

## 0.1 子群与商群

### 定义 0.1

设  $A, B$  是群  $G$  的两个子集, 约定

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}, A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

特别地, 当  $A = \{a\}$  为单点集时, 记  $AB = aB, BA = Ba$ . 当然这些符号对半群与么半群可同样使用.

### 命题 0.1

设有限群  $N_1, N_2, \dots, N_k$  满足

$$N_i \cap N_j = \{1\}, i \neq j.$$

则

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

**证明** 因为  $N_i$  都是有限群, 所以设

$$N_i = \{n_1^i, n_2^i, \dots, n_{|N_i|}^i\}, i = 1, 2, \dots, k.$$

其中  $n_1^i = 1, i = 1, 2, \dots, k$ . 由  $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$  知当  $i \neq j$  时, 有

$$n_s^i \neq n_t^j, \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

于是

$$N_1 N_2 \cdots N_k = \{n_{j_1}^1 n_{j_2}^2 \cdots n_{j_k}^k \mid j_i \in \{1, 2, \dots, |N_i|\}, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

因此直接计算  $N_1 N_2 \cdots N_k$  的元素个数可得

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

若  $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$ , 则当  $i \neq j$  时, 有  $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$ , 故此时有

$$|G| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

□

### 定义 0.2

群  $G$  的非空子集  $H$  若对  $G$  的运算也构成一个群, 则称为  $G$  的**子群**, 记作  $H < G$ .

**注** 显然,  $H = \{1\}$  (1 为  $G$  的么元) 与  $H = G$  均为  $G$  的子群, 称为  $G$  的平凡子群, 其他的子群称为非平凡子群.

### 定理 0.1

设  $H$  是群  $G$  的非空子集, 则下列条件等价:

- (1)  $H$  是  $G$  的子群;
- (2)  $1 \in H$ ; 若  $a \in H$ , 则  $a^{-1} \in H$ ; 若  $a, b \in H$ , 则  $ab \in H$ ;
- (3) 若  $a, b \in H$ , 则  $ab \in H, a^{-1} \in H$ ;
- (4) 若  $a, b \in H$ , 则  $ab^{-1} \in H$ .

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 由  $H$  对  $G$  的乘法构成群知  $a, b \in H$ , 则  $ab \in H$ . 又  $H$  有么元  $1'$ , 即有  $1' \cdot 1' = 1'$ . 设  $1'$  在  $G$  中的逆元为  $1'^{-1}$ , 则有

$$1 = 1' \cdot 1'^{-1} = (1' \cdot 1') \cdot 1'^{-1} = 1',$$

故  $1 \in H$ . 设  $a$  在  $H$  中的逆元为  $a'$ , 于是  $aa' = 1' = 1$ , 即  $a' = a^{-1}$ , 故  $a^{-1} \in H$ . 由此知 (2) 成立, 而且  $H$  的么元是

$G$  的么元.  $a \in H$ ,  $a$  在  $H$  中的逆元与在  $G$  中的逆元一致.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 这是显然的.

(3)  $\Rightarrow$  (4). 若  $a, b \in H$ , 故  $a, b^{-1} \in H$ , 故  $ab^{-1} \in H$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1). 由  $H \neq \emptyset$  知  $\exists a \in H$ , 因而  $1 = aa^{-1} \in H$ . 又由  $1, a \in H$  知  $a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \in H$ . 又若  $a, b \in H$ , 由  $b^{-1} \in H$  得  $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ . 由此可知  $G$  的乘法也是  $H$  的乘法. 对  $H$  而言有么元 1; 对  $a \in H$  有逆元  $a^{-1}$ ; 结合律显然成立. 故  $H$  是  $G$  的子群.

□

### 定理 0.2

设  $A, B, C, H$  是群  $G$  的非空子集,  $g$  是群  $G$  的一个元素, 则

(1)  $A(BC) = (AB)C$ ;

(2)  $gA = gB$  或  $Ag = Bg \iff A = B$ ;

(3)  $H$  是  $G$  的子群  $\iff HH = H, H^{-1} = H \iff H^{-1}H = H$ ;

(4) 如果  $A, B$  是群  $G$  的两个子群, 则  $AB$  也是群  $G$  的子群的充分必要条件是  $AB = BA$ .

