0.1 反常积分收敛抽象问题

命题 0.1

设 f 为 $[a,+\infty)$ 上的非负可积函数, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在.

证明 必要性显然成立, 下证充分性令 $g(x)=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负单调递增. 由单调收敛定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ 存在. 从而

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)<+\infty.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty} g(x)<+\infty.$$

□

命题 0.2 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

(1) 存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

(2) 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\ln x_n f(x_n)=0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的 $x_n lnx_n$ 可以换成任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足 $\int_a^{\infty} a_n\mathrm{d}x=+\infty$ 即可

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=f(\theta(A)),\ A+1>\theta(A)>A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0=\lim_{A\to+\infty}\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty} f(\theta(A)),\ \lim_{A\to+\infty}\theta(A)=+\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若 $|f(x)|>\dfrac{1}{x\ln x},\forall x>e$, 则由 $\int_e^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=+\infty$ 可得 $\int_e^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x=+\infty$ 矛盾! 故存在 $x_1>e$ 使得 $|f(x_1)|\leqslant\dfrac{1}{x_1\ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)|>\dfrac{1}{2x\ln x},\forall x>x_1+1$, 同理可得矛盾! 因此必然存在 $x_2>x_1+1$ 使得 $|f(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{2x_2\ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{nx_n\ln x_n},n=1,2,\cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n\ln x_n\cdot|f(x_n)|=0.$$

□

命题 0.3

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 单调，则 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $xf(x)$ 单调，则 $\lim_{x\to+\infty} x\ln xf(x)=0$.

证明

(1) 不妨设 f 递减，否则用 $-f$ 代替 f，从而

$$Af(A)\geqslant\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \frac{A}{2}f(A)\leqslant\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty,\quad \int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故 $\lim_{A\to+\infty} Af(A)=0$.

(2) 不妨设 xf 递减，否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\frac{1}{2}A\ln Af(A)=Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^{A^2}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leq Af(A)\int_A^{A^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=A\ln Af(A).$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\leq A\ln Af(A)\leq 2\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

又由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.\quad \int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim_{A\to+\infty} A\ln Af(A)=0$.

□

命题 0.4

若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$，则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明

□

例题 0.1 设 $f\in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明: $\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=0$.

证明 若存在 $a>0$，使得 $f'(a)=0$，则由 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减可得

$$f'(x)=0,\quad \forall x>a.$$

此时结论显然成立.

若 $f'\neq 0,\forall x\in(0,+\infty)$，则由导数介值性可知,$f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上要么恒大于零，要么恒小于零. 于是不妨设 $f'>0,\forall x\in(0,+\infty)$，故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f'=|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，故此时 f' 在 $(0,+\infty)$ 内

闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y)\,\mathrm{d}y = f(x) - f(1).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛. 于是由命题 0.3(1)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0.$ □

例题 0.2 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x f'(x) = 0.$$

证明 由 xf' 单调可知,$g(x) \triangleq xf'$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f' = \dfrac{g(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 xf' 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) > 0$, 则存在 $C > 0$, 使得

$$xf'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a,0\},+\infty). \tag{1}$$

对 (1) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{c}{t}\,\mathrm{d}t = c\ln|x| - c\ln a.$$

令 $x \to +\infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 这与 f 有界矛盾! 于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$ 可知存在 $X > \max\{a,0\}$, 使得

$$xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x) \leqslant 0, \quad x \in (X,+\infty).$$

故 f 在 $(X,+\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

令 $x \to +\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 又 $xf'(x)$ 单调, 于是由命题 0.3(2)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x f'(x) = 0.$ □

例题 0.3 设 $f \in D[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 且f' 严格递增, 证明 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由命题??和命题??可知,$f' \in C[a,+\infty)$. 又由命题??可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 故存在 $X > 0$, 使得 f', f 在 $[X,+\infty)$ 上恒正, 且 f 在 $[X,+\infty)$ 上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,f 存在严格单调递增的反函数

$$g : [f(X),+\infty) \longrightarrow [X,+\infty).$$

于是令 $x = g(y)$, 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

又由反函数求导定理可知 $g'(y)f'(g(y)) = 1$, 并且 $f(g(y)) = y$, 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))}\mathrm{d}y.$$

因为 f', g 都严格递增趋于 $+\infty$, 所以 $\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left|\int_{f(X)}^{A} \sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant 2, \forall A \geqslant f(X).$$

故由 Dirchlet 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例题 0.4

(1) 设 f 内闭可积且 $f(x) > 0$,$x_0 > 0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty) \bigcup \{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ 是} \begin{cases} \text{收敛,} & \ell<1 \\ \text{发散,} & \ell>1 \end{cases}.$$

