

0.1 子空间、直和与商空间

定理 0.1 (基扩张定理)

设 V 是 n 维线性空间, v_1, v_2, \dots, v_m 是 V 中 $m(m < n)$ 个线性无关的向量, 又假设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则必可在 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 中选出 $n-m$ 个向量, 使之和 v_1, v_2, \dots, v_m 一起组成 V 的一组基.

基扩张定理还有几种等价形式:

(1) n 维线性空间 V 中任意 $m(m < n)$ 个线性无关的向量均可扩张为 V 的一组基.

(2) n 维线性空间 V 的任意一个子空间的基均可扩张为 V 的一组基.



证明 若 $m < n$, 将 $e_i (1 \leq i \leq n)$ 依次加入向量组 v_1, v_2, \dots, v_m , 则必有一个 e_i , 使得 $v_1, v_2, \dots, v_m, e_i$ 线性无关. 这是因为若任意一个 e_i 加入 v_1, v_2, \dots, v_m 后均线性相关, 则由命题??可知, 每个 e_i 都可用 v_1, v_2, \dots, v_m 线性表示, 由定理??可得 $n \leq m$, 矛盾. 将新加入的向量 e_i 记作 v_{m+1} , 则原线性无关向量组扩张为 v_1, v_2, \dots, v_{m+1} , 并且仍线性无关. 若 $m+1 < n$, 则同理又可从 e_1, e_2, \dots, e_n 中找到一个向量, 加入 v_1, v_2, \dots, v_{m+1} 之后仍线性无关. 将新加入的向量记作 v_{m+2} , 则原线性无关向量组扩张为 v_1, v_2, \dots, v_{m+2} , 并且仍线性无关. 不断这样做下去, 直到 $m+n-m-1 = n-1 < n$ 时, 同理可从 e_1, e_2, \dots, e_n 中找到一个向量, 加入 v_1, v_2, \dots, v_{n-1} 之后仍线性无关. 将新加入的向量记作 v_n , 则可将 v_1, v_2, \dots, v_m 扩张成为 v_1, v_2, \dots, v_n , 并且仍线性无关. 此时 v_1, v_2, \dots, v_n 就是 V 的一组基. \square

定义 0.1 (直和)

设 V_1, V_2, \dots, V_k 是线性空间 V 的子空间, 若对任意的 $i (1 \leq i \leq k)$, 均有

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = 0,$$

则称和 $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ 是直接和, 简称直和, 记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$.



定理 0.2 (直和的等价条件)

设 V_1, V_2, \dots, V_k 是线性空间 V_0 的子空间, $V_0 = V_1 + V_2 + \dots + V_k$, 则下列命题等价:

- (1) $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$;
- (2) 对任意的 $2 \leq i \leq k$, 有 $V_i \cap (V_1 + V_2 + \dots + V_{i-1}) = 0$;
- (3) $\dim V_0 = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_k$;
- (4) V_1, V_2, \dots, V_k 的一组基可以拼成 V_0 的一组基;
- (5) V_0 中的向量表示为 V_1, V_2, \dots, V_k 中的向量之和时其表示唯一.
- (6) 在 $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ 中零向量的表示唯一, 即如果

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = 0, v_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

则 $v_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$.



证明



定理 0.3 (交和空间维数公式)

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$



证明 设 $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$. 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, 由于 $V_1 \cap V_2$ 是 V_1 的子空间, 故可添上 V_1 中的向量 $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}$, 使 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}\}$ 是 V_1 的一组基. 同样道理, 可添上

$\beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}$, 使 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}\}$ 成为 V_2 的一组基. 显然, $V_1 + V_2$ 中的向量均可由向量组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}$$

的线性组合给出. 如能证明上式中的向量线性无关, 则它们构成 $V_1 + V_2$ 的一组基, 由此即可推出所要的结论. 现假设

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + \lambda_{n_1} \alpha_{n_1} + \mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} = \mathbf{0},$$

