

0.1 Hermite 插值定理

定理 0.1 (Taylor 定理)

(1) 带 Peano 余项:

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 则 $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

(2) 带 Lagrange 余项:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 n 阶连续导数, 且 (a, b) 上存在 $n+1$ 阶导数, x_0 为 $[a, b]$ 内一定点, 则对于任意的 $x \in [a, b]$, 在 x, x_0 之间存在一个数 ξ 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

(3) 带积分型余项:

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0, \delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x \in U(x_0, \delta)$, t 在 x 与 x_0 之间, 都有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt.$$

(4) 带 Cauchy 型余项:

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0, \delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x \in U(x_0, \delta)$, 都存在 ξ 在 x 与 x_0 之间, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n (x - x_0).$$



证明

(1) 带 Peano 余项:

(2) 带 Lagrange 余项:

(3) 带积分型余项:

(4) 带 Cauchy 型余项:



定理 0.2 (Hermite 插值定理)


给定 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < b$ 和非负整数 $s_j, j = 0, 1, 2, \cdots, m$. 设 $f \in C^{\sum_{j=1}^m (s_j+1)-1} [a, b]$ 且 $f \in D^{\sum_{j=1}^m (s_j+1)} (a, b)$, 设 $p(x)$ 满足条件: 对闭区间 $[a, b]$ 中的 m 个点 $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b, s_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, 2, \cdots, m$, 都有唯一的次数不超过 $\sum_{j=1}^m (s_j + 1) - 1$ 的多项式 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, 并且

$$p^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), i = 0, 1, \cdots, s_j, j = 1, 2, \cdots, m.$$

并称满足上述条件的多项式 $p(x)$ 为 **Hermite 插值多项式**, 则对每个 $x \in [a, b]$, 都存在 $\theta \in (\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_m\})$, 使得

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(\sum_{j=1}^m (s_j+1))}(\theta)}{\left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1)\right)!} (x - x_1)^{s_1+1} (x - x_2)^{s_2+1} \cdots (x - x_m)^{s_m+1}.$$



 **笔记** $p(x)$ 的求法: 先由各插值点的次数确定 $p(x)$ 的最高次数 (即 $\sum_{j=1}^m (s_j + 1) - 1$), 再由方程 $p^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), i = 0, 1, \dots, s_j, j = 1, 2, \dots, m$. 直接解出.

证明

□


命题 0.1 (Lagrange 插值公式)

设 $f \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$, 证明: 对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $\theta \in (a, b)$ 使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b).$$

▲

注 考试中先用 K 值法证明, 再直接用.

 **笔记** K 值法: 先令要证的中值等式中的高阶导数中值点 (本题为 $f''(\theta)$) 为常数, 再构造函数由 Rolle 中值定理推出结论即可.

证明 当 $x = a$ 或 b 时, 结论显然成立.

对 $\forall x \in (a, b)$, 固定 x , 记

$$K = \frac{2[f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)]}{(x-a)(x-b)}.$$

令 $g(y) = f(y) - \frac{y-b}{a-b}f(a) - \frac{y-a}{b-a}f(b) - \frac{K}{2}(y-a)(y-b)$, 则

$$g'(y) = f'(y) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a} - \frac{K}{2}(2y-a-b), \quad g''(y) = f''(y) - K.$$

从而 $g(a) = g(b) = g(x) = 0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1 \in (a, x), \theta_2 \in (x, b)$, 使得

$$g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset (a, b)$, 使得 $g''(\theta) = f''(\theta) - K = 0$, 即 $f''(\theta) = K$.

□

定理 0.3 (带积分型余项的 Lagrange 插值公式)

设 f 是 $[a, b]$ 上的二阶可微函数且 f'' 在 $[a, b]$ 可积, 则成立

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \int_a^b f''(y)k(x, y)dy,$$


这里

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a, \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a. \end{cases}$$

特别的, 若还有 $f(a) = f(b) = 0$, 则有

$$f(x) = \int_a^b f''(y)k(x, y)dy. \quad (1)$$

♡

 **笔记** $k(x, y)$ 也叫 Green 函数. 容易验证 $|k(x, y)| \leq |k(x, x)|$.

证明 考虑

$$g(x) = f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b), x \in [a, b],$$

则有 $g''(x) = f''(x), g(a) = g(b) = 0$. 因此只需对 g 证明式(1).

事实上, 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(y)k(x, y)dy &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x g''(y)(a-y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b g''(y)(y-b)dy \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[(a-x)g'(x) - \int_a^x g'(y)dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[-g'(x)(x-b) + \int_x^b g'(y)dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-x}{b-a}[(a-x)g'(x) + g(x)] + \frac{x-a}{b-a}[-g'(x)(x-b) + g(x)] \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

这就证明了(1)式. □

例题 0.1 设 $f \in D^3[0, 1]$ 满足 $f(0) = -1, f'(0) = 0, f(1) = 0$, 证明对任何 $x \in [0, 1]$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta).$$

证明 当 $x = 0$ 或 1 时, 结论显然.

