0.1 著名积分不等式

定理 0.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty)$,$(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty)$,$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 x_i,$i = 1, 2, \cdots, n$ 相等.

笔记 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ 有 $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i \neq 0$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出. □

定义 0.1

(1) $d\mu = g(x)dx$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E \subset \mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu = \sum_{n\in E} f(n)$.

定理 0.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu = 0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu \neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu \neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu = \int_E |g(x)|^2 d\mu = 1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用 Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} d\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1, c_2, 使得 $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$. □

定理 0.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geqslant 0$, $\int_a^b p(x)dx > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \tag{1}$$

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式(**??**)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3.Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 为书写简便, 我们记 $d\mu = \dfrac{p(x)}{\int_a^b p(y)dy}dx$, 那么有 $\displaystyle\int_a^b 1d\mu = 1$. 于是我们记 $x_0 = \displaystyle\int_a^b f(x)d\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))d\mu \geqslant \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]d\mu = \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b f(x)d\mu\right),$$

这就完成了证明. □

例题 0.1 对连续正值函数 f, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

证明 令 $d\mu = \dfrac{1}{b-a}dx$, 则 $\displaystyle\int_a^b d\mu = 1$, 再令 $x_0 \triangleq \displaystyle\int_a^b f(x)d\mu > 0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x \leqslant \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln f(x)d\mu &\leqslant \int_a^b \ln x_0 d\mu + \frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x) - x_0)d\mu \\
&= \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)d\mu - x_0\int_a^b d\mu\right) \\
&= \ln x_0 = \ln\int_a^b f(x)d\mu.
\end{aligned}$$

故结论得证. □