0.1 理想

定义 0.1 (由子集生成的理想)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $A\subset R$. 则 (A), 称为**由 A 生成的理想**, 定义为所有 R 中包含 A 的理想的交集, 即

$$(A)=\bigcap\{I\subset R:I\supset A,I\lhd R\}.$$

笔记 因为 $R\lhd R$ 且 $A\subset R$, 所以 $R\subset(A)$. 故 $(A)\neq\varnothing$.

命题 0.1 (生成的理想还是理想)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $A\subset R$, 则 $(A)\lhd R$.

证明 首先, 取交集的集族非空, 因为整个环 R 是包含了 A 的一个理想（对加法构成子群, 且“吸收”了乘法）.

由于集族中每一个理想都是加法子群. 因此根据命题**??**可知, 它们的交还是加法子群. 我们只须检验乘法的“吸收”性, 即 $R(A)\subset(A)$, 及 $(A)R\subset(A)$. 根据对称性, 我们证明第一个包含关系. 假设 $r\in R,a\in(A)$, 则对于任意集族中的理想 I, 我们都有 $a\in I$. 故 $ra\in I$. 这对于任意这样的理想 I 都是成立的, 因此 $ra\in(A)$. 这就证明了 (A) 是 R 的子环. □

定义 0.2

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $a\in R$, 则我们定义

$$(a)=(\{a\}).$$

称为**由 a 生成的主理想**. 一般地, 若一个理想能被一个元素生成, 我们就称其为**主理想**.

对于 $a_1,\cdots,a_n\in R$, 我们定义

$$(a_1,\cdots,a_n)=(\{a_1,\cdots,a_n\}).$$

一般地, 若一个理想能被有限个元素生成, 我们就称其为**有限生成的理想**.

命题 0.2

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $a\in R$, 则

$$(a)=Ra=\{ra:r\in R\}.$$

一般地, 若 $a_1,\cdots,a_n\in R$, 则

$$(a_1,\cdots,a_n)=Ra_1+\cdots+Ra_n=\{r_1a_1+\cdots+r_na_n:r_1,\cdots,r_n\in R\}.$$

注 若 $(R,+,\cdot)$ 是环, 但不是交换环, 则上述结论仍成立. 但是我们还可以同理得到, 当 $m=1,2,\cdots,n$ 时, 都有

$$(a_1,\cdots,a_n)=Ra_1+\cdots+Ra_m+a_{m+1}R+\cdots+a_nR.$$

故此时与 $(a_1,\cdots,a_n)$ 相等的集合就有 2^m 种不同的形式.

如果 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 那么当 $m=1,2,\cdots,n$ 时, 都有

$$(a_1,\cdots,a_n)=Ra_1+\cdots+Ra_m+a_{m+1}R+\cdots+a_nR=Ra_1+\cdots+Ra_n.$$

这样在交换环下 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的形式就能够统一起来.

证明 显然有限生成的理想是主理想的特例, 故我们只须证明第二个等式.

要证明 $(A)=I$, 我们只须证明两点. 一,I 是包含 A 的理想 (即 $(A)\subset I$); 二, 每一个包含 A 的理想都会包含 I(即 $\forall H\in(A)$, 都有 $I\subset H$. 也即 $I\subset(A)$).

首先, 要证明 $Ra_1+\cdots+Ra_n$ 是个理想. 对加法而言,$0=0a_1+\cdots+0a_n\in Ra_1+\cdots+Ra_n$, 而且对 $r_1a_1+\cdots+$

$r_n a_n, s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n (r_i, s_i \in R)$, 我们有

$$(r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n) - (s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n) = (r_1 - s_1) a_1 + \cdots + (r_n - s_n) a_n \in R a_1 + \cdots + R a_n.$$

因此 $R a_1 + \cdots + R a_n$ 对加法构成子群.

