0.1 内积空间的基本概念

定义 0.1 (Euclid 空间)

设 V 是实数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\alpha, \beta\}$, 都唯一地对应一个实数, 记为 (α, β), 且适合如下规则:

(1) $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$;

(2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(3) $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta), c$ 为任一实数;

(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,

则称在 V 上定义了一个内积. 实数 (α, β) 称为 α 与 β 的内积. 线性空间 V 称为**实内积空间**. 有限维实内积空间称为 **Euclid 空间**, 简称为**欧氏空间**. ♣

定义 0.2 (酉空间)

设 V 是复数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\alpha, \beta\}$, 都唯一地对应一个复数, 记为 (α, β), 且适合如下规则:

(1) $(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)}$;

(2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(3) $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta), c$ 为任一复数;

(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,

则称在 V 上定义了一个内积. 复数 (α, β) 称为 α 与 β 的内积. 线性空间 V 称为**复内积空间**. 有限维复内积空间称为**酉空间**. ♣

注 实内积空间的定义与复内积空间的定义是相容的. 事实上, 对一个实数 $a, \overline{a} = a$, 故定义 0.1 中的 (1) 与定义 0.2中的 (1) 是一致的. 因此, 我们经常将这两种空间统称为内积空间, 在某些定理的叙述及证明中也不区分它们, 而统一作为复内积空间来处理. 但是, 需要注意的是对复内积空间,定义 0.2中的 (1), (3) 意味着:

$$(\alpha, c\beta) = \overline{c}(\alpha, \beta).$$

定义 0.3 (标准内积)

1. 设 $\mathbb{R}^n$ 是 n 维实列向量空间,$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,$\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

则在此定义下 $\mathbb{R}^n$ 成为一个欧氏空间, 上述内积称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积.

2. 设 $\mathbb{C}^n$ 是 n 维复列向量空间,$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,$\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n},$$

则在此定义下 $\mathbb{C}^n$ 成为一个酉空间, 上述内积称为 $\mathbb{C}^n$ 的标准内积. ♣

注 对 n 维实或复行向量空间, 我们也可同样定义标准内积.

例题 0.1

1. 设 V 是由 $[a, b]$ 区间上连续函数全体构成的实线性空间, 设 $f(t), g(t) \in V$, 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t,$$

则不难验证这是一个内积, 于是 V 成为内积空间. 这是一个无限维实内积空间.

2. (1) 设 V 是 n 维实列向量空间,G 是 n 阶正定实对称阵, 对 $\alpha,\beta\in V$, 定义

$$(\alpha,\beta)=\alpha' G\beta,$$

则这是一个内积, 并且 V 在上式的定义下成为欧氏空间.

(2) 设 U 是 n 维复列向量空间, 若有正定 Hermite 矩阵 H, 对 $\alpha,\beta\in U$, 定义:

$$(\alpha,\beta)=\alpha' H\overline{\beta}.$$

则这个 U 上的一个内积, 并且 U 在上式的定义下成为酉空间.

证明

1. 由内积空间的定义不难验证.
2. (1)定义 0.1中的 (2), (3) 显然成立. 对 (1), 注意到 $\alpha' G\beta$ 是实数, 其转置仍是它自己, 而 G 是对称阵, 故

$$(\alpha,\beta)=\alpha' G\beta=(\alpha' G\beta)'=\beta' G'\alpha=\beta' G\alpha=(\beta,\alpha).$$

又从 G 是正定阵即可知道 (4) 成立.

(2) 根据内积和酉空间的定义不难验证.

