0.1 三次样条插值

定义 0.1 (三次样条函数)

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$, 且在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式, 其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是给定节点, 则称 $S(x)$ 是节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的**三次样条函数**. 若在节点 x_j 上给定函数值 $y_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$, 并成立

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{1}$$

则称 $S(x)$ 为**三次样条插值函数**.

注 从定义知要求出 $S(x)$, 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上要确定 4 个待定系数, 而共有 n 个小区间, 故应确定 $4n$ 个参数. 根据 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导数连续, 在节点 x_j $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ 处应满足连续性条件

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), \quad S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \quad S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0). \tag{2}$$

这里共有 $3n - 3$ 个条件, 再加上 $S(x)$ 满足插值条件 (1), 共有 $4n - 2$ 个条件, 因此还需要加上 2 个条件才能确定 $S(x)$. 通常可在区间 $[a,b]$ 的端点 $a = x_0, b = x_n$ 上各加一个条件 (称为边界条件), 可根据实际问题的要求给定. 常见的有以下 3 种:

(1) 已知两端的一阶导数值, 即

$$S'(x_0) = f_0', \quad S'(x_n) = f_n'. \tag{3}$$

(2) 两端的二阶导数已知, 即

$$S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n'', \tag{4}$$

其特殊情况为

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \tag{5}$$

(5) 式称为**自然边界条件**.

(3) 当 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数时, 则要求 $S(x)$ 也是周期函数. 这时边界条件应满足

$$\begin{cases} S(x_0 + 0) = S(x_n - 0), \ S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0), \\ S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0), \end{cases} \tag{6}$$

而此时 (1) 式中 $y_0 = y_n$. 这样确定的样条函数 $S(x)$ 称为**周期样条函数**.

构造满足插值条件 (1) 及相应边界条件的三次样条插值函数 $S(x)$ 的表达式可以有多种方法. 例如, 可以直接利用分段三次埃尔米特插值, 只要假定 $S'(x_j) = m_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$, 再由插值条件 (1) 可得

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n} [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)], \tag{7}$$

其中 $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ 是由 (**??**) 式 (**??**) 式表示的插值基函数, 利用条件 (2) 式及相应边界条件 (3) 式 (6) 式, 则可得到关于 m_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ 的三对角方程组, 求出 m_j 则得到所求的三次样条函数 $S(x)$.

定理 0.1

若已知函数 $f \in C^4[a,b]$ 在节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$, 记 $h_j = x_{j+1} - x_j$, $h = \max\limits_j h_j$. 记 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的三次样条插值函数, 且满足三种边界条件之一, 即满足(3)式或(4)式或(6)式, 则三次样条表达式为

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j}$$

$$+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j}, \quad j=0,1,\cdots,n-1. \tag{8}$$

其中 $M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 满足三对角方程组(9)或(10).

(1) 对第一种边界条件, 即

$$S'(x_0)=f_0', \quad S'(x_n)=f_n'.$$

令 $\lambda_0=1, d_0=\frac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-f_0'), \mu_n=1, d_n=\frac{6}{h_{n-1}}(f_n'-f[x_{n-1},x_n])$, 则 $M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 满足三对角方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(2) 对第二种边界条件, 即

$$S''(x_0)=f_0'', \quad S''(x_n)=f_n'',$$

令 $\lambda_0=\mu_n=0, d_0=2f_0'', d_n=2f_n''$, 则 $M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 也满足三对角方程组(9).

(3) 对第三种边界条件, 即

$$\begin{cases} S(x_0+0)=S(x_n-0),\ S'(x_0+0)=S'(x_n-0), \\ S''(x_0+0)=S''(x_n-0), \end{cases}$$

令

$$\lambda_n=\frac{h_0}{h_{n-1}+h_0}, \quad \mu_n=1-\lambda_n=\frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0},$$

$$d_n=6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_0+h_{n-1}}.$$

则 $M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 满足三对角方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