♥

### 证明

(1)

(2)

(3)

(4) **必要性:** 设  $AB$  为  $G$  的子群. 对任意的  $ab \in AB$ , 其中  $a \in A, b \in B$ , 有  $(ab)^{-1} \in AB$ . 因而存在  $a_1 \in A, b_1 \in B$ , 使  $a_1b_1 = (ab)^{-1}$ . 从而

$$ab = (a_1b_1)^{-1} = b_1^{-1}a_1^{-1} \in BA,$$

所以

$$AB \subseteq BA.$$

反之, 对任意的  $ba \in BA$ , 其中  $b \in B, a \in A$ , 有  $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in AB$ . 于是

$$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1} \in AB,$$

所以

$$BA \subseteq AB.$$

这就证明了  $AB = BA$ .

**充分性:** 对任意的  $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$ , 其中  $a_i \in A, b_i \in B (i = 1, 2)$ , 由于  $AB = BA$ , 因此由定理 0.2(1) 和定理 0.2(3) 有

$$a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1} \in ABA = A(BA) = A(AB) = (AA)B = AB,$$

由此知  $AB$  是  $G$  的子群.

□

### 命题 0.2

(1) 设  $H$  是群  $G$  的非空有限子集. 证明:  $H$  是  $G$  的子群的充分必要条件是  $H$  关于  $G$  的运算封闭.

(2) 若  $G$  是一个群, 则  $G$  的任意子群的交  $\bigcap_{H < G} H$  也是  $G$  的子群.

(3) 若  $H_1, H_2$  都是群  $G$  的子群且  $H_2 \subseteq H_1$ , 则  $H_2$  也是  $H_1$  的子群.

(4) 设  $H, K$  是群  $G$  的两个子群. 则  $H \cup K$  是  $G$  的子群的充要条件是  $H \subseteq K$  或  $K \subseteq H$ . 并且群  $G$  不能被它的两个真子群所覆盖.

♣

**注** 在这个命题 0.2(4) 中, 群  $G$  可能被它的三个真子群所覆盖. 例如, 群

$$U(8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}.$$

易知

$$H = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \quad J = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \quad K = \{\bar{1}, \bar{7}\}$$

都是  $U(8)$  的真子群, 且  $U(8) = H \cup J \cup K$ .

**证明**

- (1) 必要性显然, 下证充分性. 因为  $H$  关于  $G$  的运算封闭, 所以  $G$  的运算是  $H$  的代数运算. 又因为  $G$  的运算满足结合律, 所以  $H$  的运算也满足结合律.

设  $H = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . 对任意的  $a \in H$ , 记  $Ha = \{a_1a, a_2a, \dots, a_na\}$ , 则  $Ha \subseteq H$ . 于是  $a_ia \neq a_ja (i \neq j)$ . 否则, 由  $a_ia = a_ja (i \neq j)$  可得

$$a_i = a_i(aa^{-1}) = (a_ia)a^{-1} = (a_ja)a^{-1} = a_j(aa^{-1}) = a_j,$$

显然矛盾! 由此推出  $|Ha| = n = |H|$ , 于是  $Ha = H$ . 这样, 对任意的  $a, b \in H$ , 因为  $Ha = H$ , 所以必有  $a_i \in H$ , 使  $a_ia = b$ . 这说明, 对任意的  $a, b \in H$ , 方程  $xa = b$  在  $H$  中必有解. 同理可证, 方程  $ay = b$  在  $H$  中也有解. 从而, 由定理 ?? 知  $H$  为群.

- (2) 设  $I$  为任一 (有限或无限的) 指标集,  $\{H_i \mid i \in I\}$  为群  $G$  的一些子群的集合, 令

$$J = \bigcap_{i \in I} H_i,$$

因为  $e \in H_i (\forall i \in I)$ , 所以  $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$ , 从而  $J$  非空; 对  $\forall a, b \in J$ , 有  $a, b \in H_i (\forall i \in I)$ . 由于  $H_i < G$ , 因此  $ab^{-1} \in H_i (\forall i \in I)$ , 于是  $ab^{-1} \in J$ . 这就证明了  $\bigcap_{i \in I} H_i$  为  $G$  的子群.

