0.1 初等因子

定义 0.1 (初等因子)

设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上矩阵 A 的非常数不变因子, 由于 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$, 因此可以在 $\mathbb{K}$ 上把 $d_i(\lambda)$ 分解成不可约因式之积:

$$\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}, \\
d_2(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{21}} p_2(\lambda)^{e_{22}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}} p_2(\lambda)^{e_{k2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}},
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 e_{ij} 是非负整数 (注意 e_{ij} 可以为零!), 并且

$$e_{1j} \leq e_{2j} \leq \cdots \leq e_{kj}, \quad j = 1, 2, \cdots, t.$$

若(1)式中的 $e_{ij} > 0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 A 的一个**初等因子**,A 的全体初等因子称为 A 的**初等因子组**. ♣

命题 0.1

矩阵 A 的初等因子组与不变因子组相互唯一确定. ♠

证明 由因式分解的唯一性可知 A 的初等因子被 A 的不变因子唯一确定.

反过来, 若给定一组初等因子 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$, 适当增加一些 1 (表示为 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$, 其中 $e_{ij} = 0$), 则可将这组初等因子按不可约因式的降幂排列如下:

$$\begin{aligned}
&p_1(\lambda)^{e_{k1}}, p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}}, \cdots, p_1(\lambda)^{e_{11}}, \\
&p_2(\lambda)^{e_{k2}}, p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}}, \cdots, p_2(\lambda)^{e_{12}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_t(\lambda)^{e_{kt}}, p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}}, \cdots, p_t(\lambda)^{e_{1t}},
\end{aligned} \tag{2}$$

令

$$\begin{aligned}
d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}} p_2(\lambda)^{e_{k2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}, \\
d_{k-1}(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}} p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}},
\end{aligned}$$

则 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, \cdots, k-1)$, 且 $d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$ 的初等因子组就如 (2)所示. 因此, 给定 A 的初等因子组, 我们可唯一地确定 A 的不变因子组. 这一事实表明,A 的不变因子组与初等因子组在讨论矩阵相似关系中的作用是相同的. □

定理 0.1

数域 $\mathbb{K}$ 上的两个矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子组, 即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的全系不变量. ♡

证明 由定理??可知, 矩阵 A 和 B 相似等价于 A 和 B 有相同的不变因子. 又由命题 0.1可知,A 和 B 有相同的不变因子等价于它们有相同的初等因子组. 故矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子组. □

例题 0.1 设 9 阶矩阵 A 的不变因子组为

$$1, \cdots, 1, (\lambda-1)(\lambda^2+1), (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别在有理数域、实数域和复数域上求 A 的初等因子组.

解 A 在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2+1,\lambda^2-2.$$

A 在实数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2+1,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2}.$$

A 在复数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\mathrm{i},\lambda+\mathrm{i},\lambda-\mathrm{i},\lambda-\mathrm{i},\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2}.$$

□

例题 0.2 设 A 是一个 10 阶矩阵, 它的初等因子组为

$$\lambda-1,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,\lambda-2.$$

求 A 的不变因子组.

解 将上述多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc}(\lambda-1)^2, & \lambda-1, & \lambda-1;\\ (\lambda+1)^3, & (\lambda+1)^2, & 1;\\ \lambda-2, & 1, & 1.\end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2),\quad d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2,\quad d_1(\lambda)=\lambda-1.$$

从而 A 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda+1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2),$$

其中有 7 个 1. □