复变函数

作者: 实空

组织: 无

时间:December 1, 2025

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的定义及其运算

定义 1.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a, b), 如果用 $\mathbb{R}$ 记实数的全体,$\mathbb{C}$ 记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;$(0, 0)$ 是零元素,$(-a, -b)$ 是 (a, b) 的负元素;$(1, 0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a, b) 有逆元素 $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$; 此外,$\mathbb{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此 $\mathbb{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 显然,$(a, 0) \to a$ 是 $\tilde{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的一个同构对应, 因此实数域 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a, 0) = a$. 在 $\mathbb{C}$ 中,$(0, 1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用 i 记 $(0, 1)$ 这个元素, 于是有 $\mathrm{i}^2 = -1$. 由于 $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b\mathrm{i}$, 于是每一个复数 (a, b) 都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\mathrm{i}.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a, b) 来记复数, 而直接用 $z = a + b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的**实部**,b 称为 z 的**虚部**, 分别记为 $a = \mathrm{Re}z$,$b = \mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i},$$
$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = (a + b\mathrm{i})\left(\frac{c - d\mathrm{i}}{c^2 + d^2}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z = a + b\mathrm{i}$ 是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\bar{z} = a - b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**,$\bar{z}$ 称为 z 的**共轭复数**.

♣

定义 1.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a < b$), 其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a, b, 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果 $a < b, b < c$, 那么 $a < c$;

(iii) 如果 $a < b$, 那么对任意 c, 有 $a + c < b + c$;

(iv) 如果 $a < b, c > 0$, 那么 $ac < bc$.

笔记 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 1.1

复数域不是有序域.

证明 如果 $\mathbb{C}$ 是有序域, 那么因为 $\mathrm{i} \neq 0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i} > 0$ 或 $\mathrm{i} < 0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i} > 0$, 则由有序域 (iv)得 $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > \mathrm{i} \cdot 0$, 即 $-1 > 0$, 再由(iii), 两端都加 1, 即得 $0 > 1$. 另一方面, 从 $-1 > 0$ 还可得 $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$, 即 $1 > 0$, 这和刚才得到的 $0 > 1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i} < 0$, 两端都加 $-\mathrm{i}$, 得 $0 < -\mathrm{i}$, 再由有序域 (iv), 两端乘 $-\mathrm{i}$, 得 $-1 > 0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0 > 1$ 和 $0 < 1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域.

□

命题 1.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$;

(ii) $z\overline{z} = |z|^2, \quad \overline{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$;

(iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

(iv) $|zw| = |z||w|, \quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$;

(v) $|z| = |\overline{z}|, \quad |z| = |-z|$.

证明

(i)

(ii)

(iii)

(iv) 由 (ii) 可得 $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = |z|^2|w|^2$, 进而 $|zw| = |z||w|$.

(v)

□

命题 1.2

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $|\mathrm{Re}z| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \leqslant |z|$;

(ii) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z = tw$;

(iii) $|z - w| \geqslant \big||z| - |w|\big|$.

证明 (i) 从 Rez,Imz 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用复数运算性质 (ii)(i)和这里的不等式 (i), 即得

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$, 这等价于 $z\overline{w} \in \mathbb{R}$ 且 $z\overline{w} \geqslant 0$.

不妨设 $w \neq 0$($w=0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\overline{w}=\frac{|w|^2}{w}$, 故 $z\overline{w}=\frac{z}{w}|w|^2 \geqslant 0$. 令 $t=\left(\frac{z}{w}|w|^2\right)\frac{1}{|w|^2}$, 则 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \geqslant 0$, 而且 $z=tw$.

(iii) 当 $|z|=|w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z|>|w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|z|=|(z-w)+w| \leqslant |z-w|+|w|,$$

移项可得 $|z-w| \geqslant |z|-|w|=||z|-|w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z-w=tw$, 即 $z=(t+1)w$.

当 $|z|<|w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|w|=|(w-z)+z| \leqslant |w-z|+|z|,$$

移项可得 $|z-w|=|w-z| \geqslant |w|-|z|=||z|-|w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $w-z=tz$, 即 $w=(t+1)z$.

□

推论 1.1

设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

♡

证明 由命题 1.2(ii)及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 线性相关.

□

1.2 复数的几何表示

定义 1.3

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 惟一地确定,(x,y) 就称为复数 z 的实数对形式. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$.z 的极坐标设为 (r,θ), 那么 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数, 故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 $\mathbb{C}$ 表示.

在复平面上, 从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 这种对应关系使复数的加 (减) 法与向量的加 (减) 法之间保持一致.

♣

注 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 z_2-z_1, 因而 $|z_2-z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 z_1-z_2(图 1.1). 现在再来看命题 1.2(ii)的不等式 $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

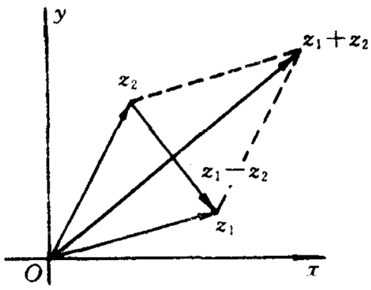

图 1.1

定义 1.4 (辐角)

设 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可写成极坐标形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\text{其中}r=|z|,\theta=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}.$$

称 θ 为复数 z 的**辐角**, 记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 显然

$$\mathrm{Arg}z=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}.$$

因此 z 的辐角有无穷多个. 但只有一个辐角在 $(-\pi,\pi]$ 中, 称这个辐角为 z 的**辐角主值**, 记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}.$$

注意 0 的辐角没有意义.

注 设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}/\{0\}$, 注意到 $-\pi<\arg z\leqslant\pi,-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$, 故 z 的主辐角与反正切 $\arctan\frac{y}{x}$ 的关系如下:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0,y\in\mathbb{R};\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}\quad(z\neq 0)$$

定理 1.2

设 z_1,z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$

(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$

(3) $\mathrm{Arg}(\alpha z)=\mathrm{Arg}z\,(\alpha>0),\quad \mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z\,(n\in\mathbb{N}).$

笔记 在 (1) 中, 第一个等式在命题 1.1(iv)中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\frac{\pi}{2}$, 因此 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按反时针方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

(2) 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

(3)

□

命题 1.3

(1) 向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

(2) 向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

证明

(1) 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\frac{\pi}{2}$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个纯虚数, 因而 $z_1\bar{z}_2=\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个纯虚数, 即 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

(2) 这是因为 z_1 与 z_2 平行就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\pi$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\pm\pi$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个实数, 因而 $z_1\bar{z}_2=\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个实数, 即 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

□

例题 1.1 在图 1.2的三角形中,$AB=AC$,$PQ=RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN\perp BC$.

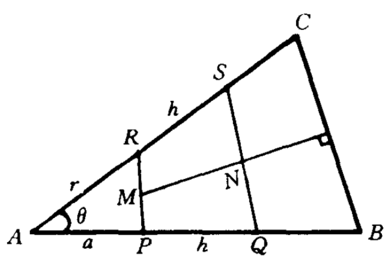

图 1.2

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M:\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N:\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1 = \overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] - \frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB = AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2 = \overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2 = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - b = b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1) = \frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$. 所以由命题 1.3(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN \perp BC$.

□

例题 1.2 证明: 平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\bigg/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right) = 0. \tag{1.1}$$

证明 从图 1.3可以看出,z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件是向量 z_1-z_3 和 z_1-z_4 的夹角等于向量 z_2-z_3 和 z_2-z_4 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 1.3(2)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\bigg/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\bigg/\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 在实轴上, 因而等式(1.1)成立.

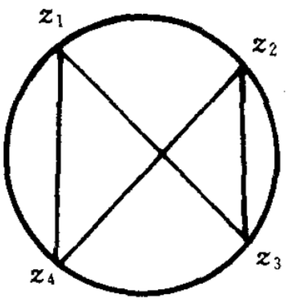

图 1.3

□

定理 1.3 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \cdots, z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n = r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1 = \cdots = z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta} = \cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta = \cos(-n)\theta + \mathrm{i}\sin(-n)\theta.$$

□

命题 1.4

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n=w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

注 这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w=1$ 时, 若记 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w},\ \sqrt[n]{w}\omega,\cdots,\ \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

证明 现在设 $w=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的, 要求的 $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n=w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\iff\begin{cases}\rho^n\cos n\varphi=r\cos\theta\\ \rho^n\sin n\varphi=r\sin\theta\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\rho^n=r\\ \cos n\varphi=\cos\theta\\ \sin n\varphi=\sin\theta\end{cases}\iff\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ n\varphi=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

故方程 $z^n=w$ 的根为

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

对 $\forall k\geq n$, 都存在 $p_k\in\mathbb{Z},q_k\in[0,n-1]\cap\mathbb{Z}$, 使 $k=p_kn+q_k$. 于是

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2q_k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2q_k\pi}{n}\right).$$

又注意到 $\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$,$k=0,1,\cdots,n-1$ 互不相同, 故方程 $z^n=w$ 的根只有 n 个, 即

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

□

1.3 扩充平面和复数的球面表示

定义 1.5

为了今后讨论的需要, 我们要在 $\mathbb{C}$ 中引进一个新的数 ∞, 这个数的模是 ∞, 辐角没有意义, 它和其他数的运算规则规定为:

$$z\pm\infty=\infty,\quad z\cdot\infty=\infty\ (z\neq0),$$

$$\frac{z}{\infty}=0,\quad \frac{z}{0}=\infty\ (z\neq0);$$

$0\cdot\infty$ 和 $\infty\pm\infty$ 都不规定其意义. 引进了 ∞ 的复数系记为 $\mathbb{C}_\infty$, 即 $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

在复平面上, 没有一个点和 ∞ 相对应, 但我们想像有一个**无穷远点**和 ∞ 对应, 加上无穷远点的复平面称为**扩充平面**或**闭平面**, 不包括无穷远点的复平面也称为**开平面**.

注 在复平面上, 无穷远点和普通的点是不一样的,Riemann 首先引进了复数的球面表示, 在这种表示中,∞ 和普通的复数没有什么区别.

命题 1.5

证明: 扩充平面和单位球面对等, 即两者之间存在一个双射.

证明 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, 即

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

把 $\mathbb{C}$ 等同于平面:

$$\mathbb{C} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

固定 S 的北极 N, 即 $N = (0, 0, 1)$, 对于 $\mathbb{C}$ 上的任意点 z, 联结 N 和 z 的直线必和 S 交于一点 P(图 1.4). 若 $|z| > 1$, 则 P 在北半球上; 若 $|z| < 1$, 则 P 在南半球上; 若 $|z| = 1$, 则 P 就是 z. 容易看出, 当 z 趋向 ∞ 时, 球面上对应的点 P 趋向于北极 N, 自然地, 我们就把 $\mathbb{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来,$\mathbb{C}_\infty$ 中的所有点 (包括无穷远点在内) 都被移植到球面上去了, 这样我们就找到了一个扩充平面到单位球面的双射. 而在球面上,N 和其他的点是一视同仁的.

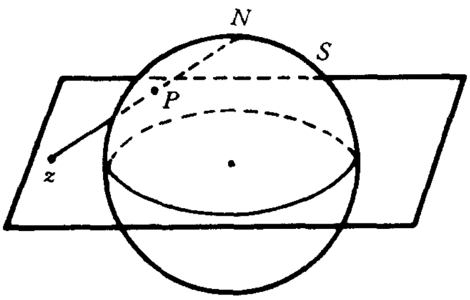

图 1.4

现在给出这种对应的具体表达式. 设 $z = x + \mathrm{i}y$, 容易算出 zN 和球面 S 的交点的坐标为

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1},\ x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1},\ x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

直接用复数 z, 可表示为

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2},\ x_2 = \frac{z - \bar{z}}{\mathrm{i}(1 + |z|^2)},\ x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

这样, 从 z 便可算出它在球面上对应点的坐标. 反过来, 从球面上的点 (x_1, x_2, x_3) 也可算出它在平面上的对应点 z. 事实上, 从上面的表达式得

$$\begin{cases} x_1 + \mathrm{i}x_2 = \dfrac{2z}{1 + |z|^2}, \\ 1 - x_3 = \dfrac{2}{1 + |z|^2}, \end{cases}$$

由此即得

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

这就是所需的计算公式. 现在我们可以具体地写出扩充平面到单位球面的双射

$$f : C_\infty \longrightarrow \mathbb{R}^3, z \longmapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{\mathrm{i}(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow C_\infty, (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

□

1.4 复数列的极限

定义 1.6

对于 $a \in \mathbb{C}, r > 0$, 称

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

为以 a 为中心、以 r 为半径的**圆盘**. 特别当 $a = 0, r = 1$ 时, $B(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ 称为**单位圆盘**. $B(a, r)$ 也称为 a 点的一个 r **邻域**, 或简称为 a 点的**邻域**. 无穷远点 $z = \infty$ 的邻域是指集合 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, 记为 $B(\infty, R)$.

定义 1.7

我们说 $\mathbb{C}$ 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 $\mathbb{C}$ 中的点 z_0, 是指对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n - z_0| < \varepsilon$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. 或者从几何上来说, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(z_0, \varepsilon)$.

我们称复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 ∞, 是指对任给的正数 $M > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n| > M$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 或者从几何上来说, 对任给的 $M > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(\infty, M)$.

定理 1.4

设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 从等式

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

马上可以得到: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

□

定义 1.8

复数列 $\{z_n\}$ 称为 **Cauchy 列**, 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

定理 1.5

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_m = x_m + \mathrm{i}y_m$, 那么从等式

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

知道, $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

□

定理 1.6 (复数域的 Cauchy 收敛准则)

$\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列.

笔记 由此知道复数域 $\mathbb{C}$ 是**完备的**.

证明 由定理 1.4和定理 1.5, 再结合实数域中的 Cauchy 收敛准则立刻得到复数域的 Cauchy 收敛准则.

□

1.5 开集、闭集和紧集

定义 1.9

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是一平面点集,$\mathbb{C}$ 中的点对 E 而言可以分为三类:

(i) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E$, 就称 a 为 E 的**内点**;

(ii) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E^c$, 就称 a 为 E 的外点, 这里,E^c 是由所有不属于 E 的点构成的集, 称为 E 的**余集**或**补集**;

(iii) 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中既有 E 的点, 也有 E^c 的点, 就称 a 为 E 的**边界点**.

E 的内点的全体称为 E 的**内部**, 记为 E°;

E 的外点的全体称为 E 的**外部**, 它就是 E 的余集 E^c 的内部, 即 $(E^c)^\circ$;

E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E.

♣

笔记 由上面的定义可知, 集 E 把复平面分成三个互不相交的部分:$\mathbb{C} = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$, 即

$$(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ. \tag{1.2}$$

例题 1.3 邻域的内部和边界 $B(a,r)$ 中的所有点都是它的内点, 即 $B(a,r) = (B(a,r))^\circ$,$B(a,r)$ 的边界 $\partial B = \{z : |z-a| = r\}$, 即是圆周, 满足条件 $|z-a| > r$ 的点 z 都是 $B(a,r)$ 的外点.

定义 1.10

如果 $E \subseteq \mathbb{C}$ 的所有点都是它的内点, 即 $E = E^\circ$, 就称 E 为**开集**.

如果 $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ 是开集, 就称 E 为**闭集**.

♣

例题 1.4 设 $a \in \mathbb{C}$, 则在 $\mathbb{C}$ 中,$B(a,r)$ 是开集, 闭圆盘 $\{z : |z-a| \leqslant r\}$ 是闭集,$B(a,r)$ 和它的上半圆周的并集既不是开集也不是闭集.

定义 1.11

设 $E \subseteq \mathbb{C}$,$a \in \mathbb{C}$.

点 a 称为集 E 的**极限点**或**聚点**, 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中除 a 外总有 E 中的点.

集 E 的所有极限点构成的集称为 E 的**导集**, 记为 E'.

E 中不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**.

E 和它的导集 E' 的并称为 E 的**闭包**, 记为 $\bar{E}$, 即 $\bar{E} = E \cup E'$.

♣

命题 1.6

对于任意集 $E \subseteq \mathbb{C}$, 有

(i) $a \in \bar{E}$ 的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$B(a,r) \cap E \neq \varnothing, \forall r > 0. \tag{1.3}$$

这里,$\varnothing$ 表示空集;

(ii) $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$,$\overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

♠

证明 (i) 若 $a \in \bar{E}$, 则 $a \in E$ 或 $a \in E'$, 不论何者发生, 总有 $B(a,r) \cap E \neq \varnothing$. 反之, 若等式(1.3)成立, 这说明 a 或是 E 的极限点, 或是 E 的孤立点, 因而 $a \in \bar{E}$.

(ii) 由 (i) 知,$a \in (\bar{E})^c$ 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,r) \cap E = \varnothing$, 这说明 a 是 E^c 的内点, 即 $a \in (E^c)^\circ$, 因而 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$. 再看第二个等式,$a \in (E^\circ)^c$ 意味着 a 不是 E 的内点, 即 a 是 E 的外点或边界点, 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $B(a,r) \cap E^c \neq \varnothing$, 由 (i) 知 $a \in \overline{E^c}$. 因而 $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

□

命题 1.7

设 $E \subseteq \mathbb{C}$, 则

(i) E° 是开集,∂E 和 $\bar{E}$ 是闭集;

(ii) E 是闭集的充要条件是 $E = \bar{E}$;

(iii) E 是闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

证明 (i) 任取 $a \in E^\circ$, 则由定义知道, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \subset E$. 显然,$B(a,\varepsilon)$ 中的每一点都是 E 的内点, 因而 $B(a,\varepsilon) \subset E^\circ$, 即 a 是 E° 的内点. 由于 a 是任意取的, 所以 E° 是开集. 由刚才所证,E° 和 $(E^c)^\circ$ 都是开集, 两个开集的并当然也是开集, 由等式(1.2)知 $(\partial E)^c$ 是开集, 因而 ∂E 是闭集. 由于 $(E^c)^\circ$ 是开集, 由命题 1.6(ii)知,$(\bar{E})^c$ 是开集, 所以 $\bar{E}$ 是闭集.

(ii) 如果 $E = \bar{E}$, 则由 (i) 知 $\bar{E}$ 是闭集, 所以 E 是闭集. 反之, 如果 E 是闭集, 那么 E^c 是开集, 因而 $E^c = (E^c)^\circ$. 另外, 由命题 1.6(ii)得 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$, 因而 $E^c = (\bar{E})^c$, 即 $E = \bar{E}$.

(iii) 从 (ii) 立刻可得.

□

定义 1.12

点集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 的**直径**定义为 E 中任意两点间距离的上确界, 记为 $\mathrm{diam}E$, 即

$$\mathrm{diam}E = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

定理 1.7 (Cantor 闭集套定理)

若非空闭集序列 $\{F_n\} \subseteq \mathbb{C}$ 满足

(i) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$;

(ii) $\mathrm{diam}F_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时),

那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 是一个单点集.

笔记 这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

证明 在每一个 F_n 中任取一点 z_n, 我们证明 $\{z_n\}$ 是一个 Cauchy 点列. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}F_n = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N, 使得 $\mathrm{diam}F_N < \varepsilon$. 今取 $m, n > N$, 由条件 (i),$z_m, z_n \in F_N$, 所以 $|z_n - z_m| \leqslant \mathrm{diam}F_N < \varepsilon$. 因而 $\{z_n\}$ 是一 Cauchy 序列, 设其收敛于 z_0. 我们证明 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 事实上, 任取 F_k, 则当 $n > k$ 时,z_n 便全部落入 F_k 中, 因为 F_k 是闭的, 由命题 1.7(iii),$\{z_n\}$ 的极限 $z_0 \in F_k$, 所以 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 如果还有另一点 z_1 也属于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 那么必有 $|z_0 - z_1| \leqslant \mathrm{diam}F_n \to 0(n \to \infty)$, 因而 $z_1 = z_0$.

□

定义 1.13

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是一个集,$\mathscr{F} = \{G\}$ 是一个**开集族**, 即 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素都是开集.

如果 E 中每一点至少属于 $\mathscr{F}$ 中的一个开集, 就说 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

例题 1.5 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是任一点集,ε 是一个给定的正数, 那么

$$\mathscr{F} = \{B(a,\varepsilon) : a \in E\}$$

便是 E 的一个开覆盖.

定义 1.14

我们说点集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 具有**有限覆盖性质**, 是指从 E 的任一个开覆盖中必能选出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$, 使得这有限个开集的并就能覆盖 E, 即

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j.$$

具有有限覆盖性质的集称为**紧集**. ♣

例题 1.6 空集和有限集都是紧集, 但单位圆盘 $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 却不是紧集, 因为 $G_n = \left\{z : |z| < 1 - \dfrac{1}{n}\right\}, n = 2, 3, \cdots$, 这一串同心圆构成 $B(0,1)$ 的一个开覆盖, 但从中找不出有限个集覆盖 $B(0,1)$.

定义 1.15

集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 称为是**有界的**, 如果存在 $R > 0$, 使得 $E \subset B(0, R)$. ♣

定理 1.8 (Heine-Borel 定理)

在 $\mathbb{C}$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是有界闭集; 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是闭集. ♡

证明 我们先证明, 如果 E 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的闭集或 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集, 那么 E 是紧集, 即从 E 的任一开覆盖 $\mathscr{F}$ 中, 可以选出有限个开集覆盖 E. 先设 E 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的闭集, 如果 $z = \infty \notin E$, 则因 E 是闭集, 有 $E = \bar{E}$, 即 $\infty \notin \bar{E}$, 由命题 1.6(i), 存在 $R > 0$, 使得 $B(\infty, R) \cap E = \varnothing$, 即 $E \subset \overline{B(0, R)}$, 因而 E 是有界闭集. 如果 $z = \infty \in E$, 由开覆盖的定义,∞ 属于 $\mathscr{F}$ 中的某一个开集, 而 E 在这个开集之外的部分是一有界闭集, 只要再证明这个有界闭集的部分被有限个开集覆盖即可. 总之, 不论何种情况发生, 只要考虑 E 是有界闭集的情形就够了.

现设 E 是有界闭集, 如果它不是紧集, 那么从 E 的开覆盖 $\mathscr{F}$ 中不能取出有限个开集来覆盖 E. 因为 E 是有界的, 它一定包含在一个充分大的闭正方形 Q 中:

$$Q = \{(x, y) : |x| \leqslant M, |y| \leqslant M\}.$$

把这个正方形分成相等的四个小正方形, 则其中必有一个小正方形 Q_1, 使得 $Q_1 \cap E$ 是有界闭集且不具有有限覆盖性质. 再把 Q_1 分成四个相等的小正方形, 其中必有一个小正方形 Q_2 具有上述同样的性质. 这个过程可以无限地进行下去, 得到一列闭正方形 $\{Q_n\}$. 如果记 $F_n = Q_n \cap E$, 那么 F_n 满足下列条件:

(i) F_n 是有界闭集;

(ii) $F_n \supset F_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$;

(iii) 不能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集来覆盖 F_n;

(iv) 当 $n \to \infty$ 时,$\operatorname{diam} F_n \leqslant \dfrac{M}{2^n}\sqrt{2} \to 0$.

由 (i),(ii),(iv) 知道 $\{F_n\}$ 满足 Cantor 闭集套定理的条件, 因而存在复数 z_0, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{z_0\}$. 由于 $z_0 \in F_n \subset E$, 故在 $\mathscr{F}$ 中必有一个开集 G_0, 使得 $z_0 \in G_0$. 由于 z_0 是 G_0 的内点, 故有 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$. 由于 $\operatorname{diam} F_n \to 0$, 故当 n 充分大时 $F_n \subset B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$, 这就是说 G_0 覆盖了 F_n, 这与 (iii) 矛盾. 因而 E 是紧集.

现在证明必要性. 只要对扩充平面的情形来证明就够了, 因为如果一个集对扩充平面是闭的, 它又不包含无穷远点, 那么它必然是有界的. 设 E 是一个紧集, 我们要证明它是闭集, 只要证明 E^c 是开集即可. 为此, 任取 $a \in E^c$, 只要证明 a 是 E^c 的内点就行了. 取这样的开集族 $\mathscr{F}$: 凡是闭包不包含 a 点的开集都属于 $\mathscr{F}$. 因为 $a \in E^c$, 因此对 E 中每一点 z, 都能找到它的邻域 $B(z, \varepsilon)$, 使得 $a \notin \overline{B(z, \varepsilon)}$, 所以 $B(z, \varepsilon) \in \mathscr{F}$. 这就是说,$\mathscr{F}$ 是 E 的一个开覆盖. 由于 E 是紧集, 故能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$, 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$. 但 $a \notin \overline{G_j}, j = 1, \cdots, n$, 所以 $a \in \bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c$. 显

然,$\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$ 是一个开集,于是由开集和内点的定义可知,存在 $r>0$,使得 $B(a,r)\subset\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c$. 而且从命题 1.6(ii)得

$$B(a,r)\subset\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{G_j})^c=\bigcap_{j=1}^{n}(G_j^c)^\circ\subset\bigcap_{j=1}^{n}G_j^c=\left(\bigcup_{j=1}^{n}G_j\right)^c\subset E^c,$$

这就证明了 a 是 E^c 的内点,即 E^c 是开集.

□

定义 1.16

设 $E,F\subseteq\mathbb{C}$ 是任意两个集,E,F 间的距离定义为

$$d(E,F)=\inf\{|z_1-z_2|:z_1\in E,z_2\in F\}.$$

如果 $E=\{a\}$ 是由一个点所构成的集,那么 a 和 F 间的距离为

$$d(a,F)=\inf\{|a-z|:z\in F\}.$$

♣

命题 1.8

设 $E,F\subseteq\mathbb{C}$ 是任意两个集.

(1) 如果 F 是闭集,$a\notin F$, 那么 $d(a,F)>0$.

(2) 如果 E 是有限点集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 当然也有 $d(E,F)>0$.

♠

证明

(1) 此时必有 $\varepsilon>0$, 使得 $B(a,\varepsilon)\cap F=\varnothing$, 因而 $d(a,F)\geqslant\varepsilon>0$.

(2)

□

定理 1.9

设 $E\subseteq\mathbb{C}$ 是紧集,$F\subseteq\mathbb{C}$ 是闭集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 则 $d(E,F)>0$.

♡

注 若 E 是无穷闭集,F 也是闭集, 但 E 不是紧集, 且 $E\cap F=\varnothing$, 这时 $d(E,F)>0$ 未必成立.

例如,E 是整个实轴,$F=\{z=x+\mathrm{i}e^x:-\infty<x<\infty\}$, 则 E 和 F 都是 $\mathbb{C}$ 中的闭集, 而且 $E\cap F=\varnothing$, 但 $d(E,F)=0$.

笔记 从这个定理可以看出, 紧集之所以重要, 在于它保留了大部分有限集的性质.

证明 证法一:任取 $a\in E$, 则 $a\notin F$, 所以 $d(a,F)>0$. 今以 a 为中心、$\frac{1}{2}d(a,F)$ 为半径作一圆盘, 当 a 跑遍集 E 时, 这些圆盘所组成的开集族就是 E 的一个开覆盖. 因为 E 是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$ 来覆盖 E, 其中,$G_j=B\left(a_j,\frac{1}{2}d(a_j,F)\right)$,$j=1,\cdots,n$. 记

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2}d(a_1,F),\cdots,\frac{1}{2}d(a_n,F)\right\}.$$

今任取 $z_1\in E$, 则必有某个 G_j, 使得 $z_1\in G_j$, 因而

$$|z_1-a_j|<\frac{1}{2}d(a_j,F).$$

任取 $z_2\in F$, 当然 $|z_2-a_j|\geqslant d(a_j,F)$, 于是

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_2-a_j|-|z_1-a_j|\geqslant d(a_j,F)-\frac{1}{2}d(a_j,F)=\frac{1}{2}d(a_j,F)\geqslant\delta.$$

所以

$$d(E,F)=\inf\{|z_1-z_2|:z_1\in E,z_2\in F\}\geqslant\delta>0.$$

证法二:定义函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 为 $f(z)=d(z,F):=\inf\limits_{w\in F}|z-w|$. 因 F 是闭集, 故 $z\in F$ 当且仅当 $f(z)=0$. 在不等

式

$$|z_1 - w| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - w|, \quad |z_2 - w| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1 - w|,$$

中关于 $w \in F$ 取下确界得

$$f(z_1) \leqslant f(z_2) + |z_1 - z_2|, \quad f(z_2) \leqslant f(z_1) + |z_1 - z_2|.$$

因此

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

这说明 f 是连续函数. 由定理 1.16知, f 限制在紧集 E 上可取到最小值 $f(z_0) = d(E, F)$, $z_0 \in E$. 因 E 与 F 不交, 故 $z_0 \notin F$. 又因为 $z \in F$ 当且仅当 $f(z) = 0$, 所以 $f(z_0) > 0$.

□

定理 1.10 (Bolzano-Weierstrass 定理)

$\mathbb{C}$ 中任一无穷点集至少有一个极限点.

♡

注 这个定理也可以用证明Cantor 闭集套定理的方法给出另一个证明.

证明 设 E 是一个无穷点集, 如果 E 是无界集, 那么无穷远点便是它的极限点. 今设 E 是有界集, 如果它没有极限点, 那么它是一个闭集. 任取 $z \in E$, 由于它不是 E 的极限点, 故必存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z, \varepsilon)$ 中除 z 外不再有 E 中的点.z 取遍整个 E, 由这种 $B(z, \varepsilon)$ 构成的开集族便是 E 的一个开覆盖, 由Heine-Borel 定理, 能从中选出有限个来覆盖 E. 因为每个开集只包含 E 的一个点, 这说明 E 是一个有限集, 与 E 是无穷点集的假定矛盾, 因而 E 必有极限点.

□

1.6 曲线和区域

定义 1.17 (连续曲线)

所谓**连续曲线**, 是指定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个复值连续函数 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, 写为

$$z = \gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

这里 $x(t)$,$y(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数.

如果用 γ^* 记 γ 的像点所成的集合:

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\},$$

那么 γ^* 是 $\mathbb{C}$ 上的紧集. 曲线 γ 的方向就是参数 t 增加的方向, 在这个意义下,$\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 分别称为 γ 的**起点**和**终点**.

如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即起点和终点重合, 就称 γ 为**闭曲线**.

如果曲线 γ 仅当 $t_1 = t_2$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**.

如果只有当 $t_1 = a$,$t_2 = b$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单闭曲线**或 **Jordan 闭曲线**, 或简称**围道**.

沿着一条简单闭曲线 C 有两个相反的方向, 其中一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时,C 的内部一直在 C 的左方, 称为**正方向**; 另一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时,C 的外部一直在 C 的左方, 称为**负方向** (见图 1.5). 记曲线 C 的负方向曲线为 C^- 或 $-C$.

♣

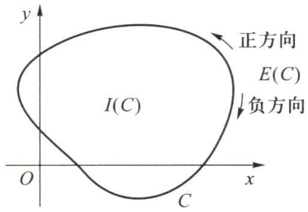

图 1.5

定义 1.18

设区域 D 的边界 L 由一条或几条光滑曲线所组成. 边界曲线的**正方向**规定为: 当人沿边界行走时, 区域 D 总在他的左边, 如图 1.6所示. 与上述规定的方向相反的方向称为**负方向**. 记区域 D 的边界 L 的负方向曲线为 L^- 或 $-L$.

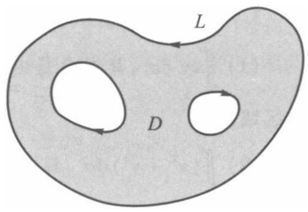

图 1.6

定义 1.19

设 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是复平面内一条曲线. 对区间 $[a,b]$ 作分割 $T: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 得到以 $z_k=\gamma(t_k)(k=0,1,\cdots,n)$ 为顶点的折线 P, 那么 P 的长度为

$$|P|=\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

如果不论如何分割区间 $[a,b]$, 所得折线的长度都是有界的, 就称曲线 γ 是**可求长的**,γ 的长度定义为 $|P|$ 的上确界, 即

$$\sup_{T}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

如果 $\gamma'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$ 存在, 且 $\gamma'(t)\neq 0$, 那么 γ 在每一点都有切线,$\gamma'(t)$ 就是曲线 γ 在 $\gamma(t)$ 处的切向量, 它与正实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(t)$. 如果 $\gamma'(t)$ 是连续函数, 那么 γ 的切线随 t 而连续变动, 这时称 γ 为**光滑曲线**. 在这种情况下,γ 的长度为

$$\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=\int_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

曲线 γ 称为**逐段光滑的**, 如果存在 $t_0,t_1,\cdots,t_n$, 使得 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,γ 在每个参数区间 $[t_{j-1},t_j]$ 上是光滑的, 在每个分点 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 处 γ 的左右导数存在.

定义 1.20

平面点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 称为是**连通的**, 如果对任意两个不相交的非空集 E_1 和 E_2, 满足

$$E=E_1\cup E_2,$$

那么 E_1 必含有 E_2 的极限点, 或者 E_2 必含有 E_1 的极限点. 也就是说,$E_1\cap\overline{E_2}$ 和 $\overline{E_1}\cap E_2$ 至少有一个非空.

命题 1.9

$\mathbb{C}$ 中的开集 E 是连通的充分必要条件是 E 不能表示为两个不相交的非空开集的并.

证明 设开集 E 是连通的, 如果存在不相交的非空开集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 由于 E_1 中的点都是 E_1 的内点,E_2 中的点都是 E_2 的内点, 因此 E_1 中没有 E_2 的极限点,E_2 中也没有 E_1 的极限点, 这与 E 的连通性相矛盾. 这就证明了条件的必要性. 反之, 如果开集 E 是不连通的, 则必存在不相交的非空集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$, 且 E_1 中无 E_2 的极限点,E_2 中无 E_1 的极限点. 由此可见,E_1 和 E_2 均为开集. 这就证明了条件的充分性.

□

定理 1.11

平面上的非空开集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是连通的充分必要条件是:E 中任意两点可用位于 E 中的折线连接起来.

