0.1 局部展开和能量积分法

命题 0.1

设 $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $g(a) = \min_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha} [g(x) - g(a)]^{\alpha} M, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

证明 不妨设 $g(a) = 0$, 否则用 $g(x) - g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M = 0$, 则不等式(2)显然成立. 当 $M \neq 0$ 可以不妨设 $M = 1$.

现在对非负函数 g, 当 $g'(x_0) = 0$, 不等式(2)显然成立. 当 $g'(x_0) > 0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned} g(x_0) \geqslant g(x_0) - g(h) &= \int_h^{x_0} g'(t)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_h^{x_0} [g'(x_0) - |t - x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t \\ &= g'(x_0)(x_0 - h) - \frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取 $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立. 类似的考虑 $g'(x_0) < 0$ 可得(2).

当 $g'(x_0) < 0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned} g(x_0) \geqslant -g(h) + g(x_0) &= -\int_{x_0}^{h} g'(t)\mathrm{d}t \\ &\geqslant -\int_{x_0}^{h} [g'(x_0) + |t - x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t \\ &= -g'(x_0)(h - x_0) - \frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取 $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立.

□

推论 0.1

设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

证明 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x.

(i) 若 $f'(x) = 0$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $f'(x) < 0$, 则令 $h = \left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. 由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned} 0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) + \int_x^{x+h} \left[f'(t) - f'(x)\right] \mathrm{d}t + f'(x)h \\ &\leqslant f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^{\alpha}\, \mathrm{d}t + f'(x)h = f(x) + \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f'(x)h \\ &= f(x) + \frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x)\right] \left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) \Longleftrightarrow f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

(iii) 若 $f'(x) > 0$, 则令 $h = \left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\mathrm{d}t + f(x) = \int_{x-h}^{x} \left[f'(x) - f'(t)\right] \mathrm{d}t + f(x) - f'(x)h \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^{\alpha}\, \mathrm{d}t + f(x) - f'(x)h = \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)h \\
&= \frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x)\right]\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) \Longleftrightarrow \left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

□

例题 0.1 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数的非负函数, 且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|.$$

证明: 对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x)$.

证明 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x. 由 $f\geqslant 0$ 可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$\int_{x-h}^{x} [f'(x) - f'(t)]\mathrm{d}t = f'(x)h - [f(x) - f(x-h)] \geqslant f'(x)h - f(x).$$

又由条件可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$\int_{x-h}^{x} |f'(x) - f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant M\int_{x-h}^{x} |x-t|\mathrm{d}t = \frac{M}{2}h^2.$$

于是对 $\forall h>0$, 有

$$f'(x)h - f(x) \leqslant \int_{x-h}^{x} [f'(x) - f'(t)]\mathrm{d}t \leqslant \int_{x-h}^{x} |f'(x) - f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{2}h^2.$$

故对 $\forall h>0$, 都有

$$\frac{M}{2}h^2 - f'(x)h + f(x) \geqslant 0.$$

因此

$$\Delta = (f'(x))^2 - 2Mf(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow (f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x).$$

再由 x 的任意性可知结论成立.

□

例题 0.2 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导, 且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x) > 0, \quad f'''(x) \leqslant f(x).$$

证明:$\forall x\in\mathbb{R}$ 成立

$$f'(x) < 2f(x).$$

证明 证法一:由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都存在 ξ 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0 < f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}t^3. \tag{3}$$

当 $t\leqslant 0$ 时, 由(3)式和条件可得

$$0 < f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}t^3 \leqslant f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2.$$

当 $t > 0$ 时, 由条件可得

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0.$$

故

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

由二次函数的性质可知

$$\Delta=\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^2<2f''(x)f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

同理, 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都存在 η 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0<f'(x+t)=f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2.$$

由 $f'>0$ 知 f 递增, 再结合 $f'''(x)<f(x)$, 由上式可得, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都有

$$0<f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2<f'(x)+f''(x)t+\frac{f(\eta)}{2}t^2\leqslant f'(x)+f''(x)t+\frac{f(x)}{2}t^2.$$

于是由二次函数的性质可知

$$\Delta'=\left[f''(x)\right]^2-2f'(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f'(x)f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

由(4)(5)式可得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left[f'(x)\right]^4<4\left[f''(x)\right]^2f^2(x)<8f'(x)f^3(x)\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^3<8f^3(x)\Longrightarrow f'(x)<2f(x).$$

证法二 (能量积分法): 由条件知 f,f',f'' 都是递增函数且有下界 0, 故

$$f(-\infty),f'(-\infty),f''(-\infty)\in[0,+\infty).$$

若 $f'(-\infty)=A>0$, 则存在 $-M<0$, 使得

$$f'(x)>\frac{A}{2},\quad \forall x\leqslant -M.$$

于是对 $\forall x<-M$, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(-M)+\int_{-M}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t=f(-M)-\int_{x}^{-M}f'(t)\,\mathrm{d}t\\&<f(-M)-\int_{x}^{-M}\frac{A}{2}\mathrm{d}t=f(-M)-\frac{A}{2}(-M-x)\\&=f(-M)+\frac{A}{2}(x+M).\end{aligned}$$

令 $x\to-\infty$ 得 $f(-\infty)=-\infty$, 这与 $f(-\infty)\in[0,+\infty)$ 矛盾! 故 $f'(-\infty)=0$. 同理可证 $f''(-\infty)=0$. 由条件可得

$$\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'=f'''(x)f''(x)<f(x)f''(x)=\left[f(x)f'(x)\right]'-\left[f'(x)\right]^2<\left[f(x)f'(x)\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'\mathrm{d}t<\int_{-\infty}^{x}\left[f(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t\Longleftrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f(x)f'(x). \tag{6}$$

同理, 由条件可得

$$\left[f''(x)f'(x)\right]'-\left[f''(x)\right]^2=f'''(x)f'(x)<f(x)f'(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2.$$

从而

$$\left[f''(x)f'(x)\right]'<\frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\left[f''(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t<\int_{-\infty}^{x}\frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'\mathrm{d}t\Longleftrightarrow f''(x)f'(x)<\frac{3}{2}f^2(x). \tag{7}$$

将(6)(7)两式相乘得

$$\left[f''(x)\right]^3<3f^3(x)\Longrightarrow f''(x)<\sqrt[3]{3}f(x)\Longrightarrow f''(x)f'(x)<\sqrt[3]{3}f(x)f'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

两边再同时积分得

$$\int_{-\infty}^{x} f''(t)f'(t)\mathrm{d}t < \sqrt[3]{3}\int_{-\infty}^{x} f(t)f'(t)\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \left[f'(x)\right]^2 < \sqrt[3]{3}f^2(x) \Longleftrightarrow f'(x) < \sqrt[6]{3}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

例题 0.3

证明

□