复分析

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊,闲看庭前花开花落;
去留无意,漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的定义及其运算

定义 1.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a,b), 如果用 $\mathbf{R}$ 记实数的全体,$\mathbf{C}$ 记复数的全体, 那么

$$\mathbf{C}=\{(a,b):a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;$(0,0)$ 是零元素,$(-a,-b)$ 是 (a,b) 的负元素;$(1,0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a,b) 有逆元素 $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$; 此外,$\mathbf{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a,b)+(c,d)](e,f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).$$

因此,$\mathbf{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbf{R}}=\{(a,0):a\in\mathbf{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 显然,$(a,0)\to a$ 是 $\tilde{\mathbf{R}}$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个同构对应, 因此, 实数域 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a,0)=a$. 在 $\mathbf{C}$ 中,$(0,1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

专门用 i 记 $(0,1)$ 这个元素, 于是有 $\mathrm{i}^2=-1$. 由于 $(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=b\mathrm{i}$, 于是每一个复数 (a,b) 都可写成

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\mathrm{i}.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a,b) 来记复数, 而直接用 $z=a+b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的实部,b 称为 z 的虚部, 分别记为 $a=\mathrm{Re}z$,$b=\mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=(a+b\mathrm{i})\left(\frac{c-d\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z=a+b\mathrm{i}$ 是一复数, 定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\bar{z}=a-b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**,$\bar{z}$ 称为 z 的**共轭复数**.

♣

定义 1.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a<b$), 其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a,b, 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a;$$

(ii) 如果 $a<b,b<c$, 那么 $a<c$;

(iii) 如果 $a<b$, 那么对任意 c, 有 $a+c<b+c$;

(iv) 如果 $a<b,c>0$, 那么 $ac<bc$.

♣

笔记 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 1.1

复数域不是有序域.

♡

证明 如果 $\mathbf{C}$ 是有序域, 那么因为 $\mathrm{i}\neq 0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i}>0$ 或 $\mathrm{i}<0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i}>0$, 则由(iv)得 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>\mathrm{i}\cdot 0$, 即 $-1>0$, 再由(iii), 两端都加 1, 即得 $0>1$. 另一方面, 从 $-1>0$ 还可得 $(-1)\cdot(-1)>0\cdot(-1)$, 即 $1>0$, 这和刚才得到的 $0>1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i}<0$, 两端都加 $-\mathrm{i}$, 得 $0<-\mathrm{i}$, 再由(iv), 两端乘 $-\mathrm{i}$, 得 $-1>0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0>1$ 和 $0<1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域. □

命题 1.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(z+\bar z),\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar z)$;

(ii) $z\bar z=|z|^2,\bar z=\dfrac{|z|^2}{z}$;

(iii) $\overline{z+w}=\bar z+\bar w,\overline{zw}=\bar z\,\bar w$;

(iv) $|zw|=|z||w|,\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;

(v) $|z|=|\bar z|,|z|=|-z|$.

♠

证明

(i)

(ii)

(iii)

(iv) 由 (ii) 可得 $|zw|^2=(zw)(\overline{zw})=|z|^2|w|^2$, 进而 $|zw|=|z||w|$.

(v)

□

命题 1.2

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$;

(ii) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t\geqslant 0$, 使得 $z=tw$;

(iii) $|z-w|\geqslant\big||z|-|w|\big|$.

♠

证明 (i) 从 $\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用复数运算性质 (ii)(i)和这里的不等式 (i), 即得

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\overline{z+w})=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2\\&\leqslant|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\overline{w})=|z\overline{w}|$, 这等价于 $z\overline{w}\in\mathbb{R}$ 且 $z\overline{w}\geqslant 0$. 不妨设 $w\neq 0$($w=0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\overline{w}=\dfrac{|w|^2}{w}$, 故 $z\overline{w}=\dfrac{z}{w}|w|^2\geqslant 0$. 令 $t=\left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$, 则 $t\in\mathbb{R}$ 且 $t\geqslant 0$,

而且 $z = tw$.

(iii) 当 $|z| = |w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z| > |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|z| = |(z - w) + w| \leqslant |z - w| + |w|,$$

移项可得 $|z - w| \geqslant |z| - |w| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z - w = tw$, 即 $z = (t + 1)w$.

当 $|z| < |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leqslant |w - z| + |z|,$$

移项可得 $|z - w| = |w - z| \geqslant |w| - |z| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $w - z = tz$, 即 $w = (t + 1)z$. □

推论 1.1

设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

♡

证明 由命题 1.2(ii)及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 线性相关. □

1.2 复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系, 实数对 (a, b) 就表示平面上的一个点, 所以复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 可以看成平面上以 a 为横坐标、以 b 为纵坐标的一个点 (图 1.1). 这个点的极坐标设为 (r, θ), 那么

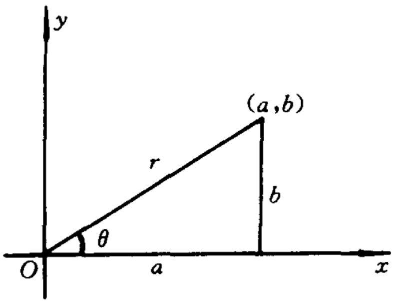

图 1.1

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta,$$

因而复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 也可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

这里,$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 就是前面定义过的 z 的模,θ 称为 z 的**辐角**, 记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$. 容易看出, 如果 θ 是 z 的辐角, 那么 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐角, 这里,k 是任意的整数, 因此 z 的**辐角有无穷多个**. 但是在 $\mathrm{Arg}z$ 中, 只有一个 θ 满足 $-\pi < \theta \leqslant \pi$, 称这个 θ 为 z 的**辐角的主值**, 把它记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z},$$

这里,$\mathbf{Z}$ 表示整数的全体. 注意,0 的辐角没有意义.

我们还可把复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 看成在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 a 和 b 的一个向量, 这时我们就把复数和向量作为同义语来使用. 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点

和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 $z_2 - z_1$, 因而 $|z_2 - z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 $z_1 + z_2$; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 $z_1 - z_2$(图 1.2). 现在再来看命题 1.2(ii)的不等式 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

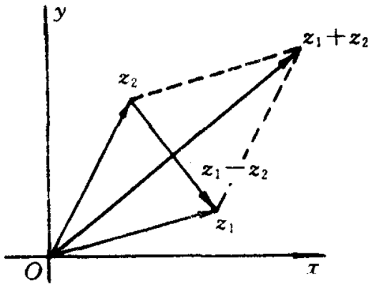

图 1.2

定理 1.2

设 z_1, z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$.

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2$.

笔记 在 (1) 中, 第一个等式在命题 1.1(iv)中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$, 因此 iz 就是把 z 按反时针方向转动 $\dfrac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2.$$

(2) 再看复数的除法, 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

□

命题 1.3

(1) 向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(2) 向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

证明

(1) 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\frac{\pi}{2}$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个纯虚数, 因而 $z_1\bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个纯虚数, 即 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(2) 这是因为 z_1 与 z_2 平行就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\pi$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\pi$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个实数, 因而 $z_1\bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个实数, 即 $\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

□

例题 1.1 在图 1.3的三角形中,$AB = AC$,$PQ = RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN \perp BC$.

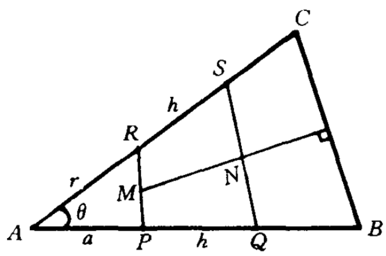

图 1.3

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M : \frac{1}{2}(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N : \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1 = \overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] - \frac{1}{2}(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{h}{2}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB = AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2 = \overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2 = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - b = b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1) = \frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$. 所以由命题 1.3(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN \perp BC$. □

例题 1.2 证明: 平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\bigg/\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \tag{1.1}$$

证明 从图 1.4可以看出,z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件是向量 $z_1 - z_3$ 和 $z_1 - z_4$ 的夹角等于向量 $z_2 - z_3$ 和 $z_2 - z_4$

的夹角或互补(当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时),此时由命题 1.3(2)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 在实轴上,因而等式(1.1)成立.

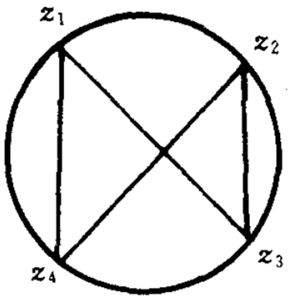

图 1.4

□

定理 1.3 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\cdots,z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数,容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n=r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1=\cdots=z_n$ 都是单位向量时,就有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实,对于负整数,上面的公式也成立:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-n}&=\frac{1}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta}\\&=\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta=\cos(-n)\theta+\mathrm{i}\sin(-n)\theta.\end{aligned}$$

□

命题 1.4

设 w 是一个复数,则满足方程 $z^n=w$ 的复数根有 n 个,即

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

证明 现在设 $w=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的,要求的 $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n=w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

由此即得 $\rho=\sqrt[n]{r}$,$n\varphi=\theta+2k\pi$,$k=0,1,\cdots,n-1$. 这就是说,共有 n 个复数满足 $z^n=w$, 它们是

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w=1$ 时,若记 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根,那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w},\ \sqrt[n]{w}\omega,\cdots,\ \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

□

1.3 扩充平面和复数的球面表示

定义 1.3

为了今后讨论的需要,我们要在 $\mathbf{C}$ 中引进一个新的数 ∞,这个数的模是 ∞,辐角没有意义,它和其他数的运算规则规定为:

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty \ (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0);$$

$0 \cdot \infty$ 和 $\infty \pm \infty$ 都不规定其意义. 引进了 ∞ 的复数系记为 $\mathbf{C}_\infty$, 即 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

在复平面上,没有一个点和 ∞ 相对应,但我们想像有一个**无穷远点**和 ∞ 对应,加上无穷远点的复平面称为**扩充平面**或**闭平面**,不包括无穷远点的复平面也称为**开平面**.

♣

注 在复平面上,无穷远点和普通的点是不一样的,Riemann 首先引进了复数的球面表示,在这种表示中,∞ 和普通的复数没有什么区别.

命题 1.5

证明: 扩充平面和单位球面对等, 即两者之间存在一个双射.

♠

证明 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面,即

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

把 $\mathbf{C}$ 等同于平面:

$$\mathbf{C} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

固定 S 的北极 N, 即 $N = (0,0,1)$, 对于 $\mathbf{C}$ 上的任意点 z, 联结 N 和 z 的直线必和 S 交于一点 P(图 1.5). 若 $|z| > 1$, 则 P 在北半球上; 若 $|z| < 1$, 则 P 在南半球上; 若 $|z| = 1$, 则 P 就是 z. 容易看出, 当 z 趋向 ∞ 时, 球面上对应的点 P 趋向于北极 N, 自然地, 我们就把 $\mathbf{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来,$\mathbf{C}_\infty$ 中的所有点 (包括无穷远点在内) 都被移植到球面上去了, 这样我们就找到了一个扩充平面到单位球面的双射. 而在球面上,N 和其他的点是一视同仁的.

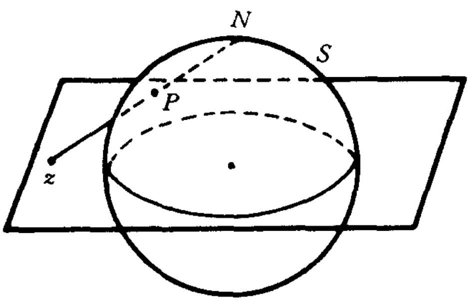

图 1.5

现在给出这种对应的具体表达式. 设 $z = x + \mathrm{i}y$, 容易算出 zN 和球面 S 的交点的坐标为

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

直接用复数 z, 可表示为

$$x_1 = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad x_2 = \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

这样, 从 z 便可算出它在球面上对应点的坐标. 反过来, 从球面上的点 (x_1, x_2, x_3) 也可算出它在平面上的对应点 z. 事实上, 从上面的表达式得

$$\begin{cases} x_1 + \mathrm{i}x_2 = \dfrac{2z}{1+|z|^2}, \\ 1 - x_3 = \dfrac{2}{1+|z|^2}, \end{cases}$$

由此即得

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

这就是所需的计算公式. 现在我们可以具体地写出扩充平面到单位球面的双射

$$f : C_\infty \longrightarrow \mathbf{R}^3, z \longmapsto \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

$$f^{-1} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow C_\infty, (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

□

1.4 复数列的极限

定义 1.4

对于 $a \in \mathbf{C}, r > 0$, 称

$$B(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$$

为以 a 为中心、以 r 为半径的**圆盘**. 特别当 $a = 0, r = 1$ 时, $B(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ 称为**单位圆盘**. $B(a, r)$ 也称为 a 点的一个r **邻域**, 或简称为 a 点的**邻域**. 无穷远点 $z = \infty$ 的邻域是指集合 $\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$, 记为 $B(\infty, R)$.

♣

定义 1.5

我们说 $\mathbf{C}$ 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 $\mathbf{C}$ 中的点 z_0, 是指对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n - z_0| < \varepsilon$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. 或者从几何上来说, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(z_0, \varepsilon)$.

我们称复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 ∞, 是指对任给的正数 $M > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n| > M$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 或者从几何上来说, 对任给的 $M > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(\infty, M)$.

♣

定理 1.4

设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

♡

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 从等式

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

马上可以得到: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. □

定义 1.6

复数列 $\{z_n\}$ 称为 **Cauchy 列**, 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

♣

定理 1.5

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

♡

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_m = x_m + \mathrm{i}y_m$, 那么从等式

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

知道,$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列. □

定理 1.6 (复数域的 Cauchy 收敛准则)

$\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列. ♡

笔记 由此知道复数域 $\mathbf{C}$ 是**完备的**.

证明 由定理 1.4和定理 1.5, 再结合实数域中的 Cauchy 收敛准则立刻得到复数域的 Cauchy 收敛准则. □

1.5 开集、闭集和紧集

定义 1.7

设 E 是一平面点集,$\mathbf{C}$ 中的点对 E 而言可以分为三类:

(i) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E$, 就称 a 为 E 的**内点**;

(ii) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E^c$, 就称 a 为 E 的外点, 这里,E^c 是由所有不属于 E 的点构成的集, 称为 E 的**余集**或**补集**;

(iii) 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中既有 E 的点, 也有 E^c 的点, 就称 a 为 E 的**边界点**. ♣

定义 1.8

E 的内点的全体称为 E 的**内部**, 记为 E°;

E 的外点的全体称为 E 的**外部**, 它就是 E 的余集 E^c 的内部, 即 $(E^c)^\circ$;

E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E. ♣

笔记 由上面的定义可知, 集 E 把复平面分成三个互不相交的部分:$\mathbf{C} = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$, 即

$$(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ. \tag{1.2}$$

例题 1.3 邻域的内部和边界 $B(a,r)$ 中的所有点都是它的内点, 即 $B(a,r) = (B(a,r))^\circ$,$B(a,r)$ 的边界 $\partial B = \{z : |z-a| = r\}$, 即是圆周, 满足条件 $|z-a| > r$ 的点 z 都是 $B(a,r)$ 的外点.

定义 1.9

如果 E 的所有点都是它的内点, 即 $E = E^\circ$, 就称 E 为**开集**.

如果 E^c 是开集, 就称 E 为**闭集**. ♣

例题 1.4 $B(a,r)$ 是开集, 闭圆盘 $\{z : |z-a| \leqslant r\}$ 是闭集,$B(a,r)$ 和它的上半圆周的并集既不是开集也不是闭集.

定义 1.10

点 a 称为集 E 的**极限点**或**聚点**, 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中除 a 外总有 E 中的点.