证明 先证必要性. 设 E 是平面上一个非空的连通的开集, 任取 $a \in E$, 定义 E 的子集 E_1,E_2 如下:

$$E_1 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 可用位于} E \text{ 中的折线连接}\},$$

$$E_2 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 不能用位于} E \text{ 中的折线连接}\}.$$

显然,$E = E_1 \cup E_2$, 而且 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 现在证明 E_1 和 E_2 都是开集. 任取 $z_0 \in E_1$, 因 E 是开集, 故必有 z_0 的邻域 $B(z_0, \delta) \subset E$. 这一邻域中的所有点当然可用一条线段与 z_0 相连, 因而可用位于 E 中的折线与 a 相连, 即 $B(z_0, \delta) \subset E_1$, 所以 E_1 是开集. 再任取 $z_0' \in E_2$, 则必有 z_0' 的邻域 $B(z_0', \delta') \subset E$, 如果此邻域中有一点能用一条折线与 a 点相连, 那么 z_0' 能用线段与该点相连, 因而 z_0' 能用折线与 a 点相连, 这与 z_0' 的定义矛盾. 因而 $B(z_0', \delta') \subset E_2$, 即 E_2 也是开集. 由 E 的连通性知道,E_1,E_2 中必有一个是空集. 由于 $a \in E_1$, 故 E_2 是空集. 因而 E 中所有点都能用折线与 a 相连, 而 E 中任意两点可以用经过 a 的折线相连, 这就证明了必要性.

再证条件的充分性. 如果存在两个不相交的非空开集 E_1,E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 任取 $z_1 \in E_1$,$z_2 \in E_2$, 由假定, 这两点可用 E 中的折线连接, 因而折线中必有一条线段把 E_1 中的一点与 E_2 中的一点连接起来. 不妨设这条线段连接的就是 z_1 和 z_2, 该线段的参数表示为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

其中,$t \in [0, 1]$. 今设

$$T_1 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_1\},$$

$$T_2 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_2\}.$$

则 T_1,T_2 是非空的不相交的开集, 而且 $T_1 \cup T_2 = (0, 1)$, 这与区间的连通性相矛盾.

□

定义 1.21 (区域)

非空的连通开集称为**区域**. 若 E, D 都是区域且 $E \subseteq D$, 则称 E 是 D 的**子区域**.

区域 D 并上它的边界 ∂D 称为**闭域**, 记为 $\overline{D} = D \cup \partial D$.

笔记 从定理 1.11知道, 区域中任意两点必可用位于区域中的折线连接起来.

从几何上来看, 一个区域就是平面上连成一片的开集. 例如, 单位圆的内部、上半平面、下半平面等都是区域的例子.

定理 1.12 (Jordan 定理)

复平面内任一简单闭曲线 C 将 z 平面惟一地分成 $C, I(C)$ 及 $E(C)$ 三个点集, 即 $\mathbb{C} = C \cup I(C) \cup E(C)$. 它们具有如下性质:

(1) 彼此不交.

(2) $I(C)$ 是一个有界区域, 称为 C 的**内部**.

(3) $E(C)$ 是一个无界区域, 称为 C 的**外部**.

(4) C 是 $I(C), E(C)$ 的共同边界. 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$, 另一个端点属于 $E(C)$, 则 P 必与 C 有交点.

笔记 单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$ 和圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 都是区域, 但它们从函数论的角度来看有很大的差别, 原因是前者是单连通的, 而后者则不是.

证明

□

定义 1.22

区域 D 称为是**单连通区域**, 如果 D 内任意简单闭曲线的内部仍在 D 内. 不是单连通的区域称为是**多连通区域**.

所含不止一个点的闭集 E, 如果不能划分为两个无公共点的非空闭集, 则称 E 为**连续点集**. 空集与所含只有一个点的集, 称为**退化连续点集**.

若区域 D 的边界是互不相交的两个、三个 $\cdots\cdots n$ 个连续点集, 则分别称 D 为**二连通、三连通** $\cdots\cdots$ **n 连通的区域**.

♣

注 简单闭曲线中也可以有退化成一条简单曲线或一点的, 即一条简单曲线或一点也是简单闭曲线.

笔记 显然在简单闭曲线 C 的内部 $I(C)$ 无论怎样画简单闭曲线 Γ, 都有 Γ 的内部 $I(\Gamma)$ 必全含于 $I(C)$.

例题 1.7 单位圆盘是单连通的, 圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 是二连通的, 除去圆心的单位圆盘也是二连通的, 除去圆心和线段 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 的单位圆盘则是一个三连通区域.

1.7 复变函数的极限和连续性

定义 1.23

设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z \in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个**单值复变函数**, 记为 $w = f(z)$ 或 $f : E \to \mathbb{C}$.E 称为 f 的**定义域**, 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 称为 f 的**值域**.$w = f(z)$ 的值域所在的平面称为 **w 平面**.

如果对于 $z \in E$, 对应的 w 有几个或无穷多个, 则称在 E 上确定了一个**多值函数**.

复变函数是定义在复平面上的, 它的值域也在复平面上, 因此复变函数也称为**映射**或**变换**, 它把一个复平面上的平面点集映成另一个复平面上的平面点集. 与 $z \in E$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 在映射 f 下的**像点**,z 就称为 w 的**原像**. 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 也称为 E 在映射 f 下的**像**, 记为 $f(E)$. 如果 $f(E) \subseteq F$, 就说 f 把 E **映入** F, 或者说 f 是 E 到 F 中的映射. 如果 $f(E) = F$, 就说 f 把 E **映为** F, 或者说 f 是 E 到 F 上的**满变换**.

♣

注 我们知道, 任意一个复数 $z(z \neq 0)$ 都有无穷多个辐角. 因此, 辐角函数 $w = \operatorname{Arg} z$ 是一个多值函数. 它的定义域是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$(在 $z = 0$ 处辐角无意义).

定义 1.24

设 L 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内一条简单曲线,z_0 是 L 的起点,z_1 是 L 的终点. 当 z 沿 L 从 z_0 连续变动到 z_1 时,$\overrightarrow{Oz}$ 所旋转的角称作 $\operatorname{Arg} z$ 在 L 上的改变量, 简称**辐角改变量**, 记作 $\Delta_L \operatorname{Arg} z$. 显然有

$$\Delta_L \operatorname{Arg} z = -\Delta_{L^-} \operatorname{Arg} z.$$

并且必存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\Delta_L \operatorname{Arg} z = \arg z_2 - \arg z_1 + 2k\pi.$$

♣

定义 1.25

若 $w = f(z)$ 是复平面点集 E 到 F 的满变换, 且对 F 中的每一点 w, 在 E 中有一个 (或至少有两个) 点与之相对应, 则在 F 上确定了一个单值 (或多值) 函数, 记作 $z = f^{-1}(w)$, 它就称为函数 $w = f(z)$ 的**反函数**或称

为变换 $w=f(z)$ 的**逆变换**; 若 $z=f^{-1}(w)$ 也是 F 到 E 的单值变换, 则称 $w=f(z)$ 是 E 到 F 的**双方单值变换**或**一一变换**.

注 从上述反函数的定义可以看出

$$w=f[f^{-1}(w)],\quad \forall w\in F.$$

且当反函数也是单值函数时, 还有

$$z=f^{-1}[f(z)],\quad \forall z\in E.$$

定义 1.26

设 $f:D\to\mathbb{C}$ 是一个复变函数, 如果对区域 D 中任意两点 $z_1,z_2(z_1\neq z_2)$, 必有 $f(z_1)\neq f(z_2)$, 就称 f 在 D 中是**单叶的**,D 称为 f 的**单叶性区域**.

命题 1.10

如果 f 在 D 中是单叶的,$f(D)=G$, 那么 f 是 D 到 G 之上的一一映射.

证明 由单叶的定义和双射的定义立得.

□

定理 1.13

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 用 u 和 v 记 $w=f(z)$ 的实部和虚部, 则有

$$w=f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

注 这个定理表明: 一个复变函数等价于两个二元的实变函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$.

笔记 例如 $w=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$, 它等价于 $u=x^2-y^2$ 和 $v=2xy$ 两个二元函数;
再如 $w=|z|$, 它等价于 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $v=0$ 这两个二元函数.

定义 1.27

设 f 是定义在点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在与 ε 有关的 $\delta>0$, 使得当 $z\in E$ 且 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有 $|f(z)-a|<\varepsilon$, 就说当 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 有极限 a, 记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$.

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在与 ε 有关的正数 δ, 使得当 $z\in B(z_0,\delta)\cap E$ 且 $z\neq z_0$ 时有 $f(z)\in B(a,\varepsilon)$.

特别地, $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=a$ 定义为: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $R(\varepsilon)>0$, 使得当 $|z|>R(\varepsilon)$ 且 $z\in E$ 时, 有 $f(z)\in B(a,\varepsilon)$.

$\lim\limits_{z\to z_0}\lim f(z)=\infty$ 定义为: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $z\in B(z_0,\delta(\varepsilon))\cap E$ 时, 有 $|f(z)|>\varepsilon$.

定理 1.14

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=\alpha,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=\beta.$$

笔记 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

证明 设 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta,z_0=x_0+\mathrm{i}y_0,f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 由下面的不等式

$$|u(x,y)-\alpha|\leqslant|f(z)-a|\leqslant|u(x,y)-\alpha|+|v(x,y)-\beta|,$$

$$|v(x,y)-\beta| \leqslant |f(z)-a| \leqslant |u(x,y)-\alpha|+|v(x,y)-\beta|$$

知道, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\alpha, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\beta.$$

□

命题 1.11

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\eta$, 试证函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某一去心邻域内是有界的.

证明 因

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\eta,$$

则对任给的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 只要 $0<|z-z_0|<\delta$, 就有

$$|f(z)-\eta|<\varepsilon,$$

由此可得

$$|f(z)|-|\eta|<\varepsilon,$$

于是

$$|f(z)|<|\eta|+\varepsilon,$$

所以, 在点 z_0 的去心邻域 $N_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}$ 内 $f(z)$ 是有界的.

□

定义 1.28

我们说 f 在点 $z_0\in E\subseteq\mathbb{C}$ 连续, 如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

如果 f 在集 E 中每点都连续, 就说 f 在集 E 上**连续**.

定理 1.15

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 作为二元函数在 (x_0,y_0) 处连续.

证明 由定理 1.14易得.

□

命题 1.12

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 连续, 且 $f(z_0)\neq 0$, 试证 $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内恒不为零.

证明 因 $f(z)$ 在点 z_0 连续, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 只要 $|z-z_0|<\delta$, 就有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

特别, 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(z_0)|}{2}>0$, 则由上面的不等式得

$$|f(z)|>|f(z_0)|-\varepsilon=|f(z_0)|-\frac{|f(z_0)|}{2}=\frac{|f(z_0)|}{2}>0,$$

因此,$f(z)$ 在点 z_0 的 δ 邻域 $N_\delta(z_0)$ 内就恒不为零.

□

定义 1.29

f 在 $E \subseteq \mathbb{C}$ 上**一致连续**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$, 对 E 上任意的 z_1, z_2, 只要 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

♣

定理 1.16

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集,$f : E \to \mathbb{C}$ 在 E 上连续, 那么

(1) f 在 E 上有界;

(2) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值, 即存在 $a, b \in E$, 使得对每个 $z \in E$, 都有

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(b)|;$$

(3) f 在 E 上一致连续.

♡

证明

(1) 由Heine-Borel 定理, 只需证明 $f(E)$ 是紧集. 为此, 取 $f(E)$ 的一个开覆盖 $\mathcal{F}$. 任取开集 $U \in \mathcal{F}$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(U)$ 是开集, 因此 $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{F}\}$ 是 E 的开覆盖. 由 E 的紧性, 该开覆盖存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_k) | 1 \leqslant k \leqslant m\}$. 由此得 $f(E)$ 的有限子覆盖 $\{U_k | 1 \leqslant k \leqslant m\}$.

(2) 记 $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$, 于是对每一自然数 n, 必有 $z_n \in E$, 使得

$$M - \frac{1}{n} \leqslant |f(z_n)| \leqslant M. \tag{1.4}$$

因为 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, 由Heine-Borel 定理,E 为有界闭集. 再由Bolzano-Weierstrass 定理,$\{z_n\}$ 必有极限点, 即有一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 设其极限为 a, 则 $a \in E$. 把(1.4)式写成

$$M - \frac{1}{n_k} \leqslant |f(z_{n_k})| \leqslant M,$$

让 $k \to \infty$, 并注意到 f 在 a 处的连续性, 即得 $|f(a)| = M$. 同理可证, 存在 $b \in E$, 使得 $|f(b)| = \inf\{|f(z)| : z \in E\}$.

(3) 任取 $\varepsilon > 0$. 对任意 $z \in E$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2}))$ 为包含 z 的开集. 因此有 $\delta_z > 0$, 使

$$B(z, \delta_z) \subseteq f^{-1}(B(f(z), \frac{\varepsilon}{2})). \tag{1.5}$$

显然集族 $\{B(z, \frac{\delta_z}{2}) \mid z \in E\}$ 是 E 的开覆盖. 由 E 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{B(z_k, \frac{\delta_k}{2}) \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \supseteq E$. 取 $\delta = \dfrac{\min\{\delta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}}{2}$. 对任意 $p, q \in E$ 且满足 $|p - q| < \delta$, 不妨设 $p \in B(z_1, \frac{\delta_1}{2})$. 由命题 1.2, 有

$$|z_1 - q| \leqslant |z_1 - p| + |p - q| < \frac{\delta_1}{2} + \delta \leqslant \delta_1.$$

因此 $p, q \in B(z_1, \delta_1)$, 再由(1.5)式知 $f(p), f(q) \in B(f(z_1), \frac{\varepsilon}{2})$, 从而

$$|f(p) - f(q)| \leqslant |f(p) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此得 f 在 E 上一致连续.

□

第 2 章 全纯函数

2.1 复变函数的导数

定义 2.1

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 D 内有定义, 如果极限

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (\Delta z \neq 0), \tag{2.1}$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可导**或**可导**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在区域 D 中每点都可导, 就称 f 是区域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**或**正则函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**.

♣

定义 2.2

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析, 但在 z_0 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点, 则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**奇点**.

♣

定义 2.3

设函数 $w = f(z)$ 在点 z 可导, 于是

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

即

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0,$$

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \varepsilon,$$

其中 $|\varepsilon| = |\eta \cdot \Delta z|$ 为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小. 称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w = f(z)$ 在点 z 的**微分**, 记为 $\mathrm{d}w$ 或 $\mathrm{d}f(z)$, 此时也称 $f(z)$ 在点 z **可微**, 即

$$\mathrm{d}w = f'(z)\Delta z. \tag{2.2}$$

特别, 当 $f(z) = z$ 时,$\mathrm{d}z = \Delta z$. 于是式(2.2)变为

$$\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z,$$

即

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

由此可见:$f(z)$ 在点 z 可导与 $f(z)$ 在点 z 可微是等价的.

♣

命题 2.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续.

♠

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (2.1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{2.3}$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续.

□

例题 2.1 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

注 但容易看出这个函数在 $\mathbb{C}$ 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z)=\mathrm{Re}z, f(z)=|z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z\in\mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=-1$. 因此, 当 $\Delta z\to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbb{C}$ 中处处不可导.

□

定理 2.1

(1) 若 f 和 g 在区域 D 中全纯, 那么 $f\pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z\in D, g(z)\neq 0$, 那么 $\dfrac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) **复合函数的求导法则:** 设 D_1, D_2 是 $\mathbb{C}$ 中的两个区域, 且

$$f:D_1\to D_2,$$
$$g:D_2\to\mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h=g\circ f$ 是 $D_1\to\mathbb{C}$ 的全纯函数, 记 $\zeta=f(z)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}h(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}g(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z},$$

这里 $g\circ f$ 是 f 和 g 的复合函数:$g\circ f(z)=g(\zeta)=g[f(z)]$.

(3) **反函数的求导法则:** 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内是单叶解析的, 其反函数 $z=g(w)$ 在区域 $E=f(D)$ 内连续, 则 $g(w)$ 在 E 内解析, 且

$$\frac{\mathrm{d}g(w)}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)}.$$

♡

证明

(1)

(2) 设 z_0 是 D 内任意一点. 由条件知 $\zeta_0=f(z_0)\in E, g(\zeta)$ 在 ζ_0 可导, 所以

$$g(\zeta)-g(\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\rho(\zeta-\zeta_0),$$
$$\Delta g=g'(\zeta_0)\Delta\zeta+\rho\Delta\zeta,$$

其中 ρ 是随 $\Delta\zeta\to 0$ 而趋于零的复数. 将 $\zeta=f(z),\zeta_0=f(z_0)$ 代入上式, 并用 Δz 除等式两边, 得到

$$\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'(\zeta_0)\frac{\Delta f}{\Delta z}+\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}.$$

因为 f 在 z_0 处可导, 所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

从而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\rho f'(z_0)=0,$$

于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'(\zeta_0)f'(z_0).$$

因为 z_0 是 D 内任意一点, 所以

$$h'(z)=g'(\zeta_0)f'(z)$$

在 D 内成立.

(3) 设 $w_0\in E$,$z_0=g(w_0)$, 由 $z=g(w)$ 是 $w=f(z)$ 的反函数知,$w=f[g(w)]$, 故

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{g(w)-g(w_0)}{f[g(w)]-f[g(w_0)]}=\frac{1}{\frac{f[g(w)]-f[g(w_0)]}{g(w)-g(w_0)}}.$$

因为 $g(w)$ 在 w_0 连续, 所以 $\lim\limits_{w\to w_0}g(w)=g(w_0)$, 于是

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{f'[g(w_0)]},$$

定理证毕.

□

定理 2.2 (复变函数 L'Hospital 法则)

若 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在点 z_0 解析, 且 $f(z_0)=g(z_0)=0,g'(z_0)\neq 0$, 则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

证明 因为 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 点解析, 则 $f'(z_0)$ 及 $g'(z_0)$ 存在. 所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□

2.2 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.4

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在区域 D 上的函数,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in D$. 我们说 f 在 z_0 处**实可微**, 是指 u 和 v 作为 x,y 的二元函数在 (x_0,y_0) 处可微.

定理 2.3

如果 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处实可微, 则有极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+\mathrm{i}\Delta y)-f(z_0)}{\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),$$

分别记为 $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, 也简记为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

称为 f 的**一阶偏导数**. 与实变函数中的偏导数一样, 可同理定义 f 的 k **阶偏导数**.

证明

□

定义 2.5

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数, 把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量, 定义算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2.4}$$

注 为什么要像(2.4)式那样来定义算子 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 呢？这是因为如果把复变函数 $f(z)$ 写成

$$f(x,y)=f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},-\mathrm{i}\frac{z-\bar{z}}{2}\right),$$

把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量, 分别对 z 和 $\bar{z}$ 求偏导数, 则得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

这就是表达式(2.4)的来源. 这说明在进行微分运算时, 可以把 $z,\bar{z}$ 看成独立的变量.

命题 2.2

设 $f:D\to\mathbb{C}$ 是定义在区域 D 上的函数,$z_0\in D$, 那么 f 在 z_0 处实可微的充分必要条件是

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|). \tag{2.5}$$

成立.

证明 设 f 在 z_0 处实可微, 由二元实值函数可微的定义, 有

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|), \tag{2.6}$$
$$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|), \tag{2.7}$$

这里,$|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 于是

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+\mathrm{i}(v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0))\\&=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\Delta y+o(|\Delta z|)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|).\end{aligned}$$

把 $\Delta x=\frac{1}{2}(\Delta z+\overline{\Delta z})$,$\Delta y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\Delta z-\overline{\Delta z})$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(\Delta z+\overline{\Delta z})-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(\Delta z-\overline{\Delta z})+o(|\Delta z|)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|).\end{aligned}$$

从而上式可写为

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|). \tag{2.8}$$

容易看出(2.8)式和(2.6)(2.7)两式等价.

□

定理 2.4

设 f 是定义在区域 D 上的函数,$z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. 并且 f 在可微的情况下,$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

证明 如果 f 在 z_0 处可微, 由(2.3)式得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

与(2.5)式比较就知道,f 在 z_0 处是实可微的, 而且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

反之, 若 f 在 z_0 处实可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, 则由(2.5)式得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

由此即知

$$\lim_{\Delta z} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

故 f 在 z_0 处可微, 而且 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. □

定义 2.6 (Cauchy-Riemann 方程)

设 f 是定义在区域 D 上的函数,$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 称为 **Cauchy – Riemann 方程**.

笔记 从这个方程可以得到 f 的实部和虚部应满足的条件.

定理 2.5 (Cauchy-Riemann 方程的等价定义)

设 $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 则

(i)Cauchy-Riemann 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.9}$$

(ii)Cauchy-Riemann 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 等价于

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0.$$

(iii) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 进而 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), f(z) = u(r, \theta) + \mathrm{i}v(r, \theta)$, 则 Cauchy-Riemann 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

证明 (i) 由(2.4)式得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

因此 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 就等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(ii) 又注意到

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

故 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 也等价于 $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$.

(iii) 直接计算得

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

再由定理 11.8知

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \theta}\bigg/\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial \theta}\bigg/\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \sin\theta,$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial r}\bigg/\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial r}\bigg/\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\iff \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r} \\
&\iff \frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\cos\theta, \\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\iff \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r} \\
&\iff \frac{\partial u}{\partial r}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\cos\theta = -\frac{\partial v}{\partial r}\cdot r\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\sin\theta.
\end{aligned}$$

由 (i) 可知 Cauchy-Riemann 方程等价于 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, 故此时 Cauchy-Riemann 方程等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot r\cos\theta - \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\sin\theta = \dfrac{\partial v}{\partial r}\cdot r\sin\theta + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\cos\theta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot r\sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\cos\theta = -\dfrac{\partial v}{\partial r}\cdot r\cos\theta + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\sin\theta. \end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

□

定理 2.6

设 $f = u + \mathrm{i}v$ 是定义在区域 D 上的函数,$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 且在 (x_0, y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

在可微的情况下, 有

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

这里的偏导数都在 (x_0, y_0) 处取值.

证明 由 定理 2.4 和 Cauchy-Riemann 方程的等价定义容易得到充要条件的证明. 再由 定理 2.4中的 $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ 和 Cauchy-Riemann 方程的等价定义可得, 在可微的情况下, 有

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) - \mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + 2\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

再由Cauchy-Riemann 方程的等价定义可得结论.

□

定义 2.7

1. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 我们用 $C(D)$ 记 D 上连续函数的全体, 用 $H(D)$ 记 D 上全纯函数的全体.
2. 设 $f = u + \mathrm{i}v$, 我们用 $C^1(D)$ 记有 1 阶连续偏导数的函数的全体. 用 $C^k(D)$ 记在 D 上有 k 阶连续偏导数的函数的全体,$C^\infty(D)$ 记在 D 上有任意阶连续偏导数的函数的全体.

命题 2.3

(1) $H(D) \subseteq C(D)$.

(2) $C^1(D) \subseteq C(D)$.

(3) 区域 D 上的全纯函数在 D 上有任意阶的连续偏导数, 并且有如下的包含关系:

$$H(D) \subseteq C^\infty(D) \subseteq C^k(D) \subseteq C^1(D) \subseteq C(D).$$

这里,k 是大于 1 的自然数.

证明

(1) 命题 2.1告诉我们,$H(D) \subseteq C(D)$.

(2) 设 $f = u + \mathrm{i}v$, 记 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}$. 我们用 $C^1(D)$ 记 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上连续的 f 的全体. 进而 u, v 关于 x, y 的偏导在 D 上都连续, 由多元微积分的知识知道,u, v 在 D 上都可微. 于是对于任意 $f \in C^1(D)$,f 在 D 上实可微, 从(2.8)式知道

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|).$$

令 $\Delta z \to 0$, 则 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 故 f 在 D 上连续, 因而 $C^1(D) \subseteq C(D)$.

(3)

□

例题 2.2 研究函数 $f(z)=z^n$,n 是自然数.

解 显然,$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, 且 f 在整个平面上是实可微的. 因而,f 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 而且

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=nz^{n-1}. \tag{2.10}$$

□

例题 2.3 研究函数 $f(z)=\mathrm{e}^{-|z|^2}$.

解 把 f 写为 $f(z)=\mathrm{e}^{-z\bar{z}}$, 于是 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=-\mathrm{e}^{-z\bar{z}}z$, 它只有在 $z=0$ 处才等于零. 因此,$\mathrm{e}^{-|z|^2}$ 只有在 $z=0$ 处可微, 它在任何点处都不是全纯的. 但它对 x,y 有任意阶连续偏导数, 所以它是 $C^\infty(\mathbb{C})$ 中的函数.

□

命题 2.4

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,$f\in H(D)$. 如果对每一个 $z\in D$, 都有 $f'(z)=0$, 证明 f 是一常数.

证明 因为 $f'(z)=0$, 所以由定理 2.6可知 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, 并且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$. 因此 u,v 都是常数, 故 f 是一常数.

□

定义 2.8 (调和函数)

设 u 是区域 D 上的实值函数, 如果 $u\in C^2(D)$, 且对任意 $z\in D$, 有

$$\Delta u(z)=\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2}=0, \tag{2.11}$$

就称 u 是 D 中的**调和函数**. $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 **Laplace 算子**.

命题 2.5

设 $u\in C^2(D)$, 那么 $\Delta u=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}$.

证明 由(2.4)式, 有

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}&=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\Delta u.\end{aligned}$$

□

定理 2.7

设 $f=u+\mathrm{i}v\in H(D)$, 那么 u 和 v 都是 D 上的调和函数.

证明 因为 $f\in H(D)$, 由定理 2.6, 有

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0,\quad \frac{\partial\bar{f}}{\partial z}=0.$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}=\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z\partial\overline{z}}=0.$$

于是, 由 $u=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$ 即得

$$\Delta u=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}=0.$$

同理可证 $\Delta v=0$.

□

定义 2.9 (共轭调和函数)

设 u 和 v 是 D 上的一对调和函数, 如果它们还满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\tag{2.12}$$

就称 v 为 u 的**共轭调和函数**.

命题 2.6

全纯函数的实部和虚部就构成一对共轭调和函数.

证明 由定理 2.7和定理 2.6立得.

□

定理 2.8

设 u 是单连通区域 D 上的调和函数, 则必存在 u 的共轭调和函数 v, 使得 $u+\mathrm{i}v$ 是 D 上的全纯函数.

证明 因为 u 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

若令 $P=-\frac{\partial u}{\partial y}, Q=\frac{\partial u}{\partial x}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是一个全微分, 因而积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

与路径无关. 令

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y,$$

则

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+0+0+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

所以,v 就是要求的 u 的共轭调和函数.

□

2.3 导数的几何意义

命题 2.7

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z = \gamma(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

设 $\gamma(a) = z_0$, 且 $\gamma'(a) \neq 0$. 设 $w = f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ, 它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

则 σ 在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

或者写为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) - \mathrm{Arg}\gamma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0). \tag{2.13}$$

$\mathrm{Arg} f'(z_0)$ 就称为映射 $w = f(z)$ 在点 z_0 处的**转动角**.

笔记 这说明像曲线 σ 在 w_0 处的切线与正实轴的夹角与原曲线 γ 在 z_0 处的切线与正实轴的夹角之差总是 $\mathrm{Arg} f'(z_0)$, 而与曲线 γ 无关.

证明 由定义 1.19可知,γ 在点 z_0 处的切线与正实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(a)$. 由于 $\sigma'(a) = f'(\gamma(a))\gamma'(a) = f'(z_0)\gamma'(a) \neq 0$, 所以再结合定理 1.2(1)可得 σ 在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

□

定义 2.10

若 $w = f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 并且在 z_0 处满足: 过 z_0 的任意两条曲线 C_1, C_2 经映射后得到的曲线 Γ_1, Γ_2, 其夹角 (包括大小和方向) 与原曲线 C_1, C_2 的夹角相等. 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**保角点**, 也称 f 在 z_0 点是**保角的**. 若 $f(z)$ 在 D 内所有点都是保角的, 则称 $f(z)$ 是 D 上的**保角变换**.

注 夹角的“方向”指从曲线 C_1 到 C_2 的旋转方向, 与映射后从 Γ_1 到 Γ_2 的旋转方向一致, 即保持“定向”.

定理 2.9

全纯函数在其导数不为零的点处是保角的.

证明 如果过 z_0 点作两条光滑曲线 γ_1, γ_2, 它们的方程分别为

$$z = \gamma_1(t),\ a \leqslant t \leqslant b \text{和} z = \gamma_2(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

且 $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_0$(图 2.1(a)). 映射 $w = f(z)$ 把它们分别映为过 w_0 点的两条光滑曲线 σ_1 和 σ_2(图 2.1(b)), 它们的方程分别为

$$w = \sigma_1(t) = f(\gamma_1(t)),\ a \leqslant t \leqslant b \text{和} w = \sigma_2(t) = f(\gamma_2(t)),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

由 (2.13)式可得

$$\operatorname{Arg}\sigma_1'(a) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(a) = \operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg}\sigma_2'(a) - \operatorname{Arg}\gamma_2'(a),$$

即

$$\operatorname{Arg}\sigma_2'(a) - \operatorname{Arg}\sigma_1'(a) = \operatorname{Arg}\gamma_2'(a) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(a). \tag{2.14}$$

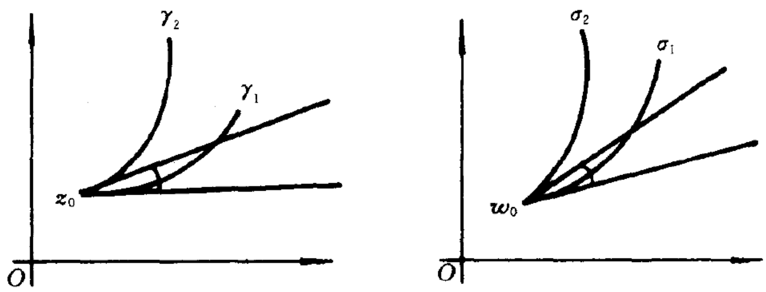

图 2.1

上式左端是曲线 σ_1 和 σ_2 在 w_0 处的夹角 (两条曲线在某点的夹角定义为这两条曲线在该点的切线的夹角), 右端是曲线 γ_1 和 γ_2 在 z_0 处的夹角.(2.14)式说明, 如果 $f'(z_0) \neq 0$, 那么在映射 $w = f(z)$ 的作用下, 过 z_0 点的任意两条光滑曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的.

□

推论 2.1

设 $w = f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 则 f 在 z_0 上是保角的的充要条件是 $f(z)$ 在 D 上全纯且 $f'(z_0) \neq 0$. ♡

证明 由定理 2.9立得.

□

定义 2.11 (伸缩率)

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z = \gamma(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

设 $\gamma(a) = z_0$, 且 $\gamma'(a) \neq 0$. 设 $w = f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ(图 2.2), 它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的**伸缩率**. ♣

笔记 由于

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

所以, 当 z 沿着 γ 趋于 z_0 时, 有

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z\to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

这说明像点之间的距离与原像之间的距离之比只与 z_0 有关, 而与曲线 γ 无关.

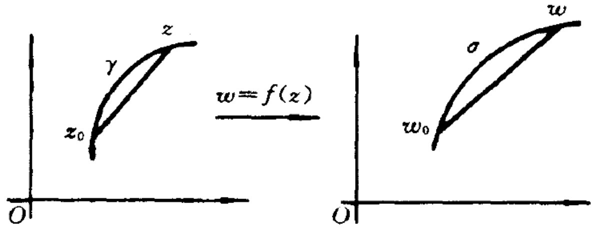

图 2.2

2.4 初等全纯函数

2.4.1 指数函数

定义 2.12 (指数函数)
设 $z = x + \mathrm{i}y$, 定义

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

命题 2.8

(i) e^z 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 而且

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z.$$

进而, 对任意固定的 $z_0 \in \mathbb{C}$, 任意的 $z \in \mathbb{C}$, 有 $(e^{z_0 z})' = z_0 e^z$.

(ii) 对任意 $z \in \mathbb{C}$, 都有 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(iii) 对于任意 $z \in \mathbb{C}$,$\mathrm{e}^z \neq 0$.

(iv) 对于任意 z_1, z_2, 有

$$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}.$$

(v) e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数.

证明

(i) e^z 在 $\mathbb{C}$ 上每点实可微是显然的. 经验证它满足 Cauchy-Riemann 方程. 因为 $u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y$,$v(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故由定理 2.6,e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 而且

$$(\mathrm{e}^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y = \mathrm{e}^z.$$

进而, 由定理 2.1(2)知 $(e^{z_0 z})' = z_0 e^{z_0 z}$.

(ii) 当 $z = x$ 时, 即 $y = 0$, 因而有 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x$; 当 $z = \mathrm{i}y$ 时,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$. 这样, 复数的三角表示 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 就可简单地写为 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(iii) 这是因为 $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$.

(iv) 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$,$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 直接计算即得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} &= \mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i}\sin y_1)\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2 + \mathrm{i}\sin y_2)\\ &= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + \mathrm{i}\sin(y_1+y_2))\\ &= \mathrm{e}^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

(v) 注意到

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z.$$

□

命题 2.9

求 $w = e^z$ 的单叶性区域.

解 如果 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 使得 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 即 $e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$, 那么 $x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 2k\pi, k$ 是任意整数, 也即 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$. 这就是说, 凡是不包含满足条件 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ 的 z_1, z_2 的区域都是 $w = e^z$ 的单叶性区域.

□

命题 2.10

区域

$$\{z = x + iy : 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\},\ k = 0, \pm 1, \cdots$$

都是 e^z 的单叶性区域, 它是平行于实轴、宽度为 2π 的带状区域.

笔记 由于 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数, 我们只要弄清 e^z 在区域 $\{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ 中的映射性质, 那么在其他带状区域中的性质是一样的.

证明 由命题 2.9不难验证.

□

命题 2.11

设 $w = e^z$, 考虑平行于实轴的直线 $\mathrm{Im}z = y_0$. 这条直线上的点的方程为

$$z = x + iy_0,\ -\infty < x < \infty,$$

则

(1) $w = e^z$ 把平行于实轴的直线 $\mathrm{Im}z = y_0$ 变成一条从原点出发的半射线, 它与实轴正方向的夹角是 y_0(图 2.3);

(2) $w = e^z$ 把带状区域 $\{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ 变成全平面除掉正实轴的区域 $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geqslant 0\}$;

(3) $w = e^z$ 把直线 $\mathrm{Im}z = 0$ 变成正实轴的上岸, 直线 $\mathrm{Im}z = 2\pi$ 变成正实轴的下岸;

(4) $w = e^z$ 把带状区域 $\{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$ 变成上半平面, 带状区域 $\{z = x + iy : \pi < y < 2\pi\}$ 变成下半平面.

