

## 0.1 复变函数的极限和连续性

### 定义 0.1

设  $E$  是复平面上一点集, 如果对每一个  $z \in E$ , 按照某一规则有一确定的复数  $w$  与之对应, 我们就说在  $E$  上确定了一个单值复变函数, 记为  $w = f(z)$  或  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .  $E$  称为  $f$  的定义域, 点集  $\{f(z) : z \in E\}$  称为  $f$  的值域.  $w = f(z)$  的值域所在的平面称为  $w$  平面.

如果对于  $z \in E$ , 对应的  $w$  有几个或无穷多个, 则称在  $E$  上确定了一个多值函数.

复变函数是定义在复平面上的, 它的值域也在复平面上, 因此复变函数也称为映射或变换, 它把一个复平面上的平面点集映成另一个复平面上的平面点集. 与  $z \in E$  对应的点  $w = f(z)$  称为  $z$  在映射  $f$  下的像点,  $z$  就称为  $w$  的原像. 点集  $\{f(z) : z \in E\}$  也称为  $E$  在映射  $f$  下的像, 记为  $f(E)$ . 如果  $f(E) \subseteq F$ , 就说  $f$  把  $E$  映入  $F$ , 或者说  $f$  是  $E$  到  $F$  中的映射. 如果  $f(E) = F$ , 就说  $f$  把  $E$  映为  $F$ , 或者说  $f$  是  $E$  到  $F$  上的满变换.

**注** 我们知道, 任意一个复数  $z (z \neq 0)$  都有无穷多个辐角. 因此, 辐角函数  $w = \operatorname{Arg} z$  是一个多值函数. 它的定义域是  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (在  $z = 0$  处辐角无意义).

### 定义 0.2

设  $L$  是  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内一条简单曲线,  $z_0$  是  $L$  的起点,  $z_1$  是  $L$  的终点. 当  $z$  沿  $L$  从  $z_0$  连续变动到  $z_1$  时,  $\overrightarrow{Oz}$  所旋转的角称作  $\operatorname{Arg} z$  在  $L$  上的改变量, 简称辐角改变量, 记作  $\Delta_L \operatorname{Arg} z$ . 显然有

$$\Delta_L \operatorname{Arg} z = -\Delta_{L^-} \operatorname{Arg} z.$$

并且必存在  $k \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$\Delta_L \operatorname{Arg} z = \arg z_2 - \arg z_1 + 2k\pi.$$

### 定义 0.3

若  $w = f(z)$  是复平面点集  $E$  到  $F$  的满变换, 且对  $F$  中的每一点  $w$ , 在  $E$  中有一个(或至少有两个)点与之相对应, 则在  $F$  上确定了一个单值(或多值)函数, 记作  $z = f^{-1}(w)$ , 它就称为函数  $w = f(z)$  的反函数或称为变换  $w = f(z)$  的逆变换; 若  $z = f^{-1}(w)$  也是  $F$  到  $E$  的单值变换, 则称  $w = f(z)$  是  $E$  到  $F$  的双方单值变换或一一变换.

**注** 从上述反函数的定义可以看出

$$w = f[f^{-1}(w)], \quad \forall w \in F.$$

且当反函数也是单值函数时, 还有

$$z = f^{-1}[f(z)], \quad \forall z \in E.$$

### 定义 0.4

设  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  是一个复变函数, 如果对区域  $D$  中任意两点  $z_1, z_2 (z_1 \neq z_2)$ , 必有  $f(z_1) \neq f(z_2)$ , 就称  $f$  在  $D$  中是单叶的,  $D$  称为  $f$  的单叶性区域.

### 命题 0.1

如果  $f$  在  $D$  中是单叶的,  $f(D) = G$ , 那么  $f$  是  $D$  到  $G$  之上的一一映射.

**证明** 由单叶的定义和双射的定义立得.

□

**定理 0.1**

设  $z = x + iy$ , 用  $u$  和  $v$  记  $w = f(z)$  的实部和虚部, 则有

$$w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$



**注** 这个定理表明: 一个复变函数等价于两个二元的实变函数  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$ .

**笔记** 例如  $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , 它等价于  $u = x^2 - y^2$  和  $v = 2xy$  两个二元函数; 再如  $w = |z|$ , 它等价于  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $v = 0$  这两个二元函数.

**定义 0.5**

设  $f$  是定义在点集  $E \subseteq \mathbb{C}$  上的一个复变函数,  $z_0$  是  $E$  的一个极限点,  $a$  是给定的一个复数. 如果对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $\varepsilon$  有关的  $\delta > 0$ , 使得当  $z \in E$  且  $0 < |z - z_0| < \delta$  时有  $|f(z) - a| < \varepsilon$ , 就说当  $z \rightarrow z_0$  时  $f(z)$  有极限  $a$ , 记作  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ .

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $\varepsilon$  有关的正数  $\delta$ , 使得当  $z \in B(z_0, \delta) \cap E$  且  $z \neq z_0$  时有  $f(z) \in B(a, \varepsilon)$ .

特别地,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$  定义为: 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $R(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $|z| > R(\varepsilon)$  且  $z \in E$  时, 有  $f(z) \in B(a, \varepsilon)$ .

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  定义为: 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $z \in B(z_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$  时, 有  $|f(z)| > \varepsilon$ .

**定理 0.2**

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  是定义在点集  $E \subseteq \mathbb{C}$  上的一个复变函数,  $z_0$  是  $E$  的一个极限点,  $a$  是给定的一个复数.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$  的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta.$$



**笔记** 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

**证明** 设  $a = \alpha + i\beta$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 由下面的不等式

$$|u(x, y) - \alpha| \leq |f(z) - a| \leq |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|,$$

$$|v(x, y) - \beta| \leq |f(z) - a| \leq |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|$$

知道,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$  的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta.$$

**命题 0.2**

设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \eta$ , 试证函数  $f(z)$  在点  $z_0$  的某一去心邻域内是有界的.



