数学分析和高等代数杂题

数学分析、高等代数习题

作者: 邹文杰
组织: 无
时间:2024/10/25
版本:ElegantBook-4.5
自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊,闲看庭前花开花落;
去留无意,漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 数学分析习题

引理 1.1 (Riemann 引理)

若 $f \in R[a,b]$,g 以 T 为周期且在 $[0,T]$ 上可积, 则有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\,g(px)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.1}$$

♡

定理 1.1 (积分第一中值定理的推广)

若 $f,g \in R[a,b]$, 其中 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \tag{1.2}$$

♡

命题 1.1

若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则存在非负常数 a 和 b, 使得成立 $|f(x)| \leqslant a|x|+b$.

♠

命题 1.2

函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对任何满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ 的 $\{x_n\}\subset I$ 和 $\{y_n\}\subset I$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

♠

例题 1.1 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x\geqslant 0$, 定义 $F(x)=\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt$.

(1) 若 $\alpha\in(-1,0)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 证明:$F$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha\in(0,1)$,f 以 $T>0$ 为周期,$\int_0^3 f(t)\,dt=2022$. 证明:F 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

笔记 本题 (1) 中的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 可以削弱为 $\exists M>0, |f(x)|\leqslant M, x\in[0,+\infty)$.

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 所以 $\exists M>0, |f(x)|\leqslant M, x\in[0,+\infty)$.

取 $\delta=\left[\frac{(\alpha+1)\varepsilon}{3M}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$, 任取 $y>x\geqslant 0$, 且 $|y-x|<\delta$ 有

$$
\begin{aligned}
|F(y)-F(x)| &= \left|\int_0^y t^\alpha f(t+y)\,dt-\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt\right|\\
&= \left|\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,dt-\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|\\
&\leqslant \left|\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,dt-\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt+\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|\\
&\leqslant \left|\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,dt-\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|+\left|\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|\\
&\leqslant M\int_y^{2y}|(t-y)^\alpha-(t-x)^\alpha|dt+\left|\int_{2x}^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_x^{y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|\\
&\leqslant M\int_y^{2y}[(t-y)^\alpha-(t-x)^\alpha]dt+M\left|\int_{2x}^{2y}(t-x)^\alpha dt\right|+M\left|\int_x^{y}(t-x)^\alpha dt\right|\\
&\leqslant M\int_y^{2y}[(t-y)^\alpha-(t-x)^\alpha]dt+M\int_x^{2y-x}t^\alpha dt+M\int_0^{y-x}t^\alpha dt\\
&= M\left[\int_y^{2y}[(t-y)^\alpha-(t-x)^\alpha]dt+\int_x^{2y-x}t^\alpha dt+\int_0^{y-x}t^\alpha dt\right]\\
&= M\left[\frac{y^{\alpha+1}-(2y-x)^{\alpha+1}+(y-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\int_x^{2y-x}t^\alpha dt+\int_0^{y-x}t^\alpha dt\right]\\
&= M\left[\int_0^{y-x}t^\alpha dt-\int_y^{2y-x}t^\alpha dt+\int_x^{2y-x}t^\alpha dt+\int_0^{y-x}t^\alpha dt\right]\\
&= M\left[2\int_0^{y-x}t^\alpha dt+\int_x^{y}t^\alpha dt\right]\\
&= M\left[2\int_0^{y-x}t^\alpha dt+\int_0^{y-x}(t-x)^\alpha dt\right]\\
&= \frac{M}{\alpha+1}\left[2(y-x)^{\alpha+1}+(y-2x)^{\alpha+1}\right]\\
&\leqslant \frac{3M}{\alpha+1}(y-x)^{\alpha+1}<\frac{3M}{\alpha+1}\delta^{\alpha+1}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

因此,F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 假设 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 那么存在 $a,b>0$, 使得 $F(x)<a|x|+b$.(见命题1.1)

从而 $\left|\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right|<\frac{a|x|+b}{|x|^{\alpha+1}}$, 进而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}=0$.

于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}&=\frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt}{x^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{换元}}\frac{\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt}{x^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{换元}}\frac{\int_1^2 x^{\alpha+1}(t-1)^\alpha f(tx)\,dt}{x^{\alpha+1}}\\
&\xlongequal{\text{黎曼定理1.1}}\int_1^2(t-1)^\alpha f(tx)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dt\int_1^2(t-1)^\alpha dt=0
\end{aligned}
$$

再结合 $\int_1^2(t-1)^\alpha dt>0$, 知 $\int_0^T f(x)dt=0$.

现在有

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x t^{\alpha}f(t+x)dt=\int_0^x t^{\alpha}d\left[\int_0^{x+t}f(y)\,dy\right]\\&\xlongequal{\text{分部积分}}x^{\alpha}\int_0^{2x}f(y)\,dy-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}\left[\int_0^{x+t}f(y)\,dy\right]dt\\&=x^{\alpha}\int_0^{2x}f(y)\,dy-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}F(x+t)dt\end{aligned}$$

设 $G(x)=\int_0^x f(x)dt$, 则由 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积知, $G\in C[0,+\infty)$. 又由 $\int_0^T f(x)dt=0$, 得

$$G(x+T)-G(x)=\int_0^x f(x+T)dt-\int_0^x f(x)dt=\int_x^{x+T}f(x)dt=\int_0^T f(x)dt=0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以 $G(x)$ 有界.

又 $\alpha-1\in(-1,0)$, 故由 (1) 可得,$-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}F(x+t)dt$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

下面证明 $x^{\alpha}\int_0^{2x}f(y)\,dy$ 不一致连续.

由于 $G(2x)$ 在 $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ 上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记 $M=\max\limits_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]}G(2x)$, 则存在 $x_2\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, 使得 $M=G(2x_2)\geqslant G(2x),x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$.

又因为 $G(3)=\int_0^3 f(t)\,dt=2022$, 且 $G(2x)$ 以 $\frac{T}{2}$ 为周期, 所以存在 $x_1\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, 使得 $G(2x_1)=G(3)>0$.

因此,$M=G(2x_2)\geqslant G(2x_1)=G(3)=\int_0^3 f(t)\,dt>0$.

构造数集 $E=\left\{x'\in\left[0,\frac{T}{2}\right]\mid G(2x')=M\right\}$, 由 $x_2\in E$ 知, $E\neq\varnothing$. 又因为 E 有界, 所以由确界存在定理知,E 必有上确界, 取 $x_0=supE$.

假设 $x_0\notin E$, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}|G(2x_0)-M|$, 则 $\varepsilon_0>0$, 否则 $x_0\in E$ 矛盾.

从而 $\forall\delta'>0,\exists x_{\delta'}\in E$, 使得 $x_0-\delta'<x_{\delta'}<x_0$, 都有 $\left|G(2x_0)-G\left(2x'_{\delta'}\right)\right|\geqslant\varepsilon_0$.

这与 G(2x) 在闭区间 $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ 上连续, 进而一致连续矛盾. 故 $x_0\in E$.

任取 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}-x_0\right)\right)$, 则 $G(2x_0+\delta)<M=G(2x_0)$, 否则与 $x_0=supE$ 矛盾.

进而 $\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\delta}f(y)\,dy\right|=|G(2x_0+\delta)-G(2x_0)|>0$.

