

0.1 积分不等式的应用

例题 0.1 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上可积且满足

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

求证: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4$.

证明 证法一: 对于任意常数 a 和 b 有 $\int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx \geq 0$. 由此并根据条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \geq 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx &\geq 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx - \int_0^1 (ax + b)^2 dx = 2(a + b) - \frac{1}{3}a^2 - ab - b^2. \end{aligned}$$

取 $a = 6, b = -2$ 即得所证.

证法二: 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\int_0^1 (ax + b)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx \geq \left[\int_0^1 (ax + b)f(x) dx \right]^2 = (a + b)^2.$$

从而

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{(a + b)^2}{\int_0^1 (ax + b)^2 dx} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{\frac{a^2}{3} + ab + b^2} = 3 - \frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3}.$$

再由 a, b 的任意性知

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 3 + \sup_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3} \right\}. \quad (1)$$

令 $g(x) = -\frac{3x + 6}{x^2 + 3x + 3}$, 则

$$g'(x) = \frac{3(x + 1)(x + 3)}{(x^2 + 3x + 3)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, -3.$$

又 $g(-1) = -3 < 1 = g(-3)$, 故 $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. 因此

$$\sup_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3} \right\} = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 1.$$

再由(??)式可知

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4.$$

并且这个不等式右边不可改进. □

例题 0.2 设 $f \in C^1[0, 1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

2. 若 $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

注 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy = \int_0^x f'(y) dy.$$

从而

$$|f(x)|^2 = \left| \int_0^x f'(y) dy \right|^2 \leq \int_0^x 1^2 dy \int_0^x |f'(y)|^2 dy = x \int_0^x |f'(y)|^2 dy \leq x \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

于是对上式两边同时积分可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x dx \int_0^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

2. 由牛顿莱布尼兹公式(带积分型余项的插值公式)可得

$$f(x) = \int_0^x f'(y) dy, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \quad f(x) = \int_x^1 f'(y) dy, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

从而

$$|f(x)|^2 = \left| \int_0^x f'(y) dy \right|^2 \leq \int_0^x 1^2 dy \int_0^x |f'(y)|^2 dy = x \int_0^x |f'(y)|^2 dy \leq x \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

$$|f(x)|^2 = \left| \int_x^1 f'(y) dy \right|^2 \leq \int_0^1 1^2 dy \int_x^1 |f'(y)|^2 dy \leq (1-x) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

于是对上面两式两边同时积分可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x dx \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy.$$

将上面两式相加得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

□

例题 0.3 opial 不等式

特例:

1. 设 $f \in C^1[a, b]$ 且 $f(a) = 0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

2. 设 $f \in C^1[a, b]$ 且 $f(a) = 0, f(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$


一般情况:

1. 设 $f \in C^1[a, b], p \geq 0, q \geq 1$ 且 $f(a) = 0$. 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{p+q} \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \quad (2)$$

2. 若还有 $f(b) = 0$. 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \quad (3)$$

 **笔记** 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

证明 特例:

1. 令 $F(x) \triangleq \int_a^x |f'(y)| dy$, 则 $F'(x) = |f'(x)|, F(a) = 0$. 从而

$$f(x) = \int_a^x f'(y) dy \Rightarrow |f(x)| \leq \int_a^x |f'(y)| dy = F(x).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \int_a^b F(x)F'(x)dx = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}F^2(b) = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(y)|dy\right)^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{1}{2}\int_a^b 1^2dx \int_a^b |f'(y)|^2dy = \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(y)|^2dy. \end{aligned}$$

2. 由第 1 问可知

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|dx &\leq \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2dy = \frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2dy. \\ \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2dy = \frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2dy. \end{aligned}$$

将上面两式相加可得

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(y)|^2dy.$$

一般情况:

1. 只证 $q > 1$. $q = 1$ 可类似得到. 考虑

$$f(x) = \int_a^x f'(y)dy, F(x) = \int_a^x |f'(y)|^q dy.$$

则由 Hold 不等式, 我们知道

$$|f(x)|^p \leq \left(\int_a^x |f'(y)|dy\right)^p \leq \left(\int_a^x |f'(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_a^x 1^{\frac{q}{q-1}} dy\right)^{\frac{p(q-1)}{q}} = F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$

这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx &\leq \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} |f'(x)|^q dx = \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} dF(x) \\ &\leq (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x) dF(x) = \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} F^{\frac{p+q}{q}}(b) \\ &= \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \left(\int_a^b |f'(y)|^q dy\right)^{\frac{p+q}{q}} \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \left(\int_a^b |f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})} dy\right)^{\frac{q}{q+p}} \left(\int_a^b 1^{(\frac{p+q}{q-1})} dy\right)^{\frac{q-1}{q+p}} \\ &= \frac{q(b-a)^p}{p+q} \int_a^b |f'(y)|^{p+q} dy, \end{aligned}$$

这就证明了不等式(1).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q} dx,$$

对称得


$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q} dx.$$

故上面两式相加得到(2)式.

