

0.1 直接求导法

例题 0.1

1. 设 $f \in C^1[0, 1]$, $f(0) = 0$, $0 \leq f'(x) \leq 1$, 证明

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx,$$

并判断取等条件.

2. 设 f 在 $[0, a]$ 可导且 $f(0) = 0$, $0 \leq f'(x) \leq \lambda$, $\lambda > 0$ 为常数, 证明

$$\left[\int_0^a f(x) dx \right]^m \geq \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x) dx, \quad (1)$$

并判断取等条件.

证明

1. 由 $0 < f'(x) (x > 0)$ 及 $f(0) = 0$ 可知 $f(x) > 0 (0 < x \leq 1)$. 设

$$g(t) = \int_0^t f^3(x) dx - \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 \quad (t \in [0, 1]),$$

则

$$g'(t) = f(t) \left(f^2(t) - 2 \int_0^t f(x) dx \right).$$

令 $h(t) = f^2(t) - 2 \int_0^t f(x) dx$, 则由 $0 < f'(x) \leq 1 (x > 0)$ 可知

$$h'(t) = 2f(t)[f'(t) - 1] \leq 0, \forall t \in [0, 1].$$

从而 $h(t) \leq h(0) = 0, \forall t \in [0, 1]$. 于是 $g'(t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$. 因而 g 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 由 $g(0) = 0$ 知 $g \leq 0$. 若

$$\int_0^1 f^3(x) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2,$$

则 $g(1) = 0$, 因而 $g(t) \equiv 0$. 所以

$$g'(t) = f(t) \left(f^2(t) - 2 \int_0^t f(x) dx \right) = 0.$$

这推出 $f \equiv 0$ 或 $f^2(t) = 2 \int_0^t f(x) dx$. 因而

$$2f(t)f'(t) = 2f(t) \quad (0 < t \leq 1).$$

这推出 $f'(t) = 1$, 即 $f(t) = t$. 故当 $f(t) \equiv 0$ 或 $f(t) = t$ 时等号成立.

2. 定义

$$g(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^m - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^x f^{2m-1}(t) dt.$$

求导得

$$\begin{aligned} g'(x) &= mf(x) \left(\int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-1}(x) \\ &= mf(x) \left[\left(\int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \right]. \end{aligned}$$

令 $h(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则

$$h'(x) = \left[\int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda} [\lambda - f'(x)] \geq 0,$$

从而 $h(x) \geq h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geq \left(\int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geq 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geq g'(0) = 0,$$

从而 g 递增且

$$g(a) \geq g(0) = 0,$$

这就是不等式(1). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t) dt$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0 \text{ 或者 } f(x) = \lambda x.$$

□

例题 0.2 设 $f, g \in C[a, b]$ 使得 f 递增且 $0 \leq g \leq 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \int_{b-\int_a^b g(t) dt}^b f(x) dx. \quad (2)$$

证明 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t) dt} f(x) dx - \int_a^y f(x) g(x) dx.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x) dx \leq a + \int_a^y 1 dx = y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y) f\left(a + \int_a^y g(t) dt\right) - f(y) g(y) \leq 0 \rightarrow h(b) \leq h(a) = 0,$$

故不等式(2)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(2).

□

命题 0.1

设 f 是 $[a, b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

◆



笔记 许多有关连续函数积分的不等式可以通过变上限积分的性质来证明.

证明 令

$$F(t) = \int_a^t x f(x) dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) dx.$$

只需证明 $F(b) \geq 0$. 由于 f 是连续函数, F 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx - \frac{a+t}{2} f(t) \\ &= \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx \\ &\geq \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} (t-a) f(t) = 0. \end{aligned}$$

这说明 f 在 $[a, b]$ 上单调递增. 因为 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geq 0$. □

例题 0.3 设 f 是 $[0, 1]$ 上正的可导函数, 且满足 $|f'| \leq 1$. 记

$$m = \min f(x), \quad M = \max f(x), \quad \beta = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx. \quad (3)$$

1. 求证: $M \leq me^\beta$.
2. 求证: 对 $n > -1$, 有

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{m^{n+1}}{n+1} (e^{(n+1)\beta} - 1). \quad (4)$$

注 第 2 问中, 令 $n = 0$, 可得 $\frac{m+1}{m} \leq e^\beta$. 式 (4) 两边开 n 次方根, 再令 $n \rightarrow +\infty$, 可得 $M \leq me^\beta$.

