0.1 一致连续

定理 0.1

f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty},\{x_n''\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n''-x_n')=0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n'')-f(x_n'))=0$.

定理 0.2 (Cantor 定理)

$f\in C(a,b)$ 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

注 这个定理对 $f\in C(a,b]$ 和 $f\in C[a,b)$ 也成立.

推论 0.1

若 $f\in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

命题 0.1

设 $f\in C[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明:f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

注 这个命题反过来并不成立, 反例:$f(x)=\sqrt{x}$. 因此这个条件只是函数一致连续的充分不必要条件.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $A>0$, 对 $\forall x_1,x_2\geqslant A$, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{1}$$

由 Cantor 定理可知,f 在 $[0,A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\delta\in(0,1)$, 使得 $\forall x_1,x_2\in[0,A+1]$ 且 $|x_2-x_1|\leqslant\delta$, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{2}$$

现在对 $\forall|x_1-x_2|\leqslant\delta<1$, 必然有 $x_1,x_2\in[0,A+1]$ 或 $x_1,x_2\in[A,+\infty)$, 从而由(1)(2)式可知, 此时一定有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

故 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

□

命题 0.2

设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $g\in C[0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

证明:g 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 由 f 一致连续可知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得对 $\forall x,y\in[0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ 可知, 存在 $A>0$, 使得对 $\forall x\geqslant A$, 有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

由 Cantor 定理可知,g 在 $[0,A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta\in(0,1)$, 使得对 $\forall x,y\in[0,A+1]$ 且 $|x-y|\leqslant\eta$, 有

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

故对 $\forall x,y\geqslant0$ 且 $|x-y|\leqslant\eta$, 要么都落在 $[0,A+1]$, 要么都落在 $[A,+\infty)$.

(i) 若 $x,y\in[0,A+1]$, 则由(5)式可得 $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$;

(ii) 若 $x,y\in[A,+\infty)$, 则由(3)(4)式可得

$$|g(x)-g(y)|\leqslant|g(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故 g 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

□

命题 0.3 (连续周期函数必一致连续)

设 f 是周期 $T>0$ 的 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明 由 Cantor 定理,f 在 $[0,2T]$ 一致连续, 所以对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,T)$ 使得对 $|x_1-x_2|<\delta,x_1,x_2\in[0,2T]$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon.$$

现在对 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $0<x_2-x_1<\delta$. 注意到

$$x_1-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\in[0,T),x_2-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\in[0,2T),|x_1-x_2|<\delta,$$

我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f\left(x_1-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\right)-f\left(x_2-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\right)\right|\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

□

命题 0.4 (一致连续与 Lipschitz 连续的关系)

设 f 定义在区间 I 的函数. 证明 f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in I$, 都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_1-x_2|+\varepsilon.$$

注 这个命题相当重要! 但是考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 **充分性**: 由条件可知,$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $|x_2-x_1|\leqslant\delta$ 且 $x_1,x_2\in I$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|+\varepsilon\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}+\varepsilon=2\varepsilon.$$

故 f 在 I 上一致连续.

必要性: 由 f 在 I 上一致连续可知,$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.\tag{6}$$

因此任取 $x,y\in I$,①当 $|x-y|\leqslant\delta$ 时, 由(6)式可知 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon\leqslant M|x-y|+\varepsilon$. 由 x,y 的任意性可知结论成立.

②当 $|x-y|>\delta$ 时,(i) 当 $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$ 时, 此时结论显然成立;

(ii) 当 $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$ 时, 不妨设 $y>x,f(y)>f(x)$(其它情况类似), 令 $f(y)-f(x)=kt$, 其中 $k\in\mathbb{N},t\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 由介值定理可知, 存在 $x=x_0<x_1<\cdots<x_k=y$, 使得

$$f(x)\leqslant f(x_j)=f(x)+jt\leqslant f(x)+kt=f(y),j=0,1,2,\cdots,k.$$

于是

$$f(x_j)-f(x_{j-1})=t>\varepsilon,j=1,2,\cdots,k.$$

此时由(6)式可知 $x_j-x_{j-1}>\delta,j=1,2,\cdots,k$. 从而我们有

$$y-x=\sum_{j=1}^{k}(x_j-x_{j-1})>k\delta\Rightarrow k<\frac{y-x}{\delta}.\tag{7}$$

取 $M=\dfrac{2\varepsilon}{\delta}>0$, 于是结合(7)式及 $t\in(\varepsilon,2\varepsilon]$ 就有

$$|f(y)-f(x)|=kt\leqslant\frac{t}{\delta}|y-x|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\delta}|y-x|=M|y-x|.$$

再由 x,y 的任意性可知结论成立.

