0.1 矩阵的秩

0.1.1 初等变换法

矩阵的秩在初等变换或分块初等变换下不变.

想法: 遇到关于秩不等式的问题, 可以考虑构造分块矩阵, 对其做适当的初等变换, 再利用秩的基本公式.

定理 0.1

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不等于零, 而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

证明

□

命题 0.1 (矩阵秩的基本公式)

(1) 若 $k\neq 0$,$\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$;

(3) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 进而 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_n\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2)+\cdots+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_n)$.;

(4) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{D}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(5) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(6) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\geqslant|\mathrm{r}(\boldsymbol{A})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})|$.

(7) $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$, 进而

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$
$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{C}),\mathrm{r}(\boldsymbol{D}),$$
$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{C}),$$
$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{r}(\boldsymbol{D}).$$

证明

(1) 由于 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1(k)\boldsymbol{P}_2(k)\cdots\boldsymbol{P}_m(k)\boldsymbol{A}$, 故 $\mathrm{r}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

(2) 证法一:设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m{\times}n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n{\times}s$ 矩阵. 将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$, 则 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_s)$. 若 $\boldsymbol{B}$ 列向量的极大无关组为 $\{\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}\}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的任一列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 均可用 $\{\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}\}$ 线性表示. 于是任一 $\boldsymbol{A\beta}_j$ 也可用 $\{\boldsymbol{A\beta}_{j_1},\boldsymbol{A\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{A\beta}_{j_r}\}$ 来线性表示. 因此, 向量组 $\{\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_s\}$ 的秩不超过 r, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 同理, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用行分块的方法可以证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证法二:见例题**??**.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩分别为 r_1,r_2, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1$ 和非异阵 $\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

因此,$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r_1+r_2=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

(4) 证法一: 我们只证明第一个不等式, 第二个不等式同理可证. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩分别为 r_1,r_2, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1$ 和非异阵 $\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{11}&\boldsymbol{C}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{21}&\boldsymbol{C}_{22}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

在上面的分块矩阵中实施第三类分块初等变换, 用 $\boldsymbol{I}_{r_1}$ 消去同行的矩阵; 用 $\boldsymbol{I}_{r_2}$ 消去同列的矩阵, 再将 $\boldsymbol{C}_{22}$ 对换到第 $(2,2)$ 位置:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{11}&\boldsymbol{C}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{21}&\boldsymbol{C}_{22}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{22}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_{22}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{r_2}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

最后由 (3) 的结论可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_{r_1})+\mathrm{r}(\boldsymbol{C}_{22})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_{r_2})\geqslant r_1+r_2=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

证法二: 我们也可用子式法来证明. 设 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r$, 则由定理 0.1可知,$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 有一个 r 阶子式不为零, 不妨设为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{vmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的子阵. 注意 $\boldsymbol{A}_1$ 或 $\boldsymbol{B}_1$ 允许是零阶矩阵, 这对应于该子式完全包含在 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 中, 但若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 的阶数都大于零, 则通过该子式非零, 再结合由 Laplace 定理容易验证 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 都是方阵. 设在矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 中对应的 r 阶子式是 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{C}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{vmatrix}$, 则由 Laplace 定理可得 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{C}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{B}_1|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{vmatrix}\neq 0$, 再次由定理 0.1可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant r=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

证法三:设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组; 设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_l)$ 是 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的列分块,$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_s}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大无关组, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$. 我

们接下来证明: 作为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的列向量, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i_1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i_r} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{j_1} \\ \boldsymbol{\beta}_{j_1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{j_s} \\ \boldsymbol{\beta}_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关. 设

$$c_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i_1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i_r} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{j_1} \\ \boldsymbol{\beta}_{j_1} \end{pmatrix} + \cdots + d_s \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{j_s} \\ \boldsymbol{\beta}_{j_s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

即

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + \cdots + c_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r} + d_1\boldsymbol{\gamma}_{j_1} + \cdots + d_s\boldsymbol{\gamma}_{j_s} = \boldsymbol{0}, d_1\boldsymbol{\beta}_{j_1} + \cdots + d_s\boldsymbol{\beta}_{j_s} = \boldsymbol{0}.$$

由上面的假设即得 $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_s = 0$, 于是上述结论得证. 因为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的列向量中有 $r+s$ 个线性无关, 故 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geqslant r + s = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

(5) 注意到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

故由 (2) 和 (3) 可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}.$$

故由 (2) 可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}\right) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

(6) 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$, 故不妨设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 则由 (6) 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

(7) 第一个不等式是显然的 (考虑极大无关组即可). 由第一个不等式可得

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

其他同理可证.

□

推论 0.1

若分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 满足 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 则 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明 由条件可得

$$\mathrm{r}(A) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A).$$

故 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 $(-1)^i$, 又将第 j 列乘以 $(-1)^j$, 即得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 故结论成立.

□

命题 0.2 (Sylvester(西尔维斯特) 不等式)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times t$ 矩阵, 求证:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n.$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{BY} = \boldsymbol{O}$ 有解.

