## 0.1 其他

**例题 0.1** 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s=\dfrac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$. 证明

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x.$$

**笔记** 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

**证明** 令 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $F'(t)=f(t)$ 连续递增, 故 $F$ 是下凸的. 显然 $s\in[0,1]$, 于是

$$F(x)\geq F(s)+F'(s)(x-s)=F(s)+f(s)(x-s),\quad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 \left[F(s)f(x)+f(s)f(x)(x-s)\right]\,\mathrm{d}x\\
&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\int_0^1\left[xf(x)-sf(x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

故

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geq F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq F(s)=\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\implies \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x+\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq 2\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\implies \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x)}{F(1)}=1-\frac{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}{F(1)},$$

即 $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=(1-s)F(1)$. 又由 $F$ 的下凸性可知

$$F(x)\leq\begin{cases}\dfrac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\ \dfrac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0), & x\in[0,s]\end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}
(1-s)F(1)=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&\leq\int_0^s\left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s)\right]\,\mathrm{d}x+\int_s^1\left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0)\right]\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1)\leq\frac{1}{2}F(s)\implies F(1)\leq\frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(s) \leq \left(\frac{1}{1-s}-1\right)F(s) = \frac{s}{1-s}F(s) = \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

**例题 0.2** 求最小实数 $C$, 使得对一切满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f$, 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x \leqslant C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x=1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数(即指数部分是 $n$ 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 2.$$

令 $f_n(t)=(n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t(n+1)t^n\,\mathrm{d}t = 2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2, n\to\infty.$$

因此若 $C<2$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x > C$. 故 $C=2$ 就是最佳上界. □

**例题 0.3** 设 $f\in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1, k=0,1,2,\cdots,n-1$. 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant n^2.$$

证明 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x\int_0^1 (a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &\geqslant \left[\int_0^1 f(x)(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x\right]^2\\ &= (a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_jx^j\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_ix^{i+j}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_i\int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_ja_i}{i+j+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{a_ja_i}{i+j+1}} = \frac{a^TJa}{a^THa},$$

其中 $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$ ,$H=\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n\times n}$. 于是我们只需求 $\sup\limits_{a\neq 0}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 设 $\lambda$ 为 $\frac{a^TJa}{a^THa}$ 的一个大于 0

的上界, 由例题 8.16(3)可知 $H$ 正定, 则

$$\begin{aligned}\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界} &\iff \lambda \geqslant \frac{a^TJa}{a^THa}, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\iff a^TJa \leqslant \lambda a^THa, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\iff a^T(\lambda H-J)a \geqslant 0, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\iff \lambda H-J\text{半正定}.\end{aligned}$$

因此 $\sup\limits_{a\neq 0}\frac{a^TJa}{a^THa}=\min\{\lambda \mid \lambda H-J\text{半正定}\}=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}$. 设 $H_k, J_k$ 分别为 $H, J$ 的 $k$ 阶顺序主子阵, 再根据打洞原理及例题 2.37(1)可得

$$\begin{aligned}|\lambda H_k-J_k| &= |H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}J_k| = |H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}\mathbf{1}_k\mathbf{1}_k^T|\\ &=\lambda^{k-1}|H_k|(\lambda-\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k).\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_k^T=(1,1,\cdots,1)_{1\times k}$. 由 $H$ 正定可知 $|H_k|>0$, 又因为 $\lambda>0$, 所以再由引理 6.4可得

$$|\lambda H_k-J_k|>0\iff\lambda>\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k\xlongequal{\text{引理 6.4}}n^2.$$

因此对 $\forall\lambda>n^2$, 都有 $\lambda H-J$ 的顺序主子式都大于 0, 故此时 $\lambda H-J$ 正定. 于是对 $\forall a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 固定 $a$, 都有

$$a^T(\lambda H-J)a>0, \forall\lambda>n^2.$$

令 $\lambda\to n^2$, 则由 $a^T(\lambda H-J)a$ 的连续性可知

$$a^T(n^2H-J)a\geqslant 0.$$

故 $n^2H-J$ 半正定. 因此 $n^2=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\sup\limits_{a\neq 0}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 结论得证. □

