0.1 多项式环

定理 0.1

设 $\widetilde{R}$ 是一个交换幺环,R 是 $\widetilde{R}$ 的子环且 $1 \in R$. 又设 $u \in \widetilde{R}$,$\widetilde{R}$ 中由 R 与 u 生成的子环, 即包含 R 与 u 的最小子环记为 $R[u]$. 则

$$R[u] = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid a_i \in R, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\},$$

也称 $R[u]$ 为 R **上添加 u 生成的子环**.

证明 记 $S = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid a_i \in R,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$. 首先证明 $S \subseteq R[u]$. 由于 $R[u]$ 是包含 R 和 u 的子环, 而 S 中的所有元素都可以通过有限次运算 (加法、乘法、取逆) 从 R 和 u 得到, 因此 $S \subseteq R[u]$.

接下来证明 $R[u] \subseteq S$. 设 $f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_m u^m \in S$,$g(u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n \in S$, 不妨设 $m \leqslant n$, 再令 $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$, 则

$$f(u) + g(u) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) u^i \in S.$$

令 $-f(u) \triangleq (-a_0) + (-a_1) u + \cdots + (-a_m) u^m \in S$, 则 $f(u) + (-f(u)) = 0$. 因此 S 对加法封闭且有加法逆元. 又 $\widetilde{R}$ 是交换幺环且 $S \subseteq \widetilde{R}$, 故 S 对加法满足结合律和交换律. 于是 S 对加法构成 $\widetilde{R}$ 的 Abel 群.

由于 $\widetilde{R}$ 是交换环, 故

$$f(u) g(u) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u^i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u^i \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) u^k \in S.$$

令 $a_0 = 1, n = 0$, 则有 $1 \in S$. 因此 S 对乘法封闭且含幺元 1. 又 $\widetilde{R}$ 是交换幺环且 $S \subseteq \widetilde{R}$, 故 S 对乘法满足结合律. 于是 S 对乘法构成 $\widetilde{R}$ 的幺半群. 由于 S 对加法和乘法封闭,$\widetilde{R}$ 为交换幺环且 $S \subseteq \widetilde{R}$, 故 S 的加法与乘法间自然满足分配律. 因此 S 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的子环.

对于任意 $r \in R$, 可取 $r = r + 0 \cdot u + 0 \cdot u^2 + \cdots \in S$, 故 $R \subseteq S$. 同时 $u = 0 + 1 \cdot u + 0 \cdot u^2 + \cdots \in S$. 再设 T 是 $\widetilde{R}$ 的任一包含 R 和 u 的子环, 则 T 必然包含所有的 $a_i u^i$ $(a_i \in R)$ 以及它们的有限和, 即 $S \subseteq T$. 因此 S 是包含 R 和 u 的最小子环.

综上可知 $R[u] = S$.

□

定义 0.1

如果在 R 中存在有限多个元素 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 且 $a_n \neq 0$, 使得

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0,$$

那么称 u 为 R 上的**代数元**, 使上述关系成立的最小正整数 n 称为代数元 u 的**次数**, 记为 $\deg(u, R)$.

例题 0.1 令 $\widetilde{R} = \mathbf{C}$, 则 $\sqrt{-1}$ 为 $\mathbf{Z}$ 上的代数元,

$$\mathbf{Z}[\sqrt{-1}] = \{m + n\sqrt{-1} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$$

称为 **Gauss 的整数环**,$\deg(\sqrt{-1}, \mathbf{Z}) = 2$. 同样 $\sqrt{-1}$ 为 $\mathbf{Q}$ 上的代数元,$\deg(\sqrt{-1}, \mathbf{Q}) = 2$.

证明

□

例题 0.2 令 $\widetilde{R} = \mathbf{Q}$, 则 $\frac{1}{2}$ 是 $\mathbf{Z}$ 上代数元且 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \subset \mathbf{Q}$,$\deg\left(\frac{1}{2}, \mathbf{Z}\right) = 1$.

