

## 0.1 矩阵的秩

### 0.1.1 初等变换法

矩阵的秩在初等变换或分块初等变换下不变.

想法: 遇到关于秩不等式的问题, 可以考虑构造分块矩阵, 对其做适当的初等变换, 再利用秩的基本公式.

#### 定理 0.1

矩阵  $A$  的秩等于  $r$  的充要条件是  $A$  有一个  $r$  阶子式不等于零, 而  $A$  的所有  $r+1$  阶子式都等于零.

#### 命题 0.1 (矩阵秩的基本公式)

- (1) 若  $k \neq 0, r(kA) = r(A)$ ;
- (2)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ;
- (3)  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ ;
- (4)  $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B), r \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$ ;
- (5)  $r \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B), r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B)$ ;
- (6)  $r(A+B) \leq r(A) + r(B), r(A-B) \leq r(A) + r(B)$ ;
- (7)  $r(A-B) \geq |r(A) - r(B)|$ .

#### 证明

- (1) 由于  $kA = P_1(k)P_2(k) \cdots P_m(k)A$ , 故  $r(kA) = r(A)$ .
- (2) 证法一: 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵. 将矩阵  $B$  按列分块,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ , 则  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s)$ . 若  $B$  列向量的极大无关组为  $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}\}$ , 则  $B$  的任一列向量  $\beta_j$  均可用  $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}\}$  线性表示. 于是任一  $A\beta_j$  也可用  $\{A\beta_{j_1}, A\beta_{j_2}, \dots, A\beta_{j_r}\}$  来线性表示. 因此, 向量组  $\{A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s\}$  的秩不超过  $r$ , 即  $r(AB) \leq r(B)$ . 同理, 对矩阵  $A$  用行分块的方法可以证明  $r(AB) \leq r(A)$ .

证法二: 见例题??.

- (3) 设  $A, B$  的秩分别为  $r_1, r_2$ , 则存在非异阵  $P_1, Q_1$  和非异阵  $P_2, Q_2$ , 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & O \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

因此,  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$ .

- (4) 证法一: 我们只证明第一个不等式, 第二个不等式同理可证. 设  $A, B$  的秩分别为  $r_1, r_2$ , 则存在非异阵  $P_1, Q_1$  和非异阵  $P_2, Q_2$ , 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

在上面的分块矩阵中实施第三类分块初等变换, 用  $I_{r_1}$  消去同行的矩阵; 用  $I_{r_2}$  消去同列的矩阵, 再将  $C_{22}$  对换到第 (2, 2) 位置:

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & C_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

最后由 (3) 的结论可得

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r(I_{r_1}) + r(C_{22}) + r(I_{r_2}) \geq r_1 + r_2 = r(A) + r(B).$$

**证法二:** 我们也可用子式法来证明. 设  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r$ , 则由 **定理 0.1** 可知,  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  有一个  $r$  阶子式不为零, 不妨设为  $\begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix}$ , 其中  $A_1, B_1$  分别是  $A, B$  的子阵. 注意  $A_1$  或  $B_1$  允许是零阶矩阵, 这对应于该子式完全包含在  $B$  或  $A$  中, 但若  $A_1, B_1$  的阶数都大于零, 则通过该子式非零, 再结合由 Laplace 定理容易验证  $A_1, B_1$  都是方阵. 设在矩阵  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  中对应的  $r$  阶子式是  $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix}$ , 则由 Laplace 定理可得  $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix} = |A_1| |B_1| =$

$\begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 再次由 **定理 0.1** 可得

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

**证法三:** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是  $A$  的列分块,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组; 设  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ ,  $C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$  是  $B, C$  的列分块,  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_s}$  是  $B$  的列向量的极大无关组, 则  $r(A) = r$  且  $r(B) = s$ . 我们接下来证明: 作为  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  的列向量,  $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$  线性无关. 设

$$c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_r \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix} + \dots + d_s \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$c_1 \alpha_{i_1} + \dots + c_r \alpha_{i_r} + d_1 \gamma_{j_1} + \dots + d_s \gamma_{j_s} = 0, d_1 \beta_{j_1} + \dots + d_s \beta_{j_s} = 0.$$

由上面的假设即得  $c_1 = \dots = c_r = d_1 = \dots = d_s = 0$ , 于是上述结论得证. 因为  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  的列向量中有  $r + s$

个线性无关, 故  $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r + s = r(A) + r(B)$ .

