0.1 复数列的极限

定义 0.1

对于 $a\in\mathbf{C}, r>0$, 称

$$B(a,r)=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<r\}$$

为以 a 为中心、以 r 为半径的**圆盘**. 特别当 $a=0, r=1$ 时, $B(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 称为**单位圆盘**. $B(a,r)$ 也称为 a 点的一个 r **邻域**, 或简称为 a 点的**邻域**. 无穷远点 $z=\infty$ 的邻域是指集合 $\{z\in\mathbf{C}:|z|>R\}$, 记为 $B(\infty,R)$.

♣

定义 0.2

我们说 $\mathbf{C}$ 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 $\mathbf{C}$ 中的点 z_0, 是指对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $|z_n-z_0|<\varepsilon$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$. 或者从几何上来说, 对任给的 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时, $z_n\in B(z_0,\varepsilon)$.

我们称复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 ∞, 是指对任给的正数 $M>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $|z_n|>M$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$. 或者从几何上来说, 对任给的 $M>0$, 当 n 充分大时, $z_n\in B(\infty,M)$.

♣

定理 0.1

设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

♡

证明 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 从等式

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$$

马上可以得到: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$. □

定义 0.3

复数列 $\{z_n\}$ 称为 **Cauchy 列**, 如果对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

♣

定理 0.2

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

♡

证明 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n, z_m=x_m+\mathrm{i}y_m$, 那么从等式

$$|z_n-z_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}$$

知道, $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列. □

定理 0.3 (复数域的 Cauchy 收敛准则)

$\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列.

♡

笔记 由此知道复数域 $\mathbf{C}$ 是**完备的**.

证明 由定理 0.1和定理 0.2, 再结合实数域中的 Cauchy 收敛准则立刻得到复数域的 Cauchy 收敛准则. □

定义 0.4

♣

定义 0.5

♣