0.1 多项式函数与根

定义 0.1 (多项式的重根)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$,$b \in \mathbb{K}$, 若存在正整数 k, 使 $(x-b)^k \mid f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1}$ 不能整除 $f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个 $\boldsymbol{k}$ **重根**. 若 $k=1$, 则称 b 为**单根**.

定理 0.1 (多项式没有重因式的充要条件)

数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

证明 设多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $m(m>1)$ 重因式, 则 $f(x)=p(x)^m g(x)$, 故

$$f'(x)=mp(x)^{m-1}p'(x)g(x)+p(x)^m g'(x).$$

于是 $p(x)^{m-1} \mid f'(x)$, 这表明 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公因式 $p(x)^{m-1}$. 反之, 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式, 可设 $f(x)=p(x)g(x)$, $p(x)$ 不能整除 $g(x)$. 于是

$$f'(x)=p'(x)g(x)+p(x)g'(x).$$

若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因式, 则 $p(x) \mid p'(x)g(x)$. 但 $p(x)$ 不能整除 $g(x)$ 且 $p(x)$ 不可约, 故 $p(x) \mid p'(x)$. 而 $p'(x) \neq 0$ 且 $\deg p'(x) < \deg p(x)$, 这是不可能的. 若 $f(x)$ 无重因式, 则在 $f(x)$ 的标准分解式(**??**)中, $e_i=1$ 对一切 $i=1,2,\cdots,m$ 成立, 于是 $p_i(x)$ 都不能整除 $f'(x)$. 由于 $p_i(x)$ 为不可约多项式, 故 $(p_i(x),f'(x))=1$, 由互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 可知

$$(p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),f'(x))=1,$$

即 $(f(x),f'(x))=1$. □

定理 0.2

设 $d(x)=(f(x),f'(x))$, 则 $f(x)/d(x)$ 是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同 (不计重数).

证明 设 $f(x)$ 有如(**??**)式的标准分解式, 则

$$\begin{aligned}
f'(x)=&ce_1p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_s(x)^{e_s}p_1'(x)\\
&+ce_2p_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s}p_2'(x)\\
&+\cdots\\
&+ce_sp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_s(x)^{e_s-1}p_s'(x).
\end{aligned}$$

因此 $p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1}$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式. 注意到 $f(x)$ 的因式一定具有 $p_1(x)^{k_1}p_2(x)^{k_2}\cdots p_s(x)^{k_s}$ 的形状. 不妨设 $h(x)$ 是 $f(x),f'(x)$ 的公因式. 注意到 $p_1(x)^{e_1}$ 可以整除(**??**)式中右边除第一项外的所有项, 但不能整除第一项, 因此 $p_1(x)^{e_1}$ 不能整除 $f'(x)$. 同理, $p_i(x)^{e_i}$ 不能整除 $f'(x)$. 由此我们不难看出

$$h(x) \mid p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1},$$

即 $p_1(x)^{e_1-1}p_2(x)^{e_2-1}\cdots p_s(x)^{e_s-1}=d(x)$. 显然 $f(x)/d(x)$ 没有重因式且与 $f(x)$ 含有相同的不可约因式. □

命题 0.1 (多项式有 k 重根的充要条件)

求证:a 是多项式 $f(x)$ 的 k 重根的充要条件是:

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,\quad f^{(k)}(a)\neq 0.$$

证明 若 a 是 $f(x)$ 的 k 重根, 可设 $f(x)=(x-a)^k g(x)$, $g(x)$ 不含因式 $x-a$. 通过对 $f(x)$ 求导可发现, $x-a$ 可整除

$f^{(j)}(x)\ (1 \leqslant j \leqslant k-1)$. 因此

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

而 $f^{(k)}(a) = k!g(a) \neq 0$, 故必要性得证.

反之, 若 a 是 $f(x)$ 的 m 重根, 若 $m > k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(k)}(a) = 0$, 这与已知矛盾. 同样, 若 $m < k$, 则由必要性的证明可知, 将有 $f^{(m)}(a) \neq 0$, 这也与已知矛盾, 于是只能 $m = k$. □

命题 0.2

设 $\deg f(x) = n \geqslant 1$, 若 $f'(x) \mid f(x)$, 证明:$f(x)$ 有 n 重根.

证明 证法一: 设 $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$, 现证明 a 是 $f(x)$ 的 n 重根. 假设 a 是 $f(x)$ 的 k 重根,$f(x) = (x-a)^k g(x)$,$k < n$ 且 $g(x)$ 不含因式 $x-a$, 则

$$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x) + (x-a)^k g'(x) = n(x-a)^{k-1}g(x).$$

于是 $g(x) \mid (x-a)g'(x)$, 而 $g(x)$ 与 $x-a$ 互素, 故将有 $g(x) \mid g'(x)$. 引出矛盾.

证法二: 设 $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$, 则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = b(x-a), \quad b \neq 0.$$

由定理 0.2可知,$x-a$ 是 $f(x)$ 唯一的不可约因式, 因此 $f(x) = b(x-a)^n$. □

命题 0.3

数域 $\mathbb{F}$ 上任意一个不可约多项式在复数域 $\mathbb{C}$ 中无重根.

证明 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式, 则 $\deg f(x) <\deg f'(x)$. 从而 $f(x) \nmid f'(x)$, 于是 $(f(x), f'(x)) = 1$. 故由多项式没有重因式的充要条件可知 $f(x)$ 复数域 $\mathbb{C}$ 中无重根. □

引理 0.1 (次数不为 1 得到不可约多项式没有根)

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \geqslant 2$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中没有根.