证明

□

定义 0.2

设 R 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的包含幺元 1 的子环,$u \in \widetilde{R}$,$R[u]$ 为 R 添加 u 生成的 $\widetilde{R}$ 的子环, 若满足 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 不全为 0 时,

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \neq 0,$$

则称 u 为 R 上的**超越元**或**不定元**.$R[u]$ 中的一个元素 $f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n$ 称为 u 的 (系数在 R 中的) 一个**多项式**. 若 $a_n \neq 0$, 则称 n 为 $f(u)$ 的次数, 记为 $\deg f(u)$.$R[u]$ 称为 R 上的一个**一元多项式环**.

♣

例题 0.3 设 $\mathbf{P}$ 是一个数域,x 是一个文字, 则 $\mathbf{P}[x]$ 是 $\mathbf{P}$ 上的一个一元多项式环,x 是 $\mathbf{P}$ 上的超越元.

证明

□

定理 0.2

交换幺环 R 上的一元多项式环一定存在.

♡

证明 令

$$\widetilde{R} = \{(a_0, a_1, \cdots) \mid a_i \in R \text{ 且仅有有限个} a_i \neq 0\}.$$

自然 $\widetilde{R}$ 中元素 $(a_0, a_1, \cdots) = (b_0, b_1, \cdots)$ 当且仅当 $a_i = b_i (i = 0, 1, \cdots)$. 在 $\widetilde{R}$ 中定义加法与乘法

$$(a_0, a_1, \cdots) + (b_0, b_1, \cdots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots), \tag{1}$$

$$(a_0, a_1, \cdots) \cdot (b_0, b_1, \cdots) = (c_0, c_1, \cdots). \tag{2}$$

其中,

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ &= \sum_{i+j=n} a_i b_j, \quad n = 0, 1, \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

由于 $(a_0, a_1, \cdots), (b_0, b_1, \cdots) \in \widetilde{R}$, 故 $\exists m \in \mathbf{N}$, 使 $n > m$ 时,$a_n = b_n = 0$. 于是 $a_n + b_n = 0$, 故 $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots) \in \widetilde{R}$. 而当 $n > 2m$ 时,$c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j = 0$, 故 $(c_0, c_1, \cdots) \in \widetilde{R}$. 由此知上面定义的加法与乘法是良定义的.

容易验证 $\widetilde{R}$ 对加法为 Abel 群, 它的零元素为 $0 = (0, 0, \cdots)$ 且 $-(a_0, a_1, \cdots) = (-a_0, -a_1, \cdots)$. 同样容易验证 $\widetilde{R}$ 对乘法是可交换的且有幺元 $(1, 0, \cdots)$. 下面验证乘法的结合律. 设

$$f = (a_0, a_1, \cdots), \quad g = (b_0, b_1, \cdots), \quad h = (c_0, c_1, \cdots),$$

则 $(fg)h$ 的第 k 个元素为

$$\sum_{s+r=k} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) c_r = \sum_{i+j+r=k} a_i b_j c_r = \sum_{i+t=k} a_i \left(\sum_{j+r=t} b_j c_r \right),$$

这也是 $f(gh)$ 的第 k 个元素. 故 $\widetilde{R}$ 对乘法为交换幺半群. 又注意到 $(f+g)h$ 的 k 个元素为

$$\sum_{i+j=k} (a_i + b_i) c_j = \sum_{i+j=k} a_i c_j + \sum_{i+j=k} b_i c_j,$$

这也是 $fh + gh$ 的第 k 个元素.$h(f+g)$ 的 k 个元素为

$$\sum_{i+j=k} c_i \left(a_j + b_j \right) = \sum_{i+j=k} c_i a_j + \sum_{i+j=k} c_i b_j,$$

这也是 $hf + hg$ 的第 k 个元素. 因此 $\widetilde{R}$ 中加法与乘法间的分配律成立, 故 $\widetilde{R}$ 为交换幺环.

