

0.1 多项式函数与根

定义 0.1 (多项式的重根)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 若存在正整数 k , 使 $(x-b)^k \mid f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1}$ 不能整除 $f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个 k 重根. 若 $k=1$, 则称 b 为单根.

定理 0.1 (多项式没有重因式的充要条件)

数域 \mathbb{K} 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

证明 设多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $m(m > 1)$ 重因式, 则 $f(x) = p(x)^m g(x)$, 故

$$f'(x) = mp(x)^{m-1} p'(x)g(x) + p(x)^m g'(x).$$

于是 $p(x)^{m-1} \mid f'(x)$, 这表明 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公因式 $p(x)^{m-1}$. 反之, 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式, 可设 $f(x) = p(x)g(x)$, $p(x)$ 不能整除 $g(x)$. 于是

$$f'(x) = p'(x)g(x) + p(x)g'(x).$$

若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因式, 则 $p(x) \mid p'(x)g(x)$. 但 $p(x)$ 不能整除 $g(x)$ 且 $p(x)$ 不可约, 故 $p(x) \mid p'(x)$. 而 $p'(x) \neq 0$ 且 $\deg p'(x) < \deg p(x)$, 这是不可能的. 若 $f(x)$ 无重因式, 则在 $f(x)$ 的标准分解式(??)中, $e_i = 1$ 对一切 $i = 1, 2, \dots, m$ 成立, 于是 $p_i(x)$ 都不能整除 $f'(x)$. 由于 $p_i(x)$ 为不可约多项式, 故 $(p_i(x), f'(x)) = 1$, 由互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 可知

$$(p_1(x)p_2(x) \cdots p_m(x), f'(x)) = 1,$$

即 $(f(x), f'(x)) = 1$.

定理 0.2

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, 则 $f(x)/d(x)$ 是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同 (不计重数).

证明 设 $f(x)$ 有如(??)式的标准分解式, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= ce_1 p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_s(x)^{e_s} p_1'(x) \\ &\quad + ce_2 p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s} p_2'(x) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + ce_s p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_s(x)^{e_s-1} p_s'(x). \end{aligned} \quad (1)$$

因此 $p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1}$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式. 注意到 $f(x)$ 的因式一定具有 $p_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \cdots p_s(x)^{k_s}$ 的形状. 不妨设 $h(x)$ 是 $f(x), f'(x)$ 的公因式. 注意到 $p_1(x)^{e_1}$ 可以整除(??)式中右边除第一项外的所有项, 但不能整除第一项, 因此 $p_1(x)^{e_1}$ 不能整除 $f'(x)$. 同理, $p_i(x)^{e_i}$ 不能整除 $f'(x)$. 由此我们不难看出

$$h(x) \mid p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1},$$

即 $p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1} = d(x)$. 显然 $f(x)/d(x)$ 没有重因式且与 $f(x)$ 含有相同的不可约因式.

命题 0.1 (多项式有 k 重根的充要条件)

求证: a 是多项式 $f(x)$ 的 k 重根的充要条件是:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

证明 若 a 是 $f(x)$ 的 k 重根, 可设 $f(x) = (x-a)^k g(x)$, $g(x)$ 不含因式 $x-a$. 通过对 $f(x)$ 求导可发现, $x-a$ 可整除 $f^{(j)}(x)$ ($1 \leq j \leq k-1$). 因此

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

而 $f^{(k)}(a) = k!g(a) \neq 0$, 故必要性得证.

反之, 若 a 是 $f(x)$ 的 m 重根, 若 $m > k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(k)}(a) = 0$, 这与已知矛盾. 同样, 若 $m < k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(m)}(a) \neq 0$, 这也与已知矛盾, 于是只能 $m = k$.

□

命题 0.2

设 $\deg f(x) = n \geq 1$, 若 $f'(x) \mid f(x)$, 证明: $f(x)$ 有 n 重根.

◆

证明 证法一: 设 $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$, 现证明 a 是 $f(x)$ 的 n 重根. 假设 a 是 $f(x)$ 的 k 重根, $f(x) = (x-a)^k g(x)$, $k < n$ 且 $g(x)$ 不含因式 $x-a$, 则

$$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x) + (x-a)^k g'(x) = n(x-a)^{k-1}g(x).$$

于是 $g(x) \mid (x-a)g'(x)$, 而 $g(x)$ 与 $x-a$ 互素, 故将有 $g(x) \mid g'(x)$. 引出矛盾.

证法二: 设 $f(x) = b(x-a)f'(x)$, 则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = b(x-a), \quad b \neq 0.$$

由 **定理 0.2** 可知, $x-a$ 是 $f(x)$ 唯一的不可约因式, 因此 $f(x) = b(x-a)^n$.

□

命题 0.3

数域 \mathbb{F} 上任意一个不可约多项式在复数域 \mathbb{C} 中无重根.

◆

证明 设 $f(x)$ 是 \mathbb{F} 上的不可约多项式, 则 $\deg f(x) > \deg f'(x)$. 从而 $f(x) \nmid f'(x)$, 于是由 f 的不可约性可知 $(f(x), f'(x)) = 1$. 故由 **多项式没有重因式的充要条件** 可知 $f(x)$ 复数域 \mathbb{C} 中无重根.

□

引理 0.1 (次数不为 1 得到不可约多项式没有根)

设 $f(x)$ 是数域 \mathbb{K} 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \geq 2$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{K} 中没有根.

♥

证明 用反证法, 设 $b \in \mathbb{K}$ 是 $f(x)$ 的根, 由 **余数定理** 知 $(x-b) \mid f(x)$, 即 $f(x) = (x-b)g(x)$ 可分解为两个低次多项式之积, 这与 $f(x)$ 不可约矛盾.

