

## 0.1 唯一析因环 (唯一分解整环)(UFD)

### 定理 0.1

设  $R$  是交换整环, 由命题????知  $R^* = R \setminus \{0\}$  对乘法构成交换幺半群且消去律成立. 以  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则  $U$  对乘法构成一个 Abel 群, 称为  $R$  的**单位群**.  $U$  中元素称为  $R$  的**单位**.



证明



### 定义 0.1 (整数)

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $a, b \in R^*$ , 若  $\exists c \in R^*$ , 使  $b = ac$ , 则称  $a$  能**整除**  $b$ , 或  $a$  是  $b$  的**因子**, 或  $b$  是  $a$  的**倍式**. 记为  $a|b$ .  $a$  不能整除  $b$ , 记为  $a \nmid b$ .



### 定义 0.2 (相伴)

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $a, b \in R^*$ , 且  $a|b, b|a$ , 则称  $a$  与  $b$  **相伴**, 记为  $a \sim b$ .



### 定理 0.2

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $a, b \in R^*$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则

- (1)  $a|a, \forall a \in R^*$ .
- (2) 若  $a|b, b|c$ , 则  $a|c$ .
- (3) 若  $u \in U$ , 则  $u|a, \forall a \in R^*$ .
- (4)  $u \in U \iff u|1$ .
- (5)  $a \sim b \iff \exists u \in U$ , 使  $b = au$ .
- (6) 相伴关系是幺半群  $R^*$  中的同余关系.
- (7)  $u \in U \iff u \sim 1$ .



证明

- (1) 这是因为  $a = 1 \cdot a$ .
- (2) 由  $b = ad, c = be$  得  $c = a(de)$ .
- (3) 这是因为  $a = u(u^{-1}a)$ .
- (4) 由**性质 (3)**知  $u \in U$  时,  $u|1$ . 反之, 若  $u|1$ , 即有  $v$ , 使得  $1 = vu$ , 故  $v = u^{-1} (u \in U)$ .
- (5) 事实上, 若  $b = au (u \in U)$ , 则  $a = bu^{-1}$ . 因而  $a|b, b|a$ , 即  $a \sim b$ .  
反之, 若  $a|b, b|a$ , 即有  $c, d \in R^*$ , 使得  $b = ac, a = bd$ . 于是  $b = b(dc)$ . 由命题????知  $R^*$  对乘法满足消去律, 故  $dc = 1$ , 因而  $d, c \in U$ .
- (6) 相伴关系显然是等价关系. 设  $a \sim b, c \sim d$ . 于是  $\exists u_1, u_2 \in U$ , 使得  $b = au_1, d = cu_2$ . 于是  $bd = ac(u_1u_2)$ . 由  $u_1u_2 \in U$  及**性质 (5)**知  $ac \sim bd$ , 即相伴关系是同余关系.
- (7) 注意到  $1 \in U$ , 故由**性质 (3)**知  $1|u$ . 再由**性质 (4)**知  $u \in U \iff u|1 \iff u \sim 1$ .



### 定义 0.3

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则  $\forall u \in U, a \in R^*$ , 由**定理 0.2(1)**和**定理 0.2(3)**知  $u$  是  $a$  的因子, 这种因子称为**平凡因子**.



**定义 0.4**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $a, b \in R^*$ . 若  $b|a$ , 但  $a \nmid b$ , 则称  $b$  为  $a$  的**真因子**. 换言之,  $b$  为  $a$  的真因子当且仅当  $b$  是  $a$  的因子且  $b$  与  $a$  不相伴.

**定理 0.3**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则如果  $u \in U$ , 则  $u$  无真因子.

**证明** 事实上若  $v$  是  $u$  的因子, 即  $v|u$ , 又由**定理 0.2(4)**知  $u|1$ , 故  $v|1$ , 因而再由**定理 0.2(4)**知  $v \in U \subseteq R^*$ , 故由**定理 0.2(3)**知  $u|v$ . 因此  $v \sim u$ , 由此知  $u$  无真因子.

**定义 0.5**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合,  $a \in R^* \setminus U$ . 若  $a$  无非平凡的真因子, 则称  $a$  为**不可约元素**. 若  $a$  有非平凡的真因子, 则称  $a$  为**可约元素**.

**命题 0.1**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合,  $u \in U$ ,  $a$  为  $R$  的不可约元素, 则  $au$  也是不可约的. 进而, 若  $a \sim b$ , 则  $b$  也不可约.