一般来说,$w = e^z$ 把带状区域 $\{z = x + iy : \alpha < y < \beta, 0 < \alpha < \beta \leqslant 2\pi\}$ 变成角状区域 $\alpha < \arg w < \beta$.

证明 由条件可知

$$w = e^z = e^x e^{iy_0}.$$

这是一条从原点出发的半射线, 它与实轴正方向的夹角是 y_0(图 2.3). 当 y_0 从 0 变到 2π 时, 这条半射线的辐角也从 0 变到 2π. 因此,$w = e^z$ 把带状区域 $\{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ 变成全平面除掉正实轴的区域 $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geqslant 0\}$, 直线 $\mathrm{Im}z = 0$ 变成正实轴的上岸, 直线 $\mathrm{Im}z = 2\pi$ 变成正实轴的下岸; 带状区域 $\{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$ 变成上半平面, 带状区域 $\{z = x + iy : \pi < y < 2\pi\}$ 变成下半平面. 一般来说,$w = e^z$ 把带状区域 $\{z = x + iy : \alpha < y < \beta, 0 < \alpha < \beta \leqslant 2\pi\}$ 变成角状区域 $\alpha < \arg w < \beta$.

□

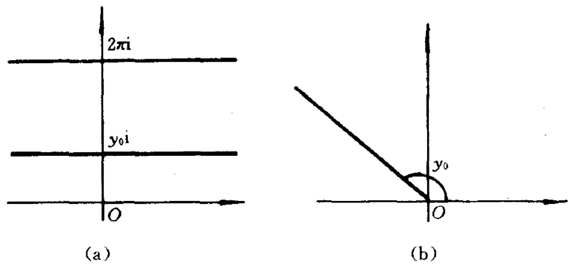

图 2.3

2.4.2 对数函数

定义 2.13 (支点)

如果当 z 沿着 z_0 的充分小邻域中的任意简单闭曲线绕一圈时, 多值函数 f 的值就从一支变到另一支, 那么称 z_0 为该多值函数 f 的一个**支点**.

定义 2.14

设 f 是定义在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上的多值函数, 如果存在一个子区域 $U \subseteq D$ 和一个函数 $g: U \to \mathbb{C}$, 满足

(1) g 是 U 上的单值函数;

(2) $g \in H(U)$;

(3) 对 $\forall z \in U, g(z)$ 是 $f(z)$ 的一个可能值.

那么称 g 为 f 在 U 上的一个**单值全纯分支**.

定义 2.15

我们把从原点出发并伸向无穷远的曲线叫做**割线**.

用来割破 z 平面, 借以分出多值函数 f 的单值全纯分支的割线, 称为 f 的**支割线**. 一般地说, 支割线可以区分为两岸. 如果支割线接近于平行 x 轴的方向, 就分成**上岸与下岸**; 如果支割线接近平行于 y 轴的方向, 就分成**左岸与右岸**. 每一单值分支在支割线的两岸取得不同的值.

注 对定义在区域 G 上的多值函数 $w = f(z)$, 对应于支割线的不同作法, 分支也就不同. 因为这时各分支的定义域 G 随支割线改变而改变, 其值域 $T_k\ (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 当然也要随支割线改变而改变. 但无论怎样, 各分支的总体仍然是 f, 因为改变后的 $T_k\ (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 仍然互不相交而填满 (都加上同一端边界) 点集 $f(G)$, 即

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} T_k = f(G), \quad T_i \cap T_j = \varnothing\,(i \neq j).$$

定义 2.16

对于给定的 $z \in \mathbb{C}$, 满足方程 $\mathrm{e}^w = z$ 的 w 称为 z 的**对数**, 记为 $w = \mathrm{Ln} z$.

命题 2.12

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w = u + \mathrm{i}v$, 并且满足方程 $\mathrm{e}^w = z$, 则 $\mathrm{e}^u = r, v = \theta + 2k\pi$. 于是

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i} = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z.$$

注 由此可知,$\mathrm{Ln} z$ 是一个多值函数, 它的多值性是由 z 的辐角 $\mathrm{Arg} z$ 的多值性产生的. 并且 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 便是 $\mathrm{Ln} z$ 的支点.

证明 由条件可知 $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r = |z|, \theta = \arg z$, 因而 $\mathrm{e}^u = r, v = \theta + 2k\pi$. 于是

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i} = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z.$$

□

定理 2.10

如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通区域, 则必在 D 上存在无穷多个单值全纯函数

$$\varphi_k(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots,$$

使得在 D 上成立

$$\mathrm{e}^{\varphi_k(z)} = z,\ k = 0, \pm 1, \cdots;$$

而且对每一个 k, 有 $\varphi_k'(z) = \dfrac{1}{z}$. 此时也称 $\mathrm{Ln}z$ 在 D 上能分出无穷多个单值全纯分支. 其中的每一个 φ_k 都称为 $\mathrm{Ln}z$ 在 D 上的**单值全纯分支**. 特别地, 我们把 $k = 0$ 的那一支称为 $\mathrm{Ln}z$ 的**主支**, 记为 $\ln z$. 即

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

♡

注 现在说明为什么要求 D 不包含原点和无穷远点. 如果 D 包含原点, 那么 D 中就包含绕原点 $z = 0$ 的简单闭曲线 γ, 当 z 从 γ 上的一点 z_0 沿 γ 的正方向 (即反时针方向) 回到 z_0 时,z 的辐角增加了 2π,φ_{k_0} 的值从 $\varphi_{k_0}(z_0)$ 连续地变为 $\varphi_{k_0+1}(z_0)$, 而不再回到原来的值 $\varphi_{k_0}(z_0)$. 因此, 在这样的区域中就不可能从 $\mathrm{Ln}z$ 中分出单值的全纯分支. 因为 D 内任意一条绕原点的简单闭曲线也可以看作是绕无穷远点的简单闭曲线, 因此 D 也不能包含无穷远点.

证明 对 $\forall z \in \mathbb{C}$, 设 $\mathrm{Arg}z = \theta = \theta_0 + 2k\pi$, 其中 $\theta_0 = \arg z$,k 是任意一个给定的整数. 则 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 在 D 上定义

$$\varphi_k(z) = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2k\pi) = \ln r + \mathrm{i}\theta,$$

这时,$u = \ln r$,$v = \theta$. 容易验证这时有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r},$$

因此由定理 2.5(iii)知道,φ_k 是 D 上的全纯函数, 而且由定理 2.6及定理 2.5(iii) 的证明过程可得

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right) = \frac{\cos\theta}{r} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\\
&= \frac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = \frac{1}{r}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\
&= \frac{1}{r}\cdot\frac{r}{z} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

此外

$$\mathrm{e}^{\varphi_k(z)} = \mathrm{e}^{\ln|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2k\pi)} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = z,$$

对每一点 $z \in D$ 成立.

□

现在讨论 $\mathrm{Ln}z$ 的映射性质. 根据定理 2.10, 我们取 D 为 $\mathbb{C}$ 除去负实轴后所得的区域, 它是不包含原点和无穷远点的单连通区域, 因而可以分出无穷多个单值的全纯分支. 这时取 $\mathrm{Arg}z$ 的主值为 $-\pi < \arg z < \pi$, 于是

$$w = \varphi_0(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

把 D 单叶地映为带状区域 $-\pi < \mathrm{Im}w < \pi$. 其他各分支, 例如 $w = \varphi_k(z) = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$, 就把 D 单叶地映为带状区域 $(2k-1)\pi < \mathrm{Im}w < (2k+1)\pi$. 一般来说,$w = \varphi_0(z)$ 把角状区域 $-\pi \leqslant \alpha < \arg z < \beta \leqslant \pi$ 单叶地映为带状区域 $\alpha < \mathrm{Im}w < \beta$.

有时, 为了方便起见, 也可把 $\mathbb{C}$ 去掉正实轴以后的区域取为 D, 它同样是不包含原点和无穷远点的单连通区域, 但这时辐角的主值范围应取为 $0 < \arg z < 2\pi$.$\mathrm{Ln}z$ 的主支是

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z,\ 0 < \arg z < 2\pi,$$

它把 D 单叶地映为带状区域 $0<\mathrm{Im}w<2\pi$.

一般来说, 还可以用一条从原点出发并伸向无穷远的曲线代替上面的负实轴或正实轴, 这样得到的区域 D 同样满足定理 2.10的条件. 通常, 为了便于表达出 $\mathrm{Ln}z$ 的单值分支 $\varphi_k(z)$, 常取从原点出发的一条射线作为割线, 特别是取负实轴或正实轴.

2.4.3 幂函数

定义 2.17 (整函数)

在 $\mathbb{C}$ 上每点都全纯的函数称为**整函数**.

♣

定义 2.18 (幂函数)

设 z 是任意复数, 称

$$w=z^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu\mathrm{Ln}z}(z\neq 0,\infty)$$

为**幂函数**, 这里 $\mu=a+bi$ 是一个复数.

♣

定理 2.11

设幂函数 $w=z^{\mu}$, 其中 $\mu=a+bi\in\mathbb{C}$. 则

$$w=z^{\mu}=\mathrm{e}^{(a+bi)(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{a\ln|z|-b(\arg z+2k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[b\ln|z|+a(\arg z+2k\pi)]},\quad k=0,\pm1,\cdots.$$

如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通区域, 则 z^{μ} 在 D 中也能分出单值全纯分支

$$w_k(z)=e^{\mu(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})},\quad k=0,\pm1,\cdots.$$

其中

$$w_0(z)=\mathrm{e}^{\mu\ln z}=e^{\mu(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z)}$$

称为 z^{μ} 的**主支**. 并且 w 的任意一支都有

$$w_k'(z)=\mu\mathrm{e}^{(\mu-1)\mathrm{Ln}z}=\mu\mathrm{e}^{(\mu-1)(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})},\quad k=0,\pm1,\cdots. \tag{2.15}$$

♡

证明 z^{μ} 的多值性是由 $\mathrm{Ln}z$ 的多值性引起的, 因此 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是它的支点, 而且在 $\mathrm{Ln}z$ 可以分出单值全纯分支的区域内,z^{μ} 也能分出单值全纯分支. 根据定理 2.10, 设 $\varphi_k(z)$ 是 $\mathrm{Ln}z$ 在区域 D 中的单值全纯分支,$w_k(z)$ 是 z^{μ} 的单值全纯分支, 按定义, 有

$$w_k(z)=\mathrm{e}^{\mu\varphi_k(z)}.$$

其中

$$w_0(z)=\mathrm{e}^{\mu\varphi_0(z)}=\mathrm{e}^{\mu\ln z},$$

称为 z^{μ} 的主支. 因为 $\varphi_k(z)$ 和 $\varphi_{k+1}(z)$ 相差 $2\pi\mathrm{i}$, 所以 $w_k(z)$ 和 $w_{k+1}(z)$ 相差 $\mathrm{e}^{2\mu\pi\mathrm{i}}$. 由于 $\varphi_k'(z)=\dfrac{1}{z}$, 所以

$$w_k'(z)=\mathrm{e}^{\mu\varphi_k(z)}\mu\varphi_k'(z)=\mu z^{\mu-1}=\mu\mathrm{e}^{(\mu-1)\varphi_k(z)}.$$

再将定理 2.10中的 $\varphi_k(z)$ 代入即可得证.

□

推论 2.2

设幂函数 $w=z^{\mu}$, 其中 $\mu=a+bi\in\mathbb{C}$. 则

(1) 当 $\mu=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ 时, 有 $w=z^{\frac{p}{q}}$ 是一个 q 值函数, 并且

$$w=z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)},\quad k=0,1,\cdots,q-1.$$

特别地, 我们有

(i) 当 $\mu = n \in \mathbb{Z}$ 时, 有 $w = z^n$ 是一个单值函数, 也是整函数. 此时

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

并且除原点外 $w = z^n$ 是一个保角变换. 区域

$$\{z : \alpha < \arg z < \beta\}, \quad \forall (\alpha, \beta) \subseteq (-\pi, \pi] \text{ 且} 0 < \beta - \alpha \leqslant \frac{2\pi}{n}$$

是 $w = z^n$ 的单叶性区域, 它在 $w = z^n$ 映射下的像是

$$\{w : n\alpha < \arg w < n\beta\}.$$

(ii) 当 $\mu = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ 时, 有 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 是 $w = z^n$ 的反函数. 并且 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 是一个 n 值函数, 支点为 $z = 0, \infty$. 在 $\mathbb{C}$ 去掉正实轴后所成的区域上可以分出 n 个单值的全纯分支

$$w = \varphi_k(z) = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

其中 $-\pi < \theta = \arg z < \pi$. 我们称 $k = 0$ 的那一支称为 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 的**主支**, 记为 $w = \sqrt[n]{z}$. 即

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

其中 $-\pi < \theta = \arg z < \pi$. 并且 $w = \sqrt[n]{z}$ 把从原点发出的射线 $\arg z = \theta$ 变为从原点发出的射线 $\arg w = \frac{\theta}{n}$, 把除去正实轴以后的全平面单叶地映为角状区域 $\left\{z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\right\}$.

(2) 当 $\mu = a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时, 有 $w = a$ 是一个无穷值函数, 支点为 $z = 0, \infty$. 并且

$$w = z^a = |z|^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\arg z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi a}, \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

(3) 当 $\mu = a + b\mathrm{i}(b \neq 0)$ 时, 有 $w = z^\mu$ 是一个无穷值函数, 支点为 $z = 0, \infty$.

♡

证明

(1) 这时由定理 2.11可得

$$w = z^\mu = z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)}.$$

当 $k = 0, 1, \cdots, q-1$ 时,$z^{\frac{p}{q}}$ 有 q 个不同的值, 因此是一个 q 值函数.

特别地, 我们有

(i) 按导数的定义, 可以直接算出

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

所以,$w = z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上每点都是全纯的. 所以,$w = z^n$ 是一个整函数. 由于它的导数除原点外都不为零, 因此除原点外它是一个保角变换, 保角性在原点不成立. 考虑从原点出发的射线, 它与正实轴的夹角为 θ, 这条射线的方程可写为 $\arg z = \theta$. 由于 $w = z^n$, 所以

$$\arg w = n\arg z = n\theta.$$

这就是说, 这条射线的像也是一条过原点的射线, 但它与正实轴的夹角是 $n\theta$, 已经比原来的夹角扩大了 n 倍. 这一事实在作具体变换时却很有用. 例如,$w = z^2$ 能把第一象限变成上半平面,$w = z^3$ 能把角状区域 $\left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}$ 变成上半平面, 等等.

现在来看 $w = z^n$ 的单叶性区域. 设 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 如果 $z_1 \neq z_2$, 但 $z_1^n = z_2^n$, 即 $r_1^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1} = r_2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_2}$, 因而 $r_1 = r_2$,$\theta_1 = \theta_2 + \frac{2k\pi}{n}$. 因此, 只要区域中不出现这样两个点, 它们的辐角差等于 $\frac{2\pi}{n}$, 这样的区域便是 $w = z^n$ 的单叶性区域. 例如,$\left\{z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\right\}$ 便是它的一个单叶性区域. 一般来说, 区域

$$\left\{z : \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leqslant \frac{2\pi}{n}\right\}$$

是它的单叶性区域, 它在 $w=z^n$ 映射下的像是

$$\{w : n\alpha < \arg w < n\beta\}.$$

(ii) $w=z^{\frac{1}{n}}$ 是 $w=z^n$ 的反函数. 因为对于一个给定的 $z,z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个值, 所以它是一个多值函数. 由第一章的知识知道, 它的多值性也是由 Arg$z$ 的多值性产生的, 所以 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是它的支点. 因而, 在 $\mathbb{C}$ 去掉正实轴后所成的区域上可以分出 n 个单值的全纯分支, 它们是

$$w=\varphi_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这里 $-\pi<\theta=\arg z<\pi.k=0$ 的那一支称为它的主支, 记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

现在来看它的主支的映射性质. 容易看出, 它把从原点发出的射线 $\arg z=\theta$ 变为从原点发出的射线 $\arg w=\dfrac{\theta}{n}$. 由此可知,$w=\sqrt[n]{z}$ 把除去正实轴以后的全平面单叶地映为角状区域 $\left\{z:0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}\right\}$.

例如,$w=\sqrt{z},w=\sqrt[4]{z}$ 分别把除去正实轴的全平面单叶地映为上半平面和第一象限.

(2) 这时由定理 2.11可得

$$w=z^{\mu}=|z|^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\arg z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi a}.$$

因为 a 是无理数, 不论 k 取什么整数值, 都不能使 ka 为一整数, 因此 z^a 是一个无穷值函数.

(3) 由定理 2.11立得.

□

例题 2.4 求一保角变换, 把除去线段 $\{z=a+\mathrm{i}y:0<y<h\}$ 的上半平面变为上半平面.

解 初看起来, 解这样的题目很困难, 因为并没有一个现成的变换可以达到上述目的. 我们的想法是把整个变换过程分解成若干个简单的步骤, 而每一个步骤都可用我们已知的变换来实现, 把这些变换复合起来, 就是我们要找的变换. 图 2.4就是整个变换的分解过程. 所以, 要找的变换就是

$$w=\sqrt{z_3}=\sqrt{z_2+h^2}=\sqrt{z_1^2+h^2}=\sqrt{(z-a)^2+h^2}.$$

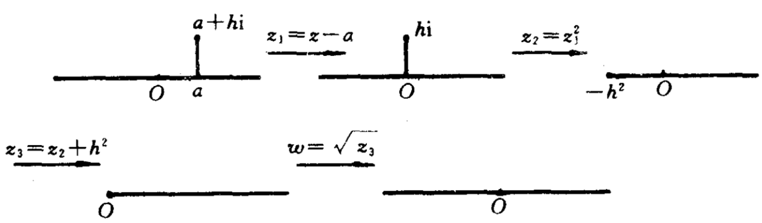

图 2.4

□

例题 2.5 求一保角变换, 把除去割线 $\{z=x+\mathrm{i}:-\infty<x<-1\}$ 后的带状区域 $\{z:0<\mathrm{Im}z<2\}$ 变为上半平面.

解 图 2.5是变换的分解过程. 由此可见, 要找的变换就是

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi}}.$$

这里, 最后一个步骤用到了例题 2.4的结果.

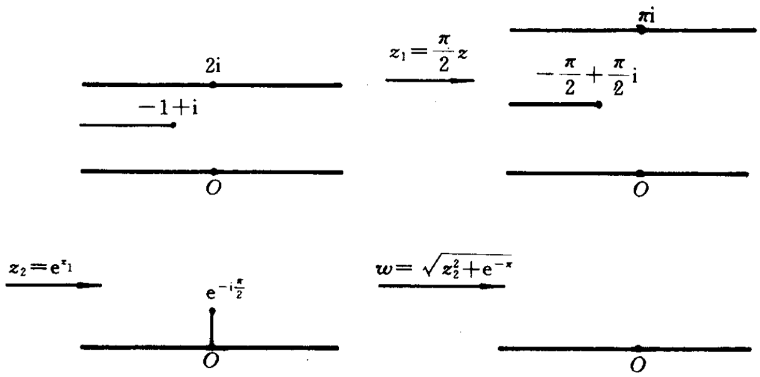

图 2.5

□

2.4.4 三角函数

定义 2.19

设 z 是任意复数, 定义

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

命题 2.13 (三角函数的性质)

(i) $\cos z$ 和 $\sin z$ 都是整函数, 并且 $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$.

(ii) $\cos z$ 和 $\sin z$ 都以 2π 为周期.

(iii) $\cos z$ 是偶函数,$\sin z$ 是奇函数, 即

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

(iv) 对任意复数 z_1 和 z_2, 有

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \tag{2.16}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \tag{2.17}$$

(v) 对任意复数 z, 有

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2\sin z \cos z,$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z.$$

(vi) $\sin z$ 仅在 $z = k\pi$ 处为零,$\cos z$ 仅在 $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处为零, 这里,$k = 0, \pm 1, \cdots$.

(vii) $\cos z$ 和 $\sin z$ 不是有界函数.

注 第(vii)条性质与实变函数中的正、余弦函数不一样, 其余性质都相同.

证明

(i) 因为 e^{iz},e^{-iz} 是整函数, 所以 $\cos z$ 和 $\sin z$ 也都是整函数. 由命题 2.8(i)及定理 2.1(1)可得

$$(\cos z)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]' = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z.$$

(ii) 由于 e^{iz} 和 e^{-iz} 都以 2π 为周期, 所以 $\cos z$ 和 $\sin z$ 也都以 2π 为周期.

(iii) 注意到

$$\cos(-z)=\frac{1}{2}\left(e^{-iz}+e^{iz}\right)\cos z,$$
$$\sin(-z)=\frac{1}{2i}\left(e^{-iz}-e^{iz}\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=-\sin z.$$

(iv) 根据定义直接验证即得.

(v) 在(2.16)式中令 $z_1=z,z_2=-z$, 即得

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1.$$

在(2.17)式令 $z_1=z_2=z$, 即得

$$\sin 2z=2\sin z\cos z.$$

在(2.16)式中令 $z_1=z,z_2=z$, 再结合 $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, 即得

$$\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z=2\cos^2 z-1=1-2\sin^2 z.$$

(vi) 注意到

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\frac{1}{2ie^{iz}}(e^{2iz}-1),$$

$\sin z=0$ 当且仅当 $e^{2iz}-1=0$, 而这只有当 $z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时才能成立. 又由 (iv) 可得 $\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$,$\cos z=0$ 当且仅当 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=0$, 所以 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

(vii) 若取 $z=iy$,y 是实数, 则 $y=-iz$. 从而

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\to+\infty\ (\text{当 } y\to\infty \text{ 时}).$$

对于 $\sin z$, 取 $z=\frac{\pi}{2}+iy$, 则有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)=\cos iy\to+\infty\ (\text{当 } y\to\infty \text{ 时}).$$

□

定义 2.20

设 z 是任意的复数, 我们定义

$$\tan z=\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

♣

命题 2.14

$\tan z$ 在除掉 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 的开平面上是全纯的,$\cot z$ 在除掉 $z=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 的开平面上全纯.

♠

证明 由命题 2.13易证.

□

2.4.5 多值函数

定理 2.12

设

$$w=\sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1}\cdots(z-a_m)^{\beta_m}},$$

这里,$a_1,\cdots,a_m$ 是复数,$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是整数,n 是正整数. 则只有当 β_j 不是 n 的倍数时,a_j 是它的支点. 只有当 $\beta_1+\cdots+\beta_m$ 不是 n 的倍数时,$z=\infty$ 是支点.

如果域 D 只包含这样的简单闭曲线, 它的内部或者不含有任何支点, 或者包含一组支点 $a_{j_1},\cdots,a_{j_r}$, 但与

它们相应的和 $\beta_{j_1}+\cdots+\beta_{j_r}$ 是 n 的倍数 (此时 ∞ 不是 w 的支点), 那么 $w=\sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1}\cdots(z-a_m)^{\beta_m}}$ 在 D 中能分出单值的全纯分支.

注 这个定理表明: 当区域 D 内部不包含 w 的支点或包含的支点使 ∞ 点不构成 w 的支点时,w 就能分出单值全纯分支.

证明 任取 $z_0\neq a_j, j=1,\cdots,m$, 取充分小的简单闭曲线 γ_0, 使 z_0 在其内部,$a_1,\cdots,a_m$ 都在其外部. 当 z 沿着 γ_0 的正方向走一圈时,$z-a_1,\cdots,z-a_m$ 的辐角都不变, 故 z_0 不是支点. 再看 a_j 是不是支点, 以 a_1 为例, 记 $z-a_j=r_je^{i\theta_j}, j=1,\cdots,m$, 于是 w 可写为

$$w=\sqrt[n]{r_1^{\beta_1}\cdots r_m^{\beta_m}}e^{i\frac{\beta_1\theta_1+\cdots+\beta_m\theta_m}{n}}.$$

取简单闭曲线 γ_1, 使 a_1 在其内部,$a_2,\cdots,a_m$ 都在其外部. 当 z 沿着 γ_1 的正方向走一圈时,θ_1 增加 2π,$\theta_2,\cdots,\theta_m$ 都不变,w 就变成

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{r_1^{\beta_1}\cdots r_m^{\beta_m}}e^{i\frac{\beta_1\theta_1+\cdots+\beta_m\theta_m+2\pi\beta_1}{n}}\\ =&e^{i\frac{2\pi\beta_1}{n}}\sqrt[n]{r_1^{\beta_1}\cdots r_m^{\beta_m}}e^{i\frac{\beta_1\theta_1+\cdots+\beta_m\theta_m}{n}}.\end{aligned}$$

因此, 只有当 β_1 是 n 的倍数时,w 的值才不变. 其他 $a_2,\cdots,a_m$ 点的情况也一样. 于是得到结论: 如果 β_j 不是 n 的倍数, 那么 a_j 是它的支点. 再看无穷远点, 取充分大的圆周, 使 $a_1,\cdots,a_m$ 都在其内部. 当 z 沿着这个圆周转一圈时,$z-a_1,\cdots,z-a_m$ 的辐角都要增加 2π,w 就变成

$$e^{i\frac{2\pi(\beta_1+\cdots+\beta_m)}{n}}\sqrt[n]{r_1^{\beta_1}\cdots r_m^{\beta_m}}e^{i\frac{\beta_1\theta_1+\cdots+\beta_m\theta_m}{n}}.$$

因而, 只有当 $\beta_1+\cdots+\beta_m$ 不是 n 的倍数时,$z=\infty$ 是支点. 用同样的方法讨论, 可以知道, 如果简单闭曲线的内部包含 $a_{j_1},\cdots,a_{j_r}$, 与它们相应的和 $\beta_{j_1}+\cdots+\beta_{j_r}$ 是 n 的倍数, 那么当 z 沿该曲线转一圈后 w 的值不变.

□

定理 2.13

设 $f(z)$ 是一个多值函数的某个单值全纯分支,C 是起点为 z_1, 终点为 z_2 且不穿过支割线的连续曲线. 当 z 从 z_1 沿曲线 C 到终点 z_2 时,$f(z)$ 的辐角的连续改变量为 $\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)$, 则

$$f(z_2)=|f(z_2)|e^{i\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)}\cdot e^{i(\operatorname{Arg}f(z_1)+2k\pi)},\quad k=0,\pm1,\cdots,$$

其中 $\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)$ 与 $\operatorname{Arg}f(z_1)$ 的取值无关.

证明 不妨设

$$\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)=\operatorname{Arg}f(z_2)-\operatorname{Arg}f(z_1)+2k_0\pi,\quad k_0\in\mathbb{Z}.$$

显然对 $\forall k_1\in\mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}f(z_2)&=|f(z_2)|e^{i[\operatorname{Arg}f(z_2)+2k_1\pi]}=|f(z_2)|e^{i[\operatorname{Arg}f(z_2)-\operatorname{Arg}f(z_1)+2k_0\pi+\operatorname{Arg}f(z_1)+2(k_1-k_0)\pi]}\\&=|f(z_2)|e^{i\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)}\cdot e^{i(\operatorname{Arg}f(z_1)+2k\pi)}.\end{aligned}$$

再记 $k=k_1-k_0$, 则

$$f(z_2)=|f(z_2)|e^{i\Delta_C\operatorname{Arg}f(z)}\cdot e^{i(\operatorname{Arg}f(z_1)+2k\pi)},\quad k=0,\pm1,\cdots.$$

□

例题 2.6 在怎样的区域中,$w=\sqrt{z^2-1}$ 能分出单值的全纯分支?

解 由于

$$w=\sqrt{z^2-1}=\sqrt{(z-1)(z+1)},$$

这时 $a_1=1$,$a_2=-1$,$\beta_1=\beta_2=1$,$n=2$. 所以,1 和 -1 都是它的支点, 但无穷远点不是支点. 因而, 在除去线段 $[-1,1]$ 的全平面 (图 2.6 左) 上, 或者在除去两条割线 $\{z:-\infty<z<-1\}$ 和 $\{z:1<z<\infty\}$ 的全平面 (图 2.6 右)

上, 都能分出单值的全纯分支.

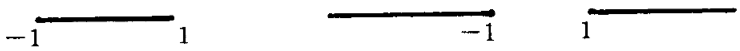

图 2.6

□

例题 2.7 设 $f(z)=\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}(z+1)^{-1}$, 试确定 f 在 $[0,1]$ 的上岸取正值的单值全纯分支 f_0, 并计算 $f_0(-\mathrm{i})$.

解 多值性主要发生在带根号的函数上, 与 $(z+1)^{-1}$ 无关. 令 $\varphi(z)=\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}$, 这时 $z=0$ 和 $z=1$ 都是 φ 的支点, 但 $z=\infty$ 不是. 由定理 2.12,φ 能在除去线段 $[0,1]$ 的全平面上分出单值全纯的分支. 为了确定出在 $[0,1]$ 上岸取正值的分支, 记 $z=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$1-z=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$(图 2.7), 则

$$\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}=\sqrt{r_1^{-1}r_2^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\theta_2-\theta_1}{2}+k\pi\right)},\ k=0,1.$$

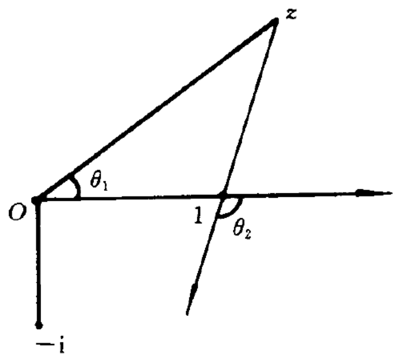

图 2.7

当 z 在 $[0,1]$ 的上岸时, 有

$$\theta_1=\theta_2=0,\ r_1=x,\ r_2=1-x.$$

显然,$k=0$ 的那一支在上岸取正值, 记为 φ_0, 即

$$\varphi_0(z)=\sqrt{r_1^{-1}r_2^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\theta_2-\theta_1}{2}}.$$

现在计算 $\varphi_0(-\mathrm{i})$. 若让 z 从原点的左边到达 $-\mathrm{i}$, 则

$$\theta_1=\frac{3}{2}\pi,\ \theta_2=\frac{\pi}{4},\ r_1=1,\ r_2=\sqrt{2}.$$

所以

$$\varphi_0(-\mathrm{i})=2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}},$$

故

$$f_0(-\mathrm{i})=\frac{1}{1-\mathrm{i}}2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}}=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}.$$

若让 z 从 1 的右边到达 $-\mathrm{i}$, 则

$$\theta_1=-\frac{\pi}{2},\ \theta_2=-\frac{7}{4}\pi,\ r_1=1,\ r_2=\sqrt{2}.$$

这时

$$\varphi_0(-\mathrm{i})=2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{19}{8}\pi\mathrm{i}}=2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-(2\pi+\frac{3}{8}\pi)\mathrm{i}}=2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{8}\pi\mathrm{i}}.$$

所得结果和刚才的完全一样.

□

2.5 分式线性变换

例题 2.8 求一分式线性变换, 把单位圆的内部变成单位圆的内部, 而且把圆内指定的点 a 变为圆心.

注 这个变换十分重要, 它是把单位圆盘一一地变为自己的变换, 称为单位圆盘的**全纯自同构**. 以后我们将证明 (定理 4.32), 把单位圆盘一一地变为自己的全纯映射只能是这种样子, 再没有其他的变换.

证明 因为 a 关于单位圆的对称点是 $\frac{1}{\overline{a}}$, 所以这个变换把 a 和 $\frac{1}{\overline{a}}$ 分别变为 0 和 ∞, 故这个变换可写成

$$w = \lambda \frac{z-a}{z-\frac{1}{\overline{a}}} = -\lambda\overline{a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} = \mu\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

为了把单位圆周变成单位圆周, 即将满足 $|z|=1$ 的 z 变为满足 $|w|=1$ 的 w,μ 必须满足

$$1 = |w| = |\mu|\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} = |\mu|\frac{|z-a|}{|z||\overline{z}-\overline{a}|} = |\mu|,$$

即 $\mu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 故所求的变换为

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

□

第 3 章 全纯函数的积分表示

3.1 复变函数的积分

定义 3.1

设 $z = \gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是一条可求长曲线,f 是定义在 γ 上的函数, 沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a) = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n = \gamma(b)$, 在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k, k = 1, \cdots, n$(见图 3.1), 作 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{3.1}$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 如果当 $\lambda = \max\{s_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} \to 0$ 时, 不论 ζ_k 的取法如何, 和式 (3.1)总有一确定的极限, 就称此极限为 f 沿 γ 的积分, 记为 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 即

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

♣

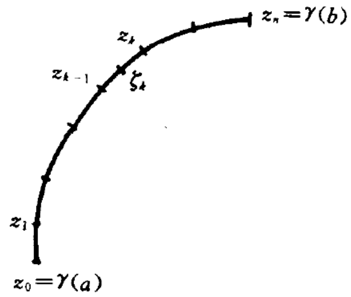

图 3.1

定理 3.1

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在可求长曲线 γ 上连续, 则 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

♡

证明 记 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, \zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k, f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k)$, 于是 f 的 Riemann 和可写成

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \left[u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k)\right](\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\} + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \{v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(x_k, y_k)\Delta y_k\},\end{aligned}$$

这里,$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. 当 u, v 在 γ 上连续时, 上述和式当 $\lambda \to 0$ 时趋于曲线积分

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

□

定理 3.2

如果 f, g 在可求长曲线 γ 上连续, 那么

(i) $\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma^-$ 是指与 γ 方向相反的曲线;

(ii) $\int_{\gamma}(\alpha f(z)+\beta g(z))\mathrm{d}z=\alpha\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_{\gamma}g(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\alpha,\beta$ 是两个复常数;

(iii) $\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z$, 这里,$\gamma$ 是由 γ_1 和 γ_2 组成的曲线.

证明 由定理 3.1和实变函数第二型曲面积分的性质不难证明.

