

0.1 有理标准型

命题 0.1

矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的法式为

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为非常数首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), 则 A 的不变因子就是

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda).$$



证明 由推论??可知, 矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的法式为

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为非常数首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), 则根据不变因子的定义可知, A 的不变因子就是

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda).$$



引理 0.1

设 r 阶矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

则

(1) F 的行列式因子为

$$1, \dots, 1, f(\lambda), \quad (1)$$

其中共有 $r-1$ 个 1, $f(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r$, F 的不变因子也由(1)式给出, F 的不变因子分别为:

$$1, \dots, 1, f(\lambda).$$

进而, $\lambda I - F$ 相抵于 $\text{diag}\{1, \dots, 1, f(\lambda)\}$.

(2) F 的极小多项式等于 $f(\lambda)$.



证明 (1) F 的 r 阶行列式因子就是它的特征多项式, 由命题??得

$$|\lambda I - F| = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r.$$

对任一 $k < r$, $\lambda I - F$ 总有一个 k 阶子式其值等于 $(-1)^k$, 故 $D_k(\lambda) = 1$. 又由推论??可知, $\lambda I - F$ 的法式为 $\text{diag}\{1, \dots, 1, f(\lambda)\}$. 故 $\lambda I - F$ 相抵于 $\text{diag}\{1, \dots, 1, f(\lambda)\}$.

(2) 因为 F 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 所以 F 适合多项式 $f(\lambda)$. 设 e_i ($i = 1, 2, \dots, r$) 是 r 维标准单位行向量, 则不难算出:

$$e_1 F = e_2, \quad e_1 F^2 = e_2 F = e_3, \quad \cdots, \quad e_1 F^{r-1} = e_{r-1} F = e_r.$$

显然, $e_1, e_1 F, \dots, e_1 F^{r-1}$ 是一组线性无关的向量, 从而任取 $g(x) \in P_{r-1}[x]$ 且 $g(x)$ 非零, 则存在一组不全为零的数 a_1, a_2, \dots, a_r , 使得

$$g(x) = a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r.$$

于是将 F 代入上式, 再在等式两边同乘 e_1 得到

$$e_1 g(F) = a_1 e_1 F^{r-1} + a_2 e_1 F^{r-2} + \cdots + a_r e_1 F.$$

又因为 $e_1, e_1 F, \cdots, e_1 F^{r-1}$ 是一组线性无关的向量, 且 a_1, a_2, \cdots, a_r 不全为零, 所以 $e_1 g(F) \neq 0$. 即 $g(F)$ 的第一行不为零, 故 $g(F) \neq O$. 因此 F 不可能适合一个次数不超过 $r-1$ 的非零多项式, 从而 F 的极小多项式就是 $f(\lambda)$. \square

引理 0.2

设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 相抵于对角 λ -矩阵

$$\text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}, \quad (2)$$

λ -矩阵 $B(\lambda)$ 相抵于对角 λ -矩阵

$$\text{diag}\{d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_n(\lambda)\}, \quad (3)$$

且 $d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_n(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的一个置换 (即若不计次序, 这两组多项式完全相同), 则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$. ♡

证明 利用初等行对换及初等列对换即可将 (2) 式变成 (3) 式, 因此 (2) 式所示的矩阵与 (3) 式所示的矩阵相抵, 从而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵. \square

定理 0.1

设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶方阵, A 的不变因子组为

$$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda),$$

其中 $\deg d_i(\lambda) = m_i \geq 1$, 则 A 相似于下列分块对角阵:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 F_i 的阶等于 m_i , 且 F_i 是形如引理 0.1 中的矩阵, F_i 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 的系数 (除首项系数之外) 的负值组成. 此即, 设 $d_i = \lambda^{m_i} + a_{1i}\lambda^{m_i-1} + \cdots + a_{m_i,i}$, 则

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{m_i,i} & -a_{m_i-1,i} & -a_{m_i-2,i} & \cdots & -a_{1i} \end{pmatrix}.$$

(4) 式称为矩阵 A 的**有理标准型**或**Frobenius 标准型**, 每个 F_i 称为**Frobenius 块**. ♡

证明 注意到 $\lambda I - A$ 的第 n 个行列式因子就是 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 再由不变因子的定义可知:

$$|\lambda I - A| = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda).$$

而 $|\lambda I - A|$ 是一个 n 次多项式, 因此 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. 一方面, $\lambda I - A$ 的法式为

$$\text{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)\},$$

其中有 $n-k$ 个 1. 另一方面, 对 $\lambda I - F$ 的每个分块都施以 λ -矩阵的初等变换, 由引理 0.1 可知, $\lambda I - F$ 相抵于如下对角阵:

$$\text{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda); 1, \cdots, 1, d_2(\lambda); \cdots; 1, \cdots, 1, d_k(\lambda)\}, \quad (5)$$

其中每个 $d_i(\lambda)$ 前各有 $m_i - 1$ 个 1, 从而共有 $\sum_{i=1}^k (m_i - 1) = n - k$ 个 1. 因此 (5) 式所示的矩阵与 $\lambda I - A$ 的法式只相差主对角线上元素的置换, 由引理 0.2 可得 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - F$ 相抵, 从而 A 与 F 相似. \square

例题 0.1 设 6 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1, 1, 1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

则 A 的有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 0.2

设数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda),$$

其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, \dots, k-1$), 则 A 的极小多项式 $m(\lambda) = d_k(\lambda)$.



证明 设 A 的有理标准型为

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}.$$

因为相似矩阵有相同的极小多项式, 故只需证明 F 的极小多项式是 $d_k(\lambda)$ 即可. 但 F 是分块对角阵, 由极小多项式的性质 (6) 知 F 的极小多项式是诸 F_i 极小多项式的最小公倍式. 又由引理 0.1 知 F_i 的极小多项式为 $d_i(\lambda)$. 因为 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$, 故诸 $d_i(\lambda)$ 的最小公倍式等于 $d_k(\lambda)$. \square

例题 0.2 下面两个 4 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的不变因子分别为 $A: 1, \lambda, \lambda, \lambda^2$ 和 $B: 1, 1, \lambda^2, \lambda^2$. 它们的特征多项式和极小多项式分别相等, 但它们不相似.