0.1 基本性态分析模型

命题 0.1 (多个函数取最值或者中间值)

设 f, g, h 是定义域上的连续函数, 则
(a):$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ 是定义域上的连续函数.
(b):$\text{mid}\{f, g, h\}$ 是定义域上的连续函数.

注 这里 $\text{mid}\{f, g, h\}$ 表示取中间值函数, 显然这个命题可以推广到多个函数的情况.

证明 只需要注意到

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2},$$
$$\text{mid}\{f, g, h\} = f + g + h - \max\{f, g, h\} - \min\{f, g, h\}.$$

□

命题 0.2

若 f 是区间 I 上处处不为零的连续函数, 则 f 在区间 I 上要么恒大于零, 要么恒小于零.

证明 用反证法,若存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则由零点存在定理可知, 存在 $\xi \in (\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\})$, 使得 $f(\xi) = 0$ 矛盾.

□

命题 0.3

设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明:f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

证明 充分性显然, 下证必要性. 设 $f'(x) \equiv C$, 其中 C 为某一常数. $\forall x \in I$, 任取固定点 $x_0 \in I$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\})$, 使得

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0) = C(x - x_0) + f(x_0).$$

故 $f(x)$ 为线性函数.

□

定理 0.1 (闭区间上单调函数必可积)

设 f 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $f \in R[a, b]$.

证明

□

命题 0.4 (连续的周期函数的基本性质)

设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且以 $T > 0$ 为周期, 则
(1) f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.
(2) f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明

(1) 由 $f \in C[0, T]$ 知, 存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| < M, \quad \forall x \in [0, T]$$

对 $\forall y \in \mathbb{R}$, 存在 $n \in \mathbb{Z}, x \in [0, T]$, 使得 $y = nT + x$. 又 f 以 T 为周期, 故 $|f(y)| = |f(x)| < M$.

(2) 由推论**??**知 f 在 $[nT, (n+1)T], \forall n \in \mathbb{Z}$ 上一致连续, 从而由一致连续的拼接同理可知 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也一致连续.

□

命题 0.5 (导数有正增长率则函数爆炸)

设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=c>0$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

笔记 类似的还有趋于 $-\infty$ 或者非极限形式的结果, 读者应该准确理解含义并使得各种情况都能复现, 我们引用本结论时未必就是本结论本身, 而是其蕴含的思想.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=c>0$, 所以存在 $X>a$, 使得 $f'(x)>\dfrac{c}{2}, \forall x\geqslant X$. 于是由 Lagrange 中值定理得到, 对 $\forall x\geqslant X$, 存在 $\theta\in(X,x)$, 使得

$$f(x)=f(X)+f'(\theta)(x-X)\geqslant f(X)+\frac{c}{2}(x-X), \forall x\geqslant X.$$

让 $x\to+\infty$ 就得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

□

命题 0.6 (函数不爆破则各阶导数必然有趋于 0 的子列)

设 $k\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$ 且 $f\in D^k[a,+\infty)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|\neq+\infty$, 那么存在趋于正无穷的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n)=0.$$

笔记 存在 $X>0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X,+\infty)$ 要么恒正, 要么恒负的原因: 否则, 对 $\forall X>0$, 存在 $x_1,x_2\in(X,+\infty)$, 使得 $f^{(k)}(x_1)>0, f^{(k)}(x_2)<0$. 从而由导数的介值性可知, 存在 $\xi_X\in(x_1,x_2)$, 使得 $f^{(k)}(\xi_X)=0$. 于是

$$\begin{aligned}
&\text{令}X=1, \text{则存在}y_1>1, \text{使得}f^{(k)}(y_1)=0;\\
&\text{令}X=\max\{2,y_1\}, \text{则存在}y_2>\max\{2,y_1\}, \text{使得}f^{(k)}(y_2)=0;\\
&\cdots\cdots\\
&\text{令}X=\max\{n,y_{n-1}\}, \text{则存在}y_n>\max\{n,y_{n-1}\}, \text{使得}f^{(k)}(y_n)=0;\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这样得到一个数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n=+\infty\text{且}f^{(k)}(y_n)=0, \forall n\in\mathbb{N}.$$

这与假设矛盾!