□

定理 3.3

如果 $z=\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线,$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 γ 上连续, 那么 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b\{[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))\}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 在所设的条件下, 由定理**??**有

$$\int_{\gamma}u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\int_a^b\{u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\gamma}v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\int_a^b\{v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

由定理 3.1可知, 第二式乘 i 后与第一式相加, 即得

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b\{[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))\}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

□

例题 3.1 设可求长曲线 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的起点为 α, 终点为 β, 证明

$$\int_{\gamma}\mathrm{d}z=\beta-\alpha,\qquad\int_{\gamma}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

证明 若 γ 是光滑曲线, 由定理 3.3, 得

$$\int_{\gamma}\mathrm{d}z=\int_a^b\gamma'(t)\mathrm{d}t=\gamma(b)-\gamma(a)=\beta-\alpha,$$

$$\int_{\gamma}z\mathrm{d}z=\int_a^b\gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\gamma^2(t)\Big|_a^b=\frac{1}{2}(\gamma^2(b)-\gamma^2(a))=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

如果 γ 不是光滑曲线, 可直接按积分的定义计算:

$$\int_{\gamma}\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n(z_k-z_{k-1})=z_n-z_0=\beta-\alpha.$$

$$\int_{\gamma}z\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n z_k(z_k-z_{k-1}),\qquad\int_{\gamma}z\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k-z_{k-1}),$$

把两式加起来, 得

$$\int_{\gamma}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n(z_k^2-z_{k-1}^2)=\frac{1}{2}(z_n^2-z_0^2)=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

□

命题 3.1

设 γ 是以 a 为中心、以 r 为半径的圆周, 则

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\neq 1;\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1.\end{cases}$$

这里 n 是任意整数, 且上述积分沿 γ 的正方向进行.

证明 γ 的参数方程为 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 由定理 3.3, 得

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}&=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\mathrm{d}t=r^{1-n}\cdot\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\mathrm{d}t\\&=\mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}[\cos(1-n)t+\mathrm{i}\sin(1-n)t]\,\mathrm{d}t\\&=-r^{1-n}\int_0^{2\pi}\sin(1-n)t\mathrm{d}t+\mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}\cos(1-n)t\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以, 上述积分当 $n\neq 1$ 时为零, 当 $n=1$ 时为 $2\pi\mathrm{i}$, 即

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\neq 1;\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1.\end{cases}$$

□

命题 3.2 (长大不等式)

如果 γ 的长度为 $L,M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, 那么

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML. \tag{4}$$

注 这个不等式很简单, 但很重要, 是我们今后估计积分的主要工具, 可简称为**长大不等式**.

证明 f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|f(\zeta_k)||z_k-z_{k-1}|\leqslant M\sum_{k=1}^n|z_k-z_{k-1}|\leqslant ML,$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}s_k\to 0$, 即得所要的不等式.

□

3.2 Cauchy 积分定理

定理 3.4 (Cauchy 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域,$f\in H(D)$, 且 f' 在 D 中连续, 则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

证明 由 γ 围成的区域记为 G, 因为 f' 连续, 即 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连续, 故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯, 故由定理 2.6可知 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是由 Green 公式可得

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_\gamma v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

这里 γ 都取正方向. 由定理 3.1, 即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

引理 3.1

设 f 是区域 D 中的连续函数,γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一条 D 中的折线 P, 使得

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点,P 中其他的顶点都在 γ 上;

(ii) $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$.

证明 因为 ∂D 是一个闭集,γ 是一个紧集, 且两者不相交, 根据定理 1.9,$d(\gamma,\partial D)=\rho>0$. 作有界的区域 G, 使得 $\gamma\subset\overline{G}\subset D$. 因为 f 在紧集 $\overline{G}$ 上连续, 故由定理 1.16(iii)可知 f 必一致连续. 于是, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $z',z''\in\overline{G}$,$|z'-z''|<\delta$ 时,$|f(z')-f(z'')|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$, 这里,$L$ 是 γ 的长度. 现取 $\eta=\min(\rho,\delta)$. 在 γ 上取分点 $z_0,z_1,\cdots,z_n$, 使得每一个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度都小于 η, 这里,z_0,z_n 分别记为 γ 的起点和终点. 连接 z_{k-1} 和 $z_k(k=1,\cdots,n)$, 就得到一条折线 P, 它与 γ 有相同的起点和终点, 且其他顶点都在 γ 上. 由于 $|z_{k-1}-z_k|<\eta\leqslant\rho$, 所以线段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 都在 D 内, 即折线 P 都在 D 内.

现在估计下面的积分差, 记 $\gamma_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$,$P_k=\overline{z_{k-1}z_k}$, 则有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z-\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k-z_{k-1})\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k-z_{k-1})\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} (f(z)-f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} (f(z)-f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right|.
\end{aligned}$$

当 $z\in\gamma_k$ 或 P_k 时, 都有 $|z-z_{k-1}|<\eta\leqslant\delta$, 因而 $|f(z)-f(z_{k-1})|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$. 对上面两个积分用长大不等式, 它们都不超过 $\dfrac{\varepsilon}{2L}|\gamma_k|$, 因而

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z-\int_P f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z-\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{L}\sum_{k=1}^n|\gamma_k| = \varepsilon.$$

故折线 P 完全符合定理的要求.

□

定理 3.5 (Cauchy-Goursat 定理 (Cauchy 积分定理))

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域, 如果 $f\in H(D)$, 那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

注 注意, 对于非单连通的区域, 定理不一定成立. 例如,D 是除去原点的单位圆盘,$f(z)=\dfrac{1}{z}$ 当然在 D 中全纯, 若设 $\gamma=\{z:|z|=r<1\}$, 则由命题 3.1知,$\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}\neq 0$.

证明 证明分为下面三步:

(1) 先假定 γ 是一个三角形的边界.

如果 $\left|\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| = M$, 我们证明 $M=0$. 连接三角形三边的中点, 把三角形分成四个全等的小三角形 (图 3.2),

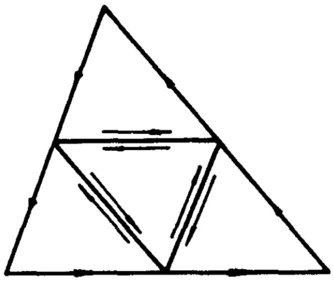

图 3.2

这四个小三角形的边界分别记为 $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)}$ 和 $\gamma^{(4)}$. 让 f 沿这四个小三角形的边界积分, 从图中可以看出, 中间那个小三角形的边界被来回走了两次,f 在其上的积分恰好抵消, 剩下的积分的和正好等于大三角形边界上的积分, 即

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z,$$

或者

$$M=\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z\right|+\left|\int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right|+\left|\int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z\right|+\left|\int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z\right|.$$

因此上述四个小三角形中必有一个小三角形 Δ_1, 它的边界记为 γ_1,f 在其上的积分满足 $\left|\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right|\geqslant\dfrac{M}{4}$. 把 Δ_1 再分成四个全等的小三角形, 按照同样的推理, 其中又有一个小三角形 Δ_2, 它的边界记为 γ_2,f 在其上的积分满足 $\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right|\geqslant\dfrac{M}{4^2}$. 这个过程可以一直进行下去, 我们得到一串三角形 Δ_n, 记它们的边界为 γ_n, 这串三角形具有下列性质:

(i) $\Delta\supset\Delta_1\supset\cdots\supset\Delta_n\supset\cdots$;

(ii) $\mathrm{diam}\Delta_n\longrightarrow 0(n\longrightarrow\infty)$;

(iii) $|\gamma_n|=\dfrac{L}{2^n}$,$n=1,2,\cdots$, 这里,$L$ 为 γ 的长度;

(iv) $\left|\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right|\geqslant\dfrac{M}{4^n}$,$n=1,2,\cdots$.

由 (i) 和 (ii), 根据Cantor 闭集套定理, 存在唯一的 $z_0\in\Delta_n(n=1,2,\cdots)$. 因为 D 是单连通的, 所以 $z_0\in D$. 由于 f 在 z_0 处全纯, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, 成立

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|. \tag{3.2}$$

取 n 充分大, 使得 $\Delta_n\subset B(z_0,\delta)$, 故当 $z\in\gamma_n$ 时,(3.2)式成立. 显然,$z\in\gamma_n$ 时,$|z-z_0|<|\gamma_n|=\dfrac{L}{2^n}$. 因而, 当 $z\in\gamma_n$ 时, 有

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\frac{\varepsilon L}{2^n}. \tag{3.3}$$

因为 γ_n 是闭曲线, 由例题 3.1知道, 有

$$\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z=0,\quad \int_{\gamma_n} z\mathrm{d}z=0.$$

于是有

$$\int_{\gamma_n}[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]\mathrm{d}z=\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z-f(z_0)\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z-f'(z_0)\int_{\gamma_n} z\mathrm{d}z+z_0f'(z_0)\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z=\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

利用(3.3)式、(iii) 和长大不等式, 即得

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon L}{2^n}|\gamma_n| = \varepsilon\left(\frac{L}{2^n}\right)^2.$$

再由 (iv), 可得 $M \leqslant \varepsilon L^2$. 又因为 ε 是任意小的正数, 所以 $M = 0$.

(2) 假定 γ 是一个多边形的边界.

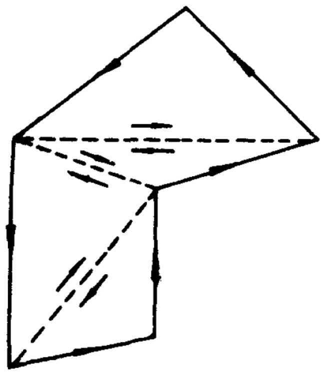

图 3.3

从图 3.3可以看出, 我们可以把多边形分解成若干个三角形. 与刚才的道理一样,f 沿 γ 的积分等于沿各个三角形边界积分的和, 由 (3.2) 已知沿三角形边界的积分为零, 因而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(3) 假定 γ 是一般的可求长闭曲线.

根据引理 3.1, 在 D 内存在闭折线 P, 使得

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

这里,ε 是任意事先给定的正数. 由(3.4)式和 (2) 即知

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

推论 3.1

设函数 $f(z)$ 在 z 平面上的单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关. 即任取 D 内两点 z_0 与 z_1, 对 D 内任意连接起点 z_0 与终点 z_1 的两曲线 C_1, C_2, 都有

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

此时也将上述积分记为

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明 设 C_1 与 C_2 是 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的任意两条曲线 (如图 3.4). 则正方向曲线 C_1 与负方向曲线 C_2^- 就衔接成 D 内的一条闭曲线 C. 于是, 由Cauchy 积分定理与复积分的基本性质 (3), 有

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

因而

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

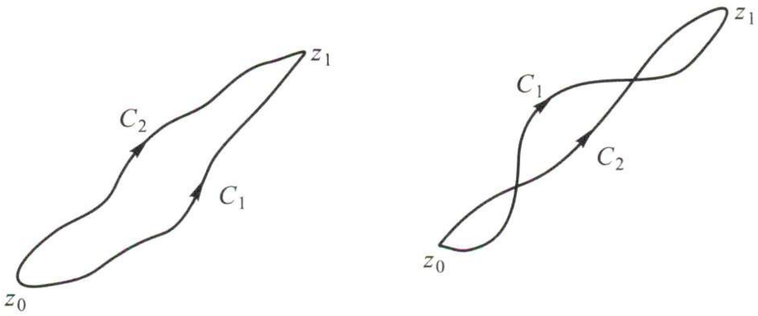

图 3.4

□

定理 3.6

设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部, 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

注 这里已不再假定 f 在积分路径 γ 上全纯, 而代之以在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 条件确实是减弱了. 一般地, 证明这个定理还需要一些其他的知识, 我们这里对 γ 附加两个条件:

(i) γ 是逐段光滑的;

(ii) 在 D 中存在点 z_0, 使得从 z_0 出发的每条射线与 γ 只有一个交点. 例如, 凸多边形和圆盘都满足这两个条件.

证明 在所设的两个条件下,γ 的方程可以写成

$$z = z_0 + \lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

记

$$p = \max\{|\lambda(t)| : a \leqslant t \leqslant b\},\quad q = \max\{|\lambda'(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

由于 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 故必一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z_1, z_2 \in \overline{D}$, 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. 今取 $\delta_0 < \min(\delta, p)$, 于是 $\dfrac{\delta_0}{p} < 1$. 取 ρ, 使得 $1 - \dfrac{\delta_0}{p} < \rho < 1$. 记 γ_ρ 为曲线

$$z = z_0 + \rho\lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

则显然有 $\gamma_\rho \subset D$. 由Cauchy-Goursat 定理, 成立

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\rho\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0,$$

即

$$\int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0.$$

由于

$$|(z_0 + \rho\lambda(t)) - (z_0 + \lambda(t))| = (1-\rho)|\lambda(t)| \leqslant (1-\rho)p < \delta_0 < \delta,$$

所以

$$|f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(z_0+\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b [f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))]\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))||\lambda'(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon q(b-a).\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

定理 3.7 (多连通区域的 Cauchy 积分定理)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 γ 记 D 的边界. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{3.5}$$

这里, 积分沿 γ 的正方向进行, 并且 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$.(3.5)式也可写为

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z, \tag{3.6}$$

(3.6)式右端的积分分别沿 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 的正方向进行.

证明 如图 3.5所示, 我们用一些辅助线把几个“洞”连接起来, 这样,D 就被分成若干个单连通区域. 由定理 3.6, 沿每个单连通区域的边界的积分为零, 若干个单连通区域的边界积分之和仍为零. 由于在辅助线上的积分来回各进行一次, 正好抵消, 所以总和恰好就是 γ 上的积分, 因而 (3.5)式成立. 而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

移项即得(3.6)式.

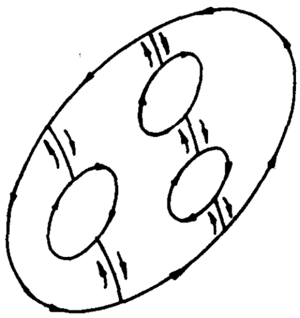

图 3.5

□

推论 3.2

设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线,γ_1 在 γ_0 的内部,D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的区域. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

这里左侧积分沿 γ_0 的正方向进行, 右侧积分沿 γ_1 的正方向进行.

证明 由定理 3.7中 $n = 1$ 的情况立得.

□

命题 3.3

设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a \notin \gamma$, 证明

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \begin{cases} 0, & a\text{在}\gamma\text{的外部}, \\ 2\pi\mathrm{i}, & a\text{在}\gamma\text{的内部}. \end{cases}$$

证明 若 a 在 γ 的外部, 则因 $\frac{1}{z-a}$ 在 γ 围成的闭域上全纯, 所以由 Cauchy 积分定理, $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0$.

若 a 在 γ 的内部, 则有充分小的 $r>0$, 使得 $B(a,r)$ 落在 γ 的内部 (图 3.6). 记 $B(a,r)$ 的边界为 γ_1, 由 γ 和 γ_1 围成的区域记为 D, 则 $\frac{1}{z-a}$ 在 $\overline{D}$ 上全纯, 因而由推论 3.2, 得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi\mathrm{i}.$$

最后的等式利用了命题 3.1的结果.

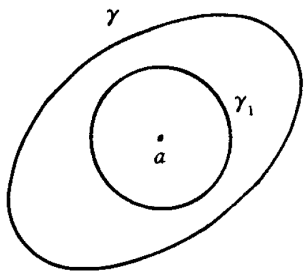

图 3.6

□

例题 3.2 设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a, b \notin \gamma$, 试计算积分

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}.$$

解 上面的积分可写为

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b}\right).$$

由命题 3.3即可得

$$I = \begin{cases} 0 & ,\text{若}a,b\text{ 都在}\gamma\text{ 的外部}; \\ \dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若}a\text{ 在}\gamma\text{ 的内部}, b\text{ 在}\gamma\text{ 的外部}; \\ -\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若}a\text{ 在}\gamma\text{ 的外部}, b\text{ 在}\gamma\text{ 的内部}; \\ 0 & ,\text{若}a,b\text{ 都在}\gamma\text{ 的内部}. \end{cases}$$

□

3.3 全纯函数的原函数

定义 3.2

设 $f: D \to C$ 是定义在区域 D 上的一个函数, 如果存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 上成立, 就称 F 是 f 的一个**原函数**.

如果 $f \in H(D)$, 是否一定存在原函数呢? 答案是否定的. 例如, 若 D 是除去原点的单位圆盘,$f(z) = \frac{1}{z}$,f 当然

是 D 上的全纯函数. 如果它在 D 上存在原函数 F, 则有 $F'(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 D 上成立, 但这是不可能的. 因为若上式成立, 在 D 中取光滑闭曲线 $\gamma:[a,b]\to D$, 则有 $\gamma(a)=\gamma(b)$, 于是

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z=\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=0.$$

但由命题 3.1知道 $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}$. 这一矛盾说明 $\dfrac{1}{z}$ 在 D 上不存在原函数. 问题出在 D 不是单连通区域. 实际上, 对于单连通区域上的全纯函数, 一定存在原函数.

定义 3.3 (变限积分)

设 f 是定义域为 $D\subseteq\mathbb{C}$ 的复变函数,$z_0\in D$, 则称

$$F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\ \forall z\in D.$$

为 f 的一个**变上限积分**. 同理可定义**变下限积分**. ♣

注 f 的变限积分可能是多值函数.

定理 3.8

设 f 在区域 D 中连续, 且对 D 中任意可求长闭曲线 γ, 均有 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$, 那么

$$F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是 D 中的单值全纯函数, 且在 D 中有 $F'(z)=f(z)$, 这里 z_0 是 D 中一固定点. ♡

证明 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零,f 的积分与路径无关, 因而 F 是一单值函数. 任取 $a\in D$, 我们证明 $F'(a)=f(a)$. 因为 f 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|z-a|<\delta$ 时, 有 $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$. 今取 $z\in B(a,\delta)$(图 3.7), 显然

$$F(z)-F(a)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^a f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

这里, 积分在线段 $[a,z]$ 上进行, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right|&=\frac{1}{|z-a|}|F(z)-F(a)-f(a)(z-a)|\\&=\frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_a^z f(a)\mathrm{d}\zeta\right|\\&=\frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z (f(\zeta)-f(a))\mathrm{d}\zeta\right|.\end{aligned}$$

由长大不等式, 即知上式右端小于 ε, 这就证明了 $F'(a)=f(a)$.

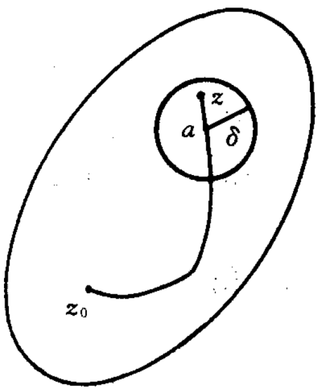

图 3.7

□

定理 3.9

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域,$f \in H(D)$, 那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

证明 在定理的假定下, 由Cauchy 积分定理知道,f 沿 D 中任意可求长闭曲线的积分为零, 由定理 3.8 即得本定理.

□

定理 3.10 (复积分的微分学基本定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域,$f \in H(D)$,$z_0 \in D$,Φ 是 f 的任一原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad \forall z \in D.$$

证明 由定理 3.9知, 由变上限积分确定的函数 F 是 f 的一个原函数, 因而

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0.$$

故由命题 2.4知道 $\Phi(z) - F(z)$ 是一个常数, 因而

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0) = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

□

命题 3.4

设 $f(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta}$ 的定义域为 D.

(1) 若 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域, 则

$$\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = \ln z, \quad \forall z \in D.$$

(2) 若 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = \mathrm{Ln} z, \quad \forall z \in D.$$

注 由这个命题可见, 若 D 是多连通区域,$f \in H(D)$, 一般来说

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是一个多值函数, 它在 z 点的值将随着连接 z_0 和 z 的曲线变化而变动.

实际上, 对数函数也可用这个命题中的变上限积分来定义.

证明

(1) 由复积分的微分学基本定理立得.

(2) 显然 D 是一个二连通区域, 且 $f \in H(D)$. 对 $\forall z \in D$, 如果连接 1 和 z 的曲线 γ 不围绕原点 (图 3.8 左), 那么 $\dfrac{1}{\zeta}$ 沿 γ 的积分等于在实轴上从 1 到 $|z|$ 的积分与圆弧 γ' 上的积分之和, 即

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} &= \int_{1}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\gamma'} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\
&\xlongequal[\gamma(\theta)=e^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\arg z)]{\text{定理 3.3}} \int_{1}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{\arg z} \frac{\mathrm{i}|z|e^{\mathrm{i}\theta}}{|z|e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \ln|z| + \mathrm{i}\arg z = \ln z.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 绕原点沿反时针方向转了 2 圈 (图 3.8 右), 这时沿 γ 的积分可以分解为沿 $\widehat{az},\widehat{abea}$

和 $\widehat{bcdb}$ 的积分 (取 $a=1$), 即

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{\overline{az}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{abea}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{bcdb}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}. \tag{3.8}$$

由于 $\widehat{abea}$ 和 $\widehat{bcdb}$ 是两条围绕原点的简单闭曲线, 故由命题 3.3,(1) 式右端的后两个积分都等于 $2\pi\mathrm{i}$. 因为 $a=1$, 所以根据(3.7)式的计算可得(3.8)式右端的第一个积分为 $\ln z$, 因而得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \ln z + 4\pi\mathrm{i}.$$

由此可见, 随着 γ 绕原点圈数的不同, 一般可得

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \ln z + 2k\pi\mathrm{i},\ k=0,\pm1,\cdots,$$

这恰好是对数函数 $\mathrm{Ln}z$.

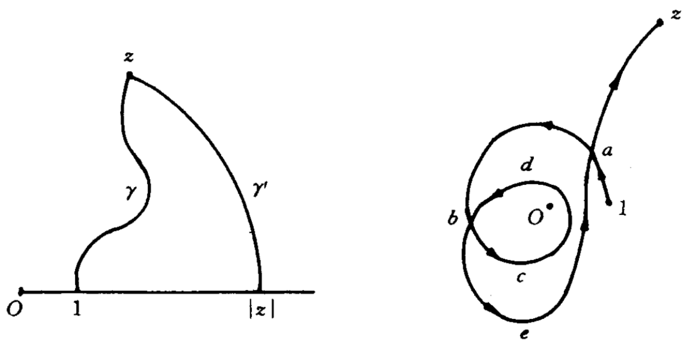

图 3.8

□

定理 3.11 (复积分的分部积分法)

设函数 $f(z),g(z)$ 在单连通区域 D 内解析,α,β 是 D 内两点, 试证

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

♡

证明 由定理 3.15知 $f',g'\in H(D)$. 从而由命题 2.1知,$f'g,fg'\in H(D)\subset C(D)$. 注意到

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

于是由复积分的基本性质和定理 3.10可得

$$f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta [f(z)g(z)]'\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta [f'(z)g(z)+f(z)g'(z)]\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f'(z)g(z)\mathrm{d}z + \int_\alpha^\beta f(z)g'(z)\mathrm{d}z.$$

移项即得.

□

3.4 Cauchy 积分公式

定理 3.12 (Cauchy 积分公式)

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域, 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 那么对任意 $z\in D$, 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.9}$$

等式(3.9)称为 **Cauchy 积分公式**.

♡

笔记 上述定理表明全纯函数在区域中的值由它在边界上的值所完全确定. (3.2)式是全纯函数的一种积分表示, 通过这种表示, 我们可以证明全纯函数有任意阶导数.

证明 任取 $z \in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, 有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $\rho < \delta$, 使得 $B(z, \rho) \subset D$. 记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, 由 γ 和 γ_ρ 围成的二连通区域记为 D'(图 3.9), 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 D' 中全纯, 在 $\overline{D'}$ 上连续. 于是, 由推论 3.2得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3.10}$$

又由命题 3.1可知 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 1$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3.11}$$

于是, 由(3.10)式、(3.11)式及长大不等式即得

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon. \end{aligned}$$

让 $\varepsilon \to 0$, 即得所要证的等式 (3.2).

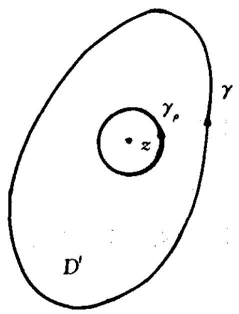

图 3.9

□

定理 3.13 (解析函数的平均值定理)

如果函数 $f(z)$ 在圆 $|\zeta - z_0| < R$ 内解析, 在闭圆 $|\zeta - z_0| \leqslant R$ 上连续, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \mathrm{d}\varphi,$$

即 $f(z)$ 在圆心 z_0 的值等于它在圆周上的值的算术平均数.

证明 设 C 表示圆周 $|\zeta - z_0| = R$(如图 3.10), 则

$$\zeta - z_0 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

或

$$\zeta = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

由此

$$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi,$$

根据Cauchy 积分公式可得

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \cdot \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

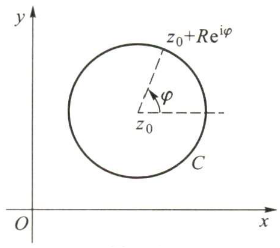

图 3.10

□

定义 3.4

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线 (不一定是闭的),g 是 γ 上的连续函数, 如果 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 那么由定理 3.1可知积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

是存在的, 它定义了 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上的一个函数 $G(z)$, 即

$$G(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

称它为 **Cauchy 型积分**.

♣

笔记 由 Cauchy 型积分确定的函数有很好的性质.

定理 3.14

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线,g 是 γ 上的连续函数, 那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上有任意阶导数, 而且

$$G^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.12}$$

♡

笔记 这个定理实际上证明了在现在的情况下, 微分运算和积分运算可以交换, 公式很便于记忆.

证明 我们用数学归纳法来证明等式 (3.12). 先设 $n = 1$, 我们要证明

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta,\ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \tag{3.13}$$

任意取定 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 记 $\rho = \inf\limits_{\zeta \in \gamma} |\zeta - z_0| > 0, \delta = \min\left(1, \frac{\rho}{2}\right)$, 则当 $\zeta \in \gamma, z \in B(z_0, \delta)$ 时, 有 $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < \frac{1}{2}$. 于是由 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + h(z, \zeta)\right), \tag{3.14}$$

其中 $h(z,\zeta)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$, 从而

$$|h(z,\zeta)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n=\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n<\frac{|z-z_0|^2}{\rho^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{\rho^2}|z-z_0|^2. \tag{3.15}$$

这样, 由 (3.14)式便得

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta+\frac{z-z_0}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta,$$

又注意到 $h(z_0,\zeta)=0$, 因而有

$$\frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.16}$$

若记 $M=\sup\limits_{\zeta\in\gamma}|g(\zeta)|$, 由 (3.15)式便知(3.16)式右端的绝对值不超过

$$\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3|z-z_0|}\cdot|z-z_0|^2=\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3}|z-z_0|.$$

在 (3.16)式两端令 $z\to z_0$, 即得

$$G'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

现设 $n=k$ 时 (3.12)式成立, 即

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

要证明

$$G^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由 (3.14)式和二项式定理, 可得

$$\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+h(z,\zeta)\right)^{k+1}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+(k+1)\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+H(z,\zeta)\right),$$

由 (3.15)式便得

$$|H(z,\zeta)|\leqslant C|z-z_0|^2, \tag{3.17}$$

这里,C 是一个常数. 于是

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta+\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}(z-z_0)\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta+\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

即

$$\frac{G^{(k)}(z)-G^{(k)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.18}$$

由 (3.17)式便知 (3.18)式右端的绝对值不超过 $K|z-z_0|$, 这里,K 是一个常数. 在 (3.18) 式中令 $z\to z_0$, 即得

$$G^{(k+1)}(z_0)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 z_0 是 D 中的任意点, 归纳法证明完毕.

□

定理 3.15

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域, 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 那么 f 在 D 上有任意阶导数, 而且对任意 $z\in D$, 有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

证明 证法一: 由定理 3.12,f 可写为 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 f 在 γ 上连续, 故由定理 3.14即得所要证的结果.

证法二: 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则由定理 2.6知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

$f'(z)=U(x,y)+\mathrm{i}V(x,y)$, 其中 $U(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$V(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 又由命题 2.3(3)知,$f$ 有任意阶的连续偏导数. 从而 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 任意阶可微, 并且

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial U}{\partial y}.$$

因此 f' 满足 Cauchy-Riemann 方程. 故由定理 2.6知 $f'\in H(D)$. 再利用数学归纳法易知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有 $f^{(n)}\in H(D)$.

□

定理 3.16

如果 f 是区域 D 上的全纯函数, 那么 f 在 D 上有任意阶导数.

证明 任取 $z_0\in D$, 取充分小的 δ, 使得 $\overline{B(z_0,\delta)}\subset D$. 由定理 3.15,$f$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中有任意阶导数, 又由于 z_0 是任意的, 所以 f 在 D 中有任意阶导数.

□

例题 3.3 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$, 则 f 在 $\{z:|z|\leqslant 2\}$ 中全纯, 根据定理 3.15, 有

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{z^2+16}\right)'\Bigg|_{z=0}=0.$$

也可以这样计算:

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=\frac{1}{16}\left\{\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}-\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+16}\right\}=0.$$

这是因为, 由命题 3.1, 第一个积分为零; 由 Cauchy 积分定理, 第二个积分为零.

□

定理 3.17

设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 中的每一条都在其他 $k-1$ 条的外部,D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的区域,D 的边界 γ 由 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 所组成. 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 则对任意 $z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

f 在 D 内有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

证明 定理的证明和前面的一样, 不再重复. 根据定理 3.14的结论, 再利用定理 3.7的证明思路进行证明即可.

□

例题 3.4 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.$$

解 注意到 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 在 $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$ 处不解析. 作一个中心在原点、半径为 $R(R>4)$ 的大圆 (图 3.11), 则在闭圆环

$$\{z: 2\leqslant |z|\leqslant R\}$$

上,$f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 是全纯的. 于是, 由定理 3.17 得

$$\int_{\gamma_1^-} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=2\pi i\left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\bigg|_{z=-4}=-\frac{32}{1323}\pi i,$$

其中 $\gamma_1=\{z:|z|=2\}$,$\gamma_2=\{z:|z|=R\}$. 所以

$$\begin{aligned}
&-\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=-\frac{32\pi i}{1323}\\
\Longleftrightarrow &\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi i}{1323}+\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

由于当 $|z|=R$ 时, 有

$$|(z^3-1)(z+4)^2|\geqslant (R^3-1)(R-4)^2,$$

所以由长大不等式得

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\right|\leqslant \frac{2\pi R}{(R^3-1)(R-4)^2}\to 0\,(R\to\infty).$$

故在(3.19)式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi i}{1323}.$$

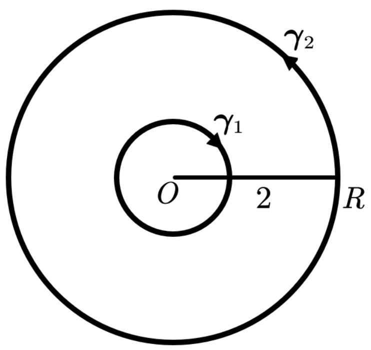

图 3.11

□

定理 3.18 (Schwarz 积分公式)

设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$,$f=u+iv$. 证明:$f$ 可用实部表示为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}u(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta+iv(0).$$

♡

证明

□

3.5 Cauchy 积分公式的一些重要推论

定理 3.19 (Cauchy 不等式)

设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯, 且对任意 $z \in B(a,R)$, 有 $|f(z)| \leqslant M$, 那么

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.20}$$

笔记 这个不等式给出了圆盘上全纯函数的各阶导数在圆心处值的估计.

证明 取 $0 < r < R$, 则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯, 由定理 3.15, 得

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

于是, 由长大不等式得

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

让 $r \to R$, 即得所要证的不等式 (3.20).

□

定理 3.20 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

证明 设 f 为一有界整函数, 其模的上界设为 M, 即对任意 $z \in \mathbb{C}$, 有 $|f(z)| \leqslant M$. 任取 $a \in \mathbb{C}$, 以 a 为中心、R 为半径作圆, 因为 f 为整函数, 故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

这个不等式对任意 $R > 0$ 都成立, 让 $R \to \infty$, 即得 $f'(a) = 0$. 因为 a 是任意的, 所以在全平面上有 $f'(z) \equiv 0$, 因而由命题 2.4可知 f 是常数.

□

定理 3.21 (代数学基本定理)

任意复系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

笔记 考虑到实系数多项式在实数域中未必有零点, 这个定理给出了复数域的又一重要性质.

证明 反证, 如果 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中没有零点, 那么 $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ 是一个整函数. 由 $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$ 知

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

故存在 $R > 0$, 使当 $|z| > R$ 时, 有

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

又由 f 是整函数知 $f \in C(B(0,R))$, 故由定理 1.16知当 $|z| \leqslant R$ 时,f 是有界的. 因而 f 是有界整函数. 由Liouville 定理,f 应是一常数, 显然矛盾! 这就证明了 P 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

□

定理 3.22 (Morera 定理)

如果 f 是区域 D 上的连续函数, 且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零, 那么 f 在 D 上全纯.

笔记 这个定理是Cauchy 积分定理的逆定理.

证明 由定理 3.8, 存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 中成立. 由定理 3.16,F' 是 D 中的全纯函数, 所以 $F' = f$ 也是全纯函数.

□

3.6 非齐次 Cauchy 积分公式

定义 3.5

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一个复数, 把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量, 定义微分 $\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z}$ 的**外积**为

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0, \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z.$$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 的**外积**定义与 $\mathrm{d}z, d\bar{z}$ 的外积定义一样, 即

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x.$$

定义**面积元素** $dA = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

♣

命题 3.5

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一个复数, 则

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2\mathrm{i}\mathrm{d}A.$$

♠

证明 由于 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$, 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} &= (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\
&= \mathrm{i}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= -2\mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2\mathrm{i}\mathrm{d}A.
\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{d}A$ 是面积元素.

□

定义 3.6

称 $z, \bar{z}$ 的函数 $f(z, \bar{z})$ 为**零次微分形式**,$f_1(z, \bar{z})\mathrm{d}z + f_2(z, \bar{z})\mathrm{d}\bar{z}$ 为**一次微分形式**,$f(z, \bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ 为**二次微分形式**. ♣

定义 3.7

定义算子 $\partial, \bar{\partial}$ 如下:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z, \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

这里

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

定义算子 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, 即

$$\mathrm{d}f = \partial f + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}. \tag{3.21}$$

♣

定义 3.8

算子 $\partial, \bar{\partial}$ 对一次微分形式的作用定义为

$$\partial(f_1(z, \bar{z})\mathrm{d}z + f_2(z, \bar{z})\mathrm{d}\bar{z}) = \frac{\partial f_1}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \frac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

$$\bar{\partial}(f_1(z, \bar{z})\mathrm{d}z + f_2(z, \bar{z})\mathrm{d}\bar{z}) = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.$$

所以

$$d(f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}. \tag{3.22}$$

算子 $\partial, \bar{\partial}$ 作用在二次微分形式上的结果定义为零:

$$\partial(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

$$\bar{\partial}(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

因而

$$d(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = 0. \tag{3.23}$$

定义 3.9

定义 $d^2\omega = d(d\omega)$, $\quad \partial^2\omega = \partial(\partial\omega)$, $\quad \bar{\partial}^2\omega = \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \partial\bar{\partial}\omega = \partial(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \bar{\partial}\partial\omega = \bar{\partial}(\partial\omega)$.

