概率论

作者: 邹文杰
组织: 无
时间:2024/10/25
版本:ElegantBook-4.5
自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 大数定律和中心极限定理

1.1 大数定律

定义 1.1 ((弱) 大数定律)

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 若存在数列 $\{a_n, n \geq 1\}$ 和 $\{b_n, n \geq 1\}$, 满足 $b_n \to +\infty$, 使得当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

成立, 其中 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

♣

笔记 通常不作特别说明的时候, 我们称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 都是指 $a_n = \boldsymbol{E}S_n, b_n = n$ 时的规范形式. 即下面的定义.

定义 1.2 ((弱) 大数定律的规范形式)

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 若当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$\frac{S_n}{n} - \frac{\boldsymbol{E}S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

成立, 其中 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

即

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

♣

定理 1.1 (Bernoulli 大数定律)

设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p, 记 S_n 表示 n 次独立的这种试验 A 发生的次数, 则当 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

♡

定理 1.2 (Markov 大数定律)

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 $Markov$ 条件, 即

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0.$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 (弱) 大数定律.

♡

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $Chebeshev$ 不等式可知

$$1 \geqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\boldsymbol{D}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n^2\varepsilon^2}.$$

令 $n \to +\infty$, 可得

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

定理 1.3 (Chebeshev 大数定律)

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 且方差一致有界, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 (弱) 大数定律.

证明 因为随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 方差一致有界, 所以存在 $C > 0$, 使得

$$\boldsymbol{D}X_k \leqslant C, k \in \mathbb{N}_+.$$

又由于随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 因此

$$\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{D}X_k.$$

根据 *Chebeshev* 不等式可得

$$1 \geqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{C}{n}.$$

令 $n \to +\infty$, 可得

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\boldsymbol{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

定理 1.4 (Khinchin 大数定律)

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 且数学期望存在, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 (弱) 大数定律.

证明

定理 1.5 (依概率收敛的性质)

设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的随机变量序列.
若 $X_n \xrightarrow{P} c$, 且 $c \neq 0, X_n \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{c}$.

证明 对 $\forall\varepsilon > 0$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| \geqslant \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{X_n - c}{cX_n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{X_n - c}{cX_n - c^2 + c^2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \\ &= P\left(\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right) + P\left(\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\ &\leqslant P\left(\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

当 $\left|\dfrac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon$ 且 $|X_n - c| < \varepsilon$ 时, 由 $|X_n - c| < \varepsilon$ 可知 $-\varepsilon < X_n - c < \varepsilon$. 从而当 $c > 0$ 时,$c(X_n - c) > -c\varepsilon$; 当 $c < 0$ 时,$c(X_n - c) > c\varepsilon$. 因此对 $\forall c \neq 0$, 都有 $c(X_n - c) > -|c|\varepsilon$. 于是此时 $\left|\dfrac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| < \left|\dfrac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon}\right|$. 故

$$\left\{\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right\}.$$

进而结合(1.1)式, 再根据概率的单调性可得

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\ &\leqslant P\left(\left|\frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon}\right| \geqslant \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon}\right| \geqslant \varepsilon\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\ &= P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon(c^2 - |c|\varepsilon)\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right). \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 则由 $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{c}$ 可知

$$0 \leqslant P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon(c^2 - |c|\varepsilon)\right) + P\left(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \to 0, n \to +\infty.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{1}{X_n} - \dfrac{1}{c}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$, 即 $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{c}$.

定理 1.6 (依概率收敛与依分布收敛的关系)

设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 和 X 分别是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的随机变量序列和随机变量.

(1)$X_n \xrightarrow{P} X$蕴含$X_n \xrightarrow{d} X$.

证明 (1) 记 $X_n (n \geq 1)$ 与 X 的分布函数分别为 $F_n(x)(n \geq 1)$ 与 F. 设 $X_n \xrightarrow{P} X$, 往证 $F_n(x) \to F(x), n \to +\infty$, 对所有 F 中连续点都成立. 为此只需证明对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x-0) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0).$$

任取 $y < x$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} F(y) &= P(X \leqslant y) = P(X \leqslant y, X_n \leqslant x) + P(X \leqslant y, X_n > x) \\ &\leqslant P(X_n \leqslant x) + P(|X_n - X| \geqslant x - y) \\ &= F_n(x) + P(|X_n - X| \geqslant x - y) \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可得 $F(y) \leqslant \varliminf\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$, 对 $\forall y < x$ 都成立. 由于分布函数左右极限都存在, 因此再令 $y \to x^-$, 得到 $F(x-0) \leqslant \varliminf\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.

同理, 任取 $y > x$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant x, X \leqslant y) + P(X_n \leqslant x, X > y) \\ &\leqslant P(X \leqslant y) + P(|X_n - X| \geqslant y - x) \\ &= F(y) + P(|X_n - X| \geqslant y - x) \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可得 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant F(y)$, 对 $\forall y < x$ 都成立. 由于分布函数左右极限都存在, 因此再令 $y \to x^+$, 得到 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0)$.

又显然有 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$. 综上所述, 我们有

$$F(x-0) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} F_n(x) \leqslant F(x+0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

故结论得证.

定理 1.7 (特征函数性质)

特征函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明 设随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. 其特征函数为 $f(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)dx$.

由反常积分收敛的柯西收敛准则, 可知 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得 $\displaystyle\int_{|x|>A} p(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

于是对 $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, 取 $h = \dfrac{\varepsilon}{4A}$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) p(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(e^{ihx} - 1)p(x)dx\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}||(e^{ihx} - 1)p(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |(e^{ihx} - 1)|p(x)dx \end{aligned} \tag{1.2}$$

又由欧拉公式, 可得

$$\begin{aligned}|(e^{ihx}-1)| &= |\cos(hx)-1+i\sin(hx)| = \sqrt{(\cos(hx)-1)^2+\sin^2(hx)} \\ &= \sqrt{2-2\cos(hx)} = \sqrt{4\sin^2\frac{hx}{2}} \leqslant 2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\end{aligned} \tag{1.3}$$

从而由(1.2)(1.3)式, 可得

$$\begin{aligned}|f(t+h)-f(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|(e^{ihx}-1)|p(x)dx \leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|p(x)dx \\ &= 2\int_{|x|>A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|p(x)dx + 2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|p(x)dx \\ &\leqslant 2\int_{|x|>A}p(x)dx + 2\int_{-A}^{A}|hx|p(x)dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2hA\int_{-A}^{A}p(x)dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2hA\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx = \frac{\varepsilon}{2}+2hA < \varepsilon\end{aligned}$$

故特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.