证明 注意到若不存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n)=0$ 成立那么将存在 $X>0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X,+\infty)$ 要么恒正, 要么恒负. 因此如果找不到子列使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n)=0$ 成立, 那么不妨设存在 $X_1>0$ 使得

$$f^{(k)}(x)>0, \forall x\geqslant X_1.$$

因此 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)>0$. 否则就有 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$, 从而存在子列使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n)=0$ 成立, 矛盾!

取 $m=\varliminf\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)>0$, 则存在 $X>0$, 使得

$$f^{(k)}(x)\geqslant \inf_{y\geqslant X} f^{(k)}(y)\geqslant \varliminf_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=m>0, \forall x\geqslant X. \tag{1}$$

于是由 Taylor 中值定理, 我们知道对每个 $x>X$, 运用(1), 都有

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x-X)^j+\frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x-X)^k\geqslant\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x-X)^j+\frac{m}{k!}(x-X)^k,$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了必有子列使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n)=0$ 成立.

□

定理 0.2 (严格单调和导数的关系)

1. 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 f 递增, 则 f 在 $[a,b]$ 严格递增的充要条件是对任何 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$ 都存在 $c \in (x_1,x_2)$ 使得 $f'(c) > 0$.
2. 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 f 递减, 则 f 在 $[a,b]$ 严格递减的充要条件是对任何 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$ 都存在 $c \in (x_1,x_2)$ 使得 $f'(c) < 0$.

♡

证明 若 f 在 $[a,b]$ 严格递增, 则对任何 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $c \in (x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0.$$

反之对任何 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$ 都存在 $c \in (x_1,x_2)$ 使得 $f'(c) > 0$. 任取 $[s,t] \subset [a,b]$, 现在有 $c \in (s,t)$ 使得 $f'(c) > 0$, 则根据 $f'(c) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c)-f(c-h)}{h} > 0$, 再结合 f 递增, 可知存在充分小的 $h > 0$ 使得

$$f(s) \leqslant f(c-h) < f(c) < f(c+h) \leqslant f(t),$$

这就证明了 f 严格递增. 严格递减是类似的, 我们完成了证明.

□

定理 0.3 (单侧导数极限定理)

设 $f \in C[a,b] \cap D^1(a,b]$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = c$ 存在, 证明 f 在 a 右可导且 $f'_+(a) = c$.

♡

注 本结果当然也可对应写出左可导的版本和可导的版本, 以及对应的无穷版本 (即 a, b, c 相应的取 $\pm\infty$).

笔记 本结果告诉我们可在 f 连续的时候用 f' 的左右极限存在性来推 f 可导性.

证明 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(\theta(x)) = c,$$

其中 $\theta(x) \in (a,x)$, $\lim\limits_{x\to a^+}\theta(x) = a$. 这就完成了这个定理的证明.

□

例题 0.1 经典光滑函数 考虑

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & |x| > 0 \\ 0, & |x| = 0 \end{cases}$$

则 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 我们归纳证明, 首先 $f \in C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$, 假定 $f \in C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$. 注意到存在多项式 $p_{k+1} \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0.$$

于是

$$\lim_{x\to 0} f^{(k+1)}(x) = \lim_{x\to 0} p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} p_{k+1}(x)e^{-x^2} = 0,$$

运用导数极限定理, 我们知道 $f^{(k+1)}(0) = 0$. 由数学归纳法我们知道 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 这就完成了证明.

□

定理 0.4 (连续函数中间值定理)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$. 则对有介值性函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 和 $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant b$, 必然

存在 $\theta \in [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j).$$

笔记 中间值可以通过介值定理取到是非常符合直观的. 特别的当 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, 就是所谓的平均值定理

$$f(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

证明 设

$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i), m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i).$$

于是

$$m = m \sum_{j=1}^{n} p_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) \leqslant M \sum_{j=1}^{n} p_j = M.$$

因此由 f 的介值性知: 必然存在 $\theta \in [x_1, x_n]$, 使得 $f(\theta) = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)$ 成立.

□

命题 0.7

若 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 则 f' 没有第一类间断点与无穷间断点.

注 也可以利用 Darboux 定理进行证明.

证明 若 f' 存在第一类间断点 $c \in [a,b]$, 则由单侧导数极限定理可知

$$f'\left(c^-\right) = f'_-(c), \quad f'\left(c^+\right) = f'_+(c).$$

又因为 f 在 $x = c$ 处可导, 所以 $f'_-(c) = f'_+(c)$. 从而

$$f'\left(c^-\right) = f'_-(c) = f'_+(c) = f'\left(c^+\right).$$

即 f 在 $x = c$ 处既左连续又右连续, 故 f 在 $x = c$ 处连续, 矛盾!

