

## 0.1 可解群和幂零群

### 定义 0.1

么元为 1 的群  $G$  中的子群序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}.$$

若满足  $G_i \triangleleft G_{i-1}$  ( $2 \leq i \leq t+1$ ), 则称之为**次正规序列**,  $t$  称为此序列的**长度**.  $G_{i-1}/G_i$  ( $2 \leq i \leq t+1$ ) 称为此序列的**因子**. 若在上述序列中还有  $G_i \triangleleft G$  ( $1 \leq i \leq t+1$ ), 则称此序列为**正规序列**.

若两个次正规序列 (正规序列)

$$G = G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \cdots \supseteq G'_r \supseteq G'_{r+1} = \{1\},$$

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}$$

满足  $\forall G'_i$  ( $1 \leq i \leq r+1$ ),  $\exists G_{i_j} = G'_i$  ( $1 \leq i_j \leq t+1$ ), 则称此序列  $\{G_j\}$  是序列  $\{G'_i\}$  的**加细**.



**例题 0.1**  $S_3 \supset A_3 \supset \{\text{id}\}$  是  $S_3$  的正规序列.

**证明**



**例题 0.2**  $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \{\text{id}\}$  是  $S_4$  的正规序列, 而  $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \langle(12)(34)\rangle \supset \{\text{id}\}$  是  $S_4$  的次正规序列, 后者是前者作为次正规序列的加细.

**证明**



### 定义 0.2

在群  $G$  中分别归纳地定义  $G$  的子群序列  $\{G^{(k)}\}, \{\Gamma_k(G)\}, \{C_k(G)\}$  为

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad k > 0;$$

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)], \quad k > 1;$$

$$C_0(G) = \{1\}, \quad C_k(G)/C_{k-1}(G) = C(G/C_{k-1}(G)), \quad k > 0.$$

分别称群  $G$  中序列

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots,$$

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots,$$

$$C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq C_2(G) \subseteq \cdots$$

为  $G$  的**导出列**、**降中心列**和**升中心列**.

若有  $k \in \mathbb{N}$ , 使  $G^{(k)} = \{1\}$ , 则称  $G$  是**可解群**. 若有  $k \in \mathbb{N}$ , 使  $\Gamma_k(G) = \{1\}$ , 则称  $G$  是**幂零群**.



**注** 显然有

$$G^{(0)} = G \supseteq [G, G] = G^{(1)}.$$

假设  $G^{(k-1)} \supseteq G^{(k)}$ , 则由引理????可得

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \supseteq [G^{(k)}, G^{(k)}] = G^{(k+1)}.$$

故由数学归纳法知

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots.$$

因此  $G$  的导出列是良定义的.

显然有

$$\Gamma_1(G) = G \supseteq [G, G] = \Gamma_2(G).$$

假设  $\Gamma_{k-1}(G) \supseteq \Gamma_k(G)$ , 则由引理????可得

$$\Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)] \supseteq [G, \Gamma_k(G)] = \Gamma_{k+1}(G).$$

故由数学归纳法知

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots.$$

因此  $G$  的降中心列是良定义的.

由定理????知  $C_1(G) = C(G) \triangleleft G$ . 设  $\pi_1$  是  $G$  到  $G/C_1(G)$  上的自然同态. 令

$$C_2(G) = \pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))),$$

则由定理????知  $\pi_1(C_2(G)) = C(G/C_1(G)) \triangleleft G/C_1(G)$ , 再由定理????知  $C_2(G) \triangleleft \pi_1^{-1}(G/C_1(G)) = G$ . 因为  $\pi_1(C_1(G)) = \{1\} \subseteq C(G/C_1(G))$ , 所以

$$C_1(G) \subseteq \pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))) = C_2(G).$$

从而由命题????知  $C_1(G) \triangleleft C_2(G)$ . 将  $\pi_1$  看作限制在  $C_2(G)$  上的同态, 则由群的同态基本定理知

$$C_2(G)/C_1(G) = C_2(G)/\ker \pi_1|_{C_2(G)} \cong \pi_1|_{C_2(G)}(C_2(G)) = C(G/C_1(G)).$$

因此

$$C_2(G)/C_1(G) = C(G/C_1(G)).$$

再令  $\pi_2$  是  $G$  到  $G/C_2(G)$  上的自然同态, 则

$$C_3(G) = \pi_2^{-1}(C(G/C_2(G))),$$

同理可得

$$C_2(G) \triangleleft C_3(G), \quad C_3(G)/C_2(G) = C(G/C_2(G)).$$

如此进行下去, 即得所有  $C_k(G)$ . 因此  $G$  的升中心列是良定义的.

