

0.1 正定型与正定矩阵初步

定义 0.1

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}$ 是 n 元实二次型, \mathbf{A} 是相伴矩阵.

- (1) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha' \mathbf{A} \alpha > 0$, 则称 f 是正定二次型 (简称正定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为正定矩阵 (简称正定阵);
- (2) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha' \mathbf{A} \alpha < 0$, 则称 f 是负定二次型 (简称负定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为负定矩阵 (简称负定阵);
- (3) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha' \mathbf{A} \alpha \geq 0$, 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为半正定矩阵 (简称半正定阵);
- (4) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha' \mathbf{A} \alpha \leq 0$, 则称 f 是半负定二次型 (简称半负定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为半负定矩阵 (简称半负定阵);
- (5) 若存在 α , 使 $\alpha' \mathbf{A} \alpha > 0$; 又存在 β , 使 $\beta' \mathbf{A} \beta < 0$, 则称 f 是不定型.

注 显然

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

是正定型, 而

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

是负定型.

定理 0.1

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元实二次型, 则

- (1) f 是正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n ;
- (2) f 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n ;
- (3) f 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r ;
- (4) f 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩 r .

证明 只证明 (1), 其余结论的证明类似.

若 f 的正惯性指数等于 n , 则 f 可化为下列标准型:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

显然 f 是正定型. 反之, 若 f 是正定型, 如果 f 的正惯性指数 $p < n$, 则 f 可化为如下标准型:

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - c_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - c_n y_n^2, \quad (1)$$

其中 $c_j \geq 0 (j = p+1, \dots, n)$. 这时令 $b_1 = \dots = b_p = 0, b_{p+1} = \dots = b_n = 1$, 则 b_1, b_2, \dots, b_n 不全为零. 假设这时 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, 其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

\mathbf{C} 是非异阵, 则从 $y_i = b_i (i = 1, \dots, n)$ 可得 $x_i = a_i (i = 1, \dots, n)$ 是一组不全为零的实数. 于是

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 0,$$

这与 f 是正定型矛盾. □

定理 0.2

- (1) n 阶实对称阵 A 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 I_n ;
 (2) A 是负定阵当且仅当它合同于 $-I_n$;
 (3) A 是半正定阵当且仅当 A 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

- (4) A 是半负定阵当且仅当 A 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$



证明 由定理 0.1 及定理 ?? 可立即得到证明. □

推论 0.1

若矩阵 A 可逆, 且 A 是半正定阵, 则 A 一定是正定阵. ♥

证明 由定理 0.2 可知 A 合同于 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 r 是 A 的秩. 又因为 A 可逆, 所以 $r = n$, 故 A 与 I_n 合同. 会因此再由定理 0.2 可知 A 是正定阵. □

定义 0.2 (顺序主子式)

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, A 的 n 个子式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 A 的顺序主子式. ♣

定理 0.3

n 阶实对称阵 A 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零. ♥

证明 先证必要性. 设 n 阶实对称阵 $A = (a_{ij})$ 为正定阵, 则对应的实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

为正定型. 令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k a_{ij} x_i x_j,$$

则对任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \cdots, c_k , 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

因此 f_k 是一个正定二次型, 从而它的相伴矩阵 A_k (由 A 的前 k 行及前 k 列组成) 是一个正定阵. 由于 A_k 合同于 I_k , 故存在 k 阶非异阵 B , 使

$$B' A_k B = I_k,$$

于是

$$\det(B' A_k B) = \det(B)^2 \det(A_k) = 1,$$

即有 $\det(\mathbf{A}_k) > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$.

再证充分性. 对 \mathbf{A} 的阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $\mathbf{A} = (a), a > 0$, 于是 $f = ax_1^2$ 是正定型, 从而 \mathbf{A} 是正定阵. 设结论对 $n - 1$ 成立, 现证明对 n 阶实对称阵 \mathbf{A} , 若它的 n 个顺序主子式全大于零, 则 \mathbf{A} 必是正定阵. 记 \mathbf{A}_{n-1} 是 \mathbf{A} 的 $n - 1$ 阶顺序主子式所在的矩阵, 则 \mathbf{A} 可写为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 \mathbf{A} 的顺序主子式全大于零, 故 \mathbf{A}_{n-1} 的顺序主子式也全大于零, 由归纳假设, \mathbf{A}_{n-1} 是正定阵. 于是 \mathbf{A}_{n-1} 合同于 $n - 1$ 阶单位阵, 即存在 $n - 1$ 阶非异阵 \mathbf{B} , 使