□

定理 0.3 (多项式根的有限性)

设 $f(x)$ 是数域 \mathbb{F} 上的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{F} 中最多只有 n 个根.

♥



笔记 由命题??可知, 若一个 n 次多项式的根超过 n 个, 则这个多项式一定恒为零.

证明 将 $f(x)$ 作标准因式分解, 则由 **次数不为 1 得到不可约多项式没有根** 知 $f(x)$ 在 \mathbb{K} 中根的个数等于该分解式中一次因式的个数, 它不会超过 n .

□

推论 0.1 (两个多项式相等的判定准则)

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 \mathbb{K} 上的次数不超过 n 的两个多项式, 若存在 \mathbb{K} 上 $n+1$ 个不同的数 b_1, b_2, \dots, b_{n+1} , 使

$$f(b_i) = g(b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

则 $f(x) = g(x)$.



证明 作 $h(x) = f(x) - g(x)$, 显然 $h(x)$ 次数不超过 n . 但它有 $n+1$ 个不同的根, 因此只可能 $h(x) = 0$, 即 $f(x) = g(x)$. □

例题 0.1 求证: $f(x) = \sin x$ 在实数域内不能表示为 x 的多项式.

证明 注意到 $f(x) = \sin x$ 在实数域内有无穷多个根, 而任一非零多项式只能有有限个根, 因此 $f(x) = \sin x$ 在实数域内不能表示为 x 的多项式. □

例题 0.2 设 $f(x)$ 是数域 \mathbb{F} 上的多项式, 若对 \mathbb{F} 中某个非零常数 a , 有 $f(x+a) = f(x)$, 求证: $f(x)$ 必是常数多项式.

证明 假设 $f(x)$ 不是常数多项式, 则 $f(x) - f(a)$ 也不是常数多项式, 但由 $f(x+a) = f(x)$ 可知, ka ($k \in \mathbb{Z}$) 是 $f(x) - f(a)$ 的无穷多个根, 矛盾. □

例题 0.3 设 $f(x)$ 是非常数多项式且 $f(x)$ 可以整除 $f(x^m)$ ($m \in \mathbb{N}_+$), 求证: $f(x)$ 的根只能是 0 或 1 的某个方根.

证明 将 $f(x)$ 看成复数域上的多项式, 则 $f(x^m) = f(x)g(x)$. 假设 c 是 $f(x)$ 的一个复根, 即 $f(c) = 0$, 则 $f(c^m) = 0$, 即 c^m 也是 $f(x)$ 的根. 由此可知 $c^m, c^{m^2}, c^{m^3}, \dots$ 也都是 $f(x)$ 的根. 由于 $f(x)$ 只有有限个不同的复根, 故存在正整数 $k > t$, 使得 $c^{m^k} = c^{m^t}$. 因此若 $c \neq 0$, 取 $n = m^k - m^t \in \mathbb{N}_+$, 则有 $c^n = 1$. □

定理 0.4 (余数定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 则存在 \mathbb{F} 上的多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

特别地, b 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x - b) \mid f(x)$. □

笔记 利用余数定理可以实现求根与判断整除性之间的相互转换.

证明 由带余除法知

$$f(x) = (x - b)g(x) + r(x),$$

其中 $\deg r(x) < 1$, 因此 $r(x)$ 为常数多项式. 在上式中用 b 代替 x , 即得 $r(x) = f(b)$. □

例题 0.4 设 n 是奇数, 求证: $(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$.

证明 将多项式 $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ 看成是未定元 x 的多项式. 当 $x = -y$ 时, $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n = 0$, 因此由余数定理可知 $x+y$ 是 $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ 的因式. 同理 $x+z, y+z$ 也是因式. 又这 3 个因式互素, 故 $(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$. □

例题 0.5 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式, 若当 $k = 0, 1, \dots, n$ 时有 $f(k) = \frac{k}{k+1}$, 求 $f(n+1)$.

证明 解今 $g(x) = (x+1)f(x) - x$, 则 $0, 1, \dots, n$ 是 $g(x)$ 的根, 因此

$$g(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

即

$$(x+1)f(x) - x = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

其中 c 是一个常数. 令 $x = -1$, 可求出 $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 从而

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!} + x \right),$$

故

$$f(n+1) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} + n+1 \right).$$

当 n 是奇数时, $f(n+1) = 1$; 当 n 是偶数时, $f(n+1) = \frac{n}{n+2}$.

□

例题 0.6 设 $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \mid (x^3 f_1(x^5) + x^2 f_2(x^5) + x f_3(x^5) + f_4(x^5))$, 这里 $f_i(x)$ ($1 \leq i \leq 4$) 都是实系数多项式, 求证: $f_i(1) = 0$ ($1 \leq i \leq 4$).

证明 设 ε_i ($1 \leq i \leq 4$) 是 1 的五次虚根, 则 ε_i ($1 \leq i \leq 4$) 都适合 $x^5 - 1$, 从而由余数定理可知

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_4) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

故

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_4).$$

因此 ε_i ($1 \leq i \leq 4$) 都是 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的根. 由条件可得

$$\varepsilon_i^3 f_1(1) + \varepsilon_i^2 f_2(1) + \varepsilon_i f_3(1) + f_4(1) = 0 \quad (1 \leq i \leq 4).$$

这是一个由 4 个未知数、4 个方程式组成的线性方程组 (将 $f_i(1)$ 看成是未知数), 其系数行列式是一个 Vandermonde 行列式, 显然其值不等于零, 因此 $f_i(1) = 0$.

□