令 $R_0 = \{(a_0, 0, 0, \cdots) : a_0 \in R\}$, 则 R_0 显然是 R 的子环. 由

$$(a_0, 0, \cdots) + (b_0, 0, \cdots) = (a_0 + b_0, 0, \cdots),$$

$$(a_0, 0, \cdots) \cdot (b_0, 0, \cdots) = (a_0 b_0, 0, \cdots)$$

知 $a_0 \to (a_0, 0, \cdots)$ 是 R 到 R_0 上的同构映射. 为方便计, 将 R_0 中元素 $(a_0, 0, \cdots)$ 记为 a_0, 即可将 R 视为 $\widetilde{R}$ 的子环. R 的幺元 1 恰为 $\widetilde{R}$ 的幺元 $(1, 0, \cdots)$.

最后证明 $\widetilde{R}$ 是 R 上的一元多项式环. 令

$$u = (0, 1, 0, \cdots),$$

则不难验证

$$u^k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, 1, 0, \cdots),$$

$$a_k u^k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, a_k, 0, \cdots), \quad a_k \in R = R_0.$$

若 $f = (a_0, a_1, \cdots) \in \widetilde{R}$, 则有 n, 使 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$. 于是

$$f = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n,$$

因而有 $\widetilde{R} = R_0[u] = R[u]$. 又若

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0,$$

即

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots),$$

则 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, 即 u 是 R 上的超越元, 因而 $\widetilde{R} = R[u]$ 是 R 上的一元多项式环.

□

定理 0.3

设 R, S 都是交换幺环, 它们的幺元分别是 $1, 1'$. 又若 η 是 R 到 S 的同态且 $\eta(1) = 1'$, 则 $\forall u \in S, \eta$ 可唯一地扩充为 R 上的一元多项式环 $R[x]$ 到 S 的同态 η_u, 使得

$$\eta_u(x) = u.$$

即对 $\forall u \in S, \eta$ 存在唯一的在 R 上的开拓 $\eta_u : R[x] \to S$ 满足

$$\eta_u|_R = \eta, \quad \eta_u(x) = u. \tag{4}$$

且 η_u 是环同态.

证明 因 $R[x]$ 为 R 上的一元多项式环, 故 $R[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in R\}$. 定义 η_u,

$$\eta_u(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \eta(a_0) + \eta(a_1) u + \cdots + \eta(a_n) u^n \tag{5}$$

于是 η_u 是 $R[x]$ 到 S 的映射. 直接计算可知 η_u 为满足式(4)的扩充, 并为同态映射.

现设 η' 也是 η 的扩充且 $\eta'(x) = u$, 于是

$$\eta\prime\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \eta\prime(a_i) u^i = \sum_{i=0}^{n} \eta(a_i) u^i = \eta_u\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right),$$

故 $\eta' = \eta_u$, 即 η_u 是满足条件的唯一扩充.

□

推论 0.1

设 R 是交换幺环,$R[x]$ 与 $R[y]$ 都是 R 上的一元多项式环, 则 $R[x]$ 与 $R[y]$ 是同构的.

笔记 这个推论说明: 任何交换幺环上的一元多项式环在同构意义下唯一.

证明 事实上, 容易验证 R 到 $R[y]$ 的嵌入映射 $i(a) = a(\forall a \in R)$ 是 R 到 $R[y]$ 的环同态, 于是由定理 0.3知有 $R[x]$ 到 $R[y]$ 的同态 i_y 满足

$$i_y|_R = i, \quad i_y(x) = y.$$

从而任取 $a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n\in R[y]$, 都有

$$i_y(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n,$$

故 i_y 是满同态. 由 y 是 R 上超越元知 $\ker i_y=\{0\}$, 因此由命题**??**知 i_y 是单同态. 故 i_y 是同构映射.

□

推论 0.2

设 R 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的包含幺元 1 的子环,$R[x]$ 为 R 上的一元多项式环, 又设 $u\in\widetilde{R}$, 则有 $R[x]$ 中的理想 I 满足 $R\cap I=\{0\}$,$R[u]\cong R[x]/I$, 并且当且仅当 $I\neq\{0\}$ 时,u 为代数元.

