

0.1 反常积分敛散性判别

定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$ 使得任意 $x_1, x_2 > A$ 都有 $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$.

定理 0.2 (A-D 判别法)

设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积,

1. Abel 判别法: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

2. Dirichlet 判别法: 若 $\int_a^x f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例题 0.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中非负且递减, 证明: $\int_0^{+\infty} f(x)dx, \int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 同敛散性.

证明 (i) 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx < \infty$, 则由条件可知

$$f(x) \sin^2 x \leq f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$.

(ii) 若 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$, 则由 f 非负递减, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq a > 0$, 则存在 $M > 0$, 使得

$$f(x) \sin^2 x > \frac{a}{2} \sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \quad (1)$$

又因为

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(b - \frac{\sin 2b}{2} \right),$$

而上式右边极限不存在, 所以 $\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$ 发散. 从而结合 (1) 式, 由比较判别法可知 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 发散, 矛盾!

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

注意到

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty.$$

即 $\int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty$. 考虑 $\int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx$, 注意到

$$\int_0^C \cos 2x dx = \frac{\sin 2C}{2} < 1, \quad \forall C > 0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知 $\int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty$. 因此

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty.$$

(iii) 当 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 或 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 发散时, 实际上, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 或 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证. \square

例题 0.2 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上非负连续, 对任意正整数 k 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq 1$, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq 1$.

注 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

证明 由条件可得, 对 $\forall A > 0$, 我们有

$$1 \geq \int_{-A}^A e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \geq e^{-\frac{1}{k}} \int_{-A}^A f(x) dx. \Rightarrow \int_{-A}^A f(x) dx \leq e^{\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则 $\int_{-A}^A f(x) dx \leq 1, \forall A > 0$. 于是再令 $A \rightarrow +\infty$, 可得 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq 1$.

实际上再由单调有界可知 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ 收敛. □

例题 0.3 对实数 a , 讨论 $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

证明 先讨论 $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性. 注意到

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^1 = \tan 1 < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

故 $\forall a \in \mathbb{R}$, 都有 $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 收敛. 再讨论 $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

(i) 当 $a \leq 2$ 时,

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = +\infty.$$

(ii) 当 $a > 2$ 时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x + n\pi}{\cos^2 x + (x + n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

注意到对 $\forall \lambda > 0$, 我们都有

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \lambda \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(2)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

于是

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \int_{\pi}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

从而当 $\frac{a}{2}-1 \leq 1$ 时, 即 $2 < a \leq 4$, $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 发散; 当 $\frac{a}{2}-1 > 1$, 即 $a > 4$ 时, $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 收敛.

综上, 当 $a > 4$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 收敛; 当 $a \leq 4$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 发散. □

例题 0.4 对正整数 n , 讨论 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

证明 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} (x + k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

又注意到

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \geq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} e^{-x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \frac{4}{\pi^2} x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} dx \sim \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

故 $\int_0^\pi e^{-\lambda \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda \rightarrow +\infty$, 其中 C 为某一常数. 因此

$$\int_0^\pi e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$\int_0^\pi e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

又因为

$$\int_0^\pi e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^\pi e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx,$$

所以 $\int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C_1}{k^6}, k \rightarrow +\infty$, 其中 C_1 为某一常数. 于是结合(3)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^\pi (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

其中 C_2 为某一常数. 因此

$$\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \sim \sum_{k=1}^\infty C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

故当 $n < 5$ 时, $\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 收敛; 当 $n \geq 5$ 时, $\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 发散. 又因为

$$\int_0^\pi x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \leq \pi^n,$$

所以 $\int_0^\pi x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都收敛. 从而由

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^\pi x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx + \int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx,$$

可知当 $n < 5$ 时, $\int_0^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 收敛; 当 $n \geq 5$ 时, $\int_0^\infty x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 发散. □

引理 0.1

(1) $\cos^{2n+1} x$ 可以写成 $\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x$ 的线性组合, 即 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x)$, 也即 $\cos^{2n+1} x = \sum_{k=0}^n a_k \cos(2k+1)x$, 其中 $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n$.

