0.1 积分性态分析

例题 0.1 已知 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $F_1(a)=F_1(b)=0$. 再设 $F_2(x)=\int_a^x F_1(t)dt=\int_a^x\left[\int_a^t f(s)ds\right]dt$, 则 $F_2(a)=0$,$F_2'(x)=F_1(x)$,$F_2''(x)=F_1'(x)=f(x)$. 由条件可知

$$0=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xF_1'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xdF_1(x)=xF_1(x)\Big|_a^b-\int_a^b F_1(x)\mathrm{d}x=-F_2(b).$$

于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F_2'(\xi)=F_1(\xi)=0$. 从而再由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta_1\in(a,\xi)$,$\eta_2\in(\xi,b)$, 使得 $F_1'(\eta_1)=F_1'(\eta_2)=0$. 即 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$. □

例题 0.2 已知 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,k=0,1,2,\cdots,n.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 $n+1$ 个零点.

笔记 利用分部积分转换导数的技巧.

证明 令 $F(x)=\int_a^x\int_a^{x_n}\cdots\int_a^{x_3}\left[\int_a^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 则 $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n)}(a)=0$,$F^{(n+1)}(x)=f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $k\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&0=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=F^{(n)}(x)\Big|_a^b=F^{(n)}(b),\\
&0=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xF^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xdF^{(n)}(x)=xF^{(n)}(x)\Big|_a^b-\int_a^b F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=-F^{(n-1)}(b),\\
&\cdots\cdots\\
&0=\int_a^b x^nf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^nF^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^ndF^{(n)}(x)=x^nF^{(n)}(x)\Big|_a^b-n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=-n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=(-1)^n n!\int_a^b F\prime(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n n!F(b).
\end{aligned}$$

从而 $F(b)=F'(b)=\cdots=F^{(n)}(b)=0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi_1^1)=0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知存在 $\xi_1^2,\xi_2^2\in(a,b)$, 使得 $F''(\xi_1^2)=F''(\xi_2^2)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1},\xi_2^{n+1},\cdots,\xi_{n+1}^{n+1}\in(a,b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1})=F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1})=\cdots=F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1})=0$. 即 $f(\xi_1^{n+1})=f(\xi_2^{n+1})=\cdots=f(\xi_{n+1}^{n+1})=0$. □

例题 0.3 已知 $f(x)\in D^2[0,1]$, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6},\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=16$.

笔记 构造 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x)=f(x)-p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^kg(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^k[f(x)-p(x)]\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^kp(x)\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2.$$

待定 $p(x)=ax^2+bx+c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\frac{1}{6}=\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c,$$

$$0=\int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^3+bx^2+cx\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2},$$
$$\frac{1}{60}=\int_0^1 x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^4+bx^3+cx^2\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}.$$

解得:$a=8,b=-9,c=2$. 于是就得到 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$.

证明 令 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2.$$

再令 $G(x)=\int_0^x\left[\int_0^t\left(\int_0^s g(y)\mathrm{d}y\right)ds\right]dt$, 则 $G(0)=G'(0)=G''(0)=0,G'''(x)=g(x)$. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&0=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 G'''(x)\,\mathrm{d}x=G''(1),\\
&0=\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xG'''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xdG''(x)=xG''(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G''(x)\,\mathrm{d}x=-G'(1),\\
&0=\int_0^1 x^2g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2G'''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2dG''(x)=x^2G''(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 xG''(x)\,\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^1 xdG'(x)=2\int_0^1 G'(x)\,\mathrm{d}x-2xG'(x)\Big|_0^1=2G(1).
\end{aligned}$$

从而 $G(1)=G'(1)=G''(1)=0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1\in(0,1)$, 使得 $G'(\xi_1^1)=0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2,\xi_2^2\in(0,1)$, 使得 $G''(\xi_1^2)=G''(\xi_2^2)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3,\xi_2^3,\xi_3^3\in(0,1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3)=G'''(\xi_2^3)=G'''(\xi_3^3)=0$. 即 $g(\xi_1^3)=g(\xi_2^3)=g(\xi_3^3)=0$. 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g''(\xi)=0$. 即 $f''(\xi)=16$. □