证明 考虑 R 到 $R[u]$ 的嵌入映射 i, 则不难验证 i 是 R 到 $R[u]$ 上的同态. 于是由定理 0.3知可将 i 扩充为环同态 $i_u:R[x]\to R[u]$ 满足

$$i_u|_R=i,\quad i_u(x)=u.$$

注意到 $i_u(R[x])=R[u]$, 故 i_u 是满同态. 于是由环的同态基本定理知 $I=\ker i_u$ 为 $R[x]$ 中理想,$R[u]\cong R[x]/I$. 又若 $a\in R\cap I$, 则 $0=i_u(a)=i(a)=a$, 故 $R\cap I=\{0\}$. 由于 u 为 R 上代数元当且仅当存在 $a_n\neq 0$, 使得 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_iu^i=0$. 这也当且仅当

$$i_u\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{n}a_iu^i=0\iff 0\neq\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in I\iff I\neq\{0\}.$$

□

推论 0.3

设 R 是交换幺环,$R[x]$ 是 R 上一元多项式环. 又若 I 是 $R[x]$ 的理想且 $R\cap I=\{0\}$,$I\neq\{0\}$, 则 $R[x]/I$ 是 R 添加一个代数元所得的环.

证明 设 π 是 $R[x]$ 到 $R[x]/I$ 的自然同态, 于是 $\pi(R)$ 是 $R[x]/I$ 中的子环. 由定理**????**知 I 也是 R 的理想, 从而再由定理**????**知

$$\pi(R)=R/I=(R+I)/I\cong R/(R\bigcap I)=R/\{0\}=R+0=R,$$

故可将 R 视为 $R[x]/I$ 的子环, 令 $u=\pi(x)$, 则 $u\in R[x]/I$, 于是 $R[u]\subseteq R[x]/I$. 注意到

$$\pi(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=\pi(a_0)+\pi(a_1)u+\cdots+\pi(a_n)u^n,$$

故再结合 π 是满同态可得

$$R[x]/I=\pi(R[x])\subseteq R[u]\subseteq R[x]/I,$$

即 $R[x]/I=R[u]$. 又由 $I\neq\{0\}$, 故 I 中有非零元素 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 其中 $a_n\neq 0$, 又因为 $\pi(R)\cong R$, 所以 $\pi(a_n)\neq 0$. 而

$$\pi(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=\pi(a_0)+\pi(a_1)u+\cdots+\pi(a_n)u^n=0,$$

故 u 为 R 上的代数元.

□

定理 0.4

设 R 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的包含幺元 1 的子环. 又设 $u_1,u_2,\cdots,u_n\in\widetilde{R}$, 则 $\widetilde{R}$ 中包含 R 与 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的最小子环为

$$R[u_1,u_2,\cdots,u_n]=\left\{\sum_{k_1k_2\cdots k_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n}\middle|a_{k_1k_2\cdots k_n}\in R,a_{k_1k_2\cdots k_n}\text{ 中仅有限个不为0}\right\}$$

称为 R **添加** $u_1,u_2,\cdots,u_n$ **所得的环**.

证明 记

$$S=\left\{\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n}\,\middle|\,a_{k_1k_2\cdots k_n}\in R,\text{仅有限个}a_{k_1k_2\cdots k_n}\neq 0\right\}.$$

首先, 证明 S 是 $\widetilde{R}$ 的子环. 设

$$x=\sum_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1\cdots k_n}u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n},\quad y=\sum_{k_1,\dots,k_n} b_{k_1\cdots k_n}u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\in S,$$

则

$$x+y=\sum_{k_1,\dots,k_n}(a_{k_1\cdots k_n}+b_{k_1\cdots k_n})u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}.$$

