\lim_{x \to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0.$$

这显然和(1)矛盾！故我们证明了 f 在 $[a,b]$ 严格递增.

3. 对 $[c,d]\subset(a,b)$，我们断言存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geqslant \overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h} \tag{2}$$
现在我们用 $g(x)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)-f(x)$ 代替 f. 于是考虑 $g\in C^1[c,d]$，$g(d)=g(c)=0$，此时要证明(2), 就只需证明存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{g(x_1+h)-g(x_1-h)}{2h}\geqslant 0 \tag{3}$$
若 $g\equiv0$，已经得到了不等式(3).
若 $t\in(a,b)$ 是 g 的最大值点使得 $g(t)>0$. 取 $k\in(0,g(t))$，则构造非空有界集
$$U=\{x\in[c,t]:g(x)>k\}.$$
记 $x_1=\inf U$，则存在 $t_n\in U$，$n\in\mathbb{N}$ 使得
$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$
注意 $x_1\neq c$，若 $g(x_1)>k$，则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $g>k$，这和 x_1 是 inf 矛盾！故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $g(x_1)=k$. 注意到
$$\frac{g(x_1+t_n-x_1)-g(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\frac{k-k}{2(t_n-k_1)}=0$$
这就给出了(3).
若 f 有负的最小值 $g(t)<0$. 取 $k\in(g(c),0)$，构造非空有界集
$$V=\{x\in[t,d]:g(x)<k\}.$$
并取 $x_1=\sup V$，同样的 $g(x_1)=k$ 且 $x_1\neq d$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是由
$$\frac{g(x_1+x_1-s_n)-g(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0$$
知(3)成立.
现在由不等式(2)和题目条件就证明了 $f(d)>f(c)$，从而 f 严格递增.

4. 注意到 $f(x)+\varepsilon x$，$\varepsilon>0$ 满足第 3 问要求, 因此
$$f(y)+\varepsilon y>f(x)+\varepsilon x,\forall b>y>x>a,\varepsilon>0.$$
让 $\varepsilon\to0^+$，我们有 $f(y)\geqslant f(x)$，这就证明了 f 在 (a,b) 递增.

□

推论 0.1 (右可导函数非负则递增)

设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且在开区间 (a,b) 右可导. 若 $f'_+(x)\geqslant0,\forall x\in(a,b)$, 证明 f 在 $[a,b]$ 递增.

定理 0.2 (右导数的 Lagrange 中值定理)

设 f 在 (a,b) 右可导且在 $[a,b]$ 上连续, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得
$$f'_+(x_2)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f'_+(x_1). \tag{4}$$

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 不妨设 $f(b)=f(a)=0$, 否则用 $f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f 即可. 如果结论不对, 假设 $f'_+(x)\geqslant0$ 恒成立. 于是由推论 0.1我们知道 f 递增, 又 $f(a)=f(b)=0$, 故 $f\equiv0$, 因此此时仍然有(4)成立, 矛盾！这就完成了证明.

□

命题 0.1 (右导数连续则原函数可导)

设 f 在 (a,b) 右可导且 f'_+ 在 (a,b) 连续, 证明 f 在 (a,b) 可导且 $f'(x)=f'_+(x), \forall x\in(a,b)$.

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 由右导数的 Lagrange 中值定理, 我们知道对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 都存在 θ_1,θ_2 在 x_1,x_2 之间, 使得

$$f^S(\theta_2)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f^S(\theta_1),$$

让 $x_2\to x_1$, 由右导数的连续性和夹逼准则即可得

$$f'(x_1)=f^S(x_1).$$

这就完成了证明.

□

0.1.1 Schwarz 导数

定义 0.1 (Schwarz 导数)

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, 我们称 f 在 $x_0\in(a,b)$Schwarz 可导, 如果存在极限

$$f^S(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}. \tag{5}$$

如果 f 在 (a,b) 处处 Schwarz 可导, 则称 f 在 (a,b)Schwarz 可导.

笔记 显然 f 在 x_0 可导则必然在 x_0Schwarz 可导且 $f'(x_0)=f^S(x_0)$, 但反之不一定成立.

定理 0.3 (Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b)Schwarz 可导, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$f^S(x_1)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f^S(x_2). \tag{6}$$

笔记 本定理是此类问题的核心定理. 其余结果都是本定理的平凡推论.

证明 和证明 Lagrange 中值定理一样, 我们只需证明 Rolle 中值定理的情况即可. 即不妨设 $f(a)=f(b)=0$, 否则用 $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f 即可.