集 E 的所有极限点构成的集称为 E 的**导集**, 记为 E'.

E 中不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**.

E 和它的导集 E' 的并称为 E 的**闭包**, 记为 $\bar{E}$, 即 $\bar{E} = E \cup E'$. ♣

命题 1.6

对于任意集 E, 有

(i) $a \in \bar{E}$ 的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$B(a,r) \cap E \neq \varnothing, \forall r > 0. \tag{1.3}$$

这里,$\varnothing$ 表示空集;

(ii) $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ, \overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

证明 (i) 若 $a \in \bar{E}$, 则 $a \in E$ 或 $a \in E'$, 不论何者发生, 总有 $B(a,r) \cap E \neq \varnothing$. 反之, 若等式(1.3)成立, 这说明 a 或是 E 的极限点, 或是 E 的孤立点, 因而 $a \in \bar{E}$.

(ii) 由 (i) 知,$a \in (\bar{E})^c$ 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,r) \cap E = \varnothing$, 这说明 a 是 E^c 的内点, 即 $a \in (E^c)^\circ$, 因而 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$. 再看第二个等式,$a \in (E^\circ)^c$ 意味着 a 不是 E 的内点, 即 a 是 E 的外点或边界点, 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $B(a,r) \cap E^c \neq \varnothing$, 由 (i) 知 $a \in \overline{E^c}$. 因而 $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$. □

命题 1.7

(i) E° 是开集,∂E 和 $\bar{E}$ 是闭集;

(ii) E 是闭集的充要条件是 $E = \bar{E}$;

(iii) E 是闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

证明 (i) 任取 $a \in E^\circ$, 则由定义知道, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \subset E$. 显然,$B(a,\varepsilon)$ 中的每一点都是 E 的内点, 因而 $B(a,\varepsilon) \subset E^\circ$, 即 a 是 E° 的内点. 由于 a 是任意取的, 所以 E° 是开集. 由刚才所证,E° 和 $(E^c)^\circ$ 都是开集, 两个开集的并当然也是开集, 由等式(1.2)知 $(\partial E)^c$ 是开集, 因而 ∂E 是闭集. 由于 $(E^c)^\circ$ 是开集, 由命题 1.6(ii)知,$(\bar{E})^c$ 是开集, 所以 $\bar{E}$ 是闭集.

(ii) 如果 $E = \bar{E}$, 则由 (i) 知 $\bar{E}$ 是闭集, 所以 E 是闭集. 反之, 如果 E 是闭集, 那么 E^c 是开集, 因而 $E^c = (E^c)^\circ$. 另外, 由命题 1.6(ii)得 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$, 因而 $E^c = (\bar{E})^c$, 即 $E = \bar{E}$.

(iii) 从 (ii) 立刻可得. □

定义 1.11

点集 E 的**直径**定义为 E 中任意两点间距离的上确界, 记为 $\operatorname{diam}E$, 即

$$\operatorname{diam}E = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

定理 1.7 (Cantor 闭集套定理)

若非空闭集序列 $\{F_n\}$ 满足

(i) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$;

(ii) $\operatorname{diam}F_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时),

那么 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是一个独点集.

笔记 这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

证明 在每一个 F_n 中任取一点 z_n, 我们证明 $\{z_n\}$ 是一个 Cauchy 点列. 由于 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}F_n = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N, 使得 $\operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 今取 $m, n > N$, 由条件 (i),$z_m, z_n \in F_N$, 所以 $|z_n - z_m| \leqslant \operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 因而 $\{z_n\}$ 是一 Cauchy 序列, 设其收敛于 z_0. 我们证明 $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 事实上, 任取 F_k, 则当 $n > k$ 时,z_n 便全部落入 F_k 中, 因为 F_k 是闭的, 由命题 1.7(iii),$\{z_n\}$ 的极限 $z_0 \in F_k$, 所以 $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 如果还有另一点 z_1 也属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 那么必有 $|z_0 - z_1| \leqslant \operatorname{diam}F_n \to 0 (n \to \infty)$, 因而 $z_1 = z_0$. □

定义 1.12

设 E 是一个集,$\mathscr{F} = \{G\}$ 是一个**开集族**, 即 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素都是开集.

如果 E 中每一点至少属于 $\mathscr{F}$ 中的一个开集, 就说 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

♣

例题 1.5 E 是任一点集,ε 是一个给定的正数, 那么

$$\mathscr{F} = \{B(a, \varepsilon) : a \in E\}$$

便是 E 的一个开覆盖.

定义 1.13

我们说点集 E 具有**有限覆盖性质**, 是指从 E 的任一个开覆盖中必能选出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$, 使得这有限个开集的并就能覆盖 E, 即

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j.$$

具有有限覆盖性质的集称为**紧集**.

♣

例题 1.6 空集和有限集都是紧集, 但单位圆盘 $B(0,1) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 却不是紧集, 因为 $G_n = \left\{z : |z| < 1 - \dfrac{1}{n}\right\}, n = 2, 3, \cdots$, 这一串同心圆构成 $B(0,1)$ 的一个开覆盖, 但从中找不出有限个集覆盖 $B(0,1)$.

定义 1.14

集 E 称为是**有界的**, 如果存在 $R > 0$, 使得 $E \subset B(0, R)$.

♣

定理 1.8 (Heine-Borel 定理)

在 $\mathbf{C}$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是有界闭集; 在 $\mathbf{C}_\infty$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是闭集.

♡

证明 我们先证明, 如果 E 是 $\mathbf{C}_\infty$ 中的闭集或 $\mathbf{C}$ 中的有界闭集, 那么 E 是紧集, 即从 E 的任一开覆盖 $\mathscr{F}$ 中, 可以选出有限个开集覆盖 E. 先设 E 是 $\mathbf{C}_\infty$ 中的闭集, 如果 $z = \infty \notin E$, 则因 E 是闭集, 有 $E = \bar{E}$, 即 $\infty \notin \bar{E}$, 由命题 1.6(i), 存在 $R > 0$, 使得 $B(\infty, R) \cap E = \varnothing$, 即 $E \subset \overline{B(0, R)}$, 因而 E 是有界闭集. 如果 $z = \infty \in E$, 由开覆盖的定义,∞ 属于 $\mathscr{F}$ 中的某一个开集, 而 E 在这个开集之外的部分是一有界闭集, 只要再证明这个有界闭集的部分被有限个开集覆盖即可. 总之, 不论何种情况发生, 只要考虑 E 是有界闭集的情形就够了.

现设 E 是有界闭集, 如果它不是紧集, 那么从 E 的开覆盖 $\mathscr{F}$ 中不能取出有限个开集来覆盖 E. 因为 E 是有界的, 它一定包含在一个充分大的闭正方形 Q 中:

$$Q = \{(x, y) : |x| \leqslant M, |y| \leqslant M\}.$$

把这个正方形分成相等的四个小正方形, 则其中必有一个小正方形 Q_1, 使得 $Q_1 \cap E$ 是有界闭集且不具有有限覆盖性质. 再把 Q_1 分成四个相等的小正方形, 其中必有一个小正方形 Q_2 具有上述同样的性质. 这个过程可以无限地进行下去, 得到一列闭正方形 $\{Q_n\}$. 如果记 $F_n = Q_n \cap E$, 那么 F_n 满足下列条件:

(i) F_n 是有界闭集;

(ii) $F_n \supset F_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$;

(iii) 不能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集来覆盖 F_n;

(iv) 当 $n \to \infty$ 时,$\operatorname{diam} F_n \leqslant \dfrac{M}{2^n}\sqrt{2} \to 0$.

由 (i),(ii),(iv) 知道 $\{F_n\}$ 满足 Cantor 闭集套定理的条件, 因而存在复数 z_0, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{z_0\}$. 由于 $z_0 \in F_n \subset E$, 故在 $\mathscr{F}$ 中必有一个开集 G_0, 使得 $z_0 \in G_0$. 由于 z_0 是 G_0 的内点, 故有 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$. 由于 $\operatorname{diam} F_n \to 0$, 故当 n 充分大时 $F_n \subset B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$, 这就是说 G_0 覆盖了 F_n, 这与 (iii) 矛盾. 因而 E 是紧集.

现在证明必要性. 只要对扩充平面的情形来证明就够了, 因为如果一个集对扩充平面是闭的, 它又不包含无穷远点, 那么它必然是有界的. 设 E 是一个紧集, 我们要证明它是闭集, 只要证明 E^c 是开集即可. 为此, 任取 $a \in E^c$,

只要证明 a 是 E^c 的内点就行了. 取这样的开集族 $\mathscr{F}$: 凡是闭包不包含 a 点的开集都属于 $\mathscr{F}$. 因为 $a\in E^c$, 因此对 E 中每一点 z, 都能找到它的邻域 $B(z,\varepsilon)$, 使得 $a\notin\overline{B(z,\varepsilon)}$, 所以 $B(z,\varepsilon)\in\mathscr{F}$. 这就是说,$\mathscr{F}$ 是 E 的一个开覆盖. 由于 E 是紧集, 故能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$, 使得 $E\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}G_j$. 但 $a\notin\overline{G_j}, j=1,\cdots,n$, 所以 $a\in\bigcap\limits_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$. 显然,$\bigcap\limits_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$ 是一个开集, 于是由开集和内点的定义可知, 存在 $r>0$, 使得 $B(a,r)\subset\bigcap\limits_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$. 而且从命题 1.6(ii)得

$$B(a,r)\subset\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c=\bigcap_{j=1}^{n}(G_j^c)^\circ\subset\bigcap_{j=1}^{n}G_j^c=\left(\bigcup_{j=1}^{n}G_j\right)^c\subset E^c,$$

这就证明了 a 是 E^c 的内点, 即 E^c 是开集. □

定义 1.15

设 E,F 是任意两个集,E,F 间的距离定义为

$$d(E,F)=\inf\{|z_1-z_2|:z_1\in E,z_2\in F\}.$$

如果 $E=\{a\}$ 是由一个点所构成的集, 那么 a 和 F 间的距离为

$$d(a,F)=\inf\{|a-z|:z\in F\}.$$

♣

命题 1.8

(1) 如果 F 是闭集,$a\notin F$, 那么 $d(a,F)>0$.

(2) 如果 E 是有限点集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 当然也有 $d(E,F)>0$.

♠

证明

(1) 此时必有 $\varepsilon>0$, 使得 $B(a,\varepsilon)\cap F=\varnothing$, 因而 $d(a,F)\geqslant\varepsilon>0$.

(2)

□

定理 1.9

设 E 是紧集,F 是闭集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 则 $d(E,F)>0$.

♡

注 若 E 是无穷闭集,F 也是闭集, 但 E 不是紧集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 这时 $d(E,F)>0$ 未必成立.

例如,E 是整个实轴,$F=\{z=x+\mathrm{i}e^x:-\infty<x<\infty\}$, 则 E 和 F 都是 $\mathbf{C}$ 中的闭集, 而且 $E\cap F=\varnothing$, 但 $d(E,F)=0$.

笔记 从这个定理可以看出, 紧集之所以重要, 在于它保留了大部分有限集的性质.

证明 任取 $a\in E$, 则 $a\notin F$, 所以 $d(a,F)>0$. 今以 a 为中心、$\frac{1}{2}d(a,F)$ 为半径作一圆盘, 当 a 跑遍集 E 时, 这些圆盘所组成的开集族就是 E 的一个开覆盖. 因为 E 是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$ 来覆盖 E, 其中,$G_j=B\left(a_j,\frac{1}{2}d(a_j,F)\right), j=1,\cdots,n$. 记

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2}d(a_1,F),\cdots,\frac{1}{2}d(a_n,F)\right\}.$$

今任取 $z_1\in E$, 则必有某个 G_j, 使得 $z_1\in G_j$, 因而

$$|z_1-a_j|<\frac{1}{2}d(a_j,F).$$

任取 $z_2\in F$, 当然 $|z_2-a_j|\geqslant d(a_j,F)$, 于是

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_2-a_j|-|z_1-a_j|\geqslant d(a_j,F)-\frac{1}{2}d(a_j,F)=\frac{1}{2}d(a_j,F)\geqslant\delta.$$

所以

$$d(E,F)=\inf\{|z_1-z_2|:z_1\in E,z_2\in F\}\geqslant\delta>0.$$

□

定理 1.10 (Bolzano-Weierstrass 定理)

任一无穷点集至少有一个极限点.

注 这个定理也可以用证明Cantor 闭集套定理的方法给出另一个证明.

证明 设 E 是一个无穷点集, 如果 E 是无界集, 那么无穷远点便是它的极限点. 今设 E 是有界集, 如果它没有极限点, 那么它是一个闭集. 任取 $z \in E$, 由于它不是 E 的极限点, 故必存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z, \varepsilon)$ 中除 z 外不再有 E 中的点.z 取遍整个 E, 由这种 $B(z, \varepsilon)$ 构成的开集族便是 E 的一个开覆盖, 由Heine-Borel 定理, 能从中选出有限个来覆盖 E. 因为每个开集只包含 E 的一个点, 这说明 E 是一个有限集, 与 E 是无穷点集的假定矛盾, 因而 E 必有极限点. □

1.6 曲线和域

定义 1.16 (连续曲线)

所谓**连续曲线**, 是指定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个复值连续函数 $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$, 写为

$$z = \gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

这里,$x(t)$,$y(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数.

如果用 γ^* 记 γ 的像点所成的集合:

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\},$$

那么 γ^* 是 $\mathbf{C}$ 上的紧集. 曲线 γ 的方向就是参数 t 增加的方向, 在这个意义下,$\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 分别称为 γ 的**起点**和**终点**.

如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即起点和终点重合, 就称 γ 为**闭曲线**.

如果曲线 γ 仅当 $t_1 = t_2$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**.

如果只有当 $t_1 = a$,$t_2 = b$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单闭曲线**或 **Jordan 闭曲线**, 或简称**围道**.

定义 1.17

设 $z = \gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是一条曲线. 对区间 $[a, b]$ 作分割 $T : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 得到以 $z_k = \gamma(t_k)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为顶点的折线 P, 那么 P 的长度为

$$|P| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果不论如何分割区间 $[a, b]$, 所得折线的长度都是有界的, 就称曲线 γ 是**可求长的**,γ 的长度定义为 $|P|$ 的上确界, 即

$$\sup_{T} \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果 $\gamma'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$ 存在, 且 $\gamma'(t) \neq 0$, 那么 γ 在每一点都有切线,$\gamma'(t)$ 就是曲线 γ 在 $\gamma(t)$ 处的切向量, 它与正实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(t)$. 如果 $\gamma'(t)$ 是连续函数, 那么 γ 的切线随 t 而连续变动, 这时称 γ 为**光滑曲线**. 在这种情况下,γ 的长度为

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

曲线 γ 称为**逐段光滑的**, 如果存在 $t_0, t_1, \cdots, t_n$, 使得 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,$\gamma$ 在每个参数区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 上是光滑的, 在每个分点 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 处 γ 的左右导数存在.

