

## 0.1 内积空间的基本概念

### 定义 0.1 (Euclid 空间)

设  $V$  是实数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对  $V$  中任意一组有序向量  $\{\alpha, \beta\}$ , 都唯一地对应一个实数, 记为  $(\alpha, \beta)$ , 且适合如下规则:

- (1)  $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$ ;
- (2)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
- (3)  $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$ ,  $c$  为任一实数;
- (4)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$  且等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ ,

则称在  $V$  上定义了一个内积. 实数  $(\alpha, \beta)$  称为  $\alpha$  与  $\beta$  的内积. 线性空间  $V$  称为**实内积空间**. 有限维实内积空间称为 **Euclid 空间**, 简称为**欧氏空间**.

### 定义 0.2 (酉空间)

设  $V$  是复数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对  $V$  中任意一组有序向量  $\{\alpha, \beta\}$ , 都唯一地对应一个复数, 记为  $(\alpha, \beta)$ , 且适合如下规则:

- (1)  $(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)}$ ;
- (2)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
- (3)  $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$ ,  $c$  为任一复数;
- (4)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$  且等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ ,

则称在  $V$  上定义了一个内积. 复数  $(\alpha, \beta)$  称为  $\alpha$  与  $\beta$  的内积. 线性空间  $V$  称为**复内积空间**. 有限维复内积空间称为**酉空间**.

**注** 实内积空间的定义与复内积空间的定义是相容的. 事实上, 对一个实数  $a, \bar{a} = a$ , 故定义 0.1 中的 (1) 与定义 0.2 中的 (1) 是一致的. 因此, 我们经常将这两种空间统称为内积空间, 在某些定理的叙述及证明中也不区分它们, 而统一作为复内积空间来处理. 但是, 需要注意的是对复内积空间, 定义 0.2 中的 (1), (3) 意味着:

$$(\alpha, c\beta) = \bar{c}(\alpha, \beta).$$

### 定义 0.3 (标准内积)

1. 设  $\mathbb{R}^n$  是  $n$  维实列向量空间,  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ , 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

则在此定义下  $\mathbb{R}^n$  成为一个欧氏空间, 上述内积称为  $\mathbb{R}^n$  的标准内积.

2. 设  $\mathbb{C}^n$  是  $n$  维复列向量空间,  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ , 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

则在此定义下  $\mathbb{C}^n$  成为一个酉空间, 上述内积称为  $\mathbb{C}^n$  的标准内积.

**注** 对  $n$  维实或复行向量空间, 我们也可同样定义标准内积.

### 例题 0.1

1. 设  $V$  是由  $[a, b]$  区间上连续函数全体构成的实线性空间, 设  $f(t), g(t) \in V$ , 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

则不难验证这是一个内积, 于是  $V$  成为内积空间. 这是一个无限维实内积空间.

2. (1) 设  $V$  是  $n$  维实列向量空间,  $G$  是  $n$  阶正定实对称阵, 对  $\alpha, \beta \in V$ , 定义

$$(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta,$$

则这是一个内积, 并且  $V$  在上式的定义下成为欧氏空间.

(2) 设  $U$  是  $n$  维复列向量空间, 若有正定 Hermite 矩阵  $H$ , 对  $\alpha, \beta \in U$ , 定义:

$$(\alpha, \beta) = \alpha' H \bar{\beta}.$$

则这个  $U$  上的一个内积, 并且  $U$  在上式的定义下成为酉空间.

**证明**

1. 由内积空间的定义不难验证.

2. (1) 定义 0.1 中的 (2), (3) 显然成立. 对 (1), 注意到  $\alpha' G \beta$  是实数, 其转置仍是它自己, 而  $G$  是对称阵, 故

$$(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta = (\alpha' G \beta)' = \beta' G' \alpha = \beta' G \alpha = (\beta, \alpha).$$

又从  $G$  是正定阵即可知道 (4) 成立.

(2) 根据内积和酉空间的定义不难验证.