### 命题 0.1

- (1) 若  $G$  是一个群, 则  $G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}$ ,  $\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}(\Gamma_{k_1}(G))$ ,  $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ .
- (2) 若  $A$  是群  $B$  的子群, 则  $A^{(k)} \subseteq B^{(k)}$ ,  $\Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(B)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .
- (3) 若  $f$  是群  $G$  到群  $B$  的同态, 则  $(f(G))^{(k)} = f(G^{(k)})$ ,  $\Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G))$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .
- (4) 设  $A, B$  是两个群, 则

$$(nA \times B)^{(k)} = A^{(k)} \times B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- (5) 设  $\pi_k$  是  $G$  到  $G/C_k(G)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) 上的自然同态, 则

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- (6) 设  $G$  是一个群, 则对  $\forall a \in G$ , 有

$$a \in C_{k+1}(G) \iff [a, b] \in C_k(G), \forall b \in G.$$

- (7) 设  $G$  是一个群, 则

$$G^{(k+1)} \triangleleft G^{(k)}, \quad G^{(k)} \triangleleft G, \quad k = 0, 1, \dots.$$

$$\Gamma_{k+1}(G) \triangleleft \Gamma_k(G), \quad \Gamma_k(G) \triangleleft G, \quad k = 0, 1, \dots.$$

$$C_k(G) \triangleleft C_{k+1}(G), \quad C_k(G) \triangleleft G, \quad k = 0, 1, \dots.$$



**证明**

(1) 对  $\forall k_1 \in \mathbb{N}$ , 都有

$$G^{(k_1+1)} = [G^{(k_1)}, G^{(k_1)}] = (G^{(k_1)})^{(1)}.$$

假设  $G^{(k_1+k_2-1)} = (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}$ , 则

$$G^{(k_1+k_2)} = [G^{(k_1+k_2-1)}, G^{(k_1+k_2-1)}] = [(G^{(k_1)})^{(k_2-1)}, (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}] = (G^{(k_1)})^{(k_2)}.$$

故由数学归纳法知

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由  $k_1$  的任意性可得

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

对  $\forall k_1 \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\Gamma_{k_1+1}(G) = [G, \Gamma_{k_1}(G)] = \Gamma_{k_1}(\Gamma_{k_1}(G)).$$

假设  $\Gamma_{k_1+k_2-1}(G) = \Gamma_{k_2-1}(\Gamma_{k_1}(G))$ , 则

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = [G, \Gamma_{k_1+k_2-1}(G)] = [G, \Gamma_{k_2-1}(\Gamma_{k_1}(G))] = \Gamma_{k_2}(\Gamma_{k_1}(G)).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}(\Gamma_{k_1}(G)), \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由  $k_1$  的任意性可得

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}(\Gamma_{k_1}(G)), \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

(2) 由条件知  $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$ . 假设  $A^{(k-1)} \subseteq B^{(k-1)}$ , 则由引理????知

$$A^{(k)} = [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}] \subseteq [B^{(k-1)}, B^{(k-1)}] = B^{(k)}.$$

故由数学归纳法知

$$A^{(k)} \subseteq B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由条件知  $\Gamma_1(A) = A \subseteq B = \Gamma_1(B)$ . 假设  $\Gamma_{k-1}(A) \subseteq \Gamma_{k-1}(B)$ , 则由引理????知

$$\Gamma_k(A) = [A, \Gamma_{k-1}(A)] \subseteq [B, \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(3) 显然  $f(G^{(0)}) = f(G) = (f(G))^{(0)}$ . 假设  $f(G^{(k-1)}) = (f(G))^{(k-1)}$ . 任取  $f(a^{-1}b^{-1}ab) \in f([G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]) = f(G^{(k)})$ , 则  $a, b \in G^{(k-1)}$ , 进而

$$f(a), f(b) \in f(G^{(k-1)}) = (f(G))^{(k-1)}.$$

从而

$$f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in [(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}] = (f(G))^{(k)}.$$

