目录

第一章 矩阵

1.1 矩阵的运算

命题 1.1 (标准单位向量和基础矩阵)

1. 标准单位向量

n 维标准单位列向量是指下列 n 个 n 维列向量:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量组 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 则被称为 n 维标准单位行向量, 容易验证标准单位向量有下列基本性质:

1. 若 $i \neq j$, 则 $e_i'e_j = 0$, 而 $e_i'e_i = 1$;
2. 若 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, 则 Ae_i 是 A 的第 i 个列向量;$e_i'A$ 是 A 的第 i 个行向量;
3. 若 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $e_i'Ae_j = a_{ij}$;
4. **判定准则:** 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 则 $A = B$ 当且仅当 $Ae_i = Be_i (1 \leq i \leq n)$ 成立, 也当且仅当 $e_i'A = e_i'B (1 \leq i \leq m)$ 成立.

2. 基础矩阵

n 阶基础矩阵 (又称初级矩阵) 是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$. 这里 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵, 它的第 (i, j) 元素等于 1, 其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积:$E_{ij} = e_i e_j^T$. 由此不难证明基础矩阵的下列性质:

1. 若 $j \neq k$, 则 $E_{ij}E_{kl} = 0$;
2. 若 $j = k$, 则 $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$;
3. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$, 则 $A = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$;
4. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$, 则 $E_{ij}A$ 的第 i 行是 A 的第 j 行,$E_{ij}A$ 的其他行全为零;
5. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$, 则 AE_{ij} 的第 j 列是 A 的第 i 列,AE_{ij} 的其他列全为零;
6. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$, 则 $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

笔记 标准单位向量和基础矩阵虽然很简单, 但如能灵活应用就可以得到意外的结果. 我们在今后将经常应用它们, 因此请读者熟记这些结论.

一些常见的想法:

1. 可以将一般的矩阵写成标准单位列向量或基础矩阵的形式 (这个形式可以是和式的形式, 也可以是分块的形式).

2. 如果要证明两个矩阵相等, 那么我们就可以考虑判定法则.

3. 如果某种等价关系蕴含了一种递减的规律 (项数减少, 阶数降低等), 那么我们就可以考虑数学归纳法, 去尝试根据这个规律得到一些结论.

定义 1.1 (循环矩阵)

1. 下列形状的 n 阶矩阵称为 n 阶基础循环矩阵:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

2. 下列形状的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}.$$

笔记 记 $C_n(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{K}$ 上所有 n 阶循环矩阵构成的集合.

命题 1.2 (循环矩阵的性质)

1. 若 $\boldsymbol{J}$ 为 n 阶基础循环矩阵, 则

$$\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix}O&I_{n-k}\\I_k&O\end{pmatrix},1\leq k\leq n.$$

2. 若循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix},$$

则循环矩阵 A 可以表示为基础循环矩阵 J 的多项式:

$$A=a_1I_n+a_2J+a_3J^2+\cdots+a_nJ^{n-1}.$$

反之, 若一个矩阵能表示为基础循环矩阵 J 的多项式, 则它必是循环矩阵.

3. 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.
4. 基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}O&I_{n-k}\\I_k&O\end{pmatrix}$ $(1\leq k\leq n)$ 的逆仍是循环矩阵, 并且

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{pmatrix}O&I_k\\I_{n-k}&O\end{pmatrix},1\leq k\leq n.$$

笔记 循环矩阵的性质及应用详见谢启鸿博客.

证明

1. 将 $\boldsymbol{J}$ 写作 $(e_n,e_1,\cdots,e_{n-1})$, 其中 e_i 是标准单位列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$. 由分块矩阵乘法并注意到 $\boldsymbol{J}e_i$ 就是 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 列, 可得

$$\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{J}\left(e_n,e_1,\cdots,e_{n-1}\right)=\left(\boldsymbol{J}e_n,\boldsymbol{J}e_1,\cdots,\boldsymbol{J}e_{n-1}\right)=\left(e_{n-1},e_n,\cdots,e_{n-2}\right).$$

不断这样做下去就可以得到结论.

2. 由循环矩阵和基础循环矩阵的定义和循环矩阵的性质 1容易得到证明.

3. 由循环矩阵的性质 2可知两个循环矩阵之积可写为基础循环矩阵 J 的两个多项式之积. 又由循环矩阵的性质 1, 可知 $J^n = I_n$. 因此两个循环矩阵之积可以表示为基础循环矩阵 J 的多项式, 故由循环矩阵的性质 1即得结论.
4. 利用矩阵初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} O & \boldsymbol{I}_{n-k} & \boldsymbol{I}_{n-k} & O \\ \boldsymbol{I}_k & O & O & \boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & O & O & \boldsymbol{I}_k \\ O & \boldsymbol{I}_{n-k} & \boldsymbol{I}_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$$

从而 $\boldsymbol{J}^{-1} = \begin{pmatrix} O & \boldsymbol{I}_k \\ \boldsymbol{I}_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$

命题 1.3 (循环行列式计算公式)

已知下列循环矩阵 A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

则 A 的行列式的值为:

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根.

笔记 关键是要注意到

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

然后再利用命题 1.35就能得到分解 $AV = V\Lambda$.

证明 作多项式 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$, 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

因此

$$|A||V| = |AV| = |V\Lambda| = |V||\Lambda|.$$

因为 ε_i 互不相同, 所以 $|V| \neq 0$, 从而

$$|A| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

命题 1.4 (b-循环矩阵)

设 b 为非零常数, 下列形状的矩阵称为 b -循环矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 同阶 b -循环矩阵的乘积仍然是 b-循环矩阵;

(2) 求上述 b-循环矩阵 A 的行列式的值.

证明

(1) (证明类似于循环矩阵的性质3.) 设 $J_b = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ b & O \end{pmatrix}$, 则 $J_b^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ bI_k & O \end{pmatrix}, 0 \leq k \leq n-1$. 从而 $J_b^n = bI_n$ 且 $A = a_1 I_n + a_2 J_b + a_3 J_b^2 + \cdots + a_n J_b^{n-1}$. 因此同阶 $b-$ 循环阵的乘积仍然可以写成 J_b 的 $n-1$ 次多项式, 故同阶 $b-$ 循环阵的乘积仍然是 $b-$ 循环矩阵.

(2) (证明完全类似循环行列式计算公式的证明) 作多项式 $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$, 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 b 的所有 n 次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

因此

$$|A||V| = |AV| = |V\Lambda| = |V||\Lambda|.$$

因为 ε_i 互不相同, 所以 $|V| \neq 0$, 从而

$$|A| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

命题 1.5 (幂零 Jordan 块)

设 n 阶幂零 Jordan 块

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

则

$$A^k=\begin{pmatrix}O&I_{n-k}\\O&O\end{pmatrix},1\le k\le n.$$

证明 将 A 写为 $A=(0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$, 其中 $\mathbf{e}_i$ 是标准单位列向量. 由分块矩阵乘法并注意 $A\mathbf{e}_i$ 就是 A 的第 i 列, 因此

$$A^2=(0,A\mathbf{e}_1,A\mathbf{e}_2,\cdots,A\mathbf{e}_{n-1})=(0,0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_{n-2})$$

不断这样做下去就可得到结论.

例题 1.1 设 A 是 n 阶矩阵,A 适合 $A^n=O$ 时,I_n-A 必是可逆矩阵.

证明 注意到

$$I_n=I_n-A^n=(I_n-A)\left(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1}\right).$$

故此时 I_n-A 必是可逆矩阵.

例题 1.2 设 A 是 n 阶矩阵,A 适合 $AB=B(I_n-A)$ 对任意 n 阶矩阵 B 成立, 那么 $B=O$.

笔记 若已知矩阵乘法的相关等式, 可以尝试得到一些递推等式.

证明 假设 $A^k=O$, 其中 k 为某个正整数. 由条件可得 $AB=B(I_n-A)$, 于是 $O=A^kB=B(I_n-A)^k$. 由上一题知 I_n-A 是可逆矩阵, 从而 $B=O$.

命题 1.6 (多项式的友矩和 Frobenius 块)

设首一多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,$f(x)$ 的友阵

$$C(f(x))=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&-a_2\\0&0&\cdots&0&1&-a_1\end{pmatrix},$$

则 $|xI_n-C(f(x))|=f(x)$.

$C(f(x))$ 的转置 $F(f(x))$ 称为 $f(x)$ 的 Frobenius 块. 即

$$C^T(f(x))=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_2&-a_1\end{pmatrix}.$$

并且容易验证 $\boldsymbol{C}(f(x))$ 具有以下性质, 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是标准单位列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$:

$$C(f(x))\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_{i+1}\ (1\le i\le n-1),\ C(f(x))\boldsymbol{e}_n=-\sum_{i=1}^{n}a_{n-i+1}\boldsymbol{e}_i.$$

证明 $|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{C}(f(x))|=f(x)$ 的证明见友矩阵的特征多项式/行列式.

例题 1.3 求下列矩阵的逆矩阵 $(a_n\ne 0)$:

$$F=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}.$$

解 用初等变换法不难求得

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}&1&0&\cdots&0\\-\dfrac{a_{n-2}}{a_n}&0&1&\cdots&0\\-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-\dfrac{1}{a_n}&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

命题 1.7

和所有 n 阶对角矩阵乘法可交换的矩阵必是对角矩阵.

证明 由矩阵乘法易得.

命题 1.8 (纯量矩阵的刻画)

(1) 和所有 n 阶奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

(2) 和所有 n 阶非奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

(3) 和所有 n 阶正交阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

(4) 和所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

证明 首先设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

1. 设 $E_{ij}(1\le i\ne j\le n)$ 为基础矩阵, 因为基础矩阵都是奇异阵, 所以由条件可知 $E_{ij}A=AE_{ij}$. 注意到 $E_{ij}A$ 是将 A 的第 j 行变为第 i 行而其他行都是零的 n 阶矩阵,AE_{ij} 是将 A 的第 i 列变为第 j 列而其他列都是零的 n 阶矩阵, 于是我们有

$$\begin{array}{c}\ \ j\\ i\begin{pmatrix}\\ a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jj}&\cdots&a_{jn}\\ \\ \end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}j\\ i\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ii}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}\end{array}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ij}=0(i\ne j)$,$a_{ii}=a_{jj}(1\le i\ne j\le n)$, 因此 A 是纯量阵.

2. 设 $D=\mathrm{diag}\{1,2,\cdots,n\}$ 为对角阵, 因为 D 为非奇异阵, 所以由条件可知 $AD=DA$. 进而

$$
\begin{aligned}
&AD=DA\\
\Leftrightarrow\ & A\left(\boldsymbol{e}_1,2\boldsymbol{e}_2,\cdots,n\boldsymbol{e}_n\right)=\left(\boldsymbol{e}_1,2\boldsymbol{e}_2,\cdots,n\boldsymbol{e}_n\right)A\\
\Leftrightarrow\ & (A\boldsymbol{e}_1,2A\boldsymbol{e}_2,\cdots,nA\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e}_1A,2\boldsymbol{e}_2A,\cdots,n\boldsymbol{e}_nA)\\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n}\\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $ja_{ij}=ia_{ij}\,(i\neq j)$, 从而 $(i-j)\,a_{ij}=0\,(i\neq j)$, 于是 $a_{ij}=0\,(i\neq j)$. 故 $A=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$ 也为对角阵.

