0.1 Jordan-Hölder 定理

定义 0.1

群 G 的两个次正规 (正规) 序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$
$$G = H_1 \supset H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s = \{1\}$$

称为**同构的**, 如果这两个序列的因子集 $\{G_i/G_{i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1\}, \{H_j/H_{j+1} \mid 1 \leqslant j \leqslant s-1\}$ 之间有一一对应关系, 并且对应的因子是同构的. ♣

注 显然, 若两个次正规 (正规) 序列同构, 则它们有相同的长度.

例题 0.1 设 $G = \langle a \rangle$ 为 15 阶循环群, 则

$$G \supseteq \langle a^3 \rangle \supseteq \{1\},$$
$$G \supseteq \langle a^5 \rangle \supseteq \{1\}$$

是两个同构的正规序列.

证明

□

引理 0.1 (Zassenhaus 定理)

设 H, K 是群 G 的子群, 又 H^*, K^* 分别是 H, K 的正规子群, 则

$$H^*(H \cap K^*) \lhd H^*(H \cap K), \quad K^*(H^* \cap K) \lhd K^*(H \cap K),$$
$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K).$$

$$(H \cap K^*)H^* \lhd (H \cap K)H^*, \quad (H^* \cap K)K^* \lhd (H \cap K)K^*,$$
$$(H \cap K)H^*/(H \cap K^*)H^* \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong (H \cap K)K^*/(H^* \cap K)K^*.$$

♡

证明 因为 H^* 是 H 的正规子群, $H \cap K, H \cap K^*$ 都是 H 的子群, 故由定理**????**知 $H^*(H \cap K), H^*(H \cap K^*)$ 都是 H 的子群. 同样 $K^*(H \cap K), K^*(H^* \cap K)$ 都是 K 的子群, 而且 $H^*(H \cap K^*) \subseteq H^*(H \cap K), K^*(H^* \cap K) \subseteq K^*(H \cap K)$. 对 $\forall a \in H^* \cap K, b \in H \cap K^*, x \in H \cap K$, 有

$$xax^{-1} \in H^* \cap K, \quad xbx^{-1} \in H \cap K^*.$$

故 $H^* \cap K, H \cap K^* \lhd H \cap K$. 再由命题**????**知 $(H \cap K^*)(H^* \cap K) = L$ 也是 $H \cap K$ 的正规子群.

作 $H^*(H \cap K)$ 到 $(H \cap K)/L$ 上的映射 ϕ,

$$\phi(hx) = xL, \quad \forall h \in H^*, x \in H \cap K.$$

若 $h_1x_1 = h_2x_2 (h_i \in H^*, x_i \in H \cap K, i = 1, 2)$, 则

$$h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L \Longrightarrow x_2L = x_1L,$$

因而 $\phi(h_1x_1) = \phi(h_2x_2)$, 故 ϕ 是良定义的.

再证明 ϕ 是同态, 由于 $H^* \lhd H, x_1h_2x_1^{-1} \in H^*$, 故

$$\phi((h_1x_1)(h_2x_2)) = \phi(h_1(x_1h_2x_1^{-1})x_1x_2) = x_1x_2L = (x_1L) \cdot (x_2L) = \phi(h_1x_1) \cdot \phi(h_2x_2),$$

故 ϕ 是 $H^*(H \cap K)$ 到 $H \cap K/L$ 上的同态, 显然 ϕ 还是满同态. 注意到

$$hx \in \ker\phi \iff \phi(hx) = xL = L \iff x \in L \iff hx \in H^*L = H^*(H^* \cap K)(H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*),$$

故 $\ker\phi = H^*(H \cap K^*)$. 因而由群的同态基本定理**??**得

$$H^*(H \cap K^*) \lhd H^*(H \cap K),$$

$$H^*(H\cap K)/H^*(H\cap K^*)\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K).$$