- (3) 由  $H_2$  是  $G$  的子群知  $ab^{-1} \in H_2, \forall a, b \in H_2$ . 又  $H_2 \subseteq H_1$ , 故  $H_2$  也是  $H_1$  的子群.  
 (4) 充分性显然, 下证必要性. 设  $H \cup K$  是  $G$  的子群. 如果  $H \subseteq K$ , 则结论成立. 如果  $H \not\subseteq K$ , 则存在  $h \in H$ , 使  $h \notin K$ . 由于  $H \cup K$  为  $G$  的子群, 因此对任意的  $k \in K$ , 有  $hk \in H \cup K$ . 从而必有  $hk \in H$  或  $hk \in K$ . 如果  $hk \in K$ , 则  $h = hk \cdot k^{-1} \in K$ , 这与  $h$  的选取矛盾. 从而必有  $hk \in H$ , 由此推出  $k = h^{-1} \cdot hk \in H$ . 由  $k$  的任意性知  $K \subseteq H$ . 这就证明了必要性.

设  $H, K$  是群  $G$  的两个子群. 如果  $G = H \cup K$ , 由前面所证, 应有  $H \subseteq K$  或  $K \subseteq H$ , 于是有  $G = K$  或  $G = H$ . 这说明  $H, K$  不可能都是  $G$  的真子群. 因此群  $G$  不能被它的两个真子群所覆盖.

□

### 定理 0.3

1. 设  $V$  是数域  $\mathbb{P}$  上的  $n$  维线性空间.  $S_V$  为  $V$  上的全变换群,  $GL(V)$  表示  $V$  上所有可逆线性变换的集合, 则  $GL(V)$  为  $S_V$  的子群, 称为线性空间  $V$  的**一般线性群**.  
 又设  $SL(V)$  为  $V$  上所有行列式等于 1 的线性变换的集合, 则  $SL(V)$  是  $GL(V)$  (同时也是  $S_V$ ) 的子群, 称为**特殊线性群**.
2. 设  $V$  是  $n$  维 Euclid 空间. 以  $O(V)$  表示  $V$  上所有正交变换的集合,  $SO(V)$  表示所有行列式等于 1 的正交变换的集合, 则  $O(V)$  是  $GL(V)$  的子群,  $SO(V)$  是  $O(V)$  的子群.  $O(V)$  称为  $V$  的**正交变换群**, 简称**正交群**,  $SO(V)$  称为**转动群** (或**特殊正交变换群**、**特殊正交群**).

♡

**注** 将上述  $S_V$  换成数域  $\mathbb{P}$  上的全体方阵构成的乘法群, 线性变换换成方阵, 结论也成立.

**证明**

□

### 定义 0.3

设  $H$  是群  $G$  的子群, 又  $a \in G$ . 集合  $aH$  与  $Ha$  分别称为以  $a$  为代表的  $H$  的**左陪集**与**右陪集**.

♣

**定理 0.4**

设  $H$  是群  $G$  的子群, 则由

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H$$

所确定的  $G$  中的关系  $R$  是一个等价关系, 并且  $a$  所在的等价类为  $aH$ , 故  $H$  的左陪集族  $\{aH : a \in G\}$  (集合无相同元素) 是  $G$  的一个分划. 即

$$G = \bigsqcup_{a \in G} aH,$$

其中  $a$  取遍不同  $H$  的左陪集的代表元.



**证明** 由  $a^{-1}a \in H$  知  $aRa (\forall a \in G)$ . 又设  $aRb$ , 即  $a^{-1}b \in H$ , 故  $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$ , 即  $bRa$ . 再设  $aRb, cRb$ , 即  $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$ , 故  $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$ , 即  $aRc$ . 这样知  $R$  是等价关系. 又由  $b = a(a^{-1}b)$  知

$$aRb \iff a^{-1}b \in H \iff b \in aH,$$

故  $a$  所在的等价类为  $aH$ . 由定理 1.18 知  $\{aH : a \in G\}$  为  $G$  的一个分划.