(5) 注意到

$$\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

故由 (2) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} r(A \ B) &= r\left(\begin{pmatrix} I & I \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B), \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(6) 注意到

$$(A \ B) \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = A + B, (A \ B) \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} = A - B.$$

故由 (2) 和 (5) 可得

$$\begin{aligned} r(A + B) &= r\left((A \ B) \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leq r(A \ B) \leq r(A) + r(B), \\ r(A - B) &= r\left((A \ B) \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}\right) \leq r(A \ B) \leq r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(7) 由于  $r(A - B) = r(B - A)$ , 故不妨设  $r(A) \geq r(B)$ , 则由 (6) 可得  $r(A - B) + r(B) \geq r(A - B + B) = r(A)$ , 即  $r(A - B) \geq r(A) - r(B)$ .

**例题 0.1** 设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ . 求证:  $r(A) = r(B)$ .

**证明** 将  $A$  的第  $i$  行乘以  $(-1)^i$ , 又将第  $j$  列乘以  $(-1)^j$ , 即得矩阵  $B$ , 因此  $A$  和  $B$  相抵, 故结论成立.

#### 命题 0.2 (Sylvester 不等式)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times t$  矩阵, 求证:

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

**证明** 证法一: 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix},$$

由矩阵秩的基本公式 (3) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(AB) + n = r\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B),$$

即  $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ .

证法二: 见例题??.

#### 推论 0.1

若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times t$  矩阵且  $AB = O$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ .

#### 命题 0.3 (Sylvester 不等式的推广)

设  $A_1, A_2, \dots, A_m$  为  $n$  阶方阵, 求证:

$$r(A_1) + r(A_2) + \dots + r(A_m) \leq (m-1)n + r(A_1 A_2 \cdots A_m).$$

特别地, 若  $A_1 A_2 \cdots A_m = O$ , 则  $r(A_1) + r(A_2) + \dots + r(A_m) \leq (m-1)n$ .

**证明** 反复利用 Sylvester 不等式可得

$$\begin{aligned} & r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \dots + r(A_m) \\ & \leq n + r(A_1 A_2) + r(A_3) + \dots + r(A_m) \\ & \leq 2n + r(A_1 A_2 A_3) + \dots + r(A_m) \end{aligned}$$

$$\leq \cdots \leq (m-1)n + r(A_1 A_2 \cdots A_m).$$

**例题 0.2** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB = O$ . 证明: 若  $n$  是奇数, 则  $AB' + A'B$  必为奇异阵; 若  $n$  为偶数, 举例说明上述结论一般不成立.

**证明** 由推论 0.1 可知,  $r(A) + r(B) \leq n$ . 若  $n$  为奇数, 则  $r(A), r(B)$  中至少有一个小于等于  $\frac{n}{2}$ , 从而小于等于  $\frac{n-1}{2}$ . 不妨设  $r(A) \leq \frac{n-1}{2}$ , 于是

$$r(AB' + A'B) \leq r(AB') + r(A'B) \leq r(A) + r(A') = 2r(A) \leq n-1,$$

从而  $AB' + A'B$  为奇异阵. 例如, 当  $n=2$  时, 令  $A=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $AB=O$ , 但  $AB' + A'B = I_2$  为非奇异阵.

#### 命题 0.4 (Frobenius 不等式)

证明:  $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$ .

**证明** 证法一: 考虑下列分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (3) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(ABC) + r(B) = r \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(BC),$$

由此即得结论.

**证法二 (几何方法):** 将问题转化成几何的语言即为: 设  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \psi: V_2 \rightarrow V_3, \theta: V_3 \rightarrow V_4$  是线性映射, 证明:  $r(\theta\psi\varphi) \geq r(\theta\psi) + r(\psi\varphi) - r(\psi)$ .

