实变函数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合之间的运算

定理 1.1

设有集合 A, B 与 C, 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

♡

定义 1.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 存在 \alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 对一切 \alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

♣

定理 1.2

(1) 广义交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) 分配律:

(i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;

(ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$.

(3) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(4) $\bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$.

♡

(1)

(2)

(3) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in I$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$. 故 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(4) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in I$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 即 $x \in$

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

定义 1.2

设 A,B 是两个集合, 称 $\{x : x\in A, x\notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$.

在上述定义中, 当 $B\subset A$ 时, 称 $A-B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集, 我们称 X 为全集. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x\in X : x\notin B\}.$$

命题 1.1 (集合的差与补的基本性质)

(1) $A\cup A^c = X, A\cap A^c = \varnothing, (A^c)^c = A, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.

(2) $A-B = A\cap B^c$.

(3) 若 $A\supset B$, 则 $A^c\subset B^c$; 若 $A\cap B=\varnothing$, 则 $A\subset B^c$.

(4) $A-B^c = B-A^c$.

证明

(1)

(2)

(3)

(4) $x\in A-B^c \Longleftrightarrow x\in A$且$x\notin B^c \Longleftrightarrow x\in A$且$x\in B \Longleftrightarrow x\in B$且$x\notin A^c \Longleftrightarrow x\in B-A^c$.

□

定理 1.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

证明 以 (i) 为例. 若 $x\in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x\notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, 即对一切 $\alpha\in I$, 有 $x\notin A_\alpha$. 这就是说, 对一切 $\alpha\in I$, 有 $x\in A_\alpha^c$. 故得 $x\in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

反之, 若 $x\in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$, 则对一切 $\alpha\in I$, 有 $x\in A_\alpha^c$, 即对一切 $\alpha\in I$, 有 $x\notin A_\alpha$. 这就是说,

$$x\notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, \quad x\in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

□

定义 1.3 (集合的对称差)

设 A,B 为两个集合, 称集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A\triangle B$.

命题 1.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A\triangle\varnothing = A, A\triangle A = \varnothing, A\triangle A^c = X, A\triangle X = A^c$.

(ii) 交换律:$A\triangle B = B\triangle A$.

(iii) 结合律:$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C).$$

(v) $A^c\triangle B^c = A\triangle B; A = A\triangle B$ 当且仅当 $B=\varnothing$.

(vi) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E\triangle A = B$(实际上 $E = B\triangle A$).

定义 1.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$.

命题 1.3

1. 当 $\{A_k\}$ 为递减集合列时, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k(\forall N\in\mathbb{N})$.
2. 当 $\{A_k\}$ 为递增集合列时, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k(\forall N\in\mathbb{N})$.

证明

1. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1}A_k\cap\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k$ 可知 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递减集合列可得

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_{N-1}\supset A_k, \forall k = N, N+1,\cdots.$$

因此 $\bigcap\limits_{k=1}^{N-1}A_k\supset\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k$, 故再根据 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1}A_k\cap\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k$ 可知 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\supset\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}A_k$.

2. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{N-1}A_k\cup\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k$ 可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\supset\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递增集合列可得

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_{N-1}\subset A_N.$$

因此 $\bigcup\limits_{k=1}^{N-1}A_k\subset A_N\subset\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k$, 故再根据 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{N-1}A_k\cup\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k$ 可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}A_k$.

□

定义 1.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}A_k\quad(j = 1,2,\cdots),$$

显然有 $B_j\supset B_{j+1}(j = 1,2,\cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty}B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 1.4

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列, 我们有

1. 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

2. 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明

1. 由于 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.3可知

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$

2. 由于 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 1.3可知

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

□

命题 1.5 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(\text{i})E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k); \quad (\text{ii})E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} (E \setminus A_k).$$

定理 1.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : 对任一自然数 j, 存在 k(k \geqslant j), x \in A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j 且 k \in \mathbb{N}\ s.t.\ x \in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : 存在自然数 j_0, 当 k \geqslant j_0 时, x \in A_k\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 且 k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 以 (ii) 为例. 若 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 反之, 若存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

由 (i) (ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

□

定义 1.6 (直积集)

设 X, Y 是两个集合, 称一切有序“元素对” (x, y)(其中 $x \in X, y \in Y$) 形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

其中 $(x, y) = (x', y')$ 是指 $x = x', y = y'$.$X \times X$ 也记为 X^2.

1.2 映射与基数

定义 1.7 (映射的像集)

对于 $f : X \to Y$ 以及 $A \subset X$, 我们记

$$f(A) = \{y \in Y : x \in A, y = f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的 **(映) 像集** ($f(\varnothing) = \varnothing$).

命题 1.6 (映射的像集的基本性质)

对于 $f: X \to Y$, 我们有

(i) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)\,(A_\alpha \in X, \alpha \in I)$;

(ii) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)\,(A_\alpha \in X, \alpha \in I)$.

♠

定义 1.8 (映射的原像集)

对于 $f: X \to Y$ 以及 $B \subset Y$, 我们记

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**.

♣

命题 1.7 (映射的原像集的基本性质)

对于 $f: X \to Y$, 我们有

(i) 若 $B_1 \subset B_2$, 则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)(A \subset Y)$;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \subset Y, \alpha \in I)$;

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \subset Y, \alpha \in I)$;

(iv) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c(B \subset Y)$.

♠

定义 1.9 (示性函数)

一般地, 对于 X 中的子集 A, 我们作

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

且称 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**或**示性函数**.

♣

命题 1.8 (示性函数的基本性质)

对于 X 中的子集 A, B, 我们有

(i) $A \neq B$ 等价于 $\chi_A \neq \chi_B$.

(ii) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

(iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(v) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$.

(vi) $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

♠

定义 1.10 (幂集)

设 X 是一个非空集合, 由 X 的一切子集 (包括 $\varnothing$,X 自身) 为元素形成的集合称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathcal{P}(X)$.

♣

笔记 例如, 由 n 个元素形成的集合 E 之幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

例题 1.1 单调映射的不动点 设 X 是一个非空集合, 且有 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A \subset B$ 的任意 A, B, 必有 $f(A) \subset f(B)$, 则存在 $T \subset \mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T) = T$.

证明 作集合 S,T:

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且} A \subset f(A)\},$$
$$T = \bigcup_{A \in S} A (\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上, 因为由 $A \in S$ 可知 $A \subset f(A)$, 从而由 $A \subset T$ 可得 $f(A) \subset f(T)$. 根据 $A \in S$ 推出 $A \subset f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A \in S} A \subset f(T), \quad T \subset f(T).$$

另一方面, 又从 $T \subset f(T)$ 可知 $f(T) \subset f(f(T))$. 这说明 $f(T) \in S$, 我们又有 $f(T) \subset T$. □

定义 1.11 (集合之间的对等关系)

设有集合 A 与 B. 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射, 则称集合 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$. ♣

命题 1.9 (对等关系的基本性质)

设有集合 A 与 B, 则

(i) $A \sim A$;

(ii) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(iii) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$. ♠

引理 1.1 (映射分解定理)

若有 $f : X \to Y, g : Y \to X$, 则存在分解

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim},$$

其中 $f(A) = B, g(B^{\sim}) = A^{\sim}, A \cap A^{\sim} = \varnothing$ 以及 $B \cap B^{\sim} = \varnothing$. ♡

证明 对于 X 中的子集 E(不妨假定 $Y \setminus f(E) \neq \varnothing$), 若满足

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing,$$

则称 E 为 X 中的分离集. 现将 X 中的分离集的全体记为 Γ, 且作其并集

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E.$$

我们有 $A \in \Gamma$. 事实上, 对于任意的 $E \in \Gamma$, 由于 $A \supset E$, 故从

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing$$

可知 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$, 从而有 $A \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$. 这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元.

现在令 $f(A) = B, Y \setminus B = B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim}) = A^{\sim}$. 首先知道

$$Y = B \cup B^{\sim}.$$

其次, 由于 $A \cap A^{\sim} = \varnothing$, 故又易得 $A \cup A^{\sim} = X$. 事实上, 若不然, 那么存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \notin A \cup A^{\sim}$. 现在作 $A_0 = A \cup \{x_0\}$, 我们有

$$B = f(A) \subset f(A_0), \quad B^{\sim} \supset Y \setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim} \supset g(Y \setminus f(A_0))$. 这就是说,$A$ 与 $g(Y \setminus f(A_0))$ 不相交. 由此可得

$$A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾. □

定理 1.5 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等,Y 与 X 的某个真子集对等, 则 $X \sim Y$.

笔记 特例: 设集合 A, B, C 满足下述关系:

$$C \subset A \subset B.$$

若 $B \sim C$, 则 $B \sim A$.

证明 由题设知存在单射 $f: X \to Y$ 与单射 $g: Y \to X$, 根据映射分解定理知

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim}, \quad f(A) = B, \quad g(B^{\sim}) = A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f: A \to B$ 以及 $g^{-1}: A^{\sim} \to B^{\sim}$ 是一一映射, 因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in A^{\sim}. \end{cases}$$

这说明 $X \sim Y$. □

定义 1.12 (集合的基数 (或势))

设 A, B 是两个集合, 如果 $A \sim B$, 那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 可见, 凡是互相对等的集合均具有相同的基数.

如果用 α 表示这一相同的基数, 那么 $\overline{\overline{A}} = \alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B, 记 $\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β, 记为

$$\alpha \leqslant \beta.$$

若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则称 α 小于 β(或 β 大于 α), 记为

$$\alpha < \beta \quad (\text{或} \beta > \alpha).$$

显然, 若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$, 则由Cantor - Bernstein 定理可知 $\alpha = \beta$.

定义 1.13 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合. 如果存在自然数 n, 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 且用同一符号 n 记 A 的基数. 由此可见, 对于有限集来说, 其基数可以看作集合中元素的数目. 若一个集合不是有限集, 则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数.

定义 1.14 (自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数 · 可列集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$(读作阿列夫 (Aleph, 希伯来文) 零). 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$, 则 A 叫作**可列集**. 这是由于 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 而 $A \sim \mathbb{N}$, 故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来, 附以下标, 就有

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

定理 1.6

任一无限集 E 必包含一个可列子集.

笔记 这个定理说明, 在众多的无限集中, 最小的基数是 $\aleph_0$.

证明 任取 E 中一元, 记为 a_1; 再从 $E \setminus \{a_1\}$ 中取一元, 记为 $a_2, \cdots$. 设已选出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 因为 E 是无限集, 所以

$$E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing.$$

于是又从 $E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中可再选一元, 记为 a_{n+1}. 这样, 我们就得到一个集合

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集. □

定理 1.7

设 A 是无限集且其基数为 α. 若 B 是至多可列集, 则 $A \cup B$ 的基数仍为 α.

证明 不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$,$A \cap B = \varnothing$, 且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

我们作映射 f 如下:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= a_{2i}, \quad a_i \in A_1; \\ f(b_i) &= a_{2i-1}, \quad b_i \in B; \\ f(x) &= x, \quad x \in A_2. \end{aligned}$$

显然,f 是 $A \cup B$ 到 A 上的一一映射. □

定理 1.8

集合 A 为无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等.

证明 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取 A 中一个非空有限子集 B, 则由定理 1.7立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{((A \setminus B) \cup B)}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故 $A \sim (A \setminus B)$. □

定理 1.9

$[0, 1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 不是可数集.

证明 只需讨论 $(0, 1]$. 为此, 采用二进位制小数表示法:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1. 显然,$(0, 1]$ 与全体二进位制小数一一对应.

若在上述表示式中把 $a_n = 0$ 的项舍去, 则得到 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$, 这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1 = n_1, \quad k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$, 则 $(0, 1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应.

现在假定 $(0, 1]$ 是可数的, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{aligned} &(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \cdots, k_i^{(1)}, \cdots), \\ &(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \cdots, k_i^{(2)}, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \cdots, k_i^{(i)}, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

但这是不可能的, 因为 $(k_1^{(1)} + 1, k_2^{(2)} + 1, \cdots, k_i^{(i)} + 1, \cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$, 而它并没有被排列出来. 这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的, 也就是说 $(0, 1]$ 是不可数集. □

定义 1.15 ($\mathbb{R}$ 的基数 · 不可数集)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$).

笔记 易知 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c = \aleph_1$.

定理 1.10

设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 A_k 的基数都是连续基数, 则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数.

证明 不妨假定 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$, 且 $A_k \sim [k, k+1)$, 我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

□

定理 1.11 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合, 则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$(由 A 的一切子集所构成的集合族) 不对等.

笔记 易知集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等, 即存在一一映射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$. 我们作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

于是有 $y \in A$, 使得 $f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$. 现在分析一下 y 与 B 的关系:

(i) 若 $y \in B$, 则由 B 的定义可知 $y \notin f(y) = B$;

(ii) 若 $y \notin B$, 则由 B 的定义可知 $y \in f(y) = B$.

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射, 即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的. □

1.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

1.3.1 点集的直径、点的 (球) 邻域、矩体

定义 1.16 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的运算)

记一切有序数组 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体为 $\mathbb{R}^n$, 其中 $\xi_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是实数, 称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标, 并定义运算如下:

(i) 加法: 对于 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 以及 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 令

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_n);$$

(ii) 数乘: 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令 $\lambda x = (\lambda\xi_1, \cdots, \lambda\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

在上述两种运算下构成一个向量空间. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 记

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),$$

其中除第 i 个坐标为 1, 外其余皆为 0.$e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的基底, 从而 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的 n 维向量空间, 并称 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**向量**或**点**. 当每个 ξ_i 均为有理数时,$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 称为**有理点**.

定义 1.17

设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$|x| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的**模**或**长度**.

命题 1.10 (向量的模的性质)

设 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

(i) $|x|\geqslant 0$,$|x|=0$ 当且仅当 $x=(0,\cdots,0)$;

(ii) 对任意的 $a\in\mathbb{R}$, 有 $|ax|=|a||x|$;

(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(iv) 设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, 则有

$$(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)^2\leqslant(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2).$$

证明 (i),(ii) 的结论是明显的;(iii) 是 (iv) 的推论. 因此我们只证明 (iv).

只需注意到函数

$$f(\lambda)=(\xi_1+\lambda\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n+\lambda\eta_n)^2$$

是非负的 (对一切 λ), 由 λ 的二次方程 $f(\lambda)$ 的判别式小于或等于零即得.(iv) 就是著名的 Cauchy - Schwarz 不等式.
□

定义 1.18 (距离空间)

一般地说, 设 X 是一个集合. 若对 X 中任意两个元素 x 与 y, 有一个确定的实数与之对应, 记为 $d(x,y)$, 它满足下述三条性质: 对 $\forall,x,y,z\in X$, 都有

(i) $d(x,y)\geqslant 0$,$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则认为在 X 中定义了距离 d, 并称 (X,d) 为**距离空间**.

笔记 因而 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 其中 $d(x,y)=|x-y|$. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为***n* 维欧氏空间**.

注 由 (iii) 可直接推出对 $\forall,x,y,z\in X$, 都有

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

定义 1.19 (点集的直径与有界集)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合, 令

$$\operatorname{diam}(E)=\sup\{|x-y|:x,y\in E\},$$

称为点集 E 的**直径**. 若 $\operatorname{diam}(E)<+\infty$, 则称 E 为**有界集**.

命题 1.11 (有界集的充要条件)

E 是有界集的充要条件是, 存在 $M>0$, 使得 $\forall x\in E$ 都满足 $|x|\leqslant M$.

证明 由有界集的定义易得. □

定义 1.20 (点的 (球) 邻域)

设 $x_0\in\mathbb{R}^n$,$\delta>0$, 称点集

$$\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<\delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的**开球**, 也称为 x_0 的 **(球) 邻域**, 记为 $B(x_0,\delta)$, 从而称

$$\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|\leqslant\delta\}$$

为**闭球**, 记为 $C(x_0,\delta)$.$\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的球面是

$$\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=\delta\}.$$

定义 1.21 (矩体)

设 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 皆为实数, 且 $a_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$, 称点集

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) : a_i<\xi_i<b_i\ (i=1,2,\cdots,n)\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开矩体** ($n=2$ 时为矩形,$n=1$ 时为区间), 即直积集

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n).$$

类似地,$\mathbb{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],\quad (a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n],$$

称 $b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为**矩体的边长**. 若各边长都相等, 则称矩体为**方体**.
矩体也常用符号 I,J 等表示, 其**体积**用 $|I|,|J|$ 等表示.

命题 1.12 (矩体的直径与体积)

若 $I=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$, 则

$$\operatorname{diam}(I)=[(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2]^{\frac{1}{2}},\quad |I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

定义 1.22

设 $x_k\in\mathbb{R}^n(k=1,2,\cdots)$. 若存在 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**收敛 (于 x 的) 点列**, 称 x 为它的**极限**, 并简记为

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x.$$

定义 1.23 (Cauchy 列)

称 $\{x_k\}$ 为 **Cauchy 列**或**基本列**, 若 $\lim\limits_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0$. 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $k,l>N$ 时, 有

$$|x_k-x_l|<\varepsilon.$$

定理 1.12

$x_k(k=1,2,\cdots)$ 是收敛列的充分必要条件是 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 即

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0.$$

证明 若令 $x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\}$,$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i|\leqslant|x_k-x|\leqslant|\xi_1^{(k)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(k)}-\xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立. 故可知 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 收敛于 x 的充分必要条件是, 对每个 i, 实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i. 由此根据实数列收敛的 Cauchy 收敛准则可知结论成立. □

1.3.2 点集的极限点

定义 1.24 (极限点、导集与完全集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$. 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - x| = 0,$$

则称 x 为 E 的**极限点**或**聚点**.E 的极限点全体记为 E', 称为 E 的**导集**.

若 $E = E'$, 则 E 称为**完全集**.

笔记 显然, 有限集是不存在极限点的.

定理 1.13 (一个点是极限点的充要条件)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $x \in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 有

$$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing.$$

证明 若 $x \in E'$, 则存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$|x_k - x| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

从而对任意的 $\delta > 0$, 存在 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $|x_k - x| < \delta$, 即

$$x_k \in B(x,\delta) \quad (k \geqslant k_0).$$

反之, 若对任意的 $\delta > 0$, 有 $(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$, 则令 $\delta_1 = 1$, 可取 $x_1 \in E, x_1 \neq x$ 且 $|x - x_1| < 1$. 令

$$\delta_2 = \min\left(|x - x_1|, \frac{1}{2}\right),$$

可取 $x_2 \in E, x_2 \neq x$ 且 $|x - x_2| < \delta_2$. 继续这一过程, 就可得到 E 中互异点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x - x_k| < \delta_k$, 即

$$\lim_{k\to\infty} |x - x_k| = 0.$$

这说明 $x \in E'$. □

定义 1.25 (孤立点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 中的点 x 不是 E 的极限点, 即存在 $\delta > 0$, 使得

$$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E = \varnothing,$$

则称 x 为 E 的**孤立点**, 即 $x \in E \setminus E'$.

定理 1.14 (导集的性质)

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$.

证明 因为 $E_1 \subset E_1 \cup E_2, E_2 \subset E_1 \cup E_2$, 所以

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)',$$

从而有 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$. 反之, 若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$, 则存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

显然, 在 $\{x_k\}$ 中必有互异点列 $\{x_{k_i}\}$ 属于 E_1 或属于 E_2, 而且

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x.$$

在 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 时, 有 $x \in E_1'$, 否则 $x \in E_2'$. 这说明

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'.$$

□

定理 1.15 (Bolzano - Weierstrass 定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

证明 首先从 E 中取出互异点列 $\{x_k\}$. 显然,$\{x_k\}$ 仍是有界的, 而且 $\{x_k\}$ 的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个坐标所形成的实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是有界数列. 其次, 根据 $\mathbb{R}^1$ 的 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 从 $\{x_k\}$ 中可选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$, 使得 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第一个坐标形成的数列是收敛列; 再考查 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第二个坐标形成的数列, 同理可从中选出 $\{x_k^{(2)}\}$, 使其第二个坐标形成的数列成为收敛列, 此时其第一坐标数列仍为收敛列 (注意, 收敛数列的任一子列必收敛于同一极限),······至第 n 步, 可得到 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_k^{(n)}\}$, 其一切坐标数列皆收敛, 从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是收敛点列, 设其极限为 x. 由于 $\{x_k^{(n)}\}$ 是互异点列, 故 x 为 E 的极限点. □

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

1.4.1 闭集

定义 1.26 (闭集与闭包)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 $E\supset E'$(即 E 包含 E 的一切极限点), 则称 E 为**闭集** (这里规定空集为闭集). 记 $\overline{E}=E\cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包** (E 为闭集就是 $E=\overline{E}$).

定义 1.27 (稠密子集)

若 $A\subset B$ 且 $\overline{A}=B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 1.16 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1,F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1\cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;
(ii) 若 $\{F_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F=\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集.
(iii) 设 $E_\alpha\subset\mathbb{R}^n(\alpha\in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{E_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha},\quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha}\subset\bigcap_{\alpha\in I}\overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\subset\mathbb{R}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k=(0,1]$. 此例还说明

$$[0,1]=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k}\neq\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}=(0,1]\,.$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1\cup F_2}&=(F_1\cup F_2)\cup(F_1\cup F_2)'\\&=(F_1\cup F_2)\cup(F_1'\cup F_2')\\&=(F_1\cup F_1')\cup(F_2\cup F_2')\\&=\overline{F_1}\cup\overline{F_2}\end{aligned}$$

可知, 若 F_1,F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1\cup F_2}=F_1\cup F_2$. 即 $F_1\cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 1.17 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k,F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切} k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

1.4.2 开集

定义 1.28 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 1.18 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集 (有限个开集的交集是开集);

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$.

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c (\alpha \in I)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcap\limits_{\alpha \in I} G_\alpha^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G_k^c (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x \in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x \notin G^c$, 可知存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$.
反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$, 则

$$B(x, \delta) \cap G^c = \varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 1.29 (内点与边界点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 对 $x \in E$, 若存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x \in \overline{E}$ 但 $x \notin \mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E.

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 1.19 (开集构造定理)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间 (这里也包括 $(-\infty, a)$,$(b, +\infty)$ 以及 $(-\infty, +\infty)$) 的并集;

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(a-\delta, a+\delta) \subset G$. 现在令

$$a' = \inf\{x : (x, a) \subset G\}, \quad a'' = \sup\{x : (a, x) \subset G\}$$

(这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$), 显然 $a' < a < a''$ 且 $(a', a'') \subset G$. 这是因为对区间 (a', a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a' < z \leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a' < x < z$ 且 $(x, a) \subset G$, 即 $z \in G$. 我们称这样的开区间 (a', a'') 为 G(关于点 a) 的**构成区间**I_a.

如果 $I_a = (a', a'')$,$I_b = (b', b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a < b$. 若

$$I_a \cap I_b \neq \varnothing,$$

则有 $b' < a''$. 于是令 $\min\{a', b'\} = c$,$\max\{a'', b''\} = d$, 则有 $(c, d) = (a', a'') \cup (b', b'')$. 取 $x \in I_a \cap I_b$, 则 $I_x = (c, d)$ 是构成区间, 且

$$(c, d) = (a', a'') = (b', b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点 (坐标皆为整数) 分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G \setminus \bigcup_{J \in H_0} J$$

(J 表示半开闭二进方体) 内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体. 这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x\mathbb{R}^n, k\right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x, x') < 1/k$, 其中 $k > 2/\delta$, 从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x', 1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 1.30 (开覆盖)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x \in E$, 存在 $G \in \Gamma$, 使得 $x \in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ(关于 E) 的一个**子覆盖**.

引理 1.2

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖.

定理 1.20 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖.

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right\} \quad (n=1,2,\cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 1.2, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k=1,2,\cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1} (k=1,2,\cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F \subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0 \in L_k (k=1,2,\cdots)$, 即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c (k=1,2,\cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 1.21

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集.

证明 设 $y \in E^c$, 则对于每一个 $x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing.$$

显然,$\{B(x, \delta_x) : x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 1.31 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**.

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 1.21表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 1.32 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点** (在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续). 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$.

♣

命题 1.13 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

♠

1.4.3 Borel 集

定义 1.33 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集.

♣

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 1.2 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$$

为 F_σ 集.

例题 1.3 函数连续点的结构 若 $f(x)$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集.

证明 令 $\omega_f(x)$ 为 $f(x)$ 在 x 点的振幅, 易知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0) = 0$. 由此可知 $f(x)$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

因为 $\{x \in G : \omega_f(x) < 1/k\}$ 是开集, 所以 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集. □

定义 1.34 (σ-代数)

设 Γ 是由集合 X 的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

(i) $\varnothing \in \Gamma$;

(ii) 若 $A \in \Gamma$, 则 $A^c \in \Gamma$;

(iii) 若 $A_n \in \Gamma$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$,

这时称 Γ 是 (X 上的) 一个 **σ-代数**.

♣

命题 1.14 (σ-代数的基本性质)

若 Γ 是 X 上的一个 σ-代数, 则

(i) 若 $A_n \in \Gamma(n=1,2,\cdots,m)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,$\bigcap\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,;

(ii) 若 $A_n \in \Gamma(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma;$$

(iii) 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \setminus B \in \Gamma$;

(iv) $X \in \Gamma$.

证明 由 σ-代数的定义立得. □

定义 1.35 (生成 σ-代数)

设 Σ 是集合 X 的一些子集所构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ-代数 Γ(即若 $A \in \Sigma$, 必有 $A \in \Gamma$, 这样的 Γ 是存在的, 如 $\mathcal{P}(X)$). 记包含 Σ 的最小 σ-代数为 $\Gamma(\Sigma)$. 也就是说, 对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ', 若 $A \in \Gamma(\Sigma)$, 则 $A \in \Gamma'$, 称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 Σ **生成的 σ-代数**.

定义 1.36 (Borel 集)

由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 **Borel 集**.

命题 1.15 (Borel 集的基本性质)

$\mathbb{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集皆为 Borel 集;

任一 Borel 集的补集是 Borel 集;Borel 集列的并、交、上 (下) 限集皆为 Borel 集.

