

0.1 基本性态分析模型

命题 0.1 (多个函数取最值或者中间值)

设 f, g, h 是定义域上的连续函数, 则 (a): $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ 是定义域上的连续函数. (b): $\text{mid}\{f, g, h\}$ 是定义域上的连续函数.

注 这里 $\text{mid}\{f, g, h\}$ 表示取中间值函数, 显然这个命题可以推广到多个函数的情况.

证明 只需要注意到

$$\begin{aligned}\max\{f, g\} &= \frac{f + g + |f - g|}{2}, \\ \min\{f, g\} &= \frac{f + g - |f - g|}{2}, \\ \text{mid}\{f, g, h\} &= f + g + h - \max\{f, g, h\} - \min\{f, g, h\}.\end{aligned}$$

□

命题 0.2

若 f 是区间 I 上处处不为零的连续函数, 则 f 在区间 I 上要么恒大于零, 要么恒小于零.

证明 用反证法, 若存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则由零点存在定理可知, 存在 $\xi \in (\min x_1, x_2, \max x_1, x_2)$, 使得 $f(\xi) = 0$ 矛盾.

□

命题 0.3

设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明: f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

证明 充分性显然, 下证必要性. 设 $f'(x) \equiv C$, 其中 C 为某一常数. $\forall x \in I$, 任取固定点 $x_0 \in I$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\})$, 使得

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0) = C(x - x_0) + f(x_0).$$

故 $f(x)$ 为线性函数.

□

命题 0.4 (连续的周期函数的基本性质)

设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且以 $T > 0$ 为周期, 则

- (1) f 在 \mathbb{R} 上有界.
- (2) f 在 \mathbb{R} 上一致连续.

证明

- (1)
- (2)


□

命题 0.5 (导数有正增长率则函数爆炸)

设 f 在 $[a, +\infty)$ 可微且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c > 0$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

 **笔记** 类似的还有趋于 $-\infty$ 或者非极限形式的结果, 读者应该准确理解含义并使得各种情况都能复现, 我们引用本结论时未必就是本结论本身, 而是其蕴含的思想.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c > 0$, 所以存在 $X > a$, 使得 $f'(x) > \frac{c}{2}, \forall x \geq X$. 于是由 Lagrange 中值定理得到, 对

$\forall x \geq X$, 存在 $\theta \in (X, x)$, 使得

$$f(x) = f(X) + f'(\theta)(x - X) \geq f(X) + \frac{c}{2}(x - X), \forall x \geq X.$$

让 $x \rightarrow +\infty$ 就得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

命题 0.6 (函数不爆破则各阶导数必然有趋于 0 的子列)

设 $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ 且 $f \in D^k[a, +\infty)$, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \neq +\infty$, 那么存在趋于正无穷的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, +\infty)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0.$$

▲

笔记

(1) 存在 $X > 0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X, +\infty)$ 要么恒正, 要么恒负的原因: 否则, 对 $\forall X > 0$, 存在 $x_1, x_2 \in (X, +\infty)$, 使得 $f^{(k)}(x_1) > 0, f^{(k)}(x_2) < 0$. 从而由导数的介值性可知, 存在 $\xi_X \in (x_1, x_2)$, 使得 $f^{(k)}(\xi_X) = 0$. 于是

令 $X = 1$, 则存在 $y_1 > 1$, 使得 $f^{(k)}(y_1) = 0$;

令 $X = \max\{2, y_1\}$, 则存在 $y_2 > \max\{2, y_1\}$, 使得 $f^{(k)}(y_2) = 0$;

.....

令 $X = \max\{n, y_{n-1}\}$, 则存在 $y_n > \max\{n, y_{n-1}\}$, 使得 $f^{(k)}(y_n) = 0$;

.....

这样得到一个数列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \text{ 且 } f^{(k)}(y_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这与假设矛盾!

