

## 0.1 由乘法交换性诱导的同时性质

### 命题 0.1 (矩阵乘法可交换的基本性质)

若两个矩阵或线性变换  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则有  $(AB)^m = A^m B^m$ ,  $f(A)g(B) = g(B)f(A)$  以及二项式定理

$$(A + B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} B + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + B^m$$

等成立, 其中  $m \geq 1$ ,  $f(x), g(x)$  为多项式.

特别地, 一个矩阵或线性变换  $A$  一定与其自身可交换, 从而也满足  $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 其中  $f(x), g(x)$  为多项式.

**证明** 证明是显然的. □

### 0.1.1 特征子空间互为不变子空间

#### 命题 0.2 (特征子空间互为不变子空间)

1. 设  $\varphi, \psi$  是复线性空间  $V$  上乘法可交换的线性变换, 即  $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 求证:  $\varphi$  的特征子空间是  $\psi$  的不变子空间,  $\psi$  的特征子空间是  $\varphi$  的不变子空间.
2. 若  $n$  阶复矩阵  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则  $A, B$  的特征子空间互为不变子空间.

**注** 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如,  $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 显然  $A, B$  乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上,  $B$  在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是  $\pm i$ ), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域  $\mathbb{F}$  上, 我们必须假设  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中.

**证明**

1. 由代数基本定理以及线性方程组的求解理论可知,  $n(n \geq 1)$  维复线性空间上的线性变换或  $n$  阶复矩阵至少有一个特征值和特征向量. 任取线性变换  $\varphi$  的一个特征值  $\lambda_0$ , 设  $V_0$  是特征值  $\lambda_0$  的特征子空间, 则对任意的  $\alpha \in V_0$ , 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即  $\psi(\alpha) \in V_0$ , 因此  $V_0$  是  $\psi$  的不变子空间. 同理可证  $\psi$  的特征子空间是  $\varphi$  的不变子空间.

2. □

#### 命题 0.3

设  $V$  为  $n$  维复线性空间,  $S$  是  $\mathcal{L}(V)$  的非空子集, 满足:  $S$  中的全体线性变换没有非平凡的公共不变子空间. 设线性变换  $\varphi$  与  $S$  中任一线性变换乘法均可交换, 证明:  $\varphi$  是纯量变换.

**证明** 任取  $\varphi$  的特征值  $\lambda_0$  及其特征子空间  $V_0$ . 任取  $\psi \in S$ , 则  $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 由命题 0.2 可知  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间, 从而是  $S$  中全体线性变换的公共不变子空间. 又  $V_0 \neq 0$  (特征向量均非零), 故  $V_0 = V$ , 从而  $\varphi = \lambda_0 I_V$  为纯量变换. □

## 0.1.2 有公共的特征向量

## 命题 0.4

1. 设  $\varphi, \psi$  是复线性空间  $V$  上乘法可交换的线性变换, 求证:  $\varphi, \psi$  至少有一个公共的 (复) 特征向量.
2. 若  $n$  阶复矩阵  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则  $A, B$  至少有一个公共的 (复) 特征向量.

**注** 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如,  $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 显然  $A, B$  乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上,  $B$  在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是  $\pm i$ ), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域  $\mathbb{F}$  上, 我们必须假设  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中.

**证明**

1. 任取  $\varphi$  的特征值  $\lambda_0$  及其特征子空间  $V_0$ , 由命题 0.2 可知,  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间. 将线性变换  $\psi$  限制在  $V_0$  上, 由于  $V_0$  是维数大于零的复线性空间, 故由命题 ?? 可知  $\psi|_{V_0}$  至少有一个特征值  $\mu_0$  及其特征向量  $\alpha \in V_0$ , 从而  $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$ , 于是  $\alpha$  就是  $\varphi, \psi$  的公共特征向量.
- 2.

□

## 命题 0.5

1. 设  $\varphi, \psi$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的乘法可交换的线性变换, 且  $\varphi, \psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $\varphi, \psi$  的特征子空间互为不变子空间, 并且  $\varphi, \psi$  至少有一个公共的特征向量.
2. 若数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A, B$  乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则  $A, B$  的特征子空间互为不变子空间, 并且  $A, B$  在  $\mathbb{F}^n$  中至少有一个公共的特征向量.