命题 3.6

$d^2 = 0, \quad \partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0.$

证明 当 ω 是一 C^2 函数时, 由 (3.21) 式和 (3.22) 式, 得

$$d^2\omega = d(d\omega) = d\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}\partial z} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

当 ω 是一个一次微分形式时, 由 (3.22) 式知 $d\omega$ 是一个二次微分形式, 由 (3.23) 式即知 $d^2\omega = 0$. 当 ω 是一个二次微分形式时, 由 (3.23) 式知 $d^2\omega = 0$. 总之, 不论 ω 是零次、一次或二次微分形式, 都有 $d^2\omega = 0$, 所以 $d^2 = 0$.

根据上述证明, 同样可以证明

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0.$$

□

定理 3.23 (Green 公式)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的区域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $\omega = f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}$ 是区域 D 上的一个一次微分形式, 这里,$f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 那么

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \tag{3.24}$$

笔记 公式 (3.24) 在高维空间中也成立, 通常称为 **Stokes 公式**, 这里只是它的一个特例.

证明 记 $f_1 = u_1 + iv_1, f_2 = u_2 + iv_2$, 这里,$u_1, v_1, u_2, v_2$ 是 $z, \bar{z}$ 的实值函数, 于是

$$\begin{aligned} \omega &= f_1 dz + f_2 d\bar{z} = (u_1 + iv_1)(dx + idy) + (u_2 + iv_2)(dx - idy) \\ &= \{(u_1 + u_2)dx + (-v_1 + v_2)dy\} + i\{(v_1 + v_2)dx + (u_1 - u_2)dy\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

由(3.22)式, 得

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_2 + iv_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 + iv_1)\right\} 2idA \\ &= \left\{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right\} dA. \end{aligned} \tag{3.26}$$

因为 $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 所以 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^1(\bar{D})$. 于是根据实值函数的 Green 公式, 我们有

$$\int_{\partial D} (u_1 + u_2)dx + (-v_1 + v_2)dy = \int_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-v_1 + v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u_1 + u_2)\right\} dA, \tag{3.27}$$

$$\int_{\partial D}(v_1+v_2)\mathrm{d}x+(u_1-u_2)\mathrm{d}y=\int_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_1-u_2)-\frac{\partial}{\partial y}(v_1+v_2)\right\}\mathrm{d}A. \tag{3.28}$$

由等式(3.25)(3.26)(3.27)(3.28) 即得我们要证明的公式 (3.24).

□

定理 3.24 (非齐次 Cauchy 积分公式 (Pompeiu 公式))

设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的区域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $f\in C^1(\bar{D})$, 那么对任意 $z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}. \tag{3.29}$$

笔记 如果 $f\in H(D)$, 那么由 Cauchy-Riemann 方程,$\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}=0$, 这时公式 (3.29) 右端的第二项就消失了, 公式 (3.29) 就是 Cauchy 积分公式. 所以, 公式 (3.29) 是 Cauchy 积分公式在 C^1 函数类中的推广, 有时也称为**非齐次 Cauchy 积分公式**.

公式 (3.29) 首先是由 Pompeiu 在 1912 年证明的 (所以有时也称之为 Pompeiu 公式), 但长期以来似乎被人们遗忘了. 直到 1950 年,Grothendieck 和 Dolbeault 用它来解 $\bar{\partial}$ 方程时, 人们才发现它的意义所在.

证明 不妨设 D 是图 3.12所示的二连通区域,D 的边界 ∂D 由 γ_0 和 γ_1 组成. 任取 $z\in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\zeta-z|<\delta$ 时,$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 记 $\rho=\inf\limits_{\zeta\in\partial D}|\zeta-z|>0$, 取 η, 使得 $0<\eta<\min(\rho,\delta)$, 于是 $\overline{B(z,\eta)}\subset D$. 记 $B_\eta=B(z,\eta)$, 令 $G_\eta=D\setminus\overline{B_\eta}$, 则 G_η 的边界 ∂G_η 由 γ_0,γ_1 和 ∂B_η 三条曲线组成. 考虑一次微分形式

$$\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

它在区域 G_η 上满足Green 公式的条件, 因而有

$$\int_{\partial G_\eta}\omega=\int_{G_\eta}\mathrm{d}\omega. \tag{3.30}$$

由于 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 在 G_η 中全纯, 所以由定理 2.6可知 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\dfrac{1}{\zeta-z}\right)=0$. 因此

$$\bar{\partial}\omega=\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta\xlongequal{\text{乘积求导法则}}\left\{f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\right\}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

易知

$$\partial\omega=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta=0,$$

因而

$$\mathrm{d}\omega=\partial\omega+\bar{\partial}\omega=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

这样,(3.30) 式可以写成

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\int_{G_\eta}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta. \tag{3.31}$$

注意

$$\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+f(z)\int_{\partial B_\eta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\xlongequal{\text{命题 3.1}}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+2\pi\mathrm{i}f(z),$$

而

$$\left|\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\int_{\partial B_\eta}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}|\mathrm{d}\zeta|\leqslant\frac{\varepsilon}{\eta}\cdot2\pi\eta=2\pi\varepsilon,$$

由此即得

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}f(z). \tag{3.32}$$

另一方面, 由 $f\in C^1(\bar{D})$ 可知 $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上连续, 故有常数 M, 使得 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\right|\leqslant M$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上成立. 于是

$$\left|\int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant 2\int_{B_\eta}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\right|\frac{1}{|\zeta-z|}\mathrm{d}A\leqslant 4M\pi\eta\to 0\ (\eta\to 0).$$

因而

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{G_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=\lim_{\eta\to 0}\left\{\int_D\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta-\int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta\right\}=\int_D\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta. \tag{3.33}$$

在等式 (3.31) 两端令 $\eta\to 0$, 并利用 (3.32) 式和 (3.33) 式, 即得所要证明的公式 (3.29).

□

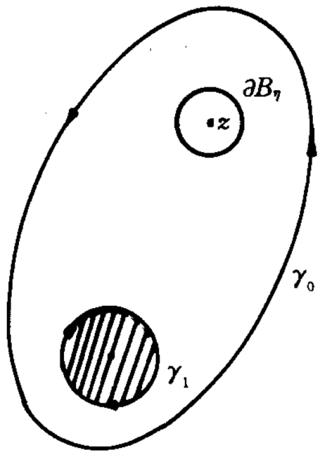

图 3.12

3.7 一维 $\bar{\partial}$ 的解

定义 3.10

所谓一维 $\bar{\partial}$ 问题, 是指在区域 D 上给定一个函数 f, 要求函数 u, 使得在 D 上有

$$\frac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}}=f(z),\quad z\in D.$$

u 就称为 $\bar{\partial}$ 问题的解.

♣

定义 3.11

设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上的函数, 使 φ 不取零值的点集的闭包称为 φ 的**支集**, 记为 $\mathrm{supp}\varphi$, 即

$$\mathrm{supp}\varphi=\overline{\{z\in\mathbb{C}:\varphi(z)\neq 0\}}.$$

♣

引理 3.2

设 a 是 $\mathbb{C}$ 中任意一点,$0<r<R$, 则必存在 φ, 满足下列条件:

(i) $\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})$;

(ii) $\mathrm{supp}\varphi\subset\overline{B(a,R)}$;

(iii) 当 $z\in\overline{B(a,r)}$ 时,$\varphi(z)\equiv 1$;

(iv) 对于任意 $z\in\mathbb{C}$,$0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$.

♡

证明 令 $r < R_1 < R$ 和

$$h_1(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z-a|^2-R_1^2}}, & z \in B(a, R_1); \\ 0, & z \notin B(a, R_1), \end{cases}$$

$$h_2(z) = \begin{cases} 0, & z \in \overline{B(a, r)}; \\ e^{\frac{1}{r^2-|z-a|^2}}, & z \notin \overline{B(a, r)}, \end{cases}$$

那么 $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{C})$. 又令

$$\varphi(z) = \frac{h_1(z)}{h_1(z) + h_2(z)},$$

则 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$. 而且当 $z \in \overline{B(a,r)}$ 时,$\varphi(z) \equiv 1$; 当 $z \notin B(a, R_1)$ 时,$\varphi(z) \equiv 0$, 即 $\operatorname{supp}\varphi \subset B(a, R)$. 对于任意 $z \in \mathbb{C}$,$0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ 显然成立.φ 即为所求的函数.

□

定理 3.25

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,$f \in C^1(D)$. 令

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}, \quad z \in D, \tag{3.34}$$

则 $u \in C^1(D)$, 且对任意 $z \in D$, 有 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z)$.

笔记 在上面的证明中, 容易看出, 如果 $f \in C^\infty(D)$, 那么 $\bar{\partial}$ 问题的解 $u \in C^\infty(D)$.

证明 把 f 的定义扩充到整个复平面, 对于 $z \notin D$, 定义 $f(z) = 0$. 这时,(3.34) 式可写为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} \xlongequal{\text{令}\zeta=z+\eta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} f(\zeta + \eta) \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta}.$$

由 $f \in C^1(D)$, 可得 $u \in C^1(D)$.

现固定 $a \in D$, 我们证明

$$\frac{\partial u(a)}{\partial \bar{z}} = f(a).$$

为此, 取 $0 < \varepsilon < r$, 使得 $B(a, \varepsilon) \subset B(a, r) \subset D$. 根据引理 3.2, 存在 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$, 使得当 $z \in B(a, \varepsilon)$ 时,$\varphi(z) \equiv 1$; 而当 $z \notin B(a, r)$ 时,$\varphi(z) \equiv 0$. 记

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta},$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta) - \varphi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta},$$

那么 $u = u_1 + u_2$. 由于当 $\zeta \in B(a, \varepsilon)$ 时,$f(\zeta) - \varphi(\zeta) f(\zeta) \equiv 0$, 所以

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{B(a, \varepsilon)}} \frac{(1 - \varphi(\zeta)) f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

因而, 当 $z \in B(a, \varepsilon)$ 时,u_2 是全纯函数, 所以由定理 2.6可知 $\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = 0$. 于是, 在小圆盘 $B(a, \varepsilon)$ 上就有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} &\xlongequal{\text{令}\zeta=z+\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z+\eta) f(z+\eta)}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}} \right\} \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \frac{\partial\,(z+\eta)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial\,(\bar{z}+\bar{\eta})}{\partial \bar{z}} \right\} \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \zeta} \cdot (0+0) + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot (1+0) \right\} \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\eta} \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

最后一个等式成立是因为当 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,r)}$ 时 $\varphi(\zeta) \equiv 0$. 又因为当 $\zeta \in \partial B(a,r)$ 时 $\varphi(\zeta) \equiv 0$, 所以根据非齐次 Cauchy 积分公式, 有

$$
\varphi(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}.
$$

因为当 $z \in B(a,\varepsilon)$ 时 $\varphi(z) = 1$, 所以

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,r)} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}. \tag{3.36}
$$

比较 (3.35) 式和 (3.36) 式, 即得

$$
\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z).
$$

特别地, 取 $z = a$, 即得

$$
\frac{\partial u(a)}{\partial \bar{z}} = f(a).
$$

由于 a 是 D 中的任意点, 所以 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z)$ 在 D 上成立.

□

第 4 章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

4.1 Weierstrass 定理

定义 4.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4.1}$$

为一个复数项级数. 级数 (4.1) 称为是收敛的, 如果它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 收敛. 如果 $\{S_n\}$ 的极限为 S, 就说级数 (4.1) 的和为 S, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

定理 4.1

设 $\alpha_n = a_n + \mathrm{i}b_n (n = 1, 2, \cdots)$,$a_n$ 及 b_n 为实数, 则复级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

收敛于 $s = a + \mathrm{i}b (a, b$ 为实数) 的充要条件为: 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别收敛于 a 及 b.

证明 设 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, 则

$$s_n = A_n + \mathrm{i}B_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由定理 1.4知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + \mathrm{i}b$$

的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = a \text{ 及 } \lim_{n\to\infty} B_n = b.$$

□

定理 4.2 (Cauchy 收敛准则)

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立.

证明 由数列的 Cauchy 收敛准则立得.

□

推论 4.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数,$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

定义 4.2

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

命题 4.1

绝对收敛的级数一定收敛. 反过来当然不成立.

证明 由级数收敛的 Cauchy 收敛准则立得. □

定义 4.3

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的一个点集,$f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的一个函数列, 如果对于每一个 $z \in E$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{4.2}$$

收敛到 $f(z)$, 就说级数 (4.2) 在 E 上收敛, 其和函数为 f, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$.

定义 4.4

设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是定义在点集 E 上的级数, 我们说 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

对所有 $z \in E$ 成立, 这里,$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 是级数的部分和.

定理 4.3

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

对所有 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 那么按定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

在 E 上成立, 这里,p 是任意自然数. 因而

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leqslant |S_{n+p}(z) - f(z)| + |S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

在 E 上成立, 这就是不等式(4.3).

反之, 如果不等式(4.3) 对任意自然数 p 在 E 上成立, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上收敛, 设其和为 $f(z)$. 在不等式

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

中令 $p \to \infty$, 即得

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant \varepsilon.$$

按定义,$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$.

□

定理 4.4 (Weierstrass 一致收敛判别法)

设 $f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的函数列, 且在 E 上满足

$$|f_n(z)| \leqslant a_n, n = 1, 2, \cdots.$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

♡

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立. 故由定理 4.3知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

□

定理 4.5

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都是 E 上的连续函数, 那么 f 也是 E 上的连续函数.

♡

证明 任取 $a \in E$, 只要证明 f 在 a 处连续就可以了. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对所有 $z \in E$ 成立. 取定 $n_0 > N$, 则因 $S_{n_0}(z) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k(z)$ 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z \in E \cap B(a, \delta)$ 时, 有

$$|S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $z \in E \cap B(z_0, \delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(z) - f(a)| &\leqslant |f(z) - S_{n_0}(z)| + |S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| + |S_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 f 在 a 处连续.

□

定理 4.6

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都在 γ 上连续, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z. \tag{4.4}$$

注 这个定理实际上证明了在上述的条件下, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 可以沿 γ 逐项积分.

证明 由定理 4.5,f 在 γ 上连续. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon$$

对任意 $z\in\gamma$ 成立. 于是, 当 $n>N$ 时, 由长大不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon|\gamma|.$$

因而等式(4.4)成立.

□

定义 4.5

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 的任意紧子集上一致收敛, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中**内闭一致收敛**.

注 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 上内闭一致收敛, 那么它在 D 中的每一点都收敛, 但不一定一致收敛. 例如, 级数 $1+\sum_{k=1}^{\infty}(z^k-z^{k-1})$, 它的部分和

$$S_{n+1}(z) = 1+(z-1)+\cdots+(z^n-z^{n-1}) = z^n,$$

显然它在单位圆盘中是内闭一致收敛的, 但不一致收敛.

命题 4.2

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中一致收敛, 那么它一定内闭一致收敛.

笔记 由此可知, 内闭一致收敛比一致收敛要求低.

证明 证明是显然的.

□

定义 4.6

设 $D,G\subseteq\mathbb{C}$, 如果 D 的子集 G 满足

(i) $\overline{G}\subseteq D$;

(ii) $\overline{G}$ 是紧的,

就说 G **相对于 D 是紧的**, 记为 $G\subset\subset D$.

引理 4.1

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,K 是 D 中的紧子集, 且包含在相对于 D 是紧的开集 G 中, 即 $K \subset G \subset\subset D$, 那么对任意 $f \in H(D)$, 均有

$$\sup\{|f^{(k)}(z)| : z \in K\} \leqslant C \sup\{|f(z)| : z \in G\}, \tag{4.5}$$

这里,k 是任意自然数,C 是与 k, K, G 有关的常数.

笔记 这个引理告诉我们,$f^{(k)}$(k 是任意自然数) 在紧集 K 上的上确界可用 f 在 K 的邻域 G 上的上确界来控制.

证明 由定理 1.9,$\rho = d(K, \partial G) > 0$. 所以, 以 K 中任意点 a 为中心、ρ 为半径的圆盘都包含在 G 中. 对圆盘 $B(a, \rho)$ 用 Cauchy 不等式, 得

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in B(a, \rho)\} \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in G\}.$$

对 K 中的 a 取上确界, 即得不等式(4.5).

□

定理 4.7 (Weierstrass(魏尔斯特拉斯) 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果

(i) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$,

那么

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$\sum\limits_{m=1}^{n} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

笔记 从 Weierstrass 定理我们看到, 由全纯函数构成的级数只要在区域中内闭一致收敛, 它的和函数就一定是区域中的全纯函数, 而且可以逐项求导任意次. 这样的结果在实变函数中当然不成立.

证明 任取 $z_0 \in D$, 只要证明 f 在 z_0 的一个邻域中全纯就行了. 选取 $r > 0$, 使得 $\overline{B(z_0, r)} \subset D$, 由定理 4.5,$f$ 在 $B(z_0, r)$ 中连续. 在 $B(z_0, r)$ 中任取一可求长闭曲线 γ, 由定理 4.6和 Cauchy 积分定理, 得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由Morera 定理知 f 在 $B(z_0, r)$ 中全纯, 再由 z_0 的任意性知 f 在 D 中全纯.

为了证明第二个结论, 任取 D 中的紧子集 K, 记 $\rho = d(K, \partial D) > 0$. 令

$$G = \bigcup \left\{B\left(z, \frac{\rho}{2}\right) : z \in K\right\},$$

则 $K \subset G \subset\subset D$. 由于 $\overline{G}$ 是紧集, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $f(z)$. 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 对 $\overline{G}$ 上所有的 z 成立, 这里,$S_n(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(z)$. 于是由引理 4.1, 对任意的自然数 k, 有

$$\sup\{|S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| : z \in K\} \leqslant C \sup\{|S_n(z) - f(z)| : z \in G\} \leqslant C\varepsilon,$$

这就证明了 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 由于 K 是 D 的任意紧子集, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

□

推论 4.2

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果
(i) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$;
(ii) $f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$,
那么
(i) $f \in H(D)$;
(ii) 对任意自然数 k,$f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

证明 令 $f_0(z) \equiv 0, g_n(z) = f_n(z) - f_{n-1}(z)(n = 1, 2, \cdots)$, 则由 $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$ 可得 $g_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$. 并且

$$\sum_{m=1}^{n} g_m(z) = \sum_{m=1}^{n} \left[f_m(z) - f_{m-1}(z)\right] = f_n(z).$$

于是由条件 (ii) 知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} g_m(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$. 从而由Weierstrass 定理可得

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$\sum\limits_{m=1}^{n} g_m^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

又因为

$$\sum_{m=1}^{n} g_m^{(k)}(z) = \left(\sum_{m=1}^{n} g_m(z)\right)^{(k)} = f_n^{(k)}(z),$$

所以对任意自然数 k,$f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

□

例题 4.1 研究函数 $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$.

解 因为 $n^z = \mathrm{e}^{z \ln n}$, 若记 $z = x + \mathrm{i}y$, 则

$$|n^z| = |\mathrm{e}^{x \ln n} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y \ln n}| = n^x.$$

当 $\mathrm{Re}z = x \geqslant x_0 > 1$ 时,$\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{x_0}}$, 故由Weierstrass 一致收敛判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ 在 $\mathrm{Re}z > 1$ 中一致收敛, 从而内闭一致收敛. 由 Weierstrass 定理,ζ 是半平面 $\mathrm{Re}z > 1$ 上的全纯函数.

□

定义 4.7

设 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是区域 D 内的解析函数族. 如果从 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 满足下列两个条件之一:
(1) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内内闭一致收敛.
(2) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内内闭一致趋于 $+\infty$,
则称此函数族 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内是**正规的**.

引理 4.2

设复函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内解析, 在 D 内内闭一致有界, 并且在 D 的一个稠密子集 Ω 上收敛, 则序列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛.

证明 设 Π 是 D 内任一有界闭集,ρ 为 Π 到 D 的边界之距离, 即 $\rho = \rho(\Pi, \partial D)$. 又设 $E = \left\{z \mid \rho(z, \Pi) \leqslant \dfrac{\rho}{2}\right\}$, 显然 E 是闭集且 $\Pi \subset E \subset D$.

由条件知, 序列 $\{f_n(z)\}$ 在 E 上一致有界, 即在 E 上 $|f_n(z)| \leqslant M$. 设点 $z_1, z_2 \in \Pi$ 且 $|z_1 - z_2| < \dfrac{\rho}{4}$; 用 $\Gamma = \{\xi :$

$|\xi - z_1| = \frac{\rho}{2}\}$. 显然 Γ 的内部包含在 E 中. 由Cauchy 积分公式得到

$$\begin{aligned}|f_n(z_1) - f_n(z_2)| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_1}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_2}\mathrm{d}\xi\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}|z_1 - z_2|\left|\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}\mathrm{d}\xi\right|.\end{aligned}$$

因为当 $\xi \in \Gamma$ 时, 有

$$|\xi - z_2| = |(\xi - z_1) - (z_2 - z_1)| \geqslant |\xi - z_1| - |z_1 - z_2| \geqslant \frac{\rho}{4}.$$

所以

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho}{4}} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |z_1 - z_2| = \frac{4M}{\rho}|z_1 - z_2|.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho\varepsilon}{4M}\right)$, 则当 $z_1, z_2 \in \Pi$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 对任意的 n, 有

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

在 z 平面上作边平行于坐标轴的正方形网格, 使其边长为 $\frac{\delta}{2}$. 因为 Π 是有界闭集, 所以含有 Π 的点的网格仅有限个, 记为 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_\mu$. 在每个 Π_k 上任取两点 z_1, z_2, 则

$$|z_1 - z_2| < \sqrt{2} \cdot \frac{\delta}{2} < \delta.$$

由于 Ω 是 D 的稠密子集, 在每个 Π_k 内必有 Ω 的一点 z_k, 序列 $\{f_n(z)\}$ 在 z_k 是收敛的. 因此由 Cauchy 收敛准则知, 存在正整数 N_k, 使得当 $m, n > N_k$ 时, 有

$$|f_n(z_k) - f_m(z_k)| < \varepsilon.$$

令 $N = \max\left\{N_1, N_2, \cdots, N_\mu\right\}$, 则当 $m, n > N$ 时, 有

$$|f_n(z_k) - f_m(z_k)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots, \mu.$$

现在设 z 是 Π 上任意一点, 它必属于某个 Π_k 内. 由(4.6), 对任意的 m, n, 有

$$|f_n(z) - f_n(z_k)| < \varepsilon, \quad |f_m(z) - f_m(z_k)| < \varepsilon.$$

于是当 $m, n > N$ 时, 有

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant |f_n(z) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_m(z_k)| + |f_m(z_k) - f_m(z)| < 3\varepsilon.$$

由于 N 只与 ε 有关, 而与 z 无关, 所以 $\{f_n(z)\}$ 在 Π 上一致收敛, 故 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛.

□

定理 4.8 (Montel(蒙泰尔) 定理)

设复函数序列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ 在区域 D 内解析, 并且在 D 内内闭一致有界, 则 $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ 存在子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛, 并且这个子序列的极限函数在区域 D 内解析.

♡

证明 设 Ω 是区域 D 内所有有理点 (即实部和虚部都是有理数的点) 构成的点集, 则 Ω 在区域 D 内是稠密的. 因为 Ω 是可列集, 可记 $\Omega = \{z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$. 由于 $\{f_n(z)\}$ 在 $z = z_1$ 有界, 故有 $\{f_n(z)\}$ 的子序列 $\{f_{n,1}(z)\}$, 使得 $\{f_{n,1}(z_1)\}$ 收敛. 同样的理由,$\{f_{n,1}(z)\}$ 有子序列 $\{f_{n,2}(z)\}$ 使得 $\{f_{n,2}(z_2)\}$ 收敛. 以此类推,$\{f_{n,k}(z)\}$ 有子序列 $\{f_{n,k+1}(z)\}$ 使得 $\{f_{n,k+1}(z_{k+1})\}$ 收敛. 于是得到下面的一串函数序列:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1}(z) & f_{2,1}(z) & f_{3,1}(z) & \cdots \\ f_{1,2}(z) & f_{2,2}(z) & f_{3,2}(z) & \cdots \\ f_{1,3}(z) & f_{2,3}(z) & f_{3,3}(z) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_{1,n}(z) & f_{2,n}(z) & f_{3,n}(z) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

其中后一行序列是前一行序列的子序列, 并且第 k 行序列在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 收敛. 我们取对角线序列 $\{f_{n,n}(z)\}$, 则它在 Ω 上收敛. 于是由引理 4.2知, 序列 $\{f_{n,n}(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛. 由推论 4.2知, 这个子序列 $\{f_{n,n}(z)\}$ 在区域 D 内解析.

□

4.2 幂级数

定义 4.8

所谓幂级数, 是指形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{4.7}$$

的级数, 它的通项是幂函数, 这里,$a_0, \cdots, a_n, \cdots$ 和 z_0 都是复常数.

♣

注 为讨论简便起见, 不妨假定 $z_0 = 0$, 这时级数(4.7) 成为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots . \tag{4.8}$$

通常, 只要作变换 $w = z - z_0$, 就能把级数(4.7)化为级数(4.8).

定义 4.9

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots . \tag{4.9}$$

如果存在常数 R, 使得当 $|z-z_0| < R$ 时, 级数 (4.9) 收敛; 当 $|z-z_0| > R$ 时, 级数 (4.9) 发散, 就称 R 为级数 (4.9) 的**收敛半径**,$\{z : |z-z_0| < R\}$ 称为级数(4.9)的**收敛圆**.

♣

定理 4.9

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

存在收敛半径

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

♡

证明 不妨设 $z_0 = 0$, 否则用 $z - z_0$ 代替 z. 我们只要证明下列三件事:

(i) 先证 (i) 当 $R = 0$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z = 0$ 处收敛;

(ii) 当 $R = \infty$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处收敛;

(iii) 当 $0 < R < \infty$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中收敛, 在 $\{z : |z| > R\}$ 中发散.

先证 (i). 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 0$ 处收敛是显然的. 现固定 $z \neq 0$, 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 故必有子列 n_k, 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|z|}$, 于是 $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$. 所以, 由推论 4.1可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散.

再证 (ii). 任取 $z\neq 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, 对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2|z|}$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{2|z|}$, 于是 $|a_nz^n|<\dfrac{1}{2^n}$. 所以, 由Weierstrass 一致收敛判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 一致收敛, 从而也收敛.

最后证 (iii). 取定 $z\neq 0, z\in B(0,R)$. 选取 ρ, 使得 $|z|<\rho<R$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}<\dfrac{1}{\rho}$, 因而存在 N, 当 $n>N$ 时, $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{\rho}$, 即 $|a_nz^n|<\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n<1$. 所以由Weierstrass 一致收敛判别法可知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ 一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|<\infty$.

再设 $|z|>R$, 选取 r, 使得 $|z|>r>R$. 因而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}>\dfrac{1}{r}$, 故有 $\{n_k\}$, 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\dfrac{1}{r}$, 即 $|a_{n_k}z^{n_k}|>\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^{n_k}>1$. 故由推论 4.1可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 发散.

□

定理 4.10 (Abel 定理)

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处收敛, 则必在 $\{z:|z-a|<|z_0-a|\}$ 中内闭绝对收敛且内闭一致收敛.

证明 不妨设 $a=0$, 否则用 $z-a$ 代替 z. 设 K 是 $\{z:|z|<|z_0|\}$ 中的一个紧集, 选取 $r<|z_0|$, 使得 $K\subseteq B(0,r)$. 于是, 当 $z\in K$ 时, 有 $|z|<r$. 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n$ 收敛, 所以由推论 4.1可知 $|a_nz_0^n|<M$, 这里,M 是一个常数. 于是, 当 $z\in K$ 时, 有

$$|a_nz^n|=\left|a_nz_0^n\frac{z^n}{z_0^n}\right|\leqslant M\frac{|z|^n}{|z_0|^n}\leqslant M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

因为 $r<|z_0|$, 所以由Weierstrass 一致收敛判别法,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ 在 K 中一致收敛. 从而原级数也在 K 中绝对收敛.

□

定理 4.11

幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数, 即幂级数的和函数在其收敛圆内必是全纯函数.

证明 由Abel 定理知道, 幂级数在其收敛圆内是内闭一致收敛的. 根据 Weierstrass 定理, 它的和函数是收敛圆内的全纯函数.

□

例题 4.2 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散.

例题 4.3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛.

例题 4.4 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 它在 $z=1$ 处是发散的, 但在收敛圆周的其他点 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0<\theta<2\pi)$ 处则是收敛的.

证明 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

由 Dirichlet 判别法知道, 实部和虚部的两个级数都是收敛的.

□

定理 4.12

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 则其和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

是圆盘 $B(z_0,R)$ 中的全纯函数, 并且

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

证明 由定理 4.11, 和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

是圆盘 $B(z_0,R)$ 中的全纯函数.命题 2.3(3)可知 $f\in C^{\infty}$. 再由Weierstrass 定理, 得

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

□

定义 4.10

设 g 是定义在单位圆中的函数,$e^{i\theta_0}$ 是单位圆周上一点,$S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 如图 4.1所示, 其中 $\alpha<\frac{\pi}{2}$. 如果当 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时,$g(z)$ 有极限 l, 就称 g 在 $e^{i\theta_0}$ 处有**非切向极限** l, 记为

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ z\in S_\alpha(e^{i\theta_0})}} g(z)=l.$$

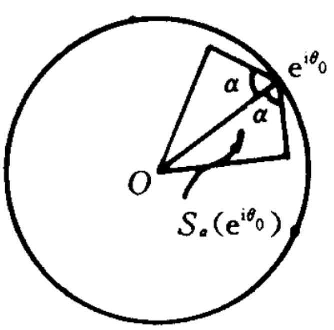

图 4.1

定理 4.13 (Abel 第二定理)

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R=1$, 且级数在 $z=1$ 处收敛于 S, 那么 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S, 即

$$\lim_{\substack{z\to1\\ z\in S_\alpha(1)}} f(z)=S. \tag{4.10}$$

♡

证明 如图 4.2所示, 只要能证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$(这里,$\delta=\cos\alpha$) 的闭包上一致收敛, 那么由Weierstrass定理可知 $f(z)$ 便在 $z=1$ 处连续, 因而 (4.10) 式成立.

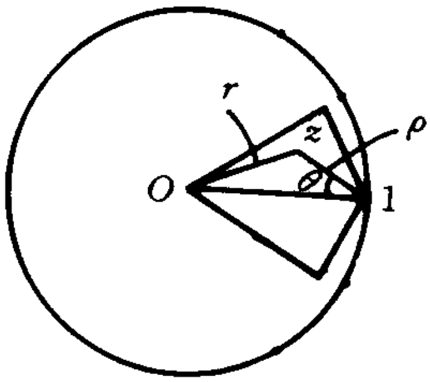

图 4.2

记

$$\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p},$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=1$ 处收敛, 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,$|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$ 对任意自然数 p 成立. 注意

$$\begin{aligned}a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}&=\sigma_{n,1}z^{n+1}+(\sigma_{n,2}-\sigma_{n,1})z^{n+2}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}\\&=\sigma_{n,1}z^{n+1}(1-z)+\sigma_{n,2}z^{n+2}(1-z)+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\&=z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1}+\sigma_{n,2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{p-2})+\sigma_{n,p}z^{n+p}.\end{aligned}$$

因而当 $|z|<1,p=1,2,\cdots,n>N$ 时, 便有

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|<\varepsilon|1-z|(1+|z|+\cdots)+\varepsilon \xlongequal{\text{Taylor 公式}} \varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right). \tag{4.11}$$

现在任取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$, 记 $|z|=r,|1-z|=\rho$, 那么

$$r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta.$$

故有

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\leqslant\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta-\rho}.$$

因为 $z\in B(1,\delta)$, 所以 $\rho=|1-z|<\delta=\cos\alpha$. 又因 $\theta<\alpha$, 所以

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{2\cos\alpha-\rho}<\frac{2}{\cos\alpha}$$

由 (4.11) 式便可得

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{2}{\cos\alpha}+1\right)$$

又当 $z=1$ 时, 有

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|=|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$$

这样, 我们就证明了级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 的闭包上一致收敛, 因而 (4.10) 式成立.

□

命题 4.3

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\quad |z|<1.$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}=-\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|-\mathrm{i}\arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),\quad 0<\theta<2\pi. \tag{4.12}$$

证明 容易知道该级数的收敛半径为 1, 所以它的和 $f(z)$ 是定义在单位圆盘中的单值全纯函数, 因而有

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z},\ |z|<1.$$

由复积分的微分学基本定理和命题 3.4得

$$f(z)=\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\frac{1}{1-\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\int_1^{1-z}\frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\mathrm{Ln}(1-z),\ |z|<1.$$

又因为 f 是单位圆盘上的单值全纯函数, 所以 $f(z)$ 是 $-\mathrm{Ln}(1-z)$ 定义在单位圆盘上的一个单值全纯分支. 注意到 $f(0)=0$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\ |z|<1.$$

这个级数在收敛圆周上除了点 $z=1$ 外都收敛, 故由Abel 第二定理, 当 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 1(0<\theta<2\pi)$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}=-\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|-\mathrm{i}\arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

□

注

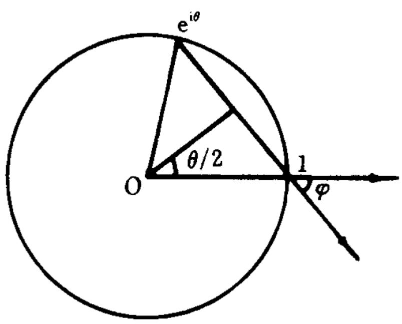

图 4.3

从图 4.3容易看出

$$|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\sin\frac{\theta}{2},\quad \arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\varphi,$$

但 $2\varphi=\pi-\theta$, $\varphi=\dfrac{\pi-\theta}{2}$. 这样, 由(4.12)式便可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}.$$

上面两个等式都在 $0<\theta<2\pi$ 中成立. 特别地, 当 $\theta=\pi$ 时, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2;$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 由于

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k;\\ (-1)^k, & n=2k+1,\end{cases}$$

所以得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

4.3 全纯函数的 Taylor 展开

定理 4.14 (全纯函数的 Taylor 展开)

(1) 若 $f\in H(B(z_0,R))$, 则 f 可以在 $B(z_0,R)$ 中展开成幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n,\quad z\in B(z_0,R). \tag{4.13}$$

其中 $\gamma_\rho:|\zeta-z_0|=\rho, 0<\rho<R$. 右端的级数称为 f 的 **Taylor 级数**, 并且 f 的 Taylor 级数展开式是唯一的.

