

0.1 CMC 红宝书高代习题

例题 0.1 设 $n \geq 3$, n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

计算 $\text{rank}(A)$.

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} (n-1)a+1 & a & \cdots & a \\ (n-1)a+1 & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)a+1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix} \\ &= [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{1-n}$, 则 $|A| \neq 0$, $\text{rank}(A) = n$. 若 $a = 1$, 易知 $\text{rank}(A) = 1$. 若 $a = \frac{1}{1-n}$, 容易看出 A 的前 $n-1$ 行、 $n-1$ 列构成的子矩阵为对角占优矩阵, 行列式不为 0. 所以 $\text{rank}(A) = n-1$. \square

例题 0.2 设 A 为 2023 阶非零实矩阵. A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式且 $A_{ij} = a_{ij}$. 求 A 的秩与行列式.

解 由于 $A \neq O$, 不妨设 $a_{kl} \neq 0$. A 按第 k 行展开有

$$|A| = a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + \cdots + a_{kn}^2 \neq 0.$$

故 $\text{rank}(A) = 2023$.

由已知有 A 的伴随矩阵 $A^* = A^T$. 所以由 $AA^* = |A|E$ 有 $AA^T = |A|E$. 两边取行列式有

$$|A|^2 = |A|^{2023}.$$

注意到 $|A| \neq 0$, 所以 $|A|^{2021} = 1$. 又 $|A|$ 为实数, 所以 $|A| = 1$. \square

例题 0.3 设 1013 阶实方阵 A 可对角化且满足

$$A^2 - 1013A + 2022E = O$$

和

$$\text{rank}(A - 2E) = 3.$$

求 A 的特征值.

解 由于 A 可对角化, 故 A 的每个特征值的代数重数等于其几何重数. 令 λ 为 A 的特征值, 则有

$$\lambda^2 - 1013\lambda + 2022 = 0,$$

即

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1011) = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1011.$$

故 A 的特征值只可能是 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1011$. 注意到 $\text{rank}(A - 2E) = 3 < 1013$. 所以 $|A - 2E| = 0$, 故 2 是 A 的一个特征值.

由于可对角化, 特征值 2 的代数重数等于其几何重数. 由于 $(A - 2E)x = O$ 的解空间维数为 $1013 - \text{rank}(A - 2E) = 1010$, 因此 2 作为 A 的特征值, 其代数重数为 1010. 故 A 还有其他特征值, 且一定为 1011. 其代数重数为 $1013 - 1010 = 3$. 至此 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 2$ (1010 重), $\lambda_2 = 1011$ (3 重). \square

例题 0.4

解

☐

例题 0.5

解

☐

例题 0.6

解

☐

例题 0.7

解

☐

例题 0.8

解

☐

例题 0.9

解

☐

例题 0.10

解

☐

例题 0.11

解

☐

例题 0.12

解

☐

例题 0.13

解

☐

例题 0.14

解

☐

例题 0.15

解

☐

例题 0.16

解

☐

例题 0.17

解

☐

例题 0.18

解

☐

例题 0.19

解

☐

例题 0.20

解

☐

例题 0.21

解

☐

例题 0.22

解

☐

例题 0.23

解

☐

例题 0.24

解

☐

例题 0.25

解

☐

例题 0.26

解

☐

例题 0.27

解

☐

例题 0.28

解

☐

例题 0.29

解

☐

例题 0.30

解

☐

例题 0.31

解

☐

例题 0.32

解

☐