由于 $a_{k_1\cdots k_n}$ 和 $b_{k_1\cdots k_n}$ 中仅有限个非零, 故 $a_{k_1\cdots k_n}+b_{k_1\cdots k_n}$ 中也仅有限个非零, 因此 $x+y\in S$. 并且有

$$-x\triangleq\sum_{k_1,\dots,k_n}(-a_{k_1\cdots k_n})u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\in S,$$

使得 $x+(-x)=0$. 因此 S 对加法封闭且有加法逆元. 又因为 $\widetilde{R}$ 是交换幺环且 $S\subseteq\widetilde{R}$, 所以 S 对加法也有结合律和交换律. 故 S 对加法构成 Abel 群.

由于 $\widetilde{R}$ 交换, 有

$$xy=\left(\sum_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1\cdots k_n}u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\right)\left(\sum_{l_1,\dots,l_n} b_{l_1\cdots l_n}u_1^{l_1}\cdots u_n^{l_n}\right)=\sum_{k_1,\dots,k_n,l_1,\dots,l_n} a_{k_1\cdots k_n}b_{l_1\cdots l_n}u_1^{k_1+l_1}\cdots u_n^{k_n+l_n}.$$

令 $m_i=k_i+l_i$, 则

$$xy=\sum_{m_1,\dots,m_n}\left(\sum_{k_1+l_1=m_1,\dots,k_n+l_n=m_n} a_{k_1\cdots k_n}b_{l_1\cdots l_n}\right)u_1^{m_1}\cdots u_n^{m_n}.$$

由于 $a_{k_1\cdots k_n}$ 和 $b_{l_1\cdots l_n}$ 中仅有限个非零, 故 $xy\in S$. 取 $a_{0\cdots 0}=1\in R$, 其余系数为 0, 则 $1=1\cdot u_1^0\cdots u_n^0\in S$. 因此 S 对乘法封闭且含幺元. 又因为 $\widetilde{R}$ 是交换幺环且 $S\subseteq\widetilde{R}$, 所以 S 对乘法也有结合律和交换律. 故 S 对乘法构成交换幺半群. 由于 S 对加法和乘法封闭,$\widetilde{R}$ 为交换幺环且 $S\subseteq\widetilde{R}$, 故 S 的加法与乘法间自然满足分配律. 因此 S 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的子环.

其次, 证明 S 包含 R 和 $u_1,u_2,\cdots,u_n$. 对任意 $a\in R$, 取 $a_{0\cdots 0}=a$, 其余系数为 0, 则 $a=a\cdot u_1^0\cdots u_n^0\in S$. 对每个 u_i, 取 $k_i=1$, 其余指数为 0, 且 $a_{0\cdots k_i\cdots 0}=1$, 其余系数均为 0, 则 $u_i=1\cdot u_1^0\cdots u_i^1\cdots u_n^0\in S$.

最后, 证明 S 是包含 R 和 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的最小子环. 设 T 是 $\widetilde{R}$ 的任意子环, 且 T 包含 R 和 $u_1,u_2,\cdots,u_n$. 由于 T 对乘法封闭, 对任意非负整数 $k_1,\dots,k_n$, 有 $u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\in T$. 又因 T 包含 R, 对任意 $a_{k_1\cdots k_n}\in R$, 有 $a_{k_1\cdots k_n}u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\in T$. 再由 T 对加法封闭, 任意有限和 $\sum a_{k_1\cdots k_n}u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n}\in T$. 又 S 中元素均为此类有限和 (因系数仅有限个非零), 故 $S\subseteq T$. 因此 S 是包含 R 和 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的最小子环.

综上,$S=R[u_1,u_2,\cdots,u_n]$ 即为所求.

□

定义 0.3

如果 R 中有有限多个 $a_{k_1k_2\cdots k_n}\neq 0$, 使

$$\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n}=0,$$

则称 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 在 R 上是**代数相关**的, 否则称 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 在 R 上是**代数无关**的.