从而当 $n>\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ 时, 由积分中值定理, 得

存在 $\xi_n\in\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得

$$\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}f(y)\,dy\right|=\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}|f(\xi_n)|>0\tag{1.3}$$

又因为 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以 f 在 $\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ 上有界.

于是存在 $K,L>0$, 使得

$$K\leqslant|f(\xi_n)|\leqslant L\tag{1.4}$$

取数列 $\{x_n\}$ 、$\{y_n\}$, 其中 $x_n=x_0+n\frac{T}{2},y_n=x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}},n\in\mathbb{N}_+$. 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)=0$.

由拉格朗日中值定理, 得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,

存在 $\xi_n\in\left(x_0+n\frac{T}{2},x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得 $\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}=\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\xi_n}^{\alpha-1}$

从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\xi_n{}^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令 $n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\xi_n{}^{\alpha-1}=0.$

于是存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 有

$$\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0}f(y)\,dy}\tag{1.5}$$

现在, 当 $n>\max\left\{N,\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right\}$ 时, 结合(1.3)(1.4)(1.5), 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|x_n{}^{\alpha}\int_0^{2x_n}f(y)\,dy-y_n{}^{\alpha}\int_0^{2y_n}f(y)\,dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy+\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right]\right|\\
=&\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|\\
\geqslant&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}f(y)\,dy\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2x_0}f(y)\,dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right|\cdot\left|\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}f(\xi_n)\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2x_0}f(y)\,dy\right|\\
\geqslant&\,2\left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha}|f(\xi_n)|\cdot n^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon\\
\geqslant&\,2\left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha}K\cdot n^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon
\end{aligned}$$

令$n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n{}^{\alpha}\int_0^{2x_n}f(y)\,dy-y_n{}^{\alpha}\int_0^{2y_n}f(y)\,dy\right)=+\infty$.故$x^{\alpha}\int_0^{2x}f(y)\,dy$在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.
这与 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续矛盾. 因此,F在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

注 最后一步证明非一致连续利用的是函数一致连续的充要条件1.2

例题 1.2 证明:Riemann 函数 $R(x)$ 处处不可导.

证明 因为 $R(x)$ 在有理点处均不连续, 所以 $R(x)$ 在有理数点均不可导.

$\forall x_0\in\mathbb{R}/\mathbb{Q},\forall q\in\mathbb{N}_+,\exists p_q\in\mathbb{Z}$, 使得 $\frac{p_q}{q}<x_0<\frac{p_q+1}{q}$.

取有理数列 r_q,s_q, 其中 $r_q=\frac{p_q}{q},s_q=\frac{p_q+1}{q}$, 则$0<x_0-r_q<\frac{1}{q},0<s_q-x_0<\frac{1}{q}$.从而 $\lim\limits_{q\to+\infty}r_q=\lim\limits_{q\to+\infty}s_q=x_0$.

假设$R(x)$ 在x_0处可导, 则由$Heine$归结原理及导数的定义知

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{R(r_q)-R(x_0)}{r_q-x_0}=\lim_{p\to+\infty}\frac{R(s_q)-R(x_0)}{s_q-x_0}$$

$$\text{即}\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{R(s_q)-R(x_0)}{s_q-x_0}-\frac{R(r_q)-R(x_0)}{r_q-x_0}\right]=0$$

又由$\forall q\in\mathbb{N}_+,r_q<x_0<s_q$得

$$\frac{R\left(s_q\right)-R\left(x_0\right)}{s_q-x_0}=\frac{\frac{1}{q}}{s_q-x_0}>\frac{\frac{1}{q}}{s_q-r_q}=\mathbf{1},\frac{R\left(r_q\right)-R\left(x_0\right)}{r_q-x_0}=\frac{\frac{1}{q}}{r_q-x_0}<\frac{\frac{1}{q}}{r_q-s_q}=-1$$

于是$\forall q\in\mathbb{N}_+$,有

$$\frac{R\left(s_q\right)-R\left(x_0\right)}{s_q-x_0}-\frac{R\left(r_q\right)-R\left(x_0\right)}{r_q-x_0}>1-(-1)=2$$

这与$\lim\limits_{p\to+\infty}\left[\frac{R\left(s_q\right)-R\left(x_0\right)}{s_q-x_0}-\frac{R\left(r_q\right)-R\left(x_0\right)}{r_q-x_0}\right]=0$矛盾.故$R(x)$在任意无理点处均不可导.综上,函数$R(x)$处处不可导.

例题 1.3 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, $\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx$ 收敛.

证明:$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛且 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx\leqslant\frac{\left(\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx\right)^2}{2}$.

证明 不妨设 $f(x)>0,x\in[0,+\infty)$. 否则存在 $x_0\in[0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)=0$. 由 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0 知, $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $f(x)=0$. 从而 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{x_0}f(x)\,dx$, 于是 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛.

由 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx$ 收敛及柯西收敛准则知, $\forall\varepsilon>0,\exists M\geqslant0,s.t.\forall A>4M$, 有 $\int_{\frac{A}{4}}^{A}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx<\varepsilon$

结合 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0 知, 当 $\forall A>4M$ 时, 有

$$0<\sqrt{Af(A)}=\sqrt{f(A)}\int_{\frac{A}{4}}^{A}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\int_{\frac{A}{4}}^{A}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx<\varepsilon$$

由迫敛性知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{xf(x)}=0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{\frac{f(x)}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{xf(x)}=0$, 所以根据比较原则知, $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛.

利用 f 的单调性知:$\forall x\geqslant0$ 有

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx\geqslant\int_0^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\geqslant\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\int_0^{x}1dt=\sqrt{xf(x)}$$

从而

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\sqrt{xf(x)}\cdot\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx\leqslant\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\right)\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\right)d\left(\int_0^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\right)=\frac{\left(\int_0^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\right)^2}{2}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\left(\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt\right)^2}{2}$$

例题 1.4 设可导函数 $f(x)$ 定义域为 R,$F(0)=0$, 并且当 $|f(x)|\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时总是成立

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)|\,|\ln f(x)|$$

证明:$f(x)$ 恒为零.

笔记 一道不常规的函数性态分析题

证明 (反证法) 假设存在一点 $x_0\neq0$, 使得 $f(x_0)\neq0$. 不妨设 $x_0>0$, 且 $f(x_0)>0$. 由 f 的连续性及 $f(0)=0$ 知, 存在 $t_0\in(0,x_0)$, 使得 $\forall x\in(t_0,x_0)$, 有 $f(x)>0$.

构造数集 $E=\{t\in[0,x_0)\mid f(x)>0,x\in(t,x_0)\}$, 又因为 $t_0\in E$, 所以 $E\neq\varnothing$.

从而由确界存在定理知,E 存在下确界, 设 $t_1=infE$, 则 $\forall x\in(t_1,x_0)$, 有 $f(x)>0$ 且 $f(t_1)=0$.

若 $f(t_1)\neq0$, 则当 $f(t_1)>0$ 时, 由 f 的连续性可得, 存在 $t_{\varepsilon_1}<t_1$, 使得 $f(t_{\varepsilon_1})>0$. 与 $t_1=infE$ 矛盾. 当 $f(t_1)<0$ 时, 由 f 的连续性可知, 存在 $t_{\varepsilon_2}>t_1$, 使得 $\forall t\in(t_1,t_{\varepsilon_2}),f(t)<0$. 由 $t_1=infE$ 可得, 存在 $t_1'\in(t_1,t_{\varepsilon_2})$, 使得 $f(t_1')>0$. 这与 $\forall t\in(t_1,t_{\varepsilon_2}),f(t)<0$ 矛盾. 故 $f(t_1)=0$.

