0.1 Jordan 标准型的求法

分析矩阵结构的方法:

(1) 计算行列式因子对于某些具有简单结构的矩阵 (如上 (下) 三角矩阵、类上 (下) 三角矩阵), 可以通过选取适当的子式, 计算出行列式因子, 再得到不变因子和初等因子. 比如, Frobenius 块和 Jordan 块就是利用这种方法的典型例子.

(2) 计算极小多项式因为矩阵的极小多项式是整除关系下最大的不变因子, 所以极小多项式确定了最大 Jordan 块的阶数.

(3) 计算特征值的几何重数因为特征值的几何重数等于其 Jordan 块的个数, 所以计算几何重数有助于 Jordan 标准型的确定.

命题 0.1

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (1 \leqslant i \leqslant n-1)$, 又 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 求证: $\mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = r$ 的充要条件是 $(\lambda - \lambda_0) \nmid d_r(\lambda)$ 但 $(\lambda - \lambda_0) \mid d_{r+1}(\lambda)$.

证明 证法一:$\mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = r$ 当且仅当特征值 λ_0 的几何重数为 $n-r$; 这当且仅当特征值 λ_0 的 Jordan 块有 $n-r$ 个; 由不变因子之间的整除关系可知, 这当且仅当后 $n-r$ 个不变因子能被 $\lambda-\lambda_0$ 整除, 而前 r 个不变因子不能被 $\lambda-\lambda_0$ 整除.

证法二:由命题??可知, $\mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = r$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{d_i(\lambda_0),0} = n-r$; 由不变因子之间的整除关系可知, 这当且仅当 $d_i(\lambda_0) \neq 0\ (1 \leqslant i \leqslant r)$ 且 $d_i(\lambda_0) = 0\ (r+1 \leqslant i \leqslant n)$; 最后由余数定理即得结论. □

命题 0.2

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,U 是 V 的非零 $\varphi-$ 不变子空间. 设 λ_0 是限制变换 $\varphi|_U$ 的特征值, 证明:$\varphi|_U$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数不超过 φ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数.

证明 Jordan 块的个数等于特征值的几何重数, 即线性无关的特征向量的个数. 设 $\varphi|_U$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数为 r, 则 $\varphi|_U$ 关于特征值 λ_0 有 r 个线性无关的特征向量, 它们也都是 φ 关于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量, 从而 φ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块至少有 r 个.

也可用纯代数的方法 (矩阵的秩) 进行证明, 请读者自行思考完成. □

例题 0.1 求下列 n 阶矩阵的 Jordan 标准型, 其中 $a \neq 0$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ & a & a & \cdots & a \\ & & a & \cdots & a \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

注 本题同时利用分析矩阵结构的三种方法计算其 Jordan 标准型.

解 解法一:由命题??可知,$\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1, \cdots, 1, (\lambda-a)^n$, 这也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(a)$.

解法二:显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-a)^n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式是 $\lambda-a$ 的某个幂. 设 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{J}_n(0)$, 即特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块, 它满足 $\boldsymbol{N}^{n-1} \neq \boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{N}^n = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A} = a(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^2 + \cdots + \boldsymbol{N}^{n-1})$. 注意到

$$(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{I}_n)^{n-1} = a^{n-1}(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^2 + \cdots + \boldsymbol{N}^{n-1})^{n-1} = a^{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1} \neq \boldsymbol{O}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不适合多项式 $(\lambda-a)^{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式只能是 $(\lambda-a)^n$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组是 $1, \cdots, 1, (\lambda-a)^n$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(a)$.

解法三:显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 a, 我们来计算它的几何重数. 注意到 $\mathrm{r}(a\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = n-1$, 故特征值 a 的几何重数

为 $n-\mathrm{r}(a\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=1$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中关于特征值 a 的 Jordan 块只有一个, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(a)$. □

命题 0.3 (秩一阵的 Jordan 标准型)

设 $n(n>1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1, 证明:

若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$.

