

## 0.1 集合的基数(势)

### 定义 0.1 (集合的对等)

设  $A, B$  为非空集, 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则称  $A$  与  $B$  对等, 记为  $A \sim B$ . 规定  $\emptyset \sim \emptyset$ .



**笔记**  $A$  与  $B$  对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

### 定理 0.1

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

- (1) (反身性)  $A \sim A$ ;
- (2) (对称性) 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$ ;
- (3) (传递性) 若  $A \sim B, B \sim C$ , 则  $A \sim C$ .

**证明** 证明是显然的.

□

### 命题 0.1

- (1) 设  $A, B, C, D$  都是非空集合, 若  $A \sim C, B \sim D$ , 则  $A \times B \sim C \times D$ .
- (2) 设  $A_i, B_i$  都是非空集合, 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 若  $A_i \sim B_i$ , 则  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ .

◆

**证明**

- (1) 由  $A \sim C, B \sim D$  可知, 存在双射  $f : A \rightarrow C$  和  $g : B \rightarrow D$ . 于是令

$$\varphi : A \times B \rightarrow C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对  $\forall (a, b) \in A \times B$ , 由  $f(a) \in C, g(b) \in D$  可知  $(f(a), g(b)) \in C \times D$ . 故  $\varphi$  是良定义的. 由  $f, g$  都是双射易知  $\varphi$  也是双射. 故  $A \times B \sim C \times D$ .

- (2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

**例题 0.1** 自然数集  $\mathbb{N} \sim$  正偶数集  $\sim$  正奇数集  $\sim$  整数集  $\mathbb{Z}$ .

**证明** 正偶数集  $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ; 正奇数集  $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ ;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

**例题 0.2**  $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$ .

**证明**  $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$ .

□

**例题 0.3**  $\{\text{去掉一点的圆周}\} \sim \mathbb{R}$ .

**笔记** 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

**证明** 如图 1, 设圆周为  $C$ , 从除去的点  $P$  作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切(不过点  $P$ )的直线表示实轴  $\mathbb{R}$ . 对于  $C \setminus \{P\}$  上的每一点  $c$ , 从点  $P$  作过点  $c$  的直线必与实轴相交于某点, 记为  $x$ . 建立一一对应:  $s : \mathbb{R} \rightarrow C \setminus \{P\}$  为  $s(x) = c$ . (点  $P$  对应  $\infty$ )

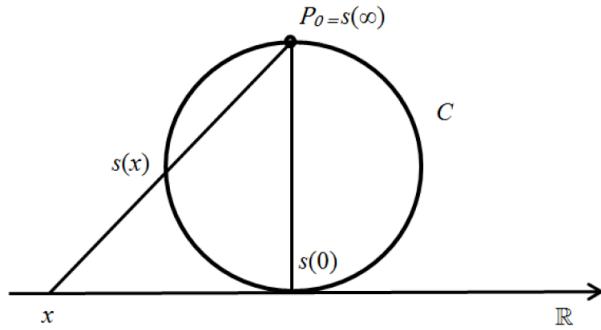


图 1：去掉一点的圆周与实轴对等

□

**引理 0.1 (映射分解定理)**

设  $A, B$  为非空集, 若  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ , 则  $A$  与  $B$  存在如下分解:

- (i)  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ ;
- (ii)  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ;
- (iii)  $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$ .

♡

**证明** 作集族

$$\Gamma = \{E \subseteq A : E \cap g(B \setminus f(E)) = \emptyset\}.$$

令  $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$ , 则  $A_1 \in \Gamma$ . 实际上, 对任意的  $E \in \Gamma$ , 都有  $E \subseteq A_1$ , 再由  $E \cap g(B \setminus f(E)) = \emptyset$  知

$$E \cap g(B \setminus f(A_1)) = \emptyset$$

从而

$$A_1 \cap g(B \setminus f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B \setminus f(E))] = \emptyset$$

因此,  $A_1$  是  $A$  中隔离集, 且是  $\Gamma$  中的最大元.

现在令  $B_1 = f(A_1), B_2 = B \setminus B_1, A_2 = g(B_2)$ , 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B \setminus f(A_1)) = \emptyset$$

下面只需验证  $A_1 \cup A_2 = A$ .

若不然, 则存在  $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$ . 令  $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$ , 由于  $B_1 = f(A_1) \subseteq f(A_0)$ , 故

$$B \setminus f(A_0) \subseteq B \setminus B_1 = B_2$$

从而

$$g(B \setminus f(A_0)) \subseteq g(B_2) = A_2$$

再由  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  以及  $x_0 \notin A_2$  知

$$A_1 \cap g(B \setminus f(A_0)) = \emptyset, \quad x_0 \notin g(B \setminus f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B \setminus f(A_0)) = \emptyset$$

故  $A_0 \in \Gamma$ . 这与  $A_1$  是  $\Gamma$  中的最大元矛盾.

□

**定义 0.2 (集合的基数(势))**

设  $A, B$  为两个集合, 若  $A \sim B$ , 则称  $A$  与  $B$  的基数或势相同, 记为  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

**笔记** 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

**定理 0.2**

- (1) 自反性:  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (2) 对称性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ .
- (3) 传递性: 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ .

**定义 0.3**

对于集合  $A, B$ , 若有  $B_0 \subseteq B, A \sim B_0$ , 则称  $A$  的基数小于等于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ .  
若  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$  且  $A$  与  $B$  不对等, 则称  $A$  的基数小于  $B$  的基数, 记作  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ .  
同理可定义  $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$  和  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ .

**命题 0.2 (映射与基数之间的关系)**

- (1) 若存在从  $A$  到  $B$  的单射, 则  $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ ;
- (2) 若存在从  $A$  到  $B$  的满射, 则  $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$ ;
- (3) 若存在从  $A$  到  $B$  的一一映射, 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .



