0.1 杂题

例题 0.1 设 $Y, x_0, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\delta}^{\delta}e^{-nYx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{Y}}\int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{Y}}\int_0^{\delta\sqrt{nY}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{Y}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $f \in C^3[0,x], x > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,x)$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \tag{1}$$

若还有 $f'''(0) \neq 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi}{x}$.

笔记 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x)-f(0))\,t + f(0) + f''(\xi)\,t\,(t-x),\, t \in [0,x].$$

两边同时对 t 在 $[0,x]$ 上积分就能得到(1)式.

证明 设 $K \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{y}{2}[f(0)+f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0)+f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y)-f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由 $g(x) = g(0) = 0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1 \in (0,x)$ 使得 $g'(\xi_1) = 0$. 注意到 $g'(0) = 0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi \in (0,x)$ 使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即 $K = f''(\xi)$, 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0,\xi).$$

于是

$$f'''(\eta)\frac{\xi}{x} = \frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)\frac{\xi}{x} &= \lim_{x\to0^+}\frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}-f''(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-12\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+6x[f(0)+f(x)]-f''(0)x^3}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-12f(x)+6[f(x)+f(0)]+6xf'(x)-3f''(0)x^2}{4x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{6xf''(x)-6f''(0)x}{12x^2}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'''(0).
\end{aligned}$$

因为 $0<\eta<\xi<x$, 所以

$$\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)=f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.3 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g\in C^2[0,+\infty)$ 满足

$$g''(x)+f(x)g(x)=0. \tag{2}$$

证明: 存在 $M>0$ 使得

$$|g(x)|\leqslant M,\quad |g'(x)|\leqslant M\sqrt{f(x)},\quad \forall x>0. \tag{3}$$

证明 对 $\forall x>0$, 有 f 在 $[0,x]$ 上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知 $f\in R[0,x],\forall x>0,f$ 在 $[0,+\infty)$ 上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^x f(y)g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\forall x>0 \tag{4}$$

利用 f 递增和第二积分中值定理和 (4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+f(x)\int_\xi^x g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\xi\in[0,x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2-\frac{1}{2}|g'(0)|^2+\frac{[f(x)]^2}{2}\left[g^2(x)-g^2(\xi)\right]=0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2=|g'(0)|^2-f(x)g^2(x)+f(x)g^2(\xi)\leqslant|g'(0)|^2+f(x)g^2(\xi). \tag{5}$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)}+g'(x)g(x)=0,\forall x>0.$$

即

$$\int_0^x\frac{g''(y)g'(y)}{f(y)}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\forall x>0$$

由 f 递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)}\int_0^\eta g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\eta\in[0,x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)}\left[|g'(\eta)|^2-|g'(0)|^2\right]+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0$$

即
$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)}\left[|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2\right] \leqslant g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \tag{6}$$
由 $g \in C[0, +\infty)$ 知 g 有界, 即存在 $C_1 > 0$, 使得 $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$. 于是由(5)式知
$$|g'(x)|^2 \leqslant |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi) \leqslant |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \tag{7}$$
又因为 f 是递增正函数, 所以 $f(x) \geqslant f(0) > 0, \forall x > 0$. 从而存在 $C_2 > 0$, 使得
$$|g'(0)|^2 \leqslant C_2 f(0) \leqslant f(x), \forall x > 0.$$
于是取 $M = \max\left\{C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}\right\}$, 则由(7)式和(6)式可得, 对 $\forall x > 0$, 有
$$|g(x)|^2 \leqslant M \leqslant M^2,$$
$$|g'(x)|^2 \leqslant C_2 f(x) + C_1 f(x) \leqslant M f(x) \leqslant M^2 f(x).$$
进而
$$|g(x)| \leqslant M, |g'(x)| \leqslant M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$
这就证明了(3). □

例题 0.4 设 $f \in C^2[0,1]$, 证明

(a)
$$|f'(x)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{8}$$
(b)
$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{9}$$
(c) 若 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 则
$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{10}$$

笔记 对于 $[a,b]$ 的情况, 考虑 $f(a+(b-a)x), x \in [0,1]$, 我们有
$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x,$$
以及
$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x.$$
当 $f(a)f(b) \geqslant 0$, 我们有
$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

证明

(a) 注意到对任何 $\theta \in [0,1]$, 我们有
$$|f'(x)| \leqslant |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x f''(y)\mathrm{d}y\right| + |f'(\theta)|$$
$$\leqslant \int_0^1 |f''(y)|\mathrm{d}y + |f'(\theta)|.$$
于是只需证明存在 $\theta \in [0,1]$ 使得
$$|f'(\theta)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{11}$$
如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0,1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足 (11) 式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性可

知,f' 要么恒正,要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点,不妨设 $f>0$, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\min_{[0,1]}|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\geqslant\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|,$$

这也给出了 (11) 式. 若存在 $t\in[0,1]$, 使得 $f(t)=0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x)=f'(\theta)(x-t).$$

从而

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1|x-t|\mathrm{d}x\overset{\text{命题??}}{\geqslant}\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|.$$

这也给出了 (11) 式. 于是我们证明了不等式(8)式.

(b) 直接对(8)式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分得(9)式.

(c) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)|\leqslant 2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x. \tag{12}$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0)\geqslant 0$, 则当 f 递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\cdot\min|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min|f'\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

当 f 递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\alpha)\geqslant(1-x)\min|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

于是必有 (12) 式成立, 这就给出了(10)式.

