数学技巧积累

数学技巧积累

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;

去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 群论 I——Group Theorey I **1**

1.1 幺半群 1

第一章 群论 I——Group Theory I

1.1 幺半群

定义 1.1 (代数运算/二元运算定义)

设 A 是一个非空集合，若对 A 中任意两个元素 a,b，通过某个法则“$\cdot$”，有 A 中唯一确定的元素 c 与之对应，则称法则“$\cdot$”为集合 A 上的一个**代数运算 (algebraic operation) 或二元运算**。元素 c 是 a,b 通过运算“$\cdot$”作用的结果，将此结果记为 $a\cdot b=c$。♣

定义 1.2 ((交换) 半群定义)

非空集合 S 和 S 上满足结合律的二元运算 $\cdot$ 所形成的代数结构叫做**半群**. 这个半群记成 $(S,\cdot)$ 或者简记成 S，运算 $x\cdot y$ 也常常简写成 xy. 此外, 如果半群 $(S,\cdot)$ 中的运算“$\cdot$”又满足交换律，则 $(S,\cdot)$ 叫做**交换半群**. ♣

注 像通常那样令 $x^2=x\cdot x$，$x^{n+1}=x^n\cdot x(=x\cdot x^n,n\geq 1)$。

定义 1.3 (幺元素定义)

设 S 是半群，元素 $e\in S$ 叫做半群 S 的**幺元素 (也叫单位元 (unit element) 或恒等元 (identity))**，是指对每个 $x\in S$，$xe=ex=x$。♣

笔记 **如果半群 S 中有幺元素, 则幺元素一定唯一.** 因若 e' 也是幺元素, 则 $e'=e'e=e$. 我们将半群 S 中这个唯一的幺元素 (如果存在的话) 通常记作 $\mathbf{1}_S$ **或者 1**.

定义 1.4 ((交换) 含幺半群定义)

如果半群 $(S,\cdot)$ 含有幺元素, 则 $(S,\cdot)$ 叫做**含幺半群**. 此外, 如果幺半群 $(S,\cdot)$ 中的运算“$\cdot$”又满足交换律, 则 $(S,\cdot)$ 叫做**交换幺半群**. ♣

定义 1.5

设 $(S,\cdot)$ 是含幺半群. 元素 $y\in S$ 叫做元素 $x\in S$ 的**逆元素**，是指 $xy=yx=1$。♣

笔记 **如果 x 有逆元素，则它一定唯一.** 因为若 y' 也是 x 的逆元素，则 $xy'=y'x=1$。于是 $y=y\cdot 1=y(xy')=(yx)y'=1\cdot y'=y'$. 所以，若 x 具有逆元素，我们把这个唯一的逆元素记作 $\boldsymbol{x^{-1}}$，则 $xx^{-1}=x^{-1}x=1$。

定义 1.6

如果含幺半群 $(G,\cdot)$ 的每个元素均可逆，则 $(G,\cdot)$ 叫做**群**. 此外, 如果群 $(G,\cdot)$ 中的运算“$\cdot$”又满足交换律，则 G 叫做**交换群**或叫**阿贝尔 (Abel) 群**. ♣

笔记 容易验证 $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 是 (加法) 交换幺半群, 其中单位元是零矩阵.

例题 1.1 $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 是一个含幺 (乘法) 半群.

证明 $\forall A,B,C\in(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$，则不妨设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times n}$。再设 $A\cdot B=(d_{ij})_{n\times n}$，$B\cdot C=(e_{ij})_{n\times n}$，$(A\cdot B)\cdot C=(f_{ij})_{n\times n}$，$A\cdot(B\cdot C)=(g_{ij})_{n\times n}$。于是

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl},e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kl}.$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$。

从而

$$f_{ij}=\sum_{l=1}^{n}d_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)\cdot c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot\left(\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}.$$

由二重求和号的可交换性，可知 $f_{ij}=g_{ij}$，$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。故 $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$。

记 $I_n=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$，于是 $\forall X\in M_n(\mathbb{R})$，则不妨设 $X=(x_{ij})_{n\times n}$，$I_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$。其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{当} i=j \text{时}, \\ 0, \text{当} i\neq j \text{时}\end{cases}$. 再设 $I_n\cdot X=(x'_{ij})_{n\times n}$，$X\cdot I_n=(x''_{ij})_{n\times n}$，于是由矩阵乘法的定义可知

$$x'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\delta_{kj}=x_{ij}\delta_{jj}=x_{ij}.$$

$$x''_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}x_{kj}=\delta_{ii}x_{ij}=x_{ij}.$$

故 $x'_{ij}=x''_{ij}=x_{ij}$，$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。从而 $X=I_n\cdot X=X\cdot I_n$。因此 I_n 是 $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 的单位元。综上所述,$(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 是一个含幺 (乘法) 半群.

定义 1.7

♣