**证明**

1. 由线性方程组的求解理论可知, 若数域  $\mathbb{F}$  上的线性变换或  $\mathbb{F}$  上的矩阵在  $\mathbb{F}$  中有一个特征值, 则在  $\mathbb{F}$  上的线性空间或  $\mathbb{F}$  上的列向量空间中必存在对应的特征向量. 任取线性变换  $\varphi$  的一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ , 设  $V_0$  是特征值  $\lambda_0$  的特征子空间, 则对任意的  $\alpha \in V_0$ , 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即  $\psi(\alpha) \in V_0$ , 因此  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间. 取  $V_0$  的一组基并扩张为  $V$  的一组基, 则  $\psi$  在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  是  $\psi|_{V_0}$  在给定基下的表示矩阵, 于是  $|\lambda I_V - \psi| = |\lambda I - A| |\lambda I - B|$ . 因为  $\psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故  $A$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 于是  $\psi|_{V_0}$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中. 任取  $\psi|_{V_0}$  的一个特征值  $\mu_0 \in \mathbb{F}$  及其特征向量  $\alpha \in V_0$ , 则  $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$ , 于是  $\alpha$  就是  $\varphi, \psi$  的公共特征向量.

2.

□

## 0.1.3 可同时相似上三角化

## 命题 0.6 (矩阵的上三角化)

1. 设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $A$  在  $\mathbb{F}$  上可上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  是上三角矩阵.
2. 设数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是上三角矩阵.

**证明**

1. 对阶数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对  $n - 1$  阶矩阵结论成立, 现对  $n$  阶矩阵  $A$  进行证明. 设  $\lambda_1 \in \mathbb{F}$  是  $A$  的一个特征值, 则由线性方程组的求解理论可知, 存在特征向量  $e_1 \in \mathbb{F}^n$ , 使得  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ . 由基扩张定理, 可将  $e_1$  扩张为  $\mathbb{F}^n$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 于是

$$(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix},$$

其中  $A_1$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶矩阵. 令  $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 则  $P$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且由上式可得  $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ , 即  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ . 由此可得  $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I_{n-1} - A_1|$ , 又  $A$  的特征值全在  $\mathbb{F}$  中, 从而  $A_1$  的特征值也全在  $\mathbb{F}$  中, 故由归纳假设, 存在  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}A_1Q$  是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则  $R$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵.

2.

□

### 命题 0.7

1. 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 满足:  $AB = BA$  且  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $A, B$  在  $\mathbb{F}$  上可同时上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.
2. 设数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi, \psi$  乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是上三角矩阵.

### 证明

1. 对阶数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对  $n - 1$  阶矩阵结论成立, 现对  $n$  阶矩阵进行证明. 因为  $AB = BA$  且  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故由命题 0.5 可知,  $A, B$  有公共的特征向量  $e_1 \in \mathbb{F}^n$ , 不妨设

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_1 = \mu_1 e_1,$$

其中  $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{F}$  分别是  $A, B$  的特征值. 由基扩张定理, 可将  $e_1$  扩张为  $\mathbb{F}^n$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . 令  $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 则  $P$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 从而有

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \\ B(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow BP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $A_1, B_1$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶矩阵. 由  $AB = BA$  及 (1) 式可得到

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) &= P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 A_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而  $A_1 B_1 = B_1 A_1$ . 又由 (1) 式可得

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - A_1|, \quad |\lambda I_n - B| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - B_1|.$$

因此  $A_1, B_1$  的特征值也是  $A, B$  的特征值. 又由于  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故  $A_1, B_1$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中. 故由归纳假设, 存在  $\mathbb{F}$  上的  $n-1$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}A_1Q$  和  $Q^{-1}B_1Q$  都是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则  $R$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}, \\ R^{-1}BR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

都是上三角矩阵.


2.

□

### 命题 0.8 (一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化)

给定域  $\mathbb{F}$  和指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$  且两两可交换且特征值都属于  $\mathbb{F}$ , 则存在可逆矩阵  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是上三角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

 **笔记** 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵降阶. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法.

**注** 因为数量矩阵的特征子空间就是全空间, 将其限制在特征子空间上, 维数并未下降, 所以需要分类讨论.

**证明 Step 1** 若  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 都有  $A_\lambda$  是数量矩阵, 此时结论显然成立.

**Step 2** 任取一个非数量矩阵  $A_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 再任取  $A_1$  的一个特征子空间  $V_1$ , 则  $1 \leq \dim V_1 < n$ , 否则  $A_1$  就是纯量阵. 由命题 0.2 可知,  $V_1$  是  $A_\lambda$ -不变子空间,  $\forall \lambda \in \Lambda$ . 因此可考虑线性变换  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ . 下对矩阵阶数进行归纳证明.