故  $f(G^{(k)}) \subseteq (f(G))^{(k)}$ . 再任取  $f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in [(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}] = (f(G))^{(k)}$ , 则

$$f(a), f(b) \in (f(G))^{(k-1)} = f(G^{(k-1)}),$$

进而由**命题 1.5(i)**知  $a, b \in G^{(k-1)}$ . 从而

$$f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = f(a^{-1}b^{-1}ab) \in f([G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]) = f(G^{(k)}).$$

故  $f(G^{(k)}) \supseteq (f(G))^{(k)}$ . 因此  $f(G^{(k)}) = (f(G))^{(k)}$ . 故由数学归纳法知  $f(G^{(k)}) = (f(G))^{(k)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

显然  $\Gamma_1(f(G)) = f(G) = f(\Gamma_1(G))$ . 假设  $\Gamma_{k-1}(f(G)) = f(\Gamma_{k-1}(G))$ . 任取  $f(a^{-1}b^{-1}ab) \in f([G, \Gamma_{k-1}(G)]) =$

$f(\Gamma_k(G))$ , 则  $a \in G, b \in \Gamma_{k-1}(G)$ , 进而

$$f(a) \in f(G), \quad f(b) \in f(\Gamma_{k-1}(G)) = \Gamma_{k-1}(f(G)).$$

从而

$$f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in [f(G), \Gamma_{k-1}(f(G))] = \Gamma_k(f(G)).$$

因此  $f(\Gamma_k(G)) \subseteq \Gamma_k(f(G))$ . 再任取  $f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in [f(G), \Gamma_{k-1}(f(G))] = \Gamma_k(f(G))$ , 则

$$f(a) \in f(G), \quad f(b) \in \Gamma_{k-1}(f(G)) = f(\Gamma_{k-1}(G)).$$

进而由命题 1.5(i) 知  $a \in G, b \in \Gamma_{k-1}(G)$ . 从而

$$f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = f(a^{-1}b^{-1}ab) \in f([G, \Gamma_{k-1}(G)]) = f(\Gamma_k(G)).$$

因此  $\Gamma_k(f(G)) \subseteq f(\Gamma_k(G))$ . 综上可知  $\Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G))$ . 故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(4) 显然  $(A \times B)^{(0)} = A \times B = A^{(0)} \times B^{(0)}$ . 假设  $(A \times B)^{(k-1)} = A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}$ , 则

$$(A \times B)^{(k)} = [(A \times B)^{(k-1)}, (A \times B)^{(k-1)}] = [A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}]. \quad (1)$$

下证  $[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}] = A^{(k)} \times B^{(k)}$ . 任取  $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in [A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}]$ , 则

$$a_i \in A^{(k-1)}, \quad b_i \in B^{(k-1)}, \quad i = 1, 2.$$

从而

$$\begin{aligned} [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] &= (a_1^{-1}, b_1^{-1})(a_2^{-1}, b_2^{-1})(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2, b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2) \\ &= ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}] \times [B^{(k-1)}, B^{(k-1)}] = A^{(k)} \times B^{(k)}. \end{aligned}$$

故  $[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}] \subseteq A^{(k)} \times B^{(k)}$ . 再任取

$$([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in A^{(k)} \times B^{(k)} = [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}] \times [B^{(k-1)}, B^{(k-1)}],$$

则

$$a_i \in A^{(k-1)}, \quad b_i \in B^{(k-1)}, \quad i = 1, 2.$$

从而

$$\begin{aligned} ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) &= (a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2, b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2) = (a_1^{-1}, b_1^{-1})(a_2^{-1}, b_2^{-1})(a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in [A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

故  $A^{(k)} \times B^{(k)} \subseteq [A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}]$ . 因此  $[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}] = A^{(k)} \times B^{(k)}$ . 再结合(1)式可得

$$(A \times B)^{(k)} = A^{(k)} \times B^{(k)}.$$

故由数学归纳法可知

$$(A \times B)^{(k)} = A^{(k)} \times B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