□

注 这里 k,t 的存在性可以如此得到: 考虑 $(\varepsilon,+\infty)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(k\varepsilon,2k\varepsilon]$ 即可, 又因为 $(k+1)\varepsilon\leqslant 2k\varepsilon$, 所以相邻的 $(k\varepsilon,2k\varepsilon]$ 一定相交. 于是一定存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $f(y)-f(x)\in(k\varepsilon,2k\varepsilon]$, 从而 $\dfrac{f(y)-f(x)}{k}\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 故取 $t=\dfrac{f(y)-f(x)}{k}\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 此时就有 $f(y)-f(x)=kt$.

推论 0.2 (一致连续函数被线性函数控制)

若 f 在 $\mathbb{R}$ 一致连续, 证明存在 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant f(0)+1+M|x|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

笔记 读者应该积累大概的感觉: 一致连续函数的增长速度不超过线性函数, 这能帮助我们快速排除一些非一致连续函数.

证明 取命题 0.4中的 $\varepsilon=1,x_1=x\in\mathbb{R},x_2=0$, 则一定存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant f(0)+1+M|x|,\forall x\in\mathbb{R}$.

具体地, 有 $\delta_0>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leq 1,\ \forall 0\leq x\leq y<x+\delta_0.$$

因此, 对于任何 $x\geq 0$,

$$|f(x)|\leq|f(0)|+\left[\frac{x}{\delta_0}\right]+1\leq|f(0)|+1+\frac{x}{\delta_0}.$$

□

推论 0.3

若 f 在 I 上一致连续, 则存在 $M,c>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant c+M|x|,\forall x\in I.$$

推论 0.4 (一致连续函数的阶的提升)

若 f 在 $[1,+\infty)$ 一致连续, 证明存在 $M>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M,\forall x\geqslant 1.$$

证明 取命题 0.4中的 $\varepsilon=1,x_1=x\geqslant 1,x_2=1$, 则一定存在 $C>0$, 使得

$$|f(x)-f(1)|\leqslant C|x-1|+1,\forall x\geqslant 1.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(1)}{x}\right|+\frac{|f(1)|}{x}\leqslant\frac{C|x-1|+1}{x}+|f(1)|,\forall x\geqslant 1.$$

上式两边同时令 $x\to+\infty$, 得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant C.$$

由上极限的定义可知, 存在 $X>1$, 使得 $\sup\limits_{x\geqslant X}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant C$. 从而我们有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant C,\forall x>X. \tag{8}$$

又因为 f 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[1,X]$ 上连续, 从而 f 在 $[1,X]$ 上有界, 即存在

$C' > 0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C', \forall x \in [1, X]. \tag{9}$$

于是取 $M = \max\{C, C'\}$, 则由(8)(9)式可知

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M, \forall x \geqslant 1.$$

□

命题 0.5

证明区间 I 上的函数 f 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\ell > 0$, 使得当 $x_1 \neq x_2 \in I$, 就有:

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

证明 **必要性**: 由命题 0.4可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| + \varepsilon, \forall x, y \in I.$$

取 $\ell = \dfrac{\varepsilon}{\delta} + M$, 任取 $x_1 \neq x_2 \in I$, 当 $\left|\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| > \ell$ 时, 我们有

$$\ell < \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \frac{M|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|} + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|} = M + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|}.$$

从而

$$|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{\ell - M} = \delta. \tag{10}$$

又由 f 在 I 上一致连续可知

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'' \in I \text{且} |x' - x''| < \delta. \tag{11}$$

因此结合(10)(11)式可得 $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 故必要性得证.

充分性: 已知对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\ell > 0$, 使得 $\forall x_1 \neq x_2 \in I$, 有

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{12}$$

取 $\delta \in \left(0, \dfrac{\varepsilon}{\ell}\right)$, 若 $|f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon$ 但 $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, 则我们有

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\delta} > \ell.$$

而由(12)式可得, 此时 $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 矛盾! 故 f 在 I 上一致连续.