**定理 0.5**

设  $H$  是群  $G$  的非空子群,  $a, b \in G$ , 则

- (1)  $a \in aH$ ;
- (2)  $aH = H$  的充分必要条件是  $a \in H$ ;
- (3)  $aH$  为子群的充分必要条件是  $a \in H$ ;
- (4)  $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$  或  $b^{-1}a \in H \iff aH \cap bH \neq \emptyset$ ;
- (5) 若  $H$  还是有限群, 则  $|aH| = |bH| = |Ha| = |Hb| = |aHb|$ .



**证明**

- (1)  $a = ae \in aH$ .
- (2) 如果  $aH = H$ , 因  $a \in aH$ , 所以  $a \in H$ .  
反之, 如果  $a \in H$ , 则  $a^{-1} \in H$ . 从而

$$aH \subseteq H \cdot H = H, \quad H = (aa^{-1})H = a(a^{-1}H) \subseteq aH,$$

所以  $aH = H$ .

- (3) 设  $aH$  为子群. 因为  $a \in aH$ , 所以  $a^{-1} \in aH$ , 于是  $e = aa^{-1} \in aH$ . 从而存在  $h \in H$ , 使  $e = ah$ . 所以  $a = eh^{-1} = h^{-1} \in H$ .

另一方面, 如果  $a \in H$ , 则  $aH = H$  为子群.

- (4) 如果  $aH = bH$ , 则

$$a^{-1}bH = a^{-1}aH = H,$$

从而由 (2) 知  $a^{-1}b \in H$ .

反之, 如果  $a^{-1}b \in H$ , 则又由 (2) 得  $a^{-1}bH = H$ , 于是

$$aH = a(a^{-1}bH) = (aa^{-1})bH = ebH = bH.$$

故  $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$ . 交换  $a, b$  位置即得  $bH = aH \iff b^{-1}a \in H$ .

若  $aH = bH$ , 则显然有  $aH \cap bH \neq \emptyset$ . 假设  $aH \cap bH \neq \emptyset$ . 任取  $g \in aH \cap bH$ , 则存在  $h_1, h_2 \in H$ , 使

$$ah_1 = g = bh_2.$$

从而

$$aH = a(h_1H) = (ah_1)H = (bh_2)H = b(h_2H) = bH.$$

故  $aH = bH \iff aH \cap bH \neq \emptyset$ .

(5) 考察映射

$$\sigma : aH \rightarrow bH,$$

$$ah \mapsto bh,$$

易知  $\sigma$  为一一对应, 所以  $|aH| = |bH|$ . 其他同理可证.

□

#### 定义 0.4

设  $H$  是群  $G$  的子群, 由定理 0.4 定义  $G$  中的等价关系  $R$  为

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H.$$

将  $G$  对等价关系  $R$  的商集合, 即以左陪集  $aH, a \in G$  为元素的集合记为  $G/H = \{aH : a \in G\}$ , 称为  $G$  对  $H$  的左陪集空间.  $G/H$  中元素个数  $|G/H|$  称为  $H$  在  $G$  中的指数, 记为  $[G : H]$ . 相应可定义右陪集空间.

♣

注  $\{1\}$  作为  $G$  的子群, 在  $G$  中指数显然为  $|G|$ . 故也记  $|G| = [G : 1]$ .

例题 0.1 设  $V$  是数域  $\mathbb{P}$  上的  $n$  维线性空间,  $GL(V)$  有子群  $SL(V)$ . 在  $V$  中取定一组基, 任何一个线性变换由它在这组基下的矩阵完全确定, 可把它们等同起来.  $\forall \lambda \in \mathbb{P}, \lambda \neq 0$ , 令  $D(\lambda) = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ , 于是  $D(\lambda) \in GL(V)$ , 对于  $A \in GL(V)$  有

$$ASL(V) = D(\lambda)SL(V) \iff \det A = \lambda.$$

于是

$$GL(V) = \bigcup_{\lambda \neq 0} D(\lambda)SL(V),$$

因而

$$[GL(V) : SL(V)] = +\infty.$$

证明

□

例题 0.2 设  $V$  是  $n$  维 Euclid 空间. 由  $A \in O(V)$  有  $\det A = \pm 1$ , 令  $D(\lambda) = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ , 于是

$$O(V) = SO(V) \bigcup D(-1)SO(V), \quad [O(V) : SO(V)] = 2.$$

证明

□

#### 定理 0.6 (Lagrange 定理)

设  $H$  是有限群  $G$  的子群, 记  $1$  为  $G, H$  的么元, 则有

$$[G : 1] = [G : H][H : 1] \quad (1)$$

因而子群  $H$  的阶是群  $G$  的阶的因子.

