0.1 λ–矩阵/多项式矩阵

定义 0.1 (λ-矩阵)

一般地，下列形式的矩阵:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是以 λ 为未定元的数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式，称为**多项式矩阵**，或 **λ-矩阵**. λ-矩阵的加法、数乘及乘法与数域上的矩阵运算一样，只需在运算过程中将数的运算代之于多项式即可.

定义 0.2 (λ-矩阵的初等变换)

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 施行的下列 3 种变换称为 λ-矩阵的初等行变换:

(1) 将 $A(\lambda)$ 的两行对换;

(2) 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 中的非零常数 c;

(3) 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去.

同理我们可以定义 3 种 λ-矩阵的初等列变换.

定义 0.3 (λ-矩阵的相抵)

若 $A(\lambda), B(\lambda)$ 是同阶 λ-矩阵且 $A(\lambda)$ 经过 λ-矩阵的初等变换后可变为 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ **相抵**.

与数字矩阵一样，λ-矩阵的相抵关系也是一种等价关系，即

(1) $A(\lambda)$ 与自身相抵;

(2) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵，则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 相抵;

(3) 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵，$B(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵，则 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 相抵.

笔记 λ-矩阵的相抵关系也是一种等价关系的证明与数域上相同，类似易证.

定义 0.4 (初等 λ-矩阵)

下列 3 种矩阵称为初等 λ-矩阵:

(1) 将 n 阶单位阵的第 i 行与第 j 行对换，记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$;

(2) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以非零常数 c，记为 $\boldsymbol{P}_i(c)$;

(3) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去得到的矩阵，记为 $\boldsymbol{T}_{ij}(f(\lambda))$.

注 第一类与第二类初等 λ-矩阵与数域上的第一类与第二类初等矩阵没有什么区别. 第三类初等 λ-矩阵的形状如下:

$$\boldsymbol{T}_{ij}(f(\lambda))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & f(\lambda) & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 0.1

对 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 施行第 k $(k=1,2,3)$ 类初等行 (列) 变换等于用第 k 类初等 λ-矩阵左 (右) 乘以 $\boldsymbol{A}(\lambda)$.

注 下列 λ-矩阵的变换不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为前面一个矩阵的第一行乘以 λ 不是 λ-矩阵的初等变换. 同理下面的变换需第一行乘以 λ^{-1}, 因此也不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 证明是显然的.

□

定义 0.5 (可逆 λ-矩阵)

若 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵, 且

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda) = \boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{I}_n,$$

则称 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵. 这时称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为**可逆 λ-矩阵**, 在不引起混淆的情形下, 有时简称为**可逆阵**.

笔记 容易证明, **有限个可逆 λ-矩阵之积仍是可逆 λ-矩阵**, 而**初等 λ-矩阵都是可逆 λ-矩阵**, 因此**有限个初等 λ-矩阵之积也是可逆的**. λ-矩阵.

注 注意不要将数字矩阵中的一些结论随意搬到 λ-矩阵上. 比如下面的 λ-矩阵的行列式不为零, 但它不是可逆 λ-矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不是 λ-矩阵之故.

引理 0.1

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 可以化为如下形状:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \boldsymbol{M}_m\lambda^m + \boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \boldsymbol{M}_0,$$

其中 $\boldsymbol{M}_i$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶数字矩阵. 因此, 一个多项式矩阵可以化为系数为矩阵的多项式, 反之亦然.

证明 证明是显然的.

□

引理 0.2

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 是两个 n 阶 λ-矩阵且都不等于零. 又设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶数字矩阵, 则必存在 λ-矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 及 $\boldsymbol{S}(\lambda)$ 和数字矩阵 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{T}$, 使下式成立:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = (\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}(\lambda) + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{T}. \tag{2}$$

证明 将 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 写为

$$\boldsymbol{M}(\lambda)=\boldsymbol{M}_m\lambda^m+\boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{M}_0,$$

其中 $\boldsymbol{M}_m\neq\boldsymbol{O}$. 可对 m 用归纳法, 若 $m=0$, 则已适合要求 (取 $\boldsymbol{Q}(\lambda)=\boldsymbol{O}$). 现设对小于 m 次的矩阵多项式,(1)式成立. 令

$$\boldsymbol{Q}_1(\lambda)=\boldsymbol{M}_m\lambda^{m-1},$$

则

$$\boldsymbol{M}(\lambda)-(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_1(\lambda)=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_m+\boldsymbol{M}_{m-1})\lambda^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{M}_0. \tag{3}$$

