0.1 复变函数的积分

定义 0.1

设 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是一条可求长曲线,f 是定义在 γ 上的函数, 沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a)=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=\gamma(b)$, 在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k,k=1,\cdots,n$(见图 1), 作 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}). \tag{1}$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 如果当 $\lambda=\max\{s_k:1\leqslant k\leqslant n\}\to 0$ 时, 不论 ζ_k 的取法如何, 和式 (1)总有一确定的极限, 就称此极限为 f 沿 γ 的积分, 记为 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 即

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}).$$

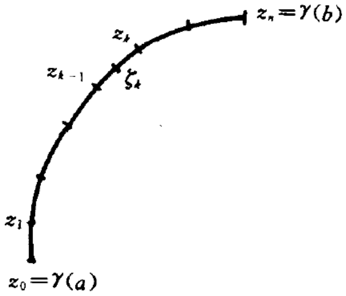

图 1

定理 0.1

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在可求长曲线 γ 上连续, 则 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

证明 记 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k,\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k,f(\zeta_k)=u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)$, 于是 f 的 Riemann 和可写成

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})&=\sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\xi_k,\eta_k\right)+\mathrm{i}v\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]\left(\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\}+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\{v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(x_k,y_k)\Delta y_k\},\end{aligned}$$

这里,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$,$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$. 当 u,v 在 γ 上连续时, 上述和式当 $\lambda\to 0$ 时趋于曲线积分

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

□

定理 0.2

如果 f,g 在可求长曲线 γ 上连续, 那么

(i) $\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z=-\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma^-$ 是指与 γ 方向相反的曲线;

(ii) $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))\mathrm{d}z=\alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\alpha,\beta$ 是两个复常数;

(iii) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma$ 是由 γ_1 和 γ_2 组成的曲线.

证明 由定理 0.1和实变函数第二型曲面积分的性质不难证明.

□

定理 0.3

如果 $z=\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线,$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 γ 上连续, 那么 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b\{[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))\}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 在所设的条件下, 由定理??有

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\int_a^b\{u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\gamma v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\int_a^b\{v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

由定理 0.1可知, 第二式乘 i 后与第一式相加, 即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b\{[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))\}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

□

例题 0.1 设可求长曲线 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的起点为 α, 终点为 β, 证明

$$\int_\gamma \mathrm{d}z=\beta-\alpha,\quad \int_\gamma z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

证明 若 γ 是光滑曲线, 由定理 0.3, 得

$$\int_\gamma \mathrm{d}z=\int_a^b\gamma'(t)\mathrm{d}t=\gamma(b)-\gamma(a)=\beta-\alpha,$$

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z=\int_a^b\gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\gamma^2(t)\Big|_a^b=\frac{1}{2}(\gamma^2(b)-\gamma^2(a))=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

如果 γ 不是光滑曲线, 可直接按积分的定义计算:

$$\int_\gamma \mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n(z_k-z_{k-1})=z_n-z_0=\beta-\alpha.$$

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n z_k(z_k-z_{k-1}),\quad \int_\gamma z\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k-z_{k-1}),$$

把两式加起来, 得

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n(z_k^2-z_{k-1}^2)=\frac{1}{2}(z_n^2-z_0^2)=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

□

命题 0.1

设 γ 是以 a 为中心、以 r 为半径的圆周, 则

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\neq1;\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1.\end{cases}$$

这里 n 是任意整数, 且上述积分沿 γ 的正方向进行.

证明 γ 的参数方程为 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 由定理 0.3, 得

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\mathrm{d}t=r^{1-n}\cdot\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}[\cos(1-n)t+\mathrm{i}\sin(1-n)t]\,\mathrm{d}t\\
&= -r^{1-n}\int_0^{2\pi}\sin(1-n)t\mathrm{d}t+\mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}\cos(1-n)t\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

所以, 上述积分当 $n \neq 1$ 时为零, 当 $n = 1$ 时为 $2\pi\mathrm{i}$, 即

$$
\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = 1. \end{cases}
$$

□

定理 0.4 (积分估值定理/长大不等式)

如果 γ 的长度为 $L, M = \sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, 那么

$$
\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML. \tag{4}
$$

注 这个不等式很简单, 但很重要, 是我们今后估计积分的主要工具, 可简称为**长大不等式**.

证明 f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$
\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}| \leqslant M\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leqslant ML,
$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} s_k \to 0$, 即得所要的不等式.

□