♥

注 这个结论对无限群  $G$  也正确, 此时等式两边都是  $+\infty$ .

证明 设  $a \in G$ . 显然, 映射  $h \rightarrow ah$  是  $H$  到  $aH$  上的一一对应, 因而  $|aH| = |H| = [H : 1]$ . 又由定理 0.4 知  $G = \bigcup_{a \in G} aH$  为不相交的并,  $\{aH : a \in G\}$  的不同左陪集个数为  $[G : H]$ , 故式 (1) 成立.

□

#### 定理 0.7

设  $H$  是群  $G$  的子群, 则  $G$  中由

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H$$

所定义的关系  $R$  为同余关系的充分必要条件是

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H.$$

此时称  $H$  为  $G$  的**正规子群**, 记为  $H \triangleleft G$ . 同时, 商集合  $G/H$  对同余关系  $R$  导出的运算

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G$$

也构成一个群, 称为  $G$  对  $H$  的**商群**. 商群  $G/H$  的么元为  $1 \cdot H = H$ . 为方便计, 常将商群  $G/H$  中元素记为  $\bar{g} = gH$ . 有时也将商群  $G/H$  记作  $\frac{G}{H}$ . 并且  $H$  为  $G/H$  的么元,  $aH$  的逆元为  $a^{-1}H$ .



**证明** 设  $R$  为同余关系. 又  $g \in G, h \in H$ , 于是有

$$gRgh, \quad g^{-1}Rg^{-1},$$

因而  $gg^{-1}R(ghg^{-1})$ , 即  $1Rghg^{-1}$ , 亦即  $ghg^{-1} \in H$ .

反之, 设  $\forall g \in G, h \in H$  有  $ghg^{-1} \in H$ . 设  $aRb, cRd$ , 则  $a^{-1}b, c^{-1}d \in H$ , 即  $\exists h_1, h_2 \in H$ , 使  $b = ah_1, d = ch_2$ , 从而  $c^{-1} = h_2d^{-1}$ . 因而  $(ac)^{-1}(bd) = c^{-1}a^{-1}ah_1d = h_2(d^{-1}h_1d) \in H$ , 则有  $(ac)R(bd)$ , 即  $R$  为同余关系.

设  $R$  为同余关系. 因  $a$  所在等价类为  $aH$ , 由**定理 1.20** 知  $G/H$  中的乘法为

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G. \quad (2)$$

显然有  $(aH \cdot bH)cH = abcH = aH(bH \cdot cH)$ ,  $1H \cdot aH = aH, a^{-1}H \cdot aH = 1 \cdot H$ , 故  $G/H$  为群.



### 推论 0.1

- (1) 若  $G$  为有限群,  $H \triangleleft G$ , 商群  $G/H$  的阶  $[G/H : H] = [G : H] = \frac{[G : 1]}{[H : 1]}$ .
- (2) 若  $G$  为无限群,  $H \triangleleft G$ , 商群  $G/H$  的阶  $[G/H : H] = [G : H]$ .



**证明** 这是**Lagrange** 定理的直接推论.



### 定理 0.8

设  $H$  是群  $G$  的子群, 则下列条件等价:

- (1)  $H \triangleleft G$ ;
- (2) 对  $\forall a, b \in G$ , 如果  $ab \in H$ , 则  $ba \in H$ ;
- (3)  $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H \iff gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$ ;
- (4)  $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$ ;
- (5)  $gH = Hg, \forall g \in G \iff GH = HG$ ;
- (6)  $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \forall g_1, g_2 \in G$ .