当  $n=1$  时, 结论显然成立. 假设命题对小于等于  $n-1$  的情况都成立, 考虑  $n$  的情形.

注意到  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换, 故由归纳假设可知, 存在  $V_1$  的一组基, 使  $A_\lambda|_{V_1}$  在这组基下有上三角表示矩阵  $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ . 将这组基扩充为  $V$  的一组基, 于是在新的基下,  $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$  有表示矩阵  $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$ .

又由于  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换, 故对  $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ , 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda \tilde{A}_\mu & * \\ \tilde{C}_\lambda \tilde{C}_\mu & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\lambda & * \\ \tilde{C}_\mu \tilde{C}_\lambda & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即  $\tilde{A}_\lambda, \tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换. 从而由归纳假设可知, 对  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 存在可逆阵  $\tilde{P}_\lambda$ , 使得  $(\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$  是上三角阵.

取  $P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 则此时对  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 就有


$$P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix}.$$

而  $\tilde{A}_\lambda, (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$  都是上三角阵, 故  $P^{-1}A_\lambda P$  也是上三角阵. 因此由数学归纳法可知, 结论成立. □

### 命题 0.9 (一族两两可交换的复数 (实数) 域上的矩阵可同时酉 (正交) 上三角化)

1. 给定指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$  且两两可交换, 则存在酉矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 使得  $P^{-1}A_\lambda P$  是上三角矩阵,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

2. 给定指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$  且两两可交换且特征值都是实数. 则存在正交矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得  $P^{-1}A_\lambda P$  是上三角矩阵,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

 **笔记** 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵降阶. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法.

**注** 因为数量矩阵的特征子空间就是全空间, 将其限制在特征子空间上, 维数并未下降, 所以需要分类讨论.

**证明**

1. 设  $V = \mathbb{C}^n$  且  $A_\lambda$  是  $V$  上线性变换.

**Step 1** 若  $A_\lambda$  都是数量矩阵, 则结果已经成立.

**Step 2** 取某个非数量矩阵  $A_1$  和一个特征子空间  $V_1$  且  $1 \leq \dim V_1 < n$ . 由交换性知  $V_1$  是所有  $A_\lambda$  不变子空间, 因此  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当  $n=1$ , 命题显然成立, 假设命题对小于等于  $n-1$  都成立, 当  $n$  时, 由归纳假设,  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在  $V_1$  的一族标准正交基, 使得在这组基下  $A_\lambda|_{V_1}$  有上三角的表示矩阵  $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ . 将这组基扩充到  $\mathbb{C}^n$  使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下,  $A_\lambda$  有表示矩阵  $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$ . 由

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \mu, \lambda \in \Lambda.$$

知  $\tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$  也是两两可交换的矩阵. 因此存在酉矩阵  $\tilde{P}$ , 使得每一个  $(\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}$  都是上三角的. 然后我们取酉矩阵  $P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 就有  $P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & (\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P} \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \Lambda$  都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

2. 设  $V = \mathbb{R}^n$  且  $A_\lambda$  是  $V$  上线性变换.

**Step 1** 若  $A_\lambda$  都是数量矩阵, 则结果已经成立.

**Step 2** 取某个非数量矩阵  $A_1$  和一个特征子空间  $V_1$  且  $1 \leq \dim V_1 < n$ . 由交换性知  $V_1$  是所有  $A_\lambda$  不变子空间, 因此  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当  $n=1$ , 命题显然成立, 假设命题对小于等于  $n-1$  都成立, 当  $n$  时, 由归纳假设,  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在  $V_1$  的一族标准正交基, 使得在这组基下  $A_\lambda|_{V_1}$  有上三角的表示矩阵  $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ . 将这组基扩充到  $\mathbb{R}^n$  使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下,  $A_\lambda$  有表示矩阵  $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$ . 由

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}$$

知  $\tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$  也是两两可交换的矩阵. 因此存在正交矩阵  $\tilde{P}$ , 使得每一个  $(\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}$  都是上三角的. 然后我们取正交矩阵  $P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 就有  $P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & (\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P} \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \Lambda$  都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

□

## 0.1.4 可同时相似对角化

## 命题 0.10

1. 设  $\varphi, \psi$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 满足:  $\varphi\psi = \psi\varphi$  且  $\varphi, \psi$  都可对角化, 求证:  $\varphi, \psi$  可同时对角化, 即存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵.
2. 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 满足:  $AB = BA$  且  $A, B$  都在  $\mathbb{F}$  上可对角化, 则  $A, B$  在  $\mathbb{F}$  上可同时对角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  都是对角矩阵.