□

例题 0.5 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格单调下降, 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

证明 反证, 假设 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=c\in(a,+\infty)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k}\to c$. 记

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

则 $f(x_n)$ 的子列极限也收敛到 A, 即 $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=A$. 由 $x_{n_k}\to c$ 知, 存在 $K\in\mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_k}\in(c-\delta,c+\delta),\forall k>K.$$

其中 $\delta=\min\left\{\frac{c-a}{2},\frac{1}{2}\right\}$. 任取 $x_1,x_2\in(c+\delta,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$, 则由 f 严格递减知

$$f\left(x_{n_k}\right)>f(x_1)>f(x_2)>f(x),\forall x>x_2,\forall k>K.$$

左边令 $k\to+\infty$, 右边令 $x\to+\infty$ 得

$$A=\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)\geqslant f(x_1)>f(x_2)\geqslant\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

显然矛盾!

□

例题 0.6 设 $\{x_n\}\subset(0,1)$ 满足对 $i\neq j$, 有 $x_i\neq x_j$, 讨论函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有 $\operatorname{sgn}(x-x_n)$ 在 $x=x_n$ 处间断, 在 $x\neq x_n$ 处连续.

当 $x\neq x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 时,$f(x)$ 的每一项都连续. 又 $f(x)$ 一致收敛, 故 f 在 $x\neq x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 处都连续.

当 $x=x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$f(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}+\sum_{n\neq k}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在 $x=x_k$ 处间断. 故 $f(x)$ 在 $x=x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 处都间断. □

例题 0.7 证明 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\dfrac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 由 Abel 变换得, 对 $\forall m\in\mathbb{N},\forall x\geqslant 0$ 成立

$$\begin{aligned}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=m}^{n}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=m}^{n-1}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t+\frac{n}{n^2+x}s_n\right]\\&=\sum_{t=m}^{\infty}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t\\&=\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t-\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t,\end{aligned}$$

这里 $s_t=\sum\limits_{i=1}^{t}(-1)^i=(-1)^t\in\{1,-1\}$. 一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\dfrac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$ 和 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\dfrac{1}{t^2+t+1}$ 都收敛知

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}=\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}=0.$$

于是我们有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}=0,\text{关于}x\in[0,+\infty)\text{一致},$$

这就证明了 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\dfrac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续实值右可导函数, 记 $D^+f(x)$ 为 $f(x)$ 的右导函数, 如果 $f(a)=0$, 且 $D^+f(x)\leqslant 0$, 则 $f(x)\leqslant 0,x\in[a,b]$.

证明 (1) 先假定 $D^+f(x)<0$, 如果结论不成立, 则存在 $x_1\in(a,b)$, 使 $f(x_1)>0$. 记

$$x_0=\inf\{x\mid f(x)>0\}.$$

由 x_0 的定义, 我们有序列 $\{x_n\}$, 使 x_n 单调递减趋于 x_0, 且 $f(x_n)>0$. 从而由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant 0. \tag{13}$$

根据 x_0 的定义可知, 对 $\forall x<x_0$, 都有 $f(x)<f(x_0)$, 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列 $\{x_n'\}$ 单调递增趋于 x_0, 且 $f(x_n')$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n'\right)\leqslant 0. \tag{14}$$

故由(13)(14)知 $f(x_0)=0$. 于是

$$D^+f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\geqslant 0,$$

这与 $D^+f(x_0)<0$ 矛盾, 于是 $f(x)\leqslant 0,x\in[a,b]$.

(2) 若 $D^+f(x)\leqslant 0$, 对任给的 $\varepsilon>0$ 构造函数

$$f_\varepsilon(x)=f(x)-\varepsilon(x-a),$$

对 $f_\varepsilon(x)$ 有 $f_\varepsilon(a)=0$ 且

$$D^+f_\varepsilon(x)\leqslant -\varepsilon<0.$$

从而由 (1) 得 $f_\varepsilon(x)\leqslant 0,x\in[a,b]$. 因此 $f(x)\leqslant\varepsilon(x-a)\leqslant\varepsilon(b-a)$, 由 ε 的任意性, 得 $f(x)\leqslant 0,x\in[a,b]$. □

例题 0.8 设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b)$ 上连续且右可导的函数, 如果 $D^+\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续, 证明:$\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可导,$\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$.

证明 设

$$f(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t-\varphi(x),\quad x\in[a,b).$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且右可导, 并且

$$D^+f(x)=D^+\varphi(x)-D^+\varphi(x)=0.$$

又 $f(a)=0$, 由命题 0.1得 $f(x)\leqslant 0$. 又 $-f(x)$ 满足 $-f(a)=0,D^+[-f(x)]=0$, 同理由命题 0.1得 $-f(x)\leqslant 0$, 故 $f(x)=0$. 于是

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

由 $D^+\varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$. □

例题 0.9 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{2n}{\pi}\left(\ln 2n+\gamma-\ln\pi\right)+o\left(1\right).$$

证明 见here. □

例题 0.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln(\ln n)}=1.$

证明 证法一:对任意充分大的 n, 由 Frullani(傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{kx}}{x}\mathrm{d}x.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned}
A&\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\ln k=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-kx}}{x}\mathrm{d}x\right)\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k e^{-kx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}\left(1-1\right)^n-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$\left(1-e^{-x}\right)^n\geqslant 1-ne^{-x}.$$

