第一章 行列式

1.1 定义、定理和命题

命题 1.1 (行列式计算常识)

(2) 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转 (**行倒排**)、或左右翻转 (**列倒排**) 分别得到 D_1 、 D_2 ; 把 D **逆 时针旋转** 90°、或**顺时针旋转** 90° 分别得到 D_3 、 D_4 ; 把 D **依副对角线翻转**、或**依主对角线翻转**分别得到 D_5 、 D_6 . 易知

$$D_{1} = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_{2} = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_{3} = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_{4} = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_{5} = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_{6} = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D,$$

 $D_5 = D_6 = D.$

- (3) 设 $A = (a_{i,i})$ 为 n 阶复矩阵, 则一定有 $|A| = \overline{|A|}$.
- (4) 若 |A| 是 n 阶行列式,|B| 是 m 阶行列式,它们的值都不为零,则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}.$$

证明 (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

$$(2) D_{1} = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_{i} \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_{i} \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_{2} = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xrightarrow{j_{i} \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{j_{i} \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2} \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2} \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, 故由行列式的组合定义可得

$$|A| = \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \dots a_{k_{nn}}$$

$$= \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} \overline{a_{k_{11}}} \cdot \overline{a_{k_{22}}} \dots \overline{a_{k_{nn}}} = |\overline{A}|.$$

(4) 将 |A| 的第一列依次和 |B| 的第 m 列,第 m-1 列,…,第一列对换,共换了 m 次;再将 |A| 的第二列依次和 |B| 的第 m 列,第 m-1 列,…,第一列对换,又换了 m 次;…. 依次类推,经过 mn 次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此 $|D| = (-1)^{mn} |C|$,于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}.$$

命题 1.2 (奇数阶反对称行列式的值等于零)

如果 n 阶行列式 |A| 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(1\leq i,j\leq n)$, 则称为反对称行列式. 求证: 奇数阶反对称行列式的值等于零.

² **笔记** 证法二的想法是将行列式按组合的定义写成 (n-1)! 个单项的和. 然后将其两两分组再求和 (因为一共有 (n-1)! 个单项, 即和式中共有偶数个单项, 所以只要使用合适的分组方式就一定能够将其两两分组再求和), 最后发现 每组的和均为 0.

构造的这个映射 φ 的目的是为了更加准确、严谨地说明分组的方式. 证明这个映射 φ 是一个双射是为了保证原来的和式中的每一个单项都能与和式中另一个单项一一对应. 然后利用反证法证明了这两个一一对应的单项一定互不相同 (注: 我认为这步有些多余. 这里应该只需要说明这两个一一对应的单项是原和式中不同的单项即可,即这两个单项的角标不完全相同就行, 其实, 这个在我们定义映射 φ 的时候就已经满足了. 满足这个条件就足以说明原和式可以按照这种方式进行分组. 并且利用反对称行列式的性质也能够证明这两个单项不仅互不相同, 还能进一步得到这两个单项互为相反数). 于是我们就可以将原和式中的每一个单项与其在双射 φ 作用下的像看成一组, 按照这种方式就可以将原和式进行分组再求和.

证明 证法一 (行列式的性质): 由反对称行列式的定义可知,|A| 的转置 |A'| 与 |A| 的每个元素都相差一个符号,将 |A'| 的每一行都提出公因子 -1 可得 $|A| = |A'| = (-1)^n |A| = -|A|$,从而 |A| = 0.

证法二(行列式的组合定义):由于 [A]的主对角元全为0,故由组合定义,只需考虑下列单项:

$$T = \{a_{k_1} 1 a_{k_2} 2 \cdots a_{k_{nn}} \mid k_i \neq i (1 \le i \le n)\}$$

定义映射 $\varphi: T \to T, a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_{nn}} \mapsto a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$. 显然 $\varphi^2 = \operatorname{Id}_T$, 于是 φ 是一个双射. 我们断言: $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_{nn}}$ 和 $a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$ 作为 |A| 的单项不相同, 否则 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 必可分成若干对 $(i_1, j_1), \cdots, (i_t, j_t)$, 使得 $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_{nn}} = a_{i_1 j_1} a_{j_1 i_1} \cdots a_{i_t j_t} a_{j_t i_t}$, 这与 n 为奇数矛盾. 将上述两个单项看成一组, 则它们在 |A| 中符号均为 $(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}$. 由于 |A| 反对称, 故

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^n a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_{nn}}=-a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_{nn}}$$

从而每组和为0,于是|A|=0.

命题 1.3 (" 爪" 型行列式)

证明 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i.$$

Ŷ 笔记 记忆"爪"型行列式的计算方法和结论.

证明 当 $a_i \neq 0 (\forall i \in [2, n] \cap \mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & \ddots & & \\ c_n & & a_n \end{vmatrix} = \frac{\left(-\frac{c_i}{a_i}\right)j_i + j_1}{i = 2, \cdots, n} \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i}\right) \prod_{i=2}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i.$$

当 $\exists i \in [2, n] \cap \mathbb{N}$ s.t. $a_i = 0$ 时,则 $a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i = -a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i$.此时,我们有

$$a_2$$
 a_{i-1} a_{i+1} a_{i+1}

综上所述,原命题得证.

命题 1.4 (分块" 爪" 型行列式)

计算 n 阶行列式 $(a_{ii} \neq 0, i = k+1, k+2, \dots, n)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

🕏 笔记 记忆分块"爪"型行列式的计算方法即可,计算方法和"爪"型行列式的计算方法类似.

解

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}j_{i}+j_{1},-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}j_{i}+j_{2},\cdots,-\frac{a_{in}}{a_{ii}}j_{i}+j_{k}}{i=k+1,k+2,\cdots,n} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C & B \\ O & \Lambda \end{vmatrix} = |C| \cdot |\Lambda| = |C| \prod_{i=k+1}^{n} a_{ii}.$$

其中
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} a_{k+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$
 并且 $c_{pq} = a_{pq} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_{iq}a_{pi}}{a_{ii}}, p, q = 1, 2, \cdots, n.$

推论 1.1 ("爪"型行列式的推广)

计算 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 这是一个有用的模板 (即行列式除了主对角元素外,每行都一样).

记忆该命题的计算方法即可. 即先化为"爪"型行列式, 再利用"爪"型行列式的计算结果.

解 当 $a_i \neq 0 (\forall i \in [2, n] \cap \mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} = \frac{(-1)r_1 + r_i}{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\frac{\text{Res}_{1.3}}{\text{In}} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^n \frac{a_1 x_i}{a_i} \right] \prod_{i=2}^n (-a_i) = (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^n \frac{a_1 x_i}{a_i} \right] \prod_{i=2}^n a_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \right].$$

当 $\exists i \in [2, n] \cap \mathbb{N}$ s.t. $a_i = 0$ 时, 我们有

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{\tiny $\frac{\phi}{\underline{\phi}}}_{1.3}}{=} (x_1 - a_1) (-a_2) (-a_3) \cdots (-a_n) - \sum_{i=2}^n (-a_2) \cdots \widehat{(-a_i)} \cdots (-a_n) a_1 x_i$$

$$= (-1)^{n-1} (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + (-1)^{n-1} \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \right].$$

$$\Leftrightarrow \text{ $\frac{1}{2}$ $\stackrel{\text{\tiny $\frac{\phi}{\varphi}}}{=}$ $\stackrel{\text{\tiny $\frac{\phi}{$$

命题 15

设 $|A| = |a_i|$ 是一个 n 阶行列式, A_{ij} 是它的第 (i, j) 元素的代数余子式, 求证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z|A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

Ŷ 🛮 笔记 根据这个命题可以得到一个**关于行列式 |A| 的所有代数余子式求和的构造**:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1'} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1} & \alpha_{2} & \cdots & \alpha_{n} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta}_{1} & 1 \\ \boldsymbol{\beta}_{2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n} & 1 \\ \mathbf{1'} & 0 \end{vmatrix}.$$

其中 |A| 的列向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,|A|$ 的行向量依次为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 并且 1 表示元素均为 1 的列向量,1' 表示 1 的转置. (令上述命题中的 $z=0,x_i=y_i=1,i=1,2,\cdots,n$ 即可得到.)

 \dot{z} 如果需要证明的是矩阵的代数余子式的相关命题, 我们可以考虑一下这种构造, 即令上述命题中的 z=0 并且 特定/任取 x_i, y_i .

证明 证法一: 将上述行列式先按最后一列展开,展开式的第一项为

$$(-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

再将上式按最后一行展开得到

$$(-1)^{n+2} x_1 \left[(-1)^{n+1} (-1)^{1+1} y_1 A_{11} + (-1)^{n+2} (-1)^{1+2} y_2 A_{12} + \dots + (-1)^{n+n} (-1)^{1+n} y_n A_{1n} \right]$$

$$= (-1)^{n+2} x_1 (-1)^{n+1} \left[(-1)^2 y_1 A_{11} + (-1)^4 y_2 A_{12} + \dots + (-1)^{2n} y_n A_{1n} \right]$$

$$= -x_1 \left(y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \dots + y_n A_{1n} \right)$$

$$= -x_1 \sum_{j=1}^n y_j A_{1j}.$$

同理可得原行列式展开式的第 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 项为

$$(-1)^{n+1+i} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

将上式按最后一行展开得到 z |A|.

