0.1 基本的渐进估计与求极限方法

0.1.1 基本极限计算

0.1.1.1 基本想法

裂项、作差、作商的想法是解决极限问题的基本想法.

例题 0.1 对正整数 v, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}$.

笔记 直接裂项即可.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+v)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{v!}-\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+v)}\right]=\frac{1}{v!v}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $p_0=0, 0\leqslant p_j\leqslant 1, j=1,2,\cdots$. 求 $\sum_{j=1}^{\infty}\left(p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)\right)+\prod_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$ 的值.

笔记 遇到求和问题, 可以先观察是否存在裂项的结构.

解 记 $q_i=1-p_i$, 则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)+\prod_{j=1}^{\infty}(1-p_j)=\sum_{j=1}^{n}(1-q_j)\prod_{i=0}^{j-1}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j-1}q_i-\prod_{i=0}^{j}q_i\right)+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0-\prod_{i=0}^{\infty}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0.$$

□

例题 0.3 设 $|x|<1$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

注 如果把幂次 $1,2,2^2,\cdots$ 改成 $1,2,3,\cdots$, 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题.

笔记 平方差公式即可

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

□

例题 0.4 对正整数 n, 方程 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+t}=e$ 的解记为 $t=t(n)$, 证明 $t(n)$ 关于 n 递增并求极限 $(t\to+\infty)$.

解 解方程得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+t}=e\Leftrightarrow(n+t)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n.$$

设 $f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x, x>0$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{x^2+x}-1>0\Leftrightarrow\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x^2+x}\Leftrightarrow\ln(1+t)<\frac{t}{\sqrt{1+t}}, t=\frac{1}{x}\in(0,1).$$

最后的不等式由关于 ln 的常用不等式可知显然成立, 于是 $f(x)$ 单调递增, 故 $t(n)=f(n)$ 也单调递增. 再来求极限

$$\lim_{n\to\infty}t(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

□

命题 0.1

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{n!}{(n+1)^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.$$

证明

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}&=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+k}{k}\right)^{k}=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\\&=\frac{n!}{(n+1)^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}n^{n}}{(n+1)^{n}e^{n}}=\frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}e^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.\end{aligned}$$

□

例题 0.5 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}$.

解 因为

$$\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}=\sqrt{n}\frac{e^{n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{(\frac{2}{1})(\frac{3}{2})^{2}(\frac{4}{3})^{3}\cdots(\frac{n+1}{n})^{n}}=\frac{\sqrt{n}n!e^{n}}{(n+1)^{n}e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n}$ $(n\to+\infty)$ 及

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),\quad n\to+\infty$$

得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n}{(1+1/n)^{n}e^{\ln n+\gamma}}=\sqrt{2\pi}e^{-(1+\gamma)}$$

□

命题 0.2 (数列常见的转型方式)

数列常见的转型方式:

(1) $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$;

(2) $a_n=a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}$;

(3) $a_n=S_n-S_{n-1}$, 其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

从而我们可以得到

1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.
2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n\neq 0)$ 收敛的充要条件是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 收敛.

注 在关于数列的问题中, **将原数列的等式或不等式条件转化为相邻两项的差或商的等式或不等式条件**的想法是非常常用的.

笔记 这个命题给我们证明数列极限的存在性提供了一种想法: 我们可以将数列的收敛性转化为级数的收敛性, 或者将数列的收敛性转化为累乘的收敛性. 而累乘可以通过取对数的方式转化成级数的形式, 这样就可以利用级数的相关理论来证明数列的收敛性.

这种想法的**具体操作方式:**

(i) 先令数列相邻两项作差或作商, 将数列的极限写成其相邻两项的差的级数或其相邻两项的商的累乘形

式.(如果是累乘的形式, 那么可以通过取对数的方式将其转化成级数的形式.)

(ii) 若能直接证明累乘或级数收敛, 就直接证明即可. 若不能, 则再利用级数的相关理论来证明上述构造的级数的收敛性, 从而得到数列的极限的存在性. 此时, 我们一般会考虑这个级数的通项, 然后去找一个通项能够控制住所求级数通项的收敛级数 (几何级数等), 最后利用级数的比较判别法来证明级数收敛

证明

1. 必要性 (⇒) 和充分性 (⇐) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$ 直接得到.

2. 必要性 (⇒) 和充分性 (⇐) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 直接得到.

□

例题 0.6 设 $a_n = \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\dfrac{1}{2n+1}$, 证明: 数列 a_n 收敛到一个正数.

证明 由条件可得 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+3}}{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}=1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}>1.$$

从而 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$a_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]=e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}. \tag{1}$$

注意到

$$\ln\left[1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]\sim\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, n\to\infty.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]$ 存在. 于是由 (1)式可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}$$

也存在.