设 $P_{ij}(1\leq i\neq j\leq n)$ 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为非奇异阵, 所以由条件可知 $AP_{ij}=P_{ij}A$. 进而可得

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & a_{jj} & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & a_{ii} & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{nn}\end{pmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & a_{ii} & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & a_{jj} & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{nn}\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ii}=a_{jj}(1\leq i\neq j\leq n)$, 于是 A 为纯量阵.

3. 设第二类初等阵 $P_i(-1)(1\leq i\leq n)$, 因为 $P_i(-1)(1\leq i\leq n)$ 都是正交阵, 所以由条件可知 $P_i(-1)A=AP_i(-1)$. 进而可得

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & -a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.
$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ij}=-a_{ij}\,(i\neq j)$, 从而 $a_{ij}=0\,(i\neq j)$. 于是 $A=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$ 为对角阵.

设 $P_{ij}(1\leq i\neq j\leq n)$ 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为正交阵, 所以由条件可知 $AP_{ij}=P_{ij}A$. 进而

可得

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & a_{jj} & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{ii} & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & a_{ii} & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & a_{jj} & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得 $a_{ii} = a_{jj}(1 \le i \ne j \le n)$, 于是 A 为纯量阵.

4. 可以由上面 (1)(2)(3) 中任意一个证明得到. 注意如果此时用 (3) 的证明方法, 那么我们可以先考虑 A 与第一类初等矩阵 $P_i(c)(c \ne 1, 1 \le i \le n)$ 的乘法交换性. 而不是像 (3) 中只能考虑 $P_i(-1)(1 \le i \le n)$.

命题 1.9 (零矩阵的充要条件)

1. $m \times n$ 实矩阵 $A = O$ 的充要条件是适合条件 $AA' = O$ 或 $\mathrm{tr}(AA') \ge 0$, 等号成立;
2. $m \times n$ 复矩阵 $A = O$ 的充要条件是适合条件 $A\overline{A}' = O$ 或 $\mathrm{tr}(A\overline{A}') \ge 0$, 等号成立.

♠

证明

1. (1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 AA' 的第 (i,i) 元素等于零, 即

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

又因为 a_{ij} 都是实数, 所以必有 $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 故 $A = O$.

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则通过计算可得

$$\mathrm{tr}(AA') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \ge 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$, 即 $A = O$.

2. (1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则 $A\overline{A'}$ 的第 (i,i) 元素等于零, 即

$$|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

又因为 a_{ij} 都是复数, 所以可设 $a_{ij} = b_{ij} + \mathrm{i}c_{ij}$, 其中 $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$b_{i1}^2 + c_{i1}^2 + b_{i2}^2 + c_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 + c_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

再结合 $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, 可知 $b_{ij} = c_{ij} = 0$. 即 $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 故 $A = O$.

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则通过计算可得

$$\mathrm{tr}(A\overline{A}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \ge 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$, 即 $A = O$.

命题 1.10 (对称阵是零矩阵的充要条件)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

♠

证明 只要证明充分性. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 令 $\alpha = \boldsymbol{e}_i$, 是第 i 个标准单位列向量. 因为 $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,i) 元素, 故

$a_{ii}=0$. 又令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j(i\neq j)$, 则

$$0=(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, 故 $a_{ij}=a_{ji}$, 又上面已经证明 $a_{ii}=a_{jj}=0$, 从而 $a_{ij}=0$, 这就证明了 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

命题 1.11 (反对称阵的刻画)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是反称阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

证明 必要性 ($\Rightarrow$): 若 $\boldsymbol{A}$ 是反称阵, 则对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'=-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 而 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是数, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 比较上面两个式子便有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$.

充分性 ($\Leftarrow$): 若上式对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立, 则由 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是数, 可知 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}=0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{\alpha}=0$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵, 故由对称阵是零矩阵的充要条件可得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 是反称阵.

命题 1.12

任一 n 阶方阵均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和.

笔记 构造思路: 设 $A=B+C$, 且 B 为对称矩阵,C 为反称矩阵. 则两边取转置可得

$$\begin{cases} A=B+C \\ A'=(B+C)'=B-C \end{cases}$$

解得:$B=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'),C=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 是反对称阵, 并且

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}').$$

注 上例中的 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对称化,$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的反对称化.

命题 1.13 (上三角阵性质)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶上三角阵且主对角线上元素全为零, 则 $\boldsymbol{A}^n=O$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geq 2)$ 阶上三角阵, 若 $i<j$, 则 $A_{ij}=M_{ij}=0$.

(3) 上 (下) 三角阵的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆仍然是上 (下) 三角阵, 并且所得上 (下) 三角阵的主对角元是原上 (下) 三角阵对应主对角元的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆.

证明 (1) 证法一 (抽屉原理): 设 $A=(a_{ij})$, 当 $i\geq j$ 时,$a_{ij}=0$. 将 A 表示为基础矩阵 E_{ij} 之和:

$$A=\sum_{i>j}a_{ij}E_{ij}$$

因为当 $j\neq k$ 时,$E_{ij}E_{kl}=\boldsymbol{O}$, 故在 A^n 的乘法展开式中, 可能非零的项只能是具有形式 $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_{n-1}j_{n-1}}$, 但足标必须满足条件 $1\leq i_1<j_1<i_2<j_2<\cdots<j_{n-1}\leq n$. 根据可知, 这样的项也不存在, 因此 $A^n=\boldsymbol{O}$.

证法二 (数学归纳法): 由假设 $Ae_i=a_{i1}e_1+\cdots+a_{i,i-1}e_{i-1}(1\leq i\leq n)$, 我们只要用归纳法证明:$A^ke_k=0$ 对任意的 $1\leq k\leq n$ 都成立, 则 $A^ne_i=A^{n-i}\cdot A^ie_i=A^{n-i}\cdot 0=0$ 对任意的 $1\leq i\leq n$ 都成立, 从而由判定法则可知 $A^n=O$ 成立. 显然,$Ae_1=0$ 成立. 假设 $A^ke_k=0$ 对任意的 $1<k<n$ 都成立, 则

$$\begin{aligned} A^ke_k&=A^{k-1}(Ae_k)=A^{k-1}(a_{k1}e_1+\cdots+a_{k,k-1}e_{k-1}) \\ &=a_{k1}A^{k-1}e_1+\cdots+a_{k,k-1}A^{k-1}e_{k-1}=0. \end{aligned}$$

(2) 根据条件可设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则当 $i < j$ 时, 有

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

故 $A_{ij} = M_{ij} = 0$.

(3) 只证上三角阵的情形, 下三角阵的情形完全类似. 上三角阵的加减、数乘、乘积 (幂) 以及多项式结论的证明是显然的. 下面我们来证明伴随和求逆的结论. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶上三角阵, 即满足 $a_{ij} = 0, (\forall i > j)$. 由(2)可知 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式 $A_{ij} = 0, \forall i < j$. 于是

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是上三角阵. 而对 $\forall i \in [1, n] \cap N$, 有

我们又将 $A_{ii} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}$ 这个数称为 a_{ii} 的伴随. 这就完成了 $\boldsymbol{A}^*$ 结论的证明.

$$A_{ii} = (-1)^{2i} M_{ii} = M_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots\widehat{a_{ii}}\cdots a_{nn}.$$

由于当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 我们有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 故由上三角阵的数乘结论可知,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角阵, 其主对角元为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}A_{ii} = a_{ii}^{-1}$. 结论得证.

命题 1.14

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是由非负实数组成的矩阵且 AB 有一行等于零, 则或者 $\boldsymbol{A}$ 有一行为零, 或者 $\boldsymbol{B}$ 有一行为零.

证明 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times s}$. 假设 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB},\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times s}$ 的第 i 行全为零. 则对 $\forall j \in [1,s]\cap N$, 都有

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{nj} = 0.$$

已知对 $\forall i \in [1,n]\cap N, j \in [1,m]\cap N$, 有 $a_{ij} \geq 0$; 对 $\forall i \in [1,m]\cap N, j \in [1,s]\cap N$, 有 $b_{ij} \geq 0$. 从而

$$a_{i1}b_{1j} = a_{i2}b_{2j} = \cdots = a_{im}b_{nj} = 0, \forall j \in [1,s]\cap N.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行不全为零, 不妨设 $a_{ik} \neq 0, k \in [1,m]\cap N$, 则由 $a_{ik}b_{kj} = 0, \forall j \in [1,s]\cap N$ 可得 $b_{kj} = 0$, 对 $\forall j \in [1,s]\cap N$ 都成立, 即 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行全为零.

命题 1.15 (矩阵行和和列和的一种刻画)

(1) n 阶矩阵 A 第 i 行元素之和为 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 当且仅当

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

特别地,n 阶矩阵 A 的每一行元素之和等于 c 当且仅当 $A\alpha = c\cdot\alpha$, 其中 $\alpha = (1,1,\cdots,1)'$.

(2) n 阶矩阵 A 第 i 列元素之和为 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}.$$

特别地,n 阶矩阵 A 的每一列元素之和等于 c 当且仅当 $\alpha A = c\cdot\alpha$, 其中 $\alpha = (1,1,\cdots,1)$.

证明 由矩阵乘法容易得到证明.

例题 1.4 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和等于常数 c, 求证:

(1) 对任意的正整数 $k,\boldsymbol{A}^k$ 的每一行元素之和等于 c^k;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵, 则 $c \neq 0$ 并且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每一行元素之和等于 c^{-1}.

笔记 核心想法是利用命题 1.15.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,\cdots,1)'$, 则由矩阵乘法可知,$\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和等于 c 当且仅当 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 成立.

(1) 由 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 不断递推可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = c^k\cdot\boldsymbol{\alpha}$, 故结论成立.

(2) 若 $c = 0$, 则由 $\boldsymbol{A}$ 可逆以及 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 矛盾. 在 $\boldsymbol{A\alpha} = c\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 的两边同时左乘 $c^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 可得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = c^{-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}$, 由此即得结论.

命题 1.16 (矩阵可逆的等价命题)

(1)n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
(2) 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$(这个等式同时也说明 $\boldsymbol{B}$ 可逆).
(3)$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.
(4)$\boldsymbol{A}$ 等价 (相抵) 于 n 阶单位矩阵.
(5)$\boldsymbol{A}$ 可以表示为有限个初等矩阵的积.
(6)$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量 (列向量) 线性无关.

命题 1.17

(1) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R},\lambda_1\neq 0$, 并且 $\lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3=0$ 无实根 (即原等式左边不可因式分解成 $(a_1\boldsymbol{I}_n+a_2\boldsymbol{A})(b_1\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{A})$), 则对任何 $c,d\in\mathbb{R}$, 都有 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆.
(2) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=(a_1\boldsymbol{A}+b_1\boldsymbol{I}_n)(a_2\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 且 $\lambda_1=a_1a_2,\lambda_2=a_1b_2+a_2b_1,\lambda_3=b_1b_2,a_1\neq 0,a_2\neq 0$. 则对任何实数对 $(c,d)\neq(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, 都有 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

笔记 **构造逆矩阵的方法:** 不妨设 $k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$, 其中 k,p,q 为待定系数. 则

$$(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\cdot k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=pc\boldsymbol{A}^2+(cq+dp)\boldsymbol{A}+dq\boldsymbol{I}_n=k\boldsymbol{I}_n.$$

令 $pc=\lambda_1,cq+dp=\lambda_2$, 则 $p=\dfrac{\lambda_1}{c},q=\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}$. 于是由已知条件可得

$$(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\left(\frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\frac{\lambda_2}{c}-\frac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)=\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+d\left(\frac{\lambda_2}{c}-\frac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n=\left(\frac{\lambda_2d}{c}-\frac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3\right)\boldsymbol{I}_n.$$

从而 $k=\dfrac{\lambda_2d}{c}-\dfrac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3$. 因此 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=\dfrac{1}{k}(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=\dfrac{1}{\frac{\lambda_2d}{c}-\frac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3}\left(\dfrac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)$.