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1+i} \, x_i \, \left[(-1)^{n+1} \, (-1)^{i+1} \, y_1 A_{i1} + (-1)^{n+2} \, (-1)^{i+2} \, y_2 A_{i2} + \dots + (-1)^{n+n} \, (-1)^{i+n} \, y_n A_{in} \right] \\ &= (-1)^{n+1+i} \, x_i \, (-1)^{n+1} \, \left[(-1)^{i+1} \, y_1 A_{i1} + (-1)^{i+2+1} \, y_2 A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n+n-1} \, y_n A_{in} \right] \\ &= (-1)^{2i+1} \, y_1 A_{i1} + (-1)^{2i+3} \, y_2 A_{i2} + \dots + (-1)^{2i+2n-1} \, y_n A_{in} \\ &= -x_i \, \left(y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \dots + y_n A_{in} \right) \\ &= -x_i \, \sum_{j=1}^n y_j A_{ij}. \end{aligned}$$

而展开式的最后一项为z|A|.

因此,原行列式的值为

$$z|A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

证法二:设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$. 若 A 是非异阵,则由降阶公式可得

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & z \end{vmatrix} = |A|(z - \mathbf{y}'A^{-1}\mathbf{x}) = z|A| - \mathbf{y}'A^*\mathbf{x}.$$

对于一般的方阵 A,可取到一列有理数 $t_k \rightarrow 0$,使得 $t_k I_n + A$ 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & z \end{vmatrix} = z|t_k I_n + A| - \mathbf{y}'(t_k I_n + A)^* \mathbf{x}.$$

注意到上式两边都是关于 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \rightarrow 0$, 即有

$$\begin{vmatrix} A & x \\ y' & z \end{vmatrix} = z|A| - y'A^*x = z|A| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

例题 1.1 设 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|, A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 求证:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} - a_{1n} & 1 \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} - a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} - a_{2n} & 1 \\ a_{31} - a_{32} & a_{32} - a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} - a_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n2} & a_{n2} - a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} - a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

 $\overline{\text{ti}}$ 明 证法一:设 |A| 的列向量依次为 $lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_n$,并且 1 表示元素均为 1 的列向量. 则

$$|B| = |\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, 1| = \frac{j_i + j_{i-1}}{\sum_{i=n-1, n-2, \cdots, 2} |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, 1|.$$

将最后一列写成 $(\alpha_n + 1) - \alpha_n$, 进行拆分可得

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, (\alpha_n + 1) - \alpha_n| \\ &= |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n + 1| - |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n| \\ &= |\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \cdots, \alpha_{n-1} + 1, \alpha_n + 1| - |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n|. \end{aligned}$$

根据行列式的性质将 $|\alpha_1+1,\alpha_2+1,\cdots,\alpha_{n-1}+1,\alpha_n+1|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 1 所在的列展开得到

$$|B| = |\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_{n-1} + 1, \alpha_n + 1| - |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n|$$

$$= |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n| + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} - |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n| = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

证法二:设 |A| 的列向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,并且 1 表示元素均为 1 的列向量.注意到

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

依次将第i列乘以-1加到第i-1列上去 $(i=2,3,\cdots,n)$,再按第n+1行展开可得

$$-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} - \alpha_n & \alpha_n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, 1| = -|B|.$$

结论得证.

例题 1.2 设n 阶矩阵 A 的每一行、每一列的元素之和都为零,证明:A 的每个元素的代数余子式都相等.

证明 证法一:设 $A = (a_{ij}), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)', y = (y_1, y_2, \dots, y_n)',$ 不妨设 $x_i y_j$ 均不相同, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 考虑如 下n+1 阶矩阵的行列式求值:

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y'} & 0 \end{pmatrix}$$

一方面, 由命题 1.5可得 $|B| = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$. 另一方面, 先把行列式 |B| 的第二行, \cdots , 第 n 行全部加到第一 行上; 再将第二列, \cdots , 第n列全部加到第一列上, 可得

下将第二列,…,第
$$n$$
 列全部加到第一列上,可得
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \sum_{j=1}^{n} y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

照第一行和第一列进行展开,可得 $|B| = -A_{11} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j$. 比较上述两个结果,又由于 $x_i y_j$ 埃

依次按照第一行和第一列进行展开, 可得 $|B|=-A_{11}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nx_iy_j$. 比较上述两个结果, 又由于 x_iy_j 均不相同,

因此可得 A 的所有代数余子式都相等.

证法二:由假设可知 |A|=0(每行元素全部加到第一行即得),从而 A 是奇异矩阵. 若 A 的秩小于 n-1,则 A 的任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于零,结论显然成立. 若 A 的秩等于 n-1,则线性方程组 Ax=0 的基础解系只含一个向量. 又因为 A 的每一行元素之和都等于零,所以由命题??可知,我们可以选取 $\alpha=(1,1,\cdots,1)'$ 作为 Ax=0 的基础解系. 由命题??的证明可知 A^* 的每一列都是 Ax=0 的解,从而 A^* 的每一列与 α 成比例,特别地, A^* 的每一行都相等. 对 A' 重复上面的讨论,可得 $(A')^*$ 的每一行都相等. 注意到 $(A')^*=(A^*)'$,从而 A^* 的每一列都相等,于是 A 的所有代数余子式 A_{ij} 都相等.

命题 1.6 (三对角行列式)

求下列行列式的递推关系式(空白处均为0):

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ & c_2 & a_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

笔记 记忆三对角行列式的计算方法和结果: $D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2} (n \ge 2),$ 即按最后一列 (或行) 展开得到递推公式.

解 显然 $D_0 = 1, D_1 = a_1$. 当 $n \ge 2$ 时, 我们有

 $= a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}.$

命题 1.7 (大拆分法)

设 t 是一个参数,

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 |A(0)| 中的代数余子式.

🕏 笔记 大拆分法的想法: 将行列式的每一行/列拆分成两行/列, 得到

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{j=1}^{n} |A_j| . \sharp \, \forall A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & i & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成 2^n 个行列式.(不一定需要公共的 t). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1加到后面每一列上,得到

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开,不断这样做下去就可得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix} = |A(0)| + \sum_{j=1}^{n} |A_{j}|.$$

其中
$$A_{j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & i & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n.$$
 将 A_{j} 按第 j 列展开可得
$$A_{j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = t (A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{nj}) = t \sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

从而

$$|A(t)| = |A(0)| + \sum_{i=1}^{n} A_i = |A(0)| + t \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

推论 1.2 (推广的大拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1, t_2, \dots, t_n)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t_1 & a_{12} + t_2 & \dots & a_{1n} + t_n \\ a_{21} + t_1 & a_{22} + t_2 & \dots & a_{2n} + t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t_1 & a_{n2} + t_2 & \dots & a_{nn} + t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^n \left(t_j \sum_{i=1}^n A_{ij} \right).$$

笔记 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即将行列式的每一行/列拆分成两行/列).

这里推广的大拆分法的关键也是**要找到合适的** t_1, t_2, \cdots, t_n 进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式. 注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可. 证明 运用大拆分法的证明方法不难得到.

命题 1.8 (小拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且 a_{in} 可以拆分成 $b_{in}+c_{in}$, $i=1,2,\cdots,n$.

则

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} + c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

室记 记忆小拆分法的想法(即拆边列/行,再展开得到递推式)。

注 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列,则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方 法将这一行或一列变成最后一列,再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可. 证明 由行列式的性质可直接得到结论.

命题 1.9 (行列式的求导运算)

设 $f_{ii}(t)$ 是可微函数,

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

求证: $\frac{d}{dt}F(t) = \sum_{j=1}^{n} F_{j}(t)$, 其中

$$F_{j}(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证明 证法一(数学归纳法):对阶数 n 进行归纳. 当 n=1 时结论显然成立. 假设 n-1 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形.

将 F(t) 按第一列展开得

$$F(t) = f_{11}(t) A_{11}(t) + f_{21}(t) A_{21}(t) + \dots + f_{n1}(t) A_{n1}(t).$$

其中 $A_{i1}(t)$ 是元素 $f_{i1}(t)$ 的代数余子式. $(i = 1, 2, \dots, n)$

从而由归纳假设可得

$$A'_{i1}(t) = \frac{d}{dt}A_{i1}(t) = \sum_{k=2}^{n} A_{i1}^{k}(t), i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\sharp \, \forall A_{i1}^{k}(t) = \begin{cases}
f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1k}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
f_{i-1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i-1,k}(t) & \cdots & f_{i-1,n}(t) \\
f_{i+1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i+1,k}(t) & \cdots & f_{i+1,n}(t) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nk}(t) & \cdots & f_{nn}(t)
\end{cases}, k = 2, 3, \cdots, n.$$

于是,我们就有

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt} \left[f_{11}(t) A_{11}(t) + f_{21}(t) A_{21}(t) + \dots + f_{n1}(t) A_{n1}(t) \right]
= f'_{11}(t) A_{11}(t) + f'_{21}(t) A_{21}(t) + \dots + f'_{n1}(t) A_{n1}(t) + f_{11}(t) A'_{11}(t) + f_{21}(t) A'_{21}(t) + \dots + f_{n1}(t) A'_{n1}(t)
= \sum_{i=1}^{n} f'_{i1}(t) A_{i1}(t) + f_{11}(t) \sum_{k=2}^{n} A_{11}^{k}(t) + f_{21}(t) \sum_{k=2}^{n} A_{21}^{k}(t) + \dots + f_{n1}(t) \sum_{k=2}^{n} A_{n1}^{k}(t)
= \sum_{i=1}^{n} f'_{i1}(t) A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_{i1}(t) \sum_{k=2}^{n} A_{i1}^{k}(t) \right)
= \sum_{i=1}^{n} f'_{i1}(t) A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(t) \left(A_{i1}^{2} + A_{i1}^{3} + \dots + A_{i1}^{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{i1}(t) A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(t) A_{i1}^{2} + \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(t) A_{i1}^{3} + \dots + \sum_{i=1}^{n} f_{i1}(t) A_{i1}^{n}$$

$$= F_{1}(t) + F_{2}(t) + F_{3}(t) + \dots + F_{n}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_{i}(t).$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

证法二(行列式的组合定义):由行列式的组合定义可得

$$F(t) = \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \dots f_{k_n n}(t).$$

因此

$$\frac{d}{dt}F(t) = \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_{11}}(t) f_{k_{22}}(t) \dots f_{k_{nn}}(t)
+ \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_{11}}(t) f_{k_{22}}(t) \dots f_{k_{nn}}(t)
+ \dots + \sum_{1 \le k_1, k_2, \dots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_{11}}(t) f_{k_{22}}(t) \dots f_{k_{nn}}(t)
= F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_n(t).$$

命题 1.10 (直接计算两个矩阵和的行列式)

设A,B都是n阶矩阵,求证:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + \sum_{1 \le k \le n-1} \left(\sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n}} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$
其中 $\widehat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 超 的 k 阶子式 $\mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式.