笔记 例如,$F_{\sigma\delta}$ 集 (可数个 F_σ 集的交集) 是 Borel 集.

证明 证明是显然的. □

例题 1.4 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $f(x)$ 的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$$

是 G_δ 型集, 其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$.

证明 (i) 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 $f(x)$ 的连续点. 由题设知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0, 使得 $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3, \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3, \quad x \in U(x_0, \delta),$$

从而对 $x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad U(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\varepsilon)$. 又由 ε 的任意性, 可推知

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设 $x_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$. 对 $\varepsilon > 0$, 取 $m > 3/\varepsilon$. 由于 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$, 故存在 k_0, 使得 $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 从

而可得 $U(x_0,\delta_0)\subset E_{k_0}\left(\dfrac{1}{m}\right)$, 即

$$|f_{k_0}(x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{3},\quad x\in U(x_0,\delta_0).$$

注意到 $f_{k_0}(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 又有 $\delta_1>0$, 使得

$$|f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad x\in U(x_0,\delta_1).$$

记 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, 则当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 这说明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. □

定义 1.37 (Baire 第一函数类)

称区间 I 上连续函数列的极限函数 $f(x)$ 的全体为 **Baire 第一函数类**, 记为 $f\in B_1(I)$. ♣

定理 1.22

若 $f_n\in B_1(\mathbb{R})$, 且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f\in B_1(\mathbb{R})$. ♡

证明 事实上, 由题设知, 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$, 使得

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<1/2^{k+1}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

这里不妨认定 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 考查 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]$, 因为我们有

$$\begin{aligned}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|&\leqslant |f_{n_{k+1}}(x)-f(x)|+|f_{n_k}(x)-f(x)|\\&<\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2^k}\quad (x\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

所以 $g(x)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]\in B_1(\mathbb{R})$. 显然有 $g(x)=f(x)-f_{n_1}(x)$, 即 $f(x)=g(x)+f_{n_1}(x)$. 证毕. □

命题 1.16

$\mathbb{R}$ 中存在非 $F_{\sigma\delta}$ 集、非 $F_{\delta\delta\sigma}$ 集等等. ♠

定理 1.23 (Baire 定理)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 即 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k, F_k\ (k=1,2,\cdots)$ 是闭集. 若每个 F_k 皆无内点, 则 E 也无内点. ♡

证明 若 E 有内点, 设为 x_0, 则存在 $\delta_0>0$, 使 $\overline{B}(x_0,\delta_0)\subset E$. 因为 F_1 是无内点的, 所以必存在 $x_1\in B(x_0,\delta_0)$, 且有 $x_1\notin F_1$. 又因为 F_1 是闭集, 所以可以取到 $\delta_1(0<\delta_1<1)$, 使得

$$\overline{B}(x_1,\delta_1)\cap F_1=\varnothing,$$

同时有 $\overline{B}(x_1,\delta_1)\subset B(x_0,\delta_0)$. 再从 $\overline{B}(x_1,\delta_1)$ 出发以类似的推理使用于 F_2, 则可得 $\overline{B}(x_2,\delta_2)\cap F_2=\varnothing$, 同时有 $\overline{B}(x_2,\delta_2)\subset B(x_1,\delta_1)$, 这里可以要求 $0<\delta_2<1/2$. 继续这一过程, 可得点列 $\{x_k\}$ 与正数列 $\{\delta_k\}$, 使得对每个自然数 k, 有

$$\overline{B}(x_k,\delta_k)\subset B(x_{k-1},\delta_{k-1}),\quad \overline{B}(x_k,\delta_k)\cap F_k=\varnothing,$$

其中 $0<\delta_k<1/k$. 由于当 $l>k$ 时, 有 $x_l\in B(x_k,\delta_k)$, 故

$$|x_l-x_k|<\delta_k<\frac{1}{k}.$$

这说明 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列 (Cauchy 列), 从而是收敛列, 即存在 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$.

此外, 从不等式

$$|x-x_k|\leqslant|x-x_l|+|x_l-x_k|<|x-x_l|+\delta_k,\quad l>k$$

立即可知 (令 $l \to \infty$)$|x - x_k| \leqslant \delta_k$. 这说明 $x \in \overline{B}(x_k, \delta_k)$, 即对一切 k,$x \notin F_k$. 这与 $x \in E$ 发生矛盾. □

例题 1.5 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

证明 事实上, 令 $\mathbb{Q} = \{r_k : k = 1, 2, \cdots\}$, 假定 $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, 式中 G_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 是开集, 则有表示式

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}\right),$$

这里的每个单点集 $\{r_k\}$ 与 G_i^c 皆为闭集, 而且从 $\overline{G_i} = \mathbb{R}^1$ 可知每个 G_i^c 是无内点的. 这说明 $\mathbb{R}$ 是可列个无内点之闭集的并集. 从而由 Baire 定理可知 $\mathbb{R}$ 也无内点, 这一矛盾说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集. □

定义 1.38

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**稠密集**; 若 $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**无处稠密集**; 可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**. ♣

例题 1.6 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列, 则 $G_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明 只需指出对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x, \delta)$, 均有 $G_0 \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 即可. 采用反证法: 假定存在闭球 $\overline{B}_0 = \overline{B}(x_0, \delta_0)$, 使得 $G_0 \cap \overline{B}_0 = \varnothing$, 则易知

$$\mathbb{R}^n = (G_0 \cap \overline{B}_0)^c = G_0^c \cup (\overline{B}_0)^c,$$

$$\overline{B}_0 = \mathbb{R}^n \cap \overline{B}_0 = G_0^c \cap \overline{B}_0 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right)^c \cap \overline{B}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k^c \cap \overline{B}_0).$$

注意到 G_k^c 是无内点的闭集, 故由Baire 定理可知,$\overline{B}_0$ 也无内点, 矛盾. □

例题 1.7 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 若 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, 则 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集.

证明 注意到 $f(x)$ 的连续点集的表示, 只需指出 (例题 1.4)

$$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c \quad \left(G\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

是第一纲集. 对 $\varepsilon > 0$, 令

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leqslant \varepsilon\},$$

易知 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$,$F_k(\varepsilon) \subset E_k(\varepsilon)$, 从而有

$$\mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \mathring{E}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$\begin{aligned}
[G(\varepsilon)]^c &= \mathbb{R}^n \setminus G(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \setminus \mathring{F}_k(\varepsilon)] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon).
\end{aligned}$$

因为 $F_k(\varepsilon)$ 是闭集, 所以 $\partial F_k(\varepsilon)$ 是无处稠密集. 这说明 $(G(\varepsilon))^c$ 是第一纲集. □

例题 1.8 设 $f \in C([0, 1])$, 且令

$$f_1'(x) = f(x), f_2'(x) = f_1(x), \cdots, f_n'(x) = f_{n-1}(x), \cdots.$$

若对每一个 $x \in [0, 1]$, 都存在自然数 k, 使得 $f_k(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 只需指出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的一个稠密集上为 0 即可. 对此, 我们在 $[0, 1]$ 中任取一个闭子区间 I, 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然, 每个 F_k 都是闭集, 且 $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. 根据Baire 定理可知, 存在 F_{k_0}, 它包含一个区间 (α,β). 因为在 (α,β) 上 $f_{k_0}(x) = 0$, 所以 $f(x) = 0, x \in (\alpha,\beta)$. 注意到 $(\alpha,\beta) \subset I$, 即得所证. □

1.4.4 Cantor(三分) 集

定义 1.39

设 $[0,1] \subset \mathbb{R}$, 将 $[0,1]$ 三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为 F_1, 即

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2};$$

再将 F_1 中的区间 $[0,1/3]$ 及 $[2/3,1]$ 各三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad \text{及} \quad I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

记 F_1 中留存的部分为 F_2, 即

$$\begin{aligned} F_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &= F_{2,1} \cup F_{2,2} \cup F_{2,3} \cup F_{2,4}. \end{aligned}$$

一般地说 (归纳定义), 设所得剩余部分为 F_n, 则将 F_n 中每个 (互不相交) 区间三等分, 并移去中央三分开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而我们得到集合列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

作点集 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 我们称 C 为 **Cantor(三分) 集**.

♣

定理 1.24 (Cantor 集的基本性质)

(1) C 是非空有界闭集, 因此是紧集.
(2) $C = C'$, 即 C 为完全集.
(3) C 无内点.
(4) Cantor 集的基数是 c.
(5) $[0,1] \setminus C$ 的长度的总和为 1.

♡

证明

(1) 因为每个 F_n 都是非空有界闭集, 而且 $F_n \supset F_{n+1}$, 所以根据 Cantor 闭集套定理, 可知 C 不是空集 (实际上,F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 中每个闭区间的端点都是没有被移去的, 即都是 C 中的点). 显然,C 是闭集.

(2) 设 $x \in C$, 则 $x \in F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即对每个 n,x 属于长度为 $1/3^n$ 的 2^n 个闭区间中的一个. 于是, 对任一 $\delta > 0$, 存在 n, 满足 $1/3^n < \delta$, 使得 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 此闭区间有两个端点, 它们是 C 中的点且总有一个不是 x. 这就说明 x 是 C 的极限点, 故得 $C' \supset C$. 由 (i) 知 $C = C'$.

(3) 设 $x \in C$, 给定任一区间 $(x-\delta, x+\delta)$, 取 $2/3^n < \delta$. 因为 $x \in F_n$, 所以 F_n 中必有某个长度为 $1/3^n$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 然而, 在构造 C 集的第 $n+1$ 步时, 将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间. 这说明 $(x-\delta, x+\delta)$ 不含于 C.

(4) 事实上, 将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0, 2$$

一一对应. 从而知 C 为连续基数集 (与 $(0,1]$ 的二进位小数比较).

(5) 由 C 的定义可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

□

定义 1.40 (类 Cantor 集)

设 δ 是 $(0,1)$ 内任意给定的数, 考虑在 $[0,1]$ 区间, 取 $p=(1+2\delta)/\delta$, 采用类似于 Cantor 集的构造过程:
第一步, 移去长度为 $1/p$ 的同心开区间;
第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间;
第三步, 在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间. 继续此过程, 可得一列移去的开区间, 记其并集为 G(开集), 我们称 $C_p=[0,1]\setminus G$ 为**类 Cantor 集** (当 $p=3$ 时,C_p 就是 Cantor(三分) 集). 类 Cantor 集也称为 **Harnack 集**.

注 若要在 $\mathbb{R}^n$ 的单位方体 $[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ 中构造具有类似性质的集合, 则只需取 $C\times C\times\cdots\times C$($C$ 是 $[0,1]$ 中的类 Cantor 集) 即可.

定理 1.25 (类 Cantor 集的基本性质)

(1) G 的总长度为 $\delta(0<\delta<1$ 是任意给定的数$)$ 的稠密开集.

(2) C_p 是非空完全集, 且没有内点.

证明

(1) 由 G 的定义可知 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

(2)

□

定义 1.41 (Cantor 函数)

设 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, 其中的点我们用三进位小数

$$x = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0,1 \quad (i=1,2,\cdots)$$

来表示.

(i) 作定义在 C 上的函数 $\varphi(x)$. 对于 $x\in C$, 定义

$$\varphi(x) = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}, \quad \alpha_i = 0,1 \quad (i=1,2,\cdots).$$

(ii) 作定义在 $[0,1]$ 上的 $\Phi(x)$. 对于 $x\in[0,1]$, 定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y\in C, y\leqslant x\}.$$

我们称 $\Phi(x)$ 为 **Cantor 函数**.

定理 1.26 (Cantor 函数的性质)

设 $\Phi(x)=\sup\{\varphi(y):y\in C, y\leqslant x\}$ 为 Cantor 函数, 则有下列性质:

(1) $\varphi(C)=[0,1]$, 即 φ 是满射. 并且 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数.

(2) $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增连续函数. 此外, 在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上, $\Phi(x)$ 都是常数.

证明

(1) 因为 $[0,1]$ 中的点可用二进位小数表示, 所以由 φ 的定义有 $\varphi(C)=[0,1]$..

下面证明 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta_1,\beta_2,\cdots$ 是取 0 或 1 的数, 而且它们所表示的 C 中的数有下述关系:

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}<2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记 $k=\min\{i:\alpha_i\neq\beta_i\}$, 则我们有

$$\begin{aligned}0<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}&=\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^k}+\sum_{i>k}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}\\&\leqslant\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^k}+\sum_{i>k}\frac{2}{3^i}=\frac{\beta_k-\alpha_k+1}{3^k}.\end{aligned}$$

由此可知 $(\alpha_k<\beta_k)\alpha_k=0,\beta_k=1$, 从而得到

$$\begin{aligned}\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\frac{1}{2^k}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i}=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}\right).\end{aligned}$$

(2) 由 (2) 的结论及 Φ 的定义即得 Φ 的递增性. 因为 $\Phi([0,1])=[0,1]$, 所以由命题 6.7可知 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

□

例题 1.9 $E\subset\mathbb{R}$ 是完全集当且仅当 $E=\left(\bigcup_{n\geqslant1}(a_n,b_n)\right)^c$, 其中 (a_i,b_i) 与 (a_j,b_j) $(i\neq j)$ 无公共端点.

证明 **必要性**: 若 E 是完全集, 则 E 是闭集. 从而 E^c 是开集, 它是 E^c 内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的, 否则 E 中就会有孤立点了, 这是不可能的.

充分性: 首先, 由题设知 E 是闭集. 其次, 对任意的 $x\in E$, 如果 $x\notin E'$, 那么存在 $\delta>0$, 使得 $(x-\delta,x+\delta)\cap E=\{x\}$. 这说明 x 是某两个开区间的端点, 与假设矛盾. □

例题 1.10 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是完全集, 则 E 是不可数集.

证明 用反证法. 假定 $E=\{x_n\in\mathbb{R}^2:n=1,2,\cdots\}$.

(i) 选取 $y_1\in E\setminus\{x_1\}$, 则点 x_1 到 y_1 的距离大于 0. 存在以 y_1 为中心的闭正方形 Q_1,$Q_1\cap E$ 是紧集.

(ii) 看 $E\setminus\{x_2\}$. 因为 y_1 是 $E\setminus\{x_2\}$ 的极限点, 所以 $\mathring{Q}_1\cap(E\setminus\{x_2\})\neq\varnothing$. 又取 $y_2\in\mathring{Q}_1\cap(E\setminus\{x_2\})$, 并作以 y_2 为中心的闭正方形 Q_2:$Q_2\subset Q_1$,$x_1\notin Q_2$,$x_2\notin Q_2$, 可知 $(Q_1\cap E)\supset(Q_2\cap E)$ 是紧集. 如此继续做下去, 可得有界闭集套列 $\{Q_n\cap E\}$:$(Q_{n-1}\cap E)\supset(Q_n\cap E)$ $(n\in\mathbb{N})$, 而且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不在其内. 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(Q_n\cap E)=\varnothing,$$

导致矛盾. □

命题 1.17

任一非空完全集的基数均为 c.

证明 证明见那汤松著《实变函数论》的上册, 有高等教育出版社出版的中译本,1955 年. □

例题 1.11 设 $E=\left\{x\in[0,1]:x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/10^n,a_n=2\text{ 或}7\right\}$, 我们有

(i) E 是闭集;

(ii) $\overline{E} = c$;

(iii) E 在 $[0,1]$ 中不稠密.

证明 (i) 若有 $\{x_m\} \subset E$:$x_m \to x(m \to \infty)$, 则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/10^n \quad (b_n = 0, 1, 2, \cdots, 9).$$

如果 $|x_m - x| < 10^{-p}$, 那么在 $x \in E$ 时,$b_n = 2$ 或7$(n = 1, 2, \cdots, p-1)$. 这说明 E 是闭集.

(ii) 与 0 和 1 组成的数列类似,$\overline{E} = c$.

(iii) 注意到 $E \cap (0.28, 0.7) = \varnothing$, 故 E 不是稠密集. □

1.5 点集间的距离

定义 1.42

设 $x \in \mathbb{R}^n$,E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**; 若 E_1,E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的**距离**. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} \quad 或 \quad \inf\{d(E_1, y) : y \in E_2\}.$$

♣

命题 1.18 (点集间的距离的性质)

(1) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n, F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个非空点集, 则

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

(2) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空点集, 若 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$, 则 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$.

(3) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空闭集, 若 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$, 则 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$.

♠

注 若 (3) 中去掉 E_i 是闭集这个条件, 则结论不一定成立 (例如, 两个开球相切).

证明

(1) 由 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \supset E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 可知

$$\left\{(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \supset \{(x, y) | x \in F, y \in E_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \inf\left\{d(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \geqslant \inf\{d(x, y) | x \in F, y \in E_i\} = d(F, E_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

故

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geqslant \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

对 $\forall x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, 都存在 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $y \in E_j$. 于是

$$d(x, y) \geqslant d(F, E_j) \geqslant \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

故 $\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}$ 是 $\left\{d(x,y)|x\in F,y\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right\}$ 的一个下界. 因此

$$d\left(F,\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\inf\left\{d(x,y)|x\in F,y\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right\}\geqslant\min_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}.$$

综上,$d\left(F,\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right)=\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{d(F,E_i)\}$.

(2) 反证, 假设存在 $i\neq j$, 使得 $E_i\cap E_j\neq\varnothing$, 则任取 $x_0\in E_i\cap E_j$, 又由 $d(E_i,E_j)>0$ 可知, 对 $\forall x\in E_i,y\in E_j$, 都有 $d(x,y)\geq d(E_i,E_j)>0$. 这与 $d(x_0,x_0)=0,x_0\in E_i\cap E_j$ 矛盾!

(3) 反证, 假设存在 $i\neq j$, 使得 $d(E_i,E_j)=0$. 由 $d(E_i,E_j)=\inf\{d(x,y)\mid x\in E_i,y\in E_j\}$ 及下确界的定义可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in E_i$,$y_n\in E_j$, 使得 $d(x_n,y_n)<\dfrac{1}{n}$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=c.$$

再由 E_i,E_j 都是闭集可知 $c\in E_i\cap E_j$, 这与 $E_i\cap E_j=\varnothing$ 矛盾!

□

例题 1.12 在 $\mathbb{R}^2$ 中作点集

$$E_1=\{x=(\xi,\eta):-\infty<\xi<+\infty,\eta=0\},$$
$$E_2=\{y=(\xi,\eta):\xi\cdot\eta=1\},$$

则 $d(E_1,E_2)=0$.

证明 事实上, 当我们取 $x=(\xi,0)\in E_1$ 且 $y=(\xi,\eta)\in E_2$ 时, 由

$$d(E_1,E_2)\leqslant d(x,y)=|\eta|=\frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1,E_2)<\varepsilon$. 由此得

$$d(E_1,E_2)=0.$$

显然, 若 $x\in E$, 则 $d(x,E)=0$. 但反之, 若 $d(x,E)=0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x\notin E$ 时, 必有 $x\in E'$. □

定理 1.27

若 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0\in F$, 有

$$|x_0-y_0|=d(x_0,F).$$

证明 作闭球 $\overline{B}=\overline{B}(x_0,\delta)$, 使得 $\overline{B}\cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0,F)=d(x_0,\overline{B}\cap F).$$

$\overline{B}\cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0-y|$ 看作定义在 $\overline{B}\cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\overline{B}\cap F$ 上达到最小值, 即存在 $y_0\in\overline{B}\cap F$, 使得

$$|x_0-y_0|=\inf\{|x_0-y|:y\in\overline{B}\cap F\},$$

从而有 $|x_0-y_0|=d(x_0,F)$. □

定理 1.28

若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空点集, 则 $d(x,E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 x,y. 根据 $d(y,E)$ 的定义, 对任给的 $\varepsilon>0$, 必存在 $z\in E$, 使得 $|y-z|<d(y,E)+\varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned}d(x,E)&\leqslant|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|\\&<|x-y|+d(y,E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$d(x,E)-d(y,E)\leqslant |x-y|.$$

同理可证 $d(y,E)-d(x,E)\leqslant |x-y|$. 这说明

$$|d(x,E)-d(y,E)|\leqslant |x-y|.$$

□

推论 1.1

若 F_1,F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1\in F_1$,$x_2\in F_2$, 使得

$$|x_1-x_2|=d(F_1,F_2).$$

♡

引理 1.3

若 F_1,F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得

(i) $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ $(x\in\mathbb{R}^n)$;

(ii) $F_1=\{x:f(x)=1\}$,$F_2=\{x:f(x)=0\}$.

♡

证明 构造函数 $f(x)$:

$$f(x)=\frac{d(x,F_2)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

它就是所求的函数. □

定理 1.29 (连续延拓定理)

(1) 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)|\leqslant M$ $(x\in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)|\leqslant M,\quad g(x)=f(x),\quad x\in F.$$

(2) 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$g(x)=f(x),\quad x\in F.$$

♡

注 $\mathbb{R}^2$ 中存在由某些有理点构成的稠密集, 其中任意两点的距离为无理数.

证明 (1) 把 F 分成三个点集:

$$A=\left\{x\in F:\frac{M}{3}\leqslant f(x)\leqslant M\right\},$$

$$B=\left\{x\in F:-M\leqslant f(x)\leqslant\frac{-M}{3}\right\},$$

$$C=\left\{x\in F:\frac{-M}{3}<f(x)<\frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x)=\frac{M}{3}\cdot\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集, 所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 此外, 还有

$$|g_1(x)|\leqslant\frac{M}{3},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}M,\quad x\in F.$$

再在 F 上来考查 $f(x)-g_1(x)$(相当于上述之 $f(x)$), 并用类似的方法作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$. 此时由于 $f(x)-g_1(x)$ 的界是 $2M/3$, 故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2M}{3},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|(f(x)-g_1(x))-g_2(x)| \leqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{2M}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad x \in F.$$

继续这一过程, 可得在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (k=1,2,\cdots),$$

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{k} g_i(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{k} M, \quad x \in F \quad (k=1,2,\cdots).$$

上面的第一式表明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 是一致收敛的. 若记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 上面的第二式表明

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in F.$$

最后, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 得到

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \frac{M}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right) \\ &\leqslant \frac{M}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = M. \end{aligned}$$

(2) 令 $F(x) = \arctan f(x)$, 则 $|F(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}(x \in F)$. 于是由 (1) 可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $G(x)$ 满足

$$|G(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad G(x) = F(x), \quad x \in F.$$

取 $g(x) = \tan G(x)$, 则

$$f(x) = \tan F(x) = \tan G(x) = g(x), \quad x \in F.$$

故结论得证. □

第 2 章 Lebesgue 测度

2.1 点集的 Lebesgue 外测度

定义 2.1 (Lebesgue 外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体, 且有

$$E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 **L-覆盖** (显然, 这样的覆盖有很多, 且每一个 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum\limits_{k \geq 1} |I_k|$ (可以是 $+\infty$, $|I_k|$ 表示 I_k 的体积)). 称

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为} E \text{ 的} L - \text{覆盖} \right\}$$

为点集 E 的 **Lebesgue 外测度**, 简称**外测度**.

♣

注 显然, 若 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k \geq 1} |I_k| = +\infty,$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

定理 2.1 ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)

(1) 非负性: $m^*(E) \geq 0$, $m^*(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$;

(3) 次可加性: $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

♡

证明

(1) 这可从定义直接得出.

(2) 这是因为 E_2 的任一个 $L-$ 覆盖都是 E_1 的 $L-$ 覆盖.

(3) 不妨设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及每个自然数 k, 存在 E_k 的 $L-$ 覆盖 $\{I_{k,l}\}$, 使得

$$E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |I_{k,l}| < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

由此可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} |I_{k,l}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

显然, $\{I_{k,l} : k, l = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 $L-$ 覆盖, 从而有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论成立.

□

命题 2.1

$\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_0\}) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$. 同理, $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t_0, \xi_i, \cdots, \xi_n) : a_j \le \xi_j \le b_j, j \ne i\}$$

($n-1$ 维超平面块) 的外测度也为零.

证明 这是因为可作一开矩体 I, 使得 $x_0 \in I$ 且 $|I|$ 可任意地小. □

推论 2.1

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数点集, 则 $m^*(E) = 0$.

注 由此可知有理点集的外测度 $m^*(\mathbb{Q}^n) = 0$. 这里我们看到了一个虽然处处稠密但外测度为零的可列点集.

证明 由外测度的次可加性不难证明. □

命题 2.2

$[0, 1]$ 中的 Cantor 集 C 的外测度是零.

注 这个命题 2.2说明外测度为零的点集不一定是可列集.

证明 事实上, 因为 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中的 F_n (在构造 C 的过程中第 n 步所留存下来的) 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并集, 所以我们有

$$m^*(C) \le m^*(F_n) \le 2^n \cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C) = 0$. □

命题 2.3

设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(I) = m^*(\bar{I}) = |I|$.

证明 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作一开矩体 J, 使得 $J \supset \bar{I}$ 且 $|J| < |I| + \varepsilon$, 从而由外测度的单调性有

$$m^*(\bar{I}) \le |J| < |I| + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $m^*(\bar{I}) \le |I|$. 现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意的 $L-$ 覆盖, 则因为 $\bar{I}$ 是有界闭集, 所以存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖

$$\{I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_l}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{l} I_{i_j} \supset \bar{I}.$$

由外测度的单调性和次可加性可得

$$|I| \le \sum_{j=1}^{l} |I_{i_j}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

再由下确界是最大的下界可得 $|I| \le m^*(\bar{I})$, 从而我们有 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

又因为 $I \subset \bar{I}$, 所以由外测度的单调性可得 $m^*(I) \le m^*(\bar{I}) = |I|$. 同理可证 $|I| \le m^*(I)$, 故 $m^*(I) = |I| = m^*(\bar{I})$. □

引理 2.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\delta > 0$. 令

$$m_\delta^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E, \text{每个开矩体} I_k \text{ 的边长} < \delta\right\},$$

则 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.

笔记 这个引理告诉我们, 今后可以对点集 E 的 L-覆盖中的每个开矩体的边长做任意限制, 而不影响 E 的外测度的值.

