

0.1 线性方程组的解及其应用

0.1.1 线性方程组的解的讨论

命题 0.1

线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解当且仅当 $r(A) = r(B)$.

证明

□

例题 0.1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 记 α_i 是 A 的第 i 个行向量, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. 求证: 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解全是方程 $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0$ 的解, 则 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

证明 令 $B = \begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}$, 由已知, 方程组 $Ax = 0$ 和方程组 $Bx = 0$ 同解, 故 $r(A) = r(B)$, 从而 A 的行向量的极大无关组也是 B 的行向量的极大无关组. 因此, β 可表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合. □

例题 0.2 设 $Ax = \beta$ 是 m 个方程式 n 个未知数的线性方程组, 求证: 它有解的充要条件是方程组 $A'y = 0$ 的任一解 α 均适合等式 $\alpha'\beta = 0$.

证明 方程组 $Ax = \beta$ 有解当且仅当 $r(A|\beta) = r(A)$, 当且仅当 $r\begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix} = r(A')$, 当且仅当方程组 $\begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix} y = 0$ 与 $A'y = 0$ 同解, 而这当且仅当 $A'y = 0$ 的任一解 α 均适合等式 $\beta'\alpha = 0$, 即 $\alpha'\beta = 0$. □

例题 0.3 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m = 1. \end{cases} \quad (2)$$

求证: 方程组(1)有解的充要条件是方程组(2)无解.

证明 设第一个线性方程组的系数矩阵为 A , 常数向量为 β , 则第二个线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} A' & O \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 由矩阵初等变换可知, 我们有 $r(\tilde{B}) = r(A') + 1 = r(A) + 1$.

若方程组(1)有解, 则 $r(A|\beta) = r(A)$, 故 $r(B) = r(B') = r(A|\beta) = r(A) \neq r(\tilde{B})$. 因此, 方程组(2)无解.

反之, 若方程组(1)无解, 则 $r(A|\beta) = r(A) + 1$, 故 $r(B) = r(B') = r(A|\beta) = r(A) + 1 = r(\tilde{B})$. 因此, 方程组(2)有解, 矛盾! □

命题 0.2

设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 求证: 必存在秩为 $n-r$ 的 $n \times (n-r)$ 矩阵 B , 使得 $AB = O$.

证明 考虑线性方程组 $Ax = 0$, 它有 $n-r$ 个基础解系, 不妨设为 $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$. 令 $B = (\beta_1, \dots, \beta_{n-r})$, 则 $AB =$

$(A\beta_1, \dots, A\beta_{n-r}) = O$, 结论得证. □

例题 0.4 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m < n),$$

已知 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})' (1 \leq i \leq n-m)$, 试求齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j = 0 (i = 1, 2, \dots, n-m)$$

的基础解系.

解 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m})$, 则 $AB = O, B'A' = O$. 因为 $Ax = 0$ 有 $n-m$ 个基础解系, 所以 A 的秩为 m . 又由于 $r(B) = r(B) = n-m$, 因此 $B'y = 0$ 的基础解系有 m 个. 故 $B'y = 0$ 的基础解系为 A' 的全部列向量, 即 A 的所有行向量. □

命题 0.3

设 V_0 是数域 \mathbb{F} 上 n 维列向量空间的真子空间, 求证: 必存在矩阵 A , 使得 V_0 是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间. ♣

证明 设 β_1, \dots, β_r 是子空间 V_0 的一组基. 令 $B = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, 这是一个 $n \times r$ 矩阵. 考虑齐次线性方程组 $B'x = 0$, 因为 B 的秩等于 r , 故其基础解系含 $n-r$ 个向量, 记为 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$. 令 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})'$, 这是个 $(n-r) \times n$ 矩阵且秩为 $n-r$. 由 $B'A' = O$ 可得 $AB = O$, 因此齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系是 β_1, \dots, β_r , 其解空间就是 V_0 . □

注 设 β_1, \dots, β_r 是子空间 V_0 的一组基. 令 $B = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, 这是一个 $n \times r$ 矩阵. 也可以由命题 0.2 直接得到存在矩阵 A , 使得 $AB = O$, 因此齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系是 β_1, \dots, β_r , 其解空间就是 V_0 .