拿 笔记 当 A,B 之一是比较简单的矩阵 (例如对角矩阵或秩较小的矩阵) 时, 可利用这个命题计算 |A+B|. 解 设 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|,|B|=|\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n|$, 其中 $\alpha_j,\beta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是 A 和 B 的列向量. 注意到 $|A+B|=|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n|$.

对 |A+B|, 按列用行列式的性质展开, 使每个行列式的每一列或者只含有 α_j , 或者只含有 β_j (即利用大拆分法按列向量将行列式完全拆分开), 则 |A+B| 可以表示为 2^n 个这样的行列式之和. 即 (并且单独把 k=0,n 的项分离出来, 即将 |A|、|B| 分离出来)

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n|$$

$$= |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + \sum_{1 \le k \le n-1} \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n} |\beta_1, \cdots, \alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_k}, \cdots, \beta_n| .$$

再对上式右边除 |A|、|B| 外的每个行列式用 Laplace 定理按含有 A 的列向量的那些列展开得到

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} \frac{1 \cdots j_1 \cdots j_2 \cdots j_k \cdots n}{|\beta_1, \dots, \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_k}, \dots, \beta_n|}$$

$$= |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n} \sum_{1 \leq i_1, j_2, \dots, j_k \leq n} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$$

$$=|A|+|B|+\sum_{\substack{1\leq k\leq n-1\\1\leq j_1< j_2<\cdots< j_k\leq n\\1\leq j_1< j_2<\cdots< j_k\leq n}}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\widehat{B}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}.$$

例题 1.3 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中x 是未定元, a_{ij} 是常数. 证明: f(x) 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其n-1 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$.

笔记 注意 f(x) 的每行每列除主对角元素外,其他元素均不相同.因此 f(x) 并不是推广的"爪"型行列式. 解 由行列式的组合定义可知,f(x) 的最高次项出现在组合定义展开式中的单项 $(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ 中,且展开式中的其他单项作为 x 的多项式其次数小于等于 n-2.因此 f(x) 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式,且其 n-1 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$.

注 将这个例题进行推广再结合直接计算两个矩阵和的行列式的结论可以得到下述推论.

推论 1.3

设 $A = (a_{ij})$ 为n阶方阵,x为未定元,

$$f(x) = |xI_n - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, 其中

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$$

 $\stackrel{ ext{$\stackrel{\circ}{$}$}}{ ext{$\stackrel{\circ}{$}$}}$ 笔记 需要注意上述推论中 $a_1 = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}), a_n = (-1)^n |A|$.

证明 注意到 xI_n 非零的 n-k 阶子式只有 n-k 阶主子式, 并且其值为 x^{n-k} , 其余 n-k 阶子式均为零. 记 $\widehat{xI_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是 $xI_n\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式, 则 $\widehat{xI_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是 xI_n 非零的 n-k 阶子式. 于是我们有

$$\widehat{xI_n}$$
 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = x^{n-k}.$

再利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论就可以得到

$$f(x) = |x\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + \sum_{1 \le k \le n-1} \sum_{\substack{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_k \le n \\ 1 \le j_1, j_2, \cdots, j_k \le n}} (-\mathbf{A}) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{xI_{n}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$$

命题 1.11

设
$$f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$$
, 求下列行列式的值:
$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

筆记 知道这类行列式化简的操作即可,以后这种行列式化简操作不再作额外说明,

解 利用行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix} 1 & f_{1}(x_{1}) & f_{2}(x_{1}) & \cdots & f_{n-1}(x_{1}) \\ 1 & f_{1}(x_{2}) & f_{2}(x_{2}) & \cdots & f_{n-1}(x_{2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_{1}(x_{n}) & f_{2}(x_{n}) & \cdots & f_{n-1}(x_{n}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{1} + a_{11} & x_{1}^{2} + a_{21}x_{1} + a_{22} & \cdots & x_{1}^{n-1} + a_{n-1,1}x_{1}^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_{1} + a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_{2} + a_{11} & x_{2}^{2} + a_{21}x_{2} + a_{22} & \cdots & x_{2}^{n-1} + a_{n-1,1}x_{2}^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_{2} + a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n} + a_{11} & x_{n}^{2} + a_{21}x_{n} + a_{22} & \cdots & x_{n}^{n-1} + a_{n-1,1}x_{n}^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_{n} + a_{n-1,n-1} \\ -a_{i,i-1}j_{2} + j_{i+1}, i = 1, 2, \cdots n - 1 \\ -a_{i,i-1}j_{2} + j_{i+1}, i = 2, 3, \cdots, n - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n} & x_{n}^{2} & \cdots & x_{n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{j} - x_{i}).$$

命题 1.12 (多项式根的有限性)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

若 f(x) 有 n+1 个不同的根 b_1,b_2,\cdots,b_{n+1} , 即 $f(b_1)=f(b_2)=\cdots=f(b_{n+1})=0$, 求证: f(x) 是零多项式, $p a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0.$

证明 由 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 可知 $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$ 是下列线性方程组的 解:

$$\begin{cases} x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_1^{n-1} x_{n-1} + b_1^n x_n = 0, \\ x_0 + b_2 x_1 + \dots + b_2^{n-1} x_{n-1} + b_2^n x_n = 0, \\ \dots \\ x_0 + b_{n+1} x_1 + \dots + b_{n+1}^{n-1} x_{n-1} + b_{n+1}^n x_n = 0. \end{cases}$$

上述线性方程组的系数行列式是一个 Vandermode 行列式, 由于 b_1, b_2, \dots, b_{n+1} 互不相同, 所以系数行列式不等于零. 由 Crammer 法则可知上述方程组只有零解. 即有 $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.

命题 1.13 (Cauchy 行列式)

计算 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^{-1} & (a_1 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_1 + b_n)^{-1} \\ (a_2 + b_1)^{-1} & (a_2 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_2 + b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n + b_1)^{-1} & (a_n + b_2)^{-1} & \cdots & (a_n + b_n)^{-1} \end{vmatrix}$$

🕏 笔记 需要记忆 Cauchy 行列式的计算方法.

- 1. 分式分母有公共部分可以作差, 得到的分子会变得相对简便.
- 2. 行列式内行列做加减一般都是加减同一行 (或列). 但是在循环行列式中, 我们一般采取相邻两行 (或列) 相加减的方法.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_i}{i = n - 1, \dots, 1}$$

$$\frac{-j_n + j_n + j_$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot D_{n-1}.$$

不断递推下去即得

$$D_{n} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (b_{n} - b_{i}) (a_{n} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot D_{n-1} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (b_{n} - b_{i}) (a_{n} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{j} + b_{n}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{j} + b_{n-1}) \prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{k})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{n-1} + b_{n}) \prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n}) \prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n}) \prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n}) \prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n-1} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n}) \prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_{i}) (a_{n} - a_{i})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_{n} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_{n})}{\prod\limits_{j=1}^$$

命题 1.14

计算下列行列式的值:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解 若所有的 $a_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 都不为 0, 则有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}} & \frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}} & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_n}{a_n} & \cdots & \frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}} & \frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right) = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{a_i b_j - a_j b_i}{a_j a_i} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i).$$

若只有一个 ai 为 0, 则将原行列式按第 i 行展开得到具有相同类型的 n - 1 阶行列式

为
$$0$$
, 则将原行列式按第 i 行展开得到具有相同类型的 $n-1$ 阶行列式
$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_i^{n-1} & a_i^{n-2}b_i & \cdots & a_ib_i^{n-2} & b_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

此时同理可得

$$|A| = (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1 \le k < l \le n \\ k \ne i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1 \le k < l \le n \\ k \ne i}} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k < l} a_k b_l \prod_{i < l \le n} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k < l} a_k b_l \prod_{i < l \le n} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k < l} a_k b_l - a_l b_k$$

$$= \prod_{1 \le k < l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

$$= \prod_{1 \le k \le l} (a_k b_l - a_l b_k)$$

若至少有两个 $a_i = a_j = 0$,则第i行与第j行成比例,因此行列式的值等于0. 经过计算发现,后面两种情形的答案 都可以统一到第一种情形的答案.

综上所述,
$$|A| = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)$$
.