证明 证法一: 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix},$$

由矩阵秩的基本公式 (3)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + n = \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix} \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n$.

证法二:见例题**??**.

取等条件由 Rot 消去定理立得.

□

推论 0.2

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times t$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

命题 0.3 (Sylvester 不等式的推广)

设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 为 n 阶方阵, 求证:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m) \leqslant (m-1)n + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m).$$

特别地, 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m) \leqslant (m-1)n$.

证明 反复利用Sylvester 不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_3) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)\\ \leqslant& n + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_3) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)\\ \leqslant& 2n + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)\\ \leqslant& \cdots \leqslant (m-1)n + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m).\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$. 证明: 若 n 是奇数, 则 $\boldsymbol{AB}' + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 必为奇异阵; 若 n 为偶数, 举例说明上述结论一般不成立.

证明 由推论 0.2可知,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant n$. 若 n 为奇数, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 中至少有一个小于等于 $\frac{n}{2}$, 从而小于等于 $\frac{n-1}{2}$. 不妨设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \frac{n-1}{2}$, 于是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}' + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}') + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}') = 2\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1,$$

从而 $\boldsymbol{AB}' + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 为奇异阵. 例如, 当 $n = 2$ 时, 令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{AB}' + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_2$ 为非异阵.

□

命题 0.4 (Frobenius(弗罗贝尼乌斯) 不等式)

证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

注 取 $\boldsymbol{B}$ 为单位矩阵即得Sylvester(西尔维斯特) 不等式.

证明 证法一: 考虑下列分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (3)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix} \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{BC}),$$

由此即得结论.

证法二 (几何方法):将问题转化成几何的语言即为: 设 $\varphi: V_1 \to V_2, \psi: V_2 \to V_3, \theta: V_3 \to V_4$ 是线性映射, 证明:$\mathrm{r}(\theta\psi\varphi) \geqslant \mathrm{r}(\theta\psi)+\mathrm{r}(\psi\varphi)-\mathrm{r}(\psi)$.

下面考虑通过定义域的限制得到的线性映射. 将 θ 的定义域限制在 $\mathrm{Im}\psi\varphi$ 上可得线性映射 $\theta_1: \mathrm{Im}\psi\varphi \to V_4$, 它的像空间是 $\mathrm{Im}\theta\psi\varphi$, 核空间是 $\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi$; 将 θ 的定义域限制在 $\mathrm{Im}\psi$ 上可得线性映射 $\theta_2: \mathrm{Im}\psi \to V_4$, 它的像空间是 $\mathrm{Im}\theta\psi$, 核空间是 $\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi$, 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim(\mathrm{Im}\psi\varphi) = \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi)+\dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi), \tag{1}$$

$$\dim(\mathrm{Im}\psi) = \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi)+\dim(\mathrm{Im}\theta\psi). \tag{2}$$

注意到 $\mathrm{Im}\psi\varphi \subseteq \mathrm{Im}\psi$, 故 $\dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi)$, 从而由(1)式和(2)式可得

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}\psi\varphi)-\dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi) &= \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi\varphi) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}\theta \cap \mathrm{Im}\psi) = \dim(\mathrm{Im}\psi)-\dim(\mathrm{Im}\theta\psi). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \dim(\mathrm{Im}\psi\varphi)-\dim(\mathrm{Im}\theta\psi\varphi) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\psi)-\dim(\mathrm{Im}\theta\psi) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{r}(\psi\varphi)-\mathrm{r}(\theta\psi\varphi) \leqslant \mathrm{r}(\psi)-\mathrm{r}(\theta\psi), \end{aligned}$$

结论得证.

□

命题 0.5 (幂等矩阵关于秩的判定准则)

设数域 $\mathbb{F}$ 和 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$) 的充要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}) = n.$$

笔记 实际上, 由矩阵秩的基本公式 (5)和推论 0.2可立得.

证明 证法一: 在下列矩阵的分块初等变换中矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)+n$, 由此即得结论.

证法二:将 A 看作矩阵 A 左乘诱导在 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换, 记 $f(x)=x^2-x, f_1(x)=x, f_2(x)=x-1$, 则 $f=$

$f_1f_2,(f_1,f_2)=1$. 从而由定理??知

$$\ker f(A)=\ker f_1(A)\oplus\ker f_2(A)=\ker A\oplus\ker(A-I). \tag{3}$$

注意到

$$A^2=A\iff\ker f(A)=\mathbb{F}^n\iff\dim\ker f(A)=n,$$

故再由(3)式和维数公式可得

$$\begin{aligned}&\dim\ker A+\dim\ker(A-I)=n\\ \iff& n-\dim\mathrm{Im}A+n-\dim\mathrm{Im}(A-I)=n\\ \iff&\dim\mathrm{Im}A+\dim\mathrm{Im}(A-I)=n\\ \iff& r(A)+r(A-I)=n.\end{aligned}$$