若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

证明 解法一:由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$ 及引理**??**可知, 存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$. 由特征值的降价公式可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n-1}(\lambda-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})$, 再由所有特征值之和等于矩阵的迹可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$, 则特征值 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 的几何重数等于 1, 特征值 0 的几何重数等于 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 则特征值 0 的代数重数是 n, 几何重数是 $n-1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

解法二:特征多项式的计算同解法一,又由常见矩阵的极小多项式 (4) 可知,$\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}))$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda,\cdots,\lambda,m(\lambda)$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

解法三:直接利用 Jordan 标准型来解最为简单. 特征多项式和特征值的计算同解法一, 由于还不知道每个特征值的几何重数, 故设 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(0),\boldsymbol{J}_{s_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{s_l}(\lambda_l)\}$(因为 Jordan 块对应的特征值为 0 时秩会减 1, 所以单独把特征值为 0 的 Jordan 块分出来), 其中 $\lambda_j\neq 0\,(1\leqslant j\leqslant l)$. 由于相似关系不改变矩阵的秩, 故 $\boldsymbol{J}$ 的秩也为 1, 即有 $(r_1-1)+\cdots+(r_k-1)+s_1+\cdots+s_l=1$. 于是只有以下两种情况成立: 第一种情况是 $l=1,s_1=1,\lambda_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$, 且所有的 $r_i=1$, 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$. 第二种情况是某个 $r_i=2$, 其余的 $r_i=1$ 且 $l=0$, 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$. □

命题 0.4

设 $n(n>1)$ 阶矩阵 A 的秩为 1, 求证:

(1) A 是幂等矩阵的充要条件是 $\mathrm{tr}\,(A)=1$,

(2) A 是幂零矩阵的充要条件是 $\mathrm{tr}\,(A)=0$.

证明 由命题 0.3的结论即得. □

例题 0.2 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a+2&1&0&0\\5&3&1&0\\7&6&b+4&1\end{pmatrix}$, 求 A 的 Jordan 标准型.

解 显然 A 的特征值全为 1, 首先我们来计算特征值 1 的几何重数. 考虑矩阵

$$A-I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a+2&0&0&0\\5&3&0&0\\7&6&b+4&0\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a+2\neq 0$ 且 $b+4\neq 0$ 时, $\mathrm{r}(A-I_4)=3$, 于是特征值 1 的几何重数等于 1, 从而只有一个 Jordan 块, 因此 A 的 Jordan 标准型是 $J_4(1)$.

(2) 当 $a+2=0$ 或 $b+4=0$ 时, $\mathrm{r}(A-I_4)=2$, 于是特征值 1 的几何重数等于 2, 从而有两个 Jordan 块. 进一步我们来计算 A 的极小多项式.

(2.1) 若 $a+2=0$ 和 $b+4=0$ 中只有一个成立, 容易验证 $(A-I_4)^2\neq O$, 但 $(A-I_4)^3=O$, 于是 A 的极小多项式是 $(\lambda-1)^3$, 从而不变因子组为 $1,1,\lambda-1,(\lambda-1)^3$, 因此 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,J_3(1)\}$.

(2.2) 若 $a+2=0$ 和 $b+4=0$ 都成立, 容易验证 $(A-I_4)^2=O$, 于是 A 的极小多项式是 $(\lambda-1)^2$, 从而不变因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 因此 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_2(1),J_2(1)\}$. □

例题 0.3 设 $J=J_n(0)$ 是特征值为零的 $n(n\geqslant 2)$ 阶 Jordan 块, 求 J^2 的 Jordan 标准型.

解 显然 J^2 的特征值全为 0 且 $\mathrm{r}(J^2) = n-2$, 于是特征值 0 的几何重数等于 2, 从而有两个 Jordan 块. 接下去计算 J^2 的极小多项式, 注意到 $J^n = O, J^{n-1} \neq O$.

(1) 当 $n = 2m$ 时, λ^m 是 J^2 的极小多项式, 于是 J^2 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, \lambda^m, \lambda^m$, 因此 J^2 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_m(0), J_m(0)\}$.

(2) 当 $n = 2m+1$ 时, λ^{m+1} 是 J^2 的极小多项式, 于是 J^2 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, \lambda^m, \lambda^{m+1}$, 因此 J^2 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_m(0), J_{m+1}(0)\}$.

另外, 也可以用行列式因子的讨论来替代几何重数的讨论. 注意到 $\lambda I_n - J^2$ 的右上角有一个 $n-2$ 阶子式等于 $(-1)^{n-2}$, 故 J^2 的 $n-2$ 阶行列式因子为 1, 从而前 $n-2$ 个不变因子都是 1, 后面再用极小多项式的讨论即可得到结论. □

例题 0.4 求下列 $n(n \geqslant 2)$ 阶矩阵的 Jordan 标准型:

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & c & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & c \end{pmatrix}.$$

