0.1 一般可测函数的积分

0.1.1 积分的定义与初等性质

定义 0.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数．若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x, \quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分; 当上式右端两个积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**. 在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

♣

定理 0.1

若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上可积等价于 $|f(x)|$ 在 E 上可积, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由于等式

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立, 故知在 $f(x)$ 可测的条件下,$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.2

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.

(2) 若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 若 $E \in \mathscr{M}$, 且 $f(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(4) (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,$g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \leqslant g(x)$,$x \in E$($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**控制函数**), 则 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.

(5) (i) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(ii) 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{x \in E : |x| \geqslant N\}$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

♡

证明

(1) 不妨设 $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in E)$, 由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数, 故有

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E M \mathrm{d}x = Mm(E) < +\infty.$$

因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(2) 由 $f \in L(E)$ 及定理 0.1可知, 非负可测函数 $|f(x)|$ 在 E 上也可积. 从而由定理**??**可知,$|f(x)|$ 在 E 上几乎处处有限, 即

$$m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

故 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 因为 $|f(x)| = 0$,a. e.,$x \in E$, 且 $|f(x)|$ 非负可测, 所以由命题**??**可得

$$\left|\int_E f(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

故 $\int_E f(x) \mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 由非负可测函数的积分性质 (1) 可知

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x) \mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(E)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_e |f(x)| \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| \chi_e(x) \mathrm{d}x = \int_E |f(x) \chi_e(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(e)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(e)$.

(5) (i) 记 $E_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 则 $\{|f(x)|\chi_{E_N}(x)\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

由此可知

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E_N} |f(x)| \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x \xlongequal{\text{推论??}} \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

(ii) 由 $f \in L(E)$ 及非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \chi_{E_N}(x)| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_E(x) \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty.$$

因此 $f \cdot \chi_{E_N} \in L(\mathbf{R}^n)$. 又 $E_N \subset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 故由非负可测函数的积分性质 (3) 及 (i) 可得

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant N\}} f(x) \chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

□

定理 0.3 (积分的线性性质)

若 $f, g \in L(E)$,$C \in \mathbb{R}$, 则

(i) $\int_E Cf(x) \mathrm{d}x = C \int_E f(x) \mathrm{d}x$, 进而 $Cf \in L(E)$;

(ii) $f + g \in L(E)$ 且 $\int_E (f(x) + g(x)) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x + \int_E g(x) \mathrm{d}x$.

(iii) 若 $f \in L(E)$,$g(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 则 $f \cdot g \in L(E)$.

♡

证明 不妨假定 f, g 都是实值函数 (即处处有限). (i) 由公式

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \tag{1}$$

立即可知: 当 $C \geq 0$ 时,$(Cf)^+ = Cf^+$,$(Cf)^- = Cf^-$. 根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质, 可得

$$\int_E Cf(x) \mathrm{d}x = \int_E Cf^+(x) \mathrm{d}x - \int_E Cf^-(x) \mathrm{d}x$$

$$= C\left(\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $C=-1$ 时, 由(1)式可知 $(-f)^+ = f^-,(-f)^- = f^+$. 同理可得

$$\int_E (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $C<0$ 时, 由(1)式可知 $Cf(x) = -|C|f(x)$. 由上述结论可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E -|C|f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E |C|f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -|C|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_E |Cf(x)|\,\mathrm{d}x = |C|\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty, \forall C\in\mathbb{R}.$$

故 $Cf(x)\in L(E)$.

(ii) 首先, 由于有 $|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$, 故可知 $f+g\in L(E)$. 其次, 注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

进而

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f+g)^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为式中每项积分值都是有限的, 所以可移项且得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) 注意到

$$|f(x)\cdot g(x)| \le |f(x)|\cdot \sup_{x\in E}|g(x)|, \quad x\in E.$$

由 g 在 E 上有界, 故 $\sup\limits_{x\in E}|g(x)|\in\mathbb{R}$. 从而由 (i) 可得 $|f(x)|\cdot\sup\limits_{x\in E}|g(x)|\in L(E)$, 于是再由定理 0.2(4)(i)可知 $f\cdot g\in L(E)$.

□

推论 0.1

若 $f\in L(E)$, 且 $f(x)=g(x)$,a. e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 这个推论表明: **改变可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.**

证明 令 $E_1 = \{x\in E: f(x)\ne g(x)\}, E_2 = E\backslash E_1, m(E_1)=0$, 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E f^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_{E_1} f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_1} g^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} g^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E g^+(x)\,\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\,\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\,\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□