□

例题 0.4 设 $f \in C[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x)dx.$$

 **笔记** 从条件 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 来看, 我们待定 $a \in \mathbb{R}$, 一定有

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (x-a)f(x)dx.$$

然后利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x-a)f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 f^2(x)dx.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_0^1 (x-a)^2 dx$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a = \frac{1}{2}$ 就是达到最小值的 a .


证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \int_0^1 f^2(x)dx \\ &\geq \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)dx \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 xf(x)dx \right)^2, \end{aligned}$$

这就证明了(??)式. □

例题 0.5 设 $f \in C^1[0, 1]$, $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 27 \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

 **笔记** 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0) = g(1) = 0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x) = \begin{cases} x-1, & c \leq x \leq 1 \\ x, & 0 \leq x \leq c \end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c = c-1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

证明 令

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 |g(x)|^2 dx &\geq \left(\int_0^1 f'(x)g(x)dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(\int_0^1 f(x)g'(x)dx \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx - 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2, \end{aligned}$$

结合 $\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \frac{1}{27}$, 这就完成了证明. \square

例题 0.6 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 $f(a) = f(b) = 0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

注 不妨设 $\int_a^b f(x) dx > 0$ 的原因: 若 $\int_a^b f(x) dx < 0$ 则用 $-f$ 代替 f , $\int_a^b f(x) dx = 0$ 是平凡的.

证明 反证, 若 $|f'(x)| \leq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \triangleq M$, 则不妨设 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta_1 \in (a, x), \theta_2 \in (x, b)$, 使得

$$f(x) = f(a) + f'(\theta_1)(x-a) \leq M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right].$$

$$f(x) = f(b) + f'(\theta_2)(x-b) \leq -M(x-b) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx = \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b |f(x)| dx.$$

于是结合 f 的连续性可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx \Rightarrow f(x) = M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx \Rightarrow f(x) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

故 f 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处不可导, 这与 $f \in D(a, b)$ 矛盾! \square

例题 0.7 设 $f \in C^1[0, \pi]$ 且满足 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt}, \forall x \in [0, \pi].$$

注 原不等式等价于

$$f^2(x) \leq \frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt, \forall x \in [0, \pi].$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 先待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \int_0^\pi g^2(t) dt \geq \left(\int_0^\pi f'(t)g(t) dt \right)^2, \forall x \in [0, \pi]. \quad (4)$$

此时, 我们对 $\forall x \in [0, \pi]$, 固定 x , 都有 $\int_0^\pi f'(t)g(t) dt = kf(x)$, 其中 k 为某一常数. 因此 $g(t)$ 必和 x 有关, 于是令

$$g(t) = \begin{cases} t - \pi, & t \in [x, \pi] \\ t, & t \in [0, x] \end{cases},$$

再代入(3)式验证即可.

实际上, 回忆定理??中的 Green 函数, 可以发现上述构造的 $g(x) = \frac{dk(x, t)}{dx}$, $x, t \in [0, \pi]$.

希望 $\int_0^\pi f(t)g'(t) dt = f(x)$, 考虑广义导数, 使得 $g'(x) = \delta(x)$. 实际上, 这里的 g 就是 H 函数 (详细参考 rudin 的泛函分析).

证明 令

$$g(t) = \begin{cases} t - \pi, & t \in [x, \pi] \\ t, & t \in [0, x] \end{cases},$$

则对 $\forall x \in [0, \pi]$, 都有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)dt \right)^2 &= \left(\int_x^\pi (t-\pi)f'(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(-(x-\pi)f'(x) - \int_x^\pi f(t)dt + xf(x) - \int_0^x f(t)dt \right)^2 \\ &= \pi^2 |f(x)|^2 \\ \int_0^\pi g^2(t)dt &= \int_x^\pi (t-\pi)^2 dt + \int_0^x t^2 dt = \frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \end{aligned}$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt = \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \int_0^\pi g^2(t)dt \geq \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)dt \right)^2 = \pi^2 |f(x)|^2, \forall x \in [0, \pi]$$