**证明** 反证, 假设  $au$  可约, 则存在  $e \in R^*$  为  $au$  的非平凡真因子. 从而存在  $x \in R^*$ , 使  $au = ex$ , 进而  $a = exu^{-1}$ . 于是  $e$  也是  $a$  的非平凡真因子, 这与  $a$  不可约矛盾! 故  $au$  不可约. 由**定理 0.2(5)**可知存在  $u' \in U$ , 使  $b = au'$ . 由之前证明知  $b = au'$  也不可约.

**定义 0.6**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 若  $p \in R^* \setminus U$  且满足

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ 或 } p|b,$$

则称  $p$  为**素元素**.

**例题 0.1** 在整数环  $\mathbf{Z}$  中,  $U = \{1, -1\}$ , 于是  $a \sim b \iff a = \pm b$ , 因而  $a$  为不可约元素当且仅当  $a$  为素数或负素数. 并且整数环  $\mathbf{Z}$  的不可约元素都是素元素.

**证明**

**例题 0.2** 设  $\mathbf{P}$  为数域, 则  $\mathbf{P}$  上一元多项式环  $\mathbf{P}[x]$  为交换整环. 此时  $U = \mathbf{P}^* = \mathbf{P} \setminus \{0\}$ .  $f(x) \sim g(x) \iff \exists c \in \mathbf{P}^*$ , 使得  $f(x) = cg(x)$ , 因而  $f(x)$  为不可约元素当且仅当  $f(x)$  为不可约多项式. 并且一元多项式环  $\mathbf{P}[x]$  的不可约元素都是素元素.

**证明**

**引理 0.1**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则  $R$  中的素元素一定是不可约元素.

**注** 不可约元素不一定是素元素, 反例见**例题 0.3**.

**证明** 若  $a$  是素元素  $p$  的一个因子, 即有  $b \in R^*$ , 使  $p = ab$ , 因而  $p|a$  或  $p|b$ . 在  $p|a$  的情况, 说明  $a$  不是  $p$  的真因子. 若  $p|b$ , 即有  $c \in R^*$ , 使  $b = pc$ , 于是  $p = pac$ , 由**命题 0.1**知  $R^*$  对乘法满足消去律, 故  $ac = 1$ , 从而  $a \in U$ , 即  $a$  为平凡因子. 这说明  $p$  没有非平凡的真因子, 故  $p$  是不可约元素.

□

**例题 0.3** 令  $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ . 设  $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ , 称  $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{-5}$  为  $\alpha$  的共轭, 称  $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 + 5b^2$  为  $\alpha$  的范数, 显然  $N(\alpha) \in \mathbf{Z}$  且  $N(\alpha) \geq 0$ , 当且仅当  $\alpha = 0$  时等号成立. 则  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  的单位群  $U = \{1, -1\}$ , 且 3 是  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  的不可约元素, 但不是  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  的素元素.

**证明** 注意到  $\forall \alpha, \beta \in R$  有  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ . 先求  $R$  的单位群  $U$ .  $\alpha \in U$ , 则有  $\alpha\alpha^{-1} = 1$ , 故  $N(\alpha)N(\alpha^{-1}) = N(1) = 1$ , 故  $N(\alpha) = 1$ . 由此即得  $U = \{1, -1\}$ , 因而  $\alpha \sim \beta \iff \alpha = \pm\beta$ .

再证明 3 是  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  的不可约元素, 但不是  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  的素元素. 设  $\alpha = a + b\sqrt{-5}$  是 3 的一个因子, 故有  $\beta$ , 使  $3 = \alpha\beta$ , 于是  $N(3) = N(\alpha)N(\beta)$ . 由  $N(3) = 9$  知  $N(\alpha)$  有以下三种可能:

- (1)  $N(\alpha) = 1$ , 则  $\alpha = \pm 1$ , 即  $\alpha$  是 3 的平凡因子;
- (2)  $N(\alpha) = 3$ , 于是  $a^2 + 5b^2 = 3$ , 但此方程无整数解, 故这种情况不存在;
- (3)  $N(\alpha) = 9$ , 于是  $N(\beta) = 1, \beta = \pm 1$ , 即有  $\alpha = \pm 3, \alpha \sim 3$ , 即  $\alpha$  不是 3 的真因子.

由上知 3 是不可约元素. 另一方面,  $3 \mid 9, 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ . 由于  $N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = N(3) = 9$ , 而 3 与  $2 \pm \sqrt{-5}$  不相伴, 因而  $3 \nmid 2 \pm \sqrt{-5}$ , 即 3 不是素元素. □

### 定义 0.7

若一个交换整环  $R$  的不可约元素是素元素, 则称  $R$  满足**素性条件**.