定义 1.18

平面点集 E 称为是**连通的**, 如果对任意两个不相交的非空集 E_1 和 E_2, 满足

$$E = E_1 \cup E_2,$$

那么 E_1 必含有 E_2 的极限点, 或者 E_2 必含有 E_1 的极限点. 也就是说,$E_1 \cap \bar{E}_2$ 和 $\bar{E}_1 \cap E_2$ 至少有一个非空. ♣

命题 1.9

$\mathbf{C}$ 中的开集 E 是连通的充分必要条件是 E 不能表示为两个不相交的非空开集的并. ♠

证明 设开集 E 是连通的, 如果存在不相交的非空开集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 由于 E_1 中的点都是 E_1 的内点,E_2 中的点都是 E_2 的内点, 因此 E_1 中没有 E_2 的极限点,E_2 中也没有 E_1 的极限点, 这与 E 的连通性相矛盾. 这就证明了条件的必要性. 反之, 如果开集 E 是不连通的, 则必存在不相交的非空集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$, 且 E_1 中无 E_2 的极限点,E_2 中无 E_1 的极限点. 由此可见,E_1 和 E_2 均为开集. 这就证明了条件的充分性. □

定理 1.11

平面上的非空开集 E 是连通的充分必要条件是:E 中任意两点可用位于 E 中的折线连接起来. ♡

证明 先证必要性. 设 E 是平面上一个非空的连通的开集, 任取 $a \in E$, 定义 E 的子集 E_1,E_2 如下:

$$E_1 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 可用位于} E \text{ 中的折线连接}\},$$

$$E_2 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 不能用位于} E \text{ 中的折线连接}\}.$$

显然,$E = E_1 \cup E_2$, 而且 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 现在证明 E_1 和 E_2 都是开集. 任取 $z_0 \in E_1$, 因 E 是开集, 故必有 z_0 的邻域 $B(z_0, \delta) \subset E$. 这一邻域中的所有点当然可用一条线段与 z_0 相连, 因而可用位于 E 中的折线与 a 相连, 即 $B(z_0, \delta) \subset E_1$, 所以 E_1 是开集. 再任取 $z_0' \in E_2$, 则必有 z_0' 的邻域 $B(z_0', \delta') \subset E$, 如果此邻域中有一点能用一条折线与 a 点相连, 那么 z_0' 能用线段与该点相连, 因而 z_0' 能用折线与 a 点相连, 这与 z_0' 的定义矛盾. 因而 $B(z_0', \delta') \subset E_2$, 即 E_2 也是开集. 由 E 的连通性知道,E_1,E_2 中必有一个是空集. 由于 $a \in E_1$, 故 E_2 是空集. 因而 E 中所有点都能用折线与 a 相连, 而 E 中任意两点可以用经过 a 的折线相连, 这就证明了必要性.

再证条件的充分性. 如果存在两个不相交的非空开集 E_1,E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 任取 $z_1 \in E_1$,$z_2 \in E_2$, 由假定, 这两点可用 E 中的折线连接, 因而折线中必有一条线段把 E_1 中的一点与 E_2 中的一点连接起来. 不妨设这条线段连接的就是 z_1 和 z_2, 该线段的参数表示为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

其中,$t \in [0, 1]$. 今设

$$T_1 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_1\},$$

$$T_2 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_2\}.$$

则 T_1,T_2 是非空的不相交的开集, 而且 $T_1 \cup T_2 = (0, 1)$, 这与区间的连通性相矛盾. □

定义 1.19

非空的连通开集称为**域**. ♣

笔记 从定理 1.11知道, 域中任意两点必可用位于域中的折线连接起来.

从几何上来看, 一个域就是平面上连成一片的开集. 例如, 单位圆的内部、上半平面、下半平面等都是域的例子.

定理 1.12 (Jordan 定理)

一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个域, 其中一个是有界的, 称为 γ 的内部; 另一个是无界的, 称为 γ 的外部, 而 γ 是这两个域的共同的边界.

笔记 单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$ 和圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 都是域, 但它们从函数论的角度来看有很大的差别, 原因是前者是单连通的, 而后者则不是.

证明

□

定义 1.20

域 D 称为是**单连通的**, 如果 D 内任意简单闭曲线的内部仍在 D 内. 不是单连通的域称为是**多连通的**.

定义 1.21

如果域 D 是由 n 条简单闭曲线围成的, 就称 D 是 n **连通的**, 简单闭曲线中也可以有退化成一条简单曲线或一点的.

例题 1.7 单位圆盘是单连通的, 圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 是二连通的, 除去圆心的单位圆盘也是二连通的, 除去圆心和线段 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 的单位圆盘则是一个三连通域.

1.7 复变函数的极限和连续性

定义 1.22

设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z \in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个**单值复变函数**, 记为 $w = f(z)$ 或 $f : E \to \mathbb{C}.E$ 称为 f 的定义域, 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 称为 f 的值域.

如果对于 $z \in E$, 对应的 w 有几个或无穷多个, 则称在 E 上确定了一个**多值函数**.

笔记 例如,$w = |z|^2$,$w = z^3 + 1$ 都是确定在整个平面上的单值函数; 而 $w = \sqrt[n]{z}$,$w = \mathrm{Arg}z$ 则是多值函数. 今后若非特别说明, 我们所讲的函数都是指单值函数.

注 复变函数是定义在平面点集上的, 它的值域也是一个平面点集, 因此复变函数也称为**映射**, 它把一个平面点集映成另一个平面点集. 与 $z \in E$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 在映射 f 下的像点,z 就称为 w 的原像. 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 也称为 E 在映射 f 下的像, 记为 $f(E)$. 如果 $f(E) \subset F$, 就说 f 把 E 映入 F, 或者说 f 是 E 到 F 中的映射. 如果 $f(E) = F$, 就说 f 把 E 映为 F, 或者说 f 是 E 到 F 上的映射.

定理 1.13

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 用 u 和 v 记 $w = f(z)$ 的实部和虚部, 则有

$$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

这就是说, 一个复变函数等价于两个二元的实变函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$.

笔记 例如 $w = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, 它等价于 $u = x^2 - y^2$ 和 $v = 2xy$ 两个二元函数;
再如 $w = |z|$, 它等价于 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $v = 0$ 这两个二元函数.

定义 1.23

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得当 $z \in E$ 且 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - a| < \varepsilon$, 就说当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 有极限 a, 记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的正数 δ, 使得当 $z \in B(z_0, \delta) \cap E$ 且 $z \neq z_0$ 时有 $f(z) \in B(a, \varepsilon)$, 这后一种说法也适用于 $z = \infty$ 的情形. ♣

定理 1.14

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

♡

笔记 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

证明 设 $a = \alpha + i\beta, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 由下面的不等式

$$|u(x, y) - \alpha| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|,$$

$$|v(x, y) - \beta| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|$$

知道, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

□

定义 1.24

我们说 f 在点 $z_0 \in E$ 连续, 如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

如果 f 在集 E 中每点都连续, 就说 f 在集 E 上连续. ♣

定理 1.15

复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0) 处连续. ♡

证明 由定理 1.14易得. □

定义 1.25

f 在 E 上**一致连续**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$, 对 E 上任意的 z_1, z_2, 只要 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. ♣

定理 1.16

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集,$f: E \to \mathbb{C}$ 在 E 上连续, 那么

(i) f 在 E 上有界;

(ii) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值, 即存在 $a, b \in E$, 使得对每个 $z \in E$, 都有

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(b)|;$$

(iii) f 在 E 上一致连续. ♡

证明 (i)

(ii) 记 $M=\sup\{|f(z)|:z\in E\}$, 于是对每一自然数 n, 必有 $z_n\in E$, 使得

$$M-\frac{1}{n}\leqslant |f(z_n)|\leqslant M. \tag{1.4}$$

因为 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, 由Heine-Borel 定理,E 为有界闭集. 再由Bolzano-Weierstrass 定理,$\{z_n\}$ 必有极限点, 即有一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 设其极限为 a, 则 $a\in E$. 把(1.4)式写成

$$M-\frac{1}{n_k}\leqslant |f(z_{n_k})|\leqslant M,$$

让 $k\to\infty$, 并注意到 f 在 a 处的连续性, 即得 $|f(a)|=M$.

同理可证, 存在 $b\in E$, 使得 $|f(b)|=\inf\{|f(z)|:z\in E\}$.

(iii) □

第 2 章 全纯函数

2.1 复变函数的导数

定义 2.1

设 $f : D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2.1}$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可微**或**可微**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**或**微商**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在 D 中每点都可微, 就称 f 是域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**. ♣

命题 2.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续. ♠

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (2.1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{2.2}$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. □

例题 2.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

笔记 但容易看出这个函数在 $\mathbb{C}$ 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z) = \mathrm{Re} z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbb{C}$ 中处处不可导. □

命题 2.2

(1) 若 f 和 g 在域 D 中全纯, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z \in D, g(z) \neq 0$, 那么 $\dfrac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) 设 D_1, D_2 是 $\mathbb{C}$ 中的两个域, 且

$$f : D_1 \to D_2,$$

$$g : D_2 \to \mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h = g\circ f$ 是 $D_1 \to \mathbb{C}$ 的全纯函数, 而且 $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$. 这里,$g\circ f$ 记 f 和 g 的复合函数:$g\circ f(z) = g(f(z))$.

证明

(1)

(2)

□

2.2 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.2

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. 我们说 f 在 z_0 处**实可微**, 是指 u 和 v 作为 x, y 的二元函数在 (x_0, y_0) 处可微.

命题 2.3

设 $f : D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处实可微的充分必要条件是

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|). \tag{2.3}$$

成立, 其中

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

证明 设 f 在 z_0 处实可微, 由二元实值函数可微的定义, 有

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|), \tag{2.4}$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|), \tag{2.5}$$

这里,$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 于是

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + \mathrm{i}(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\Delta y + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$

把 $\Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z})$,$\Delta y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Delta z - \overline{\Delta z})$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta z + \overline{\Delta z}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$

引进算子

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

则上式可写为

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|). \tag{2.7}$$

容易看出,(2.7)式和(2.4),(2.5)两式等价. □

注 为什么要像(2.6)式那样来定义算子 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 呢？这是因为如果把复变函数 $f(z)$ 写成

$$f(x,y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, -\mathrm{i}\frac{z-\bar{z}}{2}\right),$$

把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量, 分别对 z 和 $\bar{z}$ 求偏导数, 则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

这就是表达式(2.6)的来源. 这说明在进行微分运算时, 可以把 $z,\bar{z}$ 看成独立的变量.

现在很容易得到 f 在 z_0 处可微的条件了.

定理 2.1

设 f 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 f 在 z_0 处实可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. 在可微的情况下,$f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

证明 如果 f 在 z_0 处可微, 由(2.2)式得

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

与(2.3)式比较就知道,f 在 z_0 处是实可微的, 而且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

反之, 若 f 在 z_0 处实可微, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, 则由(2.3)式得

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

由此即知

$$\lim_{\Delta z} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

故 f 在 z_0 处可微, 而且 $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. □

定义 2.3 (Cauchy-Riemann 方程)

设 f 是定义在域 D 上的函数,$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 称为 **Cauchy − Riemann 方程**.

笔记 从这个方程可以得到 f 的实部和虚部应满足的条件.

命题 2.4 (Cauchy-Riemann 方程的等价定义)

设 $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, 则 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 等价于

(i)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.8}$$

(ii)

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0.$$

(iii) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 进而 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, 则 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

证明 (i) 由(2.6)式得

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

因此,Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 就等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(ii) 又注意到

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

故 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 也等价于 $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$.

(iii) 令 $F = x - r\cos\theta, G = y - r\sin\theta$, 则

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_r & F_\theta \\ G_x & G_y & G_r & G_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

直接计算 Jacobi 行列式得

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} -\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\theta)}\right] + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,x)}\right] = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\theta)}\right] + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,y)}\right] = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\theta)}\right] + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,x)}\right] = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\theta)}\right] + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\left[-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,y)}\right] = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}.$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\sin\theta=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\cos\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Longleftrightarrow\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\cos\theta=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\sin\theta.$$

由 (i) 可知 Cauchy-Riemann 方程等价于 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, 故此时 Cauchy-Riemann 方程等价于

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\sin\theta=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\cos\theta,\\ \frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\cos\theta=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\sin\theta.\end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.\end{cases}$$

□

定理 2.2

设 $f=u+\mathrm{i}v$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in D$, 那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 且在 (x_0,y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 即

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0,\qquad \frac{\partial\bar f}{\partial z}=0,\qquad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}.$$

在可微的情况下, 有

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

这里的偏导数都在 (x_0,y_0) 处取值.

♡

证明 最后这个 $f'(z_0)$ 的表达式是从 定理 2.1中的 $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ 和 Cauchy-Riemann 方程的等价定义得到的. □

定义 2.4

1. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域, 我们用 $C(D)$ 记 D 上连续函数的全体, 用 $H(D)$ 记 D 上全纯函数的全体.
2. 设 $f=u+\mathrm{i}v$, 记 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}$. 我们用 $C^1(D)$ 记 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上连续的 f 的全体.
3. 用 $C^k(D)$ 记在 D 上有 k 阶连续偏导数的函数的全体,$C^\infty(D)$ 记在 D 上有任意阶连续偏导数的函数的全体.

♣

命题 2.5

(1) $H(D)\subset C(D)$.

(2) $C^1(D)\subset C(D)$.

(3) 域 D 上的全纯函数在 D 上有任意阶的连续偏导数, 并且有如下的包含关系:

$$H(D)\subset C^\infty(D)\subset C^k(D)\subset C^1(D)\subset C(D).$$

这里,k 是大于 1 的自然数.

♠

证明

(1) 命题 2.1告诉我们,$H(D)\subset C(D)$.

(2) 设 $f=u+\mathrm{i}v$, 记 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}$. 我们用 $C^1(D)$ 记 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上连续的 f 的全体. 进而 u,v

关于 x, y 的偏导在 D 上都连续, 由多元微积分的知识知道,u, v 在 D 上都可微. 于是对于任意 $f \in C^1(D)$,f 在 D 上实可微, 从(2.7)式知道

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|).$$

令 $\Delta z \to 0$, 则 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0+\Delta z) = f(z_0)$, 故 f 在 D 上连续, 因而 $C^1(D) \subset C(D)$.

(3)

□

例题 2.2 研究函数 $f(z) = z^n$,n 是自然数.

解 显然,$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 且 f 在整个平面上是实可微的. 因而,f 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 而且

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = nz^{n-1}. \tag{2.9}$$

□

例题 2.3 研究函数 $f(z) = \mathrm{e}^{-|z|^2}$.

解 把 f 写为 $f(z) = \mathrm{e}^{-z\bar{z}}$, 于是 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\mathrm{e}^{-z\bar{z}}z$, 它只有在 $z=0$ 处才等于零. 因此,$\mathrm{e}^{-|z|^2}$ 只有在 $z=0$ 处可微, 它在任何点处都不是全纯的. 但它对 x, y 有任意阶连续偏导数, 所以它是 $C^\infty(\mathbb{C})$ 中的函数. □

命题 2.6

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,$f \in H(D)$. 如果对每一个 $z \in D$, 都有 $f'(z) = 0$, 证明 f 是一常数. ♠

证明 因为 $f'(z) = 0$, 所以由定理 2.2可知 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, 并且 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$. 因此 u, v 都是常数, 故 f 是一常数. □

定义 2.5 (调和函数)

设 u 是域 D 上的实值函数, 如果 $u \in C^2(D)$, 且对任意 $z \in D$, 有

$$\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0, \tag{2.10}$$

就称 u 是 D 中的**调和函数**. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 **Laplace 算子**. ♣

命题 2.7

设 $u \in C^2(D)$, 那么 $\Delta u = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$. ♠

证明 由(2.6)式, 有

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta u.\end{aligned}$$

□

定理 2.3

设 $f = u + \mathrm{i}v \in H(D)$, 那么 u 和 v 都是 D 上的调和函数.

证明 因为 $f \in H(D)$, 由定理 2.2, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0.$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

于是, 由 $u = \dfrac{1}{2}(f + \overline{f})$ 即得

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

同理可证 $\Delta v = 0$. □

定义 2.6 (共轭调和函数)

设 u 和 v 是 D 上的一对调和函数, 如果它们还满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.11}$$

就称 v 为 u 的**共轭调和函数**.

命题 2.8

全纯函数的实部和虚部就构成一对共轭调和函数.

