

## 0.1 群的直积

### 定义 0.1 (外直积)

设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是  $n$  个群, 构造集合  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的笛卡尔积

$$G = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

并在  $G$  中定义乘法运算

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n), \forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in G,$$

则  $G$  关于上述定义的乘法构成群, 称为群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的外直积, 记作  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ .



### 注

- (1) 如果  $e_1, e_2, \dots, e_n$  分别是群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的单位元, 则  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  的单位元;
- (2) 设  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G$ , 则  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$ ;
- (3) 当  $G_1, G_2, \dots, G_n$  都是加群时,  $G_1$  与  $G_2$  的外直积也可记作  $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ .

### 定理 0.1

设  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  是  $n$  个群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的外直积, 则

- (1)  $G$  是有限群的充分必要条件是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  都是有限群. 并且, 当  $G$  是有限群时, 有

$$|G| = |G_1| \cdot |G_2| \cdots |G_n|;$$

- (2)  $G$  是交换群的充分必要条件是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  都是交换群;

- (3)  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \cong G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \dots \times G_{\sigma(n)}$ ,  $\forall \sigma \in S_n$ .

- (4) 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  分别是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  中的有限阶元素, 则对  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ , 有

$$\text{ord}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [\text{ord } a_1, \text{ord } a_2, \dots, \text{ord } a_n].$$

- (5)  $C(G) = C(G_1) \times C(G_2) \times \dots \times C(G_n)$ .

- (6) 若  $G_1, G_2, \dots, G_n$  分别是  $m_1, m_2, \dots, m_n$  阶的循环群, 则  $G$  是循环群的充要条件是  $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$ .



### 证明

- (1) 由笛卡尔积的定义易得.
- (2) 如果  $G_1$  与  $G_2$  都是交换群, 则对任意的  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in G$ , 有

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \\ &= (b_1 a_1, b_2 a_2, \dots, b_n a_n) \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

所以  $G$  是交换群.

反之, 如果  $G$  是交换群, 那么对任意的  $a_1, b_1 \in G_1, a_2, b_2 \in G_2$ , 有

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

即

$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) = (b_1 a_1, b_2 a_2, \dots, b_n a_n).$$

因此  $a_i b_i = b_i a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 从而  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都是交换群.

(3) 对  $\forall \sigma \in S_n$ , 构造映射

$$\phi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \longmapsto (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}), \quad \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

因为  $\sigma$  是双射, 所以  $\phi$  也是双射, 且

$$\begin{aligned} & \phi((a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n)) \\ &= \phi(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \\ &= (a_{\sigma(1)} b_{\sigma(1)}, a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(1)} b_{\sigma(n)}) \\ &= (a_2, a_1)(b_2, b_1) = \phi(a_1, a_2) \cdot \phi(b_1, b_2). \end{aligned}$$

因此  $\phi$  是  $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$  到  $G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)}$  的同构映射, 即

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \cong G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)}.$$

(4) 当  $n = 1$  时, 结论显然成立. 假设结论对  $n - 1$  成立, 现在考虑  $n$  的情况.

设  $a_i \in G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 记  $b = (a_2, \dots, a_n) \in G_2 \times \cdots \times G_n$ ,  $\text{ord } a_1 = m$ , 则由归纳假设知

$$\text{ord } b = \text{ord}(a_2, \dots, a_n) = [\text{ord } a_2, \dots, \text{ord } a_n].$$

再记  $\text{ord } b = n$ ,  $s = [m, n]$ ,  $e_1$  为  $G_1$  的么元,  $e_2$  为  $G_2 \times \cdots \times G_n$  的么元. 则

$$(a_1, b)^s = (a_1^s, b^s) = (e_1, e_2).$$

从而  $(a_1, b)$  的阶有限, 设其为  $t$ , 则由上式得  $t \mid s$ .

又因为

$$(e_1, e_2) = (a_1, b)^t = (a_1^t, b^t),$$

所以  $a_1^t = e_1$ ,  $b^t = e_2$ . 于是  $m \mid t$ , 且  $n \mid t$ , 从而  $t$  是  $m$  和  $n$  的公倍数. 而  $s$  是  $m$  和  $n$  的最小公倍数, 因此  $s \mid t$ .

结合以上讨论得  $s = t$ , 即

$$\begin{aligned} \text{ord}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \text{ord}(a_1, b) = [\text{ord } a_1, \text{ord } b] \\ &= [\text{ord } a_1, [\text{ord } a_2, \dots, \text{ord } a_n]] \\ &= [\text{ord } a_1, \text{ord } a_2, \dots, \text{ord } a_n]. \end{aligned}$$

故由数学归纳法知结论成立.

(5) 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C(G)$ , 则对任意的  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ , 由  $ax = xa$  得  $a_i \in C(G_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  
因此

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n).$$

另一方面, 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n)$ , 则对任意的  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ , 有

$$ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n) = (x_1 a_1, x_2 a_2, \dots, x_n a_n) = xa.$$

所以  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C(G)$ . 因此

$$C(G) = C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n).$$

(6) 设  $G_1 = \langle a_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle a_2 \rangle, \dots, G_n = \langle a_n \rangle$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  分别为  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的么元.