(2) 存在 $m > 0$, 使得 $f^{(k)}(x) \geq m > 0, \forall x \geq X$ 的原因: 假设对 $\forall m > 0$, 有 $m > f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geq X$. 再令 $m \rightarrow 0^+$, 则由夹逼准则可得 $f^{(k)}(x) = 0, \forall x \geq X$. 这与假设矛盾! (也可以用下极限证明)

证明 注意到若不存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立那么将存在 $X > 0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X, +\infty)$ 要么恒正, 要么恒负 (见笔记 (1)). 如果找不到子列使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立, 那么不妨设存在 $X > 0$ 使得

$$f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geq X.$$

从而一定存在 $m > 0$ (见笔记 (2)), 使得

$$f^{(k)}(x) \geq m > 0, \forall x \geq X. \quad (1)$$

则由 Taylor 中值定理, 我们知道对每个 $x > X$, 运用 (1), 都有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!} (x - X)^j + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!} (x - X)^k \geq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!} (x - X)^j + \frac{m}{k!} (x - X)^k,$$

于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了必有子列使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立. □

定理 0.1 (严格单调和导数的关系)

1. 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 f 递增, 则 f 在 $[a, b]$ 严格递增的充要条件是对任何 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ 都存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(c) > 0$.
2. 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 f 递减, 则 f 在 $[a, b]$ 严格递减的充要条件是对任何 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ 都存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(c) < 0$.

♥

证明 若 f 在 $[a, b]$ 严格递增, 则对任何 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $c \in (x_1, x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

反之对任何 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ 都存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(c) > 0$. 任取 $[s, t] \subset [a, b]$, 现在有 $c \in (s, t)$ 使得 $f'(c) > 0$, 则根据 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) - f(c-h)}{h} > 0$, 再结合 f 递增, 可知存在充分小的 $h > 0$ 使得

$$f(s) \leq f(c-h) < f(c) < f(c+h) \leq f(t),$$

这就证明了 f 严格递增. 严格递减是类似的, 我们完成了证明. \square

定理 0.2 (导数极限定理)

设 $f \in C[a, b] \cap D^1(a, b]$ 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = c$ 存在, 证明 f 在 a 右可导且 $f'_+(a) = c$.

注 本结果当然也可对应写出左可导的版本以及可导的版本.

笔记 本结果告诉我们可在 f 连续的时候用 f' 的左右极限存在性来推 f 可导性.

证明 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\theta(x)) = c,$$

其中 $\theta(x) \in (a, x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} \theta(x) = a$. 这就完成了这个定理的证明. \square

例题 0.1 经典光滑函数 考虑

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & |x| > 0 \\ 0, & |x| = 0 \end{cases}$$

则 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 我们归纳证明, 首先 $f \in C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$, 假定 $f \in C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$. 注意到存在多项式 $p_{k+1} \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} p_{k+1}(x) e^{-x^2} = 0,$$

运用导数极限定理, 我们知道 $f^{(k+1)}(0) = 0$. 由数学归纳法我们知道 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 这就完成了证明. \square

定理 0.3 (连续函数中间值定理)

设 $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. 则对有介值性函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$, 必然存在 $\theta \in [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j).$$

笔记 中间值可以通过介值定理取到是非常符合直观的. 特别的当 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, 就是所谓的平均值定理

$$f(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

证明 设

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i), m = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i).$$

于是

$$m = m \sum_{j=1}^n p_j \leq \sum_{j=1}^n p_j f(x_j) \leq M \sum_{j=1}^n p_j = M.$$

因此由 f 的介值性知: 必然存在 $\theta \in [x_1, x_n]$, 使得 $f(\theta) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j)$ 成立. \square

命题 0.7

设 f 是一个定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的单调函数, 并且满足 $f(I) = I'$, 其中 $I' \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, 则 f 在区间 I 上连续, 即 $f \in C(I)$. \blacklozenge

注 实际上, 还可以得到定义在区间 I 上的单调函数只有第一类间断点, 特别地, 若 x_0 在区间 I 的内部, 则 x_0 要么是跳跃间断点, 要么就是连续点.

证明 反证, 假设 f 在某个点 $c \in I$ 处间断. 若 c 在区间 I 的内部, 则由 f 在区间 I 上单调递增, 利用单调有界定理可知 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

又因为 $f(x)$ 在 $x = c$ 处间断, 所以上式至少有一个严格不等号成立, 故不妨设

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) < \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

对 $\forall x > c$, 固定 x , 由 f 在 I 上递增可知

$$f(x) > f(y), \quad \forall y \in (c, x).$$

令 $y \rightarrow c^+$, 得 $f(x) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$. 对 $\forall x < c$, 由 f 在 I 上递增可知 $f(x) \leq f(c)$. 因此 $f(I) \subset (-\infty, f(c)] \cup [\lim_{x \rightarrow c^+} f(x), +\infty)$, 故 $(f(c), \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)) \not\subset f(I)$, 但 $(f(c), \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)) \subset I'$. 这与 $f(I) = I'$ 矛盾!