**证明**

- (1)
- (2)
- (3)

**定理 0.3 (Bernstein 定理)**

Bernstein 定理的两个等价形式:

- (1) 若  $A$  与  $B$  的某子集对等,  $B$  与  $A$  的某子集对等, 则  $A \sim B$ .
- (2) 若集合  $A, B$  满足  $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .



**证明** 由题设存在单射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ , 利用映射分解定理可得到  $A$  与  $B$  的分解

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2 \\ f(A_1) &= B_1, \quad g(B_2) = A_2 \end{aligned}$$

其中,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . 注意到  $f: A_1 \rightarrow B_1, g^{-1}: A_2 \rightarrow B_2$  是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则  $F: A \rightarrow B$  是一一映射, 从而  $A \sim B$ . 故 (1) 得证. 再由定义 0.2 和定义 0.3 可知 (2)  $\Leftrightarrow$  (1).



**例题 0.4**  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

**证明** 由例题 0.2 可知,  $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ ; 又  $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . 由 Bernstein 定理 (1) 可知,  $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$ .

□

**定理 0.4**

对于集合  $A, B, \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  中的任意两个不会同时成立.

♡

**证明** 由**定义 0.3**可知, 若  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 则  $A$  与  $B$  对等, 另外两个不会成立; 假设  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$  与  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$  同时成立, 则存在  $B_0 \subseteq B, A_0 \subseteq A$ , 使得  $A \sim B_0, B \sim A_0$ . 使用**Bernstein 定理 (1)**得出  $A \subseteq B$ , 进而  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ , 显然矛盾, 证毕.

□

**定义 0.4 (有限集与无限集)**

设  $A$  是一个非空集合, 若存在自然数  $n$ , 使得  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ , 则称  $A$  为**有限集**, 并记  $\overline{\overline{A}} = n$  或  $|A| = n$ . 若  $A$  不是有限集, 则称  $A$  为**无限集**. 特别地, 规定  $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$ .

♣

**笔记** 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

**命题 0.3**

设  $A$  为有限集且  $|A| = n$ , 若  $A_1 \subseteq A$  且  $|A_1| = n$ , 则  $A_1 = A$ .

♦

**证明**

□

**定理 0.5**

设  $A$  是非空集合, 则

- (1)  $A$  是有限集的充要条件是  $A$  不与其任何真子集对等.
- (2)  $A$  是无限集的充要条件是  $A$  与其某个真子集对等.

♡

**笔记** 这就是有限集与无限集的本质区别.

**证明**

(1) **必要性:** 设  $\overline{\overline{A}} = n$ , 用数学归纳法证明,  $n = 1$ , 显然. 假设  $n = k$  时, 结论成立.

当  $n = k + 1$  时, 若存在  $A$  的某个真子集  $A_0$  使得  $A \sim A_0$ , 则存在一一映射  $\varphi : A \rightarrow A_0$ . 下面分两种情况:

(i)  $\exists a \in A$ , 使得  $\varphi(a) = a$ .

令  $A_1 = A \setminus \{a\}, A_2 = A_0 \setminus \{a\}$ , 则  $A_2$  是  $A_1$  的真子集,  $\overline{\overline{A_1}} = k$ . 而  $\varphi|_{A_1}$  是  $A_1$  到  $A_2$  的一一映射, 故  $A_1 \sim A_2$ . 这与假设矛盾.

(ii)  $\forall a \in A$ , 都有  $\varphi(a) \neq a$ .

$A_0$  是  $A$  的真子集, 则存在  $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$ . 令

$$A_3 = A \setminus \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 \setminus \{\varphi(x_0)\}$$

注意到  $x_0 \notin A_0$  以及  $A_0$  是  $A$  的真子集, 则  $A_4$  是  $A_3$  的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subseteq A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故  $\varphi(x_0) \in A \setminus \{x_0\} = A_3$ , 而  $\varphi(x_0) \notin A_0 \setminus \{\varphi(x_0)\} = A_4$ . 从而  $A_4$  是  $A_3$  的真子集, 于是  $\overline{\overline{A_3}} = k, \varphi|_{A_3}$  是  $A_3$  到  $A_4$  的一一映射, 故  $A_3 \sim A_4$ . 这与假设矛盾.

**充分性:** 设  $A$  不与其任何真子集对等, 假设  $A$  是无限集, 则与由(2)的必要性矛盾! 因此  $A$  不是无限集, 故  $A$  是有限集.

(2) **证法一: 必要性:** 设  $A$  是无限集. 先证明在任一无限集  $A$  中, 一定能取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ . 事实上, 在  $A$  中任取一个元素, 记为  $a_1$ . 因为  $A$  是无限集, 集  $A \setminus \{a_1\}$  显然不空, 这时再从集  $A \setminus \{a_1\}$  取一个元素  $a_2$ , 同样,  $A \setminus \{a_1, a_2\}$  决不空. 可以继续做下去, 将从  $A$  中取出一列互不相同的元素  $a_1, a_2, \dots$ , 记余集为

$\hat{A} = A \setminus \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ . 在  $A$  中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \dots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作  $A$  与  $\tilde{A}$  之间的映射  $\varphi$ :

$$\varphi(a_i) = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然,  $\varphi$  是  $A$  到  $\tilde{A}$  上的一一对应, 证毕.

**充分性:** 设  $A$  与其某个真子集对等, 假设  $A$  是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此  $A$  不是有限集. 故  $A$  一定是无限集.

**证法二:** 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取  $A$  中一个非空有限子集  $B$ , 则由定理????立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{(A \setminus B) \cup B}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故  $A \sim (A \setminus B)$ .

□