由于单侧导数极限定理同样适用于单侧导数为无穷大的情况, 因此对于无穷大的情况可同理证明.

□

命题 0.8

设 f 是一个定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的单调函数, 并且满足 $f(I) = I'$, 其中 $I' \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, 则 f 在区间 I 上连续, 即 $f \in C(I)$.

证明 反证, 假设 f 在某个点 $c \in I$ 处间断. 若 c 在区间 I 的内部, 则由 f 在区间 I 上单调递增, 利用单调有界定理可知 $\lim_{x \to c^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to c^-} f(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \to c^+} f(x).$$

又因为 $f(x)$ 在 $x = c$ 处间断, 所以上式至少有一个严格不等号成立, 故不妨设

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) < \lim_{x \to c^+} f(x).$$

对 $\forall x > c$, 固定 x, 由 f 在 I 上递增可知

$$f(x) > f(y), \quad \forall y \in (c, x).$$

令 $y \to c^+$, 得 $f(x) \geqslant \lim_{x \to c^+} f(x)$. 对 $\forall x < c$, 由 f 在 I 上递增可知 $f(x) \leqslant f(c)$. 因此 $f(I) \subset (-\infty, f(c)] \cup [\lim_{x \to c^+} f(x), +\infty)$, 故 $(f(c), \lim_{x \to c^+} f(x)) \not\subset f(I)$, 但 $(f(c), \lim_{x \to c^+} f(x)) \subset I'$. 这与 $f(I) = I'$ 矛盾!

若 c 是区间 I 的端点, 则同理可得矛盾!

□

命题 0.9

定义在区间 I 上的单调函数 f 只有第一类间断点, 特别地, 若 x_0 在区间 I 的内部, 则 x_0 要么是跳跃间断点, 要么就是连续点.

证明

□

命题 0.10 (连续单射等价严格单调)

设 f 是区间 I 上的连续函数, 证明 f 在 I 上严格单调的充要条件是 f 是单射.

证明 必要性是显然的, 只证充分性. 如若不然, 不妨考虑 $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2), x_1 < x_2 < x_3$(其他情况要么类似, 要么平凡), 于是由连续函数介值定理知存在 $\theta \in [x_2, x_3]$ 使得 $f(\theta) = f(x_1)$, 这就和 f 在 I 上单射矛盾! 故 f 严格单调.

□

例题 0.2 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 满足方程

$$f(f(x)) = e^{-x}.$$

笔记 注意积累二次复合的常用处理手法, 即运用命题 0.10.

证明 假设存在满足条件的函数 f. 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$e^{-x} = f(f(x)) = f(f(y)) = e^{-y}.$$

由 e^{-x} 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 0.10知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = e^{-x}$ 递增, 这和 e^{-x} 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在.

□

例题 0.3 求 $k \in \mathbb{R}$ 的范围, 使得存在 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f(f(x)) = kx^9$.

笔记 **取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$ 的原因:** 当 $k \geqslant 0$ 时, 我们可待定 $f(x) = cx^3$, 需要 $c^4x^9 = kx^9$, 从而可取 $c = \sqrt[4]{k}$.

证明 当 $k < 0$ 时, 假设存在满足条件的函数 f. 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$kx^9 = f(f(x)) = f(f(y)) = ky^9.$$

由 kx^9 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 0.10知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = kx^9$ 递增, 这和 kx^9 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在.

当 $k \geqslant 0$ 时,取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$, 此时 $f(x)$ 满足条件.

□

命题 0.11 ($[a, b]$ 到 $[a, b]$ 的连续函数必有不动点)

设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 是连续函数, 证明 f 在 $[a, b]$ 上有不动点.

笔记 注意 $[a, b] \to [a, b]$ 表示 f 是从 $[a, b] \to [a, b]$ 的映射, 右端的 $[a, b]$ 是像集而不是值域,f 可能取不到整个 $[a, b]$.

证明 考虑 $g(x) = f(x) - x \in C[a, b]$, 注意到 $g(a) \geqslant 0, g(b) \leqslant 0$, 由连续函数的零点定理知道 f 在 $[a, b]$ 上有不动点.

□

命题 0.12 (没有极值点则严格单调)

设 $f \in C[a, b]$ 且 f 在 (a, b) 没有极值点, 证明 f 在 $[a, b]$ 严格单调.