**例题 0.4** 设 $A, B$ 都是 $n$ 级实对称矩阵, 若 $B$ 正定, 证明

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}=\lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

**证明**

□

**引理 0.1**

*设 $\alpha>0, g\in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $g(a)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$, 如果*

$$|g'(x)-g'(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha, \forall x,y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

*证明*

$$|g'(x)|^{\alpha+1}\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha[g(x)-g(a)]^\alpha M, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

**证明** 不妨设 $g(a)=0$, 否则用 $g(x)-g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M=0$, 则不等式(2)显然成立. 当 $M\neq 0$ 可以不妨设 $M=1$.

现在对非负函数 $g$, 现在我们正式开始我们的证明, 当 $g'(x_0)=0$, 不等式(2)显然成立. 当 $g'(x_0)>0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned}g(x_0)\geqslant g(x_0)-g(h) &= \int_h^{x_0}g'(t)\mathrm{d}t\\ &\geqslant\int_h^{x_0}[g'(x_0)-|t-x_0|^\alpha]\mathrm{d}t\\ &=g'(x_0)(x_0-h)-\frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h=x_0-|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立. 类似的考虑 $g'(x_0)<0$ 可得(2).

当 $g'(x_0)<0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned}g(x_0) &\geqslant -g(h)+g(x_0) = -\int_{x_0}^{h} g'(t)\mathrm{d}t\\ &\geqslant -\int_{x_0}^{h}[g'(x_0)+|t-x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t\\ &= -g'(x_0)(h-x_0)-\frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h=x_0+|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立. □

**命题 0.1 (Heisenberg(海森堡) 不等式)**

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{3}$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

但是上述**分部积分**部分需要零边界条件 (即需要 $\lim\limits_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 **专业技术**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

取紧化序列 $h_n, n\in\mathbb{N}$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|(h_nf)'(x)|^2\mathrm{d}x\\ &=4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

右边让 $n\to+\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x\right]=\left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2<\infty$, 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而不等式(3)成立.

Method 2 **正常方法**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty>\sqrt{\int_x^{\infty}y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^{\infty}|f'(y)|^2\mathrm{d}y} \overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant} \int_x^{\infty}y|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y\geqslant x\int_x^{\infty}|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y, \tag{4}$$

于是 $\int_x^{\infty}f(y)f'(y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2-\frac{1}{2}|f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$, 因此由

积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在 $x_n\to\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n|f(x_n)|=0$, 于是再结合 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}f(y)=0.$$

现在继续用(4), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^{\infty}y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^{\infty}|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\geqslant x\int_x^{\infty}f'(y)f(y)\mathrm{d}y=\frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

令 $x\to+\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^{\infty}y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^{\infty}|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|^2=0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}4\left(\int_{\mathbb{R}}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

即不等式(3)成立. □

**例题 0.5** 设 $f:[0,+\infty)\to(0,1)$ 是内闭 Riemman 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^2<2\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

**证明** 记 $a=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x>0$, 待定 $s>0$, 则不等式(5)等价于

$$\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{s}xf(x)\mathrm{d}x+\int_s^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^{s}xf(x)\mathrm{d}x+s\int_s^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}\Longleftrightarrow\int_0^{s}xf(x)\mathrm{d}x+s\left(a-\int_0^{s}f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{a^2}{2}\\ \Longleftrightarrow&\frac{a^2}{2}-sa+s\int_0^{s}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{s}xf(x)\mathrm{d}x\leqslant 0\Longleftrightarrow\frac{a^2}{2}-sa+\int_0^{s}(s-x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0.\end{aligned}$$

利用 $f<1$, 取 $s=a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2}-sa+\int_0^{s}(s-x)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{a^2}{2}+\int_0^{a}(a-x)f(x)\mathrm{d}x<-\frac{a^2}{2}+\int_0^{a}(a-x)\mathrm{d}x=0.$$