**必要性:** 设  $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$  是循环群. 若  $(m_1, m_2, \dots, m_n) = t \neq 1$ , 则由于  $\text{ord } a_i = m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 而  
 $a_i^{\frac{m_i}{t}}$  的阶都是  $t$ , 因此由定理??知

$$\langle (e_1, \dots, \underbrace{a_i^{\frac{m_i}{t}}, \dots, e_n}_{\text{第 } i \text{ 个位置}}) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

都是循环群  $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$  中的  $n$  个不同的  $t$  阶子群. 而这与定理?????矛盾! 故  $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$ .

**充分性:** 设  $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$ , 则由定理 0.1(4) 和定理 0.1(1) 可得

$$\begin{aligned} |\langle(a_1, a_2, \dots, a_n)\rangle| &= \text{ord}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [m_1, m_2, \dots, m_n] \\ &= m_1 m_2 \cdots m_n = |G_1| \cdot |G_2| \cdots |G_n| \\ &= |G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n|. \end{aligned}$$

又  $\langle(a_1, a_2, \dots, a_n)\rangle \subseteq G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ , 故  $\langle(a_1, a_2, \dots, a_n)\rangle = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ . 因此  $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$  是循环群.

□

### 定义 0.2 (换位子)

设  $g_1, g_2$  是群  $G$  中的两个元素, 称

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$$

为  $g_1$  与  $g_2$  的换位子.

♣

### 定义 0.3 (换位子群)

若  $H, K$  是群  $G$  的两个子群, 称

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle$$

为  $H$  与  $K$  的换位子群.

♣

### 命题 0.1

设  $H, K$  是群  $G$  的两个子群, 则

- (1)  $\alpha([g_1, g_2]) = [\alpha(g_1), \alpha(g_2)]$ ,  $\forall \alpha \in \text{Aut}G$ ,  $g_1, g_2 \in G$ .
- (2)  $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$ ,  $\forall \alpha \in \text{Aut}G$ .
- (3) 若  $H \triangleleft G$ , 则  $G/H$  为 Abel 群的充要条件是  $H \supseteq [G, G]$ .

◆

### 证明

- (1) 从换位子的定义即得.
- (2) 因为  $\forall a \in H, b \in K$ , 有  $\alpha(a) \in \alpha(H), \alpha(b) \in \alpha(K)$ . 注意到

$$\alpha([a, b]) = \alpha(aba^{-1}b^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)\alpha(a)^{-1}\alpha(b)^{-1} = [\alpha(a), \alpha(b)],$$

故  $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$ .

- (3)  $G/H$  为 Abel 群, 当且仅当对  $\forall a, b \in G$ ,  $(aH)(bH) = (bH)(aH)$ , 即  $abH = baH, \forall a, b \in G$ , 当且仅当  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H, \forall a, b \in G$ , 即  $H \supseteq [G, G]$ .

□

### 引理 0.1

设  $H, K$  是群  $G$  的子群, 则有

- (1)  $[H, K] = \{1\} \iff H \subseteq C_G(K)$ ;
- (2)  $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$ ,
- $[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$ ;
- (3) 若  $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ , 则  $[H, K] \triangleleft G$  且  $[H, K] \subseteq H \cap K$ . 特别地, 由  $G \triangleleft G$  知  $[G, G] \triangleleft G$ ;
- (4) 当  $H_1, K_1$  分别为  $H, K$  的子群时有  $[H_1, K_1] \subseteq [H, K]$ .

♡

### 证明

- (1)  $[H, K] = \{1\}$  当且仅当对  $\forall h \in H, k \in K$  有

$$[h, k] = 1 \iff h^{-1}k^{-1}hk = 1 \iff hk = kh \iff hkh^{-1} = k,$$

即  $h \in C_G(K), \forall h \in H$ , 即  $H \subseteq C_G(K)$ .

(2) 先证  $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$ . 若  $[H, K] \subseteq K$ , 则

$$[h, k] \in K, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in K, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

对  $\forall h \in H$ , 设  $k \in K$ , 则由  $[h, k] \in K$  知存在  $k_1 \in K$ , 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = k_1 \iff hkk_1^{-1} = kh \iff k = hkk_1^{-1}h^{-1} \in hKh^{-1},$$

故  $K \subseteq hKh^{-1}$ . 再设  $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$ , 则由  $[h^{-1}, k^{-1}] \in K$  知存在  $k_2 \in K$ , 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = k_2 \iff hkh^{-1} = kk_2 \in K,$$

故  $hKh^{-1} \subseteq K$ . 因此  $hKh^{-1} = K$ ,  $\forall h \in H$ . 即  $h \in N_G(K), \forall h \in H$ . 故  $H \subseteq N_G(K)$ .