证明 由定理 2.3和定理 2.2立得. □

定理 2.4

设 u 是单连通域 D 上的调和函数, 则必存在 u 的共轭调和函数 v, 使得 $u + \mathrm{i}v$ 是 D 上的全纯函数.

证明 因为 u 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

若令 $P = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, Q = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是一个全微分, 因而积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

与路径无关. 令

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y,$$

则

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \\ &= \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + 0 + 0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \\ &= \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

那么

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

所以,v 就是要求的 u 的共轭调和函数. □

2.3 导数的几何意义

命题 2.9

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z = \gamma(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

设 $\gamma(a) = z_0$, 且 $\gamma'(a) \neq 0$. 设 $w = f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ, 它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

则 σ 在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

或者写为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) - \mathrm{Arg}\gamma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0). \tag{2.12}$$

$\mathrm{Arg} f'(z_0)$ 就称为映射 $w = f(z)$ 在点 z_0 处的**转动角**.

笔记 这说明像曲线 σ 在 w_0 处的切线与正实轴的夹角与原曲线 γ 在 z_0 处的切线与正实轴的夹角之差总是 $\mathrm{Arg} f'(z_0)$, 而与曲线 γ 无关.

证明 由定义 1.17可知,γ 在点 z_0 处的切线与正实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(a)$. 由于 $\sigma'(a) = f'(\gamma(a))\gamma'(a) = f'(z_0)\gamma'(a) \neq 0$, 所以再结合定理 1.2(1)可得 σ 在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

□

定义 2.7

若 $w = f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 并且在 z_0 处满足: 过 z_0 的任意两条曲线 C_1, C_2 经映射后得到的曲线 Γ_1, Γ_2, 其夹角 (包括大小和方向) 与原曲线 C_1, C_2 的夹角相等. 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**保角点**, 也称 f 在 z_0 点是**保角的**. 若 $f(z)$ 在 D 内所有点都是保角的, 则称 $f(z)$ 是 D 上的**保角变换**.

注 夹角的“方向”指从曲线 C_1 到 C_2 的旋转方向, 与映射后从 Γ_1 到 Γ_2 的旋转方向一致, 即保持“定向”.

定理 2.5

全纯函数在其导数不为零的点处是保角的.

证明 如果过 z_0 点作两条光滑曲线 γ_1,γ_2, 它们的方程分别为

$$z=\gamma_1(t),\ a\leqslant t\leqslant b \text{和} z=\gamma_2(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

且 $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)=z_0$(图 2.1(a)). 映射 $w=f(z)$ 把它们分别映为过 w_0 点的两条光滑曲线 σ_1 和 σ_2(图 2.1(b)), 它们的方程分别为

$$w=\sigma_1(t)=f(\gamma_1(t)),\ a\leqslant t\leqslant b \text{和} w=\sigma_2(t)=f(\gamma_2(t)),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

由 (2.12)式可得

$$\mathrm{Arg}\sigma_1'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(a)=\mathrm{Arg}f'(z_0)=\mathrm{Arg}\sigma_2'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_2'(a),$$

即

$$\mathrm{Arg}\sigma_2'(a)-\mathrm{Arg}\sigma_1'(a)=\mathrm{Arg}\gamma_2'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(a). \tag{2.13}$$

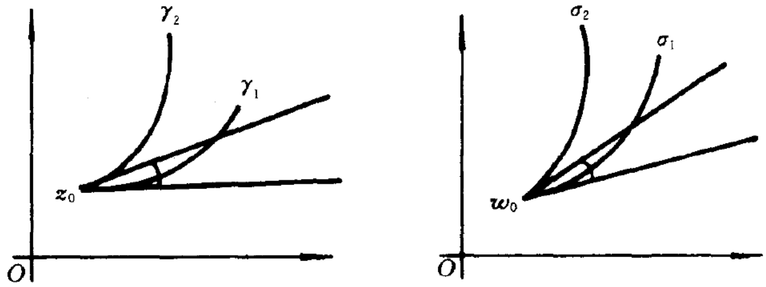

图 2.1

上式左端是曲线 σ_1 和 σ_2 在 w_0 处的夹角 (两条曲线在某点的夹角定义为这两条曲线在该点的切线的夹角), 右端是曲线 γ_1 和 γ_2 在 z_0 处的夹角.(2.13)式说明, 如果 $f'(z_0)\neq 0$, 那么在映射 $w=f(z)$ 的作用下, 过 z_0 点的任意两条光滑曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的. □

推论 2.1

设 $w=f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 则 f 在 z_0 上是保角的的充要条件是 $f(z)$ 在 D 上全纯且 $f'(z_0)\neq 0$. ♡

证明 由定理 2.5立得. □

定义 2.8 (伸缩率)

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z=\gamma(t),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

设 $\gamma(a)=z_0$, 且 $\gamma'(a)\neq 0$. 设 $w=f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ(图 2.2), 它的方程为

$$w=\sigma(t)=f(\gamma(t)),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的**伸缩率**. ♣

笔记 由于

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0),$$

所以, 当 z 沿着 γ 趋于 z_0 时, 有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|.$$

这说明像点之间的距离与原像之间的距离之比只与 z_0 有关, 而与曲线 γ 无关.

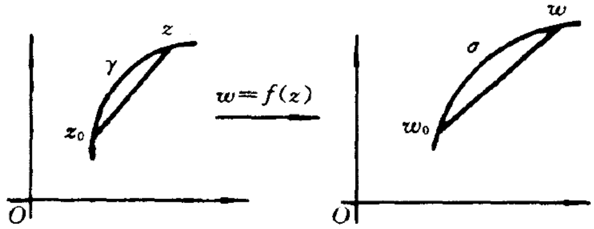

图 2.2

2.4 初等全纯函数

2.4.1 指数函数

定义 2.9 (指数函数)

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 定义

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

♣

命题 2.10

(i) e^z 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 而且

$$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z.$$

(ii) 对任意 $z\in\mathbf{C}$, 都有 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(iii) 对于任意 $z\in\mathbf{C},\mathrm{e}^z\neq 0$.

(iv) 对于任意 z_1,z_2, 有

$$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}.$$

(v) e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数.

♠

证明

(i) e^z 在 $\mathbb{C}$ 上每点实可微是显然的. 今验证它满足 Cauchy-Riemann 方程. 因为 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y,v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故由定理 2.2,e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 而且

$$(\mathrm{e}^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y=\mathrm{e}^z.$$

(ii) 当 $z=x$ 时, 即 $y=0$, 因而有 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$; 当 $z=\mathrm{i}y$ 时,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$. 这样, 复数的三角表示 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 就可简单地写为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(iii) 这是因为 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$.

(iv) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 直接计算即得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}&=\mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1+\mathrm{i}\sin y_1)\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2+\mathrm{i}\sin y_2)\\&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+\mathrm{i}\sin(y_1+y_2))\\&=\mathrm{e}^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

(v) 注意到

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}(y+2\pi)}=\mathrm{e}^x(\cos(y+2\pi)+\mathrm{i}\sin(y+2\pi))=\mathrm{e}^z.$$

□

定义 2.10

设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是一个复变函数, 如果对域 D 中任意两点 $z_1, z_2 (z_1 \neq z_2)$, 必有 $f(z_1) \neq f(z_2)$, 就称 f 在 D 中是**单叶的**,D 称为 f 的**单叶性域**.

♣

命题 2.11

如果 f 在 D 中是单叶的,$f(D) = G$, 那么 f 是 D 到 G 之上的一一映射.

♠

证明 由单叶的定义和双射的定义立得. □

命题 2.12

求 $w = \mathrm{e}^z$ 的单叶性域.

♠

解 如果 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 使得 $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$, 即 $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1} = \mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}$, 那么 $x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 2k\pi, k$ 是任意整数, 也即 $z_1 - z_2 = 2k\pi\mathrm{i}$. 这就是说, 凡是不包含满足条件 $z_1 - z_2 = 2k\pi\mathrm{i}$ 的 z_1, z_2 的域都是 $w = \mathrm{e}^z$ 的单叶性域. □

命题 2.13

域

$$\{z = x + \mathrm{i}y : 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\},\ k = 0, \pm 1, \cdots$$

都是 e^z 的单叶性域, 它是平行于实轴、宽度为 2π 的带状域.

♠

笔记 由于 e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的函数, 我们只要弄清 e^z 在域 $\{z = x + \mathrm{i}y : 0 < y < 2\pi\}$ 中的映射性质, 那么在其他带状域中的性质是一样的.

证明 由命题 2.12不难验证. □

命题 2.14

设 $w = e^z$, 考虑平行于实轴的直线 $\mathrm{Im}z = y_0$. 这条直线上的点的方程为

$$z = x + \mathrm{i}y_0,\ -\infty < x < \infty,$$

则 $w = \mathrm{e}^z$ 把平行于实轴的直线 $\mathrm{Im}z = y_0$ 变成一条从原点出发的半射线, 它与实轴正方向的夹角是 y_0(图 2.3);

$w = \mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : 0 < y < 2\pi\}$ 变成全平面除掉正实轴的域 $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$;

$w = \mathrm{e}^z$ 把直线 $\mathrm{Im}z = 0$ 变成正实轴的上岸, 直线 $\mathrm{Im}z = 2\pi$ 变成正实轴的下岸;

$w = \mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : 0 < y < \pi\}$ 变成上半平面, 带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : \pi < y < 2\pi\}$ 变成下半平面.

一般来说,$w = \mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : \alpha < y < \beta, 0 < \alpha < \beta \leq 2\pi\}$ 变成角状域 $\alpha < \arg w < \beta$.

♠

证明 由条件可知

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_0}.$$

这是一条从原点出发的半射线, 它与实轴正方向的夹角是 y_0(图 2.3). 当 y_0 从 0 变到 2π 时, 这条半射线的辐角也从 0 变到 2π. 因此,$w = \mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : 0 < y < 2\pi\}$ 变成全平面除掉正实轴的域 $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$, 直线 $\mathrm{Im}z = 0$ 变成正实轴的上岸, 直线 $\mathrm{Im}z = 2\pi$ 变成正实轴的下岸; 带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : 0 < y < \pi\}$ 变成上半平面, 带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : \pi < y < 2\pi\}$ 变成下半平面. 一般来说,$w = \mathrm{e}^z$ 把带状域 $\{z = x + \mathrm{i}y : \alpha < y < \beta, 0 < \alpha < \beta \leq 2\pi\}$ 变成角状域 $\alpha < \arg w < \beta$. □

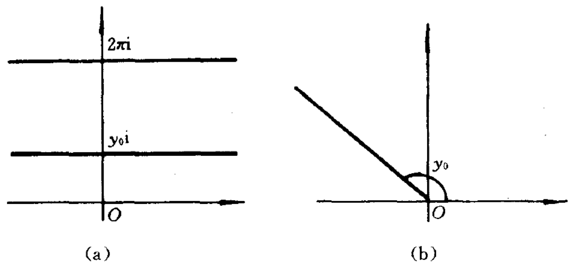

图 2.3

2.4.2 对数函数

定义 2.11

对于给定的 $z \in \mathbb{C}$, 满足方程 $\mathrm{e}^w = z$ 的 w 称为 z 的**对数**, 记为 $w = \mathrm{Log}z$.

命题 2.15

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$w = u + \mathrm{i}v$, 并且满足方程 $\mathrm{e}^w = z$, 则 $\mathrm{e}^u = r$,$v = \theta + 2k\pi$. 于是

$$\mathrm{Log}z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i} = \log|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z.$$

由此可知,$\mathrm{Log}z$ 是一个多值函数, 它的多值性是由 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的多值性产生的.

证明 由条件可知 $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 因而 $\mathrm{e}^u = r$,$v = \theta + 2k\pi$. 于是

$$\mathrm{Log}z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i} = \log|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z.$$

□

定理 2.6

如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通域, 则必在 D 上存在无穷多个单值全纯函数 $\varphi_k, k = 0, \pm1, \cdots$, 使得在 D 上成立

$$\mathrm{e}^{\varphi_k(z)} = z,\ k = 0, \pm1, \cdots;$$

而且对每一个 k, 有 $\varphi_k'(z) = \dfrac{1}{z}$. 其中的每一个 φ_k 都称为 $\mathrm{Log}z$ 在 D 上的**单值全纯分支**.

注 现在说明为什么要求 D 不包含原点和无穷远点. 如果 D 包含原点, 那么 D 中就包含绕原点 $z = 0$ 的简单闭曲线 γ, 当 z 从 γ 上的一点 z_0 沿 γ 的正方向 (即反时针方向) 回到 z_0 时,z 的辐角增加了 2π,φ_{k_0} 的值从 $\varphi_{k_0}(z_0)$ 连续地变为 $\varphi_{k_0+1}(z_0)$, 而不再回到原来的值 $\varphi_{k_0}(z_0)$. 因此, 在这样的域中就不可能从 $\mathrm{Log}z$ 中分出单值的全纯分支. 因为 D 内任意一条绕原点的简单闭曲线也可以看作是绕无穷远点的简单闭曲线, 因此 D 也不能包含无穷远点.

证明 对给定的 z, 选定它的辐角 $\theta = \theta_0 + 2k_0\pi$, 则 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 这里,$\theta_0$ 是 z 的辐角的主值, 即 $\theta_0 = \arg z$,k_0 是任意一个给定的整数. 在 D 上定义

$$\varphi_{k_0}(z) = \log|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2k_0\pi) = \log r + \mathrm{i}\theta,$$

这时,$u = \log r$,$v = \theta$. 容易验证这时有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r},$$

因此由命题 2.4(iii)知道,φ_{k_0} 是 D 上的全纯函数, 而且由定理 2.2及命题 2.4(iii) 的证明过程可得

$$\begin{aligned}\varphi_{k_0}'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\theta\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta}{r}\right) = \frac{\cos\theta}{r} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \\
&= \frac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = \frac{1}{r} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\
&= \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{z} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}
$$

此外

$$\mathrm{e}^{\varphi_k(z)} = \mathrm{e}^{\log|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2k_0\pi)} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = z,$$

对每一点 $z \in D$ 成立. □

定义 2.12

如果当 z 沿着 z_0 的充分小邻域中的任意简单闭曲线绕一圈时, 多值函数的值就从一支变到另一支, 那么称 z_0 为该多值函数的一个**支点**. ♣

笔记 以对数函数为例,$z = 0$ 和 $z = \infty$ 便是 $\mathrm{Log}z$ 的支点.

现在讨论 $\mathrm{Log}z$ 的映射性质. 根据定理 2.6, 我们取 D 为 $\mathbb{C}$ 除去负实轴后所得的域, 它是不包含原点和无穷远点的单连通域, 因而可以分出无穷多个单值的全纯分支. 我们把 $k_0 = 0$ 的那一支称为它的主支, 这时取 $\mathrm{Arg}z$ 的主值为 $-\pi < \arg z < \pi$, 于是

$$w = \varphi_0(z) = \log|z| + \mathrm{i}\arg z$$

把 D 单叶地映为带状域 $-\pi < \mathrm{Im}w < \pi$. 其他各分支, 例如 $w = \varphi_k(z) = \log|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$, 就把 D 单叶地映为带状域 $(2k-1)\pi < \mathrm{Im}w < (2k+1)\pi$. 一般来说,$w = \varphi_0(z)$ 把角状域 $-\pi \leqslant \alpha < \arg z < \beta \leqslant \pi$ 单叶地映为带状域 $\alpha < \mathrm{Im}w < \beta$. 今后, 我们就把 $\mathrm{Log}z$ 的主支 $\varphi_0(z)$ 记为 $\log z$.