同理可得

$$K^*(H^*\cap K)\lhd K^*(H\cap K),$$
$$K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K)\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K).$$

故

$$H^*(H\cap K)/H^*(H\cap K^*)\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K)\cong K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K).$$

综上, 同理可得

$$(H\cap K^*)H^*\lhd (H\cap K)H^*,\quad (H^*\cap K)K^*\lhd (H\cap K)K^*,$$
$$(H\cap K)H^*/(H\cap K^*)H^*\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K)\cong (H\cap K)K^*/(H^*\cap K)K^*.$$

□

定理 0.1 (Schreier 定理)

群 G 的两个次正规 (正规) 序列有同构的加细.

证明 设群 G 有次正规 (正规) 序列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_r=\{1\}, \tag{1}$$
$$G=H_1\supseteq H_2\supseteq\cdots\supseteq H_s=\{1\}. \tag{2}$$

令

$$\begin{aligned}
G_{i,k}&=(G_i\cap H_k)G_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1, 1\leqslant k\leqslant s,\\
G_{r,s}&=\{1\},\\
H_{i,k}&=(H_i\cap G_k)H_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant s-1, 1\leqslant k\leqslant r,\\
H_{s,r}&=\{1\}.
\end{aligned}$$

由 $G_{k+1}\lhd G_k(1\leqslant k\leqslant r-1), H_{k+1}\lhd H_k(1\leqslant k\leqslant s-1)$ 及Zassenhaus 定理可得

$$G_{i,k+1}\lhd G_{i,k},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1, 1\leqslant k\leqslant s-1,$$
$$H_{i,k+1}\lhd H_{i,k},\quad 1\leqslant i\leqslant s-1, 1\leqslant k\leqslant r-1.$$

从而

$$G_{i+1,1}=(G_{i+1}\cap G)G_{i+2}=G_{i+1}=(G_i\cap H_s)G_{i+1}=G_{i,s}\lhd G_{i,s-1},\ 1\leqslant i\leqslant r-1,$$
$$H_{i+1,1}=(H_{i+1}\cap G)H_{i+2}=H_{i+1}=(H_i\cap G_r)H_{i+1}=H_{i,r}\lhd H_{i,r-1},\ 1\leqslant i\leqslant s-1.$$

又若序列(1), 序列(2)都是正规序列, 即 $G_i, H_j(1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant r)$ 均为 G 的正规子群, 则由命题**????**知 $G_{i,k}, H_{j,k}$ 也是 G 的正规子群. 这样, 即得序列(1), 序列(2)的加细的次正规 (正规) 序列

$$\begin{aligned}
G&=G_{1,1}\supseteq G_{1,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{1,s-1}\\
&\supseteq G_{2,1}\supseteq G_{2,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{2,s-1}\\
&\supseteq\cdots\\
&\supseteq G_{r-1,1}\supseteq G_{r-1,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{r-1,s-1}\supseteq G_{r,s}=\{1\},
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
G&=H_{1,1}\supseteq H_{1,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{1,r-1}\\
&\supseteq H_{2,1}\supseteq H_{2,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{2,r-1}\\
&\supseteq\cdots\\
&\supseteq H_{s-1,1}\supseteq H_{s-1,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{s-1,r-1}\supseteq H_{s,r}=\{1\}.
\end{aligned}\tag{4}$$

由Zassenhaus 定理有

$$\frac{G_{i,k}}{G_{i,k+1}} = \frac{(G_i \cap H_k)G_{i+1}}{(G_i \cap H_{k+1})G_{i+1}} \cong \frac{(G_i \cap H_k)H_{k+1}}{(G_{i+1} \cap H_k)H_{k+1}} = \frac{H_{k,i}}{H_{k,i+1}},$$

$$H_{s-1,r-1} = H_{s-1} \cap G_{r-1} = G_{r-1,s-1}$$

故序列(3), (4)是 G 的同构的次正规 (正规) 序列.

□