证明 显然有 $m_\delta^*(E) \geq m^*(E)$. 为证明其反向不等式也成立, 不妨设 $m^*(E) < +\infty$. 由外测度的定义可知, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

对于每个 k, 我们把 I_k 分割成 $l(k)$ 个开矩体:

$$I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,l(k)},$$

它们互不相交且每个开矩体的边长都小于 $\delta/2$. 现在保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动, 边长扩大 $\lambda(1 < \lambda < 2)$ 倍做出开矩体, 并记为 $\lambda I_{k,i}$, 显然, 对每个 k, 有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|.$$

易知 $\{\lambda I_{k,i} : i = 1, 2, \cdots, l(k); k = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 的边长小于 δ 的 $L-$ 覆盖, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon),$$

从而可知 $m_\delta^*(E) \leq \lambda^n (m^*(E)+\varepsilon)$. 令 $\lambda \to 1$ 并注意到 ε 的任意性, 我们得到 $m_\delta^*(E) \leq m^*(E)$. 这说明 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.
□

定理 2.2

设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集. 若 $d(E_1, E_2) > 0$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

♡

证明 由外测度的次可加性可知, 只需证明 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$ 即可. 为此, 不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < +\infty$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作 $E_1 \cup E_2$ 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon,$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}(n \geq 2)$. 现在将 $\{I_k\}$ 分为如下两组:

$$\text{(i)} J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_1; \quad \text{(ii)} J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{l_k} \supset E_2. \tag{2.1}$$

且其中任一矩体皆不能同时含有 E_1 与 E_2 中的点. 否则, 若对任意的 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_1$ 或 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_2$, 其中 $J_{i_k} \in \{I_k\}$, 都存在 $m \in [1, k] \cap \mathbb{N}$, 使得 J_{i_m} 中同时含有 E_1 和 E_2 中的点. 设 $x_1 \in J_{i_m} \cap E_1$,$x_2 \in J_{i_m} \cap E_2$, 则由 $d(E_1, E_2) > 0$ 可知

$$d(x_1, x_2) \geqslant d(E_1, E_2) > 0.$$

又因为 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}(n \geq 2)$, 所以

$$d(x_1, x_2) \leqslant \frac{\sqrt{2} d(E_1, E_2)}{\sqrt{n}} < d(E_1, E_2) < d(x_1, x_2).$$

上式显然矛盾!(最大的矩体应为正方体, $\dfrac{\sqrt{2} d(E_1, E_2)}{\sqrt{n}}$ 为最大的矩体的对角线长) 故(2.1)式成立. 从而得

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon > \sum_{k \geq 1} |I_k| = \sum_{k \geq 1} |J_{i_k}| + \sum_{k \geq 1} |J_{l_k}| \\ \geq m^*(E_1) + m^*(E_2). \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可知 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$. □

推论 2.2

设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个点集. 若 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i).$$

证明 当 $n = 1$ 时结论显然成立. 假设当 $n = k$ 时结论成立, 现在考虑 $n = k + 1$ 的情形. 由点集间的距离的性质及 $d(E_i, E_j) > 0(i \neq j)$ 可知

$$d\left(E_{k+1}, \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \min_{i=1,2,\cdots,k} d(E_{k+1}, E_i) > 0.$$

故再由定理 2.2和归纳假设可得

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right) &= m^*\left(E_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = m^*(E_{k+1}) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \\ &= m^*(E_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} m^*(E_i) = \sum_{i=1}^{k+1} m^*(E_i). \end{aligned}$$

因此由数学归纳法可知结论成立. □

命题 2.4

设 $E \subset [a, b]$, $m^*(E) > 0$, $0 < c < m^*(E)$, 则存在 E 的子集 A, 使得 $m^*(A) = c$.

证明 记 $f(x) = m^*([a, x) \cap E)$, $a \leq x \leq b$, 则 $f(a) = 0$, $f(b) = m^*(E)$. 考查 x 与 $x + \Delta x$. 不妨设 $a \leq x < x + \Delta x \leq b$, 则由

$$[a, x + \Delta x) \cap E = ([a, x) \cap E) \cup ([x, x + \Delta x) \cap E)$$

可知 $f(x + \Delta x) \leq f(x) + \Delta x$, 即

$$f(x + \Delta x) - f(x) \leq \Delta x.$$

对 $\Delta x < 0$ 也可证得类似不等式. 总之, 我们有

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq |\Delta x|, \quad a \leq x \leq b.$$

这说明 $f \in C([a, b])$. 根据连续函数中值定理, 对 $f(a) < c < f(b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$. 取 $A = [a, \xi) \cap E$, 即得证. □

定理 2.3 (外测度的平移不变性)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 记 $E + \{x_0\} = \{x + x_0, x \in E\}$, 则

$$m^*(E + \{x_0\}) = m^*(E). \tag{2.2}$$

注 对集合做相同的平移并不会改变集合之间的关系 (交、并、差、补、子集等).

证明 首先, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体 I, 易知 $I + \{x_0\}$ 仍是一个开矩体且其相应边长均相等, $|I| = |I + \{x_0\}|$. 其次, 对 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k + \{x_0\}\}$ 仍是 $E + \{x_0\}$ 的 $L-$ 覆盖. 从而由

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k + \{x_0\}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

可知 (对一切 $L-$ 覆盖取下确界)

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq m^*(E).$$

反之, 考虑对 $E + x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移, 可得原点集 E. 同理又有

$$m^*(E) \leq m^*(E + \{x_0\}).$$

□

定理 2.4 (外测度的数乘)

设 $E \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

♡

证明 因为 $E \subset \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n)$ 等价于 $\lambda E \subset \bigcup_{n\geq 1}\lambda(a_n, b_n)$, $m^*([a_n, b_n]) = m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间 (α, β), 有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda| m^*((\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$. □

定义 2.2 (集合上的外测度)

设 X 是一个非空集合, μ^* 是定义在幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个取广义实值的集合函数, 且满足:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0, \mu^*(E) \geq 0\ (E \subset X)$;

(ii) 若 $E_1, E_2 \subset X, E_1 \subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;

(iii) 若 $\{E_n\}$ 是 X 的子集列, 则有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**外测度**.

若 (X, d) 是一个距离空间, 且其上的外测度 μ^* 还满足**距离外测度性质**: 当 $d(E_1, E_2) > 0$ 时, 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**距离外测度** (利用距离外测度性质可以证明开集的可测性).

♣

2.2 可测集与测度

定义 2.3 (可测集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为 **Lebesgue 可测集** (或 **m^*-可测集**) 或 E **可测**, 简称为**可测集**, 其中 T 称为**试验集** (这一定义可测集的等式也称为 **Carathéodory 条件**). 可测集的全体称为**可测集类**, 简记为 $\mathscr{M}$.

♣

定理 2.5 (集合可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E \in \mathscr{M}$ 的充要条件是对任一点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(T) < +\infty$, 都有

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{2.3}$$

成立.

♡

注 往后经常利用这个定理的充分性来证明一个集合可测. 但这个定理的必要性要弱于可测集的定义.

证明 必要性由可测集的定义立得. 下证充分性. 由外测度的次可加性可得

$$m^*(T) = m^*(T \cap \mathbb{R}^n) = m^*(T \cap (E \cup E^c)) = m^*((T \cap E) \cap (T \cup E^c)) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

总是成立的. 又因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (2.3) 式总成立, 故对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

即 $E \in \mathscr{M}$. □

定义 2.4 (零测集)

外测度为零的点集称为**零测集**.

注 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集. 从而根据外测度的次可加性知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集.

命题 2.5

1. 零测集的任一子集是零测集.
2. 零测集一定可测, 即若 $m^*(E)=0$, 则 $E\in\mathscr{M}$.

证明

1. 由外测度的单调性立得.
2. 事实上, 此时我们有

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\le m^*(E)+m^*(T)=m^*(T).$$

再由定理 2.5立得.

□

命题 2.6

若 $E_1\subset S$, $E_2\subset S^c$, $S\in\mathscr{M}$, 则有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

注 这个命题表明: 当两个集合由一个可测集分离开时, 其外测度就有可加性.

证明 事实上, 此时取试验集 $T=E_1\cup E_2$, 从 S 是可测集的定义得

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*((E_1\cup E_2)\cap S)+m^*((E_1\cup E_2)\cap S^c)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

□

推论 2.3

当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*((T\cap E_1)\cup(T\cap E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

证明 注意到 $T\cap E_1\in E_1$,$T\cap E_2\in E_1^c$, 而 $E_1\in\mathscr{M}$, 故由集合运算的性质和命题 2.6可知

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*((T\cap E_1)\cup(T\cap E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

□

推论 2.4

当 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^n E_k\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^n(T\cap E_k)\right)=\sum_{k=1}^n m^*(T\cap E_k).$$

证明 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n=m$ 时结论成立, 考虑 $n=m+1$ 的情况. 由于 $E_1,E_2,\cdots,E_{m+1}$ 皆互不相交, 因此 $\bigcup\limits_{k=1}^m E_k$ 和 E_{m+1} 也互不相交. 于是由集合运算的性质和推论 2.3以及归纳假设可得

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^{m+1}(T\cap E_k)\right)=m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\cup E_{m+1}\right)\right)=m^*\left(\left(T\cap\bigcup_{k=1}^m E_k\right)\cup(T\cap E_{m+1})\right)$$
$$=m^*\left(T\cap\bigcup_{k=1}^m E_k\right)+m^*\left(T\cap E_{m+1}\right)=\sum_{k=1}^m m^*\left(T\cap E_k\right)+m^*\left(T\cap E_{m+1}\right)=\sum_{k=1}^{m+1}m^*\left(T\cap E_k\right).$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

定理 2.6 (可测集的性质)

(1) $\varnothing \in \mathscr{M}$.

(2) 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $E^c \in \mathscr{M}$.

(3) 若 $E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$, 则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 以及 $E_1 \setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$. (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(4) 若 $E_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则其并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足**可数可加性** (或称为 $\sigma-$ 可加性).

(5) 若 $E_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则其交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也属于 $\mathscr{M}$.

(6) 如果 A 和 B 分别为 p 维和 q 维空间的可测集, 那么 $A \times B$ 是 $p+q$ 维空间的可测集, 测度为

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B).$$

证明

(1) 显然成立.

(2) 注意到 $(E^c)^c = E$, 从定义可立即得出结论.

(3) 对于任一集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 根据集合分解 (参阅图 2.1) 与外测度的次可加性, 我们有

$$\begin{aligned}
m^*(T) &\leq m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\
&= m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
&\leq m^*((T \cap E_1) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1) \cap E_2^c) \\
&\quad + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c).
\end{aligned}$$

又由 E_1, E_2 的可测性知, 上式右端就是

$$m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c) = m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T) = m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

也就是说 $E_1 \cup E_2$ 是可测集.

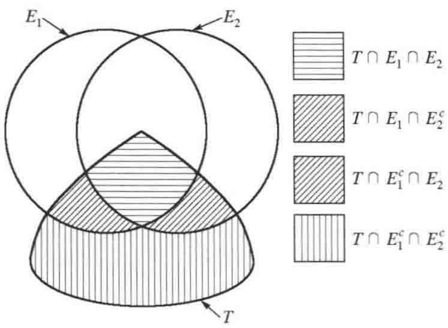

图 2.1

为证 $E_1 \cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ 即可. 又由 $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ 可知, $E_1 \setminus E_2$ 是可测集.

(4) 首先, 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交, 并令

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由 (3) 知每个 S_k 都是可测集, 从而对任一集 T, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(T \cap S_k) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T \cap E_i)\right) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &\xlongequal{\text{推论 2.4}} \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S_k^c). \end{aligned}$$

由于 $T \cap S_k^c \supset T \cap S^c$, 可知

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

令 $k \to \infty$, 就有

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

再由外测度的次可加性可得

$$\begin{aligned} m^*(T) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c) \geqslant m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T \cap E_i)) + m^*(T \cap S^c) \\ &= m^*(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + m^*(T \cap S^c) = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c). \end{aligned}$$

这说明 $S \in \mathscr{M}$. 此外, 在公式

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c)$$

中以 $T \cap S$ 替换 T, 则又可得

$$m^*(T \cap S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

又由外测度的次可加性可知反向不等式总是成立的, 因而实际上有

$$m^*(T \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

在这里再取 T 为全空间 $\mathbb{R}^n$, 就可证明可数可加性质:

$$m^*(S) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

其次, 对于一般的可测集列 $\{E_i\}$, 我们令

$$S_1 = E_1, \quad S_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right), \quad k \geq 2,$$

则 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 而由 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ 可知, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集.

(5) 由 (2) 可知 $E_i^c \in \mathscr{M}$, 再由 (4) 可知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$. 于是再利用 (2) 和 De Morgan 定律可得

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{M}.$$

(6) 证明见知乎专栏.

□

推论 2.5

$\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数.

证明 由可测集的性质 (1)(2)(4)立得. □

命题 2.7

证明:Cantor 集 C 是可测的, 并且 $m(C) = 0$.

证明 开区间是可测的. 由开集构造定理, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中的开集是开区间的可数并, 因此也可测. 因此, 闭集也是可测的. 显然, 每个 C_n 都是闭集. 并且

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

于是 C 也是闭集. 因此 C 是可测的.

下面, 我们用两种方法计算康托集的测度.

法一:根据我们的构造, C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 1/3 的 C_n 的测度. 换言之,

$$m(C_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) m(C_n) = \frac{2}{3} m(C_n)$$

递归地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0) = 1 < \infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理,

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

此即得证.

法二:设 $n \geq 2$. C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间, 每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$. 因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

因此

$$m(C) = 1 - 1 = 0.$$

□

命题 2.8

$\mathscr{M}$ 的基数是 2^c.

证明 由命题 2.7可知 Cantor 集是零测集, 不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 2^c, 但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 2^c, 于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 2^c. □

定义 2.5 (Lebesgue 测度)

对于可测集 E, 其外测度称为**测度**, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

定义 2.6 (测度)

设 X 是非空集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数, 且满足:

(i) $0 \le \mu(E) \le +\infty$ $(E \in \mathscr{A})$;

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$;

(iii) μ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的,

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) **测度**. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) **可测集**, 有序组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 称为**测度空间**.

注 由推论 2.5可知 $\mathscr{M}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数, 故本节所建立的测度空间就是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{M}, m)$.

定理 2.7 (测度的基本性质)

(1) 非负性: 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $m(E) \ge 0$, $m(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: 若 $E_1, E_2 \in \mathscr{M}$ 且 $E_1 \subset E_2$, 则 $m(E_1) \le m(E_2)$, 并且 $m(E_2 \setminus E_1) = m(E_1) - m(E_2)$;

(3) 可数可加性: 若 $E_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 且 $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \ne j)$, 则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

(4) 若 $E_1, E_2 \in \mathscr{M}$, 则 $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)$.

证明

(1) 由R^n 中点集的外测度性质立得.

(2) 由R^n 中点集的外测度性质可知 $m(E_1) \le m(E_2)$. 再根据 E_1 可测可知

$$m^*(E_2) = m^*(E_2 \cap E_1) + m^*\left(E_2 \cap E_1^c\right) = m^*(E_1) + m^*(E_2 \setminus E_1).$$

又由可测集的性质可知 $E_2 \setminus E_1$ 可测, 又因为 E_1, E_2 可测, 所以上式等价于

$$m(E_2) = m(E_2 \cap E_1) + m\left(E_2 \cap E_1^c\right) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1).$$

(3) 由可测集的性质立得.

(4) 注意到 $E_1 \cap (E_2 \backslash E_1 \cap E_2) = \varnothing$, 故由 (2)(3) 可得

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \cup (E_2 \backslash E_1 \cap E_2)) = m(E_1) + m(E_2 \backslash E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2).$$

□

定理 2.8 (递增可测集列的测度运算)

若有递增可测集列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \cdots$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \tag{2.4}$$

证明 若存在 k_0, 使得 $m(E_{k_0}) = +\infty$, 则

$$m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*(E_{k_0}).$$

因此 $m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) = +\infty$. 又由 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 递增可知

$$m^*(E_k) \geqslant m^*(E_{k_0}), \quad \forall k \geqslant k_0.$$

因此 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty$. 故此时定理自然成立.

现在假定对一切 k, 有 $m(E_k) < +\infty$. 由假设 $E_k \in \mathscr{M}(k = 1, 2, \cdots)$, 故 E_{k-1} 与 $E_k \setminus E_{k-1}$ 是互不相交的可

测集. 由测度的可加性知 $m(E_{k-1})+m(E_k\setminus E_{k-1})=m(E_k)$. 因为 $m(E_{k-1})$ 是有限的, 所以移项得 $m(E_k\setminus E_{k-1})=m(E_k)-m(E_{k-1})$. 令 $E_0=\varnothing$, 可得 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k\setminus E_{k-1})$. 再应用测度的可数可加性, 我们有

$$\begin{aligned}m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)&=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\setminus E_{k-1})\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1}))=\lim_{k\to\infty}m(E_k).\end{aligned}$$

□

推论 2.6 (递减可测集列的测度运算)

若有递减可测集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$, 且 $m(E_1)<+\infty$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k). \tag{2.5}$$

证明 由可测集的性质 (5)可知 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k$ 是可测集, 再由测度的单调性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)\le m(E_1)<+\infty$. 因为 $E_1\setminus E_k\subset E_1\setminus E_{k+1}, k=2,3,\cdots$, 所以由可测集的性质 (2)可知 $\{E_1\setminus E_k\}$ 是递增可测集合列. 于是由递增可测集列的测度运算可知

$$m\left(E_1\setminus\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m\left(\lim_{k\to\infty}(E_1\setminus E_k)\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_1\setminus E_k).$$

由于 $m(E_1)<+\infty$, 故由测度的基本性质 (2)上式可写为 $m(E_1)-m\left(\lim\limits_{k\to\infty}E_k\right)=m(E_1)-\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$. 消去 $m(E_1)$, 我们有 $m\left(\lim\limits_{k\to\infty}E_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$. □

定理 2.9

(1) 若有可测集列 $\{E_k\}$, 且有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(E_k)<+\infty$, 则

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty}E_k\right)=0.$$

(2) 设 $\{E_k\}$ 是可测集列, 则

$$m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m(E_k),\quad m\left(\varlimsup_{k\to\infty}E_k\right)\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}m(E_k).$$

注 也称结论

$$m\left(\varliminf_{n\to\infty}E_n\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}m(E_n),\quad m\left(\varlimsup_{n\to\infty}E_n\right)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}m(E_n)$$

为测度论中的 Fatou 引理 (见第四章).

证明

1.

$$\begin{aligned}m\left(\varlimsup_{k\to\infty}E_k\right)&=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i\right)=m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i\right)\\&\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}}\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i\right)\\&\xlongequal{\text{测度的基本性质 (3)}}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=k}^{\infty}m(E_i)=0.\end{aligned}$$

2. 因为 $\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k, \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \supset E_k (k=1,2,\cdots)$, 所以有

$$m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant m(E_k), \quad m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \geqslant m(E_k) \quad (k=1,2,\cdots).$$

令 $k \to \infty$, 则得 ($\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$ 随 k 增大而递增, $\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$ 随 k 增大而递减)

$$\begin{aligned} m\left(\varliminf_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\leqslant \varliminf_{k\to\infty} m(E_k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\xlongequal{\text{递减可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \\ &\geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m(E_k). \end{aligned}$$

□

2.3 可测集与 Borel 集的关系

引理 2.2 (Carathéodory 引理)

设 $G \neq \mathbb{R}^n$ 是开集,$E \subset G$, 令 $E_k = \{x \in E : d(x, G^c) \geqslant 1/k\} \quad (k=1,2,\cdots)$, 则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

证明 (i) 易知 $\{E_k\}$ 是递增列, 且 $\lim_{k\to\infty} E_k \subset E$. 又对 $x \in E$, 由于 x 是 G 的内点, 因此 $d(x,y) > 0, \forall y \in G^c$, 否则, 存在 $y_0 \in G^c$, 使得 $d(x, y_0) = 0$, 从而 $x = y_0 \in G^c$ 矛盾! 于是

$$d(x, G^c) = \inf\{d(x,y) | y \in G^c\} \geq 0 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}.$$

进而存在充分大的 $k > 0$, 使得 $d(x, G^c) \geqslant \frac{1}{k}$, 即此时 $x \in E_k$.

故当 k 充分大时, 必有 $x \in E_k$, 这说明 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{k\to\infty} E_k$. 从而可知

$$E = \lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(ii) 由外测度的单调性可知 $m^*(E_k) \leq m^*(E) (k=1,2,\cdots)$, 从而 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*(E)$. 为证反向不等式, 不妨假定 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 令

$$A_k = E_{k+1} \setminus E_k = \left\{x \in E : d(x, G^c) \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)\right\} (k=1,2,\cdots),$$

则

$$A_{2k} = \left\{x \in E : d(x, G^c) \in \left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)\right\} (k=1,2,\cdots).$$

对 $\forall i, j \in \mathbb{N}$ 且 $i \neq j$, 不妨设 $j > i$, 则 $j - i \geq 1$. 任取 $x \in A_{2i}, y \in A_{2j}$, 则

$$d(x, G^c) \in \left[\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i}\right), \quad d(y, G^c) \in \left[\frac{1}{2j+1}, \frac{1}{2j}\right).$$

再由三角不等式可知

$$d(x, y) \geqslant |d(x, G^c) - d(y, G^c)| \geqslant \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j} = \frac{2(j-i)-1}{2j(2i+1)} > 0.$$

因此 $d(A_{2i}, A_{2j}) \geqslant \dfrac{2(j-i)-1}{2j(2i+1)} > 0 (i \neq j)$. 再注意到 $E_{2k} \supset \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_{2j}$, 可得

$$m^*(E_{2k}) \geqslant m^*\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_{2j}\right) \xlongequal{\text{推论 2.2}} \sum_{j=1}^{k-1} m^*(A_{2j}).$$

这说明 (令 $k \to \infty$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j}) < +\infty. \quad \left(\text{类似地可知} \sum_{j=1}^{\infty} m^*\left(A_{2j+1}\right) < +\infty\right)$$

因为对任意的 k, 我们有

$$E \xlongequal{\text{命题 1.3}} \bigcup_{j=2k}^{\infty} E_j = E_{2k} \cup \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j+1}\right),$$

所以对任意的 k, 就有

$$m^*(E) \leqslant m^*(E_{2k}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j+1}).$$

现在, 令 $k \to \infty$, 并注意上式右端后两项趋于零, 因此又知

$$m^*(E) \leqslant \lim_{k \to \infty} m^*(E_k),$$

即得所证. □

定理 2.10

非空闭集 F 是可测集.

证明 对任一试验集 T, 由于 $T \setminus F \subset F^c = G$ 是开集, 故由Carathéodory 引理知, 存在 $T \setminus F$ 中的集列 $\{F_k\}$:

$$d(F_k, F) \geqslant 1/k > 0 (k = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{k \to \infty} m^*(F_k) = m^*(T \setminus F).$$

从而由外测度的单调性我们有 (对任一试验集 T)

$$m^*(T) \geqslant m^*[T \cap (F \cup F_k)] = m^*[(T \cap F) \cup F_k] \xlongequal{\text{推论 2.2}} m^*(T \cap F) + m^*(F_k).$$

再令 $k \to \infty$, 可得

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap F) + m^*(T \setminus F) = m^*(T \cap F) + m^*(T \cap F^c).$$

这说明 F 是可测集.

□

推论 2.7

Borel 集是可测集.

证明 由闭集的可测性及可测集的性质 (2)可知开集是可测集. 又因为可测集类是一个 σ-代数, 所以由Borel 集的定义可知可测集包含 Borel σ-代数, 故任一 Borel 集皆可测. □

定理 2.11

若 $E \in \mathscr{M}$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 我们有

(i) 存在包含 E 的开集 G, 使得 $m(G \setminus E) < \varepsilon$;

(ii) 存在含于 E 的闭集 F, 使得 $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

证明

(i) 首先考虑 $m(E) < +\infty$ 的情形. 由定义知, 存在 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon.$$

令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 G 是包含 E 的开集, 且 $m(G) < m(E)+\varepsilon$. 因为 $m(E) < +\infty$, 所以移项后再合并得 $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

其次讨论 $m(E)$ 是 $+\infty$ 的情形. 令

$$E_k = E \cap B(0,k), \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因为 $m(E_k) < \infty (k = 1, 2, \cdots)$, 所以对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在包含 E_k 的开集 G_k, 使得 $m(G_k \setminus E_k) < \varepsilon/2^k$. 现在作点集 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 $G \supset E$ 且为开集. 由定理 1.2(3)我们有

$$G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k),$$

从而得

$$m(G \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \setminus E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

(ii) 考虑 E^c. 由 (i) 可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在包含 E^c 的开集 G, 使得 $m(G \setminus E^c) < \varepsilon$. 现在令 $F = G^c$, 显然 F 是闭集且 $F \subset E$. 由命题 1.1(4)可知 $E \setminus F = G \setminus E^c$, 所以得到 $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

□

定理 2.12

若 $E \in \mathscr{M}$, 则

(i) $E = H \setminus Z_1$,H 是 G_δ 集,$m(Z_1) = 0$;

(ii) $E = K \cup Z_2$,K 是 F_σ 集,$m(Z_2) = 0$.

证明

(i) 对于每个自然数 k, 由定理 2.11(i)可知, 存在包含 E 的开集 G_k, 使得 $m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. 现在作点集 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 H 为 G_δ 集且 $E \subset H$. 因为对一切 k, 都有

$$m(H \setminus E) \leqslant m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k},$$

所以令 $k \to \infty$ 可得 $m(H \setminus E) = 0$. 若令 $H \setminus E = Z_1$, 则得 $E = H \setminus Z_1$.

(ii) 对于每个自然数 k, 由定理 2.11(ii)可知, 存在含于 E 的闭集 F_k, 使得 $m(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$. 现在作点集 $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 K 是 F_σ 集且 $K \subset E$. 因为对一切 k, 都有

$$m(E \setminus K) \leqslant m(E \setminus F_k) < \frac{1}{k},$$

所以令 $k \to \infty$ 可得 $m(E \setminus K) = 0$. 若令 $E \setminus K = Z_2$, 则得 $E = K \cup Z_2$.