## 证明

1. 对空间维数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对维数小于  $n$  的线性空间结论成立, 现对  $n$  维线性空间进行证明. 设  $\varphi$  的全体不同特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ , 对应的特征子空间分别为  $V_1, \dots, V_s$ , 则由  $\varphi$  可对角化可知

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

若  $s = 1$ , 则  $\varphi = \lambda_1 I_V$  为纯量变换, 此时只要取  $V$  的一组基, 使得  $\psi$  在这组基下的表示矩阵为对角矩阵, 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为  $\lambda_1 I_n$ , 结论成立. 若  $s > 1$ , 则  $\dim V_i < n$ . 注意到  $\varphi\psi = \psi\varphi$  且  $\varphi, \psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 由命题 0.2 可知  $V_i$  都是  $\psi$ -不变子空间. 考虑线性变换的限制  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ : 它们乘法可交换, 且由可对角化线性变换的性质可知它们都可对角化, 故由归纳假设可知,  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$  可同时对角化, 即存在  $V_i$  的一组基, 使得  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵. 将  $V_i$  的基拼成  $V$  的一组基, 则  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵, 即  $\varphi, \psi$  可同时对角化.

2.

□

## 引理 0.1

任何域上的可对角化矩阵限制到不变子空间上仍然是可对角化矩阵.

♥

**证明** 注意到矩阵可对角化等价于极小多项式可以分解为一次式的积. 设  $A$  的极小多项式是  $p$ ,  $W$  是矩阵  $A$  一个不变子空间且  $p_W$  是  $A|_W$  极小多项式. 注意到  $p(A|_W) = 0$ , 故  $p_W|p$ . 从而  $p_W$  也是一次式的积, 故  $A|_W$  可对角化. □

## 命题 0.11 (一族两两可交换的可对角化矩阵可同时相似对角化)

给定域  $\mathbb{F}$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$  且两两可交换. 若每一个  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  都可以在  $\mathbb{F}$  上相似对角化, 则存在可逆矩阵  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

♣

**证明** 设  $V = \mathbb{F}^n$  且  $A_\lambda$  是  $V$  上线性变换.

**Step 1** 若  $A_\lambda$  都是数量矩阵, 则结果已经成立.

**Step 2** 取某个非数量矩阵  $A_1$ , 于是有  $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ , 这里  $s \geq 2$  且  $V_i$  是属于  $A_1$  不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $V_i$  是所有  $A_\lambda$  不变子空间, 且  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  是一族两两可交换的矩阵, 由引理 0.1 知它们也是可对角化的. 注意到  $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$ , 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当  $n = 1$ , 命题显然成立, 假设命题对  $\leq n-1$  都成立, 当  $n$  时, 由归纳假设, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ , 存在  $V_i$  的一个基使得  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 于是把这些基合起来构成一个新的基, 我们就得到在这个新的基下  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  都是对角矩阵. □




**命题 0.12 (一族两两可交换的复正规 (实对称) 矩阵可同时酉 (正交) 相似对角化)**

1. 给定指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  且两两可交换且复正规, 则存在酉矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

2. 给定指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  且两两可交换且实对称, 则存在正交矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

 **笔记** 注意到  $(Ax, y) = (x, A^T y)$ ,  $(Ax, y) = (x, A^* y)$  在全空间成立则在子空间也成立, 所以  $A^T|_V = (A|_V)^T$ ,  $A^*|_V = (A|_V)^*$ , 所以一个实对称变换限制在不变子空间也是实对称的, 一个复正规变换限制在不变子空间也是复正规的.

**证明**

1. 设  $V = \mathbb{C}^n$  且  $A_\lambda$  是  $V$  上线性变换.

