第 1 章 集合与点集

1.1 集合及其运算

定义 1.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的**元素** (或**元**).

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a **属于** A, 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a **不属于** A, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$. ♣

注 集合的表示方法:

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}.$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

定义 1.2

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$.

集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的**幂集**, 记为 2^A 或 $\mathcal{P}(A)$. ♣

注 $A = B \iff A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

由 n 个元素形成的集合 E 的幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

定义 1.3

设 $\forall \alpha \in \Gamma, A_\alpha$ 都是集合, 则 $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为**集族**或集合族, 称 Γ 为**指标集**,α 为**指标**. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为**集列**或**集合列**, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$. ♣

定义 1.4

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, \text{ s.t. } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

设 A, B 为两个集合, 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B **互不相交**. ♣

定义 1.5

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集, 我们称 X 为**全集**. 此

时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的**补集**或**余集**, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X \setminus B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

定义 1.6 (笛卡尔积/直积集)

设 $n \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^n$ 为集族, 称

$$\{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡尔积**, 记为 $A_1 \times \cdots \times A_n$.
若 $(x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots, x_n') \in A_1 \times \cdots \times A_n$, 则 $(x_1, \cdots, x_n) = (x_1', \cdots, x_n')$ 当且仅当 $x_i = x_i', i = 1, 2, \cdots, n$.
特别地, 记 $\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{n\text{个}} = A_1^n$.

♣

定理 1.1 (集合的运算及性质)

设 A, B, E 为全集 X 中的子集,$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(1) **广义交换律和结合律**: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) $A \cup A = A, A \cap A = A$.

(3) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing$,
$A \cap (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A \cap B_\alpha)$, $\quad A \cup (\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A \cup B_\alpha)$.

(7) $X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.

(8) $A \setminus B = A \cap B^c$.

(9) 若 $A \supseteq B$, 则 $A^c \subseteq B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subseteq B^c$.

(10) $A \setminus B^c = B \setminus A^c$.

(11) $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$.

(13) $B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Leftrightarrow B^c = E$.

♡

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10) $x \in A \setminus B^c \iff x \in A$且$x \notin B^c \iff x \in A$且$x \in B \iff x \in B$且$x \notin A^c \iff x \in B \setminus A^c$.

(11) 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in \Gamma$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$. 故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in \Gamma$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$, 即 $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$. 故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \cap \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha$.

(13) 证法一:

$$\begin{aligned} B &= (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) = (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A) \\ &= E^c \cup (A^c \cap A) = E^c \cup \varnothing = E^c \\ &\iff B^c = E. \end{aligned}$$

证法二:显然 $B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \iff B^c = ((E \cap A)^c \cap (E^c \cup A))^c$, 故

$$\begin{aligned} B^c &= ((E \cap A)^c \cap (E^c \cup A))^c \\ &= (E \cap A) \cup (E^c \cup A)^c = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \\ &= E \cap (A \cup A^c) = E \cap X = E. \end{aligned}$$

证法三:

$$\begin{aligned} B &= (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) = (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A) \\ &= (E^c \cap E^c) \cup (A^c \cap E^c) \cup (A^c \cap A) \cup (E^c \cap A) \\ &= E^c \cup (A \cup E)^c \cup \varnothing \cup (E^c \cap A) \\ &= E^c \cup (A \cup E)^c = (E \cap (A \cup E))^c = E^c \\ &\iff B^c = E. \end{aligned}$$

□

定理 1.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$; (ii) $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$, 即 $\forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$, 因此,$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$. 因此,$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证.

□

定义 1.7 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

笔记 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 1.3 (集合对称差的性质)

(1) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(2) 交换律:$A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.

(3) 结合律:$A\triangle B = B\triangle A$.

(4) 交与对称差满足分配律:$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

(5) $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

(6) $A^c\triangle B^c = A\triangle B; A = A\triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.

(7) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E\triangle A = B$(实际上 $E = B\triangle A$).

证明

(1) 由对称差集的定义及定理 1.1(6)可得

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) = \left[(A\cap B^c)\cup B\right]\cap\left[(A\cap B^c)\cup A^c\right] \\ &= (A\cup B)\cap(A^c\cap B^c) = (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \\ &= (A\cup B)\setminus(A\cap B)\,. \end{aligned}$$

(2) 证明是显然的.

(3) 证明是显然的.

(4) $x\in A\setminus B\triangle C \Leftrightarrow x\in A;\ x\notin B\triangle C = (B\setminus C)\cup(C\setminus B) \Leftrightarrow x\in A;\ x\in B\cap C$, 或$x\notin B$且$x\notin C \Leftrightarrow x\in A\setminus B\setminus C$或$x\in A\cap B\cap C \Leftrightarrow x\in(A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)$, 即

$$A\setminus B\triangle C = (A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C).$$

于是

$$\begin{aligned} A\triangle(B\triangle C) &= (A\setminus B\triangle C)\cup(B\triangle C\setminus A) \\ &= (A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\setminus C\setminus A)\cup(C\setminus B\setminus A) \\ &= (A\setminus B\setminus C)\cup(B\setminus A\setminus C)\cup(C\setminus A\setminus B)\cup(A\cap B\cap C) \\ &= ((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\setminus C)\cup(C\setminus A\triangle B) \\ &= (A\triangle B\setminus C)\cup(C\setminus A\triangle B) \\ &= (A\triangle B)\triangle C. \end{aligned}$$

即

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C.$$

(5) $x\in A\cap(B\setminus C) \Leftrightarrow x\in A$且$x\in B\setminus C \Leftrightarrow x\in A$且$x\in B, x\notin C \Leftrightarrow x\in A\cap B$且$x\notin A\cap C \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$, 即

$$A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C).$$

于是

$$\begin{aligned} A\cap(B\triangle C) &= A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B)) \\ &= (A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B)) \\ &= (A\cap B\setminus A\cap C)\cup(A\cap C\setminus A\cap B) \\ &= (A\cap B)\triangle(A\cap C). \end{aligned}$$

(6) $x\in A^c\setminus B^c \Leftrightarrow x\in A^c, x\notin B^c \Leftrightarrow x\notin A, x\in B \Leftrightarrow x\in B\setminus A$, 即

$$A^c\setminus B^c = B\setminus A.$$

于是

$$A^c\triangle B^c = (A^c\setminus B^c)\cup(B^c\setminus A^c) = (B\setminus A)\cup(A\setminus B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\triangle B.$$

(7) 若 $E\triangle A = B$, 则

$$E = E\triangle\varnothing = E\triangle(A\triangle A) = (E\triangle A)\triangle A = B\triangle A.$$

反之, 令 $E = B\triangle A$, 则

$$E\triangle A = (B\triangle A)\triangle A = B\triangle(A\triangle A) = B\triangle\varnothing = B.$$

所以, $\exists E$, s.t. $E\triangle A = B$.

□

定义 1.8 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

♣

命题 1.1

设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 为两个集列.

(1) 当 $\{A_n\}$ 为递减集合列时, $\lim\limits_{k\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n (\forall N \in \mathbb{N})$.

当 $\{A_n\}$ 为递增集合列时, $\lim\limits_{k\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n (\forall N \in \mathbb{N})$.

(2) 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i (n \geqslant 2)$. 证明:$\{B_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 为一个彼此不相交的集列, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(3) 如果 $\{A_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 为单调减 (即 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$) 的集列, 证明:

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

并且其中各项互不相交.

(4) 证明: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. 反之并不成立, 并举例说明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \not\supseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

特别地, 如果 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 都是单调增的集列, 证明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

♠

笔记 这个命题 (2) 给出了一种构造互不相交集列 (不改变其并集) 的方法.

证明

(1) 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1} A_n \cap \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n$. 另一方面, 由 $\{A_n\}$ 为递减集合列可

得
$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{N-1} \supseteq A_n, \forall k = N, N+1, \cdots.$$
因此 $\bigcap\limits_{k=1}^{N-1} A_n \supseteq \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n$, 故再根据 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1} A_n \cap \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_n$.

对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{N-1} A_n \cup \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n$. 另一方面, 由 $\{A_n\}$ 为递增集合列可得
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_{N-1} \subseteq A_N.$$
因此 $\bigcup\limits_{k=1}^{N-1} A_n \subseteq A_N \subseteq \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n$, 故再根据 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{N-1} A_n \cup \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n$ 可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_n$.