上式是一个次数小于 m 的矩阵多项式, 由归纳假设得

$$\boldsymbol{M}(\lambda)-(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_1(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_2(\lambda)+\boldsymbol{R}.$$

于是

$$\boldsymbol{M}(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})[\boldsymbol{Q}_1(\lambda)+\boldsymbol{Q}_2(\lambda)]+\boldsymbol{R}.$$

令 $\boldsymbol{Q}(\lambda)=\boldsymbol{Q}_1(\lambda)+\boldsymbol{Q}_2(\lambda)$ 即得(1)式. 同理可证 (2)式.

□

例题 0.1 设 $A_0,A_1,\ldots,A_m$ 是已知的 n 阶复方阵, 记 λ 矩阵 $F(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m$, 其行列式 $f(\lambda)=\det F(\lambda)$ 是一元多项式, 证明: 若方阵 A 使得 $F(A)=0$, 则必有 $f(A)=0$.

注 本题不可以这样:$f(\lambda)=|F(\lambda)|$, 代入 $\lambda=A$ 得到 $f(A)=|F(A)|=|0|=0$. 因为

$$\det F(A)=\det\left(F(\lambda)|_{\lambda=A}\right)\neq\left(\det F(\lambda)\right)|_{\lambda=A}=f(A).$$

证明 根据引理 0.2, 存在 λ 矩阵 $P(\lambda)$ 和数字矩阵 Q 使得 $F(\lambda)=P(\lambda)(\lambda I-A)+Q$, 由 Cayley-Hamilton 定理, 将 λ 以矩阵 A 代入就有 $Q=0$, 再取行列式得到 $f(\lambda)=|F(\lambda)|=|P(\lambda)||\lambda I-A|$, 含有因此 $|\lambda I-A|$ 也即特征多项式, 故 $f(A)=0$.

□

定理 0.2

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 λ-矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 相抵. ♡

证明 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则存在 $\mathbb{K}$ 上的非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}.$$

把 $\boldsymbol{P}$ 看成是常数 λ-矩阵, 上式表明 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 相抵.

反过来, 若 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 相抵, 即存在 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 及 $\boldsymbol{N}(\lambda)$, 使

$$\boldsymbol{M}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{N}(\lambda)=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 都是有限个初等矩阵之积, 因而都是可逆阵. 因此可将 (4)式写为

$$\boldsymbol{M}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{N}(\lambda)^{-1}, \tag{5}$$

由引理 0.2可设

$$\boldsymbol{M}(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{R},$$

代入 (5)式经整理得

$$\boldsymbol{R}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})[\boldsymbol{N}(\lambda)^{-1}-\boldsymbol{Q}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})].$$

上式左边是次数小于等于 1 的矩阵多项式, 因此上式右边中括号内的矩阵多项式的次数必须小于等于零, 也即必是一个常数矩阵, 设为 $\boldsymbol{P}$. 于是

$$\boldsymbol{R}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}. \tag{6}$$

(6)式又可整理为

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\lambda=\boldsymbol{RA}-\boldsymbol{BP}.$$

再次比较次数得 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P},\boldsymbol{RA}=\boldsymbol{BP}$. 现只需证明 $\boldsymbol{P}$ 是一个非异阵即可. 由假设

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}(\lambda)^{-1}-\boldsymbol{Q}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

将上式两边右乘 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 并移项得

$$\boldsymbol{PN}(\lambda)+\boldsymbol{Q}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{N}(\lambda)=\boldsymbol{I}.$$

但由(4)式可得

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{N}(\lambda)=\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}),$$

因此

$$\boldsymbol{PN}(\lambda)+\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}. \tag{7}$$

再由引理 0.2可设

$$\boldsymbol{N}(\lambda)=\boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{T},$$

代入(7)式并整理得

$$[\boldsymbol{PS}(\lambda)+\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}](\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{PT}.$$

上式右边是次数小于等于零的矩阵多项式, 因此上式左边中括号内的矩阵多项式必须为零, 从而 $\boldsymbol{PT}=\boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵.

□