0.1 开集、闭集和紧集

定义 0.1

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是一平面点集,$\mathbb{C}$ 中的点对 E 而言可以分为三类:
(i) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E$, 就称 a 为 E 的**内点**;
(ii) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E^c$, 就称 a 为 E 的外点, 这里,E^c 是由所有不属于 E 的点构成的集, 称为 E 的**余集**或**补集**;
(iii) 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中既有 E 的点, 也有 E^c 的点, 就称 a 为 E 的**边界点**.
E 的内点的全体称为 E 的**内部**, 记为 E°;
E 的外点的全体称为 E 的**外部**, 它就是 E 的余集 E^c 的内部, 即 $(E^c)^\circ$;
E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E.

笔记 由上面的定义可知, 集 E 把复平面分成三个互不相交的部分:$\mathbb{C} = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$, 即

$$(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ. \tag{1}$$

例题 0.1 邻域的内部和边界 $B(a,r)$ 中的所有点都是它的内点, 即 $B(a,r) = (B(a,r))^\circ$,$B(a,r)$ 的边界 $\partial B = \{z : |z-a| = r\}$, 即是圆周, 满足条件 $|z-a| > r$ 的点 z 都是 $B(a,r)$ 的外点.

定义 0.2

如果 $E \subseteq \mathbb{C}$ 的所有点都是它的内点, 即 $E = E^\circ$, 就称 E 为**开集**.
如果 $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ 是开集, 就称 E 为**闭集**.

例题 0.2 设 $a \in \mathbb{C}$, 则在 $\mathbb{C}$ 中,$B(a,r)$ 是开集, 闭圆盘 $\{z : |z-a| \leqslant r\}$ 是闭集,$B(a,r)$ 和它的上半圆周的并集既不是开集也不是闭集.

定义 0.3

设 $E \subseteq \mathbb{C}$,$a \in \mathbb{C}$.
点 a 称为集 E 的**极限点**或**聚点**, 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中除 a 外总有 E 中的点.
集 E 的所有极限点构成的集称为 E 的**导集**, 记为 E'.
E 中不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**.
E 和它的导集 E' 的并称为 E 的**闭包**, 记为 $\bar{E}$, 即 $\bar{E} = E \cup E'$.

命题 0.1

对于任意集 $E \subseteq \mathbb{C}$, 有
(i) $a \in \bar{E}$ 的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$B(a,r) \cap E \neq \varnothing, \forall r > 0. \tag{2}$$

这里,$\varnothing$ 表示空集;
(ii) $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$,$\overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

证明 (i) 若 $a \in \bar{E}$, 则 $a \in E$ 或 $a \in E'$, 不论何者发生, 总有 $B(a,r) \cap E \neq \varnothing$. 反之, 若等式(2)成立, 这说明 a 或是 E 的极限点, 或是 E 的孤立点, 因而 $a \in \bar{E}$.

(ii) 由 (i) 知,$a \in (\bar{E})^c$ 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,r) \cap E = \varnothing$, 这说明 a 是 E^c 的内点, 即 $a \in (E^c)^\circ$, 因而 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$. 再看第二个等式,$a \in (E^\circ)^c$ 意味着 a 不是 E 的内点, 即 a 是 E 的外点或边界点, 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $B(a,r) \cap E^c \neq \varnothing$, 由 (i) 知 $a \in \overline{E^c}$. 因而 $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

□

命题 0.2

设 $E \subseteq \mathbb{C}$, 则

(i) E° 是开集,∂E 和 $\bar{E}$ 是闭集;

(ii) E 是闭集的充要条件是 $E = \bar{E}$;

(iii) E 是闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

证明 (i) 任取 $a \in E^\circ$, 则由定义知道, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \subset E$. 显然,$B(a,\varepsilon)$ 中的每一点都是 E 的内点, 因而 $B(a,\varepsilon) \subset E^\circ$, 即 a 是 E° 的内点. 由于 a 是任意取的, 所以 E° 是开集. 由刚才所证,E° 和 $(E^c)^\circ$ 都是开集, 两个开集的并当然也是开集, 由等式(1)知 $(\partial E)^c$ 是开集, 因而 ∂E 是闭集. 由于 $(E^c)^\circ$ 是开集, 由命题 0.1(ii)知,$(\bar{E})^c$ 是开集, 所以 $\bar{E}$ 是闭集.