□

定理 2.13 (外测度的正则性)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则存在包含 E 的 G_δ 集 H, 使得 $m(H) = m^*(E)$.

证明 由外测度的定义和下确界的定义可知, 对于每个自然数 k, 存在包含 E 的开集 G_k, 使得

$$m(G_k) \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k}.$$

现在作点集 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 H 是 G_δ 集且 $H \supset E$. 因为

$$m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m(G_k) \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k},$$

所以令 $k \to \infty$ 可得 $m(H) = m^*(E)$. □

定义 2.7 (等测包与等测核)

1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若存在包含 E 的可测集 H, 使得 $m(H) = m^*(E)$. 我们称如此的 H 为 E 的**等测包**.
2. 设 $E \in \mathscr{M}$, 若存在含于 E 的可测集 K, 使得 $m(K) = m(E)$. 我们称如此的 K 为 E 的**等测核**.

笔记 由外测度的正则性可知上述定义的等测包 (一定存在) 是良定义的. 由定理 2.12(ii)可知上述定义的等测核 (一定存在) 是良定义的.

注 注意, 若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E) < \infty$, 则有

$$m(H) - m^*(E) = 0,$$

但 $m^*(H \setminus E)$ 不一定等于零. 不过可以证明 $H \setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集 (见命题 2.9).

命题 2.9

若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E) < \infty$, 则 $H \setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集.

证明 设 A 为 $H \setminus E$ 的可测子集, 则由 $A \subset H \setminus E$ 可知,$A \subset H$ 且 $A \cap E = \varnothing$. 又注意到 $E \subset H$, 故 $E \subset H \setminus A$. 又因 H 可测, 故 $H \setminus A$ 也可测. 从而由外测度的单调性可知

$$m(H \setminus A) \geqslant m^*(E). \tag{2.6}$$

由 $H \setminus A$ 可测得 (H 为试验集)

$$\begin{aligned} m(H) = m^*(H) &= m^*(H \cap (H \setminus A)) + m^*(H \cap (H \setminus A)^c) \\ &= m(H \setminus A) + m^*(H \cap (H \cap A^c)^c) \\ &= m(H \setminus A) + m^*(H \cap (H^c \cup A)) \\ &= m(H \setminus A) + m(A). \end{aligned}$$

又由 H 为 E 的等测包可知 $m(H) = m^*(E)$, 结合上式可得

$$m^*(E) = m(H \setminus A) + m(A).$$

再结合(2.6)式, 有

$$m^*(E) \geqslant m^*(E) + m(A).$$

移项得 $m(A) \leqslant 0$. 故由测度的非负性可知 $m(A) = 0$. □

推论 2.8

设 $E_k \subset \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$, 则

$$m^*\left(\varliminf_{k\to\infty} E_k\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

证明 对每个 E_k 均作等测包 H_k:

$$H_k \supset E_k, \quad m(H_k) = m^*(E_k) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则可得

$$m^*\left(\varliminf_{k\to\infty} E_k\right) \overset{\text{外测度的单调性}}{\leqslant} m\left(\varliminf_{k\to\infty} H_k\right) \overset{\text{定理 2.9(2)}}{\leqslant} \varliminf_{k\to\infty} m(H_k) = \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

□

推论 2.9

若 $\{E_k\}$ 是递增集合列, 则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

证明 记 $E = \lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 则由 $\{E_k\}$ 的递增性可知 $E_k \subset E(k = 1, 2, \cdots)$, 从而由外测度的单调性可得

$$m^*(E_k) \leqslant m^*(E), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

令 $k \to \infty$, 得 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*(E)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) = +\infty$, 则结论显然成立. 故不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$.

下证 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*(E)$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 取 E_k 的等测包 H_k, 则 $m(H_k) = m^*(E_k)$. 令 $F_k = \bigcap\limits_{m=k}^{\infty} H_m$, 则显然 F_k 可测,$\{F_k\}$ 递增,$E_k \subset F_k \subset H_k$. 再令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 F 可测,$E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F$. 于是由外测度的单调性及递增可测集列的测度运算可得

$$m^*(E) \leqslant m(F) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty} F_k\right) \xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m(F_k). \tag{2.7}$$

又由 $F_k \subset H_k$ 和测度的单调性以及 $m(H_k) = m^*(E_k)$ 可知

$$\lim_{k\to\infty} m(F_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} m(H_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k). \tag{2.8}$$

故结合(2.7)(3.3)式可得 $m^*(E) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$. 综上可得,$m^*(E) = \lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)$. □

定理 2.14

若 $E \in \mathscr{M}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则 $(E + \{x_0\}) \in \mathscr{M}$ 且

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

证明 由定理 2.12可知

$$E = H \setminus Z,$$

其中 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 每个 G_k 都是开集,$m(Z) = 0$. 因为 $G_k + \{x_0\}$ 是开集, 所以

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k + \{x_0\})$$

是可测集. 根据外测度的平移不变性, 可知点集 $Z + \{x_0\}$ 是零测集, 于是从等式

$$E + \{x_0\} = (H + \{x_0\}) \setminus (Z + \{x_0\}) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k + \{x_0\}) \setminus (Z + \{x_0\})\right)$$

立即可知 $E + \{x_0\} \in \mathscr{M}$. 再用外测度的平移不变性得到

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

□

注 一般地说, 若在 Borel σ-代数上定义了测度 μ, 且对紧集 K 有 $\mu(K) < +\infty$, 则称 μ 为 **Borel 测度** (显然,$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度是一种 Borel 测度).

可以证明: 若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的平移不变的 Borel 测度, 则存在常数 λ, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中每一个 Borel 集 B, 均有

$$\mu(B) = \lambda m(B).$$

这就是说, 除了一个常数倍因子外,Lebesgue 测度是 $\mathbb{R}^n$ 上平移不变的唯一的 Borel 测度.

例题 2.1 作 $[0,1]$ 中的第二纲零测集 E.

解 令 $\{r_n\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}, I_{n,k} = (r_n - 2^{-n-k}, r_n + 2^{-n-k})(n, k \in \mathbb{N})$, 易知

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}\right) \leqslant 2^{-k+1}, \quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}\right) = 0.$$

由于每个 $[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k} (k \in \mathbb{N})$ 均是无处稠密集, 故可知 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}$ 是第二纲集. □

例题 2.2 设 $A \subset \mathbb{R}$, 且对 $x \in A$, 存在无穷多个数组 $(p, q)(p, q \in \mathbb{Z}, q \geqslant 1)$, 使得 $|x - p/q| \leqslant 1/q^3$, 则 $m(A) = 0$

证明

(i) 令 $B = [0,1] \cap A$, 注意到 $x + n - (p + nq)/q = x - p/q$, 故 $A = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (B + \{n\})$, 从而只需指出 $m(B) = 0$.

(ii) 令 $I_{p,q} = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right]$, 则 $x \in I_{p,q}$ 等价于

$$qx - \frac{1}{q^2} \leqslant p \leqslant qx + \frac{1}{q^2}. \tag{2.9}$$

易知对 $q \geqslant 2$ 或 $q = 1$, 在长度为 $2/q^2$ 的区间中至多有一个或三个整数, 故 $x \in B$ 当且仅当 x 属于无穷多个 B_q: $B_q = [0,1] \cap \left(\bigcup_p I_{p,q}\right)$. 从而又只需指出 $\sum_q m(B_q) < +\infty$. 由(2.9)式知, 对整数 q, 使 $I_{p,q} \cap [0,1] \neq \varnothing$ 就是 $-\frac{1}{q^2} \leqslant p \leqslant q + \frac{1}{q^2}$. 在 $q \geqslant 2$ 时, 这相当于 $0 \leqslant p \leqslant q$. 因此, 我们有 $m(B_q) \leqslant 2(q+1)/q^3$, 即得所证. □

2.4 正测度集与矩体的关系

定理 2.15

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E) > 0, 0 < \lambda < 1$, 则存在矩体 I, 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap E). \tag{2.10}$$

注 上述定理告诉我们, 任何一个正测集, 其中总有一部分被一个矩体套住, 使两者的测度差小于预先给定的正数 ε. 当然, 这一测度差不一定能等于零.

证明 **情形 I**: 当 $m(E) < +\infty$ 时, 对于 $0 < \varepsilon < (\lambda^{-1} - 1)m(E)$, 作 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon.$$

从而存在 k_0, 使得 $\lambda|I_{k_0}| < m(I_{k_0} \cap E)$. 事实上, 若对一切 k, 有

$$\lambda|I_k| \geqslant m(I_k \cap E),$$

则可得

$$m(E) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap E) \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant \lambda(m(E) + \varepsilon) < m(E).$$

这就导致 $m(E) < m(E)$, 产生矛盾.

情形 II: 当 $m(E)=+\infty$ 时, 由定理 2.11(ii)可知, 存在闭集 $F\subset E$, 使得 $m(E\backslash F)<1$. 记 $H=E\backslash F$, 则 $m(H)<1$ 且 $H\subset E$. 于是由**情形** I 可知, 存在矩体 I, 使得

$$\lambda|I|<m(I\cap H).$$

再由 $I\cap H\subset I\cap E$ 及测度的单调性可得

$$\lambda|I|<m(I\cap H)\leqslant m(I\cap E).$$

故结论得证. □

例题 2.3 $[0,1]$ 中存在正测集 E, 使对 $[0,1]$ 中任一开区间 I, 有

$$0<m(E\cap I)<m(I).$$

解 首先, 在 $[0,1]$ 中作类 Cantor 集 H_1:$m(H_1)=1/2$. 其次, 在 $[0,1]$ 中 H_1 的邻接区间 $\{I_{1j}\}$ 的每个 I_{1j} 内再作类 Cantor 集 H_{1j}: $m(H_{1j})=|I_{1j}|/2^2$, 并记 $H_2=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}H_{1j}$. 然后, 对 $H_1\cup H_2$ 的邻接区间 $\{I_{2j}\}$ 的每个 I_{2j}, 又作类 Cantor 集 H_{2j}:$m(H_{2j})=|I_{2j}|/2^3$. 再记 $H_3=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}H_{2j}$, 依次继续进行, 则得 $\{H_m\}$. 令 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$, 得证. □

定义 2.8 (向量差集)

设 A,B 为两个非空集合, 定义 A,B 的**向量差集**为

$$A-B\overset{\text{def}}{=}\{x-y:x\in A,y\in B\}.$$

♣

定理 2.16 (Steinhaus 定理)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E)>0$. 作 (向量差) 点集

$$E-E\overset{\text{def}}{=}\{x-y:x,y\in E\},$$

则存在 $\delta_0>0$, 使得 $E-E\supset B(0,\delta_0)$.

♡

证明 取 λ 满足 $1-2^{-(n+1)}<\lambda<1(n\geq 2)$. 由定理 2.15可知, 存在矩体 I, 使得 $\lambda|I|<m(I\cap E)$. 现在记 I 的最短边长为 δ, 并作开矩体

$$J=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):|\xi_i|<\frac{\delta}{2}\ (i=1,2,\cdots,n)\right\}.$$

从而只需证明 $J\subset E-E$ 即可 (在 J 中任取一个以原点为中心的开球 $B(0,\delta_0)$), 也就是只要证明对每个 $x_0\in J$, 点集 $E\cap I$ 必与点集 $(E\cap I)+\{x_0\}$ 相交 (此时任取 $y\in(E\cap I)\cap((E\cap I)+\{x_0\})$, 从而存在 $z\in E\cap I$, 使得 $y=z+x_0$. 也即存在 $y,z\in E\cap I\subset E$, 使得 $y-z=x_0$) 即可. 因为 J 是以原点为中心, 边长为 δ 的开矩阵, 所以 I 的平移矩体 $I+\{x_0\}$ 仍含有 I 的中心, 从而知

$$m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|(n\geq 2).$$

结合上式, 再由定理 2.7(4)可得

$$m(I\cup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))<2|I|-2^{-n}|I|,$$

即

$$m(I\cup(I+\{x_0\}))<2\lambda|I|.$$

但由于 $E\cap I$ 与 $(E\cap I)+\{x_0\}$ 有着相同的测度并且都大于 $\lambda|I|$, 同时又都含于 $I\cup(I+\{x_0\})$ 之中, 故它们必定相交, 否则其并集测度要大于 $2\lambda|I|$, 从而引起矛盾. □

命题 2.10

设有定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad x,y\in\mathbb{R},$$

且在 $E\subset\mathbb{R}\ (m(E)>0)$ 上有界, 则 $f(x)=cx\ (x\in\mathbb{R})$, 其中 $c=f(1)$.

证明 (i) 首先, 由题设知, 对 $r\in\mathbb{Q}$, 必有 $f(r)=rf(1)$.

(ii) 其次, 由 $m(E)>0$ 可知, 存在区间 I: $I\subset E-E$. 不妨设 $|f(x)|\leqslant M\ (x\in E)$, 又对任意的 $x\in I$, 有 $x',x''\in E$, 使得 $x=x'-x''$, 则

$$|f(x)|=|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')|+|f(x'')|\leqslant 2M.$$

记 $I=[a,b]$, 并考查 $[0,b-a]$. 若 $x\in[0,b-a]$, 则 $x+a\in[a,b]$. 从而由 $f(x)=f(x+a)-f(a)$ 可知, $|f(x)|\leqslant 4M$, $x\in[0,b-a]$. 记 $b-a=c$, 这说明

$$|f(x)|\leqslant 4M, \quad x\in[0,c].$$

易知

$$|f(x)|\leqslant 4M, \quad x\in[-c,c].$$

已知对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 以及自然数 n, 均存在有理数 r, 使得 $|x-r|<c/n$, 因此我们得到

$$\begin{aligned}|f(x)-xf(1)|&=|f(x-r)+rf(1)-xf(1)|\\&=|f(x-r)+(r-x)f(1)|\leqslant\frac{4M+c|f(1)|}{n}.\end{aligned}$$

根据 n 的任意性 (r 的任意性), 即得 $f(x)=xf(1)$. □

2.5 不可测集

2.6 连续变换与可测集

定理 2.17 (变换的基本性质)

设变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 则

1. $T\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$.
2.

证明

1. 下面是转换后的 LaTeX 正文格式代码:

   一方面, 对 $\forall x\in T\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$, 存在 $y\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, 从而存在 $\alpha_y\in I$, 使得 $y\in A_{\alpha_y}$ 且 $x=T(y)$. 于是 $x=T(y)\subset T\left(A_{\alpha_y}\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$. 故 $T\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$.

   另一方面, 对 $\forall x\in\bigcup_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$, 都存在 $\alpha_x\in I$, 使得 $x\in T\left(A_{\alpha_x}\right)$. 于是存在 $y\in A_{\alpha_x}$, 使得 $x=T(y)$. 又因为 $y\in A_{\alpha_x}\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, 所以 $x=T(y)\subset T\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 故 $T\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\supset\bigcup_{\alpha\in I}T\left(A_\alpha\right)$.
2.

□

定义 2.9 (连续变换)

设有变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 若对任一开集 $G\subset\mathbb{R}^n$, 逆 (原) 像集

$$T^{-1}(G)\quad\text{即}\quad\{x\in\mathbb{R}^n:T(x)\in G\}$$

是一个开集, 则称 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的**连续变换**.

定理 2.18 (连续变换的充要条件)

变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换的充分必要条件是, 对任一点 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|y-x|<\delta$ 时, 有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon. \tag{2.11}$$

证明 **必要性**: 对任一点 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 有 x 属于开集

$$T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)),$$

从而存在 $\delta>0$, 使得

$$B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

这说明, 当 $|y-x|<\delta$ 时, 有 $y\in B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon))$, 即

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon.$$

充分性: 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集, 且 $T^{-1}(G)$ 不是空集, 则对任一点 $x\in T^{-1}(G)$, 有 $T(x)\in G$. 因此, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(T(x),\varepsilon)\subset G$. 根据充分性的假定, 对此 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|y-x|<\delta$ 时, 有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon,\quad\text{即}\quad T(y)\in B(T(x)\subset G,\varepsilon).$$

也即 $T(y)\in G,\forall y\in B(x,\delta)$. 此即 $T(B(x,\delta))\subset G$. 这就是说 $B(x,\delta)\subset T^{-1}(G)$, 即 $T^{-1}(G)$ 是开集. □

命题 2.11

若 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性变换, 则 T 是连续变换.

证明 令 $e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 有

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n.$$

再令 $T(e_i)=x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 又有

$$T(x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n.$$

记 $M=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$, 从而由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}|T(x)|&\leqslant|\xi_1||x_1|+|\xi_2||x_2|+\cdots+|\xi_n||x_n|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}=M|x|.\end{aligned}$$

由此可知

$$|T(y)-T(x)|=|T(y-x)|\leqslant M|y-x|.$$

再由连续变换的充要条件可知 T 是连续变换. □

定理 2.19

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.

证明 对于 $T(K)$ 的任一开覆盖族 $\{H_i\}$, 令 $G_i=T^{-1}(H_i)$, 则 $\{G_i\}$ 是 K 的开覆盖族. 根据有限子覆盖定理可知, 在 $\{G_i\}$ 中存在 $G_{i_1},G_{i_2},\cdots,G_{i_k}$, 使得

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{k}G_{i_j}.$$

从而得

$$T(K)\subset\bigcup_{j=1}^{k}T(G_{i_j})\subset\bigcup_{j=1}^{k}H_{i_j}.$$

这说明 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. □

推论 2.10

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 E 是 F_σ 集, 则 $T(E)$ 是 F_σ 集.

证明 由 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 故 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 其中 E_k 都是闭集. 令

$$F_k=E_k\cap C(0,k)\,(k=1,2,\cdots),\quad F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k.$$

显然 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增紧集列, 并且

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\cap C(0,k))\subset\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}C(0,k)\right)=E\cap\mathbb{R}^n=E.$$

于是

$$T(E)=T(F)=T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}T(F_k).$$

由定理可知 $T(F_k)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 进而 $T(F_k)$ 都是闭集, 从而 $\bigcup_{k=1}^{\infty}T(F_k)$ 也是闭集. 故 $T(E)$ 是闭集, 结论得证.

□

推论 2.11

设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一零测集 Z, $T(Z)$ 必为零测集, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一可测集 E, $T(E)$ 必为可测集.

证明 根据定理 2.12(ii), 有 $E = K \cup Z$, 其中 K 是 F_σ 集, Z 是零测集. 因为

$$T(E) = T(K) \cup T(Z),$$

而 $T(K)$ 是 F_σ 集, $T(Z)$ 为零测集, 所以 $T(E)$ 是可测集. □

定理 2.20

若 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, $E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$m^*(T(E)) = |\det T| \cdot m^*(E). \tag{2.12}$$

注 在 $|\det T| = 0$ 时, T 将 $\mathbb{R}^n$ 变为一个低维线性子空间, 显然其映像集是零测集, 我们有

$$m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E) = 0, \quad E \subset \mathbb{R}^n.$$

证明 记

$$I_0 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leqslant \xi_i < 1, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$I = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leqslant \xi_i < 2^{-k}, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

显然, I_0 是 2^{nk} 个 I 的平移集 $I + \{x_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, 2^{nk})$ 的并集, $T(I_0)$ 是 2^{nk} 个

$$T(I + \{x_j\}), \quad j = 1, 2, \cdots, 2^{nk}$$

的并集, 而且有 (注意 T^{-1} 是连续变换)

$$m(T(I + \{x_j\})) = m(T(I)), \quad j = 1, 2, \cdots, 2^{nk}.$$

现在假定 (2.12) 式对于 I_0 成立:

$$m(T(I_0)) = |\det T|, \tag{2.13}$$

则

$$|\det T| = 2^{nk} m(T(I)).$$

因为 $m(I) = 2^{-nk}$, 所以得到

$$m(T(I)) = 2^{-nk}|\det T| = |\det T| m(I).$$

这说明 (2.12) 式对每个 I 以及 I 的平移集都成立, 从而可知 (2.12) 式对可数个互不相交的任意二进方体的并集是成立的, 也就说明对任一开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ (2.12) 式均成立. 于是应用等测包的推理方法立即可知, 对一般点集 (2.12) 式成立.

下面证明 (2.13) 式成立. 大家知道 T 至多可以表为如下几个初等变换的乘积:

(i) 坐标 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 之间的交换;

(ii)$\xi_1 \to \beta\xi_1, \xi_i \to \xi_i$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$;

(iii)$\xi_1 \to \xi_1 + \xi_2, \xi_i \to \xi_i$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$.

在 (i) 的情形, 显然有 $|\det T| = 1$, $T(I_0) = I_0$. 从而可知 (2.13) 式成立.

在 (ii) 的情形, 矩阵 T 可由恒等矩阵在第一行乘以 β 而得到, 此时有

$$T(I_0) = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leqslant \xi_i < 1\ (i = 2, 3, \cdots, n),\ 0 \leqslant \xi_1 < \beta\ (\beta > 0), \beta < \xi_1 \leqslant 0\ (\beta < 0)\}.$$

从而可知 $m(T(I_0)) = |\beta|$, 即 (2.13) 式成立.

在 (iii) 的情形, 此时 $\det T = 1$, 而且有

$$T(I_0) = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leqslant \xi_i < 1\ (i \neq 1),\ 0 \leqslant \xi_1 - \xi_2 < 1\}.$$

记

$$A = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in T(I_0) : \xi_1 < 1\},$$
$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad B = T(I_0) \setminus A.$$

我们有

$$A = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_2 < \xi_1\},$$
$$B - e_1 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_1 < \xi_2\}.$$

因此得到

$$\begin{aligned} m(T(I_0)) &= m(A) + m(B) = m(A) + m(B - e_1) \\ &= m(I_0) = 1 = \det T. \end{aligned}$$

这说明 (2.13) 式对 I_0 成立.

最后不妨设 $T = T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_j$, 这里的每个 T_j 均是 (i)～(iii) 情形之一, 从而由归纳法可知

$$\begin{aligned} m^*(T(E)) &= m(T_1(T_2(\cdots(T_j(E))\cdots))) \\ &= |\det T_1||\det T_2|\cdots|\det T_j|m^*(E) \\ &= |\det T|m^*(E). \end{aligned}$$

□

推论 2.12

设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $T(E) \in \mathscr{M}$ 且有

$$m(T(E)) = |\det T|m(E).$$

♡

证明 由定理 2.20立得. □

例题 2.4 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是可测集, 则将 E 作旋转变换后所成集为可测集, 且测度不变.

证明

□

例题 2.5 $\mathbb{R}^2$ 中三角形的测度等于它的面积.

证明 显然,$\mathbb{R}^2$ 中任一三角形都是可测集. 由于测度的平移不变性, 故不妨假定三角形的一个顶点在原点. 记三角形为 T, 其面积记为 $|T|$. 因为 $m(T) = m(-T)$, 所以经平移后可得 $2m(T) = m(T) + m(-T) = m(P)$, 其中 P 是平行四边形. 再将 P 中的子三角形作旋转或平移, 可使 P 转换为矩形 Q, 且有 $m(P) = m(Q) = |P| = 2|T|$, 从而得 $m(T) = |T|$.
□

例题 2.6 圆盘 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中可测集, 且 $m(D) = \pi r^2$.

证明 记 P_n 与 Q_n 为 D 的内接与外切正 n 边形, 由 P_n 与 Q_n 的可测性易知 D 是可测集. 注意到 $P_n \subset D \subset Q_n$, 以及

$$m(P_n) = \pi r^2 \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \cos\frac{\pi}{n} \to \pi r^2 \quad (n \to \infty),$$
$$m(Q_n) = \pi r^2 \frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n} \to \pi r^2 \quad (n \to \infty),$$

可知 $m(D) = \pi r^2$. □

例题 2.7 设 $E \subset (-\pi, \pi], 0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 令

$$S_E = S_E(a, b) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : a < r < b, \theta \in E\}.$$

大家知道, 若 $E = (\alpha, \beta)$, 则 S_E 就是通常所说的扇形, 其面积为 $(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)/2$.

(1) 对于一般点集 E, 我们有

$$m^*(S) \leqslant \frac{(b^2 - a^2)m^*(E)}{2}.$$

(注意, 这里 $m^*(S)$ 是二维外测度,$m^*(E)$ 是一维外测度.)

(2) 若 $E\subset(-\pi,\pi]$ 是可测集, 则 S 是可测集.

证明 (1) (i) 设 $b<+\infty$, 此时, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在开区间列 $\{I_n\}$:$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\supset E,\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<m^*(E)+\varepsilon$. 显然,$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{I_n}\supset S_E$, 从而有

$$
\begin{aligned}
m^*(S_E)&\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{I_n}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m^*(S_{I_n})\\
&=(b^2-a^2)\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|/2\leqslant\frac{b^2-a^2}{2}(m^*(E)+\varepsilon),
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性即得所证.

(ii) 设 $b=+\infty,m^*(E)=0$. 此时, 对 $n\geqslant 1$, 由 (i) 知

$$
m^*(S_E(a,n))\leqslant\frac{(n^2-a^2)m^*(E)}{2}=0.
$$

从而得到

$$
m^*(S_E(a,+\infty))=\lim_{n\to\infty} m^*(S_E(n))=0.
$$

(iii) 设 $b=+\infty,m^*(E)>0$. 结论显然.

(2) 由于 $S_E(a,b)=S_E(0,+\infty)\cap S_{(-\pi,\pi]}(a,b)$, 故只需指出 $S_E(0,+\infty)$ 可测即可.

