目录

第一章 线性空间与线性方程组 1

1.1 向量的线性关系 1

1.2 线性同构和几何问题代数化 7

1.3 线性同构和几何问题代数化 10

1.4 基变换与过渡矩阵 13

1.4.1 练习 16

1.5 子空间、直和与商空间 17

1.5.1 证明直和的方法 18

1.5.2 练习 21

1.6 矩阵的秩 22

1.6.1 初等变换法 22

1.6.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩 29

1.6.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩 31

1.7 相抵标准型及其应用 32

1.8 线性方程组的解及其应用 36

1.8.1 线性方程组的解的讨论 36

1.8.2 线性方程组的公共解 38

1.8.3 在解析几何上的应用 40

第一章 线性空间与线性方程组

1.1 向量的线性关系

定理 1.1

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 是线性空间 V 中的向量.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则任意一组包含这组向量的向量组必线性相关; 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则从这组向量中任意取出一组向量必线性无关.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合.

(3) 若 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合, 即

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则表示唯一的充要条件是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明

定理 1.2

(1) 设 A, B 是两组向量,A 含有 r 个向量,B 含有 s 个向量, 且 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表示. 若 A 中向量线性无关, 则 $r \le s$.

(2) 设 A, B 是两组向量,A 含有 r 个向量,B 含有 s 个向量, 且 A 中每个向量均可用 B 中向量线性表示. 若 $r > s$, 则 A 中向量线性相关.

证明 (2) 是 (1) 的逆否命题, 因此我们只证明 (1).

命题 1.1

设 A 是 $m \times n$ 阶梯形矩阵, 证明:A 的秩等于其非零行的个数, 且阶梯点所在的列向量是 A 的列向量的极大无关组.

证明 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rk_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

其中 $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \cdots, a_{rk_r}$ 是 A 的阶梯点. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 A 的前 r 行, 我们先证明它们线性无关. 设

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 是常数. 上式是关于 n 维行向量的等式, 先考察行向量的第 k_1 分量, 可得 $c_1a_{1k_1} = 0$. 因为 $a_{1k_1} \ne 0$, 故 $c_1 = 0$; 再依次考察行向量的第 $k_2, \cdots, k_r$ 分量, 最后可得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 从而 A 的秩等于 r, 即其非零行的个数.

再将 r 个阶梯点所在的列向量取出, 拼成一个新的矩阵:

$$B=\begin{pmatrix} a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rk_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

采用相同的方法可证明矩阵 B 的前 r 行线性无关, 因此 $\mathrm{r}(B)=r$, 从而阶梯点所在的列向量组的秩也等于 r. 又因为 $\mathrm{r}(A)=r$, 故它们是 A 的列向量的极大无关组.

命题 1.2

设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是列向量. P 是一个 m 阶可逆矩阵,$B=PA=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\beta}_j=P\boldsymbol{\alpha}_j(1\le j\le n)$. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 A 的列向量的极大无关组, 则 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 是 B 的列向量的极大无关组.

证明 先证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性无关. 设

$$c_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+c_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+c_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\mathbf{0},$$

即

$$c_1P\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+c_2P\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+c_rP\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\mathbf{0}.$$

已知 P 是可逆矩阵, 因此

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+c_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+c_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\mathbf{0}.$$

而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 故 $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$, 这证明了向量组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性无关. 要证这是 B 的列向量的极大无关组, 只需证明 B 的任意一个列向量都是这些向量的线性组合即可. 设 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是 B 的任意一个列向量, 则 $\boldsymbol{\beta}_j=P\boldsymbol{\alpha}_j$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 A 的列向量的极大无关组, 故 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_j=b_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+b_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+b_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r},$$

则

$$P\boldsymbol{\alpha}_j=b_1P\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+b_2P\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+b_rP\boldsymbol{\alpha}_{i_r},$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_j=b_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+b_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+b_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}.$$

推论 1.1

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,A 为 n 阶可逆矩阵, 求证:$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明 由命题 1.2即得.

命题 1.3

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性空间 V 中一组线性无关的向量,$\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中的向量. 求证: 或者 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 或者 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

证明 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则结论得证. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m,d$,

使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m+d\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

若 $d=0$, 则 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 不全为零且 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾. 因此 $d\neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{c_1}{d}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{c_2}{d}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{c_m}{d}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

推论 1.2

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且 $\boldsymbol{\beta}\notin L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

笔记 这个推论与上一个命题 1.3等价. 虽然这个等价命题很简单, 但后面经常会用到.

命题 1.4

设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 但不能由其中任何个数少于 m 的部分向量线性表示, 则这 m 个向量线性无关.

证明 用反证法, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则至少有一个向量是其余向量的线性组合. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 的线性组合, 则由线性组合的传递性可知,$\boldsymbol{\beta}$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 的线性组合, 这与假设矛盾.

命题 1.5

设线性空间 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 已知有序向量组 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性相关, 求证: 最多只有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以表示为前面向量的线性组合.

证明 用反证法, 设存在 $1\leq i<j\leq r$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=b\boldsymbol{\beta}+a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j=d\boldsymbol{\beta}+c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 故 $b\neq 0$. 若 $b=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 的线性组合, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾. 将第一个等式乘以 $-\dfrac{d}{b}$ 加到第二个等式上, 可得 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1}$ 的线性组合, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾.

命题 1.6

设 A 是 $n\times m$ 矩阵,B 是 $m\times n$ 矩阵, 满足 $AB=I_n$, 求证:B 的 n 个列向量线性无关.

笔记 实际上, 由 $AB=I_n$ 可知 A,B 互为逆矩阵, 从而 A,B 满秩, 结论得证.

证明 设 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 为列分块, 则 $AB=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_n)$. 由 $AB=I_n$ 可得 $A\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{e}_i(1\leq i\leq n)$, 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 n 维标准单位列向量. 设

$$c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0},$$

上式两边同时左乘 A, 可得

$$\mathbf{0}=c_1A\boldsymbol{\beta}_1+c_2A\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_nA\boldsymbol{\beta}_n=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n=(c_1,c_2,\cdots,c_n)',$$

因此 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 即 B 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

命题 1.7 (缩短向量与延伸向量)

1. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),1\leq i\leq m\}$ 是一组 n 维行向量,$1\leq j_1<j_2<\cdots<j_t\leq n$ 是给定的 $t(t<n)$ 个指标. 定义 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i=(a_{ij_1},a_{ij_2},\cdots,a_{ij_t})$, 称 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的 t 维缩短向量. 则

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_m$ 也线性相关;
(2) 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合, 则 $\widetilde{\alpha}$ 也是 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_m$ 的线性组合.
2. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),1\le i\le m\}$ 是一组 n 维行向量,$j_1,j_2,\cdots,j_t\ge 1$ 是给定的 $t(t>n)$ 个指标. 定义 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i=(a_{ij_1},a_{ij_2},\cdots,a_{ij_t})$, 称 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的 t 维延伸向量. 则
若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1,\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\overline{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 也线性无关.

笔记 这个命题告诉我们: **线性相关向量组的任意缩短组也是线性相关的, 线性无关向量组的任意延伸组也是线性无关的.**

证明 1. (1) 由假设存在不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$, 使得
$$\mathbf{0}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\left(\sum_{i=1}^m c_ia_{i1},\sum_{i=1}^m c_ia_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^m c_ia_{in}\right).$$
在等式两边同时取 t 维缩短向量, 可得
$$\mathbf{0}=\left(\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_1},\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_2},\cdots,\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_t}\right)=c_1\widetilde{\alpha}_1+c_2\widetilde{\alpha}_2+\cdots+c_m\widetilde{\alpha}_m,$$
从而结论成立.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则
$$\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\left(\sum_{i=1}^m c_ia_{i1},\sum_{i=1}^m c_ia_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^m c_ia_{in}\right).$$
在等式两边同时取 t 维缩短向量, 可得
$$\widetilde{\alpha}=\left(\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_1},\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_2},\cdots,\sum_{i=1}^m c_ia_{ij_t}\right)=c_1\widetilde{\alpha}_1+c_2\widetilde{\alpha}_2+\cdots+c_m\widetilde{\alpha}_m,$$
从而结论成立.

2. 这个命题就是 1(1) 的逆否命题, 从而结论成立.

例题 1.1 设 V 是实数域上连续函数全体构成的实线性空间, 求证下列函数线性无关:

(1) $\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx$;

(2) $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$;

(3) $1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx$.

证明 证法一:根据向量线性无关的基本性质, 我们只要证明 (3) 即可. 对 n 进行归纳, 当 $n=0$ 时, 显然 1 作为一个函数线性无关. 假设命题对小于 n 的自然数成立, 现证明等于 n 的情形. 设
$$a+b_1\sin x+c_1\cos x+b_2\sin 2x+c_2\cos 2x+\cdots+b_n\sin nx+c_n\cos nx=0,$$
其中 a,b_i,c_i 都是实数. 对上式两次求导, 可得
$$-b_1\sin x-c_1\cos x-4b_2\sin 2x-4c_2\cos 2x-\cdots-n^2b_n\sin nx-n^2c_n\cos nx=0,$$
再将第一个式子乘以 n^2 加到第二个式子上, 可得
$$an^2+\sum_{i=1}^{n-1}b_i(n^2-i^2)\sin ix+\sum_{i=1}^{n-1}c_i(n^2-i^2)\cos ix=0,$$
由归纳假设即得 $a=b_1=c_1=\cdots=b_{n-1}=c_{n-1}=0$. 将此结论代入第一个式子可得 $b_n\sin nx+c_n\cos nx=0$. 若 $b_n\neq 0\,(c_n\neq 0)$, 则 $\tan nx=-c_n/b_n\ (\cot nx=-b_n/c_n)$ 为常数 ($\tan nx,\cot nx$ 都不是常函数), 矛盾. 因此,$b_n=c_n=0$.

证法二: 设
$$f(x)=a+b_1\sin x+c_1\cos x+b_2\sin 2x+c_2\cos 2x+\cdots+b_n\sin nx+c_n\cos nx=0,$$
其中 a,b_i,c_i 都是实数. 依次设 $g(x)=1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx$, 并分别计算定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 可得 $a=b_1=c_1=\cdots=b_n=c_n=0$.

命题 1.8

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 又

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2r}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_r=a_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r.\end{cases}$$

则:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关的充要条件是系数矩阵 $A=(a_{ij})_{r\times r}$ 的行列式为零.

证明 记 A 的行向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r$. 若 $|A|=0$, 则 A 的行向量线性相关, 即存在不全为零的 r 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_r$, 使得

$$c_1\boldsymbol{\gamma}_1+c_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\gamma}_r=\mathbf{0}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)'$, 则经简单计算可得

$$c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\beta}_r=c_1\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\alpha}+c_1\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+c_1\boldsymbol{\gamma}_r\boldsymbol{\alpha}=(c_1\boldsymbol{\gamma}_1+c_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\gamma}_r)\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关.

反之, 若 A 可逆, 如有 $k_1,k_2,\cdots,k_r$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_i$ 代入, 并利用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性无关性, 可得以 k_i 为未知数的线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{r1}k_r=0,\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{r2}k_r=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1r}k_1+a_{2r}k_2+\cdots+a_{rr}k_r=0.\end{cases}$$

因为 A 可逆, 所以该方程组只有零解, 从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

命题 1.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性无关的向量, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_k=a_{k1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{k2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{km}\boldsymbol{\alpha}_m.\end{cases}$$

记表示矩阵 $A=(a_{ij})_{k\times m}$, 求证: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的秩等于 $\mathrm{r}(A)$.