解 利用例题 0.3的记号和结论, 显然 $A = cI_n + J^2$. 设 P 是可逆矩阵, 使得 $P^{-1}J^2P$ 是 J^2 的 Jordan 标准型, 则 $P^{-1}AP = cI_n + P^{-1}J^2P$ 就是 A 的 Jordan 标准型. 具体地, 当 $n = 2m$ 时, A 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{J_m(c), J_m(c)\}$; 当 $n = 2m+1$ 时, A 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{J_m(c), J_{m+1}(c)\}$. □

我们可以自然地考虑如下问题: 如果已知 n 阶矩阵 A 的 Jordan 准型, 那么对任意的正整数 m, A^m 的 Jordan 标准型应该有怎样的形状呢?(后续的命题 0.7和命题 0.8完美解决了这个问题) 首先, 我们可以把这个问题化约到 Jordan 块的情形. 设 A 的 Jordan 标准型为 $J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)\}$, 则 A^m 相似于 $J^m = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)^m, J_{r_2}(\lambda_2)^m, \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)^m\}$, 因此要求 A^m 的 Jordan 标准型, 只要求每一个 $J_{r_i}(\lambda_i)^m$ 的 Jordan 标准型即可. 若 $\lambda_i \neq 0$, 则由例题 0.1类似的讨论可知, $J_{r_i}(\lambda_i)^m$ 的 Jordan 标准型为 $J_{r_i}(\lambda_i^m)$. 若 $\lambda_i = 0$, 则例题 0.3处理了 $m = 2$ 的情形, 不过类似的讨论很难推广到 $m \geqslant 3$ 的情形, 换言之, 只依靠几何重数和极小多项式还不能完全确定 $J_{r_i}(0)^m$ 的 Jordan 标准型. 解决这个问题可以有代数和几何两种方法, 几何方法 (利用 Jordan 标准型的几何意义) , 而代数方法 (利用矩阵的秩) 则需要下面的定理 0.1.

命题 0.5

设 V 是复数域上的 n 维线性空间,A 是 V 上的一个线性变换或 n 阶矩阵, 则 A 极小多项式为

$$m(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}, 1 \leqslant n_i \leqslant n, i = 1, 2, \cdots, s.$$

的充要条件是 n_i 就是 A 的 Jordan 标准型中所有特征值为 λ_i 的 Jordan 块的最大阶数. ♠

证明 **必要性:** 已知条件同上述命题, 根据定理**??**, 不妨设矩阵 A 的不变因子组为

$$\begin{gathered}(\lambda-\lambda_1)^{n_1^1}(\lambda-\lambda_1)^{n_2^1}\cdots(\lambda-\lambda_1)^{n_s^1}, \\ (\lambda-\lambda_1)^{n_1^2}(\lambda-\lambda_2)^{n_2^2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\lambda-\lambda_1)^{n_1^{t-1}}(\lambda-\lambda_2)^{n_2^{t-1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s^{t-1}}, \\ (\lambda-\lambda_1)^{n_1^t}(\lambda-\lambda_2)^{n_2^t}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s^t},\end{gathered}$$

其中 $0 \leqslant n_j^1 \leqslant n_j^2 \leqslant \cdots \leqslant n_j^{t-1} \leqslant n_j^t = n_j, j = 1, 2, \cdots, s$. 由此可知矩阵 B 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1^1}, (\lambda-\lambda_1)^{n_1^2}, \cdots, (\lambda-\lambda_1)^{n_1^{t-1}}, (\lambda-\lambda_1)^{n_1^t},$$

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_2^1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2^2},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{n_2^{t-1}},(\lambda-\lambda_2)^{n_2^t},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda-\lambda_1)^{n_s^1},(\lambda-\lambda_s)^{n_s^2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s^{t-1}},(\lambda-\lambda_s)^{n_s^t}.$$

由定理**??**可知, 初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j^m}(j=1,\cdots,s,m=1,\cdots,t)$ 对应矩阵 A 的 Jordan 标准型 J 中的特征值为 λ_j 的 n_j^m 阶 Jordan 块. 又因为 $0\leqslant n_j^1\leqslant n_j^2\leqslant\cdots\leqslant n_j^{t-1}\leqslant n_j^t=n_j,j=1,2,\cdots,s$, 所以 J 中特征值为 λ_j 的所有 Jordan 块中阶数最大为 $n_j^t=n_j,j=1,2,\cdots,s$.