(2) 证法一: 显然, $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \subseteq A_i$, 故 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

反之, 若 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, ①$x \in A_1$, 则 $x \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$; ②$x \notin A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, $x \in A_{m+1}$, 则 $x \in A_{m+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = B_{m+1} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. 因此, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. 综上得到
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$
易见, 由 $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \subseteq A_i$ 知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

反之, 若 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, ①$x \in A_1$, 则 $x \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$; ②$x \notin A_i, i = 1, 2, \cdots, m$, $x \in A_{m+1}$, 则 $x \in A_{m+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = B_{m+1} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. 因此, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. 综上得到
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$
证法二 (归纳法):当 $n = 1$ 时, 有
$$\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1 = B_1 = \bigcup_{i=1}^{1} B_i.$$
假设 $n = k$ 时, 有 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, 则
$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = B_{k+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \left(A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i.$$
因此, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

再证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. 事实上, 由
$$A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{i} A_j = \bigcup_{j=1}^{i} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. 同理, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. (或者由 $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i} A_j \subseteq A_i$ 推得上式). 于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(3) 因为 $A_1 \setminus A_2 \subseteq A_1, A_2 \setminus A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1, \cdots, A_n \setminus A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1$, 所以

$$(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq A_1.$$

反之, 对 $\forall x \in A_1$, 有两种情形:

①$x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$;

②$x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使 $x \notin A_{i_0}$, 且 $x \in A_i, i = 1, 2, \cdots, i_0 - 1$, 则 $x \in A_{i_0-1} \setminus A_{i_0}$. 于是

$$x \in (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

$$A_1 \subseteq (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

综合上述得到

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(4) 因为 $A_n \cap B_n \subseteq A_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$; $A_n \cap B_n \subseteq B_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right). \tag{1.1}$$

反之, 设 $A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$; $B_1 = \varnothing$, $B_n = \{n-1\}, n = 2, 3, \cdots$. 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing \nsupseteq \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

特别地, 由(1.1)式知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

另一方面, 对 $\forall x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, 即 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 且 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. 则必有 $x \in A_{n_1}, x \in B_{n_2}$, 不妨设 $n_1 \leqslant n_2$. 又因 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为递增集列, 故

$$x \in A_{n_1} \subseteq A_{n_2},$$

于是

$$x \in A_{n_2} \cap B_{n_2} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n),$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n).$$

综合上述, 有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

□

定义 1.9 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

♣

命题 1.2

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列, 我们有

1. 若 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty} A_k.$$

2. 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty} A_k.$$

♠

证明

1. 由于 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.1可知

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$

2. 由于 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.1可知

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

□

命题 1.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$\text{(i)} E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k); \quad \text{(ii)} E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k).$$

证明

□

定理 1.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

$$\text{(i)} \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个} A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j \text{且} k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$\text{(ii)} \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x : \text{除有限个} A_k \text{ 外, 都含有} x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 \text{且} k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supseteq \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 (i) 设 $x \in \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n = 1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此 x 属于无穷多个 A_n.

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x \in A_{n_k}, k = 1, 2, \cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

(ii) 若 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 自然除了 $A_1, \cdots, A_{j_0-1}$ 这有限个集合外, 其他 $A_k (k \geqslant j_0)$ 都含有 x.

反之, 若除有限个 A_k 外, 都含有 x, 则存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 从而得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k$.

由 (i) (ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k \supseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k.$$

□

例题 1.1 设 $A_{2k-1} = \left(0, \frac{1}{k}\right), A_{2k} = (0, k), k = 1, 2, \cdots$, 求 $\varlimsup_{n\to+\infty} A_n$ 和 $\varliminf_{n\to+\infty} A_n$.

解 解法一: 由定理 1.4可得

$$\varlimsup_{n\to+\infty} A_n = \{x \mid \exists \text{无穷个} n, \text{s. t.} x \in A_n\} = (0, +\infty).$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n = \{x \mid \text{只有有限个} n, \text{s. t.} x \notin A_n\} = \varnothing.$$

解法二: 根据上、下限集的定义知

$$\varlimsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}(0, +\infty) = (0, +\infty).$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\varnothing = \varnothing.$$

□

例题 1.2 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n = 0, 1, 2, \cdots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n = 1, 2, \cdots$, 求 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ 与 $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

解 注意到

$$[0, 1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [0, 2)$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能"除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$, $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0, 2)$.

□

命题 1.4

设 $f(x)$ 为 E 上的一个实函数,c 为任何实数,

$$E(f > c) = \{x \in E \mid f(x) > c\}, \quad E(f \leqslant c) = \{x \in E \mid f(x) \leqslant c\}$$

等. 证明:

(1) $E(f > c) \cup E(f \leqslant c) = E$.

(2) $E(f \geqslant c) = E(f > c) \cup E(f = c)$.

(3) 当 $c \leqslant d$ 时,$E(f > c) \cap E(f \leqslant d) = E(c < f \leqslant d)$.

(4) 当 $c \geqslant 0$ 时,$E(f^2 > c) = E(f > \sqrt{c}) \cup E(f < -\sqrt{c})$.

(5) 当 $f \geqslant g$ 时,$E(f > c) \supseteq E(g > c)$.

(6) $E(f \geqslant c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(c \leqslant f < c + n)$.

(7) $E(f < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \leqslant c - \frac{1}{n}\right)$.

♠

证明

(1)

$$\begin{aligned}E(f>c)\cup E(f\leqslant c)&=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cup\{x\in E\mid f(x)\leqslant c\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>c\text{ 或 }f(x)\leqslant c\}=E.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}E(f>c)\cup E(f=c)&=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cup\{x\in E\mid f(x)=c\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>c\text{ 或 }f(x)=c\}=\{x\in E\mid f(x)\geqslant c\}=E(f\geqslant c).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}E(f>c)\cap E(f\leqslant d)&=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cap\{x\in E\mid f(x)\leqslant d\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>c\text{ 且 }f(x)\leqslant d\}=\{x\in E\mid c<f(x)\leqslant d\}\\&=E(c<f\leqslant d).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})&=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}\}\cup\{x\in E\mid f(x)<-\sqrt{c}\}\\&=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}\text{ 或 }f(x)<-\sqrt{c}\}=\{x\in E\mid f^2(x)>c\}\\&=E(f^2>c).\end{aligned}$$

(5) $x\in E(g>c)\Leftrightarrow x\in E$, 且$g(x)>c\Rightarrow x\in E$, 且$f(x)\geqslant g(x)>c\Leftrightarrow x\in E(f>c)$. 等价于

$$E(f>c)\supseteq E(g>c).$$

(6) 显然,$E(c\leqslant f<c+n)\subseteq E(f\geqslant c)$, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)\subseteq E(f\geqslant c).$$

另一方面, 对 $\forall x\in E(f\geqslant c)$, 即 $f(x)\geqslant c$. 则必有充分大的 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $c\leqslant f(x)<c+n_0$, 故 $x\in E(c\leqslant f<c+n_0)$. 于是

$$x\in E(c\leqslant f<c+n_0)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

这就得到

$$E(f\geqslant c)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

综合上述, 有

$$E(f\geqslant c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

(7) 因为 $f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n}\Rightarrow f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n}<c$, 故

$$E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subseteq E(f<c),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subseteq E(f<c).$$

另一方面, 对 $\forall x\in E(f<c)$, 即 $x\in E$ 且 $f(x)<c$. 则必有 $n_0\in\mathbb{N}$, s. t. $f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n_0}$. 即 $x\in E\left(f\leqslant c-\dfrac{1}{n_0}\right)$. 从而

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right),\quad E(f<c)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$

综合上述, 有

$$E(f<c)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$

□

命题 1.5

设 $\{f_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为 E 上的实函数列, 且关于 n 单调增, 即

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \cdots, \quad \forall x \in E,$$

并且 $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)=f(x)$. 证明: 对任何实数 c, 有

(1) $E(f>c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n>c)=\lim\limits_{n \to +\infty} E(f_n>c)$.

(2) $E(f \leqslant c)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c)=\lim\limits_{n \to +\infty} E(f_n \leqslant c)$.

证明

(1) 证法一: 设 $x \in E(f>c)$, 则 $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)=f(x)>c$. 于是,$\exists N \in \mathbb{N}$,s.t. 当 $n_0>N$ 时, 有 $f_{n_0}(x)>c$. 从而,$x \in E(f_{n_0}>c) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n>c)$,$E(f>c) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n>c)$.

反之, 如果 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n>c)$, 则 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,s.t.$x \in E(f_{n_0}>c)$. 由于 f_n 关于 n 单调增, 故有 $f(x)=\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \geqslant f_{n_0}(x)>c$,$x \in E(f>c)$. 从而,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n>c) \subseteq E(f>c)$.