♣

### 定义 0.8

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $b, c \in R^*$ . 若  $d \in R^*$  满足  $d \mid b, d \mid c$ , 则称  $d$  为  $b, c$  的**公因子**. 若对  $b, c$  的任一公因子  $d_1$  有  $d_1 \mid d$ , 则称  $d$  是  $b, c$  的**最大公因子**.

对  $R^*$  中任意有限个元素也可类似地定义它们的最大公因子.

♣

**注** 一般来说,  $R^*$  中任意两个元素的最大公因子不一定存在.

### 定义 0.9

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ , 如果  $R^*$  中任意两个元素的最大公因子存在, 则称  $R$  满足**最大公因子条件**.

♣

### 引理 0.2

设交换整环  $R$  满足最大公因子条件,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $a, b, c \in R^*$ , 则有下列结论:

- (1) 设  $d$  是  $a, b$  的一个最大公因子, 则  $d_1$  为  $a, b$  的最大公因子当且仅当  $d_1 \sim d$ , 即  $a, b$  的最大公因子在相伴意义下是唯一的, 记为  $(a, b)$ . 若  $(a, b) \sim 1$ , 则称  $a$  与  $b$  为**互素**;
- (2)  $\forall a_1, a_2, \dots, a_r \in R^*$  均有最大公因子;
- (3) 若  $b \sim c$ , 则  $(a, b) \sim (a, c)$ .
- (4)  $((a, b), c) \sim (a, (b, c))$ ;
- (5)  $c(a, b) = (ca, cb)$ ;
- (6) 若  $a \in U$ , 则  $(a, b) = 1$ .
- (7) 若  $(a, b) \sim 1, (a, c) \sim 1$ , 则  $(a, bc) \sim 1$ .
- (8) 若  $p$  是不可约元素, 则  $p \nmid a \iff (p, a) \sim 1$ .

♡

**证明**

- (1) 由于  $d, d_1$  是  $a, b$  的最大公因子, 故  $d \mid d_1, d_1 \mid d$ . 于是  $d \sim d_1$ . 反之,  $d_1 \sim d$ , 故  $d_1 \mid d$ . 又  $d \mid a, b$ , 于是  $d_1 \mid a, b$ , 因而  $d_1$  是  $a, b$  的公因子. 又若  $c$  是  $a, b$  的公因子, 则  $c \mid d$ , 而  $d \mid d_1$ , 故有  $c \mid d_1$ , 因而  $d_1$  是  $a, b$  的最大公因子.
- (2) 令  $d_1 = (a_1, a_2), d_2 = (d_1, a_3), d_3 = (d_2, a_4), \dots, d = d_{r-1} = (d_{r-2}, a_r)$ . 下面证明  $d$  是  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的最大公因子. 显然有  $d \mid d_k$  ( $1 \leq k \leq r-2$ ),  $d \mid a_r$ . 又  $d_k \mid a_{k+1}$ , 故  $d \mid a_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), 即  $d$  为公因子. 又若  $a \mid a_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), 则  $a \mid d_1$  且依次  $a \mid d_2, a \mid d_3, \dots$ , 最后有  $a \mid d_{r-1}$ , 即  $a \mid d$ , 因而  $d$  是最大公因子.