显然  $\Gamma_1(A \times B) = A \times B = \Gamma_1(A) \times \Gamma_1(B)$ . 假设  $\Gamma_{k-1}(A \times B) = \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)$ , 则

$$\Gamma_k(A \times B) = [A \times B, \Gamma_{k-1}(A \times B)] = [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)]. \quad (2)$$

下证  $[A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B)$ . 任取  $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)]$ , 则

$$a_1 \in A, \quad b_1 \in B, \quad a_2 \in \Gamma_{k-1}(A), \quad b_2 \in \Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = (a_1^{-1}, b_1^{-1})(a_2^{-1}, b_2^{-1})(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2, b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2)$$

$$= ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in [A, \Gamma_{k-1}(A)] \times [B, \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B).$$

因此  $[A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)] \subseteq \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B)$ . 再任取

$$([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B) = [A, \Gamma_{k-1}(A)] \times [B, \Gamma_{k-1}(B)],$$

则

$$a_1 \in A, \quad a_2 \in \Gamma_{k-1}(A), \quad b_1 \in B, \quad b_2 \in \Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$\begin{aligned} ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) &= (a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2, b_1^{-1} b_2^{-1} b_1 b_2) = (a_1^{-1}, b_1^{-1}) (a_2^{-1}, b_2^{-1}) (a_1, b_1) (a_2, b_2) \\ &= [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)]. \end{aligned}$$

因此  $\Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B) \subseteq [A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)]$ . 故  $[A \times B, \Gamma_{k-1}(A) \times \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B)$ . 再由(2)式可得

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(5) 由  $G$  的升中心列的定义可得

$$\pi_k(C_{k+1}(G)) = C_{k+1}(G)/C_k(G) = C(G/C_k(G)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(6) 由命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} a \in C_{k+1}(G) &\iff \pi_k(a) \in \pi_k(C_{k+1}(G)) \\ &\iff aC_k(G) \in C_{k+1}(G)/C_k(G) = C(G/C_k(G)) \\ &\iff (aC_k(G))(bC_k(G)) = (bC_k(G))(aC_k(G)), \forall b \in G \\ &\iff [a, b]C_k(G) = a^{-1}b^{-1}abC_k(G) = C_k(G), \forall b \in G \\ &\iff [a, b] \in C_k(G), \forall b \in G. \end{aligned}$$

(7) 由引理????知

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \triangleleft G, \quad k = 1, 2, \dots.$$

又显然  $G^{(0)} = G \triangleleft G$ . 假设  $G^{(k-1)} \triangleleft G$ , 则由引理????可得

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \triangleleft G.$$

故由数学归纳法知  $G^{(k)} \triangleleft G, k = 1, 2, \dots$ .

显然  $\Gamma_1(G) = G \triangleleft G$ . 假设  $\Gamma_{k-1}(G) \triangleleft G$ , 则由引理????可得

$$\Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)] \triangleleft G.$$

故由数学归纳法知  $\Gamma_k(G) \triangleleft G, k = 1, 2, \dots$ . 又  $\Gamma_k(G) \subseteq \Gamma_{k-1}(G), k = 1, 2, \dots$ , 再由命题????知

$$\Gamma_k(G) \triangleleft \Gamma_{k-1}(G), \quad k = 1, 2, \dots.$$

显然  $C_0(G) = \{1\} \triangleleft G$ . 假设  $C_k(G) \triangleleft G$ . 设  $\pi_k$  是  $G$  到  $G/C_k(G)$  的自然同态, 则由命题 0.1(5) 知

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))), \quad k = 0, 1, \dots.$$

由定理????知  $C(G/C_k) \triangleleft G/C_k$ . 再由定理????知

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))) \triangleleft G, \quad k = 0, 1, \dots.$$

故由数学归纳法知

$$C_k(G) \triangleleft G, \quad k = 0, 1, \dots.$$

再由命题????知

$$C_k(G) \triangleleft C_{k+1}(G), \quad k = 0, 1, \dots.$$

□

### 命题 0.2

Abel 群是幂零群, 也是可解群. 特别地, 循环群都是幂零群, 也都是可解群.

◆

### 证明

因为循环群都是 Abel 群, 所以循环群都是幂零群, 也都是可解群.