设 $I\subset(-\pi,\pi]$ 是开区间, 记 $T=S_I(a,b)$(开环扇形),$E^c=(-\pi,\pi]\setminus E$ 以及 $S_E=S_E(0,+\infty)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
m^*(T\cap S_E)+m^*(T\cap S_{E^c})&=m^*(S_{I\cap E}(a,b))+m^*(S_{I\cap E^c}(a,b))\\
&\leqslant\frac{b^2-a^2}{2}\{m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)\}\\
&=\frac{b^2-a^2}{2}|I|=m(T)(\text{开环扇形面积}).
\end{aligned}
$$

设 R 是一个开矩形, 易知它可由互不相交的可列个开环扇形 T_n 组成, 至多差一零测集 (边界). 因此 (注意, 开环扇形可测) 得到

$$
\begin{aligned}
m^*(R\cap S_E)+m^*(R\cap S_{E^c})&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m^*(T_n\cap S_E)+\sum_{n=1}^{\infty} m^*(T_n\cap S_{E^c})\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m(T_n)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)=m(R).
\end{aligned}
$$

这说明, 对任一矩形 R, 有

$$
m(R)=m^*(R\cap S_E)+m^*(R\cap S_{E^c}).
$$

而 S_{E^c} 就是 S_E 的补集 (除原点外), 也就是说 S_E 是可测集. □

第 3 章 可测函数

3.1 可测函数的定义及其性质

为了论述的简便和统一, 今后我们在谈到可测函数时允许函数取“值” $\pm\infty$.(称 $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 为广义实数集.) 现在先将有关 $\pm\infty$ 的运算规则约定如下 (注意, 这里的 $\pm\infty$ 不是指无穷大变量):

(i) $-\infty<+\infty$, 若 $x\in\mathbf{R}$, 则 $-\infty<x<+\infty$;

(ii) 若 $x\in\mathbf{R}$, 则

$$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,$$

$$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty,$$

$$\pm(\pm\infty)=+\infty,\quad \pm(\mp\infty)=-\infty,$$

$$|\pm\infty|=+\infty;$$

(iii) $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$ 的符号函数为

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}+1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

$$x\cdot(\pm\infty)=\pm(\operatorname{sign}x)\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,\quad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty,$$

但是 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$,$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 等是无意义的;

(iv) 特别约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$.

注意,$+\infty$ 经常简记为 ∞.

定义 3.1 (可测函数)

设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若对于任意的实数 t, 点集

$$\{x\in E:f(x)>t\}(\text{或简写为}\{x:f(x)>t\}\text{或}f^{-1}((t,+\infty)))$$

是可测集, 则称 $f(x)$ 是 E 上的**可测函数**, 或称 $f(x)$ 在 E 上**可测**.

♣

定理 3.1

设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数,D 是 $\mathbf{R}$ 中的一个稠密集. 若对任意的 $r\in D$, 点集 $\{x:f(x)>r\}$ 都是可测集, 则对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 点集 $\{x:f(x)>t\}$ 也是可测集. 进而 $f(x)$ 在 E 上可测.

♡

笔记 这定理说明, 今后, 我们只需对 $\mathbb{R}$ 中的一个稠密集中的元 r, 指出集合 $\{x:f(x)>r\}$ 是可测集就可以得到 $f(x)$ 是可测函数.

证明 对任一实数 t, 选取 D 中的点列 $\{r_k\}$, 使得

$$r_k\geqslant t\ (k=1,2,\cdots);\quad \lim_{k\to\infty}r_k=t.$$

一方面, 对 $\forall x_0\in\{x:f(x)>t\}$, 都有 $f(x_0)>t=\lim\limits_{k\to\infty}r_k$. 于是由极限的保号性可知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $f(x_0)>r_{k_0}$. 从而 $x_0\in\{x:f(x)>r_{k_0}\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}$. 另一方面, 对 $\forall x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}$, 都存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x_0\in\{x:f(x)>r_{k_0}\}$. 从而 $f(x_0)>r_{k_0}\geq t$, 于是 $x_0\in\{x:f(x)>t\}$. 故

$$\{x:f(x)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}.\tag{3.1}$$

因为每个点集 $\{x : f(x) > r_k\}$ 都是可测集, 所以 $\{x : f(x) > t\}$ 是可测集. □

命题 3.1

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

证明 事实上, 对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, 点集 $\{x \in [a, b] : f(x) > t\}$ 定属于下述三种情况之一: 区间、单点集或空集. 从而可知

$$\{x \in [a, b] : f(x) > t\}$$

是可测集. 这说明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数. □

定理 3.2

若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 则下列等式皆成立并且其中左端的点集皆可测:

(i) $\{x : f(x) \leqslant t\} = E \setminus \{x : f(x) > t\}$ $(t \in \mathbf{R})$;

(ii) $\{x : f(x) \geqslant t\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t - \dfrac{1}{k}\right\}$ $(t \in \mathbf{R})$;

(iii) $\{x : f(x) < t\} = E \setminus \{x : f(x) \geqslant t\}$ $(t \in \mathbf{R})$;

(iv) $\{x : f(x) = t\} = \{x : f(x) \geqslant t\} \cap \{x : f(x) \leqslant t\}$ $(t \in \mathbf{R})$;

(v) $\{x : f(x) < +\infty\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < k\}$;

(vi) $\{x : f(x) = +\infty\} = E \setminus \{x : f(x) < +\infty\}$;

(vii) $\{x : f(x) > -\infty\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > -k\}$;

(viii) $\{x : f(x) = -\infty\} = E \setminus \{x : f(x) > -\infty\}$.

注 由于对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned}\{x : f(x) > t\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > t + \frac{1}{k}\right\} \\ &= E \setminus \{x : f(x) \leqslant t\} = E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < t + \frac{1}{k}\right\},\end{aligned}$$

故定理中 (i),(ii) 与 (iii) 的左端点集的可测性均可当作 $f(x)$ 可测性的定义.

证明 由极限的保号性和保不等式性易证上述等式皆成立. 至于左端点集的可测性可阐明如下:

从可测性定义易推 (i),(ii) 与 (vii). 从 (ii) 可推出 (iii). 从 (i) 与 (ii) 可推出 (iv). 从 (iii) 可推出 (v). 从 (v) 可推出 (vi). 从 (vii) 可推出 (viii). □

定理 3.3

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $E_1 \cup E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数, 若 $f(x)$ 在 E_1,E_2 上均可测, 则 $f(x)$ 也在 $E_1 \cup E_2$ 上可测;

(2) 若 $f(x)$ 在 E 上可测,A 是 E 中可测集, 则 $f(x)$ 看做是定义在 A 上的函数在 A 上也是可测的.

证明 (1) 只需注意等式

$$\{x \in E_1 \cup E_2 : f(x) > t\} = \{x \in E_1 : f(x) > t\} \cup \{x \in E_2 : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) 只需注意等式

$$\{x \in A : f(x) > t\} = A \cap \{x \in E : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

命题 3.2

若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $\chi_E(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 注意到对 $\forall x \in E$, 有 $\chi_E(x) = 1$. 于是当 $t \leqslant 1$ 时, 有 $\{x \in E : \chi_E(x) > t\} = E \in \mathscr{M}$; 当 $t > 1$ 时, 有 $\{x \in E : \chi_E(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故 $\chi_E(x)$ 在 E 上可测.

又注意到对 $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, 有 $\chi_E(x) = 0$. 于是当 $t \leqslant 0$ 时, 有 $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash E : \chi_E(x) > t\} = \mathbb{R}^n \backslash E \in \mathscr{M}$; 当 $t > 0$ 时, 有 $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash E : \chi_E(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故 $\chi_E(x)$ 在 $\mathbb{R}^n \backslash E$ 上也可测.

因此由定理 3.3(1)可得 $\chi_E(x)$ 在 $E \cup (\mathbb{R}^n \backslash E) = \mathbb{R}^n$ 上可测. □

定理 3.4 (可测函数的运算性质)

(1) 若 $f(x)$,$g(x)$ 是 E 上的实值可测函数, 则下列函数

$$\text{(i)}cf(x)(c \in \mathbb{R});\quad \text{(ii)}f(x)+g(x);\quad \text{(iii)}f(x)\cdot g(x)$$

都是 E 上的可测函数.

(2) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 则下列函数:

$$\text{(i)}\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\};\quad \text{(ii)}\inf_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\};\quad \text{(iii)}\varlimsup_{k\to\infty} f_k(x);\quad \text{(iv)}\varliminf_{k\to\infty} f_k(x)$$

都是 E 上的可测函数.

注 (1) 中所说的运算性质对于取广义实值的可测函数也是成立的.

已证 $f(x), g(x)$ 在 $\{x \in E : -\infty < f(x) < +\infty\}$ 上可测. 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 注意到

$$\{x \in \{x \in E : f(x) = +\infty\} : f(x) > t\} = \{x \in E : f(x) = +\infty\},$$

$$\{x \in \{x \in E : f(x) = -\infty\} : f(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}.$$

由定理 3.2知 $\{x \in E : f(x) = +\infty\} \in \mathscr{M}$. 因此 $f(x)$ 在 $\{x \in E : f(x) = -\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ 上可测. 故再由定理 3.3(1)可知 $f(x)$ 在 $\{x \in E : -\infty < f(x) < +\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = -\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = +\infty\} = E$ 上可测.

证明

(1) (i) 对于 $t \in \mathbb{R}$, 若 $c > 0$, 则由

$$\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) > c^{-1}t\}$$

可知,$cf(x)$ 在 E 上可测; 若 $c < 0$, 则

$$\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) < c^{-1}t\}$$

再由定理 3.2可知,$cf(x)$ 在 E 上可测; 若 $c = 0$, 则 $cf(x) = 0$. 于是当 $t \leq 0$ 时, 有 $\{x : cf(x) > t\} = \mathbb{R} \in \mathscr{M}$; 当 $t > 0$ 时, 有 $\{x : cf(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故此时仍有 $cf(x)$ 在 E 上可测.

(ii) 因为有理数集至多可数, 所以可设 $\{r_i\}$ 是全体有理数. 对 $t \in \mathbb{R}$, 一方面, 任取 $x_0 \in \{x : f(x)+g(x) > t\}$, 则 $f(x_0)+g(x_0) > t$, 此即 $f(x_0) > t - g(x_0)$, 故由有理数集的稠密性可知, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$f(x_0) > r_{i_0} > t - g(x_0).$$

于是

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_{i_0}\} \cap \{x : g(x) > t - r_{i_0}\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\}).$$

因此 $\{x : f(x)+g(x) > t\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\})$.

另一方面, 任取 $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\})$, 则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_{i_0}\} \cap \{x : g(x) > t - r_{i_0}\}.$$

于是 $f(x_0)+g(x_0)>r_{i_0}+t-r_{i_0}=t$. 故 $x_0\in\{x:f(x)+g(x)>t\}$. 因此 $\{x:f(x)+g(x)>t\}\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x:f(x)>r_i\}\cap\{x:g(x)>t-r_i\})$.
综上可知

$$\{x:f(x)+g(x)>t\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x:f(x)>r_i\}\cap\{x:g(x)>t-r_i\}),$$

从而由 $f(x),g(x)$ 在 E 上可测知 $f(x)+g(x)$ 是 E 上的可测函数.
(iii) 首先,$f^2(x)$ 在 E 上可测. 这是因为对于 $t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\{x:f^2(x)>t\}=\begin{cases}E, & t<0,\\ \{x:f(x)>\sqrt{t}\}\cup\{x:f(x)<-\sqrt{t}\}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

于是由定理 3.2可知,$f^2(x)$ 在 E 上可测. 又在 $f(x)g(x)=\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}/4$ 中, 由 (i)(ii) 可知 $f(x)+g(x)$ 以及 $f(x)+(-g(x))$ 都是 E 上可测函数, 所以 $f(x)\cdot g(x)$ 在 E 上可测.

(2) (i) 对 $\forall t\in\mathbf{R}$, 显然有 $\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}$. 任取 $x_0\in\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}$, 则 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x_0)\}>t$ 于是由上确界的定义可知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $f_{k_0}(x_0)>t$. 此即

$$x_0\in\{x:f_{k_0}(x)>t\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}.$$

故 $\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}$. 因此

$$\left\{x:\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\},$$

从而由 $f(x)$ 在 E 上可测可知 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数.
(ii) 由于 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}=-\sup\limits_{k\geqslant 1}\{-f_k(x)\}$, 故可知 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 在 E 上可测.
(iii) 只需注意到 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=\inf\limits_{i\geqslant 1}\left(\sup\limits_{k\geqslant i}[f_k(x)]\right)$ 即可.
(iv) 根据等式 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=-\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(-f_k(x))$ 可知, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$ 是 E 上的可测函数.

□

推论 3.1

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)(x\in E),$$

则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 只需注意到 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$, 再由可测函数的运算性质 (2)立得. □

定义 3.2 (函数的正部和负部)

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的广义实值函数, 令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

并分别称它们为 $f(x)$ 的**正部**与**负部**. 显然, 我们有

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad \forall x\in E.$$

$$f^+(x),f^-(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in E.$$

定理 3.5

(1)$f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是 $f^{+}(x), f^{-}(x)$ 都是 E 上的可测函数.

(2) 若 $f(x)$ 在 E 上可测时, 则 $|f(x)|$ 也在 E 上可测.

注 注意,(2) 反之不然.

证明 (1) 只需注意到 $f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$ 即可.

(2) 因为我们有

$$|f(x)|=f^{+}(x)+f^{-}(x),$$

所以当 $f(x)$ 在 E 上可测时, 由 (1) 可知 $|f(x)|$ 也在 E 上可测. □

命题 3.3

若 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数, 且对固定的 $x\in\mathbf{R}$,$f(x,y)$ 是 $y\in\mathbf{R}$ 上的连续函数; 对固定的 $y\in\mathbf{R}$,$f(x,y)$ 是 $x\in\mathbf{R}$ 上的可测函数, 则 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数.

证明 对每个 $n=1,2,\cdots$, 作函数

$$f_n(x,y)=f\left(x,\frac{k}{n}\right),\ \frac{k-1}{n}<y\leqslant\frac{k}{n}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 显然有 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: f_n(x,y)<t\}\supset\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f\left(x,\frac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. 任取 $(x_0,y_0)\in\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: f_n(x,y)<t\}$, 则 $f_n(x_0,y_0)<t$. 从而存在 $k_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $\frac{k_0-1}{n}<y_0\leq\frac{k}{n}$, 并且 $f(x_0,\frac{k_0}{n})=f_n(x_0,y_0)<t$. 于是

$$(x_0,y_0)\in\left\{x\in\mathbf{R}: f\left(x,\frac{k_0}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k_0-1}{n},\frac{k_0}{n}\right]\subset\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f\left(x,\frac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right].$$

因此 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: f_n(x,y)<t\}\subset\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f\left(x,\frac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. 故

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: f_n(x,y)<t\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f\left(x,\frac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],$$

所以由条件及可测集的性质 (6)可知 $f_n(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数. 而由题设易知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

再由推论 3.1即得所证. □

命题 3.4 (连续函数必可测)

设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集. 若 $f\in C(E)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 对 $\forall t\in\mathbb{R}$, 注意到

$$\{x\in E: f(x)>t\}=f^{-1}(t,+\infty),$$

显然 $(t,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 又 $f\in C(E)$, 故 $f^{-1}(t,+\infty)$ 是 E 上的开集. 又因为 Borel 集都可测, 所以 $f^{-1}(t,+\infty)$ 也可测. 因此 $f(x)$ 在 E 上可测. □

定义 3.3

设有一个与集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 中的点 x 有关的命题 $P(x)$. 若除了 E 中的一个零测集以外,$P(x)$ 皆为真, 则称 $P(x)$ 在 E 上**几乎处处**是真的, 并简记为 $P(x)$,a. e.$x\in E$.

定义 3.4

设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上**几乎处处相等**, 也称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**对等的**, 记为

$$f(x) = g(x), \text{ a.e.} x \in E.$$

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上是**几乎处处有限的**, 并记为

$$|f(x)| < \infty, \text{ a.e.} x \in E.$$

注 可测函数有界与有限的区别:$|f(x)| < +\infty$,a. e. $x \in E$ 与 $|f(x)| < M$(M 是某个实数),a. e. $x \in E$ 是不同的. 后者蕴含前者, 但反之不然. 此即**可测函数有界必有限, 但有限不一定有界**, 例如 $E = (0, 1], f(x) = 1/x$ 在 E 上每一点都有限, 但 $f(x)$ 在 E 上无界. 如果 $E = [0, 1]$, 则 $f(x) = 1/x$ 在 $x = 0$ 处无限, 即 $f(0) = +\infty$, 也即 $\{x \in E : f(x) = +\infty\} = 0$.

定理 3.6

设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数,$f(x)$ 是 E 上的可测函数. 若 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$, 则 $g(x)$ 在 E 上可测.

注 由这个定理可知, 对一个可测函数来说, 当改变它在零测集上的值时不会改变函数的可测性.

证明 令 $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$, 则 $m(A) = 0$ 且 $E \setminus A$ 是可测集. 对于 $t \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\{x \in E : g(x) > t\} &= \{x \in E \setminus A : g(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\} \\ &= \{x \in E \setminus A : f(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\}.\end{aligned}$$

根据 $f(x)$ 在 E 上的可测性可知, 上式右端第一个点集是可测的, 而第二个点集是零测集的子集仍是零测集, 也是可测集. 从而可知左端点集是可测的. □

命题 3.5 (局部有界化)

设 $0 < m(A) < +\infty, f(x)$ 是 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 且有 $0 < f(x) < +\infty$,a. e. $x \in A$, 则对任给的 δ:$0 < \delta < m(A)$, 存在 $B \subset A$ 以及自然数 k_0, 使得

$$m(A \setminus B) < \delta, \quad \frac{1}{k_0} \leqslant f(x) \leqslant k_0, \quad x \in B.$$

证明 记 $A_k = \{x \in A : 1/k \leqslant f(x) \leqslant k\}(k = 1, 2, \cdots), Z_1 = \{x \in A : f(x) = 0\}, Z_2 = \{x \in A : f(x) = +\infty\}$, 易知 $m(Z_1) = m(Z_2) = 0$, 且有

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup Z_1 \cup Z_2, A_k \subset A_{k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + m(Z_1) + m(Z_2) = m\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right) \xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

从而存在 k_0, 使得 $m(A \setminus A_{k_0}) < \delta$. 取 $B = A_{k_0}$, 即得所证. □

定义 3.5 (简单函数)

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数. 若

$$\{y : y = f(x), x \in E\}$$

是有限集, 则称 $f(x)$ 为 E 上的**简单函数**.

定理 3.7

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数, 则可设

$$\{y : y = f(x), x \in E\} = \{c_1, c_2, \cdots, c_p\}.$$

再令

$$E_i = \{x \in E : f(x) = c_i\}, i = 1, 2, \cdots, p.$$

于是

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, \quad E_i \cap E_j = \varnothing, \quad i, j = 1, 2, \cdots, p.$$

$$f(x) = c_i, \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

故可将 f 记为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x), x \in E.$$

从而**简单函数是有限个特征函数的线性组合**. 特别地, 当每个 E_i 是矩体 (这里允许取无限大的矩体) 时, 称 $f(x)$ 是**阶梯函数**.

命题 3.6

1. 若 $f(x), g(x)$ 是 E 上的简单函数, 则

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

也是 E 上的简单函数.

2.

证明

1. 由定理 3.7易证.
2.

□

定义 3.6 (可测简单函数)

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数, 则

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x), x \in E.$$

其中 $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots, p$. 若上式中的每个 E_i 都是可测集, 则称 $f(x)$ 是 E 上的**可测简单函数**.

定理 3.8 (简单函数逼近定理)

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 则存在非负可测的简单函数渐升列: $\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), k = 1, 2, \cdots$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E; \tag{3.2}$$

(2) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|$, 且有 $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x), x \in E$. 若 $f(x)$ 还是有界的, 则上述的收敛是一致的.

注 注意 $\bigcup\limits_{j=1}^{k2^k} E_{k,j}=\bigcup\limits_{j=1}^{k2^k}\left\{x\in E:\dfrac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{j}{2^k}\right\}=\{x\in E:0\leqslant f(x)<k\}$.

笔记 $\varphi_k(x)$ 随着 k 增大, 对 $[0,k]$ 区间的分割就越细.

证明 (1) 对任意的自然数 k, 将 $[0,k]$ 划分为 $k2^k$ 等分, 并记

$$
\begin{gathered}
E_{k,j}=\left\{x\in E:\frac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\frac{j}{2^k}\right\},\\
E_k=\{x\in E:f(x)\geqslant k\},\\
j=1,2,\cdots,k2^k,\quad k=1,2,\cdots.
\end{gathered}
$$

作函数列

$$
\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{2^k}, & x\in E_{k,j},\\ k, & x\in E_k,\end{cases}
$$
$$
j=1,2,\cdots,k2^k,\quad k=1,2,\cdots,
$$

且写成

$$
\varphi_k(x)=k\chi_{E_k}(x)+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\chi_{E_{k,j}}(x),\quad x\in E.
$$

由定理 3.2可知, 每个 $\varphi_k(x)$ 都是非负可测简单函数. 现在考虑其单调性. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 固定 k. 对 $\forall x_0\in E$, ①当 $0\leqslant f(x_0)<k+1$ 时, 即 $x_0\in\{x\in E:0\leqslant f(x)<k+1\}=\bigcup\limits_{j=1}^{(k+1)2^{k+1}} E_{k+1,j}$, 则存在 $j_0\in\left\{1,2,\cdots,(k+1)2^{k+1}\right\}$, 使得 $x_0\in E_{k+1,j_0}=\left\{x\in E:\dfrac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x)<\dfrac{j_0}{2^{k+1}}\right\}$, 即

$$
\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x_0)<\frac{j_0}{2^{k+1}},\quad \varphi_{k+1}(x_0)=\frac{j_0-1}{2^{k+1}}. \tag{3.3}
$$

(I) 当 $j_0\in\left[1,k2^{k+1}\right]$ 时, (i) 当 j_0-1 为偶数时, 则此时 j_0+1 也是偶数, 从而 $j_0+1\in\left[2,k2^{k+1}\right]$. 于是 $\dfrac{j_0+1}{2}\in\left[1,k2^k\right]\cap\mathbb{N}$. 又注意到

$$
\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k},\quad \frac{\frac{j_0-1}{2}+1}{2^k}=\frac{j_0+1}{2^{k+1}}>\frac{j_0}{2^{k+1}},
$$

从而

$$
\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x_0)<\frac{j_0}{2^{k+1}}<\frac{\frac{j_0+1}{2}}{2^k}.
$$

故此时就有 $x_0\in\left\{x\in E:\dfrac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{\frac{j_0+1}{2}}{2^k}\right\}=E_{k,\frac{j_0+1}{2}}$. 因此再结合(3.3)式可得

$$
\varphi_k(x_0)=\frac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k}=\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\varphi_{k+1}(x_0)\leqslant f(x_0).
$$

(ii) 当 j_0-1 为奇数时, 则此时 j_0-2, j_0 都是偶数. 再结合 $j_0\in\left[1,k2^{k+1}\right]$ 可知 $j_0\in\left[2,k2^{k+1}\right]$. 于是 $\dfrac{j_0}{2}\in\left[1,k2^k\right]\cap\mathbb{N}$. 又注意到

$$
\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}=\frac{j_0-2}{2^{k+1}}<\frac{j_0-1}{2^{k+1}},\quad \frac{j_0}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0}{2}}{2^k}.
$$

从而

$$
\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}<\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x_0)<\frac{j_0}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0}{2}}{2^k}.
$$

故此时就有 $x_0 \in \left\{x \in E : \dfrac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k} \leqslant f(x) < \dfrac{\frac{j_0}{2}}{2^k}\right\} = E_{k,\frac{j_0}{2}}$. 因此再结合(3.3)式可得

$$\varphi_k(x_0) = \frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k} = \frac{j_0-2}{2^{k+1}} < \frac{j_0-1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x_0) \leqslant f(x_0).$$

(II) 当 $j_0 \in \left[k2^{k+1}+1, (k+1)2^{k+1}\right]$ 时, 则由(3.3)式可知, 此时有

$$k \leqslant \frac{j_0-1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x_0) \leqslant f(x_0) < \frac{j_0}{2^{k+1}} \leqslant k+1.$$

于是此时 $x_0 \in \{x \in E : f(x) \geqslant k\} = E_k$, 从而此时 $\varphi_k(x_0) = k$. 故此时就有

$$\varphi_k(x_0) = k \leqslant \frac{j_0-1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x_0) \leqslant f(x_0) < \frac{j_0}{2^{k+1}} \leqslant k+1.$$

②当 $f(x_0) \geqslant k+1$ 时, 则此时 $x_0 \in E_{k+1} \subset E_k$. 从而此时就有

$$\varphi_k(x_0) = k < k+1 = \varphi_{k+1}(x_0) \leqslant f(x_0).$$

综上所述, 我们有

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \leqslant f(x), \quad \varphi_k(x) \leqslant k,$$
$$x \in E, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

现在, 对任意的 $x_0 \in E$,①若 $f(x_0) \leqslant M$, 则对 $\forall k > M$, 都有 $x_0 \in \{x \in E : 0 \leqslant f(x) < k\} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{k,j}$. 从而存在 $j_0 \in \{1, 2, \cdots, k2^k\}$, 使得 $x_0 \in E_{k,j_0}$, 即

$$\frac{j_0-1}{2^k} \leqslant f(x_0) < \frac{j_0}{2^k}, \quad \varphi_k(x_0) = \frac{j_0-1}{2^k}.$$

于是

$$0 \leqslant f(x_0) - \varphi_k(x_0) \leqslant \frac{1}{2^k},$$

令 $k \to \infty$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x_0) = f(x_0)$.