**Step 1** 若  $A_\lambda$  都是数量矩阵, 则结果已经成立.

**Step 2** 取某个非数量矩阵  $A_1$ , 于是有  $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ , 这里  $s \geq 2$  且  $V_i$  是属于  $A_1$  不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $V_i$  是所有  $A_\lambda$  不变子空间, 从而  $V_i$  两两正交, 且  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  是一族两两可交换的正规矩阵, 于是可酉对角化的. 注意到  $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$ . 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当  $n = 1$ , 命题显然成立, 假设命题对  $\leq n-1$  都成立, 当  $n$  时, 由归纳假设, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ , 存在  $V_i$  的一个标准正交基使得  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 由于  $V_i$  两两正交, 于是把这些基合起来构成一个新的正交基, 我们就得到在这个新的基下  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  都是对角矩阵.

2. 设  $V = \mathbb{R}^n$  且  $A_\lambda$  是  $V$  上线性变换.

**Step 1** 若  $A_\lambda$  都是数量矩阵, 则结果已经成立.

**Step 2** 取某个非数量矩阵  $A_1$ , 于是有  $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ , 这里  $s \geq 2$  且  $V_i$  是属于  $A_1$  不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $V_i$  是所有  $A_\lambda$  不变子空间, 从而  $V_i$  两两正交, 且  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  是一族两两可交换的实对称矩阵, 由引理 0.1 知它们也是可正交相似对角化的. 注意到  $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$ , 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当  $n = 1$ , 命题显然成立, 假设命题对  $\leq n-1$  都成立, 当  $n$  时, 由归纳假设, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, s$ , 存在  $V_i$  的一个标准正交基使得  $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$  在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 由于  $V_i$  两两正交, 于是把这些基合起来构成一个新的正交基, 我们就得到在这个新的基下  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  都是对角矩阵.

□

**引理 0.2 (根子空间维数)**

设  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  且  $\mathbb{F}$  是域. 若  $\lambda \in \mathbb{F}$  是  $A$  的  $r$  重特征值, 则我们有

$$\dim \operatorname{Ker} (\lambda E - A)^m = r, \forall m \geq r. \quad (2)$$

♥

**证明** 注意到

$$\dim \operatorname{Ker} (\lambda E - A)^r = n - \operatorname{rank} ((\lambda E - A)^r).$$

而秩不随域扩张而改变, 故不妨设  $\mathbb{F}$  是代数闭域. 则不妨设  $A$  为 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = r,$$

这里  $J$  没有特征值  $\lambda$ . 于是直接计算有

$$(A - \lambda E)^r = \begin{pmatrix} J_{n_1}^r(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}^r(0) & \\ & & & (J - \lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & (J - \lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix},$$

$$\det(J - \lambda E_{n-r})^r \neq 0.$$

现在知  $\text{rank}(A - \lambda E)^r = n - r$ , 这就得到了 (2) 的  $m = r$  的情况. 注意到当  $m > r$  时, 上述矩阵 0 块在次方时不会继续丢失阶数, 而  $(A - \lambda E)^m$  仍可逆, 因此秩不会再次减少, 所以 (2) 对任何  $m \geq r$  都成立, 这就完成了证明.  $\square$

### 定理 0.1 (公共特征值)

给定域  $\mathbb{F}$ , 指标集  $\Lambda$  和  $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$ .

1. 若  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  两两可交换;

2. 若  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, n$  为奇数.

则  $A_\lambda$  在  $\mathbb{F}$  上有公共特征向量.



**笔记** 某种角度上说, 存在公共特征向量和可同时相似上三角化是等价的.

1. 由一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化, 不妨设  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  都是上三角矩阵, 注意观察第一列知他们有公共的特征向量  $e_1$ .

2. 证明的关键在于奇数次实多项式必有实根, 从而奇数矩阵必有实特征值.

**证明 Step 1** 取  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  的极大无关组  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . 如果能找到  $A_1, A_2, \dots, A_k$  的公共特征向量  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 则对任何  $A_\lambda = \sum_{i=1}^k c_i A_i$ , 都有

$$A_\lambda \alpha = \sum_{i=1}^k c_i A_i \alpha = \left( \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i \right) \alpha,$$

这里  $\lambda_i$  是  $A_i, 1 \leq i \leq k$  关于特征向量  $\alpha$  的特征值. 于是问题变成只需要对有限个矩阵讨论.