综合上述, 有

$$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n>c).$$

因为 f_n 单调增, 故 $E(f_n>c) \subseteq E(f_{n+1}>c)$, 从而

$$\lim_{n \to +\infty} E(f_n>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n>c).$$

证法二: 如果命题 1.5(2)不是利用命题 1.5(1)的结论证得, 则

$$E(f>c)=E \setminus E(f \leqslant c) \xlongequal{\text{命题 1.5(2)}} E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c) \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \setminus E(f_n \leqslant c))=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n>c).$$

(2) 证法一: 因为 f_n 关于 n 单调增, 故 $f(x)=\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \geqslant f_n(x)$, 从而

$$E(f \leqslant c) \subseteq E(f_n \leqslant c), \quad n=1,2,\cdots,$$

$$E(f \leqslant c) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c).$$

另一方面, 如果 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c)$, 则 $x \in E(f_n \leqslant c), \forall n \in \mathbb{N}$, 即 $f_n(x) \leqslant c, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是,$f(x)=\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \leqslant c$,$x \in E(f \leqslant c)$,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c) \subseteq E(f \leqslant c)$.

综合上述, 有

$$E(f \leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c).$$

由于 f_n 关于 n 单调增, 故 $E(f_n \leqslant c)$ 关于 n 单调减, 从而

$$\lim_{n\to+\infty} E(f_n \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c).$$

证法二: 如果命题 1.5(1)不是利用命题 1.5(2)的结论证得, 则

$$E(f \leqslant c) = E \setminus E(f > c) \xlongequal{\text{命题 1.5(1)}} E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c) \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} \bigcap_{n=1}^{\infty}(E \setminus E(f_n > c)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n \leqslant c).$$

□

例题 1.3 设 $\{f_i(x)\}(i = 1, 2, \cdots)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数列, 试用点集

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

表示点集 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\lim\limits_{i\to+\infty}} f_i(x) > 0\}$.

解

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{\lim_{i\to+\infty}} f_i(x) > 0\} &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{存在无穷个} i, \text{使} f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\lim_{i\to+\infty}} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{i=N}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geqslant \frac{1}{j}\right\}.
\end{aligned}$$

□

1.2 映射

定义 1.10 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f, 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f: A \to B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subseteq B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

♣

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) f 的一个像可以存在多个原像; 但对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应, 因此今后如果构造映射 $f: A \to B$, 就必须先验证其良定义性, 即 $\forall x_1 = x_2 \in A$, 则 $f(x_1) = f(x_2) \in B$. 也即定义域中的每个元素只能有一个像.

(2) $f(A) \subseteq B$, 不一定有 $f(A) = B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subseteq 2^A$, 定义 $\phi: \mathcal{D} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 1.11 (单射、满射和双射)

设 $f: A \to B$, 则

1. 若 B 中每个元素最多只有一个原像, 即对 $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ 所含元素个数为 0 或 1, 则称 f 为**单射**或**一一映射**或**一一的**.
2. 若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \varnothing, \forall y \in B$, 则称 f 为**满射**或**映上的**.
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**或**一一对应**.

♣

定义 1.12 (逆映射)

设 $f: A \to B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1}: B \to A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的**逆映射**. 自然 f 也是 f^{-1} 的逆映射, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$.

♣

笔记 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

公理 1.1 (选择公理 (AC))

设 $\mathcal{F}$ 是一个非空集合族, 且 $\mathcal{F}$ 中的每个元素都是非空集合. 那么存在一个函数

$$f: \mathcal{F} \to \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

使得对任意 $A \in \mathcal{F}$, 有 $f(A) \in A$. 这样的函数 f 称为**选择函数** (choice function).

♡

定理 1.5

设 $f: A \to B$, 其中 $A, B \neq \varnothing$, 则

(1) f 为单射的充要条件是满足下列条件之一.

(i) $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(ii) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(iii) $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(iv) 存在 $g: B \to A$, 使得 $gf = \mathrm{id}_A$.

(2) f 为满射的充要条件是满足下列条件之一.

(i) $f(A) = B$.

(ii) 存在 $g: B \to A$, 使得 $fg = \mathrm{id}_B$.

(3) f 为双射的充要条件是存在 $g: B \to A$, 使得

$$gf = \mathrm{id}_A, \quad fg = \mathrm{id}_B.$$

此时必有 $g = f^{-1}$. 即有两个交换图, 如图 1.1所示.

♡

笔记

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[dl, "f^{-1}"] \\
A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[dl, "f"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

图 1.1

证明

□

定义 1.13 (映射的乘积)

设映射 $f: A \to B, g: B \to C$, 定义 $g \circ f: A \to C$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 g 与 f 的**复合映射**或**乘积**. $g \circ f$ 也常简记为 gf.

♣

定理 1.6 (映射的乘法满足结合律)

若有 $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$, 则有

$$h(gf) = (hg)f.$$

♡

笔记 由映射的乘法满足结合律可知在多个映射相乘时, 可以不加括号. 特别地, $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 均可简记作 hgf.

证明 事实上, 对 $\forall x \in A$ 有

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) = (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x).$$

□

定义 1.14

设映射 $f: A \to B, A_0 \subseteq A$, 定义映射 $i: A_0 \to A$ 满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称 i 为 A_0 到 A 中的**嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射 $f: A \to B$ 与映射 $g: A_0 \to B$ 满足 $gi = f$, 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的**限制**, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**或**开拓**. 即图 1.2为交换图.

♣

笔记

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

图 1.2

命题 1.6

设一列映射 $f_i: A_i \to A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.

(2) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.

(3) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

(4) 若 $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $(f_n \cdots f_2 f_1)^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_n^{-1}$.

♠

证明

(1)

(2)

(3)

□

命题 1.7 (映射的基本性质)

对于映射 $f: X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y, \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq X, \{B_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq Y$, 则下列事实成立:

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 $f(A) \subseteq f(B)$; 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, 则 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(2) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha); f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(B_\alpha)$.

(3) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$;

$f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.

(4) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$, 当且仅当 f 为满射时 “=” 成立;

$A \subseteq f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.

(5) $f(X \setminus B) = f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c = Y \setminus f^{-1}(B)$ 成立;

但 $f(X \setminus A) = f(A^c) = f(A)^c = f(X) \setminus f(A)$ 不一定成立, 只有 $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

笔记 (4)中第一条的直观理解是:B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(4)中第二条的直观理解是:$X \setminus A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$(即 f 可能不是单射).

证明

(1) 显然.

(2) 显然.

(3) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(4) (i) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$, 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subseteq A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(ii) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾.

(5) $f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)$ 成立.

解法一:

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(Y\setminus B) &\iff f(x)\in Y\setminus B\\ &\iff f(x)\in Y,\ f(x)\notin B\\ &\iff x\in f^{-1}(Y)=X,\ x\notin f^{-1}(B)\\ &\iff x\in f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B).\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}f^{-1}(Y\setminus B)&=\{x\in X\mid f(x)\in Y\setminus B\}=X\setminus\{x\in X\mid f(x)\in B\}\\ &=X\setminus f^{-1}(B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B).\end{aligned}$$

解法三:

$$\begin{aligned}f^{-1}(Y\setminus B)&=f^{-1}(Y\cap B^c)=f^{-1}(Y)\cap f^{-1}(B^c)=f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c\\ &=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B).\end{aligned}$$

$f(X\setminus A)=f(X)\setminus f(A)$ 未必成立. 只有 $f(X)\setminus f(A)\subseteq f(X\setminus A)$. 事实上,

$$\begin{aligned}y\in f(X)\setminus f(A) &\iff y\in f(X),\ y\notin f(A)\\ &\Rightarrow \exists x\in X\text{但}\, x\notin A, \text{s. t. } y=f(x)\\ &\iff \exists x\in X\setminus A, \text{s. t. } y=f(x)\\ &\iff y\in f(X\setminus A).\end{aligned}$$

因此,$f(X)\setminus f(A)\subseteq f(X\setminus A)$.

但是,$f(X)\setminus f(A)\not\supseteq f(X\setminus A)$. 从而,$f(X\setminus A)\neq f(X)\setminus f(A)$.

反例: 设 X 为多于两点的集合,$A=\{a\}\subset X$, $f:X\to Y$ 为常值映射,$f(x)\equiv y_0\in Y,\forall x\in X$. 于是

$$f(X)\setminus f(A)=\{y_0\}\setminus\{y_0\}=\varnothing\not\supseteq\{y_0\}=f(X\setminus A).$$

□

命题 1.8 (单调映射的不动点)

设 X 是一个非空集合, 且有 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A\subseteq B$ 的任意 A,B, 必有 $f(A)\subseteq f(B)$, 则存在 $T\subset\mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T)=T$.