□

0.1.1.2 带 ln 的极限计算

通常, 带着一堆 ln 的极限算起来都非常烦人, 并不是简单的一个泰勒就秒杀的, 比如这种题. 这种题不建议用泰勒, 很多时候等价无穷小替换、拆项和加一项减一项会方便不少.

注 另外, 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然.

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)$.

注 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然, 比如下面的做法就是错的 (过程和答案都不对)

$$\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\approx(2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\approx(2x+3)\cdot1\cdot\frac{\pi}{2}-\pi x=\frac{3\pi}{2}.$$

解 根据洛必达法则, 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}=1$, 拆分一下有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left((2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x\\
=&2\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{\ln(1+x)}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}-1\right)\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi-2.
\end{aligned}
$$

□

0.1.1.3 幂指函数的极限问题

幂指函数的极限问题, 一律写成 $e^{\ln}$ 形式, 并利用等价无穷小替换和加一项减一项去解决, 方便.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看 Taylor 展开的第一项并且是严谨的, 泰勒则需要展开好几项, 计算量爆炸.

例题 0.8 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}$.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$
\begin{aligned}
x^{\sin x}&=e^{\sin x\ln x}=1+\sin x\ln x+\frac{1}{2}\sin^2 x\ln^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x\ln^3 x+O(x^4\ln^4 x)\\
(\sin x)^x&=e^{x\ln\sin x}=1+x\ln\sin x+\frac{1}{2}x^2\ln^2\sin x+\frac{1}{6}x^3\ln^3\sin x+O(x^4\ln^4\sin x)
\end{aligned}
$$

然后你不仅需要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦.

笔记 先说明写成 $e^{\ln}$ 形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可.

解 注意到

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,\ \lim_{x\to0^+}x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0.$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln\sin x}=1.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln x+x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2\ln x}\left(\frac{\sin x}{x}\sim1-\frac{1}{6}x^2,x\to0^+\right)\\
=&-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3\ln x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=-\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ex}\right)$.

解 注意到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{x\to\infty}ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=e.$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}=\lim_{x\to0^+}e^{ex\ln(1+\frac{1}{x})}=e^e.$$

于是我们有

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex\ln(1+\frac{1}{x})} - 1\right)$$
$$= e^e \lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex\ln(1+\frac{1}{x})} - 1\right) = e^e \lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= e^e \lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = e^{e+1}\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1} - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$\xlongequal{Taylor展开} e^{e+1}\lim_{x\to\infty} x^2\frac{1}{2}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)^2 = \frac{e^{e+1}}{2}\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)^2 = \frac{e^{e+1}}{8}$$

□

0.1.1.4 拟合法求极限

例题 0.10 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}}$.

笔记 核心想法是**拟合法**, 但是最后的极限估计用到了**分段估计**的想法.

证明 注意到 $\frac{\ln n}{\ln(2n)}\to 1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}-2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) = 0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$, 所以只需证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) = 0$$

注意对称性, 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) = 0$ 即可, 待定一个 m 来分段放缩. 首先容易看出数列 $\ln k\ln(n-k)$ 在 $2\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$ 时是单调递增的, 这是因为

$$f(x) = \ln x\ln(n-x),\ f'(x) = \frac{\ln(n-x)}{x} - \frac{\ln x}{n-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow (n-x)\ln(n-x) > x\ln x, \forall x\in\left(2,\frac{n}{2}\right)$$

显然成立, 所以待定 $m\in[2,\frac{n}{2}]$, 于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1\right) \leqslant \frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1$$

为了让第一个趋于零, 可以取 $m=\dfrac{n}{2\ln^2 n}$, 然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln\frac{n}{2\ln^2 n}\ln\left(n-\frac{n}{2\ln^2 n}\right)}-1=0$$

所以结论得证 (过程中严格来讲应补上取整符号, 这里方便起见省略了). □

0.1.2 Taylor 公式

定理 0.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设 f 在 $x=a$ 是 n 阶右可微的, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),x\to a^+. \tag{2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+O((x-a)^n),x\to a^+. \tag{3}$$

笔记 用 Taylor 公式计算极限, 如果展开 n 项还是不方便计算, 那么就多展开一项或几项即可.

证明 (1) 要证明(2)式等价于证明

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=0.$$

对上式左边反复使用 $n-1$ 次 $L'Hospital'rules$, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}&\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!}(x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\cdots\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}\\
&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\xlongequal{n\text{阶导数定义}}0
\end{aligned}$$

故(2)式成立.

(2) 要证明(3)式等价于证明: 存在 $C>0$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|\leqslant C,\forall x\in[a,a+\delta].$$

□

0.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限

例题 0.11 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=1$, 计算

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n.$$

笔记 由 $\dfrac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty$, 可得 $f(n)=n+o(n),n\to+\infty$. 这个等式的意思是:$f(n)=n+o(n)$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$ 都成立. 并且当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+o(n)}{n}=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(n)}{n}=1$. 其中 $o(n)$ 表示一个 (类) 数列, 只

不过这个 (类) 数列具有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(n)}{n}=0$ 的性质.

