0.1 内积的表示和正交基

定义 0.1 (Gram 矩阵和度量矩阵)

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是内积空间的一个向量组, 矩阵

$$G=\begin{pmatrix}(\beta_1,\beta_1) & \cdots & (\beta_1,\beta_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\beta_n,\beta_1) & \cdots & (\beta_n,\beta_n)\end{pmatrix}$$

称为向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的 **Gram 矩阵**. 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是一组基, 则将 Gram 矩阵称为该基的**度量矩阵**. ♣

命题 0.1 (Gram 阵的性质)

1. 设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是欧氏空间 V 中 m 个向量, 则向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的 Gram 矩阵为

$$G=G(v_1,v_2,\cdots,v_m)=\begin{pmatrix}(v_1,v_1) & (v_1,v_2) & \cdots & (v_1,v_m)\\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) & \cdots & (v_2,v_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (v_m,v_1) & (v_m,v_2) & \cdots & (v_m,v_m)\end{pmatrix}.$$

求证:

(1) G 是半正定实对称矩阵;

(2) 向量组 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关当且仅当 G 是正定阵, 也当且仅当 G 是可逆矩阵.

(3) 在欧氏空间 V 的标准内积下, 有 $G=A'A$, 其中 $A=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$.

2. 设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是酉空间 V 中 m 个向量, 则向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的 Gram 矩阵为

$$G=G(v_1,v_2,\cdots,v_m)=\begin{pmatrix}(v_1,v_1) & (v_1,v_2) & \cdots & (v_1,v_m)\\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) & \cdots & (v_2,v_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (v_m,v_1) & (v_m,v_2) & \cdots & (v_m,v_m)\end{pmatrix}.$$

求证:

(1) G 是半正定 Hermite 矩阵;

(2) 向量组 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关当且仅当 G 是正定阵, 也当且仅当 G 是可逆矩阵.

(3) 在酉空间 V 的标准内积下, 有 $G=A'\overline{A}$, 其中 $A=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$. ♠

注 向量组 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的 Gram 矩阵的几何意义是, 这 m 个向量张成的平行 $2m$ 面体的体积等于其 Gram 矩阵的行列式的算术平方根（证明可参考命题**??**）:

$$V(v_1,v_2,\cdots,v_m)=|G(v_1,v_2,\cdots,v_m)|^{\frac{1}{2}}.$$

特别地, 设 $V=\mathbb{R}^n$（取标准内积）,n 阶实矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为其列分块, 则 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=A'A$, 于是 $V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=|A'A|^{\frac{1}{2}}=\mathrm{abs}(|A|)$. 因此,$n$ 阶行列式的绝对值等于其 n 个列向量张成的平行 $2n$ 面体的体积, 这就是 n 阶行列式的几何意义.

证明

1. (1) 由欧氏空间内积的对称性可知 G 是实对称矩阵. 对任意的实列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)'$, 令 $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m$, 则有

$$\alpha'G\alpha=\sum_{i,j=1}^{m}a_ia_j(v_i,v_j)=(\sum_{i=1}^{m}a_iv_i,\sum_{j=1}^{m}a_jv_j)=(v,v)\geq 0, \tag{1}$$

因此 G 是半正定阵.

(2) 注意到半正定阵 G 是正定阵当且仅当 G 是非异阵, 故两个充要条件只要证明其中一个即可. 我们用两种

方法来证明它们.

证法一:先证必要性, 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关, 则对任意的非零实列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)',v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m\neq 0$, 从而由(1)式可知 $\alpha'G\alpha=(v,v)>0$, 故 G 是正定阵.

再证充分性, 反证, 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关, 则存在非零实列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)'$, 使得 $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m=0$, 从而由(1)式可知 $\alpha'G\alpha=(v,v)=0$, 故 G 不是正定阵, 矛盾!