- (3) 设  $d = (a, b)$ , 则  $d \mid a, b$ . 由  $b \sim c$  知  $b \mid c$ , 故  $d \mid a, c$ , 即  $d$  是  $a, c$  的公因子. 又设  $d_1$  也是  $a, c$  的公因子, 又  $b \sim c$ , 故  $c \mid b$ , 从而  $d_1 \mid a, b$ , 即  $d_1$  是  $a, b$  的公因子. 故  $d_1 \mid d$ . 因此  $d$  是  $a, c$  的最大公因子. 由结论 (1) 知  $d \sim (a, c)$ .
- (4) 由结论 (2) 同理可知  $((a, b), c)$  与  $(a, (b, c))$  都是  $a, b, c$  的最大公因子. 由结论 (1) 知它们相伴.
- (5) 设  $d = (a, b), e = (ca, cb)$ , 则  $cd \mid ca, cd \mid cb$ . 于是  $cd \mid e$ , 因而  $e = cdu (u \in R^*)$ . 又由  $ca \mid e$  知  $ca = ex (x \in R^*)$ . 由此知  $ca = ex = xucd$ . 由命题????知  $R^*$  对乘法满足消去律, 故  $a = xud$ , 即  $ud \mid a$ , 同样有  $ud \mid b$ , 故  $ud \mid d$ , 于是  $d = udk (k \in R^*)$ , 同样由  $R^*$  对乘法满足消去律可得  $uk = 1$ , 因而  $u \in U$ . 于是由定理 0.2(5) 知  $e$  与  $cd$  相伴.
- (6) 显然  $1 \mid a, b$ . 设  $d \mid a, b$ , 则存在  $a_1 \in R^*$ , 使  $a = da_1$ . 于是由  $a \in U$  知  $1 = aa^{-1} = d(a_1a^{-1})$ , 故  $d \mid 1$ . 因此  $(a, b) = 1$ .
- (7) 因为  $(a, b) \sim 1, (1, c) \sim 1$ , 由结论 (5) 知  $(ac, bc) \sim c, (a, ac) \sim a$ , 故由结论 (4) 及结论 (3) 有  $1 \sim (a, c) \sim (a, (ac, bc)) \sim ((a, ac), bc) \sim (a, bc)$ .
- (8)  $\Leftarrow$ : 假设  $p \mid a$ , 则存在  $a_1 \in R^*$ , 使  $a = pa_1$ . 于是由结论 (5) 和结论 (6) 知  $1 \sim (p, a) = (p, pa_1) = p(1, a_1) = p$ . 但由  $p$  不可约知  $p \notin U$ , 由定理 0.2(5) 知  $p \nmid 1$ , 矛盾!
- $\Rightarrow$ : 设  $d = (p, a)$ , 则存在  $p_1, a_1 \in R^*$ , 使  $p = dp_1, a = da_1$ . 假设  $d \nmid 1$ , 则由定理 0.2(5) 知  $d \notin U$ , 从而  $d \in R^* \setminus U$ . 若  $p \mid d$ , 则由  $d \mid a$  知  $p \mid a$ , 这与  $p \nmid a$  矛盾! 故  $p \nmid d$ .
- 若  $d \neq p$ , 则由  $p = dp_1, p \nmid d$  及  $d \in R^* \setminus U$  知  $d$  是  $p$  的非平凡真因子, 这与  $p$  不可约矛盾!
- 若  $d = p$ , 则由  $a = da_1$  知  $a = pa_1$ , 即  $p \mid a$ , 这与  $p \nmid a$  矛盾!
- 因此  $d \mid 1$ , 故  $d \sim 1$ .

□

**定义 0.10 (唯一析因环)**

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 如果  $R$  满足下列条件:

- (1) **有限析因条件**:  $\forall a \in R^* \setminus U$ , 可分解为有限个不可约元素的乘积, 即有不可约元素  $p_i (1 \leq i \leq r)$  及单位  $u \in U$ , 使

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

- (2) 若  $a \in R^* \setminus U$  有两种不可约元素乘积的分解:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

则有  $r = s$  且  $\exists \pi \in S_n$ , 使  $p_i \sim q_{\pi(i)} (1 \leq i \leq r)$ .

那么称  $R$  为**唯一析因环** (简记为 **UFD**) 或**唯一分解整环**或 **Gauss 环**. 称  $|a| \triangleq r$  为  $a$  的**长度**. 若  $u \in U$ , 约定  $|u| \triangleq 0$ .



**注** 所谓唯一析因环也就是使因式分解唯一性定理成立的交换整环, 因而前面例题 0.1 与例题 0.2 中的环  $\mathbf{Z}$  与  $\mathbf{P}[x]$  都是 UFD, 而例题 0.3 中的环  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  就不是. 因为  $9 = 3^2$  与  $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$  是 9 的两种本质上不同的分解, 即  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  不满足唯一析因环定义中的条件 (2).

**定理 0.4**

设  $R$  是唯一析因环 (UFD),  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则

- (1) 对  $\forall a \in R^* \setminus U$ , 都存在  $r \in \mathbf{N}$ , 单位  $u \in U$  以及互不相伴的不可约元素  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , 使

$$a = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad n_i \in \mathbf{N}.$$

若  $c$  是  $a$  的一个非平凡因子, 则存在  $u_1 \in U$  以及  $n'_i \leq n_i$  且  $n'_i \in \mathbf{N} (i = 1, 2, \dots, r)$ , 使

$$c = u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

(2) 若  $a, b \in R^* \setminus U$ , 则存在  $r \in \mathbf{N}$ , 单位  $u, v \in U$  以及互不相伴的不可约元素  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , 使

$$a = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad u \in U, n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\};$$

$$b = vp_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad v \in U, m_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