例题 0.5 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个基础解系. 求证: 必存在 $n-r$ 阶可逆矩阵 P , 使得

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})P.$$

证明 设 U 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间, 则向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ 是 U 的两组基. 令 P 是这两组基之间的过渡矩阵, 则

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})P.$$

□

定理 0.1 (线性方程组有解的充要条件)

1. 设 A, B 为 $m \times n$ 和 $m \times p$ 矩阵, X 为 $n \times p$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件是 $r(A \ B) = r(A)$.
2. 设 A, B 为 $m \times n$ 和 $p \times n$ 矩阵, X 为 $p \times m$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $XA = B$ 有解的充要条件是 $r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A)$. ♥

 **笔记** 实际上, 这就是线性方程组解的存在定理.

证明

1. 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \dots, \beta_p), X = (x_1, \dots, x_p)$ 为对应的列分块. 设 $r(A) = r$ 且 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 A 的列向量的极大无关组. 注意到矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $Ax_i = \beta_i (1 \leq i \leq p)$ 都有解. 因此, 若 $AX = B$ 有解, 则每个 β_i 都是 A 的列向量的线性组合, 从而是 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 的线性组合, 于是

$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $(A|B)$ 的列向量的极大无关组, 故 $r(A|B) = r$.

反之, 若 $r(A|B) = r$, 则由命题 ??(1) 可知, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $(A|B)$ 的列向量的极大无关组, 于是每个 β_i 都是 A 的列向量的线性组合, 从而 $AX = B$ 有解.

2. 线性方程组 $XA = B$ 两边取转置可得 $A'X' = B'$, 从而

线性方程组 $XA = B$ 有解 \Leftrightarrow 线性方程组 $A'Y = B'$ 有解.

又由第一问可知

线性方程组 $A'Y = B'$ 有解 $\Leftrightarrow r(A' \ B') = r(A')$.

而 $r(A') = r(A)$, $r(A' \ B') = r((A' \ B')') = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 故

线性方程组 $XA = B$ 有解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A)$.

□

推论 0.1

设 A 为 $m \times p$ 矩阵, B 为 $m \times q$ 矩阵, C 为 $n \times p$ 矩阵, D 为 $n \times q$ 矩阵, X 为 $p \times q$ 未知矩阵, Y 为 $n \times m$ 未知矩阵, 若 $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A)$, 则矩阵方程 $AX = B, YA = C$ 都有解.

♥

注 这个结论反过来并不成立.

证明 由命题 ??(7) 知

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\geq r(A \ B) \geq r(A), \\ r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\geq r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \geq r(A). \end{aligned}$$

由 $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A)$ 可知 $r(A \ B) = r(A)$, $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A)$. 于是由定理 0.1 可知, 此时矩阵方程 $AX = B, YA = C$ 都有解.

□

命题 0.4

矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 p 个线性方程组 $Ax_i = \beta_i (1 \leq i \leq p)$ 都有解. 从而每个 β_i 都是 A 的列向量的线性组合.

♣

证明 证明是显然的.

□

命题 0.5

设 A, B 为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 矩阵, 证明: 存在 $p \times n$ 矩阵 C , 使得 $ABC = A$ 的充要条件是 $r(A) = r(AB)$.

♣

证明 必要性由秩的不等式 $r(A) \geq r(AB) \geq r(ABC) = r(A)$ 即得.

充分性由秩的不等式可知 $r(A) = r(AB) \leq r(AB|B) = r(A(B|I_n)) \leq r(A)$. 故 $r(A) = r(AB|B)$. 于是由定理 0.1 可知, 矩阵方程 $ABX = A$ 有解. 即存在 $p \times n$ 矩阵 C , 使得 $ABC = A$ 的充要条件是 $r(A) = r(AB)$.

□

0.1.2 线性方程组的公共解

对两个非齐次线性方程组, 若只已知它们的通解, 而不知道方程组本身, 要求它们的公共解, 我们可以这样来做: 设 $Ax = \beta_1, Bx = \beta_2$ 是两个含 n 个未知数的非齐次线性方程组. 方程组 $Ax = \beta_1$ 有特解 γ 且 $Ax = 0$ 的基础

解系为 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$. 方程组 $Bx = \beta_2$ 有特解 δ 且 $Bx = 0$ 的基础解系为 ξ_1, \dots, ξ_{n-s} .