♡

证明 假定 $S(x)$ 的二阶导数值 $S''(x_j)=M_j\ (j=0,1,\cdots,n)$ 表达 $S(x)$. 由于 $S(x)$ 在区间 $[x_j,x_{j+1}]$ 上是三次多项式, 故 $S''(x)$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 上是线性函数, 可表示为

$$S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}. \tag{11}$$

对 $S''(x)$ 积分两次并利用 $S(x_j)=y_j$ 及 $S(x_{j+1})=y_{j+1}$, 可定出积分常数, 于是得三次样条表达式

$$\begin{aligned} S(x)=&M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j} \\ &+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j}, \quad j=0,1,\cdots,n-1. \end{aligned} \tag{12}$$

这里 $h_j = x_{j+1} - x_j, M_j\ (j = 0, 1, \cdots, n)$ 是未知的. 为了确定 $M_j\ (j = 0, 1, \cdots, n)$, 对 $S(x)$ 求导得

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j; \tag{13}$$

由此可求得

$$S'(x_j + 0) = -\frac{h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}.$$

类似地可求出 $S(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式, 进而得

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}.$$

利用 $S'(x_j + 0) = S'(x_j - 0)$ 可得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{14}$$

其中

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \quad \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j},$$

$$d_j = 6\frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1} + h_j} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{15}$$

(1) 对第一种边界条件 (3), 可导出两个方程

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0'), \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]). \end{cases} \tag{16}$$

如果令 $\lambda_0 = 1, d_0 = \dfrac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0'), \mu_n = 1, d_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n])$, 那么 (14) 式及 (16) 式可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{17}$$

(2) 对第二种边界条件 (4), 直接得端点方程

$$M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''. \tag{18}$$

如果令 $\lambda_0 = \mu_n = 0, d_0 = 2f_0'', d_n = 2f_n''$, 则 (14) 式和 (18) 式也可以写成 (17) 式的形式.

(3) 对于第三种边界条件 (6), 可得

$$M_0 = M_n, \quad \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n, \tag{19}$$

其中

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1} + h_0}, \quad \mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_0},$$

$$d_n = 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}.$$

(14) 式和 (19) 式可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{20}$$

□

注 线性方程组 (17) 和 (20) 是关于 M_j $(j=0,1,\cdots,n)$ 的三对角线性方程组, M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的弯矩, 称为 $S(x)$ 的矩, 线性方程组 (17) 和 (20) 称为三弯矩方程. 方程组 (17) 和 (20) 的系数矩阵中元素 λ_j,μ_j 已完全确定. 并且满足 $\lambda_j\geqslant 0,\mu_j\geqslant 0,\lambda_j+\mu_j=1$. 因此系数矩阵为严格对角占优阵, 从而方程组 (17) 和 (20) 有唯一解. 求解方法可见 5.3 节追赶法, 将解得结果代入 (8) 式即可.

定理 0.2

设 $f(x)\in C^4[a,b]$,$S(x)$ 为满足第一种或第二种边界条件(3)或(4)的三次样条函数, 令 $h=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}h_i$,$h_i=x_{i+1}-x_i(i=0,1,\cdots,n-1)$, 则有估计式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(x)|\leqslant C_k\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|h^{4-k},\quad k=0,1,2,\tag{21}$$

其中 $C_0=\dfrac{5}{384}$,$C_1=\dfrac{1}{24}$,$C_2=\dfrac{3}{8}$.

♡

笔记 这个定理不但给出了三次样条插值函数 $S(x)$ 的误差估计, 而且说明当 $h\to 0$ 时,$S(x)$ 及其一阶导数 $S'(x)$ 和二阶导数 $S''(x)$ 均分别一致收敛于 $f(x)$,$f'(x)$ 及 $f''(x)$.

证明

□

例题 0.1 设 $f(x)$ 为定义在 $[27.7,30]$ 上的函数, 在节点 $x_i(i=0,1,2,3)$ 上的值如下:

$$f(x_0)=f(27.7)=4.1,\quad f(x_1)=f(28)=4.3,$$
$$f(x_2)=f(29)=4.1,\quad f(x_3)=f(30)=3.0.$$

试求三次样条函数 $S(x)$, 使它满足边界条件 $S'(27.7)=3.0$,$S'(30)=-4.0$.