根据 f 的连续性, 一定存在 $t_2\in(t_1,x_0)$ 且 $|t_1-t_2|<1$, 使得 $\forall x\in(t_1,t_2),f(x)\in(0,\frac{1}{2})$.

现在我们在开区间 (t_1,t_2) 中考虑问题.

设 $g(x)=\ln f(x)$, 则有

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\lim_{x\to t_1^+}g(x)=-\infty,g(x)\in(-\infty,-\ln 2)$$

根据已知条件, 有

$$|g'(x)|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|<|\ln f(x)|=|g(x)| \tag{1.6}$$

再设 $h(x)=\ln g^2(x)$, 则

$$\lim_{x\to t_1^+}h(x)=+\infty,h'(x)=2\frac{g'(x)}{g(x)}$$

再结合(1.6), 对 $\forall x\in(t_1,t_2)$, 有

$$|h'(x)|=2\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right|<2$$

任取 $x_1\in(t_1,t_2)$, 又由 $\lim_{x\to t_1^+}h(x)=+\infty$ 知, 存在 $x_2\in(t_1,t_2)$, 使得 $h(x_2)-h(x_1)>3$.

但是根据拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi\in(\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\})$, 使得

$$|h(x_2)-h(x_1)|=|h'(\xi)||x_2-x_1|\le|h'(\xi)|\le 2$$

这与 $h(x_2)-h(x_1)>3$ 矛盾. 故 $f(x)$ 恒为零.

例题 1.5 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=1,f(1)=1+e,f''(0)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=1.$$

笔记 考虑微分方程 $y''-2y'+y=1$, 利用欧拉待定指数函数法求解得:$y=(C_1+C_2x)e^x+1$. 从而 $[(y-1)e^{-x}]''=(C_1+C_2x)''=0$. 于是我们构造辅助函数 $g(x)=(f(x)-1)e^{-x}$. 再结合中值定理并利用题目条件就能得到证明.

证明 令 $g(x)=(f(x)-1)e^{-x}$, 则 $g(0)=0,g(1)=1$. 从而由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得

$$g'(\eta)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1.$$

又因为 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}$, 所以 $g'(0)=1$. 因此, 根据 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$g''(\xi)=\frac{f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)-1}{e^\xi}=0.$$

故原结论得到证.

结论 设 $f(x)\in D^n[a,b]$, 且已知 $f(x)$ 在某些特殊点处的函数值及导数值. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\varphi\left(C,\xi,f(\xi),f'(\xi),\cdots,f^{(n)}(\xi)\right)=0,\text{其中}C\text{为常数}.$$

解决这类问题的常用方法是: 先通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数, 再结合中值定理并利用题目已知 $f(x)$ 在某些特殊点处的函数值及导数值就能得到证明.

通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数的步骤:

Step1: 考虑微分方程 $\varphi\left(C,x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$, 利用求解常微分方程的方法求解 $\varphi\left(C,x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ 的通解. 解得:$y=f(x,C_1,\cdots,C_k)$, 其中 $C_1,\cdots,C_k$ 均为任意常数.

Step2: 从上述通解 $y=f(x,C_1,\cdots,C_k)$ 中, 通过移项化简找出 $g(x)$ 使得 $g(x)=h(x,C_1,\cdots,C_k)$, 并且 $g^{(n)}(x)=h^{(n)}h(x,C_1,\cdots,C_k)=0$. (一般题目中都可以得到 $h(x,C_1,\cdots,C_k)\in P_{n-1}[x]$, 从而 h 自然满足 $h^n(x,C_1,\cdots,C_k)=0$).

Step3: 上述得到的 $g(x)$ 就是我们需要的辅助函数.

注 这种通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数的方法基本上都能解决这类问题. 在这类问题中, 难题的难点一般就在于如何解出微分方程.

例题 1.6 f 是 $[0,1]$ 上非负递增连续函数对 $0<\alpha<\beta<1$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)dx\ge\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

证明 令 $\chi_{[\alpha,1]}(x)=\begin{cases}1,x\in[\alpha,\beta]\\0,x\in(\beta,1]\end{cases}$，则 $\chi_{[\alpha,1]}(x)$ 在 $[\alpha,1]$ 单调递减. 由Chebeshev 不等式积分形式可得

$$(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{1}f(x)dx=\int_{\alpha}^{1}f(x)dx\int_{\alpha}^{1}\chi_{[\alpha,1]}(x)\,dx\geqslant(1-\alpha)\int_{\alpha}^{1}f(x)\,\chi_{[\alpha,1]}(x)\,dx=(1-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx.$$

从而

$$\int_{\alpha}^{1}f(x)dx\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx.$$

于是

$$\int_{0}^{1}f(x)dx\geqslant\int_{\alpha}^{1}f(x)dx\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx.$$

注 实际上,$\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 已经是本题不等式的最佳系数. 证明如下:

令 $f_n(x)=\begin{cases}1,x\in\left[a+\frac{1}{n},1\right]\\n(x-a),x\in\left(a,a+\frac{1}{n}\right)\\0,x\in[0,a]\end{cases}$，则显然 $f_n(x)\in C[0,1]$.

从而

$$\int_{0}^{1}f_n(x)\,dx=\frac{1}{2n}+\left(1-\alpha-\frac{1}{n}\right)\to1-\alpha\ (n\to+\infty)\,,$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}f_n(x)\,dx=\frac{1}{2n}+\left(\beta-\alpha-\frac{1}{n}\right)\to\beta-\alpha\ (n\to+\infty)\,.$$

于是当 n 充分大时, 取 $f(x)=f_n(x)$, 则此时不等式的等号成立.

故不等式系数 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不可改进.

例题 1.7 证明:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{x}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

笔记 证法一思路分析: 我们首先想到利用 *Weierstrass* 判别进行放缩证明, 运用常规的放缩想法, 得到初步放缩的结果

$$\left|\int_{0}^{x}t^n\sin(\pi t)\,dt\right|=\int_{0}^{x}t^n\sin(\pi t)\,dt\leqslant\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt\leqslant\int_{0}^{1}t^ndt=\frac{1}{n+1}.$$

对 $\forall t\in[0,1],n\in\mathbb{N}$, 固定 t,n. 有 $\int_{0}^{x}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 关于 x 单调递增, 故 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 是 $\int_{0}^{x}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 的上确界, 因此第一个不等式已经放缩到最精细的程度. 根据 *Weierstrass* 判别法可知, 我们只需要证明第一个不等号右边式子作为通项的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 收敛即可. 而我们知道级数的敛散性是由其通项的阶决定的, 于是原命题可转化为估计 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 的阶. 由上述初步放缩得到的不等式可知 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 一定大于等于一阶, 但这样的初步放缩并不能直接由比较判别法得到原级数收敛. 因此我们需要更加精确的估计 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 的阶.

现在我们来估计 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 的阶. (注意这里并不是严谨的证明! 只是 *laplace* 估阶的大致思路框架.)

