0.1 含参量积分

定义 0.1 (含参量积分)

设 $f(x,y)$ 是定义在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数. 当 x 取 $[a,b]$ 上某定值时, 函数 $f(x,y)$ 则是定义在 $[c,d]$ 上以 y 为自变量的一元函数. 倘若这时 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则其积分值是 x 在 $[a,b]$ 上取值的函数, 记它为 $\varphi(x)$, 就有

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy,\ x\in[a,b]. \tag{1}$$

一般地, 设 $f(x,y)$ 为定义在区域 $G=\{(x,y)\mid c(x)\leqslant y\leqslant d(x), a\leqslant x\leqslant b\}$ 上的二元函数, 其中 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数, 若对于 $[a,b]$ 上每一固定的 x 值, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在闭区间 $[c(x),d(x)]$ 上可积, 则其积分值是 x 在 $[a,b]$ 上取值的函数, 记作 $F(x)$ 时, 就有

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy,\ x\in[a,b]. \tag{2}$$

用积分形式所定义的这两个函数 (1) 与 (2), 通称为定义在 $[a,b]$ 上**含参量 x 的 (正常) 积分**, 或简称**含参量积分**.

定理 0.1 (连续性)

若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy,\quad \psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

都在 $[a,b]$ 上连续.

注 对于这个定理的结论也可以写成如下的形式: 若 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 上连续, 则对任何 $x_0\in[a,b]$, 都有

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy.$$

这个结论表明, 定义在矩形区域上的连续函数, 其极限运算与积分运算的顺序是可以交换的.

证明 设 $x\in[a,b]$, 对充分小的 Δx, 有 $x+\Delta x\in[a,b]$(若 x 为区间的端点, 则仅考虑 $\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$), 于是

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_c^d [f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\,dy. \tag{3}$$

由于 $f(x,y)$ 在有界闭域 R 上连续, 从而一致连续, 即对任给的正数 ε, 总存在某个正数 δ, 对 R 内任意两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2), 只要

$$|x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon. \tag{4}$$

所以由 (3),(4) 可推得: 当 $|\Delta x|<\delta$ 时,

$$|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|\leqslant\int_c^d |f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\,dy<\int_c^d \varepsilon\,dx=\varepsilon(d-c).$$

这就证明了 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

同理可证: 若 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 上连续, 则含参量 y 的积分

$$\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

在 $[c,d]$ 上连续. □

定理 0.2 (连续性)

设二元函数 $f(x,y)$ 在区域

$$G = \{(x,y) \mid c(x) \leqslant y \leqslant d(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

上连续，其中 $c(x), d(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

在 $[a,b]$ 上连续.

证明 对积分 (5) 用换元积分法，令

$$y = c(x) + t(d(x) - c(x)).$$

当 y 在 $c(x)$ 与 $d(x)$ 之间取值时,t 在 $[0,1]$ 上取值，且

$$dy = (d(x) - c(x))\,dt.$$

所以从 (5) 式可得

$$F(x) \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x))\,dt.$$

由于被积函数

$$f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x))$$

在矩形区域 $[a,b] \times [0,1]$ 上连续，由定理 0.1得积分 (5) 所确定的函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. □

定理 0.3 (可微性)

若函数 $f(x,y)$ 与其偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ 都在矩形区域 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，则

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy.$$

证明 对于 $[a,b]$ 内任一点 x，设 $x + \Delta x \in [a,b]$(若 x 为区间端点，则讨论单侧导数)，则

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\,dy.$$

由微分学的拉格朗日中值定理及 $f_x(x,y)$ 在有界闭域 R 上连续 (从而一致连续)，对任给正数 ε，存在正数 δ，只要当 $|\Delta x| < \delta$ 时，就有

$$\left| \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} - f_x(x,y) \right| = |f_x(x + \theta\Delta x, y) - f_x(x,y)| < \varepsilon,$$

其中 $\theta \in (0,1)$. 因此

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x,y)\,dy \right| \leqslant \int_c^d \left| \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} - f_x(x,y) \right| dy < \varepsilon(d-c).$$

这就证得对一切 $x \in [a,b]$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy.$$

□

定理 0.4 (可微性)

设 $f(x,y), f_x(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续,$c(x), d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数,则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x). \tag{6}$$

♡

证明 把 $F(x)$ 看作复合函数

$$F(x)=H(x,c,d)=\int_c^d f(x,y)\,dy, c=c(x),\ d=d(x).$$

由复合函数求导法则及变限积分的求导法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial H}{\partial d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x}=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x).$$

□

定理 0.5 (可积性)

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积. 这就是说: 在 $f(x,y)$ 连续性假设下, 同时存在两个求积顺序不同的积分:

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx \quad 与 \quad \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

为书写简便起见, 今后将上述两个积分写作

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,dy \quad 与 \quad \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

前者表示 $f(x,y)$ 先对 y 求积然后对 x 求积, 后者则求积顺序相反. 它们统称为**累次积分**, 或更确切地称为**二次积分**.

♡

证明

□

定理 0.6

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{7}$$

♡

笔记 这个定理指出, 在 $f(x,y)$ 连续性假设下, 累次积分与求积顺序无关.

证明 记

$$\varphi_1(u)=\int_a^u \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,dy, \varphi_2(u)=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^u f(x,y)\,dx,$$

其中 $u\in[a,b]$, 现在分别求 $\varphi_1(u)$ 与 $\varphi_2(u)$ 的导数.

$$\varphi_1'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u \varphi(x)\,dx=\varphi(u).$$

对于 $\varphi_2(u)$, 令 $H(u,y)=\int_a^u f(x,y)\,dx$, 则有

$$\varphi_2(u)=\int_c^d H(u,y)\,dy.$$

因为 $H(u,y)$ 与 $H_u(u,y)=f(u,y)$ 都在 R 上连续, 由定理 0.3,

$$\varphi_2'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_c^d H(u,y)\,dy=\int_c^d H_u(u,y)\,dy=\int_c^d f(u,y)\,dy=\varphi(u).$$

故得 $\varphi_1'(u)=\varphi_2'(u)$, 因此对一切 $u\in[a,b]$, 有

$$\varphi_1(u)=\varphi_2(u)+k\quad(k\text{ 为常数}).$$

当 $u=a$ 时,$\varphi_1(a)=\varphi_2(a)=0$, 于是 $k=0$, 即得

$$\varphi_1(u)=\varphi_2(u),\ u\in[a,b].$$

取 $u=b$, 就得到所要证明的 (7) 式. □