证明 因为闭区间上连续函数必然取得最值, 且在 (a,b) 的最值点必然是极值点, 因此由假设我们不妨设 f 在 $[a,b]$ 端点取得最值. 不失一般性假设

$$f(a)=\min_{x\in[a,b]}f(x),f(b)=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

此时若在 $[a,b]$ 上 f 严格单调, 则只能是严格单调递增. 若在 $[a,b]$ 上 f 不严格递增, 则存在 $x_2>x_1$, 使得 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$.

若 $x_1>a$, 在 $[a,x_2]$ 上我们注意到 $f(x_1)\geqslant\max\{f(a),f(x_2)\}$, 又由 f 的连续性可知,f 一定能在 $[a,x_2]$ 上取到最大值. 于是 f 只能在 (a,x_2) 达到最大值, 从而 f 在 (a,x_2) 存在极大值点, 这和 f 在 (a,b) 没有极值点矛盾!

若 $x_1=a,x_2<b$, 则注意到 $f(x_2)\leqslant\min\{f(a),f(b)\}$, 同样的 f 在 (a,b) 取得极小值而矛盾.

若 $x_1=a,x_2=b$, 则 f 恒为常数而矛盾! 这就完成了证明.

□

命题 0.13 (函数值相同的点导数值相同就一定单调)

设 $f\in D(a,b)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2),x_1,x_2\in(a,b)$, 必有 $f'(x_1)=f'(x_2)$, 证明 f 在 (a,b) 是单调函数.

笔记 **令 $\boldsymbol{\sigma=\max\left\{x\in\left[c,\xi\right]:f\left(x\right)=f\left(d\right)\right\}}$ 的原因:** 设 $E=\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$. 实际上, 这里取 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$ 也可以, 效果类似.

(1) **$\boldsymbol{\sigma}$ 的存在性证明:** 由 f 的介值性知, 存在 $\eta\in(c,\xi)$, 使得

$$f(\xi)\leqslant f(\eta)=f(d)\leqslant f(c).$$

从而 $\eta\in E=\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$, 故 E 非空. 又由 E 的定义, 显然 E 有界, 故由确界存在定理可知,E 存在上确界. 于是令 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}\leqslant\in[c,\xi]$. 下证 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}=\max\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$, 即 $\sigma\in E=\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$.

由上确界的性质可知, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_n\in E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sigma$. 从而 $f(x_n)=f(d)$. 于是由 f 的连续性可得

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f\left(\sigma\right)=f\left(d\right).$$

故 $\sigma\in E$. 这样就完成了证明.

(2) **取 $\boldsymbol{\sigma=\max\left\{x\in\left[c,\xi\right]:f\left(x\right)=f\left(d\right)\right\}}$ 的原因:** 当 $f(c)\geqslant f(d)$ 时,$E=\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}$ 中的其他点 $a\in E$, 可能有 $f'\left(a\right)>0$, 也可能有 $f'\left(a\right)\leqslant0$. 而 σ 一定只满足 $f'\left(\sigma\right)\leqslant0$.

证明 若 f 不在 (a,b) 是单调, 则不妨设 $a<c<d<b$, 使得 $f'(c)<0<f'(d)$.

由 $f'(d)=\lim\limits_{x\to d^-}\dfrac{f(x)-f(d)}{x-d}>0$ 知在 d 的左邻域内,$f(x)<f(d)$. 由 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$ 知 f 在 c 的右邻域内有 $f(x)<f(c)$, 于是 $f(c),f(d)$ 不是 f 在 $[c,d]$ 上的最小值, 又由 $f\in C[c,d]$ 可知 f 在 $[c,d]$ 上一定存在最小值. 故可以设 f 在 $[c,d]$ 最小值点为 $\xi\in(c,d)$.

当 $f(c)\geqslant f(d)$ 时,令

$$\sigma=\max\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}.$$

注意到 $\sigma<\xi$. 显然 $f'(\sigma)\leqslant0$, 因为如果 $f'(\sigma)>0$ 会导致在 σ 右邻域内有大于 $f(d)$ 的点, 由介值定理可以找到 $\xi>\sigma'>\sigma$, 使得 $f(\sigma')=f(d)$ 而和 σ 是最大值矛盾! 而函数值相同的点导数值也相同, 因此 $f'(\sigma)=f'(d)>0$, 这与 $f'(\sigma)\leqslant0$ 矛盾!