对这类积分估阶我们想到Laplace 估阶方法. 取充分小的 δ_1,δ_2(注意: 在严谨的证明中, 这里的 δ_1,δ_2 是待定的, 需要我们根据后续的放缩、*Taylor* 公式以及其他处理去确定其存在性), 然后对 $\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt$ 的积分区间进行分段估阶得到

$$\int_{0}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt=\int_{0}^{\delta_1}t^n\sin(\pi t)\,dt+\int_{\delta_1}^{1-\delta_2}t^n\sin(\pi t)\,dt+\int_{1-\delta_2}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt=\int_{1-\delta_2}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt+O\left(\int_{1-\delta_2}^{1}t^n\sin(\pi t)\,dt\right).\tag{1.7}$$

其中第二个等号是因为: 从直觉上来说, 我们可以认为

$$\int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t)\, dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t)\, dt + \int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt \approx \int_0^{\delta_1} 0^n \cdot 0 dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} c^n \cdot k dt + \int_{1-\delta_2}^{1} 1^n \cdot 0 dt.$$

其中 $c, k \in (0,1)$. 而 $0^n \cdot 0 < c^n \cdot k < 1^n \cdot 0$.

于是我们根据直觉断言 $\int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t)\, dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t)\, dt = O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right)$.

从而问题转化为估计 $\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶. 因为被积函数只有 $\sin(\pi t)$ 不是幂函数, 所以我们只需要处理 $\sin(\pi t)$ 即可 (即用幂函数估计 $\sin(\pi t)$ 的阶, 自然联想到 *Taylor* 公式). 又因为 $\sin(\pi t)$ 可以在 $t = 1$ 附近 *Taylor* 展开 (根据题意可知展开一项即可), 所以得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt &= \int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t)\, dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t)\, dt + \int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt \\
&= \int_{\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right) \\
&= \int_{\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right) \\
&= \int_{1-\delta_2}^{1} t^n \left[\pi(1-t) + o(1-t)\right] dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right) \\
&= \int_{1-\delta_2}^{1} t^n \pi(1-t)\, dt + \int_{1-\delta_2}^{1} o\left(t^n(1-t)\right) dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right) \\
&= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) + O\left(\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt\right) \\
&= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) + O\left(\frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right)\right) \\
&= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + O\left(\frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) \sim \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

虽然通过上述 *Laplace* 估阶方法能够准确的得到 $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶. 但是具体过程较为繁琐. 于是我们思考能不能通过一种简单的方式, 直接估计出 $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶. 接下来我们尝试找到一种更加简便的方式去估计 $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶.

通过式1.7的讨论我们知道, $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶是由 $\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶决定的. 因此无论我们怎么估阶都不能避开估计 $\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶, 故要想简化估阶只能不对原有积分进行分段估计. 而我们知道估计这个积分阶的关键就是估计 $\int_{1-\delta_2}^{1} t^n \sin(\pi t)\, dt$ 的阶, 原积分的其他部分忽略后并不影响积分的阶. 又因为估计这个积分的阶我们只需要处理被积分函数中的 $\sin(\pi t)$, 于是我们就想到 *Taylor* 公式用幂函数去逼近 $\sin(\pi t)$, 从而将 $\sin(\pi t)$ 在 $t = 1$ 处 *Taylor* 展开得到 $\sin(\pi t) = \pi(1-t) + o(1-t)(t \to 1)$. 但这个式子只在 $(1-\delta_2, 1)$ 上满足, 不能保证在 $(0,1)$ 上都满足, 而在不同点处 *Taylor* 展开后再积分得到的函数的阶是不同的, 但是我们知道我们只需要估计原积分在 $t = 1$ 附近的阶即可 (因为只有在 $(1-\delta_2, 1)$ 上的积分才是原积分的主体部分, 在其他积分区间上的积分全都是余项部分). 因此我们只需要考虑 $\sin(\pi t)$ 在 $t = 1$ 处的 *Taylor* 展开就可以了. 只要再找到一个合理的放缩、构造等方法将余项部分合并进主体部分当中或直接变成常数就能实现简化解答步骤的目的.

对于本题我们有如下方式简化估阶过程: 首先我们根据这个 *Taylor* 展开式, 构造函数 $g(x) = t^n(1-t)\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t} = \left(t^n - t^{n+1}\right) \cdot \dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$. 这样就可以将 $\sin(\pi t)$ 的主体部分给暴露出来, 然后将 $\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$ 放缩成一个常数. 又由于 $g(x)$ 只去掉原被积函数在 $t = 1$ 处的函数值, 所以 $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt = \int_0^1 \left(t^n - t^{n+1}\right) \cdot \dfrac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$. 自然原积分的阶也与

$g(x)$ 相同. 于是问题转化为了估计 $g(x)$ 的阶. 而 $g(x)$ 的阶通过放缩很容易得到, 具体证明见下述证法一.

注 $\sin(\pi t)$ 在 $t=1$ 处的 *Taylor* 展开式系数可通过求极限 (直接用 *Taylor* 公式求导比较麻烦) 得到, 设 $\sin(\pi t)=a(1-t)+o(1-t)$, 则由

$$\lim_{t\to1}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\xlongequal{L'Hoptial's\ rule}\lim_{t\to1}\frac{\pi\cos(\pi t)}{-1}=\pi.$$

可得 $a=\pi$. 于是 $\sin(\pi t)=\pi(1-t)+o(1-t)$.

证明 证法一: 注意到

$$\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\,dt=\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)\cdot\frac{\sin(\pi t)}{1-t}dt\leqslant M\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt=M\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{M}{(n+1)(n+2)}$$

其中 $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$.

从而对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$\left|\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,dt\right|=\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,dt\leqslant\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\,dt\leqslant\frac{M}{(n+1)(n+2)}.$$

又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 所以由 *Weierstrass* 判别可知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,dt$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

注 能取 $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$ 是因为: $\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}\in C[0,1)$, 并且

$$\lim_{t\to1}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\xlongequal{L'Hopital's\ rule}\lim_{t\to1}\left[-\pi\cos(\pi t)\right]=\pi.$$

于是由推广的连续函数最大、最小值定理可知, $\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$ 在 $[0,1)$ 上有界. 从而存在上界 $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t}$.

注 解决这类问题虽然实际上我们的想法是估阶, 但是为了使解答过程简便, 我们不需要用思路分析里这种从头到尾把那些余项都写出来的方式去估阶.

在解答过程中, 我们只需要在保证不改变阶的前提下, 将那些余项全部放缩成常数、或通过放缩将其合并到主体部分中、或通过构造一个与原函数同阶但更易估阶的函数再将原函数放缩成这个函数 (本题采取的就是这个方式) 等其他技巧. 即我们可以将不影响阶的部分 (就是那些比主体部分还要高阶的部分和常数项) 全部放缩掉, 最终放缩得到的式子中只含有主体部分. 然后我们只需要估计放缩得到的式子的阶就可以通过迫敛性得到原函数的阶.(这里估计放缩得到的式子的阶的方式与我们在思路分析中估计主体部分的阶的方法一致).

结论 **简化估阶过程的核心想法就是: 先确定原函数的主体部分 (若原函数的主体部分并不明显就需要利用 *Taylor* 公式将其主体部分彻底暴露出来再进行估阶), 然后通过放缩、构造等方式将余项部分合并进主体部分中或者放缩成常数, 最后估计主体部分的阶即可.**

例题 **1.8** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n^p}.$$

的敛散性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$, 当 $p>1$ 时, 有 $\left|\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}\right|\le\dfrac{1}{n^p}$, 而此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 是绝对收敛的. 故此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 也绝对收敛.