证明

1. 设 $m = f(x), M = f(y)$, 则有

$$\ln M - \ln m = \ln f(y) - \ln f(x) = \int_x^y \frac{f'(t)}{f(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt = \beta.$$

因而有 $M \leq me^\beta$.

2. 设

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_0^t f^n(x) dx, \quad t \in [0, 1], \\ h_2(t) &= \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_t^1 f^n(x) dx, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx, \quad \beta_2(t) = \int_t^1 \frac{1}{f(x)} dx,$$

则有 $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, h_1(0) = 0, h_2(1) = 0$, 且

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= e^{(n+1)\beta_1(t)} f^n(t) + (e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1) f^n(t) f'(t) - f^n(t) \\ &= f^n(t) (e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1) (1 + f'(t)) \geq 0, \\ h_2'(t) &= -e^{(n+1)\beta_2(t)} f^n(t) + (e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1) f^n(t) f'(t) + f^n(t) \\ &= f^n(t) (e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1) (-1 + f'(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

这说明 h_1 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即

$$\int_0^t f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t), \quad (5)$$

$$\int_t^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t). \quad (6)$$

将以上两式相加, 可得

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} + e^{(n+1)\beta_2(t)} - 2}{n+1} f^{n+1}(t). \quad (7)$$

容易证明对任意 $x > 0, y > 0$ 有

$$e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1.$$

因此从式 (7) 可得

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)(\beta_1(t)+\beta_2(t))} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) = \frac{e^{(n+1)\beta} - 1}{n+1} f^{n+1}(t),$$

这里 $t \in [0, 1]$ 是任意的. 故式 (4) 成立.

□

例题 0.4 设 $f \in C[a, b]$ 是一个正的连续函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

对于区间 $[c, d] \subset [a, b]$, 记

$$\beta = \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx, \quad \alpha = \int_c^d \frac{1}{f(x)} dx.$$

求证:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx. \quad (8)$$

证明 只需证明对任意的 $t \in [a, b]$, 有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L} f^2(t), \quad (9)$$

这是因为将式 (9) 两端除以 $f(t)$, 然后关于变量 t 在区间 $[c, d]$ 上积分, 即得式 (8). 不妨假设 $a = 0, b = 1$, 不然考虑新的函数 $g(t) = (b-a)f(a(1-t) + bt) = (b-a)f(a + (b-a)t), t \in [0, 1]$. g 满足 Lipschitz 条件 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_1|x_1 - x_2|$, $L_1 = (b-a)^2L$. 由于 f 的 Bernstein 多项式 $B_n(f)$ 保持 f 的 Lipschitz 常数, 而且在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 f , 我们一开始就可以假设 f 是可导的, 此时 $|f'| \leq L$.

以下就在 $a = 0, b = 1$ 且 $|f'| \leq L$ 的条件下证明式 (9). 设

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{2L} f^2(t) - \int_0^t f(x) dx, \quad t \in [0, 1], \\ h_2(t) &= \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{2L} f^2(t) - \int_t^1 f(x) dx, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx, \quad \beta_2(t) = \int_t^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

则有 $h_1(0) = 0, h_2(1) = 0$, 且

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= e^{2L\beta_1(t)} f(t) + \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{L} f(t) f'(t) - f(t) \\ &= \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{L} f(t) (L + f'(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= -e^{2L\beta_2(t)} f(t) + \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{L} f(t) f'(t) + f(t) \\ &= \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{L} f(t) (f'(t) - L) \leq 0. \end{aligned}$$

这说明 h_1 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即

$$\int_0^t f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{2L} f^2(t), \quad (10)$$

$$\int_t^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{2L} f^2(t). \quad (11)$$

将此两式相加, 可得

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_1(t)} + e^{2L\beta_2(t)} - 2}{2L} f^2(t). \quad (12)$$

容易证明对任意 $x > 0, y > 0$ 有

$$e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1.$$

因此从式 (12) 可得

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L(\beta_1(t)+\beta_2(t))} - 1}{2L} f^2(t) = \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L} f^2(t).$$

即式 (9) 成立.

□