解 解法一 (一般解法):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{f(n)}}=e.$$

解法二 (渐进估计):

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=1$, 可知

$$\frac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty.$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\left[1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+o(1)}\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}(1+o(1))\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]},n\to+\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{1+o(1)}=e.$$

□

例题 0.12 计算:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

解

1.
2.

□

例题 0.13 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}\ (\alpha>0)$.

笔记 利用 Taylor 公式即可得到结果. 类似 $\ln(xe^{-x}-1)\sim\ln(xe^{-x}+o(xe^{-x}))\sim\ln(xe^{-x})$ 的等价关系可以直接凭直觉写出, 要严谨证明的话, 只需要利用 L'Hospital 法则即可.

解 由

$$(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=e^{\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{xe^{-x}}-1)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(xe^{-x})}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\\&=\begin{cases}0,&\alpha>1,\\-1,&\alpha=1,\\-\infty,&0<\alpha<1.\end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=\begin{cases}1,&\alpha>1,\\e^{-1},&\alpha=1,\\0,&0<\alpha<1.\end{cases}$$

□

例题 0.14 计算 $(1+\frac{1}{x})^x,x\to+\infty$ 的渐进估计.

解 由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]}=e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+o\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right]\\
&= e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\
&e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

故

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), x\to+\infty.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{e}{2}, \lim_{x\to+\infty} x\left[x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)-\frac{e}{2}\right]=-\frac{11e}{24}. \tag{4}$$

□

注 反复利用上述(4)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到 e 的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

例题 0.15 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}.$$

解 记 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}$, 则由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$
\begin{aligned}
\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx) &= \left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right]\cdots\left[1-\frac{(nx)^2}{2}+o(x^2)\right]\\
&= 1-\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2}x^2+o(x^2)=1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 6}x^2+o(x^2), x\to 0.
\end{aligned}
$$

故 $I=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. □

例题 0.16 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3}.$$

解 先证明 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}}=x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3), x\to 0.$

当 $n=1$ 时, 由 *Taylor* 公式结论显然成立. 假设 $n=k$ 时, 结论成立. 则当 $n=k+1$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)\\
&= x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)^3\right)\\
&= x-\frac{n+1}{6}x^3+o(x^3), x\to 0.
\end{aligned}
$$

由数学归纳法得 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}}=x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3), x\to 0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3}=\frac{n}{6}$. □

例题 0.17 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!).$$

解 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式可知

$$e^x=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta}x^{n+2}}{(n+2)!}, \theta\in(0,x).$$

从而

$$e=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

于是

$$2\pi en!=2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

而 $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\in\mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned}n\sin(2\pi en!)&=n\sin\left(2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)=n\sin\left(\frac{2\pi n!}{(n+1)!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)\\&=n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right)\sim n\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right]\to 2\pi,n\to+\infty.\end{aligned}$$

□

0.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

例题 0.18 计算

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})].$$

解 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n\in(\sqrt{n+1},\sqrt{n})$, 使得

$$\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n.$$

从而当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\theta_n\to+\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n]=0.$$

□

例题 0.19 计算

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right).$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $\theta_n\in(\frac{2024}{n},\frac{2024}{n+1})$, 使得

$$\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}=\frac{1}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right).$$

并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\mathrm{arc}\tan\frac{2024}{n}-\mathrm{arc}\tan\frac{2024}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right)=2024\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=2024.$$

□

例题 0.20

1. 对 $\alpha\neq 0$, 求 $(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha},n\to\infty$ 的等价量;
2. 求 $n\ln n-(n-1)\ln(n-1),n\to\infty$ 的等价量.

笔记 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

注 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

解 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设 $\alpha > 1$, 则有 $\alpha n^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha(n+1)^{\alpha-1}$(若 $\alpha \leqslant 1$, 则有 $\alpha(n+1)^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha n^{\alpha-1}$). 故

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\theta_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = \alpha.$$

因此 $(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \to \infty$.

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-(n-1))\cdot(1+\ln\theta_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又 $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} < \frac{\ln\theta_n}{\ln n} < \frac{\ln n}{\ln n} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是 $n\ln n - (n-1)\ln(n-1) \sim \ln n, n \to +\infty$. □

例题 0.21 计算

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}.$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall x \in U(0)$, 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x)\sin\theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \lim_{x\to0} \frac{(x-\sin x)\sin\theta}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{6}x^3\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{3}\lim_{x\to0} \frac{\sin\theta}{x}.$$

又由 $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$ 可知

$$1 = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x\to0} \frac{\sin\theta}{x} \leqslant \lim_{x\to0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x\to0} \frac{x}{x} = 1.$$

故 $\sin\theta \sim \theta \sim x, x \to 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin\theta}{x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}$. □

0.1.4 L'Hospital'rules

定理 0.2 (上下极限 L'Hospital 法则)

1. 设 f, g 在 (a,b) 内可微, 满足 (i) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$.(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$. 则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5}$$

且

$$\varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|. \tag{6}$$

2. 设 f, g 在 (a,b) 内可微, 满足 (i) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$.(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. 则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7}$$

且

$$\varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|. \tag{8}$$

笔记 此定理第一部分(5)和(7)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况. 但(6)和(8)一般是不能直接用的, 需要给证明.

