0.1 矩阵的法式

引理 0.1

设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是任一非零 λ-矩阵，则 $A(\lambda)$ 必相抵于这样的一个 λ-矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$，其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 中的任一元素 $b_{ij}(\lambda)$.

证明 设 $k=\min\{\deg a_{ij}(\lambda)\mid a_{ij}(\lambda)\neq 0, 1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n\}$，我们对 k 用数学归纳法。首先，经行对换及列对换可将 $A(\lambda)$ 的第 $(1,1)$ 元素变成次数最低的非零多项式，因此不妨设 $a_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $\deg a_{11}(\lambda)=k$。若 $k=0$，则 $a_{11}(\lambda)$ 是一个非零常数，结论显然成立。假设对非零元素次数的最小值小于 k 的任一 λ-矩阵，引理的结论成立，现考虑非零元素次数的最小值等于 k 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$。若 $a_{11}(\lambda)$ 可整除所有的 $a_{ij}(\lambda)$，则结论已成立。若否，设在第一列中有元素 $a_{i1}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除，作带余除法：

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda).$$

用 $-q(\lambda)$ 乘以第一行加到第 i 行上，第 $(i,1)$ 元素就变为 $r(\lambda)$。注意到 $r(\lambda)\neq 0$ 且 $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda)=k$，由归纳假设即知结论成立。

同样的方法可施于第一行。因此我们不妨设 $a_{11}(\lambda)$ 可整除第一行及第一列。这时，设 $a_{21}(\lambda)=a_{11}(\lambda)g(\lambda)$。将第一行乘以 $-g(\lambda)$ 加到第二行上，则第 $(2,1)$ 元素变为零。用同样的方法可消去第一行、第一列除 $a_{11}(\lambda)$ 以外的所有元素，于是 $A(\lambda)$ 经初等变换后变成下列形状：

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2}(\lambda) & \cdots & a'_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

这时，若 $a_{11}(\lambda)$ 可整除所有其他元素，则结论已成立。若否，比如 $a_{11}(\lambda)$ 不能整除 $a'_{ij}(\lambda)$，则将第 i 行加到第一行上去，这时在第一行又出现了一元素 $a'_{ij}(\lambda)$，它不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除。重复上面的做法，通过归纳假设即可得到结论. □

定理 0.1

设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵，则 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\}, \tag{1}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r-1)$。

证明 对 n 用数学归纳法，当 $n=1$ 时结论显然，现设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵。由引理 0.1可知 $A(\lambda)$ 相抵于 n 阶 λ-矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$，其中 $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}(\lambda)$ 对一切 i,j 成立。因此，将 $B(\lambda)$ 的第一行乘以 λ 的某个多项式加到第二行上去便可消去 $b_{21}(\lambda)$。同理可依次消去第一列除 $b_{11}(\lambda)$ 以外的所有元素。再用类似方法消去第一行其余元素。这样便得到了一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \cdots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \cdots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

不难看出，这时 $b_{11}(\lambda)$ 仍可整除所有的 $b'_{ij}(\lambda)$。设 c 为 $b_{11}(\lambda)$ 的首项系数，记 $d_1(\lambda)=c^{-1}b_{11}(\lambda)$，设 $\overline{B}(\lambda)$ 为上面的矩阵中右下方的 $n-1$ 阶 λ-矩阵，则由归纳假设可知存在 $P(\lambda)$ 及 $Q(\lambda)$，使

$$P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=2,\cdots,r-1)$，其中 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ 可写成为有限个 $n-1$ 阶初等 λ-矩阵之积。因此

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & O \\ O & \overline{B}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

且

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

可写成有限个 n 阶初等 λ-矩阵之积。于是只需证明 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$ 即可。但这点很容易看出，事实上由于 $\overline{B}(\lambda)$ 中的任一元素均可被 $d_1(\lambda)$ 整除，因此 $P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda)$ 中的任一元素也可被 $d_1(\lambda)$ 整除，这就证明了定理。 □

注 我们上面对 n 阶 λ-矩阵证明了它必相抵于一个对角阵。事实上，对长方 λ-矩阵，结论也同样成立，证明也类似。(1)式中的 r 通常称为 $A(\lambda)$ 的秩。但要注意即使某个 n 阶 λ-矩阵的秩等于 n，它也未必是可逆 λ-矩阵.

推论 0.1

任一 n 阶可逆 λ-矩阵都可表示为有限个初等 λ-矩阵之积.

证明 由定理 0.1，存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$，使可逆阵 $A(\lambda)$ 适合

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为有限个初等 λ-矩阵之积。因为上式左边是个可逆阵，故右边的矩阵也可逆，从而 $r=n$。注意一个对角 λ-矩阵要可逆必须 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 皆为非零常数，又它们都是首一多项式，故只能是 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = 1$，于是

$$A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}Q(\lambda)^{-1}.$$

因为初等 λ-矩阵的逆仍是初等 λ-矩阵，故 $P(\lambda)^{-1}$ 与 $Q(\lambda)^{-1}$ 都是有限个初等 λ-矩阵之积，从而 $A(\lambda)$ 也是有限个初等 λ-矩阵之积. □

推论 0.2

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，则 A 的特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 必相抵于

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,m-1)$。

证明 由定理 0.1, 存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$，使

$$P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为有限个初等 λ-矩阵之积。根据 λ-矩阵初等变换的定义以及行列式的性质可得，上式左边的行列式等于 $c|\lambda I_n - A|$，其中 c 是一个非零常数，从而上式右边的行列式不为零，故 $r=n$。把 $d_i(\lambda)$ 中的常数多项式写出来（因是首一多项式，故为常数 1），即得结论. □

定义 0.1

设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵，则由定理 0.1可知,$A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\}, \tag{2}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r-1)$。称上式中的对角 λ-矩阵为 $A(\lambda)$ 的**法式**或**相抵标准型**.

例题 0.1 求 $\lambda I - A$ 的法式，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解

$$
\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{3r_1+r_2,-\lambda r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1+j_2,-(\lambda+1)j_1+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-3j_2+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 6 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-4\lambda+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{j_2 \leftrightarrow j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \lambda-1 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{6j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6(\lambda-1) \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & 6(\lambda-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\lambda-1)j_2+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{6}j_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \xrightarrow{-(-\lambda^2-4\lambda+4)r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□