则

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + \lambda_{n_1} \alpha_{n_1} = -(\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2}).$$

上式左端属于 V_1 , 右端属于 V_2 , 故

$$\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} \in V_1 \cap V_2,$$

即存在 $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{K}$, 使

$$\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} = \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_m \alpha_m.$$

但 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}$ 是 V_2 的基, 因此 $\mu_{m+1} = \dots = \mu_{n_2} = \xi_1 = \dots = \xi_m = 0$. 再由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}$ 线性无关得 $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{n_1} = 0$. \square

推论 0.1

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$, 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

将其扩张为 V_1 的一组基

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}\},$$

再将其扩张为 V_2 的一组基

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}\}.$$

则

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}\}$$

就是 $V_1 + V_2$ 的一组基.



证明 显然, $V_1 + V_2$ 中的向量均可由向量组

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}$$

的线性组合给出. 现假设

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + \lambda_{n_1} \alpha_{n_1} + \mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} = \mathbf{0},$$

则

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + \lambda_{n_1} \alpha_{n_1} = -(\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2}).$$

上式左端属于 V_1 , 右端属于 V_2 , 故

$$\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} \in V_1 \cap V_2,$$

即存在 $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{K}$, 使

$$\mu_{m+1} \beta_{m+1} + \dots + \mu_{n_2} \beta_{n_2} = \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_m \alpha_m.$$

但 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n_2}$ 是 V_2 的基, 因此 $\mu_{m+1} = \dots = \mu_{n_2} = \xi_1 = \dots = \xi_m = 0$. 再由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n_1}$ 线性无关得 $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{n_1} = 0$. \square


结论 证明直和的方法大致有两种:

第一种: 先证和, 再证直和.

第二种: 对于给定的 V, V_1, V_2 , 求证 $V = V_1 \oplus V_2$ 的题目, 如果“和”不好证明的话, 可以记 $W = V_1 + V_2$, 先证 $W = V_1 \oplus V_2$, 再证 $V = W$ (证明 $V = W$ 通常会利用命题??). 具体例子见例 0.3

命题 0.1

设 V 是数域 \mathbb{F} 上 n 阶矩阵组成的向量空间, V_1 和 V_2 分别是 \mathbb{F} 上对称矩阵和反对称矩阵组成的子集. 求证: V_1 和 V_2 都是 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$.

 **笔记** 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1, V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V = V_1 + V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由于对称矩阵之和仍是对称矩阵, 一个数乘以对称矩阵仍是对称矩阵, 因此 V_1 是 V 的子空间. 同理 V_2 也是 V 的子空间. 又由命题??可知, 任一 n 阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 故 $V = V_1 + V_2$. 若一个矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵, 则它一定是零矩阵. 这就是说 $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$. 于是 $V = V_1 \oplus V_2$. \square

命题 0.2

设 V_1, V_2, \dots, V_n 是数域 \mathbb{F} 上的 n 个线性空间, 且 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$. 若

$$W_1 \subseteq V_1, W_2 \subseteq V_2, \dots, W_n \subseteq V_n,$$

则

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n.$$

证明 因为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$, 所以由直和的等价条件 (6) 知, 如果

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = \mathbf{0}, \quad v_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $v_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, n$. 设


$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = \mathbf{0}, \quad w_i \in W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则 $w_i \in W_i \subseteq V_i, i = 1, 2, \dots, n$. 从而 $w_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, n$. 故 $W_1 + W_2 + \dots + W_n$ 中零向量的表示唯一, 因此由直和的等价条件 (6) 知

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n.$$

\square

例 0.1 设 V_1, V_2 分别是数域 \mathbb{F} 上的齐次线性方程组 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 与 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 的解空间, 求证: $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

 **笔记** 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1, V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V = V_1 + V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由线性方程组解的定理知, V_1 的维数是 1, V_2 的维数是 $n - 1$. 若列向量 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 α 既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出 α 只能等于零向量, 因此 $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$. 又因为

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 1 + (n - 1) = n = \dim \mathbb{F}^n,$$

故 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$. \square

例 0.2 设 U, V 是数域 \mathbb{K} 上的两个线性空间, $W = U \times V$ 是 U 和 V 的积集合, 即 $W = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}$. 现在 W 上定义加法和数乘:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad k(u, v) = (ku, kv).$$

验证: W 是 \mathbb{K} 上的线性空间 (这个线性空间称为 U 和 V 的外直和).

