0.1 Riemann 引理

定理 0.1 (Riemann 引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是区间且 f 在 E 上绝对可积. g 是定义在 $\mathbb{R}$ 的周期 $T>0$ 函数, 且在任何有界闭区间上 Riemann 可积, 则我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

注 f 在 E 上绝对可积包含 f 为反常积分的情况 (即反常积分绝对收敛).

考试中,Riemann 引理不能直接使用, 需要我们根据具体问题给出证明. 具体可见例题 0.1.

笔记

(1) 不妨设 $E=\mathbb{R}$ 的原因: 若 (1.1) 式在 $E=\mathbb{R}$ 时已得证明, 则当 $E\subseteq\mathbb{R}$ 时, 令 $\widetilde{f}(y)=f(y)\cdot\mathcal{X}_E, y\in\mathbb{R}$, 则由 $f(y)$ 在 E 上绝对可积, 可得 $\widetilde{f}(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也绝对可积. 从而由假设可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$$

故可以不妨设 $E=\mathbb{R}$.

(2) 不妨设 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$ 的原因: 若 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|=0$, 则 $g(x)\equiv 0$, 此时结论显然成立. 因此我们只需要考虑当 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$ 时的情况.

(3) 不妨设 $T=1$ 的原因: 若 (1) 式在 $T=1$ 时已得证明, 则当 $T\neq 1$ 时, 有

$$\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{令}y=Tx}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Tx)\mathrm{d}x=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

由于 $g(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 $T\neq 1$ 的函数, 因此 $g(Ty)$ 就是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数. 从而由假设可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(Txy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

又由(2) 式及 $T>0$ 可得

$$\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(Txy)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{令}t=Tx}\lim_{t\to+\infty}\int_E f(y)g(ty)\mathrm{d}y=\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y$$

再结合(3)式可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$. 故可以不妨设 $T=1$.

(4) 不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 的原因: 若 (1) 式在 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 时已得证明, 则当 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y\neq 0$ 时, 令 $G(y)=g(y)-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$, 则 $G(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数, 并且 $\int_0^1 G(y)\mathrm{d}y=0$. 于是由假设可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)G(xy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 G(y)\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)\left[g(xy)-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1\left[g(y)-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y-\int_E f(y)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\right)=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y-\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=0$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

再结合(2)可知, 此时原结论成立. 故可以不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y = 0$.

证明 不妨设 $E=\mathbb{R}$,$\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$,$T=1$,再不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$. 因此只需证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)\mathrm{d}y=0$. 由 g 的周期为 1 及 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^0 g(t)\mathrm{d}t &\xlongequal{\text{令}x=t+n} \int_0^n g(x-n)\mathrm{d}x \xlongequal{g\text{的周期为}1} \int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \int_0^n g(t)\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令}y=t-k} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 g(y+k)\mathrm{d}y \xlongequal{g\text{的周期为}1} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y\\
&= (n-1)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

从而对 $\forall \beta>\alpha>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^\beta g(t)\mathrm{d}t - \int_0^\alpha g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t+[\beta])\mathrm{d}t - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t+[\alpha])\mathrm{d}t\right|\\
&= \left|\int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t)\mathrm{d}t - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\beta-[\beta]} g(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\alpha-[\alpha]} g(t)\mathrm{d}t\right|\\
&= \left|\int_{\alpha-[\alpha]}^{\beta-[\beta]} g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}}|g|.
\end{aligned}$$

故

$$\left|\int_\alpha^\beta g(xy)\mathrm{d}y\right| \xlongequal{\text{令}t=xy} \frac{1}{x}\left|\int_{x\alpha}^{x\beta} g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x},\quad \forall x>0, \forall\beta>\alpha>0. \tag{4}$$

因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 所以由 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\int_{|y|>N} f(y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}. \tag{5}$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上也 Riemann 可积, 因此由可积的充要条件可知, 存在划分

$$-N=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n\left(\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{i-1},t_i]} f\right)(t_i-t_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}. \tag{6}$$

于是当 $x > \dfrac{6N\sum\limits_{j=1}^n\left|\inf\limits_{[t_{j-1},t_j]} f\right|\cdot\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{\varepsilon}$ 时, 结合(4)(5)(6)可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| &\leqslant \left|\int_{-N}^N f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{|y|>N} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| \overset{(5)}{\leqslant} \left|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| + \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g|\\
&\leqslant \sum_{j=1}^n\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(y)-\inf_{[t_{j-1},t_j]} f]g(xy)\mathrm{d}y\right| + \sum_{j=1}^n\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\inf_{[t_{j-1},t_j]} f\cdot g(xy)\mathrm{d}y\right| + \frac{\varepsilon}{3}\\
&\overset{(4)}{\leqslant} \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(y)-\inf_{[t_{j-1},t_j]} f]\mathrm{d}y\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g| + \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\inf_{[t_{j-1},t_j]} f\right|\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}\\
&\leqslant \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f)\mathrm{d}y\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g| + \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\inf_{[t_{j-1},t_j]} f\right|\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f)(t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1},t_j]} f| \mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\overset{(6)}{<} \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1},t_j]} f| \mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\overset{x\text{充分大}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)\mathrm{d}y = 0$. 结论得证.

□

定理 0.2 (L^p **版本 Riemann 引理**)

设 E 是有界勒贝格可测集, $f \in L^p(E), x \in L^q[0,T], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ 且 x 周期为 $T > 0$. 则

$$\lim_{y\to+\infty} \int_E f(t)x(yt)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_E f(t)\mathrm{d}t \int_0^T x(t)\mathrm{d}t.$$

证明 见清疏讲义.