证明 证法一: 设 $\mathrm{r}(A)=r$, 记 A 的 k 个行向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_k$. 不失一般性, 可假设 A 的前 r 个行向量线性无关, 其余向量均可用前 r 个行向量线性表示. 若

$$\boldsymbol{\gamma}_i=c_1\boldsymbol{\gamma}_1+c_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\gamma}_r,$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)'$, 则经过简单计算可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\gamma}_i\boldsymbol{\alpha}&=(c_1\boldsymbol{\gamma}_1+c_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\gamma}_r)\,\boldsymbol{\alpha}\\ &=c_1\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\alpha}+c_1\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+c_1\boldsymbol{\gamma}_r\boldsymbol{\alpha}\\ &=c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\beta}_r.\end{aligned}$$

另一方面, 若

$$c_1\boldsymbol{\beta}_1+c_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0},$$

则

$$c_1(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m)+\cdots+c_r(a_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{rm}\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0},$$

即

$$(c_1a_{11}+\cdots+c_ra_{r1})\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(c_1a_{1m}+\cdots+c_ra_{rm})\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 故可得

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{21}c_2+\cdots+a_{r1}c_r=0,\\ a_{12}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{r2}c_r=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1m}c_1+a_{2m}c_2+\cdots+a_{rm}c_r=0. \end{cases}$$

将上述方程组看成是未知数 c_i 的齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩为 r, 未知数个数也是 r, 因此只有唯一一组解, 即零解. 这表明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的极大无关组, 因此向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的秩等于 r.

证法二:令 V 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量空间. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 故它们组成 V 的一组基,V 的维数等于 m. 注意到 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在这组基下的坐标向量为 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})'$, 故由这些列向量组成的矩阵就是 $\boldsymbol{A}'$, 从而

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}'\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\right).$$

命题 1.10

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 中一组向量, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 求证: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的秩小于等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

注 如果将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为原向量组, 将向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 称为表出向量组, 则例 3.19 可简述为: "**表出向量组的秩不超过原向量组的秩.**" 从几何上看, 这是一个自然的结果. 因为每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都属于由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间, 故它们的秩不会超过该子空间的维数.

证明 不失一般性, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的极大无关组. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 从而由定理 1.2(1)可知 $s\le r$, 结论成立.

命题 1.11

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 中一组向量且其秩等于 r,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是其中 r 个向量. 若下列条件之一成立:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;

(2) 任一 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示.

则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组的极大无关组.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 又设 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是向量组的极大无关组. 对任意的 $1\le i\le m$,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表示, 由定理 1.2(2)可知 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_i$ 必线性相关. 再由命题 1.3可知 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是向量组的极大无关组.

(2) 设任一 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 不失一般性, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的极大无关组. 因此,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性无关. 再由线性组合的传递性可知, 任一 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 是原向量组的极大无关组, 从而 $s=r$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的极大无关组.

命题 1.12

若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵或反称矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, \cdots, i_r$ 行是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组, 则它的第 $i_1, \cdots, i_r$ 列也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组.

证明 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分块和列分块, 则由条件可知,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关. 从而存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r} = 0.$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称或反称矩阵, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i = \pm\boldsymbol{\beta}_i', i = 1, 2, \cdots, n$. 代入上式可得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}' + k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}' + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}' = 0.$$

再对上式两边同时取转置可得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r} = 0.$$

故 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性无关.

命题 1.13 (向量组等价的充要条件)

设有两个向量组 $A = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 和 $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$. 求证: 它们等价的充要条件是它们的秩相等且其中一组向量可以用另外一组向量线性表示.

笔记 遇到向量组相关的问题, 一般都会先设出各个向量组的极大无关组.

证明 必要性由向量组等价的定义和命题 1.10即得, 下证充分性. 假设向量组 A 可用向量组 B 线性表示, 且它们的秩都等于 r. 不失一般性, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 A 的极大无关组,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 B 的极大无关组. 考虑向量组 $C = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可用 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 C 的极大无关组, 从而向量组 C 的秩等于 r. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 故由命题 1.10(1)可知,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 也是向量组 C 的极大无关组, 从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 于是向量组 B 也可用向量组 A 线性表示. 因此, 向量组 A 与向量组 B 等价.

1.2 线性同构和几何问题代数化

我们有一类特别重要的线性同构. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基并固定次序. 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$, 则映射 $\eta : V \to \mathbb{K}^n$ 定义为:$\eta(\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)'$, 即 η 将 V 中的向量映射到它在给定基下的坐标向量. 容易验证 $\eta : V \to \mathbb{K}^n$ 是一个线性同构. 因此, 通过这个线性同构, 我们可将抽象的线性空间 V 和具体的列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 等同起来.

定理 1.3

(1) 同构关系是一种等价关系;

(2) 线性同构不仅将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组, 而且将线性无关的向量组映射为线性无关的向量组;

(3) 同一个数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

证明

定理 1.4

定理假设和记号同上, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中向量, 它们在给定基下的坐标向量记为 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$, 则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性无关.

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ 可以用 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性表示, 并且线性表示的系数不变. 即

$$\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m \Leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\beta}}=c_1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_2\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_m\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m.$$

(3) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 是向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的极大无关组. 特别地, 我们有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m).$$

笔记 由上述定理, 我们可以将抽象线性空间 V 中向量组线性关系的判定和秩的计算, 转化为具体列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 中由它们的坐标向量构成的列向量组线性关系的判定和秩的计算. 由于后者通常可以通过矩阵的方法来处理, 故上述过程被称为“几何问题代数化”.

证明 将定理 1.5运用到线性同构 η上就能得到证明.

命题 1.14

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是向量空间 V 中的向量, 且满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{1k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{2k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_m=c_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{mk}\boldsymbol{\alpha}_k.\end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times k}$, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=k$, 则这两组向量等价.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩不超过 r.

证明

(1) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(1\le i\le k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j(1\le j\le m)$, 则

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1=c_{11}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{12}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{1k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2=c_{21}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{22}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{2k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m=c_{m1}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{m2}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{mk}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)=(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k)\boldsymbol{C}'.$$

因为 $\boldsymbol{C}'$ 是一个行满秩 $k\times m$ 矩阵, 故由行满秩矩阵性质可知, 存在 $m\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_k$, 于是

$$(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)\boldsymbol{T}=(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k).$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 可用 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 来线性表示, 于是这两组向量等价.

(2) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(1\le i\le k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j(1\le$

$j \le m$), 则

$$\begin{cases}\widetilde{\beta}_1 = c_{11}\widetilde{\alpha}_1 + c_{12}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{1k}\widetilde{\alpha}_k,\\ \widetilde{\beta}_2 = c_{21}\widetilde{\alpha}_1 + c_{22}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{2k}\widetilde{\alpha}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \widetilde{\beta}_m = c_{m1}\widetilde{\alpha}_1 + c_{m2}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{mk}\widetilde{\alpha}_k,\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m) = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k)\boldsymbol{C}'.$$

由于两个矩阵乘积的秩不超过每个矩阵的秩, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = \mathrm{r}\left(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m\right) = \mathrm{r}\left((\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k)\boldsymbol{C}'\right) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{C}') = \mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = r.$$

命题 1.15

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 中的 m 个向量, 且已知它们的秩等于 r. 求证: 全体满足 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 的列向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)'(x_i \in \mathbb{F})$ 构成数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.

证明 在 V 中引进基以后, 记 $\widetilde{\alpha}_i$ 是 α_i 的坐标向量, 则 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 等价于 $x_1\widetilde{\alpha}_1 + x_2\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + x_m\widetilde{\alpha}_m = \mathbf{0}$. 而后者是一个齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩等于 r(将 x_i 视为未知数), 故其解构成 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.

例题 1.2 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 问:$\{e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+e_2+\cdots+e_n\}$ 是否也是 V 的基?

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\{e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+e_2+\cdots+e_n\}$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

显然 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是满秩阵, 于是 $\{e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+e_2+\cdots+e_n\}$ 也是 V 的一组基.

例题 1.3 已知向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}(s>1)$ 是线性空间 V 的一组基, 设 $\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3, \cdots, \beta_s = \alpha_s+\alpha_1$. 讨论向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的线性相关性.

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

经计算可得 $|\boldsymbol{A}| = 1+(-1)^{s+1}$. 因此当 s 为偶数时,$|\boldsymbol{A}| = 0$, 从而向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关; 当 s 为奇数时,$|\boldsymbol{A}| = 2$, 从而向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关.

例题 1.4 设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4,\\ \alpha_2 = -e_1 - 3e_2 + 5e_3 + e_4,\\ \alpha_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + 4e_4,\\ \alpha_4 = -2e_1 - 6e_2 + 10e_3 + 2e_4,\end{cases}$$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此, 矩阵 A 的第一列、第二列和第三列是坐标向量组的极大无关组, 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

例题 1.5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的数,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\alpha_1=e_1+a_1e_2+\cdots+a_1^{n-1}e_n,\\\alpha_2=e_1+a_2e_2+\cdots+a_2^{n-1}e_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\alpha_n=e_1+a_ne_2+\cdots+a_n^{n-1}e_n,\end{cases}$$

求证:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 也是 V 的一组基.

笔记 利用定理 1.5即可.

证明 将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

显然,$|A|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\neq 0$, 故 A 是满秩阵, 从而 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 也是 V 的一组基.

1.3 线性同构和几何问题代数化

我们有一类特别重要的线性同构. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基并固定次序. 对任一向量 $\alpha\in V$, 设 $\alpha=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n$, 则映射 $\eta:V\to\mathbb{K}^n$ 定义为:$\eta(\alpha)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)'$, 即 η 将 V 中的向量映射到它在给定基下的坐标向量. 容易验证 $\eta:V\to\mathbb{K}^n$ 是一个线性同构. 因此, 通过这个线性同构, 我们可将抽象的线性空间 V 和具体的列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 等同起来.

定理 1.5

(1) 同构关系是一种等价关系;

(2) 线性同构不仅将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组, 而且将线性无关的向量组映射为线性无关的向量组;

(3) 同一个数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

证明

定理 1.6

定理假设和记号同上, 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 是 V 中向量, 它们在给定基下的坐标向量记为 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_m,\widetilde{\beta}$, 则

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_m$ 线性无关.

(2) β 可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充要条件是 $\widetilde{\beta}$ 可以用 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_m$ 线性表示, 并且线性表示的

系数不变. 即

$$\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m \Leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\beta}}=c_1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_2\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_m\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m.$$

(3) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 是向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的极大无关组. 特别地, 我们有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m).$$

笔记 由上述定理, 我们可以将抽象线性空间 V 中向量组线性关系的判定和秩的计算, 转化为具体列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 中由它们的坐标向量构成的列向量组线性关系的判定和秩的计算. 由于后者通常可以通过矩阵的方法来处理, 故上述过程被称为"几何问题代数化".

证明 将定理 1.5运用到线性同构 η上就能得到证明.

命题 1.16

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是向量空间 V 中的向量, 且满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{1k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{2k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_m=c_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{mk}\boldsymbol{\alpha}_k.\end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times k}$, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=k$, 则这两组向量等价.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩不超过 r.

证明

(1) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(1\leq i\leq k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j(1\leq j\leq m)$, 则

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1=c_{11}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{12}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{1k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2=c_{21}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{22}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{2k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m=c_{m1}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{m2}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{mk}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)=(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k)\boldsymbol{C}'.$$

因为 $\boldsymbol{C}'$ 是一个行满秩 $k\times m$ 矩阵, 故由行满秩矩阵性质可知, 存在 $m\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_k$, 于是

$$(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)\boldsymbol{T}=(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k).$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 可用 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 来线性表示, 于是这两组向量等价.

(2) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(1\leq i\leq k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j(1\leq j\leq m)$, 则

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1=c_{11}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{12}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{1k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2=c_{21}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{22}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{2k}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m=c_{m1}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_{m2}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_{mk}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\cdots,\widetilde{\beta}_m)=(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_k)\boldsymbol{C}'.$$

由于两个矩阵乘积的秩不超过每个矩阵的秩, 因此

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right)=\mathrm{r}\left(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\cdots,\widetilde{\beta}_m\right)=\mathrm{r}\left(\left(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_k\right)\boldsymbol{C}'\right)\leqslant\mathrm{r}\left(\boldsymbol{C}'\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{C}\right)=r.$$

命题 1.17

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 中的 m 个向量, 且已知它们的秩等于 r. 求证: 全体满足 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 的列向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)'(x_i\in\mathbb{F})$ 构成数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.