取 $M_n>1$, 满足 $M_ne^{M_n}=n$. 于是

$$0\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-ne^{-x}\right)}{M_n}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_n}\int_{M_n}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_ne^{M_n}}=1.$$

从而

$$A=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O(1). \tag{15}$$

因为 $M_ne^{M_n}=n$, 所以由命题**??**知

$$M_n=\ln n+o(\ln n),n\to\infty. \tag{16}$$

于是

$$(1-e^{-x})^{n-1}=e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})}\leqslant e^{-(n-1)e^{-x}}\leqslant e^{-(n-1)e^{-M_n}}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\to 0,\forall x\in[0,M_n].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}\leqslant\frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\to 0,n\to\infty.$$

即 $\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right),n\to\infty$. 故

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=(1+o(1))\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x,n\to\infty. \tag{17}$$

注意到

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to0}e^x=1,$$

故 $\frac{1-e^{-x}}{x}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\leqslant -e^{-M_n}\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\to0,n\to\infty,$$

故 $\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 于是再结合(16)式可知

$$\begin{aligned}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=O(1)+\ln M_n=\ln(\ln n+o(\ln n))+O(1)\\&=\ln\ln n+o(1)+O(1)=\ln\ln n+O(1),n\to\infty.\end{aligned}$$

因此再由(17)式可知

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=(1+o(1))\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=(1+o(1))(\ln\ln n+O(1))=\ln\ln n+o(\ln\ln n),n\to\infty.$$

故由(15)可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln(\ln n)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{A}{\ln(\ln n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O(1)}{\ln(\ln n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n+o(\ln\ln n)+O(1)}{\ln(\ln n)}=1.\end{aligned}$$

证法二:注意到

$$\begin{aligned}S\triangleq\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

又由二项式定理可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1 t^{k+y-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^{k+y-1}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 t^{y-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^k\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{y-1}\left[(1-t)^{n-1}-1\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t-1}{t\ln t}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=e^{-x}}\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-x})\left[1-(1-e^{-x})^{n-1}\right]}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$
\begin{aligned}
S\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{命题??}}\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由命题??(4) 知

$$e^{x^2-x} \geqslant \frac{1}{1+x} \geqslant e^{-x}, \forall x>0.$$

于是

$$e^{x^2-x}\cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x}{2}}\cdots e^{\left(\frac{x}{n-1}\right)^2-\frac{x}{n-1}} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

注意到

$$x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \leqslant x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}x<2x, \forall x\in[0,1],$$

故

$$e^{-x\left(-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数 e^{-x} 的介值性知, 存在 $C_n \in \left[-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}, \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right]$, 使得

$$\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} = e^{-C_n x}.$$

于是由 $-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \leqslant C_n \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ 知

$$C_n = \ln n + O(1), n\to\infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x}\left(1-e^{-C_n x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t}}{t} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to0} e^{t} = 1,$$

故 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leqslant 1-e^{-C_n} = 1-e^{-\ln n+O(1)} \to 1, n\to\infty,$$

故 $\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = O(1)$. 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln(\ln n + O(1)) + O(1) = \ln\ln n + O(1), n\to\infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n + O(1)}{\ln\ln n} = 1.$$

□

例题 0.11 已知 $f(x) \in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F_1(a) = F_1(b) = 0$. 再设 $F_2(x) = \int_a^x F_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left[\int_a^t f(s)ds\right]\mathrm{d}t$, 则 $F_2(a) = 0$,$F_2'(x) = F_1(x)$,$F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$. 由条件可知

$$0 = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xF_1'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xdF_1(x) = xF_1(x)\Big|_a^b - \int_a^b F_1(x)\mathrm{d}x = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$. 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\eta_1 \in (a,\xi)$,$\eta_2 \in (\xi,b)$, 使得 $F_1'(\eta_1) = F_1'(\eta_2) = 0$. 即 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$. □

例题 0.12 已知 $f(x) \in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 $n+1$ 个零点.

笔记 利用分部积分转换导数的技巧.

证明 令 $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \cdots \int_a^{x_3} \left[\int_a^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1\right] \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$. 则 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$,$F^{(n+1)}(x) = f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = F^{(n)}(x)\Big|_a^b = F^{(n)}(b),$$

$$0 = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b xF^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b xdF^{(n)}(x) = xF^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = -F^{(n-1)}(b),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x)\Big|_a^b - n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n n!\int_a^b F\prime(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而 $F(b) = F'(b) = \cdots = F^{(n)}(b) = 0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 Rolle 中值定理可知存在 $\xi_1^2,\xi_2^2 \in (a,b)$, 使得 $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1},\xi_2^{n+1},\cdots,\xi_{n+1}^{n+1} \in (a,b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \cdots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. 即 $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \cdots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. □

例题 0.13 已知 $f(x) \in D^2[0,1]$, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = 16$.

笔记 构造 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x) = f(x) - p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^k g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k[f(x) - p(x)]\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0,1,2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k p(x)\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,2.$$

待定 $p(x) = ax^2 + bx + c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c,$$

$$0 = \int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax^3 + bx^2 + cx\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2},$$

$$\frac{1}{60}=\int_0^1 x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^4+bx^3+cx^2\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}.$$

解得:$a=8,b=-9,c=2$. 于是就得到 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$.