♠

证明 作集合 S,T:

$$S=\{A:A\in\mathcal{P}(X)\text{ 且}A\subseteq f(A)\},\quad T=\bigcup_{A\in S}A(\in\mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T)=T$.

事实上, 因为由 $A\in S$ 可知 $A\subseteq f(A)$, 从而由 $A\subseteq T$ 可得 $f(A)\subseteq f(T)$. 根据 $A\in S$ 推出 $A\subseteq f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A\in S}A\subseteq f(T),\quad T\subseteq f(T).$$

另一方面, 又从 $T\subseteq f(T)$ 可知 $f(T)\subseteq f(f(T))$. 这说明 $f(T)\in S$, 我们又有 $f(T)\subseteq T$.

□

定义 1.15 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数** (**示性函数**) 定义为

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

♣

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 1.9 (特征函数的基本性质)

设 X 为固定的集合,$A,B\subset X$, 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 和集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都为 X 的子集, 则

(1) $A=B \iff \chi_A(x)=\chi_B(x)$;

$A\neq B \iff \chi_A(x)\neq\chi_B(x)$;

$A\triangle B=\{x\mid \chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$.

特别地,$A=X \iff \chi_A(x)\equiv 1$; $A=\varnothing \iff \chi_A(x)\equiv 0$.

(2) $A\subseteq B \iff \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$.

(3) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$.

(4) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$.

(5) $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)]$.

(6) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

(7) $\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$; $\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$.

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$存在 $\iff \lim\limits_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x)$存在. 而且当极限存在时, 有 $\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x)$.

证明

(1) $A=B \iff x\in A$ 等价于 $x\in B \iff \chi_A(x)=1$ 等价于 $\chi_B(x)=1 \iff \chi_A=\chi_B$.

$\chi_A\neq\chi_B \iff \exists x_0\in X,\text{s.t. }\chi_A(x_0)\neq\chi_B(x_0) \iff \exists x_0\in X,\text{s.t. }\chi_A(x_0)=0$ 且$\chi_B(x_0)=1$, 或者$\chi_A(x_0)=1$且$\chi_B(x_0)=0 \iff \exists x_0\in X,\text{s.t. }x_0\notin A$ 且$x_0\in B$, 或者$x_0\in A$且$x_0\notin B \iff A\neq B$.

$x\in A\triangle B=(A-B)\cup(B-A) \iff x\in A-B$ 或$x\in B-A \iff x\in A,x\notin B$, 或$x\in B,x\notin A \iff \chi_A(x)=1,\chi_B(x)=0$, 或$\chi_B(x)=1,\chi_A(x)=0 \iff \chi_A(x)\neq\chi_B(x)$,

即

$$A\triangle B=\{x\mid \chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}.$$

(2) $A\subseteq B \iff$ 对$\forall x\in X,x\in A$ 必有$x\in B \iff$ 对$\forall x\in X,\chi_A(x)=1$ 必有$\chi_B(x)=1 \iff \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x),\forall x\in X$.

(3) 当 $x\in A\cap B$ 时, 有 $x\in A$ 且 $x\in B$, 故

$$\chi_{A\cap B}(x)=1=1\cdot 1=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x);$$

当 $x\notin A\cap B$ 时, 必有 $x\notin A$, 则

$$\chi_{A\cap B}(x)=0=0\cdot\chi_B(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x);$$

或 $x\notin B$, 则

$$\chi_{A\cap B}(x)=0=\chi_A(x)\cdot 0=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x).$$

(4) 当 $x\in A\cap B\subseteq A\cup B$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+1-1=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in A\setminus B(\iff x\in A,x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B,x\in A\cup B)$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+0-0=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in B\setminus A$ 时, 同理有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=0+1-0=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in(A\cup B)^c$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=0+0-0=0=\chi_{A\cup B}(x).$$

再由命题 1.9(3)可知结论成立.

(5) 当 $x \in A-B$ 时, 即 $x \in A, x \notin B$, 有

$$\chi_{A-B}(x) = 1 = 1 \cdot (1-0) = \chi_A(x)[1-\chi_B(x)];$$

当 $x \notin A-B$ 时, 必有 $x \notin A$, 则

$$\chi_{A-B}(x) = 0 = 0 \cdot [1-\chi_B(x)] = \chi_A(x)[1-\chi_B(x)];$$

或 $x \in A$, 且 $x \in B$, 则

$$\chi_{A-B}(x) = 0 = 1 \cdot (1-1) = \chi_A(x)[1-\chi_B(x)].$$

(6)

$$\chi_{A\triangle B}(x) = \begin{cases} 0 = |0-0|, & \text{当} x \in (A\cup B)^c, \\ 0 = |1-1|, & \text{当} x \in A\cap B, \\ 1 = |1-0|, & \text{当} x \in A-B, \\ 1 = |0-1|, & \text{当} x \in B-A \end{cases} = |\chi_A(x)-\chi_B(x)|.$$

(7) 证法一:

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 1 \iff x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \iff \exists \alpha_0 \in \Gamma, \text{s.t.} x \in A_{\alpha_0}$$
$$\iff \exists \alpha_0 \in \Gamma, \text{s.t.} \chi_{A_{\alpha_0}}(x) = 1 \iff \max_{\alpha\in\Gamma} \chi_{A_\alpha}(x) = 1,$$

再由 $\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)$ 与 $\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$ 或为 1 或为 0 知

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = \max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x). \tag{1.2}$$

或者再从

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 0 \iff x \notin \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \iff \forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$$
$$\iff \forall \alpha \in \Gamma, \chi_{A_\alpha}(x) = 0 \iff \max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x) = 0$$

推出上面等式. 于是

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 1 - \chi_{(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c}(x) \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} 1 - \chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c}(x)$$
$$\xlongequal{(1.2)\text{式}} 1 - \max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha^c}(x) = 1 - \max_{\alpha\in\Gamma}(1-\chi_{A_\alpha}(x))$$
$$= 1 - (1 - \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)) = \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).$$

证法二:

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 1 \iff x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \iff \forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha$$
$$\iff \forall \alpha \in \Gamma, \chi_{A_\alpha}(x) = 1 \iff \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x) = 1.$$

再由 $\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)$ 与 $\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$ 或为 1 或为 0 知

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x). \tag{1.3}$$

或者再从

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 0 \iff x \notin \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \iff \exists \alpha_0 \in \Gamma, x \notin A_{\alpha_0}$$
$$\iff \exists \alpha_0 \in \Gamma,\ \chi_{A_{\alpha_0}}(x) = 0 \iff \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x) = 0$$

推出上面等式. 于是

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x) = 1 - \chi_{(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c}(x) \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} 1 - \chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c}(x)$$

$$
\xlongequal{(1.3)\text{式}} 1-\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha^c}(x)=1-\min_{\alpha\in\Gamma}(1-\chi_{A_\alpha}(x))
$$
$$
=1-(1-\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x))=\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}A_n\text{存在}\iff\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\iff\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subseteq\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\\
\iff&\text{如果}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{即有无穷个}n,\text{使得}x\in A_n,\text{则必有}n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},x\in A_n\\
\iff&\text{如果}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{即有无穷个}n,\text{使得}\chi_{A_n}(x)=1,\text{则必有}n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},\chi_{A_n}(x)=1\\
\iff&\forall x\in X,\text{若}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{则}\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},\chi_{A_n}(x)\equiv1;\text{若}x\notin\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{则此时}\chi_{A_n}(x)\equiv0\\
\iff&\text{对}\forall x\in X,\text{都有}\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x)\text{存在}.
\end{aligned}
$$

当上述极限存在时, 由上式有

$$
\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n}(x)=\begin{cases}1, & x\in\lim\limits_{n\to+\infty}A_n,\\ 0, & x\notin\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\end{cases}=\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x).
$$

□

例题 1.4 设 $\{f_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的实函数列,$E\subseteq[a,b]$, 且有

$$
\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x).
$$

若令 $E_n=\left\{x\in[a,b]\mid f_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 求集合 $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n$.

解 解法一:由

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to+\infty}}E_n&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists\text{无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,x\in E_n\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists\text{无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1\right\}\\
&=\{x\in[a,b]\mid x\in[a,b]\setminus E\}=[a,b]\setminus E\\
&=\{x\in[a,b]\mid x\in[a,b]\setminus E\}=\left\{x\in[a,b]\mid\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},x\in E_n\right\}=\underline{\lim_{n\to+\infty}}E_n
\end{aligned}
$$

知, $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}E_n=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}E_n=[a,b]\setminus E$.

