0.1 复数列的极限

定义 0.1

对于 $a \in \mathbb{C}, r > 0$, 称

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

为以 a 为中心、以 r 为半径的**圆盘**. 特别当 $a = 0, r = 1$ 时, $B(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ 称为**单位圆盘**. $B(a, r)$ 也称为 a 点的一个 r **邻域**, 或简称为 a 点的**邻域**. 无穷远点 $z = \infty$ 的邻域是指集合 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, 记为 $B(\infty, R)$.

定义 0.2

我们说 $\mathbb{C}$ 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 $\mathbb{C}$ 中的点 z_0, 是指对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n - z_0| < \varepsilon$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. 或者从几何上来说, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(z_0, \varepsilon)$.

我们称复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 ∞, 是指对任给的正数 $M > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n| > M$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 或者从几何上来说, 对任给的 $M > 0$, 当 n 充分大时, $z_n \in B(\infty, M)$.

定理 0.1

设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 从等式

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

马上可以得到: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. □

定理 0.2

设 $z_0 \notin (-\infty, 0], z_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. 证明: 复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

证明 **必要性**: 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 则由定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. 由二元函数 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |z_0|.$$

设 $z_n = |z_n| e^{\mathrm{i}\theta_n}, z_0 = |z_0| e^{\mathrm{i}\theta_0}$, 其中 $\theta_0 = \arg z_0 \in (-\pi, \pi), \theta_n = \arg z_n$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \notin (-\infty, 0]$ 知, 存在 $N > 0$ 和一个与负实轴无交的邻域 U, 使得 $z_n \in U, \forall n > N$. 从而 $\theta_n \in (-\pi, \pi), \forall n > N$. 于是

$$|z_n - z_0|^2 = |z_n|^2 + |z_0|^2 - 2\,|z_n|\,|z_0| \cos(\theta_n - \theta_0), \quad \forall n > N.$$

进而

$$\cos(\theta_n - \theta_0) = \frac{|z_n|^2 + |z_0|^2 - |z_n - z_0|^2}{2\,|z_n|\,|z_0|}.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\cos\left(\lim_{n\to\infty} (\theta_n - \theta_0)\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(\theta_n - \theta_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|z_n|^2 + |z_0|^2 - |z_n - z_0|^2}{2\,|z_n|\,|z_0|} = 1.$$

又 $\theta_n, \theta_0 \in (-\pi, \pi), \forall n > N$, 故 $\theta_n - \theta_0 \in (-2\pi, 2\pi), \forall n > N$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_n - \theta_0) \in (-2\pi, 2\pi)$, 故必有 $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_n - \theta_0) = 0$,

即
$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\arg z_0.$$

充分性: 设 $z_n=|z_n|\,e^{\mathrm{i}\theta_n}$,$z_0=|z_0|\,e^{\mathrm{i}\theta_0}$, 其中 $\theta_0=\arg z_0\in(-\pi,\pi)$,$\theta_n=\arg z_n$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg z_0$ 知,$\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$||z_n|-|z_0||<\varepsilon,\quad |\theta_n-\theta_0|<\varepsilon,\quad \forall n>N.$$
于是对 $\forall n>N$, 都有
$$\begin{aligned}|z_n-z_0|^2&=|z_n|^2+|z_0|^2-2\,|z_n|\,|z_0|\cos(\theta_n-\theta_0)\\&\leqslant(|z_n|-|z_0|)^2+2\,|z_n|\,|z_0|\,(1-\cos(\theta_n-\theta_0))\\&\leqslant\varepsilon^2+4\,(|z_0|+\varepsilon)^2\sin^2\frac{\theta_n-\theta_0}{2}\\&\leqslant\varepsilon^2+2\,(|z_0|+\varepsilon)^2\,|\theta_n-\theta_0|^2\\&<\varepsilon^2+2\,(|z_0|+\varepsilon)^2\,\varepsilon^2.\end{aligned}$$
故
$$|z_n-z_0|<\varepsilon\sqrt{1+2\,(|z_0|+\varepsilon)^2},\quad \forall n>N.$$
此即 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$.

□

定义 0.3

复数列 $\{z_n\}$ 称为 **Cauchy 列**, 如果对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

定理 0.3

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

证明 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$,$z_m=x_m+\mathrm{i}y_m$, 那么从等式
$$|z_n-z_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}$$
知道,$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

□

定理 0.4 (复数域的 Cauchy 收敛准则)

$\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列.

笔记 由此知道复数域 $\mathbb{C}$ 是**完备的**.

证明 由定理 0.1和定理 0.3, 再结合实数域中的 Cauchy 收敛准则立刻得到复数域的 Cauchy 收敛准则.

□

命题 0.1

(1) 设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z=e^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$
(2) 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=z_0.$$

证明

(1) 当 $z=0$ 时, 结论显然成立. 下设 $z\neq 0$, 则 $e^x>0$, 从而 $e^z=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)\notin(-\infty,0]$. 注意到

$$1+\frac{z}{n}=1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}=\left|1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right|e^{\mathrm{i}\arg\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}e^{\mathrm{i}\arg\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)},$$

故

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}e^{\mathrm{i}n\arg\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)}.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}=e^x.\end{aligned}$$

取充分大的 N, 使得 $1+\dfrac{x}{n}>0,\forall n>N$. 从而

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=n\arg\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)=n\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}},\quad\forall n>N.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left[n\arg\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(n\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(n\arctan\frac{y}{n+x}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.\end{aligned}$$

又 $e^z\notin(-\infty,0]$, 故由定理 0.2知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^{x+\mathrm{i}y}=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

(2) 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 则由定理 0.1知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad\lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

又因为

$$\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\mathrm{i}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}.$$

所以由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

于是由定理 0.1知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=z_0.$$

□

定理 0.5 (Toplitz 定理)

设复无穷三角阵

$$\begin{array}{ccc}a_{11}&&\\a_{21}&a_{22}&\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{array}$$

满足

(i) 对 $\forall k\in\mathbb{N},\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}=S$ 存在;

(iii) $\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}| \leqslant M < \infty, \forall\, n \in N.$

证明: 若复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0, 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k = z_0 S.$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k = z_0\sum_{k=1}^{n}a_{nk} + \sum_{k=1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right).$$

由条件得 $\lim_{n\to\infty} z_0\sum_{k=1}^{n}a_{nk} = z_0 S$, 因此只需证 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right) = 0$. 对 $\forall N \in \mathbb{N}, n > N$, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N}a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\left|a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| + \sup_{k\geqslant N+1}\left|z_k - z_0\right| \cdot \sum_{k=1}^{n}\left|a_{nk}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\left|a_{nk}\right| \cdot \left|z_k - z_0\right| + M\sup_{k\geqslant N+1}\left|z_k - z_0\right|.\end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| \leqslant M\sup_{k\geqslant N+1}\left|z_k - z_0\right|.$$

再令 $N \to +\infty$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\left(z_k - z_0\right)\right| \leqslant M\varlimsup_{N\to+\infty}\left|z_k - z_0\right| = 0.$$

故结论得证.

□

例题 0.1 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \lim_{n\to\infty} w_n = w_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k w_{n-k} = z_0 w_0.$$

证明 记 $a_{nk} = \frac{w_{n-k}}{n}$, 则由条件和命题 0.1(2)知

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk} = \lim_{n\to\infty}\frac{w_{n-k}}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{w_{n-k}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}w_k}{n} = w_0.$$

故由Toplitz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k w_{n-k} = z_0 w_0.$$

□