证明 令 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^kg(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2.$$

再令 $G(x)=\int_0^x\left[\int_0^t\left(\int_0^s g(y)\mathrm{d}y\right)ds\right]\mathrm{d}t$, 则 $G(0)=G'(0)=G''(0)=0,G'''(x)=g(x)$. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&0=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 G'''(x)\,\mathrm{d}x=G''(1),\\
&0=\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xG'''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xdG''(x)=xG''(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G''(x)\,\mathrm{d}x=-G'(1),\\
&0=\int_0^1 x^2g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2G'''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2dG''(x)=x^2G''(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 xG''(x)\,\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^1 xdG'(x)=2\int_0^1 G'(x)\,\mathrm{d}x-2xG'(x)\Big|_0^1=2G(1).
\end{aligned}$$

从而 $G(1)=G'(1)=G''(1)=0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1\in(0,1)$, 使得 $G'(\xi_1^1)=0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2,\xi_2^2\in(0,1)$, 使得 $G''(\xi_1^2)=G''(\xi_2^2)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3,\xi_2^3,\xi_3^3\in(0,1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3)=G'''(\xi_2^3)=G'''(\xi_3^3)=0$. 即 $g(\xi_1^3)=g(\xi_2^3)=g(\xi_3^3)=0$. 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g''(\xi)=0$. 即 $f''(\xi)=16$. □

例题 0.14 设

$$x_n=\int_0^1\ln(1+x+\cdots+x^n)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$$

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(2) 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}(2-x_n)\right]$.

证明

(1) 注意到

$$x_n=\int_0^1\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left|\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\right|\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2x\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{分部积分}}-2\int_0^1\ln x\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}2.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}x_n&=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\ln^2x\mathrm{d}x=2.
\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
x_n&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+2,
\end{aligned}$$

从而

$$2-x_n=-\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{x=e^{-\frac{y}{n+1}}} \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(1-e^{-\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&\quad-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{18}
$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}=0$, 故存在 $M>0$, 使得

$$
\left|e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}\right|\leqslant M,\forall y\in(0,+\infty).
$$

又注意到

$$
\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\right|\leqslant\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y,\forall y\in(0,+\infty).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot 0\cdot 1\mathrm{d}y=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\mathrm{d}y\xlongequal{x=e^{-y}}-\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\mathrm{d}y=-\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-ny}}{n}\mathrm{d}y\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ny}}{n}\mathrm{d}y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

故再由(18)式可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(2-x_n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.15 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x\geqslant 0$, 定义 $F(x)=\int_0^x t^{\alpha}f(t+x)\,\mathrm{d}t$.

(1) 若 $\alpha\in(-1,0)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明:$F$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha\in(0,1)$,f 以 $T>0$ 为周期,$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=2022$. 证明:$F$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

笔记 本题 (1) 中的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 可以削弱为 $\exists M,X>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M, x\in[X,+\infty)$.

证明

(1) 由于 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 所以 $\exists M>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty).$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\left[\frac{(\alpha+1)\varepsilon}{3M}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$, 则当 $0\leqslant x<\delta$ 时, 有

$$x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}<\delta^{1+\alpha}.$$

当 $x\geqslant\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}&=\frac{x-y}{\left[\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}+\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-2}y^{\alpha+1}+\cdots+\left(y^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}\right]}\\&<\frac{\delta}{\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}<\frac{\delta}{\left(\delta^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}=\delta^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

因此对 $\forall x,y\in[0,+\infty)$ 且 $0<x-y<\delta$, 都有

$$x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}<\delta^{1+\alpha}.$$

从而对 $\forall x,y\in[0,+\infty)$ 且 $0<x-y<\delta$, 都有

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)|&=\left|\int_0^x t^\alpha f(t+y)\,\mathrm{d}t-\int_0^y t^\alpha f(t+x)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t-\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{2y}^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t-\int_y^x(t-y)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{2y}\left[(t-x)^\alpha-(t-y)^\alpha\right]f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{2y}^{2x}(t-x)^\alpha|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_y^x(t-y)^\alpha|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_x^{2y}\left[(t-x)^\alpha-(t-y)^\alpha\right]|f(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant M\left[\int_{2y}^{2x}(t-x)^\alpha\,\mathrm{d}t+\int_y^x(t-y)^\alpha\,\mathrm{d}t+\int_x^{2y}\left[(t-x)^\alpha-(t-y)^\alpha\right]\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{M}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}-(2y-x)^{\alpha+1}+(x-y)^{\alpha+1}+(2y-x)^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}+(x-y)^{\alpha+1}\right]\\&=\frac{M}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}+2(x-y)^{\alpha+1}\right)\\&<\frac{3M}{\alpha+1}\delta^{1+\alpha}<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 假设 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 那么存在 $a,b>0$, 使得 $F(x)<a|x|+b$.

从而 $\left|\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right|<\frac{a|x|+b}{|x|^{\alpha+1}}$, 进而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}=0$.

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}&=\frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{换元}}\frac{\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{换元}}\frac{\int_1^2 x^{\alpha+1}(t-1)^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}\\&\xlongequal{\text{Riemann 引理}}\int_1^2(t-1)^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}t\int_1^2(t-1)^\alpha\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

再结合 $\int_1^2(t-1)^\alpha\mathrm{d}t>0$, 知 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}t=0$.