反之, 若  $H \subseteq N_G(K)$ , 对  $\forall h \in H, k \in K$ , 有  $hKh^{-1} = K$ , 从而存在  $h_1 \in H, k_1 \in K$ , 使

$$k = h_1k_1h_1^{-1} \iff k^{-1} = h_1k_1^{-1}h_1^{-1}.$$

于是

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}h_1k_1^{-1}h_1^{-1}hk = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k.$$

注意到  $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} \in hKh^{-1}$ , 所以存在  $k_2 \in K$ , 使  $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} = k_2$ . 从而

$$[h, k] = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k = k_2k \in K, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

故  $[H, K] \subseteq K$ .

再证  $[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$ . 若  $[H, K] \subseteq H$ , 则

$$[h, k] \in H, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in H, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

对  $\forall k \in K$ , 设  $h \in H$ , 则由  $[h, k] \in H$  知存在  $h_1 \in H$ , 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = h_1 \iff hk = kh_1 \iff h = kh_1k^{-1} \in kKh^{-1},$$

故  $H \subseteq kKh^{-1}$ . 再设  $khk^{-1} \in kKh^{-1}$ , 则由  $[h^{-1}, k^{-1}] \in H$  知存在  $h_2 \in H$ , 使

$$khk^{-1}k^{-1} = h_2 \iff khk^{-1} = h^{-1}h_2 \in H,$$

故  $kKh^{-1} \subseteq H$ . 因此  $kKh^{-1} = H, \forall k \in K$ . 即  $k \in N_G(H), \forall k \in K$ . 故  $K \subseteq N_G(H)$ .

反之, 若  $K \subseteq N_G(H)$ , 对  $\forall h \in H, k \in K$ , 有  $kKh^{-1} = H$ , 从而存在  $h_1 \in H, k_1 \in K$ , 使

$$h = k_1h_1k_1^{-1}.$$

于是

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}k^{-1}k_1h_1k_1^{-1}k = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1}.$$

注意到  $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} \in kKh^{-1}$ , 所以存在  $h_2 \in H$ , 使  $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h_2$ . 从而

$$[h, k] = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h^{-1}h_2 \in H.$$

故  $[H, K] \subseteq H$ .

(3) 设  $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ , 于是对  $\forall \alpha = L_g R_{g^{-1}} \in \text{Int}G$ , 由命题 0.1(2) 有

$$g[H, K]g^{-1} = \alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)] = [gHg^{-1}, gKg^{-1}] = [H, K],$$

即  $[H, K] \triangleleft G$ . 由  $H \triangleleft G, K \triangleleft G$  知

$$gHg^{-1} = H, \quad gKg^{-1} = K, \quad \forall g \in G.$$

故

$$kKh^{-1} = H, \quad \forall k \in K;$$

$$hKh^{-1} = K, \quad \forall h \in H.$$

即  $K \subseteq N_G(H), H \subseteq N_G(K)$ . 再由结论 (2) 知  $[H, K] \subseteq H \cap K$ .

(4) 此结论是显然的. □

### 推论 0.1

(1) 设  $G$  是一个群,  $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$ , 且  $N_i \cap N_j = \{1\}$  ( $i \neq j$ ), 则对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

并且

$$N_j \subseteq C(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

(2) 设  $H, K$  是两个群,  $N \triangleleft H, K$ , 则

$$[H, K] \subseteq N \iff [H/N, K/N] = N \iff H/N \subseteq C(K/N).$$



### 证明

(1) 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 由引理 0.1(3) 知  $[N_i, N_j] \subseteq N_i \cap N_j = \{1\}$ , 故  $[N_i, N_j] = \{1\}$ . 因此对  $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$ , 有

$$1 = [n_i, n_j] = n_i^{-1} n_j^{-1} n_i n_j \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

并且由引理 0.1(1) 知

$$N_j \subseteq C(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

(2) 由引理 0.1(1) 知

$$[H/N, K/N] = N \iff H/N \subseteq C(K/N).$$

于是对  $\forall a \in H, b \in K$ , 有

$$N = [aN, bN] = (a^{-1}N)(b^{-1}N)(aN)(bN) = (a^{-1}b^{-1}ab)N = [a, b]N.$$

这也当且仅当

$$[a, b] \in N, \quad \forall a \in H, b \in K.$$

即  $[H, K] \subseteq N$ . □

### 定义 0.4

设  $A, B, G$  都是群, 若有  $G$  的正规子群  $N$  与  $A$  同构, 而商群  $G/N$  与  $B$  同构, 则称  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张,  $N$  称为该扩张的核, 简称扩张核.