□

**例题 0.3** 设  $G = S_3$ , 于是  $G^{(1)} = \Gamma_2(G) = A_3$ , 因而  $G^{(2)} = \{1\}$ , 但  $\Gamma_3(G) = A_3 = \Gamma_2(G)$ , 故当  $k \geq 2$  时均有  $\Gamma_k(G) = A_3 \neq \{1\}$ , 故  $S_3$  是可解群但不是幂零群.

### 证明

□

### 定理 0.1

- (1) 设  $G$  是可解群,  $A$  是可解群  $G$  的子群, 则  $A$  也是可解群.
- (2) 设  $G$  是可解群,  $f$  是群  $G$  到群  $G_1$  的同态, 则  $f(G)$  也是可解群.
- (3) 设群  $G$  是群  $B$  过群  $A$  的扩张, 则  $G$  可解的充分必要条件是  $A, B$  都是可解群.

♡

### 证明

- (1) 由  $G$  是可解群知, 存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $G^{(k_0)} = \{1\}$ . 再由命题 0.1(2) 知  $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)} = \{1\}$ , 故  $A^{(k_0)} = \{1\}$ , 即  $A$  是可解群.
- (2) 由  $G$  是可解群知, 存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $G^{(k_0)} = \{1\}$ . 再由命题 0.1(3) 知  $(f(G))^{(k_0)} = f(G^{(k_0)}) = \{1\}$ , 故  $f(G)$  是可解群.
- (3) 由  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张, 故可假定  $A \triangleleft G, B = G/A$ . 又设  $\pi$  是  $G$  到  $B$  的自然同态. 由命题 0.1(2) 知

$$A^{(k)} \subseteq G^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (3)$$

由命题 0.1(3) 知

$$B^{(k)} = \pi(G^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots. \quad (4)$$

若  $G$  可解, 则存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $G^{(k_0)} = \{1\}$ . 于是由(3)式得  $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)} = \{1\}$ , 故  $A = \{1\}$ , 即  $A$  可解. 再由(4)式得  $B^{(k_0)} = \pi(G^{(k_0)}) = \pi(\{1\}) = \{1\}$ , 故  $B$  可解.

反之, 若  $A, B$  可解, 则存在  $k_1, k_2$ , 使  $A^{(k_1)} = B^{(k_2)} = \{1\}$ , 故由(4)式得  $\pi(G^{(k_2)}) = B^{k_2} = \{1\}$ , 即  $G^{(k_2)} \subseteq \ker \pi = A$ . 由命题 0.1(2) 知  $(G^{(k_1)})^{(k_2)} \subseteq A^{(k_2)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . 因而再由命题 0.1(1) 知  $G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)} \subseteq A^{(k_2)} = \{1\}$ , 故  $G^{(k_1+k_2)} = \{1\}$ , 于是  $G$  可解.

□

### 定理 0.2

设  $G$  是有限群, 则下列条件等价:

- (1)  $G$  是可解群;
- (2) 存在  $G$  的正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使  $G_i/G_{i+1}$  为 Abel 群,  $1 \leq i \leq r-1$ ;

- (3) 存在  $G$  的次正规序列

$$G = G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \cdots \supseteq G'_s = \{1\},$$

使  $G'_i/G'_{i+1}$  为 Abel 群,  $1 \leq i \leq s-1$ ;

(4) 存在  $G$  的次正规序列

$$G = G''_1 \supseteq G''_2 \supseteq \cdots \supseteq G''_t = \{1\},$$

使  $G''_i/G''_{i+1}$  为素数阶群,  $1 \leq i \leq t-1$ .



**注** 由这个定理的证明知: 群  $G$  是可解群的充要条件是  $G$  的导出列都是正规序列且因子都是 Abel 群.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 由于  $G$  可解, 故有  $k \in \mathbb{N}$ , 使  $G^{(k)} = \{1\}$ . 再由命题 0.1(7) 知  $G$  中有正规序列

$$G = G^0 \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(k)} = \{1\}.$$

因为  $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ ,  $G^{(i)} \triangleleft G^{(i-1)}$ , 所以由命题????知  $G^{(i-1)}/G^{(i)}$  是 Abel 群, 故  $G$  的导出列满足 (2) 的要求.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 由于正规序列必为次正规序列, 故条件 (2) 成立一定有条件 (3) 成立.

