0.1 更弱定义的导数

定理 0.1 (最弱递增条件)

1. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0,$$
则 f 在 $[a,b]$ 递增.
2. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \tag{1}$$
则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.
3. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有
$$\underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} > 0.$$
证明 f 在 (a,b) 严格递增.
4. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有
$$\underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \geqslant 0.$$
证明 f 在 (a,b) 递增.

注 只需证明 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 的原因: 假设 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 已经成立. 任取 $c,d \in (a,b)$ 或 $[a,b]$, 则我们考虑 (c,d) 或 $[c,d]$ 这个区间, 并且已知 f 在 (c,d) 或 $[c,d]$ 上连续且满足上述条件, 于是由假设可知 $f(d) \geq f(c)$ 或 $f(d) > f(c)$. 故我们只需证明 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 即可.

证明

1. 只需证明 $f(b) \geq f(a)$. 由 f 的连续性和极限保号性, 我们只需证明对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $f(b) \geq f(a+\varepsilon)$. 考虑
$$F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon).$$
则 $F(b) = F(a+\varepsilon) = 0$, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \dfrac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$, $\forall x_0 \in [a+\varepsilon, b)$. 于是设 F 在 $[a+\varepsilon, b]$ 最大值点为 c,
(i) 当 $c \in [a+\varepsilon, b)$ 时, 则
$$0 \geq \overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geq -\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$$
故 $f(b) \geq f(a+\varepsilon)$.
(ii) 当 $c = b$ 时, 则对 $\forall x \in [a+\varepsilon, b]$, 都有 $0 = F(b) = F(c) \geqslant F(x)$. 从而
$$\begin{aligned}
&F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon) \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} \leqslant \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \\
&\Rightarrow \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geqslant \overline{\lim_{x\to(a+\varepsilon)^+}} \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} > 0 \\
&\Rightarrow f(b) > f(a+\varepsilon)
\end{aligned}$$
证毕.
2. 若 f 在 $[a,b]$ 不严格增, 则存在 $[c,d] \subset [a,b]$ 使得 $f(d) = f(c)$, 注意到由第 1 问可知 f 在 $[c,d]$ 递增, 从而只能为常数, 于是 $f(x) \equiv f(c)$. 不妨设 $[c,d] \subset (a,b)$, 否则任取 $[a,b]$ 一个子区间即可. 因此
$$\overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0.$$

这显然和(1)矛盾! 故我们证明了 f 在 $[a,b]$ 严格递增.

3. 对 $[c,d]\subset(a,b)$, 我们断言存在 $x_1\in(c,d)$ 使得

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geq\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}\tag{2}$$

现在我们用 $g(x)=\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)-f(x)$ 代替 f. 于是考虑 $g\in C^1[c,d]$, $g(d)=g(c)=0$, 此时要证明(2), 就只需证明存在 $x_1\in(c,d)$ 使得

$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{g(x_1+h)-g(x_1-h)}{2h}\geq0\tag{3}$$

若 $g\equiv0$, 已经得到了不等式(3).

若 $t\in(a,b)$ 是 g 的最大值点使得 $g(t)>0$. 取 $k\in(0,g(t))$, 则构造非空有界集 $U=\{x\in[c,t]:g(x)>k\}$. 记 $x_1=\inf U$, 则存在 $t_n\in U$, $n\in\mathbb{N}$ 使得 $t_n\geq x_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=x_1$. 注意 $x_1\neq c$, 若 $g(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $g>k$, 这和 x_1 是 inf 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $g(x_1)=k$. 注意到 $\dfrac{g(x_1+t_n-x_1)-g(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geq\dfrac{k-k}{2(t_n-k_1)}=0$ 这就给出了(3).

若 f 有负的最小值 $g(t)<0$. 取 $k\in(g(c),0)$, 构造非空有界集 $V=\{x\in[t,d]:g(x)<k\}$. 并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $g(x_1)=k$ 且 $x_1\neq d$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是由 $\dfrac{g(x_1+x_1-s_n)-g(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geq\dfrac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0$ 知(3)成立.

现在由不等式(2)和题目条件就证明了 $f(d)>f(c)$, 从而 f 严格递增.

4. 注意到 $f(x)+\varepsilon x$, $\varepsilon>0$ 满足第 3 问要求, 因此 $f(y)+\varepsilon y>f(x)+\varepsilon x$, $\forall b>y>x>a$, $\varepsilon>0$. 让 $\varepsilon\to0^+$, 我们有 $f(y)\geq f(x)$, 这就证明了 f 在 (a,b) 递增.

$\square$