实际做题中只需要先设 $k(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)^{-1}=(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$, 其中 k,p,q 为待定系数. 则有 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=k\boldsymbol{I}_n$. 然后通过比较二次项和一次项的系数得到方程组 $\begin{cases}pc=\lambda_1\\cq+dp=\lambda_2\end{cases}$ (即要凑出合适的 p,q, 使得 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)$ 与 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n$ 的二次项和一次项的系数相等), 解出 p,q 的值. 最后将已知条件 $\lambda_1\boldsymbol{A}^2+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$ 代入 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}_n)=k\boldsymbol{I}_n$ 即可得到 k 的值.

熟悉这种方式之后就能快速构造出我们需要的逆矩阵.

证明 (1) 和 (2) 的证明相同. 如下 (这里我们是利用了上述构造逆矩阵的方法直接构造出逆矩阵, 再根据逆矩阵的定义直接得到证明):

当 $c=0$ 时,$c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n=d\boldsymbol{I}_n$ 显然可逆.

当 $c\neq 0$ 时, 注意到 $(c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n)\left(\dfrac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{A}+\left(\dfrac{\lambda_2}{c}-\dfrac{\lambda_1d}{c^2}\right)\boldsymbol{I}_n\right)=\left(\dfrac{\lambda_2d}{c}-\dfrac{\lambda_1d^2}{c^2}-\lambda_3\right)\boldsymbol{I}_n$, 故 $c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

例题 1.5 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合等式 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 求证:$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 都是可逆阵, 而若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}_n$, 则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 必不是可逆阵.

笔记 这里构造逆矩阵利用了命题 1.17.

证明 由已知得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}_n)=-2\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵. 又 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n=-6\boldsymbol{I}_n$, 于是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n)=-6\boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 也是可逆阵.

另一方面, 由已知等式可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$, 如果 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 和假设不合, 因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 不是可逆阵.

命题 1.18

(1) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{AB}+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{B}+\lambda_4\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R},\lambda_1\neq 0$, 并且 $\lambda_1x^2+(\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_4=0$ 无实根 (即原等式左边不可因式分解成 $(a_1\boldsymbol{I}_n+a_2\boldsymbol{A})(b_1\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{B})$), 则对任何 $c,d\in\mathbb{R}$, 都有 $a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{A},c\boldsymbol{I}_n+d\boldsymbol{B}$ 可逆.

(2) 若已知 $\lambda_1\boldsymbol{AB}+\lambda_2\boldsymbol{A}+\lambda_3\boldsymbol{B}+\lambda_4\boldsymbol{I}_n=(a_1\boldsymbol{I}_n+b_1\boldsymbol{A})(a_2\boldsymbol{I}_n+b_2\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 且 $\lambda_1=b_1b_2,\lambda_2=a_2b_1,\lambda_3=a_1b_2,\lambda_4=a_1a_2,b_1\neq 0,b_2\neq 0$. 则对任何实数对 $(a,b),(c,d)\neq(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, 都有 $a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{A},c\boldsymbol{I}_n+d\boldsymbol{B}$ 可逆.

证明 证明方法与命题 1.17类似, 构造逆矩阵的方法也与其类似. 这里不再赘述.

例题 1.6

1. 求证: 不存在 n 阶奇异矩阵 A, 适合条件 $A^2+A+I_n=O$.
2. 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $A^2=A$, 求证:I_n-2A 是可逆矩阵.
3. 若 A 是 n 阶矩阵, 且 $2A(A-I_n)=A^3$, 求证:I_n-A 可逆.

笔记 这类问题构造逆矩阵的方法 (以3.为例): 已知条件等价于 $A^3-2A^2+2A=O$, 设 $(I_n-A)^{-1}=aA^2+bA+cI_n$, 其中 a,b,c 为待定系数, 使得

$$(I_n-A)\left(aA^2+bA+cI_n\right)=A^3-2A^2+2A+kI_n=kI_n, k\text{为待定常数}.$$

比较等式两边系数可得

$$\begin{cases}-a=1\\a-b=-2\\b-c=2\\c=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\k=c=-1\end{cases}$$

于是 $(I_n-A)\left(-A^2+A-I_n\right)=-I_n$. 从而 $(I_n-A)^{-1}=A^2-A+I_n$.

证明

1. 由已知 $A^2+A+I_n=O$, 则 $(A-I_n)(A^2+A+I_n)=A^3-I_n=O$, 即 $A^3=I_n$, 于是 A 是可逆矩阵.
2. 因为 $(I_n-2A)^2=I_n-4A+4A^2=I_n$, 故 I_n-2A 是可逆矩阵.
3. 由已知 $A^3-2A^2+2A-I_n=-I_n$, 即 $(A-I_n)(A^2-A+I_n)=-I_n$, 于是 $(I_n-A)^{-1}=A^2-A+I_n$.

例题 1.7 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 求证:$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 因为

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n,$$

所以 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵. 另一方面, 由上式可得 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})$, 故

$$\boldsymbol{I}_n=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA},$$

从而 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

命题 1.19 (矩阵转置的性质)

设矩阵 A,B, 则有

1. $(A')'=A$;
2. $(A+B)'=A'+B'$;
3. $(kA)'=kA'$;
4. $(AB)'=B'A'$.

证明 由矩阵的性质易证.

命题 1.20 (矩阵的逆运算)

设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆, 则有

常规逆运算:

1. $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. $(\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}$.
4. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\left(\boldsymbol{AC}^{-1}+\boldsymbol{BC}^{-1}\right)^{-1}$.

凑因子:

1. $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{AB}^{-1}\right)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{BA})$.
2. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{AC}^{-1}+\boldsymbol{BC}^{-1}\right)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC})\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB})$.

笔记 无需额外记忆这些公式, 只需要知道**凑因子**的想法, 即**在矩阵可逆的条件下, 我们可以利用矩阵 $\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的性质, 将原本矩阵没有的因子凑出来, 然后提取我们需要的矩阵因子到矩阵逆的外面或将其乘入矩阵逆的内部, 从而达到化简原矩阵的目的.**

证明 由矩阵的运算性质不难证明.

注 凑因子想法的应用:例题 1.10,例题 1.11,例题 1.12.

例题 1.8 设 $A,B,A-B$ 都是 n 阶可逆阵, 证明:

$$B^{-1}-A^{-1}=(B+B(A-B)^{-1}B)^{-1}.$$

笔记 直接运用逆矩阵的定义验证即可.

证明

$$\begin{aligned}
&\left(B^{-1}-A^{-1}\right)\left(B+B(A-B)^{-1}B\right)\\
&=I_n+(A-B)^{-1}B-A^{-1}B-A^{-1}B(A-B)-1B\\
&=I_n+(A-B)^{-1}B-A^{-1}B(I_n+(A-B)-1B)\\
&=\left(I_n-A^{-1}B\right)\left(I_n+(A-B)^{-1}B\right)\\
&=A^{-1}(A-B)\left[(A-B)^{-1}(A-+B)\right]\\
&=A^{-1}(A-B)(A-B)^{-1}A=I_n.
\end{aligned}$$

例题 1.9 Sherman-Morrison 公式 设 A 是 n 阶可逆阵,α,β 是 n 维列向量, 且 $1+\beta'A^{-1}\alpha\neq 0$. 求证:

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}.$$

笔记 直接运用逆矩阵的定义验证即可, 注意 $\beta'A^{-1}\alpha$ 是一个数可以提出来.

证明

$$\begin{aligned}
&(A+\alpha\beta')\left(A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}\right)\\
&=I_n-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}+\alpha\beta'A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\left(\beta'A^{-1}\alpha\right)\beta'A^{-1}\\
&=I_n+\alpha\beta'A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}-\frac{\beta'A^{-1}\alpha}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}\\
&=I_n+\alpha\beta'A^{-1}-\frac{1+\beta'A^{-1}\alpha}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1}=I_n.
\end{aligned}$$

命题 1.21 (一些矩阵等式)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵. 则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_n}+\boldsymbol{BA})=(\boldsymbol{I_m}+\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$.
2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}$.
3. 若 n 阶矩阵 A,B 满足 $A^2=B^2$, 则 $A(A+B)=A^2+AB=B^2+AB=(A+B)B$.

笔记 这是一些常见的矩阵等式. 可以通过反复凑因子得到.

证明 由矩阵的运算性质不难证明.

例题 1.10 设 $A, B, AB-I_n$ 都是 n 阶可逆阵, 证明:$A-B^{-1}$ 与 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 均可逆, 并求它们的逆矩阵.

笔记 核心想法是利用命题 1.20和命题 1.21.

证明 注意到 $A-B^{-1}=(AB-I_n)B^{-1}$, 故 $A-B^{-1}$ 是可逆矩阵, 并且 $(A-B^{-1})^{-1}=B(AB-I_n)^{-1}$. 注意到如下变形:

$$\begin{aligned}&(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}\\=&B(AB-I_n)^{-1}-A^{-1}=A^{-1}(AB(AB-I_n)^{-1}-I_n)\\=&A^{-1}(AB-(AB-I_n))(AB-I_n)^{-1}=A^{-1}(AB-I_n)^{-1}.\end{aligned}$$

故 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆, 并且 $((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=(AB-I_n)A$.

命题 1.22

设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵, 使得 I_m+AB 可逆, 则 I_n+BA 也可逆, 并且 $(I_n+BA)^{-1}=I_n-B(I_m+AB)^{-1}A$.

笔记 命题 1.22的应用: 一般对于求只含有两项的矩阵和式的逆矩阵, 我们可以利用矩阵的逆运算 (凑因子)的方法将原矩阵和式转化为 $C(I_n+AB)$ 或 $(I_n+AB)C$ 的形式, 再利用这个命题求得原矩阵的逆.

注 证法一只能得到 I_n+BA 可逆, 并不能得到具体的逆矩阵. 而证法二可以求出 $(I_n+BA)^{-1}=I_n-B(I_m+AB)^{-1}A$.

证明 证法一 (打洞原理):根据分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{vmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I_m&O\\-B&I_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}I_m&O\\-B&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}I_m&-A\\O&I_n+BA\end{vmatrix}=|I_n+BA|.$$

$$\begin{vmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I_m&A\\O&I_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}I_m&A\\O&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}I_m+AB&O\\B&I_n\end{vmatrix}=|I_m+AB|.$$

故 $\begin{vmatrix}I_m&-A\\B&I_n\end{vmatrix}=|I_m+AB|=|I_n+BA|$. 又因为 I_m+AB 可逆, 所以 $|I_n+BA|=|I_m+AB|\neq 0$. 因此 I_n+BA 也可逆.