**注** 显然, 若  $N$  是  $G$  的正规子群, 则  $G$  是  $G/N$  过  $N$  的扩张, 扩张核为  $N$ .

### 定义 0.5

设  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张,  $N$  为扩张核,  $\lambda$  是  $A$  到  $N$  上的同构,  $\mu$  是  $G$  到  $B$  上的同态且  $\mu$  满足  $\ker \mu = N$ .  $1$  为  $A$  的幺元,  $1'$  为  $B$  的幺元,  $i$  是  $\{1\}$  到  $A$  的映射,  $i(1) = 1$ .  $0'$  是  $B$  到  $\{1'\}$  的映射,  $0'(b) = 1' (\forall b \in B)$ . 于是有群及其映射的序列 (以  $1, 1'$  代替  $\{1\}, \{1'\}$ )

$$1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{0'} 1',$$

每个映射都是群的同态映射, 并且前一映射的像恰是后一映射的核, 即

$$i(1) = \ker \lambda, \quad \lambda(A) = \ker \mu, \quad \mu(G) = \ker 0'.$$

这样的序列称为**(短) 正合序列**. 以后记**(短) 正合序列**时,  $i$  与  $0'$  省略不写, 同时也将  $1'$  记为  $1$ . ♣

**注** 由定理??知存在  $G$  到  $G/N$  的自然群同态  $\mu_1$ . 由  $G/N \cong B$  可设  $G/N$  到  $B$  的同构  $f$ , 则  $\mu = f\mu_1$  就是  $G$  到  $B$  的

同态. 由命题??知  $\ker \mu_1 = N$ , 从而

$$\mu(N) = f\mu_1(N) = f(N) = 1'.$$

故  $N \subseteq \ker \mu$ . 再设  $x \in \ker \mu$ , 则

$$\mu(x) = f\mu_1(x) = 1' \implies \mu_1(x) = f^{-1}(1') = N \implies x \in \ker \mu_1 = N.$$

故  $\ker \mu \subseteq N$ . 综上可得  $\lambda(A) = N = \ker \mu$ . 故上述定义中的同态  $\mu$  是良定义的.

### 命题 0.2

若群  $A, B, G$  之间有(短)正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

即存在  $G$  的正规子群  $N$ , 还存在  $\lambda$  是  $A$  到  $N$  上的同构, 以及  $\mu$  是  $G$  到  $B$  上的同态且  $\mu$  满足  $\ker \mu = N$ . 则  $\lambda$  是  $A$  到  $G$  的单同态,  $\mu$  是  $G$  到  $B$  的满同态, 并且  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张.

### 证明

□

### 定理 0.2

设  $A, B, G, G'$  是群.

- (1) 若  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张,  $G$  与  $G'$  同构, 则  $G'$  也是  $B$  过  $A$  的扩张;
- (2) 若  $G, G'$  都是  $B$  过  $A$  的扩张且有  $G$  到  $G'$  的同态  $f$ , 使图 1 为交换图, 则  $f$  是  $G$  到  $G'$  上的同构, 这时称  $G$  与  $G'$  是  $B$  过  $A$  的等价扩张.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & G & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow f & & \downarrow \text{id}_B \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda'} & G' & \xrightarrow{\mu'} & B \longrightarrow 1 \end{array}$$

图 1

♡

### 证明

- (1) 设  $A, B, G$  对应的(短)正合序列为

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

$f$  是  $G$  到  $G'$  上的同构. 令  $\lambda' = f\lambda$ ,  $\mu' = \mu f^{-1}$ . 由命题 0.2 知  $\lambda$  是  $A$  到  $G$  的单同态且  $\lambda(A) = N$ . 从而  $\lambda'$  是单同态且  $\lambda'(A) = f(\lambda(A))$  与  $A$  同构.  $\mu' = \mu f^{-1}$  是  $G'$  到  $B$  上的同态, 又注意到

$$\mu'(\ker \mu') = 1' \iff \mu(f^{-1}(\ker \mu')) = 1' \iff f^{-1}(\ker \mu') = \ker \mu \iff \ker \mu' = f(\ker \mu),$$

故

$$\ker \mu' = \ker(\mu f^{-1}) = f(\ker \mu) = f(\lambda(A)) = \lambda'(A).$$

因而  $G'$  是  $B$  过  $A$  的扩张.

- (2) 先证  $\ker f = \{1\}$ , 即  $f$  是单射. 若  $x \in \ker f$ , 则  $\mu(x) = \mu'f(x) = \mu'(1) = 1$  知  $x \in \ker \mu = \lambda(A)$ , 因而  $\exists y \in A$ , 使得  $x = \lambda(y)$ . 于是  $\lambda'(y) = f(\lambda(y)) = f(x) = 1$ . 由(1)的证明知  $\lambda'$  是单射, 故  $y = 1$ , 于是  $x = \lambda(1) = 1$ , 即  $\ker f = \{1\}$ .

下面证  $f(G) = G'$ , 即  $f$  是满映射. 设  $x' \in G'$ , 由命题 0.2 知  $\mu$  是  $G$  到  $B$  的满同态, 即  $\mu(G) = B$ , 从而  $\exists x \in G$ , 使  $\mu(x) = \mu'(x')$ , 但  $\mu = \mu'f$ , 故

$$\mu'(f(x)) = \mu(x) = \mu'(x') \iff 1 = (\mu'(x'))^{-1}\mu'(f(x)) = (\mu'(x')^{-1})\mu'(f(x)) = \mu'((x')^{-1}f(x)).$$

因而  $(x')^{-1}f(x) \in \ker \mu' = \lambda'(A) = f\lambda(A)$ . 故  $\exists a \in A$ , 使  $(x')^{-1}f(x) = f(\lambda(a)) \in f(G)$ , 于是  $x' \in f(G)$ , 即  $f$  是满映射.