(2) 若 f 在 z_0 的邻域 $B(z_0,R)$ 内可展开成幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad \forall z\in B(z_0,R).$$

则 $f\in H(B(z_0,R))$ 且

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,\cdots.$$

其中 $\gamma_\rho:|\zeta-z_0|=\rho, 0<\rho<R$.

♡

证明

(1) 任意取定 $z\in B(z_0,R)$, 再取 $\rho<R$, 使得 $|z-z_0|<\rho$(见图 4.4). 记 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}$, 根据 Cauchy 积分公式, 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

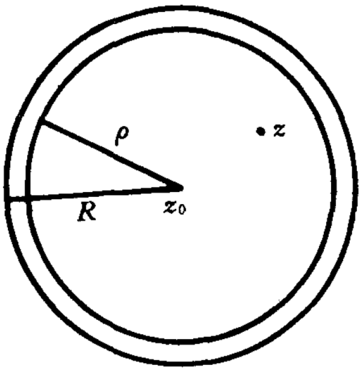

图 4.4

把 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 展开成级数，为

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

最后一个等式成立是因为 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho} < 1$ 的缘故. 现在可得

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{4.14}$$

因为 f 在 γ_ρ 上连续, 记 $M = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_\rho\}$, 于是当 $\zeta \in \gamma_\rho$ 时, 有

$$\left|\frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M}{\rho}\left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n.$$

右端是一收敛级数, 故由 Weierstrass 判别法, 级数(4.14) 在 γ_ρ 上一致收敛, 故由定理 4.6可知, 级数(4.14)可逐项积分. 又因为 $f \in H(\overline{B(z_0, \rho)})$, 所以再由定理 3.15可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

由于 z 是 $B(z_0, R)$ 中的任意点, 所以上式在 $B(z_0, R)$ 中成立.

f 的展开式(4.13)是唯一的. 因为若有展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

那么由定理 4.12可知

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}.$$

在上式中令 $z = z_0$, 即得 $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, 或者 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, 所以

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

这就是展开式 (4.13).

(2) 由定理 4.11和定理 3.15立得.

□

定义 4.11

设 f 在 z_0 点全纯且不恒为零, 如果

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

则称 z_0 是 f 的 $\boldsymbol{m}$ **阶零点**.

定理 4.15

z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z), \tag{4.15}$$

这里 g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$.

证明 如果 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则从 f 的 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\\ &=(z-z_0)^m\left\{\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right\}\\ &=(z-z_0)^m g(z). \end{aligned}$$

这里,$g(z)$ 就是花括弧中的幂级数, 它当然在 z_0 处全纯, 而且

$$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0.$$

反之, 如果 (4.15) 式成立,f 当然在 z_0 处全纯, 通过直接计算即知 z_0 是 f 的 m 阶零点.

□

定理 4.16 (解析函数一般形式的 L'Hospital 法则)

设 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的至少 n 阶零点, 又为解析函数 $\varphi(z)$ 的 n 阶零点, 则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}\ (\varphi^{(n)}(z_0)\neq 0).$$

注 由解析函数的无穷可微性, 本题就构成一般形式的洛必达法则.

证明 利用定理 4.15, 由于 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的至少 n 阶零点, 则有

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)\ (m\geqslant n),$$

其中 $g(z_0)=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$. 同理得 $\varphi(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$, 其中 $\psi(z_0)=\dfrac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$. 本题得证.

□

命题 4.4

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,$f\in H(D)$, 如果 f 在 D 中的小圆盘 $B(z_0,\varepsilon)$ 上恒等于零, 那么 f 在 D 上恒等于零.

证明 在 D 中任取一点 a, 我们证明 $f(a)=0$. 用 D 中的曲线 γ 连接 z_0 和 a, 由定理 1.9,$\rho=d(\gamma,\partial D)>0$. 在 γ 上依次取点 $z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=a$, 使得 $z_1\in B(z_0,\varepsilon)$, 其他各点之间的距离都小于 ρ, 作圆盘 $B(z_j,\rho),j=1,\cdots,n$(图 4.5). 由于 f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中恒为零, 所以 $f^{(n)}(z_1)=0,n=0,1,\cdots$. 于是,$f$ 在 $B(z_1,\rho)$ 中的 Taylor 展开式的系数全为零, 所以 f 在 $B(z_1,\rho)$ 中恒为零. 由于 $z_2\in B(z_1,\rho)$, 所以 $f^{(n)}(z_2)=0,n=0,1,\cdots$, 用同样的方法推理,$f$ 在 $B(z_2,\rho)$ 中恒为零. 再往下推, 即知 f 在 $B(a,\rho)$ 中恒为零, 所以 $f(a)=0$.

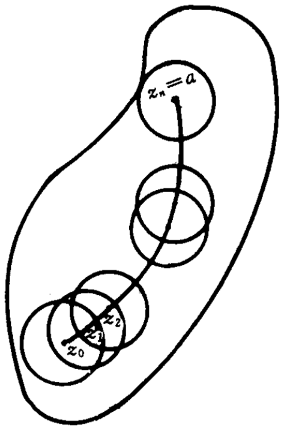

图 4.5

□

定义 4.12

若 z_0 是 f 的一个零点, 且存在 z_0 的邻域 $B(z_0,\delta)$, 使得 f 在 $B(z_0,\delta)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点, 则称 z_0 为 f 的**孤立零点**. 不是孤立的零点称为**非孤立零点**.

定理 4.17

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,$f\in H(D)$,$f(z)\not\equiv 0$, 那么 f 在 D 中的零点都是孤立的. 即若 z_0 为 f 的零点, 则必存在 z_0 的邻域 $B(z_0,\varepsilon)$, 使得 f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点.

证明 由命题 4.4 知,f 在 z_0 的邻域中不能恒等于零, 故不妨设 z_0 为 f 的 m 阶零点. 由定理 4.15知,f 在 z_0 的邻域中可表示为 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, 因 g 在 z_0 处连续, 且 $g(z_0)\neq 0$, 故存在 z_0 的邻域 $B(z_0,\varepsilon)$, 使得 g 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中处处不为零, 因而 f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点.

□

推论 4.3

设函数 $f(z)$ 在邻域 $K:|z-a|<R$ 内解析, 且在 K 内有 $f(z)$ 的一列零点 $\{z_n\}(z_n\neq a)$ 收敛于 a, 则 $f(z)$ 在 K 内必恒为零.

证明 若 $f(z)\not\equiv 0, z\in K$, 则因为 $f(z)$ 在点 a 连续, 且 $f(z_n)=0$, 让 n 趋于无穷取极限, 即得 $f(a)=0$. 故 a 是一个非孤立的零点. 这与定理 4.17矛盾! 故必有 $f(z)$ 在 K 内恒为零.

□

定理 4.18 (唯一性定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,$f_1,f_2\in H(D)$. 如果存在 D 中的点列 $\{z_n\}$, 使得 $f_1(z_n)=f_2(z_n)$,$n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\in D$, 那么在 D 中有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

注 这个定理说明, 全纯函数由极限在区域中的一列点上的值所完全确定, 这是一个非常深刻的结果.

注 必须注意, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$,$a\in D$ 这个条件是不能去掉的, 否则结果不成立. 例如,$f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}$ 在单位圆盘中全纯, 令 $z_n=1-\dfrac{1}{n\pi}$, 则 $f(z_n)=0$,$n=1,2,\cdots$, 但 $f(z)\not\equiv 0$, 原因是 $z_n\to 1$, 而 1 不在单位圆盘中.

证明 令 $g(z)=f_1(z)-f_2(z)$, 则 $g(z_n)=0$,$n=1,2,\cdots$. 若 $g(z)\not\equiv 0$, 则由于 $g\in H(D)$, 所以 $g(a)=\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)=0$, 即 a 是 g 的一个零点. 由于 $\{z_n\}$ 也是 g 的零点, 而且 $z_n\to a$, 因而零点 a 不是孤立的. 这与定理 4.17矛盾! 故 $g(z)\equiv 0$, 即 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

□

推论 4.4

设在区域 D 内解析的函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在 D 内的某一子区域 (或一小段弧) 上相等, 则它们必在区域 D 内恒等.

推论 4.5

一切在实轴上成立的恒等式 (例如,$\sin^2 z+\cos^2 z=1$,$\sin 2z=2\sin z\cos z$ 等), 在 z 平面上也成立, 只要这个恒等式的等号两边在 z 平面上都是解析的.

命题 4.5

设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在区域 D 内解析, 且在 D 内,$f(z)\cdot g(z)\equiv 0$, 则在 D 内 $f(z)\equiv 0$ 或 $g(z)\equiv 0$.

证明 若有 $z_0\in D$ 使 $g(z_0)\neq 0$. 因 $g(z)$ 在点 z_0 连续, 故由命题 1.12知, 存在 z_0 的邻域 $K\subset D$, 使 $g(z)$ 在 K 内恒不为零. 而由题设

$$f(z)\cdot g(z)\equiv 0\quad (z\in K\subset D),$$

故必有

$$f(z)\equiv 0\quad (z\in K\subset D).$$

由推论 4.4知 $f(z)\equiv 0 (z\in D)$.

□

命题 4.6 (常用的初等函数的 Taylor 展开式)

(1) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$

(2) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C}.$

(3) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C}.$

(4) $\mathrm{Ln}(1+z)=2k\pi\mathrm{i}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

(5) $(1+z)^\alpha$ 的某一单值全纯分支 $e^{\alpha(\ln(1+z)+2k\pi\mathrm{i})}=e^{\alpha\cdot 2k\pi\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n,\quad \alpha\in\mathbb{C},k\in\mathbb{Z},|z|<1.$

证明

(1) 指数函数 $f(z)=e^z$, 它是一个整函数, 所以可以在圆盘 $B(0,R)$ 中展开成幂级数, 其中,R 是任意正数. 由于 $f^{(n)}(z)=e^z$,$f^{(n)}(0)=1$, 所以

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.\tag{4.16}$$

公式(4.16) 也可以由全纯函数的唯一性定理得到. 由直接计算知道, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径 $R=\infty$, 所以 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 是一个整函数. 已知 e^z 是一个整函数, 这两个整函数在实轴上相等, 即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R},$$

故由唯一性定理知道这两个整函数在 $\mathbb{C}$ 上处处相等, 这就是公式 (4.16).

(2) 由 (1) 同理可得.

(3) 由 (1) 同理可得.

(4) 由命题 4.3我们已经得到

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1,$$

在上式中用 $-z$ 代替 z, 立刻可得

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1.$$

(5) 函数 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$,α 不一定是整数, 不妨设 $k=0$, 我们只考虑它的主支 $f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式. 这个分支在 $z=0$ 处的值为 1, 它的各阶导数在 $z=0$ 处的值为

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\quad n=1,2,\cdots.$$

如果记

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\binom{\alpha}{0}=1,$$

那么

$$e^{\alpha\ln(1+z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n,\quad |z|<1.$$

也可通过直接计算得到右端级数的收敛半径为 1. 上式对整数 α 当然也成立, 特别当 α 为正整数时, 右端为一多项式.

□

4.4 辐角原理和 Rouché 定理

定理 4.19

设 $f\in H(D)$,γ 是 D 中一条可求长的简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点, 在 γ 内部有零点

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,$$

它们的阶数分别为

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k. \tag{4.17}$$

♡

注 公式 (4.17) 有明确的几何意义. 我们先作一个自然的约定: **如果 a 是 f 的 m 阶零点, 我们就把 a 看成是 f 的 m 个重合的 1 阶零点.** 这样, 公式 (4.17) 右边就表示 f 在 γ 内部的零点个数的总和, 我们记之为 N. 于是, 公式 (4.17) 可写为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=N. \tag{4.18}$$

证明 取充分小的 $\varepsilon>0$, 作圆盘 $B(a_k,\varepsilon)$,$k=1,\cdots,n$, 使得这 n 个圆盘都在 γ 内部, 且两两不相交. 于是,$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在

$D\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,\varepsilon)$ 中全纯. 记 γ 的内部为 E, 则 $f\in H\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,\varepsilon)\right)\cap C\left(\overline{E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,\varepsilon)}\right)$. 应用多连通区域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z+\cdots+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_n}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z,\tag{4.19}$$

其中,$\gamma_k=\partial B(a_k,\varepsilon)$,$k=1,\cdots,n$.

因为 a_k 是 f 的 α_k 阶零点, 由定理 4.15 知道,f 在 a_k 的邻域中可以写成

$$f(z)=(z-a_k)^{\alpha_k}g_k(z),$$

这里,g_k 在 a_k 的邻域中全纯, 且 $g_k(a_k)\neq 0$. 于是

$$f'(z)=\alpha_k(z-a_k)^{\alpha_k-1}g_k(z)+(z-a_k)^{\alpha_k}g_k'(z),$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha_k}{z-a_k}+\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}.$$

因为 $\frac{g_k'}{g_k}$ 在 $\overline{B(a_k,\varepsilon)}$ 中全纯, 于是由Cauchy 积分定理及命题 3.1 得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_k}\left[\frac{\alpha_k}{z-a_k}+\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}\right]\mathrm{d}z=\alpha_k,\quad k=1,\cdots,n.$$

把它代入 (4.19) 式, 即得公式 (4.17).

□

定理 4.20 (辐角原理)

设 $f\in H(D)$,γ 是 D 中的可求长简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点, 那么当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时, 函数 $f(z)$ 在相应的曲线 γ 上转动的总圈数恰好等于 f 在 γ 内部的零点的个数.

注 例如, 设 $w=f(z)=(z^2+1)(z-1)^5$, 则当 z 沿着圆周 $\{z:|z|=3\}$ 的正方向转动一圈时,$f(z)$ 在 w 平面上绕原点转动 7 圈. 这是因为 f 在 $B(0,3)$ 中共有 7 个零点, 其中,$\pm\mathrm{i}$ 是 1 阶零点, 而 1 则是 5 阶零点.

笔记 实际上, 这个定理就是 (4.18) 式左端积分的几何意义.

证明 设 Γ 是 w 平面上一段不通过原点的连续曲线, 它的方程记为 $w=\lambda(t)$,$a\leqslant t\leqslant b$. 对于每个 t, 选取 $\lambda(t)$ 的一个辐角 $\theta(t)$, 使得 $\theta(t)$ 是 t 的连续函数, 我们称 $\theta(b)-\theta(a)$ 为 w 沿曲线 Γ 的辐角的变化, 记为

$$\Delta_\Gamma\mathrm{Arg}w=\theta(b)-\theta(a).$$

今设 Γ 是一条不通过原点的可求长简单闭曲线, 显然有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\mathrm{Arg}w=\begin{cases}1, & \text{如果原点在}\Gamma\text{ 内部;}\\ 0, & \text{如果原点不在}\Gamma\text{ 内部.}\end{cases}$$

另一方面, 由命题 3.3可知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{1}{w}\mathrm{d}w=\begin{cases}1, & \text{如果原点在}\Gamma\text{ 内部;}\\ 0, & \text{如果原点不在}\Gamma\text{ 内部.}\end{cases}$$

于是得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\mathrm{Arg}w.\tag{4.20}$$

一般来说, 当 Γ 是一条不通过原点的任意可求长闭曲线时,$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}w}{w}$ 等于 Γ 绕原点的圈数, 称为 Γ 关于原点的环绕指数, 因而 (4.20) 式对于一般的不通过原点的可求长闭曲线都是成立的.

现在让 z 在 z 平面上沿曲线 γ 的正方向走一圈, 相应的函数 $w=f(z)$ 的值在 w 平面上画出一条相应的闭曲

线 Γ(见图 4.6). 根据 (4.20) 式, 我们有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}f(z). \tag{4.21}$$

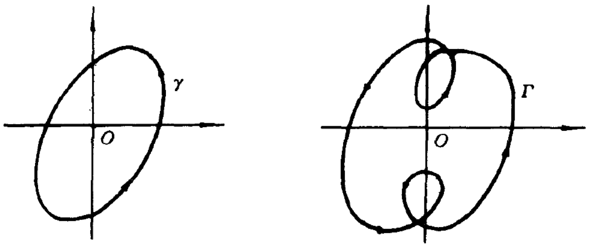

图 4.6

由此可知, 积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 就表示当 z 沿着 γ 的正方向走一圈时, 函数 $f(z)$ 在 Γ 上的辐角变化再除以 2π. 由 (4.18) 式和 (4.21) 式, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}f(z)=N. \tag{4.22}$$

□

定理 4.21 (Rouché(鲁歇) 定理)

设 $f,g\in H(D)$,γ 是 D 中可求长的简单闭曲线,γ 的内部位于 D 中. 如果当 $z\in\gamma$ 时, 有不等式

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \tag{4.23}$$

那么 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

♡

证明 由 (4.23) 式知道,f 和 g 在 γ 上都没有零点. 用 $|f(z)|$ 去除 (4.23) 式的两端, 得

$$\left|1-\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1.$$

若记 $w=\frac{g}{f}$, 则有 $|w-1|<1$. 这说明当 z 在 γ 上变动时,w 落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 因而 $\Delta_{\Gamma}\mathrm{Arg}w=0$, 于是由定理 1.2可得

$$\Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}f(z)=\Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}g(z).$$

由辐角原理即知 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

□

定理 4.22

设 f 是区域 D 中的全纯函数,$z_0\in D$, 记 $w_0=f(z_0)$, 如果 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零点, 那么对于充分小的 $\rho>0$, 必存在 $\delta>0$, 使得对于任意 $a\in B(w_0,\delta)$,$f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中恰有 m 个零点.

♡

证明 根据全纯函数零点的孤立性, 必存在充分小的 $\rho>0$, 使得 $f(z)-w_0$ 在 $\overline{B(z_0,\rho)}$ 中除 z_0 外没有其他的零点. 记

$$\min\{|f(z)-w_0|:|z-z_0|=\rho\}=\delta>0,$$

于是当 $|z-z_0|=\rho$ 时,$|f(z)-w_0|\geqslant\delta$. 今任取 $a\in B(w_0,\delta)$, 则当 z 在圆周 $|z-z_0|=\rho$ 上时, 有

$$|f(z)-w_0|\geqslant\delta>|w_0-a|. \tag{4.24}$$

若记 $F(z)=f(z)-w_0$,$G(z)=f(z)-a$, 则 (4.24) 式可写成

$$|F(z)|>|F(z)-G(z)|.$$

由 Rouché 定理,F 和 G 在 $B(z_0,\rho)$ 中的零点个数相同, 因而 $G(z)=f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中恰有 m 个零点.

□

推论 4.6

设 $f \in H(D), z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$, 则对充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(B(z_0,\rho)) \supseteq B(w_0,\delta).$$

证明 显然 z_0 至少是 $f(z) - w_0$ 的 1 阶零点, 由定理 4.22可知, 对充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $a \in B(w_0,\delta)$, 都有 $f(z) - a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中有一个零点 t_a, 即

$$t_a \in B(z_0,\rho), \quad 且 \quad f(t_a) = a.$$

再由 a 的任意性可知

$$f(B(z_0,\rho)) \supseteq B(w_0,\delta).$$

□

定理 4.23 (开映射定理)

设 f 是区域 D 上非常数的全纯函数, 那么 $f(D)$ 也是 $\mathbb{C}$ 中的区域.

注 如果 f 是区域 D 上非常数的连续函数, 那么 $f(D)$ 未必是一个区域. 例如, 函数 $f(z) = |z|$ 是单位圆盘上的连续函数, 它把单位圆盘映为线段 $[0,1)$. 但是, 由这个定理可知, 区域 D 上非常数的全纯函数则一定把区域映为区域.

笔记 这个定理说明**非常数的全纯函数把开集映为开集**, 因此称为**开映射定理**.

证明 我们证明 $f(D)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的连通开集. 先证 $f(D)$ 是开集. 任取 $w_0 \in f(D)$, 由推论 4.6 知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(w_0,\delta) \subset f(D)$, 这说明 w_0 是 $f(D)$ 的内点, 所以 $f(D)$ 是开集.

再证 $f(D)$ 是连通的. 任取 $w_1, w_2 \in f(D)$, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 使得 $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$. 因为 D 是连通的, 故在 D 中存在连续曲线 $z = \gamma(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 连接 z_1 和 z_2, 于是 $w = f(\gamma(t))(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 是 $f(D)$ 中连接 w_1, w_2 的曲线, 因而 $f(D)$ 是连通的.

□

定理 4.24

如果 f 是区域 D 中单叶的全纯函数, 那么对于 D 内每一点 z, 有 $f'(z) \neq 0$.

注 这个定理的逆定理是不成立的, 即若 f' 在 D 中处处不为零,f 未必是 D 中的单叶函数.$f(z) = e^z$ 就是最简单的例子.

证明 用反证法. 如果存在 $z_0 \in D$, 使得 $f'(z_0) = 0$, 那么 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 m 级零点, 这里,$m \geqslant 2$. 因为 $f'(z_0) \neq 0$, 所以 $f(z)$ 非常数. 从而由定理 4.17, 可取 ρ 充分小, 使得 $f'(z)$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点. 由定理 4.22, 对于 $0 < \eta < \rho$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $a \in B(f(z_0),\delta), f(z) - a$ 在 $B(z_0,\eta)$ 中至少有两个零点, 设为 z_1, z_2. 由于 $f'(z_1) \neq 0, f'(z_2) \neq 0$, 故 z_1, z_2 都是 $f(z) - a$ 的 1 阶零点. 这就是说, 存在 $z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2) = a$, 这与 f 的单叶性相矛盾.

□

定理 4.25

设 f 是区域 D 中的全纯函数, 如果对于 $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$, 那么 f 在 z_0 的邻域中是单叶的.

证明 因为 $f'(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 1 阶零点. 由定理 4.22, 存在 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $a \in B(f(z_0),\delta), f(z) - a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中只有一个零点. 由 f 的连续性, 对 $\delta > 0$, 存在 $\rho_1 < \rho$, 使得对任意 $z \in B(z_0,\rho_1)$, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \iff f(z) \in B(f(z_0),\delta).$$

即
$$f(B(z_0,\rho_1)) \subset B(f(z_0),\delta),$$
设 $z_1,z_2 \in B(z_0,\rho_1)$ 且 $z_1 \neq z_2$, 则 $f(z_1), f(z_2) \in f(B(z_0,\rho_1)) \subset B(f(z_0),\delta)$. 又因为 $f(z)-f(z_2)$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中只有一个零点 z_2, 所以
$$f(z_1) \neq f(z_2).$$
因而 f 在 $B(z_0,\rho_1)$ 中是单叶的.

□

定理 4.26

设 f 是区域 D 上的单叶全纯函数, 那么它的反函数 f^{-1} 是 $G=f(D)$ 上的全纯函数, 而且
$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)},\ w \in G,$$
其中,$w=f(z)$.

笔记 由于这个定理, 故单叶全纯函数也称为**双全纯函数**或**双全纯映射**.

证明 先证明 f^{-1} 在 G 上连续. 任取 $w_0 \in G$, 则存在 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0)=w_0$. 由定理 4.22或推论 4.6, 对于充分小的 $\rho>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|w-w_0|<\delta$ 时, 相应的 z 满足 $|z-z_0|<\rho$, 即 $|f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)|<\rho$, 这说明 f^{-1} 在 w_0 处是连续的. 现在
$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)},$$
即
$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$
这里, 我们已经利用了定理 4.24的结果.

□

定理 4.27 (Hurwitz 定理)

设 $\{f_n\}$ 是区域 D 中的一列全纯函数, 它在 D 中内闭一致收敛到不恒为零的函数 f. 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线, 它的内部属于 D, 且不经过 f 的零点. 那么必存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时,f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相同.

证明 由 Weierstrass 定理,f 在 D 中是全纯的. 因为 f 在 γ 上没有零点, 所以
$$\min\{|f(z)| : z \in \gamma\} = \varepsilon > 0.$$
另一方面, 对于上面的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时,$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ 在 γ 上成立. 于是, 当 $n \geqslant N$ 时, 在 γ 上有不等式
$$|f(z)| \geqslant \varepsilon > |f_n(z)-f(z)|.$$
根据 Rouché 定理,f 和 f_n 在 γ 内有相同个数的零点.

□

定理 4.28

设 $\{f_n\}$ 是区域 D 上一列单叶的全纯函数, 它在 D 上内闭一致收敛到 f, 如果 f 不是常数, 那么 f 在 D 中也是单叶的全纯函数.

证明 由 Weierstrass 定理,f 是 D 上的全纯函数. 如果 f 在 D 上不是单叶的, 那么一定存在 z_1,z_2,$z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1)=f(z_2)$. 令
$$F(z) = f(z) - f(z_1),$$

那么 F 在 D 中有两个零点 z_1 和 z_2. 因为 $F \not\equiv 0$, 故由定理 4.17可知 z_1 和 z_2 是孤立的. 选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \varnothing$, 且 F 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中除去 z_1 和 z_2 外不再有其他的零点. 令

$$F_n(z) = f_n(z) - f(z_1),$$

则 F_n 在 D 中内闭一致收敛到 F. 由 Hurwitz 定理, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,F_n 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中各有一个零点, 设为 z_1' 和 z_2'. 显然 $z_1' \neq z_2'$, 由此即得

$$f_n(z_1') = f_n(z_2') = f(z_1).$$

这与 f_n 在 D 内的单叶性相矛盾.

□

例题 4.5 求方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在单位圆内的零点个数.

解 令

$$f(z) = -4z^5,$$
$$g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1.$$

在单位圆周上,$|f(z)| = 4$, 于是

$$|f(z) - g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leqslant |z|^8 + |z|^2 + 1 = 3 < |f(z)|.$$

根据 Rouché 定理,g 和 f 在 $|z| < 1$ 中的零点个数相同. 而 f 在 $z = 0$ 处有 1 个 5 阶零点, 因而原方程在 $|z| < 1$ 中有 5 个零点.

□

例题 4.6 试求方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 中根的个数.

解 我们只需分别算出它在圆盘 $|z| \leqslant 1$ 和 $|z| < 2$ 中根的个数, 二者之差即为在圆环 $1 < |z| < 2$ 中根的个数.

利用例题 4.5 中的方法, 容易知道原方程在 $|z| < 1$ 中只有 1 个根. 而在圆周 $|z| = 1$ 上, 由于

$$|z^4 - 6z + 3| \geqslant 6 - |z^4 + 3| \geqslant 2,$$

故在圆周 $|z| = 1$ 上不可能有零点. 所以, 在 $|z| \leqslant 1$ 中只有 1 个根.

为了计算 $|z| < 2$ 中根的个数, 令 $f(z) = z^4$,$g(z) = z^4 - 6z + 3$, 于是在圆周 $|z| = 2$ 上, 有

$$|f(z) - g(z)| \leqslant |6z| + 3 = 15 < 16 = |f(z)|.$$

故由 Rouché 定理,$g(z) = z^4 - 6z + 3$ 和 $f(z) = z^4$ 在 $|z| < 2$ 中的零点个数相同, 因而原方程在 $|z| < 2$ 中有 4 个根. 由此即知原方程在圆环 $1 < |z| < 2$ 中有 3 个根.

□

例题 4.7 证明: 方程 $z^4 + 2z^3 - 2z + 10 = 0$ 在每个象限内各有一个根.

证明 记

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10,$$

我们直接用辐角原理来证明它在第一象限内只有一个零点. 为此, 取围道如图 4.7所示, 为了应用辐角原理, 我们要证明 P 在 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 上都没有零点. 当 R 充分大时,P 在 γ_2 上没有零点是显然的.

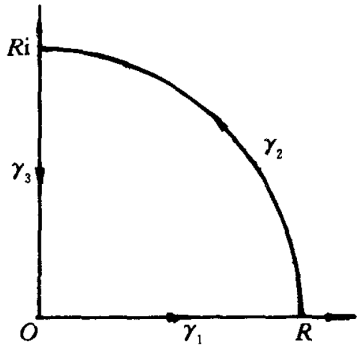

图 4.7

当 $z\in\gamma_1$ 时,$z=x>0$, 于是

$$P(z)=P(x)=x^4+2x^3-2x+10=(x^2-1)(x+1)^2+11.$$

故当 $x>1$ 时,$P(x)>11$; 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$P(x)\geqslant -2+11=9$. 因此,P 在 γ_1 上取正值. 当 $z\in\gamma_3$ 时,$z=iy,y>0$, 显然

$$P(iy)=y^4+10-2iy(y^2+1)\neq 0.$$

现在来计算 P 在 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ 上辐角的变化. 由于 P 在 γ_1 上取正值, 所以

$$\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z)=0. \tag{4.25}$$

当 $z\in\gamma_2$ 时, 有

$$P(z)=z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)=z^4Q(z),$$

这里,$Q(z)=1+\dfrac{2z^3-2z+10}{z^4}$. 当 $|z|$ 充分大时, 有

$$|Q(z)-1|=\left|\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right|<1,$$

即 $Q(z)$ 落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 所以 $\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}Q(z)=0$, 于是

$$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z)=4\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}z+\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}Q(z)=2\pi. \tag{4.26}$$

当 $z\in\gamma_3$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}P(z)&=\mathrm{Arg}P(0)-\mathrm{Arg}P(iR)\\&=-\mathrm{Arg}\{R^4+10-2iR(R^2+1)\}\\&=-\mathrm{Arg}(R^4+10)\left(1-\frac{2iR(R^2+1)}{R^4+10}\right)\\&=-\mathrm{Arg}\left(1-\frac{2iR(R^2+1)}{R^4+10}\right)\\&=0\,(R\text{ 充分大时}).\end{aligned} \tag{4.27}$$

由 (4.25),(4.26) 和 (4.27) 式即得

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\mathrm{Arg}P(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z)=1.$$

根据辐角原理,P 在第一象限内只有一个零点.

由于 P 是实系数多项式, 它的零点是共轭出现的, 故在第四象限内也有一个零点.

用与前面相同的方法, 可以证明 P 在负实轴上没有零点, 因此剩下的两个零点当然就在第二、第三象限中了.

□

4.5 最大模原理和 Schwarz 引理

定理 4.29 (最大模原理)

设 f 是区域 D 中非常数的全纯函数, 那么 $|f(z)|$ 不可能在 D 中取到最大值.

证明 因为 f 是 D 上非常数的全纯函数, 由定理 4.23,$G = f(D)$ 是一个区域. 如果 $|f(z)|$ 在 D 中某点 z_0 处取到最大值, 记 $w_0 = f(z_0) \in G$, 则由 G 是区域知 w_0 是 G 的一个内点, 即有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(w_0, \varepsilon) \subseteq G$. 故必有 $w_1 \in G$, 使得 $|w_1| > |w_0|$. 于是存在 $z_1 \in D$, 使得 $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$. 这与 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 D 中的最大值相矛盾. □

定理 4.30

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的有界区域, 如果非常数的函数 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 在 D 内全纯, 那么 f 的最大模在 D 的边界上而且只在 D 的边界上达到.

注 定理 4.30中 D 的有界性条件不能去掉, 否则定理可能不成立. 例如, 设

$$D = \left\{ z : |\mathrm{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}.$$

当然 f 在 D 中全纯, 在 $\overline{D}$ 上连续, 但它的最大模并不能在 ∂D 上达到. 事实上, 当 $z \in \partial D$ 时,$z = x \pm \frac{\pi}{2}i$, 这时,$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i \mathrm{e}^x$, 所以 $|\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}| = |\mathrm{e}^{\pm i \mathrm{e}^x}| = 1$. 而当 $z \in D$ 时, 取 $z = x$, 即有 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \to \infty (x \to \infty)$. 故定理 4.30不成立.

证明 因为 $\overline{D}$ 是紧集, 其上的连续函数 $|f|$ 一定有最大值, 即存在 $z_0 \in \overline{D}$, 使得 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值. 由定理 4.29 知道,z_0 不能属于 D, 因此只能有 $z_0 \in \partial D$. □

定理 4.31 (Schwarz 引理)

设 f 是单位圆盘 $B(0, 1)$ 中的全纯函数, 且满足条件
(i) 当 $z \in B(0, 1)$ 时,$|f(z)| \leqslant 1$;
(ii) $f(0) = 0$,
那么下列结论成立:
(i) 对于任意 $z \in B(0, 1)$, 均有 $|f(z)| \leqslant |z|$;
(ii) $|f'(0)| \leqslant 1$;
(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0, 1)$,$z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$ 成立, 那么存在实数 θ, 使得对 $B(0, 1)$ 中所有的 z, 都有 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

证明 因为 $f \in H(B(0, 1))$, 且 $f(0) = 0$, 故 f 在 $B(0, 1)$ 中可展开为

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z(a_1 + a_2 z + \cdots) = zg(z),$$

这里,$g(0) = a_1 = f'(0)$. 取 $0 < r < 1$, 当 $|z| = r$ 时, 有

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r},$$

故由最大模原理, 在圆盘 $B(0, r)$ 中也有

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r} (\text{当 } |z| < r \text{ 时}).$$

让 $r \to 1$, 即得 $|g(z)| \leqslant 1 (z \in B(0, 1))$, 即 $|f(z)| \leqslant |z|$, 结论 (i) 成立.

从 $|g(0)| \leqslant 1$ 即得 $|f'(0)| \leqslant 1$, 结论 (ii) 成立.

