0.1 有限扩张

定义 0.1

设 K 是域 F 的扩域, K 作为域 F 上线性空间的维数称为 K 对 F 的**扩张次数**, 记为 $[K:F]$. 若 $[K:F]<+\infty$, 则称 K 是 F 的**有限扩张**.

命题 0.1

设 $F(\alpha)$ 是 F 的单扩张. α 是 F 上代数元时, $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张且 $[F(\alpha):F]=\deg(\alpha,F)$;
当 α 是 F 上超越元时, $F(\alpha)$ 是 F 的无限扩张.

证明

□

定义 0.2

设 K 是域 F 的扩域. 若 $\forall\alpha\in K$, α 都是 F 上代数元, 则称 K 是域 F 的**代数扩张**, 否则称为**超越扩张**.

定理 0.1

设 K 是域 F 的扩域, $\alpha\in K$, 则下列条件等价:

(1) $F(\alpha)$ 是 F 的代数扩张;

(2) α 在 F 上是代数的;

(3) $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). $F(\alpha)$ 是 F 的代数扩张, 而 $\alpha\in F(\alpha)$, 故 α 在 F 上是代数的.

(2) $\Rightarrow$ (3). α 在 F 上是代数的, 故由定理??知 $[F(\alpha):F]=\deg(\alpha,F)<+\infty$, 因而 $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $[F(\alpha):F]=n<+\infty$. $\forall\beta\in F(\alpha)$, 则 $1,\beta,\cdots,\beta^n$ 是 $F(\alpha)$ 中 $n+1$ 个元素, 一定线性相关, 即存在不全为零的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in F$, 使 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\beta^i=0$. 故 β 是 F 上代数元, 故 $F(\alpha)$ 是 F 的代数扩张.

□

推论 0.1

若 K 是 F 的有限扩张, 则 K 一定是 F 的代数扩张.

证明 设 $[K:F]=n<+\infty$. $\forall\beta\in K$, 则 $1,\beta,\cdots,\beta^n$ 是 K 中 $n+1$ 个元素, 一定线性相关, 即存在不全为零的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in F$, 使 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\beta^i=0$. 故 β 是 F 上代数元, 故 K 是 F 的代数扩张.

□

定理 0.2

设 E 是域 F 的扩域, K 是域 E 的扩域, 即有 $K\supseteq E\supseteq F$, 则当且仅当 $[K:F]<+\infty$ 时有 $[K:E]<+\infty$, $[E:F]<+\infty$, 而且此时有

$$[K:F]=[K:E][E:F]. \tag{1}$$

证明 设 $[K:F]<+\infty$, 由条件知 E 是 F 上线性空间 K 的子空间, 则 $[E:F]<+\infty$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 K 对 F 的基, 即 $\forall\alpha\in K$, $\exists x_i\in F\subseteq E(1\leqslant i\leqslant n)$, 使 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也是 E 上线性空间 K 的一组生成元, 故 $[K:E]<+\infty$.

反之, 设 $[K:E]=r$, $[E:F]=s$. 又在 E 上的线性空间 K 中取基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 在 F 上的线性空间 E 中取基

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. 设 $\alpha \in K$, 则 $\exists x_i \in E(1 \leqslant i \leqslant r)$, 使得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i.$$

又对每个 $x_i \in E$, $\exists y_{ij} \in F(1 \leqslant j \leqslant s)$, 使得 $x_i = \sum\limits_{j=1}^{s} y_{ij}\beta_j$, 因而

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} y_{ij} \alpha_i \beta_j.$$

故 $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s\}$ 是 F 上线性空间 K 的一组生成元. 设 $y_{ij} \in F$, 而

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} y_{ij} \alpha_i \beta_j = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} y_{ij} \beta_j \right) \alpha_i = 0.$$

由 $\sum\limits_{j=1}^{s} y_{ij}\beta_j \in E$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 E 上线性空间 K 的基知 $\sum\limits_{j=1}^{s} y_{ij}\beta_j = 0(1 \leqslant i \leqslant r)$. 又 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 F 上线性空间 E 的基, 故 $y_{ij} = 0(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s)$. 于是 $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s\}$ 是 F 上线性空间 K 的一组基, 于是是式 (1) 成立.

□

推论 0.2

设 K 是域 F 的扩域, 若 $[K : F]$ 是素数, 则 K 与 F 之间无中间域, 即不存在域 E, 使得 $K \supset E \supset F$.