当 $p\le0$ 时, 注意到原级数的通项并不趋于零, 于是此时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 一定发散.

以下设 $p\in(0,1]$, 我们来证明此时级数都是发散的.

对 $\forall N>0$, 任取 $k>\max\{N,10\}$, 则 $[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]>N$, 从而我们有:

$$\sum_{n=1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\frac{\cos(\ln n)}{n^p}\ge\sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\frac{\cos(\ln n)}{n^p}\ge\sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\frac{\cos(\ln n)}{n}\ge\frac{\sqrt2}{2}\sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\frac{1}{n}\ge\frac{\sqrt2}{2}\sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\frac{1}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\frac{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]-[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}=\frac{\sqrt2}{2}\left(1-\frac{[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]}\right)\ge\frac{\sqrt2}{2}\left(1-\frac{e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}}{e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}-1}\right)>\frac12.$$

于是由 $Cauchy$ 收敛准则, 可知此时级数发散.

综上, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 在 $p>1$ 时绝对收敛, 在 $p\leq 0$ 以及 $p\in(0,1]$ 时均发散.

例题 1.9 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{7}\right)^n\right]$ 的敛散性.

笔记 这类问题的核心想法就是考虑共轭式.

证明 注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都存在 $A_n,B_n\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$(3+\sqrt{7})^n=A_n+B_n\sqrt{7},\quad (3-\sqrt{7})^n=A_n-B_n\sqrt{7}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\sin[\pi(3+\sqrt{7})^n]=\sin(\pi A_n+\pi B_n\sqrt{7})=\sin(\pi A_n+\pi B_n\sqrt{7}-2\pi A_n)\\&=-\sin(\pi A_n-\pi B_n\sqrt{7})=-\sin[\pi(3-\sqrt{7})^n].\end{aligned}$$

因此结合 $0<3-\sqrt{7}<1$, 可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin[\pi(3+\sqrt{7})^n]=-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin[\pi(3-\sqrt{7})^n]\sim-\sum_{n=1}^{+\infty}\pi(3-\sqrt{7})^n\text{收敛}.$$

例题 1.10 若数列 na_n 单调, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}na_n\ln n=0.$$

证明 若数列 $\{na_n\}$ 单调递增, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $na_n\geqslant a_1$. 从而 $a_n\geqslant\frac{a_1}{n}$,$\forall n\in\mathbb{N}_+$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{n}$ 发散, 于是由比较判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散. 这与题设矛盾. 故数列 $\{na_n\}$ 单调递减. 又由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛和 $Cauchy$ 收敛准则, 可知 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$, 使得当 $n>m>N$ 时, 都有 $\sum_{k=m}^{n}a_k<\varepsilon$.

因此对 $\forall n>N+3$(充分大的 n), 取 $m=[\sqrt{n}]-1$, 我们都有

$$\begin{aligned}&0\leqslant na_n\ln n<na_n\ln\frac{n}{\sqrt{n}}<na_n\int_m^n\frac{1}{x}dx<na_n\ln\frac{n}{m}\\&=na_n\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\leqslant na_n\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx\\&=na_n\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=m}^{n}ka_k\cdot\frac{1}{k}=\sum_{k=m}^{n}a_k<\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon\to0^+$, 即得 $\lim_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

例题 1.11 证明:

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx=\pi\arcsin a,|a|<1.$$

笔记 这题显然用含参积分求导即可, 但多想一想, 如果题目没告诉你参数 a, 直接让你计算具体对应的定积分, 你该如何思考, 如何引入参数?

证明

$$\begin{aligned}I'(a)&=\frac{d}{da}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal[\text{万能公式换元}]{\text{令} t=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-a^2\cdot\frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1-a^2}dt=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^{+\infty}\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}
$$

又因为 $I(0)=0$, 所以 $I(a)=\int_0^a I'(a)da=\int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}da=\pi\arcsin a$.

例题 1.12 设 $f\in C^1[0,1]$, 使得 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ 且有

$$f'(x)+f(x)\tan x=\int_0^x f(y)\,dy, \forall x\in[0,1].$$

证明:f 在 $[0,1]$ 上恒为 0.

笔记 核心想法是: 利用在有界闭区间上连续的函数恒为 0 的充要条件: 在有界闭区间上没有正的最大值和负的最小值. 然后假设函数的最值在区间内部取到, 再比较等式两边符号给出矛盾.

证明 记 $F(x)=\int_0^x f(y)dy$, 则 $F\in D^1[0,1]$,$F(0)=F(1)=0$ 并且

$$F''(x)+F'(x)\tan x=F(x), \forall x\in[0,1].$$

因为 $F\in D^1[0,1]$, 所以 $F\in C^1[0,1]$. 从而由连续函数最大、最小值定理, 可知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值和最小值. 若 F 在 $[0,1]$ 取得正的最大值, 最大值点为 a, 则由 $F(0)=F(1)=0$, 可知 $a\in(0,1)$. 并且 $F'(a)=0$,$F''(a)\leqslant 0$. 于是

$$0<F(a)=F''(a)+F'(a)\tan a=F''(a)\leqslant 0.$$

这就是矛盾! 从而 F 在 $[0,1]$ 没有正的最大值. 类似的可以讨论最小值, 得到 F 在 $[0,1]$ 没有负的最小值. 因此 $0\leqslant F(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,1]$. 即 $F(x)\equiv 0,\forall x\in[0,1]$. 故 f 在 $[0,1]$ 上恒为 0.

结论 若 $f\in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上恒为 0 的充要条件是:f 在 $[a,b]$ 上没有正的最大值和负的最小值 (只有非正的最大值和非负的最小值).

证明 必要性是显然的. 我们只证明充分性.

已知 $f\in C[a,b]$, 则根据连续函数的最大、最小值定理, 可知 f 在 $[a,b]$ 上存在最大值和最小值. 不妨设最大值点为 M, 最小值点为 m, 则 $M,m\in[a,b]$. 又因为 f 在 $[a,b]$ 上没有正的最大值和负的最小值, 所以

$$0\leq f(m)\leq f(x)\leq f(M)\leq 0, \forall x\in[a,b].$$

故 f 在 $[a,b]$ 上恒为 0.

引理 1.2 (Fekete 次可加性引理)

设非负数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n,m 有

$$a_{m+n}\leq a_m+a_n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

证明 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 固定 k, 则由带余除法可知, 存在 $q,r\in\mathbb{N}_+$, 使得 $n=kq+r$。从而由条件可得

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{kq+r}}{n}\leqslant\frac{a_{kq}+a_r}{n}\leqslant\frac{a_{k(q-1)}+a_k}{kq+r}+\frac{a_r}{n}\leqslant\cdots\leqslant\frac{qa_k}{kq+r}+\frac{a_r}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}+\frac{a_r}{n}, \forall k\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}<\infty, \forall k\in\mathbb{N}_+. \tag{1.8}$$

再令 $k \to \infty$ 并取下极限可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_k}{k} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n}.$$

故 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 收敛。注意到 $\{a_n\}$ 非负，则 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 一定有下界 0，从而一定存在下确界 $\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$. 于是我们有

$$\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} \leqslant \frac{a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令 $n \to \infty$ 并取上极限，再结合 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 收敛和(1.8)式可得

$$\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_k}{k}, \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

再对 k 取下确界即得

$$\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf\left\{\frac{a_k}{k}\right\} = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$。

推论 1.1

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负，且对任意的 $x, y \geq 0$，有 $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在且有限.