$$(2) \cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

证明 (1) 利用数学归纳法, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$\begin{aligned} \cos^{2n+1} x &= \cos^2 x \cdot \cos^{2n-1} x = \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos 2x \cos(2k+1)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k [\cos(2k+3)x + \cos(2k-1)x] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2} a_0 [\cos 3x + \cos(-x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2} a_0 [\cos 3x + \cos x]. \end{aligned}$$

故 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1+t^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k t^{2k}$$

令 $t = e^{ix}$, 则

$$\begin{aligned} (1+e^{2ix})^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \Rightarrow 2^{2n} \left(\frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2e^{-ix}} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \Rightarrow 2^{2n} \left(\frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \right)^{2n} = e^{-2inx} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \\ &\Rightarrow 2^{2n} \cos^{2n} x = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2i(k-n)x} = \sum_{k=0}^{n-1} [C_{2n}^k e^{2i(k-n)x} + C_{2n}^{2n-k} e^{2i((2n-k)-n)x}] + C_{2n}^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k (e^{2i(k-n)x} + e^{2i(n-k)x}) + C_{2n}^n \\ &\Rightarrow 2^{2n} \cos^{2n} x = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \left(\frac{e^{2i(k-n)x} + e^{2i(n-k)x}}{2} \right) + C_{2n}^n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + C_{2n}^n \\ &\Rightarrow \cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \end{aligned}$$

□

例题 0.5 设 p, q 为正整数, 求反常积分 $I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 收敛的充要条件.

证明 因为当 $p = q$ 时, 积分显然收敛, 所以只需考虑 $p \neq q$ 的情形. 由 $I(q, p) = -I(p, q)$ 可知, 可以不妨设 $p > q$, 否则用 $I(q, p) = -I(p, q)$ 代替 $I(p, q)$ 即可

先讨论 $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$-\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2, \quad \forall x \in [0, \delta].$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_0^\delta \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_\delta^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx \\ &\leq \int_0^\delta \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2)^p - (1 - \frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2)^q}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\ &\leq \int_0^\delta \frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2} x^2 + (p+q)C_p^2 x^4}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\ &= \frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4} \delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4} \delta + \frac{2}{\delta}(1 - \delta). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得 $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx \leq \frac{q-p}{4} \delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4} \delta + \frac{2}{\delta}(1-\delta)$. 故对 $\forall p > q$ 且 $p, q \in \mathbb{N}$, 都有 $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 收敛.

再讨论 $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 的敛散性.

(i) 当 p, q 都是奇数时, 由引理 0.1 可知

$$\begin{aligned} \cos^p x &= \sum_{k=1}^p p_k \cos kx, \quad \text{其中 } p_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p. \\ \cos^q x &= \sum_{k=1}^q q_k \cos kx, \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

从而此时

$$\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{\sum_{k=1}^p p_k \cos kx - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx$$

$$= \sum_{k=1}^q (p_k - q_k) \int_1^{\infty} \frac{\cos kx}{x} dx + \sum_{k=q+1}^p p_k \int_1^{\infty} \frac{\cos kx}{x} dx.$$

注意到对 $\forall k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\int_1^x \cos kt dt = \frac{\sin kx - \sin k}{k} < 2, \quad \forall x > 1.$$

并且 $\frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^{\infty} \frac{\cos kx}{x} dx (k \in \mathbb{N})$ 都收敛. 因此再结合(??)式可知, $\int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 收敛.

(ii) 当 p, q 中至少有一个是偶数时, 不妨设 p 是偶数 q 不是偶数, 则由引理 0.1 可知

$$\cos^p x = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}.$$

$$\cos^q x = \sum_{k=1}^q q_k \cos kx \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x} dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

由于 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散, 故此时 $\int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 也发散.

综上, 由

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx.$$

可知当 $p = q$ 或 p, q 均为奇数时, $\int_0^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$ 收敛, 其余情形均发散. □

例题 0.6 对实数 $p \neq 0$, 讨论 $I = \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx$ 的敛散性.

证明 对 I 进行积分换元可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx \stackrel{u=\frac{1}{1-x}}{=} \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{u^2} du \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} du = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du. \end{aligned} \quad (4)$$

(i) 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f(u) = \left[\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}\right]^p = \left(2 - \frac{1}{u}\right) u^{2p-1}$, 则显然有 $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ 且 $f(u)$ 递增. 于是

$\frac{1}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} = \frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A \cos x dx$ 关于 A 有界, 所以结合(4)式, 再由

Dirichlet 判别法可知 I 收敛.