**注** 由这个定理可知一个群的任意正规子群都是 **Abel** 群.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 设  $H$  是  $G$  的正规子群, 则对任意的  $a, b \in G$ , 如果  $ab \in H$ , 则

$$ba = b(ab)b^{-1} \in H.$$

(2)  $\Rightarrow$  (3). 对  $\forall a, b \in G$ , 如果由  $ab \in H$ , 可推出  $ba \in H$ , 则对任意的  $a \in G, h \in H$ , 由于  $a^{-1}(ah) = h \in H$ , 因此

$$aha^{-1} = (ah)a^{-1} \in H,$$

(3)  $\Rightarrow$  (4). 对  $\forall g \in G$ , 由  $gHg^{-1} \subseteq H$  知, 对  $\forall h \in H$ , 有  $g^{-1}hg = (g^{-1})^{-1}hg^{-1} \in H$ . 从而  $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$ . 故由  $h$  的任意性知  $H \subseteq gHg^{-1}$ . 因此  $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5).  $\forall g \in G, h \in H$  有  $gh = ghg^{-1}g \in Hg, hg = gg^{-1}hg \in gH$ , 故  $gH = Hg$ .

(5)  $\Rightarrow$  (6). 设  $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2, h \in H$ . 由  $gH = Hg$  知  $\exists h'_1, h' \in H$ , 使  $h_1g_2 = g_2h'_1, g_2h = h'g_2$ . 于是

$g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h_1' h_2 \in g_1 g_2 H, g_1 g_2 h = g_1 h' g_2 \cdot 1 \in g_1 H \cdot g_2 H$ , 故  $g_1 H \cdot g_2 H = g_1 g_2 H$ .

(6)  $\Rightarrow$  (1). 设  $g \in G, h \in H$ , 故有  $ghg^{-1} \in gHg^{-1}H = gg^{-1}H = H$ , 则  $H \triangleleft G$ .

□

### 命题 0.3

- (1) Abel 群  $G$  的任一子群  $H$  都是正规子群, 商群  $G/H$  也是 Abel 群.
- (2) 若  $H$  是群  $G$  的子群且  $H \supseteq N, N \triangleleft G$ , 则  $N \triangleleft H$ .
- (3) 设  $H$  和  $N$  分别是群  $G$  的子群和正规子群. 证明:  $HN$  是  $G$  的子群.
- (4) 若  $G$  是一个群, 则  $G$  的任意正规子群的交  $\bigcap_{H \triangleleft G} H \triangleleft G$ .
- (5) 设  $G$  是一个群, 且  $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$ , 则  $N_1 N_2 \cdots N_k \triangleleft G$ .
- (6) 设  $G$  是一个群,  $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$ , 且  $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$ , 则对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

并且

$$N_j \subseteq C_G(N_i) = \{g \in G \mid gn_i = n_i g, \forall n_i \in N_i\}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

### 证明

(1) 因为

$$aH = \{ah \mid h \in H\} = \{ha \mid h \in H\} = Ha, \quad \forall a \in G,$$

所以  $H$  是  $G$  的正规子群.

对  $\forall g_1 H, g_2 H \in G/H$ , 由定理 0.8(6) 有

$$g_1 H g_2 H = g_1 g_2 H = g_2 g_1 H = g_2 H g_1 H.$$

故  $G/H$  也是 Abel 群.

(2) 由命题 0.2(3) 知  $N$  是  $H$  的子群. 又由  $N \triangleleft G$  知

$$gn g^{-1} \in N \subseteq H, \quad \forall n \in N, g \in H.$$

故  $N \triangleleft H$ .

(3) 由于  $N$  是  $G$  的正规子群, 因此对任意的  $h \in H$ , 有  $hN = Nh$ . 由此推出,  $HN = NH$ , 从而由定理 0.2(4) 知,  $HN$  为  $G$  的子群.

(4) 设  $I$  为任意指标集,  $H_i \triangleleft G, \forall i \in I$ . 则对  $\forall g \in G$ , 有

$$gH_i g^{-1} \subseteq H_i, \quad \forall i \in I.$$

对  $\forall h \in \bigcap_{i \in I} H_i$ , 有  $h \in H_i, \forall i \in I$ . 从而由上式可得

$$ghg^{-1} \in H_i, \quad \forall i \in I \Rightarrow ghg^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i.$$

进而  $g \bigcap_{i \in I} H_i g^{-1} \subseteq \bigcap_{i \in I} H_i$ . 故由定理 0.8(2) 知  $\bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$ .