结论 连乘号计算小结论:

$$(1) \prod_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1}.$$

证明:
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \underbrace{a_2 a_1 \cdot a_3 a_2 a_3 a_1 \cdot a_4 a_3 a_4 a_2 a_4 a_1 \cdots a_k a_{k-1} a_k a_{k-2} \cdots a_k a_1}_{n-1} \cdots \underbrace{a_n a_{n-1} a_n a_{n-2} \cdots a_n a_1}_{n-1}$$

$$\frac{\text{从左往右接组计数}}{a_1^{n-1} a_2^{1+n-2} a_3^{2+n-3} a_4^{3+n-4} \cdots a_k^{k-1+n-k} \cdots a_n^{n-1}} = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1}.$$

$$(2)\textstyle\prod_{\substack{1\leq i< j\leq n\\i,j\neq k}}a_ia_j=\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\i\neq k}}a_i^{n-2},\, \\ \\ \sharp\, \\ \\ \psi\,\, k\in[1,n]\cap\mathbb{N}_+.$$

证明:
$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \neq k}} a_i a_j = \underbrace{a_2 a_1 \cdot a_3 a_2 a_3 a_1 \cdot \cdots \cdot a_{k-1} a_{k-2} \cdot \cdots a_{k-1} a_1 \cdot \underbrace{a_{k+1} a_{k-1} \cdot \cdots a_{k+1} a_1}_{n-2} \cdots \underbrace{a_n a_{n-1} \cdot \cdots a_n a_{k+1} a_n a_{k-1} \cdot \cdots a_n a_1}_{n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{从左往右按组计数}} a_1^{n-2} a_2^{1+n-3} a_3^{2+n-4} a_4^{3+n-4} \cdot \cdots a_{k-1}^{k-2+n-k} a_{k+1}^{k-1+n-k-1} \cdot \cdots a_n^{n-2} = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i^{n-2}.$$

注意: 从第k-1组开始, 后面每组都比原来少一对 (后面每组均缺少原本含 a_k 的那一对).

命题 1.15 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 n 阶方阵 A, 任意的指标 $1 \le i \le n$, 以及任意的常数 c, 满足下列条件:

- (1) 设 A 的第 i 列是方阵 B 和 C 的第 i 列之和, 且 A 的其余列与 B 和 C 的对应列完全相同, 则 f(A) = f(B) + f(C);
- (2) 将 \mathbf{A} 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 \mathbf{B} , 则 $f(\mathbf{B}) = c f(\mathbf{A})$;
- (3) 对换 \boldsymbol{A} 的任意两列得到方阵 \boldsymbol{B} , 则 $f(\boldsymbol{B}) = -f(\boldsymbol{A})$;
- (4) $f(I_n) = 1$, 其中 I_n 是 n 阶单位阵.
- 求证:f(A) = |A|.

 $\stackrel{\circ}{\mathbf{v}}$ **笔记** 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1). 唯一确定了行列式这个函数.

证明 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 α_k 为 A 的第 k 列, e_1, e_2, \dots, e_n 为标准单位列向量, 则

$$\alpha_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n = \sum_{k=1}^n a_{kj}e_k, j = 1, 2, \dots, n.$$

从而由条件(1)和(2)可得

$$f(A) = f(\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n}) = f\left(\sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}e_{k}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n}\right)$$

$$= a_{11}f(e_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n}) + a_{21}f(e_{2}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n}) + \dots + a_{n1}f(e_{n}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n})$$

$$= \sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}f(e_{k_{1}}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n}) = \sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}f\left(e_{k_{1}}, \sum_{k_{2}=1}^{n} a_{k_{2}2}e_{k_{2}}, \dots, \alpha_{n}\right)$$

$$= \sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}\left[a_{12}f(e_{k_{1}}, e_{1}, \dots, \alpha_{n}) + a_{22}f(e_{k_{1}}, e_{2}, \dots, \alpha_{n}) + \dots + a_{n2}f(e_{k_{1}}, e_{n}, \dots, \alpha_{n})\right]$$

$$= \sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}\sum_{k_{2}=1}^{n} a_{k_{2}2}f(e_{k_{1}}, e_{k_{2}}, \dots, \alpha_{n}) = \dots = \sum_{k_{1}=1}^{n} a_{k_{1}1}\sum_{k_{2}=1}^{n} a_{k_{2}2}\dots\sum_{k_{n}=1}^{n} a_{k_{n}n}f(e_{k_{1}}, e_{k_{2}}, \dots, e_{k_{n}})$$

$$= \sum_{k_{1}=1}^{n} \sum_{k_{2}=1}^{n} \dots \sum_{k_{n}=1}^{n} a_{k_{1}1}a_{k_{2}2}\dots a_{k_{n}n}f(e_{k_{1}}, e_{k_{2}}, \dots, e_{k_{n}}) = \sum_{(k_{1}, k_{2}, \dots, k_{n})} a_{k_{1}1}a_{k_{2}2}\dots a_{k_{n}n}f(e_{k_{1}}, e_{k_{2}}, \dots, e_{k_{n}}).$$

若 $k_i = k_j$,则 $(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$ 的第 i 列和第 j 列对换后仍然是 $(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$. 由条件 (3) 可知, $f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) = -f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$,于是 $f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) = 0$. 因此在 f(A) 的表示式中,只剩下 $k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$ 变成 $(e_1, e_2, \cdots, e_n) = I_n$,故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \cdots, \mathbf{e}_{k_n}) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} f(\mathbf{I}_n) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}$$

于是由行列式的组合定义可知

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \cdots, \mathbf{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = |\mathbf{A}|.$$

1.2 练习

▲ 练习 1.1 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

笔记 组合数公式: $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$. 于是有

$$C_m^k = C_{m+1}^k - C_m^{k-1}$$
 $C_m^{k-1} = C_{m+1}^k - C_m^k$

解

$$\begin{split} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_2^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1) \cdot r_{i-1} + r_i}{i = n, \cdots, 2} \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_2^1 - C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_3^2 - C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^2 - C_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-2}^{n-2} - C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{k \# - \mathcal{H} \# \mathcal{H}}{N}} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 - C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 - C_{n-2}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 - C_2^2 & \cdots & C_n^2 - C_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix}$$

此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分,并具有相同的规律.不断这样做下去,最后可得 |A|=1

▲ 练习 1.2 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \frac{r_1 + r_i}{i = 2, \cdots, n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

▲ 练习 1.3 计算 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

解

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_1 & a_2b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_nb_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_1 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-a_i)^{r_1+r_i} \\ a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & a_3b_n - a_nb_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & a_3b_n - a_nb_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)$$

$$= a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}b_i - a_ib_{i+1}).$$

△ 练习 1.4 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times 3^{n} - 3^{n} \times 3^{n} + (-1)^{n+1}} a^{n} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = a^{n} + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^{n} - a^{n-2}.$$

注 本题也可由命题1.3直接得到, $|A| = a^n - a^{n-2}$.

△ 练习 1.5 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 Vieta 定理可知, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 因此, 我们有

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \frac{r_i + r_1}{i = 2, 3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

练习 1.6 设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

鼦

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{11} & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{21} & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n1} & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} \cdots (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1) (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} \cdots (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{(-1)j_{1}+j_{i}}{i=2,\cdots,n} (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{j_{i}+j_{1}}{i=2,\cdots,n} (n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法求和法:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上(或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列(或列)一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列(或行)的倍数加到其余列(或行)上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

- 1. 行列式每行(或列)和相等时;
- 2. 行列式每行(或列)和有一定规律时.

▲ 练习 1.7 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{j_i + j_1} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{(-1)r_1 + r_i}{i = 2, \cdots, n} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

注 因为 |A| 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题1.1的应用, 利用命题1.1的计算方法直接得到结

果.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{eff} \underline{B}1.2} -\sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-2} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

▲ 练习 1.8 计算 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}.$$

警 笔记 既可以将 |A| 看作命题1.1的应用,利用命题1.1的计算方法直接得到结果.即下述解法一.
也可以利用求和法将 |A| 化为上三角形行列式.即下述解法二.

解 解法一:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = \frac{-r_1 + r_i}{i = 2, \dots, n} \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{\tiny $\oplus \underline{\mathbb{M}} 1.3}}{=} (a_1 + b) b^{n-1} - \sum_{i=2}^{n} b^{n-2} a_i (-b) = b^{n-1} \left[(a_1 + b) + \sum_{i=2}^{n} a_i \right] = \left((b + \sum_{i=1}^{n} a_i) b^{n-1} \right].$$

解法二:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{-a_{i} \cdot j_{1} + j_{i}}{\underbrace{i=2, \cdots, n}} \left(b + \sum_{i=1}^{n} a_{i} \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = \left(b + \sum_{i=1}^{n} a_{i} \right) b^{n-1}.$$

▲ 练习 1.9 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

拿 笔记 求和法的经典应用.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{j_i + j_1} \frac{n(n+1)}{i=2,\cdots,n} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{-r_1+r_i}{\stackrel{=}{i=2,\cdots,n}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\frac{-j_1+j_i}{\stackrel{i=2,\cdots,n}{=}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
2 & 0 & \cdots & -n & -n \\
1 & 0 & \cdots & 0 & -n
\end{vmatrix}
\frac{\cancel{k}\cancel{\$}-\cancel{\uparrow}\cancel{\cancel{R}\cancel{\cancel{H}}}}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix}
-n & \cdots & -n & -n \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -n & -n \\
0 & \cdots & 0 & -n
\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{n\left(n+1\right) }{2}\left(-n\right) ^{n-2}=\left(-1\right) ^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

练习 1.10 计算
$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} (a_0 + b_0)^n & (a_0 + b_1)^n & \cdots & (a_0 + b_n)^n \\ (a_1 + b_0)^n & (a_1 + b_1)^n & \cdots & (a_1 + b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_n + b_0)^n & (a_n + b_1)^n & \cdots & (a_n + b_n)^n \end{bmatrix}$$