下面考虑通过定义域的限制得到的线性映射. 将  $\theta$  的定义域限制在  $\text{Im}\psi\varphi$  上可得线性映射  $\theta_1: \text{Im}\psi\varphi \rightarrow V_4$ , 它的像空间是  $\text{Im}\theta\psi\varphi$ , 核空间是  $\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi$ ; 将  $\theta$  的定义域限制在  $\text{Im}\psi$  上可得线性映射  $\theta_2: \text{Im}\psi \rightarrow V_4$ , 它的像空间是  $\text{Im}\theta\psi$ , 核空间是  $\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi$ , 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim(\text{Im}\psi\varphi) = \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) + \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi), \quad (1)$$

$$\dim(\text{Im}\psi) = \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi) + \dim(\text{Im}\theta\psi). \quad (2)$$

注意到  $\text{Im}\psi\varphi \subseteq \text{Im}\psi$ , 故  $\dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) \leq \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi)$ , 从而由 (1) 式和 (2) 式可得

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}\psi\varphi) - \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi) &= \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) \\ &\leq \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi) = \dim(\text{Im}\psi) - \dim(\text{Im}\theta\psi). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}\psi\varphi) - \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi) &\leq \dim(\text{Im}\psi) - \dim(\text{Im}\theta\psi) \\ &\Leftrightarrow r(\psi\varphi) - r(\theta\psi\varphi) \leq r(\psi) - r(\theta\psi), \end{aligned}$$

结论得证.

#### 命题 0.5 (幂等矩阵关于秩的判定准则)

求证:  $n$  阶矩阵  $A$  是幂等矩阵 (即  $A^2 = A$ ) 的充要条件是:

$$r(A) + r(I_n - A) = n.$$

**证明** 在下列矩阵的分块初等变换中矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ O & I - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \begin{pmatrix} A & O \\ O & I - A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A - A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

即  $r(A) + r(I - A) = r(A - A^2) + n$ , 由此即得结论.

#### 命题 0.6 (对合矩阵关于秩的判定准则)

求证:  $n$  阶矩阵  $A$  是对合矩阵 (即  $A^2 = I_n$ ) 的充要条件是:

$$r(I_n + A) + r(I_n - A) = n.$$

**证明** 在下列矩阵的分块初等变换中, 矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} I_n + A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n + A & I_n + A \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n + A & I_n + A \\ I_n + A & 2I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & I_n + A \\ O & 2I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \begin{pmatrix} I_n + A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix},$$

即  $r(I_n + A) + r(I_n - A) = r(I_n - A^2) + n$ , 由此即得结论.

**例题 0.3** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 求证:  $r(A) + r(I_n + A) \geq n$ .

**证明 证法一:** 由下列分块初等变换即得结论

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I + A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ O & I + A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ -A & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

**证法二:**  $r(A) + r(I + A) = r(-A) + r(I + A) \geq r(-A + I + A) = r(I) = n$ .

#### 命题 0.7 (秩的降阶公式)

设有分块矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 证明:

- (1) 若  $A$  可逆, 则  $r(M) = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$ ;
- (2) 若  $D$  可逆, 则  $r(M) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$ ;
- (3) 若  $A, D$  都可逆, 则  $r(A) + r(D - CA^{-1}B) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$ .

**证明**

(1) 由分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

由此即得结论.

(2) 同理可证明.

(3) 由 (1) 和 (2) 即得.

**例题 0.4** 设

$$M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

证明:  $r(M) \geq n - 1$ , 等号成立当且仅当  $|M| = 0$ .

**证明** 若  $n = 1$ , 结论显然成立. 下设  $n \geq 2$ . 取  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ , 则

$$M = -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = -I_n + A' I_2^{-1} A = -(I_n - A' I_2^{-1} A).$$

由秩的降阶公式可得

$$2 + r(M) = 2 + r(-M) = r(I_2) + r(I_n - A' I_2^{-1} A) = r(I_n) + r(I_2 - A' I_n^{-1} A) = n + r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n - 1 \end{pmatrix}.$$

而  $r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n - 1 \end{pmatrix} \geq 1$ , 于是  $r(M) = n - 2 + r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n - 1 \end{pmatrix} \geq n - 1$ , 等号成立当且仅当  $M$  不满秩, 即  $|M| = 0$ .