证法二:先证充分性, 反证, 假设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得 $k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=0$. 将 k_i 乘以 G 的第 i 行后求和得到

$$(k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m,v_j)=0,\quad 1\leq j\leq m, \tag{2}$$

即 G 的 m 个行向量线性相关, 因此 G 不是可逆矩阵.

再证必要性, 反证, 若 G 不可逆, 则 G 的 m 个行向量线性相关, 即存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得 (2) 式成立. 于是

$$(k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m,k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m)=0,$$

从而 $k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=0$, 因此 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关.

(3) 证明是显然的.

2. (1) 由酉空间内积的对称性可知 G 是 Hermite 矩阵. 对任意的复列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)'$, 令 $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m$, 则有

$$\alpha'G\overline{\alpha}=\sum_{i,j=1}^m a_i\overline{a_j}(v_i,v_j)=(\sum_{i=1}^m a_iv_i,\sum_{j=1}^m a_jv_j)=(v,v)\geq 0, \tag{3}$$

因此 G 是半正定 Hermite 阵.

(2) 注意到半正定 Hermite 阵 G 是正定 Hermite 阵当且仅当 G 是非异阵, 故两个充要条件只要证明其中一个即可. 我们用两种方法来证明它们.

证法一:先证必要性, 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关, 则对任意的非零复列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)',v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m\neq 0$, 从而由(3)式可知 $\alpha'G\alpha=(v,v)>0$, 故 G 是正定 Hermite 阵.

再证充分性, 反证, 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关, 则存在非零复列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)'$, 使得 $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m=0$, 从而由(3)式可知 $\alpha'G\alpha=(v,v)=0$, 故 G 不是正定 Hermite 阵, 矛盾!

证法二:先证充分性, 反证, 假设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得 $k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=0$. 将 k_i 乘以 G 的第 i 行后求和得到

$$(k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m,v_j)=0,\quad 1\leq j\leq m, \tag{4}$$

即 G 的 m 个行向量线性相关, 因此 G 不是可逆矩阵.

再证必要性, 反证, 若 G 不可逆, 则 G 的 m 个行向量线性相关, 即存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得 (4) 式成立. 于是

$$(k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m,k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m)=0,$$

从而 $k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=0$, 因此 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关.

(3) 证明是显然的.

□

定理 0.1

1. 若 V 是一个 n 维欧式空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是它的一组基, 对 V 中任意向量 α,β, 其中

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,$$

$$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n.$$

则

$$(\alpha,\beta)=X^TGY, \tag{5}$$

其中

$$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

此时,G 就是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵. 并且 G 是一个 n 阶正定实对称阵.
由此可知, 若给定了 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定实对称阵之间存在着一个一一对应.

2. 若 V 是一个 n 维酉空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是它的一组基, 对 V 中任意向量 α,β, 其中

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,$$
$$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n.$$

则

$$(\alpha,\beta)=X^TH\overline{Y},$$

其中

$$H=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

此时,H 就是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵. 并且 H 是一个 n 阶正定 Hermite 阵.
由此可知, 若给定了 n 维复线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定 Hermite 阵之间存在着一个一一对应.

证明

1. 利用内积的线性性容易得到 $(\alpha,\beta)=X^TGY$.
再来看矩阵 G. 因为 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_j,\alpha_i)$, 所以 G 是实对称阵. 又因为对任意的非零向量 α, 总有 $(\alpha,\alpha)>0$, 所以 $x'Gx>0$ 对一切 n 维非零实列向量 x 成立. 这表明 G 是一个正定阵.
反之, 若给定 n 阶正定实对称阵 G, 利用 (5)式也可以定义 V 上的内积 (参考例题 2.(1)). 由此我们可以看出, 若给定了 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定实对称阵之间存在着一个一一对应.
2. 由 1 类似可证.

□

定义 0.2

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 若 $e_i\perp e_j$ 对一切 $i\neq j$ 成立, 则称这组基是 V 的一组**正交基**. 又若 V 的一组正交基中每个基向量的长度都等于 1, 则称这组正交基为**标准正交基**.
显然在标准正交基下, 度量矩阵就是单位矩阵.