解 由二项式定理可知

$$\left(a_{i}+b_{j}\right)^{n}=a_{i}^{n}+C_{n}^{1}a_{i}^{n-1}b_{j}+\cdots+C_{n}^{n-1}a_{i}b_{j}^{n-1}+b_{j}^{n}, \sharp \forall i,j=0,1,\cdots,n.$$

从而

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_0 + \dots + C_n^{n-1} a_0 b_0^{n-1} + b_0^n & \dots & a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_n + \dots + C_n^{n-1} a_0 b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_0 + \dots + C_n^{n-1} a_1 b_0^{n-1} + b_0^n & \dots & a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_n + \dots + C_n^{n-1} a_1 b_n^{n-1} + b_n^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n1}^{n-1} b_0 + \dots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_0^{n-1} + b_0^n & \dots & a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_n + \dots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_n^n + C_n^1 a_n^{n-1} b_0 + \dots + C_n^{n-1} a_n b_0^{n-1} + b_0^n & \dots & a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_n + \dots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_n^{n-1} + b_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \dots & a_0 & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_0 & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^n & a_{n-1}^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_n^1 b_0 & C_n^1 b_1 & \dots & C_n^1 b_{n-1} & C_n^1 b_n \\ b_0^n & b_1^n & \dots & b_{n-1}^n & b_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_n^{n-1} b_0^{n-1} & C_n^{n-1} b_1^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \dots & b_{n-1}^{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \dots & b_{n-1}^{n-1} & b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \dots & b_{n-1}^{n-1} & b_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \le j < i \le n} \left(a_i - a_j \right) \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \le j < i \le n} \left(b_i - b_j \right) == \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \le j < i \le n} \left(a_j - a_i \right) \left(b_i - b_j \right).$$

练习 1.11 计算 n 阶行列式 (bc ≠ 0):

解 由命题1.6可知, 递推式为 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} (n \ge 2)$. 又易知 $D_0 = 1, D_1 = a$. 令 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 是特征方程 $\lambda^2=a\lambda-bc\lambda$ 的两个复根,则 $D_n=(\alpha+\beta)\,D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}(n\geq 2)$. 从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta \left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2} \right), D_n - \beta D_{n-1} = \alpha \left(D_{n-1} - \beta D_{n-2} \right).$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-1} (D_1 - \alpha D_0) = \beta^{n-1} (a - \alpha) = \beta^n,$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-1} (D_1 - \beta D_0) = \alpha^{n-1} (a - \beta) = \alpha^n.$$

因此, 若 $a^2 \neq 4bc(\text{pr}\alpha \neq \beta)$, 则联立上面两式, 解得

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若 $a^2 = 4bc(\mathfrak{P}\alpha = \beta)$, 则由 $a = \alpha + \beta$ 可知, $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$. 又由 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$ 可得

$$D_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2}D_{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + \frac{a}{2}D_{n-2}\right) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^2D_{n-2} = \dots = n\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^nD_0 = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

▲ 练习 1.12 求证:n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \cos nx.$$

解 解法一:

于是当 $n \ge 2$ 时, 我们有 $D_n = (\lambda_1 + \lambda_2) D_{n-1} + \lambda_1 \lambda_2 D_{n-2}$.

进而

$$D_{n} - \lambda_{1} D_{n-1} = \lambda_{2} (D_{n} - \lambda_{1} D_{n-1}),$$

$$D_{n} - \lambda_{2} D_{n-1} = \lambda_{1} (D_{n} - \lambda_{2} D_{n-1}).$$
(1.1)

由此可得

$$D_n - \lambda_1 D_{n-1} = \lambda_2^{n-1} (D_1 - \lambda_1 D_0) = -i \sin x \cdot \lambda_2^{n-1},$$

$$D_n - \lambda_2 D_{n-1} = \lambda_1^{n-1} (D_1 - \lambda_2 D_0) = i \sin x \cdot \lambda_1^{n-1}.$$

$$D_{n} = \frac{i \sin x \cdot \lambda_{1}^{n} + i \sin x \cdot \lambda_{2}^{n}}{\lambda_{1} - \lambda_{2}} = \frac{i \sin x \cdot (\cos x + i \sin x)^{n} + i \sin x \cdot (\cos x - i \sin x)^{n}}{2i \sin x}$$

$$\frac{Euler \stackrel{?}{\sim} \stackrel{?}{\sim} }{e^{ix} = \cos x + i \sin x, e^{-ix} = \cos x - i \sin x} = \frac{i \sin x \cdot e^{-nxi}}{2i \sin x} = \frac{i \sin x \cdot (\cos nx + i \sin nx) + i \sin x \cdot (\cos nx - i \sin nx)}{2i \sin x}$$

$$= \frac{2i \sin x \cdot \cos nx}{2i \sin x} = \cos nx.$$

$$D_n = \cos k\pi D_{n-1} = (\cos k\pi)^2 D_{n-2} = \cdots = (\cos k\pi)^n D_0 = (\cos k\pi)^n = (-1)^{kn} = \cos (nk\pi) = \cos nx.$$

解法二: 仿照练习1.14中的数学归纳法证明.

△ 练习 1.13 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 - a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}.$$

筆记 观察原行列式我们可以得到, D_n 的每列和有一定的规律,即除了第一列和最后一列,中间每列和均为 0. 并且 D_n 是三对角行列式. 因此,我们既可以直接应用三对角行列式的结论 (即命题1.6),又可以使用求和法进行求解. 如果我们直接应用三对角行列式的结论 (即命题1.6),按照对一般的三对角行列式展开的方法能得到相应递推式,但是这样得到的递推式并不是相邻两项之间的递推,后续求解通项并不简便.又因为使用求和法计算行列式后续计算一般比较简便所以我们先采用求和法进行尝试.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 - a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix} = \frac{r_i + r_1}{i = 2, \cdots, n} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 - a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}$$

$$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} - \frac{1}{1} - \frac$$

$$= -a_1 D_{n-1} + (-1)^{n+1} (-1)^{n-1}$$
$$= 1 - a_1 D_{n-1}.$$

其中 D_{n-i} 表示 D_{n-i+1} 去掉第一行和第一列得到的 n-i 阶行列式, $i=1,2,\cdots,n-1$. (或者称 D_{n-i} 表示以 a_{i+1},\cdots,a_n 为未定元的 n-i 阶行列式, $i=1,2,\cdots,n-1$)

由递推不难得到

$$D_n = 1 - a_1 (1 - a_2 D_{n-2}) = 1 - a_1 + a_1 a_2 D_{n-2} = \dots = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \dots + (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n.$$

解法二: 仿照练习1.14中的数学归纳法证明.

△ 练习 1.14 设 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$A_n = a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

🔮 笔记 用数学归纳法证明与行列式有关的结论.

练习1.12和练习1.13都可同理使用用数学归纳法证明(对阶数 n 进行归纳即可).

证明 (数学归纳法) 对阶数 n 进行归纳. 当 n=1,2 时, 结论显然成立. 假设阶数小于 n 结论成立.

现证明n阶的情形.注意到

$$A_{n} = \begin{vmatrix} a_{0} + a_{1} & a_{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{1} & a_{1} + a_{2} & a_{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2} & a_{2} + a_{3} & a_{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n} \end{vmatrix} = (a_{n-1} + a_{n}) A_{n-1} - a_{n-1}^{2} A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子中得

$$A_{n} = (a_{n-1} + a_{n}) A_{n-1} - a_{n-1}^{2} A_{n-2}$$

$$= (a_{n-1} + a_{n}) a_{0} a_{1} \cdots a_{n-1} \left(\frac{1}{a_{0}} + \frac{1}{a_{1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) - a_{n-1}^{2} a_{0} a_{1} \cdots a_{n-2} \left(\frac{1}{a_{0}} + \frac{1}{a_{1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} \right)$$

$$= a_{0} a_{1} \cdots a_{n} \left(\frac{1}{a_{0}} + \frac{1}{a_{1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + a_{0} a_{1} \cdots a_{n-2} a_{n-1}^{2} \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$= a_{0} a_{1} \cdots a_{n-1} \left[a_{n} \left(\frac{1}{a_{0}} + \frac{1}{a_{1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + 1 \right]$$

$$= a_{0} a_{1} \cdots a_{n-1} a_{n} \left(\frac{1}{a_{0}} + \frac{1}{a_{1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n}} \right).$$

故由数学归纳法可知,结论对任意正整数 n 都成立.

△ 练习 1.15 设 n(n > 2) 阶行列式 |A| 的所有元素或为 1 或为 -1, 求证:|A| 的绝对值小于等于 $\frac{2}{3}n!$. 解 对阶数 n 进行归纳. 当 n = 3 时, 将 |A| 的第一列元素为-1 的行都乘以-1, 再将 |A| 的第一行元素为 1 的列都乘以-1, |A| 的绝对值不改变.

因此不妨设
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix}$$
, 其中 $a_0, b_0, c_0, d_0 = 1$ 或 -1 .