□

**定理 0.3**

设群  $G$  是群  $B$  过群  $A$  的扩张, 对应的(短)正合序列为

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

扩张核为  $N = \lambda(A) = \ker \mu$ .

- (1) 若有  $G$  的子群  $H$  满足  $G = HN, H \cap N = \{1\}$ , 则  $\mu|_H$  是  $H$  到  $B$  上的同构, 此时  $(\mu|_H)^{-1} = \nu$  是  $B$  到  $G$  中的同态且  $\mu\nu = \text{id}_B$ ;
- (2) 若存在  $B$  到  $G$  的同态  $\nu$ , 使得  $\mu\nu = \text{id}_B$ , 则  $\nu(B) = H$  是  $G$  的子群,  $\nu$  是  $B$  到  $H = \nu(B)$  上的同构且  $G = HN, H \cap N = \{1\}$ .

♡

**证明**

- (1) 由  $\ker(\mu|_H) = H \cap \ker \mu = H \cap N = \{1\}$  知  $\mu|_H$  是  $H$  到  $B$  的单射, 又  $\forall b \in B, \exists x \in G$ , 使  $\mu(x) = b$ , 而  $G = HN$ , 故  $\exists y \in H, z \in N$ , 使  $x = yz$ . 于是  $b = \mu(x) = \mu(y)\mu(z) = \mu(y)$ , 故  $\mu|_H$  是  $H$  到  $B$  上的满映射, 于是  $\mu|_H$  是  $H$  到  $B$  上的同构. 从而  $\nu$  是  $B$  到  $H$  中的同构, 故  $\nu$  是  $B$  到  $G$  中的同态. 又  $\mu\nu(b) = \mu(y) = b$ , 故  $\mu\nu = \text{id}_B$ .
- (2) 由命题????知  $\nu(B) = H$  是  $G$  的子群. 由  $\mu\nu = \text{id}_B$  知  $x = \mu\nu(x) = \mu(1) = 1, \forall x \in \ker \nu$ , 即  $\ker \nu \subseteq \{1\}$ , 因此  $\ker \nu = \{1\}$ , 故  $\nu$  是  $B$  到  $H = \nu(B)$  上的同构, 若  $x \in N \cap H$ , 则由  $x \in N = \ker \mu$  知  $\mu(x) = 1$ , 由  $x \in H = \nu(B)$  知存在  $b \in B$ , 使  $x = \nu(b)$ . 从而

$$1 = \mu(x) = \mu\nu(b) = \text{id}_B(b) = b.$$

故  $x = \nu(b) = \nu(1) = 1$ , 即  $H \cap N = \{1\}$ .

对  $\forall b \in B$ , 由  $\mu\nu = \text{id}_B$  知  $\mu(\nu(b)) = \text{id}_B(b) = b$  且  $\nu(b) \in H$ , 故  $\mu|_H$  是  $H$  到  $B$  上的满同态. 设  $x \in G$ , 则  $\mu(x) \in B$ . 于是  $\exists y \in H$ , 使  $\mu(y) = \mu(x)$ , 因而  $\mu(y^{-1}x) = 1$ , 即  $z = y^{-1}x \in \ker \mu = N$  有  $x = yz \in HN$ , 故  $G = HN$ .

□

**定义 0.6**

设  $G$  是一个群,  $N \triangleleft G, H$  是  $G$  的子群, 且  $H \cap N = \{1\}, G = HN$ , 则称  $G$  是  $N$  与  $H$  的半直积, 记为  $G = H \ltimes N$ . 如果  $H$  还是  $G$  的正规子群, 则称  $G$  是  $N$  与  $H$  的内直积, 记为  $G = H \otimes N$ .

♣

**定义 0.7**

设  $G$  是群  $B$  过群  $A$  的扩张,  $N$  是扩张的核.

- (1) 如果存在  $G$  的子群  $H$ , 使  $H \cap N = \{1\}, G = HN$ , 那么称此扩张为非本质扩张. 若  $H$  还是  $G$  的正规子群, 则称此扩张为平凡扩张.
- (2) 如果  $N \subseteq C(G)$ , 那么称此扩张为中心扩张.

♣

**例题 0.1**

1. 对整数加群  $\mathbb{Z}$ , 它的正规子群  $2\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{Z}$  同构, 而  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$  是 2 阶循环群, 因而  $\mathbb{Z}$  是  $\mathbb{Z}_2$  过  $2\mathbb{Z}$  的扩张. 由于  $\mathbb{Z}$  的任何子群都不同构于  $\mathbb{Z}_2$ , 因而这个扩张不是非本质扩张.
2. 设  $n \geq 3$ .  $A_n$  是  $S_n$  的正规子群,  $\langle (12) \rangle$  是  $S_n$  的 2 阶子群,  $\langle (12) \rangle \cap A_n = \{\text{id}\}, S_n = \langle (12) \rangle A_n$ , 但  $\langle (12) \rangle$  不是  $S_n$  的正规子群, 故  $S_n = \langle (12) \rangle \ltimes A_n$ .
3. 3 阶循环群过 5 阶循环群的扩张  $G$  是 15 阶群. 由命题??知这种扩张必然是平凡扩张, 即  $G = \langle a \rangle \otimes \langle b \rangle$ , 其中,  $a, b$  分别为  $G$  的 3 阶元素与 5 阶元素.