又若设 $U' = \{(u, \mathbf{0}) | u \in U\}, V' = \{(\mathbf{0}, v) | v \in V\}$, 求证: U', V' 是 W 的子空间, U' 和 U 同构, V' 和 V 同构, 并且 $W = U' \oplus V'$.

证明 易验证 W 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 从而是 \mathbb{R} 上的线性空间. 任取 $(u_1, 0), (u_2, 0) \in U', k \in \mathbb{R}$, 则 $(u_1, 0) + (u_2, 0) = (u_1 + u_2, 0) \in U', k(u_1, 0) = (ku_1, 0) \in U'$, 因此 U' 是 W 的子空间. 同理可证 V' 是 W 的子空间. 构造映射 $\varphi: U \rightarrow U', \varphi(u) = (u, 0)$, 容易验证 φ 是一一对应并且保持加法和数乘运算, 所以 $\varphi: U \rightarrow U'$ 是一个线性同构. 构造映射 $\psi: V \rightarrow V', \psi(v) = (0, v)$, 同理可证 $\psi: V \rightarrow V'$ 是一个线性同构. 显然 $U' \cap V' = 0$, 又对 W 中任一向量 (u, v) , 有 $(u, v) = (u, 0) + (0, v) \in U' + V'$, 因此 $W = U' \oplus V'$. □

例题 0.3 给定数域 P , 设 A 是数域 P 上的一个 n 级可逆方阵, A 的前 r 个行向量组成的矩阵为 B , 后 $n-r$ 个行向量组成的矩阵为 C , n 元线性方程组 $BX = 0$ 与 $CX = 0$ 的解空间分别为 V_1, V_2 , 证 $P^n = V_1 \oplus V_2$.

证明 先记 $W = V_1 + V_2$. 若 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 $B\alpha = C\alpha = 0$, 所以

$$A\alpha = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \alpha = 0.$$

由于 A 可逆, 知 $\alpha = 0$, 所以 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 即 $W = V_1 \oplus V_2$.

最后说 $W = P^n$: 显然 $r(B) = r, r(C) = n - r$, 则 $\dim V_1 = n - r, \dim V_2 = n - (n - r) = r$. 所以

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim P^n.$$

又 $W = V_1 \oplus V_2 \subseteq P^n$, 从而 $W = P^n$, 即

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$
□

命题 0.3 (任意子空间一定存在相应的补空间)

设 U 是 V 的子空间, 则一定存在 V 的子空间 W , 使得 $V = U \oplus W$. 这样的子空间 W 称为子空间 U 在 V 中的补空间.

注 在这个命题中 $U \cap W = \{0\}$, 而不是 $U \cap W = \emptyset$; 同时 $V = U + W$ 是子空间的和, 而不是 $V = U \cup W$. 因此, 补空间绝不是补集, 请读者务必注意! 一般来说, 补空间并不唯一. 例如下面证明中, 取 U 中不同的基, 再将基扩张得到的补空间也不相同. 还例如, 若 $\dim V - \dim U \geq 1$ 且 $\dim U \geq 1$, 则 U 有无限个补空间.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{e_1, \dots, e_m\}$, 由基扩张定理可将其扩张为 V 的一组基 $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$. 令 $W = L(e_{m+1}, \dots, e_n)$, 则 $V = U + W$. 由于 $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ 是 W 的一组基, 故 $\dim V = \dim U + \dim W$, 从而 $V = U \oplus W$. □

命题 0.4

若 $V = U \oplus W$ 且 $U = U_1 \oplus U_2$, 求证: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus W$.

