0.1 高等代数中两个重要结论和思想

定义 0.1 (函数组线性无关/相关)

设 $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ 是一组定义域为 D 的函数, 如果不存在不全为零的标量 $c_1, c_2, \ldots, c_n$, 使得

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in D.$$

则称这组函数在 I 上是**线性无关的**.

反之, 如果存在不全为零的 c_i 使得上式成立, 则称这组函数是**线性相关的**.

定理 0.1

设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X^*$, 记 $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$, 则下述条件等价

(1) $f \in X^*$ 可被 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性表出;

(2) $N \subset \ker f$.

其中 X^* 是线性空间 X 的对偶空间.

证明 (1) 推 (2) 是显然的, 我们来看 (2) 推 (1).

构造线性映射

$$\pi : X \to \mathbb{F}^n, \mathbf{x} \mapsto (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x})).$$

于是 $\ker \pi = N$. 定义

$$g : \pi(X) \to \mathbb{F}, \pi(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x}).$$

先证 g 的良定义. 若 $\pi(x) = \pi(y)$, 则 $\pi(x-y) = 0$, 从而 $x - y \in \ker \pi = N$, 于是 $f(x-y) = 0$, 即 $f(x) = f(y)$. 故 g 是良定义的.

现在 g 线性延拓到 $\mathbb{F}^n$ 上 (补空间上定义为零映射), 取 $\mathbb{F}^n$ 的标准基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 其中 $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)^T, i = 1, 2, \cdots, n$. 现在我们注意到对 $\forall x \in X$, 都有

$$f(x) = g(\pi(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = g\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(e_i) f_i(x).$$

这就证明了 f 可被 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性表出. □

推论 0.1

n 维线性空间 X 的 n 个线性函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关的充要条件是他们可分点, 即对任何 $a \neq 0$, 存在某个 $k = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $f_k(a) \neq 0$. 也即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\}$.

证明 注意到 n 个线性函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关等价于 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是这个线性空间对偶空间 X^* 的一组基, 从而等价于任意的 $f \in X^*$ 都可被 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性表出. 又由定理 0.1知, 任意的 $f \in X^*$ 都可被 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性表出的充要条件是

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \bigcap_{f \in X^*} \ker f, \tag{1}$$

下证 $\bigcap\limits_{f \in X^*} \ker f = \{0\}$. 对 $\forall \alpha \in \bigcap\limits_{f \in X^*} \ker f$, 若 $\alpha \neq 0$, 则 X^* 中存在线性函数

$$f_0 : X \longrightarrow X, \ x \longmapsto 2x$$

从而 $f(\alpha) = 2\alpha \neq 0$. 这与 $\alpha \in \ker f_0$ 矛盾! 因此 $\alpha = 0$, 故 $\bigcap\limits_{f \in X^*} \ker f = \{0\}$. 再由(1)式可知, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关

等价于 $\bigcap_{i=1}^{n}\ker f_i=\{0\}$, 即使 f_i 的像全为 0 的向量只能是 0. 这就完成了证明. □

例题 0.1 设 V 是有限维线性空间且 A 是 V 上的线性变换. 定义

$$B: V^*\to V^*, g\mapsto g\circ A.$$

证明 $f,Bf,B^2f,\cdots,B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基的充要条件是 A 的任一非 0 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间.

笔记 联想循环子空间的基本性质即 $\mathrm{span}\{x,Ax,A^2x,\cdots\}$ 是包含 x 的最小 $A-$ 不变子空间.

证明 由推论 0.1知 $f,Bf,B^2f,\cdots,B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基等价于

$$\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker B^kf=\{0\}. \tag{2}$$

于是由

$$\begin{aligned}
&x\in\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker B^kf=\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker\left(f\circ A^k\right)\\
&\iff f(A^ix)=0,\forall i=0,1,2,\cdots,n-1\\
&\iff A^ix\in\ker f,\forall i=0,1,2,\cdots,n-1\\
&\xLeftrightarrow{\text{定理??}} \mathrm{span}\{x,Ax,A^2x,\cdots\}=\mathrm{span}\{x,Ax,\cdots,A^{n-1}x\}\subset\ker f\\
&\xLeftrightarrow{\text{循环子空间的基本性质}} \text{包含}x\text{的最小}A-\text{不变子空间}\subset\ker f.
\end{aligned}$$

知 (2) 成立等价于只有 $0\in\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker B^kf$, 等价于只有包含 0 的最小 $A-$ 不变子空间 (即 $\{0\}$) 含于 $\ker f$, 也等价于含于 $\ker f$ 的 $A-$ 不变子空间只能是 $\{0\}$, 这就等价于 A 的任一非 $\{0\}$ 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间. □

定理 0.2

函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关的充要条件是: 存在 m 个数 $x_i,i=1,2,\cdots,m$, 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1)\\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{3}$$

注 本题并未指出 f 定义域, 因此其定义域未必是数字.