**证明**

□

**定理 0.4**

设  $A, B$  是  $G$  的子群.

- (1)  $G = AB, A \cap B = \{1\}$  当且仅当  $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$ , 使得  $g = ab$  且这种表示唯一.
- (2)  $G$  是  $A$  和  $B$  的内直积的充分必要条件是  $G$  满足如下两个条件:
  - (i)  $G$  中每个元素可唯一地表为  $ab$  的形式, 其中  $a \in A, b \in B$ ;
  - (ii)  $A$  中每个元素与  $B$  中任意元素可交换, 即: 对任意  $a \in A, b \in B$ , 有  $ab = ba$ .

**证明**

- (1) 由  $G = AB, A \cap B = \{1\}$  知  $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$ , 使  $g = ab$ . 若另有  $g = a'b', a' \in A, b' \in B$ , 则  $a^{-1}a' = bb'^{-1} \in A \cap B = \{1\}$ , 于是  $a = a', b = b'$ .  
反之, 若  $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$ , 使  $g = ab$ , 则  $G = AB$ . 又若  $c \in A \cap B$ , 由  $c = 1 \cdot c = c \cdot 1$  的表示唯一可知  $c = 1$ , 故  $A \cap B = \{1\}$ .
- (2) 由定理????知条件(i)成立当且仅当  $A, B \triangleleft G$ . 又由定理 0.4(1)知条件(ii)成立当且仅当  $G = AB, A \cap B = \{1\}$ .  
故  $G = A \otimes B$  当且仅当  $G$  同时满足条件(i)(ii).

**定理 0.5**

- (1) 如果群  $G$  是正规子群  $H$  和  $K$  的内直积, 则  $H \times K \cong G$ .
- (2) 如果群  $G = G_1 \times G_2$ , 则存在  $G$  的正规子群  $G'_1$  和  $G'_2$ , 且  $G'_i$  与  $G_i$  同构 ( $i = 1, 2$ ), 使得  $G = G'_1 \otimes G'_2$ .



**注** 从这个定理可以看到, 群的内外直积的概念在同构意义下是一致的, 所以有时可不对内外直积加以区分, 而统称为群的直积.

**证明**

- (1) 如果群  $G$  是正规子群  $H$  和  $K$  的内直积. 定义映射

$$\begin{aligned}\phi : H \times K &\longrightarrow G, \\ (h, k) &\longmapsto hk, \forall (h, k) \in H \times K,\end{aligned}$$

则由于  $G = HK$ , 故  $\phi$  是满射. 又由定理 0.4(2)知  $G$  中元素为  $hk$  形式时表法唯一, 故  $\phi$  是单射. 又对任意的  $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ , 由于  $H$  中的元素与  $K$  中的元素可交换, 故

$$\begin{aligned}\phi((h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)) &= \phi(h_1 h_2, k_1 k_2) = (h_1 h_2)(k_1 k_2) \\ &= (h_1 k_1)(h_2 k_2) = \phi(h_1, k_1) \cdot \phi(h_2, k_2),\end{aligned}$$

所以  $\phi$  是同构映射, 从而  $H \times K \cong G$ .

- (2) 如果  $G = G_1 \times G_2$ . 令

$$G'_1 = \{(a_1, e_2) \mid a_1 \in G_1\}, G'_2 = \{(e_1, a_2) \mid a_2 \in G_2\},$$

则容易验证  $G'_1, G'_2$  都是  $G$  的子群, 且对任意的  $(a_1, a_2) \in G$ ,

$$(a_1, a_2) = (a_1, e_2)(e_1, a_2) \in G'_1 G'_2.$$

这一表法是唯一的, 且对任意的  $(a_1, e_2) \in G'_1, (e_1, a_2) \in G'_2$ , 有

$$(a_1, e_2) \cdot (e_1, a_2) = (a_1, a_2) = (e_1, a_2) \cdot (a_1, e_2),$$

所以由定理 0.4(2)知  $G$  是  $G'_1$  与  $G'_2$  的内直积. 而

$$\phi_1 : a_1 \longmapsto (a_1, e_2)$$

以及

$$\phi_2 : a_2 \longmapsto (e_1, a_2)$$

分别为  $G_1$  到  $G'_1$  和  $G_2$  到  $G'_2$  的同构映射.

□

**定理 0.6**

设  $A, B$  是两个群, 则一定存在  $B$  过  $A$  的平凡扩张  $G = A \times B$ , 并且  $G$  在同构意义下唯一.