□

命题 0.6 (一致连续函数的拼接)

设 $f \in C[0, +\infty)$, 若存在 $\delta > 0$ 使得 f 在 $[\delta, +\infty)$ 一致连续, 则 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

笔记 证明的想法比结论本身重要, 在和本命题叙述形式不同的时候需要快速准确判断出来 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 Cantor 定理可知,f 在 $[0, \delta + 1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $\forall x, y \in [0, \delta + 1]$ 且 $|x - y| \leqslant \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13}$$

由 f 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续可知, 对 $\forall x, y \in [\delta, +\infty)$ 且 $|x - y| \leqslant \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{14}$$

现在对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$, 都有 $|x - y| \leqslant \eta$.

(i) 若 $x, y \in [0, \delta + 1]$ 或 $[\delta, +\infty)$, 则由(13)(14)式可直接得到 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

(ii) 若 $x \in [0, \delta+1], y \in [\delta, +\infty)$, 则 $|x-y| \geqslant 1 > \eta$, 这是不可能的.
故原命题得证.

□

例题 0.1 设 f 在 $[1, +\infty)$ 一致连续. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续.

证明 由 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x, y \geqslant 1$ 且 $|x-y| \leqslant \delta$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

由推论 0.4可知, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ 有界. 故可设 $M \triangleq \sup\limits_{x \geqslant 1} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < +\infty$. 取 $\delta' = \min\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{2M}\right\}$, 则对 $\forall x, y \geqslant 1$ 且 $|x-y| \leqslant \delta'$, 由(15)式可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leqslant \frac{|yf(x) - yf(y)| + |y-x|\,|f(y)|}{xy} \\
&= \frac{|f(x) - f(y)|}{x} + \frac{|y-x|}{xy}|f(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + M|y-x| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续.

□

命题 0.7 (函数爆炸一定不一致连续)

设 f 在 $[a, +\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, 证明: f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

证明 证法一: 假设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 则由推论 0.3可知, 存在 $c, d > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \tag{16}$$

从而

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| < +\infty. \tag{17}$$

由上下极限 L'Hospital 法则可得

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \geqslant \varliminf_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$

这与(17)式矛盾. 故 f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

证法二: 假设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 则由推论 0.3可知, 存在 $c, d > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \tag{18}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 可知, 存在 $X > 0$, 使得对 $\forall x \geqslant X$, 有

$$f'(x) \geqslant c + 1 \Leftrightarrow f'(x) - c + 1 \geqslant 0.$$

从而 $f(x) - (c+1)x$ 在 $[X, +\infty)$ 上单调递增, 于是就有

$$f(x) - (c+1)x \geqslant f(X) - (c+1)X \triangleq D, \forall x \geqslant X.$$

故 $f(x) \geqslant (c+1)x + D, \forall x \geqslant X$. 再结合(18)式可得

$$(c+1)x + D \leqslant f(x) \leqslant cx + d, \forall x \geqslant X > 0.$$

即 $x \leqslant d - D, \forall x \geqslant X > 0$. 令 $x \to +\infty$, 则

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} x \leqslant d - D.$$

矛盾. 故 f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

□

例题 0.2 判断下述函数的一致连续性:

(1) $f(x)=\ln x,\quad x\in(0,1]$;

(2) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x},\quad x\in(0,1]$;

(3) $f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\in(0,+\infty)$;

(4) $f(x)=\sin^2 x,\quad x\in\mathbb{R}$;

(5) $f(x)=e^x,\quad x\in\mathbb{R}$;

(6) $f(x)=\sin x^2,\quad x\in[0,+\infty)$;

(7) $f(x)=\sin(x\sin x),\quad x\in[0,+\infty)$;

(8) $f(x)=x\cos x,\quad x\in[0,+\infty)$;

(9) 设 $a>0,\quad f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x},\quad x\in(0,a)$ 和 $x\in(a,+\infty)$;

笔记 关于三角函数找数列的问题，一般 sin, cos 函数就多凑一个 $2n\pi$ 或 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

注 **(6)中找这两个数列 $x_n'=\sqrt{2n\pi},x_n''=\sqrt{2n\pi}+\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的方式:** 待定 c_n, 令 $x_n'=\sqrt{2n\pi},x_n''=\sqrt{2n\pi}+c_n$, 我们希望

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n''-x_n'\right)=\lim_{n\to\infty}c_n=0,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)\neq 0.$$

再结合 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sin c_n^2\cos 2c_n\sqrt{2n\pi}+\cos c_n^2\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}.$$

故我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}\neq 0$. 从而令 $c_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 即可.