有时, 为了方便起见, 也可把 $\mathbb{C}$ 去掉正实轴以后的域取为 D, 它同样是不包含原点和无穷远点的单连通域, 但这时辐角的主值范围应取为 $0 < \arg z < 2\pi$.$\mathrm{Log}z$ 的主支是

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z,\ \ 0 < \arg z < 2\pi,$$

它把 D 单叶地映为带状域 $0 < \mathrm{Im}w < 2\pi$.

定义 2.13 (割线)

我们把这种从原点出发并伸向无穷远的曲线叫做**割线**. ♣

一般来说, 还可以用一条从原点出发并伸向无穷远的曲线代替上面的负实轴或正实轴, 这样得到的域 D 同样满足定理 2.6的条件. 通常, 为了便于表达出 $\mathrm{Log}z$ 的单值分支 $\varphi_k(z)$, 常取从原点出发的一条射线作为割线, 特别是取负实轴或正实轴.

2.4.3 幂函数

定义 2.14 (整函数)

在 $\mathbb{C}$ 上每点都全纯的函数称为**整函数**. ♣

定义 2.15 (幂函数)

设 z 是任意复数,$w = z^\mu$ 称为**幂函数**, 这里,$\mu = a + bi$ 是一个复数. ♣

我们分几种情形来讨论.

(1)$\mu = n$, 是一个自然数. 按导数的定义, 可以直接算出

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

所以,$w=z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上每点都是全纯的. 所以,$w=z^n$ 是一个整函数. 由于它的导数除原点外都不为零, 因此除原点外它是一个保角变换, 保角性在原点不成立. 考虑从原点出发的射线, 它与正实轴的夹角为 θ, 这条射线的方程可写为 $\arg z=\theta$. 由于 $w=z^n$, 所以

$$\arg w=n\arg z=n\theta.$$

这就是说, 这条射线的像也是一条过原点的射线, 但它与正实轴的夹角是 $n\theta$, 已经比原来的夹角扩大了 n 倍. 这一事实在作具体变换时却很有用. 例如,$w=z^2$ 能把第一象限变成上半平面,$w=z^3$ 能把角状域 $\left\{z:0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}\right\}$ 变成上半平面, 等等.

现在来看 $w=z^n$ 的单叶性域. 设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 如果 $z_1\neq z_2$, 但 $z_1^n=z_2^n$, 即 $r_1^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1}=r_2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_2}$, 因而 $r_1=r_2$,$\theta_1=\theta_2+\dfrac{2k\pi}{n}$. 因此, 只要域中不出现这样两个点, 它们的辐角差等于 $\dfrac{2\pi}{n}$, 这样的域便是 $w=z^n$ 的单叶性域. 例如,$\left\{z:0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}\right\}$ 便是它的一个单叶性域. 一般来说, 域

$$\left\{z:\alpha<\arg z<\beta,0<\beta-\alpha\leqslant\frac{2\pi}{n}\right\}$$

是它的单叶性域, 它在 $w=z^n$ 映射下的像是

$$\{w:n\alpha<\arg w<n\beta\}.$$

(2) $\mu=\dfrac{1}{n}$,n 是一个自然数.

$w=z^{\frac{1}{n}}$ 是 $w=z^n$ 的反函数. 因为对于一个给定的 z,$z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个值, 所以它是一个多值函数. 由第一章的知识知道, 它的多值性也是由 $\operatorname{Arg}z$ 的多值性产生的, 所以 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是它的支点. 因而, 在 $\mathbb{C}$ 去掉正实轴后所成的域上可以分出 n 个单值的全纯分支, 它们是

$$w=\varphi_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$
$$k=0,1,\cdots,n-1.$$

这里,$\theta=\arg z$, 它的变化范围是 $0<\arg z<2\pi$. $k=0$ 的那一支称为它的主支, 直接记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

现在来看它的主支的映射性质. 容易看出, 它把从原点发出的射线 $\arg z=\theta$ 变为从原点发出的射线 $\arg w=\dfrac{\theta}{n}$. 由此可知,$w=\sqrt[n]{z}$ 把除去正实轴以后的全平面单叶地映为角状域 $\left\{z:0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}\right\}$. 例如,$w=\sqrt{z}$,$w=\sqrt[4]{z}$ 分别把除去正实轴的全平面单叶地映为上半平面和第一象限.

(3) $\mu=a+b\mathrm{i}$, 是一个复数.

一般的幂函数 $w=z^\mu$ 定义为

$$w=z^\mu=\mathrm{e}^{\mu\operatorname{Log}z},$$

显然, 它是一个多值函数. 用 $\operatorname{Log}z$ 的表达式代入上式, 可得

$$w=z^\mu=\mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})(\log|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[b\log|z|+a(\arg z+2k\pi)]},k=0,\pm1,\cdots.$$

(i) 若 $b=0$,$a=n$ 是一个整数, 这时 $w=z^n$ 是一个单值函数.

(ii) 若 $b=0$,$a=\dfrac{p}{q}$ 是一个有理数, 不妨设 $p<q$, 这时

$$w=z^\mu=z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)}.$$

当 $k=0,1,\cdots,q-1$ 时,$z^{\frac{p}{q}}$ 有 q 个不同的值, 因此是一个 q 值函数.

(iii) 若 $b=0$,a 是一个无理数, 这时

$$w=z^\mu=|z|^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\arg z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi a}.$$

因为 a 是无理数, 不论 k 取什么整数值, 都不能使 ka 为一整数, 因此 z^a 是一个无穷值函数.

(iv) 若 $b\neq0$, 则 $w=z^\mu$ 是一无穷值函数.

总之, 在上面的情况 (ii),(iii),(iv) 下,z^μ 都是一个多值函数. 它的多值性是由 $\operatorname{Log}z$ 的多值性引起的, 因此 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是它的支点, 而且在 $\operatorname{Log}z$ 可以分出单值全纯分支的域内,z^μ 也能分出单值全纯分支. 设 $\varphi_k(z)$ 是 $\operatorname{Log}z$ 在

域 D 中的单值全纯分支,$w_k(z)$ 是 z^μ 的单值全纯分支, 按定义, 有

$$w_k(z) = \mathrm{e}^{\mu\varphi_k(z)}.$$

其中

$$w_0(z) = \mathrm{e}^{\mu\varphi_0(z)} = \mathrm{e}^{\mu\log z},$$

称为 z^μ 的主支. 因为 $\varphi_k(z)$ 和 $\varphi_{k+1}(z)$ 相差 $2\pi\mathrm{i}$, 所以 $w_k(z)$ 和 $w_{k+1}(z)$ 相差 $\mathrm{e}^{2\mu\pi\mathrm{i}}$. 由于 $\varphi_k'(z) = \dfrac{1}{z}$, 所以

$$w_k'(z) = \mathrm{e}^{\mu\varphi_k(z)}\mu\varphi_k'(z) = \mu z^{\mu-1} = \mu\mathrm{e}^{(\mu-1)\varphi_k(z)}. \tag{2.14}$$

例题 2.4 求一保角变换, 把除去线段 $\{z = a + \mathrm{i}y : 0 < y < h\}$ 的上半平面变为上半平面.

解 初看起来, 解这样的题目很困难, 因为并没有一个现成的变换可以达到上述目的. 我们的想法是把整个变换过程分解成若干个简单的步骤, 而每一个步骤都可用我们已知的变换来实现, 把这些变换复合起来, 就是我们要找的变换. 图 2.4就是整个变换的分解过程. 所以, 要找的变换就是

$$w = \sqrt{z_3} = \sqrt{z_2 + h^2} = \sqrt{z_1^2 + h^2} = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}.$$

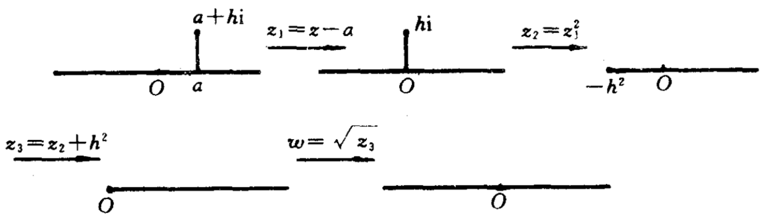

图 2.4

□

例题 2.5 求一保角变换, 把除去割线 $\{z = x + \mathrm{i} : -\infty < x < -1\}$ 后的带状域 $\{z : 0 < \mathrm{Im}z < 2\}$ 变为上半平面.

解 图 2.5是变换的分解过程. 由此可见, 要找的变换就是

$$w = \sqrt{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi}}.$$

这里, 最后一个步骤用到了例题 2.4的结果.

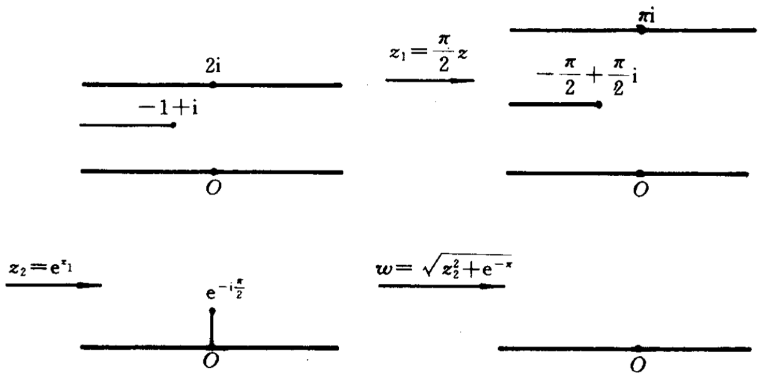

图 2.5

□

2.4.4 三角函数

定义 2.16

设 z 是任意复数, 定义

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

命题 2.16 (三角函数的性质)

(i) $\cos z$ 和 $\sin z$ 都是整函数, 并且 $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$.

(ii) $\cos z$ 和 $\sin z$ 都以 2π 为周期.

(iii) $\cos z$ 是偶函数,$\sin z$ 是奇函数, 即

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

(iv) 对任意复数 z_1 和 z_2, 有

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \tag{2.15}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \tag{2.16}$$

(v) 对任意复数 z, 有

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

(vi) $\sin z$ 仅在 $z = k\pi$ 处为零,$\cos z$ 仅在 $z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 处为零, 这里,$k = 0, \pm 1, \cdots$.

(vii) $\cos z$ 和 $\sin z$ 不是有界函数.

注 第 (vii) 条性质与实变函数中的正、余弦函数不一样, 其余性质都相同.

证明

(i) 因为 e^{iz},e^{-iz} 是整函数, 所以 $\cos z$ 和 $\sin z$ 也都是整函数. 由命题 2.10(i)及命题 2.2(1)可得

$$(\cos z)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]' = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z.$$

(ii) 由于 e^{iz} 和 e^{-iz} 都以 2π 为周期, 所以 $\cos z$ 和 $\sin z$ 也都以 2π 为周期.

(iii) 注意到

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{-iz} + e^{iz}\right) \cos z,$$

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}\left(e^{-iz} - e^{iz}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z.$$

(iv) 根据定义直接验证即得.

(v) 在(2.15)式中令 $z_1 = z$,$z_2 = -z$, 即得

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

在(2.16)式令 $z_1 = z_2 = z$, 即得

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

(vi) 注意到

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2ie^{iz}}(e^{2iz} - 1),$$

$\sin z = 0$ 当且仅当 $e^{2iz} - 1 = 0$, 而这只有当 $z = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时才能成立. 又由 (iv) 可得 $\cos z = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$,$\cos z = 0$ 当且仅当 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = 0$, 所以 $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

(vii) 若取 $z = \mathrm{i}y$,y 是实数, 则 $y = -\mathrm{i}z$. 从而

$$\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}) \to \infty \ (\text{当 } y \to \infty \text{ 时}).$$

对于 $\sin z$, 取 $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y$, 则有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y\right) = \cos \mathrm{i}y \to \infty \ (\text{当 } y \to \infty \text{ 时}).$$

□

定义 2.17

设 z 是任意的复数, 我们定义

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

♣

命题 2.17

$\mathrm{tg}z$ 在除掉 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 的开平面上是全纯的,$\mathrm{ctg}z$ 在除掉 $z = k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 的开平面上全纯.

♠

证明 由命题 2.16易证. □

2.4.5 多值函数

这一小段我们讨论多值函数

$$w = \sqrt[n]{(z - a_1)^{\beta_1} \cdots (z - a_m)^{\beta_m}},$$

这里,$a_1, \cdots, a_m$ 是复数,$\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是整数,n 是正整数. 在什么样的域中, 从它能分出单值的全纯分支呢? 任取 $z_0 \neq a_j, j = 1, \cdots, m$, 取充分小的简单闭曲线 γ_0, 使 z_0 在其内部,$a_1, \cdots, a_m$ 都在其外部. 当 z 沿着 γ_0 的正方向走一圈时,$z-a_1, \cdots, z-a_m$ 的辐角都不变, 故 z_0 不是支点. 再看 a_j 是不是支点, 以 a_1 为例, 记 $z-a_j = r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, j = 1, \cdots, m$, 于是 w 可写为

$$w = \sqrt[n]{r_1^{\beta_1} \cdots r_m^{\beta_m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_1\theta_1 + \cdots + \beta_m\theta_m}{n}}.$$

取简单闭曲线 γ_1, 使 a_1 在其内部,$a_2, \cdots, a_m$ 都在其外部. 当 z 沿着 γ_1 的正方向走一圈时,θ_1 增加 2π,$\theta_2, \cdots, \theta_m$ 都不变,w 就变成

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{r_1^{\beta_1} \cdots r_m^{\beta_m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_1\theta_1 + \cdots + \beta_m\theta_m + 2\pi\beta_1}{n}} \\ = &\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\beta_1}{n}} \sqrt[n]{r_1^{\beta_1} \cdots r_m^{\beta_m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_1\theta_1 + \cdots + \beta_m\theta_m}{n}}. \end{aligned}$$

因此, 只有当 β_1 是 n 的倍数时,w 的值才不变. 其他 $a_2, \cdots, a_m$ 点的情况也一样. 于是得到结论: 如果 β_j 不是 n 的倍数, 那么 a_j 是它的支点. 再看无穷远点, 取充分大的圆周, 使 $a_1, \cdots, a_m$ 都在其内部. 当 z 沿着这个圆周转一圈时,$z - a_1, \cdots, z - a_m$ 的辐角都要增加 2π,w 就变成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(\beta_1 + \cdots + \beta_m)}{n}} \sqrt[n]{r_1^{\beta_1} \cdots r_m^{\beta_m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_1\theta_1 + \cdots + \beta_m\theta_m}{n}}.$$

因而, 只有当 $\beta_1 + \cdots + \beta_m$ 不是 n 的倍数时,$z = \infty$ 是支点. 用同样的方法讨论, 可以知道, 如果简单闭曲线的内部包含 $a_{j_1}, \cdots, a_{j_r}$, 与它们相应的和 $\beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r}$ 是 n 的倍数, 那么当 z 沿该曲线转一圈后 w 的值不变. 根据这些考察, 我们得到下面的定理.

定理 2.7

如果域 D 只包含这样的简单闭曲线, 它的内部或者不含有任何支点, 或者包含一组支点 $a_{j_1}, \cdots, a_{j_r}$, 但与它们相应的和 $\beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r}$ 是 n 的倍数, 那么 $w = \sqrt[n]{(z - a_1)^{\beta_1} \cdots (z - a_m)^{\beta_m}}$ 在 D 中能分出单值的全纯分支.

♡

证明

□

例题 2.6 在怎样的域中,$w=\sqrt{z^2-1}$ 能分出单值的全纯分支?