从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix} = \frac{j_1 + j_i}{i = 2,3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}, \ \ \sharp \ \forall a, b, c, d = 0 \ \ \sharp \ 2.$$

于是

$$abs(|A|) = abs \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{pmatrix} = abs(ad - bc) \le 4 = \frac{2}{3} \cdot 3!$$

假设 n-1 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形. 将 |A| 按第一行展开得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$
 $\sharp + a_{1i} = 1$ $= 1$

从而由归纳假设可得

$$abs (|A|) = abs (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) \leq abs (A_{11}) + abs (A_{12}) + \dots + abs (A_{1n})$$

$$\leq \frac{2}{3} (n-1)! + \frac{2}{3} (n-1)! + \dots + \frac{2}{3} (n-1)!$$

$$= n \cdot \frac{2}{3} (n-1)! = \frac{2}{3} n!.$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

▲ 练习 1.16 计算 n 阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

🕏 笔记 解法一(大拆分法): 注意到

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + (a - b) & b + 0 & \cdots & b + 0 \\ b + 0 & b + (a - b) & \cdots & b + 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b + 0 & b + 0 & \cdots & b + (a - b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} A_i = (a - b)^n + \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

其中 A_i 是第 i 行元素全为 b, 主对角元素除了 (i,i) 元外都为 a-b, 其他元素都为 0 的 n 阶行列式. 又因为

$$\begin{vmatrix} 1 & a-b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_i = i & b & \cdots & b & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & & & a-b \end{vmatrix} = b (a-b)^{n-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$|A| = (a-b)^n + \sum_{i=1}^n A_i = (a-b)^n + nb (a-b)^{n-1} = [a+(n-1)b] (a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n , 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + (a-b) & b & \cdots & b \\ b + 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b + 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} = b (a-b)^{n-1} + (a-b) D_{n-1}.(n \ge 2)$$

从而由上式递推可得

$$D_{n} = b (a - b)^{n-1} + (a - b) D_{n-1}$$

$$= b (a - b)^{n-1} + (a - b) [b (a - b)^{n-2} + (a - b) D_{n-2}] = 2b (a - b)^{n-1} + (a - b)^{2} D_{n-2}$$

$$= \cdots = (n - 1) b (a - b)^{n-1} + (a - b)^{n-1} D_{1}$$

$$= (n - 1) b (a - b)^{n-1} + (a - b)^{n-1} a$$

$$= [a + (n - 1) b] (a - b)^{n-1}.$$

解法三(求和法):

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{j_i + j_1} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\frac{-r_1 + r_i}{i = 2, 3, \cdots, n} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a - b)^{n-1}.$$

解法四("爪"型行列式的推广):

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \frac{-r_1 + r_i}{i = 2, 3, \cdots, n} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b - a & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b - a & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix}$$

$$\frac{-j_i + j_1}{i = 2, 3, \cdots, n} \begin{vmatrix} a - (n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} = [a - (n-1)b](a - b)^{n-1}.$$

▲ 练习 1.17 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一(大拆分法):令

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |A| + tu, u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

当 t = -b 时, 可得

$$|A(-b)| = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} = |A| - bu = (a-b)^n.$$

当 t = -c 时, 可得

$$|A(-c)| = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} = |A| - cu = (a-c)^n.$$

若 $b \neq c$,则联立上面两式可得

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若b=c,则由练习1.16可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$
.

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n , 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$D_{n} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + (a-b) & b + 0 & \cdots & b + 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a - b & 0 & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a - c & \cdots & b - c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a - c \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1}$$

$$= b (a-c)^{n-1} + (a-b) D_{n-1} \cdot (n \ge 2)$$

$$D_{n} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c + (a-c) & b & \cdots & b \\ c + 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c + 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a - c & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= c \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c & \cdots & a - b \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c - b & \cdots & a - b \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1}$$

$$= c (a-b)^{n-1} + + (a-c) D_{n-1}. (n \ge 2)$$

若 $b \neq c$.则联立上面两式可得

$$|A| = D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若b=c.则由上面式子递推可得

$$|A| = D_n = b (a - b)^{n-1} + (a - b) D_{n-1}$$

= $b (a - b)^{n-1} + (a - b) [b (a - b)^{n-2} + (a - b) D_{n-2}] = 2b (a - b)^{n-1} + (a - b)^2 D_{n-2}$

$$= \cdots = (n-1) b (a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1$$

$$= (n-1) b (a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a$$

$$= [a + (n-1) b] (a-b)^{n-1}.$$

当b=c时,也可以由练习1.16可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$
.

△ 练习 1.18 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, \cdots , $f_n(x)$ 是次数不超过 n-2 的多项式, 求证: 对任意 n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n , 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明 证法一(大拆分法): 因为 $f_k(x)$ ($1 \le k \le n$) 的次数不超过 n-2, 所以它们都是单项式 $1, x, \cdots, x^{n-2}$ 的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这 n-1 个单项式进行拆分, 最后得到至多 (n-1)! 个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有 n 列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

证法二 (多项式根的有限性): 令
$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$
, 则将 $f(x)$ 按第一列展开得到

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)$$

其中 k_i 为行列式 f(x) 的第 (i,1) 元素的代数余子式, $i=1,2,\cdots,n$.

注意 k_i 与 x 无关, 均为常数. 若 f(x) 不恒为 0, 则又因为 $f_k(x)(1 \le k \le n)$ 的次数不超过 n-2, 所以 $degf(x) \le n-2$. 但是, 注意到 $f(a_2) = f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$, 即 f(x) 有 n-1 个根. 于是由余数定理可知,f(x) = 00,以后 f(x) = 00,以后 f(x) = 00,当然也有 $f(a_1) = 0$ 0。

证法三:

设多项式

$$f_k(x) = c_{k,n-2}x^{n-2} + \dots + c_{k1}x + c_{k0}, 1 \le k \le n.$$

则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2} \end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是 $n \times (n-1)$ 和 $(n-1) \times n$ 矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零.

命题 1.16

计算 n 阶行列式:

$$D_{n} = \begin{vmatrix} x_{1} & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_{2} & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_{3} & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_{n} \end{vmatrix}.$$

解(小拆分法)对第 n 列进行拆分即可得到递推式: (对第 1 或 n 行 (或列) 拆分都可以得到相同结果)

将原行列式转置后, 同理可得

$$D_{n} = D_{n}^{T} = \begin{vmatrix} x_{1} & z & z & \cdots & z & z+0 \\ y & x_{2} & z & \cdots & z & z+0 \\ y & y & x_{3} & \cdots & z & z+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z+0 \\ y & y & y & \cdots & y & z+x_{n}-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1} & z & z & \cdots & z & z \\ y & x_{2} & z & \cdots & z & z \\ y & y & x_{3} & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1} & z & z & \cdots & z & 0 \\ y & x_{2} & z & \cdots & z & 0 \\ y & y & x_{3} & \cdots & z & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1} & z & z & \cdots & z & 0 \\ y & x_{2} & z & \cdots & z & 0 \\ y & y & y & x_{3} & \cdots & z & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x_{n}-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_{1} - y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_{2} - y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{3} - y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + (x_{n} - z) D_{n-1}^{T} = z \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i} - y) + (x_{n} - z) D_{n-1}.$$

$$(1.3)$$

若 z ≠ v, 则联立(1.2)(1.3)式, 解得

$$D_n = \frac{1}{z - y} \left[z \prod_{i=1}^n (x_i - y) - y \prod_{i=1}^n (x_i - z) \right];$$

若 z = y, 则由(1.2)式递推可得

$$D_{n} = y \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i} - y) + (x_{n} - y) D_{n-1}$$

$$= y \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i} - y) + (x_{n} - y) \left(y \prod_{i=1}^{n-2} (x_{i} - y) + (x_{n-1} - y) D_{n-2} \right)$$

$$= y \prod_{j \neq n} (x_{i} - y) + y \prod_{j \neq n-1} (x_{i} - y) + (x_{n} - y) (x_{n-1} - y) D_{n-2}$$

$$= \cdots = y \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x_{j} - y) + \prod_{i=1}^{n} (x_{i} - y) D_{0}$$

$$= y \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x_{j} - y) + \prod_{i=1}^{n} (x_{i} - y).$$

△ 练习 1.19 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix}$$

🔮 笔记 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性,故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的 t 对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的 t_i , 所以推广的大拆分也不行)

解 (小拆分法) 将 D_n 最后一列拆成两列得

$$D_{n} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1}^{2} & a_{1}a_{2} & \cdots & a_{1}a_{n} \\ a_{2}a_{1} & 1 + a_{2}^{2} & \cdots & a_{2}a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n}a_{1} & a_{n}a_{2} & \cdots & 1 + a_{n}^{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1}^{2} & a_{1}a_{2} & \cdots & a_{1}a_{n} \\ a_{2}a_{1} & 1 + a_{2}^{2} & \cdots & a_{2}a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n}a_{1} & a_{n}a_{2} & \cdots & 1 + a_{n}^{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1}^{2} & a_{1}a_{2} & \cdots & a_{1}a_{n} \\ a_{2}a_{1} & 1 + a_{2}^{2} & \cdots & a_{n}a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n}a_{1} & 1 + a_{2}^{2} & \cdots & a_{2}a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n}a_{1} & a_{n}a_{2} & \cdots & a_{n}^{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + a_{1}^{2} & a_{1}a_{2} & \cdots & 0 \\ a_{2}a_{1} & 1 + a_{2}^{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n}a_{1} & a_{n}a_{2} & \cdots & a_{n}^{2} \end{vmatrix} + D_{n-1}.$$

若 $a_n \neq 0$, 则由上式可得

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \xrightarrow{\frac{\text{st} \# - \text{ht} \text{ft} \text{$$

若 $a_n=0$, 则上面第一个行列式等于 0, 进而 $D_n=D_{n-1} (n\geq 0)$. 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n = a_n^2 + D_{n-1} = a_n^2 + \left(a_{n-1}^2 + D_{n-2}\right) = \dots = \sum_{i=2}^n a_i^2 + D_1 = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

▲ 练习 1.20 求下列行列式的值:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos (n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos (n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos (n-1)\theta_n \end{vmatrix}.$$

解 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\cos k\theta + i\sin k\theta = (\cos \theta + i\sin \theta)^{k}$$

$$= \cos^{k} \theta + iC_{k}^{1}\cos^{k-1}\theta\sin\theta - C_{k}^{2}\cos^{k-2}\theta\sin^{2}\theta + iC_{k}^{3}\cos^{k-3}\theta\sin^{3}\theta - \cdots$$

$$= \cos^{k} \theta + iC_{k}^{1}\cos^{k-1}\theta\sin\theta - C_{k}^{2}\cos^{k-2}\theta\left(1 - \cos^{2}\theta\right) + iC_{k}^{3}\cos^{k-3}\theta\sin^{3}\theta - \cdots$$

比较实部可得

$$\cos k\theta = \cos^k \theta \left(1 + C_k^2 + C_k^4 + \dots \right) - C_k^2 \cos^{k-2} + C_k^4 \cos^{k-4} - \dots$$
$$= 2^{k-1} \cos^k \theta - C_k^2 \cos^{k-2} + C_k^4 \cos^{k-4} - \dots$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成 $\cos \theta_i (i=2,3,\cdots,n)$ 的多项式.