现在有

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x t^\alpha f(t+x)\mathrm{d}t=\int_0^x t^\alpha d\left[\int_0^{x+t}f(y)\,dy\right]\\&\xlongequal{\text{分部积分}}x^\alpha\int_0^{2x}f(y)\,dy-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}\left[\int_0^{x+t}f(y)\,dy\right]\mathrm{d}t\\&=x^\alpha\int_0^{2x}f(y)\,dy-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}F(x+t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

设 $G(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$, 则由 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积知, $G\in C[0,+\infty)$. 又由 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}t=0$, 得

$$G(x+T)-G(x)=\int_0^x f(x+T)\mathrm{d}t-\int_0^x f(x)\mathrm{d}t=\int_x^{x+T}f(x)\mathrm{d}t=\int_0^T f(x)\mathrm{d}t=0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以 $G(x)$ 有界.

又 $\alpha-1\in(-1,0)$, 故由 (1) 可得,$-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}F(x+t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

下面证明 $x^\alpha\int_0^{2x}f(y)\,dy$ 不一致连续.

由于 $G(2x)$ 在 $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ 上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记 $M=\max\limits_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]}G(2x)$, 则存在 $x_2\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, 使得 $M=G(2x_2)\geqslant G(2x)\,,x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$.

又因为 $G(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=2022$, 且 $G(2x)$ 以 $\frac{T}{2}$ 为周期, 所以存在 $x_1\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, 使得 $G(2x_1)=G(3)>0$.

因此,$M=G(2x_2)\geqslant G(2x_1)=G(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t>0$.

构造数集 $E=\left\{x'\in\left[0,\frac{T}{2}\right]\mid G(2x')=M\right\}$, 由 $x_2\in E$ 知, $E\neq\varnothing$. 又因为 E 有界, 所以由确界存在定理知,E 必有上确界, 取 $x_0=supE$.

假设 $x_0\notin E$, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}|G(2x_0)-M|$, 则 $\varepsilon_0>0$, 否则 $x_0\in E$ 矛盾.

从而 $\forall\delta'>0,\exists x_{\delta'}\in E$, 使得 $x_0-\delta'<x_{\delta'}<x_0$, 都有 $\left|G(2x_0)-G\left(2x'_{\delta'}\right)\right|\geqslant\varepsilon_0$.

这与 G(2x) 在闭区间 $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ 上连续, 进而一致连续矛盾. 故 $x_0\in E$.

任取 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}-x_0\right)\right)$, 则 $G(2x_0+\delta)<M=G(2x_0)$, 否则与 $x_0=supE$ 矛盾.

进而 $\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\delta}f(y)\,dy\right|=|G(2x_0+\delta)-G(2x_0)|>0$.

从而当 $n>\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ 时, 由积分中值定理, 得

存在 $\xi_n\in\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得

$$\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}f(y)\,dy\right|=\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}|f(\xi_n)|>0\tag{19}$$

又因为 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以 f 在 $\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ 上有界.

于是存在 $K,L>0$, 使得

$$K\leqslant|f(\xi_n)|\leqslant L\tag{20}$$

取数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$, 其中 $x_n=x_0+n\frac{T}{2},y_n=x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}},n\in\mathbb{N}_+$. 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)=0$.

由拉格朗日中值定理, 得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,

存在 $\xi_n\in\left(x_0+n\frac{T}{2},x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得 $\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^\alpha-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha=\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\xi_n{}^{\alpha-1}$

从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\xi_n{}^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令 $n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\xi_n{}^{\alpha-1}=0.$
于是存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 有

$$\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0}f(y)\,dy} \tag{21}$$

现在, 当 $n>\max\left\{N,\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right\}$ 时, 结合(19)(20)(21), 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|x_n{}^{\alpha}\int_0^{2x_n}f(y)\,dy-y_n{}^{\alpha}\int_0^{2y_n}f(y)\,dy\right|\\
&=\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|\\
&=\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy+\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right]\right|\\
&=\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|\\
&\geqslant\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f(y)\,dy\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f(y)\,dy\right|\\
&=\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}f(y)\,dy\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2x_0}f(y)\,dy\right|\\
&=\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right|\cdot\left|\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}f(\xi_n)\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2x_0}f(y)\,dy\right|\\
&\geqslant 2\left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha}|f(\xi_n)|\cdot n^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon\\
&\geqslant 2\left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha}K\cdot n^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon
\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n{}^{\alpha}\int_0^{2x_n}f(y)\,dy-y_n{}^{\alpha}\int_0^{2y_n}f(y)\,dy\right)=+\infty$. 故 $x^{\alpha}\int_0^{2x}f(y)\,dy$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.
这与 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续矛盾. 因此, F 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

□

例题 0.16 计算

$$\lim_{t\to1^-}(1-t)\left(\frac{t}{1+t}+\frac{t^2}{1+t^2}+\cdots+\frac{t^n}{1+t^n}+\cdots\right)$$

解 对 $\forall t\in(0,1)$, 一方面, 我们有

$$(1-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{1+t^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t^{k+1}}^{t^k}\frac{1}{1+t^k}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t^{k+1}}^{t^k}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+t)$$

另一方面, 我们有

$$(1-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{1+t^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t^k}^{t^{k-1}}\frac{t}{1+t^k}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t^k}^{t^{k-1}}\frac{t}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t}{1+x}\mathrm{d}x=t\ln 2.$$

故

$$\ln 2=\lim_{t\to1^-}[\ln(1+t)]\leqslant\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{1+t^k}\leqslant\lim_{t\to1^-}(t\ln 2)=\ln 2.$$

□

例题 0.17 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}$.