### 命题 0.8

设  $A, B$  都是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$ , 证明:

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B) - r(AB).$$

**注 证法一:** 这里乘的不只是初等变换矩阵. 记住这个分块矩阵乘法和构造.

**证法二:** 和 **证法三:** 思路分析: 将秩不等式转化为维数公式就能自然得到证明的想法.

**证明 证法一:** 考虑如下分块矩阵的乘法:

$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B & -AB + BA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & AB \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (2) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(A) + r(B) = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & BA \end{pmatrix} \geq r(A + B) + r(AB),$$

由此即得结论.

**证法二:** 设  $V_A$  是方程组  $Ax = 0$  的解空间,  $V_B, V_{AB}, V_{A+B}$  的意义同理. 若列向量  $\alpha \in V_A \cap V_B$ , 即  $\alpha$  满足  $A\alpha = 0$  且  $B\alpha = 0$ , 于是  $(A + B)\alpha = 0$ , 即  $\alpha \in V_{A+B}$ , 从而  $V_A \cap V_B \subseteq V_{A+B}$ . 同理可证  $V_A \subseteq V_{BA}, V_B \subseteq V_{AB}$ . 因为  $AB = BA$ , 所以  $V_{BA} = V_{AB}$ , 从而  $V_A + V_B \subseteq V_{AB}$ . 因此, 我们有

$$\dim(V_A \cap V_B) \leq \dim V_{A+B} = n - r(A + B), \quad \dim(V_A + V_B) \leq \dim V_{AB} = n - r(AB).$$

将上面两个不等式相加, 再由交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned} n - r(A + B) + n - r(AB) &\geq \dim(V_A \cap V_B) + \dim(V_A + V_B) \\ &= \dim V_A + \dim V_B = n - r(A) + n - r(B), \end{aligned}$$

因此  $r(A + B) + r(AB) \leq r(A) + r(B)$ , 结论得证.

**证法三:** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  为  $A$  的列分块,  $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$  为  $B$  的列分块. 记  $U_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  为  $A$  的列向量生成的  $\mathbb{K}^n$  的子空间,  $U_B, U_{AB}, U_{A+B}$  的意义同理. 因为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的极大无关组就是  $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  的一组基, 故  $r(A) = \dim U_A$ , 关于  $B, AB, A + B$  的等式同理可得. 显然, 我们有  $U_{A+B} \subseteq U_A + U_B$ . 注意到  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$ , 若设  $\beta_j = (b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj})'$ , 则  $AB$  的列向量  $A\beta_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \cdots + b_{nj}\alpha_n \in U_A$ , 从而  $U_{AB} \subseteq U_A$ . 同理可得  $U_{BA} \subseteq U_B$ . 又因为  $AB = BA$ , 故  $U_{AB} \subseteq U_A \cap U_B$ . 最后, 由上述包含关系以及交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned} r(A + B) + r(AB) &= \dim U_{A+B} + \dim U_{AB} \leq \dim(U_A + U_B) + \dim(U_A \cap U_B) \\ &= \dim U_A + \dim U_B = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

## 0.1.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩

## 定理 0.2

设  $A$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $m \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解集  $V_A$  是  $n$  维列向量空间  $\mathbb{K}^n$  的子空间. 根据线性方程组的求解理论, 我们有

$$\dim V_A + r(A) = n,$$



**笔记** 即齐次线性方程组解空间的维数与系数矩阵的秩之和等于未知数的个数. 根据上述公式, 由矩阵的秩可以讨论线性方程组解的性质; 反过来, 也可以由线性方程组解的性质讨论矩阵的秩.

## 推论 0.2

线性方程组  $Ax = 0$  只有零解的充要条件是  $A$  为列满秩阵. 特别地, 若  $A$  是方阵, 则线性方程组  $Ax = 0$  只有零解的充要条件是  $A$  为非异阵.



**证明** 由定理 0.2 中的公式  $\dim V_A + r(A) = n$  即可得到证明.

## 命题 0.9

- (1) 设  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 求证:  $r(A'A) = r(AA') = r(A)$ .
- (2) 若  $A$  是  $m \times n$  复矩阵, 则  $r(\overline{A'}A) = r(A\overline{A'}) = r(A)$ .



