

0.1 复数的定义及其运算

定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a, b) , 如果用 \mathbb{R} 记实数的全体, \mathbb{C} 记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律; $(0, 0)$ 是零元素, $(-a, -b)$ 是 (a, b) 的负元素; $(1, 0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a, b) 有逆元素 $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$; 此外, \mathbb{C} 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此 \mathbb{C} 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbb{R}}$ 是 \mathbb{C} 的一个子域. 显然, $(a, 0) \rightarrow a$ 是 $\tilde{\mathbb{R}}$ 与 \mathbb{R} 之间的一个同构对应, 因此实数域 \mathbb{R} 是 \mathbb{C} 的一个子域. 我们直接记 $(a, 0) = a$. 在 \mathbb{C} 中, $(0, 1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用 i 记 $(0, 1)$ 这个元素, 于是有 $i^2 = -1$. 由于 $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$, 于是每一个复数 (a, b) 都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a, b) 来记复数, 而直接用 $z = a + bi$ 记复数, a 称为 z 的**实部**, b 称为 z 的**虚部**, 分别记为 $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

设 $z = a + bi$ 是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - bi,$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**, \bar{z} 称为 z 的**共轭复数**.

定义 0.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a < b$), 其满足下列要求:


(i) 对 F 中任意两个元素 a, b , 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果 $a < b, b < c$, 那么 $a < c$;

(iii) 如果 $a < b$, 那么对任意 c , 有 $a + c < b + c$;

(iv) 如果 $a < b, c > 0$, 那么 $ac < bc$.

 **笔记** 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 0.1

复数域不是有序域.

证明 如果 \mathbb{C} 是有序域, 那么因为 $i \neq 0$, i 和 0 之间必有 $i > 0$ 或 $i < 0$ 的关系. 如果 $i > 0$, 则由有序域 (iv) 得 $i \cdot i > i \cdot 0$, 即 $-1 > 0$, 再由 (iii), 两端都加 1 , 即得 $0 > 1$. 另一方面, 从 $-1 > 0$ 还可得 $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$, 即 $1 > 0$, 这和刚才得到的 $0 > 1$ 矛盾. 如果 $i < 0$, 两端都加 $-i$, 得 $0 < -i$, 再由有序域 (iv), 两端乘 $-i$, 得 $-1 > 0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0 > 1$ 和 $0 < 1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域. □

命题 0.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

$$(1) \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}.$$

$$(2) z\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

$$(3) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

$$(4) |z| = |\bar{z}|, \quad |z| = |-z|, \quad |zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$(5) (z+w)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

$$(6) \text{若 } |z| = \lambda|w|, \lambda > 0, \text{ 则 } |z - \lambda^2 w| = \lambda|z - w|.$$

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5) 由命题 0.1(1) 和命题 0.1(2) 可得 $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.

(6) 利用命题 0.1(5) 和命题 0.1(4) 可得

$$\begin{aligned} |z - \lambda^2 w|^2 &= |z|^2 + \lambda^4 |w|^2 - 2\lambda^2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= \lambda^2 |w|^2 + \lambda^4 |w|^2 - 2\lambda^2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= \lambda^2 (\lambda^2 |w|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})) \\ &= \lambda^2 |\lambda w - w|^2 = \lambda^2 |z - w|^2. \end{aligned}$$

□

命题 0.2 (基本不等式)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(1) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, 等号成立当且仅当 $z \in \mathbb{R}$.

$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, 等号成立当且仅当 z 是纯虚数.

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

(3) $|z+w| \leq |z| + |w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $z = tw$.

一般的, 设 z_1, \dots, z_n 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

等号成立当且仅当 $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ 共线且同向.

(4) $|z - w| \geq ||z| - |w||$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $z - w = tw$, 即 $z = (t + 1)w$.

证明

(1) 从 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(2) 设 $z = a + bi$, 则由均值不等式可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) = \frac{a + b}{\sqrt{2}} \leq |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

(3) 利用命题 0.1(5) 和命题 0.2(1), 即得

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

由此即知结论成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, 这等价于 $z\bar{w} \in \mathbb{R}$ 且 $z\bar{w} \geq 0$. 不妨设 $w \neq 0$ ($w = 0$ 时, 等号显然成立), 则当 $z\bar{w} \in (0, +\infty)$ 时, 由于 $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$, 故 $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \in (0, +\infty)$. 令 $t = \left(\frac{z}{w}|w|^2\right) \frac{1}{|w|^2}$, 则 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \geq 0$, 而且 $z = tw$. 反之, 若存在 $t \in (0, +\infty)$, 使得 $z = tw$. 则 $\frac{z}{w} = t \in (0, +\infty)$, 从而 $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \in (0, +\infty)$.
一般的情形, 利用数学归纳法易证.

(4) 当 $|z| = |w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z| > |w|$ 时, 由命题 0.2(3) 可得

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|,$$

移项可得 $|z - w| \geq |z| - |w| = ||z| - |w||$. 由命题 0.2(3) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $z - w = tw$, 即 $z = (t + 1)w$.

当 $|z| < |w|$ 时, 由命题 0.2(3) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|,$$

移项可得 $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z| = ||z| - |w||$. 由命题 0.2(3) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geq 0$, 使得 $w - z = tz$, 即 $w = (t + 1)z$.