解 由于

$$w=\sqrt{z^2-1}=\sqrt{(z-1)(z+1)},$$

这时 $a_1=1, a_2=-1, \beta_1=\beta_2=1, n=2$. 所以,1 和 -1 都是它的支点, 但无穷远点不是支点. 因而, 在除去线段 $[-1,1]$ 的全平面 (图 2.6 左) 上, 或者在除去两条割线 $\{z:-\infty<z<-1\}$ 和 $\{z:1<z<\infty\}$ 的全平面 (图 2.6 右) 上, 都能分出单值的全纯分支.

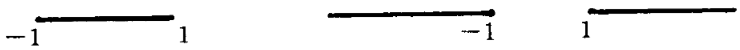

图 2.6

□

例题 2.7 设 $f(z)=\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}(z+1)^{-1}$, 试确定 f 在 $[0,1]$ 的上岸取正值的单值全纯分支 f_0, 并计算 $f_0(-\mathrm{i})$.

解 多值性主要发生在带根号的函数上, 与 $(z+1)^{-1}$ 无关. 令 $\varphi(z)=\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}$, 这时 $z=0$ 和 $z=1$ 都是 φ 的支点, 但 $z=\infty$ 不是. 由定理 2.7,φ 能在除去线段 $[0,1]$ 的全平面上分出单值全纯的分支. 为了确定出在 $[0,1]$ 上岸取正值的分支, 记 $z=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}, 1-z=r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}$(图 2.7), 则

$$\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}=\sqrt{r_1^{-1}r_2^3}e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\theta_2-\theta_1}{2}+k\pi\right)},\ k=0,1.$$

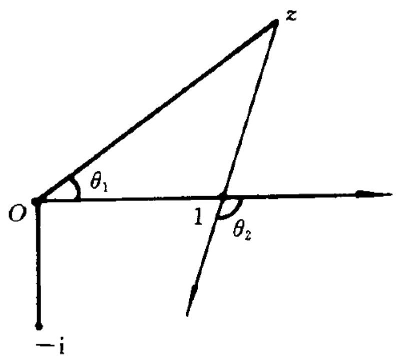

图 2.7

当 z 在 $[0,1]$ 的上岸时, 有

$$\theta_1=\theta_2=0,\ r_1=x,\ r_2=1-x.$$

显然,$k=0$ 的那一支在上岸取正值, 记为 φ_0, 即

$$\varphi_0(z)=\sqrt{r_1^{-1}r_2^3}e^{\mathrm{i}\frac{3\theta_2-\theta_1}{2}}.$$

现在计算 $\varphi_0(-\mathrm{i})$. 若让 z 从原点的左边到达 $-\mathrm{i}$, 则

$$\theta_1=\frac{3}{2}\pi,\ \theta_2=\frac{\pi}{4},\ r_1=1,\ r_2=\sqrt{2}.$$

所以

$$\varphi_0(-\mathrm{i})=2^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}},$$

故

$$f_0(-\mathrm{i})=\frac{1}{1-\mathrm{i}}2^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}}=2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}.$$

若让 z 从 1 的右边到达 $-\mathrm{i}$, 则

$$\theta_1=-\frac{\pi}{2},\ \theta_2=-\frac{7}{4}\pi,\ r_1=1,\ r_2=\sqrt{2}.$$

这时

$$\varphi_0(-\mathrm{i}) = 2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{19}{8}\pi\mathrm{i}} = 2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\left(2\pi+\frac{3}{8}\pi\right)\mathrm{i}} = 2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{8}\pi\mathrm{i}}.$$

所得结果和刚才的完全一样. □

2.5 分式线性变换

第 3 章 全纯函数的积分表示

3.1 复变函数的积分

定义 3.1

设 $z = \gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是一条可求长曲线,f 是定义在 γ 上的函数, 沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a) = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n = \gamma(b)$, 在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k, k = 1, \cdots, n$(见图 3.1), 作 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{3.1}$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 如果当 $\lambda = \max\{s_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} \to 0$ 时, 不论 ζ_k 的取法如何, 和式 (3.1)总有一确定的极限, 就称此极限为 f 沿 γ 的积分, 记为 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 即

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

♣

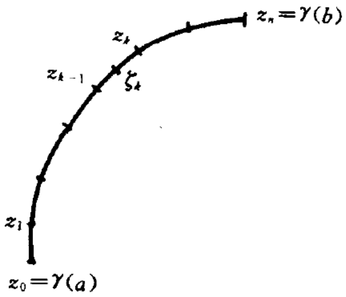

图 3.1

命题 3.1

设 $f = u + \mathrm{i}v$ 在可求长曲线 γ 上连续, 则 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

♠

证明 记 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, \zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k, f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k)$, 于是 f 的 Riemann 和可写成

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k)\right](\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\} + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\{v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(x_k, y_k)\Delta y_k\},\end{aligned}$$

这里,$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. 当 u, v 在 γ 上连续时, 上述和式当 $\lambda \to 0$ 时趋于曲线积分

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

□

命题 3.2

如果 $z = \gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是光滑曲线,f 在 γ 上连续, 那么 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

♠

证明 设 $z=\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$, 在所设的条件下, 有

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \int_a^b \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \int_a^b \{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

由命题 3.1可知, 第二式乘 i 后与第一式相加, 即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b \{[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))\}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

□

命题 3.3

如果 f,g 在可求长曲线 γ 上连续, 那么

(i) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma^-$ 是指与 γ 方向相反的曲线;

(ii) $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f(z)+\beta g(z))\mathrm{d}z = \alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\alpha,\beta$ 是两个复常数;

(iii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma$ 是由 γ_1 和 γ_2 组成的曲线.

证明 由命题 3.1和实变函数第二型曲面积分的性质不难证明. □

例题 3.1 设可求长曲线 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的起点为 α, 终点为 β, 证明

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \beta-\alpha,\qquad \int_\gamma z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

证明 若 γ 是光滑曲线, 由命题 3.2, 得

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \int_a^b \gamma'(t)\mathrm{d}t = \gamma(b)-\gamma(a) = \beta-\alpha,$$

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\gamma^2(t)\Big|_a^b = \frac{1}{2}(\gamma^2(b)-\gamma^2(a)) = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

如果 γ 不是光滑曲线, 可直接按积分的定义计算:

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n (z_k-z_{k-1}) = z_n-z_0 = \beta-\alpha.$$

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n z_k(z_k-z_{k-1}),\qquad \int_\gamma z\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k-z_{k-1}),$$

把两式加起来, 得

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n (z_k^2-z_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(z_n^2-z_0^2) = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

□

例题 3.2 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$, 这里,$n$ 是任意整数,γ 是以 a 为中心、以 r 为半径的圆周.

解 γ 的参数方程为 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 由命题 3.2, 得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\mathrm{d}t = r^{1-n}\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\mathrm{d}t.$$

所以, 上述积分当 $n\neq 1$ 时为零, 当 $n=1$ 时为 $2\pi\mathrm{i}$, 即

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n\neq 1; \\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1. \end{cases}$$

□

命题 3.4 (长大不等式)

如果 γ 的长度为 $L, M = \sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, 那么

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML. \tag{4}$$

注 这个不等式很简单, 但很重要, 是我们今后估计积分的主要工具, 可简称为**长大不等式**.

证明 f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}| \leqslant M\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leqslant ML,$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} s_k \to 0$, 即得所要的不等式. □

3.2 Cauchy 积分定理

定理 3.1 (Cauchy 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$, 且 f' 在 D 中连续, 则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明 由 γ 围成的域记为 G, 因为 f' 连续, 即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连续, 故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯, 故由定理 2.2可知 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是由 Green 公式可得

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$$\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

由命题 3.1, 即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

引理 3.1

设 f 是域 D 中的连续函数,γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一条 D 中的折线 P, 使得

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点,P 中其他的顶点都在 γ 上;

(ii) $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$.

证明 因为 ∂D 是一个闭集,γ 是一个紧集, 且两者不相交, 根据定理 1.9,$d(\gamma, \partial D) = \rho > 0$. 作有界的域 G, 使得 $\gamma \subset \overline{G} \subset D$. 因为 f 在紧集 $\overline{G}$ 上连续, 故由定理 1.16(iii)可知 f 必一致连续. 于是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z', z'' \in \overline{G}, |z' - z''| < \delta$ 时,$|f(z') - f(z'')| < \dfrac{\varepsilon}{2L}$, 这里,$L$ 是 γ 的长度. 现取 $\eta = \min(\rho, \delta)$. 在 γ 上取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$, 使得每一个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度都小于 η, 这里,z_0, z_n 分别记为 γ 的起点和终点. 连接 z_{k-1} 和 $z_k (k = 1, \cdots, n)$, 就得到一条折线 P, 它与 γ 有相同的起点和终点, 且其他顶点都在 γ 上. 由于 $|z_{k-1} - z_k| < \eta \leqslant \rho$, 所以线段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 都在 D 内, 即折线 P 都在 D 内.

现在估计下面的积分差, 记 $\gamma_k = \widehat{z_{k-1}z_k}, P_k = \overline{z_{k-1}z_k}$, 则有

$$\left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right|$$

$$= \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right|$$
$$= \left|\int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right|.$$

当 $z \in \gamma_k$ 或 P_k 时, 都有 $|z - z_{k-1}| < \eta \leqslant \delta$, 因而 $|f(z) - f(z_{k-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2L}$. 对上面两个积分用长大不等式, 它们都不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2L}|\gamma_k|$, 因而

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{L}\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k| = \varepsilon.$$

故折线 P 完全符合定理的要求. □

定理 3.2 (Cauchy-Goursat 定理 (Cauchy 积分定理))

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域, 如果 $f \in H(D)$, 那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

♡

注 注意, 对于非单连通的域, 定理不一定成立. 例如,D 是除去原点的单位圆盘,$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 当然在 D 中全纯, 若设 $\gamma = \{z : |z| = r < 1\}$, 则由例题 3.2知,$\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$.

证明 证明分为下面三步:

(1) 先假定 γ 是一个三角形的边界.

如果 $\left|\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| = M$, 我们证明 $M = 0$. 连接三角形三边的中点, 把三角形分成四个全等的小三角形 (图 3.2),

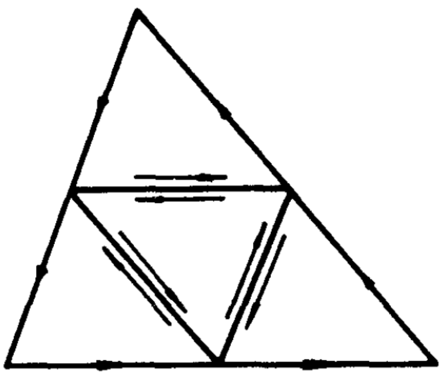

图 3.2

这四个小三角形的边界分别记为 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ 和 $\gamma^{(4)}$. 让 f 沿这四个小三角形的边界积分, 从图中可以看出, 中间那个小三角形的边界被来回走了两次,f 在其上的积分恰好抵消, 剩下的积分的和正好等于大三角形边界上的积分, 即

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z,$$

或者

$$M = \left|\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z\right|.$$

因此上述四个小三角形中必有一个小三角形 Δ_1, 它的边界记为 γ_1,f 在其上的积分满足 $\left|\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4}$. 把 Δ_1 再分成四个全等的小三角形, 按照同样的推理, 其中又有一个小三角形 Δ_2, 它的边界记为 γ_2,f 在其上的积分满足

$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^2}$. 这个过程可以一直进行下去, 我们得到一串三角形 Δ_n, 记它们的边界为 γ_n, 这串三角形具有下列性质:

(i) $\Delta \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$;

(ii) $\mathrm{diam}\Delta_n \to 0(n \to \infty)$;

(iii) $|\gamma_n| = \frac{L}{2^n}, n = 1, 2, \cdots$, 这里,$L$ 为 γ 的长度;

(iv) $\left|\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^n}, n = 1, 2, \cdots$.

由 (i) 和 (ii), 根据Cantor 闭集套定理, 存在唯一的 $z_0 \in \Delta_n(n = 1, 2, \cdots)$. 因为 D 是单连通的, 所以 $z_0 \in D$. 由于 f 在 z_0 处全纯, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 成立

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

即

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|. \tag{3.2}$$

取 n 充分大, 使得 $\Delta_n \subset B(z_0, \delta)$, 故当 $z \in \gamma_n$ 时,(3.2)式成立. 显然,$z \in \gamma_n$ 时,$|z - z_0| < |\gamma_n| = \frac{L}{2^n}$. 因而, 当 $z \in \gamma_n$ 时, 有

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \frac{\varepsilon L}{2^n}. \tag{3.3}$$

因为 γ_n 是闭曲线, 由例题 3.1知道, 有

$$\int_{\gamma_n} \mathrm{d}z = 0, \quad \int_{\gamma_n} z\mathrm{d}z = 0.$$

于是有

$$\int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z - f(z_0)\int_{\gamma_n} \mathrm{d}z - f'(z_0)\int_{\gamma_n} z\mathrm{d}z + z_0 f'(z_0)\int_{\gamma_n} \mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

利用(3.3)式、(iii) 和长大不等式, 即得

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon L}{2^n}|\gamma_n| = \varepsilon\left(\frac{L}{2^n}\right)^2.$$

再由 (iv), 可得 $M \leqslant \varepsilon L^2$. 又因为 ε 是任意小的正数, 所以 $M = 0$.

(2) 假定 γ 是一个多边形的边界.

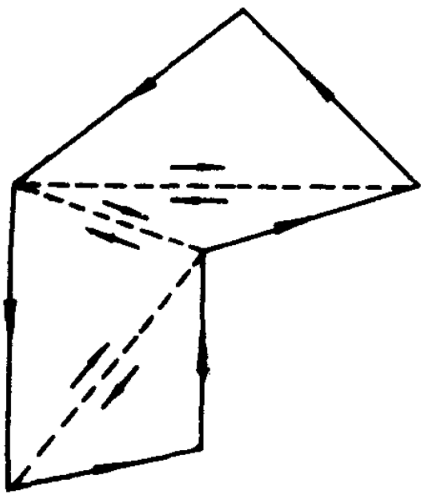

图 3.3

从图 3.3可以看出, 我们可以把多边形分解成若干个三角形. 与刚才的道理一样,f 沿 γ 的积分等于沿各个三

角形边界积分的和, 由 (3.2) 已知沿三角形边界的积分为零, 因而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(3) 假定 γ 是一般的可求长闭曲线.

根据引理 3.1, 在 D 内存在闭折线 P, 使得

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

这里,ε 是任意事先给定的正数. 由(3.4)式和 (2) 即知

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

定理 3.3

设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部, 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

♡

注 这里已不再假定 f 在积分路径 γ 上全纯, 而代之以在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 条件确实是减弱了. 一般地, 证明这个定理还需要一些其他的知识, 我们这里对 γ 附加两个条件:

(i) γ 是逐段光滑的;

(ii) 在 D 中存在点 z_0, 使得从 z_0 出发的每条射线与 γ 只有一个交点. 例如, 凸多边形和圆盘都满足这两个条件.

证明 在所设的两个条件下,γ 的方程可以写成

$$z = z_0 + \lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

记

$$p = \max\{|\lambda(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}, \quad q = \max\{|\lambda'(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

由于 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 故必一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z_1, z_2 \in \overline{D}$, 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. 今取 $\delta_0 < \min(\delta, p)$, 于是 $\dfrac{\delta_0}{p} < 1$. 取 ρ, 使得 $1 - \dfrac{\delta_0}{p} < \rho < 1$. 记 γ_ρ 为曲线

$$z = z_0 + \rho\lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

则显然有 $\gamma_\rho \subset D$. 由 Cauchy-Goursat 定理, 成立

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\rho\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0,$$

即

$$\int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0.$$

由于

$$|(z_0 + \rho\lambda(t)) - (z_0 + \lambda(t))| = (1-\rho)|\lambda(t)| \leqslant (1-\rho)p < \delta_0 < \delta,$$

所以

$$|f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(z_0 + \lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b [f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))]\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))||\lambda'(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon q(b-a).\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

定理 3.4

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 γ 记 D 的边界. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{3.5}$$

这里, 积分沿 γ 的正方向进行, 并且 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$.(3.5)式也可写为

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z, \tag{3.6}$$

(3.6)式右端的积分分别沿 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 的逆时针方向进行.