证明 若 E 为中间域, 即 $K \supset E \supset F$, 则由定理 0.2知

$$[K : F] = [K : E][E : F].$$

因 $[K : F]$ 是素数, 故 $[E : F] = 1$ 或 $[E : F] = [K : F]$. 若 $[E : F] = 1$, 则 $E = F$; 若 $[E : F] = [K : F]$, 则 $E \cong K$, 即 $E = K$. 这都导出矛盾, 故本推论成立.

□

推论 0.3

设 K 是域 F 的有限扩张, 则有中间域的升链

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_r = K,$$

其中 F_{i+1} 是 F_i 的单代数扩张, $i = 0, 1, \cdots, r-1$ (此升链称为**单代数扩张升链**).
反之, 若 K 有单代数扩张升链, 则 K 是 F 的有限扩张.

证明 设 $[K : F] < +\infty$ 且 $K \neq F$ ($K = F$ 时推论显然成立). 取 $\alpha_1 \in K \setminus F$, $F_1 = F(\alpha_1)$. 于是 $F = F_0 \subseteq F_1$. 若 $F_1 = K$, 则 $r = 1$. 若 $F_1 \neq K$, 由 $[K : F_1] < [K : F]$ 重复上面的做法, 有限次后得到 F_{i+1} 是 F_i 的单代数扩张,$F_{i+1} \subseteq F_i$ 且 $[K : F_r] = 1$, 从而由推论 0.3可得 $F_r = K$. 此即所求的单代数扩张升链.

反之, 由于 F_{i+1} 是 F_i 的单代数扩张, 故由定理 0.1知 $[F_{i+1} : F_i] < +\infty$, 由定理 0.2知

$$[K : F] = [K : F_{r-1}][F_{r-1} : F_{r-2}] \cdots [F_1 : F] < +\infty.$$

□

推论 0.4

设 K 是域 F 的扩域, E 为中间域. 若 E 是 F 的代数扩张, K 是 E 的代数扩张, 则 K 是 F 的代数扩张.

证明 任取 $\alpha \in K$, 即 α 是 E 上的代数元, 于是 $\mathrm{Irr}(\alpha, E) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, 其中, $a_i \in E(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由 E 是 F 的代数扩张, 故 a_i 是 F 上的代数元. 令

$$F_0 = F, \quad F_i = F_0(a_1, a_2, \cdots, a_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad F_{n+1} = F_n(\alpha).$$

于是 $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{n+1}$ 是单代数扩张升链. 故由推论 0.3知 F_{n+1} 是 F 上的有限扩张, 故由定理 0.1知 F_{n+1} 为代数扩张, α 是 F 上的代数元, 故 K 是 F 的代数扩张.

□

定义 0.3

设 K 是域 F 的扩域, K 中在 F 上为代数元的元素集合 K_0 称为 K 在 F 上的**代数闭包**.

♣

定理 0.3

设 K 是域 F 的扩域, K_0 为 K 在 F 上的代数闭包, 则 K_0 是含于 K 的 F 的最大代数扩张且 $\forall \delta \in K \setminus K_0, \delta$ 在 K_0 上是超越的.

♡

证明 只需证明 K_0 是 F 的扩域. 由定义就知 K_0 是 K 中 F 的最大代数扩张. 显然 $F \subseteq K_0$. 设 $\alpha, \beta \in K_0$ 且 $\beta \neq 0$, 于是有 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta^{\pm 1} \in F(\alpha, \beta) = F(\alpha)(\beta)$, 而 $F(\alpha)(\beta)$ 是 $F(\alpha)$ 的代数扩张, $F(\alpha)$ 是 F 的代数扩张. 于是由推论 0.4知 $F(\alpha, \beta)$ 是 F 的代数扩张, 因而 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta^{\pm 1}$ 均为 F 上的代数元, 即 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta^{\pm 1} \in K_0$, 故 K_0 是 K 的子域. 又 $K_0 \subseteq F$, 因此 K_0 是 F 的扩域.

$\forall \delta \in K \setminus K_0$, 假设 δ 是 K_0 上的代数元, 则由 $K_0(\delta) \supset K_0 \supseteq F$ 知 $K_0(\delta)$ 是 F 的代数扩张, 故由定理 0.1知 δ 是 F 上的代数元, 即 $\delta \in K_0$, 与已知矛盾, 故 δ 是 K_0 上的超越元.

□