

0.1 第一型曲线积分

定义 0.1

设 L 为平面上可求长度的曲线段, $f(x, y)$ 为定义在 L 上的函数. 对曲线 L 作分割 T , 它把 L 分成 n 个可求长度的小曲线段 L_i ($i = 1, 2, \dots, n$), L_i 的弧长记为 Δs_i , 分割 T 的细度为 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$, 在 L_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) ($i = 1, 2, \dots, n$). 若有极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = J,$$

且 J 的值与分割 T 和点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称此极限为 $f(x, y)$ 在 L 上的**第一型曲线积分**, 记作

$$\int_L f(x, y) ds.$$

若 L 为空间可求长曲线段, $f(x, y, z)$ 为定义在 L 上的函数, 则可类似地定义 $f(x, y, z)$ 在空间曲线 L 上的**第一型曲线积分**, 并且记作

$$\int_L f(x, y, z) ds.$$



注 第一型曲线积分的几何意义: 若 L 为平面 Oxy 上分段光滑曲线, $f(x, y)$ 为定义在 L 上非负连续函数. 由第一型曲面积分的定义, 以 L 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面上截取 $0 \leq z \leq f(x, y)$ 的部分面积就是 $\int_L f(x, y) ds$.

定理 0.1

(1) 若 $\int_L f_i(x, y) ds$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 存在, c_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 为常数, 则 $\int_L \sum_{i=1}^k c_i f_i(x, y) ds$ 也存在, 且

$$\int_L \sum_{i=1}^k c_i f_i(x, y) ds = \sum_{i=1}^k c_i \int_L f_i(x, y) ds.$$

(2) 若曲线段 L 由曲线 L_1, L_2, \dots, L_k 首尾相接而成, 且 $\int_{L_i} f(x, y) ds$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 都存在, 则

$\int_L f(x, y) ds$ 也存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} f(x, y) ds.$$

(3) 若 $\int_L f(x, y) ds$ 与 $\int_L g(x, y) ds$ 都存在, 且在 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

(4) 若 $\int_L f(x, y) ds$ 存在, 则 $\int_L |f(x, y)| ds$ 也存在, 且

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

(5) 若 $\int_L f(x, y) ds$ 存在, L 的弧长为 s , 则存在常数 c , 使得

$$\int_L f(x, y) ds = cs,$$

这里 $\inf_L f(x, y) \leq c \leq \sup_L f(x, y)$.



证明



定理 0.2

设有光滑曲线

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

函数 $f(x, y)$ 为定义在 L 上的连续函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (1)$$

特别地, 当曲线 L 由方程

$$y = \psi(x), \quad x \in [a, b]$$

表示, 且 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数时, (1) 式成为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx;$$

当曲线 L 由方程

$$x = \varphi(y), \quad y \in [c, d]$$

表示, 且 $\varphi(y)$ 在 $[c, d]$ 上有连续导函数时, (1) 式成为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy.$$



证明 由弧长公式知道, L 上由 $t = t_{i-1}$ 到 $t = t_i$ 的弧长

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

由 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 的连续性与积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i \quad (t_{i-1} < \tau'_i < t_i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau''_i), \psi(\tau''_i)) \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i,$$

这里 $t_{i-1} \leq \tau'_i, \tau''_i \leq t_i$. 设

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau''_i), \psi(\tau''_i)) \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau''_i) + \psi'^2(\tau''_i)} \right] \Delta t_i,$$

则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau''_i), \psi(\tau''_i)) \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i + \sigma. \quad (2)$$

令 $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$, 则当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, 必有 $\Delta t \rightarrow 0$. 现在证明 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma = 0$.

因为复合函数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ 关于 t 连续, 所以在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 即存在常数 M , 使对一切 $t \in [\alpha, \beta]$, 都有

$$|f(\varphi(t), \psi(t))| \leq M.$$

再由 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以它在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使当 $\Delta t < \delta$ 时有

$$\left| \sqrt{\varphi'^2(\tau''_i) + \psi'^2(\tau''_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \right| < \varepsilon,$$

从而

$$|\sigma| \leq \varepsilon M \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

所以

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma = 0.$$

再由定积分定义,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i''), \psi(\tau_i'')) \sqrt{\varphi'^2(\tau_i'') + \psi'^2(\tau_i'')} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

因此当在(2)式两边取极限后, 即得所要证的(1)式.

□