(7)(8) 找数列的方式与 (6) 类似.

解

(1) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=+\infty$ 及Cantor 定理可得.

(2) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x\cos\frac{1}{x}$ 不存在及Cantor 定理可得.

(3) 一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(1)$ 存在 (连续性), $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ 及 Cantor 定理可知,f 在 $(0,1]$ 上一致连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, 所以由命题 0.1可知,$f$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 再根据一致连续函数的拼接可知,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

(4) 一致连续. 由 $(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x\leqslant 2$ 及由 Lagrange 中值定理, 易知 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 从而一致连续.

(5) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ 及命题 0.7可得.

(6) 不一致连续.令 $x_n'=\sqrt{2n\pi},x_n''=\sqrt{2n\pi}+\frac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$. 但是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)\right)&=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{1}{n}+2\sqrt{2\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}+2\sqrt{2\pi}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sin 2\sqrt{2\pi}\cos\frac{1}{n}+\cos 2\sqrt{2\pi}\sin\frac{1}{n}\right]=\sin 2\sqrt{2\pi}\neq 0.\end{aligned}$$

故根据定理 0.1可知 f 不一致连续.

(7) 不一致连续.令 $x_n'=2n\pi,x_n''=2n\pi+\frac{\pi}{2n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0.$$

但是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)\right)&=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left[\pi^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sin\pi^2 x \cos o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\pi^2 \sin o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= \sin\pi^2 \neq 0.$$

故根据定理 0.1可知 f 不一致连续.

(8) 不一致连续.令 $x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$,$x_n'' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n' - x_n''\right) = 0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} = -2\pi.$$

故根据定理 0.1可知 f 不一致连续.

(9) 在 $(0,a)$ 上不一致连续, 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$ 不存在, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x} = 0$ 及Cantor 定理可得.

□

命题 0.8 (一个重要不等式)

对 $\alpha \in (0,1)$, 证明

$$\left|x^\alpha - y^\alpha\right| \leqslant |x-y|^\alpha,\ \forall x,y \in [0,+\infty).$$

证明 不妨设 $y \geqslant x \geqslant 0$, 则只须证 $y^\alpha - x^\alpha \leqslant (y-x)^\alpha$. 则只须证 $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \leqslant \left(\frac{y}{x} - 1\right)^\alpha$. 故只须证

$$t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha, \forall t \geqslant 1.$$

令 $g(t) = t^\alpha - 1 - (t-1)^\alpha$, 则 $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(t-1)^{\alpha-1} \leqslant 0$. 从而 $g(t) \leqslant g(1) = 0, \forall t \geqslant 1$. 故 $t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha, \forall t \geqslant 1$.

□

例题 0.3 证明:$f(x) = x^\alpha \ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha \in (0,1)$.

证明 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,f 不被线性函数控制, 故由一致连续函数被线性函数控制可知 f 不一致连续.

当 $\alpha \leqslant 0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ 不存在, 由Cantor 定理可知,f 在 $(0,2)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \in (0,1)$ 时, 有 $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha\ln x - 1)$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上有界, 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1,+\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[2,+\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$, 故由Cantor 定理可知,$f$ 在 $(0,2]$ 上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

□

例题 0.4 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha\cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 求 α 的范围使得 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

笔记 **找这两个数列 $x_n' = 2n\pi, x_n'' = 2n\pi + n^{1-\alpha}$ 的方法:** 当 $\alpha > 1$ 时, 待定 c_n, 令 $x_n' = 2n\pi$,$x_n'' = 2n\pi + c_n$. 我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'' - x_n'\right) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right)\right] \neq 0$. 注意到

$$\begin{aligned}
f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right) &= (2n\pi + c_n)^\alpha\cos\frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha\cos\frac{1}{2n\pi} \\
&= (2n\pi)^\alpha\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha\cos\frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha\cos\frac{1}{2n\pi} \\
&= (2n\pi)^\alpha\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{(2n\pi + c_n)^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= (2n\pi)^\alpha\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= (2n\pi)^\alpha\left[\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha - 1\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= (2n\pi)^\alpha\left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi} + O\left(\frac{c_n}{n^2}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi}+O\left(\frac{c_n}{n^2}\right)\right],\quad n\to\infty.$$

于是取 $c_n = n^{1-\alpha}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, 并且由上式可得

$$\begin{aligned} f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right) &= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right] \\ &= \alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\to\alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}\neq 0,\quad n\to\infty. \end{aligned}$$

故我们可取 $x_n' = 2n\pi, x_n'' = 2n\pi + n^{1-\alpha}$.