接下来, 根据对称性, 我们只须证明 $R(R a_1 + \cdots + R a_n) \subset (R a_1 + \cdots + R a_n)$. 而这是因为

$$R(R a_1 + \cdots + R a_n) = R R a_1 + \cdots + R R a_n = R a_1 + \cdots + R a_n.$$

这样, 我们就证明了 $R a_1 + \cdots + R a_n$ 是个理想, 而且显然包含 $\{a_1, \cdots, a_n\}$.

另一方面, 设 I 是一个包含了 $a_1, \cdots, a_n$ 的理想, 那么根据加法的封闭性及乘法的"吸收"性,

$$I \supset R a_1 + \cdots + R a_n.$$

综上所述, 这就证明了这个命题. $\square$

定义 0.3 (理想的加法)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个环, 而 $I, J \lhd R$, 则

$$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}.$$

命题 0.3 (理想的加法还是理想)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个环, 而 $I, J \lhd R$, 则 $I + J$ 还是个理想, 即

$$I + J \lhd R.$$

证明 由引理**??**可知 $(I + J, +) < (R, +)$. 因此我们只须证明乘法的"吸收"性.

$$R(I + J) = RI + RJ \subseteq I + J,$$
$$(I + J)R = IR + JR \subseteq I + J.$$

这就证明了

$$I + J \lhd R.$$

$\square$

命题 0.4

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个环, 而 $I, J \lhd R$, 则 $I + J$ 是由 $I \cup J$ 生成的理想, 即

$$I + J = (I \cup J).$$

证明 首先, 由命题 0.3可知 $I + J$ 是一个理想. 而 $I + J \supset I + \{0\} = I$, 同理 $I + J \supset J$, 故 $I + J \supset I \cup J$. 这就证明了 $I + J$ 是一个包含了 $I \cup J$ 的理想.

接着, 如果 K 是包含了 $I \cup J$ 的理想, 则 $K \supset I, K \supset J$, 那么根据加法封闭性, 我们当然有

$$K \supset I + J.$$

综上所述, 我们就证明了

$$I + J = (I \cup J).$$

$\square$

定义 0.4 (理想的乘法)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $I, J \lhd R$, 则

$$IJ = (\{ab : a \in I, b \in J\}) = (I \cdot J).$$

上面的圆括号表示生成的理想.

注 由命题 0.1可知, 上述定义的 IJ 仍是 R 的一个理想.

命题 0.5

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $I,J \lhd R$, 则

$$IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\}.$$

注 若 $(R,+,\cdot)$ 是环, 但不是交换环, 则上述结论仍成立. 但是我们还可以同理得到, 当 $m=1,2,\cdots,n$ 时, 都有

$$IJ = \{(a_1b_1 + \cdots + a_mb_m) + (b_{m+1}a_{m+1} + \cdots + b_na_n) : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\}.$$

故此时与 IJ 相等的集合就有 2^m 种不同的形式.

如果 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 那么当 $m=1,2,\cdots,n$ 时, 都有

$$\begin{aligned} IJ &= \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\} \\ &= \{(a_1b_1 + \cdots + a_mb_m) + (b_{m+1}a_{m+1} + \cdots + b_na_n) : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\}. \end{aligned}$$

这样在交换环下 IJ 的形式就能够统一起来.

证明 首先, 如果 K 是交换环 R 中包含了 $\{ab : a \in I, b \in J\}$ 的理想, 则根据加法的封闭性,

$$K \supset \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\}.$$

故 $\{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\} \subset IJ$.

接着, 我们要证明 $A = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_1,\cdots,a_n \in I, b_1,\cdots,b_n \in J\}$ 确实是包含了 $\{ab : a \in I, b \in J\}$ 的一个 R 上的理想. 包含关系是显然的, 这就是有限和中只有一项的特例.

