

0.1 最大模原理和 Schwarz 引理

定理 0.1 (最大模原理)

设 f 是域 D 中非常数的全纯函数, 那么 $|f(z)|$ 不可能在 D 中取到最大值.

♡

证明 因为 f 是 D 上非常数的全纯函数, 由定理 ??, $G = f(D)$ 是一个域. 如果 $|f(z)|$ 在 D 中某点 z_0 处取到最大值, 记 $w_0 = f(z_0)$, 则 w_0 是 G 的一个内点, 即有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(w_0, \varepsilon) \subset G$. 故必有 $w_1 \in G$, 使得 $|w_1| > |w_0|$. 于是存在 $z_1 \in D$, 使得 $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$. 这与 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 D 中的最大值相矛盾. \square

定理 0.2

设 D 是 \mathbb{C} 中的有界域, 如果非常数的函数 f 在 \overline{D} 上连续, 在 D 内全纯, 那么 f 的最大模在 D 的边界上而且只在 D 的边界上达到.

♡

注 定理 0.2 中 D 的有界性条件不能去掉, 否则定理可能不成立. 例如, 设

$$D = \left\{ z : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad f(z) = e^{e^z}.$$

当然 f 在 D 中全纯, 在 \overline{D} 上连续, 但它的最大模并不能在 ∂D 上达到. 事实上, 当 $z \in \partial D$ 时, $z = x \pm \frac{\pi}{2}i$, 这时, $e^z = e^x e^{\pm \frac{\pi}{2}i} = \pm ie^x$, 所以 $|e^z| = |e^{\pm ie^x}| = 1$. 而当 $z \in D$ 时, 取 $z = x$, 即有 $e^{e^x} \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$. 故定理 0.2 不成立.

证明 因为 \overline{D} 是紧集, 其上的连续函数 $|f|$ 一定有最大值, 即存在 $z_0 \in \overline{D}$, 使得 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 \overline{D} 上的最大值. 由定理 0.1 知道, z_0 不能属于 D , 因此只能有 $z_0 \in \partial D$. \square

定理 0.3 (Schwarz 引理)

设 f 是单位圆盘 $B(0, 1)$ 中的全纯函数, 且满足条件

(i) 当 $z \in B(0, 1)$ 时, $|f(z)| \leq 1$;

(ii) $f(0) = 0$,

那么下列结论成立:

(i) 对于任意 $z \in B(0, 1)$, 均有 $|f(z)| \leq |z|$;

(ii) $|f'(0)| \leq 1$;

(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$ 成立, 那么存在实数 θ , 使得对 $B(0, 1)$ 中所有的 z , 都有 $f(z) = e^{i\theta} z$.

♡

证明 因为 $f \in H(B(0, 1))$, 且 $f(0) = 0$, 故 f 在 $B(0, 1)$ 中可展开为

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z(a_1 + a_2 z + \cdots) = zg(z),$$

这里, $g(0) = a_1 = f'(0)$. 取 $0 < r < 1$, 当 $|z| = r$ 时, 有

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r},$$

故由最大模原理, 在圆盘 $B(0, r)$ 中也有

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad (\text{当 } |z| < r \text{ 时}).$$

让 $r \rightarrow 1$, 即得 $|g(z)| \leq 1 (z \in B(0, 1))$, 即 $|f(z)| \leq |z|$, 结论 (i) 成立.

从 $|g(0)| \leq 1$ 即得 $|f'(0)| \leq 1$, 结论 (ii) 成立.

现若有 $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 即 $|g(z_0)| = 1$. 这说明全纯函数 g 在内点 z_0 处取到了最大模 1, 根据最大模原理, g 必须是常数. 设 $g(z) \equiv c$, 由 $|g(z_0)| = 1$, 得 $|c| = 1$, 所以 $c = e^{i\theta}$, 因而 $f(z) = e^{i\theta} z$. 如果 $|f'(0)| = 1$, 即 $|g(0)| = 1$, 与上面一样讨论, 即得 $f(z) = e^{i\theta} z$. 结论 (iii) 成立. \square

定义 0.1

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, 如果 f 是 D 上的单叶全纯函数, 且 $f(D) = D$, 就称 f 是 D 上的一个**全纯自同构**. D 上全纯自同构的全体记为 $\text{Aut}(D)$.

命题 0.1

$\text{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群, 称为 D 的**全纯自同构群**.