从而

$$\int_0^{a}xf(x)\mathrm{d}x+a\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{s}xf(x)\mathrm{d}x+\int_s^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{a}xf(x)\mathrm{d}x+a\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(5). □

**例题 0.6** 设 $f$ 是 $[0,1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 $a$ 有

$$\int_0^1|f(x)-a|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x. \tag{6}$$

**证明** 不妨设 $f$ 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (6) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(-f(x))\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(a-f(x))\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(f(x)-a)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

故式 (6) 成立. □

**例题 0.7** 若 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f$, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

**证明** 由已知条件, 对任意正数 $\varepsilon$, 存在正整数 $k$ 使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

因为 $f_k \in R([a,b])$, 所以存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\omega_j(f_k)$ 是 $f_k$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的振幅. 因为

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x) - f_k(y)|,
\end{aligned}
$$

所以

$$\omega_j(f) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)\left(x_j - x_{j-1}\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j\left(f_k\right)\left(x_j - x_{j-1}\right) < \varepsilon.$$

故 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积. □

**例题 0.8** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上非负可积. 求证: 数列 $I_n = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

**注** 当 $f$ 是连续函数时, 可以进一步证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$(见例题**??**).

**证明** 要比较 $I_n$ 与 $I_{n+1}$ 的大小, 就要比较 $f^n$ 的积分与 $f^{n+1}$ 之间的关系. 这可以利用 Hölder 不等式:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b 1 \cdot f^n(x)\mathrm{d}x \\
&\le \left(\int_a^b 1^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}} \\
&= (b-a)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}},
\end{aligned}
$$

即

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故 $\{I_n\}$ 是单调递增数列. □

**例题 0.9** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a) = 0$. 求证: 对 $p \ge 1$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \le \frac{1}{p}\int_a^b \left[(b-a)^p - (x-a)^p\right] |f'(x)|^p \mathrm{d}x.$$

**证明** 为了建立 $|f|^p$ 的积分与 $|f'|^p$ 的积分之间的关系, 先建立 $|f|$ 与 $|f'|$ 的积分的关系. 根据 Newton-Leibniz 公

式, 有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

所以对于 $p>1$ 应用 Hölder 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\le\left(\int_a^x 1^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\&=(x-a)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 因而

$$|f(x)|^p\le(x-a)^{p-1}\int_a^x|f'(t)|^p\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

注意到上式对 $p=1$ 也是成立的. 上式两边在 $[a,b]$ 上积分, 可得

$$\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\le\int_a^b(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x|f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\displaystyle\int_a^x|f'(t)|^p\mathrm{d}t$ 是 $|f'|^p$ 的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x&\le\frac{1}{p}(x-a)^p\int_a^x|f'(t)|^p\mathrm{d}t\Big|_a^b-\frac{1}{p}\int_a^b(x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{p}(b-a)^p\int_a^b|f'(t)|^p\mathrm{d}t-\frac{1}{p}\int_a^b(x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{p}\int_a^b\left[(b-a)^p-(x-a)^p\right]|f'(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

**例题 0.10** 设 $f$ 是 $[0,a]$ 上的连续函数, 且存在正常数 $M,c$ 使得

$$|f(x)|\le M+c\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t,$$

求证: $|f(x)|\le M\mathrm{e}^{cx}$ $(\forall x\in[0,a])$.

**证明** 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x)=\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x)\le M+cF(x).$$

令

$$G(x)=F(x)\mathrm{e}^{-cx}+\frac{M}{c}\mathrm{e}^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned}G'(x)&=F'(t)\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}\\&=|f(x)|\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}\\&\le(M+cF(x))\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}=0.\end{aligned}$$

这说明 $G$ 在 $[0,a]$ 上单调递减. 因为 $G(0)=\dfrac{M}{c}$, 所以 $G\le\dfrac{M}{c}$. 因而

$$F(x)+\frac{M}{c}\le\frac{M}{c}\mathrm{e}^{cx}.$$

再结合条件可得 $|f(x)|\le M+cF(x)\le M\mathrm{e}^{cx}$. □

**例题 0.11** 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$xf(y)+yf(x)\le 1.$$

求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

**证明** 结论中出现 $\pi$ 且条件中要求 $x, y \in [0,1]$. 因此将条件中的 $x, y$ 分别换成 $\sin t$ 和 $\cos t$, 有

$$f(\cos t)\sin t + f(\sin t)\cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}.$$

