0.1 多项式插值

定义 0.1

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 且已知在点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$ 上的值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 若存在一简单函数 $P(x)$, 使

$$P(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

成立, 就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**, 点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**, 包含插值节点的区间 $[a,b]$ 称为**插值区间**, 求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法**. 若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式, 即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

其中 a_i 为实数, 就称 $P(x)$ 为**插值多项式**, 相应的插值法称为**多项式插值**. 若 $P(x)$ 为分段的多项式, 就称为**分段插值**. 若 $P(x)$ 为三角多项式, 就称为**三角插值**. ♣

定理 0.1

设在区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个点

$$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$$

上的函数值 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$, 求次数不超过 n 的多项式 $P(x)$, 使

$$P(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{1}$$

证明: 满足上述条件的插值多项式 $P(x)$ 是存在唯一的. ♡

注 显然直接求解方程组(2)就可以得到插值多项式 $P(x)$, 但这是求插值多项式最繁杂的方法, 一般是不用的.

证明 由(1)式可得到关于系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的 $n+1$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0,\\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1,\\ \vdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \tag{2}$$

此方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

称为范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵, 由于 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 互异, 故

$$\det\boldsymbol{A}=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\neq 0$$

因此, 线性方程组 (2) 的解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 存在且唯一, 于是定理得证. □