(ii) 如果 $E = \bar{E}$, 则由 (i) 知 $\bar{E}$ 是闭集, 所以 E 是闭集. 反之, 如果 E 是闭集, 那么 E^c 是开集, 因而 $E^c = (E^c)^\circ$. 另外, 由命题 0.1(ii)得 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$, 因而 $E^c = (\bar{E})^c$, 即 $E = \bar{E}$.

(iii) 从 (ii) 立刻可得.

□

定义 0.4

点集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 的**直径**定义为 E 中任意两点间距离的上确界, 记为 $\operatorname{diam}E$, 即

$$\operatorname{diam}E = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

定理 0.1 (Cantor 闭集套定理)

若非空闭集序列 $\{F_n\} \subseteq \mathbb{C}$ 满足

(i) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$;

(ii) $\operatorname{diam}F_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时),

那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 是一个单点集.

笔记 这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

证明 在每一个 F_n 中任取一点 z_n, 我们证明 $\{z_n\}$ 是一个 Cauchy 点列. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}F_n = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N, 使得 $\operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 令取 $m, n > N$, 由条件 (i),$z_m, z_n \in F_N$, 所以 $|z_n - z_m| \leqslant \operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 因而 $\{z_n\}$ 是一 Cauchy 序列, 设其收敛于 z_0. 我们证明 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 事实上, 任取 F_k, 则当 $n > k$ 时,z_n 便全部落入 F_k 中, 因为 F_k 是闭的, 由命题 0.2(iii),$\{z_n\}$ 的极限 $z_0 \in F_k$, 所以 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 如果还有另一点 z_1 也属于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 那么必有 $|z_0 - z_1| \leqslant \operatorname{diam}F_n \to 0(n \to \infty)$, 因而 $z_1 = z_0$.

□

定义 0.5

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是一个集,$\mathscr{F} = \{G\}$ 是一个**开集族**, 即 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素都是开集.

如果 E 中每一点至少属于 $\mathscr{F}$ 中的一个开集, 就说 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

例题 0.3 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是任一点集,ε 是一个给定的正数, 那么

$$\mathscr{F} = \{B(a,\varepsilon) : a \in E\}$$

便是 E 的一个开覆盖.

定义 0.6

我们说点集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 具有**有限覆盖性质**, 是指从 E 的任一个开覆盖中必能选出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$, 使得这有限个开集的并就能覆盖 E, 即

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j.$$

具有有限覆盖性质的集称为**紧集**.

♣

例题 0.4 空集和有限集都是紧集, 但单位圆盘 $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 却不是紧集, 因为 $G_n = \left\{z : |z| < 1 - \dfrac{1}{n}\right\}, n = 2, 3, \cdots$, 这一串同心圆构成 $B(0,1)$ 的一个开覆盖, 但从中找不出有限个集覆盖 $B(0,1)$.

定义 0.7

集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 称为是**有界的**, 如果存在 $R > 0$, 使得 $E \subset B(0, R)$.

♣

定理 0.2 (Heine-Borel 定理)

在 $\mathbb{C}$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是有界闭集; 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是闭集.

♡

证明 我们先证明, 如果 E 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的闭集或 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集, 那么 E 是紧集, 即从 E 的任一开覆盖 $\mathscr{F}$ 中, 可以选出有限个开集覆盖 E. 先设 E 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的闭集, 如果 $z = \infty \notin E$, 则因 E 是闭集, 有 $E = \bar{E}$, 即 $\infty \notin \bar{E}$, 由命题 0.1(i), 存在 $R > 0$, 使得 $B(\infty, R) \cap E = \varnothing$, 即 $E \subset \overline{B(0, R)}$, 因而 E 是有界闭集. 如果 $z = \infty \in E$, 由开覆盖的定义,∞ 属于 $\mathscr{F}$ 中的某一个开集, 而 E 在这个开集之外的部分是一有界闭集, 只要再证明这个有界闭集的部分被有限个开集覆盖即可. 总之, 不论何种情况发生, 只要考虑 E 是有界闭集的情形就够了.