由对称性可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换 $\sin t = x$ 即得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$. □

**例题 0.12** 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

**注** 结论中的 $\frac{\pi}{4}$ 是最佳的, 这只要取 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 即可验证.

**证明** 结论中出现 $\pi$ 且条件中要求 $x, y \in [0,1]$. 因此将条件中的 $x, y$ 分别换成 $\sin t$ 和 $\cos t$, 有

$$f(\cos t)\sin t + f(\sin t)\cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}.$$

由区间再现恒等式可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换 $\sin t = x$ 即得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$. □

**例题 0.13** 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上有可积的导函数且满足 $f(0)=0, f(1)=1$. 求证: 对任意 $a \geq 0$ 有

$$\int_0^1 |af(x) + f'(x)|\mathrm{d}x \geq 1.$$

**证明** 因为 $\mathrm{e}^{-ax} \geq \mathrm{e}^{-a}$ $(0 \leq x \leq 1)$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 |af(x) + f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_0^1 |(\mathrm{e}^{ax}f(x))'\mathrm{e}^{-ax}|\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{-a}\int_0^1 |(\mathrm{e}^{ax}f(x))'|\mathrm{d}x \\ &\geq \mathrm{e}^{-a}\left|\int_0^1 (\mathrm{e}^{ax}f(x))'\mathrm{d}x\right| = \mathrm{e}^{-a}|\mathrm{e}^a f(1) - f(0)| = 1.\end{aligned}$$

□

**例题 0.14** 设 $f$ 在 $[0,2]$ 上可导且 $|f'| \leqslant 1, f(0) = f(2) = 1$. 求证:

$$1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$$

**证明** 由 Taylor 中值定理可知, 存在 $\xi_1 \in [0,1], \xi_2 \in [1,2]$, 使得

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, \forall x \in [0,1].$$

$$f(x) = 1 + f'(\xi_2)(x-2), \forall x \in [1,2].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [1+f'(\xi_1)x]\mathrm{d}x + \int_1^2 [1+f'(\xi_2)(x-2)]\mathrm{d}x \\ &= 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2).\end{aligned}$$

由 $|f'| \leqslant 1$ 可知

$$1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leqslant 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2) \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

故

$$1 \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3.$$

□

**例题 0.15** 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$

且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 其中 $A$ 是常数.

**笔记** 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑 $(ax+b)f'(x)$ 的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

**证明** 设 $t$ 是任意常数, 有

$$\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x = (x+t)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{3}+t+t^2\right)\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取 $t=-\dfrac{1}{2}$, 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数 $C$ 使得 $f'(x)=C\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 注意到 $f(0)=f(1)=0$, 可得 $f(x)=Ax(1-x)$, 这里 $A$ 为任意常数. □

**例题 0.16** 设 $f,g$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 使得对 $[0,1]$ 上任意满足 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 的连续可导函数 $\varphi$ 有

$$\int_0^1 \left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x = 0$$

求证:$f$ 可导, 且 $f'=g$.

**证明** 证明设

$$c = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t$$

考察函数

$$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t + c$$

显然 $G$ 可导且 $G'(x)=g(x)$,$G(1)=\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + c$. 只需证明 $f=G$. 令

$$\varphi(x) = \int_0^x \left[f(t)-G(t)\right]\mathrm{d}t$$

则 $\varphi$ 可导, 且 $\varphi(0)=0$,

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\left[tG(t)\Big|_0^1-\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-G(1)+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t-c+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1\left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=G(x)\varphi(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1\left[f(x)-G(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=0$$