若还有  $d$  是  $a, b$  的公因子, 则存在  $w \in U$  以及  $n'_i \leq \min\{n_i, m_i\}$  且  $n'_i \in \mathbf{N} (i = 1, 2, \dots, r)$ , 使

$$d = wp_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$



### 证明

(1) 由  $a$  满足有限析因条件知, 存在不可约元素  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , 使得

$$a = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

将  $q_1, q_2, \dots, q_s$  按相伴关系分类, 不妨设存在  $r \in \mathbf{N}$  和

$$0 = i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r = s,$$

使  $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}$  互不相伴且

$$q_{i_0+1} = q_1 \sim q_2 \sim \cdots \sim q_{i_1};$$

$$q_{i_1+1} \sim q_{i_1+2} \sim \cdots \sim q_{i_2};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$q_{i_{r-1}+1} \sim q_{i_{r-1}+2} \sim \cdots \sim q_{i_r} = q_s.$$

由定理 0.2(5) 知存在

$$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, i_1-1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2, i_2-1}, \dots, u_{r1}, u_{r2}, \dots, u_{r, i_r-1} \in U,$$

使得

$$q_1 = u_{11}q_{i_1}, \quad q_2 = u_{12}q_{i_1}, \dots, q_{i_1-1} = u_{1, i_1-1}q_{i_1};$$

$$q_{i_1+1} = u_{21}q_{i_2}, \quad q_{i_1+2} = u_{22}q_{i_2}, \dots, q_{i_2-1} = u_{2, i_2-1}q_{i_2};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$q_{i_{r-1}+1} = u_{r1}q_{i_r}, \quad q_{i_{r-1}+2} = u_{r2}q_{i_r}, \dots, q_{i_r-1} = u_{r, i_r-1}q_{i_r}.$$

记  $p_j = q_{i_j}, n_j = i_j - i_{j-1} (j = 1, 2, \dots, r), u = \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{i_j-1} u_{ji} \in U$ , 则  $p_1, p_2, \dots, p_r$  互不相伴且

$$a = q_1 q_2 \cdots q_s = q_{i_1}^{i_1-1} \prod_{i=1}^{i_1-1} u_{1i} \cdot q_{i_2}^{i_2-1} \prod_{i=1}^{i_2-1} u_{2i} \cdots q_{i_r}^{i_r-1} \prod_{i=1}^{i_r-1} u_{ri}$$

$$= \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{i_j-1} u_{ji} \cdot q_{i_1}^{i_1-1} q_{i_2}^{i_2-1} \cdots q_{i_r}^{i_r-1} = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}.$$

由  $c$  是  $a$  的非平凡因子知, 存在  $d \in R^*$ , 使  $a = cd$ . 由  $R$  是唯一析因环 (UFD) 知  $c, d$  都满足有限析因条件, 故存在不可约元素  $c_1, c_2, \dots, c_t$  和  $d_1, d_2, \dots, d_m$  使

$$c = c_1 c_2 \cdots c_t, \quad d = d_1 d_2 \cdots d_m.$$

从而

$$q_1 q_2 \cdots q_s = a = cd = c_1 c_2 \cdots c_t \cdot d_1 d_2 \cdots d_m.$$

由  $R$  是唯一析因环 (UFD) 知  $a$  的不可约分解在相伴意义下唯一, 再记  $f_i = \begin{cases} c_i, & i = 1, 2, \dots, t \\ d_{i-t}, & i = t+1, \dots, t+m \end{cases}$ , 故

$s = t + m$  且存在  $\pi \in S_s$ , 使  $q_i \sim f_{\pi(i)} (i = 1, 2, \dots, s)$ , 即  $q_{\pi^{-1}(i)} \sim f_i (i = 1, 2, \dots, s)$ . 于是  $c_i \sim q_{\pi^{-1}(i)} (i = 1, 2, \dots, t)$ . 不妨设存在

$$0 = i'_0 \leq i'_1 \leq \dots \leq i'_r = t,$$

使

$$\pi^{-1}(i'_{j-1} + 1), \dots, \pi^{-1}(i'_j) \in \{i_{j-1} + 1, \dots, i_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

记  $n'_j = i'_j - i'_{j-1}$ , 则由  $n_j = i_j - i_{j-1}$  知  $n'_j \leq n_j$ . 又因为

$$q_k \sim q_{i_j} = p_j, \quad k = i_{j-1} + 1, \dots, i_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

所以

$$q_{\pi^{-1}(i'_{j-1}+1)} \sim \dots \sim q_{\pi^{-1}(i'_j)} \sim p_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