证明 由 $U = U_1 \oplus U_2$ 可得 $U_1 \cap U_2 = 0$; 由 $V = U \oplus W$ 可得 $(U_1 + U_2) \cap W = U \cap W = 0$, 因此由定理 0.2(2) 可得 $U_1 + U_2 + W$ 是直和, 从而 $V = U_1 + U_2 + W = U_1 \oplus U_2 \oplus W$. □

命题 0.5

每一个 n 维线性空间均可表示为 n 个一维子空间的直和.

证明 设 V 是 n 维线性空间, 取其一组基为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 设 $V_i = L(e_i) (1 \leq i \leq n)$, 则 V_i 是 V 的一维子空间. 任取 $\alpha \in V$, 存在唯一一组常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得 $\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n$, 而 $k_i e_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, n$. 因此 $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$. 注意到 $\dim V = n = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$, 故由定理 0.2(3) 可知, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$.

(注意到 V_i 的基是 $\{e_i\}$, 因此 $V_i (1 \leq i \leq n)$ 的基能拼成 V 的基, 故由定理 0.2(4) 也可得到结论. 再注意到 V 中任一向量写成基向量 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 的线性组合时, 其表示是唯一的. 这就是说, V 中任一向量写成 V_i 中的向量之和时, 其表示是唯一的, 故由定理 0.2(5) 同样可得结论.) □


命题 0.6

设 V_0 是数域 \mathbb{F} 上 n 维向量空间 V 的真子空间, 则 V_0 至多包含 $n-1$ 个 V 中的基向量.

证明 反证法, 若 V_0 包含 n 个 V 中的基向量, 则 V_0 就包含了 V 的一组基. 不妨设 V_0 中的这组基向量为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 则 $\forall \alpha \in V$, 有 $\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \in V_0$, 其中 $k_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \dots, n$. 故 $V_0 \supset V$, 又 $V_0 \subset V$, 因此 $V_0 = V$. 这与 V_0 是 V 的真子空间矛盾. \square

命题 0.7

设 V_1, V_2, \dots, V_m 是数域 \mathbb{F} 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明: 在 V 中必存在一个向量 α , 它不属于任何一个 V_i .

 **笔记** 这个命题表明: 有限个真子空间不能覆盖全空间.

证明 证法一: 对个数 m 进行归纳, 当 $m = 1$ 时结论显然成立. 设 $m = k$ 时结论成立, 现要证明 $m = k+1$ 时结论也成立. 由归纳假设, 存在向量 α , 它不属于任何一个 $V_i (1 \leq i \leq k)$. 若 α 也不属于 V_{k+1} , 则结论已成立, 因此可设 $\alpha \in V_{k+1}$. 在 V_{k+1} 外选一个向量 β , 作集合

$$M = \{t\alpha + \beta | t \in \mathbb{F}\}.$$

事实上, 我们可将 M 看成是通过 β 的终点且平行于 α 的一根“直线”, 现要证明它和每个 V_i 最多只有一个交点. 首先, M 和 V_{k+1} 无交点, 因为若 $t\alpha + \beta \in V_{k+1}$, 则从 $t\alpha \in V_{k+1}$ 可推出 $\beta \in V_{k+1}$, 与假设矛盾. 又若对某个 $V_i (i < k+1)$, 存在 $t_1 \neq t_2$, 使得 $t_1\alpha + \beta \in V_i, t_2\alpha + \beta \in V_i$, 则 $(t_1 - t_2)\alpha \in V_i$, 从而导致 $\alpha \in V_i$, 与假设矛盾. 因此, M 和每个 V_i 最多只有一个交点, 从而 M 中只有有限个向量属于 $\bigcup_{i=1}^{k+1} V_i$, 而 t 有无穷多个选择, 即 M 中有无穷多个向量. 由此即得结论.