注 $[x]$：表示 x 的整数部分；$\{x\}$：表示 x 的小数部分.

证明 由条件可知，对 $\forall n, m \in \mathbb{N}$，都有 $f(n+m) \leq f(n) + f(m)$. 从而由Fekete 次可加性引理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \inf\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}.$$

对 $\forall x > 1$，都存在 $n = [x]$，使得 $x = n + \{x\}$. 由条件可知

$$f(x) = f(n+\{x\}) \leqslant f(n) + f(\{x\}),$$
$$f(n+1) = f([x]+1) = f(x+1-\{x\}) \leqslant f(x) + f(1-\{x\}) \Rightarrow f(x) \geqslant f(n+1) - f(1-\{x\}).$$

从而对 $\forall x > 1, n = [x]$，我们都有

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(n)+f(\{x\})}{x} = \frac{f(n)}{n+\{x\}} + \frac{f(\{x\})}{x} = \frac{f(n)}{n} + \frac{f(\{x\})}{x},$$
$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(n+1)-f(1-\{x\})}{x} = \frac{f(n+1)}{n+\{x\}} + \frac{f(1-\{x\})}{x} \geqslant \frac{f(n+1)}{n+1} + \frac{f(1-\{x\})}{x}.$$

即

$$\frac{f(n+1)}{n+1} + \frac{f(1-\{x\})}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(n)}{n} + \frac{f(\{x\})}{x}, \forall x > 1, n = [x]. \tag{1.9}$$

又由 $f \in C[0,+\infty), \{x\} \in [0,1]$，因此 $f(\{x\}), f(1-\{x\})$ 都有界. 对(1.9)两边令 $x \to +\infty$，则同时有 $n \to \infty$，再分别取上、下极限得到

$$\inf\left\{\frac{f(n)}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{n+1} \leqslant \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{x} \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)}{x} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \inf\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \inf\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}$.

例题 1.13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微，$f(0) < 0 < f(1)$，且 $f'(x) > 0$，$f''(x) > 0$。

(1) 证明：存在唯一的 $\xi \in (0,1)$，满足 $f(\xi) = 0$。

(2) 记 $x_1 = 1$，$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$。

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}$.

证明

(1) 由条件可知 $f \in C[0,1]$ 其 $f(0) < 0 < f(1)$。从而由连续函数的介值定理可知，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$。又由 $f'(x) > 0$ 可知，f 在 $[0,1]$ 上严格单调递增，于是满足条件的 ξ 是存在且唯一的。

(2) 由条件可知 $f'(x)>0,\forall x\in[0,1]$，从而 f 在 $[0,1]$ 上严格单调递增。注意到 $x_1\in(\xi,1]$，假设 $x_k\in(\xi,1]$，则由 f,f' 严格递增可知

$$0=f(\xi)<f(x_k)\leqslant f(1),\quad f'(\xi)<f'(x_k)\leqslant f'(1).$$

又由 $f''(x)>0,\forall x\in[0,1]$ 可知，f' 在 $[0,1]$ 上严格递增且 f 是在 $[0,1]$ 上的严格下凸函数。从而由可微的下凸函数恒在切线上方可得

$$0=f(\xi)>f'(x_k)(\xi-x_k)+f(x_k).$$

从而 $\frac{f(x_k)}{f'(\xi)}<x_k-\xi$。于是

$$\xi=x_k-(x_k-\xi)<x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k\leqslant 1.$$

故由数学归纳法可知 $x_n\in(\xi,1],\forall n\in\mathbb{N}$。注意到 $x_2=x_1-\frac{f(1)}{f'(1)}<x_1$。假设 $x_n<x_{n-1}$，则由 $x_n\in(\xi,1]$ 及 f 严格递增可得 $f(x_n)>f(\xi)=0$。从而再结合 $f'(x_n)>0$ 可得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<x_n$$

故由数学归纳法可知 $\{x_n\}$ 单调递减。由单调有界定理可知，$\{x_n\}$ 收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则对 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 两边取极限得到

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow f(x)=0$$

再由 (1) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x=\xi$。

(3) 由 (2) 及 $f\in D^2[0,1]$，再利用归结原则和 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\xi}{(x_n-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi^+}\frac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\xi}{(x-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi^+}\frac{(x-\xi)f'(x)-f(x)}{(x-\xi)^2f'(x)}\\&=\frac{1}{f'(\xi)}\lim_{x\to\xi^+}\frac{(x-\xi)f'(x)-f(x)}{(x-\xi)^2}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\frac{1}{f'(\xi)}\lim_{x\to\xi^+}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.\end{aligned}$$

例题 1.14 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n$.

证明 由归结原则及 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\arctan n+\ln\frac{\pi}{2}\right)&=\lim_{n\to\infty}x\left(\ln\arctan x+\ln\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\arctan x+\ln\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(\ln\arctan n+\ln\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\ln\arctan n+\ln\frac{\pi}{2}\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

例题 1.15 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]$.

证明

例题 1.16 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若

$$\lim_{x\to+\infty}[2f(x)+f'(x)]=0,$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

证明 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x}{1+x}=-\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-1.$$

从而 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x}{1+x}+1\right)=0$。于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]&=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left(1-e^{x\ln\frac{x}{1+x}+1}\right)=-\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left(x\ln\frac{x}{1+x}+1\right)\\&=-\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\right]=-\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+x\right]\\&=-\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o\left(1\right)\right)=-\frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

例题 1.17 求极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

证明 由等价无穷小替换与洛必达法则可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\ln\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\cot x-\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-\frac{1}{3}}$.

例题 1.18 设 $a>0,b>0$, 且

$$a_1=a,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right),n\in\mathbb{N}_+$$

. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并计算 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

证明 注意到 $a_1=a>0$，假设 $a_k>0$，则

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{b}{a_k}\right)>0.$$

故由数学归纳法可知 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$。从而

$$\begin{aligned}\left|a_{n+1}-\sqrt{b}\right|&=\left|\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right)-\sqrt{b}\right|=\left|\frac{a_n^2-2\sqrt{b}a_n+b}{2a_n}\right|\\&=\left|\frac{a_n-\sqrt{b}}{2a_n}\right|\left|a_n-\sqrt{b}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{b}}{a_n}\right|\left|a_n-\sqrt{b}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left|a_n-\sqrt{b}\right|,\forall n\in\mathbb{N}_+.\end{aligned}$$

于是

$$\left|a_n-\sqrt{b}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\sqrt{b}\right|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\left|a_1-\sqrt{b}\right|,\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$，得 $\lim_{n\to\infty}\left|a_n-\sqrt{b}\right|=0$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{b}$.