证明 以第一问为例, 事实上, 固定 x, 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x<\xi<y.$$

我们断言对 $A\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 必有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A. \tag{9}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A$. 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|.$$

利用

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty}g(y_n)=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

反之设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A$, 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

于是由

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty}|g(y_n)|=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A.$$

现在就证明了(9).

于是结合 $x\to+\infty$, 我们容易得到

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\leqslant\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|$$

$$\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\geqslant\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|$$

这就完成了证明. □

例题 0.22 若 $f\in D^1[0,+\infty)$.

(1) 设

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=s$.

(2) 设

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]=s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{s}{2}$.

笔记 (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:$y'+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}y=0$, 整理可得 $\frac{y'}{y}=-\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, 再对其两边同时积分得到 $\ln y=-\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx+C_0$. 从而 $y=Ce^{-\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$, 于是 $C=ye^{\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$. 故我们要构造的函数就是 $C(x)=f(x)e^{\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$. 并且此时

$C(x)$ 满足 $C'(x)=f'(x)+\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)$.

证明

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f+f']=s$.

(2) 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}=+\infty$, 从而由 L'Hospital'rules 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot e^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}}{e^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}}\xlongequal{\text{L'Hospital'rules}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]e^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}e^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x}\left[f(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f'(x)\right]=\frac{s}{2}.\end{aligned}$$

□

例题 0.23 设可微函数 $a,b,f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)\geqslant 0,g(x)>0,g'(x)>0,\frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}=b(x),\quad\forall x\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to+\infty}a(x)=A>0,\ \lim_{x\to+\infty}b(x)=B>0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{A+1}.$$

注 如果直接使用 L'Hospital 法则, 再结合条件会得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[b(x)-a(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right].$$

但是注意这里并不能直接使用极限运算的四则运算法则得到结果, 这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不一定存在.

证明 令 $p(x)=e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}$, 则 $p'(x)=a(x)\dfrac{g'(x)}{g(x)}$, 进而

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}}{e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}}=a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}.\tag{10}$$

于是由条件可得

$$f'(x)+a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}f(x)=b(x)g'(x)\Longleftrightarrow f'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}f(x)=b(x)g'(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}.\tag{11}$$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=A>0$ 可知, 存在 $M>0$, 使得

$$a(x)\geqslant\frac{A}{2},\quad\forall x>M.$$

从而对 $\forall x>M$, 我们有

$$\begin{aligned}p(x)&=e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}\geqslant e^{\int_M^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}\\&\geqslant e^{\frac{A}{2}\int_M^x\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}=e^{\frac{A}{2}\ln\frac{g(x)}{g(M)}}=\left[\frac{g(x)}{g(M)}\right]^{\frac{A}{2}}.\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$. 因此, 利用 L'Hospital 法则, 再结合 (10) 和 (11) 式, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)p(x)}{g(x)p(x)}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)p(x)+f(x)p'(x)}{g'(x)p(x)+g(x)p'(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}f(x)}{g'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)g'(x)}{g'(x)+a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}g(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{1+a(x)}=\frac{B}{A+1}.\end{aligned}$$

□

命题 0.3 (L'Hospital 法则 (复变函数版本))

设 $f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$,$g(x)$ 为实值函数, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$, 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=z_0$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=z_0$.

证明 由实数 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{u'(x)}{g'(x)}+\mathrm{i}\frac{v'(x)}{g'(x)}\right)=z_0\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{u(x)}{g(x)}=\mathrm{Re}z_0,\ \lim_{x\to a^+}\frac{v(x)}{g(x)}=\mathrm{Im}z_0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{u(x)+\mathrm{i}v(x)}{g(x)}=z_0.$$

□

例题 0.24 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微且 $a,b\in\mathbb{R}$, 满足 $a>0,a^2-4b<0$ 或者 $a>0,b>0,a^2-4b>0$ 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f''(x)+af'(x)+bf(x))=\ell\in\mathbb{R}$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\ell}{b}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

笔记 对于二阶微分方程而言, 一般考虑降阶. 本题利用 L'Hospital 法则实现降阶.

证明 不妨设 $l=0$, 否则用 $f(x)-\dfrac{l}{b}$ 代替 $f(x)$ 即可.