充分性: 由条件可设 A 的特征值为 λ_i 的 Jordan 块中阶数最大的为 $J_{n_i}(\lambda_i)$, 则由引理**??**知 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 的初等因子为 $(x-\lambda_i)^{n_i}$, 也是 A 的初等因子, 并且是 A 的所有根为 λ_i 的初等因子中次数最大的. 于是由初等因子和不变因子的定义知,A 的次数最高的不变因子为

$$d_k(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s},$$

否则就与 $d_i(x)|d_{i+1}(x)$ 矛盾! 因此由定理**??**知 A 的极小多项式为

$$(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}.$$

□

定理 0.1 (Jordan 标准型的计算)

设 A 是复数域上的 n 阶矩阵且有极小多项式

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

且 $\lambda_j,1\leqslant j\leqslant s$ 互不相同. 那么 A 的主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的块数为 $N_j=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)$. 并且其中 $k,1\leqslant k\leqslant n_j$ 级 Jordan 块个数为

$$N_j(k)=\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{k+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{k-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^k.$$

其中约定 $\mathrm{r}((A-\lambda_jI_n)^0)=n$.

♡

注 这个定理 0.1告诉我们, n 阶矩阵 A 的 Jordan 标准型被若干个非负整数, 即 $\{\mathrm{r}((A-\lambda_iI_n)^j)\mid\lambda_i$ 为 A 的特征值, $1\leqslant j\leqslant n\}$ 完全决定. 因此从理论上说, 我们可以不计算矩阵 A 的不变因子或初等因子, 改为计算上述若干个矩阵的秩, 也可以求出 A 的 Jordan 标准型. 进一步, 我们还可以得到如下矩阵相似的判定准则命题 0.6.

证明 由于 N_j 就是 λ_j 的几何重数, 故 $N_j=\dim V_{\lambda_j}=n-\mathrm{r}((A-\lambda_jI_n))$.

设 P 为非异阵, 使得 $P^{-1}AP=J=\operatorname{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2),\cdots,J_{r_s}(\lambda_s)\}$ 为 A 的 Jordan 标准型, 其中 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 是由所有主对角元为 λ_i 的 Jordan 块组成的分块主对角阵. 注意到

$$(A-\lambda_0I_n)^k=P\operatorname{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1-\lambda_0)^k,J_{r_2}(\lambda_2-\lambda_0)^k,\cdots,J_{r_s}(\lambda_s-\lambda_0)^k\}P^{-1},$$

故 $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)=\sum\limits_{i=1}^{s}\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^k)$.

(i) 当 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 时, $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^k)=r_i$. 当 $\lambda_i=\lambda_0$ 时, 若 $r_i<k$, 则 $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^k)=0$; 若 $r_i\geqslant k$, 则 $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^k)=r_i-k$.

(ii) 当 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 时, $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^{k-1})=r_i$. 当 $\lambda_i=\lambda_0$ 时, 若 $r_i<k-1$, 则 $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^{k-1})=0$; 若 $r_i\geqslant k-1$, 则 $\mathrm{r}(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda_0)^{k-1})=r_i-k+1$.

于是当 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 时,$\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)=r_i-r_i=0$;

当 $\lambda_i=\lambda_0$ 时, 若 $r_i<k-1$, 则 $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)=0-0=0$;

若 $r_i=k-1$, 则 $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)=0-(k-1-k+1)=0$;

若 $r_i\geqslant k$, 则 $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)=(r_i-k)-(r_i-k+1)=1$.

因此 $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)$ 等于特征值为 λ_0 且阶数大于等于 k 的 Jordan 块的个数. 同理, $\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^k)-\mathrm{r}((A-\lambda_0I_n)^{k+1})$ 等于特征值为 λ_0 且阶数大于等于 $k+1$ 的 Jordan 块的个数, 从而特征值为 λ_0 的 k 阶

Jordan 块 $J_k(\lambda_0)$ 在 A 的 Jordan 标准型 J 中出现的个数为

$$\begin{aligned}&[\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^{k-1})-\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^k)]-[\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^k)-\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^{k+1})]\\=&\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^{k-1})+\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^{k+1})-2\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^k).\end{aligned}$$

□

命题 0.6

设 A,B 为 n 阶矩阵, 证明: 它们相似的充要条件是对 A 或 B 的任一特征值 λ_0 以及任意的 $1\leqslant k\leqslant n$, 有 $\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^k)=\mathrm{r}((B-\lambda_0 I_n)^k)$.