因此

$$c_{i'_{j-1}+1} \sim \dots \sim c_{i'_j} = c_{i'_{j-1}+n'_j} \sim p_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

由定理 0.2(5) 知存在

$$u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn'_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

使得

$$c_{i'_{j-1}+k} = u_{jk} p_j, \quad k = 1, 2, \dots, n'_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

再记  $u_1 = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk}$ , 于是

$$\begin{aligned} c &= c_1 c_2 \dots c_t = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} c_{i'_{j-1}+k} \\ &= \prod_{j=1}^r \left( \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} p_j \right) = \prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \left( \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) \\ &= \prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \left( \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) = \left( \prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \right) \left( \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) \\ &= u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \dots p_r^{n'_r}. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 知存在  $t, s \in \mathbf{N}$ , 单位  $u_1, v_1 \in U$ , 互不相伴的不可约元素  $p_1, p_2, \dots, p_s$  和互不相伴的不可约元素  $q_1, q_2, \dots, q_t$ , 使

$$a = u_1 p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}, \quad n_i \in \mathbf{N};$$

$$b = v_1 q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_t^{m_t}, \quad m_i \in \mathbf{N}.$$

不妨设存在  $k \leq \min\{s, t\}$ , 使

$$p_j \sim q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

由定理 0.2(5) 知存在  $w_j \in U (j = 1, 2, \dots, k)$ , 使

$$q_j = w_j p_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

于是

$$\begin{aligned} b &= v_1 (w_1 p_1)^{m_1} (w_2 p_2)^{m_2} \dots (w_k p_k)^{m_k} \cdot q_{k+1}^{m_{k+1}} \dots q_t^{m_t} \\ &= (v_1 w_1 w_2 \dots w_k) (p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \cdot q_{k+1}^{m_{k+1}} \dots q_t^{m_t}). \end{aligned}$$

再记  $p_{s+j} = q_j (j = k+1, \dots, t), u = u_1, v = v_1 w_1 w_2 \cdots w_k$ , 则

$$\begin{aligned} a &= u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s} p_{s+1}^0 \cdots p_{s+t}^0, \\ b &= v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} p_{k+1}^0 \cdots p_s^0 p_{s+1}^{m_{k+1}} \cdots p_{s+t}^{m_t}. \end{aligned}$$

再取  $r = s+t, n_j = m_l = 0 (j = s+1, \dots, s+t; l = k+1, \dots, s)$  即得

$$a = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

若  $d \in U$ , 则取  $n'_i = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$  即可.

若  $d \in R^* \setminus U$ , 则由  $d$  是  $a, b$  的公因子和 (1) 的结论可知, 存在单位  $u', u'' \in U$ , 互不相伴的不可约元素  $p_1, p_2, \dots, p_r$  以及  $n'_i \leq n_i, n''_i \leq m_i (i = 1, 2, \dots, r)$  使

$$d = u' p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r} = u'' p_1^{n''_1} p_2^{n''_2} \cdots p_r^{n''_r}.$$

若存在  $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, r\}$ , 使  $n'_{j_l} \neq n''_{j_l} (l = 1, 2, \dots, k)$ . 由命题 0.2.2 知  $R^*$  对乘法满足消去律, 故

$$u'(u'')^{-1} p_{j_1}^{n'_{j_1} - n''_{j_1}} p_{j_2}^{n'_{j_2} - n''_{j_2}} \cdots p_{j_k}^{n'_{j_k} - n''_{j_k}} = 1.$$

由此可知  $p_{j_l} \in U (l = 1, 2, \dots, k)$ , 这与  $p_{j_l}$  不可约矛盾! 故  $n'_i = n''_i (i = 1, 2, \dots, r)$ , 从而  $n'_i = n''_i \leq \min\{n_i, m_i\} (i = 1, 2, \dots, r)$ , 取  $w = u'$ , 则

$$d = w p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

□

### 定理 0.5

设  $R$  是唯一析因环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合,  $a, b, c \in R^*$ , 则

- (1)  $|ab| = |a| + |b|$ ;
- (2)  $a \mid b \implies |a| \geq |b|$ ;
- (3)  $a \in U \iff |a| = 0$ ;
- (4)  $b \sim c \iff |b| = |c|, b \mid c$ .

♡

### 证明

- (1)
- (2) 根据定义显然成立.
- (3)

□

### 定义 0.11

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $R^*$  中的一个序列  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  满足

$$a_{n+1} \mid a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则称为  $R$  的一个因子链.