证法二: 任取 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 对任意的正整数 k , 构造 V 中向量 $\alpha_k = e_1 + ke_2 + \dots + k^{n-1}e_n$, 设向量族 $S = \{\alpha_k | k = 1, 2, \dots\}$. 由例题??可知, S 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup_{i=1}^m V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故存在某个向量 α_k , 使得 α_k 不属于任何一个 V_i . \square

注 上述证明要用到任意一个数域都有无穷个元素这一事实. 因此, 对于有限域 (读者以后可能会学到) 上的向量空间, 上例结论不一定成立.

命题 0.8

设 V_1, V_2, \dots, V_m 是数域 \mathbb{F} 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明: V 中必有一组基, 使得每个基向量都不在诸 V_i 的并中.

证明 证法一: 由命题 0.7 可知, 存在非零向量 $e_1 \in V$, 使得 $e_1 \notin \bigcup_{i=1}^m V_i$. 定义 $V_{m+1} = L(e_1)$, 再由命题 0.7 可知, 存在向量 $e_2 \in V$, 使得 $e_2 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$. 由推论??可知, $e_2 \notin L(e_1)$ 意味着 e_1, e_2 线性无关. 重新定义 $V_{m+1} = L(e_1, e_2)$, 再由命题 0.7 可知, 存在向量 $e_3 \in V$, 使得 $e_3 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$. 再由推论??可知, $e_3 \notin L(e_1, e_2)$ 意味着 e_1, e_2, e_3 线性无关. 不断重复上述讨论, 即添加线性无关的向量重新定义 V_{m+1} , 并反复利用命题 0.7 和推论??的结论, 最后可以得到 n 个线性无关的向量 e_1, e_2, \dots, e_n , 它们构成 V 的一组基, 且满足 $e_j \notin \bigcup_{i=1}^m V_i (1 \leq j \leq n)$.

证法二: 任取 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 对任意的正整数 k , 构造 V 中向量 $\alpha_k = e_1 + ke_2 + \dots + k^{n-1}e_n$, 设向量族 $S = \{\alpha_k | k = 1, 2, \dots\}$. 由例题??可知, S 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup_{i=1}^m V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故


存在某个向量 α_k , 使得 α_k 不属于任何一个 V_i . 进一步, 在 S 中一定还存在 n 个不同的向量 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}$, 使得每个 α_{k_j} 都不属于任何一个 V_i , 此时 $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}\}$ 就构成了 V 的一组基. \square

定义 0.2 (U -陪集与商空间)

设 V 是数域 \mathbb{K} 上的线性空间, U 是 V 的子空间. 对任意的 $v \in V$, 集合 $v + U := \{v + u | u \in U\}$ 称为 v 的 U -陪集. 在所有 U -陪集构成的集合 $S = \{v + U | v \in V\}$ 中, 定义加法和数乘如下, 其中 $v_1, v_2 \in V, k \in \mathbb{K}$:

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad k \cdot (v_1 + U) := k \cdot v_1 + U.$$

S 在上述加法和数乘下成为数域 \mathbb{K} 上的线性空间, 称为 V 关于子空间 U 的商空间, 记为 V/U .

 **笔记** 容易验证 S 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 因此商空间是良定义的. 故任意 V 的子空间 U 都存在相应的商空间.

注 商空间的向量是 U -陪集. 商空间的零向量就是 $\mathbf{0} + U = U$.

命题 0.9 (U -陪集的性质)

- (1) U -陪集之间的关系是: 作为集合或者相等, 或者不相交;
- (2) $v_1 + U = v_2 + U$ (作为集合相等) 当且仅当 $v_1 - v_2 \in U$. 特别地, $v + U$ 是 V 的子空间当且仅当 $v \in U$;
- (3) S 中的加法以及 \mathbb{K} 关于 S 的数乘不依赖于代表元的选取, 即若 $v_1 + U = v'_1 + U$ 以及 $v_2 + U = v'_2 + U$, 则 $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v'_1 + U) + (v'_2 + U)$, 以及 $k \cdot (v_1 + U) = k \cdot (v'_1 + U)$;

证明

- (1) 设 $(v_1 + U) \cap (v_2 + U) \neq \emptyset$, 即存在 $u_1, u_2 \in U$, 使得 $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$, 从而 $v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \in U$, 于是

$$v_1 + U = v_2 + (v_1 - v_2) + U \subseteq v_2 + U, \quad v_2 + U = v_1 + (v_2 - v_1) + U \subseteq v_1 + U,$$

因此 $v_1 + U = v_2 + U$.