证明 在 V 中引进基以后, 记 $\widetilde{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量, 则 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 等价于 $x_1\widetilde{\alpha}_1+x_2\widetilde{\alpha}_2+\cdots+x_m\widetilde{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$. 而后者是一个齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩等于 r(将 x_i 视为未知数), 故其解构成 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.

例题 1.6 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 问:$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n\}$ 是否也是 V 的基?

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n\}$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

显然 $|\boldsymbol{A}|=1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是满秩阵, 于是 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n\}$ 也是 V 的一组基.

例题 1.7 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}(s>1)$ 是线性空间 V 的一组基, 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$. 讨论向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

经计算可得 $|\boldsymbol{A}|=1+(-1)^{s+1}$. 因此当 s 为偶数时,$|\boldsymbol{A}|=0$, 从而向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关; 当 s 为奇数时,$|\boldsymbol{A}|=2$, 从而向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

例题 1.8 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+4\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+10\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4,\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.

笔记 利用定理 1.5即可.

解 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此, 矩阵 A 的第一列、第二列和第三列是坐标向量组的极大无关组, 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

例题 1.9 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的数,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\alpha_1=e_1+a_1e_2+\cdots+a_1^{n-1}e_n,\\\alpha_2=e_1+a_2e_2+\cdots+a_2^{n-1}e_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\alpha_n=e_1+a_ne_2+\cdots+a_n^{n-1}e_n,\end{cases}$$

求证:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 也是 V 的一组基.

笔记 利用定理 1.5即可.

证明 将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

显然,$|A|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\ne 0$, 故 A 是满秩阵, 从而 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 也是 V 的一组基.

1.4 基变换与过渡矩阵

定义 1.1 (过渡矩阵)

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, 若

$$\begin{cases}f_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n,\\f_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{n2}e_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{nn}e_n,\end{cases}$$

则矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为从基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵. 并且 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$.

定理 1.7 (同一向量在不同基下坐标向量的关系)

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, 从基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵为 $A=(a_{ij})$. 若 V 中向量 α 在基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的坐标向量是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 在基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 下的坐标向量是

$(y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

证明 由过渡矩阵定义可得

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

又因为 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

定理 1.8

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 的基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵且从基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 又若 $\boldsymbol{B}$ 是从基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵, 则从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{AB}$.

例题 1.10 设 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}, \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是向量空间 V 的 3 组基. 若从 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 到 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$, 从 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{B}$, 求从 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵.

解 从 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 故从 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例题 1.11 在四维行向量空间中求从基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵, 其中

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,0,1), \boldsymbol{e}_2 = (2,1,2,0), \boldsymbol{e}_3 = (1,1,0,0), \boldsymbol{e}_4 = (0,1,-1,-1),$$
$$\boldsymbol{f}_1 = (1,0,0,1), \boldsymbol{f}_2 = (0,0,1,-1), \boldsymbol{f}_3 = (2,1,0,3), \boldsymbol{f}_4 = (-1,0,1,2).$$

笔记 这类题如用求解线性方程组的方法比较繁, 可采用下列方法.

解 设该向量空间的标准基为

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0,0), \boldsymbol{u}_2 = (0,1,0,0), \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,0), \boldsymbol{u}_4 = (0,0,0,1),$$

则由条件可知从 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ 到 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是就有

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) \boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{1.1}$$

又由条件可知从 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&3&2\end{pmatrix}.$$

于是就有

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)\,\boldsymbol{B}. \tag{1.2}$$

从而由(1.1)(1.2)式可得

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)\,\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

故从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 它可以用初等变换和求逆矩阵类似的方法直接求得 (对矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ 进行初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵, 则右边一块就化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$) 因此, 所求之过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\-1&1&-1&2\\4&-2&3&-10\\-2&1&-2&3\end{pmatrix}.$$

例题 1.12 设 a 为常数, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1=(a^{n-1},a^{n-2},\cdots,a,1),\boldsymbol{f}_2=(a^{n-2},a^{n-3},\cdots,1,0),\cdots,\boldsymbol{f}_n=(1,0,\cdots,0,0)\}$ 下的坐标.

证明 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是标准单位行向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}'$, 并且从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a^{n-1}&a^{n-2}&\cdots&1\\a^{n-2}&a^{n-3}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&1&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{\alpha}'$. 这是一个非齐次线性方程组, 可由初等行变换求出方程组的解:

$$\begin{pmatrix}a^{n-1}&a^{n-2}&\cdots&1&a_1\\a^{n-2}&a^{n-3}&\cdots&0&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&1&\cdots&0&a_{n-1}\\1&0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&a^{n-2}&\cdots&1&a_1-a^{n-1}a_n\\0&a^{n-3}&\cdots&0&a_2-a^{n-2}a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&a_{n-1}-aa_n\\1&0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1&a_1-aa_2\\0&0&\cdots&0&a_2-aa_3\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&a_{n-1}-aa_n\\1&0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&a_n\\0&1&\cdots&0&a_{n-1}-aa_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a_2-aa_3\\0&0&\cdots&1&a_1-aa_2\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{x}=(a_n,a_{n-1}-aa_n,\cdots,a_2-aa_3,a_1-aa_2)$.

例题 1.13 设 V 是次数不超过 n 的实系数多项式全体组成的线性空间, 求从基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 到基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 的过渡矩阵, 并以此证明多项式的 Taylor 公式:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

其中 $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次导数.

解 从基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 到基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 的过渡矩阵 ($n+1$ 阶) 利用二项式定理容易求出为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^n a^n\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{n-1}na^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

注意 $\boldsymbol{P}$ 的逆矩阵实际上就是从基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 到基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 的过渡矩阵, 结合 $x^n=[(x-a)+a]^n$, 再利用二项式定理可以马上得到 (不必用初等变换法求逆矩阵):

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^n\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 则 $f(x)$ 在基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 下的坐标向量为 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)'$. 设 $f(x)$ 在基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 下的坐标向量为 $(y_0,y_1,\cdots,y_n)'$. 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系可知

$$\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^n\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(a)\\ \dfrac{f'(a)}{1!}\\ \vdots\\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$f(x)=\left(1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\right)\begin{pmatrix}f(a)\\ \dfrac{f'(a)}{1!}\\ \vdots\\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\end{pmatrix}=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

1.4.1 练习

练习 1.1 验证下列映射是线性同构:

(1) 一维实行向量空间 $\mathbb{R}$, 例题**????**中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$, 映射 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 定义为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x$;

(2) 二维实行向量空间 $\mathbb{R}_2$, 例题**????**中的实线性空间 V, 映射 $\varphi:\mathbb{R}_2\to V$ 定义为 $\varphi(a,b)=(a,b+\frac{1}{2}a^2)$.

解

(1) φ 的逆映射是 $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\psi(y)=\ln y$, 故 φ 是一一对应的. 根据加法和数乘的定义可得

$$\varphi(x+y)=\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=\varphi(x)\oplus\varphi(y),\varphi(kx)=\mathrm{e}^{kx}=(\mathrm{e}^x)^k=k\circ\varphi(x),$$

因此 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ 是线性同构.

(2) φ 的逆映射是 $\psi:V\to\mathbb{R}_2,\psi(x,y)=(x,y-\dfrac{x^2}{2})$, 故 φ 是一一对应的. 根据具体的计算可得

$$\varphi(a_1+a_2,b_1+b_2)=\varphi(a_1,b_1)\oplus\varphi(a_2,b_2),\varphi(ka,kb)=k\circ\varphi(a,b),$$

因此 $\varphi:\mathbb{R}_2\to V$ 是线性同构.

练习 1.2 构造下列线性空间之间的线性同构:

(1) V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶上三角矩阵构成的线性空间,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称矩阵构成的线性空间 (例题**????**);

(2) V 是数域 $\mathbb{K}$ 上主对角元全为零的 n 阶上三角矩阵构成的线性空间,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶反对称矩阵构成的线性空间 (例题**????**);

(3) V 是 n 阶 Hermite 矩阵构成的实线性空间,U 是 n 阶斜 Hermite 矩阵构成的实线性空间 (例题**??**).

解

(1) $\varphi:V\to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in V$, 当 $i\le j$ 时, 矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的第 (i,j) 元素为 a_{ij}; 当 $i>j$ 时, 矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的第 (i,j) 元素为 a_{ji}. 容易验证 $\varphi:V\to U$ 是定义好的映射, 并且是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性同构.

(2) $\varphi:V\to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in V,\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$. 容易验证 $\varphi:V\to U$ 是定义好的映射, 并且是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性同构.

(3) $\varphi:V\to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in V,\varphi(\boldsymbol{A})=\mathrm{i}\boldsymbol{A}$. 容易验证 $\varphi:V\to U$ 是定义好的映射, 并且是实数域上的线性同构. 注意到 φ 的逆映射 $\psi:U\to V$ 为:$\psi(\boldsymbol{B})=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}$.

1.5 子空间、直和与商空间

定义 1.2 (直和)

设 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是线性空间 V 的子空间, 若对任意的 $i(1\le i\le k)$, 均有

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=0,$$

则称和 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 是直接和, 简称直和, 记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$.

定理 1.9 (直和的等价条件)

设 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是线性空间 V_0 的子空间,$V_0=V_1+V_2+\cdots+V_k$, 则下列命题等价:

(1) $V_0=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$;

(2) 对任意的 $2\le i\le k$, 有 $V_i\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{i-1})=0$;

(3) $\dim V_0=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_k$;

(4) $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 的一组基可以拼成 V_0 的一组基;

(5) V_0 中的向量表示为 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 中的向量之和时其表示唯一.

(6) 零向量表示唯一.

证明

定理 1.10 (维数公式)

设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

证明

1.5.1 证明直和的方法

证明直和的方法大致有两种:

第一种: 先证和, 再证直和.

第二种: 对于给定的 V, V_1, V_2, 求证 $V = V_1 \oplus V_2$ 的题目, 如果“和”不好证明的话, 可以记 $W = V_1 + V_2$, 先证 $W = V_1 \oplus V_2$, 再证 $V = W$(证明 $V = W$ 通常会利用命题??). 具体例子见例题 1.16

命题 1.18

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵组成的向量空间,V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{F}$ 上对称矩阵和反对称矩阵组成的子集. 求证:V_1 和 V_2 都是 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$.

笔记 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1, V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V = V_1 + V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由于对称矩阵之和仍是对称矩阵, 一个数乘以对称矩阵仍是对称矩阵, 因此 V_1 是 V 的子空间. 同理 V_2 也是 V 的子空间. 又由命题??可知, 任一 n 阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 故 $V = V_1 + V_2$. 若一个矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵, 则它一定是零矩阵. 这就是说 $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$. 于是 $V = V_1 \oplus V_2$.

例题 1.14 设 V_1, V_2 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的齐次线性方程组 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 与 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间, 求证:$\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

笔记 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1, V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V = V_1 + V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由线性方程组解的定理知,V_1 的维数是 1,V_2 的维数是 $n-1$. 若列向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出 $\boldsymbol{\alpha}$ 只能等于零向量, 因此 $V_1 \cap V_2 = 0$. 又因为

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 1 + (n-1) = n = \dim \mathbb{F}^n,$$

故 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

例题 1.15 设 U, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间,$W = U \times V$ 是 U 和 V 的积集合, 即 $W = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) | \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V\}$. 现在 W 上定义加法和数乘:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v}).$$

验证:W 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 (这个线性空间称为 U 和 V 的外直和).

又若设 $U' = \{(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) | \boldsymbol{u} \in U\}, V' = \{(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}) | \boldsymbol{v} \in V\}$, 求证:$U', V'$ 是 W 的子空间,U' 和 U 同构,V' 和 V 同构, 并且 $W = U' \oplus V'$.