注意到 $\varphi'=f-G$. 我们有

$$\int_0^1\left[f(x)-G(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

于是 $f=G$. □

**命题 0.2**

设 $f$ 是区间 $[a,b]$ 上的严格单调递减连续函数,$f(a)=b$,$f(b)=a$,$g$ 是 $f$ 的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $p>0$,$q>0$ 取 $f(x)=(1-x^q)^{\frac{1}{p}}$,$g(x)=(1-x^p)^{\frac{1}{q}}$, 可得

$$\int_0^1(1-x^p)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x^q)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 因为可以用在 $a,b$ 分别插值于 $f(a),f(b)$ 的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在 $[a,b]$ 上一致逼近 $f(x)$, 所以只需对 $f$ 是连续可微函数的情况证明.

作变换 $x=f(t)$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_b^a g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_b^a tf'(t)\,\mathrm{d}t\\&=tf(t)|_b^a-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故所证等式成立. □

**例题 0.17** 设 $f$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b|f\prime(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=f(y)$. 因此对任意 $x\in[a,b]$, 有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)-f(x)=f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

关于 $x$ 在 $[a,b]$ 上积分, 即得

$$(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant (b-a)\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

两边除以 $b-a$ 即得所证. □

**例题 0.18** 设 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,$f\in C^1[0,1]$ 且满足 $f(1)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant \frac{4}{3-4\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 设 $\alpha\in[0,1)$ 且 $\alpha\neq\frac{1}{2}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对 $x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}f^2(x)&=\left(\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_x^1 t^{-\alpha}\cdot t^{\alpha}f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\\&\leqslant\int_x^1 t^{-2\alpha}\,\mathrm{d}t\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\alpha}(1-x^{1-2\alpha})\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1(1-x^{1-2\alpha})\left(\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-2\alpha}\left[\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big|_0^1\right.\\&\quad\left.+\int_0^1\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)x^{2\alpha}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\tag{7}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left|\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\int_x^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=x\left(\int_x^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\Big|_0^1+\int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x.\tag{8}$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\left(\int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}}\cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\left(\int_0^1 x^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合式 (7), 可得

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\tag{9}$$

在上式中取 $\alpha=\frac{3}{4}$, 即得

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\tag{10}$$

对 $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$, 将式 (9) 两边乘以 $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$ 再与式 (10) 相加可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

□

**例题 0.19** 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上非负且连续可导. 求证:

$$\left|\int_0^1 f^3(x) \,\mathrm{d}x - f^2(0) \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x\right)^2$$

**证明** 记 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)|$, 则有

$$-Mf(x) \leqslant f(x)f'(x) \leqslant Mf(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

因此

$$-M \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f^2(0) \leqslant M \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,1]$$

上式两边乘以 $f$ 得

$$-Mf(x) \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{1}{2} f^2(0) f(x) \leqslant Mf(x) \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,1]$$

将上式关于变量 $x$ 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$-M \left(\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^3(x) \,\mathrm{d}x - f^2(0) \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x \leqslant M \left(\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x\right)^2$$

结论得证. □

**例题 0.20** 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上非负单调递增连续函数,$0 < \alpha < \beta < 1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x$$

并且 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

**注** 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

**证明** 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得

$$\int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

因而由 $f$ 的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x \leqslant (\beta - \alpha) f(\beta)$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha f(x) \,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(x) \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(\beta) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x + (1-\beta) f(\beta) \geqslant \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x + \frac{1-\beta}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

取正整数 $n$ 使得 $\alpha+\frac{1}{n}<\beta$. 构造函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ n(x-\alpha), & \alpha<x\leqslant\alpha+\frac{1}{n},\\ 1, & \alpha+\frac{1}{n}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha-\frac{1}{2n},\quad \int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x=\beta-\alpha-\frac{1}{2n}.$$

因而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

故题中 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换成更大的数. □

**例题 0.21** 设函数 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续的二阶导函数,$f(0)=f(1)=0,f'(1)=\frac{a}{2}$. 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的 $f$.

注 当 $f$ 在端点的值为零,$f'$ 在端点的值确定时, 可以考虑 $f''$ 与线性函数的乘积的积分.