证法二 (矩阵的逆运算): 注意到 $A(I_n+BA)=(I_m+AB)A$, 故 $(I_m+AB)^{-1}A(I_n+BA)=A$, 于是 $B(I_m+AB)^{-1}A(I_n+BA)=BA$, 从而

$$\begin{aligned}I_n=I_n+BA-BA&=(I_n+BA)-B(I_m+AB)^{-1}A(I_n+BA)\\&=(I_n-B(I_m+AB)^{-1}A)(I_n+BA).\end{aligned}$$

于是 $(I_n+BA)^{-1}=I_n-B(I_m+AB)^{-1}A$.

例题 1.11 设 A, B 均为 n 阶可逆阵, 使得 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 证明:$A+B$ 也可逆, 并且

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

证明 注意到 $A+B=A(A^{-1}+B^{-1})B$, 故 $A+B$ 可逆. 由命题 1.22可得

$$(I_n+A^{-1}B)^{-1}=I_n-A^{-1}(I_n+BA^{-1})^{-1}B=I_n-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned}(A+B)^{-1}=(A(I_n+A^{-1}B))^{-1}&=(I_n+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\\&=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.\square\end{aligned}$$

例题 1.12 Sherman-Morrison-Woodbury 公式

设 A 为 n 阶可逆阵,C 为 m 阶可逆阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,D 为 $m\times n$ 矩阵, 使得 $C^{-1}+DA^{-1}B$ 可逆. 求证:$A+BCD$ 也可逆, 并且

$$(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(C^{-1}+DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

注 若已知矩阵逆的表达式, 也可以采取利用矩阵逆的定义直接验证的方法进行证明.

证明 注意到 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BCD})$, 将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{CD}$ 分别看成整体, 此时 $\boldsymbol{I}_m+(\boldsymbol{CD})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})$ 可逆, 故由命题 1.22的结论可知 $\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{CD})$ 也可逆, 并且

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BCD})^{-1}&=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{CDA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CD}\\&=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}.\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BCD})$ 也可逆, 并且

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}.$$

1.1.1 练习

练习 1.1 计算下列矩阵的 k 次幂, 其中 k 为正整数:

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix};\quad (2)\ A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\end{pmatrix}.$$

笔记 第 (2) 问核心想法是利用命题 1.34.

解 (1) 设 $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=aI_3+J$. 注意到 aI_3 和 J 乘法可交换,J 是幂零阵并且 $J^3=O$, 因此我们可用二项式定理来求 A 的 k 次幂:

$$\begin{aligned}A^k&=(aI_3+J)^k=(aI_3)^k+C_k^1(aI_3)^{k-1}J+C_k^2(aI_3)^{k-2}J^2\\&=a^kI_3+C_k^1a^{k-1}J+C_k^2a^{k-2}J^2=\begin{pmatrix}a^k&C_k^1a^{k-1}&C_k^2a^{k-2}\\0&a^k&C_k^1a^{k-1}\\0&0&a^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 注意到 A 的列向量成比例, 故可设 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,2,4)$, 则 $A=\alpha\beta'$. 由矩阵乘法的结合律并注意到 $\beta\alpha'=17$, 可得

$$\begin{aligned}A^k&=(\alpha\beta')(\alpha\beta')\cdots(\alpha\beta')=\alpha(\beta'\alpha)(\beta'\alpha)\cdots(\beta'\alpha)\beta'\\&=(\beta'\alpha)^{k-1}\alpha\beta'=17^{k-1}A=\begin{pmatrix}17^{k-1}&2\cdot17^{k-1}&4\cdot17^{k-1}\\2\cdot17^{k-1}&4\cdot17^{k-1}&8\cdot17^{k-1}\\3\cdot17^{k-1}&6\cdot17^{k-1}&12\cdot17^{k-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

练习 1.2 设 k 是正整数, 计算 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^k$.

解 已知 $k=1$ 时, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$. 假设 $k=n$ 时, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$. 则当 $k=n+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta&\cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta\cos\theta\\-(\cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta\cos\theta)&\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta&\sin(n+1)\theta\\-\sin(n+1)\theta&\cos(n+1)\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而由数学归纳法可知, 对任意正整数 k, 有 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta&\sin k\theta\\-\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix}$.

✍ **练习 1.3** 求矩阵 A 的逆阵:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

解 对 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ 用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 再将第一行乘以 s^{-1}, 其中 $s=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从第二行起依次减去下一行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

消去第一列除第一行外的所有元素后, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

从第二行到第 $n-1$ 行分别乘以 $-\dfrac{1}{n}$, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将第一行依次减去第二行, 第三行,$\cdots$, 第 $n-1$ 行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将最后一行加到第一行, 再将最后一行乘以 -1, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}.$$

练习 1.4 求下列 n 阶矩阵的逆阵, 其中 $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

解 对 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ 用初等变换法, 将第 i 行乘以 $a_i^{-1} (1 \leq i \leq n)$, 有

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

将下面的行都加到第一行上, 并令 $s=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$, 则上面的矩阵变为

$$\begin{pmatrix} s & s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{sa_2-1}{sa_2^2} & -\frac{1}{sa_3a_2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_3} & -\frac{1}{sa_2a_3} & \frac{sa_3-1}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & -\frac{1}{sa_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{sa_n^2} \end{pmatrix}.$$

再消去第一行的后 $n-1$ 个 1 就得到

$$A^{-1}=-\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -\frac{1}{a_1a_2} & \frac{sa_2-1}{a_2^2} & -\frac{1}{a_3a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_na_2} \\ -\frac{1}{a_1a_3} & -\frac{1}{a_2a_3} & \frac{sa_3-1}{a_3^2} & \cdots & -\frac{1}{a_na_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_1a_n} & -\frac{1}{a_2a_n} & -\frac{1}{a_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{a_n^2} \end{pmatrix}.$$

练习 1.5 求下列 n 阶矩阵的逆矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

笔记 解法一和解法二的核心想法是: 先假设 (猜测) 矩阵 A 的逆矩阵与其具有相似的结构, 再结合逆矩阵的定义, 使用待定系数法求出矩阵 A 的逆矩阵.

解 解法一: 设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)'$, 则 $A=-I_n+\alpha\alpha'$. 设 $B=cI_n+d\alpha\alpha'$, 其中 c,d 为待定系数. 则 $AB=-cI_n+(c+(n-1)d)\alpha\alpha'$. 令 $c=-1, c+(n-1)d=0$, 则 $d=\frac{1}{n-1}$. 于是 $AB=I_n$, 从而 $A^{-1}=B=-I_n+\frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$.

解法二(Sherman-Morrison 公式):设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$, 则 $A = -I_n + \alpha\alpha'$. 由Sherman-Morrison 公式可得

$$A^{-1} = (-I_n + \alpha\alpha')^{-1} = (-I_n)^{-1} - \frac{1}{1 + \alpha'(-I_n)^{-1}\alpha}(-I_n)^{-1}\alpha\alpha'(-I_n)^{-1} = -I_n + \frac{1}{n-1}\alpha\alpha'.$$

解法三 (循环矩阵): 设 J 为基础循环矩阵, 则 $A = J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$. 设 $B = cI_n + J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$(因为循环矩阵的逆仍是循环矩阵), 其中 c 为待定系数. 则

$$AB = (n-1)I_n + (c + n - 2)(J + J^2 + \cdots + J^{n-1})$$

只要令 $c = 2 - n$, 则 $AB = (n-1)I_n$. 于是 $A^{-1} = \frac{1}{n-1}B = \frac{2-n}{n-1}I_n + J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$.

解法四 (初等变换):本题是练习 1.4的特例, 都利用相同的初等变换方法求逆矩阵.

练习 1.6 设 A 是非零实矩阵且 $A^* = A'$. 求证:A 是可逆阵.

证明 设 $A = (a_{ij})$,a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}, 由已知,$a_{ij} = A_{ij}$. 由于 A 是非零实矩阵, 故必有某个 $a_{rs} \neq 0$, 将 $|A|$ 按第 r 行展开, 可得

$$|A| = a_{r1}A_{r1} + \cdots + a_{rs}A_{rs} + \cdots + a_{rn}A_{rn} = a_{r1}^2 + \cdots + a_{rs}^2 + \cdots + a_{rn}^2 > 0.$$

特别地,$|A| \neq 0$, 即 A 是可逆阵.

练习 1.7 设 A 是奇数阶矩阵, 满足 $AA' = I_n$ 且 $|A| > 0$, 证明:$I_n - A$ 是奇异阵.

证明 由 $1 = |I_n| = |AA'| = |A||A'| = |A|^2$ 以及 $|A| > 0$ 可得 $|A| = 1$. 因为

$$|I_n - A| = |AA' - A| = |A||A' - I_n| = |(A - I_n)'| = |A - I_n| = (-1)^n|I_n - A|.$$

又 n 是奇数, 故 $|I_n - A| = -|I_n - A|$, 从而 $|I_n - A| = 0$, 即 $I_n - A$ 是奇异阵.

练习 1.8 设 A, B 为 n 阶可逆阵, 满足 $A^2 = B^2$ 且 $|A| + |B| = 0$, 求证:$A + B$ 是奇异阵.

证明 由已知 A, B 都是可逆阵且 $|B| = -|A|$, 因此

$$|A||A + B| = |A^2 + AB| = |B^2 + AB| = |B + A||B| = -|A||A + B|.$$

于是 $|A||A + B| = 0$. 因为 $|A| \neq 0$, 故 $|A + B| = 0$, 即 $A + B$ 是奇异阵.

1.2 矩阵的初等变换

1.2.1 相抵标准型

定义 1.2 (矩阵相抵的定义)

设矩阵 A, B, 若 A 经有限次初等变换后变成 B, 则称 A 与 B **相抵**, 记作 $A \sim B$.

笔记 容易验证相抵是 $M_{s\times n}(K)$ 上的一个等价关系. 在相抵关系下, 矩阵 A 的等价类称为 A 的相抵类.

命题 1.23 (矩阵相抵的等价命题)

数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 A 和 B 相抵等价于:

1. A可以经过初等行变换和初等列变换变成B.
2. 存在K上s级初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_t$与n级初等矩阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$,使得 $P_t \cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_m = B$.
3. 存在K上s级可逆矩阵P与n级可逆矩阵Q,使得: $PAQ = B$.

定理 1.1 (相抵标准型)

设数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r. 如果 $r > 0$, 那么 A 相抵于下述形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称矩阵(1.1)为 A 的相抵标准形; 如果 $r=0$, 那么 A 相抵于零矩阵, 此时称 A 的相抵标准形是零矩阵.

推论 1.1

1. 数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 和 B 相抵当且仅当它们的秩相等.
2. 设数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r>0)$, 则存在 K 上的 s 级、n 级可逆矩阵 P、Q, 使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

命题 1.24 (奇异阵的充要条件)

数域 K 上的 n 阶矩阵 A 是奇异阵的充要条件有:

1. 存在数域 K 上不为零的同阶方阵 B, 使得 $AB=O$.
2. 存在数域 K 上的 n 维非零列向量 x, 使得 $Ax=0$.

证明

1. 充分性 ($\Leftarrow$): 显然若 A 可逆, 则从 $AB=O$ 可得到 $B=O$, 因此充分性成立.

   必要性 ($\Rightarrow$): 反之, 若 A 是奇异阵, 则存在数域 K 上的可逆阵 P,Q, 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r<n$. 令 $C=\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 $PAQC=O$. 又因为 P 可逆, 故 $AQC=O$. 只要令 $B=QC\in K$ 就得到了结论.
2. 充分性 ($\Leftarrow$): 显然若 A 可逆, 则从 $Ax=0$ 可得到 $x=0$, 因此充分性成立.