证明 易验证 W 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 从而是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 任取 $(\boldsymbol{u}_1, \mathbf{0}), (\boldsymbol{u}_2, \mathbf{0}) \in U', k \in \mathbb{K}$, 则 $(\boldsymbol{u}_1, \mathbf{0}) + (\boldsymbol{u}_2, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \mathbf{0}) \in U', k(\boldsymbol{u}_1, \mathbf{0}) = (k\boldsymbol{u}_1, \mathbf{0}) \in U'$, 因此 U' 是 W 的子空间. 同理可证 V' 是 W 的子空间. 构造映射 $\varphi : U \to U', \varphi(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \mathbf{0})$, 容易验证 φ 是一一对应并且保持加法和数乘运算, 所以 $\varphi : U \to U'$ 是一个线性同构. 构造映射 $\psi : V \to V', \psi(\boldsymbol{v}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{v})$, 同理可证 $\psi : V \to V'$ 是一个线性同构. 显然 $U' \cap V' = 0$, 又对 W 中任一向量 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, 有 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{v}) \in U' + V'$, 因此 $W = U' \oplus V'$.

例题 1.16 给定数域 P, 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的一个 n 级可逆方阵,$\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量组成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 后 $n-r$ 个行向量组成的矩阵为 $\boldsymbol{C}$,n 元线性方程组 $\boldsymbol{BX} = 0$ 与 $\boldsymbol{CX} = 0$ 的解空间分别为 V_1, V_2, 证 $P^n = V_1 \oplus V_2$.

证明 先记 $W = V_1 + V_2$. 若 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2$, 则 $\boldsymbol{B\alpha} = \boldsymbol{C\alpha} = 0$, 所以

$$\boldsymbol{A\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} = 0.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{\alpha} = 0$, 所以 $V_1 \cap V_1 = \{0\}$, 即 $W = V_1 \oplus V_2$.

最后说 $W = P^n$: 显然 $r(\boldsymbol{B}) = r, r(\boldsymbol{C}) = n - r$, 则 $\dim V_1 = n - r, \dim V_2 = n - (n - r) = r$. 所以

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim P^n.$$

又 $W = V_1 \oplus V_2 \subseteq P^n$, 从而 $W = P^n$, 即

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$

命题 1.19 (任意子空间一定存在相应的补空间)

设 U 是 V 的子空间, 则一定存在 V 的子空间 W, 使得 $V = U \oplus W$. 这样的子空间 W 称为子空间 U 在 V 中的**补空间**.

注 在这个命题中 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 而不是 $U \cap W = \varnothing$; 同时 $V = U + W$ 是子空间的和, 而不是 $V = U \cup W$. 因此, 补空间绝不是补集, 请读者务必注意! 一般来说, 补空间并不唯一. 例如下面证明中, 取 U 中不同的基, 再将基扩张得到的补空间也不相同. 还例如, 若 $\dim V - \dim U \geq 1$ 且 $\dim U \geq 1$, 则 U 有无限个补空间.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$, 由基扩张定理可将其扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 令 $W = L(\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$, 则 $V = U + W$. 由于 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 W 的一组基, 故 $\dim V = \dim U + \dim W$, 从而 $V = U \oplus W$.

命题 1.20

若 $V = U \oplus W$ 且 $U = U_1 \oplus U_2$, 求证:$V = U_1 \oplus U_2 \oplus W$.

证明 由 $U = U_1 \oplus U_2$ 可得 $U_1 \cap U_2 = 0$; 由 $V = U \oplus W$ 可得 $(U_1 + U_2) \cap W = U \cap W = 0$, 因此由定理 1.9(2)可得 $U_1 + U_2 + W$ 是直和, 从而 $V = U_1 + U_2 + W = U_1 \oplus U_2 \oplus W$.

命题 1.21

每一个 n 维线性空间均可表示为 n 个一维子空间的直和.

证明 设 V 是 n 维线性空间, 取其一组基为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 设 $V_i = L(\boldsymbol{e}_i)(1 \leq i \leq n)$, 则 V_i 是 V 的一维子空间. 任取 $\alpha \in V$, 存在唯一一组常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $\alpha = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n$, 而 $k_i\boldsymbol{e}_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 因此 $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. 注意到 $\dim V = n = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n$, 故由定理 1.9(3)可知,$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

(注意到 V_i 的基是 $\{\boldsymbol{e}_i\}$, 因此 $V_i(1 \leq i \leq n)$ 的基能拼成 V 的基, 故由定理 1.9(4)也可得到结论. 再注意到 V 中任一向量写成基向量 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 的线性组合时, 其表示是唯一的. 这就是说,V 中任一向量写成 V_i 中的向量之和时, 其表示是唯一的, 故由定理 1.9(5)同样可得结论.)

命题 1.22

设 V_0 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维向量空间 V 的真子空间, 则 V_0 至多包含 $n-1$ 个 V 中的基向量.

证明 反证法,若 V_0 包含 n 个 V 中的基向量,则 V_i 就包含了 V 的一组基.不妨设 V_0 中的这组基向量为 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$, 则 $\forall \alpha \in V$, 有 $\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n \in V_0$, 其中 $k_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \cdots, n$. 故 $V_0 \supset V$, 又 $V_0 \subset V$, 因此 $V_0 = V$. 这与 V_0 是 V 的真子空间矛盾.

命题 1.23

设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明: 在 V 中必存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 它不属于任何一个 V_i.

笔记 这个命题表明: **有限个真子空间不能覆盖全空间**.

证明 证法一: 对个数 m 进行归纳, 当 $m = 1$ 时结论显然成立. 设 $m = k$ 时结论成立, 现要证明 $m = k + 1$ 时结论也成立. 由归纳假设, 存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 它不属于任何一个 $V_i(1 \leq i \leq k)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 也不属于 V_{k+1}, 则结论已成立, 因此可设 $\boldsymbol{\alpha} \in V_{k+1}$. 在 V_{k+1} 外选一个向量 $\boldsymbol{\beta}$, 作集合

$$M = \{t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} | t \in \mathbb{F}\}.$$

事实上, 我们可将 M 看成是通过 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点且平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一根 “直线”, 现要证明它和每个 V_i 最多只有一个交点. 首先,M 和 V_{k+1} 无交点, 因为若 $t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_{k+1}$, 则从 $t\boldsymbol{\alpha} \in V_{k+1}$ 可推出 $\boldsymbol{\beta} \in V_{k+1}$, 与假设矛盾. 又若对某个

$V_i(i < k+1)$, 存在 $t_1 \neq t_2$, 使得 $t_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_i$,$t_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_i$, 则 $(t_1-t_2)\boldsymbol{\alpha} \in V_i$, 从而导致 $\boldsymbol{\alpha} \in V_i$, 与假设矛盾. 因此,$M$ 和每个 V_i 最多只有一个交点, 从而 M 中只有有限个向量属于 V_i 的并集, 而 t 有无穷多个选择, 由此即得结论.

证法二:任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 对任意的正整数 k, 构造 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2+\cdots+k^{n-1}\boldsymbol{e}_n$, 设向量族 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_k|k=1,2,\cdots\}$. 由例题 1.9可知,$S$ 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不属于任何一个 V_i.

注 上述证明要用到任意一个数域都有无穷个元素这一事实. 因此, 对于有限域 (读者以后可能会学到) 上的向量空间, 上例结论不一定成立.

命题 1.24

设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明:V 中必有一组基, 使得每个基向量都不在诸 V_i 的并中.

证明 证法一: 由命题 1.23可知, 存在非零向量 $\boldsymbol{e}_1 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_1 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$. 定义 $V_{m+1}=L(\boldsymbol{e}_1)$, 再由命题 1.23可知, 存在向量 $\boldsymbol{e}_2 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_2 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} V_i$. 由推论 1.2可知,$\boldsymbol{e}_2 \notin L(\boldsymbol{e}_1)$ 意味着 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 线性无关. 重新定义 $V_{m+1}=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, 再由命题 1.23可知, 存在向量 $\boldsymbol{e}_3 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_3 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} V_i$. 再由推论 1.2可知,$\boldsymbol{e}_3 \notin L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 意味着 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 线性无关. 不断重复上述讨论, 即添加线性无关的向量重新定义 V_{m+1}, 并反复利用命题 1.23和推论 1.2的结论, 最后可以得到 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 它们构成 V 的一组基, 且满足 $\boldsymbol{e}_j \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i (1 \le j \le n)$.

证法二:任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 对任意的正整数 k, 构造 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2+\cdots+k^{n-1}\boldsymbol{e}_n$, 设向量族 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_k|k=1,2,\cdots\}$. 由例题 1.9可知,$S$ 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不属于任何一个 V_i. 进一步, 在 S 中一定还存在 n 个不同的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{k_1},\boldsymbol{\alpha}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k_n}$, 使得每个 $\boldsymbol{\alpha}_{k_j}$ 都不属于任何一个 V_i, 此时 $\{\boldsymbol{\alpha}_{k_1},\boldsymbol{\alpha}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k_n}\}$ 就构成了 V 的一组基.

定义 1.3 ($U-$ 陪集与商空间)

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,U 是 V 的子空间. 对任意的 $\boldsymbol{v} \in V$, 集合 $\boldsymbol{v}+U := \{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u} \in U\}$ 称为 $\boldsymbol{v}$ 的$U-$**陪集**. 在所有 $U-$ 陪集构成的集合 $S=\{\boldsymbol{v}+U|\boldsymbol{v} \in V\}$ 中, 定义加法和数乘如下, 其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in V$,$k \in \mathbb{K}$:

$$(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U) := (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+U,\ k\cdot(\boldsymbol{v}_1+U) := k\cdot\boldsymbol{v}_1+U.$$

S 在上述加法和数乘下成为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称为 V 关于子空间 U 的**商空间**, 记为 V/U.

笔记 容易验证 S 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 因此商空间是良定义的. 故任意 V 的子空间 U 都存在相应的商空间.

注 商空间的向量是 $U-$ 陪集. 商空间的零向量就是 $\mathbf{0}+U=U$.

命题 1.25 ($U-$ 陪集的性质)

(1) $U-$ 陪集之间的关系是: 作为集合或者相等, 或者不相交;

(2) $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$(作为集合相等) 当且仅当 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 \in U$. 特别地,$\boldsymbol{v}+U$ 是 V 的子空间当且仅当 $\boldsymbol{v} \in U$;

(3) S 中的加法以及 $\mathbb{K}$ 关于 S 的数乘不依赖于代表元的选取, 即若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则 $(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U)=(\boldsymbol{v}_1'+U)+(\boldsymbol{v}_2'+U)$, 以及 $k\cdot(\boldsymbol{v}_1+U)=k\cdot(\boldsymbol{v}_1'+U)$;

证明

(1) 设 $(\boldsymbol{v}_1+U)\cap(\boldsymbol{v}_2+U)\neq\varnothing$, 即存在 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}_2$, 从而 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\in U$, 于是

$$\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)+U\subseteq\boldsymbol{v}_2+U,\ \boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)+U\subseteq\boldsymbol{v}_1+U,$$

因此 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$.

(2) 由 (1) 的证明过程即得. 特别地,$\boldsymbol{v}+U$ 是 V 的子空间 $\Rightarrow\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{v}+U\Rightarrow$ 存在$\boldsymbol{u}\in U$, 使得$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\Rightarrow\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}\in U$. 若 $\boldsymbol{v}\in U$, 则一方面,$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{v}+U$, 存在 $\boldsymbol{u}'\in U$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'$. 又 $\boldsymbol{v}\in U$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'\in U$. 故 $\boldsymbol{v}+U\subset U$. 另一方面,$\forall\boldsymbol{\beta}\in U$, 有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}$. 又由 $\boldsymbol{v}\in U$ 可知 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}\in U$, 于是 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{v}+U$. 故 $\boldsymbol{v}+U\supset U$. 因此 $\boldsymbol{v}+U=U$ 是 V 的子空间.

(实际上, 若 $\boldsymbol{v}\in U$, 则因为 $\boldsymbol{v}\in U$并且$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{v}+U$, 所以 $\boldsymbol{v}+U\cap U\neq\varnothing$. 故由 (1) 可知 $\boldsymbol{v}+U=U$ 是 V 的子空间. 这样也能得到证明.)