若对  $R^*$  中任一因子链, 存在自然数  $m$ , 使

$$a_m \sim a_n, \quad \forall n \geq m,$$

则称  $R$  满足因子链条件.

♣

### 引理 0.3

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 若  $R$  满足因子链条件, 则必满足有限析因条件.

♡

**证明** 设  $a \in R^* \setminus U$ . 先证  $a$  有不可约因子. 不妨设  $a$  是可约的, 则  $a$  有非平凡的真因子  $a_1$ , 即有  $a = a_1 b_1$ . 这时  $b_1$  也是  $a$  的非平凡真因子, 否则,  $b_1 \in U$ , 由定理 0.2(5) 知  $a \sim a_1$ , 这与  $a_1$  为  $a$  真因子矛盾! 若有  $a_1, b_1$  都可约, 则

$a_1 = a_2 b_2$ , 其中  $a_2, b_2$  为  $a_1$  的真因子. 如此继续, 可得因子链

$$a, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

且  $a_{n+1} \mid a_n, a_n \mid a$ . 这个因子链是在假设  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  都可约且对  $\forall n \in \mathbf{N}$  有  $a_{n+1}$  是  $a_n$  的真因子的条件下得到的. 而由因子链条件有  $m$ , 使得  $a_m \sim a_{m+1}$ , 这与  $a_{m+1}$  是  $a_m$  的真因子矛盾! 因而  $a_m$  是不可约的, 即  $a_m$  是  $a$  的不可约因子.

再证  $a$  可分解为有限多个不可约因子的乘积. 设  $p_1$  是  $a$  的一个不可约因子, 于是  $a = p_1 a^{(1)}$ . 若  $a^{(1)} \in U$ , 则由命题 0.1 知  $a$  不可约. 此时  $a$  满足有限析因条件.

若  $a^{(1)} \in R^* \setminus U$ , 则  $a^{(1)}$  有不可约因子  $p_2$ , 使  $a^{(1)} = p_2 a^{(2)}$ , 即  $a = p_1 p_2 a^{(2)}$ . 继续此过程, 即得因子链

$$a, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, a^{(n+1)}, \dots$$

且  $a^{(n+1)} \mid a^{(n)}, a^{(n)} \mid a, p_{n+1}$  都是  $a^{(n)}$  的不可约因子,  $a^{(n)} = p_{n+1} a^{(n+1)}$ . 这个因子链是在假设  $a^{(n)} \in R^* \setminus U (\forall n \in \mathbf{N})$  的条件下得到的. 而由因子链条件有  $s$ , 使  $a^{(s-1)} \sim a^{(s)}$ . 于是存在  $b \in R^*$ , 使  $a^{(s)} = b a^{(s-1)}$ , 从而  $a^{(s-1)} = p_s a^{(s)} = p_s b a^{(s-1)}$ . 由命题 0.1 知  $R^*$  对乘法满足消去律, 故  $p_s b = 1$ , 即  $p_s \in U$ , 这与  $p_s$  不可约矛盾! 故存在  $m$ , 使得  $a^{(m)} \in U$ . 于是记  $q_m = p_m a^{(m)}$ , 则由命题 0.1 知  $q_m$  不可约. 故此时

$$a = p_1 p_2 \cdots p_m a^{(m)} = p_1 p_2 \cdots q_m.$$

满足有限析因条件. 这就证明了  $R$  满足有限析因条件. □

#### 定理 0.6

设  $R$  是交换整环,  $R^* = R \setminus \{0\}$ ,  $U$  表示  $R^*$  中乘法可逆元素的集合, 则下列条件等价:

- (1)  $R$  是唯一析因环 (UFD);
- (2)  $R$  满足因子链条件与素性条件;
- (3)  $R$  满足因子链条件与最大公因子条件.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (3). 设  $R$  为唯一析因环. 先证  $R$  满足因子链条件.  $\forall a \in R^* \setminus U$ ,  $a$  有不可约元素乘积分解  $a = u p_1 p_2 \cdots p_r$ . 现设  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  是  $R^*$  的一个因子链. 于是由定理 0.5(2) 知必有  $|a_i| \geq 0$  且

$$|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_n| \geq |a_{n+1}| \geq \cdots,$$

由于  $|a_1|$  是一个有限数, 因而有  $m$ , 使得当  $n \geq m$  时,  $|a_n| = |a_m|$ , 由定理 0.5(4) 知  $a_n \sim a_m$ , 故  $R$  满足因子链条件.