(5) 由  $N_i \triangleleft G, i = 1, 2, \dots, k$  知

$$gn_i g^{-1} \in N_i, \quad \forall n_i \in N_i, g \in G.$$

于是对  $\forall n_1 n_2 \cdots n_k \in N_1 N_2 \cdots N_k, g \in G$ , 有

$$g(n_1 n_2 \cdots n_k)g^{-1} = (gn_1 g^{-1})(gn_2 g^{-1}) \cdots (gn_k g^{-1}) \in N_1 N_2 \cdots N_k.$$

故  $N_1 N_2 \cdots N_k \triangleleft G$ .

(6) 证法一: 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 由  $N_i, N_j \triangleleft G$  知

$$gN_j = N_j g, \quad g^{-1}N_i = N_i g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

从而对  $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$ , 存在  $n'_j \in N_j, n'_i \in N_i$ , 使得

$$\begin{aligned} n_i n_j &= n'_j n_i, & n_i^{-1} n_j^{-1} &= n_j^{-1} n_i^{-1}, \\ n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} &= n'_j n_i n_i^{-1} n_j^{-1} = n'_j n_j^{-1} \in N_j, \\ n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} &= n_i n_j n_j^{-1} n_i^{-1} = n_i n_i^{-1} \in N_i. \end{aligned}$$

故  $n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} \in N_i \cap N_j = \{1\}$ . 因此

$$n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} = 1 \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

进而

$$n_j \in C_G(N_i), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

再由  $n_j$  的任意性知

$$N_j \subseteq C_G(N_i), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

**证法二:** 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 由引理????知  $[N_i, N_j] \subseteq N_i \cap N_j = \{1\}$ , 故  $[N_i, N_j] = \{1\}$ . 因此对  $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$ , 有

$$1 = [n_i, n_j] = n_i^{-1} n_j^{-1} n_i n_j \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

并且由引理????知

$$N_j \subseteq C_G(N_i), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

□

**例题 0.3** 将商群  $G/H$  中元素记为  $\bar{g} = gH$ , 则

- (1)  $SL(V) \triangleleft GL(V)$ ,  $GL(V)/SL(V) = \{\overline{D(\lambda)} | \lambda \neq 0\}$  且  $\overline{D(\lambda)D(\mu)} = \overline{D(\lambda\mu)}$ ;
- (2)  $SO(V) \triangleleft O(V)$ ,  $O(V)/SO(V) = \{\overline{D(1)}, \overline{D(-1)}\}$ ;
- (3)  $A_n \triangleleft S_n$ ,  $S_n/A_n = \{\bar{1}, \bar{\sigma} | \sigma \text{ 奇置换}\}$  且

$$\bar{1} \cdot \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \cdot \bar{1} = \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} = \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}.$$

- (4) 对任意的  $a \in G$ , 由已知条件知, 存在  $b \in G$ , 使  $aH = Hb$ , 则  $a \in aH = Hb$ , 从而  $a \in Ha \cap Hb$ , 即  $Ha \cap Hb$  非空, 因此  $Ha = Hb$ , 于是  $aH = Ha$ . 所以由定理 0.8 知  $H$  是  $G$  的正规子群.

**证明**

□

### 定义 0.5 (极大正规子群)

设  $G$  是一个群,  $H \triangleleft G$ , 如果  $H$  满足以下两个条件:

- (1)  $H \subset G$ , 即  $H \neq G$ .
- (2) 若  $K \triangleleft G$  且  $H \subseteq K \subseteq G$ , 则必有  $K = H$  或  $K = G$ .

则称  $H$  是  $G$  的极大正规子群.

♣

### 定义 0.6

若半群  $S$  的非空子集  $S_1$  对  $S$  的运算也是半群, 则称  $S_1$  为  $S$  的子半群.

若么半群  $M$  的子集  $Q$  对  $M$  的运算也是么半群且  $M$  的么元  $1 \in Q$ , 则称  $Q$  为  $M$  的子么半群.

♣

### 定理 0.9

如果关系  $\sim$  是么半群 (或半群)  $G$  中的同余关系, 那么商集合  $G/\sim$  对导出的运算 (见定理 1.20) 也是么半群 (或半群), 称之为商么半群 (或商半群).

若  $G$  是交换么半群 (或交换半群), 则商集合  $G/\sim$  对导出的运算也是交换么半群 (或交换半群).

♡

证明

□