- (2) 由 (1) 的证明过程即得. 特别地, $v + U$ 是 V 的子空间 $\Rightarrow \mathbf{0} \in v + U \Rightarrow$ 存在 $u \in U$, 使得 $\mathbf{0} = v + u \Rightarrow v = -u \in U$. 若 $v \in U$, 则一方面, $\forall \alpha \in v + U$, 存在 $u' \in U$, 使得 $\alpha = v + u'$. 又 $v \in U$, 因此 $\alpha = v + u' \in U$. 故 $v + U \subseteq U$. 另一方面, $\forall \beta \in U$, 有 $\beta = v + \beta - v$. 又由 $v \in U$ 可知 $\beta - v \in U$, 于是 $\beta = v + \beta - v \in v + U$. 故 $v + U \supseteq U$. 因此 $v + U = U$ 是 V 的子空间.

(实际上, 若 $v \in U$, 则因为 $v \in U$ 并且 $v \in v + U$, 所以 $v + U \cap U \neq \emptyset$. 故由 (1) 可知 $v + U = U$ 是 V 的子空间. 这样也能得到证明.)

- (3) 若 $v_1 + U = v'_1 + U$ 以及 $v_2 + U = v'_2 + U$, 则存在 $u_1, u_2 \in U$, 使得 $v_1 - v'_1 = u_1, v_2 - v'_2 = u_2$, 从而 $(v_1 + v_2) - (v'_1 + v'_2) = u_1 + u_2 \in U, k \cdot v_1 - k \cdot v'_1 = k \cdot u_1 \in U$, 于是由 (2) 可得

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U = (v'_1 + v'_2) + U = (v'_1 + U) + (v'_2 + U),$$

$$k \cdot (v_1 + U) = k \cdot v_1 + U = k \cdot v'_1 + U = k \cdot (v'_1 + U).$$

\square

注 若 $v_1 + U = v'_1 + U$ 以及 $v_2 + U = v'_2 + U$, 则 $\forall u'_1 \in U$, 有 $v_1 + u'_1 \in v_1 + U = v'_1 + U$. 从而存在 $u''_1 \in U$, 使得 $v_1 + u'_1 = v'_1 + u''_1$. 于是 $v_1 - v'_1 = u''_1 - u'_1$. 再令 $u_1 = u''_1 - u'_1$, 则 $v_1 - v'_1 = u_1 \in U$. 同理可得, 存在 $u_2 \in U$, 使得 $v_2 - v'_2 = u_2 \in U$.

命题 0.10 (商空间的维数公式和商空间与补空间同构)

设 V 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, U 是 V 的子空间, W 是 U 的补空间, 证明: $\dim V/U = \dim V - \dim U$, 并且存在线性同构 $\varphi: W \rightarrow V/U$.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{e_1, \dots, e_m\}$, 补空间 W 的一组基 $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$, 则 $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ 是 V

的一组基. 我们断言 $\{e_{m+1}+U, \dots, e_n+U\}$ 是商空间 V/U 的一组基. 一方面, 对任意的 $v \in V$, 设 $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, 则

$$v+U = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) + U = \left(\sum_{i=m+1}^n a_i e_i \right) + U = \sum_{i=m+1}^n a_i (e_i + U).$$

另一方面, 设 $a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, 使得 $\sum_{i=m+1}^n a_i (e_i + U) = \mathbf{0} + U$, 即 $\left(\sum_{i=m+1}^n a_i e_i \right) + U = U$, 从而 $\sum_{i=m+1}^n a_i e_i \in U$. 于是存在 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$, 使得 $\sum_{i=m+1}^n a_i e_i = -\sum_{i=1}^m a_i e_i$, 即 $\sum_{i=1}^n a_i e_i = \mathbf{0}$, 从而 $a_i = 0 (1 \leq i \leq n)$. 于是 $\{e_{m+1}+U, \dots, e_n+U\}$ 线性无关. 因此, $\dim V/U = n - m = \dim V - \dim U$.