②若 $f(x_0) = +\infty$, 则对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有 $x_0 \in E_k$. 从而此时就有 $\varphi_k(x_0) = k (k = 1, 2, \cdots)$. 令 $k \to \infty$ 得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_0) = +\infty = f(x_0).$$

综上, 再由 x_0 的任意性可得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E.$$

(2) 记 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. 由 (1) 知存在可测简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$ 及 $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$, 满足

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(1)}(x) = f^+(x), \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(2)}(x) = f^-(x), \quad x \in E.$$

显然,$\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x)$ 是可测简单函数, 且有

$$\lim_{k\to\infty} [\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x)] = f^+(x) - f^-(x) = f(x), \quad x \in E.$$

若在 E 上有 $|f(x)| \leqslant M$, 则当 $k > M$ 时, 由 (1) 同理可知

$$\sup_{x\in E} |f^+(x) - \varphi_k^{(1)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^k},$$
$$\sup_{x\in E} |f^-(x) - \varphi_k^{(2)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in E} \left| f(x) - \left[\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x)\right] \right| &= \sup_{x\in E} \left| \left[f^+(x) - \varphi_k^{(1)}(x)\right] - \left[f^-(x) - \varphi_k^{(2)}(x)\right] \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in E} \left(\left| f^+(x) - \varphi_k^{(1)}(x) \right| + \left| f^-(x) - \varphi_k^{(2)}(x) \right| \right) \\
&\leqslant \sup_{x\in E} \left| f^+(x) - \varphi_k^{(1)}(x) \right| + \limsup_{k\to\infty} \sup_{x\in E} \left| f^-(x) - \varphi_k^{(2)}(x) \right|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \to 0, k \to \infty.$$

从而知 $\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x)$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的. □

定义 3.7

对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 称点集

$$\{x : f(x) \neq 0\}$$

的闭包为 $f(x)$ 的**支 (撑) 集**, 记为 $\operatorname{supp}(f)$. 若 $f(x)$ 的支集是有界 (即支 (撑) 集是紧集) 的, 则称 $f(x)$ 是**具有紧支集的函数**. ♣

推论 3.2

简单函数逼近定理中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数. ♡

证明 对每个 k, 令 $g_k(x) = \varphi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x)(x \in E)$, 则 $g_k(x)$ 仍是可测简单函数且具有紧支集.

对 $\forall x_0 \in E$, 则存在 k_0, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时有 $x_0 \in B(0,k)$. 此时可得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_0) = f(x_0).$$

故再由 x_0 的任意性可得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in E.$$

并且若 $\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), \forall x \in E$, 则当 $x \in E \cap B(0,k) \subset E \cap B(0,k+1)$ 时, 则此时我们有

$$g_k(x) = \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) = g_{k+1}(x).$$

当 $x \notin E \cap B(0,k)$ 时, 显然有

$$g_k(x) = 0 \leqslant g_{k+1}(x).$$

综上可得

$$g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x), \forall x \in E.$$

□

定理 3.9

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则存在函数值都是有理数的函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛且递增于 $f(x)$. ♡

证明 作 $E_{k,n} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, 且令

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k2^{-n}\chi_{E_{k,n}}(x),$$

则由定理 3.8同理可证 $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 2^{-n}$ 以及 $f_n(x)$ 关于 n 递增. 从而可得 $f_n(x) \nearrow f(x)(n \to \infty)$ 即得所证. □

3.2 可测函数列的收敛

3.2.1 几乎处处收敛与一致收敛

定义 3.8 (几乎处处收敛)

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z, 有 $m(Z) = 0$ 及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \setminus Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**几乎处处收敛**于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x) \to f(x), \text{ a. e. } x \in E.$$

或

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e.} x \in E.$$

再不引起歧义下, 也可简记为

$$f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f.$$

♣

定理 3.10

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 $f_k(x) \to f(x)$, a. e.$x \in E$. 则 $f(x)$ 也是 E 上的可测函数.

♡

证明 由条件可知 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 Z 为零测集也可测, 从而 $E\backslash Z$ 是可测集. 于是由定理 3.3(2)可知 $\{f_k(x)\}$ 是 $E\backslash Z$ 上的可测函数列, 并且由条件可知 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ $(x \in E\backslash Z)$, 因此由推论 3.1可得 $f(x)$ 也是 $E\backslash Z$ 上的可测函数. 又注意到对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{x \in Z : f(x) > t\} \subset Z.$$

而 Z 是零测集, 由零测集的子集也是零测集可知,$\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也是零测集, 从而 $\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也可测. 于是 $f(x)$ 在 Z 上可测. 故由定理 3.3(1)可知 $f(x)$ 在 $E = (E\backslash Z) \cup Z$ 上可测. □

定义 3.9 ((接) 近一致收敛)

设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上的可测函数列, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$,$m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上 **(接) 近一致收敛**于 $f(x)$.

♣

引理 3.1

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$, a. e. $x \in E$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

则 $E_k(\varepsilon) (k = 1, 2, \cdots)$ 可测, 并且

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0. \tag{3.4}$$

♡

证明 注意到对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} E_k(\varepsilon) &= \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \{x \in E : -\varepsilon \leqslant f_k(x) - f(x) \leqslant \varepsilon\} \\ &= \{x \in E : f_k(x) - f(x) \geqslant -\varepsilon\} \cup \{x \in E : f_k(x) - f(x) \leqslant \varepsilon\}. \end{aligned}$$

因为 $f_k(x)$ 和 $f(x)$ 都在 E 上可测, 所以由可测函数的运算性质 (1)可知 $f_k(x) - f(x)$ 也在 E 上可测. 从而再由定理

3.2及可测集的性质可得

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : f_k(x) - f(x) \geqslant -\varepsilon\} \cup \{x \in E : f_k(x) - f(x) \leqslant \varepsilon\} \in \mathscr{M}.$$

由函数列收敛的否命题可知, 上限集 $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$ 中的点一定不是收敛点, 从而依题设可知

$$m\left(\lim_{j\to\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

根据递减可测集列的测度运算, 可知(3.4)式成立. □

定理 3.11 (Egorov(叶戈洛夫) 定理)

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f_k(x) \to f(x)$, a.e. $x \in E$ 的充要条件是对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 的可测子集 E_δ:$m(E_\delta) \leqslant \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

这也等价于对 $\forall \delta > 0$, 存在 E 的可测子集 F_δ:$m(E\backslash F_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 F_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 也即 $\{f_n(x)\}$ 接近一致收敛于 $f(x)$.

♡

注 Egorov 定理中的条件 $m(E) < +\infty$ 不能去掉. 例如考虑可测函数列

$$f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \quad x \in (0, +\infty).$$

它在 $(0, +\infty)$ 上处处收敛于 $f(x) \equiv 1$, 但在 $(0, +\infty)$ 中的任一个有限测度集外均不一致收敛于 $f(x) \equiv 1$.

但对 $m(E) = +\infty$ 的情形, 结论可陈述如下: 对任给 $M > 0$, 存在 E_M:$E_M \subset E$,$m(E_M) > M$, 使得 $f_n(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$.(见推论 3.3)

注 等价条件的证明:$\Rightarrow$: 对 $\forall \delta > 0$, 只需令 $F_\delta = E\backslash E_\delta$, 则显然 F_δ 为 E 的可测子集, 且 $E_\delta = E\backslash F_\delta$. 从而 $m(E\backslash F_\delta) = m(E_\delta) < \delta$ 且 $\{f_k(x)\}$ 也在 $E\backslash E_\delta = F_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. $\Leftarrow$: 对 $\forall \delta > 0$, 取 $E_\delta = E\backslash F_\delta$, 同理可证.

证明 **必要性**: 由引理 3.1可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ 可测. 现在取正数列 $1/i\ (i = 1, 2, \cdots)$, 则对任给的 $\delta > 0$ 以及每一个 i, 存在 j_i, 使得 $m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right) < \frac{\delta}{2^i}$. 令 $E_\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)$, 显然 E_δ 可测. 我们有

$$m(E_\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

现在来证明在点集

$$E\backslash E_\delta = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=j_i}^{\infty} \left\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i}\right\}$$

上,$\{f_k(x)\}$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的.

事实上, 对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在 i, 使得 $1/i < \varepsilon$, 从而对一切 $x \in E\backslash E_\delta$, 当 $k \geqslant j_i$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

充分性: 分别取 $\delta_k = 1/k, k = 1, 2, \cdots$, 则存在 $F_k \subset E, m(F_k) < 1/k$, 使得 $f_n(x)$ 在每个 $E\backslash F_k$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 记 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 则

$$m(F) \leqslant m(F_k) < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

令 $k \to \infty$ 得 $m(F) = 0$. 下面证明 $f_k(x)$ 在 $E \backslash F$ 上处处收敛于 $f(x)$.

由于

$$E \backslash F = E \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^c \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap F_k^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \backslash F_k).$$

故对 $\forall x_0 \in E \backslash F$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x_0 \in E \backslash F_{k_0}$. 又 f_k 在 $E \backslash F_{k_0}$ 上一致收敛于 f, 从而 $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \forall x \in E \backslash F_{k_0}$, 于是 $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x_0) = f(x_0)$. 故由 x_0 的任意性可得 $f_k(x)$ 在 $E \backslash F$ 上处处收敛于 $f(x)$. 因此 $f_k(x) \to f(x)$, a.e. $x \in E$. □

推论 3.3

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) = +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$,a.e. $x \in E$, 则对任给 $M > 0$, 存在 E_M:$E_M \subset E$,$m(E_M) > M$, 使得 $f_k(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 令 $E_k = E \cap B(0, k)$, 显然 $\{E_k\}$ 为递增可测集列, 并且

$$m(E_k) \leqslant m(B(0, k)) = \pi k^2 < +\infty.$$

又 $m(E) = +\infty$, 故

$$\lim_{k \to \infty} m(E_k) \xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}} m(\lim_{k \to \infty} E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = m(E) = +\infty. \tag{3.5}$$

因为 $f_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 和 $f(x)$ 在 E 上可测, 所以由定理 3.3(2) 可知 $f_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 和 $f(x)$ 在 $E_k(k = 1, 2, \cdots)$ 上也可测. 于是在 E_k 上应用 Egorov 定理可得, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在可测子集 $F_k \subset E_k$, 且 $m(E_k \backslash F_k) < \frac{1}{k}$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在每个 F_k 上均一致收敛于 $f(x)$. 从而由 $m(E_k \backslash F_k) < \frac{1}{k}$ 可得

$$m(F_k) > m(E_k) - \frac{1}{k}.$$

令 $k \to +\infty$, 再结合 (3.5) 式可得 $\lim\limits_{k \to \infty} m(F_k) = +\infty$. 因此, 对 $\forall M > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $m(F_k) > M$. 故取 $E_M = F_k$ 即得结论. □

推论 3.4

设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 均是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且有 $f_n(x) \to f(x)$,a.e. $x \in E$, 则存在可测集列 $\{E_i\}$:$E_i \subset E$ $(i \in \mathbb{N})$, 且

$$m\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 0,$$

使得 $f_n(x)$ 在每个 E_i 上均一致收敛于 $f(x)$.

证明 (1) 当 $m(E) < +\infty$ 时, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 根据Egorov 定理, 取 $\delta_i = \frac{1}{i} > 0$, 则存在可测子集 $E_i \subset E$, 使得 $m(E \backslash E_i) < \frac{1}{i}$, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 E_i 上一致收敛于 $f(x)$. 注意到对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有

$$E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset E \backslash E_i,$$

因此

$$m\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leqslant m(E \backslash E_i) < \frac{1}{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

再令 $i \to +\infty$ 得

$$m\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 0.$$

(2) 当 $m(E) = +\infty$ 时, 令

$$A_1 = E \cap B(0, 1), A_k = E \cap (B(0, k) \backslash B(0, k-1))(k = 2, 3, \cdots),$$

显然 $\{A_k\}$ 是一列互不相交的可测集, 满足 $A_k \subset E, m(A_k) < +\infty$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E$.

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 考虑 A_k, 则由 (1) 可知, 存在可测集列 $\{E_{k,i}\}$:$E_{k,i} \subset E (i \in \mathbb{N})$ 且

$$m\left(A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) = 0, \tag{3.6}$$

使得 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i} (\forall i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 进而再由 k 的任意性可得,$\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i} (\forall k, i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 考虑集族 $\mathcal{F} = \{E_{k,i} | k, i \in \mathbb{N}\}$. 由于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数, 故 $\mathcal{F}$ 也可数. 因此可将 $\mathcal{F}$ 枚举为序列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$. 故 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_i (\forall i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 由定理 1.2可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right). \tag{3.7}$$

又由 $\{A_k\}$ 互不相交可得

$$\left(A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) \cap \left(A_l \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{l,i}\right) = \varnothing, k \neq l. \tag{3.8}$$

故利用 (3.6)(3.7)(3.8) 式可得

$$m\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) = 0.$$

□

例题 3.1 考查 $f_n(x) = x^n (0 \leqslant x \leqslant 1), f(x) = 0 (0 \leqslant x < 1)$ 以及 $f(1) = 1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f_n(x)$ 点收敛于 $f(x)$ 而非一致收敛于 $f(x)$. 但在舍去一个测度可任意小的正测集 (如 $(1-\delta, 1]$) 后,$f_n(x)$ 在余下点集上一致收敛于 $f(x)$.

证明

□

3.2.2 几乎处处收敛与依测度收敛

定义 3.10

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k \to \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0, \tag{3.9}$$

或等价地, 若对 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 存在 $N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geqslant N_{\varepsilon,\delta}$ 时, 有 $m(E_n(\varepsilon)) < \delta$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**依测度收敛于** $f(x)$, 简记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

注 注意, 由 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(\{x \in E : |f_k(x)| = +\infty\}) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$.

定理 3.12

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是对等的.

笔记 这个定理告诉我们: 在函数对等的意义下, 依测度收敛的极限函数是唯一的.

证明 因为对 $\forall x \in E$, 有

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |g(x) - f_k(x)|,$$

所以对任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} &\subset \{x \in E : |f(x) - f_k(x)| + |g(x) - f_k(x)| > \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : |g(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

但当 $k \to \infty$ 时, 上式右端点集的测度趋于零, 从而得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

由 ε 的任意性可知 $f(x)=g(x)$,a.e. $x\in E$. □

定理 3.13

设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处有限, 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 几乎处处有限.

证明 设 $A=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}$, 则只需证 $m(A)=0$. 由于每个 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 因此对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 令 $B_k=\{x\in E:|f_k(x)|=+\infty\}$, 则 $m(B_k)=0$. 再令 $B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$, 则 B 是可数个零测集的并, 而零测集必可测, 故 B 也可测. 并且

$$m(B)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)=0.$$

因此 $m(B)=0$. 对 $\forall x_0\in A\setminus B$, 都有

$$|f(x_0)|=+\infty,\quad |f_k(x_0)|<+\infty.$$

于是对 $\forall\varepsilon>0,k\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f_k(x_0)-f(x_0)|>\varepsilon.$$

这表明对 $\forall\varepsilon>0,k\in\mathbb{N}$, 都有 $x_0\in\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}$. 再由 x_0 的任意性可得

$$A\setminus B\subset\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\},\quad \forall\varepsilon>0,\ k\in\mathbb{N}.$$

从而再结合 $m(B)=0$ 可得

$$m(A)=m(A\setminus B)\leqslant m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}),\quad \forall\varepsilon>0,\ k\in\mathbb{N}.$$

令 $k\to\infty$ 可得

$$m(A)\leqslant\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}).$$

又因为 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0.$$

故 $m(A)=0$, 结论得证. □

例题 3.2 收敛但不一致收敛的函数

$f_n(x)=x^n,n=1,2,\cdots$

证明 显然 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

但不一致收敛于 $f(x)$, 因为连续函数列的一致收敛极限必连续, 而 $f(x)$ 不连续. 然而, 去掉任意小的一段之后一致收敛, 即: 对 $\forall\delta>0,f_n(x)$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛于 0. □

例题 3.3 依测度收敛但不几乎处处收敛的函数

对每个 $n\in\mathbb{N}$, 都存在唯一的 $k,i\in\mathbb{N}$, 使得

$$n=2^k+i,\quad 0\leqslant i<2^k$$

定义 $[0,1]$ 上的函数

$$f_n(x)=\chi_{[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k})}(x),\quad n=1,2,\cdots$$

证明 任取 $x_0\in[0,1]$, 对每个 $k\in\mathbb{N},\exists 0\leqslant i_k<2^k$ 使得

$$x_0\in\left[\frac{i_k}{2^k},\frac{i_k+1}{2^k}\right)$$

记 $n_k=2^k+i_k$, 则

$$f_{n_k}(x_0)=1,\quad k=1,2,\cdots$$

可见,$\{f_n(x_0)\}$ 有无穷多项为 1, 无穷多项为 0. 故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上每个点都不收敛 (从而不是几乎处处收敛). 但对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$m\{x\in[0,1]:|f_n(x)-0|\geqslant\varepsilon\}=\frac{1}{2^k}\to 0,\quad n\to\infty$$

其中,$n=2^k+i$,$0\leqslant i<2^k$. 故 $f_n\xrightarrow{\mu}0$. (这表明 n 越大, 出现 "1" 的频率越趋于 0.) □

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义可以看出, 前者强调的是在点上函数值的收敛 (尽管除一个零测集外), 后者并非指在哪个点上的收敛, 其要点在于点集

$$\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于零, 而不论此点集的位置状态如何. 这是两者的区别. 下面我们讨论它们之间的联系.

定理 3.14

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E)<+\infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$(反之不然). ♡

注

1. 上述定理中的条件 $m(E)<+\infty$ 不能去掉. 例如, 取 $E=(0,+\infty)$, 令 $f_n(x)=\chi_{(0,n]}(x)$, 则

$$f_n(x)\to f(x)\equiv 1,\quad x\in E$$

但当取 $\delta=1/2>0$ 时, 有

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\delta\})=m((n,+\infty))=+\infty$$

故 f_n 不依测度收敛到 f.

2. 上述定理中的条件 $f(x)$ 几乎处处有限也不能去掉.

例如, 考虑 $E=[0,1]$, 定义函数列 $f_k(x)=k$, 则 $m(E)=1<+\infty$, 且每个 $f_k(x)$ 在 E 上处处有限.

令 $f(x)=+\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=+\infty=f(x)$,a.e. $x\in E$. 但对 $\forall\varepsilon>0$, 都有

$$|f_k(x)-f(x)|=+\infty\geqslant\varepsilon,\quad \forall x\in E.$$

于是

$$\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=E.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=m(E)=1\neq 0.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$.

证明 因为题设满足引理 3.1的条件, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 可知

$$\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0.$$

于是

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x\in E:\left|f_j(x)-f(x)\right|\geqslant\varepsilon\}\right).$$

令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. □

定理 3.15

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$(即 $\{f_k(x)\}$ 接近一致收敛于 $f(x)$), 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明 对任给的 $\varepsilon, \delta > 0$, 依假设存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta) < \delta$, 以及自然数 k_0, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E\backslash E_\delta.$$

由此可知, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset E_\delta.$$

这说明, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant m(E_\delta) < \delta.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. □

定义 3.11 (依测度 Cauchy(基本) 列)

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ j\to\infty}} m(\{x \in E : |f_k(x) - f_j(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的**依测度 Cauchy(基本) 列**.

定理 3.16

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_k(x)\}$ 必是 E 上依测度 Cauchy 列.

证明 由条件可知

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall k \geqslant k_0$, 都有

$$m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到对 $\forall x \in E$, 都有

$$\left|f_i(x) - f_j(x)\right| \leqslant |f_i(x) - f(x)| + \left|f_j(x) - f(x)\right|, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

从而对 $\forall i, j \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left\{x \in E : \left|f_i(x) - f_j(x)\right| > \varepsilon\right\} \subset \left\{x \in E : |f_i(x) - f(x)| + \left|f_j(x) - f(x)\right| > \varepsilon\right\} \\
&= \left\{x \in E : |f_i(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : \left|f_j(x) - f(x)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

于是对 $\forall i, j \geqslant k_0$, 就有

$$\begin{aligned}
&m\left(\left\{x \in E : \left|f_i(x) - f_j(x)\right| > \varepsilon\right\}\right) \\
&\leqslant m\left(\left\{x \in E : |f_i(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in E : \left|f_j(x) - f(x)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} m\left(\left\{x \in E : \left|f_i(x) - f_j(x)\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

即 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度 Cauchy 列. □

定理 3.17

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度 Cauchy 列, 则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明 对每个自然数 i, 可取 k_i, 使得当 $l, j \geqslant k_i$ 时, 有

$$m\left(\left\{x \in E : |f_l(x) - f_j(x)| \geqslant \frac{1}{2^i}\right\}\right) < \frac{1}{2^i}.$$

从而我们可以假定 $k_i < k_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 令

$$E_i = \left\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^i}\right\}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

则 $m(E_i) < 2^{-i}$. 现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集 $S = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} E_i$, 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(E_i) = 1 < +\infty$, 故由定理 2.9(1)可知 $m(S) = 0$.

注意到

$$\begin{aligned} x_0 \in E \backslash S &= E \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right)^c = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty} E_i^c\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\left(E \cap E_i^c\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\left\{x \in E : \left|f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)\right| < \frac{1}{2^i}\right\}. \end{aligned}$$

于是对 $\forall x_0 \in E \backslash S$, 都存在 $j_0 \in \mathbb{N}$, 当 $i \geqslant j_0$ 时, 有 $|f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)| < 2^{-i}$. 由此可知当 $l \geqslant j_0$ 时, 有

$$\sum_{i=l}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)| \leqslant \sum_{i=l}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2^{l-1}}.$$

令 $l \to +\infty$, 则由 Cauchy 收敛准则可知, 级数 $f_{k_1}(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)]$ 绝对收敛, 再由 x_0 的任意性可知级数 $f_{k_1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)]$ 在 $E \backslash S$ 上是绝对收敛的, 即 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E \backslash S$ 上处处收敛. 因此 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上是几乎处处收敛的, 设其极限函数为 $f(x)$,$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

此外, 对 $\forall j \in \mathbb{N}$, 注意到

$$\begin{aligned} E \backslash \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i &= E \cap \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right)^c = E \cap \left(\bigcap_{i=j}^{\infty} E_i^c\right) = \bigcap_{i=j}^{\infty}(E \cap E_i^c) \\ &= \bigcap_{i=j}^{\infty}\left\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}\right\}. \end{aligned}$$

因此当 $i \geqslant j$ 时, 有

$$|f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}, \quad \forall x \in E \backslash \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > j$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. 于是对 $\forall n \geqslant N, p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+p}}(x)| &< \sum_{i=n}^{n+p} |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \sum_{i=n}^{n+p} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall x \in E \backslash \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i. \end{aligned}$$

故由一致收敛的 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall j \in \mathbb{N}$, 有 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E \backslash \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的. 又由于

$$m\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right) < \frac{1}{2^{j-1}},$$

故 $f(x)$ 及 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上满足定理 3.15的条件, 于是 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

最后, 注意到

$$\begin{aligned}\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}&\subset\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f_{k_n}(x)\right|+\left|f_{k_n}(x)-f(x)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\&=\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f_{k_n}(x)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

从而

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m\left(\left\{x\in E:|f_n(x)-f_{k_n}(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+m\left(\left\{x\in E:|f_{k_n}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

于是当 $n\to\infty$ 时, 也有 $k_n\to\infty$. 故

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

□

定理 3.18 (Riesz(里斯) 定理)

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x),\ \text{a.e. }x\in E.$$

♡

证明 因为 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 所以 $\{f_k(x)\}$ 是依测度 Cauchy 列. 从而由定理 3.17的证明可知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 以及可测函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=g(x),\ \text{a.e. }x\in E,$$

而且 $\{f_{k_i}(x)\}$ 也是依测度收敛于 $g(x)$ 的. 但按假设,$\{f_{k_i}(x)\}$ 应依测度收敛于 $f(x)$, 从而由定理 3.12知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等. □

例题 3.4 设 $f(x),f_k(x)(k\in\mathbb{N})$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数,$m(E)<+\infty$.

(i) 若在任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

(ii) 若 $f_k(x)>0(k\in\mathbb{N})$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则对 $p>0,f_k^p(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f^p(x)$.

证明 (i) 反证法. 假定结论不真, 则存在 $\varepsilon_0>0,\sigma_0>0$ 以及 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\geqslant\sigma_0. \tag{3.10}$$

但依题设知, 存在 $\{k_{i_j}\}$, 使得 $f_{k_{i_j}}(x)\to f(x)(j\to\infty)$. 由此又知 $f_{k_{i_j}}(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 这与式 (3.10) 矛盾.

(ii) 由题设知, 任何子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中必有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$. 即 $\{f_{k_i}^p(x)\}$ 必有子列 $\{f_{k_{i_j}}^p(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f^p(x)$. 因此, 根据 (i) 即得所证. □

推论 3.5

设 $m(E)<+\infty$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 当且仅当对 $\{f_n\}$ 的任意子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_{k_i}}(x)=f(x)$, a.e.$x\in E$.

♡

注 若 $m(E)=+\infty$, 上述推论 3.5的结论不一定成立. 例如, 设 $E=\mathbb{R}$

$$f_n(x)=e^{-(x-n)^2},\quad n\in\mathbb{N}$$

则易知对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有 $f_n(x)\to0,n\to\infty$, 从而 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$. 但对 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$, 都有

$$\begin{aligned}&\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}:e^{-(x-n)^2}\geqslant\varepsilon\}\\=&\{x\in\mathbb{R}:n-\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\leqslant x\leqslant n+\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\}\end{aligned}$$

于是

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=2\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\nrightarrow0,\quad n\to\infty$$

因此,$f_n(x)$ 不依测度收敛于 0, 从而 $f_n(x)$ 的任何子列也不依测度收敛于 0.

证明 ($\Rightarrow$): 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上也依测度收敛于 $f(x)$. 由Riesz 定理, 存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\} \subset \{f_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_{k_i}}(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$.

($\Leftarrow$): 假设 $f_n(x)$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) > 0.$$

并且存在 $\delta_0 > 0$, 以及子列 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ 使得

$$m(\{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) \geqslant \delta_0.$$

因此对 $\{f_{n_k}\}$ 的任何子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 都有

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) \geqslant \delta_0. \tag{3.11}$$

又 $m(E) < +\infty$, 故由 Egorov 定理可知, 存在闭集 $F \subset E$:$m(F \setminus E) < \delta$, 使得 $f_{n_{k_i}}(x)$ 在 F 上一致收敛于 $f(x)$. 于是存在 $I \in \mathbb{N}$, 当 $i \geqslant I$ 时, 对 $\forall x \in F$, 都有

$$|f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0.$$

从而当 $i \geqslant I$ 时, 就有

$$\begin{aligned} F \subset \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0\} &\Longleftrightarrow \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0\}^c \subset F^c \\ &\Longleftrightarrow \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\} \subset E \setminus F. \end{aligned}$$

进而当 $i \geqslant I$ 时, 我们有

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) \leqslant m(E \setminus F) < \delta.$$

而由(3.11)式可知

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) \geqslant \delta$$

矛盾! □

定理 3.19

设 $f(x), \{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数列.