证明 根据分部积分,Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^1 x(f''(x)-a)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x+a^2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\left(xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)+\frac{a^2}{2}\\ &=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\left(f'(1)-f(1)+f(0)\right)+\frac{a^2}{2}\\ &=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x)=a$$

即 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$. 因为 $f(0)=f(1)=0,f'(1)=\frac{a}{2}$, 所以 $c=0,b=-\frac{a}{2}$. 因此

$$f(x)=\frac{1}{2}ax(x-1).$$

□

**例题 0.22** 设 $n$ 是正整数, 且 $m>2$. 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{m\cdot n^{m-2}}{8(m-2)}-\frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

注 当利用积分的可加性把区间 $[a,b]$ 上的积分分为区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的 $c$.

证明 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt|\leqslant n\sin t,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 另外又有

$$|\sin nt|\leqslant 1,\quad \sin t\geqslant\frac{2t}{\pi},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

设 $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^a tn^m\,\mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^m \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}}\right).\end{aligned}$$

易知函数 $g(a) = \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$ 当 $a = \frac{\pi}{2n}$ 时取最小值. 于是将上面的 $a$ 换成 $\frac{\pi}{2n}$ 可得

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{m\cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

□

**例题 0.23** 设 $n \geqslant 1$ 是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2}\ln n.$$

**证明** 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x > \frac{2x}{\pi}$, 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{2t/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

用数学归纳法容易证明当 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 有 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/(2n+1)} \left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t} + \cos 2nt\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\\ &= \int_0^{\pi/(2n+1)} 2n\cos t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} < 2n\sin\frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\\ &= \left(2n + \frac{1}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1},\end{aligned}$$

$$-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t} + \cos 2nt\right)\mathrm{d}t < -\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \cos 2nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\sin\frac{\pi}{2n+1}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \left(2n + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1} < \left(2n + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi + \frac{\pi}{2}\ln n.$$

两边同时除以 $\pi$ 得:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2}\ln n.$$

□

**例题 0.24** 设 $f \not\equiv 0$, 在 $[a,b]$ 上可微,$f(a) = f(b) = 0$. 求证: 至少存在一点 $c \in [a,b]$ 使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

**证明** 记上式右端为 $M$. 假设对一切 $c \in [a,b]$ 有 $|f'(c)| \leqslant M$, 下面推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于 $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ 存在 $\xi \in (a,x)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(x-a), \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \tag{12}$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{13}$$

再根据微分中值定理, 对于 $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, 存在 $\eta \in (x,b)$, 使得

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\eta)(x-b),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(b-x), \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \tag{14}$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{15}$$

将式 (13) 与式 (15) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这说明式 (13) 与式 (15) 必须是等式, 因而式 (12) 与式 (14) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right], \\ M^2(b-x)^2, & x \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right], \end{cases}$$

此分段函数在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 不可导, 这与 $f$ 在 $[a,b]$ 可导矛盾! □

**例题 0.25** 设 $f$ 是区间 $[0,1]$ 上的下凸函数. 求证: 对一切 $t \in [0,1]$, 有

$$t(1-t)f(t) \leqslant (1-t)^2 \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + t^2 \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**注** 从本题结论知: 当 $f$ 是区间 $[0,1]$ 上的下凸函数时, 有

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \left[t^3 + (1-t)\right]^3 f(x)\,\mathrm{d}t.$$

因为

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 (1-t)^2 \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 \left(\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}(1-t)^3 + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t^3 \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^3 f(x)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_0^1 t^3 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[t^3 + (1-t)\right]^3 f(x)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

**笔记** 构造思路: 待定 $a = a(t,x), b = b(t,x)$, 使得 $t = ta + (1-t)b$. 由 $f$ 是下凸函数可知

$$f(t) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b), \forall t \in (0,1).$$