**证明**

- (1) 首先证明  $r(A'A) = r(A)$ , 为此我们将证明齐次线性方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解. 显然  $Ax = 0$  的解都是  $A'Ax = 0$  的解. 反之, 任取方程组  $A'Ax = 0$  的解  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 则  $\alpha'A'A\alpha = 0$ , 即  $(A\alpha)'(A\alpha) = 0$ . 记  $A\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_m)' \in \mathbb{R}^m$ , 则

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2 = 0.$$

因为  $b_i$  是实数, 故每个  $b_i = 0$ , 即  $A\alpha = 0$ , 也即  $\alpha$  是  $Ax = 0$  的解. 这就证明了方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解, 即  $V_A = V_{A'A}$ , 于是由定理 0.2 可得  $r(A'A) = r(A)$ . 在上述等式中用  $A'$  替代  $A$  可得  $r(AA') = r(A')$ , 又因为  $r(A) = r(A')$ , 故结论得证.

- (2) 由 (1) 类似的方法可以证明.

**例题 0.5** 设  $A$  和  $B$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解, 且每个方程组的基础解系含  $m$  个线性无关的向量, 求证:  $r(A - B) \leq n - m$ .

**证明** 由方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解可知,  $Ax = 0$  的解都是  $(A - B)x = 0$  的解, 即  $V_A \subseteq V_{A-B}$ , 从而  $\dim V_{A-B} \geq \dim V_A = m$ , 于是由定理 0.2 可得  $r(A - B) = n - \dim V_{A-B} \leq n - m$ .

## 命题 0.10

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵, 证明: 方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ .



**证明** 显然方程组  $Bx = 0$  的解都是方程组  $ABx = 0$  的解, 即  $V_B \subseteq V_{AB}$ , 于是两个线性方程组同解, 即  $V_B = V_{AB}$  的充要条件是  $\dim V_B = \dim V_{AB}$ . 又由定理 0.2 可知  $\dim V_B = k - r(B)$ ,  $\dim V_{AB} = k - r(AB)$ , 因此上述两个方程组同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ .

## 命题 0.11

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵. 若  $AB$  和  $B$  有相同的秩, 求证: 对任意的  $k \times l$  矩阵  $C$ , 矩阵  $ABC$  和矩阵  $BC$  也有相同的秩.



**证明** 证法一: 由假设和命题 0.10 可知, 方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解. 要证明  $r(ABC) = r(BC)$ , 我们只要证明方程组  $ABCx = 0$  和方程组  $BCx = 0$  同解即可. 显然方程组  $BCx = 0$  的解都是方程组  $ABCx = 0$  的解. 反

之, 若列向量  $\alpha$  是方程组  $ABCx = 0$  的解, 则  $C\alpha$  是方程组  $ABx = 0$  的解, 因此  $C\alpha$  也是方程组  $Bx = 0$  的解, 即  $BC\alpha = 0$ , 于是  $\alpha$  也是方程组  $BCx = 0$  的解. 这就证明了方程组  $ABCx = 0$  和方程组  $BCx = 0$  同解, 从而结论得证.

证法二: 由 Frobenius 不等式可得

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) = r(BC),$$

又由矩阵秩的基本公式 (2) 可知  $r(ABC) \leq r(BC)$ , 故结论得证.

### 命题 0.12

设数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足:  $|A| = 0$  且某个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} \neq 0$ . 求证: 齐次线性方程组  $Ax = 0$  的所有解都可写为下列形式:

$$k \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{K}.$$

**证明** 由条件和定理 0.1 可知  $A$  的秩等于  $n-1$ , 因此线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系只含一个向量. 注意到  $|A| = 0$ , 故  $AA^* = |A|I_n = O$ , 于是伴随矩阵  $A^*$  的任一列向量都是  $Ax = 0$  的解. 又已知  $A_{ij} \neq 0$ , 因此  $A^*$  的第  $i$  个列向量  $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})'$  (不是零向量) 是  $Ax = 0$  的基础解系.

### 定义 0.1 (严格对角占优阵)

如果  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n,$$

则称  $A$  是严格对角占优阵.

### 命题 0.13 (严格对角占优阵必是非异阵)

如果  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  是严格对角占优阵, 则  $A$  必是非异阵.