(1) 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛于 $f(x)$,$\varphi \in C(\mathbb{R})$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛于 $\varphi[f(x)]$;

(2) 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$,$\varphi \in C(\mathbb{R}^1)$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $\varphi[f(x)]$.

(3) 若 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$(近一致收敛或依测度收敛于 $f(x)$),$\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 (近一致收敛或依测度收敛) 于 $\varphi[f(x)]$.

证明

□

3.3 可测函数与连续函数的关系

3.3.1 Lusin 定理

引理 3.2

设 $F_1, \cdots, F_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的闭集, 记 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, 则定义在 F 上的任意简单函数 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}(x)$ 都是 F 上的连续函数.

证明 设 $x_0 \in F$, 则存在 $k_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $x_0 \in F_{k_0}$. 由于 $F_1, \cdots, F_n$ 互不相交, 故 $x_0 \notin \bigcup\limits_{k\neq k_0} F_k$. 又 $\bigcup\limits_{k\neq k_0} F_k$ 闭,

则由命题 1.18(3)可知 $d(x_0, \bigcup\limits_{k\neq k_0} F_k) > 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 记 $\delta = d(x_0, \bigcup\limits_{k\neq k_0} F_k)$. 则当 $x \in F \cap B(x, \delta)$ 时, 有

$$d\left(x, \bigcup_{k\neq k_0} F_k\right) \geqslant d\left(x_0, \bigcup_{k\neq k_0} F_k\right) - d(x, x_0) = \delta - d(x, x_0) > 0.$$

于是由命题 1.18(2)可知 $x \notin F \setminus \bigcup\limits_{k\neq k_0} F_k$, 故 $x \in F_{k_0}$. 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |c_{k_0} - c_{k_0}| = 0 < \varepsilon$$

因此,f 在点 x_0 连续, 由 x_0 的任意性,f 在 F 上连续. □

定理 3.20 (Lusin(卢津) 定理)

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F,$m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

注 上述Lusin 定理的结论不能改为:$f(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的连续函数, 其中 $m(Z) = 0$(Lusin 定理也可不用Egorov 定理来证明, 见美国数学月刊 (1988)). 粗略地讲,Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了.

注 1.不妨妨假定 $f(x)$ 是实值函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 是实值函数的情形, 令

$$E_1 = \{x \in E : |f(x)| < +\infty\}, E_2 = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}.$$

则 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,$E = E_1 \cup E_2$. 由假设可知, 对 $\forall \delta > 0$, 存在闭集 $F \subset E_1 \subset E$,$m(E_1 \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数. 又由 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(E_2) = 0$. 进而

$$m(E \setminus F) = m((E_1 \cup E_2) \cap F^c) = m((E_1 \setminus F) \cap (E_2 \setminus F)) = m(E_1 \setminus F) + m(E_2 \setminus F) < \delta.$$

从而原结论成立.

2.不妨设 $f(x)$ 是有界函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 有界的情形, 则当 $f(x)$ 无界时, 令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + |f(x)|}$, 则

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)} = 1 - \frac{1}{1 + f(x)} \leqslant 1, \quad \forall x \in \{x \in E : f(x) \geqslant 0\};$$
$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - f(x)} - 1 \geqslant -1, \quad \forall x \in \{x \in E : f(x) < 0\}.$$

从而 $|g(x)| < 1$,$\forall x \in E$. 即 $g(x)$ 有界. 于是由假设可知, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F,$m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $g(x)$ 是 F 上的连续函数.

又注意到

$$f(x) = g(x)(1 + |f(x)|) = \frac{g(x)}{1 + |f(x)|} = \frac{g(x)}{1 - \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}} = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|},$$

故由连续函数的性质可知, 此时 $f(x)$ 也是 F 上的连续函数. 从而原结论成立.

证明 不妨假定$f(x)$ 是实值函数, 这是因为 $f(x)$ 几乎处处有限, 从而

$$m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

(1) 首先考虑 $f(x)$ 是可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x), x \in E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j).$$

此时, 由定理 2.11可知, 对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 E_i, 可作 E_i 中的闭集 F_i, 使得

$$m(E_i \setminus F_i) < \frac{\delta}{p}, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

显然 $F_1, F_2, \cdots, F_p$ 是互不相交的闭集, 于是由引理 3.2可知 $f(x)$ 在 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{p} F_i$ 上连续. 由闭集的运算性质可知 F

也是闭集，且由定理 1.2(3)有

$$m(E \setminus F) \leqslant m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \backslash F_i)) = \sum_{i=1}^{p} m(E_i \setminus F_i) < \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta}{p} = \delta.$$

(2) 其次，考虑 $f(x)$ 是一般可测函数的情形. 由于可作变换

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|} \qquad \left(f(x) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|}\right),$$

故不妨假定$f(x)$ 是有界函数. 根据简单函数逼近定理可知，存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 现在对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$，由 (1) 可知存在 E 中的闭集 F_k:$m(E \setminus F_k) < \frac{\delta}{2^k}$，使得 $\varphi_k(x)$ 在 F_k 上连续. 令 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$，则 $F \subset E$，又由闭集的运算性质可知 F 为闭集. 且有

$$\begin{aligned} m(E \setminus F) &= m(E \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^c) \\ &= m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \backslash F_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \delta. \end{aligned}$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 F 上都是连续的，所以根据一致收敛性可知,$f(x)$ 在 F 上连续. □

推论 3.6

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任给的 $\delta > 0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$，使得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \delta;$$

若 E 还是有界集，则可使上述 $g(x)$ 具有紧支集.

证明 由Lusin 定理可知，对任给的 $\delta > 0$，存在 E 中的闭集 F,$m(E \setminus F) < \delta$ 且 $f(x)$ 是 F 上的连续函数，从而根据连续函数延拓定理 (2)，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$，使得

$$f(x) = g(x), \quad x \in F.$$

因为 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E \setminus F$，所以得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant m(E \setminus F) < \delta.$$

若 E 是有界集，不妨设 $E \subset B(0, k)$，则作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$，且满足 ($\varphi$ 在 $B(0, k) \backslash F$ 中连续且端点连续连接)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \notin B(0, k). \end{cases}$$

从而将上述 $g(x)$ 换成 $g(x) \cdot \varphi(x)$. 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$，则 $g(x)$ 的支集为 $\overline{A} \subset B(0, k)$. 于是 $\overline{A}$ 为有界闭集，进而 $g(x)$ 具有紧支集. □

推论 3.7

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

证明 由推论 3.6可知，对于任意的趋于零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g_k(x)| \geqslant \varepsilon_k\}) < \delta_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

这说明 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 从而根据Riesz 定理，可选子列 $\{g_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i \to \infty} g_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

□

注 我们知道,$\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

可以表示为 (双重指标) 连续函数列的累次极限:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}[\cos(n!2\pi x)]^{2k}=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

然而, 并不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

例题 3.5 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

证明 因为 $f(x+h)-f(x)=f(h)$ 以及 $f(0)=0$, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 根据Lusin 定理, 可作有界闭集 F:$m(F)>0$, 使得 $f(x)$ 在 F 上 (一致) 连续, 即对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad |x-y|<\delta_1,\quad x,y\in F.$$

现在研究 $F-F$. 由Steinhaus 定理知道, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2].$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $z\in[-\delta,\delta]$ 时, 由于存在 $x,y\in F$, 使得 $z=x-y$, 故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的. □

例题 3.6 设 $f(x)$ 是 $I=(a,b)$ 上的实值可测函数. 若 $f(x)$ 具有中值 (下) 凸性质:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in I,$$

则 $f\in C(I)$.

证明 根据数学分析的理论易知, 若 $f(x)$ 是 I 上的有界函数, 则 $f\in C(I)$.

对此, 假定 $f(x)$ 在 $x=x_0\in I$ 处不连续, 且考查区间 $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]\subset I$, 其中存在 $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad f(\xi_k)\geqslant k\quad(k=1,2,\cdots).$$

对于任意的 $x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$, 显然有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta,\quad x_0-2\delta\leqslant x'\overset{\text{def}}{=}2\xi_k-x\leqslant x_0+2\delta.$$

由 $2\xi_k=x'+x$ 可知 $2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$, 从而必有 $f(x)\geqslant k$ 或者 $f(x')\geqslant k$. 这说明

$$m(\{x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta):f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

也就是说, 对于任意大的自然数 k, 均有

$$m(\{x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta:f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

从而导致 $f(x_0)=+\infty$, 矛盾, 即得所证. □

3.3.2 复合函数的可测性

引理 3.3

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测的充分必要条件是, 对于 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 G,$f^{-1}(G)$ 是可测集.

证明 **充分性**: 对 $\forall t\mathbb{R}$, 显然 $(t,+\infty)$ 可测, 故由充分性的假设可知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 也可测, 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测.

必要性: 由假设知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集, 故知对任意的区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$, 点集

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\setminus f^{-1}([b,+\infty))$$

是可测的. 若 $G \subset \mathbb{R}$ 是开集, 则由开集构造定理 (1)可设 $G = \bigcup_{k \geqslant 1} (a_k, b_k)$, 从而根据

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k \geqslant 1} f^{-1}(a_k, b_k)$$

可知 $f^{-1}(G)$ 是可测集. □

定理 3.21

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数,$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x) = f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

注 当 $f(x)$ 是可测函数而 $g(x)$ 是连续函数时,$f(g(x))$ 就不一定是可测函数 (见例题 3.7).

证明 由 f 的连续性可知, 对任一开集 $G \subset \mathbb{R}$, 都有 $f^{-1}(G)$ 是开集. 再根据 $g(x)$ 的可测性, 由推论 3.3可知 $g^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $h(x) = f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数. □

例题 3.7 设 $\Phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\Psi(x) = \frac{x + \Phi(x)}{2},$$

则 $\Psi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 C 是 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集,W 是 $\Psi(C)$ 中的不可测子集.

现在令 $f(x)$ 是点集 $\Psi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 作

$$g(x) = \Psi^{-1}(x), \quad x \in [0, 1].$$

显然,$f(x) = 0$,a.e. $x \in [0, 1]$,$g(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的严格递增的连续函数. 易知 $f(g(x))$ 在 $[0, 1]$ 上不是可测函数.

注 该例说明, 存在可测函数 $f(x)$, 它有反函数 $f^{-1}(x)$, 但 $f^{-1}(x)$ 不可测.

定理 3.22

设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换, 当 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m(Z) = 0$ 时,$T^{-1}(Z)$ 是零测集. 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的任一开集, 由假设知道 $f^{-1}(G)$ 是可测集. 不妨设 $f^{-1}(G) = H \setminus Z$, 其中 $m(Z) = 0$, 且 H 是 G_δ 型集. 由假设可知 $T^{-1}(Z)$ 是零测集以及 $T^{-1}(H)$ 是 G_δ 型集, 故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G)) = T^{-1}(H) \setminus T^{-1}(Z)$$

立即得出 $T^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

推论 3.8

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的实值可测函数,$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明

□

例题 3.8 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(x - y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 (i) 记 $F(x, y) = f(x)$,$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 则因对 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{(x, y) : F(x, y) > t\} = \{(x, y) : f(x) > t, y \in \mathbb{R}^n\},$$

所以 $F(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

(ii) 作 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的非奇异线性变换 T:

$$\begin{cases} x = \xi - \eta, \\ y = \xi + \eta, \end{cases} \qquad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

易知在变换 T 下,$F(x, y)$ 变为 $F(\xi - \eta, \xi + \eta) = f(\xi - \eta)$, 从而 $f(\xi - \eta)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

例题 3.9 设 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的实值可测函数, 令 $F(x, y) = f(y/x)(0 < x, y < +\infty)$, 则 $F(x, y)$ 是 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上的二元可测函数.

证明 令 $g(\theta)=f(\tan\theta), 0<\theta<\pi/2$. 因为 $y=\tan x$ 的反函数是绝对连续的, 它把零测集变为零测集 (见第五章), 所以 $g(\theta)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可测. 从而对 $t\in\mathbb{R}$, 点集

$$E=\{\theta:0<\theta<\pi/2, g(\theta)>t\}$$

是可测集. 又由于我们有

$$\begin{aligned}&\{(x,y):0<x<+\infty, 0<y<+\infty, F(x,y)>t\}\\=&\{(r\cos\theta, r\sin\theta):0<r<+\infty, \theta\in E\}=S_E(0,+\infty),\end{aligned}$$

故根据例题 2.7所述, 即得所证. □

定理 3.23

设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 是单变量 $y\in\mathbb{R}$ 的可测函数;

(ii) $f(x,y)$ 是单变量 $x\in\mathbb{R}$ 的连续函数,

则对定义在 $\mathbb{R}$ 上任一实值可测函数 $g(y)$,$f[g(y),y]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明 对 $\mathbb{R}$ 作如下的区间分割: $\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right](m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N})$, 并对 $(x,y)\in[(m-1)/n, m/n]\times\mathbb{R}$, 作函数列 (凸线性组合)

$$f_n(x,y)=n\left(\frac{m}{n}-x\right)f\left(\frac{m-1}{n},y\right)+n\left(x-\frac{m-1}{n}\right)f\left(\frac{m}{n},y\right),$$

易知 $f_n(x,y)$ 位于 $f((m-1)/n,y)$ 与 $f(m/n,y)$ 之间.

因为对每点 (x,y), 均存在区间列

$$I_k=\left[\frac{m_k-1}{n_k},\frac{m_k}{n_k}\right](k\in\mathbb{N}),\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}I_k=x.$$

由 (ii) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$, 从而我们有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(g(y),y)=f(g(y),y),$$

即可得证. □

第 4 章 Lebesgue 积分

4.1 非负可测函数的积分

4.1.1 非负可测简单函数积分

定义 4.1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 它在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 c_i 意味着:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{A_i}(x),\quad \bigcup_{i=1}^{p}A_i=\mathbb{R}^n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j).$$

若 $E\in\mathscr{M}$, 则定义 $f(x)$ 在 E 上的**积分**为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i).$$

这里积分符号下的 $\mathrm{d}x$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的标志.(注意, 我们曾约定 $0\cdot\infty=0$.) ♣

注 此外, 由定义立即得知, $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 只与 $f(x)$ 在 E 上的值有关.

例题 4.1 设在 $\mathbb{R}$ 上定义函数

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

我们有

$$\int_{(0,1)}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

引理 4.1

设 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x), g(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}(x)$ 为 E 上的简单函数, 其中

$$E=\bigcup_{i=1}^{\mathrm{n}}E_i=\bigcup_{i=1}^{m}F_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,\quad F_i\cap F_j=\varnothing.$$

则它们可以表示为统一形式:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}(x),\quad g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{E_i\cap F_j}(x)$$

进而

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i\pm b_j)\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$

♡

证明 实际上, 对于 E 的两种划分:$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$, 其中,$E_i$ 互不相交,F_j 互不相交. 我们有

$$E_i\cap E=E_i\cap\bigcup_{j=1}^{m}F_j=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j), i=1,2,\cdots,n.$$

$$E\cap F_j=\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)\cap F_j=\bigcup_{i=1}^{m}(E_i\cap F_j), j=1,2,\cdots,m.$$

显然 $(E_i \cap F_j)(i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m)$ 互不相交. 从而

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_i\cap F_j}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$

$$g(x)=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{F_j}(x)=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{\bigcup_{i=1}^{m}(E_i\cap F_j)}(x)=\sum_{j=1}^{m} b_j\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i\cap F_j}(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$

□

定理 4.1 (积分的线性性质)

设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数,$f(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$,$g(x)$ 在点集 $B_j(j=1,2,\cdots,q)$ 上取值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$,$E\in\mathscr{M}$, 则有

(i) 若 C 是非负常数, 则

$$\int_E Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\mathrm{d}x;$$

(ii)

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 (i) 可从定义直接得出.

(ii) 由引理 4.1可知 $f(x)+g(x)$ 在 $A_i\cap B_j$(假定非空) 上取值 a_i+b_j, 故有

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(E\cap A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_im(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_jm(E\cap B_j)\\&=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 4.2

若 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增可测集列,$f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

♡

证明 设 $f(x)$ 在 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}c_im\left(E_k\cap A_i\right)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lim_{k\to\infty}m\left(E_k\cap A_i\right)\\&\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}}\sum_{i=1}^{p}c_im\left(\lim_{k\to\infty}\left(E_k\cap A_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{p}c_im\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\cap A_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}c_im\left(E\cap A_i\right)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

4.1.2 非负可测函数的积分

定义 4.2

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leq f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x: h(x)\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{ 上的非负可测简单函数}\right\}$$

$$=\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x: h(x)\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\},$$

这里的积分可以是 $+\infty$; 若 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**.

定理 4.3 (非负可测函数积分的性质)

(1) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x)\leqslant g(x)(x\in E)$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 E 上非负可测, 我们有

(i) 若存在 E 上非负可积函数 $F(x)$, 使得

$$f(x)\leqslant F(x),\quad x\in E,$$

则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上有界, 且 $m(E)<+\infty$, 则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(3) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,A 是 E 中可测子集, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 若 $F\subset E$ 且 F 可测, 则

$$\int_F f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(5) (i) $f(x)$ 在 E 上几乎处处等于零的充要条件是 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(ii) 若 $m(E)=0$, 则 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明

(1) 证法一:任取非负可测简单函数 $h(x)$(在 $\mathbb{R}^n$ 上), 且

$$h(x)\leq f(x)\quad(x\in E),$$

则 $h(x)\leq g(x)(x\in E)$, 从而由定义可知

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x\leqslant\sup_{\substack{h(x)\leq g(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

于是由 $h(x)$ 的任意性可知,$\displaystyle\int_E g(x)\mathrm{d}x$ 是 $\{\displaystyle\int_E h(x)\mathrm{d}x: h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x),\forall x\in E\}$ 的一个上界. 由此即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leq f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证法二:因为对 $\mathbb{R}^n$ 任意的非负可测简单函数 $h(x)$, 且 $h(x)\leqslant f(x)(x\in E)$, 都有

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)(x\in E),$$

所以

$$\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\}$$
$$\subset\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant g(x)\,(x\in E)\right\}.$$

于是

$$\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\}$$
$$\leqslant\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant g(x)\,(x\in E)\right\}.$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) (i) 由 $F(x)$ 在 E 上可积及 (1) 可知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E F(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

故 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 由 $f(x)$ 在 E 上有界可知, 存在 $M>0$, 使得

$$f(x)\leqslant M,\quad\forall x\in E.$$

从而由 (1) 可得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E M\mathrm{d}x.$$

由于常值函数也是简单函数, 故

$$\int_E M\mathrm{d}x=M\cdot m(E)<+\infty.$$

因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E M\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $f(x)$ 在 E 上可积.

(3) 设 $h(x)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数. 任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\leqslant f(x), x\in A\}$, 则 $h_0(x)$ 为 A 上的非负可测简单函数, 且 $h_0(x)\leqslant f(x)(x\in A)$. 令

$$h_1(x)=\begin{cases}h_0(x), & x\in A,\\ 0, & x\in E\backslash A,\end{cases}$$

显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负简单可测函数, 且 $h_1(x)\chi_A(x)=h_0(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E$. 设 $h_0(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上的取值为 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 则

$$\int_E h_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i)+0\cdot m(E\backslash A)=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i)=\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\leqslant f(x), x\in A\}\subset\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}.$$

任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数且 $h_0(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E$. 令 $h_1(x)=h_0(x), x\in A$, 显然 $h_1(x)$ 是 A 上的非负可测简单函数, 且 $h_1(x)=h_0(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)=f(x), x\in A$. 由 $h_1(x)=h_0(x), x\in A$ 可知 $h_1(x)\leqslant h_0(x)\leqslant h_1(x), x\in A$. 从而由 (1) 可得

$$\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x=\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\} \supset \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

综上可得

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\} = \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \tag{4.1}$$

任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E$. 令 $h_1(x) = h_0(x)\chi_A(x), x \in E$, 显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 且 $h_1(x) = h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E$. 设 $h_0(x)$ 在点集 $E_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 上的取值为 $c_i(i = 1, 2, \cdots, p)$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{p}(E_i \cap A) = (\bigcup_{i=1}^{p} E_i) \cap A = E \cap A = A, \quad (E_i \cap A) \cap (E_j \cap A) = \varnothing(i \neq j).$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_E h_1(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E h_0(x)\chi_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \sum_{i=1}^{p} c_i(\chi_{E_i}(x) \cdot \chi_A(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E \left[\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i\cap A}(x) + 0 \cdot \chi_{E\backslash A}(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap A) + 0 \cdot m(E\backslash A) \\
&= \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap A) = \int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \subset \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

任取 $\int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且

$$h_0(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E. \tag{4.2}$$

令 $h_1(x) = h_0(x), x \in E$, 显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 且

$$h_1(x)\chi_A(x) = h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x) \cdot \chi_A(x) = f(x)\chi_{A\cap A}(x) = f(x)\chi_A(x), x \in E.$$

又由(4.2)式可知 $h_0(x) = 0, x \in E\backslash A$. 于是可设 $h_0(x)$ 在点集 $E_i(i = 1, 2, \cdots, p-1)$ 上取值为 $c_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots, p-1)$, 在 E_p 上取值为 0, 则 $E\backslash A \subset E_p$, 从而

$$E_i \subset \bigcup_{i=1}^{p-1} E_i \subset A, i = 1, 2, \cdots, p-1.$$

进而 $h_0(x) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i\chi_{E_i}(x)$. 于是

$$\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p-1} c_i m(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i m(E_i) = \int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \supset \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

综上可得

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} = \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}. \tag{4.3}$$

综上所述, 由(4.3)(4.1)式, 我们有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{h(x)\le f(x)\\ x\in A}} \left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\} = \sup_{\substack{h(x)\chi_A(x)\le f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}} \left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\} = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 由 (1) 和 (3) 立得.

(5) (i) **必要性**: 由必要性假设可知, 存在零测集 $Z\subset E$, 使得

$$f(x)=0, x\in E\backslash Z.$$

设 $h(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x), x\in E$. 从而

$$h(x)=0, x\in E\backslash Z.$$

于是可设 $h(x)$ 在点集 $E_i(i=1,2,\cdots,p-1)$ 上取值为 $c_i\neq 0(i=1,2,\cdots,p-1)$, 在 E_p 上取值为 0, 即

$$h(x)=\sum_{i=1}^{p-1} c_i\chi_{E_i}(x),\quad E=\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),\quad c_i\neq c_j(i\neq j).$$

从而

$$E\backslash Z\subset E_p,\quad E_i\subset\bigcup_{i=1}^{p-1} E_i\subset Z(i=1,2,\cdots,p-1).$$

又 Z 为零测集, 故 $m(E_i)=0(i=1,2,\cdots,p-1)$. 于是

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p-1} c_i m(E_i)+0\cdot m(E_p)=0.$$

故

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x\right\}=0.$$

充分性: 记

$$E_k=\{x\in E: f(x)>1/k\},$$

由 (1) 和 (4) 可得

$$\frac{1}{k}m(E_k)=\int_{E_k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\le\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x=0,$$

故知 $m(E_k)=0(k=1,2,\cdots)$. 注意到

$$\{x\in E: f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

立即得出 $m(\{x\in E: f(x)>0\})=0$.

(ii) 设 $h(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x), x\in E$. 从而可设 $h(x)$ 在点集 $E_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值为 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 即

$$h(x)=\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x),\quad E=\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),\quad c_i\neq c_j(i\neq j).$$

注意到

$$E_i\subset\bigcup_{i=1}^{p} E_i=E(i=1,2,\cdots,p),$$

又 E 为零测集, 故 $m(E_i)=0(i=1,2,\cdots,p)$. 于是

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i)=0.$$

故

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x\right\}=0.$$

□

定理 4.4

若 $f(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

证明 令 $E_k=\{x\in E: f(x)>k\}$, 则由 $f(x)$ 在 E 上可测可知 E_k 都可测, 且

$$\{x\in E: f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

对于每个 k, 可得

$$km(E_k)\leqslant\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

从而

$$m(E_k)\leqslant\frac{\int_E f(x)\,\mathrm{d}x}{k},\forall k\in\mathbb{N}.$$

令 $k\to\infty$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$. 于是

$$m(\{x\in E: f(x)=+\infty\}=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)$$
$$\xlongequal{\text{命题 1.4}}m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\overset{\text{定理 2.9(2)}}{\leqslant}\varliminf_{k\to\infty}m\left(E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m\left(E_k\right)=0.$$

故 $m(\{x\in E: f(x)=+\infty\}=0$. □

定理 4.5 (Beppo Levi 非负渐升列积分定理)

设有定义在 E 上的非负可测函数渐升列:

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots,$$

且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),x\in E$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 这个Beppo Levi 非负渐升列积分定理表明, 对于非负可测函数渐升列来说, 极限与积分的次序可以交换, 即

$$\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}\mu.$$

此外, 由简单函数逼近定理可知, 非负可测函数是非负可测简单函数渐升列的极限, 因而使得积分理论中的许多结果可直接从可测简单函数的积分性质得到.

