

## 0.1 惯性定理

### 0.1.1 实二次型

#### 定理 0.1 (实二次型的规范标准型)

设实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2,$$

这个实二次型对应的系数矩阵为  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 则  $A$  一定合同于下列对角阵:

$$\text{diag}\{1, \dots, 1; -1, \dots, -1; 0, \dots, 0\}, \quad (1)$$

其中有  $p$  个 1,  $q$  个 -1,  $n-r$  个零. 进而,  $f$  一定可作变量替换得到

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2. \quad (2)$$

我们将(2)式中的二次型称为  $f$  的**规范标准型**.



**证明** 由定理??, 任意一个实对称阵  $A$  必合同于一个对角阵:

$$C'AC = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0\},$$

其中  $d_i \neq 0 (i = 1, \dots, r)$ . 注意到  $C$  是可逆阵, 故  $r = r(C'AC) = r(A)$ , 即秩  $r$  是矩阵合同关系下的一个不变量. 于是我们不妨设实对称阵已具有下列对角阵的形状:

$$A = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0\}.$$

由初等合同变换不难知道, 任意调换  $A$  的主对角线上的元素得到的矩阵仍与  $A$  合同. 因此我们可把零放在一起, 把正项与负项放在一起, 即可设  $d_1 > 0, \dots, d_p > 0; d_{p+1} < 0, \dots, d_r < 0$ .  $A$  所代表的二次型为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2. \quad (3)$$

再对上述二次型作变量替换, 令

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{d_1}x_1, \dots, y_p = \sqrt{d_p}x_p; \\ y_{p+1} = \sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1}, \dots, y_r = \sqrt{-d_r}x_r; \\ y_j = x_j (j = r+1, \dots, n), \end{cases}$$

则(3)式变为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

这一事实等价于说  $A$  合同于下列对角阵:

$$\text{diag}\{1, \dots, 1; -1, \dots, -1; 0, \dots, 0\}.$$

其中有  $p$  个 1,  $q$  个 -1,  $n-r$  个零. □

#### 定义 0.1

设  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是一个实二次型, 若它能化为形如(2)式的形状, 则称  $r$  是该二次型的秩,  $p$  是它的**正惯性指数**,  $q = r - p$  是它的**负惯性指数**,  $s = p - q$  称为  $f$  的**符号差**.



**注** 显然, 若已知秩  $r$  与符号差  $s$ , 则  $p = \frac{1}{2}(r+s)$ ,  $q = \frac{1}{2}(r-s)$ . 事实上, 在  $p, q, r, s$  中只需知道其中两个数, 其余两个数也就知道了. 由于实对称阵与实二次型之间的等价关系, 我们将实二次型的秩、惯性指数及符号差也称为相应的实对称阵的秩、惯性指数及符号差.

**定理 0.2 (惯性定理)**

证明(2)式中的数  $p$  及  $q = r - p$  是两个合同不变量. 这等价于证明下面的结论.

设  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是一个  $n$  元实二次型, 且  $f$  可化为两个标准型:

$$\begin{aligned} c_1 y_1^2 + \dots + c_p y_p^2 - c_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - c_r y_r^2, \\ d_1 z_1^2 + \dots + d_k z_k^2 - d_{k+1} z_{k+1}^2 - \dots - d_r z_r^2, \end{aligned}$$

其中  $c_i > 0, d_i > 0$ , 则必有  $p = k$ .



**证明** 用反证法, 设  $p > k$ . 由前面的说明不妨设  $c_i$  及  $d_i$  均为 1, 因此

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_r^2. \quad (4)$$

又设

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{z},$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

于是  $\mathbf{z} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}$ . 令

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ z_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

因为  $p > k$ , 故齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \cdots + c_{kn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = 0 \end{cases}$$

必有非零解 ( $n$  个未知数,  $n - (p - k)$  个方程式). 令其中一个非零解为  $y_1 = a_1, \dots, y_p = a_p, y_{p+1} = 0, \dots, y_n = 0$ , 把这组解代入 (4) 式左边得到

$$a_1^2 + \dots + a_p^2 > 0.$$

但这时  $z_1 = \dots = z_k = 0$ , 故 (4) 式右边将小于等于零, 引出了矛盾. 同理可证  $p < k$  也不可能. □

**定理 0.3**

秩与符号差 (或正负惯性指数) 是实对称阵在合同关系下的全系不变量.



**证明** 由惯性定理知道, 秩  $r$  与符号差  $s$  是实对称阵合同关系的不变量. 反之, 若  $n$  阶实对称阵  $A, B$  的秩都为  $r$ , 符号差都是  $s$ , 则它们都合同于

$$\text{diag}\{1, \dots, 1; -1, \dots, -1; 0, \dots, 0\},$$

其中有  $p = \frac{1}{2}(r+s)$  个 1,  $q = \frac{1}{2}(r-s)$  个 -1 及  $n-r$  个零, 因此  $A$  与  $B$  合同. 对正负惯性指数的结论也同样成立.  $\square$

**0.1.2 复二次型****定理 0.4 (复二次型的规范标准型)**

设复二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2,$$

这个复二次型对应的系数矩阵为  $A$  是  $n$  阶复对称阵, 则  $A$  一定合同于下列对角阵:

$$\text{diag}\{1, \dots, 1; 0, \dots, 0\}, \quad (5)$$

其中有  $r$  个 1, 并且  $r = r(A)$ . 进而,  $f$  一定可作变量替换得到

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2. \quad (6)$$

我们将(6)式中的二次型称为  $f$  的**规范标准型**.



**证明** 因为复二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2$$

必可化为

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2,$$

其中  $z_i = \sqrt{d_i} x_i (i = 1, 2, \dots, r)$ ,  $z_j = x_j (j = r+1, \dots, n)$ . 所以结论得证. 故复对称阵的合同关系只有一个全系不变量, 那就是秩  $r$ .  $\square$