刊用这个事实, 依次将原行列式各列表示成
$$\cos\theta_j(j=2,3,\cdots,n)$$
 的多项式.
F利用行列式的性质, 可依次将第 $3,4,\cdots,n$ 列消去除最高次项外的其他项, 从而得到
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & 2\cos^2\theta_n & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{1 \le i < j \le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i).$$
 组合式计算常用公式:

结论 组合式计算常用公式:

$$(1)C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$(2)C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$$
 证明:(1)

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!} = \frac{(n-1)! (n-m+m)}{m! (n-m)!} = \frac{(n-1)! (n-m)}{m! (n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m! (n-m)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{m! (n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)! (n-m)!} = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

(2)(i) 当 n 为奇数时, 由 $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, 可行

$$C_{n}^{0} + C_{n}^{2} + C_{n}^{4} \cdots + C_{n}^{n-1} = C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + C_{n-1}^{3} + C_{n-1}^{4} \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}$$

$$C_{n}^{1} + C_{n}^{3} + C_{n}^{5} \cdots + C_{n}^{n} = C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + C_{n-1}^{3} + C_{n-1}^{4} + C_{n-1}^{5} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n}$$

由于 $C_{n-1}^n = 0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$
.

故
$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$$
.

(ii) 当 n 为偶数时, 由 $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, 可得

$$\begin{split} &C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdot \dots + C_n^n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdot \dots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n \\ &C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdot \dots + C_n^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} \end{split}$$

由于 $C_{n-1}^n = 0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$
.

综上所述,
$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$
.

▲ 练习 1.21 求下列行列式式的值:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$

室记可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论. 解根据和差化积公式, 可得

$$\sin k\theta - \sin (k-2)\theta = 2\sin\theta\cos(k-1)\theta, k=2,3,\cdots,n.$$

再结合上一题结论,可得

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 & \cdots & 2 \sin \theta_1 \cos (n-1) \theta_1 \\ \sin \theta_2 & 2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & \cdots & 2 \sin \theta_2 \cos (n-1) \theta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & 2 \sin \theta_n \cos \theta_n & \cdots & 2 \sin \theta_n \cos (n-1) \theta_n \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \le i < j \le n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i)$$

$$= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \le i < j \le n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

▲ 练习 1.22 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 + x_1 & 1 + x_2 & \cdots & 1 + x_1^n \\ 1 + x_1^2 & 1 + x_2^2 & \cdots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \cdots & 1 + x_n^n \end{vmatrix}.$$

拿 笔记 本题也可以使用大拆分法进行求解. 但我们以本题为例介绍利用**升阶法**计算行列式. 解 解法一升阶法:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \cdots & 1 + x_1^n \\ 1 & 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \cdots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \cdots & 1 + x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{15} \cancel{5} \cancel{5}}{1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= 2x_1x_2 \cdots x_n \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= [2x_1x_2 \cdots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)] \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

$$= [2x_1x_2 \cdots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)] \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

$$= [x_1 + t & x_1^2 + t & \cdots & x_1^n + t \\ x_2 + t & x_2^2 + t & \cdots & x_2^n + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n + t & x_n^2 + t & \cdots & x_n^n + t \end{vmatrix},$$

$$= B_{ij} \not\in |B(0)| \text{ in } \Re(i, j) \not= \Re(i - 1) \implies \Re(i, j) \implies \Re(i, j) \not= \Re(i - 1) \implies \Re(i, j) \not= \Re(i - 1) \implies \Re(i, j) \implies \Re(i, j) \not= \Re(i - 1) \implies \Re(i, j) \implies \Re(i$$

根据行列式的性质将 |A| 每一列都拆分成两列, 然后按 t 所在的列展开得到

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}(1)| = |\mathbf{B}(0)| + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij},$$

 $|\mathbf{B}(-1)| = |\mathbf{B}(0)| - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}.$

于是 $|\mathbf{A}| = 2|\mathbf{B}(0)| - |\mathbf{B}(-1)|$. 注意到

$$|\mathbf{B}(0)| = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

又由行列式性质可得

$$|\mathbf{B}(-1)| = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_1^2 - 1 & \cdots & x_1^n - 1 \\ x_2 - 1 & x_2^2 - 1 & \cdots & x_2^n - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - 1 & x_n^2 - 1 & \cdots & x_n^n - 1 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + 1 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdots + x_1 + 1 \\ 1 & x_2 + 1 & \cdots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \cdots + x_2 + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + 1 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \cdots + x_n + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

故可得

$$|\mathbf{A}| = 2|\mathbf{B}(0)| - |\mathbf{B}(-1)| = 2x_1x_2 \cdots x_n \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= [2x_1x_2 \cdots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)] \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

结论 升阶法: 将原行列式加上一行和一列使得到到新行列式的阶数比原行列式要高一阶.

升阶法的应用:

- (1) 当原行列式每一行具有相同的结构时, 我们可以在原行列式的基础上加上一行和一列, 新加上的一列和一行需要满足: 新的一列除了与新的一行交叉位置的元素为 1 外其余全为 0(这样才能保证新的行列式按新的一行或一列展开后与原行列式相同), 并且新加上的一行除 1 以外其他位置的元素就取原行列式中每一行所具有的相同结构 (这样可以利用行列式的性质将每一行中的相同的结构减去, 进而达到简化原行列式的目的). 具体例子见练习1.22.
- (2) 当原行列式是我们由熟悉的行列式去掉某一行、或某一列、或某一行和一列得到的,我们可以在原行列式的基础上补充上缺少的那一行和一列,再进行计算得到新行列式的式子.再将新行列式按照新添加的一行或一列展开得到的对应元素乘与其对应的代数余子式,而新添加的一行和一列交叉位置的元素对应的余子式就是原行列式,最后两边式子比较系数一般就能得到原行列式的值.具体例子见练习1.23.
- ▲ 练习 1.23 求下列 n 阶行列式的值 $(1 \le i \le n-1)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解令

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix} = (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$
(1.4)

而上式右边是关于y的n次多项式,并且其yⁱ前的系数是

$$\sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_{n-i} \leqslant n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

将 |B| 按最后一行展开, 得

$$|\mathbf{B}| = A_{n1} + A_{n2}y + \dots + A_{ni}y^{i} + \dots + A_{nn}y^{n},$$

其中 A_{nk} 为 $|\mathbf{B}|$ 的 (n,k) 位置元素的代数余子式, $k=1,2,\cdots,n$.

注意到 A_{nk} 均与 y 无关. 因此 |B| 作为关于 y 的 n 次多项式, 其 y^i 前的系数是

$$A_{ni} = (-1)^{n+1+i+1}|A| = (-1)^{n+i}|A|.$$

再结合(1.4)式, 可知

$$(-1)^{n+i}|A| = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_{n-i} \leqslant n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

故 $|A| = x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

室 笔记解法一中不仅使用了升阶法还使用了分块"爪"型行列式的计算方法.观察到各行各列有不同的公共项,因此可以利用升阶法将各行各列的公共项消去.

解 解法一(升阶法):

$$|A| \xrightarrow{\text{$\beta \in \mathbb{N}$}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{j_1+j_i}{\stackrel{}{i=1,3,4\cdots,n+2}} =
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\
-a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\
-a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n
\end{vmatrix}$$

$$\frac{j_1 + j_i}{i = 1, 3, 4 \cdots, n + 2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}j_i + j_1}{\frac{1}{2a_{i-2}}j_i + j_2} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & \frac{S}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{T}{2} & 1 - \frac{n}{2} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}$$

其中
$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. 注意到上述行列式是分块上三角行列式, 从而可得
$$|A| = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \cdot \frac{(n-2)^2 - ST}{4} = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})].$$

设
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2a_1 \\ & -2a_2 \\ & & \ddots \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \mid \mathbf{A} \mid = \mid \mathbf{B} + \mathbf{C} \mid.$$
从 而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

从而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \right)$$
(1.5)

来中
$$\widehat{C}\left(\frac{i_1 - i_2 - \cdots - i_k}{j_1 - j_2 - \cdots - j_k}\right)$$
 對 我 教 教 表 子 \widehat{A} , \widehat{A} 数 表 \widehat{A} 表 \widehat{A} 数 \widehat{A} 数 \widehat{A} 表 \widehat{A} 数 \widehat{A} % \widehat