证明 设 $f, g \in \text{Aut}(D)$, 那么 $f \circ g \in \text{Aut}(D)$, 且复合运算满足结合律. 对于每个 $f \in \text{Aut}(D)$, 由定理??, $f^{-1} \in \text{Aut}(D)$. $f(z) = z$ 在复合运算下起着单位元素的作用. 因而 $\text{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群. \square

对于一般的域 D , 要确定 $\text{Aut}(D)$ 是很困难的. 但对于单位圆盘 $B(0, 1)$, 应用 **Schwarz 引理** 不难定出其上的全纯自同构群.

对于 $|a| < 1$, 记

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z},$$

由例题?? 知道, 它把 $B(0, 1)$ 一一地映为 $B(0, 1)$, 因而 $\varphi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$. 如果记 $\rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$, 它是一个旋转变换, 当然有 $\rho_\theta \in \text{Aut}(B(0, 1))$. 下面我们将证明, $\text{Aut}(B(0, 1))$ 中除了 φ_a, ρ_θ 以及它们的复合外, 不再其他的变换.

定理 0.4

设 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $f^{-1}(0) = a$, 则必存在 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

证明 记 $w = \varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$, 直接计算可得

$$z = \varphi_a^{-1}(w) = \frac{a - w}{1 - \bar{a}w} = \varphi_a(w). \quad (1)$$

令 $g(w) = f \circ \varphi_a(w)$, 则由例题?? 知道 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 而且

$$g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0,$$

故由 **Schwarz 引理** 得

$$|g'(0)| \leq 1. \quad (2)$$

由于 $g^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $g^{-1}(0) = 0$, 故对 g^{-1} 用 **Schwarz 引理**, 得 $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$. 但由定理??, 有

$$|(g^{-1})'(0)| = \frac{1}{|g'(0)|},$$

由此即得

$$|g'(0)| \geq 1.$$

与 (2) 式比较, 即得 $|g'(0)| = 1$. 根据 **Schwarz 引理的结论 (iii)**, 存在实数 θ , 使得 $g(w) = e^{i\theta}w$, 即 $f \circ \varphi_a(w) = e^{i\theta}w$. 令 $w = \varphi_a(z)$, 再结合 (1) 式即得

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

\square

定理 0.5 (Schwarz-Pick 定理)

设 $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 是全纯函数, 对于 $a \in B(0, 1), f(a) = b$. 那么

(i) 对任意 $z \in B(0, 1)$, 有 $|\varphi_b(f(z))| \leq |\varphi_a(z)|$ 其中 $\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \varphi_b(z) = \frac{b - z}{1 - \bar{b}z}$;

(ii) $|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$;

(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq a$, 使得 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$, 或者 $|f'(a)| = \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$ 成立, 那么 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$. 其中 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \varphi_b(z) = \frac{b-z}{1-\bar{b}z}$.

证明 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, 则 $g \in H(B(0, 1))$, 且 $g(B(0, 1)) \subset B(0, 1), g(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a(0) = 0$. 对 g 用 Schwarz 引理, 有

$$|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(\zeta)| \leq |\zeta|, \zeta \in B(0, 1) \quad (3)$$

和

$$|(\varphi_b \circ f \circ \varphi_a)'(0)| \leq 1. \quad (4)$$

令 $z = \varphi_a(\zeta)$, 则 $\zeta = \varphi_a(z)$, 于是 (3) 式变成

$$|\varphi_b(f(z))| \leq |\varphi_a(z)|. \quad (5)$$

这就是 (i).

由于

$$\varphi'_a(0) = -(1-|a|^2), \quad \varphi'_b(b) = -\frac{1}{1-|b|^2},$$

由 (4) 式即得

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}. \quad (6)$$

这就是 (ii).

如果存在 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq a$, 使得 (5) 式中的等号成立, 令 $\zeta_0 = \varphi_a(z_0)$, 则 $\zeta_0 \neq 0$, 且 ζ_0 使 (3) 式中的等号成立. 于是由 Schwarz 引理, $g(z) = e^{i\theta}z$, 即 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$.

注意到当 (6) 式中的等号成立时, 有

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_b[f(\varphi_a(0))] \cdot f'(\varphi_a(0)) \cdot \varphi'_a(0) = \varphi'_b[f(a)] \cdot f'(a) \cdot \varphi'_a(0) \\ &= \varphi'_b[b] \cdot f'(a) \cdot \varphi'_a(0) = -\frac{1}{1-|b|^2} \cdot \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2} \cdot [-(1-|a|^2)] = 1, \end{aligned}$$

由 Schwarz 引理, $g(z) = e^{i\theta}z$, 即 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$. □