方法一: 假设它们的公共解为 $\gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r}$, 则 $\gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} - \delta$ 是 $Bx = 0$ 的解, 因此可以表示为 ξ_1, \dots, ξ_{n-s} 的线性组合. 于是矩阵 $(\xi_1, \dots, \xi_{n-s}, \gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} - \delta)$ 的秩等于 $n-s$. 由此可以求出 t_1, \dots, t_{n-r} , 从而求出公共解.

方法二: 假设它们的公共解为 ζ , 则

$$\zeta = \gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} = \delta + (-u_1)\xi_1 + \dots + (-u_{n-s})\xi_{n-s}.$$

要求公共解 ζ 等价于求解下列关于未定元 $t_1, \dots, t_{n-r}; u_1, \dots, u_{n-s}$ 的线性方程组:

$$t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} + u_1\xi_1 + \dots + u_{n-s}\xi_{n-s} = \delta - \gamma.$$

例题 0.6 设有两个非齐次线性方程组 (I), (II), 它们的通解分别为

$$\gamma + t_1\eta_1 + t_2\eta_2; \delta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

其中 $\gamma = (5, -3, 0, 0)'$, $\eta_1 = (-6, 5, 1, 0)'$, $\eta_2 = (-5, 4, 0, 1)'$; $\delta = (-11, 3, 0, 0)'$, $\xi_1 = (8, -1, 1, 0)'$, $\xi_2 = (10, -2, 0, 1)'$. 求这两个方程组的公共解.

证明 解法一: 设公共解为

$$\gamma + t_1\eta_1 + t_2\eta_2 = \begin{pmatrix} 5 - 6t_1 - 5t_2 \\ -3 + 5t_1 + 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

注意矩阵 $(\xi_1, \xi_2, \gamma - \delta + t_1\eta_1 + t_2\eta_2)$ 的秩等于 2, 对此矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 16 - 6t_1 - 5t_2 \\ -1 & -2 & -6 + 5t_1 + 4t_2 \\ 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 8 & 10 & 16 - 6t_1 - 5t_2 \\ -1 & -2 & -6 + 5t_1 + 4t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 16 - 14t_1 - 15t_2 \\ 0 & 0 & -6 + 6t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

可得关于 t_1, t_2 的方程组

$$\begin{cases} 14t_1 + 15t_2 = 16, \\ 6t_1 + 6t_2 = 6. \end{cases}$$

解得 $t_1 = -1, t_2 = 2$, 所以公共解为 (只有一个向量) $\gamma - \eta_1 + 2\eta_2 = (1, 0, -1, 2)'$.

解法二: 求公共解等价于求解下列线性方程组:

$$t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + u_1\xi_1 + u_2\xi_2 = \delta - \gamma.$$

对其增广矩阵实施初等行变换, 可得

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 8 & 10 & -16 \\ 5 & 4 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

故 (t_1, t_2, u_1, u_2) 只有唯一解 $(-1, 2, 1, -2)$. 因此, 公共解为 $\gamma - \eta_1 + 2\eta_2 = \delta - \xi_1 + 2\xi_2 = (1, 0, -1, 2)'$. □

例题 0.7 设有非齐次线性方程组 (I):

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = b, \\ 8x_1 - 9x_2 + ax_4 = 7. \end{cases}$$

又已知方程组 (II) 的通解为

$$(1, 1, 1, 0)' + t_1(1, 0, -1, 0)' + t_2(2, 3, 0, 1)'.$$

若这两个方程组有无穷多组公共解, 求出 a, b 的值并求出公共解.