**Step 2** 对于两两可交换的实矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . 取  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  的极大无关组  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . 设  $\lambda \in \mathbb{R}$  是  $A_1$  的奇数重特征值, 记重数为  $r \in \mathbb{N}$  并设  $W = \text{Ker}((\lambda E - A_1)^r)$ . 由引理 0.2 知  $\dim W = r$  且显然有  $A_j|_W, j = 2, 3, \dots, k$  两两可交换.

注意到  $r = n$  是可能的, 真正降下去的是矩阵个数, 所以我们对矩阵个数归纳. 命题对  $k = 1$  显然成立, 假设命题对  $\leq k - 1$  成立, 当  $k$  时我们运用归纳假设知  $A_j|_W, j = 2, 3, \dots, k$  有公共特征向量, 即存在实数  $\lambda_i, 2 \leq i \leq k$ , 使得

$$W' = \bigcap_{i=2}^k \text{Ker}(\lambda_i I - A_i|_W) \neq \{0\}.$$

**Step 3** 由可交换性知  $W'$  是  $A_1$  不变子空间, 所以断言  $A_1|_{W'}$  在  $\mathbb{C}$  上特征值只有  $\lambda$ . 事实上由 Step 1, 显然  $W' \subset W$ . 又设在复数域上  $A_1 \beta = \mu \beta, \beta \neq 0, \mu \in \mathbb{C}$ , 则

$$0 = (\lambda E - A_1)^r \beta = (\lambda E - A_1)^{r-1} (\lambda \beta - A_1 \beta) = (\lambda - \mu)(\lambda E - A_1)^{r-1} \beta = \dots = (\lambda - \mu)^r \beta,$$

故  $\mu = \lambda$ .

**Step 4** 取  $W'$  中  $A_1$  一个特征向量  $\gamma$ , 则  $\gamma$  是  $A_1, A_2, \dots, A_k$  公共特征向量, 这就完成了证明.  $\square$

### 引理 0.3 (Netwon 公式)

设

$$s_j = \sum_{i=1}^n x_i^j, \quad \sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$



我们有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0, 1 \leq k \leq n;$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0, k > n.$$

♡

证明

□

### 定理 0.2

对域  $\mathbb{F}$ , 设  $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  且  $\text{tr}(C^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , 则  $C$  是幂零矩阵.

♡

**证明** 不妨设  $\mathbb{F}$  是代数闭的, 设  $C$  的全部特征值是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 这里可能相同. 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

即  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的一切幂和为 0. 由 **Newton 公式**, 我们有  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  构成的所有初等对称多项式为 0. 由 **Vieta 定理**, 我们有  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  都是  $\lambda^n = 0$  的根, 这就证明了  $C$  的全部特征值都是 0, 故  $C$  是幂零矩阵. □

**例题 0.1** 给定数域  $\mathbb{F}$ ,  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $A, B$  特征值都在  $\mathbb{F}$  中.

1. 若  $AB = 0$ , 证明存在可逆  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP, P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.
2. 若  $\text{rank}(AB - BA) \leq 1$ , 证明存在可逆  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP, P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.
3. 若存在  $a, b \in \mathbb{F}$  使得  $AB - BA = aA + bB$ , 证明存在可逆  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP, P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.



**笔记** 此类问题, 我们可以先找一个公共的非平凡的不变子空间 (或公共特征向量), 从而可以从这个不变子空间中取一组基, 再扩充为全空间的基. 于是原矩阵在这组基下的表示矩阵就可同时上三角化, 并且表示矩阵的  $(1, 1)$  元可以确定, 接下来只需考虑表示矩阵的其余的  $n-1$  阶矩阵即可, 这样就对原矩阵进行了降阶. 最后再利用数学归纳法就能立刻得到证明.

**证明**

1. 若  $A$  可逆, 则  $B = 0$ . 此时因为  $AB = BA = 0$ . 运用 **可交换矩阵可同时上三角化** 即证, 当然, 由 **定理 0.1**, 此时  $A, B$  有公共特征向量. 若  $A$  不可逆, 于是我们不难证明  $\text{Ker} A$  是  $B$  的不变子空间 (当然也是  $A$  的不变子空间), 所以存在  $B|_{\text{Ker} A}$  的特征向量  $\alpha \in \text{Ker} A$ . 此时  $\alpha$  也是  $A$  的特征向量 (特征值为 0), 于是  $A, B$  总有公共特征向量.