□

例题 0.3 设 n 阶方阵 A,B 满足:$(A+B)^2=A+B,r(A+B)=r(A)+r(B)$, 证明:

$$A^2=A,\quad B^2=B,\quad AB=BA=O.$$

证明 证法一:由命题 0.5可得 $n=r(A+B)+r(I_n-A-B)=r(A)+r(B)+r(I_n-A-B)$. 构造如下分块对角阵, 并对其实施分块初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix}A&O&O\\O&B&O\\O&O&I_n-A-B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&O&O\\O&B&O\\A&B&I_n-A-B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&O&A\\O&B&B\\A&B&I_n\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}A-A^2&-AB&O\\-BA&B-B^2&O\\A&B&I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-A^2&-AB&O\\-BA&B-B^2&O\\O&O&I_n\end{pmatrix}.$$

注意到分块初等变换不改变矩阵的秩, 故可得 $r\begin{pmatrix}A-A^2&-AB\\-BA&B-B^2\end{pmatrix}=0$, 从而 $A^2=A,B^2=B,AB=BA=O$.

证法二:由命题??知, 存在可逆阵 P,Q, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r&O&O\\O&O&O\\O&O&O\end{pmatrix},\quad PBQ=\begin{pmatrix}O&O&O\\O&I_s&O\\O&O&O\end{pmatrix},$$

其中 $r=r(A),s=r(B)$. 记

$$D=Q^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}D_1&D_2&D_3\\D_4&D_5&D_6\\D_7&D_8&D_9\end{pmatrix},$$

则由 $(A+B)^2=A+B$ 可得

$$\begin{aligned}&P(A+B)^2Q=P(A+B)Q\\ \iff& P(A+B)Q\left(Q^{-1}P^{-1}\right)P(A+B)Q=P(A+B)Q\\ \iff&\begin{pmatrix}I_r&O&O\\O&I_s&O\\O&O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&D_2&D_3\\D_4&D_5&D_6\\D_7&D_8&D_9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&O&O\\O&I_s&O\\O&O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O&O\\O&I_s&O\\O&O&O\end{pmatrix}\\ \iff&\begin{pmatrix}D_1&D_2&O\\D_4&D_5&O\\O&O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O&O\\O&I_s&O\\O&O&O\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 $D_1=I_r, D_5=I_s, D_2=D_4=O$, 因此

$$D=Q^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix} I_r & O & D_3 \\ O & I_s & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned}
PA^2Q &= PAQ\left(Q^{-1}P^{-1}\right)PAQ \\
&= \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & D_3 \\ O & I_s & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = PAQ \Longrightarrow A^2=A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PB^2Q &= PBQ\left(Q^{-1}P^{-1}\right)PBQ \\
&= \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & D_3 \\ O & I_s & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = PBQ \Longrightarrow B^2=B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PABQ &= PAQ\left(Q^{-1}P^{-1}\right)PBQ \\
&= \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & D_3 \\ O & I_s & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \\
&= O \Longrightarrow AB=O,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PBAQ &= PBQ\left(Q^{-1}P^{-1}\right)PAQ \\
&= \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & D_3 \\ O & I_s & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \\
&= O \Longrightarrow BA=O.
\end{aligned}$$

□

命题 0.6 (对合矩阵关于秩的判定准则)

求证:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$) 的充要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=n.$$

笔记 实际上, 由矩阵秩的基本公式 (5)和推论 0.2可立得.

证明 在下列矩阵的分块初等变换中, 矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} & 2\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2) & \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2) & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2) & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2)+n$, 由此即得结论.

□

例题 0.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})\geqslant n$.

证明 证法一: 由下列分块初等变换即得结论

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

证法二: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n$.

□

命题 0.7 (秩的降阶公式)

设有分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$;

(2) 若 $\boldsymbol{D}$ 可逆, 则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(\boldsymbol{D})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})$;

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 都可逆, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{D})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})$.

证明

(1) 由分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

由此即得结论.

(2) 同理可证明.

(3) 由 (1) 和 (2) 即得.

□

例题 0.5 设

$$M=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

证明:$\mathrm{r}(M)\geqslant n-1$, 等号成立当且仅当 $|M|=0$.

证明 若 $n=1$, 结论显然成立. 下设 $n\geqslant 2$. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{I}_n+\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{I}_2^{-1}\boldsymbol{A}=-\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{I}_2^{-1}\boldsymbol{A}\right).$$

由秩的降阶公式可得

$$2+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{M}\right)=2+\mathrm{r}\left(-\boldsymbol{M}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_2\right)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{I}_2^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n\right)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n^{-1}\boldsymbol{A}'\right)=n+\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}.$$

而 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}\geqslant 1$, 于是 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{M}\right)=n-2+\mathrm{r}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-1 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n-1\end{pmatrix}\geqslant n-1.$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 不满秩, 即 $|\boldsymbol{M}|=0$.