(2) 设 $f>0$ 内闭可积, 若有常数 $k>1$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(kx)}{f(x)}=\ell\in[0,+\infty)\bigcup\{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\text{是} \begin{cases} \text{收敛,} & \ell<\frac{1}{k} \\ \text{发散,} & \ell>\frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设 $f>0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \begin{cases} \text{收敛,} & -\infty\leqslant p<-1 \\ \text{发散,} & -1<p\leqslant+\infty \end{cases}.$$

注 第 (1) 题中当 $\ell=1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题中当 $p=1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

注 第 (3) 题的条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p$ 可改为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=p$. 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=p.$$

证明

(1) 注意到

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x)\,\mathrm{d}x\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由题设可知, 存在 $X>a$, 使得

$$\ell-\varepsilon\leqslant\frac{f(x_0+x)}{f(x)}\leqslant\ell+\varepsilon,\forall x\geqslant X.$$

从而当 $n>\dfrac{X-a}{x_0}$ 时, 就有 $a+nx_0>X$, 进而

$$a_{n+1}=\int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0)\,\mathrm{d}x\in[(\ell-\varepsilon)a_n,(\ell+\varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell-\varepsilon\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\ell+\varepsilon,\forall n>\frac{X-a}{x_0}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令 $x=e^t$, 任取 $c>0$, 则

$$\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\ln c}^{\infty} f\left(e^t\right)e^t\mathrm{d}t.$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(e^{t+\ln k}\right)e^{t+\ln k}}{f\left(e^t\right)e^t}=k\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(ke^t\right)}{f\left(e^t\right)e^t}=k\ell.$$

于是由 (**??**) 可知结论成立.

(3) 只讨论 $p\in\mathbb{R}$ 的情况, 其余 $p=\pm\infty$ 情况类似. 由题意可知,$\forall\varepsilon>0$, 存在$X>e$, 使得当$x>X$时, 有

$$p-\varepsilon\leqslant\frac{\ln f(x)}{\ln x}\leqslant p+\varepsilon\Longleftrightarrow x^{p-\varepsilon}\leqslant f(x)\leqslant x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$

再由比较判别法即得结论.

□

注 上述例题第 (3) 题的证明中, 令 $\varepsilon \to 0$, 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为 X 是与 ε 有关的. 因此只有固定 ε 时, 才有 $\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$ 成立. 故再利用比较判别法式, 不能令 $\varepsilon \to 0$.

例题 0.5 若 $f \in C^1[0,+\infty)$ 且 $f(0) > 0, f'(x) > 0$. 若 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)+f'(x)}dx < \infty$, 证明 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)}dx < \infty$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 由条件可知 $f(x)$ 严格递增且恒正, 从而 $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{f(x)+f'(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| dx = \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f(x)\left[f(x)+f'(x)\right]} dx \leqslant \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{f^2(x)} df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)}\right| + \frac{1}{f(x)+f'(x)}.$$

又 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)+f'(x)} dx < +\infty$, 故 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$. □

例题 0.6 设非负函数 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)dx \leqslant M$, 证明 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ 收敛且 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx \leqslant M$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 证法一:$\forall a < b$, 注意到 $1 - x \leqslant e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. 从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x)\,dx \leqslant \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,dx \leqslant M.$$

于是

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |x| f(x)\,dx + M.$$

令 $k \to +\infty$ 得 $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$. 再由 a, b 的任意性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant M$.

证法二:由Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varliminf_{k\to+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,dx \leqslant M.$$

□

例题 0.7 设 $f \in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f'(x)| \leqslant M, \forall x \geqslant 0, \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证明 由条件可得

$$\int_0^{+\infty} \left|f^2(x)f'(x)\right| dx \leqslant M \int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$

从而 $\lim_{x\to+\infty} f^3(x)$ 存在. 由 $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$ 及命题 0.2(1)可知, 存在 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $f(x_n) \to 0$. 故 $\lim_{x\to+\infty} f^3(x) = \lim_{n\to\infty} f^3(x_n) = 0$, 因此 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

例题 0.8 设 $f \in D^2[0,+\infty)$ 且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2 dx < \infty.$$

证明 $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty$.

证明 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x} < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^{x} |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^{x} f(y)f''(y)\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

由命题 0.1可知, 只须找一个 $x_n \to +\infty$, 使 $f(x_n)f'(x_n)$ 极限存在即可.

由于 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$, 故由命题 0.2(1)可知存在 $a_n \to +\infty$, 使得 $\lim_{n\to\infty} |f(a_n)|^2 = 0$, 从而 $\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$. 于是再由命题**??**可知, 存在 $x_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} [f^2(x_n)]' = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由命题 0.1及(2)式可知结论成立. □

例题 0.9

证明

□