

0.1 Cauchy 积分定理

定理 0.1 (Cauchy 定理)

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通区域, $f \in H(D)$, 且 f' 在 D 中连续, 则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ , 均有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



证明 由 γ 围成的区域记为 G , 因为 f' 连续, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 连续, 故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯, 故由定理??可知 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} u dx - v dy &= \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0, \\ \int_{\gamma} v dx + u dy &= \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.\end{aligned}$$

这里 γ 都取正方向. 由定理??, 即得

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



引理 0.1

设 f 是区域 D 中的连续函数, γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一条 D 中的折线 P , 使得

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点, P 中其他的顶点都在 γ 上;

(ii) $\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon$.



证明 因为 ∂D 是一个闭集, γ 是一个紧集, 且两者不相交, 根据定理??, $d(\gamma, \partial D) = \rho > 0$. 作有界的区域 G , 使得 $\gamma \subset \overline{G} \subset D$. 因为 f 在紧集 \overline{G} 上连续, 故由定理??(iii) 可知 f 必一致连续. 于是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z', z'' \in \overline{G}, |z' - z''| < \delta$ 时, $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$, 这里, L 是 γ 的长度. 现取 $\eta = \min(\rho, \delta)$. 在 γ 上取分点 z_0, z_1, \dots, z_n , 使得每一个弧段 $\widehat{z_{k-1} z_k}$ 的长度都小于 η , 这里, z_0, z_n 分别记为 γ 的起点和终点. 连接 z_{k-1} 和 z_k ($k = 1, \dots, n$), 就得到一条折线 P , 它与 γ 有相同的起点和终点, 且其他顶点都在 γ 上. 由于 $|z_{k-1} - z_k| < \eta \leq \rho$, 所以线段 $\widehat{z_{k-1} z_k}$ 都在 D 内, 即折线 P 都在 D 内.

现在估计下面的积分差, 记 $\gamma_k = \widehat{z_{k-1} z_k}, P_k = \overline{z_{k-1} z_k}$, 则有

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \int_{P_k} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) \right| + \left| \int_{P_k} f(z) dz - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) \right| \\ &= \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \int_{\gamma_k} f(z_{k-1}) dz \right| + \left| \int_{P_k} f(z) dz - \int_{P_k} f(z_{k-1}) dz \right| \\ &= \left| \int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_{k-1})) dz \right| + \left| \int_{P_k} (f(z) - f(z_{k-1})) dz \right|.\end{aligned}$$

当 $z \in \gamma_k$ 或 P_k 时, 都有 $|z - z_{k-1}| < \eta \leq \delta$, 因而 $|f(z) - f(z_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2L}$. 对上面两个积分用长大不等式, 它们都不超过 $\frac{\varepsilon}{2L} |\gamma_k|$, 因而

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \int_{P_k} f(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^n |\gamma_k| = \varepsilon.$$

故折线 P 完全符合定理的要求.



定理 0.2 (Cauchy-Goursat 定理 (Cauchy 积分定理))

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通区域, 如果 $f \in H(D)$, 那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ , 均有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



注 注意, 对于非单连通的区域, 定理不一定成立. 例如, D 是除去原点的单位圆盘, $f(z) = \frac{1}{z}$ 当然在 D 中全纯, 若设 $\gamma = \{z : |z| = r < 1\}$, 则由命题??知, $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.

证明 证明分为下面三步:

(1) 先假定 γ 是一个三角形的边界.

如果 $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = M$, 我们证明 $M = 0$. 连接三角形三边的中点, 把三角形分成四个全等的小三角形 (图 1),

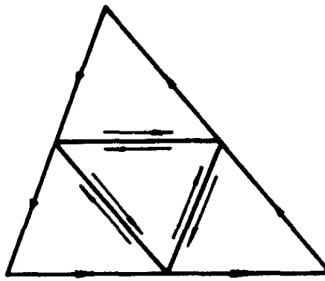


图 1

这四个小三角形的边界分别记为 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ 和 $\gamma^{(4)}$. 让 f 沿这四个小三角形的边界积分, 从图中可以看出, 中间那个小三角形的边界被来回走了两次, f 在其上的积分恰好抵消, 剩下的积分的和正好等于大三角形边界上的积分, 即

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma^{(1)}} f(z) dz + \int_{\gamma^{(2)}} f(z) dz + \int_{\gamma^{(3)}} f(z) dz + \int_{\gamma^{(4)}} f(z) dz,$$

或者

$$M = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\gamma^{(2)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\gamma^{(3)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\gamma^{(4)}} f(z) dz \right|.$$

因此上述四个小三角形中必有一个小三角形 Δ_1 , 它的边界记为 γ_1 , f 在其上的积分满足 $\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$. 把 Δ_1 再分成四个全等的小三角形, 按照同样的推理, 其中又有一个小三角形 Δ_2 , 它的边界记为 γ_2 , f 在其上的积分满足 $\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$. 这个过程可以一直进行下去, 我们得到一串三角形 Δ_n , 记它们的边界为 γ_n , 这串三角形具有下列性质:

- (i) $\Delta \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$;
- (ii) $\text{diam} \Delta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$;
- (iii) $|\gamma_n| = \frac{L}{2^n}, n = 1, 2, \dots$, 这里, L 为 γ 的长度;
- (iv) $\left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}, n = 1, 2, \dots$.