现证  $R$  满足最大公因子条件. 设  $a, b \in R^*$ , 若  $a, b$  中有一个是单位, 则由引理 0.2(6) 知  $(a, b) = 1$ , 故假定  $a, b \in R^* \setminus U$ . 这时由定理 0.4(1), 不妨设

$$a = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r},$$

其中  $u, v \in U, p_1, p_2, \dots, p_r$  是互不相伴的不可约元素,  $n_i \geq 0, m_j \geq 0, 1 \leq i, j \leq r$ . 令  $k_i = \min\{n_i, m_i\}$ , 记

$$d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \quad (1)$$

显然  $d$  是  $a, b$  的公因子. 又设  $d_1$  也是  $a, b$  的公因子, 则由定理 0.4(2) 知存在  $u_1 \in U$  以及  $n'_i \leq k_i$  且  $n'_i \in \mathbf{N} (i = 1, 2, \dots, r)$ , 使

$$d_1 = u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

故  $d_1 \mid d$ . 因此  $d$  是  $a, b$  的最大公因子.

(3)  $\Rightarrow$  (2). 为此只需证明素性条件成立. 设  $p$  是一个不可约元素且  $p \nmid a, p \nmid b$ , 由定理 0.2(8) 有  $(p, a) \sim 1, (p, b) \sim 1$ . 由引理 0.2(7) 知  $(p, ab) \sim 1$ , 因而再由定理 0.2(8) 知  $p \nmid ab$ . 换言之, 若  $p \mid ab$ , 则有  $p \mid a$  或  $p \mid b$ , 故  $p$  为素元素.

(2)  $\Rightarrow$  (1). 由引理 0.3 知  $R$  满足有限析因环条件, 故只需证因式分解的唯一性. 不妨设  $a \in R^* \setminus U$  且  $a$  有两个不可约元素乘积的分解

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \quad (2)$$



现对  $s$  用数学归纳法证. 若  $s = 1$ , 则  $a$  为不可约元素, 由素性条件知  $a$  为素元素. 根据素元素的定义, 可不妨设  $a|q_1$ , 则  $a \sim q_1$ . 从而由定理 0.2(5) 知存在  $u \in U$ , 使  $a = q_1 u = q_1 q_2 \cdots q_t$ , 故  $t = 1$ . 设  $s-1$  时已成立, 现证  $s$  时成立. 因  $p_s|a$ , 故  $p_s|q_1 q_2 \cdots q_t$ , 由素性条件知  $p_s$  也是素元素, 于是不妨设  $p_s|q_t$ , 于是  $q_t = u_s p_s (u_s \in U)$ . 由命题???? 知  $R^*$  对乘法满足消去律, 因而结合(2)式有

$$p_1 p_2 \cdots p_{s-1} p_s = q_1 q_2 \cdots q_{t-1} q_t = u_s q_1 q_2 \cdots q_{t-1} p_s \implies p_1 p_2 \cdots p_{s-1} = u_s \prod_{i=1}^{t-1} q_i.$$

记  $q'_1 = u_s q_1$ ,  $q'_i = q_i (2 \leq i \leq t-1)$ , 由命题 0.1 知  $q'_1$  也不可约, 并且由定理 0.2(5) 知  $q'_i \sim q_i (1 \leq i \leq t-1)$ , 则

$$p_1 p_2 \cdots p_{s-1} = q'_1 q'_2 \cdots q'_{t-1}.$$

由归纳假设可知,  $s-1 = t-1$  且存在  $\pi \in S_{t-1}$ , 使  $p_i \sim q'_{\pi(i)} \sim q_{\pi(i)} (1 \leq i \leq t-1)$ . 由命题???? 知  $R^*$  对乘法满足消去律, 再结合(2)式及定理 0.2(5) 知

$$u_s p_s \prod_{i=1}^{t-1} q_i = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t \implies u_s p_s = q_t \implies p_s \sim q_t.$$

故  $s = t$  且有  $\pi' \in S_t$ , 使得  $p_i \sim q_{\pi'(i)} (1 \leq i \leq t)$ , 即  $R$  是一个 UFD. □

因本节讨论并未用到  $R$  中的加法, 因而可以认为  $R^*$  是满足消去律的么半群. 因此, 可定义唯一析因么半群 (或 Gauss 么半群). 引理 0.2, 引理 0.3 与定理 0.6 对 Gauss 么半群也成立.

如果在  $R$  中约定  $a|0, \forall a \in R$ . 此时可得若  $a|b, a|c$ , 则  $a|(b+c)$ , 以及其他一些早已熟知的性质.