♡

证明 如图 3.4所示, 我们用一些辅助线把几个“洞”连接起来, 这样,D 就被分成若干个单连通域. 由定理 3.3, 沿每个单连通域的边界的积分为零, 若干个单连通域的边界积分之和仍为零. 由于在辅助线上的积分来回各进行一次, 正好抵消, 所以总和恰好就是 γ 上的积分, 因而 (3.5)式成立. 而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

移项即得(3.6)式.

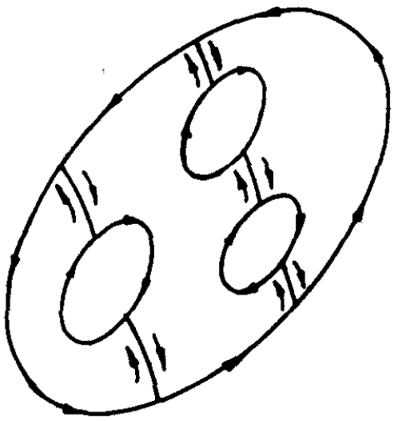

图 3.4

□

推论 3.1

设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线,γ_1 在 γ_0 的内部,D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的域. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

♡

证明 由定理 3.4中 $n = 1$ 的情况立得. □

例题 3.3 设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a \notin \gamma$, 试计算积分

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

解 若 a 在 γ 的外部, 则因 $\dfrac{1}{z-a}$ 在 γ 围成的闭域上全纯, 所以由 Cauchy 积分定理, $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0$.

若 a 在 γ 的内部, 则有充分小的 $r>0$, 使得 $B(a,r)$ 落在 γ 的内部 (图 3.5). 记 $B(a,r)$ 的边界为 γ_1, 由 γ 和 γ_1 围成的域记为 D, 则 $\dfrac{1}{z-a}$ 在 $\overline{D}$ 上全纯, 因而由推论 3.1, 得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi \mathrm{i}.$$

最后的等式利用了例题 3.2的结果.

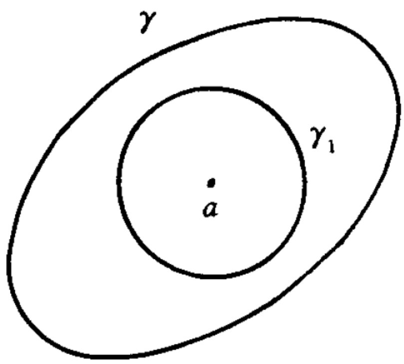

图 3.5

□

例题 3.4 设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a,b\notin\gamma$, 试计算积分

$$I=\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}.$$

解 上面的积分可写为

$$I=\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b}\right).$$

由例题 3.3即可得

$$I=\begin{cases} 0 & ,\text{若} a,b \text{ 都在} \gamma \text{ 的外部;} \\ \dfrac{2\pi \mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若} a \text{ 在} \gamma \text{ 的内部}, b \text{ 在} \gamma \text{ 的外部;} \\ -\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若} a \text{ 在} \gamma \text{ 的外部}, b \text{ 在} \gamma \text{ 的内部;} \\ 0 & ,\text{若} a,b \text{ 都在} \gamma \text{ 的内部.} \end{cases}$$

□

3.3 全纯函数的原函数

定义 3.2

设 $f:D\to C$ 是定义在域 D 上的一个函数, 如果存在 $F\in H(D)$, 使得 $F'(z)=f(z)$ 在 D 上成立, 就称 F 是 f 的一个**原函数**.

♣

如果 $f\in H(D)$, 是否一定存在原函数呢? 答案是否定的. 例如, 若 D 是除去原点的单位圆盘,$f(z)=\dfrac{1}{z}$,f 当然是 D 上的全纯函数. 如果它在 D 上存在原函数 F, 则有 $F'(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 D 上成立, 但这是不可能的. 因为若上式成立, 在 D 中取光滑闭曲线 $\gamma:[a,b]\to D$, 则有 $\gamma(a)=\gamma(b)$, 于是

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=0.$$

但由例题 3.2知道 $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$. 这一矛盾说明 $\frac{1}{z}$ 在 D 上不存在原函数. 问题出在 D 不是单连通域. 实际上, 对于单连通域上的全纯函数, 一定存在原函数.

定理 3.5

设 f 在域 D 中连续, 且对 D 中任意可求长闭曲线 γ, 均有 $\int_\gamma f(z)dz = 0$, 那么

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

是 D 中的全纯函数, 且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$, 这里,z_0 是 D 中一固定点.

证明 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零,f 的积分与路径无关, 因而 F 是一单值函数. 任取 $a \in D$, 我们证明 $F'(a) = f(a)$. 因为 f 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|z-a| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. 今取 $z \in B(a,\delta)$(图 3.6), 显然

$$F(z) - F(a) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{a} f(\zeta)d\zeta = \int_{a}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

这里, 积分在线段 $[a,z]$ 上进行, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| &= \frac{1}{|z-a|}|F(z)-F(a)-f(a)(z-a)| \\ &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\zeta)d\zeta - \int_a^z f(a)d\zeta\right| \\ &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z (f(\zeta)-f(a))d\zeta\right|.\end{aligned}$$

由长大不等式, 即知上式右端小于 ε, 这就证明了 $F'(a) = f(a)$.

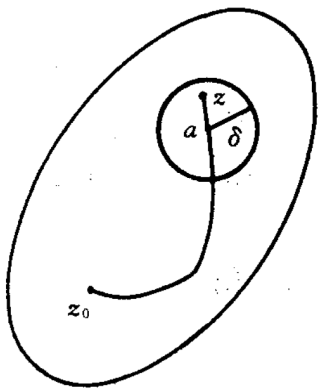

图 3.6

□

定理 3.6

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$, 那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

证明 在定理的假定下, 由Cauchy 积分定理知道,f 沿 D 中任意可求长闭曲线的积分为零, 由定理 3.5 即得本定理.
□

定理 3.7

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$,Φ 是 f 的任一原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

证明 证明方法也与微积分中一样. 由定理 3.6知, 由变上限积分确定的函数 F 是 f 的一个原函数, 因而

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0.$$

故由命题 2.6知道 $\Phi(z) - F(z)$ 是一个常数, 因而

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0) = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

□

多连通域相关内容现在设 D 是多连通域,$f \in H(D)$, 一般来说

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是一个多值函数, 它在 z 点的值将随着连接 z_0 和 z 的曲线变化而变动. 下面看一个具体的例子:

设 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 D 是一个二连通域,$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 是 D 中的全纯函数, 我们来研究积分

$$\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 不围绕原点 (图 3.7 左), 那么 $\dfrac{1}{\zeta}$ 沿 γ 的积分等于在实轴上从 1 到 $|z|$ 的积分与圆弧 γ' 上的积分之和, 即

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{1}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{\arg z} \frac{\mathrm{i}|z|e^{i\theta}}{|z|e^{i\theta}} d\theta = \log|z| + \mathrm{i}\arg z = \log z.$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 绕原点沿反时针方向转了 2 圈 (图 3.7 右), 这时沿 γ 的积分可以分解为沿 $\widehat{az}$,$\widehat{abea}$ 和 $\widehat{bcdb}$ 的积分, 即

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{\widehat{az}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{abea}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{bcdb}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}. \tag{3.7}$$

由于 $\widehat{abea}$ 和 $\widehat{bcdb}$ 是两条围绕原点的简单闭曲线, 故由例题 3.3,(1) 式右端的后两个积分都等于 $2\pi\mathrm{i}$. 根据上面的计算,(3.7)式右端的第一个积分为 $\log z$, 因而得

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log z + 4\pi\mathrm{i}.$$

由此可见, 随着 γ 绕原点圈数的不同, 一般可得

$$\int_{1}^{z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log z + 2k\pi\mathrm{i},\ k = 0, \pm 1, \cdots,$$

这恰好是对数函数 Log$z$. 所以, 对数函数也可用变上限的积分来定义.

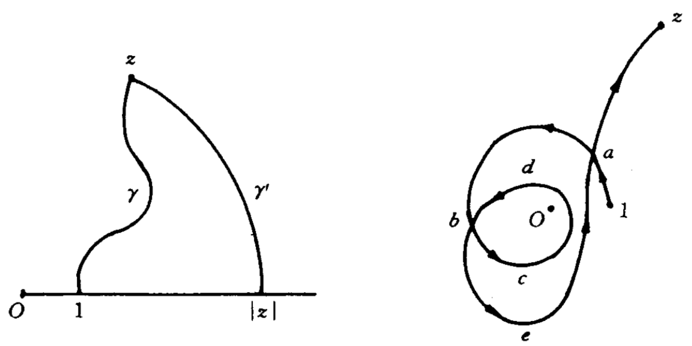

图 3.7

3.4 Cauchy 积分公式

定理 3.8

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域, 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么对任意 $z \in D$, 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3.8}$$

等式(3.1)称为 **Cauchy 积分公式**.

笔记 上述定理表明全纯函数在域中的值由它在边界上的值所完全确定. (3.1)式是全纯函数的一种积分表示, 通过这种表示, 我们可以证明全纯函数有任意阶导数.

证明 任取 $z \in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, 有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $\rho < \delta$, 使得 $B(z, \rho) \subset D$. 记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, 由 γ 和 γ_ρ 围成的二连通域记为 D'(图 3.8), 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 D' 中全纯, 在 $\overline{D'}$ 上连续. 于是, 由推论 3.1得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3.9}$$

又由例题 3.2可知 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 1$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3.10}$$

于是, 由(3.9)式、(3.10)式及长大不等式即得

$$\begin{aligned}
\left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon.
\end{aligned}$$

让 $\varepsilon \to 0$, 即得所要证的等式 (3.1).

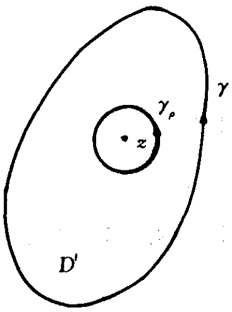

图 3.8

□

定义 3.3

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线 (不一定是闭的), g 是 γ 上的连续函数, 如果 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 那么由命题 3.1可知积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

是存在的, 它定义了 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上的一个函数 $G(z)$, 即

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

称它为 **Cauchy 型积分**.

笔记 由 Cauchy 型积分确定的函数有很好的性质.

定理 3.9

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线,g 是 γ 上的连续函数, 那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上有任意阶导数, 而且

$$G^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots. \tag{3.11}$$

笔记 这个定理实际上证明了在现在的情况下, 微分运算和积分运算可以交换, 公式很便于记忆.

证明 我们用数学归纳法来证明等式 (3.11). 先设 $n=1$, 我们要证明

$$G'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta,\ z\in\mathbb{C}\setminus\gamma. \tag{3.12}$$

任意取定 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, 记 $\rho=\inf\limits_{\zeta\in\gamma}|\zeta-z_0|>0,\delta=\min\left(1,\frac{\rho}{2}\right)$, 则当 $\zeta\in\gamma,z\in B(z_0,\delta)$ 时, 有 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<\frac{1}{2}$. 于是由 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\frac{1}{\zeta-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+h(z,\zeta)\right), \tag{3.13}$$

其中 $h(z,\zeta)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$, 从而

$$|h(z,\zeta)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n=\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n<\frac{|z-z_0|^2}{\rho^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{\rho^2}|z-z_0|^2. \tag{3.14}$$

这样, 由 (3.13)式便得

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta+\frac{z-z_0}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta,$$

又注意到 $h(z_0,\zeta)=0$, 因而有

$$\frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.15}$$

若记 $M=\sup\limits_{\zeta\in\gamma}|g(\zeta)|$, 由 (3.14)式便知(3.15)式右端的绝对值不超过

$$\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3|z-z_0|}\cdot|z-z_0|^2=\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3}|z-z_0|.$$

在 (3.15)式两端令 $z\to z_0$, 即得

$$G'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

现设 $n=k$ 时 (3.11)式成立, 即

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

要证明

$$G^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由 (3.13)式和二项式定理, 可得

$$\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+h(z,\zeta)\right)^{k+1}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+(k+1)\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+H(z,\zeta)\right),$$

由 (3.14)式便得

$$|H(z,\zeta)|\leqslant C|z-z_0|^2, \tag{3.16}$$

这里,C 是一个常数. 于是

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta+\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}(z-z_0)\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta+\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

即

$$\frac{G^{(k)}(z)-G^{(k)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.17}$$

由 (3.16)式便知 (3.17)式右端的绝对值不超过 $K|z-z_0|$, 这里,K 是一个常数. 在 (3.17) 式中令 $z\to z_0$, 即得

$$G^{(k+1)}(z_0)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 z_0 是 D 中的任意点, 归纳法证明完毕. □

定理 3.10

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域, 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 那么 f 在 D 上有任意阶导数, 而且对任意 $z\in D$, 有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

证明 由定理 3.8,f 可写为 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 f 在 γ 上连续, 故由定理 3.9即得所要证的结果. □

定理 3.11

如果 f 是域 D 上的全纯函数, 那么 f 在 D 上有任意阶导数.

证明 任取 $z_0\in D$, 取充分小的 δ, 使得 $\overline{B(z_0,\delta)}\subset D$. 由定理 3.10,$f$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中有任意阶导数, 又由于 z_0 是任意的, 所以 f 在 D 中有任意阶导数. □

例题 3.5 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$, 则 f 在 $\{z:|z|\leqslant 2\}$ 中全纯, 根据定理 3.10, 有

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{z^2+16}\right)'\Bigg|_{z=0}=0.$$

也可以这样计算:

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=\frac{1}{16}\left\{\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}-\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+16}\right\}=0.$$

这是因为, 由例题 3.2, 第一个积分为零; 由 Cauchy 积分定理, 第二个积分为零. □

定理 3.12

设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 中的每一条都在其他 $k-1$ 条的外部,D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的域,D 的边界 γ 由 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 所组成. 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$,

则对任意 $z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

f 在 D 内有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

证明 定理的证明和前面的一样, 不再重复. 根据定理 3.9的结论, 再利用定理 3.4的证明思路进行证明即可. □

例题 3.6 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.$$

解 注意到 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 在 $1,e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}$ 处不解析. 作一个中心在原点、半径为 $R(R>4)$ 的大圆 (图 3.9), 则在闭圆环

$$\{z:2\leqslant|z|\leqslant R\}$$

上,$f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 是全纯的. 于是, 由定理 3.12 得

$$\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\bigg|_{z=-4}=-\frac{32}{1323}\pi\mathrm{i},$$

其中 $\gamma_1=\{z:|z|=2\}$(顺时针方向),$\gamma_2=\{z:|z|=R\}$(逆时针方向). 所以

$$\begin{aligned}&-\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=-\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}\\ \Longleftrightarrow&\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

由于当 $|z|=R$ 时, 有

$$|(z^3-1)(z+4)^2|\geqslant(R^3-1)(R-4)^2,$$

所以由长大不等式得

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\right|\leqslant\frac{2\pi R}{(R^3-1)(R-4)^2}\to 0\,(R\to\infty).$$

故在(3.18)式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}.$$

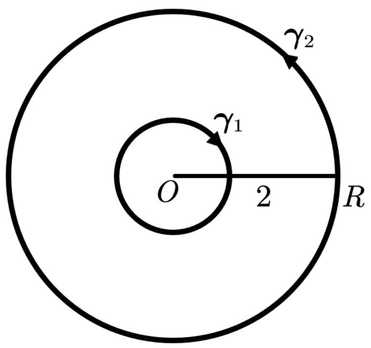

图 3.9

□

定理 3.13 (Schwarz 积分公式)

设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$,$f = u + iv$. 证明:$f$ 可用实部表示为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} u(Re^{i\theta})d\theta + iv(0).$$

证明

□

3.5 Cauchy 积分公式的一些重要推论

定理 3.14 (Cauchy 不等式)

设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯, 且对任意 $z \in B(a,R)$, 有 $|f(z)| \leqslant M$, 那么

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.19}$$

笔记 这个不等式给出了圆盘上全纯函数的各阶导数在圆心处值的估计.