   必要性 ($\Rightarrow$): 反之, 若 A 是奇异阵, 则存在数域 K 上的可逆阵 P,Q, 使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r<n$. 令 $y=(0,\cdots,0,1)'$ 为 n 维列向量, 则 $PAQy=0$. 又因为 P 可逆, 故 $AQy=0$. 只要令 $x=Qy\in K$ 就得到了结论.

1.2.2 练习

练习 1.9 设 A 为 n 阶实反对称阵, 证明:I_n-A 是非异阵.

证明 (反证法) 假设是 I_n-A 是奇异阵, 则由命题 1.24 的 2, 可知存在 n 维非零实列向量 x, 使得 $(I_n-A)x=0$, 即 $Ax=x$. 设 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$, 其中 a_i 都是实数, 则由 A 的反对称性以及命题 1.11, 可知

$$0=x'Ax=x'x=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 即 $x=0$, 这与已知矛盾.

练习 1.10 设 A 为 n 阶可逆阵, 求证: 只用第三类初等变换就可以将 A 化为如下形状:

$$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,|A|\}.$$

证明 假设 A 的第 $(1,1)$ 元素等于零, 因为 A 可逆, 故第一行必有元素不为零. 用第三初等变换将非零元素所在的列加到第一列, 则到的矩阵中第 $(1,1)$ 元素不为零. 因此不设 A 的第 $(1,1)$ 元素非零, 于是可用三类初等变换将 A 的第一行及第一列其余素都消为零. 这就是说,A 经过第三类初变换可化为如下形状:

$$\begin{pmatrix} a & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

再对 A_1 同样处理, 不断做下去, 可将 A 化为对角阵, 并且对角元素均非零. 因此我们只要对对角阵证明结论即可. 为简化讨论, 我们先考虑二阶对角阵:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

将其第一行乘以 $(1-a)a^{-1}$ 加到第行上, 再将第二行加到第一行上得到:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix}.$$

将其第一列乘以 $-b$ 加到第二列上, 再将第行乘以 $a-1$ 加到第二行上得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}.$$

从而原结论对二阶对角阵成立. 对于 n 阶对角阵 $B = diag\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 而言, 按照上述方法对 $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_1a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

按照上述方法对再对 $B\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a_1a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & a_1a_2a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}.$$

同理依次对 $B\begin{pmatrix} k & k+1 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, k = 1, 2 \cdots, n-1$ 所对应的子矩阵按照上述方法进行第三类初等变换, 最后得到

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1a_2\cdots a_n \end{pmatrix}.$$

于是原结论对对角阵也成立. 而我们所用的初等变换始终是第三类初等变换. 这就得到了结论.

练习 1.11 求证: 任一 n 阶矩阵均可表示为形如 $I_n + a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵之积, 其中 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵.

证明 由命题 1.1可知任意一个 n 阶矩阵都可表示为有限个初等阵和具有下列形状的对角阵 D 之积:

$$D = \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\},$$

故只要对初等阵和 D 证明结论即可. 对 D, 假设 D 有 r 个 1, 则

$$D = (I_n - E_{r+1,r+1}) \cdots (I_n - E_{nn}).$$

第三类初等阵已经是这种形状了, 即 $P_{ij}(c) = I_n + cE_{ij}$. 对第二类初等阵 $P_i(c)$, 显然我们有 $P_i(c) = I_n + (c-1)E_{ii}$. 对第一类初等阵 P_{ij}, 由练习 1.10可知, 只用第三类初等变换就可以将 P_{ij} 化为 $P_n(-1) = \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, -1\}$, 因此对第一类初等阵结论也成立. 具体地, 我们有

$$P_{ij} \cdot P_{ij}(-1) P_j(-1) P_{ji}(-1) P_{ij}(1) = I_n.$$

由此可得

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \left[P_{ij}(-1) P_j(-1) P_{ji}(-1) P_{ij}(1)\right]^{-1} = P_{ij}^{-1}(1) P_{ji}^{-1}(-1) P_j^{-1}(-1) P_{ij}^{-1}(-1) \\ &= P_{ij}(-1) P_{ji}(1) P_j(-1) P_{ij}(1) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - 2E_{jj})(I_n + E_{ij}). \end{aligned}$$

1.3 伴随矩阵

定义 1.3 (伴随矩阵定义)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 则称 A^* 为 A 的**伴随矩阵**.

定理 1.2

设 A 为 n 阶矩阵,$n\geq 2$, 则

(i) $AA^*=A^*A=|A|\,I_n$.

(ii) 当 A 可逆时, 有 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

证明 由伴随矩阵的定义不难证明.

命题 1.25

设 A 为 n 阶矩阵, 满足 $A^m=I_n$, 则 $(A^*)^m=I_n$.

证明 由 $A^m=I_n$ 得 $|A|^m=1\neq 0$, 于是矩阵 A 可逆. 又 $A^*=|A|A^{-1}$, 故 $(A^*)^m=|A|^m(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}=I_n$.

定理 1.3 (矩阵乘积的伴随)

设 A,B 为 n 阶矩阵,$n\geq 2$, 则 $(AB)^*=B^*A^*$.

证明 证法一 (Cauchy-Binet 公式推论):设 $C=AB$. 记 M_{ij},N_{ij},P_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 元素的余子式,A_{ij},B_{ij},C_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 元素的代数余子式. 注意到

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},\quad B^*=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

B^*A^* 的第 (i,j) 元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}B_{ki}A_{jk}$. 而 C^* 的第 (i,j) 元素就是 $C_{ji}=(-1)^{j+i}P_{ji}$.

由Cauchy-Binet 公式推论可得

$$\begin{aligned} C_{ji}&=(-1)^{j+i}P_{ji}=(-1)^{j+i}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}N_{ki}\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{i+k}N_{ki}=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}B_{ki}\end{aligned}$$

故结论成立.

证法二 (摄动法):若 A,B 均为非异阵, 则 $A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1}$, 从而

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|(B^{-1}A^{-1})=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*.$$

由命题 1.42, 可知对于一般的方阵 A,B, 可取到一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 t_kI_n+A 与 t_kI_n+B 均为非异阵. 由

非异阵情形的证明可得

$$((t_kI_n+A)(t_kI_n+B))^*=(t_kI_n+B)^*(t_kI_n+A)^*.$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k\to 0$, 即有 $(AB)^*=B^*A^*$ 成立.

定理 1.4 (伴随矩阵的秩)

设 A 为 n 阶矩阵,$n\geq 2$, 则

$$\operatorname{rank}A^*=\begin{cases} n, & \operatorname{rank}A=n,\\ 1, & \operatorname{rank}A=n-1,\\ 0, & \operatorname{rank}A<n-1.\end{cases}$$

证明 当 $\operatorname{rank}A=n$ 时, 则 $|A|\neq 0$,A 可逆, 又 $AA^*=A^*A=|A|I_n$, 两边同时取行列式, 可得 $|A^*|\cdot|A|=|A^*A|=||A|I_n|=|A|^n$, 于是 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$. 所以 $\operatorname{rank}A^*=n$.

当 $\operatorname{rank}A=n-1$ 时,A 至少存在一个 $n-1$ 阶子式不等于 0, 故 $A^*\neq 0$, 即 $\operatorname{rank}A^*\geq 1$; 由 $\operatorname{rank}A<n$ 知 $|A|=0$, 从而 $AA^*=|A|E=0$, 故由定理**??**可知 $\operatorname{rank}A^*\leq n-\operatorname{rank}A=1$, 于是 $\operatorname{rank}A^*=1$. (另证: 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 则由命题**??**可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n 个列向量都成比例且至少有一列不为零, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩等于 1.)

当 $\operatorname{rank}A<n-1$ 时,A 的所有 $n-1$ 阶子式均等于 0, 即 $A^*=0$, 故 $\operatorname{rank}A^*=0$.

命题 1.26 (伴随矩阵的性质)

设 A 为 n 阶矩阵,$n\geq 2$, 则

1. $(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$.
2. $(kA)^*=k^{n-1}A^*$,k 为常数.
3. 若 A 为可逆阵, 则 A^* 也可逆, 并且 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.
4. $(A^m)^*=(A^*)^m$,m 为正整数.
5. $|A^*|=|A|^{n-1}$.
6. $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证明

1. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
2. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
3. 由定理 1.3可知 $A^*\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^{-1}A\right)^*=I_n^*=I_n$. 从而 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.
4. 多次利用定理 1.3即得.
5. 证法一:当 A 可逆时, 有 $A^*=|A|A^{-1}$, 从而 $|A^*|=|A|^{n-1}$; 当 A 不可逆时, 有 $\operatorname{rank}A<n$, 由定理 1.4知 $\operatorname{rank}A^*<n$. 于是 $|A^*|=|A|=0$, 故 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

   若 A 是非异阵, 有 $A^*=|A|A^{-1}$, 从而 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 对于一般的方阵 A, 由命题 1.42可知, 可取到一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 t_kI_n+A 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

   $$|(t_kI_n+A)^*|=|t_kI_n+A|^{n-1}.$$

   注意到上式两边均为行列式的幂次, 其值都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限 (上式两边都是关于 t_k 的多项式函数), 令 $t_k\to 0$, 即有 $|A^*|=|A|^{n-1}$ 成立.

   证法二:见白皮书.
6. 证法一:当 A 可逆时,A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$, 从而由 伴随矩阵的性质5.得

   $$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

   当 A 不可逆时, 则 $|A|=0$, 且由定理 1.4及 $n\geq 2$ 知 $\operatorname{rank}A^*\leq 1<n-1$, 从而 $\operatorname{rank}(A^*)^*=0$, 即 $(A^*)^*=0$, 因

此 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

若 A 是非异阵,A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$, 从而由伴随矩阵的性质5.得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A.$$

对于一般的方阵 A, 由命题 1.42可知, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + A$ 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_kI_n + A)^*)^* = |t_kI_n + A|^{n-2}(t_kI_n + A).$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式 (上式两边的矩阵每个元素都是关于 t_k 的多项式函数), 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 成立.

证法二:见白皮书.

命题 1.27 (伴随矩阵的继承性)

1. 对角矩阵的伴随矩阵是对角矩阵;
2. 对称矩阵的伴随矩阵是对称矩阵;
3. 上 (下) 三角矩阵的伴随矩阵是上 (下) 三角矩阵;
4. 可逆矩阵的伴随矩阵是可逆;
5. 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵;
6. 半正定 (正定) 矩阵的伴随矩阵是半正定 (正定) 矩阵;
7. 可对角化矩阵的伴随矩阵是可对角化矩阵.