证明 必要性由相似矩阵特征多项式相同显然, 现证充分性. 由已知条件及命题**??**可知,

$$\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^{n+1})=\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^n)=\mathrm{r}((B-\lambda_0 I_n)^n)=\mathrm{r}((B-\lambda_0 I_n)^{n+1}).$$

因此由定理 0.1可知, 特征值为 λ_0 的 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda_0)$ 在 A,B 的 Jordan 标准型中出现的个数相同, 从而 A,B 有相同的 Jordan 标准型, 于是它们相似. □

命题 0.7

设 $J=J_n(a)$ 是特征值为 $a\neq 0$ 的 n 阶 Jordan 块, 证明:J^m 的 Jordan 标准型为 $J_n(a^m)$, 其中 m 为非零整数.

证明 先处理 $m\geqslant 1$ 的情形, 采用几何重数的方法来做, 行列式因子和极小多项式的方法也可以做, 请读者自行补充完成. 显然 J^m 的所有特征值都为 a^m. 作分解 $J=aI_n+N$, 其中 $N=J_n(0)$, 则有

$$J^m=(aI_n+N)^m=a^mI_n+\mathrm{C}_m^1a^{m-1}N+\cdots+N^m,$$

于是 $\mathrm{r}(J^m-a^mI_n)=\mathrm{r}(\mathrm{C}_m^1a^{m-1}N+\cdots+N^m)=n-1$, 从而特征值 a^m 的几何重数等于 1, 因此 J^m 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块, 即 J^m 的 Jordan 标准型为 $J_n(a^m)$.

再处理 $m=-1$ 的情形. 显然 J^{-1} 的所有特征值都为 a^{-1}. 注意到

$$J^{-1}=(aI_n+N)^{-1}=a^{-1}I_n-a^{-2}N+\cdots+(-1)^{n-1}a^{-n}N^{n-1},$$

故 $\mathrm{r}(J^{-1}-a^{-1}I_n)=\mathrm{r}(-a^{-2}N+\cdots+(-1)^{n-1}a^{-n}N^{n-1})=n-1$, 从而特征值 a^{-1} 的几何重数等于 1, 因此 J^{-1} 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块, 即 J^{-1} 的 Jordan 标准型为 $J_n(a^{-1})$.

最后处理 $m\leqslant -1$ 的情形. 注意到 $J^m=(J^{-1})^{-m}$, 故由前面两个结论即得 J^m 的 Jordan 标准型为 $J_n((a^{-1})^{-m})=J_n(a^m)$. □

命题 0.8

设 $J=J_n(0)$ 是特征值为零的 n 阶 Jordan 块, 证明: $J^m(m\geqslant 1)$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_q(0),\cdots,J_q(0),J_{q+1}(0),\cdots,J_{q+1}(0)\}$, 其中有 $m-r$ 个 $J_q(0)$, r 个 $J_{q+1}(0)$.

注 这个命题是例题 0.3的推广.

解 若 $m\geqslant n$, 则 $J^m=O$, 这就是它的 Jordan 标准型. 下设 $m<n$, 并作带余除法: $n=mq+r$, 其中 $0\leqslant r<m$. 我们先来计算 J^m 的幂的秩, 再利用定理 0.1来计算 Jordan 块的个数. 注意到

$$\mathrm{r}((J^m)^k)=n-mk,\ 0\leqslant k\leqslant q;\ \mathrm{r}((J^m)^k)=0,\ k\geqslant q+1.$$

(1) 当 $1\leqslant k<q$ 时, $J_k(0)$ 的个数为 $\mathrm{r}((J^m)^{k-1})+\mathrm{r}((J^m)^{k+1})-2\mathrm{r}((J^m)^k)=(n-m(k-1))+(n-m(k+1))-2(n-mk)=0$;
(2) $J_q(0)$ 的个数为 $\mathrm{r}((J^m)^{q-1})+\mathrm{r}((J^m)^{q+1})-2\mathrm{r}((J^m)^q)=(n-m(q-1))+0-2(n-mq)=m-r$;
(3) $J_{q+1}(0)$ 的个数为 $\mathrm{r}((J^m)^q)+\mathrm{r}((J^m)^{q+2})-2\mathrm{r}((J^m)^{q+1})=(n-mq)+0-0=r$;
(4) 当 $k>q+1$ 时, $J_k(0)$ 的个数为 0.

因此 J^m 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_q(0),\cdots,J_q(0),J_{q+1}(0),\cdots,J_{q+1}(0)\}$, 其中有 $m-r$ 个 $J_q(0)$, r 个 $J_{q+1}(0)$. □

命题 0.9

设 m 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 没有公共的特征值, 且 A,B 的 Jordan 标准型分别为 J_1,J_2, 又 C 为 $m\times n$ 矩阵, 求证: $M=\begin{pmatrix} A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_1,J_2\}$.