①当 $a>0$、$b>0$、$a^2-4b>0$ 时, 考虑二次方程 $x^2+ax+b=0$, 则此时该方程必有两负根. 设这两个负根分别为 $\lambda_1,\lambda_2<0$, 则 $x^2+ax+b=x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$. 注意到

$$\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'=e^{\lambda_2x}\left[f''(x)+(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+\lambda_1\lambda_2f(x)\right]=e^{\lambda_2x}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right],$$

因此由条件可得

$$\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{-\lambda_2x}\right)'}=\frac{f''(x)+af'(x)+bf(x)}{-\lambda_2}\to0,\ x\to+\infty.$$

从而利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)}{e^{-\lambda_2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{-\lambda_2x}\right)'}=0.$$

又注意到

$$\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'=e^{-\lambda_1x}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right],$$

因此

$$\frac{\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'}{\left(e^{-\lambda_1x}\right)'}=\frac{f'(x)-\lambda_1f(x)}{-\lambda_1}\to0,\ x\to+\infty.$$

于是再利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_1x}f(x)}{e^{-\lambda_1x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'}{\left(e^{-\lambda_1x}\right)'}=0.$$

故由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=0$ 和极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]+\lambda_1\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

进而再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]=0$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]-a\lim_{x\to+\infty}f'(x)-b\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

②当 $a>0$、$a^2-4b<0$ 时, 考虑二次方程 $x^2+ax+b=0$, 则此时该方程必有两复根, 并且 $\lambda_1+\lambda_2=a<0$.

于是设这两个复根分别为 $\lambda_1=-u+v\mathrm{i}$、$\lambda_2=-u-v\mathrm{i}(u>0,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, 则 $x^2+ax+b=x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$. 从而由 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\mathrm{i}vx}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]}{e^{ux}}\xlongequal{\text{L' Hospital 法则 (复变函数版本)}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{ux}\right)'}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{ux}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2x}\left[f''(x)+(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+\lambda_1\lambda_2f(x)\right]}{ue^{ux}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{ue^{ux}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}vx}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{u} = 0,$$

因此

$$0 = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+uf(x)+\mathrm{i}vf(x)\right].$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+uf(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} vf(x) = 0.$$

又因为 $u>0$、$v\neq 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 进而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]=0$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$.

综上, 结论得证. □

注 第②中情况中不使用L'Hospital 法则 (复变函数版本)的方法: 考虑

$$e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f'(x)-(-u+\mathrm{i}v)f(x)\right] = e^{ux}(\cos vx+\mathrm{i}\sin vx)\left[f'(x)+uf(x)-\mathrm{i}vf(x)\right].$$

则上述复变函数实部和虚部分别为

$$\text{实部}: e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right];$$
$$\text{虚部}: e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\sin vx-vf(x)\cos vx\right].$$

于是利用 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right]}{e^{ux}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{ux}\left((f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right)\right]'}{(e^{ux})'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ux}\cos vx\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{ue^{ux}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos vx\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{u} = 0.\end{aligned}$$

同理利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(f'(x)+uf(x))\sin vx-vf(x)\cos vx\right] = 0.$$

因此当 $x\to+\infty$ 时,$e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right]$ 的实部和虚部都趋于 0, 故

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = 0.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right]=0$, 后续同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$.

例题 0.25 给定正整数 n, 设 $f(x)\in C^n[-1,1],|f(x)|\leqslant 1$, 证明: 存在与 $f(x)$ 无关的常数 C, 使得只要 $|f'(0)|\geqslant C,f^{(n)}(x)$ 在 $(-1,1)$ 中就会有至少 $n-1$ 个不同的根.

证明 证明见豌豆 (2024-2025 竞赛班下数学类讲义洛必达法则部分), 本题证明直观上定性分析比较容易, 但是要严谨地书写过程比较繁琐 (证明太麻烦没看). □

例题 0.26 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中任意阶可导且各阶导数均非负, 证明:$f(x)$ 是实解析函数.(伯恩斯坦定理) 类似的, 如果 $(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 也是实解析的.

证明 对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 则任取 $h>0$, 使得 $x+2h\in(0,1)$. 于是由 Taylor 定理可知

$$f(x+2h) = f(x)+f'(x)\cdot 2h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n+\frac{1}{n!}\int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(t)(x+2h-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

又由于 f 任意阶导数均非负, 故 f 的任意阶导数都是单调递增函数. 从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_x^{x+h} f^{(n+1)}(t)(x+h-t)^n\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{n!}\int_x^{x+h} f^{(n+1)}(2t-x)(x+h-t)^n\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{u=2t-x} \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(u)(x+2h-u)^n\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[f(x+2h)-\left(f(x)+f'(x)\cdot 2h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n\right)\right] \\
&\leqslant \frac{f(x+2h)-f(x)}{2^{n+1}} \to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

因此 f 可以在 x 的任意右邻域展开成幂级数 (因为余项趋于 0), 即

$$
f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n, \quad \forall y\in U_+(x).
$$

但是同样的方法对于 $x<0$ 时似乎难以处理, 因为单调性对不上, 所以换个方法 (可以一次解决问题, 直接对高阶导数进行估计, 由此说明余项趋于零, 也无需讨论正负)