由 (i) 和 (ii), 根据 Cantor 闭集套定理, 存在唯一的 $z_0 \in \Delta_n (n = 1, 2, \dots)$. 因为 D 是单连通的, 所以 $z_0 \in D$. 由于 f 在 z_0 处全纯, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 成立

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

即

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|. \quad (1)$$

取 n 充分大, 使得 $\Delta_n \subset B(z_0, \delta)$, 故当 $z \in \gamma_n$ 时,(1)式成立. 显然, $z \in \gamma_n$ 时, $|z - z_0| < |\gamma_n| = \frac{L}{2^n}$. 因而, 当 $z \in \gamma_n$ 时, 有

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \frac{\varepsilon L}{2^n}. \quad (2)$$

因为 γ_n 是闭曲线, 由例题??知道, 有

$$\int_{\gamma_n} dz = 0, \quad \int_{\gamma_n} zdz = 0.$$

于是有

$$\int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\gamma_n} f(z) dz - f(z_0) \int_{\gamma_n} dz - f'(z_0) \int_{\gamma_n} zdz + z_0 f'(z_0) \int_{\gamma_n} dz = \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

利用(2)式、(iii) 和长大不等式, 即得

$$\left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \leq \frac{\varepsilon L}{2^n} |\gamma_n| = \varepsilon \left(\frac{L}{2^n} \right)^2.$$

再由(iv), 可得 $M \leq \varepsilon L^2$. 又因为 ε 是任意小的正数, 所以 $M = 0$.

(2) 假定 γ 是一个多边形的边界.

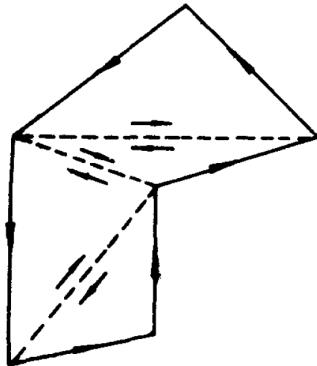


图 2

从图 2 可以看出, 我们可以把多边形分解成若干个三角形. 与刚才的道理一样, f 沿 γ 的积分等于沿各个三角形边界积分的和, 由(1)已知沿三角形边界的积分为零, 因而

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

(3) 假定 γ 是一般的可求长闭曲线.

根据引理 0.1, 在 D 内存在闭折线 P , 使得

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon, \quad (3)$$

这里, ε 是任意事先给定的正数. 由(3)式和(2)即知

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

推论 0.1

设函数 $f(z)$ 在 z 平面上的单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关. 即任取 D 内两点 z_0 与

z_1 , 对 D 内任意连接起点 z_0 与终点 z_1 的两曲线 C_1, C_2 , 都有

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

此时也将上述积分记为

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz.$$



证明 设 C_1 与 C_2 是 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的任意两条曲线 (如图 3). 则正方向曲线 C_1 与负方向曲线 C_2^- 就衔接成 D 内的一条闭曲线 C . 于是, 由 Cauchy 积分定理与复积分的基本性质 (3), 有

$$0 = \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz,$$

因而

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

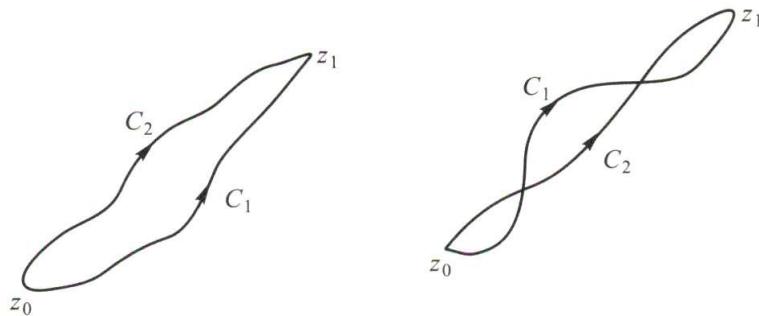


图 3



定理 0.3

设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部, 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$



注 这里已不再假定 f 在积分路径 γ 上全纯, 而代之以在闭域 \overline{D} 上连续, 条件确实是减弱了. 一般地, 证明这个定理还需要一些其他的知识, 我们这里对 γ 附加两个条件:

- (i) γ 是逐段光滑的;
- (ii) 在 D 中存在点 z_0 , 使得从 z_0 出发的每条射线与 γ 只有一个交点. 例如, 凸多边形和圆盘都满足这两个条件.