♡

**证明** 在  $G = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  中定义乘法

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad \forall (a_i, b_i) \in G, i = 1, 2.$$

容易验证  $G$  是群, 么元为  $(1, 1')$ , 其中,  $1, 1'$  分别为  $A, B$  的么元.  $\forall (a, b) \in G, (a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ , 而且

$$A' = \{(a, 1') \mid a \in A\}, \quad B' = \{(1, b) \mid b \in B\}$$

都是  $G$  的正规子群. 又  $G = A' B'$ ,  $A' \cap B' = \{(1, 1')\}$ , 于是  $G = A' \otimes B'$ .

又映射  $\lambda: \lambda(a) = (a, 1') (\forall a \in A)$  是  $A$  到  $G$  的单同态,  $\lambda(A) = A'$ , 故  $\lambda$  是  $A$  到  $A'$  的同构. 而映射  $\mu: \mu((a, b)) = b$  则是  $G$  到  $B$  上的同态, 并且  $\ker \mu = A' = \lambda(A)$ ,  $\mu|_{B'}$  是  $B'$  到  $B$  上的同构. 即有(短)正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

故由**命题 0.2**知  $G$  是  $B$  过  $A$  的扩张, 扩张核为  $A'$ . 由  $G = A' \otimes B'$  及  $A \cong A', B \cong B'$  知

$$G = A' B', \quad A' \cap B' = \{1\}, \quad B' \triangleleft G.$$

故  $G$  是  $B$  过  $A$  的平凡扩张.

设  $G_1$  也是  $B$  过  $A$  的平凡扩张, 于是  $G_1 = A_1 \otimes B_1$ . 设  $\lambda_1$  为  $A$  到  $A_1$  的同构,  $\gamma_1$  是  $B$  到  $B_1$  的同构, 令

$$f((a, b)) = \lambda_1(a)\gamma_1(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

由  $G_1 = A_1 \otimes B_1$  知  $G_1 = A_1 B_1, A_1 \cap B_1 = \{1\}$  且  $A_1, B_1 \triangleleft G_1$ . 从而由定理????知

$$a_1 b_1 = b_1 a_1, \quad \forall a_1 \in A_1, b_1 \in B_1.$$

于是对  $\forall (a, b), (a', b') \in G$ , 有

$$\begin{aligned} f((a, b)(a', b')) &= f((aa', bb')) = \lambda_1(aa')\gamma_1(bb') \\ &= \lambda_1(a)\lambda_1(a')\gamma_1(b)\gamma_1(b') = \lambda_1(a)\gamma_1(b)\lambda_1(a')\gamma_1(b') \\ &= f((a, b))f((a', b')). \end{aligned}$$

因此  $f$  是  $G$  到  $G_1$  的同态.

设  $a_1 b_1 \in A_1 B_1 = G_1$ , 则由  $\lambda_1$  是  $A$  到  $A_1$  的同构,  $\gamma_1$  是  $B$  到  $B_1$  的同构可知, 存在  $a \in A, b \in B$ , 使

$$\lambda_1(a) = a_1, \gamma_1(b) = b_1 \implies f((a, b)) = \lambda_1(a)\gamma_1(b) = a_1 b_1.$$

故  $f$  是满同态.

设  $f((a, b)) = f((a', b')) \in G_1$ , 则

$$\lambda_1(a)\gamma_1(b) = f((a, b)) = f((a', b')) = \lambda_1(a')\gamma_1(b').$$

由**定理 0.4(1)**知  $\lambda_1(a) = \lambda_1(a'), \gamma_1(b) = \gamma_1(b')$ . 又  $\lambda_1$  是  $A$  到  $A_1$  的同构,  $\gamma_1$  是  $B$  到  $B_1$  的同构, 故

$$a = a', b = b' \implies (a, b) = (a', b').$$

因此  $f$  是单同态. 综上可知  $f$  是  $G$  到  $G_1$  的同构.

□

**定义 0.8**

若  $N_1, N_2, \dots, N_k$  都是群  $G$  的正规子群, 并且

$$G = N_1 N_2 \cdots N_k, \text{ 其中 } N_i \cap \prod_{j=1}^{i-1} N_j = \{1\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

则称  $G$  是  $N_1, N_2, \dots, N_k$  的内直积, 记为

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$



**注** 由  $N_i \cap \prod_{j=1}^{i-1} N_j = \{1\}, i = 1, 2, \dots, k$  可推出  $N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}, i = 1, 2, \dots, k$ .

### 定理 0.7

如果群  $G$  是有限多个子群  $H_1, H_2, \dots, H_n$  的内直积, 则  $G$  同构于  $H_1, H_2, \dots, H_n$  的外直积.



