

## 0.1 复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系, 实数对  $(a, b)$  就表示平面上的一个点, 所以复数  $z = a + bi$  可以看成平面上以  $a$  为横坐标、以  $b$  为纵坐标的一个点(图 1). 这个点的极坐标设为  $(r, \theta)$ , 那么

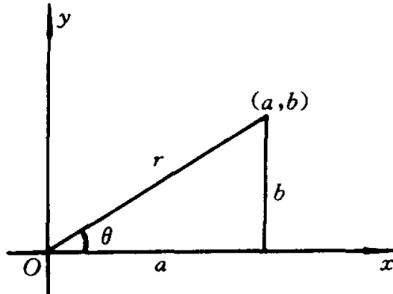


图 1

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$$

因而复数  $z = a + bi$  也可表示为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

这里,  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  就是前面定义过的  $z$  的模,  $\theta$  称为  $z$  的辐角, 记为  $\theta = \operatorname{Arg} z$ . 容易看出, 如果  $\theta$  是  $z$  的辐角, 那么  $\theta + 2k\pi$  也是  $z$  的辐角, 这里,  $k$  是任意的整数, 因此  $z$  的辐角有无穷多个. 但是在  $\operatorname{Arg} z$  中, 只有一个  $\theta$  满足  $-\pi < \theta \leq \pi$ , 称这个  $\theta$  为  $z$  的辐角的主值, 把它记为  $\arg z$ . 因而

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

这里,  $\mathbb{Z}$  表示整数的全体. 注意, 0 的辐角没有意义.

我们还可把复数  $z = a + bi$  看成在  $x$  轴和  $y$  轴上的投影分别为  $a$  和  $b$  的一个向量, 这时我们就把复数和向量作为同义语来使用. 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数  $z_1$  和  $z_2$ , 那么这个向量所表示的复数便是  $z_2 - z_1$ , 因而  $|z_2 - z_1|$  就表示  $z_1$  与  $z_2$  之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量  $z_1$  和  $z_2$  的起点取在原点, 以  $z_1$  和  $z_2$  为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示  $z_1 + z_2$ ; 以  $z_2$  为起点,  $z_1$  为终点的向量就表示  $z_1 - z_2$ (图 2). 现在再来看命题??(ii) 的不等式  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

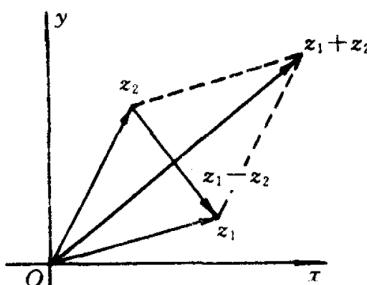


图 2

**定理 0.1**

设  $z_1, z_2$  是两个复数, 则

- (1)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2$ .
- (2)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2$ .



**笔记** 在(1)中, 第一个等式在命题??(iv) 中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数  $w$  乘复数  $z$ , 相当于把  $z$  沿反时针方向转动大小为  $\arg w$  的角, 再让  $z$  的长度伸长  $|w|$  倍. 特别地, 如果  $w$  是单位向量, 那么  $w$  乘  $z$  的结果就是把  $z$  沿反时针方向转动大小为  $\arg w$  的角. 例如, 已知  $i$  是单位向量, 它的辐角为  $\frac{\pi}{2}$ , 因此  $iz$  就是把  $z$  按反时针方向转动  $\frac{\pi}{2}$  角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在(2)中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角可以用  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$  来表示, 这一简单的事实再讨论某些几何问题时很有用.

**证明** 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2.$$

(2) 再看复数的除法, 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

所以

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2.$$

**命题 0.1**

- (1) 向量  $z_1$  与  $z_2$  垂直的充要条件是  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .
- (2) 向量  $z_1$  与  $z_2$  平行的充要条件为  $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .



**证明**

- (1) 这是因为  $z_1$  与  $z_2$  垂直就是  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角为  $\pm\frac{\pi}{2}$ , 即  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ , 这说明  $\frac{z_1}{z_2}$  是一个纯虚数, 因而  $z_1 \bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2$  也是一个纯虚数, 即  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .
- (2) 这是因为  $z_1$  与  $z_2$  平行就是  $z_1$  与  $z_2$  之间的夹角为  $\pm\pi$ , 即  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\pi$ , 这说明  $\frac{z_1}{z_2}$  是一个实数, 因而  $z_1 \bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2$  也是一个实数, 即  $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ .



**例题 0.1** 在图 3 的三角形中,  $AB = AC, PQ = RS, M$  和  $N$  分别是  $PR$  和  $QS$  的中点. 证明:  $MN \perp BC$ .

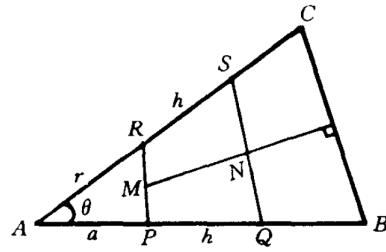


图 3

**证明** 把  $A$  取作坐标原点,  $AB$  所在的直线取作  $x$  轴, 那么  $P, Q$  的坐标分别为  $a$  和  $a+h$ . 如果用  $e^{i\theta}$  记  $\cos \theta + i \sin \theta$ , 那么  $R$  点和  $S$  点可分别用复数  $re^{i\theta}$  和  $(r+h)e^{i\theta}$  表示. 由于  $M$  和  $N$  分别是  $PR$  和  $SQ$  的中点, 所以  $M$  和  $N$  可以分别用复数表示为

$$M : \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}),$$

$$N : \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}].$$

若记  $z_1 = \overrightarrow{MN}$ , 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}] - \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}) = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta}).$$

如果记  $B$  的坐标为  $b$ , 因为  $AB = AC$ , 所以  $C$  的坐标为  $be^{i\theta}$ . 若记  $z_2 = \overrightarrow{BC}$ , 则

$$z_2 = be^{i\theta} - b = b(e^{i\theta} - 1).$$

现在

$$z_1 \bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta})b(e^{-i\theta} - 1) = \frac{bh}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -ibh \sin \theta,$$

因而  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ . 所以由命题 0.1(1) 可知  $z_1$  垂直  $z_2$ , 即  $MN \perp BC$ .

□

**例题 0.2** 证明: 平面上四点  $z_1, z_2, z_3, z_4$  共圆的充要条件为

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \quad (1)$$

**证明** 从图 4 可以看出,  $z_1, z_2, z_3, z_4$  四点共圆的充要条件是向量  $z_1 - z_3$  和  $z_1 - z_4$  的夹角等于向量  $z_2 - z_3$  和  $z_2 - z_4$  的夹角或互补 (当  $z_2$  在  $z_3$  与  $z_4$  之间时), 此时由命题 0.1(2) 立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm \pi.$$

这说明复数  $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$  在实轴上, 因而等式(1)成立.

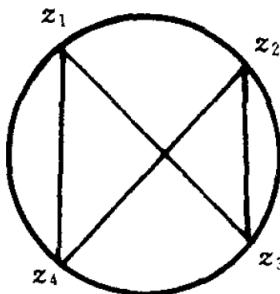


图 4

□

**定理 0.2 (De Moivre 公式)**

对任意整数  $n$ , 都有  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ .



**证明** 设  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \dots, z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  是给定的  $n$  个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)].$$

特别当  $z_1 = \cdots = z_n$  都是单位向量时, 就有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} \\ &= \cos n\theta - i \sin n\theta = \cos(-n)\theta + i \sin(-n)\theta. \end{aligned}$$

**命题 0.2**

设  $w$  是一个复数, 则满足方程  $z^n = w$  的复数根有  $n$  个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$



**证明** 现在设  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  是给定的, 要求的  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . 由 De Moivre 公式,  $z^n = w$  等价于

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

由此即得  $\rho = \sqrt[n]{r}, n\varphi = \theta + 2k\pi, k = 0, 1, \dots, n-1$ . 这就是说, 共有  $n$  个复数满足  $z^n = w$ , 它们是

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这  $n$  个复数恰好是以原点为中心、 $\sqrt[n]{|w|}$  为半径的圆的内接正  $n$  边形的顶点. 当  $w = 1$  时, 若记  $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , 则  $\sqrt[n]{1}$  的  $n$  个值为

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1},$$

称为  $n$  个单位根. 如果用  $\sqrt[n]{w}$  记  $w$  的任一  $n$  次根, 那么  $w$  的  $n$  个  $n$  次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w}, \sqrt[n]{w}\omega, \dots, \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