证明 由函数列 $\{f_k(x)\}$ 的渐升性和 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),x\in E$ 可知,$f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 从而积分 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 有定义. 由函数列 $\{f_k(x)\}$ 的渐升性及定理 4.3(2)可知

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots),$$

所以根据单调有界定理可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$ 有定义, 而且从函数列的渐升性可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\tag{4.4}$$

现在令 c 满足 $0<c<1,h(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的任一非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x),x\in E$. 记

$$E_k=\{x\in E: f_k(x)\geqslant ch(x)\}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant ch(x)\}=E$. 根据定理 4.2可知

$$\lim_{k\to\infty}c\int_{E_k}h(x)\,\mathrm{d}x=c\int_E h(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是从不等式

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k} f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k} ch(x)\,\mathrm{d}x = c\int_{E_k} h(x)\,\mathrm{d}x$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant c\int_E h(x)\,\mathrm{d}x.$$

在上式中令 $c \to 1$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E h(x)\,\mathrm{d}x.$$

依 $f(x)$ 的积分定义即知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

综上, 由(4.4)(4.5)式可知结论成立. □

推论 4.1 (非负渐降函数列积分定理)

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 因为 $0 \leqslant f(x) \leqslant f_1(x)$, 所以由定理 4.3(2)(i)可知 $f(x)$ 在 E 上可积. 记

$$g_k(x) = f_1(x) - f_k(x) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{g_k(x)\}$ 是非负可积函数渐升列. 从而由Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{命题 4.7}}{=\!=} \int_E (f_1(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.6}$$

注意到 $f_1(x) = (f_1(x) - f_k(x)) + f_k(x)$, 于是由非负可测函数积分的线性性质我们有

$$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

进而

$$\int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $k \to \infty$, 可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f_1(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\left(\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

再结合(4.6)式可得

$$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为可积函数的积分值是有限的, 所以从两端消去同值项, 即得所证. □

定理 4.6 (非负可测函数积分的线性性质)

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数,α, β 是非负常数, 则

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由简单函数逼近定理可知, 存在 $\{\varphi_k(x)\},\{\psi_k(x)\}$ 是非负可测简单函数渐升列, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=g(x),\quad x\in E,$$

则 $\{\varphi_k(x)+\psi_k(x)\}$ 仍为非负可测简单函数渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\varphi_k(x)+\beta\psi_k(x))=\alpha f(x)+\beta g(x),\quad x\in E.$$

从而由简单函数积分的线性性质和Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知

$$\begin{aligned}\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int_E(\alpha\varphi_k(x)+\beta\psi_k(x))\,\mathrm{d}x\\&=\alpha\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x+\beta\lim_{k\to\infty}\int_E\psi_k(x)\,\mathrm{d}x\\&=\alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 4.7

设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x)=g(x)$ a. e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 这个命题表明: 改变非负可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.

证明 令 $E_1=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$,$E_2=E\setminus E_1$,$m(E_1)=0$, 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{定理 4.3(3)}}\int_E f(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_E f(x)[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)]\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{定理 4.3(3)}}\int_{E_1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{定理 4.3(5)(ii)}}\int_{E_2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E_2}g(x)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{定理 4.3(5)(ii)}}\int_{E_1}g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}g(x)\,\mathrm{d}x=\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 4.8 (逐项积分定理)

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $S_m(x)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)$, 则 $\{S_m(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数渐升列, 且 $\lim_{m\to\infty}S_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$. 从而根据 Beppo Levi 非负渐升列积分定理以及非负可测函数积分的线性性质, 可知

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{m\to\infty}S_m(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_E S_m(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

□

推论 4.2 (非负可测函数积分的可数可加性)

设 $E_k \in \mathscr{M}(k=1,2,\cdots), E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$. 若 $f(x)$ 是 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上的非负可测函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 特别地, 当 $f(x) \equiv 1$ 时, 上式就是测度的可数可加性. 从这里还可看到, 通过点集的特征函数, 积分与测度的问题是可以互相转化的.

证明 由逐项积分定理可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

例题 4.2 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $[0,1]$ 中的可测集,$[0,1]$ 中每一点至少属于上述集合中的 k 个 $(k \leqslant n)$, 则在 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中必有一个点集的测度大于或等于 k/n.

证明 因为当 $x \in [0,1]$ 时, 有 $\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \geqslant k$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x \geqslant k.$$

若每一个 $m(E_i)$ 皆小于 k/n, 则

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) < \frac{k}{n} \cdot n = k.$$

这与前式矛盾, 故存在 i_0, 使得 $m(E_{i_0}) \geqslant k/n$. □

定理 4.9 (Fatou 引理)

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 Fatou 引理常用于判断极限函数的可积性. 例如, 当 E 上的非负可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M \quad (k=1,2,\cdots)$$

时, 我们就得到

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

注 Fatou 引理的不等号是可能成立的, 可见例题 4.3.

证明 令 $g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \geqslant k\}$, 我们有

$$g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x) \quad (k=1,2,\cdots),$$

而且得到

$$\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x), \quad x \in E,$$

从而根据 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知,

$$\begin{aligned}\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例题 4.3 在 $[0,1]$ 上作非负可测函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<\dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots).$$

显然, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0(x\in[0,1])$, 因此我们有

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 这个例题说明Fatou 引理的不等号是可能成立的.

定理 4.10

设 $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数,$m(E)<+\infty$. 在 $[0,+\infty)$ 上作如下划分:

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty,$$

其中 $y_{k+1}-y_k<\delta\ (k=0,1,\cdots)$. 若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}\}\quad (k=0,1,\cdots),$$

则 $f(x)$ 在 E 上是可积的当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)<+\infty.$$

此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 由上述定理可知, 对 $m(E)<+\infty$ 以及 E 上的非负实值可测函数来说, 它的可积性等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m(E_k)<+\infty,$$

其中

$$E_k=\{x\in E: k\leqslant f(x)<k+1\}\quad (k=1,2,\cdots).$$

但若把 E_k 换成 $\{x\in E: f(x)\geqslant k\}$, 则还有定理 4.11.

证明 必要性显然成立, 下证充分性. 因为有不等式

$$y_k m(E_k)\leqslant\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\leqslant y_{k+1}m(E_k),$$

所以由推论 4.2得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}m(E_k)\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)m(E_k)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\\ &\leqslant\delta m(E)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k).\end{aligned}$$

令 $\delta\to 0$, 由条件立即可知结论成立. □

定理 4.11

设 $E \subset \mathbf{R}, m(E) < +\infty, f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.$$

证明 **必要性**: 只需注意到下式即可:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&\xlongequal{\text{定理 1.4}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) < +\infty.
\end{aligned}$$

充分性: 由推论 4.2可得

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{x \in E: k \leqslant f(x) < k+1\}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \xlongequal{\text{定理 1.4}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.
\end{aligned}$$

□

例题 4.4 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 的上非负实值可测函数, 则 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n m(\{x \in [a, b] : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.$$

证明 (i) 首先, 若 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则易知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 若令

$$E_n = \{x \in [a, b] : n \leqslant f(x) < n+1\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

则 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = b - a$, 且有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n m(E_n) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} n m(E_n) + (b-a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 m(E_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) + 2\sum_{n=0}^{\infty} n m(E_n) + (b-a).
\end{aligned}$$

这就是说, $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n m(E_n) < +\infty.$$

(ii) 注意到等式

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} km(E_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} k\sum_{n=k}^{\infty} m(E_n)=\sum_{k=1}^{\infty} km(\{x\in[a,b]: f(x)\geqslant k\}),$$

即得所证. □

命题 4.1

设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数. 若对任意的正整数 n, 均有 $m(\{x\in E: f(x)>n\})>0$, 则存在非负可测函数 g, 且 g 可积, 使得 fg 不可积.

证明 令 $E_n=\{x\in E: n\leqslant f(x)<n+1\}$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n)>0$ 可知, 存在 $\{n_k\}$:$m(E_{n_k})>0\ (k\in\mathbf{N})$. 作函数

$$g(x)=\begin{cases}(1/k^2)\cdot m(E_{n_k}), & x\in E_{n_k}(k\in\mathbf{N}),\\ 0, & x\in\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)^c,\end{cases}$$

易知 $g\in L(E)$, 且有

$$\int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n_k}{k^2}=+\infty\quad(\text{注意}n_k\geqslant k).$$

□

4.2 一般可测函数的积分

4.2.1 积分的定义与初等性质

定义 4.3

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x,\quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分; 当上式右端两个积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**. 在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

定理 4.12

若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上可积等价于 $|f(x)|$ 在 E 上可积, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 由于等式

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立, 故知在 $f(x)$ 可测的条件下,$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

定理 4.13 (积分的基本性质)

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.

(2) 若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 若 $E \in \mathscr{M}$, 且 $f(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,$g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \leqslant g(x)$,$x \in E$($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**控制函数**), 则 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.

(5) (i) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(ii) 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{x \in E : |x| \geqslant N\}$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

♡

注 (3) 反过来并不成立, 例如,$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ -1, & x \in (1,2]. \end{cases}$.

证明

(1) 不妨设 $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in E)$, 由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数, 故有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E M\mathrm{d}x = Mm(E) < +\infty.$$

因此由定理 4.12可知 $f \in L(E)$.

(2) 由 $f \in L(E)$ 及定理 4.12可知, 非负可测函数 $|f(x)|$ 在 E 上也可积. 从而由定理 4.4可知,$|f(x)|$ 在 E 上几乎处处有限, 即

$$m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

故 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 因为 $|f(x)| = 0$,a. e.,$x \in E$, 且 $|f(x)|$ 非负可测, 所以由命题 4.7可得

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

故 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 由非负可测函数的积分性质 (1)可知

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(E)$, 因此由定理 4.12可知 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则非负可测函数的积分性质 (1)(3)可知

$$\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\,\chi_e(x)\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)\,\chi_e(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(e)$, 因此由定理 4.12可知 $f \in L(e)$.

(5) (i) 记 $E_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 则 $\{|f(x)|\chi_{E_N}(x)\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

由此可知

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_N}|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\chi_{E_N}(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{推论 4.1}}\int_{\mathbf{R}^n}\lim_{N\to\infty}|f(x)|\chi_{E_N}(x)\mathrm{d}x=0.$$

(ii) 由 $f\in L(E)$ 及非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)\chi_{E_N}(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\chi_{E_N}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\chi_E(x)\,\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

因此 $f\cdot\chi_{E_N}\in L(\mathbf{R}^n)$. 又 $E_N\subset E\cap\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant N\}$, 故由非负可测函数的积分性质 (3) 及 (i) 可得

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E\cap E_N}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_{E_N}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant N\}}f(x)\chi_{E_N}(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

□

定理 4.14 (积分的线性性质)

若 $f,g\in L(E),C\in\mathbb{R}$, 则

(i) $\displaystyle\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, 进而 $Cf\in L(E)$;

(ii) $f+g\in L(E)$ 且 $\displaystyle\int_E(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\int_E g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) 若 $f\in L(E)$,$g(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 则 $f\cdot g\in L(E)$.

注 不妨假定 f,g 都是实值函数 (即处处有限) 的原因:(i) 假设结论对处处有限的函数成立. 若 f 不是处处有限的函数, 则由 $f\in L(E)$ 及可积函数的基本性质 (ii)可知, 令 $E_1=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}$, 则 $m(E_1)=0$, 再令 $E_2=E\backslash E_1$, 则由假设可知

$$\int_{E_2}Cf(x)\,\mathrm{d}x=C\int_{E_2}f(x)\,\mathrm{d}x.\tag{4.7}$$

由非负可测函数积分线性性质及定理 4.3(3)可得

$$\begin{aligned}
\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x&=\int_E(Cf(x))^+\,\mathrm{d}x-\int_E(Cf(x))^-\,\mathrm{d}x\\
&=\int_E(Cf(x))^+\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(Cf(x))^-\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_E(Cf(x))^+\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E(Cf(x))^+\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(Cf(x))^-\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E(Cf(x))^-\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{E_1}(Cf(x))^+\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}(Cf(x))^+\,\mathrm{d}x-\int_{E_1}(Cf(x))^-\,\mathrm{d}x-\int_{E_2}(Cf(x))^-\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{E_2}(Cf(x))^+\,\mathrm{d}x-\int_{E_2}(Cf(x))^-\,\mathrm{d}x\xlongequal{(4.7)\text{式}}\int_{E_2}Cf(x)\,\mathrm{d}x\\
&=C\int_{E_2}f(x)\,\mathrm{d}x=C\int_{E_2}f^+(x)\,\mathrm{d}x-C\int_{E_2}f^-(x)\,\mathrm{d}x\\
&=C\left(\int_{E_1}f^+(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^+(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_1}f^-(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_2}f^-(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x+\int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=C\left(\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x\right)=C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

故对一般情况结论也成立.

(ii) 由 (i) 同理可证.

证明 不妨假定 f,g 都是实值函数 (即处处有限).

(i) 由公式

$$f^+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f^-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}\tag{4.8}$$

立即可知: 当 $C \geq 0$ 时,$(Cf)^+ = Cf^+,(Cf)^- = Cf^-$. 根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质, 可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E Cf^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E Cf^-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= C\left(\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $C = -1$ 时, 由(4.8)式可知 $(-f)^+ = f^-,(-f)^- = f^+$. 同理可得

$$\int_E (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $C < 0$ 时, 由(4.8)式可知 $Cf(x) = -|C|f(x)$. 由上述结论可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E -|C|f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E |C|f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -|C|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_E |Cf(x)|\,\mathrm{d}x = |C|\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty, \forall C \in \mathbb{R}.$$

故 $Cf(x) \in L(E)$.

(ii) 首先, 由于有 $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, 故可知 $f+g \in L(E)$. 其次, 注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

进而

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f+g)^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为式中每项积分值都是有限的, 所以可移项且得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) 注意到

$$|f(x)\cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot \sup_{x\in E}|g(x)|, \quad x \in E.$$

由 g 在 E 上有界, 故 $\sup\limits_{x\in E}|g(x)| \in \mathbb{R}$. 从而由 (i) 可得 $|f(x)|\cdot\sup\limits_{x\in E}|g(x)| \in L(E)$, 于是再由定理 4.13(4)(i)可知 $f\cdot g \in L(E)$.

□

推论 4.3

若 $f \in L(E)$, 且 $f(x) = g(x)$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 这个推论表明: **改变可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.**

证明 令 $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}, E_2 = E \backslash E_1, m(E_1) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{定理 4.3(3)}} \int_E f^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\text{定理 4.3(3)}} \int_{E_1} f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3(5)(ii)}} \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3(5)(ii)}} \int_{E_1} g^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} g^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3(3)}} \int_{E} g^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E} g^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E} g^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E} g^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

例题 4.5 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数, 且有

$$
\int_{[0,1]} |f(x)| \ln(1+|f(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty,
$$

则 $f \in L([0,1])$.

证明 为了阐明 $f \in L([0,1])$, 自然想到去寻求可积的控制函数. 题设告诉我们 $|f(x)|\ln(1+|f(x)|)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数, 难道它能控制 $|f(x)|$ 吗? 显然, 这只是在 $\ln(1+|f(x)|) \geqslant 1$ 或 $|f(x)| \geqslant \mathrm{e}-1$ 时才行. 但注意到 $|f(x)| < \mathrm{e}-1$ 时, 由于区间 $[0,1]$ 的测度是有限的, 故常数 $\mathrm{e}-1$ 本身就是控制函数. 也就是说, 可在不同的定义区域寻求不同的控制函数.

为此, 作点集

$$
E_1 = \{x \in [0,1] : |f(x)| \leqslant \mathrm{e}\}, \quad E_2 = [0,1] \setminus E_1,
$$

则我们有

$$
|f(x)| \leqslant \mathrm{e}, \quad x \in E_1;
$$

$$
|f(x)| \leqslant |f(x)|\ln(1+|f(x)|), \quad x \in E_2.
$$

这就是说 $f \in L(E_1)$ 且 $f \in L(E_2)$, 从而

$$
f \in L(E_1 \cup E_2) = L([0,1]).
$$

□

定理 4.15

设 $f \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbf{N})$. 若有

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (x \in E), \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)\ (n \in \mathbf{N}, x \in E),
$$

则

$$
\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

♡

证明 令 $F_n(x) = f(x) - f_n(x) (n \in \mathbf{N}, x \in E)$, 则 $\{F_n(x)\}$ 是 E 上非负渐降收敛于 0 的可积函数列, 从而由非负渐降函数列积分定理可知

$$
0 = \lim_{n\to\infty} \int_E F_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x,
$$

即得所证.

□

命题 4.2

设 $g \in L(E), f_n \in L(E)(n \in \mathbf{N})$. 若 $f_n(x) \geqslant g(x)$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据Fatou 引理, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_E \varliminf_{n\to\infty} \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_E \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x\right) \\ \Longleftrightarrow &\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow &\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

证毕. □

定理 4.16 (Jensen 不等式)

设 $w(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上的正值可测函数, 且

$$\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

$\varphi(x)$ 是区间 $I = [a, b]$ 上的 (下) 凸函数;$f(x)$ 在 E 上可测, 且值域 $R(f) \subset I$. 若 $fw \in L(E)$, 则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 因为 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上下凸, 所以由定理 6.7可知 $\varphi \in C([a, b])$. 从而由定理 3.21可知 $\varphi(f(x))$ 在 E 上也可测.

证明 注意到 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 我们有

$$a = \int_E aw(x)\,\mathrm{d}x \leqslant y_0 = \int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E bw(x)\,\mathrm{d}x = b.$$

故 $y_0 \in [a, b]$.

(i) 设 $y_0 \in (a, b)$, 由 $\varphi(x)$ 之 (下) 凸性可知有

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(y_0) + k(y - y_0), \quad y \in [a, b].$$

(其中由定理 6.7及下凸函数的切线放缩可知 $k = \varphi'_+(y_0)$) 以 $f(x)$ 代 y 得

$$\varphi(f(x)) \geqslant \varphi(y_0) + k(f(x) - y_0), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

在上式两端乘以 $w(x)$, 并在 E 上作积分, 则

$$\begin{aligned} \int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_E \varphi(y_0)w(x)\,\mathrm{d}x + k\int_E (f(x) - y_0)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi(y_0) + k\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - y_0\right) \\ &= \varphi(y_0) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

(ii) 若 $y_0 = b$(或 a), 易知此时有

$$\int_E (b - f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

由非负可测函数积分的性质 (5)(i)可知 $f(x) = b$,a. e. $x \in E$, 从而

$$\int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \varphi(b)w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b)\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证毕. □

注 Jensen 不等式在 $\mathbf{R}^n$ 上也成立, 只需将区间 I 用凸集代替. 下面是一个特例:

设 $E \subset \mathbf{R}$, 且 $m(E)=1$,$f(x)$ 在 E 上正值可积, 且记 $A=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_E \sqrt{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1+A.$$

实际上, 考查 $\varphi(x)=(1+x^2)^{1/2}$, 易知 $\varphi(x)$ 是 (下) 凸函数. 根据 Jensen 不等式 ($w(x)\equiv 1$), 有 $\left(A^2 \leqslant \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+A^2} &\leqslant \left(1+\int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_E (1+f^2(x))\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\ &\leqslant \int_E \sqrt{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E (1+f(x))\,\mathrm{d}x = 1+A.\end{aligned}$$

定理 4.17 (积分对定义域的可数可加性)

设 $E_k \in \mathscr{M}(k=1,2,\cdots)$,$E_i \cap E_j=\varnothing(i \neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 $f \in L(E)$ 以及非负可测函数积分的可数可加性, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{E_k} f^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_k} f^{-}(x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_E f^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^{-}(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定理 4.18 (可积函数几乎处处为零的一种判别法)

设函数 $f(x) \in L([a,b])$. 若对任意的 $c \in [a,b]$, 有

$$\int_{[a,c]} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

则 $f(x)=0$,a. e. $x \in [a,b]$.

证明 若结论不成立, 则存在 $E \subset [a,b]$,$m(E)>0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零. 不妨假定在 E 上 $f(x)>0$. 由定理 2.11, 可作闭集 F,$F \subset E$, 且 $m(F)>0$, 并令 $G=(a,b) \setminus F$, 则 G 为开集. 于是由开集构造定理可知,$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$, 其中 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间. 由积分对定义域的可数可加性, 我们有

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x+\int_F f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因为 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x>0$, 所以

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_{[a_n,b_n]} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_G f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_F f(x)\,\mathrm{d}x>0 \neq 0,$$

从而存在 n_0, 使得

$$\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

又由积分对定义域的可数可加性可知

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[a,a_{n_0}]\cup[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \Rightarrow \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知

$$\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad 或 \quad \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

这与假设矛盾. □

命题 4.3

设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L(E)$, 都有 $fg \in L(E)$, 则除一个零测集 Z 外,$g(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的有界函数.

注 比较命题 4.1.

证明 如果结论不成立, 那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : k_i \leqslant |g(x)| < k_{i+1}\}) = m(E_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

现在作函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} g(x)}{i^{1+(1/2)} m(E_i)}, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

因为

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+(1/2)} m(E_i)} m(E_i) < +\infty, \end{aligned}$$

所以 $f \in L^1(E)$, 但我们有

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i^{1+(1/2)} m(E_i)} m(E_i) = +\infty,$$

这说明 $fg \notin L(E)$, 矛盾. □

定理 4.19 (积分的绝对连续性)

若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\left| \int_e f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明 不妨假定 $f(x) \geqslant 0$, 否则用 $|f(x)|$ 代替 $f(x)$. 根据简单函数逼近定理可知, 存在非负简单可测函数渐升列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. 再由Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_E \left(f(x) - \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在可测简单函数 $\varphi(x)$,$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) (x \in E)$, 使得

$$\int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在设 $\varphi(x) \leqslant M$, 取 $\delta = \varepsilon/(2M)$, 则当 $e \subset E$, 且 $m(e) < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \int_e f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_e f(x)\,\mathrm{d}x - \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + Mm(e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

推论 4.4

设 $f \in L(E)(E \subset \mathbf{R})$, 且

$$0 < A = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则存在 E 中可测子集 e, 使得

$$\int_e f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

♡

证明 设 $E_t = E \cap (-\infty, t), t \in \mathbf{R}$, 并记

$$g(t) = \int_{E_t} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则由积分的绝对连续性可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta t| < \delta$, 由积分对定义域的可数可加性, 就有

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| = \left| \int_{E \cap [t, t+\Delta t)} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{E \cap [t, t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[t, t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这说明 $g \in C(\mathbf{R})$. 因为 $g(x)$ 是递增函数, 且有

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = g(-\infty) = \int_{\varnothing} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} g(t) = g(+\infty) = A,$$

而 $0 < A/3 < A$, 所以根据连续函数介值定理可知, 存在 t_0:$-\infty < t_0 < +\infty$, 使得 $g(t_0) = A/3$:

$$g(t_0) = \int_{E \cap (-\infty, t_0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

令 $e = E \cap (-\infty, t_0)$, 即得所证. □

定理 4.20 (积分变量的平移变换定理)

若 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则对任意的 $y_0 \in \mathbf{R}^n$,$f(x + y_0) \in L(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

注 $E - \{y_0\} = \{x - y_0 : x \in E\}$ 是向量差集, 不是集合的差.

证明 只需考虑 $f(x) \geqslant 0$ 的情形. 首先看 $f(x)$ 是非负可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

显然有

$$f(x + y_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x + y_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i - \{y_0\}}(x),$$

它仍是非负可测简单函数. 注意到 $E - \{y_0\} = E + \{-y_0\}$, 故由外测度的平移不变性知

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i - \{y_0\}) = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其次, 考虑一般非负可测函数 $f(x)$. 此时根据简单函数逼近定理可知, 存在非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x), x \in \mathbf{R}^n$. 显然,$\{\varphi_k(x + y_0)\}$ 仍为渐升列, 且有

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x + y_0) = f(x + y_0), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

从而先前的讨论及Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + y_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x + y_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 4.6 设 $f \in L([0,+\infty))$, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a. e. } x \in \mathbf{R}.$$

证明 因为 $f(x+n) = f(x+1+(n-1))$, 所以只需考查 $[0,1]$ 中的点即可. 为证此, 又只需指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛即可. 应用积分的手段, 由于

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{[1,\infty)}|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 作为 x 的函数是在 $[0,1]$ 上可积的, 因而是几乎处处有限的, 即级数是几乎处处收敛的. □

命题 4.4

设 $I \subset \mathbf{R}$ 是区间,$f \in L(I)$,$a \neq 0$, 记 $J = \{x/a : x \in I\}$,$g(x) = f(ax)(x \in J)$, 则 $g \in L(J)$, 且有

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = |a|\int_J g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 这只是积分变量替换的一个特殊情形.

笔记 对 $f \in L(\mathbf{R}^n)$,$a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 (i) 若 $f(x) = \chi_E(x)$,E 是 I 中的可测集, 则 $a^{-1}E \subset J$. 由于 $\chi_E(ax) = \chi_{a^{-1}E}(x)$, 故有

$$\int_J g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}m(E) = \frac{1}{|a|}\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知当 $f(x)$ 是简单可测函数时, 结论也真.

(ii) 对 $f \in L(I)$, 设简单可测函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\varphi_n(x) \to f(x)(n \to \infty, x \in I)$, 且 $|\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|(n = 1,2,\cdots, x \in I)$, 则令 $\psi_n(x) = \varphi_n(ax)(x \in J, n = 1,2,\cdots)$,$\psi_n(x) \to g(x)(n \to \infty, x \in J)$, 我们有

$$|a|\int_J g(x)\,\mathrm{d}x = |a|\lim_{n\to\infty}\int_J \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

4.2.2 控制收敛定理

定理 4.21 (控制收敛定理)

设 $f_k \in L(E)(k = 1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

若存在 E 上的可积函数 $F(x)$, 使得

$$|f_k(x)| \leqslant F(x), \quad \text{a. e. } x \in E\ (k = 1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(通常称 $F(x)$ 为函数列 $\{f_k(x)\}$ 的**控制函数**.)

证明 显然,$f(x)$ 是 E 上的可测函数, 且由 $|f_k(x)| \leqslant F(x)$(a. e. $x \in E$) 可知 $|f(x)| \leqslant F(x)$,a. e. $x \in E$. 因此,$f(x)$ 也是

E 上的可积函数. 作函数列

$$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $g_k \in L(E)$, 且 $0 \leqslant g_k(x) \leqslant 2F(x)$,a. e. $x \in E(k = 1, 2, \cdots)$.

根据Fatou 引理, 我们有

$$\int_E \lim_{k\to\infty} (2F(x) - g_k(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E (2F(x) - g_k(x))\,\mathrm{d}x.$$

因为 $F(x)$ 以及每个 $g_k(x)$ 都是可积的, 所以得到

$$\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x - \varlimsup_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

消去 $\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x$, 并注意到 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 可得

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

最后, 从不等式 $(k = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} \left|\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_E (f_k(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

立即可知, 定理的结论成立. □

定理 4.22

证明

□

定理 4.23

证明

□