例题 1.19 设 $f:(a,b)\to(a,b)$ 满足对任意的 $x,y\in(a,b)$, 当 $x\neq y$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 任取 $x_1\in(a,b)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$, 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

注

(1) 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A$, $\lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\xi+A$ 的原因: 记 $X=\xi-A,Y=\xi+A$，假设存在 $k_0\in\mathbb{N}$，对 $\forall n>k_0$，有

$$x_n\notin(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})x_{n+1}\notin(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0})\tag{1.10}$$

因为 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 X 和 Y,所以对上述 ε,$\{x_n\}$ 中都有无穷多项落在 $(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\cup(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0})$ 内。从而存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，有

$$x_n\in(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\cup(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0})\tag{1.11}$$

于是由(1.10)(1.11)式可得，当 $n > \max\{N, k_0\}$ 时，我们有

$$x_n \in (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}) x_{n+1} \in (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0})$$

因此若 $x_n \in (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}), \forall n > \max\{N, k_0\}$，则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0})$ 内，这与 X 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾。若 $x_{n+1} \in (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}), \forall n > \max\{N, k_0\}$，则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0})$ 内，这与 Y 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾。故假设不成立，从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$，都存在 $n_k > k$，使得

$$x_{n_k} \in (X - \frac{1}{k}, X + \frac{1}{k}) x_{n_k+1} \in (Y - \frac{1}{k}, Y + \frac{1}{k})$$

于是根据 k 的任意性可知 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = X = \xi - A, \lim_{k\to\infty} x_{n_k+1} = Y = \xi + A$。

(2) $\xi - A, \xi + A \in (a, b)$ 的原因：一定存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$x_{n_{k_1}} < \xi, x_{n_{k_2}} > \xi \tag{1.12}$$

否则，对 $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，都有

$$x_{n_{k_1}} \geqslant \xi, \quad x_{n_{k_2}} \leqslant \xi$$

令 $k_1, k_2 \to \infty$，再结合 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi - A, \lim_{k\to\infty} x_{n_k+1} = \xi + A$ 得到

$$\xi - A = \lim_{k_1\to\infty} x_{n_{k_1}} \geqslant \xi > \xi - A, \quad \xi + A = \lim_{k_2\to\infty} x_{n_{k_2}} \leqslant \xi < \xi + A$$

显然矛盾！又因为 $\{|x_n - \xi|\}$ 单调递减趋于 A，所以

$$|x_n - A| \geqslant A, \forall n \in \mathbb{N}$$

从而由 $x_n \in (a, b)$ 及(1.12)式可得

$$A \leqslant |x_{n_{k_1}} - \xi| = \xi - x_{n_{k_1}} < \xi - a \Rightarrow \xi - A > a,$$
$$A \leqslant |x_{n_{k_2}} - \xi| = x_{n_{k_2}} - \xi < b - \xi \Rightarrow \xi + A < b$$

因此 $\xi - A, \xi + A \in (a, b)$。

证明 注意到 $x_1 \in (a, b)$，假设 $x_k \in (a, b)$，则 $x_{k+1} = f(x_k) \in (a, b)$，故由数学归纳法可知 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$。又由条件可知，对 $\forall \varepsilon > 0$，令 $\delta = \varepsilon > 0$，当 $x, y \in (a, b)$ 且 $0 < |x - y| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| < \delta = \varepsilon$$

故 f 在 (a, b) 上一致连续。从而 $f \in C(a, b)$，令 $F(x) = f(x) - x$，则 $F \in C(a, b)$。下面我们对 F 进行分类讨论。

(1) 若 F 在 (a, b) 上不变号，则由 $F \in C(a, b)$ 及命题可知，F 要么恒大于零，要么恒小于零。不妨设 F 在 (a, b) 上恒大于零，即 $f(x) > x, \forall x \in (a, b)$。从而

$$x_{n+1} = f(x_n) > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增。又因为 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$，所以由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 若 F 在 (a, b) 上变号，则由 $F \in C(a, b)$ 及介值定理可得，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \xi$。若存在 $\xi' \in (a, b)$ 且 $\xi' \neq \xi$，使得 $f(\xi') = \xi'$，则由条件可得到

$$|\xi - \xi'| = |f(\xi) - f(\xi')| < |\xi - \xi'|$$

显然矛盾！因此存在唯一的 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \xi$。从而

$$|x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| < |x_n - \xi|, \forall n \in \mathbb{N}$$

于是 $\{|x_n - \xi|\}$ 单调递减且有下界 0，故由单调有界定理可知 $\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| = A \geqslant 0$ 存在。

(i) 当 $A = 0$ 时，则由 $\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| = A = 0$ 可得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$。

(ii) 当 $A > 0$ 时，若 $\{x_n\}$ 收敛，则结论已经成立。若 $\{x_n\}$ 发散，则由 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$ 及聚点定理可知，$\{x_n\}$ 至少有一个聚点。若 $\{x_n\}$ 只有一个聚点，则 $\{x_n\}$ 收敛与假设矛盾！因此 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点。

任取收敛子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = B$，则

$$A = \lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| = |B - \xi|$$

从而 $B = \xi - A$ 或 $\xi + A$。因此 $\{x_n\}$ 最多有两个聚点 $\xi - A$ 和 $\xi + A$。又因为 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点，所以 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 $\xi - A$ 和 $\xi + A$。进而一定存在收敛子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi - A, \lim_{k\to\infty} x_{n_k+1} = \xi + A \text{并且} \xi - A, \xi + A \in (a, b).$$

从而由条件可知

$$x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$$

令 $k \to \infty$，由 $f \in C(a, b)$ 及归结原则可得

$$\xi + A = f(\xi - A)$$

再结合 $\xi = f(\xi), \xi - A, \xi + A \in (a, b)$ 及条件可得

$$A = |\xi - (\xi + A)| = |f(\xi) - f(\xi - A)| < |\xi - (\xi - A)| = A$$

显然矛盾！故 $A > 0$ 不成立，于是 $A = 0$。再由 (1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$，即 $\{x_n\}$ 收敛，与假设 $\{x_n\}$ 发散矛盾！

例题 1.20 设

$$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + 1}, x_3 = \sqrt{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 1}}, x_4 = \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{2} + 1}}}, \cdots, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x_n}, \cdots$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求出极限值。

证明 由条件可得

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

注意到 $x_1 \in [1, 2)$，假设 $x_k \in [1, 2)$，其中 $k \in \mathbb{N}$，则

$$1 \leqslant \sqrt{\frac{1}{k+1} + 1} \leqslant x_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{k+1} + x_k} < \sqrt{1+2} < 2.$$

故由数学归纳法可知，$x_n \in [1, 2)$，$\forall n \in \mathbb{N}$。于是可设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = L \in [1, 2], \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l \in [1, 2],$$

又由 $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ 可得

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

两边同时取上、下极限得到

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = L \Rightarrow L = 0 \text{ 或} 1,$$

$$l^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l \Rightarrow l = 0 \text{ 或} 1.$$

再结合 $l, L \in [1, 2]$ 可得 $L = l = 1$。故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

例题 1.21 已知数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 0, a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2}, a_{2m+1} = \frac{1}{2} + a_{2m}$, 求 $\{a_n\}$ 的上下极限。

证明 由条件可得

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2} + a_{2m} = \frac{1}{2} + \frac{a_{2m-1}}{2}, \quad a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + a_{2m-2}\right), \forall m \in \mathbb{N}.$$

即

$$a_{2m+1}-\frac{1}{2}a_{2m-1}=\frac{1}{2},\quad a_{2m}-\frac{1}{2}a_{2m-2}=\frac{1}{4},\forall m\in\mathbb{N}.$$

注意到 $a_1=0,a_2=0$，于是对 $\forall m\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}a_{2m+1}&=\left(a_{2m+1}-\frac{1}{2}a_{2m-1}\right)+\frac{1}{2}\left(a_{2m-1}-\frac{1}{2}a_{2m-3}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}}\left(a_3-\frac{1}{2}a_1\right)+\frac{1}{2^{m-1}}a_1\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{m-k}}\left(a_{2k+1}-\frac{1}{2}a_{2k-1}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}a_1=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{m-k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}\to1,\quad m\to\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2m}&=\left(a_{2m}-\frac{1}{2}a_{2m-2}\right)+\frac{1}{2}\left(a_{2m-2}-\frac{1}{2}a_{2m-4}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}}\left(a_4-\frac{1}{2}a_2\right)+\frac{1}{2^{m-1}}a_2\\&=\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2^{m-k}}\left(a_{2k}-\frac{1}{2}a_{2k-2}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}a_2=\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2^{m-k+2}}\\&=\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{m+2}}}{1-\frac{1}{2}}\to\frac{1}{2},\quad m\to\infty.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m+1}=1$. 故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\frac{1}{2}$.