$$\mathbf{B}'\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n-1}.$$

令 \mathbf{C} 是下列分块矩阵:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{B}'\alpha \\ \alpha'\mathbf{B} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是一个实对称阵, 其形式为

$$\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

用第三类初等行及列变换可将上述矩阵化为对角阵. 这相当于对 $\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}$ 右乘一个非异阵 \mathbf{Q} 后, 再左乘 \mathbf{Q}' 得到一个对角阵, 亦即 $\mathbf{Q}'\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{Q}$ 等于

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, c\}.$$

由于 $|\mathbf{A}| > 0$, 故 $c > 0$, 这就证明了 \mathbf{A} 是一个正定阵. □

命题 0.1

- (1) 若 \mathbf{A} 是正定阵, 则 \mathbf{A} 的任一 k 阶主子阵, 即由 \mathbf{A} 的第 i_1, i_2, \dots, i_k 行及 \mathbf{A} 的第 i_1, i_2, \dots, i_k 列交点上元素组成的矩阵, 必是正定阵;
若 \mathbf{A} 是半正定阵, 则半正定阵 \mathbf{A} 的任一 k 阶主子阵也是半正定阵.
- (2) 若 \mathbf{A} 是正定阵, 则 \mathbf{A} 的所有主子式全大于零, 特别, \mathbf{A} 的主对角元素全大于零;
- (3) 若 \mathbf{A} 是正定阵, 则 \mathbf{A} 中绝对值最大的元素仅在主对角线上.

注 (2) 用的是变量代换, 但是它和矩阵的合同变换 (对换行与列) 是等价.

证明

- (1) 设 \mathbf{A}_k 是矩阵 \mathbf{A} 的第 k 个顺序主子式所在的矩阵, 则 \mathbf{A}_k 是实对称阵且其顺序主子式都大于零, 因此 \mathbf{A}_k 是正定阵.

经过若干次行对换以及相同的列对换, 我们不难将 \mathbf{A} 的第 i_1, i_2, \dots, i_k 行及 i_1, i_2, \dots, i_k 列分别换成第 $1, 2, \dots, k$ 行和第 $1, 2, \dots, k$ 列. 利用上面的结论即知正定阵的任一 k 阶主子阵是正定阵. 同理可证半正定阵的任一 k 阶主子阵也是半正定阵.

- (2) **证法一:** 由 (1) 的结论, \mathbf{A} 的所有主子式都是正定阵. 又 \mathbf{A} 的每个主子式都是其自身的顺序主子式, 故由 **定理 0.3** 可知 \mathbf{A} 的所有主子式都大于零. 因此 (2) 成立.

证法二: 设 M 是 \mathbf{A} 的第 i_1, \dots, i_k 行和列交点上的元素组成的主子式. 设 $i_{k+1} < \dots < i_n$ 是 $[1, n]$ 中去掉

i_1, \dots, i_k 后剩余的指标, 对二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 作如下可逆线性变换:

$$y_1 = x_{i_1}, \quad \dots, \quad y_k = x_{i_k}, \quad y_j = x_{i_j} \quad (k+1 \leq j \leq n).$$

于是 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{y}$, 且 \mathbf{B} 的第 k 个顺序主子式就是 M , 因为 \mathbf{B} 正定, 故有 $M > 0$.

- (3) 用反证法. 假设 $a_{ij} (i \neq j)$ 是 \mathbf{A} 的绝对值最大的元素. 根据 (1), 我们只需证明由第 i, j 行与第 i, j 列交点上元素组成的矩阵不是正定阵即可. 考虑矩阵 (由 \mathbf{A} 的对称性不妨设 $i < j$)

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

注意到 $a_{ij} = a_{ji}$ 且 $|a_{ij}| \geq a_{ii}, |a_{ij}| \geq a_{jj}$, 上述矩阵的行列式值 $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \leq 0$, 所以这个矩阵一定不是正定阵.

□