□

注 当 $G=I_n$ 为单位阵时,V 上内积就是标准内积. 对实列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha,\beta)=\alpha'\beta.$$

对实行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha,\beta)=\alpha\beta'.$$

当 $H=I_n$ 为单位阵时,U 上内积就是标准内积. 对复列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha,\beta)=\alpha'\overline{\beta}.$$

对复行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha,\beta)=\alpha\overline{\beta}'.$$

例题 0.2 常见内积和内积空间

证明下列线性空间在给定的二元运算下成为内积空间: (1) 设 $V=\mathbb{R}^n$ 为 n 维实列向量空间,G 为 n 阶正定实对称矩阵, 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 定义 $(\alpha,\beta)=\alpha' G\beta$;

(2) 设 $V=\mathbb{R}_n$ 为 n 维实行向量空间,G 为 n 阶正定实对称矩阵, 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 定义 $(\alpha,\beta)=\alpha G\beta'$;

(3) 设 $V=\mathbb{C}^n$ 为 n 维复列向量空间,H 为 n 阶正定 Hermite 矩阵, 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 定义 $(\alpha,\beta)=\alpha' H\overline{\beta}$;

(4) 设 $V=\mathbb{C}^n$ 为 n 维复行向量空间,H 为 n 阶正定 Hermite 矩阵, 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 定义 $(\alpha,\beta)=\alpha H\overline{\beta}'$;

(5) 设 $V=C[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体构成的实线性空间, 对任意的 $f(t),g(t)\in V$, 定义 $(f(t),g(t))=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$;

(6) 设 $V=\mathbb{R}[x]$ 为实系数多项式全体构成的实线性空间, 对任意的 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$, 定义 $(f(x),g(x))=a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_kb_k$, 其中 $k=\min\{n,m\}$;

(7) 设 $V=M_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实矩阵全体构成的实线性空间, 对任意的 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in V$, 定义 $(A,B)=\mathrm{tr}(AB')=\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$;

(8) 设 $V=M_n(\mathbb{C})$ 为 n 阶复矩阵全体构成的复线性空间, 对任意的 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in V$, 定义 $(A,B)=\mathrm{tr}(A\overline{B}')=\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{b_{ij}}$.

证明 (1) 首先注意到 $\alpha' G\beta$ 是一个数,G 是实对称矩阵, 故它们都等于自身的转置, 从而 $(\alpha,\beta)=\alpha' G\beta=(\alpha' G\beta)'=\beta' G'\alpha=\beta G\alpha'=(\beta,\alpha)$, 即得对称性; 其次由矩阵乘法的性质可得第一变量的线性; 最后由 G 的正定性可知,$(\alpha,\alpha)=\alpha' G\alpha\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\alpha=0$, 即得正定性. 因此上述二元运算是 $\mathbb{R}^n$ 上的内积, 称为由正定实对称矩阵 G 定义的内积. 当 $G=I_n$ 时, 上述内积称为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积.

(2) 类似于 (1) 的证明可得. 当 $G = I_n$ 时, 上述内积称为 $\mathbb{R}_n$ 上的标准内积.

(3) 首先注意到 $\overline{H}' = H$, 故 $\overline{(\alpha,\beta)} = \overline{\alpha' H\overline{\beta}} = (\alpha' H\overline{\beta})' = \beta'\overline{H}'\overline{\alpha} = \beta' H\overline{\alpha} = (\beta,\alpha)$, 即得共轭对称性; 其次由矩阵乘法的性质可得第一变量的线性; 最后由 H 的正定性可知,$(\alpha,\alpha) = \alpha' H\overline{\alpha} \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$, 即得正定性. 因此上述二元运算是 $\mathbb{C}^n$ 上的内积, 称为由正定 Hermite 矩阵 H 定义的内积. 当 $H = I_n$ 时, 上述内积称为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准内积.

(4) 类似于 (3) 的证明可得. 当 $H = I_n$ 时, 上述内积称为 $\mathbb{C}_n$ 上的标准内积.

(5) 对称性显然成立; 由积分运算的线性可得第一变量的线性; 由连续函数的性质可得正定性, 因此上述二元运算是 $C[a,b]$ 上的内积.

(6) 容易验证对称性、第一变量的线性和正定性都成立.

(7) 由求迹运算的对称性、线性和正定性即得上述二元运算的对称性、线性和正定性, 因此它是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的内积.

