0.1 集合及其运算

0.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 0.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的元素 (或元), 通常用小写字母如 a, b, c 等表示. ♣

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A, 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为空集, 用 $\emptyset$ 表示; 只含有限个元素的集合称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的幂集, 记为 2^A.

0.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合, 由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且} x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交.

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为集族, 其中 Γ 为指标集 (有限或无限),α 为指标. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为列集, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$.

0.1.2.0.1 集族的并:

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x : \exists\alpha_0 \in \Gamma \text{ 使得} x \in A_{\alpha_0}\}$$

0.1.2.0.2 集族的交:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \forall\alpha \in \Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且} x \notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集,X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X - A$, 称为 A 的余集, 记为 A^c, 即

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

注 补集是相对概念, 若 $A \subset B$, 则 $B - A$ 称为 A 关于 B 的补集. 特别地, 余集是集合关于全集的补集.

笛卡尔积 (外直积)

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

例如,n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{ 个}}$.

定理 0.1 (集合的运算及性质)

(1) $A \cup A = A$,$A \cap A = A$;

(2) $A \cup \emptyset = A$,$A \cap \emptyset = \emptyset$;

(3) $A \cup B = B \cup A$,$A \cap B = B \cap A$;

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A \cap B_\alpha)$,$A \cup (\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A \cup B_\alpha)$;

(6) $A \cup A^c = X$,$A \cap A^c = \emptyset$;

(7) $X^c = \emptyset$,$\emptyset^c = X$;

(8) $A - B = A \cap B^c$.

定理 0.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$;

(ii) $(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall\alpha \in \Gamma$,$x \notin A_\alpha$, 即 $\forall\alpha \in \Gamma$,$x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$, 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$. 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证.

□

定义 0.2 (对称差集)

设 A,B 为两个集合, 称集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A\triangle B$.

笔记 对称差集是由既属于 A,B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 0.3 (集合对称差的性质)

(i) $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

(ii) $A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing, A\triangle A^c=X, A\triangle X=A^c$.

(iii) 交换律:$A\triangle B=B\triangle A$.

(iv) 结合律: $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

(v) 交与对称差满足分配律:$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

(vi) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$;$A=A\triangle B$ 当且仅当 $B=\varnothing$.

(vii) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E\triangle A=B$(实际上 $E=B\triangle A$).

证明

(i) 由对称差集的定义及集合的运算及性质 (5)可得

$$\begin{aligned}A\triangle B&=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=\left[(A\cap B^c)\cup B\right]\cap\left[(A\cap B^c)\cup A^c\right]\\&=(A\cup B)\cap(A^c\cap B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\&=(A\cup B)\setminus(A\cap B).\end{aligned}$$

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

(vii)

□

0.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列, 若 $\{A_n\}$ 单调递增, 即

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 即

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定义 0.3 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k\supset\cdots\supset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\supset\cdots$$

记 $C_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 则 $\{C_n\}$ 单调递减, 故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**上限集**, 记为 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcap_{k=2}^{\infty}A_k\subset\cdots\subset\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset\cdots$$

记 $D_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 则 $\{D_n\}$ 单调递增, 故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

称 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集, 记为 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

若 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$, 则称 $\{A_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

♣

命题 0.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k&=\{x:x\text{ 属于无穷多个}A_n\}\\&=\{x:\ \text{对}\forall k\in\mathbb{N},\ \text{都存在}n_k\ \text{使得}x\in A_{n_k}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k&=\{x:\ \text{除有限个}A_n\text{ 外, 都含有}x\}\\&=\{x:\exists n_0\in\mathbb{N},\ \text{使得}x\in A_n,\forall n\geqslant n_0\}\end{aligned}$$

♠

证明 (1) 设 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, 故 $\exists n_1\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in A_{n_1}$; 对 $n=n_1+1$, 有 $x\in\bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty}A_k$, 故 $\exists n_2>n_1$, 使得 $x\in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1<n_2<\cdots$, 且 $x\in A_{n_k},\forall k$. 因此,x 属于无穷多个 A_n.

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x\in A_{n_k}, k=1,2,\cdots$, 且 $n_1<n_2<\cdots$, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都存在 $n_k>n$. 从而 $x\in A_{n_k}\subset\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. 因此,$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$.

(2) $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k\iff\exists n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in\bigcap\limits_{k=n_0}^{\infty}A_k\iff x\in A_n,\forall n\geqslant n_0$.

□

例题 0.1 设 $A_{2n+1}=[0,2-1/(2n+1)], n=0,1,2,\cdots, A_{2n}=[0,1+1/2n], n=1,2,\cdots$, 求 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 与 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

解 注意到

$$[0,1]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2)$$

故只需考察 $(1,2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1,2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1+\frac{1}{2n} < x < 2-\frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能"除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0,1]$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0,2)$.

□

例题 0.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则"$f_n(x) \nrightarrow f(x)$", 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0>0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}.$$

□

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德 摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}$$