证明 将 (II) 的通解写为 $(1+t_1+2t_2, 1+3t_2, -t_1, t_2)'$, 代入方程组 (I) 化简得到

$$\begin{cases} 4t_1 - 4t_2 = b - 1, \\ 8t_1 + (a - 11)t_2 = 8. \end{cases}$$

要使这两个方程组有无穷多组公共解, t_1, t_2 必须有无穷多组解, 于是上面方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都应该等于 1, 从而 $a = 3, b = 5$. 解出方程组得到 $t_1 = t_2 + 1$, 因此方程组 (I), (II) 的公共解为

$$(1+t_1+2t_2, 1+3t_2, -t_1, t_2)' = (2, 1, -1, 0)' + t_2(3, 3, -1, 1)',$$

其中 t_2 为任意数. □

0.1.3 在解析几何上的应用

命题 0.6

求平面上 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 位于同一条直线上的充要条件. ▲

证明 充要条件为第一个点和其余点代表的向量之差属于一个一维子空间, 即 $(x_i - x_1, y_i - y_1)$ 都成比例. 写成矩阵形式为

$$r \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \cdots & y_n - y_1 \end{pmatrix} \leq 1,$$

或

$$r \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leq 2. \quad \square$$

命题 0.7

求三维实空间中 4 点 $(x_i, y_i, z_i) (1 \leq i \leq 4)$ 共面的充要条件. ▲

证明 设 4 点的向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 则 4 点共面的充要条件是: 向量组 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_4 - \alpha_1$ 的秩不超过 2. 不难将此写成矩阵形式:

$$r \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \leq 2,$$

或

$$r \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq 3. \quad \square$$

例题 0.8 证明: 通过平面内不在一条直线上的 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的圆方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 圆方程可设为

$$u_1(x^2 + y^2) + u_2x + u_3y + u_4 = 0,$$

于是得到未知数 u_1, u_2, u_3, u_4 的方程组为

$$\begin{cases} (x_1^2 + y_1^2)u_1 + x_1u_2 + y_1u_3 + u_4 = 0, \\ (x_2^2 + y_2^2)u_1 + x_2u_2 + y_2u_3 + u_4 = 0, \\ (x_3^2 + y_3^2)u_1 + x_3u_2 + y_3u_3 + u_4 = 0. \end{cases}$$

上述方程组加上原方程组成一个含 4 个未知数、4 个方程式的齐次线性方程组, 它有非零解的充要条件是系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由命题 0.6 可知 3 点不在一条直线上意味着

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故圆方程不退化. □

命题 0.8

求平面上不在一条直线上的 4 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 位于同一个圆上的充要条件. ▲

证明 由例 0.8 可得充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

例 0.9 已知平面上两条不同的二次曲线 $a_ix^2 + b_ixy + c_iy^2 + d_ix + e_iy + f_i = 0 (i = 1, 2)$ 交于 4 个不同的点 $(x_i, y_i) (1 \leq i \leq 4)$. 求证: 过这 4 个点的二次曲线均可写为如下形状:

$$\lambda_1(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1) + \lambda_2(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0.$$

证明 显然上述曲线过这 4 个交点. 现设 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 是过这 4 个交点的二次曲线, 则有

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0, \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f = 0, \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f = 0, \\ ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + ey_4 + f = 0. \end{cases} \quad (3)$$

视 a, b, c, d, e, f 为未知数, 则线性方程组 (3) 有线性无关的解 $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)', (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2)'$. 如果能证明方程组 (3) 的系数矩阵的秩等于 4, 则这两个解就构成了基础解系, 从而即得结论.

容易验证 4 个交点中的任意 3 个点都不共线, 而且经过坐标轴适当的旋转, 可以假设这 4 个交点的横坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相同. 用反证法证明结论, 设方程组 (3) 系数矩阵 A 的秩小于 4. 由任意 3 个交点不共线以及命题 0.6 知, $(x_1, x_2, x_3, x_4)', (y_1, y_2, y_3, y_4)', (1, 1, 1, 1)'$ 线性无关, 从而它们是 A 的列向量的极大无关组, 于是 $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)'$ 是它们的线性组合, 故可设 $x_i^2 = rx_i + sy_i + t (1 \leq i \leq 4)$, 其中 r, s, t 是实数. 由于 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相同, 故 $s \neq 0$, 于是 $y_i = \frac{1}{s}x_i^2 - \frac{r}{s}x_i - \frac{t}{s} (1 \leq i \leq 4)$. 考虑 A 的第一列、第二列、第四列和第六列构成的四阶行列式 $|B|$, 利用 Vander - monde 行列式容易算出 $|B| = -\frac{1}{s} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j) \neq 0$, 于是 A 的秩等于 4, 这与假设矛盾. 因此

方程组 (3) 的系数矩阵的秩只能等于 4.

□