证明

1. 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $n \geq 2$.
2. 若 A 为对角矩阵, 则 $a_{ij} = 0(i \neq j)$, 从而 $i \neq j$ 时,M_{ij} 是对角行列式, 且主对角元必有零, 即 $M_{ij} = 0$, 故 $A_{ij} = 0$, 于是 A^* 为对角矩阵.
3. 若 A 为对称矩阵, 则 $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 因此 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 时,M_{ij} 是对称行列式, 从而 $A_{ij} = A_{ji}$, 即 A^* 为对称矩阵.
4. 若 A 为上三角矩阵, 则 $1 \leq j < i \leq n$ 时,$a_{ij} = 0$, 所以 $1 \leq i < j \leq n$ 时,M_{ij} 是上三角行列式, 且主对角元必有零, 即 $M_{ij} = 0$, 从而 $A_{ij} = 0$, 所以 A^* 为上三角矩阵. 同理可证: 下三角矩阵的伴随矩阵是下三角矩阵.
5. 由 $|A| \neq 0$ 和 $A^* = |A|A^{-1}$ 即知.
6. 因为 A 为正交矩阵等价于 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, 所以 $|A|^{-1} = |A|$. 从而由定理 1.2(ii), 有
$$(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A = (|A|A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^*)^{\mathrm{T}},$$
故 A^* 为正交矩阵.
7. 由于 A 为半正定矩阵等价于存在实矩阵 C, 使得 $A = C^{\mathrm{T}}C$, 因此由定理 1.3和伴随矩阵的性质1., 有
$$A^* = (C^{\mathrm{T}}C)^* = C^*(C^{\mathrm{T}})^* = C^*(C^*)^{\mathrm{T}},$$
于是 A^* 为半正定矩阵. 当 A 为正定矩阵时, 同理可证 A^* 为正定矩阵.
8. 若 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $A = P\Lambda P^{\mathrm{T}}$, 其中 Λ 为对角矩阵, 从而由定理 1.3和伴随矩阵的性质1., 有
$$A^* = (P^{\mathrm{T}})^*\Lambda^*P^* = (P^*)^{\mathrm{T}}\Lambda^*P^*,$$
再根据伴随矩阵的继承性1.和伴随矩阵的性质3., 知 Λ^* 为对角矩阵,P^* 为可逆矩阵, 故 A^* 可对角化.

命题 1.28 (分块矩阵的伴随矩阵)

设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 分块对角阵 C 为

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

则分块对角阵 C 的伴随矩阵为:

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

♠

证明 证法一: 设 $A = (a_{ij})_{m\times m}$, 元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式分别记为 M_{ij} 和 A_{ij};$B = (b_{ij})_{n\times n}$, 元素 b_{ij} 的余子式和代数余子式分别记为 N_{ij} 和 B_{ij}. 利用 Laplace 定理可以容易地计算出: 当 $1 \le i, j \le m$ 时,C 的第 (i, j) 元素的代数余子式为 $(-1)^{i+j}M_{ij}|B| = |B|A_{ij}$; 当 $m+1 \le i, j \le m+n$ 时, 由 Laplace 定理, 可知 C 的第 (i, j) 元素的代数余子式为 $(-1)^{i+j}N_{i-m,j-m}|A| = |A|B_{i-m,j-m}$; 当 i, j 属于其他范围时, 由 Laplace 定理, 当 $1 \le i \le m, m \le j \le m+n$ 时, 将其按前 m 列展开, 当 $m \le i \le m+n, 1 \le j \le m$ 时, 将其按前 m 行展开, 可得 C 的第 (i, j) 元素的代数余子式等于零. 因此我们有

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

证法二:若 A, B 均为非异阵, 则

$$C\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|AA^* & O \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A||B|I_m & O \\ O & |A||B|I_n \end{pmatrix} = |C|I_{m+n} = CC^*,$$

注意到 C 非异, 故由上式可得

$$C^* = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

对于一般的方阵 A, B, 由命题 1.42可知, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_m + A$ 与 $t_kI_n + B$ 均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{pmatrix} t_kI_m + A & O \\ O & t_kI_n + B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |t_kI_n + B|(t_kI_m + A)^* & O \\ O & |t_kI_m + A|(t_kI_n + B)^* \end{pmatrix}.$$

注意到上式两边均为 $m+n$ 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ 成立.

1.3.1 练习

✍ **练习 1.12** 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $AB = BA$, 证明:$AB^* = B^*A$.

证明 若 B 为非异阵, 则由 $AB = BA$ 可得 $AB^{-1} = B^{-1}A$. 又 $B^* = |B|B^{-1}$, 于是 $AB^* = B^*A$ 成立. 对于一般的方阵 B, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + B$ 为非异阵, 此时 $A(t_kI_n + B) = (t_kI_n + B)A$ 仍然成立. 由非异阵情形的证明可得

$$A(t_kI_n + B)^* = (t_kI_n + B)^*A.$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有

$AB^* = B^*A$ 成立.

✍ **练习 1.13** 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2&\cdots&2\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

求 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

解 解法一:显然 $|A|=2$, 用初等变换不难求出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$A^*=2A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-2\\0&0&0&\cdots&0&2\end{pmatrix}.$$

将 A^* 的所有元素加起来, 可得 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=1$.

解法二:由命题??可得

$$-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}2&2&2&\cdots&2&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&2&\cdots&2&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1.$$

于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=1$.

解法三:由大拆分法可得 $|A(-1)|=|A|-\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$, 且

$$|A(-1)|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-1&0&\cdots&0&0\\-1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1&0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\-1&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1\end{vmatrix}=1.$$

故 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=|A(-1)|-|A|$.

解法四:由例题??可得

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

1.4 矩阵的迹

命题 1.29 (矩阵迹的性质)

设 A, B 是 n 阶矩阵, 则有:

1. (线性)$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,$\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$;
2. (对称性)$\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A)$;
3. (交换性)$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

证明 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证.

命题 1.30 (矩阵迹的刻画)

设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵集合到 $\mathbb{F}$ 的一个映射, 它满足下列条件:

(1) 对任意的 n 阶矩阵 A, B,$f(A+B) = f(A) + f(B)$;

(2) 对任意的 n 阶矩阵 A 和 $\mathbb{F}$ 中的数 k,$f(kA) = kf(A)$;

(3) 对任意的 n 阶矩阵 A, B,$f(AB) = f(BA)$;

(4) $f(I_n) = n$.

求证:f 就是迹, 即 $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ 对一切 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵 A 成立.

笔记 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

证明 设 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n = f(I_n) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj}),$$

所以 $f(E_{ii}) = 1 (1 \le i \le n)$. 另一方面, 若 $i \ne j$, 则

$$f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(O) = f(0 \cdot I_n) = 0 \cdot f(I_n) = 0.$$

设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 则

$$f(A) = f\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

例题 1.13 求证: 不存在 n 阶矩阵 A, B, 使得 $AB - BA = kI_n (k \ne 0)$.

证明 用反证法证明. 若存在 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $AB - BA = kI_n (k \ne 0)$, 则

$$kn = \mathrm{tr}(kI_n) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

矛盾.

例题 1.14 设 A 是 n 阶矩阵,P 是同阶可逆阵, 求证:$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$, 即相似矩阵具有相同的迹.

证明 因为 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, 故 $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})=\mathrm{tr}(A)$.

例题 1.15 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是实对称阵且 $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2=O$, 证明: 每个 $A_i=O$.

证明 对题设中的等式两边同时取迹, 可得

$$0=\mathrm{tr}(O)=\mathrm{tr}(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2)=\mathrm{tr}(A_1A_1')+\mathrm{tr}(A_2A_2')+\cdots+\mathrm{tr}(A_kA_k').$$

又由于 $\mathrm{tr}(A_iA_i')\geq 0$, 从而只可能是 $\mathrm{tr}(A_iA_i')=0(1\leq i\leq k)$, 再次由零矩阵的充要条件可得 $A_i=O(1\leq i\leq k)$.

命题 1.31

1. 设 n 阶实矩阵 A 适合 $A'=-A$, 如果存在同阶实矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$;
2. 设 n 阶复矩阵 A 适合 $\overline{A}'=-A$, 如果存在同阶复矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$.

证明

1. 在等式 $AB=B$ 两边同时左乘 B' 可得
$$B'AB=B'B.$$
上式两边同时转置并注意到 $A'=-A$, 可得
$$B'B=(B'B)'=(B'AB)'=B'A'B=-B'AB=-B'B,$$
从而有 $B'B=O$. 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得 $B=O$.
2. 证明与 1 类似.

命题 1.32

设 A 为 n 阶实矩阵, 求证:$\mathrm{tr}(A^2)\leq\mathrm{tr}(AA')$, 等号成立当且仅当 A 是对称阵.

证明 若已知 $\mathrm{tr}(AA')\geq\mathrm{tr}(A^2)$, 则由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}((A-A')(A-A')')\\=&\mathrm{tr}((A-A')(A'-A))=\mathrm{tr}(AA'-A^2-(A')^2+A'A)\\=&2\mathrm{tr}(AA')-2\mathrm{tr}(A^2)\geq 0,\end{aligned}$$

故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知 $A-A'=O$, 即 A 为对称阵. 若已知 A 为对称阵, 则 $\mathrm{tr}(AA')=\mathrm{tr}(A^2)$ 显然成立.

命题 1.33

设 A,B 是两个 n 阶矩阵, 使得 $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CBA)$ 对任意 n 阶矩阵 C 成立, 求证:$AB=BA$.

证明 设 $AB=(d_{ij}),BA=(e_{ij})$, 令 $C=E_{kl}(1\leq k,l\leq n)$, 则

$$\mathrm{tr}(ABC)=d_{lk},\mathrm{tr}(CBA)=e_{lk},$$

因此 $d_{lk}=e_{lk}(1\leq k,l\leq n)$, 即有 $AB=BA$.

注 注若 A,B 是实 (复) 矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得 $\mathrm{tr}((AB-BA)C)=0$, 令 C 为 $AB-BA$ 的转置 (共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

例题 1.16 若 n 阶实方阵 A 满足 $AA'=I_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 A,B 满足 $A^2=cAB+B^2$, 其中 c 是非零常数.

证明 用反证法, 设存在 n 阶正交阵 A,B, 使得 $A^2=cAB+B^2(c\neq 0)$. 在等式两边同时左乘 A', 右乘 B', 可得 $AB'=cI_n+A'B$, 从而 $cI_n=A'B-AB'$. 两边同时取迹, 可得 $0\neq nc=\mathrm{tr}(cI_n)=\mathrm{tr}(A'B)-\mathrm{tr}(AB')=\mathrm{tr}((A'B)')-\mathrm{tr}(AB')=\mathrm{tr}(B'A)-\mathrm{tr}(AB')=0$, 矛盾.

例题 1.17 设 A,B 为 n 阶实对称阵, 证明:$\mathrm{tr}((AB)^2)\leq\mathrm{tr}(A^2B^2)$, 并求等号成立的充要条件.

证明 由命题 1.32, 再结合 A,B 的对称性可得

$$\mathrm{tr}\left((AB)^2\right)\leqslant\mathrm{tr}\left((AB)(AB)\prime\right)=\mathrm{tr}\left(ABBA\right)=\mathrm{tr}\left(A^2B^2\right).$$

等号成立当且仅当 AB 也为实对称矩阵, 即 $AB = B'A' = BA$.

1.5 矩阵乘法与行列式计算

命题 1.34 (可以写成两个矩阵 (向量) 乘积的矩阵)

若已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{1n} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{1n} & \cdots & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12}+\cdots+a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{2n} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{2n} & \cdots & a_{n1}b_{21}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2}+\cdots+a_{1n}b_{nn} & a_{21}b_{n1}+a_{22}b_{n2}+\cdots+a_{2n}b_{nn} & \cdots & a_{n1}b_{n1}+a_{n2}b_{n2}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

则矩阵 A 可以写成 BC, 其中

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

即

$$A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=BC.$$

特别地, 若矩阵 A 的行/列向量成比例, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

则令 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 就有 $A=\beta'\alpha=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

注 若矩阵的列向量成比例, 则行向量也一定成比例. 反之也成立.