证明 取 $0 < r < R$, 则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯, 由定理 3.10, 得

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

于是, 由长大不等式得

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

让 $r \to R$, 即得所要证的不等式 (3.19). □

定理 3.15 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

证明 设 f 为一有界整函数, 其模的上界设为 M, 即对任意 $z \in \mathbb{C}$, 有 $|f(z)| \leqslant M$. 任取 $a \in \mathbb{C}$, 以 a 为中心、R 为半径作圆, 因为 f 为整函数, 故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

这个不等式对任意 $R > 0$ 都成立, 让 $R \to \infty$, 即得 $f'(a) = 0$. 因为 a 是任意的, 所以在全平面上有 $f'(z) \equiv 0$, 因而由命题 2.6可知 f 是常数. □

定理 3.16 (代数学基本定理)

任意复系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

笔记 考虑到实系数多项式在实数域中未必有零点, 这个定理给出了复数域的又一重要性质.

证明 如果 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中没有零点, 那么 $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ 是一个整函数. 由于 $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$, 故当 $|z| > R$ 时,$|f(z)| \leqslant 1$; 而当 $|z| \leqslant R$ 时,f 是有界的, 因而 f 是一有界整函数. 由Liouville 定理,f 应是一常数. 这个矛盾证明了 P 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点. □

定理 3.17 (Morera 定理)

如果 f 是域 D 上的连续函数, 且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零, 那么 f 在 D 上全纯.

笔记 这个定理是Cauchy 积分定理的逆定理.

证明 由定理 3.5, 存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 中成立. 由定理 3.11,F' 是 D 中的全纯函数, 所以 $F' = f$ 也是全纯函数. □

3.6 非齐次 Cauchy 积分公式

定义 3.4

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一个复数, 把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 定义微分 $dz, d\bar{z}$ 的**外积**为

$$dz \wedge dz = 0, d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0, dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz.$$

dx, dy 的**外积**定义与 $dz, d\bar{z}$ 的外积定义一样, 即

$$dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

定义**面积元素**$dA = dx \wedge dy$.

命题 3.5

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一个复数, 则

$$dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy = -2idA.$$

证明 由于 $dz = dx + idy$,$d\bar{z} = dx - idy$, 所以

$$\begin{aligned} dz \wedge d\bar{z} &= (dx + idy) \wedge (dx - idy) \\ &= idy \wedge dx - idx \wedge dy \\ &= -2idx \wedge dy = -2idA. \end{aligned}$$

这里,dA 是面积元素. □

定义 3.5

称 $z, \bar{z}$ 的函数 $f(z, \bar{z})$ 为**零次微分形式**,$f_1(z, \bar{z})dz + f_2(z, \bar{z})d\bar{z}$ 为**一次微分形式**,$f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ 为**二次微分式**.

定义 3.6

定义算子 $\partial, \bar{\partial}$ 如下:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

这里

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

定义算子 $d = \partial + \bar{\partial}$, 即

$$df = \partial f + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{3.20}$$

定义 3.7

算子 $\partial, \bar{\partial}$ 对一次微分形式的作用定义为

$$\partial(f_1(z, \bar{z})dz + f_2(z, \bar{z})d\bar{z}) = \frac{\partial f_1}{\partial z}dz \wedge dz + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \wedge d\bar{z},$$

$$\bar{\partial}(f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}) = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge d\bar{z} = -\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

所以

$$d(f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}. \tag{3.21}$$

算子 $\partial, \bar{\partial}$ 作用在二次微分形式上的结果定义为零:

$$\partial(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$
$$\bar{\partial}(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

因而

$$d(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = 0. \tag{3.22}$$

♣

定义 3.8

定义 $d^2\omega = d(d\omega)$, $\quad \partial^2\omega = \partial(\partial\omega)$, $\quad \bar{\partial}^2\omega = \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \partial\bar{\partial}\omega = \partial(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \bar{\partial}\partial\omega = \bar{\partial}(\partial\omega)$. ♣

命题 3.6

$d^2 = 0$, $\quad \partial^2 = 0$, $\quad \bar{\partial}^2 = 0$, $\quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0$. ♠

证明 当 ω 是一 C^2 函数时, 由 (3.20) 式和 (3.21) 式, 得

$$d^2\omega = d(d\omega) = d\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\omega}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{z}\partial z} - \frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

当 ω 是一个一次微分形式时, 由 (3.21) 式知 $d\omega$ 是一个二次微分形式, 由 (3.22) 式即知 $d^2\omega = 0$. 当 ω 是一个二次微分形式时, 由 (3.22) 式知 $d^2\omega = 0$. 总之, 不论 ω 是零次、一次或二次微分形式, 都有 $d^2\omega = 0$, 所以 $d^2 = 0$.

根据上述证明, 同样可以证明

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0.$$

□

定理 3.18 (Green 公式)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $\omega = f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}$ 是域 D 上的一个一次微分形式, 这里,$f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 那么

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \tag{3.23}$$

♡

笔记 公式 (3.23) 在高维空间中也成立, 通常称为 **Stokes 公式**, 这里只是它的一个特例.

证明 记 $f_1 = u_1 + iv_1$,$f_2 = u_2 + iv_2$, 这里,u_1, v_1, u_2, v_2 是 $z, \bar{z}$ 的实值函数, 于是

$$\begin{aligned} \omega &= f_1 dz + f_2 d\bar{z} = (u_1 + iv_1)(dx + idy) + (u_2 + iv_2)(dx - idy) \\ &= \{(u_1 + u_2)dx + (-v_1 + v_2)dy\} + i\{(v_1 + v_2)dx + (u_1 - u_2)dy\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

由(3.21)式, 得

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_2 + iv_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 + iv_1)\right\} 2idA \\ &= \left\{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right\} dA. \end{aligned} \tag{3.25}$$

因为 $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 所以 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^1(\bar{D})$. 于是根据实值函数的 Green 公式, 我们有

$$\int_{\partial D}(u_1+u_2)dx+(-v_1+v_2)dy=\int_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-v_1+v_2)-\frac{\partial}{\partial y}(u_1+u_2)\right\}dA, \tag{3.26}$$

$$\int_{\partial D}(v_1+v_2)dx+(u_1-u_2)dy=\int_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_1-u_2)-\frac{\partial}{\partial y}(v_1+v_2)\right\}dA. \tag{3.27}$$

由等式(3.24),(3.25),(3.26),(3.27) 即得我们要证明的公式 (3.23). □

定理 3.19 (非齐次 Cauchy 积分公式 (Pompeiu 公式))

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $f \in C^1(\bar{D})$, 那么对任意 $z \in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \tag{3.28}$$

笔记 如果 $f \in H(D)$, 那么由 Cauchy-Riemann 方程,$\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}=0$, 这时公式 (3.28) 右端的第二项就消失了, 公式 (3.28) 就是 Cauchy 积分公式. 所以, 公式 (3.28) 是 Cauchy 积分公式在 C^1 函数类中的推广, 有时也称为**非齐次 Cauchy 积分公式**.

公式 (3.28) 首先是由 Pompeiu 在 1912 年证明的 (所以有时也称之为 Pompeiu 公式), 但长期以来似乎被人们遗忘了. 直到 1950 年,Grothendieck 和 Dolbeault 用它来解 $\bar{\partial}$ 方程时, 人们才发现它的意义所在.

证明 不妨设 D 是图 3.10所示的二连通域,D 的边界 ∂D 由 γ_0 和 γ_1 组成. 任取 $z \in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\zeta-z|<\delta$ 时,$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 记 $\rho=\inf\limits_{\zeta\in\partial D}|\zeta-z|>0$, 取 η, 使得 $0<\eta<\min(\rho,\delta)$, 于是 $\overline{B(z,\eta)}\subset D$. 记 $B_\eta=B(z,\eta)$, 令 $G_\eta=D\setminus\overline{B_\eta}$, 则 G_η 的边界 ∂G_η 由 γ_0, γ_1 和 ∂B_η 三条曲线组成. 考虑一次微分形式

$$\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

它在域 G_η 上满足Green 公式的条件, 因而有

$$\int_{\partial G_\eta}\omega=\int_{G_\eta}d\omega. \tag{3.29}$$

由于 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 在 G_η 中全纯, 所以由定理 2.2可知 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\dfrac{1}{\zeta-z}\right)=0$. 因此

$$\bar{\partial}\omega=\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\xlongequal{\text{乘积求导法则}}\left\{f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\right\}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

易知

$$\partial\omega=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\wedge d\zeta=0,$$

因而

$$d\omega=\partial\omega+\bar{\partial}\omega=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

这样,(3.29) 式可以写成

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{G_\eta}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta. \tag{3.30}$$

注意

$$\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+f(z)\int_{\partial B_\eta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\xlongequal{\text{例题 3.2}}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+2\pi i f(z),$$

而

$$\left|\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant\int_{\partial B_\eta}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}|d\zeta|\leqslant\frac{\varepsilon}{\eta}\cdot 2\pi\eta=2\pi\varepsilon,$$

由此即得

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i f(z). \tag{3.31}$$

另一方面, 由 $f \in C^1(\bar{D})$ 可知 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上连续, 故有常数 M, 使得 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right| \leqslant M$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上成立. 于是

$$\left|\int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\right| \leqslant 2\int_{B_\eta}\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right|\frac{1}{|\zeta - z|}dA \leqslant 4M\pi\eta \to 0\ (\eta \to 0).$$

因而

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{G_\eta}\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta = \lim_{\eta\to 0}\left\{\int_D\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta - \int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\right\} = \int_D\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta. \tag{3.32}$$

在等式 (3.30) 两端令 $\eta \to 0$, 并利用 (3.31) 式和 (3.32) 式, 即得所要证明的公式 (3.28). □

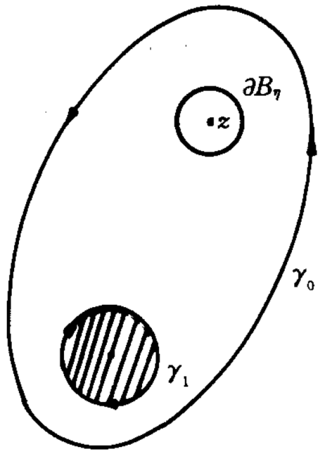

图 3.10

3.7 一维 $\bar{\partial}$ 的解

定义 3.9

所谓一维 $\bar{\partial}$ 问题, 是指在域 D 上给定一个函数 f, 要求函数 u, 使得在 D 上有

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z), \quad z \in D.$$

u 就称为 $\bar{\partial}$ 问题的解. ♣

定义 3.10

设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上的函数, 使 φ 不取零值的点集的闭包称为 φ 的**支集**, 记为 $\mathrm{supp}\varphi$, 即

$$\mathrm{supp}\varphi = \overline{\{z \in \mathbb{C} : \varphi(z) \neq 0\}}.$$

♣

引理 3.2

设 a 是 $\mathbb{C}$ 中任意一点,$0 < r < R$, 则必存在 φ, 满足下列条件:

(i) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$;

(ii) $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{B(a,R)}$;

(iii) 当 $z \in \overline{B(a,r)}$ 时,$\varphi(z) \equiv 1$;

(iv) 对于任意 $z \in \mathbb{C}$,$0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$.

♡

证明 令 $r < R_1 < R$ 和

$$h_1(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z-a|^2 - R_1^2}}, & z \in B(a, R_1); \\ 0, & z \notin B(a, R_1), \end{cases}$$

$$h_2(z) = \begin{cases} 0, & z \in \overline{B(a, r)}; \\ e^{\frac{1}{r^2 - |z-a|^2}}, & z \notin \overline{B(a, r)}, \end{cases}$$

那么 $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{C})$. 又令

$$\varphi(z) = \frac{h_1(z)}{h_1(z) + h_2(z)},$$

则 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$. 而且当 $z \in \overline{B(a, r)}$ 时,$\varphi(z) \equiv 1$; 当 $z \notin B(a, R_1)$ 时,$\varphi(z) \equiv 0$, 即 $\operatorname{supp}\varphi \subset B(a, R)$. 对于任意 $z \in \mathbb{C}$,$0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ 显然成立.φ 即为所求的函数. □

定理 3.20

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,$f \in C^1(D)$. 令

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D, \tag{3.33}$$

则 $u \in C^1(D)$, 且对任意 $z \in D$, 有 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z)$. ♡

笔记 在上面的证明中, 容易看出, 如果 $f \in C^\infty(D)$, 那么 $\bar{\partial}$ 问题的解 $u \in C^\infty(D)$.

证明 把 f 的定义扩充到整个复平面, 对于 $z \notin D$, 定义 $f(z) = 0$. 这时,(3.33) 式可写为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \xlongequal{\text{令}\zeta = z+\eta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} f(\zeta + \eta) \frac{1}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta}.$$

由 $f \in C^1(D)$, 可得 $u \in C^1(D)$.

现固定 $a \in D$, 我们证明

$$\frac{\partial u(a)}{\partial \bar{z}} = f(a).$$

为此, 取 $0 < \varepsilon < r$, 使得 $B(a, \varepsilon) \subset B(a, r) \subset D$. 根据引理**??**, 存在 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$, 使得当 $z \in B(a, \varepsilon)$ 时,$\varphi(z) \equiv 1$; 而当 $z \notin B(a, r)$ 时,$\varphi(z) \equiv 0$. 记

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta) - \varphi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

那么 $u = u_1 + u_2$. 由于当 $\zeta \in B(a, \varepsilon)$ 时,$f(\zeta) - \varphi(\zeta) f(\zeta) \equiv 0$, 所以

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{B(a, \varepsilon)}} \frac{(1 - \varphi(\zeta)) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

因而, 当 $z \in B(a, \varepsilon)$ 时,u_2 是全纯函数, 所以由定理 2.2可知 $\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = 0$. 于是, 在小圆盘 $B(a, \varepsilon)$ 上就有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} &\xlongequal{\text{令}\zeta = z+\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z+\eta) f(z+\eta)}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}} \right\} \frac{1}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \frac{\partial (z+\eta)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial (\bar{z}+\bar{\eta})}{\partial \bar{z}} \right\} \frac{1}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \cdot (0+0) + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot (1+0) \right\} \frac{1}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\eta} d\eta \wedge d\bar{\eta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

最后一个等式成立是因为当 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,r)}$ 时 $\varphi(\zeta) \equiv 0$. 又因为当 $\zeta \in \partial B(a,r)$ 时 $\varphi(\zeta) \equiv 0$, 所以根据非齐次 Cauchy 积分公式, 有

$$
\varphi(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.
$$

因为当 $z \in B(a,\varepsilon)$ 时 $\varphi(z) = 1$, 所以

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{3.35}
$$

比较 (3.34) 式和 (3.35) 式, 即得

$$
\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z).
$$

特别地, 取 $z = a$, 即得

$$
\frac{\partial u(a)}{\partial \bar{z}} = f(a).
$$

由于 a 是 D 中的任意点, 所以 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z)$ 在 D 上成立. □

第 4 章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

4.1 Weierstrass 定理