现若有 $z_0 \in B(0, 1)$,$z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 即 $|g(z_0)| = 1$. 这说明全纯函数 g 在内点 z_0 处取到了最大模 1, 根据最大模原理,g 必须是常数. 设 $g(z) \equiv c$, 由 $|g(z_0)| = 1$, 得 $|c| = 1$, 所以 $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 因而 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. 如果 $|f'(0)| = 1$, 即 $|g(0)| = 1$, 与上面一样讨论, 即得 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. 结论 (iii) 成立.

□

定义 4.13

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果 f 是 D 上的单叶全纯函数, 且 $f(D)=D$, 就称 f 是 D 上的一个**全纯自同构**.D 上全纯自同构的全体记为 $\mathrm{Aut}(D)$.

命题 4.7

$\mathrm{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群, 称为 D 的**全纯自同构群**.

证明 设 $f,g\in\mathrm{Aut}(D)$, 那么 $f\circ g\in\mathrm{Aut}(D)$, 且复合运算满足结合律. 对于每个 $f\in\mathrm{Aut}(D)$, 由定理 4.26,$f^{-1}\in\mathrm{Aut}(D)$.$f(z)=z$ 在复合运算下起着单位元素的作用. 因而 $\mathrm{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群.

□

对于一般的区域 D, 要确定 $\mathrm{Aut}(D)$ 是很困难的. 但对于单位圆盘 $B(0,1)$, 应用 Schwarz 引理不难定出其上的全纯自同构群.

对于 $|a|<1$, 记

$$\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z},$$

由例题 2.8 知道, 它把 $B(0,1)$ 一一地映为 $B(0,1)$, 因而 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$. 如果记 $\rho_\theta(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 它是一个旋转变换, 当然有 $\rho_\theta\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$. 下面我们将证明,$\mathrm{Aut}(B(0,1))$ 中除了 φ_a,ρ_θ 以及它们的复合外, 不再有其他的变换.

定理 4.32

设 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 且 $f^{-1}(0)=a$, 则必存在 $\theta\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

证明 记 $w=\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, 直接计算可得

$$z=\varphi_a^{-1}(w)=\frac{a-w}{1-\overline{a}w}=\varphi_a(w). \tag{4.28}$$

令 $g(w)=f\circ\varphi_a(w)$, 则由例题 2.8 知道 $g\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 而且

$$g(0)=f(\varphi_a(0))=f(a)=0,$$

故由 Schwarz 引理得

$$|g'(0)|\leqslant 1. \tag{4.29}$$

由于 $g^{-1}\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 且 $g^{-1}(0)=0$, 故对 g^{-1} 用Schwarz 引理, 得 $|(g^{-1})'(0)|\leqslant 1$. 但由定理 4.26, 有

$$|(g^{-1})'(0)|=\frac{1}{|g'(0)|},$$

由此即得

$$|g'(0)|\geqslant 1.$$

与 (4.29) 式比较, 即得 $|g'(0)|=1$. 根据 Schwarz 引理的结论 (iii), 存在实数 θ, 使得 $g(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w$, 即 $f\circ\varphi_a(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w$. 令 $w=\varphi_a(z)$, 再结合(4.28)式即得

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

□

定理 4.33 (Schwarz-Pick 定理)

设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 是全纯函数, 对于 $a\in B(0,1),f(a)=b$. 那么

(i) 对任意 $z\in B(0,1)$, 有 $|\varphi_b(f(z))|\leqslant|\varphi_a(z)|$ 其中 $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z},\varphi_b(z)=\dfrac{b-z}{1-\overline{b}z}$;

(ii) $|f'(a)| \leqslant \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$;

(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0,1), z_0 \neq a$, 使得 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$, 或者 $|f'(a)| = \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$ 成立, 那么 $f \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$. 其中 $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}, \varphi_b(z) = \dfrac{b-z}{1-\bar{b}z}$.

证明 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, 则 $g \in H(B(0,1))$, 且 $g(B(0,1)) \subset B(0,1), g(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a(0) = 0$. 对 g 用Schwarz 引理, 有

$$|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(\zeta)| \leqslant |\zeta|, \ \zeta \in B(0,1) \tag{4.30}$$

和

$$|(\varphi_b \circ f \circ \varphi_a)'(0)| \leqslant 1. \tag{4.31}$$

令 $z = \varphi_a(\zeta)$, 则 $\zeta = \varphi_a(z)$, 于是 (4.30) 式变成

$$|\varphi_b(f(z))| \leqslant |\varphi_a(z)|. \tag{4.32}$$

这就是 (i).

由于

$$\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2), \quad \varphi_b'(b) = -\frac{1}{1-|b|^2},$$

由 (4.31) 式即得

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}. \tag{4.33}$$

这就是 (ii).

如果存在 $z_0 \in B(0,1), z_0 \neq a$, 使得 (4.32) 式中的等号成立, 令 $\zeta_0 = \varphi_a(z_0)$, 则 $\zeta_0 \neq 0$, 且 ζ_0 使 (4.30) 式中的等号成立. 于是由 Schwarz 引理,$g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$, 即 $g \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$.

注意到当 (4.33) 式中的等号成立时, 有

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi_b'\left[f\left(\varphi_a(0)\right)\right] \cdot f'\left(\varphi_a(0)\right) \cdot \varphi_a'(0) = \varphi_b'\left[f(a)\right] \cdot f'(a) \cdot \varphi_a'(0) \\ &= \varphi_b'[b] \cdot f'(a) \cdot \varphi_a'(0) = -\frac{1}{1-|b|^2} \cdot \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2} \cdot \left[-\left(1-|a|^2\right)\right] = 1, \end{aligned}$$

由 Schwarz 引理,$g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$, 即 $g \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$.

□

第 5 章 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

5.1 全纯函数的 Laurent 展开

定义 5.1

称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{5.1}$$

为 **Laurent 级数**, 它由两部分组成, 第一部分就是幂级数, 第二部分是负幂项的级数. 如果这两个级数都收敛, 就称级数 (5.1) 收敛.

定理 5.1

如果 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

的收敛域为圆环 $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}$, 那么它在 D 中绝对收敛且内闭一致收敛, 它的和函数在 D 中全纯.

上述级数的幂级数部分称为该级数的**全纯部分**, 负幂项级数部分称为该级数的**主要部分**.

注 下面我们将看到,Laurent 级数的一些重要性质取决于它的主要部分.

证明 设第一个级数的收敛半径为 R. 对第二个级数作变换 $\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$, 它对 ζ 而言就是幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

设其收敛半径为 ρ, 则当 $|\zeta| < \rho$, 或者 $|z-z_0| > \dfrac{1}{\rho}$ 时, 上述级数收敛. 记 $r = \dfrac{1}{\rho}$, 则当 $r < |z-z_0| < \infty$ 时, 级数 (5.1) 中的负幂项级数收敛.

如果 $R \leqslant r$, 则当 $|z-z_0| < R$ 时, 必有 $|z-z_0| < r$, 这时级数 (5.1) 的第一个级数是收敛的, 但第二个级数却发散了. 当 $|z-z_0| > r$ 时, 必有 $|z-z_0| > R$, 这时级数 (5.1) 的第二个级数收敛而第一个级数发散. 所以, 两者不能同时收敛.

如果 $r < R$, 则当 $r < |z-z_0| < R$ 时, 级数 (5.1) 的两个级数都收敛, 而且在这个圆环中内闭一致收敛, 即级数 (5.1) 在上述圆环中内闭一致收敛, 根据 Weierstrass 定理, 它的和是圆环中的全纯函数.

□

定理 5.2

设 $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$, 如果 $f \in H(D)$, 那么 f 在 D 上可以展开为 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z \in D, \tag{5.2}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n \in \mathbb{Z},$$

而 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta-z_0| = \rho\}(r < \rho < R)$. 并且展开式 (5.2) 是唯一的.

证明 如图 5.1 所示, 任意取定 $z \in D$, 取 r_1, r_2, 使得

$$r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R.$$

记 $\gamma_j = \{\zeta : |\zeta - z_0| = r_j\}, j = 1, 2$. 由定理 3.17, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{5.3}$$

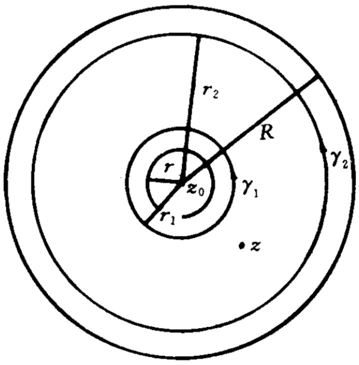

图 5.1

记 $M_j = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_j\}, j = 1, 2$. 当 $\zeta \in \gamma_1$ 时, $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}, \ \zeta \in \gamma_1. \tag{5.4}$$

由于

$$\left|\frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\right| \leqslant \frac{M_1}{|z - z_0|}\left(\frac{r_1}{|z - z_0|}\right)^{n-1},$$

并且右端是一收敛级数, 故知级数 (5.4) 在 γ_1 上一致收敛, 因而可逐项积分:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\right)(z - z_0)^{-n}. \tag{5.5}$$

当 $\zeta \in \gamma_2$ 时, $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \ \zeta \in \gamma_2. \tag{5.6}$$

与上面的讨论一样, 级数 (5.6) 在 γ_2 上一致收敛, 所以

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0)^n. \tag{5.7}$$

由多连通区域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta = a_{-n},$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = a_n.$$

把它们分别代入 (5.5) 式和 (5.7) 式, 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n},$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

再把它们代入 (5.3) 式, 即得展开式 (5.2).

现在证明展开式 (5.2) 是唯一的. 如果另有展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n(z - z_0)^n,$$

因为级数在 γ_ρ 上一致收敛, 逐项积分得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} (\zeta - z_0)^{n-m-1} \mathrm{d}\zeta \xlongequal{\text{命题 3.1}} a'_m,$$

所以这个展开式就是 (5.2) 式.

□

例题 5.1 设 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 试分别给出这个函数在 $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2\}$ 和 $D_2 = \{z : 2 < |z| < \infty\}$ 上的 Laurent 展开式.

解 当 $z \in D_1$ 时, 由于 $1 < |z| < 2$, 所以

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

当 $z \in D_2$ 时, 由于 $2 < |z| < \infty$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

□

5.2 孤立奇点

定义 5.2

设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 如果 f 在无心圆盘 (即除去圆心后的圆盘)$\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ 中全纯, 但在 z_0 处不全纯, 就称 z_0 是 f 的**孤立奇点**. 不是孤立奇点的奇点称为**非孤立奇点**.

f 在孤立奇点 z_0 附近可能有三种情形:

(i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$,$a$ 是一有限数, 这时称 z_0 是 f 的**可去奇点**;

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, 这时称 z_0 是 f 的**极点**;

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在, 这时称 z_0 是 f 的**本性奇点**.

♣

定理 5.3 (Riemann 定理)

如果 $a \in \mathbb{C}$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 a 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零. 即存在 a 的某个去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内可 Laurent 展开为一个幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ z \in D.$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

且 $0 < \rho < R, \gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - a| = \rho\}$.

(2) $\lim_{z \to a} f(z) = b \neq \infty$.

(3) 存在 a 的某个去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内有界.

注 从上面定理可以看出,f 在可去奇点处的特征是 Laurent 展开式没有主要部分, 只有全纯部分. 在 a 是 f 的可去奇点的情形下,f 在 $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ 中的展开式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

只要令 $f(a) = a_0$, 上式便在圆盘 $B(aR)$ 中成立了, 因而由定理 4.14知 f 在 a 处全纯. 换句话说, 在这种情形下, 只要补充定义 f 在 a 处的值, 便能使 f 在 a 处全纯. 这就是称 a 为 f 的可去奇点的原因.

证明 由可去奇点的定义知 a 为可去奇点与 (2) 等价. 故只需证 (1)(2)(3) 等价即可.

(1)$\Longrightarrow$(2): 由 (1) 知, 可设 f 在 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$ 内, 有

$$f(z) = a_0 + c_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots \quad (0 < |z - a| < R),$$

于是

$$\lim_{z \to a} f(z) = a_0 \neq \infty.$$

(2)$\Longrightarrow$(3): 即命题 1.11.

(3)$\Longrightarrow$(1): 设 f 在 a 附近有界, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 z 满足 $0 < |z - a| < \varepsilon$ 时,$|f(z)| < M$. 因为 a 是 f 的孤立奇点, 所以存在 a 的去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}$, 使得 f 在 D 中全纯. 根据定理 5.2,f 在 D 中有 Laurent 展开式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ z \in D, \tag{5.8}$$

其中,$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$,$0 < \rho < R$,$\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - a| = \rho\}$. 任取 $\rho \in (0, \varepsilon)$, 故当 $\zeta \in \gamma_\rho$ 时,$|f(\zeta)| < M$. 于是, 由长大不等式得

$$|a_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{M}{2\pi \rho^{-n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^n,$$

让 $\rho \to 0$, 即得 $a_{-n} = 0$,$n = 1, 2, \cdots$. 这说明在 f 的 Laurent 展开式 (5.8) 中, 所有负次幂的系数都是零, 因而展开式 (5.8) 是一个幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ z \in D.$$

□

定理 5.4

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $a \in \mathbb{C}$ 为极点的充要条件是 a 为 $\frac{1}{f}$ 的零点.

证明 如果 a 是 f 的极点, 即 $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $0 < |z - a| < \varepsilon$ 时,$f(z)$ 不等于零. 故 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在无心圆盘 $\{z : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ 中全纯, 且 $\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0$, 即 a 是 φ 的可去奇点, 且 $\varphi(a) = 0$.

反之, 如果 a 是 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ 的零点, 则

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty,$$

即 a 是 f 的极点.

□

定义 5.3

如果 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 就称 z_0 是 f 的 m **阶极点**.

♣

定理 5.5

如果函数 $f(z)$ 以点 $z_0\in\mathbb{C}$ 为孤立奇点, 则 a 为 m 阶极点的充要条件是下列两条中的任何一条成立:

(1) 存在 z_0 的某个去心邻域 $D=\{z:0<|z-z_0|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots, \tag{5.9}$$

其中 $a_{-m}\neq 0$, 并且

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$.

(2) 存在 z_0 的某个去心邻域 $D=\{z:0<|z-z_0|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内可以表示为

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{5.10}$$

这里 g 在 z_0 点全纯且 $g(z_0)\neq 0$.

♡

注 从这个定理的 (1) 可以看出,f 在极点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分只有有限项.

证明

(1) 如果 z_0 是 f 的 m 阶极点, 根据定义, 它是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点. 由定理 4.15知存在 z_0 的去心邻域 $D=\{z:0<|z-a|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 $\frac{1}{f}$ 在 D 中可以表示为 $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$, 这里,$g$ 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$, 因而 $\frac{1}{g}$ 也在 z_0 处全纯. 由定理 4.14, 可设 $\frac{1}{g}$ 在 D 的 Taylor 展开为

$$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

这里 $c_0\neq 0$, 并且 $c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, n=0,1,\cdots$, 而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$,. 于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-m}=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-z_0}+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots.$$

记 $a_n=c_{n+m}, n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots$, 即得展开式 (5.9).

反之, 如果 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为 (5.9) 式, 那么

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

若记上式右端的幂级数为 $\varphi(z)$, 则 φ 在 z_0 处全纯, 且 $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$. 因而 $\frac{1}{\varphi}$ 也在 z_0 处全纯, 于是

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}$$

在 z_0 附近成立. 由定理 4.15,z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 所以是 f 的 m 阶极点.

(2) 若 z_0 为 f 的 m 阶极点，则由定理 5.5(1)知 f 在 z_0 的某个去心邻域内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

其中 $a_{-m}\neq 0$. 令

$$g(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

则 g 在 z_0 点全纯，且 $g(z_0)\neq 0$. 并且

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

反之，若(5.10)式成立，则

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{g(z)}$$

在 z_0 处全纯，直接计算即知 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，即 z_0 为 f 的 m 阶极点.

□

定理 5.6

若 $z=a\in\mathbb{C}$ 为函数 $f(z)$ 的一本质奇点，且在点 a 的充分小去心邻域内不为零，则 $z=a$ 亦必为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本质奇点.

♡

证明 令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. 由假设,$z=a$ 必为 $\varphi(z)$ 的孤立奇点. 若 $z=a$ 为 $\varphi(z)$ 的可去奇点或零点，则 $z=a$ 必为 $f(z)$ 的可去奇点或极点，此与假设矛盾! 若 $z=a$ 为 $\varphi(z)$ 的极点，则 $z=a$ 必为 $f(z)$ 的零点，亦与假设矛盾. 故 $z=a$ 必为 $\varphi(z)$ 的本质奇点.

□

定义 5.4

如果 f 在无穷远点的邻域 (不包括无穷远点) $\{z:0\leqslant R<|z|<+\infty\}$ 中全纯，就称 ∞ 是 f 的**孤立奇点**.

♣

注 在这种情形下，作变换 $z=\dfrac{1}{\zeta}$, 记

$$g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

则 g 在 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ 中全纯，即 $\zeta=0$ 是 g 的孤立奇点.

定义 5.5

设 $g(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, 如果 $\zeta=0$ 是 g 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点，那么我们相应地称 $z=\infty$ 是 f 的**可去奇点**、**m 阶极点**或**本性奇点**.

♣

定理 5.7

设 f 在 ∞ 的某邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}$ 内全纯，则 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,\ \ z\in N\setminus\{\infty\}.$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ \ n=0,\pm1,\cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(r<\rho<R)$.

这时, 我们称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 为 f 的**主要部分**, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}$ 为 f 的**全纯部分**.

证明 令 $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, 则 $g \in H(\{z: 0<|z|<\frac{1}{R}\})$ 从而由定理 5.2知 g 在原点的邻域 $\{z: 0<|z|<\frac{1}{R}\}$ 中有 Laurent 展开:

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,\ 0<|z|<\frac{1}{R},$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n \in \mathbb{Z},$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(r<\rho<R)$. 于是 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n,$$

其中 $b_n=a_{-n}, n=0, \pm 1, \cdots$, 即

$$b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n=0, \pm 1, \cdots.$$

□

定理 5.8

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为零. 即存在 ∞ 的某个去心邻域 $N \setminus\{\infty\}=\{z: R<|z|<+\infty\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 内可 Laurent 展开为一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ z \in N \setminus\{\infty\}.$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n=0,1, \cdots.$$

且 $0<\rho<R, \gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}$.

(2) $\lim\limits_{z \rightarrow \infty} f(z)=b \neq \infty$.

(3) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N \setminus\{\infty\}=\{z: R<|z|<+\infty\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 内有界.

证明 令 $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, 再利用Riemann 定理易证.

□

定理 5.9

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 阶极点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N \setminus\{\infty\}=\{z: R<|z|<+\infty\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 内有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=b_m z^m+\cdots+b_1 z+b_0+b_{-1} z^{-1}+\cdots,\ z \in N \setminus\{\infty\}.$$

其中 $b_m \neq 0$, 并且

$$b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n=\cdots,-1,0,1, \cdots, m.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(0<\rho<R)$.

(2) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内能表示成

$$f(z)=z^m h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域 N 内解析, 且 $h(\infty)\neq 0$.

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 $z=\infty$ 为 m 阶零点.

证明 令 $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, 再利用定理 5.5易证.

□

定理 5.10

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

证明 令 $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, 再利用定理 5.4易证.

□

定理 5.11

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为本质奇点的充要条件是下列两条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分有无穷多项正幂不等于零. 即存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内可 Laurent 展开为一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n z^n,\ z\in N\setminus\{\infty\}.$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,\pm1,\cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(0<\rho<R)$. 并且存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $b_n\neq 0,\forall n>N$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在 (即当 z 趋向于 ∞ 时,$f(z)$ 不趋向于任何 (有限或无穷) 极限).

证明

□

定理 5.12

若函数 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内解析, 且不恒为零; 又若 $f(z)$ 有一列异于 a 但却以 a 为聚点的零点, 则 a 必为 $f(z)$ 的本质奇点.

证明 $z=a$ 必是 $f(z)$ 的孤立奇点且不能是可去奇点. 否则 $f(z)$ 于 $|z-a|<R$ 内解析 (令 $f(a)=0$) 且以 a 为非孤立的零点. 由推论 4.3必有 $f(z)$ 恒为零, 这与假设矛盾.

其次,$z=a$ 也不能是 $f(z)$ 的极点. 否则, 对任给 $M>0$, 有 $\delta>0$, 使当 $0<|z-a|<\delta$ 时,$|f(z)|>M$, 也与假设矛盾.

故 $z=a$ 必为 $f(z)$ 的本质奇点.

□

定理 5.13 (Weierstrass 定理)

设 z_0 是 f 的本性奇点, 那么对任意 $A\in\mathbb{C}_\infty$, 必存在趋于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$.

注 f 在本性奇点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分有无穷多项. 实际上, 这个定理证明了更深刻的结果.

证明 先设 $A=\infty$. 因为 z_0 是 f 的本性奇点, 故 f 在 z_0 附近无界. 于是对任意自然数 n, 总能找到 z_n, 使得 $|z_n-z_0|<\frac{1}{n}$, 但 $|f(z_n)|>n$, 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$.

再设 A 是一个有限数. 令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$, 我们证明 φ 在 z_0 的邻域中无界. 不然的话,z_0 是 φ 的可去奇点, 适当选择 $\varphi(z_0)$ 的值, 可使 φ 在 z_0 处全纯. 如果 $\varphi(z_0)\neq 0$, 则因 $f(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}+A$,$f$ 也在 z_0 处全纯, 这不可能. 故必有 $\varphi(z_0)=0$, 由定理 5.4可知 z_0 是 $f(z)-A$ 的极点, 也不可能. 所以,φ 在 z_0 的邻域中无界. 于是, 对任意自然数 n, 存在 z_n, 使得 $|z_n-z_0|<\dfrac{1}{n}$, 但 $\dfrac{1}{|f(z)-A|}>n$, 即 $|f(z)-A|<\dfrac{1}{n}$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

□

定理 5.14 (Picard 定理)

每个非常数整函数都取遍每一个复数值, 至多有一个例外.

此外, 函数在任何本性奇点的邻域内, 都可以无穷多次地取到每个有穷复值, 最多只有一个例外. 即若 $a\in\mathbb{C}_\infty$ 为函数 f 的本性奇点, 则对于每一个复数 $A\neq\infty$, 除掉一个可能值 $A=A_0$ 外, 必有趋于 a 的无限点列 $\{z_n\}$, 使 $f(z_n)=A(n=1,2,\cdots)$.

注 例如, 考虑函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, 它在 $z=0$ 附近是全纯的. 若让 z 沿着 x 轴分别从 0 的左边和右边趋于 0, 可得

$$\lim_{z=x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,$$
$$\lim_{z=x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty.$$

这说明 $\lim\limits_{z\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 不存在, 所以 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 对于任意复数 $a\neq 0$, 若取 $z_n=(\ln a+2n\pi\mathrm{i})^{-1}$, 则 $f(z_n)=\mathrm{e}^{\ln a+2n\pi\mathrm{i}}=a$. 由于 $z_n\to 0$, 这说明 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的邻域中可以无穷多次地取到非零值 a, 但 0 是它的唯一的例外值.

命题 5.1

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 则

(1) 当 $m>n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点;

当 $m>n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶极点;

当 $m=n$ 时, 若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点;

若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 大于 m 阶的零点.

(2) z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 当 $n>m$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点;

当 $m>n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点;

当 $m=n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 所以由定理 4.14知

$$\begin{aligned}f(z)&=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\\ g(z)&=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,\end{aligned}\tag{5.11}$$

其中 $a_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$,$b_n=\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.

(1) 如果 $m>n$, 那么由(5.11)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^n\left[\pm b_n\pm b_{n+1}(z-z_0)\pm\cdots\pm(a_m\pm b_m)(z-z_0)^{m-n}+\cdots\right],$$

从而 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点.

如果 $n>m$, 那么同理可得 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点.

如果 $m=n$, 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$ 时, 由(5.11)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^m\left[(a_m\pm b_m)+(a_{m+1}\pm b_{m+1})(z-z_0)+\cdots\right],$$

从而此时 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点; 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$ 时, 此时零点 z_0 的阶数大于 m.

(2) 由(5.11)式可得

$$f(z)\cdot g(z)=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+(a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n)(z-z_0)^{m+n+1}+\cdots,$$

故 z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 由(5.11)式可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)}{(z-z_0)^n(b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}.$$

当 $m>n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点.

当 $m<n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

当 $m=n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

□

命题 5.2

函数 $f(z),g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 阶极点及 n 阶极点. 则

(1) 当 $m\neq n$ 时,$z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点;

当 $m=n$ 时, 若 $\left[f(z)(z-a)^m\pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}\neq 0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点或高于 0 阶零点;

若 $\left[f(z)(z-a)^m\pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点.

(2) $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 当 $m>n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点.

当 $m<n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点.

当 $m=n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 $z=a$ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 级极点, 所以由定理 5.5(2)知

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{g_1(z)}{(z-a)^n},\tag{5.12}$$

其中 $f_1(z)$ 与 $g_1(z)$ 在 $z=a$ 全纯, 且 $f_1(a)\neq 0,g_1(a)\neq 0$. 并且 $\left[f(z)(z-a)^m+g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=f_1(a)+g_1(a)$.

(1) 由(5.12)可得

$$f(z)\pm g(z)=\begin{cases}\dfrac{f_1(z)\pm(z-a)^{m-n}g_1(z)}{(z-a)^m}, & m>n,\\[2mm] \dfrac{(z-a)^{n-m}f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & n>m,\\[2mm] \dfrac{f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & m=n.\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\neq 0$. 当 $n>m$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $g_1(a)\neq 0$. 当 $m=n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\pm g_1(a)$, 各个分子显然在 $z=a$ 是全纯的, 所以有以下结论:

当 $m\neq n$ 时, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点; 当 $m=n$ 时, 若 $f_1(a)\pm g_1(a)\neq 0$, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶极点; 若 $f_1(a)\pm g_1(a)=0$, 设 a 是 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 的 k 阶零点, 则由定理 4.15知 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 在 a 的邻域内可以表示为

$$f_1(z)\pm g_1(z)=(z-a)^kh(z),$$

其中 h 在 a 点全纯且 $h(a)\neq 0$.

从而此时

$$f(z) \pm g(z) = \frac{(z-a)^k h(z)}{(z-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{h(z)}{(z-a)^{n-k}}, & k < n, \\ (z-a)^{k-n} h(z), & k \geqslant n. \end{cases}$$

因此当 $k < n$ 时,a 是 $f(z) \pm g(z)$ 的 $n-k$ 阶极点; 当 $k = n$ 时,a 是 $f(z) \pm g(z)$ 的可去奇点; 当 $k > n$ 时,a 是 $f(z) \pm g(z)$ 的 $k-n$ 阶零点. 故此时点 a 是 $f(z) \pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点或高于 0 阶零点.

(2) 由(5.12)可得 $f(z) \cdot g(z) = \dfrac{f_1(z) g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$, 因为 $f_1(z) g_1(z)$ 在 $z = a$ 解析, 且 $f_1(a) g_1(a) \neq 0$, 所以 $z = a$ 是 $f(z) g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 由(5.12)可得

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(z-a)^{m-n}} \cdot \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m > n, \quad a\text{是}m-n\text{阶极点}, \\ (z-a)^{n-m} \cdot \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m < n, \quad a\text{是}n-m\text{阶零点}, \\ \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m = n, \quad a\text{是可去奇点}. \end{cases}$$

□

命题 5.3

设函数 $f(z)$ 不恒为零且以 $z = a$ 为解析点或极点, 而函数 $\varphi(z)$ 以 $z = a$ 为本性奇点, 则 $z = a$ 是 $\varphi(z) \pm f(z), \varphi(z) \cdot f(z)$ 及 $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明 反证, 如果 $z = a$ 不是 $\varphi(z) \pm f(z), \varphi(z) \cdot f(z)$ 及 $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点, 则

$$\varphi(z) = \left[\varphi(z) \pm f(z)\right] \mp f(x), \quad \varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{f(z)} \cdot f(x) \quad , \varphi(z) = \frac{\varphi(z) \cdot f(z)}{f(x)}.$$

由命题 5.1和命题 5.2知 $\varphi(z)$ 就以 $z = a$ 为可去奇点或极点或零点, 这与题设矛盾.

□

5.3 整函数与亚纯函数

定理 5.15

设 f 为一整函数, 则

(1) $z = \infty$ 为 f 的解析点或可去奇点的充要条件是 f 一定是常数.

(2) $z = \infty$ 为 f 的一个 m 阶极点的充要条件是 f 是一个 m 次多项式.

证明

(1) 充分性显然, 只证必要性. 由于 f 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上全纯, 即 f 为整函数, 则由定理 4.14知 f 在 $\mathbb{C}$ 上有 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{5.13}$$

它当然在 $R < |z| < \infty$ 中也成立, 因此也可把它看成是无穷远点邻域中的 Laurent 展开式.

如果整函数 f 在 ∞ 处全纯或无穷远点为 f 的可去奇点, 那么根据(??), 它在 ∞ 处邻域中的 Laurent 展开式除去常数项外只有负次幂的项, 因此在展开式 (5.13) 中必须有

$$a_1 = a_2 = \cdots = 0,$$

所以 f 是一常数.

(2) 充分性显然, 只证必要性. 如果无穷远点是整函数 f 的一个 m 阶极点, 那么根据(??), 它在无穷远点邻域中

的 Laurent 展开式除去一个 m 次多项式外只有负次幂的项, 因此在展开式 (5.13) 中必须有

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0,$$

所以 f 是一个 m 次多项式.

□

定义 5.6

不是常数和多项式的整函数称为**超越整函数**.

注 如 $e^z, \sin z, \cos z$ 等, 都是超越整函数.

命题 5.4

无穷远点一定是超越整函数的本性奇点.

证明 反证, 设 f 是超越整函数, 若无穷远点不是 f 的本性奇点, 则当 f 在无穷远点全纯或无穷远点是 f 的可去奇点时, 由定理 5.15可知 f 为一个常数. 当无穷远点是 f 的 m 阶极点时, 由定理 5.15(2)可知 f 是一个 m 次多项式. 这与 f 是超越整函数矛盾!

□

定义 5.7

如果 f 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上除去极点外没有其他奇点的单值全纯函数, 就称 f 是一个**亚纯函数**.

命题 5.5

(1) 整函数是亚纯函数.

(2) 有理函数

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

也是亚纯函数, 这里,P_n 和 Q_m 是两个既约的多项式.

证明

□

命题 5.6

无穷远点或是有理函数的可去奇点, 或是有理函数的极点.

证明 若记

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_n \neq 0,$$

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m,\ b_m \neq 0,$$

那么

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_0 \frac{1}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ \infty, & n > m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

这说明 $z = \infty$ 或是 f 的可去奇点, 或是 f 的极点.

□

定理 5.16

若 $z=\infty$ 是亚纯函数 f 的可去奇点或极点, 则 f 一定是有理函数.

证明 因 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点或极点, 故必存在 $R>0$, 使得 f 在 $R<|z|<\infty$ 中全纯. 在 $|z|\leqslant R$ 中,f 最多只能有有限个极点. 因若有无穷多个极点 $z_j, j=1,2,\cdots$, 则 $\{z_j\}$ 必有收敛的子列 $\{z_{k_j}\}$, 设其极限为 a, 则 $|a|\leqslant R$, 显然若 a 是极点, 则 a 不是孤立奇点, 矛盾! 若 a 不是极点, 则由 f 是亚纯函数可知 f 在 a 处全纯, 但 f 在 a 的任意邻域内必有极点, 矛盾! 今设 $z_1,\cdots,z_n$ 为 f 在 $|z|\leqslant R$ 中的有限个极点, 它们的阶分别为 $m_1,\cdots,m_n$. 由定理 5.5(1)可知 f 在 $z_j(j=1,\cdots,n)$ 附近的 Laurent 展开的主要部分为

$$h_j(z)=\frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}+\frac{c_{-2}^{(j)}}{(z-z_j)^2}+\cdots+\frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}.$$

设 f 在 ∞ 的邻域内的 Laurent 展开的主要部分为 g, 由定理 5.9(1)和定理 5.8(1)可知, 当 $z=\infty$ 是 f 的极点时,g 是一个多项式; 当 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点时,$g\equiv 0$. 令

$$F(z)=f(z)-h_1(z)-\cdots-h_n(z)-g(z),$$

显然,F 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中除 $z_1,\cdots,z_n$ 和 ∞ 外是全纯的, 而在 $z_1,\cdots,z_n$ 和 ∞ 这些点上,f 的主要部分都已经被消去, 因而也是全纯的. 所以,F 是 $\mathbb{C}_\infty$ 上的全纯函数, 因而由定理 5.15,F 是一个常数 c. 于是

$$f(z)=c+g(z)+\sum_{j=1}^{n}h_j(z),$$

所以 f 是有理函数.

□

注 这里, 我们顺便得到了这样一个结论: **任何有理函数一定能分解成部分分式之和, 而且这种分解是唯一的.** 这个结论在计算有理函数的不定积分时已经被多次用过.

定义 5.8

非有理函数的亚纯函数称为**超越亚纯函数**.

定理 5.17

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有的一次多项式组成.

证明 设 $f(z)=az+b, a\neq 0$, 则显然 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. 反之, 对于任意的 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, 因为 f 是整函数, 如果 ∞ 是它的可去奇点, 则由定理 5.15,f 是一个常数, 这不可能. 如果 ∞ 是 f 的本性奇点, 则由定理 5.13, 对于任意 $A\in\mathbb{C}$, 必有 $z_n\to\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$. 现在记 $f(z_n)=w_n$, 则 $z_n=f^{-1}(w_n)$, 两端令 $n\to\infty$, 即得 $f^{-1}(A)=\infty$. 这说明 A 是 f^{-1} 的一个极点, 与 f^{-1} 是整函数相矛盾. 由此可知 ∞ 必为 f 的极点, 由定理 5.15(2)知道,f 是一个多项式. 又因为 f 在 $\mathbb{C}$ 上是单叶的, 所以 f 只能是一次多项式.

□

定理 5.18

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有的分式线性变换组成.

证明 因为是在 $\mathbb{C}_\infty$ 上讨论,$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 中的元素不再是全纯函数, 而是亚纯函数. 由分式线性变换的讨论知道, 任何分式线性变换都是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 中的元素. 现设 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, 则 f 必为亚纯函数, 而且 ∞ 必是 f 的可去奇点或极点. 由定理 5.16,f 必为有理函数, 再由它的单叶性, 它只能是分式线性变换.