解法二:

$$
\begin{aligned}
x\in[a,b]\setminus E&\iff1=\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\\
&\iff\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\\
&\iff\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},x\in E_n\\
&\iff x\in\underline{\lim_{n\to+\infty}}E_n\Rightarrow x\in\overline{\lim_{n\to+\infty}}E_n\\
&\iff\text{有无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,x\in E_n\\
&\iff\text{有无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\\
&\iff\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{[a,b]\setminus E}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in [a,b] \setminus E.$$

由此推出

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} E_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} E_n = [a,b] \setminus E.$$

□

1.3 集合的基数 (势)

定义 1.16 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$. 规定 $\varnothing \sim \varnothing$.

笔记 A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 1.7

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

(1) (反身性)$A \sim A$;

(2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

证明 证明是显然的.

□

命题 1.10

(1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$.

证明

(1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f : A \to C$ 和 $g : B \to D$. 于是令

$$\varphi : A \times B \to C \times D, \quad (a,b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall (a,b) \in A \times B$, 由 $f(a) \in C, g(b) \in D$ 可知 $(f(a), g(b)) \in C \times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f, g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 1.5 自然数集 $\mathbb{N}$ ~ 正偶数集 ~ 正奇数集 ~ 整数集 $\mathbb{Z}$.

证明 正偶数集 $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 正奇数集 $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

例题 1.6 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

证明 $f(x) = \tan \dfrac{\pi}{2} x$.

□

例题 1.7 {去掉一点的圆周} ~ $\mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 1.3, 设圆周为 C, 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点 P) 的直线表示实轴 $\mathbb{R}$. 对于 $C \backslash \{P\}$ 上的每一点 c, 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x. 建立一一对应: $s : \mathbb{R} \to C \backslash \{P\}$ 为 $s(x) = c$. (点 P 对应 ∞)

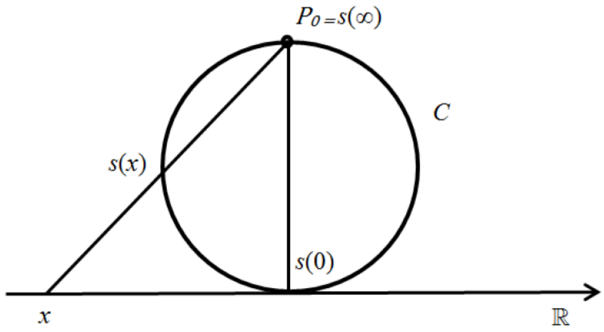

图 1.3: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 1.1 (映射分解定理)

设 A, B 为非空集, 若 $f: A \to B, g: B \to A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

(i) $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$;

(ii) $A_1 \cap A_2 = \varnothing, B_1 \cap B_2 = \varnothing$;

(iii) $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

♡

证明 作集族

$$\Gamma = \{E \subseteq A : E \cap g(B \backslash f(E)) = \varnothing\}.$$

令 $A_1 = \bigcup\limits_{E \in \Gamma} E$, 则 $A_1 \in \Gamma$. 实际上, 对任意的 $E \in \Gamma$, 都有 $E \subseteq A_1$, 再由 $E \cap g(B \backslash f(E)) = \varnothing$ 知

$$E \cap g(B \backslash f(A_1)) = \varnothing$$

从而

$$A_1 \cap g(B \backslash f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B \backslash f(E))] = \varnothing$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1 = f(A_1), B_2 = B \backslash B_1, A_2 = g(B_2)$, 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B \backslash f(A_1)) = \varnothing$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subseteq f(A_0)$, 故

$$B \backslash f(A_0) \subseteq B \backslash B_1 = B_2$$

从而

$$g(B \backslash f(A_0)) \subseteq g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B \backslash f(A_0)) = \varnothing, \quad x_0 \notin g(B \backslash f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B \backslash f(A_0)) = \varnothing$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾.

□

定义 1.17 (集合的基数 (势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的**基数**或**势**相同, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

笔记 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 1.8

(1) 自反性:$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$.
(2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.
(3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$.

证明 由定理 1.7及集合的基数 (势) 的定义可直接得到.

□

定义 1.18

对于集合 A, B, 若有 $B_0 \subseteq B, A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.
若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.
同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.

命题 1.11 (映射与基数之间的关系)

(1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.
(2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$.
(3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1)
(2)
(3)

□

定理 1.9 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:
(1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.
(2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明 由题设存在单射 $f : A \to B, g : B \to A$, 利用映射分解定理可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \varnothing, B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 注意到 $f : A_1 \to B_1, g^{-1} : A_2 \to B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F : A \to B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$. 故 (1) 得证. 再由定义 1.17和定义 1.18可知 (2)⇔(1).

□

例题 1.8 $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.

证明 由例题 1.6可知, $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$; 又 $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. 由Bernstein 定理 (1)可知, $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.

□

定理 1.10

对于集合 $A,B,\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立.

证明 由定义 1.18可知, 若 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 则 A 与 B 对等, 另外两个不会成立; 假设 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 同时成立, 则存在 $B_0\subseteq B,A_0\subseteq A$, 使得 $A\sim B_0,B\sim A_0$. 使用Bernstein 定理 (1)得出 $A\subseteq B$, 进而 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 显然矛盾, 证毕.

□

定义 1.19 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n, 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}}=n$ 或 $|A|=n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\varnothing}}=0$.

笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 1.11

设 A 是非空集合, 则

(1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.

(2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.

笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明

(1) **必要性**: 设 $\overline{\overline{A}}=n$, 用数学归纳法证明, $n=1$, 显然. 假设 $n=k$ 时, 结论成立.
当 $n=k+1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A\sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi:A\to A_0$. 下面分两种情况:
(i) $\exists a\in A$, 使得 $\varphi(a)=a$.
令 $A_1=A\backslash\{a\},A_2=A_0\backslash\{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}}=k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1\sim A_2$. 这与假设矛盾.
(ii) $\forall a\in A$, 都有 $\varphi(a)\neq a$.
A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0\in A,x_0\notin A_0$. 令

$$A_3=A\backslash\{x_0\},\quad A_4=A_0\backslash\{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0\notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0)\in A_0\subseteq A,\quad \varphi(x_0)\neq x_0$$

故 $\varphi(x_0)\in A\backslash\{x_0\}=A_3$, 而 $\varphi(x_0)\notin A_0\backslash\{\varphi(x_0)\}=A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}}=k$, $\varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3\sim A_4$. 这与假设矛盾.
充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 证法一:**必要性**: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$. 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1. 因为 A 是无限集, 集 $A\backslash\{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A\backslash\{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样, $A\backslash\{a_1,a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$, 记余集为 $\hat{A}=A\backslash\{a_n|n=1,2,\cdots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2,a_3,\cdots\}\cup\hat{A}=\tilde{A}$$

现作 A 与 $\tilde{A}$ 之间的映射 φ:

$$\varphi(a_i)=a_{i+1},\quad i=1,2,\cdots$$
$$\varphi(x)=x,\quad x\in\hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 $\tilde{A}$ 上的一一对应, 证毕.

充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 是不是有限集. 故 A 一定是无限集.

证法二:因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取 A 中一个非空有限子集 B, 则由定理 1.12(6)立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{((A \setminus B) \cup B)}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故 $A \sim (A \setminus B)$.

□

1.4 可列集与不可列集

定义 1.20

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$(读作阿列夫 (Aleph, 希伯来文) 零). 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$, 则 A 叫作**可列集**或**可数集**. 不是可数集的无限集称为**不可列集**或**不可数集**.

命题 1.12

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 A 可列, 则存在 $\mathbb{N}$ 到 A 的一一映射 φ, 记为 $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 $\mathbb{N}$ 对等, 从而是可列集

□

定理 1.12 (可列集的性质)

(1) 任何无限集必包含一个可列子集.

(2) 可列集的任何无限子集都是可列集.

(3) 有限集与可列集的并集是可列集.

(4) 有限个可列集的并集是可列集.

(5) 可列个可列集的并集是可列集.

(6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.

(7) 设 A, B 为可列集, 则 $A \times B$ 是可列集.

(8) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 可列, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 可列.

笔记 (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 $\aleph_0$.

证明

(1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1; 由于 $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$, 取 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$; 又 $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, 取 $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$; ……, 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$, 则 $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$ 为可列集.

(3) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. 不妨设 $A \cap B = \varnothing$, 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\}$$

可列.

(4) 设 $A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \cdots\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 为可列集, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$A_1 = \{a_1^{(1)} \quad a_2^{(1)} \quad a_3^{(1)} \quad \cdots\}$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad \cdots\} \\
&\vdots \\
A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad \cdots\}
\end{aligned}
$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(n)}, a_3^{(1)}, \cdots\}$$

可列.