若 $f\equiv0$, 则结论是显然的. 若 f 有正的最大值, 则设 $c\in(a,b)$ 是 f 的最大值点使得 $f(c)>0$, 取 $k\in(0,f(c))$, 构造非空有界集

$$U=\{x\in[a,c]:f(x)>k\}.$$

于是记 $x_1=\inf U$, 就有 $t_n\in U$, 使得

$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$

注意 $x_1\neq a$ 且若 $f(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $f>k$, 这和 x_1 是 $\inf U$ 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $f(x_1)=k$. 现在

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+t_n-x_1)-f(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(t_n-x_1)}=0.$$

若 f 有负的最小值 $f(c)<0$. 取 $k\in(f(c),0)$, 构造非空有界集

$$V=\{x\in[c,b]:f(x)<k\}.$$

并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $f(x_1)=k$ 且 $x_1\neq b$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+x_1-s_n)-f(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0.$$

考虑 $f(a+b-x)$ 可得 x_2, 这就完成了定理的证明. □

命题 0.2

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b)Schwarz 可导, 若 $f^S(x)\geqslant 0,\forall x\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 递增.

证明 对 $\forall[c,d]\subset[a,b]$, 由Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理知存在 $\theta\in(c,d)$ 使得

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geqslant f^S(\theta)\geqslant 0,$$

故

$$f(d)\geqslant f(c).$$

这就完成了证明. □

命题 0.3

若 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 有连续的 Schwarz 导数, 则 f 在 (a,b) 可微且

$$f'(x)=f^S(x),\forall x\in(a,b).$$

证明 由Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理, 我们知道对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 都存在 θ_1,θ_2 在 x_1,x_2 之间, 使得

$$f^S(\theta_2)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f^S(\theta_1),$$

让 $x_2\to x_1$, 由 Schwarz 导数连续性和夹逼准则即可得

$$f'(x_1)=f^S(x_1).$$

这就完成了证明.

□

例题 0.1 设 $f\in C(a,b)$ 且存在极限:

$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}. \tag{7}$$

1. 若 f 在 $x_0\in(a,b)$ 二阶可导, 则 $f''(x_0)=f^{[2]}(x_0)$.
2. 若 $f^{[2]}(x)<0,\forall x\in(a,b)$, 证明 f 为 (a,b) 上的严格上凸函数.
3. 若 $f^{[2]}(x)<0,\forall x\in(a,b)$ 且 f 在 (a,b) 是有下界函数, 证明 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在.
4. 若 $f^{[2]}(x)=0,\forall x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 为线性函数.

证明

1. 因为 f 在 $x_0\in(a,b)$ 二阶可导, 所以 f 在 x_0 邻域一阶可导, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)}{4h^2}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0)}{8h}+\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\&=\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$

2. 对任何 $x\in(a,b)$, 存在充分小的 $\eta>0$, 只要 $h\in(0,\eta)$, 就有

$$f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)<0,$$

即

$$\frac{f(x+2h)+f(x-2h)}{2}<f(x).$$

现在对 $x\in(a,b),y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\delta>0$, 取 $0<h<\min\left\{\delta,\frac{2\delta}{|y|}\right\}$, 就有

$$f(x)>\frac{f(x+hy)+f(x-hy)}{2}.$$

由定理**??**知 f 是 (a,b) 上的严格上凸函数.

3. 由命题**??**和第二问我们知道 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在.
4. **Method 1** 由第二问我们知道 f 在 (a,b) 即凹又凸. 则由命题**??**知 f 是线性函数.

   Method 2 标准的摄动法, 保持二阶导且不破坏边界条件的最好的振动函数是 $-(x-a)(x-b)$.

   不妨先一般性, 假设 $f\in C[a,b]$, 否则用内闭考虑即可. 我们用 $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f, 从而不妨设 $f(a)=f(b)=0$. 若某个 $x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)>0$, 考虑

$$f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b),$$

   这里 $\varepsilon>0$, 使得

$$f(x_0)+\varepsilon(x_0-a)(x_0-b)>0.$$

   不妨设 x_0 是 f_ε 的最大值点, 现在

$$f_\varepsilon(a)=f_\varepsilon(b)=0, f_\varepsilon(x_0)=\max_{x\in[a,b]} f_\varepsilon(x), f_\varepsilon^{[2]}(x_0)=2\varepsilon>0.$$

   但是

$$f_\varepsilon^{[2]}(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f_\varepsilon(x_0+2h)-2f_\varepsilon(x_0)+f_\varepsilon(x_0-2h)}{4h^2}\leqslant 0.$$

   这就是一个矛盾! 于是我们证明了 $f\leqslant 0$. 考虑 $-f$ 可得 $f\equiv 0$. 证毕!

□