设 $|f(x)|$ 在 $[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$ 中的最大值为 M, 对任意 $|x|<\frac{1}{4}$ 有

$$
f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\frac{1}{2^k}+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\frac{1}{2^n}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}\geqslant f(x)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\frac{1}{2^n}
$$

由此得到

$$
0\leqslant\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\leqslant 2^n\left(f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)\leqslant 2^{n+1}M, \forall x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)
$$

进而

$$
\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant 2^{n+2}M|x|^{n+1}\leqslant 2^{n+2}M\frac{1}{4^{n+1}}\to 0, n\to\infty
$$

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, 这就证明了实解析

对于第二问, 考虑函数 $f(-x)$ 即可. □

例题 0.27 设 $g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 中恒正的连续函数,$a>0$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{1+a}}=+\infty$, 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中恒正且二阶可导, 满足 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))$ 恒成立, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 由 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))>0, \forall x\in(0,+\infty)$ 可得

$$
\left(e^x f'(x)\right)'=e^x\left(f''(x)+f'(x)\right)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

从而 $e^x f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增.

(i) 若 $e^x f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点, 则

$$
e^x f'(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

(ii) 若 $e^x f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点, 则由其严格递增性可知, 存在唯一的 $a>0$, 使得 $e^a f'(a)=0$. 于是

$$
e^x f'(x)>e^a f'(a)=0, \forall x\in(a,+\infty).
$$

故一定存在 $X>0$, 使得 $f'(x)>0, \forall x\in(X,+\infty)$. 从而 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上严格递增.

由 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))>0, \forall x\in(0,+\infty)$ 还可以得到

$$
\left[f'(x)+f(x)\right]'=f''(x)+f'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

于是 $f'(x)+f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=L$ 为有限数或 $+\infty$(广义存在).

由 L'Hospital 法则可得

$$
\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[f'(x)+f(x)\right]}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=L.
$$

又由 f 恒正可知 $L\geqslant 0$. 反证, 假设 $L\neq 0$, 则

①当 $L\in(0,+\infty)$ 时, 此时, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

再对 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))$ 两边同时令 $x\to+\infty$, 可得

$$
\liminf_{x\to+\infty}f''(x)+\lim_{x\to+\infty}f'(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}g(f(x))=g\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).
$$

即 $\liminf\limits_{x\to+\infty} f''(x) \geqslant g(L)$. 于是由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $c > X+1$, 使得

$$f'(x) = f'(X+1) + f''(c)(x-X-1) \geqslant f'(X+1) + g(L)(x-X-1), \forall x > X+1.$$

令 $x \to +\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 矛盾!

②当 $L = +\infty$ 时, 此时 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f'(x) + f(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 由 $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$ 可得

$$\frac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} > \frac{g(f(x))}{(f(x))^{1+a}} = \frac{g(x)}{x^{1+a}}.$$

从而由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = +\infty$.

由 $f(x) > 0, \forall x > X$ 可得, 对 $\forall x > X$, 我们有

$$\frac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}(f'(x)+f(x))} < \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)}.$$

令 $x \to +\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty$.

又由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(f'(x)+f(x))^2}{(f(x))^{2+a}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(f'(x)+f(x))^2\right]'}{\left[(f(x))^{2+a}\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(2+a)(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty.$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)+f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$. 又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$. 故存在 $M > X+1$, 使得

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} > 1, \forall x > M.$$

两边同时积分可得

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}f(x) = \int_M^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_M^{+\infty} \mathrm{d}x = +\infty.$$

而 $\displaystyle\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 矛盾! □

例题 0.28 设 $f(x)$ 非负且二阶可导, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty$, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,\mathrm{d}t \int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

证明 由条件可知存在 $X > 0$ 使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} > 0 \quad ,\forall x > X \implies f''(x) > 0 \quad ,\forall x > X.$$

从而 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上下凸 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增于是由下凸函数的单调性可知 f 在 $(X,+\infty)$ 上的单调性只有三种情况递减、递增、先递减再递增若 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增或者先递减再递增则一定存在 $X_2 > X$ 使得 $f(x)$ 在 $(X_2,+\infty)$ 上递增现在只在 $(X_2,+\infty)$ 上进行考虑由 f 递增且非负可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq A_1$ 为正数或 $+\infty$ 假设 A_1 为某个正数则