(3) 若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则存在 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{u}_2$, 从而 $(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_2')=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\in U,k\cdot\boldsymbol{v}_1-k\cdot\boldsymbol{v}_1'=k\cdot\boldsymbol{u}_1\in U$, 于是由 (2) 可得

$$(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U)=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+U=(\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_2')+U=(\boldsymbol{v}_1'+U)+(\boldsymbol{v}_2'+U),$$

$$k\cdot(\boldsymbol{v}_1+U)=k\cdot\boldsymbol{v}_1+U=k\cdot\boldsymbol{v}_1'+U=k\cdot(\boldsymbol{v}_1'+U).$$

注 若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则 $\forall\boldsymbol{u}_1'\in U$, 有 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1'\in\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$. 从而存在 $\boldsymbol{u}_1''\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1'=\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{u}_1''$. 于是 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1''-\boldsymbol{u}_1'$. 再令 $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_1''-\boldsymbol{u}_1'$, 则 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1\in U$. 同理可得, 存在 $u_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{u}_2\in U$.

命题 1.26 (商空间的维数公式和商空间与补空间同构)

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,U 是 V 的子空间,W 是 U 的补空间, 证明:$\dim V/U=\dim V-\dim U$, 并且存在线性同构 $\varphi:W\to V/U$.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$, 补空间 W 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 则 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基. 我们断言 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 是商空间 V/U 的一组基. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, 设 $\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i$, 则

$$\boldsymbol{v}+U=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=\left(\sum_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=\sum_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U).$$

另一方面, 设 $a_{m+1},\cdots,a_n\in\mathbb{K}$, 使得 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U)=\boldsymbol{0}+U$, 即 $\left(\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=U$, 从而 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\in U$. 于是存在 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{K}$, 使得 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i=-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{e}_i$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$, 从而 $a_i=0(1\leq i\leq n)$. 于是 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 线性无关. 因此,$\dim V/U=n-m=\dim V-\dim U$.

对任意的 $\boldsymbol{w}\in W$, 设 $\boldsymbol{w}=\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i$, 定义映射 $\varphi:W\to V/U$ 为

$$\varphi(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}+U=\sum_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U).$$

容易验证 φ 保持加法和数乘, 并且是一一对应 (W 的基 e_i 映射过去得到 $\varphi(e_i)$ 仍是 V/U 的基,$i=m+1,\cdots,n$.), 从而是线性同构.

1.5.2 练习

练习 1.3 设 $V=M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵全体组成的线性空间,$\boldsymbol{A}\in V$, 求证: 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵全体 $C(\boldsymbol{A})$ 组成 V 的子空间且其维数不为零. 又若 $\boldsymbol{T}$ 是 V 的非空子集, 求证: 与 $\boldsymbol{T}$ 中任一矩阵乘法可交换的矩阵全体 $C(\boldsymbol{T})$ 也构成 V 的子空间且其维数不为零.

证明 由于纯量阵 $c\boldsymbol{I}_n$ 与任一 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换, 故 $L(\boldsymbol{I}_n)\subseteq C(\boldsymbol{A})$. 任取 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in C(\boldsymbol{A}),k\in\mathbb{K}$, 容易验证

$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\in C(\boldsymbol{A}),k\boldsymbol{B}\in C(\boldsymbol{A})$, 故 $C(\boldsymbol{A})$ 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间且其维数不为零. $C(T)$ 的结论同理可证.

练习 1.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,0,1)$ 是四维实行向量空间 V 中的向量, 它们生成的子空间为 V_1, 又向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,1,1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,-3,-1),\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,-1,1)$ 生成的子空间为 V_2, 求子空间 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的基.

解 解法一:V_1+V_2 是由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的, 因此只要求出这 6 个向量的极大无关组即可. 将这 6 个向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\-1&2&0&1&-3&-1\\0&1&1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\0&2&2&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\0&0&0&-2&0&-4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为 V_1+V_2 的基 (不唯一).

再来求 $V_1\cap V_2$ 的基. 首先注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基 (从上面的矩阵即可看出), 又不难验证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_2 的基,V_2 中的向量可以表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性组合. 假设 $t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 属于 V_1, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩相等 (因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基). 因此, 我们可以用矩阵方法来求出参数 t_1,t_2. 注意到

$$\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\-1&2&t_1-3t_2\\0&1&t_1-t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\0&2&-2t_2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\0&0&-2t_1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故可得 $t_1=0$, 所以 $V_1\cap V_2$ 的基可取为 $\boldsymbol{\beta}_2$.

解法二: 求 V_1+V_2 的基同解法 1, 现用解线性方程组的方法来求 $V_1\cap V_2$ 的基. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_2 的基, 故对任一向量 $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_2,\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=(-x_3)\boldsymbol{\beta}_1+(-x_4)\boldsymbol{\beta}_2$. 因此, 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 等价于求解线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}.$$

通过初等行变换将其系数矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 进行化简:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故上述线性方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=k(-1,1,0,1)$, 从而 $\boldsymbol{\gamma}=-k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=-k\boldsymbol{\beta}_2(k\in\mathbb{R})$, 于是 $\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基.

1.6 矩阵的秩

1.6.1 初等变换法

矩阵的秩在初等变换或分块初等变换下不变.

想法: 遇到关于秩不等式的问题, 可以考虑构造分块矩阵, 对其做适当的初等变换, 再利用秩的基本公式.

定理 1.11

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不等于零, 而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

命题 1.27 (矩阵秩的基本公式)

(1) 若 $k\neq 0,\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leq\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$;

(3) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$;

(4) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$,$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$;

(5) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$,$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$;

(6) $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$,$\mathrm{r}(A-B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$;

(7) $\mathrm{r}(A-B) \geq |\mathrm{r}(A) - \mathrm{r}(B)|$.

证明

(1) 由于 $kA = P_1(k)P_2(k)\cdots P_m(k)A$, 故 $\mathrm{r}(kA) = \mathrm{r}(A)$.

(2) 证法一:设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵. 将矩阵 B 按列分块,$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$, 则 $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$. 若 B 列向量的极大无关组为 $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}\}$, 则 B 的任一列向量 β_j 均可用 $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}\}$ 线性表示. 于是任一 $A\beta_j$ 也可用 $\{A\beta_{j_1}, A\beta_{j_2}, \cdots, A\beta_{j_r}\}$ 来线性表示. 因此, 向量组 $\{A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s\}$ 的秩不超过 r, 即 $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B)$. 同理, 对矩阵 A 用行分块的方法可以证明 $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A)$.

证法二:见例题**??**.

(3) 设 A, B 的秩分别为 r_1, r_2, 则存在非异阵 P_1, Q_1 和非异阵 P_2, Q_2, 使得

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & O \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

因此,$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2 = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.

(4) 证法一: 我们只证明第一个不等式, 第二个不等式同理可证. 设 A, B 的秩分别为 r_1, r_2, 则存在非异阵 P_1, Q_1 和非异阵 P_2, Q_2, 使得

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P_1CQ_2 \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

在上面的分块矩阵中实施第三类分块初等变换, 用 I_{r_1} 消去同行的矩阵; 用 I_{r_2} 消去同列的矩阵, 再将 C_{22} 对换到第 $(2,2)$ 位置:

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & C_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

最后由 (3) 的结论可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(I_{r_1}) + \mathrm{r}(C_{22}) + \mathrm{r}(I_{r_2}) \geq r_1 + r_2 = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

证法二: 我们也可用子式法来证明. 设 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r$, 则由定理 1.11可知,$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 有一个 r 阶子式不为零, 不妨设为 $\begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix}$, 其中 A_1, B_1 分别是 A, B 的子阵. 注意 A_1 或 B_1 允许是零阶矩阵, 这对应于该子式完全包含在 B 或 A 中, 但若 A_1, B_1 的阶数都大于零, 则通过该子式非零, 再结合由 Laplace 定理容易验证 A_1, B_1 都是方阵. 设在矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 中对应的 r 阶子式是 $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix}$, 则由 Laplace 定理可得 $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix} = |A_1||B_1| = \begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$, 再次由定理 1.11可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r = \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

证法三:设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 A 的列分块,$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 A 的列向量的极大无关组; 设 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$,$C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l)$ 是 B, C 的列分块,$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_s}$ 是 B 的列向量的极大无关组, 则 $\mathrm{r}(A) = r$ 且 $\mathrm{r}(B) = s$. 我们接下来证明: 作为 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的列向量,$\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关. 设

$$c_1\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r\begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + d_1\begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix} + \cdots + d_s\begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

即

$$c_1\alpha_{i_1} + \cdots + c_r\alpha_{i_r} + d_1\gamma_{j_1} + \cdots + d_s\gamma_{j_s} = \mathbf{0}, d_1\beta_{j_1} + \cdots + d_s\beta_{j_s} = \mathbf{0}.$$

由上面的假设即得 $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_s = 0$, 于是上述结论得证. 因为 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的列向量中有 $r + s$ 个线性无关, 故 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r + s = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.

(5) 注意到

$$\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

故由 (2) 和 (3) 可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B),$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

(6) 注意到

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = A + B, \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} = A - B.$$

故由 (2) 和 (5) 可得

$$\mathrm{r}(A + B) = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B),$$

$$\mathrm{r}\left(A-B\right)=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\ -I\end{pmatrix}\right)\leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\leqslant \mathrm{r}\left(A\right)+\mathrm{r}\left(B\right).$$

(7) 由于 $\mathrm{r}(A-B)=\mathrm{r}(B-A)$, 故不妨设 $\mathrm{r}(A)\geq \mathrm{r}(B)$, 则由 (6) 可得 $\mathrm{r}(A-B)+\mathrm{r}(B)\geq \mathrm{r}(A-B+B)=\mathrm{r}(A)$, 即 $\mathrm{r}(A-B)\geq \mathrm{r}(A)-\mathrm{r}(B)$.

例题 1.17 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $b_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}$. 求证:$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

证明 将 A 的第 i 行乘以 $(-1)^i$, 又将第 j 列乘以 $(-1)^j$, 即得矩阵 B, 因此 A 和 B 相抵, 故结论成立.

命题 1.28 (Sylvester 不等式)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times t$ 矩阵, 求证:

$$\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n.$$

证明 证法一: 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix}I_n & O\\ O & AB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_n & O\\ A & AB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_n & -B\\ A & O\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B & I_n\\ O & A\end{pmatrix},$$

由矩阵秩的基本公式 (3)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(AB)+n=\mathrm{r}\begin{pmatrix}I_n & O\\ O & AB\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}B & I_n\\ O & A\end{pmatrix}\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B),$$

即 $\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$.

证法二:见例题**??**.

推论 1.3

若 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times t$ 矩阵且 $AB=O$, 则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$.

命题 1.29 (Sylvester 不等式的推广)

设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 n 阶方阵, 求证:

$$\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)\leq (m-1)n+\mathrm{r}(A_1A_2\cdots A_m).$$

特别地, 若 $A_1A_2\cdots A_m=O$, 则 $\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)\leq (m-1)n$.

证明 反复利用Sylvester 不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\mathrm{r}(A_3)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)\\ \leq& n+\mathrm{r}(A_1A_2)+\mathrm{r}(A_3)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)\\ \leq& 2n+\mathrm{r}(A_1A_2A_3)+\cdots+\mathrm{r}(A_m)\\ \leq&\cdots\leq (m-1)n+\mathrm{r}(A_1A_2\cdots A_m).\end{aligned}$$

例题 1.18 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足 $AB=O$. 证明: 若 n 是奇数, 则 $AB'+A'B$ 必为奇异阵; 若 n 为偶数, 举例说明上述结论一般不成立.

证明 由推论 1.3可知,$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$. 若 n 为奇数, 则 $\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)$ 中至少有一个小于等于 $\frac{n}{2}$, 从而小于等于 $\frac{n-1}{2}$. 不妨设 $\mathrm{r}(A)\leq\frac{n-1}{2}$, 于是

$$\mathrm{r}(AB'+A'B)\leq \mathrm{r}(AB')+\mathrm{r}(A'B)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A')=2\mathrm{r}(A)\leq n-1,$$

从而 $AB'+A'B$ 为奇异阵. 例如, 当 $n=2$ 时, 令 $A=B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $AB=O$, 但 $AB'+A'B=I_2$ 为非异阵.

命题 1.30 (Frobenius 不等式)

证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明 证法一: 考虑下列分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (3)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{BC}),$$

由此即得结论.