(8) 证明是类似的. 这两种由矩阵的迹定义的内积称为矩阵空间上的 Frobenius 内积. □

定义 0.4 (范数)

设 V 是实或复的内积空间,α 是 V 中的向量, 定义 α 的**长度**（或**范数**）为

$$\|\alpha\| = (\alpha,\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

即实数 (α,α) 的算术平方根. ♣

注 注意由定义 0.1和定义 0.2中的规则 (4) 可知,(α,α) 总是非负实数. 从长度的定义知,$\|\alpha\| = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$. 当 $V = \mathbb{R}^n$ 且内积为标准内积时, 若 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

定义 0.5 (两个向量的距离)

定义内积空间中两个向量的距离. 设 $\alpha, \beta \in V$, 定义 α 与 β 的**距离**为

$$d(\alpha,\beta) = \|\alpha - \beta\|.$$

显然 $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$. ♣

定理 0.1 (范数的基本性质)

设 V 是实或复的内积空间,$\alpha,\beta \in V$,c 是任一常数（实数或复数）, 则

(1) $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$;

(2)(Cauchy − Schwarz不等式) $|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$;

(3)(三角不等式) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$. ♡

证明

(1) $\|c\alpha\|^2 = (c\alpha, c\alpha) = c\overline{c}(\alpha,\alpha) = |c|^2\|\alpha\|^2$, 故 $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$.

(2) 若 $\alpha = 0$, 则 $(0,\beta) = (0+0,\beta) = 2(0,\beta)$, 故 $(0,\beta) = 0$, 因此 (2) 成立. 若 $\alpha \neq 0$, 令

$$v = \beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha,$$

则 $(v,\alpha) = 0$, 且

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v\|^2 &= \left(\beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha, \beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\right) \\ &= (\beta,\beta) - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}(\alpha,\beta) \\ &= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{\|\alpha\|^2}, \end{aligned}$$

由此即可得 (2).

(3) 我们有

$$
\begin{aligned}
\|\alpha+\beta\|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\
&= \|\alpha\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + \|\beta\|^2 \\
&= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + \overline{(\alpha, \beta)}.
\end{aligned}
$$

由 (2) 得 $|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|, |\overline{(\alpha,\beta)}| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$, 故 $\|\alpha+\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\| = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$.

□

定义 0.6 (向量的夹角)

当 V 是实内积空间时, 定义非零向量 α, β 的夹角 θ 之余弦为

$$
\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}. \tag{1}
$$

当 V 是复内积空间时, 定义非零向量 α, β 的夹角 θ 之余弦为

$$
\cos\theta = \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|}.
$$

内积空间中两个向量 α, β 若适合 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β **垂直**或**正交**, 我们用记号 $\alpha \perp \beta$ 来表示. 显然, 我们有以下结论:

1. 零向量和任何向量都正交;
2. 若 α 与 β 正交, 则 β 也与 α 正交;
3. 两个非零向量 α, β 正交时夹角为 $90°$.

♣

注 (1)式中要使 θ 有意义, 必须保证 $|\cos\theta| \leq 1$, 而这就是范数的基本性质中的 (2). 因此上述定义的 θ 都是良定义的.

推论 0.1

1. (勾股定理) 在范数的基本性质 (3)的证明中我们可看出: 若 α 与 β 正交, 则 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0$, 因此
$$
\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.
$$
上式通常称为勾股定理, 它是平面几何中勾股定理的推广.
2. (Cauchy 不等式) 设 V 是 n 维实行向量空间, 内积取标准内积, 从范数的基本性质 (2)立即可得到下列 Cauchy 不等式:
$$
(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).
$$
3. (Schwarz 不等式) 设 V 是由 $[a, b]$ 区间上连续函数全体构成的实线性空间, 内积如例题 0.1(1), 则从范数的基本性质 (2)可得下列 Schwarz 不等式:
$$
\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t.
$$

♡