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})]$$

$$= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i (1-n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{a_j}{a_j} + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n - \sum_{1 \le i, j \le n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n - \left(\sum_{1 \le i, j \le n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 2 \right) \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n - \left(\sum_{1 \le i, j \le n} \frac{a_i}{a_j} - n \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left\{ 4 - 4n + n + n (n-1) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} \right\}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left[n^2 - 4n + 4 - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right]$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left[(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \right].$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left[(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}) \right].$$

$$= (-2a_1 - 2a_2 - a_n)$$

于是由降价公式(打洞原理)我们有

$$|A| = |I| |B + \Lambda I_2^{-1} \Lambda'| = \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & B \end{vmatrix} = |B| |I_2 - \Lambda' B^{-1} \Lambda|$$

$$= \begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & & & \\ & & -\frac{1}{2a_2} & & \\ & & & & -\frac{1}{2a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i} \left| I_{2} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_{1}} & -\frac{1}{2a_{2}} & \cdots & -\frac{1}{2a_{n}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1} & 1 \\ a_{2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n} & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= (-2)^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i} \left| I_{2} - \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i}} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{i} & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \right| = (-2)^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i} \left| \frac{\frac{n+2}{2}}{2} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i}} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{i} & \frac{n+2}{2} \end{pmatrix} \right|$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_{i} \left[(n+2)^{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i}} \right) \right].$$

结论 对角矩阵行列式的子式和余子式:

$$\mathbf{\mathcal{U}}\left|\mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \text{则其 k 阶子式 \mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} 除 k 阶主子式 \mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$
外都为零,

记
$$\widehat{A}$$
 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 为 A $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的 代 数 余 子 式 $(n-k)$ 的 . 于 是 \widehat{A} $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 \widehat{A} $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 为 数 表 、 k 中 都 为 零 、 k 中 k 一 k 2 k k

并且

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k},$$

$$\widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_1 \cdots \widehat{a}_{i_1} \cdots \widehat{a}_{i_2} \cdots \widehat{a}_{i_k} \cdots a_n$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$.

△ 练习 1.25 若 n 阶行列式 |A| 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 证明:|A| = 0.

解 证明由行列式的组合定义可得

$$|A| = \sum_{1 \le k_1 k_2 \cdots k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}}$$

由于 |A| 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 故 $a_{k_{11}},a_{k_{22}},\cdots,a_{k_{nn}}$ 中至少有一个为零, 从而 $a_{k_{11}}a_{k_{22}}\cdots a_{k_{nn}}=0$, 因 此 |A|=0. 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为 |A| 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 由抽屉原理可 知,|A| 至少有一列其零元素的个数大于等于 $\left|\frac{n^2-n}{n}\right|+1=n$, 即 |A| 至少有一列其元素全为零, 因此 |A|=0.

▲ 练习 1.26 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n(n \ge 2)$ 阶非异整数方阵, 满足对任意的 i, j, |A| 均可整除 a_{ij} , 证明: $|A| = \pm 1$.

 \mathbf{H} |A| 可整除每个元素 $a_{i,j}$, 故由行列式的组合定义

$$\sum_{1 \le k_1, k_2, \cdots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}}$$

可知 $|A|^n$ 可整除 |A| 中每个单项 $a_{k_{11}}a_{k_{22}}\cdots a_{k_{nn}}$, 从而 $|A|^n$ 可整除 |A|, 即有 $|A|^{n-1}$ 可整除 1, 于是 $|A|^{n-1}=\pm 1$. 又 由行列式的组合定义可知 |A| 是整数, 从而只能是 $|A|=\pm 1$.

△ 练习 1.27 利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式:

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd)+(ad'-a'd)(bc'-b'c)=0.$$

解 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 Laplace 定理按第一、二列展开得

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd)+(ad'-a'd)(bc'-b'c)=0.$$

△ 练习 1.28 求 2n 阶行列式的值 (空缺处都是零):

解 设原行列式为 D_{2n} , 其中 2n 为行列式的阶数. 不断用 Laplace 定理按第一行及最后一行展开, 可得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix} \frac{$$
接第一行及最后一行展开 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2n-2} = \left(a^2 - b^2\right) D_{2(n-1)}.$

进而,由上述递推式可得

$$D_{2n} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \dots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2$$
$$= (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$

△ 练习 1.29 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x - a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x - a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x - a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

Ŷ 笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外,其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的"爪"型行

列式.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x - x^2 & x^2 - 2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x - x^2 & 0 & \cdots & x^2 - 2a_nx \end{vmatrix}$$

$$\frac{\text{T.N. 2ftpx}}{\text{T.N. 2ftpx}} (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_ix\right) - \sum_{i=2}^n a_i^2 \left(2a_1x - x^2\right) \left(x^2 - 2a_2x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_ix\right) \cdots \left(x^2 - 2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_ix\right) + \sum_{i=2}^n a_i^2 \left(x^2 - 2a_1x\right) \left(x^2 - 2a_2x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_ix\right) \cdots \left(x^2 - 2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_ix\right) + \sum_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_1x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_{i-1}x\right) a_i^2 \left(x^2 - 2a_{i+1}x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_nx\right)$$

$$= \left[\left(x^2 - 2a_1x\right) + a_1^2\right] \prod_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_ix\right) + \sum_{i=2}^n \left(x^2 - 2a_{i-1}x\right) a_i^2 \left(x^2 - 2a_{i-1}x\right) a_i^2 \left(x^2 - 2a_{i+1}x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_nx\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left(x^2 - 2a_ix\right) + \sum_{i=1}^n \left(x^2 - 2a_1x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_{i-1}x\right) a_i^2 \left(x^2 - 2a_{i+1}x\right) \cdots \left(x^2 - 2a_nx\right)$$

▲ 练习 1.30 求下列行列式式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = \frac{-j_1+j_1}{i=1,2} \begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & c^2 & 0 \\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} = \frac{-r_1+r_2}{i=1,2} (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\frac{c}{2}j_1+j_2}{\frac{b}{2}j_3+j_2}} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$= 2abc(a+b+c)^3.$$

解法二(求根法):

- △ 练习 1.31 证明: 若一个 n(n > 1) 阶行列式中元素或为 1 或为 -1,则其值必为偶数.
 - 证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数(注意:零也是偶数),由行列式的基本性质知道,可将因子2提出,剩下的行列式的元素都是整数,其值也是整数,乘以2后必是偶数.
- △ 练习 1.32 n 阶行列式 |A| 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 |A| 的第 n 列, 求得到的新行列式 |B| 的值.

解

$$|\mathbf{B}| = |\alpha_1 + \alpha_n, \alpha_2 + \alpha_1, \cdots, \alpha_n + \alpha_{n-1}|$$

▲ 练习1.33 令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 & 1 \\ & -1 & a_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{d_{n-1}}}}} = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n \leq k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 n=k 时, 将行列式 (a_1a_2, \cdots, a_k) 按第一列展开得

$$(a_1 a_2 \cdots a_k) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & \\ -1 & a_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (a_2 a_3 \cdots a_k) + (a_3 a_4 \cdots a_k).$$

从而

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3 a_4 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}=a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立.

△ 练习 1.34 设 |A| 是 n 阶行列式,|A| 的第 (i,j) 元素 $a_{ij} = \max\{i,j\}$, 试求 |A| 的值.

解

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} -r_i + r_{i-1} \\ i = n, n - 1, \cdots, 2 \\ \end{array}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

- ▲ 练习 1.35 设 |A| 是 n 阶行列式,|A| 的第 (i,j) 元素 $a_{ij} = |i-j|$, 试求 |A| 的值
- **室** 笔记 注意: 这只是一个对称行列式, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{-j_{i-1}+j_i}{i=n,n-1,\cdots,2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)^{n-2} (n-1).$$

▲ 练习 1.36 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时,但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整. 此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律,再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式,而且每个行列式并不是完整的 Vandermode 行列式. 后续求解很繁琐,因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑
$$n+1$$
 阶行列式 $|\boldsymbol{B}| = \begin{bmatrix} 1 & x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \\ 1 & y-a & y(y-a) & y^2(y-a) & \cdots & y^{n-1}(y-a) \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

由上式可知,|B| 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 |B| 按最后一行展开得到

$$|\mathbf{B}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} B_{n+1,i} y^{i-1},$$
 其中 B_{ni} 是 $|\mathbf{B}|$ 的第 $(n+1,i)$ 元的余子式, $i = 1, 2, \cdots, n+1$.

从而

$$|\mathbf{B}| = (-1)^{n+2} B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} B_{n+1,i} y^{i-2} (y-a) = \prod_{k=1}^{n} (y-x_k) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$
 (1.6)

又易知 $B_{n+1,2}=|A|$, 而当 a=0 时, 由等式(1.6)可知,|B| 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(1.6)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|A| = (-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n (-x_1) \cdots (-x_{i-1}) (-x_{i+1}) \cdots (-x_n) \right).$$

于是 $|A| = (-1)^{n+3} (-1)^{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right)$. 当 $a \ne 0$ 时,由等式 (1.1) 可知,|B| 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$,但是,我们比较等式(1.6)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k).$$

$$(1.7)$$

又因为

$$B_{n+1,1} = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

所以再结合等式(1.7)可得

$$-a(-1)^{n+3}|A| = -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k) - (-1)^{n+2}B_{n+1,1}$$

$$= (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= (-1)^n \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left[\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right].$$

故此时 $|A| = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left(\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right).$

△ 练习 1.37 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

室 笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令
$$G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}$$
, 则 $I = \frac{G(n)}{n}$ 且 $G(0) = 0$. 利用行列式求导公式,可得
$$G'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = n! x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \prod_{k=0}^{n} (x-k).$$

因此

$$I = \frac{G(n)}{n} = \frac{\int_0^n G'(x)dx}{n} = (n-1)! \prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k)dx$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} (n-1)! \prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (n-k-x)dx$$

$$= (-1)^{n+1} (n-1)! \prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k)dx$$

$$= (-1)^{n+1} I.$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1} = -1$. 于是 I = -I. 故 I = 0.