□

命题 0.8

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}).$$

证明 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别看作在 $\mathbb{R}^n$ 上左乘诱导的线性变换, 则

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\ ,\ \boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\\ \Longleftrightarrow\ &\dim\mathrm{Im}\boldsymbol{AB}+\dim\left(\mathrm{Im}\boldsymbol{A}+\mathrm{Im}\boldsymbol{B}\right)\leqslant\dim\mathrm{Im}\boldsymbol{A}+\dim\mathrm{Im}\boldsymbol{B}\\ \Longleftrightarrow\ &\dim\mathrm{Im}\boldsymbol{AB}\leqslant\dim\left(\mathrm{Im}\boldsymbol{A}\cap\mathrm{Im}\boldsymbol{B}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

任取 $\boldsymbol{ABx}\in\mathrm{Im}\boldsymbol{AB}$, 则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可知

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{Bx}\right)\in\mathrm{Im}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{Ax}\right)\in\mathrm{Im}\boldsymbol{B}.$$

故 $\mathrm{Im}\boldsymbol{AB}\subseteq\mathrm{Im}\boldsymbol{A}\cap\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$. 因此(4)式成立, 结论得证.

□

命题 0.9

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

注 证法一:这里乘的不只是初等变换矩阵. 记住这个分块矩阵乘法和构造.

证法二:和证法三:思路分析: 将秩不等式转化为维数公式就能自然得到证明的想法.

证明 证法一: 考虑如下分块矩阵的乘法:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (2)和矩阵秩的基本公式 (4)可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}),$$

由此即得结论.

证法二:设 $V_{\boldsymbol{A}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,$V_{\boldsymbol{B}},V_{\boldsymbol{AB}},V_{\boldsymbol{A+B}}$ 的意义同理. 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$, 于是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\boldsymbol{A+B}}$, 从而 $V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{A+B}}$. 同理可证 $V_{\boldsymbol{A}}\subseteq V_{\boldsymbol{BA}}$,$V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{AB}}$. 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 所以 $V_{\boldsymbol{BA}}=V_{\boldsymbol{AB}}$, 从而 $V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{AB}}$. 因此, 我们有

$$\dim(V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}})\leqslant\dim V_{\boldsymbol{A+B}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\quad \dim(V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}})\leqslant\dim V_{\boldsymbol{AB}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

将上面两个不等式相加, 再由交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned} n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) &\geqslant \dim(V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}})+\dim(V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}}) \\ &= \dim V_{\boldsymbol{A}}+\dim V_{\boldsymbol{B}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}), \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 结论得证.

证法三:设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列分块,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列分块. 记 $U_{\boldsymbol{A}}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的 $\mathbb{K}^n$ 的子空间,$U_{\boldsymbol{B}},U_{\boldsymbol{AB}},U_{\boldsymbol{A+B}}$ 的意义同理. 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组就是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的一组基, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\dim U_{\boldsymbol{A}}$, 关于 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的等式同理可得. 由命题**??**, 我们有 $U_{\boldsymbol{A+B}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}+U_{\boldsymbol{B}}$. 注意到 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_n)$, 若设 $\boldsymbol{\beta}_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj})'$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{A\beta}_j=b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n\in U_{\boldsymbol{A}}$, 从而 $U_{\boldsymbol{AB}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}$. 同理可得 $U_{\boldsymbol{BA}}\subseteq U_{\boldsymbol{B}}$. 又因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 故 $U_{\boldsymbol{AB}}\subseteq U_{\boldsymbol{A}}\cap U_{\boldsymbol{B}}$. 最后, 由上述包含关系以及交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) &= \dim U_{\boldsymbol{A+B}}+\dim U_{\boldsymbol{AB}}\leqslant \dim(U_{\boldsymbol{A}}+U_{\boldsymbol{B}})+\dim(U_{\boldsymbol{A}}\cap U_{\boldsymbol{B}}) \\ &= \dim U_{\boldsymbol{A}}+\dim U_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

证法四:由命题 0.8和矩阵秩的基本公式立得.

□

例题 0.6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2025\boldsymbol{B}$, 证明:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathbf{r}(\boldsymbol{B})\geqslant \mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathbf{r}(\boldsymbol{AB}).$$

证明 证法一:由条件可知

$$(2025\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})=2025\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-2025\boldsymbol{B}=2025\boldsymbol{I}_n.$$

故 $2025\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 和 $\dfrac{1}{2025}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})$ 互为其逆矩阵. 于是

$$2025\boldsymbol{I}_n=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B})(2025\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=2025\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}-2025\boldsymbol{B}.$$

从而

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+2025\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}.$$

故由命题 0.9知

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathbf{r}(\boldsymbol{B})\geqslant \mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathbf{r}(\boldsymbol{AB}).$$

证法二:由条件可知

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=2025\boldsymbol{B}.$$

考虑如下分块矩阵乘法

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-2025\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&2025\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&-2025\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&-2025\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式知

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathbf{r}(\boldsymbol{B}) &= \mathbf{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant \mathbf{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&-2025\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \\ &\geqslant \mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(-2025\boldsymbol{B})=\mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \\ &\geqslant \mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}). \end{aligned}$$

□

命题 0.10

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵. 证明

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}_n)\leqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n).$$