那么我们运用归纳法, 当  $n=1$  显然, 假定命题对  $n-1$  时成立, 当  $n$  时, 设  $\alpha$  是  $A, B$  公共特征向量, 将其扩充为  $\mathbb{F}^n$  一组基, 在这组基下,  $A, B$  分别有表示矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c_1 & \beta^T \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} c_2 & \gamma^T \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{F}.$$

由  $AB = 0$  知  $A_{n-1}B_{n-1} = 0$ . 故可对  $A_{n-1}, B_{n-1}$  用归纳假设, 即存在可逆  $P_{n-1} \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$  使得  $P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1}$ ,

$P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1}$  是上三角矩阵. 于是取  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 就有

$$P^{-1}\tilde{A}P = \begin{pmatrix} c_1 & \beta^T P_{n-1} \\ 0 & P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1} \end{pmatrix}, P^{-1}\tilde{B}P = \begin{pmatrix} c_2 & \gamma^T P_{n-1} \\ 0 & P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1} \end{pmatrix}$$

都是上三角矩阵. 这就证明了存在可逆  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP, P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.

2. 若  $\text{rank}(AB - BA) = 0$ , 这是 **可交换矩阵可同时上三角化** 的直接结果. 若  $\text{rank}(AB - BA) = 1$ , 我们假定  $A$  是不可逆的, 否则用  $A - \lambda I, \lambda \in \mathbb{F}$  (这里  $\lambda$  是此时  $A$  的特征值) 代替  $A$ . 下证  $\text{Ker} A, \text{Im} A$  必有一个是  $B$  的不变子空间.

**Step 1** 若  $\text{Ker} A \subset \text{Ker}(AB - BA)$ , 则设  $x \in \text{Ker} A$ , 我们有  $ABx = BAx = 0$ , 这就证明了  $\text{Ker} A$  是  $B$  不变子空间.

**Step 2** 若  $\text{Ker} A \not\subset \text{Ker}(AB - BA)$  不成立, 取  $x \in \text{Ker} A$  使得  $y = (AB - BA)x \neq 0$ . 注意到  $\text{rank}(AB - BA) = 1$ ,

故  $\text{Im}(AB - BA) = \text{span}\{y\}$ . 但是

$$y = (AB - BA)x = ABx - BAx = ABx \in \text{Im}A,$$

这就说明  $\text{Im}(AB - BA) \subset \text{Im}A$ . 于是对  $u = Av \in \text{Im}A$ , 我们有

$$Bu = BAv = ABv - (AB - BA)v \in \text{Im}A,$$

从而确实了  $\text{Im}A$  是  $B$  不变子空间.

注意到  $A, B$  有一个公共非平凡不变子空间. 所以取这个不变子空间一组基扩充为全空间的基, 则  $A, B$  有表示矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{aligned} r(AB - BA) &= r \begin{pmatrix} A_1B_1 - B_1A_1 & * \\ 0 & A_2B_2 - B_2A_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{矩阵秩的基本公式 (3)}}{\geq} r \begin{pmatrix} A_1B_1 - B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 - B_2A_2 \end{pmatrix} \\ &= r(A_1B_1 - B_1A_1) + r(A_2B_2 - B_2A_2), \end{aligned}$$

我们有

$$r(A_1B_1 - B_1A_1) \leq 1, r(A_2B_2 - B_2A_2) \leq 1,$$

现在阶降下去了, 类似我们前面的归纳证明我们知道  $A, B$  可同时相似上三角化.

3. 如果  $a = b = 0$ , 那么这是可交换矩阵可同时上三角化的直接结果. 不失一般性, 不妨设  $a \neq 0$ . 我们可以用  $\frac{1}{a}B$  代替  $B$  来不妨设  $a = 1$ . 那么记  $C = AB - BA = A + bB$ , 则成立等式  $CB - BC = C$ . 显然只需证明  $C, B$  可同时相似上三角化即可, 因为此时  $A$  也就被相似上角化. 注意到

$$\begin{aligned} \text{tr}(CB - BC) &= \text{tr}(C) = 0, \text{tr}(CCB - CBC) = \text{tr}(C^2) = 0, \\ \text{tr}(CCCB - CCBC) &= \text{tr}(C^3) = 0, \text{tr}(CCCCB - CCCBC) = \text{tr}(C^4) = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

于是我们证明了  $\text{tr}(C^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . 由定理 0.2, 我们知道  $C$  是幂零矩阵.