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A_1} \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^2}.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$ 于是由 Lagrange 中值定理可知存在 $\eta > X_2+1$ 使得

$$f'(x) = f'(X_2+1) + f''(\eta)(x-X_2-1) \quad ,\forall x > X_2+1.$$

令 $x \to +\infty$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 再利用 Lagrange 中值定理同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq A_1$ 为某个正数矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 再利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[-\frac{1}{1+(f'(x))^2}\right]'}{\left[f^2(x)\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2f''(x)f'(x)}{(1+f'^2(x))^2}}{2f(x)f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2}=+\infty.$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)}\leqslant 0$ 矛盾故 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上必然单调递减则 $f'(x)<0\quad\forall x>X$ 又 $f(x)>0$ 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\triangleq A\geqslant 0$ 由 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\leqslant 0$ 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\triangleq A'<0$ 则存在 $X_1>X$ 使得

$$f'(x)<\frac{A'}{2}<0\quad\forall x>X_1.$$

于是由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi>X_1+1$ 使得

$$f(x)=f(X_1+1)+f'(\xi)(x-X_1-1)<f(X_1+1)+\frac{A'}{2}(x-X_1-1)\quad\forall x>X_1+1.$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant 0$ 矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 从而再由条件可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)}=+\infty.$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\triangleq A\geqslant 0$ 假设 $A>0$ 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 及条件可得

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2}=\frac{1}{A}\lim_{x\to+\infty}f''(x)\implies\lim_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty.$$

于是存在 $M>X_1+1$ 使得

$$f''(x)>1\quad\forall x>M.$$

从而由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi_1>M+1$ 使得

$$f'(x)=f'(M+1)+f''(\xi_1)(x-M-1)>f'(M+1)+(x-M-1)\quad\forall x>M+1.$$

令 $x\to+\infty$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 再利用 Lagrange 中值定理同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$ 矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 综上可知 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递减进而 $f'(x)\leqslant 0$ 并且 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增还有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0,\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)}=+\infty.$$

于是显然 $f(x)\geqslant 0$ 从而存在 $X'>X$ 使得

$$f'(x)\leqslant 1\quad\forall x>X'.\tag{12}$$

又因为 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 所以 f,f' 都连续从而在 $[0,X']$ 上都有界即存在 $L>0$ 使得

$$|f(x)|,|f'(x)|<L\quad\forall x\in[0,X'].\tag{13}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)}=+\infty$ 可知存在 $X''>X'$ 使得

$$f''(x)>f(x)\quad\forall x>X''.$$

从而结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 可得

$$\int_x^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t<\int_x^{+\infty}f''(t)\,\mathrm{d}t=f'(+\infty)-f'(x)=-f'(x)\quad\forall x>X''.\tag{14}$$

于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=0.\tag{15}$$

利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(f'(x))^2]'}{[(f(x))^2]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)f'(x)}{f(x)f'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)}=+\infty.$$

又因为 $f'(x)\leqslant 0$ $f(x)\geqslant 0$ 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f'(x)|}{|f(x)|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f'(x)}{f(x)}=+\infty\implies\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=0.$$

再结合 (15) 式及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=0. \tag{16}$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 并且

$$0=-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{g(x)}}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g'(x)}.$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g'(x)}=0. \tag{17}$$

于是由 (12) (13) (14) 式可得

$$\begin{aligned}
\int_0^x\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,\mathrm{d}t\int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t &\leqslant \left(\int_0^{X''}\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,\mathrm{d}t+\int_{X''}^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{2}\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \sqrt{2}\left(\int_0^{X''}\frac{\sqrt{1+L^2}}{-L}\,\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant -\sqrt{2}\left(\frac{X''\sqrt{1+L^2}}{-L}+\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L}\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t-\sqrt{2}\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L}f'(x)-\sqrt{2}f(x)\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}{f(x)}\quad,\forall x>X''.
\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$ 则由 (17) (16) 式和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 可得

$$\limsup_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,\mathrm{d}t\int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant 0.$$

故结论得证. □

0.1.5 与方程的根有关的渐近估计

0.1.5.1 可以解出 n 的类型

例题 0.29 设 $x^{2n+1}+e^x=0$ 的根记为 x_n, 计算

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} n(1+x_n).$$

解 注意到 $0^{2n+1}+e^0>0,(-1)^{2n+1}+e^{-1}<0$ 且 $x^{2n+1}+e^x$ 严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in(-1,0)$, 使得

$$x_n^{2n+1}+e^{x_n}=0\Rightarrow\frac{x_n}{\ln(-x_n)}=2n+1\to+\infty,n\to+\infty.$$

任取 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 又 $x_n\in(-1,0)$, 因此可设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[-1,0]$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=\dfrac{c}{\ln(-c)}$. 又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{\ln(-x_n)}=+\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=+\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=\frac{c}{\ln(-c)}=+\infty,$$

故 $c=-1$. 于是由子列极限命题 (a) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} n(1+x_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2n+1)(1+x_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1^+}\frac{x(1+x)}{\ln(-x)}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.30 设 $a_n \in (0,1)$ 是 $x^n + x = 1$ 的根, 证明

$$a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

证明 注意到 $0^n + 0 - 1 < 0, 1^n + 1 - 1 > 0$, 且 $x^n + x - 1$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 存在唯一的 $a_n \in (0,1)$, 使得

$$a_n^n + a_n = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = n \to +\infty, n \to +\infty. \tag{18}$$