(3)  $\Rightarrow$  (4). 设  $G = G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \cdots \supseteq G'_s = \{1\}$  是  $G$  的次正规序列, 并且  $G'_i/G'_{i+1}$  为 Abel 群. 由于  $G$  是有限群, 故  $G'_i/G'_{i+1}$  也是有限群. 如果对某个  $i$  有

$$|G'_i/G'_{i+1}| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中  $k \geq 1, p_1, p_2, \dots, p_k$  是互不相等的素数,  $\sum_{j=1}^k a_j > 1$ . 令  $P_j$  是 Abel 群  $G'_i/G'_{i+1}$  的 Sylow  $p_j$  子群, 则  $|P_j| = p_j^{a_j}$ .

由命题????知  $P_j$  是  $G'_i/G'_{i+1}$  的正规子群. 由命题??知有内直积分解

$$G'_i/G'_{i+1} = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

又设  $P'_k$  为  $P_k$  的  $p_k^{a_k-1}$  阶子群, 则  $P'_k$  也为 Abel 群  $G'_i/G'_{i+1}$  的子群, 由命题????知  $P'_k \triangleleft G'_i/G'_{i+1}$ . 由定理????知

$$H' \triangleq P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_{k-1} \otimes P'_k \triangleleft G'_i/G'_{i+1}.$$

再利用 Lagrange 定理及定理????可得

$$\begin{aligned} |H'| &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1}, \\ [G'_i/G'_{i+1} : H'] &= \frac{|G'_i/G'_{i+1}|}{|H'|} = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1}} = p_k. \end{aligned} \tag{5}$$

设  $\pi$  为  $G'_i$  到  $G'_i/G'_{i+1}$  上的自然同态, 令  $H = \pi^{-1}(H')$ , 则由  $1 \in H'$  和推论????知

$$G'_{i+1} = \ker \pi = \pi^{-1}(1) \subseteq \pi^{-1}(H') = H = \pi^{-1}(H') \triangleleft G'_i.$$

于是由定理????可得

$$G'_{i+1} \triangleleft H \triangleleft G'_i, \quad G'_i/H \cong (G'_i/G'_{i+1}) / \pi(H) = (G'_i/G'_{i+1}) / H'.$$

将  $\pi$  限制在  $H$  上, 则  $\pi|_H$  是  $H$  到  $H'$  的满同态. 再利用定理????可得

$$H/G'_{i+1} \cong \pi(H)/\pi(G'_{i+1}) = \pi(H)/\{1\} = H'.$$

再结合(5)式可得

$$\begin{aligned} [G'_i : H] &= [G'_i/G'_{i+1} : H'] = p_k, \\ [H : G'_{i+1}] &= |H'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k-1}. \end{aligned}$$

故  $G'_i/H$  是素数阶群,  $H/G'_{i+1}$  仍是 Abel 群. 同理可由 Abel 群  $H/G'_{i+1}$  得到  $H_1$ , 使得  $G'_{i+1} \triangleleft H_1 \triangleleft H, H/H_1$  是素数阶群,  $H_1/G'_{i+1}$  仍是 Abel 群且

$$[H_1 : G'_{i+1}] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k-2}.$$

依次进行下去, 因为  $[G'_i : G'_{i+1}]$  的阶有限, 所以这个操作必会在有限步后终止, 最终得到

$$G'_{i+1} \triangleleft H_m \triangleleft \cdots \triangleleft H_2 \triangleleft H_1 \triangleleft H, \quad m = \sum_{i=1}^k a_i - 2,$$

$H/H_1, H_k/H_{k+1}, k = 1, 2, \dots, m$  都是素数阶群，并且  $[H_m : G'_{i+1}] = p_1$ ，故  $H_m/G'_{i+1}$  也是素数阶群。根据  $i$  的任意性，我们在每个  $G'_i, G'_{i+1}$  之间都可以像这样插入一列群，最终得到一个新的次正规序列，并且这个新的次正规序列的因子都是素数阶群。

(4)  $\Rightarrow$  (1). 因  $G''_{t-1}, G''_{t-2}/G''_{t-1}$  都是素数阶群，故由命题??知  $G''_{t-1}, G''_{t-2}/G''_{t-1}$  都是循环群，因而由命题0.2知它们都可解。注意到短正合序列

$$1 \longrightarrow G''_{t-1} \xrightarrow{\lambda} G''_{t-2} \xrightarrow{\mu} G''_{t-2}/G''_{t-1} \longrightarrow 1,$$