注 这个命题可用来化简矩阵, 消去其非主对角块, 使其剩下低阶的主对角块.

证明 证法一: 设 $P_1(\lambda),P_2(\lambda),Q_1(\lambda),Q_2(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵, 使得

$$P_1(\lambda)(\lambda I_m-A)Q_1(\lambda)=\Lambda_1=\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_m(\lambda)\},$$
$$P_2(\lambda)(\lambda I_n-B)Q_2(\lambda)=\Lambda_2=\mathrm{diag}\{g_1(\lambda),g_2(\lambda),\cdots,g_n(\lambda)\}$$

分别是 A,B 的法式. 考虑如下 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} P_1 & O\\ O & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_m-A & -C\\ O & \lambda I_n-B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O\\ O & Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Lambda_1 & D\\ O & \Lambda_2\end{pmatrix},$$

其中 $D=-P_1CQ_2=(d_{ij}(\lambda))$ 是 $m\times n$ λ-矩阵. 由于 A,B 没有公共的特征值, 故对任意的 $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$, $(f_i(\lambda),g_j(\lambda))=1$, 从而存在 $u_{ij}(\lambda),v_{ij}(\lambda)$, 使得 $f_i(\lambda)u_{ij}(\lambda)+g_j(\lambda)v_{ij}(\lambda)=1$. 将 λ-矩阵 $\begin{pmatrix} \Lambda_1 & D\\ O & \Lambda_2\end{pmatrix}$ 的第 i 列乘以 $-u_{ij}(\lambda)d_{ij}(\lambda)$ 加到第 $m+j$ 列上, 再将第 $m+j$ 行乘以 $-v_{ij}(\lambda)d_{ij}(\lambda)$ 加到第 i 行上, 则可以消去 D 的 (i,j) 元素, 因此 M 的特征矩阵相抵于对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\Lambda_1,\Lambda_2\}$. 再由$\lambda$-矩阵和初等因子的基本性质 (2) 可知, M 的初等因子组是 $f_1(\lambda),\cdots,f_m(\lambda),g_1(\lambda),\cdots,g_n(\lambda)$ 的准素因子组, 而 $f_1(\lambda),\cdots,f_m(\lambda)$ 的准素因子组是 A 的初等因子组, $g_1(\lambda),\cdots,g_n(\lambda)$ 的准素因子组是 B 的初等因子组, 因此 M 的初等因子组是 A,B 的初等因子组的无交并集, 于是 M 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_1,J_2\}$.

证法二: 由命题**??**可知, 矩阵方程 $AX-XB=C$ 存在唯一解 $X=X_0$. 考虑如下相似变换:

$$\begin{pmatrix} I_m & X_0\\ O & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -X_0\\ O & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -AX_0+X_0B+C\\ O & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O\\ O & B\end{pmatrix},$$

因此 M 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_1,J_2\}$. □

例题 0.5 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ b & a+1 & 0 & 0\\ 3 & b & 2 & 0\\ 5 & 4 & a & 2\end{pmatrix}$, 求 A 的 Jordan 标准型.

解 显然, A 的特征值为 $1,a+1,2,2$. 对 A 进行分块 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & O\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中所有的分块都是二阶方阵. 下面按 $a+1$ 是否等于 $1,2$ 进行分类讨论.

(1) 若 $a\neq 0$ 及 $a\neq 1$, 则可有两种方法来处理. **方法一** (几何重数): 经计算可知特征值 2 的几何重数等于 1, 因此 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,a+1,J_2(2)\}$. **方法二** (命题 0.9): 显然 A_{11} 可对角化, A_{22} 不可对角化, 但 A_{22} 此时就是 Jordan 块 $J_2(2)$, 且 A_{11},A_{22} 无公共特征值, 故可消去 A_{21}, 因此 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,a+1,J_2(2)\}$.

(2) 若 $a=0$ 及 $b\neq 0$, 则利用**方法二** (命题 0.9) 可得, A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_2(1),2,2\}$.

(3) 若 $a=0$ 及 $b=0$, 则利用**方法二** (命题 0.9) 可得, A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,1,2,2\}$.

(4) 若 $a=1$ 及 $b\neq 0$, 则利用**方法一** (几何重数) 可得, A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,J_3(2)\}$.

(5) 若 $a=1$ 及 $b=0$, 则利用**方法一** (几何重数) 可得, A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,2,J_2(2)\}$. □