若 c 是区间 I 的端点, 则同理可得矛盾! \square


命题 0.8 (连续单射等价严格单调)

设 f 是区间 I 上的连续函数, 证明 f 在 I 上严格单调的充要条件是 f 是单射. \blacklozenge

证明 必要性是显然的, 只证充分性. 如若不然, 不妨考虑 $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$, $x_1 < x_2 < x_3$ (其他情况要么类似, 要么平凡), 于是由连续函数介值定理知存在 $\theta \in [x_2, x_3]$ 使得 $f(\theta) = f(x_1)$, 这就和 f 在 I 上单射矛盾! 故 f 严格单调. \square

例题 0.2 证明不存在 \mathbb{R} 上的连续函数 f 满足方程

$$f(f(x)) = e^{-x}.$$


 **笔记** 注意积累二次复合的常用处理手法, 即运用命题 0.8.

证明 假设存在满足条件的函数 f . 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$e^{-x} = f(f(x)) = f(f(y)) = e^{-y}.$$

由 e^{-x} 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 0.8 知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = e^{-x}$ 递增, 这和 e^{-x} 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在. \square

例题 0.3 求 $k \in \mathbb{R}$ 的范围, 使得存在 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f(f(x)) = kx^9$.

 **笔记** 取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$ 的原因: 当 $k \geq 0$ 时, 我们可待定 $f(x) = cx^3$, 需要 $c^4x^9 = kx^9$, 从而可取 $c = \sqrt[4]{k}$.

证明 当 $k < 0$ 时, 假设存在满足条件的函数 f . 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$kx^9 = f(f(x)) = f(f(y)) = ky^9.$$

由 kx^9 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 0.8 知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = kx^9$ 递增, 这和 kx^9 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在.

当 $k \geq 0$ 时, 取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$, 此时 $f(x)$ 满足条件. \square

命题 0.9 ($[a, b]$ 到 $[a, b]$ 的连续函数必有不动点)

设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 是连续函数, 证明 f 在 $[a, b]$ 上有不动点.

笔记 注意 $[a, b] \rightarrow [a, b]$ 表示 f 是从 $[a, b] \rightarrow [a, b]$ 的映射, 右端的 $[a, b]$ 是像集而不是值域, f 可能取不到整个 $[a, b]$.

证明 考虑 $g(x) = f(x) - x \in C[a, b]$, 注意到 $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, 由连续函数的零点定理知道 f 在 $[a, b]$ 上有不动点. \square

命题 0.10 (没有极值点则严格单调)

设 $f \in C[a, b]$ 且 f 在 (a, b) 没有极值点, 证明 f 在 $[a, b]$ 严格单调.

证明 因为闭区间上连续函数必然取得最值, 且在 (a, b) 的最值点必然是极值点, 因此由假设我们不妨设 f 在 $[a, b]$ 端点取得最值. 不失一般性假设

$$f(a) = \min_{x \in [a, b]} f(x), f(b) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

此时若在 $[a, b]$ 上 f 严格单调, 则只能是严格单调递增. 若在 $[a, b]$ 上 f 不严格递增, 则存在 $x_2 > x_1$, 使得 $f(x_2) \leq f(x_1)$.

若 $x_1 > a$, 在 $[a, x_2]$ 上我们注意到 $f(x_1) \geq \max\{f(a), f(x_2)\}$, 又由 f 的连续性可知, f 一定能在 $[a, x_2]$ 上取到最大值. 于是 f 只能在 (a, x_2) 达到最大值, 从而 f 在 (a, x_2) 存在极大值点, 这和 f 在 (a, b) 没有极值点矛盾!

若 $x_1 = a, x_2 < b$, 则注意到 $f(x_2) \leq \min\{f(a), f(b)\}$, 同样的 f 在 (a, b) 取得极小值而矛盾.