证明 证法一:因为

$$\begin{pmatrix} A-I_n & O \\ O & B-I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-I_n & AB-B \\ O & B-I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-I_n & AB-B \\ A-I_n & AB-I_n \end{pmatrix},$$

所以由命题 0.1(2)和命题 0.1(7)可得

$$\operatorname{rank}(A-I_n)+\operatorname{rank}(B-I_n)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-I_n & AB-B \\ A-I_n & AB-I_n \end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank}(AB-I_n).$$

证法二:直接利用关于矩阵秩的不等式, 得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB-I_n) &= \operatorname{rank}((A-I_n)B+(B-I_n)) \\ &\leqslant \operatorname{rank}((A-I_n)B)+\operatorname{rank}(B-I_n) \\ &\leqslant \operatorname{rank}(A-I_n)+\operatorname{rank}(B-I_n).\end{aligned}$$

□

0.1.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩

定理 0.2

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 V_A 是 n 维列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 的子空间. 根据线性方程组的求解理论, 我们有

$$\dim V_A + \mathrm{r}(A) = n,$$

笔记 即齐次线性方程组解空间的维数与系数矩阵的秩之和等于未知数的个数. 根据上述公式, 由矩阵的秩可以讨论线性方程组解的性质; 反过来, 也可以由线性方程组解的性质讨论矩阵的秩.

推论 0.3

线性方程组 $Ax=0$ 只有零解的充要条件是 A 为列满秩阵. 特别地, 若 A 是方阵, 则线性方程组 $Ax=0$ 只有零解的充要条件是 A 为非异阵.

证明 由定理 0.2 中的公式 $\dim V_A+\mathrm{r}(A)=n$ 即可得到证明.

□

命题 0.11

(1) 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, 求证:$\mathrm{r}(A'A)=\mathrm{r}(AA')=\mathrm{r}(A)$.

(2) 若 A 是 $m\times n$ 复矩阵, 则 $\mathrm{r}\left(\overline{A}'A\right)=\mathrm{r}\left(A\overline{A}'\right)=\mathrm{r}(A)$.

证明

(1) 首先证明 $\mathrm{r}(A'A)=\mathrm{r}(A)$, 为此我们将证明齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $A'Ax=0$ 同解. 显然 $Ax=0$ 的解都是 $A'Ax=0$ 的解. 反之, 任取方程组 $A'Ax=0$ 的解 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 则 $\alpha'A'A\alpha=0$, 即 $(A\alpha)'(A\alpha)=0$. 记 $A\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'\in\mathbb{R}^m$, 则

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0.$$

因为 b_i 是实数, 故每个 $b_i=0$, 即 $A\alpha=0$, 也即 α 是 $Ax=0$ 的解. 这就证明了方程组 $Ax=0$ 和 $A'Ax=0$ 同解, 即 $V_A=V_{A'A}$, 于是由定理 0.2可得 $\mathrm{r}(A'A)=\mathrm{r}(A)$. 在上述等式中用 A' 替代 A 可得 $\mathrm{r}(AA')=\mathrm{r}(A')$, 又因为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A')$, 故结论得证.

(2) 由 (1) 类似的方法可以证明.

□

例题 0.7 设 n 阶实方阵 A 满足 $AA'=a^2I_n$, 其中 a 为实数, 证明:

$$r(aI_n-A)=r((aI_n-A)^2).$$

证明 (i) 当 $a=0$ 时, 有 $AA'=O$, 从而由命题??知 $A=O$, 结论显然成立.

(ii) 当 $a\neq 0$ 时, 由条件知 A,A' 都可逆. 于是

$$\begin{aligned} r\left((aI_n-A)^2\right) &= r\left((aI_n-A)^2\frac{1}{a}\left(-A'\right)\right)=r\left((aI_n-A)\left(\frac{1}{a}AA'-A'\right)\right)\\ &= r\left((aI_n-A)\left(aI_n-A'\right)\right)\xlongequal{\text{命题 0.11}} r\left(aI_n-A\right). \end{aligned}$$

□

例题 0.8 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 且每个方程组的基础解系含 m 个线性无关的向量, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\leqslant n-m$.

证明 由方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解可知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $V_{\boldsymbol{A}}\subseteq V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}$, 从而 $\dim V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}\geqslant \dim V_{\boldsymbol{A}}=m$, 于是由定理 0.2可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=n-\dim V_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}\leq n-m$.

□

命题 0.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 矩阵, 证明: 方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明 显然方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解都是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $V_{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\boldsymbol{AB}}$, 于是两个线性方程组同解, 即 $V_{\boldsymbol{B}}=V_{\boldsymbol{AB}}$ 的充要条件是 $\dim V_{\boldsymbol{B}}=\dim V_{\boldsymbol{AB}}$. 又由定理 0.2可知 $\dim V_{\boldsymbol{B}}=k-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,$\dim V_{\boldsymbol{AB}}=k-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$, 因此上述两个方程组同解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

□

命题 0.13

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩, 求证: 对任意的 $k\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 矩阵 $\boldsymbol{ABC}$ 和矩阵 $\boldsymbol{BC}$ 也有相同的秩.