解 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $t_n\in\mathbb{N}$, 使得 $(t_n+1)\pi<n<(t_n+2)\pi$. 从而 $n-7<t_n\pi<n,\quad\forall n\in\mathbb{N}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{n}=\frac{1}{\pi}$. 现在我们有

$$\begin{aligned}\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}&=\sum_{k=0}^{t_n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}+\int_{(t_n+1)\pi}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}\\&=\sum_{k=0}^{t_n}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2(x+k\pi)}+\int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2(x+(t_n+1)\pi)}\\&=t_n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}+\int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}.\end{aligned}\tag{22}$$

注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\left|\frac{1}{1+n^2\cos^2x}\right|\leqslant\frac{1}{1+\cos^2x},$$

$$\begin{aligned}n\left|\frac{1}{1+n^2\cos^2x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right|&=\left|\frac{n^3\left(x^2-\cos^2x\right)}{\left(1+n^2\cos^2x\right)\left(1+n^2x^2\right)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{n^3\left(x^2-\cos^2x\right)}{n^4x^2\cos^2x}\right|\leqslant\frac{\left|x^2-\cos^2x\right|}{x^2\cos^2x},\end{aligned}$$

故由控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}=\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}=0,\tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2\cos^2x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2\cos^2x}-\frac{n}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}t_n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}=\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{n}\cdot n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}+n\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2\cos^2x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=1.\end{aligned}\tag{24}$$

综上, 由(22)(23)(24)式知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2x}=1.$$

□

例题 0.18 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x$.

证明 注意到对 $\forall k\in[1,2018]\cap\mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2018-k}}{(1+t)^{2021}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^k-x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=0,\quad\forall k\in[1,2018]\cap\mathbb{N}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=0.$$

□

例题 0.19 设 $I(f)=\int_0^{\pi}(\sin x-f(x))f(x)\mathrm{d}x$, 求当遍历 $[0,\pi]$ 上所有连续函数 f 时 $I(f)$ 的最大值.

解 对函数配方, 有

$$(\sin x-f(x))f(x)=-\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2+\frac{\sin^2 x}{4}.$$

代入积分式, 得

$$\begin{aligned}I(f)&=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{4}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}-\int_0^{\pi}\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故当 $f(x)=\frac{\sin x}{2}$ 时,$I(f)$ 取得最大值 $\frac{\pi}{8}$. □

例题 0.20 设 $\alpha>1,\Gamma_k=\left[k^{\alpha},\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right)\cap\mathbb{N}(k\geq 1)$. 试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性, 其中

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n=\min\Gamma_k,\\ \frac{1}{n^{\alpha}}, & \text{其他},\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n\in\Gamma_k,\\ \frac{1}{n^{\alpha}}, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 由 $\alpha>1$ 和条件直接可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{\substack{n\neq\min\Gamma_k,\\ \forall k\in\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{\substack{\exists k\in\mathbb{N},\\ n=\min\Gamma_k}}^{\infty}\frac{1}{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\min\Gamma_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}<\infty.$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{n\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{n}\\&\geqslant\sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}.\end{aligned}\tag{25}$$

记 N_k 为 Γ_k 所含元素的个数, 则

$$\left\lfloor\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-k^{\alpha}\right\rfloor\leqslant N_k<\left\lfloor\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-k^{\alpha}\right\rfloor+1,\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

再结合 Lagrange 中值定理知

$$N_k\sim\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-k^{\alpha}\sim\frac{\alpha}{2}k^{\alpha-1},\quad k\to\infty.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha}{2}k^{\alpha-1}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\geqslant\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\alpha-1}}{2^{\alpha}k^{\alpha}}=\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}=+\infty.$$

故由 (25) 式知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散. □

例题 0.21 设 a_1,a_2,a_3 为满足 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ 的一组实数,b_1,b_2 为满足 $b_1^2+b_2^2=1$ 的一组实数. 又设 M_1 为 5×3 矩阵, 其每一行都为 a_1,a_2,a_3 的一个排列;M_2 是 5×2 矩阵, 其每一行都为 b_1,b_2 的一个排列. 令 $M=(M_1,M_2)$, 它为 5×5 矩阵. 证明:

(1) $(\operatorname{tr}M)^2\leq(5+2\sqrt{6})\operatorname{rank}M$;

(2) M 必有绝对值小于或等于 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的实特征值 λ.

