0.1 多项式矩阵

定义 0.1 (λ-矩阵)

一般地, 下列形式的矩阵:

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是以 λ 为未定元的数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式, 称为**多项式矩阵**, 或 **λ-矩阵**. λ-矩阵的加法、数乘及乘法与数域上的矩阵运算一样, 只需在运算过程中将数的运算代之于多项式即可.

定义 0.2 (λ-矩阵的初等变换)

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 施行的下列 3 种变换称为 λ-矩阵的初等行变换:

(1) 将 $A(\lambda)$ 的两行对换;

(2) 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 中的非零常数 c;

(3) 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去.

同理我们可以定义 3 种 λ-矩阵的初等列变换.

定义 0.3 (λ-矩阵的相抵)

若 $A(\lambda), B(\lambda)$ 是同阶 λ-矩阵且 $A(\lambda)$ 经过 λ-矩阵的初等变换后可变为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ **相抵**.

与数字矩阵一样, λ-矩阵的相抵关系也是一种等价关系, 即

(1) $A(\lambda)$ 与自身相抵;

(2) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, 则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 相抵;

(3) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, $B(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵, 则 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵.

笔记 λ-矩阵的相抵关系也是一种等价关系的证明与数域上相同, 类似易证.

定义 0.4 (初等 λ-矩阵)

下列 3 种矩阵称为初等 λ-矩阵:

(1) 将 n 阶单位阵的第 i 行与第 j 行对换, 记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$;

(2) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以非零常数 c, 记为 $\boldsymbol{P}_i(c)$;

(3) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{T}_{ij}(f(\lambda))$.

注 第一类与第二类初等 λ-矩阵与数域上的第一类与第二类初等矩阵没有什么区别. 第三类初等 λ-矩阵的形状如下:

$$\boldsymbol{T}_{ij}(f(\lambda))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & f(\lambda) & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 0.1

对 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 施行第 k ($k=1,2,3$) 类初等行 (列) 变换等于用第 k 类初等 λ-矩阵左 (右) 乘以 $\boldsymbol{A}(\lambda)$.

注 下列 λ-矩阵的变换不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为前面一个矩阵的第一行乘以 λ 不是 λ-矩阵的初等变换. 同理下面的变换需第一行乘以 λ^{-1}, 因此也不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 证明是显然的. □

定义 0.5 (可逆 λ-矩阵)

若 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵, 且

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda) = \boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{I}_n,$$

则称 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵. 这时称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为**可逆 λ-矩阵**, 在不引起混淆的情形下, 有时简称为**可逆阵**.

笔记 容易证明, **有限个可逆 λ-矩阵之积仍是可逆 λ-矩阵**, 而**初等 λ-矩阵都是可逆 λ-矩阵**, 因此**有限个初等 λ-矩阵之积也是可逆的**. λ-矩阵.

注 注意不要将数字矩阵中的一些结论随意搬到 λ-矩阵上. 比如下面的 λ-矩阵的行列式不为零, 但它不是可逆 λ-矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不是 λ-矩阵之故.

引理 0.1

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 可以化为如下形状:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \boldsymbol{M}_m\lambda^m + \boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \boldsymbol{M}_0,$$

其中 $\boldsymbol{M}_i$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶数字矩阵. 因此, 一个多项式矩阵可以化为系数为矩阵的多项式, 反之亦然.

证明 证明是显然的. □

引理 0.2

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 是两个 n 阶 λ-矩阵且都不等于零. 又设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶数字矩阵, 则必存在 λ-矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 及 $\boldsymbol{S}(\lambda)$ 和数字矩阵 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{T}$, 使下式成立:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = (\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}(\lambda) + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{T}. \tag{2}$$

证明 将 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 写为

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \boldsymbol{M}_m\lambda^m + \boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \boldsymbol{M}_0,$$

其中 $\boldsymbol{M}_m \neq \boldsymbol{O}$. 可对 m 用归纳法, 若 $m=0$, 则已适合要求 (取 $\boldsymbol{Q}(\lambda) = \boldsymbol{O}$). 现设对小于 m 次的矩阵多项式,(1)式成