证明 证法一: 由假设和命题 0.12可知, 方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解. 要证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$, 我们只要证明方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 同解即可. 显然方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 的解都是方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 的解. 反之, 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{C\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 因此 $\boldsymbol{C\alpha}$ 也是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 即 $\boldsymbol{BC\alpha}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 的解. 这就证明了方程组 $\boldsymbol{ABCx}=\boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{BCx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 从而结论得证.

证法二: 由Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{BC}),$$

又由矩阵秩的基本公式 (2)可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$, 故结论得证.

□

命题 0.14

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足:$|\boldsymbol{A}|=0$ 且某个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 求证: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都可写为下列形式:

$$k\begin{pmatrix} A_{i1}\\ A_{i2}\\ \vdots\\ A_{in}\end{pmatrix},k\in\mathbb{K}.$$

证明 由条件和定理 0.1可知 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 因此线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=0$, 故 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 于是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的任一列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 又已知 $A_{ij}\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 个列向量 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})'$(不是零向量) 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

□

定义 0.1 (对角占优阵)

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}|\geqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是 **(弱) 对角占优阵**.

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}|> \sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**严格对角占优阵**.

♣

命题 0.15 (严格对角占优阵必是非异阵)

如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是严格对角占优阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必是非异阵.

♠

证明 证法一: 只需证明线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 若有非零解, 设为 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 假设 c_k 是其中绝对值最大者. 将解代入该方程组的第 k 个方程式, 得

$$a_{k1}c_1+\cdots+a_{kk}c_k+\cdots+a_{kn}c_n=0,$$

即有

$$-a_{kk}c_k=a_{k1}c_1+\cdots+a_{k,k-1}c_{k-1}+a_{k,k+1}c_{k+1}+\cdots+a_{kn}c_n.$$

上式两边取绝对值, 由三角不等式以及 c_k 是绝对值最大的假设可得

$$|a_{kk}||c_k|\leqslant |a_{k1}||c_1|+\cdots+|a_{k,k-1}||c_{k-1}|+|a_{k,k+1}||c_{k+1}|+\cdots+|a_{kn}||c_n|\leqslant \left(\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|\right)|c_k|,$$

从而有

$$|a_{kk}|\leqslant \sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|,$$

得到矛盾. 因此, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

证法二:由第一圆盘定理, A 的特征值落在下列戈氏圆盘中:

$$|z-a_{ii}|\leqslant R_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

A 的严格对角占优条件保证了复平面的原点不落在这些戈氏圆盘中, 因此 A 的特征值全不为零, 从而 A 是非异阵.

□

命题 0.16

若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是严格对角占优阵, 即满足

$$a_{ii}> \sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n,$$

求证: $|\boldsymbol{A}|>0$.

♠

证明 证法一: 考虑矩阵 $t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$, 当 $t\geqslant 0$ 时, 这是一个严格对角占优阵, 因此由命题 0.15可知其行列式 $f(t)=$

$|t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}|$ 不为零. 又 $f(t)$ 是关于 t 的多项式且首项系数为 1, 所以当 t 充分大时,$f(t)>0$. 注意到 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上处处不为零的连续函数, 并且当 t 充分大时取值为正, 因此 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上取值恒为正. 特别地,$f(0)=|\boldsymbol{A}|>0$.

证法二:由第一圆盘定理, A 的特征值落在下列戈氏圆盘中:

$$|z-a_{ii}|\leqslant R_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

由条件可知 $a_{ii}>R_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 从而这些戈氏圆盘全部位于虚轴的右侧, 因此 A 的特征值 λ_i 或者是正实数, 或者是实部为正的共轭虚数, 从而 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$.

证法三:设 λ 为 A 的特征值,$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为与之对应的特征向量, 则

$$A\alpha=\lambda\alpha\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

记 $|x_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\}$, 其中 $k\in[1,n]\cap\mathbb{N}$. 由 α 为非零向量知 $|x_k|>0$, 则

$$\begin{aligned}\lambda=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}x_j}{x_k}&=a_{kk}+\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}a_{kj}x_j}{x_k}\geqslant|a_{kk}|-\frac{\left|\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}a_{kj}x_j\right|}{|x_k|}\\&\geqslant a_{kk}-\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}||x_j|}{|x_k|}\geqslant a_{kk}-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|>0.\end{aligned}$$

故 A 的特征值全都大于 0, 因此 $|A|>0$.

□

例题 0.9 设 n 级实矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足: 对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 且 $i\neq j$, 不等式

$$|a_{ii}a_{jj}|>\left(\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{t\neq j}|a_{jt}|\right)$$

成立. 证明:$|A|\neq 0$.