**证明** 只需证明线性方程组  $Ax = 0$  只有零解. 若有非零解, 设为  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , 假设  $c_k$  是其中绝对值最大者. 将解代入该方程组的第  $k$  个方程式, 得

$$a_{k1}c_1 + \dots + a_{kk}c_k + \dots + a_{kn}c_n = 0,$$

即有

$$-a_{kk}c_k = a_{k1}c_1 + \dots + a_{k,k-1}c_{k-1} + a_{k,k+1}c_{k+1} + \dots + a_{kn}c_n.$$

上式两边取绝对值, 由三角不等式以及  $c_k$  是绝对值最大的假设可得

$$|a_{kk}||c_k| \leq |a_{k1}||c_1| + \dots + |a_{k,k-1}||c_{k-1}| + |a_{k,k+1}||c_{k+1}| + \dots + |a_{kn}||c_n| \leq \left( \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \right) |c_k|,$$

从而有

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|,$$

得到矛盾. 因此, 方程组  $Ax = 0$  只有零解.



## 命题 0.14

若  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n,$$

求证:  $|A| > 0$ .

**证明** 考虑矩阵  $tI_n + A$ , 当  $t \geq 0$  时, 这是一个严格对角占优阵, 因此由上一个命题可知其行列式  $f(t) = |tI_n + A|$  不为零. 又  $f(t)$  是关于  $t$  的多项式且首项系数为 1, 所以当  $t$  充分大时,  $f(t) > 0$ . 注意到  $f(t)$  是  $[0, +\infty)$  上处处不为零的连续函数, 并且当  $t$  充分大时取值为正, 因此  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  上取值恒为正 (原因见: 命题??). 特别地,  $f(0) = |A| > 0$ .

## 命题 0.15

(1) 设  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 则:  $I_n + iA$  和  $I_n - iA$  都是非异阵.

(2) 设  $A$  是  $n$  阶实反对称阵,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是同阶对角阵且主对角元素全大于零, 求证:  $|A + D| > 0$ . 特别地,  $|I_n \pm A| > 0$ , 从而  $I_n \pm A$  都是非异阵.

**笔记** (2) 的证明思路: 利用行列式构造连续的多项式函数, 再利用函数连续的性质证明.

**证明**

(1) **证法一:** 只需证明  $(I_n + iA)x = 0$  只有零解. 由  $\bar{x}'(I_n + iA)x = 0$  共轭转置可得  $\bar{x}'(I_n - iA)x = 0$ . 上述两式相加, 可得  $\bar{x}'I_n x = 0$ , 因此  $x = 0$ .

**证法二:**

(2) **证法一:** 先证明  $|A + D| \neq 0$ , 只需证明  $(A + D)x = 0$  只有零解. 因为  $x'(A + D)x = 0$ , 转置可得  $x'(-A + D)x = 0$ , 上述两式相加即得  $x'Dx = 0$ . 若设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 则有  $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2 = 0$ . 由于  $d_i$  都大于零并且  $x_i$  都是实数, 故只能是  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , 即有  $x = 0$ .

再证明 (2) 的结论. 设  $f(t) = |tA + D|$ , 则  $f(t)$  是关于  $t$  的多项式, 从而是关于  $t$  的连续函数. 注意到对任意的实数  $t$ ,  $tA$  仍是实反对称阵, 故由上面的讨论可得  $f(t) = |tA + D| \neq 0$ , 即  $f(t)$  是  $\mathbb{R}$  上处处不为零的连续函数. 注意到当  $t = 0$  时,  $f(0) = |D| > 0$ , 因此  $f(t)$  只能是  $\mathbb{R}$  上取值恒为正数的连续函数 (原因见: 命题??). 特别地,  $f(1) = |A + D| > 0$ .

**证法二:**

## 0.1.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩

按照最初的定义, 矩阵的秩就是矩阵的行 (列) 向量组的秩, 因此通过线性空间理论去讨论矩阵的秩是十分自然的事情.

## 命题 0.16

求证: 矩阵  $A$  的秩等于  $r$  的充要条件是  $A$  存在一个  $r$  阶子式  $|D|$  不等于零, 而  $|D|$  的所有  $r+1$  阶加边子式全等于零.