□

**注** 当  $G = I_n$  为单位阵时,  $V$  上内积就是标准内积. 对实列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha' \beta.$$

对实行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha \beta'.$$

当  $H = I_n$  为单位阵时,  $U$  上内积就是标准内积. 对复列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha' \bar{\beta}.$$

对复行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha \bar{\beta}'.$$

### 例题 0.2 常见内积和内积空间

证明下列线性空间在给定的二元运算下成为内积空间: (1) 设  $V = \mathbb{R}^n$  为  $n$  维实列向量空间,  $G$  为  $n$  阶正定实对称矩阵, 对任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 定义  $(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta$ ;

(2) 设  $V = \mathbb{R}_n$  为  $n$  维实行向量空间,  $G$  为  $n$  阶正定实对称矩阵, 对任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 定义  $(\alpha, \beta) = \alpha G \beta'$ ;

(3) 设  $V = \mathbb{C}^n$  为  $n$  维复列向量空间,  $H$  为  $n$  阶正定 Hermite 矩阵, 对任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 定义  $(\alpha, \beta) = \alpha' H \bar{\beta}$ ;

(4) 设  $V = \mathbb{C}^n$  为  $n$  维复行向量空间,  $H$  为  $n$  阶正定 Hermite 矩阵, 对任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 定义  $(\alpha, \beta) = \alpha H \bar{\beta}'$ ;

(5) 设  $V = C[a, b]$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数全体构成的实线性空间, 对任意的  $f(t), g(t) \in V$ , 定义  $(f(t), g(t)) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ ;

(6) 设  $V = \mathbb{R}[x]$  为实系数多项式全体构成的实线性空间, 对任意的  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ , 定义  $(f(x), g(x)) = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_kb_k$ , 其中  $k = \min\{n, m\}$ ;

(7) 设  $V = M_n(\mathbb{R})$  为  $n$  阶实矩阵全体构成的实线性空间, 对任意的  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$ , 定义  $(A, B) = \text{tr}(AB') = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ ;

(8) 设  $V = M_n(\mathbb{C})$  为  $n$  阶复矩阵全体构成的复线性空间, 对任意的  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$ , 定义  $(A, B) = \text{tr}(A\bar{B}') = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\bar{b}_{ij}$ .

**证明** (1) 首先注意到  $\alpha' G \beta$  是一个数,  $G$  是实对称矩阵, 故它们都等于自身的转置, 从而  $(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta = (\alpha' G \beta)' = \beta' G' \alpha = \beta G \alpha' = (\beta, \alpha)$ , 即得对称性; 其次由矩阵乘法的性质可得第一变量的线性; 最后由  $G$  的正定性可知,  $(\alpha, \alpha) = \alpha' G \alpha \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ , 即得正定性. 因此上述二元运算是  $\mathbb{R}^n$  上的内积, 称为由正定实对称矩阵  $G$  定义的内积. 当  $G = I_n$  时, 上述内积称为  $\mathbb{R}^n$  上的标准内积.

(2) 类似于 (1) 的证明可得. 当  $G = I_n$  时, 上述内积称为  $\mathbb{R}_n$  上的标准内积.

(3) 首先注意到  $\overline{H'} = H$ , 故  $\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{\alpha' H \beta} = (\alpha' H \beta)' = \beta' \overline{H'} \alpha = \beta' H \alpha = (\beta, \alpha)$ , 即得共轭对称性; 其次由矩阵乘法的性质可得第一变量的线性; 最后由  $H$  的正定性可知,  $(\alpha, \alpha) = \alpha' H \alpha \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ , 即得正定性. 因此上述二元运算是  $\mathbb{C}^n$  上的内积, 称为由正定 Hermite 矩阵  $H$  定义的内积. 当  $H = I_n$  时, 上述内积称为  $\mathbb{C}^n$  上的标准内积.

(4) 类似于 (3) 的证明可得. 当  $H = I_n$  时, 上述内积称为  $\mathbb{C}_n$  上的标准内积.

(5) 对称性显然成立; 由积分运算的线性可得第一变量的线性; 由连续函数的性质可得正定性, 因此上述二元运算是  $C[a, b]$  上的内积.

(6) 容易验证对称性、第一变量的线性和正定性都成立.

(7) 由求迹运算的对称性、线性和正定性即得上述二元运算的对称性、线性和正定性, 因此它是  $M_n(\mathbb{R})$  上的内积.