证明 当 $\alpha \leqslant 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在, 由Cantor 定理可知,f 在 $(0,1)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \in (0,1]$ 时, 由条件可知, 对 $\forall x \geqslant 1$, 都有

$$|f'(x)| = \left|\left(x^{\alpha}\cos\frac{1}{x}\right)'\right| = \left|\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}\right| + \left|x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \alpha + 1.$$

因此 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1,+\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, 故由Cantor 定理可知,$f$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

当 $\alpha > 1$ 时,令 $x_n' = 2n\pi, x_n'' = 2n\pi + n^{1-\alpha}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n''-x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha} = 0.$$

此时我们有

$$\begin{aligned} f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right) &= \left(2n\pi+n^{1-\alpha}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+n^{1-\alpha}}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+n^{1-\alpha}}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{\left(2n\pi+n^{1-\alpha}\right)^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left[\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}-1\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right] \\ &= \alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\to\alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}\neq 0,\quad n\to\infty. \end{aligned}$$

故根据定理 0.1可知 f 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

□

例题 0.5 设 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, n=1,2,\cdots$ 是一致连续函数且 $f_n\to f$, 证明:f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(0,+\infty). \tag{19}$$

由 f_N 一致连续, 可知 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$, 有

$$|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon. \tag{20}$$

于是对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$, 结合 (19) 和 (20) 式, 我们有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<3\varepsilon.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

□

例题 0.6 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且对任何 $x \geqslant 0$ 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 并说明如果去掉一致连续则结论不对.

笔记 证明的想法即把点拉回到 $[0,1]$ 并用一致连续来解决. 反例可积累

$$f(x) = \frac{x\sin(\pi x)}{1+x^2\sin^2(\pi x)}.$$

核心想法: 分段放缩、取整平移、一致连续.

证明 由 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x,y \in [0,+\infty)$ 且 $|x-y| \leqslant \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{21}$$

把 $[0,1]$ 做 N 等分, 其中 $N = \frac{1}{\delta}$. 由 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{i}{N}+n\right) = 0, i = 0,1,\cdots,N$ 可知, 存在 $N' \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \geqslant N'$, 有

$$\left|f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right| < \varepsilon, \quad i = 0,1,\cdots,N. \tag{22}$$

从而对 $\forall x \geqslant 1+N'$, 一定存在 $i \in \{0,1,\cdots,N-1\}, n \in \mathbb{N}\cap[N',+\infty)$, 使得 $x \in \left[\frac{i}{N}+n, \frac{i+1}{N}+n\right]$. 注意到此时

$$\left|x - \left(\frac{i}{N}+n\right)\right| \leqslant \left|\left(\frac{i+1}{N}+n\right) - \left(\frac{i}{N}+n\right)\right| = \frac{1}{N} = \delta.$$

于是结合 (21) 和 (22) 式我们就有

$$|f(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right| + \left|f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right| < 2\varepsilon.$$

故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

□

例题 0.7 设 $\lim_{n\to\infty} f(\sqrt{n})$ 存在且 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续. 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证明 设 $\lim_{n\to\infty} f(\sqrt{n}) = a$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$,

$$|f(\sqrt{n}) - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N. \tag{23}$$

由 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x,y \geqslant 0 且 |x-y| < \delta. \tag{24}$$

对 $\forall x \geqslant 0$, 取 $n_x = [x^2]$. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{n_x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - [x^2]}{x + \sqrt{[x^2]}} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{[x^2]}} = 0.$$

故存在 $X > N$, 使得

$$|x - \sqrt{n_x}| < \delta, \quad \forall x > X.$$

此时 $\sqrt{n_x} > X > N$. 于是由(23)和(24)式可得, 对 $\forall x > X$, 有

$$|f(x) - a| \leqslant |f(\sqrt{n_x}) - a| + |f(x) - f(\sqrt{n_x})| \leqslant 2\varepsilon.$$

故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

□