0.1 连续变换与可测集

定理 0.1 (变换的基本性质)

设变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 则

1. $T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right).$
2.

证明

1. 下面是转换后的 LaTeX 正文格式代码:

   一方面, 对 $\forall x\in T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$, 存在 $y\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 从而存在 $\alpha_y\in I$, 使得 $y\in A_{\alpha_y}$ 且 $x=T(y)$. 于是 $x=T(y)\subset T\left(A_{\alpha_y}\right)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$. 故 $T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$.

   另一方面, 对 $\forall x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$, 都存在 $\alpha_x\in I$, 使得 $x\in T\left(A_{\alpha_x}\right)$. 于是存在 $y\in A_{\alpha_x}$, 使得 $x=T(y)$. 又因为 $y\in A_{\alpha_x}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 所以 $x=T(y)\subset T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 故 $T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\supset\bigcup\limits_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$.
2.

□

定义 0.1 (连续变换)

设有变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 若对任一开集 $G\subset\mathbb{R}^n$, 逆 (原) 像集

$$T^{-1}(G)\quad \text{即}\quad \{x\in\mathbb{R}^n:T(x)\in G\}$$

是一个开集, 则称 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的**连续变换**.

定理 0.2 (连续变换的充要条件)

变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换的充分必要条件是, 对任一点 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|y-x|<\delta$ 时, 有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon. \tag{1}$$

证明 **必要性**: 对任一点 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 有 x 属于开集

$$T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)),$$

从而存在 $\delta>0$, 使得

$$B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

这说明, 当 $|y-x|<\delta$ 时, 有 $y\in B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon))$, 即

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon.$$

充分性: 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集, 且 $T^{-1}(G)$ 不是空集, 则对任一点 $x\in T^{-1}(G)$, 有 $T(x)\in G$. 因此, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(T(x),\varepsilon)\subset G$. 根据充分性的假定, 对此 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|y-x|<\delta$ 时, 有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad T(y)\in B(T(x)\subset G,\varepsilon).$$

也即 $T(y)\in G,\forall y\in B(x,\delta)$. 此即 $T(B(x,\delta))\subset G$. 这就是说 $B(x,\delta)\subset T^{-1}(G)$, 即 $T^{-1}(G)$ 是开集. □

命题 0.1

若 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性变换, 则 T 是连续变换.

证明 令 $e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 有

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n.$$

再令 $T(e_i)=x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 又有

$$T(x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n.$$

记 $M=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}$, 从而由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}|T(x)|&\leqslant|\xi_1||x_1|+|\xi_2||x_2|+\cdots+|\xi_n||x_n|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{1/2}=M|x|.\end{aligned}$$

由此可知

$$|T(y)-T(x)|=|T(y-x)|\leqslant M|y-x|.$$

再由连续变换的充要条件可知 T 是连续变换. □

定理 0.3

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. ♡

证明 对于 $T(K)$ 的任一开覆盖族 $\{H_i\}$, 令 $G_i=T^{-1}(H_i)$, 则 $\{G_i\}$ 是 K 的开覆盖族. 根据有限子覆盖定理可知, 在 $\{G_i\}$ 中存在 $G_{i_1},G_{i_2},\cdots,G_{i_k}$, 使得

$$K\subset\bigcup_{j=1}^kG_{i_j}.$$

从而得

$$T(K)\subset\bigcup_{j=1}^kT(G_{i_j})\subset\bigcup_{j=1}^kH_{i_j}.$$

这说明 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. □

推论 0.1

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 E 是 F_σ 集, 则 $T(E)$ 是 F_σ 集. ♡

证明 由 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 故 $E=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$, 其中 E_k 都是闭集. 令

$$F_k=E_k\cap C(0,k)\,(k=1,2,\cdots),\quad F=\bigcup_{k=1}^\infty F_k.$$

显然 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增紧集列, 并且

$$F=\bigcup_{k=1}^\infty(E_k\cap C(0,k))\subset\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^\infty C(0,k)\right)=E\cap\mathbb{R}^n=E.$$

于是

$$T(E)=T(F)=T\left(\bigcup_{k=1}^\infty F_k\right)=\bigcup_{k=1}^\infty T(F_k).$$

由定理可知 $T(F_k)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 进而 $T(F_k)$ 都是闭集, 从而 $\bigcup_{k=1}^\infty T(F_k)$ 也是闭集. 故 $T(E)$ 是闭集, 结论得证.

□

推论 0.2

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一零测集 Z, $T(Z)$ 必为零测集, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一可测集 E, $T(E)$ 必为可测集.

证明 根据定理**??**(ii), 有 $E=K\cup Z$, 其中 K 是 F_σ 集, Z 是零测集. 因为

$$T(E)=T(K)\cup T(Z),$$

而 $T(K)$ 是 F_σ 集, $T(Z)$ 为零测集, 所以 $T(E)$ 是可测集. □

定理 0.4

若 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, $E\subset\mathbb{R}^n$, 则

$$m^*(T(E))=|\det T|\cdot m^*(E). \tag{2}$$

注 在 $|\det T|=0$ 时, T 将 $\mathbb{R}^n$ 变为一个低维线性子空间, 显然其映像集是零测集, 我们有

$$m(T(E))=|\det T|\cdot m(E)=0,\quad E\subset\mathbb{R}^n.$$

证明 记

$$I_0=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):0\leqslant\xi_i<1,1\leqslant i\leqslant n\},$$
$$I=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):0\leqslant\xi_i<2^{-k},1\leqslant i\leqslant n\}.$$

显然, I_0 是 2^{nk} 个 I 的平移集 $I+\{x_j\}$ $(j=1,2,\cdots,2^{nk})$ 的并集, $T(I_0)$ 是 2^{nk} 个

$$T(I+\{x_j\}),\quad j=1,2,\cdots,2^{nk}$$

的并集, 而且有 (注意 T^{-1} 是连续变换)

$$m(T(I+\{x_j\}))=m(T(I)),\quad j=1,2,\cdots,2^{nk}.$$

现在假定 (2) 式对于 I_0 成立:

$$m(T(I_0))=|\det T|, \tag{3}$$

则

$$|\det T|=2^{nk}m(T(I)).$$

因为 $m(I)=2^{-nk}$, 所以得到

$$m(T(I))=2^{-nk}|\det T|=|\det T|m(I).$$

这说明 (2) 式对每个 I 以及 I 的平移集都成立, 从而可知 (2) 式对可数个互不相交的任意二进方体的并集是成立的, 也就说明对任一开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ (2) 式均成立. 于是应用等测包的推理方法立即可知, 对一般点集 (2) 式成立.

下面证明 (3) 式成立. 大家知道 T 至多可以表为如下几个初等变换的乘积:

(i) 坐标 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 之间的交换;

(ii)$\xi_1\to\beta\xi_1,\xi_i\to\xi_i$ $(i=2,3,\cdots,n)$;

(iii)$\xi_1\to\xi_1+\xi_2,\xi_i\to\xi_i$ $(i=2,3,\cdots,n)$.

在 (i) 的情形, 显然有 $|\det T|=1$, $T(I_0)=I_0$. 从而可知 (3) 式成立.

在 (ii) 的情形, 矩阵 T 可由恒等矩阵在第一行乘以 β 而得到, 此时有

$$T(I_0)=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):0\leqslant\xi_i<1\ (i=2,3,\cdots,n),\ 0\leqslant\xi_1<\beta\ (\beta>0),\beta<\xi_1\leqslant 0\ (\beta<0)\}.$$

从而可知 $m(T(I_0))=|\beta|$, 即 (3) 式成立.

在 (iii) 的情形, 此时 $\det T=1$, 而且有

$$T(I_0)=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):0\leqslant\xi_i<1\ (i\neq 1),\ 0\leqslant\xi_1-\xi_2<1\}.$$

记

$$A = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in T(I_0) : \xi_1 < 1\},$$
$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad B = T(I_0) \setminus A.$$

我们有

$$A = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_2 < \xi_1\},$$
$$B - e_1 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_1 < \xi_2\}.$$

因此得到

$$m(T(I_0)) = m(A) + m(B) = m(A) + m(B - e_1)$$
$$= m(I_0) = 1 = \det T.$$

这说明 (3) 式对 I_0 成立.

最后不妨设 $T = T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_j$, 这里的每个 T_j 均是 (i)～(iii) 情形之一, 从而由归纳法可知

$$m^*(T(E)) = m(T_1(T_2(\cdots(T_j(E))\cdots)))$$
$$= |\det T_1||\det T_2|\cdots|\det T_j|m^*(E)$$
$$= |\det T|m^*(E).$$

□

推论 0.3

设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $T(E) \in \mathscr{M}$ 且有

$$m(T(E)) = |\det T|m(E).$$

♡

证明 由定理 0.4立得. □

例题 0.1 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是可测集, 则将 E 作旋转变换后所成集为可测集, 且测度不变.

证明

□

例题 0.2 $\mathbb{R}^2$ 中三角形的测度等于它的面积.

证明 显然,$\mathbb{R}^2$ 中任一三角形都是可测集. 由于测度的平移不变性, 故不妨假定三角形的一个顶点在原点. 记三角形为 T, 其面积记为 $|T|$. 因为 $m(T) = m(-T)$, 所以经平移后可得 $2m(T) = m(T) + m(-T) = m(P)$, 其中 P 是平行四边形. 再将 P 中的子三角形作旋转或平移, 可使 P 转换为矩形 Q, 且有 $m(P) = m(Q) = |P| = 2|T|$, 从而得 $m(T) = |T|$.
□

例题 0.3 圆盘 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中可测集, 且 $m(D) = \pi r^2$.

证明 记 P_n 与 Q_n 为 D 的内接与外切正 n 边形, 由 P_n 与 Q_n 的可测性易知 D 是可测集. 注意到 $P_n \subset D \subset Q_n$, 以及

$$m(P_n) = \pi r^2 \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \cos\frac{\pi}{n} \to \pi r^2 \quad (n \to \infty),$$
$$m(Q_n) = \pi r^2 \frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n} \to \pi r^2 \quad (n \to \infty),$$

可知 $m(D) = \pi r^2$. □

例题 0.4 设 $E \subset (-\pi, \pi]$,$0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 令

$$S_E = S_E(a, b) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : a < r < b, \theta \in E\}.$$

大家知道, 若 $E = (\alpha, \beta)$, 则 S_E 就是通常所说的扇形, 其面积为 $(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)/2$.

(1) 对于一般点集 E, 我们有

$$m^*(S) \leqslant \frac{(b^2 - a^2)m^*(E)}{2}.$$

(注意, 这里 $m^*(S)$ 是二维外测度,$m^*(E)$ 是一维外测度.)

(2) 若 $E\subset(-\pi,\pi]$ 是可测集, 则 S 是可测集.

证明 (1) (i) 设 $b<+\infty$, 此时, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在开区间列 $\{I_n\}$:$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\supset E,\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|<m^*(E)+\varepsilon$. 显然,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_{I_n}\supset S_E$, 从而有

$$\begin{aligned}m^*(S_E)&\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{I_n}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(S_{I_n})\\&=(b^2-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|/2\leqslant\frac{b^2-a^2}{2}(m^*(E)+\varepsilon),\end{aligned}$$

由 ε 的任意性即得所证.

(ii) 设 $b=+\infty,m^*(E)=0$. 此时, 对 $n\geqslant1$, 由 (i) 知

$$m^*(S_E(a,n))\leqslant\frac{(n^2-a^2)m^*(E)}{2}=0.$$

从而得到

$$m^*(S_E(a,+\infty))=\lim_{n\to\infty}m^*(S_E(n))=0.$$

(iii) 设 $b=+\infty,m^*(E)>0$. 结论显然.

(2) 由于 $S_E(a,b)=S_E(0,+\infty)\cap S_{(-\pi,\pi]}(a,b)$, 故只需指出 $S_E(0,+\infty)$ 可测即可.

设 $I\subset(-\pi,\pi]$ 是开区间, 记 $T=S_I(a,b)$(开环扇形),$E^c=(-\pi,\pi]\setminus E$ 以及 $S_E=S_E(0,+\infty)$, 我们有

$$\begin{aligned}m^*(T\cap S_E)+m^*(T\cap S_{E^c})&=m^*(S_{I\cap E}(a,b))+m^*(S_{I\cap E^c}(a,b))\\&\leqslant\frac{b^2-a^2}{2}\{m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)\}\\&=\frac{b^2-a^2}{2}|I|=m(T)(\text{开环扇形面积}).\end{aligned}$$

设 R 是一个开矩形, 易知它可由互不相交的可列个开环扇形 T_n 组成, 至多差一零测集 (边界). 因此 (注意, 开环扇形可测) 得到

$$\begin{aligned}m^*(R\cap S_E)+m^*(R\cap S_{E^c})&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(T_n\cap S_E)+\sum_{n=1}^{\infty}m^*(T_n\cap S_{E^c})\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(T_n)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n\right)=m(R).\end{aligned}$$

这说明, 对任一矩形 R, 有

$$m(R)=m^*(R\cap S_E)+m^*(R\cap S_{E^c}).$$

而 S_{E^c} 就是 S_E 的补集 (除原点外), 也就是说 S_E 是可测集. □