若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 在 R 上是代数无关的, 则称 $R[u_1,u_2,\cdots,u_n]$ 为 R 上的 **n 元多项式环**, 其元素称为 R 上的 **n 元多项式**.

交换幺环 R 上的 n 元多项式环 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中, 形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}(a\in R,a\neq 0)$ 的元素称为一个**单项式**, a 称为此单项式的**系数**, $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为此单项式的**次数**.

n 元多项式 $\sum\limits_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\neq 0$ 的**次数**定义为所含单项式的最高次数, 即

$$\deg\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\right)=\max\{k_1+k_2+\cdots+k_n \mid a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\neq 0\}.$$

定理 0.5

交换幺环 R 上的 n 元多项式环一定存在.

证明 对 n 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 由定理 0.2知本定理成立. 现设 $n-1$ 时本定理成立, 即有 R 上的 $n-1$ 元多项式环 $R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$. 这也是交换幺环且

$$1\in R\subset R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}].$$

再由定理 0.2, 可构造 $R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$ 上的一元多项式环

$$(R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}])[x_n]\supset R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]\supset R\ni 1.$$

显然有

$$R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n]\subseteq (R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}])[x_n].$$

若 $f\in (R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}])[x_n]$, 于是有 $f_0,f_1,\cdots,f_k\in R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$, 使得

$$f=f_0+f_1x_n+\cdots+f_kx_n^k,$$

而

$$f_i=\sum_{k_1k_2\cdots k_{n-1}} a_{k_1k_2\cdots k_{n-1}i}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

于是 $f\in R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n]$, 故知

$$R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n]=(R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}])[x_n].$$

下面证明 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 在 R 上是代数无关的. 假设 R 中有有限多个 $a_{k_1k_2\cdots k_n}\neq 0$, 使

$$\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}=0.$$

记 $m\triangleq\max\left\{k_n : a_{k_1\cdots k_n}\neq 0\right\}$, 令

$$f_i=\sum_{k_1k_2\cdots k_{n-1}} a_{k_1k_2\cdots k_{n-1}i}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}},\quad 0\leqslant i\leqslant m,$$

则有 $f_i\in R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$ 且满足 $\sum\limits_{i=0}^{m} f_ix_n^i=0$. 由于 x_n 是 $R[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$ 上的超越元, 故有 $f_i=0$, 即

$$\sum_{k_1k_2\cdots k_{n-1}} a_{k_1k_2\cdots k_{n-1}i}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}=0,\quad 0\leqslant i\leqslant m.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 在 R 上是代数无关的, 故 $a_{k_1k_2\cdots k_{n-1}i}=0$. 这样证明了 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是 R 上的 n 元多项式环. □

定理 0.6

设 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是交换幺环 R 上的 n 元多项式环, S 是一个交换幺环, η 是 R 到 S 的环同态映射且 $\eta(1)=1'$, 其中, $1,1'$ 分别为 R,S 的幺元. 又设 $u_1,u_2,\cdots,u_n\in S$, 则 η 可唯一地开拓为 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 到 S 的同态 η_n, 使得

$$\eta_n(x_i)=u_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

即对 $\forall u_1, u_2, \cdots, u_n \in S, \eta$ 存在唯一的在 R 上的开拓 $\eta_u: R[x_1, x_2, \cdots, x_n] \to S$ 满足

$$\eta_n|_R = \eta, \quad \eta_n(x_i) = u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

且 η_n 是环同态.

证明 事实上, η_n 可定义为

$$\eta_n\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} \eta(a_{k_1k_2\cdots k_n}) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n}.$$

不难验证 η_n 是 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 到 S 的同态映射且 $\eta_n(x_i) = u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

又若 η' 也满足此性质, 则

$$\begin{aligned}\eta'\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right) &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n} \eta'(a_{k_1k_2\cdots k_n}) \eta'(x_1)^{k_1} \eta'(x_2)^{k_2} \cdots \eta'(x_n)^{k_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n} \eta(a_{k_1k_2\cdots k_n}) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n} \\ &= \eta_n\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right).\end{aligned}$$

由此可知定理成立.