故  $G''_{t-2}$  是循环群  $G''_{t-2}/G''_{t-1}$  过可解群  $G''_{t-1}$  的扩张，由定理0.1知  $G''_{t-2}$  是可解群。假设  $G''_{i+1}$  为可解群，则同理可得  $G''_i$  是循环群  $G''_i/G''_{i+1}$  过可解群  $G''_{i+1}$  的扩张，故由定理0.1知  $G''_i$  是可解群。因此由数学归纳法知当  $i = 1$  时知  $G$  为可解群。

□

**例题0.4** 在  $A_4$  中有正规序列

$$A_4 \supseteq K_4 \supseteq \{\text{id}\}.$$

$A_4/K_4$  是3阶群， $K_4$  是Abel群，于是  $A_4$  是可解群。

**证明**

□

### 定理0.3

- (1) 设  $G$  是幂零群， $A$  是幂零群  $G$  的子群，则  $A$  也是幂零群。
- (2) 设  $G$  是幂零群， $f$  是群  $G$  到群  $G_1$  的同态，则  $f(G)$  也是幂零群。
- (3) 设  $G$  是幂零群  $B$  过幂零群  $A$  的扩张，若  $G$  是中心扩张或平凡扩张，则  $G$  也是幂零群。

♡

**证明**

- (1) 由  $G$  是幂零群知，存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ ，使得  $\Gamma_{k_0}(G) = \{1\}$ 。再由命题0.1(2)知  $\Gamma_{k_0}(A) \subseteq \Gamma_{k_0}(G) = \{1\}$ ，故  $\Gamma_{k_0}(A) = \{1\}$ 。由此知  $A$  也为幂零群。
- (2) 由  $G$  是幂零群知，存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ ，使得  $\Gamma_{k_0}(G) = \{1\}$ 。再由命题0.1(2)知  $\Gamma_{k_0}(f(G)) = f(\Gamma_{k_0}(G)) = f(\{1\}) = \{1\}$ ，故  $\Gamma_{k_0}(f(G)) = \{1\}$ 。由此知  $G_1$  也是幂零群。
- (3) 若  $G$  是中心扩张，则由条件知  $A \subseteq C(G), G/A = B$ ，又设  $\pi$  是  $G$  到  $B$  上的自然同态。由  $B$  幂零知，存在  $k_1 \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\pi(\Gamma_{k_1}(G)) = \Gamma_{k_1}(B) = \{1\},$$

因而  $\Gamma_{k_1}(G) \subseteq \ker \pi = A \subseteq C(G)$ 。故  $\forall a \in \Gamma_{k_1}(G), b \in G$  有

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a = 1.$$

于是  $\Gamma_{k_1+1}(G) = [G, \Gamma_{k_1}(G)] = \{1\}$ ，这就证明了  $G$  是幂零群。

若  $G$  是平凡扩张，则由定理??知  $G \cong A \times B$  且  $A, B$  都是幂零群。由命题0.1(4)知

$$\Gamma_k(G) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由  $A, B$  是幂零群知，存在  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ，使得  $\Gamma_{k_1}(A) = \Gamma_{k_2}(B) = \{1\}$ 。又因为

$$\Gamma_{k_1}(A) \supseteq \Gamma_k(A), \quad \forall k \geq k_1; \quad \Gamma_{k_2}(B) \supseteq \Gamma_k(B), \quad \forall k \geq k_2.$$

所以

$$\Gamma_k(A) = \{1\}, \quad \forall k \geq k_1; \quad \Gamma_k(B) = \{1\}, \quad \forall k \geq k_2.$$

于是取  $K = \max\{k_1, k_2\}$ ，则

$$\Gamma_K(G) = \Gamma_K(A) \times \Gamma_K(B) = \{1\} \times \{1\} = \{1\}.$$

故  $G$  也为幂零群。

□

**定理 0.4**

设  $G$  是群, 则下列条件等价:

- (1)  $G$  是一个幂零群;
- (2)  $G$  中有正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使  $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ ;

- (3) 存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $C_k(G) = G$ .