证法二 (几何方法):将问题转化成几何的语言即为: 设 $\varphi : V_1 \to V_2, \psi : V_2 \to V_3, \theta : V_3 \to V_4$ 是线性映射, 证明:$\mathrm{r}(\theta\psi\varphi) \geq \mathrm{r}(\theta\psi) + \mathrm{r}(\psi\varphi) - \mathrm{r}(\psi)$.

下面考虑通过定义域的限制得到的线性映射. 将 θ 的定义域限制在 $\mathrm{Im}\psi\varphi$ 上可得线性映射 $\theta_1 : \mathrm{Im}\psi\varphi \to V_4$, 它的像空间是 $\mathrm{Im}\theta\psi\varphi$, 核空间是 $\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi$; 将 θ 的定义域限制在 $\mathrm{Im}\psi$ 上可得线性映射 $\theta_2 : \mathrm{Im}\psi \to V_4$, 它的像空间是 $\mathrm{Im}\theta\psi$, 核空间是 $\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi$, 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim(\mathrm{Im}\psi\varphi) = \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi), \tag{1.3}$$

$$\dim(\mathrm{Im}\psi) = \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi) + \dim(\mathrm{Im}\theta\psi). \tag{1.4}$$

注意到 $\mathrm{Im}\psi\varphi \subseteq \mathrm{Im}\psi$, 故 $\dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi) \leq \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi)$, 从而由(1.3)式和(1.4)式可得

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}\psi\varphi) - \dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi) &= \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi) = \dim(\mathrm{Im}\psi) - \dim(\mathrm{Im}\theta\psi). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}\psi\varphi) - \dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\psi) - \dim(\mathrm{Im}\theta\psi) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{r}(\psi\varphi) - \mathrm{r}(\theta\psi\varphi) \leq \mathrm{r}(\psi) - \mathrm{r}(\theta\psi), \end{aligned}$$

结论得证.

命题 1.31 (幂等矩阵关于秩的判定准则)

求证:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$) 的充要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = n.$$

证明 在下列矩阵的分块初等变换中矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2) + n$, 由此即得结论.

命题 1.32 (对合矩阵关于秩的判定准则)

求证:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$) 的充要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = n.$$

证明 在下列矩阵的分块初等变换中,矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} I_n+A & O \\ O & I_n-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n+A & I_n+A \\ O & I_n-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n+A & I_n+A \\ I_n+A & 2I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n-A^2) & I_n+A \\ O & 2I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n-A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} I_n+A & O \\ O & I_n-A \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n-A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(I_n+A)+\mathrm{r}(I_n-A)=\mathrm{r}(I_n-A^2)+n$, 由此即得结论.

例题 1.19 设 A 是 n 阶矩阵, 求证:$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(I_n+A)\ge n$.

证明 证法一: 由下列分块初等变换即得结论

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ O & I+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ -A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

证法二: $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(I+A)=\mathrm{r}(-A)+\mathrm{r}(I+A)\ge \mathrm{r}(-A+I+A)=\mathrm{r}(I)=n$.

命题 1.33 (秩的降阶公式)

设有分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 证明:

(1) 若 A 可逆, 则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(D-CA^{-1}B)$;

(2) 若 D 可逆, 则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(D)+\mathrm{r}(A-BD^{-1}C)$;

(3) 若 A,D 都可逆, 则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(D-CA^{-1}B)=\mathrm{r}(D)+\mathrm{r}(A-BD^{-1}C)$.

证明

(1) 由分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

由此即得结论.

(2) 同理可证明.

(3) 由 (1) 和 (2) 即得.

例题 1.20 设

$$M=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

证明:$\mathrm{r}(M)\ge n-1$, 等号成立当且仅当 $|M|=0$.

证明 若 $n=1$, 结论显然成立. 下设 $n\ge 2$. 取 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$M=-I_n+\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = -I_n+A'I_2^{-1}A=-\left(I_n-A'I_2^{-1}A\right).$$

由秩的降阶公式可得

$$2+\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=2+\mathrm{r}(-\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_2)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_2^{-1}\boldsymbol{A}'\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{I}_n^{-1}\boldsymbol{A}\right)=n+\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}.$$

而 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}\geqslant 1$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=n-2+\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}\geqslant n-1$., 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 不满秩, 即 $|\boldsymbol{M}|=0$.

命题 1.34

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

注 证法一:这里乘的不只是初等变换矩阵. 记住这个分块矩阵乘法和构造.

证法二:和证法三:思路分析: 将秩不等式转化为维数公式就能自然得到证明的想法.

证明 证法一: 考虑如下分块矩阵的乘法:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (2)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\ge \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA}\end{pmatrix}\ge \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}),$$

由此即得结论.

证法二:设 $V_{\boldsymbol{A}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,$V_{\boldsymbol{B}},V_{\boldsymbol{AB}},V_{\boldsymbol{A+B}}$ 的意义同理. 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$, 于是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\boldsymbol{A+B}}$, 从而 $V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{A+B}}$. 同理可证 $V_{\boldsymbol{A}}\subseteq V_{\boldsymbol{BA}}$,$V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{AB}}$. 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 所以 $V_{\boldsymbol{BA}}=V_{\boldsymbol{AB}}$, 从而 $V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{AB}}$. 因此, 我们有

$$\dim(V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}})\le \dim V_{\boldsymbol{A+B}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\quad \dim(V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}})\le \dim V_{\boldsymbol{AB}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

将上面两个不等式相加, 再由交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned}n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})&\ge \dim(V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}})+\dim(V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}})\\ &=\dim V_{\boldsymbol{A}}+\dim V_{\boldsymbol{B}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 结论得证.

证法三:设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列分块,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列分块. 记 $U_{\boldsymbol{A}}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的 $\mathbb{K}^n$ 的子空间,$U_{\boldsymbol{B}},U_{\boldsymbol{AB}},U_{\boldsymbol{A+B}}$ 的意义同理. 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组就是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的一组基, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\dim U_{\boldsymbol{A}}$, 关于 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的等式同理可得. 显然, 我们有 $U_{\boldsymbol{A+B}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}+U_{\boldsymbol{B}}$. 注意到 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_n)$, 若设 $\boldsymbol{\beta}_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj})'$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{A\beta}_j=b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n\in U_{\boldsymbol{A}}$, 从而 $U_{\boldsymbol{AB}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}$. 同理可得 $U_{\boldsymbol{BA}}\subseteq U_{\boldsymbol{B}}$. 又因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 故 $U_{\boldsymbol{AB}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}\cap U_{\boldsymbol{B}}$. 最后, 由上述包含关系以及交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})&=\dim U_{\boldsymbol{A+B}}+\dim U_{\boldsymbol{AB}}\le \dim(U_{\boldsymbol{A}}+U_{\boldsymbol{B}})+\dim(U_{\boldsymbol{A}}\cap U_{\boldsymbol{B}})\\ &=\dim U_{\boldsymbol{A}}+\dim U_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

1.6.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩

定理 1.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集 $V_{\boldsymbol{A}}$ 是 n 维列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 的子空间. 根据线性方程组的求解理论, 我们有

$$\dim V_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n,$$

笔记 即齐次线性方程组解空间的维数与系数矩阵的秩之和等于未知数的个数. 根据上述公式, 由矩阵的秩可以讨论线性方程组解的性质; 反过来, 也可以由线性方程组解的性质讨论矩阵的秩.

推论 1.4

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩阵. 特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为非异阵.

证明 由定理 1.12 中的公式$\dim V_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 即可得到证明.

命题 1.35

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 复矩阵, 则 $\mathrm{r}\left(\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明

(1) 首先证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 为此我们将证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解. 显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 反之, 任取方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, 则 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$, 即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$. 记 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'\in\mathbb{R}^m$, 则

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0.$$

因为 b_i 是实数, 故每个 $b_i=0$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 也即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解. 这就证明了方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 和 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 同解, 即 $V_{\boldsymbol{A}}=V_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}}$, 于是由定理 1.12可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 在上述等式中用 $\boldsymbol{A}'$ 替代 $\boldsymbol{A}$ 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')$, 故结论得证.

(2) 由 (1) 类似的方法可以证明.

例题 1.21 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 且每个方程组的基础解系含 m 个线性无关的向量, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\leq n-m$.

证明 由方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解可知,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $V_{\boldsymbol{A}}\subseteq V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}$, 从而 $\dim V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}\geq\dim V_{\boldsymbol{A}}=m$, 于是由定理 1.12可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=n-\dim V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}\leq n-m$.

命题 1.36

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 矩阵, 证明: 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明 显然方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$, 于是两个线性方程组同解, 即 $V_{\boldsymbol{B}}=V_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$ 的充要条件是 $\dim V_{\boldsymbol{B}}=\dim V_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$. 又由定理 1.12可知 $\dim V_{\boldsymbol{B}}=k-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,$\dim V_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=k-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$, 因此上述两个方程组同解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

命题 1.37

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩, 求证: 对任意的 $k\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 也有相同的秩.

证明 证法一: 由假设和命题 1.36可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解. 要证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$, 我们只要证明方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解即可. 显然方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 反

之, 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{C\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因此 $\boldsymbol{C\alpha}$ 也是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $\boldsymbol{BC\alpha}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 的解. 这就证明了方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 从而结论得证.

证法二: 由Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})\geq \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{BC}),$$

又由矩阵秩的基本公式 (2)可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})\leq \mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$, 故结论得证.

命题 1.38

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足:$|\boldsymbol{A}|=0$ 且某个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 求证: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都可写为下列形式:

$$k\begin{pmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\vdots\\A_{in}\end{pmatrix},k\in\mathbb{K}.$$

证明 由条件和定理 1.11可知 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 因此线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=0$, 故 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 于是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的任一列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 又已知 $A_{ij}\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 个列向量 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})'$(不是零向量) 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

例题 1.22 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实反对称阵,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 是同阶对角阵且主对角元素全大于零, 求证:$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$. 特别地,$|\boldsymbol{I}_n\pm\boldsymbol{A}|>0$, 从而 $\boldsymbol{I}_n\pm\boldsymbol{A}$ 都是非异阵.

笔记 利用行列式构造连续的多项式函数, 再利用函数连续的性质证明.

证明 先证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq 0$, 只需证明 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 因为 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}=0$, 转置可得 $\boldsymbol{x}'(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}=0$, 上述两式相加即得 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{Dx}=0$. 若设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 则有 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2=0$. 由于 d_i 都大于零并且 x_i 都是实数, 故只能是 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, 即有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

再证明本题的结论. 设 $f(t)=|t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|$, 则 $f(t)$ 是关于 t 的多项式, 从而是关于 t 的连续函数. 注意到对任意的实数 t,$t\boldsymbol{A}$ 仍是实反对称阵, 故由上面的讨论可得 $f(t)=|t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq 0$, 即 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处不为零的连续函数. 注意到当 $t=0$ 时,$f(0)=|\boldsymbol{D}|>0$, 因此 $f(t)$ 只能是 $\mathbb{R}$ 上取值恒为正数的连续函数 (原因见: 命题**??**). 特别地,$f(1)=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

定义 1.4 (严格对角占优阵)

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,1\leq i\leq n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**严格对角占优阵**.

命题 1.39 (严格对角占优阵必是非异阵)

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是严格对角占优阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必是非异阵.

证明 只需证明线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 若有非零解, 设为 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 假设 c_k 是其中绝对值最大者. 将解代入该方程组的第 k 个方程式, 得

$$a_{k1}c_1+\cdots+a_{kk}c_k+\cdots+a_{kn}c_n=0,$$

即有

$$-a_{kk}c_k=a_{k1}c_1+\cdots+a_{k,k-1}c_{k-1}+a_{k,k+1}c_{k+1}+\cdots+a_{kn}c_n.$$

上式两边取绝对值, 由三角不等式以及 c_k 是绝对值最大的假设可得

$$|a_{kk}||c_k| \le |a_{k1}||c_1| + \cdots + |a_{k,k-1}||c_{k-1}| + |a_{k,k+1}||c_{k+1}| + \cdots + |a_{kn}||c_n| \le \left(\sum_{j=1,j\ne k}^{n} |a_{kj}|\right)|c_k|,$$

从而有

$$|a_{kk}| \le \sum_{j=1,j\ne k}^{n} |a_{kj}|,$$

得到矛盾. 因此, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

命题 1.40

若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ii} > \sum_{j=1,j\ne i}^{n} |a_{ij}|, 1 \le i \le n,$$

求证: $|\boldsymbol{A}| > 0$.

