

0.1 复数的定义及其运算

定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a, b) , 如果用 \mathbb{R} 记实数的全体, \mathbb{C} 记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律; $(0, 0)$ 是零元素, $(-a, -b)$ 是 (a, b) 的负元素; $(1, 0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a, b) 有逆元素 $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$; 此外, \mathbb{C} 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此 \mathbb{C} 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbb{R}}$ 是 \mathbb{C} 的一个子域. 显然, $(a, 0) \rightarrow a$ 是 $\tilde{\mathbb{R}}$ 与 \mathbb{R} 之间的一个同构对应, 因此实数域 \mathbb{R} 是 \mathbb{C} 的一个子域. 我们直接记 $(a, 0) = a$. 在 \mathbb{C} 中, $(0, 1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用 i 记 $(0, 1)$ 这个元素, 于是有 $i^2 = -1$. 由于 $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$, 于是每一个复数 (a, b) 都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a, b) 来记复数, 而直接用 $z = a + bi$ 记复数, a 称为 z 的**实部**, b 称为 z 的**虚部**, 分别记为 $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

设 $z = a + bi$ 是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - bi,$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**, \bar{z} 称为 z 的**共轭复数**.

定义 0.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a < b$), 其满足下列要求:


(i) 对 F 中任意两个元素 a, b , 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果 $a < b, b < c$, 那么 $a < c$;

(iii) 如果 $a < b$, 那么对任意 c , 有 $a + c < b + c$;

(iv) 如果 $a < b, c > 0$, 那么 $ac < bc$.

 **笔记** 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 0.1

复数域不是有序域.

证明 如果 \mathbb{C} 是有序域, 那么因为 $i \neq 0$, i 和 0 之间必有 $i > 0$ 或 $i < 0$ 的关系. 如果 $i > 0$, 则由有序域 (iv) 得 $i \cdot i > i \cdot 0$, 即 $-1 > 0$, 再由 (iii), 两端都加 1, 即得 $0 > 1$. 另一方面, 从 $-1 > 0$ 还可得 $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$, 即 $1 > 0$, 这和刚才得到的 $0 > 1$ 矛盾. 如果 $i < 0$, 两端都加 $-i$, 得 $0 < -i$, 再由有序域 (iv), 两端乘 $-i$, 得 $-1 > 0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0 > 1$ 和 $0 < 1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域. □

命题 0.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

- (i) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$
- (ii) $z\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{\bar{z}} = z;$
- (iii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}};$
- (iv) $|zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|};$
- (v) $|z| = |\bar{z}|, \quad |z| = |-z|.$

证明

- (i)
- (ii)
- (iii)
- (iv) 由 (ii) 可得 $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = |z|^2|w|^2$, 进而 $|zw| = |z||w|$.
- (v)

命题 0.2

设 z 和 w 是两个复数, 那么

- (i) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|;$
- (ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $z = tw$;
- (iii) $|z-w| \geq ||z| - |w||$.

证明 (i) 从 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用复数运算性质 (ii)(i) 和这里的不等式 (i), 即得

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w|$, 这等价于 $z\bar{w} \in \mathbb{R}$ 且 $z\bar{w} \geq 0$. 不妨设 $w \neq 0$ ($w = 0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$, 故 $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \geq 0$. 令 $t = \left(\frac{z}{w}|w|^2\right) \frac{1}{|w|^2}$, 则 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \geq 0$, 而且 $z = tw$.

(iii) 当 $|z| = |w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z| > |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w|,$$

移项可得 $|z - w| \geq |z| - |w| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $z - w = tw$, 即 $z = (t + 1)w$.

当 $|z| < |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|,$$

移项可得 $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $w - z = tz$, 即 $w = (t + 1)z$. □

推论 0.1

设 z_1, \dots, z_n 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$



证明 由命题 0.2(ii) 及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当 z_1, z_2, \dots, z_n 线性相关. □