我们先证明加法是子群.$0 = 00 + \cdots + 00 \in A$, 而且对于 $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n, c_1d_1 + \cdots + c_md_m \in A$, 其中 $a_i, c_i \in I, b_i, d_i \in J$. 由 $I,J \lhd R$ 可知 $-c_i \in I, a_ib_i \in I, (-c_i)d_i \in J$. 于是我们有

$$\begin{aligned} &(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) - (c_1d_1 + \cdots + c_md_m) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + (-c_1)d_1 + \cdots + (-c_m)d_m \\ &= (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)\cdot 1 + 1\cdot((-c_1)d_1 + \cdots + (-c_m)d_m) + 0 + \cdots + 0 \in A. \end{aligned}$$

故 $(A,+)$ 是 $(R,+)$ 的子群. 我们再证明乘法的"吸收性". 根据对称性, 我们只证"左吸收性". 令 $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \in A$, 而 $\forall r \in R$, 都有 $ra_i \in I$, 不妨令 $a_i' = ra_i \in I$, 则

$$r(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) = ra_1b_1 + \cdots + ra_nb_n = a_1'b_1 + \cdots + a_n'b_n \in A.$$

综上所述, 由交换环中的两个理想 I,J 的乘积所生成的理想, 就是它们元素乘积的有限和所构成的集合. □

命题 0.6 (理想关于加法和乘法的运算律)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $I,J,K \lhd R$, 则满足

(1) $I+J=J+I$;

(2) $I+(J+K)=(I+J)+K$;

(3) $I(J+K)=IJ+IK$;

(4) $I(JK)=(IJ)K$;

(5) $I=RI=IR$.

证明

(1) 由 $(R,+)$ 是一个 Abel 群可直接得到 $I+J=J+I$.

(2) 由 $(R,+)$ 是一个 Abel 群也可直接得到 $I+(J+K)=(I+J)+K$.

(3) 一方面,$I(J+K) \supset I(J+\{0\}) = IJ$, 同理 $I(J+K) \supset IK$. 又 $I(J+K)$ 是 R 上的理想, 故根据 $I(J+K)$ 对加法的封闭性可得 $I(J+K) \supset IJ+IK$.

另一方面，令 $\sum_i (a_i(b_i + c_i)) \in I(J + K)$，则

$$\sum_i (a_i(b_i + c_i)) = \sum_i (a_i b_i) + \sum_i (a_i c_i) \in IJ + IK.$$

因此 $I(J + K) \subset IJ + IK$.

(4) 根据对称性，我们只证明 $I(JK) \subset (IJ)K$. 因为理想的乘积是由元素乘积的集合所生成的，故只须证明 $\{ad : a \in I, d \in JK\} \subset (IJ)K$. 令 $a \in I, d = \sum_i (b_i c_i) \in JK$. 则

$$ad = a \sum_i (b_i c_i) = \sum_i ((ab_i) c_i).$$

其中 $ab_i \in IJ$，故 $ad \in (IJ)K$. 因此 $I(JK) \subset (IJ)K$.

(5) 我们只证明 $I = RI$. 一方面，根据理想的定义,$I \supset RI$. 另一方面,$I = 1I \subset RI$，因为 $1 \in R$.

□

引理 0.1

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环，而 $I, J \lhd R$，则

$$IJ \subset I \cap J \subset I + J$$

证明 证明是简单的. 因为 R 是一个交换环，而 I 是一个理想，故

$$IJ \subset IR = I.$$

对 J 是类似的，故

$$IJ \subset I \cap J.$$

另外,$I \cap J \subset I$，而且 $I \cap J \subset J$，故

$$I \cap J \subset (I \cup J) = I + J.$$

这就证明了这个引理. □

引理 0.2

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环，而 $I, J \lhd R$，则

$$(I \cap J)(I + J) \subset IJ.$$

证明 证明是不难的. 由命题 0.5可知 $(I \cap J)(I + J) = \{\sum_i (a_i(b_i + c_i)) : a_i \in I \cap J, b_i \in I, c_i \in J\}$. 于是任取 $\sum_i (a_i(b_i + c_i)) \in (I \cap J)(I + J)$，则 $a_i(b_i + c_i) \in (I \cap J) \cdot (I + J)$，其中 $a_i \in I \cap J, b_i \in I, c_i \in J$，从而

$$\sum_i (a_i(b_i + c_i)) = \sum_i (a_i b_i) + \sum_i (a_i c_i) \subset JI + IJ = IJ + IJ = IJ.$$