证明

(1) 由 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,b_1^2+b_2^2=1$ 知 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2\leqslant 1$. 从而

$$(\mathrm{tr}M)^2\leqslant 5^2=25.$$

且有均值不等式可得

$$a_1+a_2+a_3\leqslant 3\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}=\sqrt{3},\quad b_1+b_2\leqslant 2\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{2}}=\sqrt{2}. \tag{26}$$

当 $\mathrm{r}(M)\geqslant 3$ 时, 就有

$$(\mathrm{tr}M)^2\leqslant 25<\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot 3\leqslant\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M)$$

恒成立. 故只需考虑 $\mathrm{r}(M)=1,2$ 的情形. 当 $\mathrm{r}(M)=1$ 时, 不妨设

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

则由(26)式可得

$$(\mathrm{tr}M)^2=(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)^2\leqslant\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+4\sqrt{6}.$$

当 $\mathrm{r}(M)=2$ 时, 不妨设

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2\\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1\\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

其中 $a_3=\max\limits_{i=1,2,3}a_i,b_2=\max\limits_{i=1,2}b_i$. 否则,$\mathrm{tr}M$ 都没有上述矩阵的迹大. 则

$$\begin{aligned} a_1+2a_3&\leqslant 3\sqrt{\frac{a_1^2+2a_3^2}{3}}=\sqrt{3}\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+a_3^2-a_2^2}\\ &=\sqrt{3}\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+a_3^2-a_2^2}=\sqrt{3}\sqrt{1+a_3^2-a_2^2}\\ &\leqslant\sqrt{6}. \end{aligned}$$

于是

$$(\mathrm{tr}M)^2=(a_1+2a_3+2b_2)^2\leqslant\left(\sqrt{6}+2\right)^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M).$$

综上, 我们有

$$(\mathrm{tr}M)^2\leqslant\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M).$$

(2) 注意到

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

故 $(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)$ 是 M 的一个特征值, 并且由(26)式可得

$$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2\leqslant\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

□

例题 0.22 证明:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$;

(2) 计算 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^{\alpha}}$, 并说明理由.

证明

(1) 注意到对 $\forall\alpha\geqslant0$, 都有

$$\left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}\right|\leqslant\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{n},$$

并且对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{1}{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+1\right)-\sin k\right]}{2\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\sin\left(n+1\right)-\sin1}{2\sin\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}$ 关于 $\alpha\geqslant0$ 一致收敛. 从而

$$\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\alpha\to0^+}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}.$$

(2) 注意到对 $\forall\alpha\in(0,1)$, 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{1}{2}\sin n}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\left(n+1\right)^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(n+1\right)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

由 Lagrange 中值定理知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $\xi\in(n,n+1)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(n+1\right)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}}\leqslant\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{n^{1+\alpha}}.$$

于是再结合 (1) 的结论可得

$$\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(n+1\right)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{\alpha\to0^+}\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}}=0.$$

故

$$\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

□

例题 0.23 计算广义积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{(x)}{x^{3}}\mathrm{d}x$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, 则 $(x)=x-n$).

证明 注意到 (x) 是周期为 1 的函数, 并且在 $[0,1)$ 上恒有 $(x)=x$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(x+k)}{(x+k)^3}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(x)}{(x+k)^3}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x}{(x+k)^3}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\left[\frac{1}{(x+k)^2}-\frac{k}{(x+k)^3}\right]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{(1+k)^2}-\frac{1}{k}\right)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{(1+k)^2}-\frac{1}{1+k}\right)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(1+k)^2}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right]-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-1\right)\\
&=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=1-\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.24 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减, 证明 $f(x)\equiv 0$.

证明 证法一: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, G(x)=\frac{F^2(x)}{2}$, 则

$$
g(x)=F(x)F'(x)=\left[\frac{F^2(x)}{2}\right]'=G'(x),
$$

由条件知 $g(x)=G'(x)$ 单调递减, 故 $G(x)$ 是上凸函数. 注意到 $G'(0)=g(0)=0$, 由 g 递减知,$G'(x)=g(x)\leqslant 0,\forall x>0$. 从而 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减. 故

$$
0\leqslant G(x)=\frac{F^2(x)}{2}\leqslant G(0)=0.
$$

因此 $G(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 于是 $F(x)\equiv 0$, 故 $f(x)=F'(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证法二: 证明: 若 $\exists X_0>0$, s.t. $f(X_0)\neq 0$. 不妨设 $f(X_0)>0$, 则由 g 递减知

$$
g(X_0)=f(X_0)\int_0^{X_0}f(t)\mathrm{d}t\leqslant g(0)=0\Rightarrow\int_0^{X_0}f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0.
$$

从而由积分中值定理知, $\exists\xi\in(0,X_0), s.t. f(\xi)\leqslant 0$ 于是由介值定理知, $\exists x_1\in(0,X_0), s.t. f(x_1)=0$. 记

$$
x_2\triangleq\sup\{x\in[x_1,X_0)\mid f(x)=0\}.
$$

则 $f(x)>0,\ \forall x\in(x_2,X_0)$, 否则,

$$
\exists\eta\in(x_2,X_0), s.t. f(\eta)\leqslant 0.
$$

由介值定理知, $\exists\eta'\in(x_2,X_0)$, s.t. $f(\eta')=0$. 这与上确界定义矛盾! 再记 $f(x')=\max\limits_{x\in[x_2,X_0]}f(x)$, 任取 $x_3\in(x_2,x')$. 则 $f(x_3)>0$, 进而 $\int_{x_3}^{x'}f(t)\mathrm{d}t>0$. 于是

$$
g(x_3)=f(x_3)\int_0^{x_3}f(t)\mathrm{d}t<f(x')\left(\int_0^{x_3}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_3}^{x'}f(t)\mathrm{d}t\right)
$$

$$= f(x')\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t = g(x').$$

这与 g 递减矛盾! 故 $f(x)=0, \forall x>0$. 同理可得 $f(x)=0, \forall x<0$. 再由 f 的连续性可知 $f(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