假设  $B, C$  没有公共特征向量且  $Bx = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{F}$ , 则  $Cx \neq 0$  且

$$CBx - BCx = Cx \Rightarrow (B - (\lambda - 1)I)Cx = 0,$$

因此  $B$  有特征值  $\lambda - 1$ . 这样  $B$  也应该有特征值  $\lambda - 2$ , 如此下去  $B$  会有无穷多个特征值, 这不可能! 所以  $B, C$  应该有公共特征向量  $\alpha$ . 将  $\alpha$  扩充为全空间的一组基,  $B, C$  在这组基下有表示矩阵

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F}, C_1 \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)},$$

则  $C_1B_1 - B_1C_1 = C_1$ . 这样阶数就降下去了. 所以可以类似前面归纳完成证明. □

## 0.1.5 个数的推广

## 命题 0.13

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证: 它们在  $\mathbb{F}^n$  中至少有一个公共的特征向量.

◆

**证明** 对  $m$  进行归纳,  $m=2$  时就是命题 0.4. 设矩阵个数小于  $m$  时结论成立, 现证  $m$  个矩阵的情形. 将所有的  $A_i$  都看成是列向量空间  $\mathbb{F}^n$  上的线性变换, 任取  $A_1$  的一个特征值  $\lambda_1 \in \mathbb{F}$  及其特征子空间  $V_1 \subseteq \mathbb{F}^n$ . 注意到  $A_1 A_i = A_i A_1$ , 故由命题 0.2 可知,  $V_1$  是  $A_2, \dots, A_m$  的不变子空间. 将  $A_2, \dots, A_m$  限制在  $V_1$  上, 它们仍然两两乘法可交换且特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故由归纳假设可得  $A_2|_{V_1}, \dots, A_m|_{V_1}$  有公共的特征向量  $\alpha \in V_1$ . 注意到  $\alpha$  也是  $A_1$  的特征向量, 于是  $\alpha$  是  $A_1, A_2, \dots, A_m$  的公共特征向量.  $\square$

## 命题 0.14

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证: 它们在  $\mathbb{F}$  上可同时上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1} A_i P (1 \leq i \leq m)$  都是上三角矩阵.

◆

**证明** 完全类似于命题 0.7 的证明, 其中利用命题 0.13 得到  $A_1, A_2, \dots, A_m$  的公共特征向量, 请读者自行补充相关的细节.  $\square$

## 命题 0.15

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们都在  $\mathbb{F}$  上可对角化, 求证: 它们在  $\mathbb{F}$  上可同时对角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1} A_i P (1 \leq i \leq m)$  都是对角矩阵.

◆

**证明** 若  $A_i$  都是纯量矩阵, 则结论显然成立. 以下不妨设  $A_1$  不是纯量矩阵, 余下的证明完全类似于命题 0.10 的证明, 请读者自行补充相关的细节.  $\square$

**例题 0.2** 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$ . 若  $A$  是幂零矩阵, 求证:  $|A + B| = |B|$ .

**证明 证法一:** 由命题 0.7 可知,  $A, B$  可同时上三角化, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1} A P$  和  $P^{-1} B P$  都是上三角矩阵. 因为上三角矩阵的主对角元是矩阵的特征值, 而幂零矩阵的特征值全为零, 所以  $|P^{-1} A P + P^{-1} B P| = |P^{-1} B P|$ , 即有  $|A + B| = |B|$ .

**证法二:** 先假设  $B$  是可逆矩阵, 则  $|A + B| = |I_n + AB^{-1}| |B|$ , 只要证明  $|I_n + AB^{-1}| = 1$  即可. 由  $AB = BA$  可知  $AB^{-1} = B^{-1} A$ , 再由  $A$  是幂零矩阵容易验证  $AB^{-1}$  也是幂零矩阵, 从而其特征值全为零. 因此  $I_n + AB^{-1}$  的特征值全为 1, 故  $|I_n + AB^{-1}| = 1$ .

对于一般的矩阵  $B$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + B$  是可逆矩阵. 由可逆情形的证明可得  $|A + t_k I_n + B| = |t_k I_n + B|$ . 注意到上式两边都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 将上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即得结论.  $\square$