若 $x_1 = a, x_2 = b$, 则 f 恒为常数而矛盾! 这就完成了证明. \square

命题 0.11 (函数值相同的点导数值相同就一定单调)

设 $f \in D(a, b)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in (a, b)$, 必有 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 证明 f 在 (a, b) 是单调函数.

笔记 令 $\sigma = \max\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ 的原因: 设 $E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$. 实际上, 这里取 $\sigma = \sup\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ 也可以, 效果类似.

(1) **σ 的存在性证明:** 由 f 的介值性知, 存在 $\eta \in (c, \xi)$, 使得

$$f(\xi) \leq f(\eta) = f(d) \leq f(c).$$

从而 $\eta \in E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$, 故 E 非空. 又由 E 的定义, 显然 E 有界, 故由确界存在定理可知, E 存在上确界. 于是令 $\sigma = \sup\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\} \leq \xi$. 下证 $\sigma = \sup\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\} = \max\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$, 即 $\sigma \in E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$.

由上确界的性质可知, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_n \in E$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sigma$. 从而 $f(x_n) = f(d)$. 于是由 f 的连续性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(\sigma) = f(d).$$

故 $\sigma \in E$. 这样就完成了证明.

(2) **取 $\sigma = \max\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ 的原因:** 当 $f(c) \geq f(d)$ 时, $E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ 中的其他点 $a \in E$, 可能有 $f'(a) > 0$, 也可能有 $f'(a) \leq 0$. 而 σ 一定只满足 $f'(\sigma) \leq 0$.

证明 若 f 不在 (a, b) 是单调, 则不妨设 $a < c < d < b$, 使得 $f'(c) < 0 < f'(d)$.

由 $f'(d) = \lim_{x \rightarrow d^-} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} > 0$ 知在 d 的左邻域内, $f(x) < f(d)$. 由 $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ 知 f 在 c 的右邻域内有 $f(x) < f(c)$, 于是 $f(c), f(d)$ 不是 f 在 $[c, d]$ 上的最小值, 又由 $f \in C[c, d]$ 可知 f 在 $[c, d]$ 上一定存在最小值. 故可以设 f 在 $[c, d]$ 最小值点为 $\xi \in (c, d)$.

当 $f(c) \geq f(d)$ 时, 令

$$\sigma = \max\{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}.$$

注意到 $\sigma < \xi$. 显然 $f'(\sigma) \leq 0$, 因为如果 $f'(\sigma) > 0$ 会导致在 σ 右邻域内有大于 $f(d)$ 的点, 由介值定理可以找到


$\xi > \sigma' > \sigma$, 使得 $f(\sigma') = f(d)$ 而和 σ 是最大值矛盾! 而函数值相同的点导数值也相同, 因此 $f'(\sigma) = f'(d) > 0$, 这与 $f'(\sigma) \leq 0$ 矛盾!

当 $f(c) \leq f(d)$ 时类似可得矛盾! 我们完成了证明. \square

命题 0.12 (一个经典初等不等式)

设 $a, b \geq 0$, 证明:

$$\begin{cases} a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), & p \geq 1, p \leq 0 \\ a^p + b^p \geq (a+b)^p \geq 2^{p-1}(a^p + b^p), & 0 < p < 1 \end{cases} \quad (2)$$

 **笔记** 不等式左右是奇次对称的, 我们可以设 $t = \frac{a}{b} \in [0, 1]$, 于是(2)两边同时除以 b^p 得

$$\begin{cases} t^p + 1 \leq (t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1), & p \geq 1, p \leq 0 \\ t^p + 1 \geq (t+1)^p \geq 2^{p-1}(t^p + 1), & 0 < p < 1 \end{cases}.$$

证明 考虑 $f(t) \triangleq \frac{(t+1)^p}{1+t^p}, t \in [0, 1]$, 我们有

$$f'(t) = p(t+1)^{p-1} \frac{1-t^{p-1}}{(1+t^p)^2} \begin{cases} \geq 0, & p \geq 1, p \leq 0 \\ < 0, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} 2^{p-1} = f(1) \geq f(t) \geq f(0) = 1, & p \geq 1, p \leq 0 \\ 2^{p-1} = f(1) \leq f(t) \leq f(0) = 1, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

这就完成了证明. \square