即

$$|f(x)|^2 \leq \frac{1}{3\pi}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \leq \frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt, \forall x \in [0, \pi]$$

□

命题 0.1 (反向 Cauchy 不等式)

设 $f, g \in R[a, b], g \geq 0, 0 < m \leq f \leq M$, 证明

$$\left(\int_a^b g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2 \left(\int_a^b g(x) dx \right)^2.$$

证明 由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b g(x) dx \right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)} \cdot \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_a^b [\sqrt{f(x)g(x)}]^2 dx \int_a^b \left[\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}} \right]^2 dx = \int_a^b f(x)g(x) dx \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx.$$

故第一个不等式成立. 下证第二个不等式. 由条件和均值不等式可知

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)} g(x) dx &\geq 0 \iff \int_a^b \frac{Mf(x) + mf(x) - mM - f^2(x)}{f(x)} g(x) dx \geq 0 \\ \iff (M+m) \int_a^b g(x) dx &\geq mM \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx + \int_a^b f(x)g(x) dx \geq 2\sqrt{mM} \sqrt{\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx}. \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left[\frac{(M+m)}{2\sqrt{mM}} \int_a^b g(x) dx \right]^2.$$

即

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2 \left(\int_a^b g(x) dx \right)^2.$$

□

例题 0.8 设 $f, g \in R[a, b]$ 满足

$$0 < m \leq f(x) \leq M, \quad \int_a^b g(x) dx = 0.$$

证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

注 待定常数 k , 由条件 $\int_a^b g(x) dx = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 = \left(\int_a^b (f(x)-k)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x)-k)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

于是我们希望

$$\int_a^b (f(x) - k)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

从而希望

$$(f(x) - k)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 f^2(x).$$

又因为 $m \leq f(x) \leq M$, 所以只需要下式成立即可

$$(t - k)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 t^2, \quad \forall t \in [m, M]. \quad (5)$$

我们只需要找到一个合适的 k , 使这个 k 满足上式即可.

现在, 我们先求不等式 $(t - k)^2 \leq Ct^2, \forall t \in [m, M]$ 的最佳系数 C . 即求最小的 $C > 0$, 存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得

$$(t - k)^2 \leq Ct^2, \quad \forall t \in [m, M].$$

上式等价于

$$\left(1 - \frac{k}{t} \right)^2 \leq C, \quad \forall t \in [m, M] \iff \left(1 - \frac{k}{M} \right)^2, \left(1 - \frac{k}{m} \right)^2 \leq C.$$

令 $h(x) \triangleq \max \left\{ \left(1 - \frac{x}{M} \right)^2, \left(1 - \frac{x}{m} \right)^2 \right\}$, 则 $C = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x)$, k 是 $h(x)$ 的最小值点.

(画图) 易知 $h(x)$ 的最小值就在 $\left(1 - \frac{x}{M} \right)^2$ 和 $\left(1 - \frac{x}{m} \right)^2$ 中间的一个交点处取到, 即 $k \in \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{m} \right)$. 于是由 $\left(1 - \frac{x}{M} \right)^2 = \left(1 - \frac{x}{m} \right)^2$ 可得

$$(i) \quad 1 - \frac{x}{M} = 1 - \frac{x}{m} \implies x = 0, \quad h(0) = 1,$$

$$(ii) \quad 1 - \frac{x}{M} = \frac{x}{m} - 1 \implies 2 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) x \implies x = \frac{2mM}{M+m}, \quad h\left(\frac{2mM}{M+m} \right) = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

故 $k = \frac{2mM}{M+m}, C = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2$. 再结合 (4) 式, 可知原不等式的系数就是最佳系数, 并且此时我们找到了证明需要的 $k = \frac{2mM}{M+m}$. 证明只需要将 $k = \frac{2mM}{M+m}$ 代入上述步骤验证即可.

证明 由条件 $\int_a^b g(x) dx = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &= \left(\int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m} \right) g(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m} \right)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

注意到

$$\left(t - \frac{2mM}{M+m} \right)^2 - \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 t^2 = \frac{4mM(t-M)(m-t)}{(m+M)^2} \leq 0, \quad \forall t \in [m, M].$$

因此由 $f(x) \in [m, M], \forall x \in \mathbb{R}$ 可得

$$\left(f(x) - \frac{2mM}{M+m} \right)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是再结合 (5) 式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m} \right)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

例题 0.9 设 $f \in C^2[0, 1]$ 满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$. 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq 4.$$

注 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 f''(x)g(x) dx \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x) dx \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(g(1) + \int_0^1 f(x)g''(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

将上式两边与要证不等式对比, 我们希望 $g''(x) \equiv 0$, 从而 $\int_0^1 f(x)g''(x) dx = 0$, 于是上式可化为

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq g^2(1) \\ \iff \int_0^1 |f''(x)|^2 dx &\geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}. \end{aligned} \quad (7)$$

因此只要 $g(x)$ 还满足 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} \geq 4$ 即可.