任取 $\{a_n\}$ 的一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 又 $a_n \in (0,1)$, 因此可设 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = c \in [0,1]$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \dfrac{\ln(1-c)}{\ln c}$. 又由 (1.1) 式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = +\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = +\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c} = +\infty.$$

故 $c = 1$, 于是由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = 1. \tag{19}$$

而要证 $a_n = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), n \to +\infty$, 等价于证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n - 1 + \frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = 0$. 利用(18)(19)式可得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} \cdot a_n - \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}{\ln \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}} + 1\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(a_n - 1)\ln(1-a_n)}{\ln a_n \left(\ln \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}\right)} + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to1^-} \left[\frac{(x-1)\ln(1-x)}{\ln x \left(\ln \frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)} + 1\right] = \lim_{x\to0^-} \left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)} + 1\right]. \tag{20}$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)} = \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{\ln(-x)}{\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}}}{} \xlongequal{\text{L'Hospital's rules}} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{1+x}\ln(-x)}{\ln^2(1+x)}}$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{\ln(-x)\cdot\ln(1+x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\ln(-x)} = \lim_{x\to0^-} \frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\ln(-x)}$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} - \frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{x}{-\frac{x}{1+x}} = -1. \tag{21}$$

于是结合(20)(21)式可得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = \lim_{x\to0^-} \left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)} + 1\right] = -1 + 1 = 0.$$

故 $a_n = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), n \to +\infty$. □

例题 0.31 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 1$ 在 $[0,1]$ 的根为 x_n. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 注意到 $f_n(x) - 1$ 严格单调递增, 且 $f_n(0) - 1 = -1 < 0, f_n(1) - 1 = n - 1 > 0, \forall n \geqslant 2$. 故由零点存在定理可知, 当 $n \geqslant 2$ 时, 存在唯一的 $x_n \in (0,1)$, 使得 $f_n(x_n) = 1$. 从而

$$f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1 \Rightarrow x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n \Rightarrow x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \Rightarrow n + 1 = \frac{\ln(2x_n - 1)}{\ln x_n}. \tag{22}$$

由上式(22)可知 $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ 且 $x_n \in (0,1)$, 因此

$$0 \leqslant x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \leqslant 1 \Rightarrow x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

任取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 则由 (1.1) 式和 Heine 归结原则可知

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(2x_{n_k}-1)}{\ln x_{n_k}} = \frac{\ln(2a-1)}{\ln a} = +\infty.$$

故 $a = \frac{1}{2}$, 再由子列极限命题 (a) 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a = \frac{1}{2}$. □

0.1.5.2 迭代方法

例题 0.32 设 x_n 是 $x = \tan x$ 从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - An - B) = C,$$

求 A, B, C.

笔记 主要想法是结合 $\arctan x$ 的性质:$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$, 再利用迭代法计算渐近展开.

解 令 $f(x) = \tan x - x, x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \cdots$, 则 $f'(x) = \tan^2 x > 0, \forall x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \cdots$. 因此 $f(x)$ 在 $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 上严格单调递增, 其中 $n = 1, 2, \cdots$. 又注意到 $\lim\limits_{x\to(n\pi)^+} (\tan x - x) = -n\pi < 0$, $\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^+} (\tan x - x) = +\infty > 0$. 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$\tan x_n = x_n.$$

从而 $x_n - n\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 于是

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - n\pi) \Rightarrow x_n = \arctan x_n + n\pi. \tag{23}$$

又因为 $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \cdots$, 所以当 $n \to +\infty$ 时, 有 $x_n \to +\infty$. 再结合(23)式可得

$$x_n = \arctan x_n + n\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1), n \to +\infty. \tag{24}$$

注意到 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$, 从而 $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$. 于是利用(24)式可得

$$\begin{aligned}
x_n &= \arctan x_n + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\
&= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\left(\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\left[\frac{1}{n\pi}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\left[\frac{1}{n\pi} + O(\frac{1}{n^2})\right] = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + O(\frac{1}{n^2}), n \to +\infty.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(x_n - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) = -\frac{1}{\pi}$. □

命题 0.4 (Lampert W 的渐进估计)

设 $x_n > 0$ 满足 $x_n e^{x_n} = n, n = 1, 2, \cdots$, 证明

$$x_n = \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right), n \to \infty.$$

证明 注意到

$$1 \leqslant x_n = \ln n - \ln x_n \leqslant \ln n \Rightarrow x_n = O(\ln n), n = 3, 4, \cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}
\ln x_n &= \ln\ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln\ln n - \frac{\ln x_n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln\ln n - \frac{\ln O(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}\right) \\
&= \ln\ln n - \frac{\ln\ln n + \ln O(1)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n + \ln O(1)}{\ln n}\right) \\
&= \ln\ln n - \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right),
\end{aligned}$$

即

$$x_n = \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).$$

□