解 先由 (15)式及 (16)式计算 $h_0=0.30$,$h_1=h_2=1$,$\mu_1=\dfrac{3}{13}$,$\mu_2=\dfrac{1}{2}$,$\mu_3=1$,$\lambda_0=1$,$\lambda_1=\dfrac{10}{13}$,$\lambda_2=\dfrac{1}{2}$,$d_0=\dfrac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-f_0')=-46.666$,$d_1=6f[x_0,x_1,x_2]=-4.00002$,$d_2=6f[x_1,x_2,x_3]=-2.70000$,$d_3=\dfrac{6}{h_2}(f_3'-f[x_2,x_3])=-17.4$. 由此得矩阵形式的线性方程组 (6.13) 为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0\\ M_1\\ M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-46.6666\\ -4.00002\\ -2.7000\\ -17.4000\end{pmatrix}.$$

求解此方程组得到

$$M_0=-23.531,\quad M_1=0.396,$$
$$M_2=0.830,\quad M_3=-9.115.$$

将 M_0,M_1,M_2,M_3 代入表达式 (12)得到 (曲线见图 1).

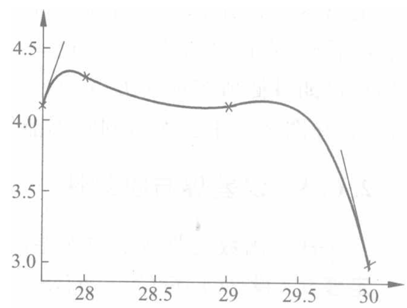

图 1

$$S(x)=\begin{cases}13.07278(x-28)^3-14.84322(x-28)+0.22000(x-27.7)^3+14.31353(x-27.7), & x\in[27.7,28],\\ 0.06600(29-x)^3+4.23400(29-x)+0.13833(x-28)^3+3.96167(x-28), & x\in[28,29],\\ 0.13833(30-x)^3+3.96167(30-x)-1.51917(x-29)^3+4.51917(x-29), & x\in[29,30].\end{cases}$$

通常求三次样条函数可根据上述例题的计算步骤直接编程上机计算, 或直接使用数学库中的软件, 根据具体要求算出结果即可. □

例题 0.2 给定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, -5\leqslant x\leqslant 5$, 节点 $x_k=-5+k(k=0,1,\cdots,10)$, 求三次样条插值 $S_{10}(x)$.

解

表 1

x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$	x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$
−5.0	0.038 46	0.038 46	0.038 46	−2.3	0.158 98	0.161 15	0.241 45
−4.8	0.041 60	0.037 58	1.804 38	−2.0	0.200 00	0.200 00	0.200 00
−4.5	0.047 06	0.042 48	1.578 72	−1.8	0.235 85	0.231 54	0.188 78
−4.3	0.051 31	0.048 42	0.888 08	−1.5	0.307 69	0.297 44	0.235 35
−4.0	0.058 82	0.058 82	0.058 82	−1.3	0.371 75	0.361 33	0.316 50
−3.8	0.064 77	0.065 56	−0.201 30	−1.0	0.500 00	0.500 00	0.500 00
−3.5	0.075 47	0.076 06	−0.226 20	−0.8	0.609 76	0.624 20	0.643 16
−3.3	0.084 10	0.084 26	−0.108 32	−0.5	0.800 00	0.820 51	0.843 40
−3.0	0.100 00	0.100 00	0.100 00	−0.3	0.917 43	0.927 54	0.940 90
−2.8	0.113 12	0.113 66	0.198 37	0	1.000 00	1.000 00	1.000 00
−2.5	0.137 93	0.139 71	0.253 76				

取 $S_{10}(x_k)=f(x_k)(k=0,1,\cdots,10), S'_{10}(-5)=f'(-5), S'_{10}(5)=f'(5)$. 直接上机计算可求出 $S_{10}(x)$ 在表 1 所列各点的值 (利用对称性, 这里只列出在负半轴上各点的值). 从表中看到, 在所列各点 $S_{10}(x)$ 与 $f(x)$ 误差较小, 它可作为 $f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上的近似, 而用拉格朗日插值多项式 $L_{10}(x)$ 计算相应点上的值 $L_{10}(x)$(也见表 1), 显然它与 $f(x)$ 相差很大, 在图**??**中已经看到它不能作为 $f(x)$ 的近似. □