因为 $g''(x) \equiv 0$, 所以我们可以设 $g(x)$ 为一次函数, 即 $g(x) = ax + b, a \neq 0$. 又因为 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$ 越大, 不等式 (6)

越强, 所以现在我们想要找到一个一次函数 $g(x)$ 使得 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$ 达到最大值.

不妨设 $g(x) = ax - 1, a \neq 0$, 否则用 $-bg(x)$ 代替 $g(x)$, 不改变 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$ 的取值. 此时, 我们有

$$\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = 3 \cdot \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 3a + 3} = 3 \left(1 + \frac{a}{a^2 - 3a + 3} \right).$$

令 $h(a) = \frac{a}{a^2 - 3a + 3}$, 则由 $h'(a) = \frac{3 - a^2}{(a^2 - 3a + 3)^2} = 0$ 可得 h 的极大值点为 $a = \sqrt{3}$. 又因为

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} h(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a}{a^2 - 3a + 3} = 0, \quad h(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

所以 $\max_{a \in \mathbb{R}} h(a) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$. 从而

$$\max_{a \in \mathbb{R}} \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = \max_{a \in \mathbb{R}} 3 \left(1 + \frac{a}{a^2 - 3a + 3} \right) = 3 \left(1 + \max_{a \in \mathbb{R}} h(a) \right) = 6 + 2\sqrt{3} > 4.$$

综上, 取 $g(x) = \sqrt{3}x - 1$, 就能得到

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = 6 + 2\sqrt{3} > 4.$$

实际上, $6 + 2\sqrt{3}$ 就是原不等式的最佳下界. 只需要再将 $g(x) = \sqrt{3}x - 1$ 代入最开始的 Cauchy 不等式验证即可.

证明 令 $g(x) = \sqrt{3}x - 1$, 则

$$g''(x) \equiv 0, \quad g(1) = \sqrt{3} - 1.$$

于是由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 f''(x)g(x) dx \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x) dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(g(1) + \int_0^1 f(x)g''(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\int_0^1 (\sqrt{3}x-1)^2 dx} = 6+2\sqrt{3} > 4.$$

□

例题 0.10 设 $f \in C^2[0, 2]$, 证明:

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2.$$

注 不妨设 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$ 的原因:

(1) 当 $f(0) + f(2) - 2f(1) = 0$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $f(0) + f(2) - 2f(1) \neq 0$ 时, 则待定 a, b, c , 令 $g(x) = cf(x) - ax - b$, 希望 $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

注意到上述方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{vmatrix} = f(0) + f(2) - 2f(1) \neq 0.$$

故由 Cramer 法则可知, 存在唯一的解 $a = a_0, b = b_0, c = c_0$ 满足方程组 (7). 即 $g(x) = c_0 f(x) - a_0 x - b_0$ 满足 $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$.

下证不妨设成立. 假设原不等式已经对 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$ 的情况成立, 则对一般的 $f(x)$ 而言, 令 $g(x) = c_0 f(x) - a_0 x - b_0$, 显然 $g''(x) = c_0 f''(x)$, 并且由上述推导可知 $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$. 从而此时由假设可得

$$\int_0^2 |g''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [g(0) + g(2) - 2g(1)]^2.$$

于是

$$\begin{aligned} |c_0|^2 \int_0^2 |f''(x)|^2 dx &= \int_0^2 |g''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [g(0) + g(2) - 2g(1)]^2 \\ &= \frac{3}{2} [(c_0 f(0) - b_0) + (c_0 f(2) - 2a_0 - b_0) - 2(c_0 f(1) - a_0 - b_0)]^2 \\ &= \frac{3|c_0|^2}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2. \end{aligned}$$

故

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2.$$

因此不妨设成立.

于是我们可以不妨设 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$, 否则用 $c_0 f(x) - a_0 x - b_0$ 代替即可. 从而只须证

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2 = 6.$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 因此待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \int_0^2 g^2(x) dx \geq \left(\int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2.$$

对上式右边分部积分可得

$$\left(\int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2 = \left(f'(2)g(2) - f'(0)g(0) - \int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2. \quad (9)$$

于是我们希望 $g'(x) \equiv C$, 其中 C 为某一常数, $g(2) = g(0) = 0$, 从而设 $g(x)$ 为一次函数, 即设 $g(x) = px + q$. 从而由 $g(2) = g(0) = 0$ 可得 $q = p = 0$, 进而 $g \equiv 0$, 显然不行!