第一个等号是因为 R 中的乘法对加法满足分配律，倒数第二个等号是根据交换环对乘法的交换律，最后一步是根据理想的乘积对加法的封闭性. 这就证明了这个命题. □

命题 0.7

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环，而 $I, J, K \lhd R$，则

$$I \cap (J + K) \supset I \cap J + I \cap K$$

特别地，如果 $J \subset K$，则

$$I \cap (J + K) = I \cap J + I \cap K$$

证明 因为 $I\cap(J+K)\supset I\cap J$, 且 $I\cap(J+K)\supset I\cap K$, 又 $I\cap(J+K)$ 构成 R 的加法子群, 从而对加法封闭. 所以

$$I\cap(J+K)\supset I\cap J+I\cap K.$$

这就证明了第一点.

接下来, 我们假设 $J\subset K$. 我们只须证明

$$I\cap(J+K)\subset I\cap J+I\cap K.$$

而这是因为

$$I\cap(J+K)\subset I\cap(K+K)=I\cap K\subset I\cap J+I\cap K.$$

这就证明了这个命题. □

定义 0.5 (理想的互素)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $I,J\lhd R$. 我们称 I,J **互素**, 若其和为整个环, 即

$$I+J=R.$$

♣

命题 0.8 (两个理想互素的充要条件)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $I,J\lhd R$. 则 I,J 互素, 当且仅当

$$\exists a\in I,\exists b\in J,a+b=1.$$

♠

证明 一方面, 若 $I+J=R$, 则根据引理**??**可知 $1\in R=I+J$, 故存在 $a\in I,b\in J$, 使得 $a+b=1$.

另一方面, 假设 $a+b=1(a\in I,b\in J)$, 则对任何 $r\in R$,

$$r=r1=r(a+b)=ra+rb\in RI+RJ=I+J$$

这就证明了 $I+J\subset R$. 而由 R 对加法封闭, 显然有 $R\subset I+J$. 故 $R=I+J$. 综上所述, 两个理想互素当且仅当 1 可以写成这两个理想中元素的和. □

命题 0.9

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $I,J\lhd R$ 互素, 则

$$IJ=I\cap J.$$

♠

证明 由引理 0.1可知

$$IJ\subset I\cap J.$$

故只须证明

$$I\cap J\subset IJ.$$

由 I,J 互素可知 $I+J=R$. 又由命题**??**可知 $I\cap J$ 仍是 R 的理想, 从而 $I\cap J=(I\cap J)R$. 于是由引理 0.2可得

$$I\cap J=(I\cap J)R=(I\cap J)(I+J)\subset IJ.$$

这就证明了这个命题. □

命题 0.10

设 $(R,+,\cdot)$ 和 $(R',+,\cdot)$ 是两个交换环, $f:(R,+,\cdot)\to(R',+,\cdot)$ 是一个环同态, 而 $I'\lhd R'$, 则 $f^{-1}(I')\lhd R$.

♠

证明 就加法子群而言, 由命题**??**可知 $0=f^{-1}(0)\in R$, 并且若 $a=f^{-1}(a'),b=f^{-1}(b')\in f^{-1}(I')$, 则

$$\begin{aligned}&f(a-b)=f(a)+f(-b)=f(a)-f(b)=a'-b'\\ \Rightarrow\ &a-b=f^{-1}(a'-b')\in f^{-1}(I').\end{aligned}$$

就乘法的“吸收”性来说. 根据对称性, 我们只须证明 $Rf^{-1}(I') \subset f^{-1}(I')$, 对 $\forall r \in R, x \in f^{-1}(I')$, 有 $f(x) \in I'$. 由 f 是环同态可知,$f(rx) = f(r)f(x)$. 又由 I' 是 R' 的理想且 $f(r) \in R'$, 因此 $f(rx) = f(r)f(x) \in I'$. 于是 $rx \in f^{-1}(I')$. 这样, 我们就证明了这个命题, 即交换环中, 理想在环同态下的原像还是理想. □