**证明** 必要性由定理 0.1 可直接得到, 只需证明充分性. 不失一般性, 我们可设  $|D|$  是由  $A$  的前  $r$  行和前  $r$  列构成的  $r$  阶子式. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

为矩阵  $A$  的行分块和列分块, 记  $\tau_{\leq r}\alpha_i$  为行向量  $\alpha_i$  关于前  $r$  列的缩短向量,  $\tau_{\leq r}\beta_j$  为列向量  $\beta_j$  关于前  $r$  行的缩短

向量. 由  $|D| \neq 0$  可得  $\tau_{\leq r}\alpha_1, \dots, \tau_{\leq r}\alpha_r$  线性无关, 由命题??可知  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关.

我们只要证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是  $A$  的行向量的极大无关组即可得到  $r(A) = r$ . 用反证法证明, 若它们不是极大无关组, 则可以添加一个行向量, 不妨设为  $\alpha_{r+1}$ , 使得  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$  线性无关. 设  $A_1$  是  $A$  的前  $r+1$  行构成的矩阵, 则  $A_1 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \tau_{\leq r+1}\beta_2, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_n)$  且  $r(A_1) = r+1$ . 由  $|D| \neq 0$  可得  $\tau_{\leq r}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r}\beta_r$  线性无关, 由命题??可知  $\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r$  线性无关. 因为  $r(A_1) = r+1$ , 故存在  $A_1$  的一个列向量, 不妨设为  $\tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$ , 使得  $\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$  线性无关. 设  $A_2 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1})$ , 即  $A_2$  是  $A$  的前  $r+1$  行和前  $r+1$  列构成的方阵, 则  $r(A_2) = r+1$ . 因此,  $|A_2| \neq 0$  是包含  $|D|$  的  $r+1$  阶加边子式, 这与假设矛盾.

### 命题 0.17

设  $m \times n$  矩阵  $A$  的  $m$  个行向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 且  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是其极大无关组, 又设  $A$  的  $n$  个列向量为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , 且  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  是其极大无关组. 证明:  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  和  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  交叉点上的元素组成的子矩阵  $D$  的行列式  $|D| \neq 0$ .

**证明** 因为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是极大无关组, 故  $A$  的任一行向量  $\alpha_s$  均可表示为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  的线性组合. 记  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}, \tilde{\alpha}_s$  分别是  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_s$  在  $j_1, j_2, \dots, j_r$  列处的缩短向量, 由命题??可知,  $\tilde{\alpha}_s$  均可表示为  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  的线性组合.

考虑由列向量  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  组成的矩阵  $B = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r})$ , 这是一个  $m \times r$  矩阵且秩等于  $r$ . 由于矩阵  $B$  的任一行向量  $\tilde{\alpha}_s$  均可用  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  线性表示, 并且  $B$  的行秩等于  $r$ , 故由命题??可知,  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  是  $B$  的行向量的极大无关组, 从而它们线性无关. 注意到  $r$  阶方阵  $D$  的行向量恰好是  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ , 因此  $D$  是满秩阵, 从而  $|D| \neq 0$ .

### 命题 0.18

设  $A$  是一个  $n$  阶方阵,  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行和第  $i_1, \dots, i_r$  列交叉点上的元素组成的子式称为  $A$  的主子式. 若  $A$  是对称阵或反对称阵且秩等于  $r$ , 求证:  $A$  必有一个  $r$  阶主子式不等于零.

**证明** 由对称性或反对称性, 设  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行是  $A$  的行向量的极大无关组, 则由命题??它的第  $i_1, \dots, i_r$  列也是  $A$  的列向量的极大无关组, 因此由命题 0.17 可知, 它们交叉点上的元素组成的  $r$  阶主子式不等于零.

### 命题 0.19 (反对称阵的秩必为偶数)

证明: 反对称阵的秩必为偶数.

**证明** 用反证法, 设反对称阵  $A$  的秩等于  $2r+1$ , 则由命题 0.18 可知,  $A$  有一个  $2r+1$  阶主子式  $|D|$  不等于零. 注意到反对称阵的主子式是反对称行列式, 而由命题??奇数阶反对称行列式的值等于零, 从而  $|D| = 0$ , 矛盾.