证明 在所设的两个条件下, γ 的方程可以写成

$$z = z_0 + \lambda(t), \quad a \leq t \leq b.$$

记

$$p = \max\{|\lambda(t)| : a \leq t \leq b\}, \quad q = \max\{|\lambda'(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

由于 f 在 \overline{D} 上连续, 故必一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z_1, z_2 \in \overline{D}$, 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. 今取 $\delta_0 < \min(\delta, p)$, 于是 $\frac{\delta_0}{p} < 1$. 取 ρ , 使得 $1 - \frac{\delta_0}{p} < \rho < 1$. 记 γ_ρ 为曲线

$$z = z_0 + \rho \lambda(t), \quad a \leq t \leq b,$$

则显然有 $\gamma_\rho \subset D$. 由**Cauchy-Goursat 定理**, 成立

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t)) \rho\lambda'(t) dt = 0,$$

即

$$\int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t)) \lambda'(t) dt = 0.$$

由于

$$|(z_0 + \rho\lambda(t)) - (z_0 + \lambda(t))| = (1 - \rho)|\lambda(t)| \leq (1 - \rho)p < \delta_0 < \delta,$$

所以

$$|f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z_0 + \lambda(t)) \lambda'(t) dt \right| = \left| \int_a^b [f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))] \lambda'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| |\lambda'(t)| dt < \varepsilon q(b-a). \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

定理 0.4 (多连通区域的 Cauchy 积分定理)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部, D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 γ 记 D 的边界. 如果 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 那么

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \tag{4}$$

这里, 积分沿 γ 的正方向进行, 并且 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \dots + \gamma_n^-$. (4) 式也可写为

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz, \tag{5}$$

(5)式右端的积分分别沿 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 的正方向进行.

♡

证明 如图 4 所示, 我们用一些辅助线把几个“洞”连接起来, 这样, D 就被分成若干个单连通区域. 由定理 0.3, 沿每个单连通区域的边界的积分为零, 若干个单连通区域的边界积分之和仍为零. 由于在辅助线上的积分来回各进行一次, 正好抵消, 所以总和恰好就是 γ 上的积分, 因而 (4)式成立. 而

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n^-} f(z) dz,$$

移项即得(5)式.

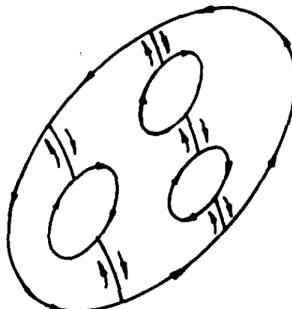


图 4

□

推论 0.2

设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线, γ_1 在 γ_0 的内部, D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的区域. 如果 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 那么

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

这里左侧积分沿 γ_0 的正方向进行, 右侧积分沿 γ_1 的正方向进行.

♡

证明 由定理 0.4 中 $n = 1$ 的情况立得.

□

命题 0.1

设 γ 是一可求长简单闭曲线, $a \notin \gamma$, 证明

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0, & a \text{ 在 } \gamma \text{ 的外部,} \\ 2\pi i, & a \text{ 在 } \gamma \text{ 的内部.} \end{cases}$$

◆

证明 若 a 在 γ 的外部, 则因 $\frac{1}{z-a}$ 在 γ 围成的闭域上全纯, 所以由 Cauchy 积分定理, $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$.

若 a 在 γ 的内部, 则有充分小的 $r > 0$, 使得 $B(a, r)$ 落在 γ 的内部(图 5). 记 $B(a, r)$ 的边界为 γ_1 , 由 γ 和 γ_1 围成的区域记为 D , 则 $\frac{1}{z-a}$ 在 \bar{D} 上全纯, 因而由推论 0.2, 得

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

最后的等式利用了命题??的结果.

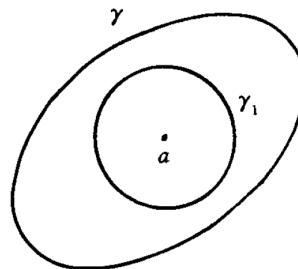


图 5

□

例题 0.1 设 γ 是一可求长简单闭曲线, $a, b \notin \gamma$, 试计算积分

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

解 上面的积分可写为

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z-b} \right).$$

由命题 0.1 即可得

$$I = \begin{cases} 0 & , \text{若 } a, b \text{ 都在 } \gamma \text{ 的外部;} \\ \frac{2\pi i}{a-b} & , \text{若 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 的内部, } b \text{ 在 } \gamma \text{ 的外部;} \\ -\frac{2\pi i}{a-b} & , \text{若 } a \text{ 在 } \gamma \text{ 的外部, } b \text{ 在 } \gamma \text{ 的内部;} \\ 0 & , \text{若 } a, b \text{ 都在 } \gamma \text{ 的内部.} \end{cases}$$

□