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可列集, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_1^{(1)} \to a_2^{(1)} \to a_3^{(1)} \to a_4^{(1)} \cdots\} \\
A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\
A_3 &= \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\
&\vdots \\
A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad a_4^{(n)} \cdots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \cdots, a_{2n+1}^{(n)}, \cdots\}$$

(依次是下标之和等于 $2, 3, \cdots, 2n+2, \cdots$) 可列.

(6) 证法一:不妨设 $A \cap B = \varnothing$, 否则用 $B \backslash A$ 代替 B 即可. A 为无限集, 由 (1) 可知, A 包含一个可列子集 A_1. 由于 $A_1 \cup B$ 是可列集, 故 $A_1 \cup B \sim A_1$. 注意到 $(A \backslash A_1) \cap (A_1 \cup B) = \varnothing$, 则有

$$A \cup B = (A \backslash A_1) \cup A_1 \cup B = (A \backslash A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \backslash A_1) \cup A_1 = A.$$

因此, $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.

证法二:不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$,$A \cap B = \varnothing$, 且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

我们作映射 f 如下:

$$
\begin{aligned}
f(a_i) &= a_{2i}, \quad a_i \in A_1; \\
f(b_i) &= a_{2i-1}, \quad b_i \in B; \\
f(x) &= x, \quad x \in A_2.
\end{aligned}
$$

显然,f 是 $A \cup B$ 到 A 上的双射.

(7) 由命题 1.12可设 $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则

$$
\begin{aligned}
A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\} &= \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\
&= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j).
\end{aligned}
$$

由(5)可知, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$,$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明.

□

例题 1.9 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, 其中 $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质 (3)和可列集的性质 (4), 只需证明 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$(除去重复元), 由可列集性质 (5)知 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

□

命题 1.13

实轴 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间至多有可列个.

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 $\mathbb{Q}$ 的一个子集. 又 $\mathbb{Q}$ 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个.

□

例题 1.10 整系数多项式的全体 $\mathbb{P}$ 是可列集.

证明 对每个 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, 令

$$P_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \cdots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$$

由命题 1.12(8)知 P_n 可列. 又 $\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, 由可列集性质知 $\mathbb{P}$ 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集.

□

命题 1.14

$\mathbb{R}$ 上单调函数的间断点至多有可列个.

证明 不妨只讨论 f 是开区间 (a, b) 上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若 $x_0 \in (a, b)$ 是 f 的一个间断点, 则有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 这时 f 在点 x_0 的函数值满足不等式 $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$. 称 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间. 对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设 x_1 是 f 的另一个间断点, 且 $x_0 < x_1$. 我们要证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \varnothing. \tag{1.4}$$

为此在 x_0 和 x_1 之间插入 x, x' 如下:

$$x_0 < x < x' < x_1$$

则有不等式

$$f(x) \leqslant f(x')$$

固定 x', 令 $x \to x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的保不等式性, 得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x')$$

再令 $x' \to x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-)$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-) < f(x_1^+)$$

即所要证明的 (1.4). 这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 而由命题 1.13可知这些跳跃区间至多有可列个. 这就证明了单调函数的间断点至多有可列个.

□

定理 1.13

$(0,1], [0,1]$ 都是不可列集.

证明 证法一: 只需讨论 $(0,1]$. 为此, 采用二进位制小数表示法:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1. 显然,$(0,1]$ 与全体二进位制小数一一对应.

若在上述表示式中把 $a_n = 0$ 的项舍去, 则得到 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$, 这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1 = n_1, \quad k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$, 则 $(0,1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应.

现在假定 $(0,1]$ 是可数的, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{aligned}
&(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \cdots, k_i^{(1)}, \cdots),\\
&(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \cdots, k_i^{(2)}, \cdots),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \cdots, k_i^{(i)}, \cdots),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

但这是不可能的, 因为 $(k_1^{(1)}+1, k_2^{(2)}+1, \cdots, k_i^{(i)}+1, \cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$, 而它并没有被排列出来. 这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的, 也就是说 $(0,1]$ 是不可数集.

证法二:假设 $[0,1]$ 可列, 则可表示为 $[0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0,1]$ 三等分为: $[0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1, 记该区间为 I_1, 则 $x_1 \notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2, 记该区间为 I_2, 则 $x_2 \notin I_2, I_2 \subset I_1; \cdots\cdots$, 依次做下去, 可得到一列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N}$;

(iii) I_n 的长度为 $1/3^n \to 0, n \to \infty$.

由闭区间套定理, 存在 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾.

□

定义 1.21 ($\mathbb{R}$ 的基数)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$).

定理 1.14

对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$.

证明 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x) = a + (b-a)x$ 建立了 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 又 (a,b) 和 $(a,b]$ 与 $[a,b]$ 分别只差一个点和两个点, 由可列集的性质 (6)知 $\overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 最后, 由 § 与 R 对等] 例题1.8以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[-1,1]}} = \aleph$.

□

推论 1.1

无理数的基数为 $\aleph$.

证明 记无理数集为 $\mathbf{I}$, 注意到 $\mathbf{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 且 $\mathbb{Q}$ 可列, 由可列集的性质 (6)可得 $\overline{\overline{\mathbf{I}}} = \overline{\overline{\mathbf{I} \cup \mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$.

□

定理 1.15

设有集合列 $\{A_n\}$. 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph$.

证明 不妨假定 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$, 且 $A_k \sim [n, n+1)$, 我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

□

定义 1.22

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, $\cdots\cdots$, C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{\overline{\overline{A}}}$$

更一般地, 设 $\overline{\overline{A}} = \mu$, 定义 $\overline{\overline{2^A}} = 2^\mu$.

命题 1.15

设 A, B 都是非空集合, 则 $A \sim B$ 的充要条件是 $2^A \sim 2^B$.

证明 **必要性**: 由 $A \sim B$ 可知 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 于是 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$. 故 $2^A \sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$, 这与 $2^A \sim 2^B$ 矛盾! 故 $A \sim B$.

□

引理 1.2

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A \sim 2^A$. 进而 $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.

证明 对于每个 $E \in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等.

□

定理 1.16

$\aleph = 2^{\aleph_0}$.

证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{N}$ 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0,1]$ 对等.

对任意的 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f:\varphi \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0,1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0,1]$ 的单射, 故命题 1.18可知 $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} \leqslant \overline{\overline{(0,1]}}$.

另一方面, 对每一个 $x \in (0,1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0,1\}.$$

定义映射

$$g: x \to \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

易知, g 是从 $(0,1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由命题 1.18可知 $\overline{\overline{(0,1]}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$.

由Bernstein 定理可知 $\overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$. 再由引理 1.2可得 $\aleph = \overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = 2^{\aleph_0}$.

□

例题 1.11 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

证明 由定理 1.16及命题 1.15和 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$, 故再由命题 1.10可得 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

□

例题 1.12 用 M 表示 $[0,1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0,1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0,1] - E \end{cases}$$

显然, $\chi_E \in M$. 故 $\overline{\overline{M}} \geqslant \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^{\aleph}$.

另一方面, 对每一个 $f \in M$, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$.

□

定理 1.17 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合, 则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$(由 A 的一切子集所构成的集合族) 不对等, 即 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等, 即存在一一映射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$. 我们作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

于是有 $y \in A$, 使得 $f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$. 现在分析一下 y 与 B 的关系:

(i) 若 $y \in B$, 则由 B 的定义可知 $y \notin f(y) = B$;

(ii) 若 $y \notin B$, 则由 B 的定义可知 $y \in f(y) = B$.

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射, 即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的. 集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数是显然的.

□

1.5

设 X 为取定的集合, 以 X 的某些子集为元素所成的集称为 X 上的集类. 而 X 称为基本空间. 集类用花体大写字母或希腊字母表示. 例如:$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E},\mathscr{F},\mathscr{R};\tau,\mu,\nu$ 等.

定义 1.23

设 X 为一个集合,$\mathscr{R}$ 为 X 上的一个非空集类, 如果对 $\forall E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 都有

$$E_1\cup E_2\in\mathscr{R},\quad E_1\setminus E_2\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个环. 特别地, 如果还有 $X\in\mathscr{R}$, 就称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个代数, 或称为域.

如果对任何 $E,F\in\mathscr{R}$, 有 $E\setminus F\in\mathscr{R}$; 且对任何一列 $E_i\in\mathscr{R}(i=1,2,\cdots)$, 都有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个 σ 环. 如果还有 $X\in\mathscr{R}$, 则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 σ 代数, 或称为 σ 域. ♣

设 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 σ 代数, 对 $\forall E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 取 $E_i=E_2(i\geqslant 3)$, 则 $E_1\cup E_2=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$,$E_1\setminus E_2\in\mathscr{R}$. 所以,$\sigma$ 环必为环,σ 代数必为代数.