(8) 证明是类似的. 这两种由矩阵的迹定义的内积称为矩阵空间上的 **Frobenius** 内积. □

#### 定义 0.4 (范数)

设  $V$  是实或复的内积空间,  $\alpha$  是  $V$  中的向量, 定义  $\alpha$  的**长度** (或**范数**) 为

$$\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

即实数  $(\alpha, \alpha)$  的算术平方根.



**注** 注意由定义 0.1 和定义 0.2 中的规则 (4) 可知,  $(\alpha, \alpha)$  总是非负实数. 从长度的定义知,  $\|\alpha\| = 0$  当且仅当  $\alpha = 0$ . 当  $V = \mathbb{R}^n$  且内积为标准内积时, 若  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

#### 定义 0.5 (两个向量的距离)

定义内积空间中两个向量的距离. 设  $\alpha, \beta \in V$ , 定义  $\alpha$  与  $\beta$  的**距离**为

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|.$$

显然  $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ .



#### 定理 0.1 (范数的基本性质)

设  $V$  是实或复的内积空间,  $\alpha, \beta \in V, c$  是任一常数 (实数或复数), 则

(1)  $\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$ ;

(2) (Cauchy - Schwarz 不等式)  $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ ;

(3) (三角不等式)  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ .



#### 证明

(1)  $\|c\alpha\|^2 = (c\alpha, c\alpha) = c\bar{c}(\alpha, \alpha) = |c|^2 \|\alpha\|^2$ , 故  $\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$ .

(2) 若  $\alpha = 0$ , 则  $(0, \beta) = (0 + 0, \beta) = 2(0, \beta)$ , 故  $(0, \beta) = 0$ , 因此 (2) 成立. 若  $\alpha \neq 0$ , 令

$$v = \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha,$$

则  $(v, \alpha) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v\|^2 &= \left( \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha, \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha \right) \\ &= (\beta, \beta) - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} (\alpha, \beta) \\ &= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha, \beta)|^2}{\|\alpha\|^2}, \end{aligned}$$

由此即可得 (2).

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= \|\alpha\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + \|\beta\|^2 \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + \overline{(\alpha, \beta)}.\end{aligned}$$

由 (2) 得  $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$ ,  $\overline{(\alpha, \beta)} \leq \|\alpha\| \|\beta\|$ , 故  $\|\alpha + \beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\| \|\beta\| = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$ .

□

### 定义 0.6 (向量的夹角)

当  $V$  是实内积空间时, 定义非零向量  $\alpha, \beta$  的夹角  $\theta$  之余弦为

$$\cos \theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}. \quad (1)$$

当  $V$  是复内积空间时, 定义非零向量  $\alpha, \beta$  的夹角  $\theta$  之余弦为

$$\cos \theta = \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\| \|\beta\|}.$$

内积空间中两个向量  $\alpha, \beta$  若适合  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $\alpha$  与  $\beta$  **垂直** 或 **正交**, 我们用记号  $\alpha \perp \beta$  来表示. 显然, 我们有下列结论:

1. 零向量和任何向量都正交;
2. 若  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 则  $\beta$  也与  $\alpha$  正交;
3. 两个非零向量  $\alpha, \beta$  正交时夹角为  $90^\circ$ .

♣

**注** (1) 式中要使  $\theta$  有意义, 必须保证  $|\cos \theta| \leq 1$ , 而这就是范数的基本性质中的 (2). 因此上述定义的  $\theta$  都是良定义的.

### 推论 0.1

1. (勾股定理) 在范数的基本性质 (3) 的证明中我们可看出: 若  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 则  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0$ , 因此

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

上式通常称为勾股定理, 它是平面几何中勾股定理的推广.

2. (Cauchy 不等式) 设  $V$  是  $n$  维实内积空间, 内积取标准内积, 从范数的基本性质 (2) 立即可得到下列 Cauchy 不等式:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

3. (Schwarz 不等式) 设  $V$  是由  $[a, b]$  区间上连续函数全体构成的实线性空间, 内积如例题 0.1(1), 则从范数的基本性质 (2) 可得下列 Schwarz 不等式:

$$\left( \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt.$$

♡