0.1 集合之间的运算

定理 0.1

设有集合 A, B 与 C, 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

定义 0.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 存在\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 对一切\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

定理 0.2

(1) 广义交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) 分配律:

(i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;

(ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$.

(3) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(4) $\bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$.

(1)

(2)

(3) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in I$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$. 故 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(4) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in I$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 即 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$.

定义 0.2

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.
在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A - B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.
通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集, 我们称 X 为全集. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

命题 0.1 (集合的差与补的基本性质)

(1) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, (A^c)^c = A, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.
(2) $A - B = A \cap B^c$.
(3) 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subset B^c$.
(4) $A - B^c = B - A^c$.

证明

(1)
(2)
(3)
(4) $x \in A - B^c \iff x \in A 且 x \notin B^c \iff x \in A 且 x \in B \iff x \in B 且 x \notin A^c \iff x \in B - A^c$.

□

定理 0.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

证明 以 (i) 为例. 若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说, 对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$. 故得 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

反之, 若 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$, 则对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说,

$$x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, \quad x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

□

定义 0.3 (集合的对称差)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

命题 0.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.
(ii) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$.
(iii) 结合律:$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(v) $A^c \triangle B^c = A \triangle B; A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.

(vi) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E \triangle A = B$(实际上 $E = B \triangle A$).

定义 0.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

命题 0.3

1. 当 $\{A_k\}$ 为递减集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.
2. 当 $\{A_k\}$ 为递增集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.

证明

1. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递减集合列可得
$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \cdots.$$
因此 $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$.
2. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递增集合列可得
$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$
因此 $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$.

□

定义 0.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 0.4 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(i)E\setminus\varlimsup_{k\to\infty} A_k=\varliminf_{k\to\infty}(E\setminus A_k);\quad (ii)E\setminus\varliminf_{k\to\infty} A_k=\varlimsup_{k\to\infty}(E\setminus A_k).$$

定理 0.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_k=\{x:\text{对任一自然数}j,\text{存在}k(k\geqslant j),x\in A_k\}=\{x:\forall j\in\mathbb{N},\exists k\geqslant j\text{且}k\in\mathbb{N}\ s.t.\ x\in A_k\}$

(ii) $\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_k=\{x:\text{存在自然数}j_0,\text{当}k\geqslant j_0\text{时},x\in A_k\}=\{x:\exists j_0\in\mathbb{N},\forall k\geqslant j_0\text{且}k\in\mathbb{N},x\in A_k\}$

并且我们有

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k\supset\varliminf_{k\to\infty} A_k.$$

证明 以 (ii) 为例. 若 $x\in\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x\in\bigcap_{k=j_0}^{\infty}A_k,$$

从而当 $k\geqslant j_0$ 时, 有 $x\in A_k$. 反之, 若存在自然数 j_0, 当 $k\geqslant j_0$ 时, 有 $x\in A_k$, 则得到

$$x\in\bigcap_{k=j_0}^{\infty}A_k.$$

由此可知 $x\in\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_k=\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k$.

由 (i) (ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k\supset\varliminf_{k\to\infty} A_k.$$

□

定义 0.6 (直积集)

设 X,Y 是两个集合, 称一切有序“元素对”(x,y)(其中 $x\in X,y\in Y$) 形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X\times Y$, 即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

其中 $(x, y) = (x', y')$ 是指 $x = x', y = y'$.$X \times X$ 也记为 X^2.

♣