□

例题 0.25 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f(x)|\leqslant e^{-\sqrt{x}}, f'(x)=-3f(x)+6f(2x), \forall x\geqslant 0.$$

证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)<\infty.$$

并且证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)=0$$

的充要条件是 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证明 (1) 因为 $|f(x)|\leqslant e^{-\sqrt{x}}, \forall x\geqslant 0$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 注意到

$$\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t. \tag{27}$$

又 $\frac{3^n}{n!}\sim\frac{(3e)^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}, n\to\infty$. 故

$$\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t\sim\frac{(3e)^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}\int_0^{\infty}e^{(n+1)(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t,\quad n\to\infty.$$

由 Taylor 公式知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$\ln x-\sqrt{x}\geqslant -1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(x-1)^2-\varepsilon(x-1)^2, \forall x\in[1-\delta,1+\delta].$$
$$\ln x-\sqrt{x}\leqslant -1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(x-1)^2+\varepsilon(x-1)^2, \forall x\in[1-\delta,1+\delta].$$

于是

$$\int_0^{\infty}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t=\int_0^{1-\delta}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t+\int_{1-\delta}^{1+\delta}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t+\int_{1+\delta}^{+\infty}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t.$$

注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_0^{1-\delta}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 e^{n\ln t}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n}. \tag{28}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\frac{\sqrt{x}}{2}}=0$ 知, 存在 $X_1>1$, 使得

$$\ln x\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2}, \forall x\geqslant X_1.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{1+\delta}^{+\infty}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t&\leqslant\int_{1+\delta}^{X_1}e^{n\ln t}\mathrm{d}t+\int_{X_1}^{+\infty}e^{-\frac{n\sqrt{t}}{2}}\mathrm{d}t=\int_{1+\delta}^{X_1}t^n\mathrm{d}t+2\int_{\frac{nX_1}{2}}^{+\infty}te^{-t}\mathrm{d}t\\&\leqslant X_1^n+2(1+t)e^{-t}\Big|_{+\infty}^{\frac{nX_1}{2}}=X_1^{n+1}+(nX_1+2)e^{-\frac{nX_1}{2}}.\end{aligned} \tag{29}$$

由 (0.1) 式可得

$$\begin{aligned}\int_{1-\delta}^{1+\delta}e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t&\leqslant\int_{1-\delta}^{1+\delta}e^{n\left[-1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(x-1)^2+\varepsilon(x-1)^2\right]}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\delta}^{\delta}e^{n\left[-1+\frac{1}{2}x+\left(\varepsilon-\frac{3}{4}\right)x^2\right]}\mathrm{d}t\leqslant e^{n\left(\frac{1}{2}\delta-1\right)}\int_{-\delta}^{\delta}e^{\left(\varepsilon-\frac{3}{4}\right)nx^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}\int_0^{\delta} e^{-\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)nx^2}\mathrm{d}t = 2e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}\int_0^{\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n}\delta} e^{-x^2}\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

现在由 (28) (29) (30) 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{(3e)^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}\int_0^{\infty} e^{n(\ln t-\sqrt{t})}\mathrm{d}t &\leqslant \frac{(3e)^n}{\sqrt{n}n^n}\left[\frac{1}{n}+X_1^n+(nX_1+2)e^{-\frac{nX_1}{2}}+\sqrt{\pi}e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}\right] \\
&\leqslant \frac{(3e)^n}{\sqrt{n}n^n}\left[X_1^n+2nX_1e^{-\frac{nX_1}{2}}+\sqrt{\pi}e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}\right] \\
&\leqslant \frac{(3eX_1)^n+(3e)^n\cdot 2nX_1e^{n\left(\frac{\delta}{2}-1\right)}}{\sqrt{n}n^n} = \frac{(3eX_1)^n+2nX_1\cdot 3^n e^{\frac{n\delta}{2}}}{\sqrt{n}n^n}.
\end{aligned}
$$

故再由 (27) 式知

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.
$$

由 $f'(x) = -3f(x)+6f(2x)$ 可得

$$
\begin{aligned}
I_n \triangleq \frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{分部积分}} -\frac{3^n}{(n+1)!}\int_0^{\infty} x^{n+1}f\prime(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{\infty} x^{n+1}\left[f(x)-2f(2x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\left[\int_0^{\infty} x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^{\infty} x^{n+1}f(2x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\left[\int_0^{\infty} x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\infty} x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\cdot\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{\infty} x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\cdot I_{n+1}.
\end{aligned}
$$

故

$$
I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}I_n, \forall n\in\mathbb{N}.
$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$
I_n = \frac{2^n}{2^n-1}I_{n-1} = \cdots = \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\cdots\frac{2}{2-1}I_0 = \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots 1}I_0. \tag{31}
$$

(2) **充分性**: 由 $I_0 = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 和 (31) 式可得

$$
I_n = \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots 1}I_0 = 0.
$$

故

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = 0.
$$

必要性: 设

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = 0,
$$

则由 (31) 式可得

$$
0 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = I_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots 1}I_0 = I_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots 1}\right).
$$

因为

$$
1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots 1} > 0,
$$

所以 $I_0 = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.$ □

例题 0.26

证明

□

例题 0.27

证明

□

例题 0.28

证明

□

例题 0.29

证明

□