现设 E 是有界闭集, 如果它不是紧集, 那么从 E 的开覆盖 $\mathscr{F}$ 中不能取出有限个开集来覆盖 E. 因为 E 是有界的, 它一定包含在一个充分大的闭正方形 Q 中:

$$Q = \{(x, y) : |x| \leqslant M, |y| \leqslant M\}.$$

把这个正方形分成相等的四个小正方形, 则其中必有一个小正方形 Q_1, 使得 $Q_1 \cap E$ 是有界闭集且不具有有限覆盖性质. 再把 Q_1 分成四个相等的小正方形, 其中必有一个小正方形 Q_2 具有上述同样的性质. 这个过程可以无限地进行下去, 得到一列闭正方形 $\{Q_n\}$. 如果记 $F_n = Q_n \cap E$, 那么 F_n 满足下列条件:

(i) F_n 是有界闭集;

(ii) $F_n \supset F_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$;

(iii) 不能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集来覆盖 F_n;

(iv) 当 $n \to \infty$ 时,$\operatorname{diam} F_n \leqslant \dfrac{M}{2^n}\sqrt{2} \to 0$.

由 (i),(ii),(iv) 知道 $\{F_n\}$ 满足 Cantor 闭集套定理的条件, 因而存在复数 z_0, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{z_0\}$. 由于 $z_0 \in F_n \subset E$, 故在 $\mathscr{F}$ 中必有一个开集 G_0, 使得 $z_0 \in G_0$. 由于 z_0 是 G_0 的内点, 故有 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$. 由于 $\operatorname{diam} F_n \to 0$, 故当 n 充分大时 $F_n \subset B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$, 这就是说 G_0 覆盖了 F_n, 这与 (iii) 矛盾. 因而 E 是紧集.

现在证明必要性. 只要对扩充平面的情形来证明就够了, 因为如果一个集对扩充平面是闭的, 它又不包含无穷远点, 那么它必然是有界的. 设 E 是一个紧集, 我们要证明它是闭集, 只要证明 E^c 是开集即可. 为此, 任取 $a \in E^c$, 只要证明 a 是 E^c 的内点就行了. 取这样的开集族 $\mathscr{F}$: 凡是闭包不包含 a 点的开集都属于 $\mathscr{F}$. 因为 $a \in E^c$, 因此对 E 中每一点 z, 都能找到它的邻域 $B(z, \varepsilon)$, 使得 $a \notin \overline{B(z, \varepsilon)}$, 所以 $B(z, \varepsilon) \in \mathscr{F}$. 这就是说,$\mathscr{F}$ 是 E 的一个开覆盖. 由于 E 是紧集, 故能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$, 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$. 但 $a \notin \overline{G_j}, j = 1, \cdots, n$, 所以 $a \in \bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c$. 显

然,$\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$ 是一个开集, 于是由开集和内点的定义可知, 存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$. 而且从命题 0.1(ii)得

$$B(a,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c = \bigcap_{j=1}^{n}(G_j^c)^\circ \subset \bigcap_{j=1}^{n} G_j^c = \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\right)^c \subset E^c,$$

这就证明了 a 是 E^c 的内点, 即 E^c 是开集.

□

定义 0.8

设 $E, F \subseteq \mathbb{C}$ 是任意两个集,E,F 间的距离定义为

$$d(E,F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\}.$$

如果 $E = \{a\}$ 是由一个点所构成的集, 那么 a 和 F 间的距离为

$$d(a,F) = \inf\{|a - z| : z \in F\}.$$

♣

命题 0.3

设 $E, F \subseteq \mathbb{C}$ 是任意两个集.