证明 考虑矩阵 $t\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}$, 当 $t \ge 0$ 时, 这是一个严格对角占优阵, 因此由上一个命题可知其行列式 $f(t) = |t\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}|$ 不为零. 又 $f(t)$ 是关于 t 的多项式且首项系数为 1, 所以当 t 充分大时,$f(t) > 0$. 注意到 $f(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上处处不为零的连续函数, 并且当 t 充分大时取值为正, 因此 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上取值恒为正 (原因见: 命题**??**). 特别地,$f(0) = |\boldsymbol{A}| > 0$.

命题 1.41

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 求证:$\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}_n - \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 都是非异阵.

证明 只需证明 $(\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解. 由 $\overline{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 共轭转置可得 $\overline{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{I}_n - \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$. 上述两式相加, 可得 $\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x} = 0$, 因此 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

1.6.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩

按照最初的定义, 矩阵的秩就是矩阵的行 (列) 向量组的秩, 因此通过线性空间理论去讨论矩阵的秩是十分自然的事情.

命题 1.42

求证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 存在一个 r 阶子式 $|\boldsymbol{D}|$ 不等于零, 而 $|\boldsymbol{D}|$ 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于零.

证明 必要性由定理 1.11可直接得到, 只需证明充分性. 不失一般性, 我们可设 $|\boldsymbol{D}|$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列构成的 r 阶子式. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分块和列分块, 记 $\tau_{\le r}\boldsymbol{\alpha}_i$ 为行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 关于前 r 列的缩短向量,$\tau_{\le r}\boldsymbol{\beta}_j$ 为列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 关于前 r 行的缩短向量. 由 $|\boldsymbol{D}| \ne 0$ 可得 $\tau_{\le r}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \tau_{\le r}\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 由命题 1.7可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

我们只要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组即可得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$. 用反证法证明, 若它们不是极大无关组, 则可以添加一个行向量, 不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r+1$ 行构成的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}_1 = (\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_n)$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = r+1$. 由 $|\boldsymbol{D}| \ne 0$ 可得 $\tau_{\le r}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\le r}\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 由命题 1.7可知 $\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = r+1$, 故存在 $\boldsymbol{A}_1$ 的一个列向量, 不妨设为 $\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1}$, 使得

$\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_r,\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{A}_2=(\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_r,\tau_{\le r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1})$, 即 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r+1$ 行和前 $r+1$ 列构成的方阵, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2)=r+1$. 因此,$|\boldsymbol{A}_2|\neq 0$ 是包含 $|\boldsymbol{D}|$ 的 $r+1$ 阶加边子式, 这与假设矛盾.

命题 1.43

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是其极大无关组, 又设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 且 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 是其极大无关组. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 交叉点上的元素组成的子矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的行列式 $|\boldsymbol{D}|\neq 0$.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是极大无关组, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一行向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的线性组合. 记 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_s$ 在 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列处的缩短向量, 由命题 1.7可知,$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 均可表示为 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 的线性组合.

考虑由列向量 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 组成的矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r})$, 这是一个 $m\times r$ 矩阵且秩等于 r. 由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任一行向量 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 均可用 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 线性表示, 并且 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 r, 故由命题 1.11可知,$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的极大无关组, 从而它们线性无关. 注意到 r 阶方阵 $\boldsymbol{D}$ 的行向量恰好是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$, 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满秩阵, 从而 $|\boldsymbol{D}|\neq 0$.

命题 1.44

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行和第 $i_1,\cdots,i_r$ 列交叉点上的元素组成的子式称为 $\boldsymbol{A}$ 的主子式. 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵或反对称阵且秩等于 r, 求证:$\boldsymbol{A}$ 必有一个 r 阶主子式不等于零.

证明 由对称性或反对称性, 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组, 则由命题 1.12它的第 $i_1,\cdots,i_r$ 列也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组, 因此由命题 1.43可知, 它们交叉点上的元素组成的 r 阶主子式不等于零.

命题 1.45 (反对称阵的秩必为偶数)

证明: 反对称阵的秩必为偶数.

证明 用反证法, 设反对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $2r+1$, 则由命题 1.44可知,$\boldsymbol{A}$ 有一个 $2r+1$ 阶主子式 $|\boldsymbol{D}|$ 不等于零. 注意到反对称阵的主子式是反对称行列式, 而由命题**??**奇数阶反对称行列式的值等于零, 从而 $|\boldsymbol{D}|=0$, 矛盾.

1.7 相抵标准型及其应用

定理 1.13 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

证明

命题 1.46 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\begin{aligned}A&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr}\right)\boldsymbol{Q}\\&=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q}+\cdots+\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}.\end{aligned}$$

于是记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{Q},\cdots,\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{rr}\boldsymbol{Q}$, 则每个 $\boldsymbol{A}_i$ 的秩都等于 1. 故 $\boldsymbol{A}$ 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_k, k<r$, 且每个 $\boldsymbol{B}_i$ 的秩都等于 1, 则由命题 1.27(6)可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_2)+\cdots+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_k)=k$, 这与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾, 故不可能.

命题 1.47 (对称矩阵的秩 1 分解)

秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明 设 A 是一个秩为 r 的对称矩阵, 则存在一个可逆矩阵 C, 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix}I_r & \\ & O\end{pmatrix}=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr}.$$

从而

$$\begin{aligned}A&=(C^T)^{-1}(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})C^{-1}\\&=(C^T)^{-1}E_{11}C^{-1}+(C^T)^{-1}E_{22}C^{-1}+\cdots+(C^T)^{-1}E_{nn}C^{-1}.\end{aligned}$$

因为 E_{ii} 的秩为 1, 且 $(C^T)^{-1}$,C^{-1} 均可逆, 所以 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 的秩也为 1. 又由于

$$((C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1})^T=(C^{-1})^TE_{ii}^TC^{-1}=(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}.$$

因此 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 也是对称矩阵. 故 A 可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

例题 1.23 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n,p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵,$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立的充要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵.

笔记 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $\boldsymbol{A}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{C}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1).$$

从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{C}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1).$$

于是由假设可知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1$ 有解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1$. 记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2$, 则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\\Leftrightarrow&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\\Leftrightarrow&\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}+\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\\Leftrightarrow&\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

故可以不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_0$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 的解, 则将 $\boldsymbol{M}$ 的第一分块列右乘 $-\boldsymbol{X}_0$ 加到第

二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-Y_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 于是 $\mathrm{r}(M) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.

再证必要性. 设 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P_1, Q_1, P_2, Q_2 为非异阵,$r = \mathrm{r}(A), s = \mathrm{r}(B)$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $A \mapsto P_1AQ_1, B \mapsto P_2BQ_2, C \mapsto P_1CQ_2, X \mapsto Q_1^{-1}XQ_2, Y \mapsto P_1YP_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 M 的如下分块初等变换:

$$M = \begin{pmatrix} I_r & O & C_1 & C_2 \\ O & O & C_3 & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由于 $\mathrm{r}(M) = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) = r + s$, 故 $C_4 = O$. 于是矩阵方程 $AX + YB = C$, 即

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$$

有解, 例如 $X_1 = C_1, X_2 = C_2, Y_1 = O, Y_3 = C_3$, 其余分块取法任意.

命题 1.48 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(A) = n$, 即 A 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n \times m$ 矩阵 B(行满秩), 使得 $BA = I_n$(这样的矩阵 B 称为 A 的左逆);

(2) 若 $\mathrm{r}(A) = m$, 即 A 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n \times m$ 矩阵 C(列满秩), 使得 $AC = I_m$(这样的矩阵 C 称为 A 的右逆).

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此 $(I_n, O)PAQ = I_n$, 即 $(I_n, O)PA = Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n, O)PA = I_n$. 令 $B = Q(I_n, O)P$ 即可.

(2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论.

推论 1.5

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD = AE$, 则 $D = E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA = EA$, 则 $D = E$.

命题 1.49 (满秩分解)

设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 证明:

(1) $A = BC$, 其中 B 是 $m \times r$(列满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(B) = r$,C 是 $r \times n$(行满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(C) = r$, 这种分解称为 A 的满秩分解;

(2) 若 A 有两个满秩分解 $A = B_1C_1 = B_2C_2$, 则存在 r 阶非异阵 P, 使得 $B_2 = B_1P, C_2 = P^{-1}C_1$.

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r, O)Q.$$

令 $B = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$,$C = (I_r, O)Q$, 即得结论.

(2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在 $r \times m$ 行满秩阵 S_2,$n \times r$ 列满秩阵 T_2, 使得 $S_2B_2 = I_r$,$C_2T_2 = I_r$, 于是

$$B_2 = B_2(C_2T_2) = (B_2C_2)T_2 = (B_1C_1)T_2 = B_1(C_1T_2),$$

$$C_2 = (S_2B_2)C_2 = S_2(B_2C_2) = S_2(B_1C_1) = (S_2B_1)C_1,$$

$$(S_2B_1)(C_1T_2) = S_2(B_1C_1)T_2 = S_2(B_2C_2)T_2 = (S_2B_2)(C_2T_2) = I_r.$$

令 $P = C_1T_2$, 即得结论.

命题 1.50

$A = BC$ 是满秩分解当且仅当 B 的 r 个列向量是 A 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当 C 的 r 个行向量是 A 的 m 个行向量张成线性空间的一组基.

证明

例题 1.24 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times m$ 矩阵 B, 使得 $ABA = A$.

笔记 证法一的不妨设原因与例题 1.23类似.

证明 证法一: 设 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P 是 m 阶非异阵,Q 是 n 阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵变换:$A \mapsto PAQ, B \mapsto Q^{-1}BP^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是相抵标准型. 设 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块, 由 $ABA = A$ 可得 $B_1 = I_r$, 其余分块取法任意.

证法二:设 $A = CD$ 为 A 的满秩分解,E 为列满秩阵 C 的左逆,F 是行满秩阵 D 的右逆. 令 $B = FE$, 则

$$ABA = (CD)(FE)(CD) = C(DF)(EC)D = CD = A.$$

例题 1.25 设 A, B 分别是 $3 \times 2, 2 \times 3$ 矩阵且满足

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

试求 BA.

证明 解法一: 通过简单的计算可得 $\mathrm{r}(AB) = 2$, 从而 $\mathrm{r}(A) \geq 2, \mathrm{r}(B) \geq 2$. 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$, 即 A 是列满秩阵,B 是行满秩阵. 又注意到 $(AB)^2 = 9AB$, 经整理可得 $A(BA - 9I_2)B = O$. 根据推论 1.5, 可以在上式的左边消去 A, 右边消去 B, 从而可得 $BA = 9I_2$.

解法二:由解法一中矩阵秩的计算可知,AB 是题中 3 阶矩阵 C 的满秩分解. 注意到 C 的后两列线性无关, 因此可取另一种满秩分解为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1B_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2)可知, 存在可逆矩阵 P, 使得 $A_1 = AP, B_1 = P^{-1}B$. 于是 $B_1A_1 = P^{-1}BAP$, 故 BA 相似于 $B_1A_1 = 9I_2$, 从而 $BA = P^{-1}(9I_2)P = 9I_2$.

命题 1.51 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 求证:$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和秩等于 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_r$.

证明 充分性显然, 现证必要性. 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

代入 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 消去两侧的非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

只需令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 列满秩,$\boldsymbol{I}$ 行满秩, 经简单计算即得结论.

推论 1.6 (幂等矩阵的迹和秩相等)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明 证法一:由命题 1.51可知,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证法二 (相似标准型):事实上, 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1},$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1}$, 可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

1.8 线性方程组的解及其应用

1.8.1 线性方程组的解的讨论

命题 1.52

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明

例题 1.26 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 记 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 求证: 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

证明 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$, 由已知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组也是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的极大无关组. 因此,$\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

例题 1.27 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 是 m 个方程式 n 个未知数的线性方程组, 求证: 它有解的充要条件是方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{\alpha}$ 均适合等式 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=0$.

