

0.1 重要不等式

定理 0.1 (Cauchy 不等式)

对任何 $n \in \mathbb{N}, (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

且等号成立条件为 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 线性相关.



证明 (i) 当 b_i 全为零时, (1) 式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 注意到 $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. 等价于

$$t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$.

从而 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$. 下证 (1) 式等号成立的充要条件.

若 (1) 式等号成立, 则

(i) 当 b_i 全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 线性相关.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 此时我们有 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$. 根据一元二次方程根的存在性定理,

可知存在 $t_0 \in \mathbb{R}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + t_0 b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0.$$

于是 $a_i + t_0 b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. 即 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 线性相关.

反之, 若 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 使得

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

不妨设 $\lambda \neq 0$, 则 $a_i = -\frac{\mu}{\lambda} b_i, i = 1, 2, \dots, n$. 从而当 $t = \frac{\mu}{\lambda}$ 时, $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = 0$.

即一元二次方程 $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ 有实根 $\frac{\mu}{\lambda}$.

因此 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$. 即 (1) 式等号成立. □

例题 0.1 证明:


$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i})^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = n^2.$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0. \quad \square$$

例题 0.2 求函数 $y = \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x}$ 在定义域内的最大值和最小值.

 **笔记** 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后通过简单的放缩就能得到 $y(0)$ 就是最小值. 再利用 **Cauchy 不等式** 我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设 $A, B, C > 0$, 则由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{Ax+27A} + \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{13B-Bx} + \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{Cx} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) [(A+C-B)x + 27A + 13B]$$

并且当且仅当 $\sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx}$ 时, 等号成立.

令 $A+C-B=0$ (因为要求解 y 的最大值, 我们需要将 y 放大成一个不含 x 的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases} \sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx} \\ A+C-B=0 \end{cases}$$

解得: $A=1, B=3, C=2, x=9$.

从而得到我们需要构造的 Cauchy 不等式为

$$\left(\sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x} \right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) (x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当 $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立.

解 由题可知, 函数 y 的定义域就是: $0 \leq x \leq 13$. 而

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x+27} + \sqrt{[\sqrt{13-x} + \sqrt{x}]^2} \\ &= \sqrt{x+27} + \sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}} \\ &\geq \sqrt{27} + \sqrt{13} = 3\sqrt{3} + \sqrt{13} = y(0) \end{aligned}$$

于是 y 的最小值为 $3\sqrt{3} + \sqrt{13}$. 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} y^2(x) &= (\sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x})^2 \\ &= (\sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x})^2 \\ &\leq (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x) \\ &= 121 = y^2(9) \end{aligned}$$

即 $y(x) \leq y(9) = 11$. 并且当且仅当 $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立. 故 y 的最大值为 11.

□


定理 0.2 (均值不等式)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ \sqrt[r]{a_1 a_2 \cdots a_n}, & r = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

其中若 $r_1 \neq r_2$, 则 $f(r_1) = f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

♡

 **笔记** 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

定理 0.3 (均值不等式常用形式)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$



例题 0.3 设 $f(x) = 4x(x-1)^2, x \in (0, 1)$, 求 f 的最大值.

解 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2 \cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2 \cdot \left[\sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)} \right]^3 \\ &\leq 2 \cdot \left[\frac{2x + 1 - x + 1 - x}{3} \right]^3 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当 $2x = 1 - x$, 即 $x = \frac{1}{3}$ 时等号成立.



定理 0.4 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq -1$ 且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$



证明 当 $n=1$ 时, 我们有 $1+x_1 \geq 1+x_1$, 结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时, 结论成立. 则当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立.



定理 0.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)

设 $x \geq -1, n \geq 0$, 则

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$



定理 0.6 (Jesen 不等式)

设 $\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则对下凸函数 f , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数 f , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$



推论 0.1

对 $\forall a, b \geq 0, \alpha + \beta = 1$, 则

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$



证明 利用 $\ln x$ 的上凸性和 Jensen 不等式易得. □

定理 0.7 (Young 不等式)

对任何 $a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ 有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.



笔记 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则我们称 p 与 q 共轭.

注 这个 Young 不等式和加权均值不等式等价.

证明 (i) 当 a, b 至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a, b 均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\ &\Leftrightarrow \ln a + \ln b \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \end{aligned}$$

由 Jensen 不等式和 $f(x) = \ln x$ 函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由 Jensen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立. □

定理 0.8 (Hold 不等式)

设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$, 则有

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}.$$



证明 (i) 当 a_1, a_2, \dots, a_n 全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a_1, a_2, \dots, a_n 不全为零时, 令

$$a'_k = \frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}}, b'_k = \frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}}, k = 1, 2, \dots, n.$$

从而只需证明 $\sum_{k=1}^n a'_k b'_k \leq 1$. 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a'_k b'_k &\leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{(a'_k)^p}{p} + \frac{(b'_k)^q}{q} \right] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} \right) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{\sum_{k=1}^n b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

故原结论成立. □

定理 0.9 (排序和不等式)

设 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ 满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 是 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

且等号成立的充要条件是 $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$ 或者 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$.



笔记 简单记为倒序和 \leq 乱序和 \leq 同序和.

定理 0.10 (Chebeshev 不等式)

设 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ 满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 是 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

且等号成立的充要条件是 $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$ 或者 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$.

