0.1 正定型与正定矩阵

定义 0.1

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型,$\boldsymbol{A}$ 是相伴矩阵.

(1) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$, 则称 f 是**正定二次** (简称**正定型**), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定矩阵** (简称**正定阵**);

(2) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}<0$, 则称 f 是**负定二次型** (简称**负定型**), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**负定矩阵** (简称**负定阵**);

(3) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\geq 0$, 则称 f 是**半正定二次型** (简称**半正定型**), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**半正定矩阵** (简称**半正定阵**);

(4) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\leq 0$, 则称 f 是**半负定二次型** (简称**半负定型**), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**半负定矩阵** (简称**半负定阵**);

(5) 若存在 $\boldsymbol{\alpha}$, 使 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$; 又存在 $\boldsymbol{\beta}$, 使 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}<0$, 则称 f 是**不定型**. ♣

注 显然

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

是正定型, 而

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2$$

是负定型.

定理 0.1

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元实二次型, 则

(1) f 是正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n;

(2) f 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n;

(3) f 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r;

(4) f 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩 r. ♡

证明 只证明 (1), 其余结论的证明类似.

若 f 的正惯性指数等于 n, 则 f 可化为下列标准型:

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2,$$

显然 f 是正定型. 反之, 若 f 是正定型, 如果 f 的正惯性指数 $p<n$, 则 f 可化为如下标准型:

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ny_n^2, \tag{1}$$

其中 $c_j\geq 0(j=p+1,\cdots,n)$. 这时令 $b_1=\cdots=b_p=0$, $b_{p+1}=\cdots=b_n=1$, 则 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零. 假设这时 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{C}$ 是非异阵, 则从 $y_i=b_i(i=1,\cdots,n)$ 可得 $x_i=a_i(i=1,\cdots,n)$ 是一组不全为零的实数. 于是

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leq 0,$$

这与 f 是正定型矛盾. □

定理 0.2

(1) n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 $\boldsymbol{I}_n$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 是负定阵当且仅当它合同于 $-\boldsymbol{I}_n$;

(3) $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix};$$

(4) $\boldsymbol{A}$ 是半负定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

证明 由定理 0.1及定理**??**可立即得到证明. □

推论 0.1

若矩阵 A 可逆, 则

(1) n 阶实对称阵 A 是正定阵当且仅当 A^{-1} 是正定阵;

(2) A 是负定阵当且仅当 A^{-1} 是负定阵;

(3) A 是半正定阵当且仅当 A^{-1} 是半正定阵;

(4) A 是半负定阵当且仅当 A^{-1} 是半负定阵.

证明 只证明 (1),(2)(3)(4) 同理可证.

先证必要性, 由定理 0.2可知存在非异阵 P, 使得 $P'AP = I_n$. 两边同时取逆可得

$$(P^{-1})'A^{-1}P^{-1} = I_n.$$

故 A^{-1} 也合同于 I_n, 因此由定理 0.2可知 A^{-1} 也正定. 充分性由必要性同理可得. □

定义 0.2 (顺序主子式)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的 n 个子式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**顺序主子式**.

定理 0.3

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

证明 先证必要性. 设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为正定阵, 则对应的实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

为正定型. 令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_ix_j,$$

则对任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

因此 f_k 是一个正定二次型, 从而它的相伴矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ (由 $\boldsymbol{A}$ 的前 k 行及前 k 列组成) 是一个正定阵. 由于 $\boldsymbol{A}_k$ 合同于 $\boldsymbol{I}_k$, 故存在 k 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_k,$$

于是

$$\det(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{B})^2\det(\boldsymbol{A}_k) = 1,$$

即有 $\det(\boldsymbol{A}_k) > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$.

再证充分性. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时,$\boldsymbol{A} = (a)$,$a > 0$, 于是 $f = ax_1^2$ 是正定型, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵. 设结论对 $n-1$ 成立, 现证明对 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 若它的 n 个顺序主子式全大于零, 则 $\boldsymbol{A}$ 必是正定阵. 记 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式所在的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零, 故 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的顺序主子式也全大于零, 由归纳假设,$\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是正定阵. 于是 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 合同于 $n-1$ 阶单位阵, 即存在 $n-1$ 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_{n-1}.$$

令 $\boldsymbol{C}$ 是下列分块矩阵:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{B} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是一个实对称阵, 其形式为

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

用第三类初等行及列变换可将上述矩阵化为对角阵. 这相当于对 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 右乘一个非异阵 $\boldsymbol{Q}$ 后, 再左乘 $\boldsymbol{Q}'$ 得到一个对角阵, 亦即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$ 等于

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, c\}.$$

由于 $|\boldsymbol{A}| > 0$, 故 $c > 0$, 这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定阵. □

命题 0.1

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任一 k 阶主子阵, 即由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行及 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列交点上元素组成的矩阵, 必是正定阵;

若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵, 则半正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一 k 阶主子阵也是半正定阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全大于零, 特别,$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素全大于零;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 中绝对值最大的元素仅在主对角线上.

注 (2) 用的是变量代换, 但是它和矩阵的合同变换（对换行与列）是等价.

证明

(1) 设 $\boldsymbol{A}_k$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 个顺序主子式所在的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}_k$ 是实对称阵且其顺序主子式都大于零, 因此 $\boldsymbol{A}_k$ 是正定阵.

经过若干次行对换以及相同的列对换, 我们不难将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行及 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列分别换成第 1,2,$\cdots$,k

行和第 $1,2,\cdots,k$ 列. 利用上面的结论即知正定阵的任一 k 阶主子阵是正定阵.. 同理可证半正定阵的任一 k 阶主子阵也是半正定阵.

(2) 证法一:由 (1) 的结论,$\boldsymbol{A}$ 的所有主子式都是正定阵. 又 $\boldsymbol{A}$ 的每个主子式都是其自身的顺序主子式, 故由定理 0.3可知 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式都大于零. 因此 (2) 成立.

证法二:设 M 是 A 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和列交点上的元素组成的主子式. 设 $i_{k+1}<\cdots<i_n$ 是 $[1,n]$ 中去掉 $i_1,\cdots,i_k$ 后剩余的指标, 对二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 作如下可逆线性变换:

$$y_1=x_{i_1},\quad \cdots,\quad y_k=x_{i_k},\quad y_j=x_{i_j}\ (k+1\le j\le n).$$

于是 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}'B\boldsymbol{y}$, 且 B 的第 k 个顺序主子式就是 M, 因为 B 正定, 故有 $M>0$.

(3) 用反证法. 假设 $a_{ij}(i\neq j)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大的元素. 根据 (1), 我们只需证明由第 i,j 行与第 i,j 列交点上元素组成的矩阵不是正定阵即可. 考虑矩阵 (由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性不妨设 $i<j$)

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

注意到 $a_{ij}=a_{ji}$ 且 $|a_{ij}|\ge a_{ii},|a_{ij}|\ge a_{jj}$, 上述矩阵的行列式值 $a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2\le 0$, 所以这个矩阵一定不是正定阵.

□