注 由 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m+1}=1$ 可知，数列 $\{a_n\}$ 的任何由奇数项组成的子列都收敛到 1，任何由偶数项组成的子列都收敛到 $\frac{1}{2}$。设收敛子列 $\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$，则

（i）若 $\{a_{n_k}\}$ 中只含有无穷多奇数项，不含无穷多偶数项，那么一定存在 $K\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall k>K$，都存在 $m\in\mathbb{N}$，使得 $n_k=2m+1$，即 $a_{n_k}=a_{2m+1}$。从而 $a_{n_k}=a_{2m+1}\to1,k\to\infty$。

（ii）若 $\{a_{n_k}\}$ 中只含有无穷多偶数项，不含无穷多奇数项，那么同理可得 $a_{n_k}\to\frac{1}{2},k\to\infty$。

（iii）若 $\{a_{n_k}\}$ 中既含有无穷多偶数项，又含有无穷多奇数项，那么一定存在奇偶子列 $\{a_{2m+1}\},\{a_{2m}\}\subset\{a_{n_k}\}$，但是 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m}=\frac{1}{2}\neq\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m+1}=1$。因此 $\{a_{n_k}\}$ 发散，这与 $\{a_{n_k}\}$ 收敛矛盾！

故 $\{a_n\}$ 的任何收敛子列要么收敛到 1，要么收敛到 $\frac{1}{2}$，即 $\{a_n\}$ 有且仅有两个聚点 1 和 $\frac{1}{2}$，因此 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\frac{1}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=1$。

例题 1.22 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界, 若 $\forall r\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有有限个根或无根, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。

证明 反证，假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在。由于 $f\in C[0,+\infty)$ 且在 $[0,+\infty)$ 上有界，因此可设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=L<\infty$, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=l<\infty$。又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，所以 $l<L$。

任取 $r\in(l,L)$，则由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=L$, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=l$ 可知，存在严格递增趋于 $+\infty$ 的非负子列 $\left\{x_{n_{l_k}}\right\},\left\{x_{n_{s_k}}\right\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=L$, $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{m_k}\right)=l$。不妨设 $\left\{x_{n_{l_k}}\right\},\left\{x_{n_{s_k}}\right\}$ 满足

$$0<x_{m_k}<x_{n_k}<x_{m_{k+1}}<x_{n_{k+1}},\forall k\in\mathbb{N}\tag{1.13}$$

于是根据极限的保号性可知，存在 $K\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall k>K$，都有

$$f\left(x_{n_k}\right)>r>f\left(x_{m_k}\right)$$

由 $f\in C[0,+\infty)$ 及连续函数介值定理可知，对 $\forall k>K$，都存在 $\xi_k\in\left(x_{m_k},x_{n_k}\right)$，使得 $f\left(\xi_k\right)=r$。同时由(1.13)式可知

$$0<x_{m_k}<\xi_k<x_{n_k}<x_{m_{k+1}}<\xi_{k+1}<x_{n_{k+1}},\forall k\in\mathbb{N}$$

即存在各项互异的非负数列 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $f\left(\xi_k\right)=r$。这与 $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 上至多只有有限个根矛盾！故

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

例题 1.23 设

$$a_{n+1}=\lambda a_n+\frac{1}{a_n}, a_1>0, \lambda\in(0,1),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

笔记 单调性分析法也证明, 不过较为繁琐. 下述证明利用的是类递减模型的证明想法. 数列下界显然, 只需待定上界, 形式计算, 确定数列上界, 然后隔项抽子列, 再利用上下极限即可得证.

证明 取 $m=\min\left\{a_1, 2\sqrt{\lambda}\right\}$, 再令 $M=\max\left\{a_1, a_2, \frac{1}{(1-\lambda)m}\right\}$。注意到 $a_1\geqslant m$, 假设 $a_k\geqslant m$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, 则由均值不等式可得

$$a_{k+1}=\lambda a_k+\frac{1}{a_k}\geqslant 2\sqrt{\lambda}\geqslant m$$

故由数学归纳法可得 $a_n\geqslant m, \forall n\in\mathbb{N}$。又注意到 $a_2\leqslant M$, 假设 $a_l\leqslant M$, 由 $M=\max\left\{a_1, a_2, \frac{1}{(1-\lambda)m}\right\}$ 可知

$$M\geqslant\frac{1}{(1-\lambda)m}\Rightarrow\frac{1}{m}\leqslant(1-\lambda)M$$

于是

$$a_{l+1}=\lambda a_l+\frac{1}{a_l}\leqslant\lambda M+\frac{1}{m}\leqslant\lambda M+(1-\lambda)=M$$

因此由数学归纳法可知 $a_n\leqslant M, \forall n\in\mathbb{N}$。故 $\{a_n\}$ 有界。从而可设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=L\in[m,M]$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=l\in[m,M]$。又因为 $a_{n+1}=\lambda a_n+\frac{1}{a_n}, \forall n\in\mathbb{N}$, 所以令 $n\to\infty$ 并分别取上、下极限可得

$$L\leqslant\lambda L+\frac{1}{l}, l\geqslant\lambda l+\frac{1}{L}\Rightarrow Ll\leqslant\frac{1}{1-\lambda}, Ll\geq\frac{1}{1-\lambda}\Rightarrow Ll=\frac{1}{1-\lambda}$$

由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=L$ 可知, 一定存在 $\left\{a_{n_k}\right\}\subset\{a_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k+1}=L, \lim_{n\to\infty} a_{n_k}=s\in[l,L]$$

又由条件可知 $a_{n_k+1}=\lambda a_{n_k}+\frac{1}{a_{n_k}}, \forall k\in\mathbb{N}$。于是令 $k\to\infty$, 再结合上式可得

$$L=\lambda s+\frac{1}{s}\leqslant\lambda L+\frac{1}{l}=\lambda L+(1-\lambda)L=L$$

因此 $L=s=l$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\geqslant m>0$, 则对 $a_{n+1}=\lambda a_n+\frac{1}{a_n}$ 两边同时取极限得到

$$a=\lambda a+\frac{1}{a}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n=a=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

例题 1.24

证明

例题 1.25

证明

例题 1.26

证明

例题 1.27

证明

例题 1.28

证明

例题 1.29

证明

例题 1.30

证明

例题 1.31

证明

例题 1.32

证明

例题 1.33

证明

例题 1.34

证明

例题 1.35

证明

例题 1.36

证明

例题 1.37

证明

例题 1.38

证明

例题 1.39

证明

例题 1.40

证明

第二章 高等代数习题