并且上式两边对 $x$ 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}
&t\int_0^1 f(a)\,\mathrm{d}x+(1-t)\int_0^1 f(b)\,\mathrm{d}x=\frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\ \mathrm{d}x+\frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\ \mathrm{d}x\\
\Longrightarrow&\int_0^1 f(b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^1 f(tx)\ \mathrm{d}x\\
\Longrightarrow&\ b=tx,t=ta+(1-t)\,b\\
\Longrightarrow&\ a=t-tx+t^2x=t\,(1-x+tx)\,.
\end{aligned}$$

**证明** 对于 $t=0$ 和 $t=1$ 所证不等式是显然的. 设 $t\in(0,1)$, 由定理??可知, 下凸函数在 $t$ 点是连续的, 所以 $f$ 在 $[0,1]$ 上可积. 对于 $x\in[0,1]$, 有 $t=(1-t)(tx)+t(1-x+tx)$. 因此根据下凸函数的定义, 得

$$f(t)\leqslant(1-t)f(tx)+tf(1-x+tx).$$

上式对变量 $x$ 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}
f(t)&\leqslant(1-t)\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x+t\int_0^1 f(1-x+tx)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

**命题 0.3**

设 $f$ 在区间 $[0,a)$ 上有二阶连续导数, 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且 $f''(x)>0\,(0<x<a)$. 求证: 对任意 $x\in(0,a)$, 有

$$\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt<x+\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}. \tag{16}$$

**注** 式 (16) 左端是弧长计算公式, 不等式 (16) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点 $A$ 和终点 $B$ 处的切线在曲线凸出的一侧相交于 $C$ 点, 则直线段 $AC$ 与 $BC$ 的长度之和大于这条曲线段的长度.

**证明** 将式 (16) 右端第一项 $x$ 移到左端, 有

$$\int_0^x\left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)dt=\int_0^x\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}\cdot f'(t)\,dt.$$

因为 $f'(t)$ 和 $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$ 都是单调递增函数, 所以 $\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}$ 是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x\left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)dt<\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}\cdot\int_0^x f'(t)\,dt=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}.$$

□

**例题 0.26** $f$ 是区间 $[0,1]$ 上的正连续函数,$k\geqslant1$. 求证:

$$\int_0^1\frac{1}{1+f(x)}\,dx\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\,dx\int_0^1\frac{1}{f^k(x)}\,dx, \tag{17}$$

并讨论等号成立的条件.

**证明** 当 $k\geqslant1$ 时, 函数 $\dfrac{t^k}{1+t}$ 和 $t^{k+1}$ 都是单调递增的. 因此对于任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)}\left(\frac{f^k(x)}{1+f(x)}-\frac{f^k(y)}{1+f(y)}\right)\left(f^{k+1}(x)-f^{k+1}(y)\right)\geqslant0, \tag{18}$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)}+\frac{f(y)}{1+f(x)}\leqslant\frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\cdot\frac{1}{f^k(y)}+\frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)}\cdot\frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量 $x,y$ 在区间 $[0,1]$ 上积分, 即得所证.

要使式 (17) 成为等式, 必须式 (18) 成为等式. 因此对任意 $x,y\in[0,1]$, 有 $f(x)=f(y)$, 即 $f$ 在 $[0,1]$ 上为常数.

□

**例题 0.27** 设 $b \geqslant a+2$. 函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)}\,dx = 1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,dx \leqslant 1. \tag{19}$$

并求式 (19) 成为等式的条件.

**证明** 令 $g(x)=\dfrac{b-a}{1+f(x)}$, 则 $g$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = b-a$. 从 $g$ 的定义可得 $f(x)=\dfrac{b-a-g(x)}{g(x)}$. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} &= \frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a}\\
&= \frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1}\right] \leqslant \frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1}\right]\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,dx &\leqslant \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}\,dx\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $g(x)=1$, 即 $f(x)=b-a-1$ 时成立. □

**例题 0.28**

**证明**

□

**例题 0.29**

**证明**

□

**例题 0.30**

**证明**

□

**例题 0.31**

**证明**

□

**例题 0.32**

**证明**

□

**例题 0.33**

**证明**

□

**例题 0.34**

**证明**

□