**证明** 对  $n$  用数学归纳法. 当  $n = 2$  时, 由定理 0.5(1) 知结论成立.

假定结论对  $n - 1$  成立. 考察  $G$  是  $n$  个正规子群  $H_1, H_2, \dots, H_n$  的内直积的情形. 令  $K = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$ , 则由命题????知  $K$  为  $G$  的正规子群, 由命题????知  $H_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  为  $K$  的正规子群. 从而由内直积的定义可得,  $G$  为  $K$  与  $H_n$  的内直积,  $K$  为正规子群  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  的内直积. 于是由定理 0.5(1) 及归纳假设得

$$G \cong K \times H_n, \quad K \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{n-1}.$$

因此

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n.$$



### 定理 0.8

(1) 设群  $N_1, N_2, \dots, N_k$  的内直积为  $G$ , 即  $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$ , 则对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

(2) 设有限群  $N_1, N_2, \dots, N_k$  的内直积为  $G$ , 即  $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$ , 则

$$|G| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

(3) 设  $G$  是一个群, 群  $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$ , 则

$$N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k \triangleleft G.$$

(4) 设  $N_1, N_2, \dots, N_k$  都是群  $G$  的正规子群, 则群  $G$  满足

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$

的充要条件是  $G$  中任一元素可分解为  $N_i (1 \leq i \leq k)$  中元素的积且这种分解是唯一的.



**证明**

(1) 由内直积的定义知当  $i \neq j$  时, 有  $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$ , 故利用推论 0.1(1) 得, 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

(2) 由内直积的定义知当  $i \neq j$  时, 有  $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$ , 故利用命题??得

$$|G| = |N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

(3) 由内直积的定义和命题????立得.

(4) **必要性:** 由内直积的定义知  $G = N_1 N_2 \cdots N_k$  且  $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$ , 则显然  $G$  中任一元素可分解为  $N_i (1 \leq i \leq k)$  中元素的积. 由定理 0.8(1) 知, 对  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j. \tag{1}$$

设  $g \in G$  且

$$g = x_1 x_2 \cdots x_k = y_1 y_2 \cdots y_k, \quad x_i, y_i \in N_i (i = 1, 2, \dots, k).$$

则由(1)式可得

$$1 = x_1 x_2 \cdots x_k y_k^{-1} y_{k-1}^{-1} \cdots y_1^{-1} = (x_1 y_1^{-1})(x_2 y_2^{-1}) \cdots (x_k y_k^{-1}).$$

记  $n_i = x_i y_i^{-1} \in N_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则

$$1 = n_1 n_2 \cdots n_k.$$

再结合(1)式可得, 对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 都有

$$n_i = \prod_{j \neq i} n_j^{-1} \in N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}.$$

故  $n_i = 1$ , 即  $x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, k$ . 因此  $g$  的分解唯一.

**充分性:** 由  $G$  中任一元素可分解为  $N_i (1 \leq i \leq k)$  中元素的积知  $G \subseteq N_1 N_2 \cdots N_k$ . 又因为  $N_i \triangleleft G (i = 1, 2, \dots, k)$ , 所以  $N_1 N_2 \cdots N_k \subseteq G$ . 故  $G = N_1 N_2 \cdots N_k$ . 若存在  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 使得  $N_i \cap N_j \neq \{1\}$ . 取  $n_i \in N_i \cap N_j$ , 则

$$n_i = 1 \cdots \underbrace{n_i}_{\text{第 } i \text{ 个位置}} \cdots 1 = 1 \cdots \underbrace{n_i}_{\text{第 } j \text{ 个位置}} \cdots 1 \in N_1 N_2 \cdots N_k.$$

这与  $n_i$  的分解唯一矛盾! 故  $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$ . 因此

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$

□

### 命题 0.3

设  $G$  为有限群,  $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, p_1, p_2, \dots, p_k$  为互不相等的素数. 又每个 Sylow  $p_i$  子群  $P_i \triangleleft G$ . 则

$$G = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

◆

**证明** 由 Sylow 第三定理??知  $P_i$  是  $G$  中唯一的 Sylow  $p_i$  子群 ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). 由条件知  $|P_i| = p_i^{a_i}, i = 1, 2, \dots, k$ . 再由定理 0.8(2) 知

$$\left| \prod_{i=1}^k P_i \right| = |P_1||P_2| \cdots |P_k| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = |G|.$$

显然  $\prod_{i=1}^k P_i \subseteq G$ , 故  $G = \prod_{i=1}^k P_i$ .

由命题??知对  $\forall x_i \in P_i \setminus \{1\}, i = 1, 2, \dots, k$ , 都存在  $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , 使

$$\text{ord } x_i = p_i^{k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

又因为  $p_1, \dots, p_k$  是互不相同的素数, 所以

$$\text{ord } \prod_{j \neq i} x_j = \prod_{j \neq i} p_j^{k_j} \neq p_i^{k_i} = \text{ord } x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

因此  $P_i \cap \prod_{j \neq i} P_j = \{1\}, i = 1, 2, \dots, k$ . 从而  $P_i \cap P_j = \{1\} (i \neq j)$ .

综上可知

$$G = \prod_{i=1}^k P_i, \quad P_i \triangleleft G, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$P_i \cap \prod_{j \neq i} P_j = \{1\}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

故  $G = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k$ .

□