引理 0.1

内积空间 V 中的任意一组两两正交的非零向量必线性无关.

证明 设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是 V 中两两正交的非零向量, 若

$$k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=\mathbf{0},$$

则对任一 $1 \le i \le m$, 有

$$(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m, v_i) = 0.$$

由于 $v_i \perp v_j (i \neq j)$, 故由上式可得 $k_i(v_i, v_i) = 0$, 又 $v_i \neq \mathbf{0}$, 从而 $k_i = 0$. □

引理 0.2

设向量 α 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 都正交, 则 α 和 $L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$ 中的每个向量都正交.

证明 任取 $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_k\beta_k \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$, 则

$$(\beta, \alpha) = (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_k\beta_k, \alpha) = \sum_{i=1}^{k} b_i(\beta_i, \alpha) = 0,$$

结论得证. □

推论 0.1

n 维内积空间中任意一个正交非零向量组的向量个数不超过 n.

证明 假设 n 维内积空间 V 中有 $n+1$ 个正交非零的向量, 则由引理 0.1可知, 这 $n+1$ 个正交非零的向量一定线性无关, 这与 $\dim V = n$ 矛盾! □

定理 0.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设 V 是内积空间,$u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是 V 中 m 个线性无关的向量, 则在 V 中存在 m 个两两正交的非零向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$, 使由 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 张成的子空间恰好为由 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 张成的子空间, 即 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是该子空间的一组正交基. 并且基 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 到基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的过渡矩阵为主对角元全为 1 的上三角矩阵, 即存在主对角元全为 1 的上三角矩阵 B, 使得

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\boldsymbol{B}.$$

证明 设 $v_1 = u_1$, 其余 v_i 可用数学归纳法定义如下: 假设 $v_1, \cdots, v_k (k < m)$ 已定义好, 这时 $v_1, \cdots, v_k$ 两两正交非零且 $L(v_1, \cdots, v_k) = L(u_1, \cdots, u_k)$. 令

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} v_j. \tag{6}$$

由此可知, 存在主对角元全为 1 的上三角矩阵 B, 使得

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\boldsymbol{B}.$$

注意 $v_{k+1} \neq \mathbf{0}$, 否则 u_{k+1} 将是 $v_1, \cdots, v_k$ 的线性组合, 从而也是 $u_1, \cdots, u_k$ 的线性组合, 此与 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 线性无关矛盾. 又对任意的 $1 \le i \le k$, 有

$$\begin{aligned}(v_{k+1}, v_i) &= (u_{k+1}, v_i) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2}(v_j, v_i) \\ &= (u_{k+1}, v_i) - (u_{k+1}, v_i) = 0,\end{aligned}$$

因此 $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}$ 两两正交. 由(6)式可知

$$u_{k+1} \in L(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}) \text{及} v_{k+1} \in L(v_1, \cdots, v_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \cdots, u_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}),$$

于是 $L(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}) = L(u_1, \cdots, u_k, u_{k+1})$, 这就证明了结论. □

注 上述定理证明中的正交化过程通常称为 Gram - Schmidt (格列姆–施密特) 方法.

推论 0.2

任一有限维内积空间均有标准正交基.

定义 0.3 (正交和)

设 V 是 n 维内积空间,$V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是 V 的子空间. 如果对任意的 $\alpha \in V_i$ 和任意的 $\beta \in V_j$ 均有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的正交和, 记为

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k.$$

♣

注 由于引理 0.3, 正交和通常也称为**正交直和**.

引理 0.3

正交和必为直和且任一 V_i 和其余子空间的和正交.