(1) 如果 F 是闭集,$a \notin F$, 那么 $d(a,F) > 0$.

(2) 如果 E 是有限点集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 当然也有 $d(E,F) > 0$.

♠

证明

(1) 此时必有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \cap F = \varnothing$, 因而 $d(a,F) \geqslant \varepsilon > 0$.

(2)

□

定理 0.3

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是紧集,$F \subseteq \mathbb{C}$ 是闭集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 则 $d(E,F) > 0$.

♡

注 若 E 是无穷闭集,F 也是闭集, 但 E 不是紧集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 这时 $d(E,F) > 0$ 未必成立.

例如,E 是整个实轴,$F = \{z = x + \mathrm{i}e^x : -\infty < x < \infty\}$, 则 E 和 F 都是 $\mathbb{C}$ 中的闭集, 而且 $E \cap F = \varnothing$, 但 $d(E,F) = 0$.

笔记 从这个定理可以看出, 紧集之所以重要, 在于它保留了大部分有限集的性质.

证明 证法一:任取 $a \in E$, 则 $a \notin F$, 所以 $d(a,F) > 0$. 今以 a 为中心、$\frac{1}{2}d(a,F)$ 为半径作一圆盘, 当 a 跑遍集 E 时, 这些圆盘所组成的开集族就是 E 的一个开覆盖. 因为 E 是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$ 来覆盖 E, 其中,$G_j = B\left(a_j, \frac{1}{2}d(a_j,F)\right)$,$j = 1, \cdots, n$. 记

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}d(a_1,F), \cdots, \frac{1}{2}d(a_n,F)\right\}.$$

今任取 $z_1 \in E$, 则必有某个 G_j, 使得 $z_1 \in G_j$, 因而

$$|z_1 - a_j| < \frac{1}{2}d(a_j,F).$$

任取 $z_2 \in F$, 当然 $|z_2 - a_j| \geqslant d(a_j,F)$, 于是

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_2 - a_j| - |z_1 - a_j| \geqslant d(a_j,F) - \frac{1}{2}d(a_j,F) = \frac{1}{2}d(a_j,F) \geqslant \delta.$$

所以

$$d(E,F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\} \geqslant \delta > 0.$$

证法二:定义函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为 $f(z) = d(z,F) := \inf_{w \in F}|z - w|$. 因 F 是闭集, 故 $z \in F$ 当且仅当 $f(z) = 0$. 在不等

式

$$|z_1 - w| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - w|, \quad |z_2 - w| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1 - w|,$$

中关于 $w \in F$ 取下确界得

$$f(z_1) \leqslant f(z_2) + |z_1 - z_2|, \quad f(z_2) \leqslant f(z_1) + |z_1 - z_2|.$$

因此

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

这说明 f 是连续函数. 由定理**??**知, f 限制在紧集 E 上可取到最小值 $f(z_0) = d(E, F)$, $z_0 \in E$. 因 E 与 F 不交, 故 $z_0 \notin F$. 又因为 $z \in F$ 当且仅当 $f(z) = 0$, 所以 $f(z_0) > 0$.

□

定理 0.4 (Bolzano-Weierstrass 定理)

$\mathbb{C}$ 中任一无穷点集至少有一个极限点.

♡

注 这个定理也可以用证明Cantor 闭集套定理的方法给出另一个证明.

证明 设 E 是一个无穷点集, 如果 E 是无界集, 那么无穷远点便是它的极限点. 今设 E 是有界集, 如果它没有极限点, 那么它是一个闭集. 任取 $z \in E$, 由于它不是 E 的极限点, 故必存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z, \varepsilon)$ 中除 z 外不再有 E 中的点.z 取遍整个 E, 由这种 $B(z, \varepsilon)$ 构成的开集族便是 E 的一个开覆盖, 由Heine-Borel 定理, 能从中选出有限个来覆盖 E. 因为每个开集只包含 E 的一个点, 这说明 E 是一个有限集, 与 E 是无穷点集的假定矛盾, 因而 E 必有极限点.

□