□

5.4 留数定理 (残数定理)

定义 5.9

设 a 是 f 的一个孤立奇点,f 在 a 点的邻域 $B(a,r)$ 中的 Laurent 展开为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, 称 c_{-1} 为 f 在 a 点的**留数 (残数)**, 记为

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}$$

或

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f=c_{-1}.$$

若 $z=\infty$ 是 f 的孤立奇点, 即 f 在 $R<|z|<\infty$ 中全纯, 我们定义 f 在 $z=\infty$ 处的**留数 (残数)** 为

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z, \tag{5.14}$$

这里,$\gamma=\{z:|z|=\rho\}, R<\rho<\infty$.

命题 5.7

设 a 是 f 的一个孤立奇点, 对于 a 点邻域中的任意可求长闭曲线 γ, 都有

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\mathrm{Res}(f,a).$$

注 如果 f 在 a 点全纯, 那么对于 a 点邻域中的任意可求长闭曲线 γ, 都有 $\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=0$. 如果 a 是 f 的孤立奇点, 那么上述积分不一定总等于零, 且积分值只与 f 和 a 有关, 而与 γ 无关.

证明 设 f 在 a 点邻域中的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,\pm 1,\cdots.$$

特别地, 当 $n=-1$ 时, 我们有

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{5.15}$$

原来所讨论的积分值就是 c_{-1} 的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍 (因此 c_{-1} 这个系数有它特殊的含义), 根据 (5.15) 式, 我们有

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\mathrm{Res}(f,a). \tag{5.16}$$

这里,$\gamma=\{z:|z-a|=\rho\}, 0<\rho<r$.

□

命题 5.8

若 a 是 f 的 m 阶极点, 则

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

证明 因为 a 是 f 的 m 阶极点, 故由定理 5.5(1)可知, 在 a 点的邻域中有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z), \tag{5.17}$$

这里,g 在 a 点全纯, 且 $g(a) \neq 0$. 于是

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}.$$

这是一个 Laurent 展开式,$(z-a)^{-1}$ 的系数为 $\dfrac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. 由(5.17)式知 $g(z) = (z-a)^m f(z)$, 因而得

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}.$$

□

命题 5.9

若 a 是 f 的 1 阶极点, 则

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

证明 这就是命题 5.8中 $n = 1$ 的情形.

□

例题 5.2 若 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$,$z = \pm \mathrm{i}$ 都是 f 的 1 阶极点, 求这个两个极点的留数.

解 由命题 5.9即得

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}},$$

$$\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z+\mathrm{i}) \frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

□

命题 5.10

设 $f = \dfrac{g}{h}$,g 和 h 都在 a 处全纯, 且 $g(a) \neq 0$,$h(a) = 0$,$h'(a) \neq 0$, 那么

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

证明 在所设的条件下,a 是 f 的 1 阶极点, 故由命题 5.9即得

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

□

例题 5.3 计算 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{\sin z}$ 在 $z = 0$ 处的残数.

解 这时 $g(z) = \mathrm{e}^z$,$h(z) = \sin z$. 于是 $g(0) = 1$,$h(0) = 0$,$h'(0) = 1$, 因而由命题 5.10得

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1.$$

□

例题 5.4 计算函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}$ 在 $z = -\mathrm{i}$ 处的残数.

解 显然,$z = -\mathrm{i}$ 是 f 的一个 2 阶极点, 利用命题 5.8, 得

$$\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z-\mathrm{i})^2} \right) = \frac{\mathrm{e}}{4}.$$

□

例题 5.5 计算 $f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $z = 0$ 处的残数.

注 如果 a 是 f 的本性奇点, 就没有像上面那种简单的计算残数的公式了, 这时只能通过 f 的 Laurent 展开来得到 f 在 a 点的残数.

解 因为

$$f(z) = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right),$$

在这个乘积中, $\frac{1}{z}$ 的系数为

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} + \cdots,$$

这就是要找的残数, 即

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

□

定理 5.19 (留数定理 (残数定理))

设 D 是复平面上的一个有界区域, 它的边界 γ 由一条或若干条简单闭曲线组成. 如果 f 在 D 中除去孤立奇点 $z_1, \cdots, z_n$ 外是全纯的, 在闭域 $\overline{D}$ 上除去 $z_1, \cdots, z_n$ 外是连续的, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k). \tag{5.18}$$

♡

注 这个定理称为**留数定理 (残数定理)**, 它的主要贡献是把积分计算归结为残数的计算. 而从命题 5.8知道, 计算残数是一个微分运算. 因此, 从实质上来说, 残数定理把积分运算变成了微分运算, 从而带来了方便.

证明 在 D 内以 $z_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 为中心作一小圆周 γ_k, 使得所有 γ_k 都在 D 的内部, 且每一个 γ_k 都在其余小圆周的外部. 于是由多连通区域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

再由命题 5.7, 即得所要证的公式 (5.18).

□

例题 5.6 计算积分

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z,$$

这里, $\gamma = \{z : |z-1| = \sqrt{3}\}$.

解 被积函数

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$$

有两个 1 阶极点 $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}$, 以及两个 2 阶极点 $z_3 = 1, z_4 = -1$. 容易看出, z_1, z_2, z_3 都在 γ 的内部, z_4 在 γ 的外部. 由留数定理得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

由命题 5.9和命题 5.8, 得

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{z}{(z^2-1)^2(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{8},$$

$$\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{z}{(z^2-1)^2(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{8},$$

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{(z-1)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right\} = \lim_{z\to1}\frac{-3z^3 - z^2 - z + 1}{(z+1)^3(z^2+1)^2} = -\frac{1}{8}.$$

因而有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi\mathrm{i}}{4}.$$

□

例题 5.7 计算积分

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}\mathrm{d}z.$$

解 容易看出, 被积函数

$$f(z)=\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}$$

在 $|z|=1$ 内只有一个极点 $z=0$. 对于这种类型的函数, 直接从 Laurent 展开来求残数更方便些:

$$\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}=\frac{z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2}{\left(-z-\frac{z^2}{2!}-\cdots\right)^5}=-\frac{z^4\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2}{z^5\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^5}.$$

因为 $\dfrac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2}{\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^5}$ 在 $z=0$ 处全纯, 且在 $z=0$ 处等于 1, 故其 Taylor 展开可写为 $1+c_1z+\cdots$, 于是得

$$\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}=-\frac{1}{z}(1+c_1z+\cdots),$$

因而 $\mathrm{Res}(f,0)=-1$. 由留数定理即得

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}.$$

□

定理 5.20

若 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外是全纯的, 则 f 在 $z_1,\cdots,z_n$ 及 $z=\infty$ 处的残数之和为零.

注 这个定理是留数定理的另一种形式.

证明 取 R 充分大, 使得 $z_1,\cdots,z_n$ 都在 $B(0,R)$ 中. 于是, 由留数定理得

$$\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).\tag{5.19}$$

但由 (5.14) 式得

$$-\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f,\infty).\tag{5.20}$$

由 (5.19) 式和 (5.20) 式即得所要证之结论.

□

5.5 利用留数定理计算定积分

5.5.1 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

定理 5.21

设 f 在上半平面 $\{z:\mathrm{Im}z>0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z:\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k).\tag{5.21}$$

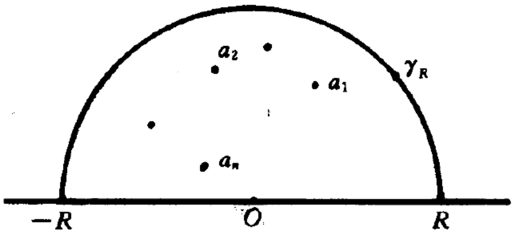

图 5.2

证明 图 5.2所示, 取充分大的 R, 使得 $a_1,\cdots,a_n$ 包含在半圆盘 $\{z:|z|<R,\mathrm{Im}z>0\}$ 中, 记 $\gamma_R=\{z:z=Re^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$, 由留数定理得

$$\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k). \tag{5.22}$$

记 $M(R)=\max\{|f(z)|:z\in\gamma_R\}$, 由假定, $\lim\limits_{R\to\infty}RM(R)=0$, 因而

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{\pi}f(Re^{\mathrm{i}\theta})Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\pi RM(R)\to 0\,(R\to\infty).$$

在 (5.22) 式中令 $R\to\infty$, 即得公式 (5.21).

□

推论 5.1

设 P 和 Q 是两个既约多项式,Q 没有实的零点, 且 $\deg Q-\deg P\geqslant 2$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right),$$

这里,$a_k(k=1,\cdots,n)$ 为 Q 在上半平面中的全部零点,$\deg P,\deg Q$ 分别为 P 和 Q 的次数.

证明 令 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 则 f 满足定理 5.21的条件, 由定理 5.21即得本推论.

□

例题 5.8 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, 它满足推论 5.1的条件. 容易看出, 分母 $Q(z)=z^4+10z^2+9$ 有 4 个零点 $\pm\mathrm{i}$ 和 $\pm 3\mathrm{i}$, 但在上半平面中的零点只有 $a_1=\mathrm{i}$ 和 $a_2=3\mathrm{i}$ 两个. 容易算得

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{-1-\mathrm{i}}{16},\quad \mathrm{Res}(f,3\mathrm{i})=\frac{3-7\mathrm{i}}{48},$$

故得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x=\frac{5}{12}\pi.$$

□

例题 5.9 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$, 它显然满足推论 5.1的条件, 且在上半平面中只有一个 $n+1$ 阶极点 $z=\mathrm{i}$. 应命题 5.8, 通过直接计算得

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

于是得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}.$$

□

引理 5.1 (Jordan 引理)

设 f 在 $\{z:R_0\leqslant|z|<\infty,\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 上连续, 且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Im}z\geqslant 0}}f(z)=0$, 则对任意 $\alpha>0$, 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=0,$$

这里,$\gamma_R=\{z:z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi,R\geqslant R_0\}$.

注 在计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$ 这种类型的积分时, 需要应用 Jordan 引理.

证明 记 $M(R)=\max\{|f(z)|:z\in\gamma_R\}$, 则由假定,$M(R)\to 0(R\to\infty)$. 因为

$$\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z\right|&\leqslant RM(R)\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\&\leqslant 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}M(R)(1-\mathrm{e}^{-\alpha R})\to 0\ (R\to\infty).\end{aligned}$$

这里, 我们已经利用了不等式

$$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

□

定理 5.22

设 f 在上半平面 $\{z:\mathrm{Im}z>0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z:\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$, 那么对任意 $\alpha>0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k).\tag{5.23}$$

证明 取充分大的 R, 使得 $a_1,\cdots,a_n$ 都包含在半圆盘 $\{z:|z|<R,\mathrm{Im}z>0\}$ 中. 对函数

$$F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)$$

用留数定理, 得

$$\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k).\tag{5.24}$$

根据Jordan 引理, 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

在(5.24)式的两端让 $R\to\infty$, 即得公式(5.23).

□

推论 5.2

设 f 在上半平面 $\{z:\mathrm{Im}z>0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z:\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是连续

的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 那么对任意 $\alpha>0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k)\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k)\right\}.$$

♡

证明 注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}=\cos\alpha x+\mathrm{i}\sin\alpha x,$$

在公式(5.23)的两端分别取实部和虚部, 即得.

□

例题 5.10 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x\ (a>0,\ b>0).$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{b^2+z^2}$, 它满足定理 5.22的条件. 因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{b^2+z^2}$ 在上半平面中只有一个 1 阶极点 $z=bi$, 且

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{b^2+z^2},bi\right)=\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2bi},$$

根据推论 5.2, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-ab}.$$

□

引理 5.2

设 f 在扇状区域

$$G=\{z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:0<\rho\leqslant\rho_0,\ \theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$$

上连续, 如果 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=A$, 那么

$$\lim_{\rho\to0}\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}A\alpha,$$

这里,$\gamma_\rho=\{z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$, 它的方向是沿着辐角增加的方向.

♡

注 遇到 f 在实轴上有奇点的情况时, 常要使用这个引理.

证明 令 $g(z)=(z-a)f(z)-A$, 则 $\lim\limits_{z\to a}g(z)=0$. 若记 $M_\rho=\sup\{|g(z)|:z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$, 则 $\lim\limits_{\rho\to0}M_\rho=0$. 于是

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\frac{g(a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\rho\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant M_\rho\alpha\to0\ (\rho\to0).$$

由此即得

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z&=\int_{\gamma_\rho}\frac{A}{z-a}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_\rho}\frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\frac{A}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\rho\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\gamma_\rho}\frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\\&=\mathrm{i}A\alpha+\int_{\gamma_\rho}\frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\to\mathrm{i}A\alpha\ (\rho\to0).\end{aligned}$$

□

例题 5.11 计算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

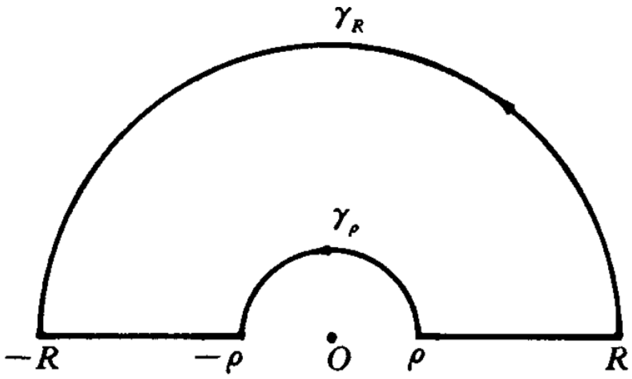

图 5.3

解 取函数 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, 取围道如图 5.3所示, 它由线段 $[-R,-\rho],[\rho,R]$ 和半圆周 γ_ρ,γ_R 组成. 在此围道围成的区域中,f 是全纯的, 因而由Cauchy 积分定理得

$$\int_{-R}^{-\rho}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_\rho^-}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_\rho^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0. \tag{5.25}$$

由引理 5.1知道

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0.$$

由引理 5.2得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho^-}\frac{e^{iz}}{z}dz=-i\pi.$$

在 (5.25) 式中令 $\rho\to 0,R\to\infty$, 于是得

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_0^\infty\frac{e^{ix}}{x}dx=i\pi,$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=i\pi.$$

两边取虚部, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi,$$

因而

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

□

5.5.2 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ 型积分

用留数定理计算 $\int_0^\infty f(x)dx$ 这种类型的积分, 往往要借助于对数函数, 不像计算 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ 型积分直接.

例题 5.12 计算积分

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}dx,$$

这里,m 是正整数,p 不是整数,$0<p<m$.

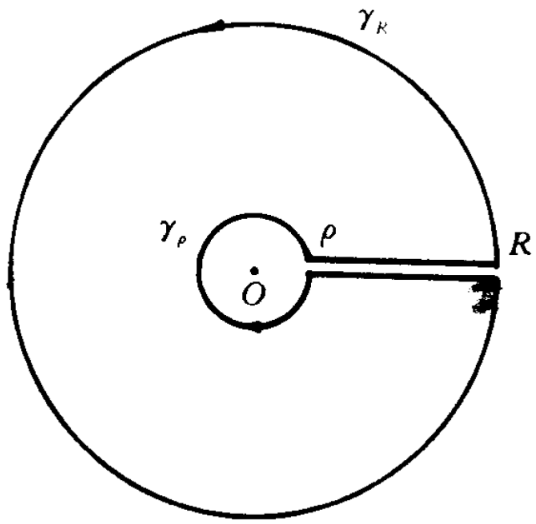

图 5.4

解 取 $f(z)=\dfrac{z^{p-1}}{(1+z)^m}$, 因为 p 不是整数, 所以

$$z^{p-1}=\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}$$

是一个多值函数. 在复平面上, 取正实轴作割线得一区域,z^{p-1} 在这个区域中能分出单值的全纯分支. 今取定在正实轴上沿取实值的那个全纯分支, 即主支:$z^{p-1}=\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}$. 让 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}}{(1+z)^m}$ 沿如下的闭曲线 Γ 积分: 先沿正实轴的上沿从 ρ 到 $R(0<\rho<1<R<\infty)$, 再按反时针方向, 沿以原点为中心、R 为半径的圆周 γ_R 回到出发处, 再沿正实轴的下沿从 R 到 ρ, 最后按顺时针方向沿以原点为中心、ρ 为半径的圆周 γ_ρ 回到原来的出发处 (图 5.4). 在正实轴上沿, 有

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln x}}{(1+x)^m}=\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m};$$

在正实轴下沿, 由于

$$\ln z=\ln|z|+2\pi\mathrm{i},$$

所以

$$\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}=\mathrm{e}^{(p-1)(\ln x+2\pi\mathrm{i})}=x^{p-1}\mathrm{e}^{(p-1)2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}x^{p-1},$$

因而

$$f(z)=\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}.$$

显然,f 在由 Γ 围成的区域中只有一个 m 阶极点 $z=-1$. 由留数定理, 有

$$\int_\rho^R\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z+\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\int_R^\rho\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_\rho}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m},-1\right). \tag{5.26}$$

当 $z\in\gamma_R$ 时,$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$\ln z=\ln R+\mathrm{i}\theta$, 所以

$$\frac{|z^{p-1}|}{|1+z|^m}=\frac{|\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}|}{|1+z|^m}\leqslant\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}.$$

同样道理, 当 $z\in\gamma_\rho$ 时, 有

$$\frac{|z^{p-1}|}{|1+z|^m}\leqslant\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}.$$

于是

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}2\pi R=2\pi\frac{R^p}{(R-1)^m}\to 0\ (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}2\pi\rho=2\pi\frac{\rho^p}{(1-\rho)^m}\to 0\ (\rho\to 0).$$

在 (5.26) 式中令 $\rho\to 0,R\to\infty$, 即得

$$(1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}})\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m},-1\right).$$

由命题 5.9, 容易算出, 当 $m=1$ 时

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{1+z},-1\right)=\mathrm{e}^{(p-1)\pi\mathrm{i}}=-\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}};$$

当 $m>1$ 时

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m},-1\right)=-\frac{1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p)\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}.$$

由此即得

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}\ (0<p<1),$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p).$$

□

注 上面的方法可用来计算一般的积分

$$\int_0^{\infty}f(x)x^{p-1}\mathrm{d}x\ (0<p<1).$$

例题 5.13 计算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

解 解法一:取函数 $f(z)=\dfrac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}$, 取围道如图 5.4所示. 在正实轴的上沿, 有

$$f(z)=\frac{\ln^2 x}{(1+x^2)^2};$$

在正实轴的下沿, 由于 $\ln z=\ln x+2\pi\mathrm{i}$, 所以

$$\ln^2 z=(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2=\ln^2 x+4\pi\mathrm{i}\ln x-4\pi^2,$$

因而

$$f(z)=\frac{\ln^2 x}{(1+x^2)^2}+4\pi\mathrm{i}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}-4\pi^2\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

f 在 Γ 所围成的区域中有两个 2 阶极点 $z=\pm\mathrm{i}$. 对 f 用留数定理, 得

$$\begin{aligned}&\int_\rho^R\frac{\ln^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z+\int_R^\rho\frac{\ln^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\&+4\pi\mathrm{i}\int_R^\rho\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-4\pi^2\int_R^\rho\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}+\int_{\gamma_\rho}\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2},-\mathrm{i}\right)\right].\end{aligned}\tag{5.27}$$

(5.27) 式左端的第一个和第三个积分互相抵消了.γ_R 和 γ_ρ 上两个积分的估计与例题 5.12一样:

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\ln R+\mathrm{i}\theta)^2}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^2}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 2\pi R\frac{(\ln R+2\pi)^2}{(R^2-1)^2}\to 0\ (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\ln\rho+\mathrm{i}\theta)^2}{(1+\rho^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^2}\rho\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant 2\pi\rho\frac{(\ln\rho+2\pi)^2}{(1-\rho^2)^2}\to 0\ (\rho\to 0).$$

直接计算留数, 得

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}, \mathrm{i}\right) = \frac{-4\pi+\pi^2\mathrm{i}}{16}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}, -\mathrm{i}\right) = \frac{12\pi-9\pi^2\mathrm{i}}{16}.$$

在 (5.27) 式中令 $\rho \to 0, R \to \infty$, 并取两端的虚部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

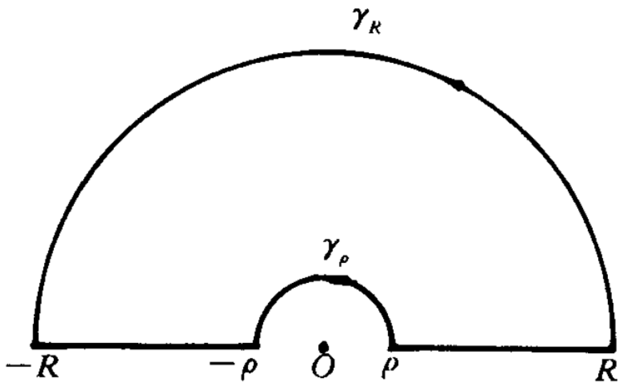

图 5.5

解法二: 在计算过程中我们发现, 如果取 $f(z) = \dfrac{\ln z}{(1+z^2)^2}$, 则所需计算的积分将被抵消掉, 这是取 $f(z) = \dfrac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}$ 的原因. 但若改变围道如图 5.5所示, 那么取 $f(z) = \dfrac{\ln z}{(1+z^2)^2}$ 也是可以的. 这时,f 在 Γ 围成的区域中只有一个 2 阶极点 $z=\mathrm{i}$. 当 $z \in [-R, -\rho]$ 时,$\ln z = \ln|x| + \mathrm{i}\pi$. 对 f 在 Γ 上应用留数定理, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln|x|}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_{-R}^{-\rho} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} + \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\rho}^{R} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}, \mathrm{i}\right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

与上面的做法一样, 可证

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0,$$

而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}, \mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\mathrm{i}}{4}.$$

在 (5.28) 式两端令 $\rho \to 0, R \to \infty$, 得

$$2\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\mathrm{i}}{4}\right),$$

两边取实部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

与第一种方法所得的结果一样.

□

5.5.3 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

我们讨论两种重要类型的有穷限积分. 一种是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

类型的积分, 其中,$R(X,Y)$ 是两个变量 X,Y 的有理函数. 这种类型的积分可以化为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 型积分来讨论. 事实上, 因为被积函数是周期为 2π 的函数, 所以

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

作变换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$, 那么

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

右端积分中的被积函数是 t 的有理函数, 这是刚讨论过的积分.

计算这种积分的另外一种方法是把它化为单位圆周上的积分. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 那么

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z.$$

右端积分中的被积函数是 z 的有理函数, 积分在单位圆周上进行, 因而可用残数定理来计算.

例题 5.14 计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}.$$

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}=2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(\mathrm{i}+2)z^2+6\mathrm{i}z+\mathrm{i}-2}.$$

右端积分中的被积函数有两个 1 阶极点

$$a_1=-\frac{1+2\mathrm{i}}{5},\quad a_2=-1-2\mathrm{i},$$

但只有 a_1 在单位圆内, 被积函数在 a_1 处的留数为 $\dfrac{1}{4\mathrm{i}}$, 因而

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}=4\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}}=\pi.$$

□

用类似的方法可以计算积分

$$\int_0^{2\pi} R(\sin n\theta,\cos n\theta)\mathrm{d}\theta,$$

这是因为

$$\int_0^{2\pi} R(\sin n\theta,\cos n\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right),\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,$$

这里,n 是整数.

如果要计算积分

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta$$

或

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta,$$

则先利用公式

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{z^{n-1}}{\mathrm{i}}\mathrm{d}z$$

算出左端的积分, 然后取实部或虚部, 即得上述两个积分.

另一种重要类型的有穷限积分是

$$\int_a^b (x-a)^r(b-x)^s f(x)\mathrm{d}x,$$

这里,$-1<r,s<1$, 且 $r+s=-1,0$ 或 1.

引理 5.3

设 f 在

$$G=\{z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\rho\geqslant R_0,\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$$

中连续, 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$, 那么

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}A\alpha,$$

这里,$\gamma_\rho=\{z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$, 它的方向是沿着辐角增加的方向.

证明 证明的方法与引理 5.2完全一样.

□

定理 5.23

设 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外是全纯的,$a_1,\cdots,a_n$ 都不在区间 $[a,b]$ 上; 设 $-1<r,s<1$,$s\neq 0$, 且 $r+s$ 是整数. 如果

$$\lim_{z\to\infty} z^{r+s+1}f(z)=A\neq\infty,$$

那么

$$\int_a^b (x-a)^r(b-x)^s f(x)\mathrm{d}x=-\frac{A\pi}{\sin s\pi}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(F,a_k), \tag{5.29}$$

这里,$F(z)=(z-a)^r(b-z)^s f(z)$.

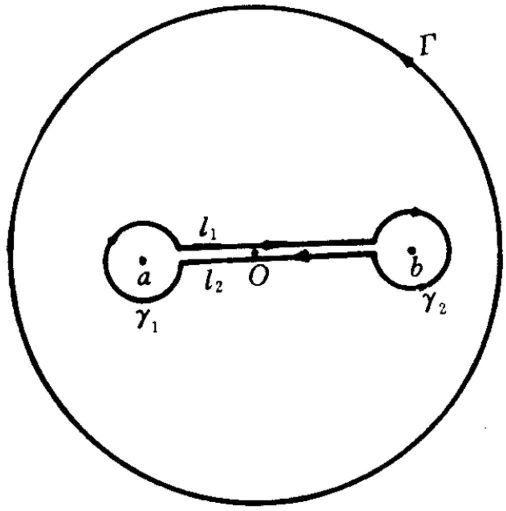

图 5.6

证明 联接 a 和 b, 我们证明在线段 $[a,b]$ 外部,$F(z)=(z-a)^r(b-z)^s f(z)$ 能分出单值全纯的分支.

事实上, 记 $z-a=\rho_1 e^{i\theta_1}$,$z-b=\rho_2 e^{i\theta_2}$, 当 z 沿线段 $[a,b]$ 外部的任意简单闭曲线转一圈时,$z-a$ 和 $z-b$ 的辐角都要增加 2π,$(z-a)^r(z-b)^s$ 的值将由原来的 $\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)}$ 变为

$$\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)+2\pi(r+s)i}=\rho_1^r\rho_2^s e^{i(r\theta_1+s\theta_2)},$$

等式成立是因为 $r+s$ 是整数, 这就是说 $F(z)$ 的值不变.

现取定在 $[a,b]$ 上岸

$$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=0$$

的一支来讨论. 取 R 充分大,ε 充分小, 使得由圆周 $\Gamma=\{z:|z|=R\}$ 的内部以及圆周 $\gamma_1=\{z:|z-a|=\varepsilon\}$ 和圆周 $\gamma_2=\{z:|z-b|=\varepsilon\}$ 的外部所构成的域 D 包含 f 的全部奇点 $a_1,\cdots,a_n$(见图 5.6). 在区域 D 上对函数 F 用留数定理, 得

$$\int_\Gamma F(z)dz+\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{l_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz+\int_{l_2}F(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(F,a_k), \tag{5.30}$$

这里,l_1,l_2 分别是 $[a,b]$ 上、下岸上的一段. 当 $z\in l_1$ 时,$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=0$, 所以

$$(z-a)^r=e^{r\ln(z-a)}=e^{r\ln|z-a|}=e^{r\ln(x-a)}=(x-a)^r,$$
$$(b-z)^s=e^{s\ln(b-z)}=e^{s\ln|b-z|}=e^{s\ln(b-x)}=(b-x)^s.$$

当 $z\in l_2$ 时,$\arg(z-a)=0,\arg(b-z)=-2\pi$, 所以,

$$(z-a)^r=(x-a)^r,$$
$$(b-z)^s=e^{s(\ln(b-x)+i\arg(b-z))}=e^{-2s\pi i}(b-x)^s.$$

于是,(5.30) 式可写为

$$\int_\Gamma F(z)dz+\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz+(1-e^{-2s\pi i})\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}(x-a)^r(b-x)^s f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(F,a_k).$$

因为 -1 的辐角取 π, 所以

$$\lim_{z\to\infty}zF(z)=\lim_{z\to\infty}z(z-a)^r(b-z)^s f(z)=e^{-s\pi i}\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=e^{-s\pi i}A,$$

故由引理 5.3得

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma F(z)dz=2\pi i e^{-s\pi i}A.$$

由于 $r+1>0, s+1>0$, 所以

$$\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=\lim_{z\to a}(z-a)^{r+1}(b-z)^s f(z)=0,$$
$$\lim_{z\to b}(b-z)F(z)=\lim_{z\to b}(z-a)^{r}(b-z)^{s+1} f(z)=0,$$

故由引理 5.2得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1}F(z)\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2}F(z)\mathrm{d}z=0.$$

在 (5.5.3) 式中令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$, 即得

$$\int_a^b (x-a)^r(b-x)^s f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}A}{1-\mathrm{e}^{-2s\pi\mathrm{i}}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-2s\pi\mathrm{i}}}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(F,a_k)=-\frac{\pi A}{\sin s\pi}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(F,a_k).$$

这就是要证明的公式 (5.29).

□

例题 5.15 计算积分

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$$

解 题中,$r=-\dfrac{2}{3}, s=-\dfrac{1}{3}, r+s=-1$, 是一个整数,$f(z)\equiv 1$, 所以

$$\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=1.$$

由公式 (5.29) 即得

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi.$$

□

例题 5.16 计算积分

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

解 题中,$r=\dfrac{2}{3}, s=\dfrac{1}{3}, r+s=1, f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^3}$, 因而

$$\lim_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{(1+z)^3}=0.$$

f 在全平面上只有一个 3 阶极点 $z=-1$, 于是由公式 (5.29) 即得

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(1+z)^3},-1\right). \tag{5.31}$$

根据命题 5.8, 有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(1+z)^3},-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}. \tag{5.32}$$

易知

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}=-\frac{2}{9}z^{-\frac{4}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{9}z^{-\frac{1}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(1-z)^{-\frac{5}{3}}z^{\frac{2}{3}},$$

为了计算它在 $z=-1$ 处的值, 注意当 $z=-1$ 时,$\arg z=\pi$,$\arg(1-z)=0$, 于是

$$\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right\}=-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}\sqrt[3]{2}-\frac{4}{9}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}2^{-\frac{5}{3}}.$$

代入 (5.32) 式后再代入 (5.31) 式, 即得

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt[3]{2}\pi}{18\sqrt{3}}.$$

□

5.5.4 两个特殊的积分

上面只是大致归纳了一下用残数定理计算积分的类型, 但它适用的范围还是相当有限的. 这里介绍的两个积分便不能用第 2 小节中的方法来计算.

(1) Fresnel 积分 $\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$

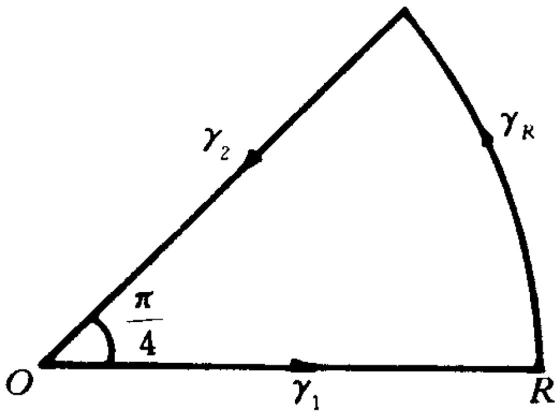

图 5.7

取函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$, 取围道如图 5.7所示. 因为 f 是整函数, 由Cauchy 积分定理, 有

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0. \tag{5.33}$$

当 $z\in\gamma_R$ 时,$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, 所以

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}|=\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

于是, 当 $R\to\infty$ 时, 有

$$\left|\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2})\to 0.$$

当 $z\in\gamma_2$ 时,$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, 0\leqslant r\leqslant R$, 所以

$$\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^R \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

在 (5.33) 式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}. \tag{5.34}$$

这里, 我们已经利用了已知的概率积分

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

在 (5.34) 式两边分别取实部和虚部, 即得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

大家不难利用计算这两个积分的方法算出

$$\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x\ (n>1),$$

和

$$\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x\ (n>1).$$

(2) Poisson 积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x\ (a>0)$

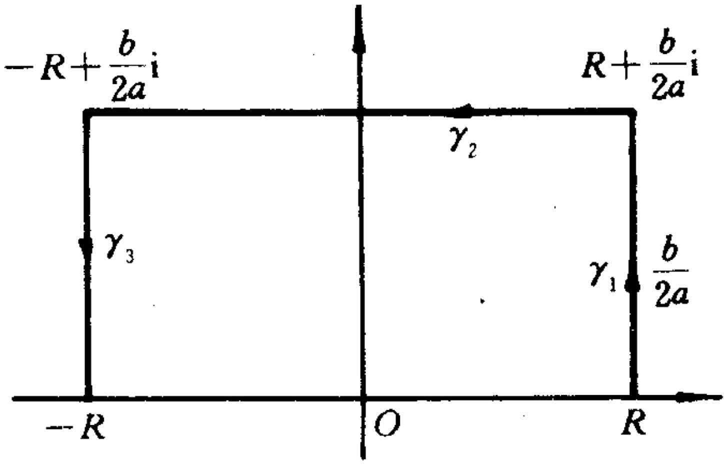

图 5.8

取函数 $f(z)=\mathrm{e}^{-az^2}$, 取围道如图 5.8所示. 因为 f 是整函数, 由Cauchy 积分定理, 有

$$\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z=0. \tag{5.35}$$

当 $z\in\gamma_1$ 时,$z=R+\mathrm{i}y, 0\leqslant y\leqslant\dfrac{b}{2a}$, 所以

$$\left|\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\frac{b}{2a}}\mathrm{e}^{-a(R^2-y^2)}\mathrm{d}y\leqslant\mathrm{e}^{-aR^2}\cdot\mathrm{e}^{a\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\cdot\frac{b}{2a}\to 0\ (R\to\infty).$$

同样道理, 有

$$\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\to 0\ (R\to\infty).$$

当 $z\in\gamma_2$ 时,$z=x+\dfrac{b}{2a}\mathrm{i}, -R\leqslant x\leqslant R$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z&=-\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-a\left(x^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}x\mathrm{i}\right)}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-bx\mathrm{i}}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在 (5.35) 式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=0.$$

由概率积分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

所以

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

第 6 章 共形映射

参考文献

[1] 史济怀, 刘太顺. 复变函数[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.

[2] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2021.