由定义可知, 环是对集的 “$\cup$” 及 “$\setminus$” 运算封闭的非空集类. 而代数是对 “余或补” 运算也封闭的环 (因为 $\mathscr{R}$ 为非空集类, 故有 $E\in\mathscr{R}$, 从而 $E^c=X\setminus E\in\mathscr{R}$).$\sigma$ 环是对集的 “$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$” 及 “$\setminus$” 运算封闭的非空集类. 而 σ 代数是对 “余或补” 运算也封闭的 σ 环.

1.6 关系

定义 1.24 ((二元) 关系)

所谓在集合 A 中定义了二元素间的一个 **(二元) 关系** R, 也就是给出了集合 $A\times A$ 中元素的一个性质 R, 若 $a,b\in A$, (a,b) 有性质 R, 则称 a 与 b 有关系 R, 记为 aRb. ♣

笔记 事实上, 集合 A 中关系 R 可由 $A\times A$ 中子集

$$S\triangleq\{(a,b)\mid a,b\in A,aRb\}$$

来刻画. 即若 aRb, 则 $(a,b)\in S$.

反之, 由 $A\times A$ 的一个子集 S, 也可确定 A 一个关系 R. 即若 $(a,b)\in S$, 则 aRb.

定义 1.25 (等价关系)

1. 集合 A 中关系若满足以下条件:
   (1) **自反性** $aRa,\forall a\in A$;
   (2) **对称性**若 aRb, 则 bRa;
   (3) **传递性**若 aRb,bRc, 则 aRc,
   则称 R 为 A 的一个**等价关系**.
2. 若仍以 R 表示 A 中关系所确定的 $A\times A$ 的子集, 则 R 为等价关系当且仅当下列三个条件同时成立:
   (1) $(a,a)\in R,\forall a\in A$;
   (2) 若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$;
   (3) 若 $(a,b)\in R,(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$. ♣

注 等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不一定能推出第三个条件.

但若 $\sim$ 是集合 A 中的关系, 且 $\sim$ 满足对称性和传递性, 则 $\sim$ 具有自反性.

证明 例如, 实数集 $\mathbb{R}$ 中的关系 $\sim$

$$a \sim b \iff a \leqslant b$$

满足自反性和传递性, 但不满足对称性.

实数集中关系 $\sim$

$$a \sim b \iff |a-b| \leqslant 1$$

满足自反性和对称性, 但不满足传递性.

在非负整数集 $\mathbb{N}_0$ 中定义关系 $\sim$

$$a \sim b \iff a\text{与}b\text{均为正数且有相同的奇偶性}$$

则易见 $\sim$ 满足对称性和传递性, 但不满足自反性, 因为没有 $0 \sim 0$.

若 $\sim$ 是集合 A 中的关系, 且 $\sim$ 满足对称性和传递性, 设 $a \sim b$, 则由 $\sim$ 满足对称性知 $b \sim a$, 又由 $\sim$ 满足传递性可得 $a \sim a$.

□

定义 1.26 (等价类和代表元素)

若 R 是集合 A 的一个等价关系且 $a \in A$, 则 A 中所有与 a 有关系 R 的元素集合

$$K_a = [a] = \{b \in A \mid bRa\}$$

称为 a 所在的**等价类**, a 称为这个等价类的**代表元素**.

♣

定义 1.27 (分划/分类)

集合 A 的一个子集族 $\{A_\alpha\}$ 称为 A 的一个**分划**或**分类**或**分拆**, 如果满足

$$A = \bigcup_\alpha A_\alpha, \quad A_\alpha \bigcap A_\beta = \varnothing, \quad \text{若}\alpha \neq \beta.$$

也称 A 是 $\{A_\alpha\}$ 中**所有不相交的集合的并**或**无交并**. 也把上式无交并记为

$$A = \bigsqcup_\alpha A_\alpha.$$

♣

定理 1.18

设 R 是集合 A 的等价关系, 则由所有不同的等价类构成的子集族 $\{K_a\}$ 是 A 的分划. 即

$$A = \bigsqcup_{a \in A} K_a.$$

其中 a 取遍不同 A 的等价类的代表元.

反之, 若 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的分划, 则可在 A 中定义等价关系 R,

$$aRb, \quad \text{若}\exists A_\alpha, \text{使}a, b \in A_\alpha.$$

并且使得每个 A_α 是一等价类.

♡

证明 设 R 是 A 的等价关系. 由 $\forall a \in A, aRa$ 知 $a \in K_a$, 于是 $A = \bigcup\limits_a K_a$. 设 $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, 即 $\exists c \in K_a \cap K_b$, 对 $\forall x \in K_a$ 有 cRa, xRa, 因而 xRc. 又 cRb, 故 xRb, 即 $x \in K_b$, 从而得 $K_a \subseteq K_b$. 同样可得 $K_b \subseteq K_a$, 故 $K_a = K_b$, 亦即若 $K_a \neq K_b$, 则 $K_a \cap K_b = \varnothing$. 这样就证明了 $\{K_a\}$ 是 A 的分划.

反之, 设 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个分划. 在 A 中定义关系 R,

$$aRb, \quad \text{若}\exists A_\alpha, \text{使}a, b \in A_\alpha.$$

因 $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, 故对 $\forall a \in A, \exists A_\alpha$, 使 $a \in A_\alpha$, 因此 $a, a \in A_\alpha$, 即 aRa. 其次, 若 aRb, 即 $\exists A_\alpha$, 使 $a, b \in A_\alpha$. 自然

$b, a \in A_\alpha$, 故 bRa. 再次, 若 aRb, bRc, 即有 A_α, A_β, 使 $a, b \in A_\alpha$ 且 $b, c \in A_\beta$, 故 $b \in A_\alpha \cap A_\beta$. 由 $\{A_\alpha\}$ 为 A 的分划知 $A_\alpha = A_\beta$, 因而 aRc. 这样就证明了 R 是等价关系. 由 R 的定义知若 $a \in A_\alpha$, 则 a 所在的等价类 $K_a = A_\alpha$.

□

定义 1.28 (商集和自然映射)

设 R 是集合 A 的等价关系. 以关于 R 的等价类为元素的集合 $\{K_a\}$ 称为 A 对 R 的**商集合**或**商集**. 记为 A/R. 由

$$\pi(a) = K_a, \quad \forall a \in A$$

定义的 A 到 A/R 上的映射 π 称为 A 到 A/R 上的**自然映射**.

♣

注 显然自然映射都是满射.

定理 1.19

设 $f : A \to B$ 是满映射. 在 A 中定义关系 R,

$$aRb, \quad 若 f(a) = f(b),$$

则 R 是 A 的等价关系. 又设 $\pi : A \to A/R$ 为自然映射, 则有 A/R 到 B 上的一一对应 g 满足

$$g\pi = f. \tag{1.5}$$

即图 1.4是交换图.

♡

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A/R \arrow[dl, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

图 1.4

证明 考虑 $y \in B$ 的原像 $f^{-1}(y)$ 构成的子集族. 显然, $A = \bigcup\limits_{y \in B} f^{-1}(y)$. 又若 $y, z \in B$, $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$, 即 $\exists a \in A$, 使 $f(a) = y, f(a) = z$, 即 $y = z$. 故 $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$, 从而 $\{f^{-1}(y)\}$ 是 A 的一个分划. 于是由定理 1.18知, 在 A 中可定义等价关系 $R : aRb$, 若 $\exists f^{-1}(y)$, 使 $a, b \in f^{-1}(y)$, 即 $f(a) = f(b)$. 由此知定理的第一部分成立.

定义 A/R 到 B 的映射 g,

$$g(K_a) = f(a), \quad \forall a \in A.$$

注意到 A 中元素 a 所在等价类 $K_a = f^{-1}(f(a))$, 由于 $K_a = K_b$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$, 故 g 是单射. 又 $f(A) = B$, 故 g 是满射. 因此 g 是一一对应. 由 π 的定义知式 (1.5) 成立.

□

定义 1.29 (完全代表系)

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系, 则子集 $R \subseteq X$ 称为等价关系 $\sim$ 的**完全代表系**, 当且仅当满足以下条件:

$$|R \cap C| = 1, \ \forall C \in X/\sim.$$

即 R 与每个等价类有且仅有一个公共元素.

♣

定理 1.20

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系, 则必存在 X 的子集 R 为等价关系 $\sim$ 的完全代表系.