证明 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解当且仅当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 当且仅当 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')$, 当且仅当方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与

$A'y=\mathbf{0}$ 同解, 而这当且仅当 $A'y=\mathbf{0}$ 的任一解 α 均适合等式 $\beta'\alpha=0$, 即 $\alpha'\beta=0$.

例题 1.28 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m; \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0, \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1. \end{cases} \tag{1.6}$$

求证: 方程组(1.5)有解的充要条件是方程组(1.6)无解.

证明 设第一个线性方程组的系数矩阵为 A, 常数向量为 β, 则第二个线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$B=\begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix}, \widetilde{B}=\begin{pmatrix} A' & O \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 由矩阵初等变换可知, 我们有 $\mathrm{r}(\widetilde{B})=\mathrm{r}(A')+1=\mathrm{r}(A)+1$.

若方程组(1.5)有解, 则 $\mathrm{r}(A\,|\,\beta)=\mathrm{r}(A)$, 故 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B')=\mathrm{r}(A\,|\,\beta)=\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(\widetilde{B})$. 因此, 方程组(1.6)无解.

反之, 若方程组(1.5)无解, 则 $\mathrm{r}(A\,|\,\beta)=\mathrm{r}(A)+1$, 故 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B')=\mathrm{r}(A\,|\,\beta)=\mathrm{r}(A)+1=\mathrm{r}(\widetilde{B})$. 因此, 方程组(1.6)有解.

命题 1.53

设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵, 求证: 必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵 B, 使得 $AB=O$.

证明 考虑线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$, 它有 $n-r$ 个基础解系, 不妨设为 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$. 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$, 则 $AB=(A\beta_1,\cdots,A\beta_{n-r})=O$, 结论得证.

例题 1.29 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} (m<n),$$

已知 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\beta_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})'(1\leq i\leq n-m)$, 试求齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j=0(i=1,2,\cdots,n-m)$$

的基础解系.

解 令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m})$, 则 $AB=O, B'A'=O$. 因为 $Ax=\mathbf{0}$ 有 $n-m$ 个基础解系, 所以 A 的秩为 m. 又由于 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B)=n-m$, 因此 $B'y=\mathbf{0}$ 的基础解系有 m 个. 故 $B'y=\mathbf{0}$ 的基础解系为 A' 的全部列向量, 即 A 的所有行向量.

命题 1.54

设 V_0 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维列向量空间的真子空间, 求证: 必存在矩阵 A, 使得 V_0 是 n 元齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解空间.

证明 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是子空间 V_0 的一组基. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$, 这是一个 $n\times r$ 矩阵. 考虑齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 r, 故其基础解系含 $n-r$ 个向量, 记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r})'$, 这是个 $(n-r)\times n$ 矩阵且秩为 $n-r$. 由 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$, 其解空间就是 V_0.

注 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是子空间 V_0 的一组基. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$, 这是一个 $n\times r$ 矩阵. 也可以由命题 1.53直接得到存在矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$, 其解空间就是 V_0..

例题 1.30 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个基础解系. 求证: 必存在 $n-r$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r})\boldsymbol{P}.$$

证明 设 U 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 是 U 的两组基. 令 $\boldsymbol{P}$ 是这两组基之间的过渡矩阵, 则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r})\boldsymbol{P}.$$

定理 1.14

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵,$\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p),\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p)$ 为对应的列分块. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组. 注意到矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{\beta}_i(1\le i\le p)$ 都有解. 因此, 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解, 则每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 从而是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的线性组合, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ 的列向量的极大无关组, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})=r$. 反之, 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})=r$, 则由命题 1.10可知,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ 的列向量的极大无关组, 于是每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解.

命题 1.55

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{\beta}_i(1\le i\le p)$ 都有解. 从而每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合.

证明 证明是显然的.

命题 1.56

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵, 证明: 存在 $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

证明 必要性由秩的不等式 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 即得.

充分性由秩的不等式可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\le\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}\,|\,\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{I}_n))\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}\,|\,\boldsymbol{B})$. 于是由定理 1.14可知, 矩阵方程 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}$ 有解. 即存在 $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

1.8.2 线性方程组的公共解

对两个非齐次线性方程组, 若只已知它们的通解, 而不知道方程组本身, 要求它们的公共解, 我们可以这样来做: 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}_2$ 是两个含 n 个未知数的非齐次线性方程组. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 有特解 $\boldsymbol{\gamma}$ 且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$. 方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}_2$ 有特解 $\boldsymbol{\delta}$ 且 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s}$.

方法一: 假设它们的公共解为 $\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 则 $\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因此可以表示为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s}$ 的线性组合. 于是矩阵 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-s},\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\delta})$ 的秩等于 $n-s$. 由此可以求出 $t_1,\cdots,t_{n-r}$, 从而求出公共解.

方法二:假设它们的公共解为 $\boldsymbol{\zeta}$, 则

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{\delta}+(-u_1)\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+(-u_{n-s})\boldsymbol{\xi}_{n-s}.$$

要求公共解 ζ 等价于求解下列关于未定元 $t_1,\cdots,t_{n-r};u_1,\cdots,u_{n-s}$ 的线性方程组:

$$t_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+u_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+u_{n-s}\boldsymbol{\xi}_{n-s}=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma}.$$

例题 1.31 设有两个非齐次线性方程组 (I), (II), 它们的通解分别为

$$\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2;\boldsymbol{\delta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}=(5,-3,0,0)',\boldsymbol{\eta}_1=(-6,5,1,0)',\boldsymbol{\eta}_2=(-5,4,0,1)';\boldsymbol{\delta}=(-11,3,0,0)',\boldsymbol{\xi}_1=(8,-1,1,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(10,-2,0,1)'$. 求这两个方程组的公共解.

证明 解法一: 设公共解为

$$\boldsymbol{\gamma}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}5-6t_1-5t_2\\-3+5t_1+4t_2\\t_1\\t_2\end{pmatrix}.$$

注意矩阵 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\delta}+t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2)$ 的秩等于 2, 对此矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}8&10&16-6t_1-5t_2\\-1&-2&-6+5t_1+4t_2\\1&0&t_1\\0&1&t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\8&10&16-6t_1-5t_2\\-1&-2&-6+5t_1+4t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\0&0&16-14t_1-15t_2\\0&0&-6+6t_1+6t_2\end{pmatrix}$$

可得关于 t_1,t_2 的方程组

$$\begin{cases}14t_1+15t_2=16,\\6t_1+6t_2=6.\end{cases}$$

解得 $t_1=-1,t_2=2$, 所以公共解为 (只有一个向量)$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1,2)'$.

解法二: 求公共解等价于求解下列线性方程组:

$$t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2+u_1\boldsymbol{\xi}_1+u_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma}.$$

对其增广矩阵实施初等行变换, 可得

$$\begin{pmatrix}-6&-5&8&10&-16\\5&4&-1&-2&6\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

故 (t_1,t_2,u_1,u_2) 只有唯一解 $(-1,2,1,-2)$. 因此, 公共解为 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,2)'$.

例题 1.32 设有非齐次线性方程组 (I):

$$\begin{cases}7x_1-6x_2+3x_3=b,\\8x_1-9x_2+ax_4=7.\end{cases}$$

又已知方程组 (II) 的通解为

$$(1,1,1,0)'+t_1(1,0,-1,0)'+t_2(2,3,0,1)'.$$

若这两个方程组有无穷多组公共解, 求出 a,b 的值并求出公共解.

证明 将 (II) 的通解写为 $(1+t_1+2t_2,1+3t_2,-t_1,t_2)'$, 代入方程组 (I) 化简得到

$$\begin{cases}4t_1-4t_2=b-1,\\8t_1+(a-11)t_2=8.\end{cases}$$

要使这两个方程组有无穷多组公共解,t_1,t_2 必须有无穷多组解, 于是上面方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都应该等于 1, 从而 $a=3,b=5$. 解出方程组得到 $t_1=t_2+1$, 因此方程组 (I), (II) 的公共解为

$$(1+t_1+2t_2,1+3t_2,-t_1,t_2)'=(2,1,-1,0)'+t_2(3,3,-1,1)',$$

其中 t_2 为任意数.

1.8.3 在解析几何上的应用

命题 1.57

求平面上 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 位于同一条直线上的充要条件.

证明 充要条件为第一个点和其余点代表的向量之差属于一个一维子空间, 即 $(x_i - x_1, y_i - y_1)$ 都成比例. 写成矩阵形式为

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \cdots & y_n - y_1 \end{pmatrix} \le 1,$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \le 2.$$

命题 1.58

求三维实空间中 4 点 $(x_i, y_i, z_i)(1 \le i \le 4)$ 共面的充要条件.

证明 设 4 点的向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$, 则 4 点共面的充要条件是: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 的秩不超过 2. 不难将此写成矩阵形式:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \le 2,$$

或

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \le 3.$$

例题 1.33 证明: 通过平面内不在一条直线上的 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的圆方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 圆方程可设为

$$u_1(x^2 + y^2) + u_2 x + u_3 y + u_4 = 0,$$

于是得到未知数 u_1, u_2, u_3, u_4 的方程组为

$$\begin{cases} (x_1^2 + y_1^2)u_1 + x_1 u_2 + y_1 u_3 + u_4 = 0, \\ (x_2^2 + y_2^2)u_1 + x_2 u_2 + y_2 u_3 + u_4 = 0, \\ (x_3^2 + y_3^2)u_1 + x_3 u_2 + y_3 u_3 + u_4 = 0. \end{cases}$$

上述方程组加上原方程组成一个含 4 个未知数、4 个方程式的齐次线性方程组, 它有非零解的充要条件是系数行

列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由命题 1.57可知 3 点不在一条直线上意味着

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故圆方程不退化.

命题 1.59

求平面上不在一条直线上的 4 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 位于同一个圆上的充要条件.

证明 由例题 1.33可得充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

例题 1.34 已知平面上两条不同的二次曲线 $a_ix^2 + b_ixy + c_iy^2 + d_ix + e_iy + f_i = 0(i = 1,2)$ 交于 4 个不同的点 $(x_i, y_i)(1 \le i \le 4)$. 求证: 过这 4 个点的二次曲线均可写为如下形状:

$$\lambda_1(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1) + \lambda_2(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0.$$

证明 显然上述曲线过这 4 个交点. 现设 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 是过这 4 个交点的二次曲线, 则有

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0, \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f = 0, \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f = 0, \\ ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + ey_4 + f = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

视 a, b, c, d, e, f 为未知数, 则线性方程组 (1.7) 有线性无关的解 $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)', (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2)'$. 如果能证明方程组 (1.7) 的系数矩阵的秩等于 4, 则这两个解就构成了基础解系, 从而即得结论.

容易验证 4 个交点中的任意 3 个点都不共线, 而且经过坐标轴适当的旋转, 可以假设这 4 个交点的横坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相同. 用反证法证明结论, 设方程组 (1.7) 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4. 由任意 3 个交点不共线以及命题 1.57知,$(x_1, x_2, x_3, x_4)', (y_1, y_2, y_3, y_4)', (1, 1, 1, 1)'$ 线性无关, 从而它们是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组, 于是 $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)'$ 是它们的线性组合, 故可设 $x_i^2 = rx_i + sy_i + t(1 \le i \le 4)$, 其中 r, s, t 是实数. 由于 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相同, 故 $s \neq 0$, 于是 $y_i = \frac{1}{s}x_i^2 - \frac{r}{s}x_i - \frac{t}{s}(1 \le i \le 4)$. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列、第四列和第六列构成的四阶行列式 $|\boldsymbol{B}|$, 利用 Vander - monde 行列式容易算出 $|\boldsymbol{B}| = -\frac{1}{s}\prod\limits_{1 \le i < j \le 4}(x_i - x_j) \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 4, 这与假设矛盾. 因此方程组 (1.7) 的系数矩阵的秩只能等于 4.