**证明** 因

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \eta,$$

则对任给的  $\varepsilon > 0$ , 有  $\delta > 0$ , 只要  $0 < |z - z_0| < \delta$ , 就有

$$|f(z) - \eta| < \varepsilon,$$

由此可得

$$|f(z)| - |\eta| < \varepsilon,$$

于是

$$|f(z)| < |\eta| + \varepsilon,$$

所以, 在点  $z_0$  的去心邻域  $N_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$  内  $f(z)$  是有界的.

□

### 定义 0.6

我们说  $f$  在点  $z_0 \in E \subseteq \mathbb{C}$  连续, 如果

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

如果  $f$  在集  $E$  中每点都连续, 就说  $f$  在集  $E$  上连续.

♣

### 定理 0.3

复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续的充要条件是  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  作为二元函数在  $(x_0, y_0)$  处连续.

♡

**证明** 由定理 0.2 易得.

□

### 命题 0.3

设函数  $f(z)$  在点  $z_0$  连续, 且  $f(z_0) \neq 0$ , 试证  $f(z)$  在点  $z_0$  的某一邻域内恒不为零.

♦

**证明** 因  $f(z)$  在点  $z_0$  连续, 则对任给的  $\varepsilon > 0$ , 有  $\delta > 0$ , 只要  $|z - z_0| < \delta$ , 就有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

特别, 取  $\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$ , 则由上面的不等式得

$$|f(z)| > |f(z_0)| - \varepsilon = |f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0,$$

因此,  $f(z)$  在点  $z_0$  的  $\delta$  邻域  $N_\delta(z_0)$  内就恒不为零.

□

### 定义 0.7

$f$  在  $E \subseteq \mathbb{C}$  上一致连续, 是指对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在只与  $\varepsilon$  有关的  $\delta > 0$ , 对  $E$  上任意的  $z_1, z_2$ , 只要  $|z_1 - z_2| < \delta$ , 就有  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ .

♣

### 定理 0.4

设  $E$  是  $\mathbb{C}$  中的紧集,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  在  $E$  上连续, 那么

- (1)  $f$  在  $E$  上有界;
- (2)  $|f|$  在  $E$  上能取得最大值和最小值, 即存在  $a, b \in E$ , 使得对每个  $z \in E$ , 都有

$$|f(z)| \leq |f(a)|, \quad |f(z)| \geq |f(b)|;$$

- (3)  $f$  在  $E$  上一致连续.

♡

**证明**

- (1) 由 Heine-Borel 定理, 只需证明  $f(E)$  是紧集. 为此, 取  $f(E)$  的一个开覆盖  $\mathcal{F}$ . 任取开集  $U \in \mathcal{F}$ , 由  $f$  的连续性,  $f^{-1}(U)$  是开集, 因此  $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{F}\}$  是  $E$  的开覆盖. 由  $E$  的紧性, 该开覆盖存在有限子覆盖  $\{f^{-1}(U_k) | 1 \leq k \leq m\}$ . 由此得  $f(E)$  的有限子覆盖  $\{U_k | 1 \leq k \leq m\}$ .

(2) 记  $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$ , 于是对每一自然数  $n$ , 必有  $z_n \in E$ , 使得

$$M - \frac{1}{n} \leq |f(z_n)| \leq M. \quad (1)$$

因为  $E$  是  $\mathbb{C}$  中的紧集, 由 Heine-Borel 定理,  $E$  为有界闭集. 再由 Bolzano-Weierstrass 定理,  $\{z_n\}$  必有极限点, 即有一收敛子列  $\{z_{n_k}\}$ , 设其极限为  $a$ , 则  $a \in E$ . 把(1)式写成

$$M - \frac{1}{n_k} \leq |f(z_{n_k})| \leq M,$$

让  $k \rightarrow \infty$ , 并注意到  $f$  在  $a$  处的连续性, 即得  $|f(a)| = M$ . 同理可证, 存在  $b \in E$ , 使得  $|f(b)| = \inf\{|f(z)| : z \in E\}$ .

(3) 任取  $\varepsilon > 0$ . 对任意  $z \in E$ , 由  $f$  的连续性,  $f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2}))$  为包含  $z$  的开集. 因此有  $\delta_z > 0$ , 使

$$B(z, \delta_z) \subseteq f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2})). \quad (2)$$

显然集族  $\{B(z, \frac{\delta_z}{2}) | z \in E\}$  是  $E$  的开覆盖. 由  $E$  的紧性, 存在有限子覆盖  $\{B(z_k, \frac{\delta_k}{2}) | 1 \leq k \leq n\} \supseteq E$ .

取  $\delta = \frac{\min\{\delta_k | 1 \leq k \leq n\}}{2}$ . 对任意  $p, q \in E$  且满足  $|p - q| < \delta$ , 不妨设  $p \in B(z_1, \frac{\delta_1}{2})$ . 由命题??, 有

$$|z_1 - q| \leq |z_1 - p| + |p - q| < \frac{\delta_1}{2} + \delta \leq \delta_1.$$

因此  $p, q \in B(z_1, \delta_1)$ , 再由(2)式知  $f(p), f(q) \in B(f(z_1), \frac{\varepsilon}{2})$ , 从而

$$|f(p) - f(q)| \leq |f(p) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此得  $f$  在  $E$  上一致连续.

□