因此我们猜测 $g(x)$ 为满足 $g(2) = g(0) = 0$ 的分段一次函数, 则待定 m , 令

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ m(x-2), & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

(因为有 $f(1) = 1$ 这个条件, 所以选先 $x = 1$ 为分段点) 又由 (8) 式可知需要 f 和 g 都连续才能分部积分, 因此 g 在 $x = 1$ 处要连续, 故 $m = 1$, 即

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

再代入 (8) 式中验证即可得到证明.

证明 不妨设 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$, 否则用 $c_0 f(x) - a_0 x - b_0$ 代替即可. 令

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

则

$$\int_0^2 g^2(x) dx = \frac{2}{3}, \quad \left(\int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2 = (-1-1)^2 = 4.$$


于是由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \int_0^2 g^2(x) dx &\geq \left(\int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2 \xrightarrow{\text{分部积分}} \left(\int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2 \\ &\iff \frac{2}{3} \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq 4 \iff \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq 6. \end{aligned}$$

□

例题 0.11 设 $f \in C^1[0, 1], f(0) = f(1) = -\frac{1}{6}$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

 **笔记** 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

注 显然要利用 Cauchy 不等式, 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f'(x)g(x) dx \right)^2 \xrightarrow{\text{分部积分}} \left(-\frac{1}{6}g(1) + \frac{1}{6}g(0) - \int_0^1 f(x)g'(x) dx \right)^2. \quad (10)$$

将上式与要证不等式对比, 于是我们希望 $g'(x) = C$, 其中 C 为某一常数. 这样才能使

$$\int_0^1 f(x)g'(x) dx = C \int_0^1 f(x) dx,$$

进而不等式右边才会出现我们需要的 $\int_0^1 f(x) dx$. 从而待定的 $g(x)$ 为线性函数. 设 $g(x) = ax + c, a \neq 0$, 进而不妨

设 $g(x) = x + c$, 否则用 $\frac{1}{a}g$ 代替 g 仍有不等式 (9) (因为不等式两边齐次). 于是不等式 (9) 可化为

$$\begin{aligned} \frac{3c^2 + 3c + 1}{3} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx &= \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 (x+c)^2 dx \\ &\geq \left(-\frac{1}{6}(1+c) + \frac{1}{6}c - \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &\iff \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{3}{3c^2 + 3c + 1} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

因此只需要找到一个合适的 c , 使得上述不等式右边满足

$$\frac{3}{3c^2+3c+1} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}. \quad (12)$$

即对 $\forall t = \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$, 找到一个 c , 记 $K = \frac{3}{3c^2+3c+1} \in \mathbb{R}$, 使得

$$K \left(\frac{1}{6} + t \right)^2 \geq 2t + \frac{1}{4} \iff \Delta = \frac{12-K}{3} \leq 0 \iff K \geq 12.$$

因此取 $c = -\frac{1}{2}$, 得 $K = \frac{3}{3c^2+3c+1} = 12$.

综上, 令 $g(x) = x - \frac{1}{2}$, 则由 (10) 和 (11) 式可知

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{3}{3c^2+3c+1} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

只需要将 $g(x) = x - \frac{1}{2}$ 代入上述步骤进行验证即可得到证明.

证明 令 $g(x) = x - \frac{1}{2}$, 则

$$\int_0^1 g^2(x) dx = \frac{1}{12}, \quad g(1) = \frac{1}{2}, \quad g(0) = -\frac{1}{2}.$$

于是由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 f'(x)g(x) dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &\iff \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

注意到 $\frac{1}{12} \left(\frac{1}{6} + t \right)^2 \geq 2t + \frac{1}{4}$ 对 $\forall t \in \mathbb{R}$ 恒成立, 故

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

□

例题 0.12(一类)Hilbert 不等式

1. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中可积, 证明:

$$\iint_{[0, +\infty)} \frac{f(x)g(y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} dx dy \leq 2 \sqrt{\int_0^\infty f^2(x) dx \int_0^\infty g^2(x) dx}.$$

2. 设 N 为正整数, a_k, b_k 为实数, 证明:

$$\sum_{m,n=1}^N \frac{a_m b_n}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{m=1}^N a_m^2 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^2}.$$

证明

1.

2.

□