证明 设 λ 为 A 的特征值,$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 为对应特征向量, 则

$$Ax=\lambda x\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}x_k\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}x_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\lambda x_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\sum_{k\neq i}a_{ik}x_k=(\lambda-a_{ii})x_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

若 $\lambda=0$, 则

$$a_{ii}a_{jj}x_ix_j=\left(\sum_{k\neq i}a_{ik}x_k\right)\left(\sum_{k\neq j}a_{jk}x_k\right).\tag{5}$$

若 x_i 中只有一个元素非零, 不妨设 $x_1 \neq 0$, 则当 $i,j \neq 1$ 时, 有

$$0 = a_{ii}a_{jj}x_ix_j = \left(\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k\right)\left(\sum_{k\neq j} a_{jk}x_k\right) > 0,$$

显然矛盾! 因此 x_i 中至少有两个元素非零, 取 $|x_{i_0}| = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} |x_i| > 0, |x_{j_0}| = \max\limits_{i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i_0\}} |x_i| > 0$, 则由(??)式得

$$\left(\sum_{k\neq i_0} a_{i_0k}x_k\right)\left(\sum_{k\neq j_0} a_{j_0k}x_k\right) = a_{i_0i_0}a_{j_0j_0}x_{i_0}x_{j_0}.$$

于是

$$\begin{aligned}|a_{i_0i_0}a_{j_0j_0}| &= \frac{\left|\left(\sum\limits_{k\neq i_0} a_{i_0k}x_k\right)\left(\sum\limits_{k\neq j_0} a_{j_0k}x_k\right)\right|}{|x_{i_0}x_{j_0}|}\\ &\leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k\neq i_0} |a_{i_0k}||x_k|\right)\left(\sum\limits_{k\neq j_0} |a_{j_0k}||x_k|\right)}{|x_{i_0}x_{j_0}|}\\ &\leqslant \left(\sum_{k\neq i_0} |a_{i_0k}|\right)\left(\sum_{k\neq j_0} |a_{j_0k}|\right),\end{aligned}$$

这与条件矛盾! 故 A 没有 0 特征值, 因此 $|A| \neq 0$.

□

命题 0.17

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 则:$\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}_n - \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 都是非异阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实反对称阵, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是同阶对角阵且主对角元素全大于零, 求证:$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}| > 0$. 特别地, $|\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{A}| > 0$, 从而 $\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{A}$ 都是非异阵.

笔记 (2) 的证明思路: 利用行列式构造连续的多项式函数, 再利用函数连续的性质证明.

证明

(1) 证法一:只需证明 $(\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解. 由 $\overline{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{I}_n + \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 共轭转置可得 $\overline{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{I}_n - \mathrm{i}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$. 上述两式相加, 可得 $\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x} = 0$, 因此 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

证法二:设 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是 A 的任一特征值, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$ 是对应的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda_0\alpha$. 此式两边同时左乘 $\overline{\alpha}'$, 则有

$$\overline{\alpha}'A\alpha = \lambda_0\overline{\alpha}'\alpha.$$

注意到 α 是非零向量, 故 $\overline{\alpha}'\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2 > 0$. 注意到 A 为实对称矩阵, 故

$$\overline{(\overline{\alpha}'A\alpha)}' = \overline{\alpha}'A\alpha,$$

即 $\overline{\alpha}'A\alpha$ 是一个实数, 从而 $\lambda_0 = \overline{\alpha}'A\alpha/\overline{\alpha}'\alpha$ 也是实数. 于是 $I_n \pm \mathrm{i}A$ 的任一特征值为 $1 \pm \mathrm{i}\lambda_0 \neq 0$. 因此由特征值与特征多项式系数的关系可知 $I_n \pm \mathrm{i}A$ 是非异阵.

(2) 证法一:先证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}| \neq 0$, 只需证明 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解. 因为 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = 0$, 转置可得 $\boldsymbol{x}'(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = 0$, 上述两式相加即得 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = 0$. 若设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, 则有 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 = 0$. 由于 d_i 都大于零并且 x_i 都是实数, 故只能是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 即有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

再证明 (2) 的结论. 设 $f(t) = |t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}|$, 则 $f(t)$ 是关于 t 的多项式, 从而是关于 t 的连续函数. 注意到对任意的实数 t,$t\boldsymbol{A}$ 仍是实反对称阵, 故由上面的讨论可得 $f(t) = |t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}| \neq 0$, 即 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处不为零的连续函数. 注意到当 $t = 0$ 时,$f(0) = |\boldsymbol{D}| > 0$, 因此 $f(t)$ 只能是 $\mathbb{R}$ 上取值恒为正数的连续函数 (原因见:命题 5.2). 特别地,$f(1) = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}| > 0$.

证法二:设 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是 A 的任一特征值, $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$ 是对应的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda_0\alpha$. 此式两边同时左乘 $\overline{\alpha}'$, 则有

$$\overline{\alpha}' A\alpha = \lambda_0 \overline{\alpha}'\alpha.$$

注意到 α 是非零向量, 故 $\overline{\alpha}'\alpha = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 > 0$. 注意到 A 为实反称矩阵, 故

$$\overline{(\overline{\alpha}' A\alpha)'} = -\overline{\alpha}' A\alpha,$$

即 $\overline{\alpha}' A\alpha$ 是零或纯虚数, 从而 $\lambda_0 = \overline{\alpha}' A\alpha / \overline{\alpha}'\alpha$ 也是零或纯虚数. 设 $\lambda = c\mathrm{i}$, 其中 $c \in \mathbb{C}$. 于是 $I_n \pm A$ 的任一特征值为 $1 \pm \lambda_0 = 1 \pm c\mathrm{i} \neq 0 \neq 0$, 由特征值与特征多项式系数的关系可知 $I_n \pm A$ 是非异阵.