□

定理 0.3

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集且 $f \in L^1(E)$, g 是定义在 $\mathbb{R}$ 的有界可测函数, 满足

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = A \in \mathbb{R}.$$

则我们有

$$\lim_{x\to+\infty} \int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y = A \cdot \int_E f(y)\mathrm{d}y.$$

证明 见清疏讲义.

□

例题 0.1 设 $f \in R[0,2\pi]$, 不直接使用Riemann 引理计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x.$$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 固定 n. 将 $[0,2\pi]$ 等分成 $2n$ 段, 记这个划分为

$$T : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 2\pi,$$

其中 $t_i = \frac{i\pi}{n}, i = 0, 1, \cdots, n$. 此时我们有

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sin(nx)|\mathrm{d}x = \int_{\frac{(i-1)\pi}{n}}^{\frac{i\pi}{n}} |\sin(nx)|\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \frac{2}{n}. \tag{7}$$

由 $f \in R[0,2\pi]$ 可知,f 在 $[0,2\pi]$ 上有界也内闭有界. 从而利用(7)式可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot |\sin(nx)|\mathrm{d}x \xlongequal{(7)\text{式}} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).\end{aligned} \tag{8}$$

另一方面, 我们有

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot |\sin(nx)|\mathrm{d}x \xlongequal{(7)\text{式}} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2n}\inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2n}\inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \tag{9}$$

由 $f \in R[0, 2\pi]$ 和 Riemann 可积的充要条件可知

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

于是对(8)(9)式两边同时令 $n \to \infty$, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.2 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 函数且在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积, 设

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t, n = 1, 2, \cdots.$$

若 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 是 f 在 $[-\pi, \pi]$ 唯一间断点且存在下述极限

$$A = \lim_{x\to x_0^+} f(x), B = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-A}{x-x_0}, \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-B}{x-x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2}.$$

笔记

(1) 计算 $I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ 的思路: 由于 $\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上只可能有奇点 $t = 0$, 因此 $\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上不一定绝对可积. 从而不能直接利用 Riemann 引理. 于是我们需要将 $\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 转化为在 $[0, \pi]$ 上无奇点的函数 (排除 $t = 0$ 这个奇点, 即证明 $t = 0$ 不再是奇点), 只要被积函数在积分区间上无奇点且 Riemann 可积, 就一定绝对可积. 进而满足 Riemann 引理的条件, 再利用 Riemann 引理就能求解出 I_1. 具体处理方式见下述证明.

计算 $I_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ 的思路同理, 也是要排除 $t = 0$ 这个可能的奇点, 再利用 Riemann 引理进行求解. 具体计算方式见下述证明.

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ 的思路: 注意由于 $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上有一个奇点 $t = 0$, 并且对 $\forall t \in (0, \pi]$, 都有

$$\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right| \geqslant \left|\frac{1}{2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}}\right| = \frac{\pi}{2t} > 0.$$

而 $\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t$ 是发散的, 故 $\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t$ 也发散. 因此 $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上一定不是绝对可积的, 从而不能利用 Riemann 引理计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$. 真正能计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ 的方法有多种, 下述证明利用的是强行替换/拟合法.

证明 注意到

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{\text{令}y=-t} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10}$$

记 $I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t, I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$, 则由(10)式可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2). \tag{11}$$

于是

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t, \tag{12}$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{B}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t. \tag{13}$$

由条件可知 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-A}{t}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-A}{x-x_0}$ 存在, $\lim\limits_{t\to0^-}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to0^-}\frac{f(x_0-t)-B}{t}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-B}{x-x_0}$ 存在, 因此 $\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}},\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 都没有奇点且 Riemann 可积, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

都满足 Riemann 引理的条件. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0. \tag{14}$$

下面计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$.

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right|. \tag{15}$$

而 $\lim\limits_{t\to0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{t^2}\xlongequal{\text{L'Hospital'rules}}\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{2t}=0$, 因此 $\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而由 Riemann 引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0$. 于是再结合 (15) 式可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

因此, 由 (12)(13)(14)(16)式可得

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0+\frac{A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{A}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}I_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}\frac{B}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0+\frac{B}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{B}{2}.$$

再结合 (11)式可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)=\lim_{n\to\infty}I_1+\lim_{n\to\infty}I_2=\frac{A+B}{2}.$$

□

例题 0.3 设 $f\in C^2[0,\frac{\pi}{2}], f(0)=0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\mathrm{d}x.$$

注 由于 $x=0$ 可能是 $\frac{f(x)}{\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇点, 因此我们需要将其转化为在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不含奇点的函数, 才能利用Riemann 引理进行计算.

证明 注意到

$$\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x$. 由于 $f\in C^2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 故利用 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}.$$

于是 $\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 故由Riemann 引理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x<\infty.\end{aligned}\tag{18}$$

利用(18)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=0.\tag{19}$$

下面计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x$. 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)}{x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{f'(0)}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x\right|.\tag{20}$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$, 故 $\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 于是由Riemann 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}f'(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\mathrm{d}x<\infty.\tag{21}$$

利用(21)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=0.\tag{22}$$

因此, 对(20)式两边同时令 $n\to\infty$, 利用(22)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)}{x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)}{\ln n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}f'(0)\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\xlongequal{\text{积分中值定理}}f'(0)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\pi n}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2x\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{n}}\\&=\frac{2f'(0)}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\left(x+n\pi\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{2f'(0)}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{f'(0)}{2}.\end{aligned}\tag{23}$$

利用(19)(23)式, 对(17)式两边同时令 $n\to\infty$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\frac{f'(0)}{2}.$$

□