对任意的 $w \in W$, 设 $w = \sum_{i=m+1}^n a_i e_i$, 定义映射 $\varphi: W \rightarrow V/U$ 为

$$\varphi(w) = w + U = \sum_{i=m+1}^n a_i (e_i + U).$$

容易验证 φ 保持加法和数乘, 并且是一一对应 (W 的基 e_i 映射过去得到 $\varphi(e_i)$ 仍是 V/U 的基, $i = m+1, \dots, n$), 从而是线性同构. \square

例题 0.4 设 $V = M_n(\mathbb{K})$ 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵全体组成的线性空间, $A \in V$, 求证: 与 A 乘法可交换的矩阵全体 $C(A)$ 组成 V 的子空间且其维数不为零. 又若 T 是 V 的非空子集, 求证: 与 T 中任一矩阵乘法可交换的矩阵全体 $C(T)$ 也构成 V 的子空间且其维数不为零.

证明 由于纯量阵 cI_n 与任一 n 阶矩阵 A 乘法可交换, 故 $L(I_n) \subseteq C(A)$. 任取 $B, C \in C(A), k \in \mathbb{K}$, 容易验证 $B+C \in C(A), kB \in C(A)$, 故 $C(A)$ 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间且其维数不为零. $C(T)$ 的结论同理可证. \square

例题 0.5 设 $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 2, 1), \alpha_3 = (2, 1, 0, 1)$ 是四维实向量空间 V 中的向量, 它们生成的子空间为 V_1 , 又向量 $\beta_1 = (-1, 1, 1, 1), \beta_2 = (1, -1, -3, -1), \beta_3 = (-1, 1, -1, 1)$ 生成的子空间为 V_2 , 求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基.

解 解法一: $V_1 + V_2$ 是由 α_i 和 β_i 生成的, 因此只要求出这 6 个向量的极大无关组即可. 将这 6 个向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可取 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 为 $V_1 + V_2$ 的基 (不唯一).

再来求 $V_1 \cap V_2$ 的基. 首先注意到 α_1, α_2 是 V_1 的基 (从上面的矩阵即可看出), 又不难验证 β_1, β_2 是 V_2 的基, V_2 中的向量可以表示为 β_1, β_2 的线性组合. 假设 $t_1\beta_1 + t_2\beta_2$ 属于 V_1 , 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, t_1\beta_1 + t_2\beta_2$ 和向量组 α_1, α_2 的秩相等 (因为 α_1, α_2 是 V_1 的基). 因此, 我们可以用矩阵方法来求出参数 t_1, t_2 . 注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ -1 & 2 & t_1-3t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ 0 & 2 & -2t_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ 0 & 0 & -2t_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可得 $t_1 = 0$, 所以 $V_1 \cap V_2$ 的基可取为 β_2 .

解法二: 求 $V_1 + V_2$ 的基同解法 1, 现用解线性方程组的方法来求 $V_1 \cap V_2$ 的基. 因为 α_1, α_2 是 V_1 的基, β_1, β_2 是 V_2 的基, 故对任一向量 $\gamma \in V_1 \cap V_2, \gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = (-x_3)\beta_1 + (-x_4)\beta_2$. 因此, 求向量 γ 等价于求解线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = \mathbf{0}.$$

通过初等行变换将其系数矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ 进行化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故上述线性方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(-1, 1, 0, 1)$, 从而 $\gamma = -k(\alpha_1 - \alpha_2) = -k\beta_2 (k \in \mathbb{R})$, 于是 β_2 是 $V_1 \cap V_2$ 的基. \square