当 $f(c)\leqslant f(d)$ 时类似可得矛盾! 我们完成了证明.

□

命题 0.14 (一个经典初等不等式)

设 $a,b\geqslant0$, 证明:

$$\begin{cases}a^p+b^p\leqslant(a+b)^p\leqslant2^{p-1}(a^p+b^p), & p\geqslant1,p\leqslant0\\ a^p+b^p\geqslant(a+b)^p\geqslant2^{p-1}(a^p+b^p), & 0<p<1\end{cases}\tag{2}$$

笔记 不等式左右是奇次对称的，我们可以设 $t = \dfrac{a}{b} \in [0,1]$，于是(2)两边同时除以 b^p 得

$$\begin{cases} t^p + 1 \leqslant (t+1)^p \leqslant 2^{p-1}(t^p+1), & p \geqslant 1, p \leqslant 0 \\ t^p + 1 \geqslant (t+1)^p \geqslant 2^{p-1}(t^p+1), & 0 < p < 1 \end{cases}.$$

证明 考虑 $f(t) \triangleq \dfrac{(t+1)^p}{1+t^p}, t \in [0,1]$，我们有

$$f'(t) = p(t+1)^{p-1}\frac{1-t^{p-1}}{(1+t^p)^2}\begin{cases} \geqslant 0, & p \geqslant 1, p \leqslant 0 \\ < 0, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} 2^{p-1} = f(1) \geqslant f(t) \geqslant f(0) = 1, & p \geqslant 1, p \leqslant 0 \\ 2^{p-1} = f(1) \leqslant f(t) \leqslant f(0) = 1, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

这就完成了证明.

□

定理 0.5 (反函数存在定理)

设 $y = f(x), x \in D$ 为严格增 (减) 函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增 (减) 函数.

证明 设 f 在 D 上严格增. 对任一 $y \in f(D)$，有 $x \in D$ 使 $f(x) = y$. 下面证明这样的 x 只能有一个. 事实上，对于 D 中任一 $x_1 \neq x$，由 f 在 D 上的严格增性，当 $x_1 < x$ 时，$f(x_1) < y$，当 $x_1 > x$ 时，有 $f(x_1) > y$，总之 $f(x_1) \neq y$. 这就说明，对每一个 $y \in f(D)$，都只存在唯一的一个 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，从而函数 f 存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$.

现证 f^{-1} 也是严格增的. 任取 $y_1, y_2 \in f(D), y_1 < y_2$. 设 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$，则 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. 由 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性，显然有 $x_1 < x_2$，即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1} 是严格增的.

□

定理 0.6 (反函数连续定理)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续，则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ 上连续.

证明 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上严格增. 此时 f 的值域即反函数 f^{-1} 的定义域为 $[f(a), f(b)]$. 任取 $y_0 \in (f(a), f(b))$，设 $x_0 = f^{-1}(y_0)$，则 $x_0 \in (a,b)$. 于是对任给的 $\varepsilon > 0$，可在 (a,b) 上 x_0 的两侧各取异于 x_0 的点 $x_1, x_2 (x_1 < x_0 < x_2)$，使它们与 x_0 的距离小于 ε.

设与 x_1, x_2 对应的函数值分别为 y_1, y_2，由 f 的严格增性知 $y_1 < y_0 < y_2$. 令

$$\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$$

则当 $y \in U(y_0; \delta)$ 时，对应的 $x = f^{-1}(y)$ 的值都落在 x_1 与 x_2 之间，故有

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

这就证明了 f^{-1} 在点 y_0 连续，从而 f^{-1} 在 $(f(a), f(b))$ 上连续.

类似地可证 f^{-1} 在其定义区间的端点 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别为右连续与左连续. 所以 f^{-1} 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

□

定理 0.7 (反函数求导定理)

设 $y = f(x)$ 为 $x = \varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续，严格单调且 $\varphi'(y_0) \neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0 (x_0 = \varphi(y_0))$ 可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

证明 设 $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$,$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 因为 φ 在 y_0 的某邻域上连续且严格单调, 故 $f = \varphi^{-1}$ 在 x_0 的某邻域上连续且严格单调. 从而当且仅当 $\Delta y = 0$ 时 $\Delta x = 0$, 并且当且仅当 $\Delta y \to 0$ 时 $\Delta x \to 0$. 由 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

□