□

命题 0.3

设 $z, a \in \mathbb{C}$, 且 $|a| < 1$, 则

$$(1) \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \begin{cases} 1, & |z| = 1, \\ < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

$$(2) 1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

(3) 若还有 $|z| < 1$, 则

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}.$$

证明

(1) 当 $|z| = 1$ 时, 由命题 0.1(5) 可得

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = 1 \iff |z - a|^2 = |1 - \bar{a}z|^2 \iff |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) = 1 + |\bar{a}z|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z}).$$

由 $|z| = 1$ 和 $\operatorname{Re}(\bar{a}z) = \operatorname{Re}(a\bar{z})$ 知上面最后一个式子成立, 故此时 $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = 1$.

当 $|z| \neq 1$ 时, 由命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} |z-a|^2 - |1-\bar{a}z|^2 &= [|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)] - [1 + |\bar{a}z|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z})] \\ &= |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) \\ &= \begin{cases} < 0, & |z| < 1, \\ > 0, & |z| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \begin{cases} < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

故

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \begin{cases} < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

(2) 由命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 &= \frac{|1-\bar{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{[1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)] - [|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)]}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

(3) 由命题 0.1(4) 和命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} \frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} &\leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} \iff ||z| - |a|| \cdot |1-\bar{a}z| \leq (1 - |a||z|)|z-a| \\ &\iff ||z| - |a||^2 \cdot |1-\bar{a}z|^2 \leq (1 - |a||z|)^2 |z-a|^2 \\ &\iff (|z|^2 + |a|^2 - 2|a||z|)(1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)) \leq (1 + |a|^2|z|^2 - 2|a||z|)(|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)) \\ &\iff |a||z|(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) - \operatorname{Re}(\bar{a}z)(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) \leq 0 \\ &\iff (|a||z| - \operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) \leq 0 \iff |a||z| \geq \operatorname{Re}(\bar{a}z). \\ \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} &= \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|} \iff |z-a|(1+|a||z|) \leq |1-\bar{a}z|(|z|+|a|) \\ &\iff |z-a|^2(1+|a||z|)^2 \leq |1-\bar{a}z|^2(|z|+|a|)^2 \\ &\iff (|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 + |a|^2|z|^2 + 2|a||z|) \leq (1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z))(|z|^2 + |a|^2 + 2|a||z|) \\ &\iff |a||z|(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) + \operatorname{Re}(\bar{a}z)(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) \leq 0 \\ &\iff (|a||z| + \operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) \leq 0 \iff |a||z| \geq -\operatorname{Re}(\bar{a}z). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|} \iff -\operatorname{Re}(\bar{a}z) \leq |a||z| \leq \operatorname{Re}(\bar{a}z) \iff |\operatorname{Re}(\bar{a}z)| \leq |a||z|.$$

由命题 0.2(1) 知最后一个不等式成立, 故结论成立. □

定理 0.2

设 $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ 是任意 $2n$ 个复数, 证明复数形式的 **Lagrange 恒等式**:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i|^2.$$

并由此推出 **Cauchy 不等式**

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

等号成立当且仅当 (z_1, z_2, \dots, z_n) 与 $(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n})$ 线性相关, 也当且仅当存在 $k \in \mathbb{C}$, 使得 $z_i = k \overline{w_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 或 $\overline{w_i} = k z_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

♥

证明 记

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix},$$

则

$$|A \overline{A}^T| = \left| \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} & w_1 \\ \overline{z_2} & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{z_n} & w_n \end{pmatrix} \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n z_i w_i \sum_{i=1}^n \overline{z_i} \overline{w_i} \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) \right|. \quad (1)$$

由 **Cauchy-Binet 公式** 可得(1)式左边等于

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left| \begin{pmatrix} z_i & z_j \\ \overline{w_i} & \overline{w_j} \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \overline{z_i} & w_i \\ \overline{z_j} & w_j \end{pmatrix} \right| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}) (\overline{z_i} w_j - \overline{z_j} w_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2.$$

而(1)式右边显然等于

$$\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i w_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \overline{z_i} \overline{w_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2.$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \\ \iff \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2. \end{aligned}$$

由此立得

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

等号成立当且仅当

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2 = |A \overline{A}^T| \iff 1 \geq r(A \overline{A}^T) = r(A).$$

再记 $\alpha = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T, \beta = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n})^T$, 则由上式可知 A 不可逆, 从而 A 的行向量 α^T, β^T 线性相关, 即存在 $k \in \mathbb{C}$, 使得

$$\alpha = k\beta \text{ 或 } \beta = k\alpha \iff z_i = k \overline{w_i} (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 或 } \overline{w_i} = k z_i (i = 1, 2, \dots, n).$$

□

引理 0.1

设 z_1, \dots, z_n 是任意 n 个复数, 证明必有 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集 S , 使得

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|.$$

♥

证明 记 $z_k = |z_k|e^{i\alpha_k}$. 当 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 时, 设 $S(\theta)$ 是所有使得 $\cos(\alpha_k - \theta) > 0$ 的 k 组成的集, 则

$$\left| \sum_{S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k = \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta),$$

其中

$$\cos^+(\alpha_k - \theta) = \begin{cases} \cos(\alpha_k - \theta), & \cos(\alpha_k - \theta) > 0, \\ 0, & \cos(\alpha_k - \theta) \leq 0. \end{cases}$$

选取 θ_0 , 使得最后一个和式最大 (连续函数在闭区间必有最值), 并令 $S = S(\theta_0)$. 这个最大值至少是 $[-\pi, \pi]$ 上和的平均值, 由于对每个 α , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\alpha - \theta) d\theta = \frac{1}{\pi},$$

所以这个平均值就是 $\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|$. 故

$$\left| \sum_S z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta_0)} z_k \right| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

□