笔记 观察原矩阵 A 不难发现: **矩阵 A 的每一行沿行方向只有 a_{ij}(的角标) 改变, 而 b_{kl}(的角标) 并不改变; 而矩阵 A 的每一列沿列方向只有 b_{kl}(的角标) 改变,a_{ij}(的角标) 并不改变.** 因此具有这种性质的矩阵, 都可以按照这个命题将其写成两个矩阵的乘积. 特别地, **若矩阵的行/列向量成比例, 则一定可以将其写成两个向量的乘积.**

记忆小技巧: 只需要记住矩阵 B 的形式 (沿行方向不变的项写在前面作为矩阵 B 的元素), 然后结合原矩阵, 利用矩阵乘法就能写出矩阵 C. 即**按行变化的项写左边 (作为矩阵 B 的元素), 按列变化的项写右边 (作为矩阵 C 的元素).**

注 拆分后的矩阵 B 的行数与原矩阵 A 相同, 矩阵 C 的列数与原矩阵 A 相同. 但是矩阵 B 的列数与矩阵 C 的行数可以任意选取, 只要满足 $BC = A$ 即可.

证明 利用矩阵乘法容易得到证明.

命题 1.35 (一些能写成两个向量乘积的矩阵)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \alpha\alpha'$, 其中 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$.

2. 若矩阵 A 的行/列向量成比例, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

则有 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$.

笔记 这里的 a_i 可以是行向量,b_i 可以是列向量. 此时矩阵 A 的元素就是 a_ib_i 仍然是一个数. 并且此时矩阵 A 能够分解的条件应该改为**矩阵 A 的每一行都有公共的行向量 a_i, 每一列都有公共的列向量 b_i.**

注 若 a_i, b_i 是上述向量, 则根据矩阵乘法, 可知 a_i 的列数可以任意选取,b_i 的行数可以任意选取. 此时只要确定每个向量 a_i, b_i 就可以确定矩阵 A 的分解式.

例题 1.18 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$,

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

求 $|S|$ 的值并证明若 x_i 是实数, 则 $|S| \geq 0$.

解 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

则 $S = VV'$, 因此

$$|S| = |V|^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \geq 0.$$

例题 1.19 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$, 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}.$$

解 将矩阵 A 分解为两个矩阵的乘积:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此 $|A|=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2$.

例题 1.20 计算下列矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}x & -y & -z & -w\\ y & x & -w & z\\ z & w & x & -y\\ w & -z & y & x\end{pmatrix}.$$

解 解法一: 注意到

$$AA'=\begin{pmatrix}x & -y & -z & -w\\ y & x & -w & z\\ z & w & x & -y\\ w & -z & y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z & w\\ -y & x & w & -z\\ -z & -w & x & y\\ -w & z & -y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & 0 & 0 & 0\\ 0 & u & 0 & 0\\ 0 & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & u\end{pmatrix}$$

其中 $u=x^2+y^2+z^2+w^2$, 因此

$$|A|^2=(x^2+y^2+z^2+w^2)^4.$$

故

$$|A|=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2.$$

在矩阵 A 中令 $x=1, y=z=w=0$, 显然 $|A|=1$.

解法二: 令

$$B=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}z & w\\ w & -z\end{pmatrix},$$

则 $|A|=\begin{vmatrix}B & -C\\ C & B\end{vmatrix}$. 由命题 1.41可得

$$|A|=|B+\mathrm{i}C||B-\mathrm{i}C|=\begin{vmatrix}x+\mathrm{i}z & -y+\mathrm{i}w\\ y+\mathrm{i}w & x-\mathrm{i}z\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-\mathrm{i}z & -y-\mathrm{i}w\\ y-\mathrm{i}w & x+\mathrm{i}z\end{vmatrix}=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2.$$

例题 1.21 计算下列矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta\\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta\\ \cos(n-1)\theta & \cos n\theta & \cos\theta & \cdots & \cos(n-2)\theta\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

解 解由上面的结论可知

$$|A|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根,$f(x)=\cos\theta+x\cos 2\theta+\cdots+x^{n-1}\cos n\theta$. 令

$$g(x)=\sin\theta+x\sin 2\theta+\cdots+x^{n-1}\sin n\theta,$$

则由 De Moivre 公式可得

$$
\begin{aligned}
&f(x)+\mathrm{i}g(x)=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+x(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2+\cdots+x^{n-1}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\\
&=\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\left[1-x^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\right]}{1-x(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{1-x^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}{\cos\theta-x-\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{[(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)-x]\,[(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-x]}\\
&=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta}=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}\\
&=\frac{\left[x^{n+1}\cos n\theta-x^n\cos(n+1)\theta-x+\cos\theta\right]+\mathrm{i}\left[x^{n+1}\sin n\theta+x^n\sin(n-1)\theta+\sin\theta\right]}{x^2-2x\cos\theta+1}.
\end{aligned}
$$

再比较实部，可得

$$
f(x)=\frac{\cos n\theta\cdot x^{n+1}-\cos(n+1)\theta\cdot x^n-x+\cos\theta}{x^2-2\cos\theta\cdot x+1}.
$$

对任意的 ε_i，经计算并化简，可得

$$
f(\varepsilon_i)=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)-\varepsilon_i(1-\cos n\theta)}{[(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-\varepsilon_i]\,[(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)-\varepsilon_i]}.
$$

注意到对任意的 a,b，有 $a^n-b^n=(a-\varepsilon_1b)(a-\varepsilon_2b)\cdots(a-\varepsilon_nb)$，因此

$$
\begin{aligned}
|A|=\prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i)&=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)^n-(1-\cos n\theta)^n}{(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta-1)(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta-1)}\\
&=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)^n-(1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos n\theta)}\\
&=\frac{2^n\sin^n\frac{n\theta}{2}\sin^n\frac{(n-2)\theta}{2}-2^n\sin^{2n}\frac{n\theta}{2}}{4\sin^2\frac{n\theta}{2}}\\
&=2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left(\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2}-\sin^n\frac{n\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

1.6 Cauchy-Binet 公式

定理 1.5 (Cauchy-Binet 公式)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵.$A\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_s\\j_1&\cdots&j_s\end{pmatrix}$ 表示 A 的一个 s 阶子式，它是由 A 的第 $i_1,\cdots,i_s$ 行与第 $j_1,\cdots,j_s$ 列交点上的元素按原次序排列组成的行列式. 同理定义 B 的 s 阶子式.

(1) 若 $m>n$，则有 $|AB|=0$;

(2) 若 $m\le n$，则有

$$
|AB|=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&m\\j_1&j_2&\cdots&j_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_m\\1&2&\cdots&m\end{pmatrix}.
$$

♡

证明

(1) 若 $m>n$，则 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}\le\min\{m,n\}=n<m$，故 $|-AB|=0$.

(2)

推论 1.2 (Cauchy-Binet 公式推论)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵,r 是一个正整数且 $r\le m$.

(1) 若 $r>n$，则 AB 的任意 r 阶子式都等于零;

(2) 若 $r\le n$，则 AB 的 r 阶子式

$$
AB\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}.
$$

♡

例题 1.22 设 $n \geq 3$, 证明下列矩阵是奇异阵:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \end{pmatrix}.$$

由Cauchy-Binet 公式, 可知 $|A| = 0$.

例题 1.23 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 求证: 矩阵 AA' 的任一主子式都非负.

证明 若 $r \leq n$, 则由Cauchy-Binet 公式推论可得

$$AA' \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \left(A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \right)^2 \geq 0;$$

若 $r > n$, 则 AA' 的任一 r 阶主子式都等于零, 结论也成立.

例题 1.24 设 A 是 n 阶实方阵且 $AA' = I_n$. 求证: 若 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$, 则

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \left(A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \right)^2 = 1.$$

证明 对等式 $AA' = I_n$ 两边同时求 r 阶子式, 因为 $r \leq n$, 所以由Cauchy-Binet 公式即得结论成立.

例题 1.25 设 A, B 分别是 $m \times n$,$n \times m$ 矩阵, 求证:AB 和 BA 的 r 阶主子式之和相等, 其中 $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$.

证明 由Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} AB \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ = & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ = & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \\ = & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} BA \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

引理 1.1 (Lagrange 恒等式)

证明 Lagrange 恒等式 $(n \geq 2)$:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

证明 左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy - Binet 公式可得

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)^2.$$

定理 1.6 (Cauchy - Schwarz 不等式)

设 a_i, b_i 都是实数, 证明 Cauchy - Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2.$$

证明 由Lagrange 恒等式, 恒等式右边总非负, 即得结论.

例题 1.26 设 A, B 都是 $m\times n$ 实矩阵, 求证:

$$|AA'||BB'| \ge |AB'|^2.$$

证明 若 $m > n$, 则 $|AA'| = |BB'| = |AB'| = 0$, 结论显然成立. 若 $m \le n$, 则由 Cauchy - Binet 公式可得

$$|AA'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left(A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right)^2;$$

$$|BB'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left(B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right)^2;$$

$$|AB'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

再由Cauchy - Schwarz 不等式即得结论.

1.7 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

命题 1.36 (打洞原理)

(1) 设

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

(2) 设

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 $\boldsymbol{D}$ 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{D}| \cdot |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|.$$

笔记 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板 $|\square| = |\square|\,|\square - \square\square^{-1}\square|$, 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个 $\square$ 填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入 $\square$ 即可.

证明 (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{C}$)

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对 $\boldsymbol{M}$ 的第一行左乘 $(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})$ 再加到第二行得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对 $\boldsymbol{M}$ 的第二行左乘 $(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1})$ 再加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}| \cdot |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|.$$

推论 1.3 (打洞原理推论)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 则

$$\lambda^m |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \lambda^n |\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

笔记 这个推论能将原本复杂的矩阵 AB 通过交换顺序变成相对简单的矩阵 BA. 例如:例题 1.35.

注 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 结论显然成立.

当 $\lambda \neq 0$ 时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = |\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{vmatrix} = \lambda^n \left|\boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right| = \lambda^{n-m} |\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

于是 $\begin{vmatrix}\lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m\end{vmatrix} = |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^{n-m}|\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}|$.. 故 $\lambda^m|\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^n|\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}|$.

例题 1.27 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$, 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n|\boldsymbol{I}_2|\left|\boldsymbol{I}_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\begin{vmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{\Lambda}' \\ \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{I}_n\end{vmatrix} = (-1)^n|\boldsymbol{I}_n|\left|\boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_n^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\left|\boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix}\right| = (-1)^n\left[(1-n)\left(1-\sum_{i=1}^n a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right].$$

例题 1.28 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left|I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right| = |I_n|\left|1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}I_n^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right| = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

例题 1.29 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A=\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当 $n>2$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $|A|=0$. 当 $n=2$ 时,$|A|=a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-b_1a_2$. 当 $n=1$ 时,$|A|=a_1-b_1$.

例题 1.30 求下列矩阵的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将 A 化为

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1,2,\cdots,n),$$

利用降阶公式容易求得 $|A|=(-1)^n n!(1-n)$.