证明 用反证法, 设 $b \in \mathbb{K}$ 是 $f(x)$ 的根, 由余数定理 知 $(x-b) \mid f(x)$, 即 $f(x) = (x-b)g(x)$ 可分解为两个低次多项式之积, 这与 $f(x)$ 不可约矛盾. □

定理 0.3 (多项式根的有限性)

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中最多只有 n 个根.

笔记 由命题??可知, 若一个 n 次多项式的根超过 n 个, 则这个多项式一定恒为零.

证明 将 $f(x)$ 作标准因式分解, 则由次数不为 1 得到不可约多项式没有根知 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中根的个数等于该分解式中一次因式的个数, 它不会超过 n. □

推论 0.1 (两个多项式相等的判定准则)

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的次数不超过 n 的两个多项式, 若存在 $\mathbb{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, 使

$$f(b_i) = g(b_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

则 $f(x) = g(x)$.

证明 作 $h(x) = f(x) - g(x)$, 显然 $h(x)$ 次数不超过 n. 但它有 $n+1$ 个不同的根, 因此只可能 $h(x) = 0$, 即 $f(x) = g(x)$.
□

例题 0.1 求证:$f(x) = \sin x$ 在实数域内不能表示为 x 的多项式.

证明 注意到 $f(x) = \sin x$ 在实数域内有无穷多个根, 而任一非零多项式只能有有限个根, 因此 $f(x) = \sin x$ 在实数

域内不能表示为 x 的多项式. □

例题 0.2 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 若对 $\mathbb{F}$ 中某个非零常数 a, 有 $f(x+a)=f(x)$, 求证:$f(x)$ 必是常数多项式.

证明 假设 $f(x)$ 不是常数多项式, 则 $f(x)-f(a)$ 也不是常数多项式, 但由 $f(x+a)=f(x)$ 可知,ka $(k\in\mathbb{Z})$ 是 $f(x)-f(a)$ 的无穷多个根, 矛盾. □

例题 0.3 设 $f(x)$ 是非常数多项式且 $f(x)$ 可以整除 $f(x^m)$ $(m\in\mathbb{N}_+)$, 求证:$f(x)$ 的根只能是 0 或 1 的某个方根.

证明 将 $f(x)$ 看成复数域上的多项式, 则 $f(x^m)=f(x)g(x)$. 假设 c 是 $f(x)$ 的一个复根, 即 $f(c)=0$, 则 $f(c^m)=0$, 即 c^m 也是 $f(x)$ 的根. 由此可知 $c^m,c^{m^2},c^{m^3},\ldots$ 也都是 $f(x)$ 的根. 由于 $f(x)$ 只有有限个不同的复根, 故存在正整数 $k>t$, 使得 $c^{m^k}=c^{m^t}$. 因此若 $c\neq 0$, 取 $n=m^k-m^t\in\mathbb{N}_+$, 则有 $c^n=1$. □

定理 0.4 (余数定理)

设 $f(x)\in\mathbb{F}[x], b\in\mathbb{F}$, 则存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x)=(x-b)g(x)+f(b).$$

特别地,b 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-b)\mid f(x)$.

笔记 利用余数定理可以实现求根与判断整除性之间的相互转换.

证明 由带余除法知

$$f(x)=(x-b)g(x)+r(x),$$

其中 $\deg r(x)<1$, 因此 $r(x)$ 为常数多项式. 在上式中用 b 代替 x, 即得 $r(x)=f(b)$. □

例题 0.4 设 n 是奇数, 求证:$(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$.

证明 将多项式 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 看成是未定元 x 的多项式. 当 $x=-y$ 时,$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n=0$, 因此由余数定理可知 $x+y$ 是 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 的因式. 同理 $x+z,y+z$ 也是因式. 又这 3 个因式互素, 故 $(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$. □

例题 0.5 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式, 若当 $k=0,1,\ldots,n$ 时有 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$, 求 $f(n+1)$.

证明 解令 $g(x)=(x+1)f(x)-x$, 则 $0,1,\ldots,n$ 是 $g(x)$ 的根, 因此

$$g(x)=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

即

$$(x+1)f(x)-x=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

其中 c 是一个常数. 令 $x=-1$, 可求出 $c=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 从而

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}+x\right),$$

故

$$f(n+1)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}+n+1\right).$$

当 n 是奇数时,$f(n+1)=1$; 当 n 是偶数时,$f(n+1)=\dfrac{n}{n+2}$. □

例题 0.6 设 $(x^4+x^3+x^2+x+1)\mid(x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5))$, 这里 $f_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 都是实系数多项式, 求证:$f_i(1)=0$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$.

证明 设 ε_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 是 1 的五次虚根, 则 ε_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 都适合 x^5-1, 从而由余数定理可知

$$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

故

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4).$$

因此 $\varepsilon_i\ (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 都是 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的根. 由条件可得

$$\varepsilon_i^3 f_1(1)+\varepsilon_i^2 f_2(1)+\varepsilon_i f_3(1)+f_4(1)=0 \quad (1 \leqslant i \leqslant 4).$$

这是一个由 4 个未知数、4 个方程式组成的线性方程组 (将 $f_i(1)$ 看成是未知数), 其系数行列式是一个 Vandermonde 行列式, 显然其值不等于零, 因此 $f_i(1)=0$. □