♡

注 这个定理表明: 任意等价关系的完全代表系的存在性与选择公理等价.

一个等价关系的完全代表系可以不唯一.

证明 由定理 1.18知

$$\bigcup_{K\in X/\sim} K = X.$$

由选择公理知, 存在一个选择函数

$$f : X/\sim \longrightarrow \bigcup_{K\in X/\sim} K = X,$$

使得对 $\forall K \in X/\sim$, 都有 $f(K) \in K$. 令

$$R = \{f(K) \mid K \in X/\sim\},$$

则对 $\forall C \in X/\sim$, 有 $f(C) \in C$. 再对 $\forall f(K) \in R \setminus \{f(C)\}$, 有 $K \neq C$, 则由定理 1.18知

$$K \cap C = \varnothing.$$

而 $f(K) \in K$, 故 $f(K) \notin C$. 因此 $R \cap C = \{f(C)\}$, 即 $|R \cap C| = 1$.

□

定理 1.21

设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系,X 的子集 R 为等价关系 $\sim$ 的**完全代表系**的充分必要条件是满足以下任意一个条件:

(1) 对 $\forall x \in X$, 存在 $r \in R$, 使得 $x \sim r$. 并且对 $\forall r_1, r_2 \in R$ 且 $r_1 \neq r_2$, 有 r_1 与 r_2 不等价.

(2) $X = \bigsqcup_{r\in R} K_r$, 也即

$$X = \bigcup_{r\in R} K_r \text{ 且 } K_{r_1} \cap K_{r_2} = \varnothing,\ \forall r_1, r_2 \in R \text{且} r_1 \neq r_2.$$

♡

证明

□

定义 1.30 (同余关系和同余类)

设集合中 A 的二元运算, 记作乘法. 若 A 的一个等价关系 $\sim$ 满足

$$\text{若} a \sim b, c \sim d,\ \text{则} ac \sim bd, \forall a, b, c, d \in A.$$

则称 $\sim$ 为 A 的一个**同余关系**. $a \in A$ 的等价类 K_a 此时也称为 a 的**同余类**.

♣

例题 1.13

1. 设 $m \in \mathbb{Z}$(所有整数的集合), $m \neq 0$. 在 $\mathbb{Z}$ 中定义关系

$$a \sim b, \quad \text{若} a \equiv b \pmod{m}.$$

易证 $\sim$ 是等价关系且由 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ 可得 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$. 因而 $\sim$ 对于 $\mathbb{Z}$ 中的加法与乘法都是同余关系.

2. 设 $\mathbb{P}[x]$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上一元多项式的集合. 设 $f(x) \in \mathbb{P}[x]$, $f(x) \neq 0$. 在 $\mathbb{P}[x]$ 中定义关系 $\sim$: $g(x) \sim h(x)$, 若 $f(x) \mid (g(x) - h(x))$. 与第一问类似可证 $\sim$ 对 $\mathbb{P}[x]$ 中的加法与乘法都是同余关系.

3. 以 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上所有 n 阶方阵的集合. 方阵的加法与乘法都是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的二元运算. 对 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 用 $\mathrm{ent}_{ij}\boldsymbol{A}$, $\mathrm{row}_i\boldsymbol{A}$, $\mathrm{col}_j\boldsymbol{A}$ 和 $\det\boldsymbol{A}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素、$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列和 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中由 $\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{B}$ 确定的关系, 对乘法是同余关系, 但对加法除 $n = 1$ 的情形外不是同余关系.

定理 1.22

设集合 A 有二元运算乘法, $\sim$ 是 A 的一个同余关系. 又 $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ 是自然映射, 则在商集合 $A/\sim$ 中可定义二元运算

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in A.$$

证明 要证明这个二元运算的良定义性, 只需证由 $\pi(a) = \pi(a_1), \pi(b) = \pi(b_1)$ 可得 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$, 其中, $a, b, a_1, b_1 \in A$. 事实上, 由 π 的定义知 $\pi(a) = \pi(a_1)$, 即 $a \sim a_1$, $\pi(b) = \pi(b_1)$, 即 $b \sim b_1$. 因 $\sim$ 是同余关系, 故 $ab \sim a_1b_1$, 所以 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$.

□

1.7 其他

定理 1.23 (逆归定理)

假设 S 是一个集合,$a \in S$, 并且对于每个 $n \in \boldsymbol{N}$,$f_n : S \to S$ 均是函数, 则存在唯一的函数 $\varphi : \boldsymbol{N} \to S$, 使得 $\varphi(0) = a$ 并且 $\varphi(n + 1) = f_n(\varphi(n))(\forall n \in \boldsymbol{N})$.

证明 我们将构作 $\boldsymbol{N} \times S$ 上的一个关系 R, 使得它是满足上述性质的函数 $\varphi : \boldsymbol{N} \to S$ 的图象, 令

$$\mathcal{F} = \{Y \subset \boldsymbol{N} \times S \mid (0, a) \in Y, \text{并且}(n, x) \in Y \Rightarrow (n + 1, f_n(x)) \in Y(\forall n \in \boldsymbol{N})\}$$

由于 $\boldsymbol{N} \times S \in \mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F} \neq \varnothing$. 令 $R = \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{F}} Y$, 则 $R \in \mathcal{F}$. 又设 M 为子集合

$$\{n \in \boldsymbol{N} \mid \text{存在唯一的}x_n \in S, \text{使得}(n, x_n) \in R\}$$

我们归纳证明 $M = \boldsymbol{N}$. 如果 $0 \notin M$, 则有 $(0, b) \in R$, 其中 $b \neq a$, 并且集合 $R - \{(0, b)\} \subset \boldsymbol{N} \times S$ 属于 $\mathcal{F}$. 从而 $R = \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{F}} Y \subset R - \{(0, b)\}$, 这就导致矛盾. 因此 $0 \in M$. 现在假定 $n \in M$(即有唯一的 $x_n \in S$, 使得 $(n, x_n) \in R$), 则 $(n+1, f_n(x_n)) \in R$. 如果又有 $(n+1, c) \in R$, 而 $c \neq f_n(x_n)$, 则 $R - \{(n+1, c)\} \in \mathcal{F}$(验证!), 由此又可象上面那样导致矛盾. 因此 $x_{n+1} = f_n(x_n)$ 是 S 中唯一的元素, 使得 $(n+1, x_{n+1}) \in R$. 于是由归纳法 (定理 6.1) 可知 $\boldsymbol{N} = M$, 即 $n \longmapsto x_n$ 定义了一个函数 $\varphi : \boldsymbol{N} \to S$, 它的图象为 R. 由于 $(0, a) \in R$, 从而 $\varphi(0) = a$. 对于每个 $n \in \boldsymbol{N}$,$(n, x_n) = (n, \varphi(n)) \in R$. 由于 $R \in \mathcal{F}$, 从而 $(n + 1, f_n(\varphi(n))) \in R$. 但是 $(n + 1, x_{n+1}) \in R$. 由 x_{n+1} 的唯一性推出 $\varphi(n + 1) = x_{n+1} = f_n(\varphi(n))$.

□

注 如果 A 是非空集合,A 中的序列是一个函数 $\boldsymbol{N} \to A$. 一个序列通常表示成 $\{a_0, a_1, \ldots\}$,$\{a_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ 或者 $\{a_i\}$, 其中 $a_i \in A$ 是 $i \in \boldsymbol{N}$ 的象. 类似地, 函数 $\boldsymbol{N}^* \to A$ 也称作序列, 并且表示成 $\{a_1, a_2, \ldots\}$,$\{a_i\}_{i\in \boldsymbol{N}^*}$ 或者 $\{a_i\}$, 这些符号在课文中不会引起混乱.

命题 1.16

设 V 是数域上的线性空间, 证明 V 有一组基.

证明 V 的子集 L 称为线性无关的向量组, 如果 L 中任意有限个向量均是线性无关的.

令 S 是 V 中所有线性无关的向量组作成的集合, 则 S 对于集合的包含关系作成偏序集. 设 $T = \{L_i \mid i \in I\}$ 是 S 的一个链, 则 $L = \bigcup\limits_{i\in I} L_i$ 也是线性无关的向量组. 事实上, 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 L 中任意有限个元, 则每个 α_i 属于某一 L_{j_i}. 因为 T 是链, 故存在 $i \in I$ 使得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in L_i$. 从而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的.

于是 $L \in S$,L 是 T 的一个上界. 由 Zorn 引理知 S 有极大元 M. 不难验证 M 就是 V 的基: 即 M 是线性无关组, 且 V 中任一元均是 M 中有限个元的线性组合.

□