(ii) 当 $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时, 若 $p = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 2$; 若 $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = +\infty$. 因

此对 $\forall p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 都存在 $K > 0$, 使得

$$\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} \geq 1, \quad \forall u > K.$$

于是对 $\forall k \in \mathbb{N} \cap (K, +\infty)$, 都有

$$\left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du \right| \geq \left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \cos u du \right| = 1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知, $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du$ 发散.

(iii) 当 $p < 0$ 时, 显然有 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 0$. 令 $g(u) = \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}$, 则

$$g'(u) = \frac{2}{p} u^{-\frac{1}{p}} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1} + \left(2 - \frac{1}{u}\right) \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{1-\frac{1}{p}} > 0, \forall u \in [1, +\infty).$$

因此 $g(u)$ 单调递增, 于是 $\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{g(u)}$ 单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A \cos x dx$ 关于 A 有界, 所以结合(??)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛. \square

例题 0.7 对实数 p , 讨论反常积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 的敛散性.

注 令 $u = x + \frac{1}{x}$, 则

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \int_u^{\infty} \frac{\sin u}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right) du.$$

显然 $\int_0^A \sin u du$ 关于 A 有界. 再证明 $\frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p}$ 单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$

收敛. 再同理讨论 $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

证明 显然 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 有两个奇点 $x = 0, +\infty$.

(1) 当 $p \leq 0$ 时, 考虑区间 $\left[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$, 则

$$x + \frac{1}{x} \in \left[2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当 $n > 10$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) > 0. \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 发散. 故此时 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 发散.

(2) 当 $p > 0$ 时, 先考虑 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$.

(i) 若 $p > 1$, 则

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

因此 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p \in (0, 1]$, 则

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \int_1^{\infty} \sin x \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \cos x \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx. \quad (5)$$

显然 $\int_1^A \cos x dx$ 关于 A 有界, 并且 $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx$ 收敛. 令 $f(u) = u^p \cos u$, 则当 $u \in (0, \frac{4p}{\pi})$ 时, 有

$$f'(u) = pu^{p-1} \cos u - u^p \sin u = u^{p-1} \cos u (p - u \tan u) > 0.$$

于是 $f(u)$ 在 $(0, \frac{4p}{\pi})$ 上单调递增, 从而 $\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} = f(\frac{1}{x})$ 在 $(\frac{\pi}{4p}, +\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然 $\int_{\frac{\pi}{4p}}^A \sin x dx$ 关于 A 有界, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_{\frac{\pi}{4p}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$ 收敛, 又 $\frac{\pi}{4p} < 1$, 故此时 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$ 收敛. 因此再由 (5) 式可知 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 收敛.

注意到

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^p} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos(2x + \frac{2}{x})}{x^p} dx.$$

显然 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散. 故此时 $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑 $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$.

(i) 若 $p \in (0, 1)$, 则

$$\int_0^1 \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^p} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

故此时 $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p \geq 1$, 则

$$\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{\infty} \frac{\sin(t + \frac{1}{t})}{t^{2-p}} dt.$$

此时 $2-p \leq 1$. 于是当 $2-p \leq 0$ 即 $p \geq 2$ 时, 由 (1) 可知 $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 发散. 当 $2-p \in (0, 1]$ 即 $p \in [1, 2)$ 时,

由 (i) 可知 $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当 $p \leq 0$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 发散; 当 $p \in (0, 2)$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 条件收敛; 当 $p \geq 2$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 发散. \square

例题 0.8 判断广义积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx$ 的敛散性.

证明 (1) 由于 $e^{\cos x} \sin(2 \sin x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_0^{2\pi} e dx = 2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx &= \int_0^{2\pi[\frac{A}{2\pi}]} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx \\ &\leq 0 + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^{2\pi([\frac{A}{2\pi}] + 1)} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq 2\pi e, \forall A > 2\pi.$$

又显然有 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^\infty e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx$ 收敛.

(2) 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \frac{C}{n},$$

其中 C 为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计, C 需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{C}{n} = \infty.$$

故 $\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$ 发散. □