命题 1.37

设 A,B 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B||A-B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix}=|A+B||A-B|.$$

例题 1.31 计算:

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解 解法一: 令

$$B=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则 $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$. 由命题 1.40可得

$$|A| = |B+C||B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix}$$
$$= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z).$$

解法二 (求根法):

命题 1.38

设 A, B 是 n 阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行乘以 i 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-\mathrm{i}$ 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & \mathrm{i}A-B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

例题 1.32 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

解 反复利用命题 1.40的结论可得

$$|M| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix}$$
$$= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|.$$

例题 1.33 设 A, B 是 n 阶矩阵且 $AB = BA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2+B^2|.$$

证明 由命题 1.41的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B| \cdot |A-\mathrm{i}B| = |(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)| = |A^2+B^2-\mathrm{i}(AB-BA)| = |A^2+B^2|.$$

例题 1.34 设 A, B 是 n 阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

证明 注意到 A, B 都是实矩阵, 故 $\overline{|A+\mathrm{i}B|} = |\overline{A+\mathrm{i}B}| = |A-\mathrm{i}B|$, 再由命题 1.41的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B| \cdot |A-\mathrm{i}B| = |A+\mathrm{i}B| \cdot \overline{|A+\mathrm{i}B|} \geq 0.$$

1.8 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

命题 1.39 (打洞原理)

(1) 设

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 A 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|M|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

(2) 设

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 D 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|M|=|D|\cdot|A-BD^{-1}C|.$$

笔记 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板 $|\square|=|\square|\left|\square-\square\square^{-1}\square\right|$, 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个 $\square$ 填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入 $\square$ 即可.

证明 (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去 B 或 C)

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第一行左乘 $(-CA^{-1})$ 再加到第二行得到

$$\begin{pmatrix}I_n & O\\ -CA^{-1} & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M|=\begin{vmatrix}I_n & O\\ -CA^{-1} & I_m\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}I_n & O\\ -CA^{-1} & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第二行左乘 $(-BD^{-1})$ 再加到第一行得到

$$\begin{pmatrix}I_n & -BD^{-1}\\ O & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C & O\\ C & D\end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M|=\begin{vmatrix}I_n & -BD^{-1}\\ O & I_m\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}I_n & -BD^{-1}\\ O & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}A-BD^{-1}C & O\\ C & D\end{vmatrix}=|D|\cdot|A-BD^{-1}C|.$$

推论 1.4 (打洞原理推论)

设 A 是 $n\times m$ 矩阵,B 是 $m\times n$ 矩阵, 则

$$\lambda^m|\lambda I_n-AB|=\lambda^n|\lambda I_m-BA|.$$

笔记 这个推论能将原本复杂的矩阵 AB 通过交换顺序变成相对简单的矩阵 BA. 例如:例题 1.35.

注 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

证明 当 $\lambda=0$ 时, 结论显然成立.

当 $\lambda \neq 0$ 时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^n \left|I_m - \frac{1}{\lambda}BA\right| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - BA|.$$

于是 $\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - BA|$.. 故 $\lambda^m|\lambda I_n - AB| = \lambda^n|\lambda I_m - BA|$.

例题 1.35 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 令 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$, 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$A = -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n|I_2|\left|I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n|I_n|\left|I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I_n^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\left|I_2 - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix}\right| = (-1)^n\left[(1-n)\left(1-\sum_{i=1}^n a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right].$$

例题 1.36 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

例题 1.37 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当 $n > 2$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $|A| = 0$. 当 $n = 2$ 时,$|A| = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - b_1a_2$. 当 $n = 1$ 时,$|A| = a_1 - b_1$.

例题 1.38 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将 A 化为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

利用降阶公式容易求得 $|A| = (-1)^n n!(1 - n)$.

命题 1.40

设 A, B 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B||A - B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A + B & A + B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & A - B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

例题 1.39 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解 解法一: 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则 $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$. 由命题 1.40可得

$$\begin{aligned} |A| = |B+C||B-C| &= \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z). \end{aligned}$$

解法二 (求根法):

命题 1.41

设 A, B 是 n 阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行乘以 i 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-\mathrm{i}$ 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & \mathrm{i}A-B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

例题 1.40 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

解 反复利用命题 1.40的结论可得

$$\begin{aligned} |M| &= \left|\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|. \end{aligned}$$

例题 1.41 设 A, B 是 n 阶矩阵且 $AB = BA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2+B^2|.$$

证明 由命题 1.41的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B|\cdot|A-\mathrm{i}B| = |(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)| = |A^2+B^2-\mathrm{i}(AB-BA)| = |A^2+B^2|.$$

例题 1.42 设 A,B 是 n 阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

证明 注意到 A,B 都是实矩阵, 故 $\overline{|A+\mathrm{i}B|} = |\overline{A+\mathrm{i}B}| = |A-\mathrm{i}B|$, 再由命题 1.41的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B|\cdot|A-\mathrm{i}B| = |A+\mathrm{i}B|\cdot\overline{|A+\mathrm{i}B|} \geq 0.$$

1.9 摄动法

摄动法的原理

(1) 证明矩阵问题对非异阵成立.

(2) 对任意的 n 阶矩阵 A, 由上例可知, 存在一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + A$ 都是非异阵. 验证 $t_kI_n + A$ 仍满足矩阵问题的条件, 从而该问题对 $t_kI_n + A$ 成立.

(3) 若矩阵问题关于 t_k 连续, 则可取极限令 $t_k \to 0$, 从而得到该问题对一般的矩阵 A 也成立.

注

1. 矩阵问题对非异阵成立以及矩阵问题关于 t_k 连续, 这两个要求缺一不可, 否则将不能使用摄动法进行证明.
2. 验证摄动矩阵仍然满足矩阵问题的条件是必要的. 例如, 若矩阵问题中有 $AB = -BA$ 这一条, 但 $(t_kI_n+A)B \neq -B(t_kI_n + A)$, 因此便不能使用摄动法.
3. 根据实际问题的需要, 也可以使用其他非异阵来替代 I_n 对 A 进行摄动.

笔记 关于伴随矩阵的问题中经常会使用摄动法.

命题 1.42

设 A 是一个 n 阶方阵, 求证: 存在一个正数 a, 使得对任意的 $0 < t < a$, 矩阵 $tI_n + A$ 都是非异阵.

笔记 这个命题告诉我们对任意的 n 阶矩阵 A, 经过微小的一维摄动之后,$tI_n + A$ 总能成为一个非异阵.

证明 通过简单的计算可得

$$|tI_n + A| = t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n,$$

这是一个关于未定元 t 的 n 次多项式. 由多项式根的有限性可知上述多项式至多只有 n 个不同的根. 若上述多项式的根都是零, 则不妨取 $a = 1$; 若上述多项式有非零根, 则令 a 为 $|tI_n + A|$ 所有非零根的模长的最小值. 因此对任意的 $0 < t_0 < a$, t_0 都不是 $|tI_n + A|$ 的根, 即 $|t_0I_n + A| \neq 0$, 从而 $t_0I_n + A$ 是非异阵.

例题 1.43 设 A,B,C,D 是 n 阶矩阵且 $AC = CA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

笔记 本题也给出了例题 1.41的摄动法证明.

证明 若 A 为非异阵, 则由降阶公式, 再结合条件 $AC = CA$ 可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right| = \left|AD - ACA^{-1}B\right| = |AD - CB|.$$

对于一般的方阵 A, 由命题 2.11 可知, 存在一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + A$ 是非异阵, 并且条件 $(t_kI_n + A)C =$

$C(t_k I_n + A)$ 仍然成立. 于是

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(t_k I_n + A)D - CB|\,.$$

上式两边都是行列式,其值都是 t_k 的多项式,从而都关于 t_k 连续. 上式两边同时令 $t_k \to 0$, 即有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$ 成立.

1.10 练习

练习 1.14 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(A) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 A 成立:$f(PAP^{-1}) = f(A)$. 证明: 存在非零常数 c, 使得 $P'P = cI_n$.

证明 由假设知 $f(A) = \mathrm{tr}(AA')$, 因此

$$f(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P') = \mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \mathrm{tr}(AA').$$

以下设 $P'P = (c_{ij}),(P'P)^{-1} = (d_{ij})$. 注意 $P'P$ 是对称矩阵, 后面要用到. 令 $A = E_{ij}$, 其中 $1 \le i, j \le n$. 并将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned}
(P'P)A(P'P)^{-1}A' &= (P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji} \\
&= \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & c_{1i} & \\ & c_{2i} & \\ & \vdots & \\ & c_{ii} & \\ & \vdots & \\ & c_{ni} & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & d_{1j} & \\ & d_{2j} & \\ & \vdots & \\ & d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & d_{nj} & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & c_{1i}d_{jj} & \\ & c_{2i}d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & c_{ii}d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & c_{ni}d_{jj} & \end{pmatrix} \end{array}
\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}\left((P'P)\,A\,(P'P)^{-1}\,A'\right) = c_{ii}d_{jj}$. 而 $\mathrm{tr}\,(AA') = \mathrm{tr}\,(E_{ij}E_{ji}) = \mathrm{tr}\,(E_{ii}) = 1$. 则由 $\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \mathrm{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj} = 1. \tag{1.2}$$

再令 $A = E_{ij} + E_{kl}$, 其中 $1 \le i, j, k, l \le n$. 不妨设 $k \ge i, l \ge j$, 将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$(P'P)A(P'P)^{-1}A' = (P'P)(E_{ij} + E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji} + E_{lk})$$

$$
=\left[\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{ki} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{ik} \\ \vdots \\ c_{kk} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{jj} \\ \vdots \\ d_{lj} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} d_{1l} \\ d_{2l} \\ \vdots \\ d_{jl} \\ \vdots \\ d_{ll} \\ \vdots \\ d_{nl} \end{pmatrix} \end{array}\right]
$$

$$
=\begin{array}{c} \begin{matrix} j & & l \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & \cdots & c_{kk} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} i & & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} d_{1j} & \cdots & d_{1l} \\ d_{2j} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{jj} & \cdots & d_{jl} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{lj} & \cdots & d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{nj} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{1i}d_{jj}+c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl}+c_{1k}d_{ll} \\ c_{2i}d_{jj}+c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl}+c_{2k}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii}d_{jj}+c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl}+c_{ik}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki}d_{jj}+c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl}+c_{kk}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni}d_{jj}+c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl}+c_{nk}d_{ll} \end{pmatrix} \end{array}
$$

从而 $\operatorname{tr}\left((P'P)\,A\,(P'P)^{-1}\,A'\right)=c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}$. 而

$$
\operatorname{tr}(AA')=\operatorname{tr}\left((E_{ij}+E_{kl})\,(E_{ji}+E_{lk})\right)=\operatorname{tr}\left(E_{ij}E_{ji}+E_{ij}E_{lk}+E_{kl}E_{ji}+E_{kl}E_{lk}\right)=2+2\delta_{ik}\delta_{jl}.
$$

于是由 $\operatorname{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\operatorname{tr}(AA')$ 可知

$$
c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}=2+2\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{1.3}
$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号. 由上述(1.2)(1.3)两式可得

$$
c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}=2\delta_{ik}\delta_{jl}.
$$

在上式中令 $j=l, i\neq k$, 注意到 $d_{jj}\neq 0$, 故有 $c_{ik}+c_{ki}=0$, 又因为 $P'P$ 是对称矩阵, 所以 $c_{ik}=c_{ki}$. 故 $c_{ik}=0, \forall i\neq k$. 于是 $P'P$ 是一个对角矩阵, 从而由(1.2)式可得 $d_{jj}=c_{jj}^{-1}$, 由此可得 $c_{ii}=c_{jj}, \forall i,j$. 因此 $P'P=cI_n$, 其中 $c=c_{11}\neq 0$.