□

0.1.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩

按照最初的定义, 矩阵的秩就是矩阵的行 (列) 向量组的秩, 因此通过线性空间理论去讨论矩阵的秩是十分自然的事情.

命题 0.18

求证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 存在一个 r 阶子式 $|\boldsymbol{D}|$ 不等于零, 而 $|\boldsymbol{D}|$ 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于零.

证明 必要性由定理 0.1可直接得到, 只需证明充分性. 不失一般性, 我们可设 $|\boldsymbol{D}|$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列构成的 r 阶子式. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分块和列分块, 记 $\tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\alpha}_i$ 为行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 关于前 r 列的缩短向量,$\tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\beta}_j$ 为列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 关于前 r 行的缩短向量. 由 $|\boldsymbol{D}| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 由命题**??**可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

我们只要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组即可得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$. 用反证法证明, 若它们不是极大无关组, 则可以添加一个行向量, 不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r+1$ 行构成的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}_1 = (\tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_n)$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = r+1$. 由 $|\boldsymbol{D}| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\leqslant r}\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 由命题**??**可知 $\tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = r+1$, 故存在 $\boldsymbol{A}_1$ 的一个列向量, 不妨设为 $\tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1}$, 使得 $\tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_r, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{A}_2 = (\tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_r, \tau_{\leqslant r+1}\boldsymbol{\beta}_{r+1})$, 即 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r+1$ 行和前 $r+1$ 列构成的方阵, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) = r+1$. 因此,$|\boldsymbol{A}_2| \neq 0$ 是包含 $|\boldsymbol{D}|$ 的 $r+1$ 阶加边子式, 这与假设矛盾.

□

命题 0.19

设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是其极大无关组, 又设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$, 且 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 是其极大无关组. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 交叉点上的元素组成的子矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的行列式 $|\boldsymbol{D}| \neq 0$.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是极大无关组, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一行向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的线性组合. 记 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}, \boldsymbol{\alpha}_s$ 在 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列处的缩短向量, 由命题**??**可知,$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 均可表示为 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 的线性组合.

考虑由列向量 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 组成的矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r})$, 这是一个 $m \times r$ 矩阵且秩等于 r. 由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的任一行向量 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 均可用 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 线性表示, 并且 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 r, 故由命题**??**可知,$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{B}$

的行向量的极大无关组, 从而它们线性无关. 注意到 r 阶方阵 $\boldsymbol{D}$ 的行向量恰好是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$, 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满秩阵, 从而 $|\boldsymbol{D}|\neq 0$.

□

定义 0.2 (主子式)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行和第 $i_1,\cdots,i_r$ 列交叉点上的元素组成的子式称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主子式**.

命题 0.20

若 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵或反对称阵且秩等于 r, 求证:$\boldsymbol{A}$ 必有一个 r 阶主子式不等于零.

证明 证法一: 由对称性或反对称性, 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的极大无关组, 则由命题**??**它的第 $i_1,\cdots,i_r$ 列也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大无关组, 因此由命题 0.19可知, 它们交叉点上的元素组成的 r 阶主子式不等于零.

证法二:设 A 的行向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 列向量分别为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 A 行向量的极大无关组, 用行对换可将这些行向量换到前 r 行, 再用对称的列对换可将列向量 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 换到前 r 列, 得到的矩阵记为 B, 则 B 仍是对称矩阵 (或反对称矩阵), 且 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行和列交点上的元素组成的主子式变成矩阵 B 的第 r 个顺序主子式 $|D|$. 只要证明 $|D|\neq 0$ 即可. 由于 B 的后 $n-r$ 个行向量都是前 r 个行向量的线性组合, 故可用第三类初等行变换将它们消去. 接着进行对称的第三类初等列变换, 得到的矩阵记为 C, 则 C 仍是对称矩阵 (或反对称矩阵). 由对称性 (或反对称性) 可知 C 具有下列形式:

$$C=\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

因为 C 的秩等于 A 的秩, 故 D 的秩等于 r, 从而 $|D|\neq 0$.

□

命题 0.21 (反对称阵的秩必为偶数)

证明: 反对称阵的秩必为偶数.

证明 用反证法, 设反对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $2r+1$, 则由命题 0.20可知,$\boldsymbol{A}$ 有一个 $2r+1$ 阶主子式 $|\boldsymbol{D}|$ 不等于零. 注意到反对称阵的主子式是反对称行列式, 而由命题**??**奇数阶反对称行列式的值等于零, 从而 $|\boldsymbol{D}|=0$, 矛盾.

□