证明 充分性: 设存在 m 个数 $x_i,i=1,2,\cdots,m$, 使得 (3) 成立. 考虑关于 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 的齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{m}c_if_i(x_j)=0, j=1,2,\cdots,m.$$

我们由 (3) 知其系数矩阵可逆, 因此线性方程组只有 0 解, 这就证明了 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关.

必要性: 假定 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关, 不妨设定义域 D 有不少于 m 个不同的点, 否则, 不妨设定义域 D 内有 $k\leqslant m$ 个点, 则考虑关于 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 的齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{m}c_if_i(x_j)=0, j=1,2,\cdots,k.$$

因为 $k\leqslant m$, 所以上述方程有无穷多个解, 可从中任取一组非零解 $(c_1',c_2',\cdots,c_m')$, 于是

$$\sum_{i=1}^{m}c_i'f_i(x)=0,\forall x\in D.$$

故 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性相关.

我们用归纳法, $m=1$ 命题显然成立, 假设命题对不超过 $m-1$ 时成立, 则考虑 m 时, 对 $f_1,f_2,\cdots,f_{m-1}$ 用归

纳假设存在 $x_i, i=1,2,\cdots,m-1$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{m-1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{m-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \cdots & f_{m-1}(x_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

因为 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性无关, 所以存在 x_m 使得关于 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 的方程

$$k_1 f_1(x_m) + k_2 f_2(x_m) + \cdots + k_m f_m(x_m) = 0. \tag{5}$$

只有零解. 将

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}$$

按最后一行展开得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} = a_1 f_1(x_m) + a_2 f_2(x_m) + \cdots + a_m f_m(x_m),$$

其中 a_i 为 (m,i) 元的代数余子式. 由(4)式可知

$$a_m = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \cdots & f_{m-1}(x_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

故由方程(5)只有零解知

$$a_1 f_1(x_m) + a_2 f_2(x_m) + \cdots + a_m f_m(x_m) \neq 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

这就证明了存在 x_m 使得 (3) 成立, 我们完成了证明. □

例题 0.2 设 $X \subset C[0,1]$ 的有限维子空间, 证明 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛.

笔记 证明的想法是把函数列逐点收敛转化为系数的收敛, 从而一致收敛.

证明 设 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 X 的一组基, 我们知道存在 m 个数 $x_i, i=1,2,\cdots,m$, 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

对函数列 $\{f^{(k)}\} \subset X, k=1,2,\cdots$, 我们知道有表示

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^{(k)} f_j(x), \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = f(x), \forall x \in [0,1].$$

于是由 (6)知

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix}$$

因此存在 c_j 使得

$$\lim_{k\to\infty} c_j^{(k)} = c_j, j = 1, 2, \cdots, m.$$

现在就有

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(x), \forall x \in [0, 1].$$

又

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]} \left| f^{(k)}(x) - f(x) \right| &\leqslant \sup_{x\in[0,1]} \sum_{j=1}^{n} \left| c_j^{(k)} - c_j \right| \cdot \left| f_j(x) \right| \\ &\leqslant \sup_{\substack{1\leqslant j\leqslant m, \\ x\in[0,1]}} \left| f_j(x) \right| \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| c_j^{(k)} - c_j \right| \to 0, k \to \infty. \end{aligned}$$

这就证明了 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛. □

定理 0.3

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,A 是 V 上线性变换,$f, f_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, s$ 满足 $f = f_1 f_2 \cdots f_s$ 并有 $f_1, f_2, \cdots, f_s$ 两两互素. 则

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

♡

证明 当 $s = 2$, 此时由裴蜀等式得 $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $p_1 f_1 + p_2 f_2 = 1$. 于是对 $\alpha \in \ker f(A)$, 我们有

$$\alpha = p_1(A) f_1(A)\alpha + p_2(A) f_2(A)\alpha.$$

定义

$$\alpha_1 \triangleq p_2(A) f_2(A)\alpha, \quad \alpha_2 \triangleq p_1(A) f_1(A)\alpha.$$

现在

$$f_1(A)\alpha_1 = p_2(A) f_1(A) f_2(A)\alpha = p_2(A) f(A)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \ker f_1(A);$$

$$f_2(A)\alpha_2 = p_1(A) f_1(A) f_2(A)\alpha = p_1(A) f(A)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_2 \in \ker f_2(A).$$

因此我们的确有

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) + \ker f_2(A).$$

现在设 $\alpha \in \ker f_1(A) \cap \ker f_2(A)$, 于是 $\alpha = p_1(A) f_1(A)\alpha + p_2(A) f_2(A)\alpha = 0$, 即

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A).$$

对 $s > 2$, 我们考虑归纳法. 假设命题对 $s - 1$ 已经成立, 设 $g(x) \triangleq f_2(x) f_3(x) \cdots f_s(x)$, 则由命题**??**知 f_1, g 互素. 由

$s=2$ 的结论知

$$\ker f(A)=\ker f_1(A)\oplus\ker g(A).$$

对 g 用归纳假设得

$$\ker f(A)=\ker f_1(A)\oplus\ker f_2(A)\oplus\cdots\oplus\ker f_s(A).$$

□