立. 令

$$Q_1(\lambda) = M_m \lambda^{m-1},$$

则

$$M(\lambda) - (\lambda I - B)Q_1(\lambda) = (BM_m + M_{m-1})\lambda^{m-1} + \cdots + M_0. \tag{3}$$

上式是一个次数小于 m 的矩阵多项式, 由归纳假设得

$$M(\lambda) - (\lambda I - B)Q_1(\lambda) = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R.$$

于是

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)[Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)] + R.$$

令 $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)$ 即得(1)式. 同理可证 (2)式. □

例题 0.1 设 $A_0, A_1, \ldots, A_m$ 是已知的 n 阶复方阵, 记 λ 矩阵 $F(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m$, 其行列式 $f(\lambda) = \det F(\lambda)$ 是一元多项式, 证明: 若方阵 A 使得 $F(A) = 0$, 则必有 $f(A) = 0$.

注 本题不可以这样:$f(\lambda) = |F(\lambda)|$, 代入 $\lambda = A$ 得到 $f(A) = |F(A)| = |0| = 0$.

证明 根据引理 0.2, 存在 λ 矩阵 $P(\lambda)$ 和数字矩阵 Q 使得 $F(\lambda) = P(\lambda)(\lambda I - A) + Q$, 由 Cayley-Hamilton 定理, 将 λ 以矩阵 A 代入就有 $Q = 0$, 再取行列式得到 $f(\lambda) = |F(\lambda)| = |P(\lambda)||\lambda I - A|$, 含有因此 $|\lambda I - A|$ 也即特征多项式, 故 $f(A) = 0$. □

定理 0.2

设 A, B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 则 A 与 B 相似的充分必要条件是 λ-矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵. ♡

证明 若 A 与 B 相似, 则存在 $\mathbb{K}$ 上的非异阵 P, 使 $B = P^{-1}AP$, 于是

$$P^{-1}(\lambda I - A)P = \lambda I - P^{-1}AP = \lambda I - B.$$

把 P 看成是常数 λ-矩阵, 上式表明 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵.

反过来, 若 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵, 即存在 $M(\lambda)$ 及 $N(\lambda)$, 使

$$M(\lambda)(\lambda I - A)N(\lambda) = \lambda I - B, \tag{4}$$

其中 $M(\lambda)$ 与 $N(\lambda)$ 都是有限个初等矩阵之积, 因而都是可逆阵. 因此可将 (4)式写为

$$M(\lambda)(\lambda I - A) = (\lambda I - B)N(\lambda)^{-1}, \tag{5}$$

由引理 0.2可设

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)Q(\lambda) + R,$$

代入 (5)式经整理得

$$R(\lambda I - A) = (\lambda I - B)[N(\lambda)^{-1} - Q(\lambda)(\lambda I - A)].$$

上式左边是次数小于等于 1 的矩阵多项式, 因此上式右边中括号内的矩阵多项式的次数必须小于等于零, 也即必是一个常数矩阵, 设为 P. 于是

$$R(\lambda I - A) = (\lambda I - B)P. \tag{6}$$

(6)式又可整理为

$$(R - P)\lambda = RA - BP.$$

再次比较次数得 $R = P, RA = BP$. 现只需证明 P 是一个非异阵即可. 由假设

$$P = N(\lambda)^{-1} - Q(\lambda)(\lambda I - A),$$

将上式两边右乘 $N(\lambda)$ 并移项得

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)(\lambda I - A)N(\lambda) = I.$$

但由(4)式可得

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}),$$

因此

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}(\lambda) + \boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I}. \tag{7}$$

再由引理 0.2可设

$$\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{T},$$

代入(7)式并整理得

$$[\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}(\lambda) + \boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}](\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}.$$

上式右边是次数小于等于零的矩阵多项式, 因此上式左边中括号内的矩阵多项式必须为零, 从而 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵. □