

## 0.1 Fourier 级数基本性质

### 定理 0.1 (Fourier 级数的逐项积分定理)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则  $f(x)$  的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意  $c, x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$



### 定理 0.2 (Fourier 级数的逐项微分定理)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$ , 且除了有限个点外  $f(x)$  可导. 进一步假设  $f'(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积 (注意:  $f'(x)$  在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则  $f'(x)$  的 Fourier 级数可由  $f(x)$  的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x) \sim \frac{d}{dx} \left( \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx).$$



### 推论 0.1

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  是某个在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  收敛.



### 定理 0.3 (Bessel 不等式)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或平方可积, 则  $f(x)$  的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$



**笔记** 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

### 定理 0.4 (Parseval 等式)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或平方可积, 则成立等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