♡

证明 对任意的 $v_i \in V_i$ 和 $\sum\limits_{j \neq i} v_j (v_j \in V_j)$, 有

$$(v_i, \sum_{j \neq i} v_j) = \sum_{j \neq i} (v_i, v_j) = 0,$$

因此后一个结论成立. 任取 $v \in V_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_j)$, 则由上述论证可得 $(v, v) = 0$, 故 $v = \mathbf{0}$, 从而 $V_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_j) = 0$, 即正交和必为直和. □

定义 0.4 (正交补空间)

设 U 是内积空间 V 的子空间, 令

$$U^{\perp} = \{v \in V | (v, U) = 0\},$$

这里 $(v, U) = 0$ 表示对一切 $u \in U$, 均有 $(v, u) = 0$. 容易验证 $U^{\perp}$ 是 V 的子空间, 称为 U 的**正交补空间**.

♣

定理 0.3

设 V 是 n 维内积空间,U 是 V 的子空间, 则

(1) $V = U \oplus U^{\perp} = U \perp U^{\perp}$;

(2) U 的任一组标准正交基均可扩张为 V 的一组标准正交基.

♡

证明 (1) 若 $x \in U \cap U^{\perp}$, 则 $(x, x) = 0$, 因此 $x = \mathbf{0}$, 即 $U \cap U^{\perp} = 0$. 另一方面, 由推论 0.2可知, 存在 U 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$. 对任意的 $v \in V$, 令

$$u = (v, e_1)e_1 + (v, e_2)e_2 + \cdots + (v, e_m)e_m,$$

则 $u \in U$. 又令 $w = v - u$, 则对任一 $e_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 有

$$(w, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = (v, e_i) - (v, e_i) = 0.$$

因此 $w \in U^{\perp}$, 又 $v = u + w$, 这就证明了 $V = U \oplus U^{\perp}$.

(2) 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是 U 的任一组标准正交基,$\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ 是 $U^{\perp}$ 的任一组标准正交基, 则显然 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. □

定义 0.5 (正交投影)

设 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$, 定义 V 上的线性变换 $E_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 如下: 若 $v = v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_k (v_i \in V_i)$, 令 $E_i(v) = v_i$. 容易验证 E_i 是 V 上的线性变换, 且满足

$$E_i^2 = E_i, \ E_i E_j = 0 \ (i \neq j), \ E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I_V.$$

线性变换 E_i 称为 V 到 V_i 上的**正交投影**（简称投影）.

♣

命题 0.2

设 U 是内积空间 V 的子空间,$V = U \perp U^{\perp}$. 设 E 是 V 到 U 上的正交投影, 则对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

证明 设 $\alpha = u_1 + w_1$,$\beta = u_2 + w_2$, 其中 $u_1, u_2 \in U$,$w_1, w_2 \in U^{\perp}$, 则 $E(\alpha) = u_1$,$E(\beta) = u_2$, 于是

$$(E(\alpha), \beta) = (u_1, u_2 + w_2) = (u_1, u_2) + (u_1, w_2) = (u_1, u_2),$$

$$(\alpha, E(\beta)) = (u_1 + w_1, u_2) = (u_1, u_2) + (w_1, u_2) = (u_1, u_2).$$

由此即得结论. □

命题 0.3 (Bessel (贝塞尔) 不等式)

设 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是内积空间 V 中的正交非零向量组,y 是 V 中任一向量, 则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|y\|^2,$$

且等号成立的充分必要条件是 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间.

注 Bessel (贝塞尔) 不等式是“斜边大于直角边”这一几何命题在内积空间中的推广.

证明 令

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(y, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k,$$

则 x 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间. 容易验证

$$(y - x, v_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, m,$$

因此 $(y - x, x) = 0$. 由勾股定理可得

$$\|y\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x\|^2,$$

故

$$\|x\|^2 \leq \|y\|^2.$$

又由 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 两两正交不难算出

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2}.$$

若 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间, 则 $y = x$, 故等号成立. 反之, 若等号成立, 则 $\|y - x\|^2 = 0$, 故 $y = x$, 即 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间. □