对 $\forall x \in (0, 1)$, 固定 x , 记 $K = \frac{6[f(x) + 1 - x^2]}{x^2(x-1)}$. 令 $g(y) = f(y) + 1 - y^2 - \frac{y^2(y-1)}{6}K$, 则

$$g'(y) = f'(y) - 2y - \frac{y(y-1)}{3}K - \frac{y^2}{6}K,$$

$$g''(y) = f''(y) - 2 - \frac{2y-1}{3}K - \frac{y}{3}K,$$

$$g'''(y) = f'''(y) - K.$$

从而 $g(0) = g(1) = g(x) = 0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1 \in (0, x), \theta_2 \in (x, 1)$, 使得

$$g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$

又由 $f'(0) = 0$ 可知

$$g'(0) = g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$


再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1 \in (0, \theta_1), \xi_2 \in (\theta_1, \theta_2)$, 使得

$$g''(\xi_1) = g''(\xi_2) = 0.$$

于是再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使得 $g'''(\theta) = f'''(\theta) - K$. 即 $f'''(\theta) = K$. □

例题 0.2 设 $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$ 满足 $f(0) = f(2) = 0, |f'(x)| \leq M, \forall x \in (0, 2)$. 证明

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq M.$$

 **笔记** 靠近哪个点就用哪个点的插值多项式.(原因是: 越靠近插值点, 拟合的效果越好)

证明 当 $x \in [0, 1]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\theta(x))}{1!}(x-0) = f'(\theta(x))x,$$

于是

$$|f(x)| \leq |f'(\theta(x))| \cdot x \leq Mx. \quad (2)$$

当 $x \in [1, 2]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\zeta(x))}{1!}(x-2) = f'(\zeta(x))(x-2),$$

于是

$$|f(x)| \leq |f'(\zeta(x))| \cdot |x-2| \leq M(2-x). \quad (3)$$


结合(2)和(3), 我们有

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^2 f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\
&\leq \int_0^1 (Mx) dx + \int_1^2 (M(2-x)) dx = M.
\end{aligned}$$

□

例题 0.3 设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq M$, 证明

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}.$$

 **笔记** 最多可以拟合 $f(0), f(1)$ 两个条件, 需要插值一次多项式, 余项需要 2 阶导数, 条件完美符合. 因此先由 Hermite 插值定理 (Lagrange 插值公式) 直接写出插值多项式和余项: 存在 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1), \forall x \in [0, 1].$$

但是注意考试时, 需要先用 K 值法证明上式再使用.

证明 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1), \forall x \in [0, 1].$$


积分并取绝对值就有

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\theta(x))}{2} \right| |x(x-1)| dx \leq \frac{M}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{M}{12}.$$

□

例题 0.4 设 $f \in D^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

 **笔记** 题目并没有明确给出插值点的相关条件, 需要我们自己选取合适的插值点. (一般插值点都是特殊点, 比如: 端点、中点、极值点等)

我们观察到需要证明的等式中含有 a, b 两点并且 f 2 阶可导, 因此直接选取这两点作为插值点即可.

注 考试中下述证明中的 Lagrange 插值公式也需要先用 K 值法证明才能使用.

本题也可以直接用 K 值法证明. 只需令 $g(y) = \int_a^y f(x) dx = (y-a) \frac{f(a)+f(y)}{2} - \frac{(y-a)^3}{12} K$ 即可.

证明 由 Lagrange 插值公式可知, 对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $\theta(x) \in (a, b)$ 使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{f''(\theta(x))}{2} (x-a)(x-b). \quad (4)$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\theta(x)) (x-a)(x-b) dx. \quad (5)$$

由(4)式可得

$$f''(\theta(x)) = \frac{2 \left[f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right]}{(x-a)(x-b)} \in C(a, b).$$

又由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f''(\theta(x)) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2 \left(f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{a-b} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b)}{x-a} \\ &= \frac{2}{a-b} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2}{b-a} \left[\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(a) \right], \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f''(\theta(x)) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{2 \left(f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{b-a} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b)}{x-a} \\ &= \frac{2}{b-a} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2 \left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]}{b-a}. \end{aligned}$$

从而 $f''(\theta(x))$ 可以连续延拓到 $[a, b]$ 上, 又因为改变有限个点的函数值后, 其积分结果不变, 所以可以不妨设 $f''(\theta(x)) \in C[a, b]$. 于是由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{1}{2} \int_a^b f''(\theta(x)) (x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \quad (6)$$


利用(5)和(6)式可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 0.5 设 $f \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

 **笔记** 本题需要我们选取合适的插值点和插值条件, 这里我们应该选 $f(\frac{a+b}{2}), f'(\frac{a+b}{2})$ 作为插值条件, 插值多项式为 1 次, 余项需要 2 阶导数.

注 本题也可以直接用 K 值法证明.

证明 由 Taylor 定理 (Hermite 插值定理) 可知, 存在 $\theta \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\theta)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边同时积分, 并由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \frac{f''(\theta)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 0.6 设 $f \in C^2[0, 1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

证明 由带积分余项的 Lagrange 插值定理可知, 我们有

$$f(x) = \int_0^1 f''(y)k(x, y) dy, \quad \text{其中} \quad k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a, \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq \int_0^1 |f''(y)||k(x, y)| dy \leq |k(x, x)| \int_0^1 |f''(y)| dy \\ &= x(1-x) \int_0^1 |f''(y)| dy \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f''(y)| dy.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{\frac{1}{4} \int_0^1 |f''(y)| dy} dx = \frac{4}{\int_0^1 |f''(y)| dy} \int_0^1 |f''(x)| dx = 4.$$

但实际上, 我们可以得到

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x) \int_0^1 |f''(y)| dy} dx = \frac{1}{\int_0^1 |f''(y)| dy} \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x)} dx.$$

□