**注** 由这个定理的证明知: 群  $G$  是幂零群的充要条件是  $G$  的降中心列都是正规序列且  $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \subseteq C(G/\Gamma_{i+1})$ .

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 因  $G$  是幂零群, 故有  $k \in \mathbb{N}$ , 使  $\Gamma_k(G) = \{1\}$ . 再由命题 0.1(7) 知  $G$  中有正规序列

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_k(G) = \{1\},$$

因而由推论????知  $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq G/\Gamma_{i+1}(G)$ . 设  $\pi$  为  $G$  到  $G/\Gamma_{i+1}(G)$  的自然同态, 由命题 0.1(3) 及  $[G, \Gamma_i(G)] = \Gamma_{i+1}(G)$  知

$$[G/\Gamma_{i+1}(G), \Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G)] = [\pi(G), \pi(\Gamma_i(G))] = \pi([G, \Gamma_i(G)]) = \pi(\Gamma_{i+1}(G)) = \{1\},$$

因而由引理????知  $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq C(G/\Gamma_{i+1}(G))$ , 故  $G$  的降中心列满足条件 (2) 的要求.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 用反序归纳法证明  $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$ , 其中  $C_0(G) = \{1\}$ . 当  $i = r$  时,  $G_r = \{1\} = C_0(G) = C_{r-r}(G)$ . 设  $i+1$  时已成立, 因而  $G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G)$ . 又  $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$ , 由推论????知

$$[G_i, G] \subseteq G_{i+1}.$$

即对  $\forall a \in G_i$ , 有

$$[a, b] \in G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G), \forall b \in G.$$

因而由命题 0.1(6) 知  $a \in C_{r-i}(G)$ , 故  $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$ . 特别地, 有  $G_1 = G \subseteq C_{r-1}(G)$ , 即取  $k = r-1$  知条件 (3) 成立.

(3)  $\Rightarrow$  (1). 设有  $k \in \mathbb{N}$ , 使  $C_k(G) = G$ , 再结合命题 0.1(7) 知  $G$  中有正规序列

$$G = C_k(G) \supseteq C_{k-1}(G) \supseteq \cdots \supseteq C_1(G) \supseteq C_0(G) = \{1\}.$$

用数学归纳法证明  $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . 当  $i = 1$  时, 显然成立. 假设结论对  $i$  成立, 现在考虑  $i+1$  的情形. 由于  $C_{k-i+1}(G)/C_{k-i}(G) = C(G/C_{k-i}(G))$ , 故由推论???? 有  $[G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G)$ , 于是再结合引理???? 得

$$\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \subseteq [G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G).$$

故由数学归纳法知  $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . 特别地, 有  $\Gamma_{k+1}(G) \subseteq C_0(G) = \{1\}$ , 故  $\Gamma_{k+1} = \{1\}$ . 因而  $G$  是幂零群.

**定理 0.5**

设  $p$  是一个素数, 则有限  $p$  群都是幂零群.



**证明** 由命题 0.2 知阶数为  $p$  的有限  $p$  群都是幂零群. 假设结论对阶数小于等于  $p^{n-1}$  的有限  $p$  群都成立, 现设  $|G| = p^n$ , 则由定理???? 知  $C(G) \neq \{1\}$ , 从而  $|C(G)| > 1$ . 若  $|C(G)| = |G|$ , 则  $G$  是 Abel 群, 由命题 0.2 知  $G$  是幂零群. 下设  $|C(G)| = p^k$  ( $1 \leq k < n$ ), 则由 Lagrange 定理得

$$|G| = [G : C(G)] \cdot |C(G)| \iff [G : C(G)] = p^{n-k} < p^n.$$

于是由归纳假设知  $G/C(G), C(G)$  都是幂零群. 又显然  $G$  是  $G/C(G)$  过  $C(G)$  的中心扩张, 故由定理 0.3(3) 知  $G$  为幂零群. 因此由数学归纳法知任何有限  $p$  群都是幂零群.



**例题 0.5** 设  $H$  是四元数体,  $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ , 其中  $1, i, j, k \in H$  如命题?? 所述, 则  $G$  是 8 阶群. 这是一个非 Abel 幂零群的例子.

证明

□