□

推论 0.4

交换幺环 R 上的任意两个 n 元多项式环是同构的.

笔记 这个推论说明: 任何交换幺环上的 n 元多项式环在同构意义下唯一.

证明 设 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 与 $R[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 为 R 上的两个 n 元多项式环. 令 i 为 R 到 $R[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 的嵌入映射, 满足 $i(a) = a(\forall a \in R)$. 容易验证 i 是 R 到 $R[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 的环同态映射. 由定理 0.6知, 可将 i 开拓为 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 到 $R[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 上的同态 i_n, 使

$$i_n|_{R[x_1, x_2, \cdots, x_n]} = i, \quad i_n(x_k) = y_k (k = 1, 2, \cdots, n).$$

任取 $\sum\limits_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n} \in R[y_1, y_2, \cdots, y_n]$, 则

$$i_n\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n},$$

故 i_n 是满同态. 由 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 R 上代数无关的知 $\ker i_n = \{0\}$, 故由命题**??**知 i_n 也是单同态, 即 i_n 为同构映射.

□

推论 0.5

设 R 是交换幺环 $\widetilde{R}$ 的包含幺元 1 的子环, R 上的 n 元多项式环 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 又 $u_1, u_2, \cdots, u_n \in \widetilde{R}$, 则有

(1) 存在 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中理想 I, 满足

$$R \cap I = \{0\}, \quad R[u_1, u_2, \cdots, u_n] \cong R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I;$$

(2) $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 代数相关当且仅当 $I \neq \{0\}$.

证明

(1) 考虑 R 到 $R[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ 的嵌入映射 i, 则不难验证 i 是 R 到 $R[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ 上的环同态. 于是由定理

0.6知可将 i 开拓为环同态 $i_u: R[x_1,x_2,\cdots,x_n] \to R[u_1,u_2,\cdots,u_n]$ 满足

$$i_u|_R = i, \quad i_u(x_k) = u_k(k = 1,2,\cdots,n).$$

注意到 $i_u(R[x_1,x_2,\cdots,x_n]) = R[u_1,u_2,\cdots,u_n]$, 故 i_u 是满同态. 于是由环的同态基本定理知 $I = \ker i_u$ 为 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的理想,$R[u_1,u_2,\cdots,u_n] \cong R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$.

(2) 若 $a \in R \cap I$, 则 $0 = i_u(a) = i(a) = a$, 故 $R \cap I = \{0\}$. 由于 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 代数相关当且仅当存在有限多个 $a_{k_1k_2\cdots k_n} \neq 0$, 使

$$\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n} = 0.$$

这也当且仅当

$$i_u\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\right) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n} = 0$$
$$\Longleftrightarrow 0 \neq \sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \in I \Longleftrightarrow I \neq \{0\}.$$

□

推论 0.6

设 R 是交换幺环, $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是 R 上 n 元多项式环, I 为 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的理想且 $R\cap I = \{0\}, I \neq \{0\}$, 则 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$ 是 R 添加 n 个代数相关元所得的环.

证明 设 π 是 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 到 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$ 的自然同态, 于是 $\pi(R)$ 是 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$ 中的子环. 由定理**????**知 I 也是 R 的理想, 从而再由定理**????**知

$$\pi(R) = R/I = (R+I)/I \cong R/(R\bigcap I) = R/\{0\} = R+0 = R,$$

故可将 R 视为 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$ 的子环, 令 $u_i = \pi(x_i)(i = 1,2,\cdots,n)$, 则 $u_i \in R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$, 于是

$$R[u_1,u_2,\cdots,u_n] \subseteq R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I,$$

. 注意到

$$\pi\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\right) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} \pi\left(a_{k_1k_2\cdots k_n}\right) u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n},$$

故再结合 π 是满同态可得

$$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I = \pi(R[x_1,x_2,\cdots,x_n]) \subseteq R[u_1,u_2,\cdots,u_n] \subseteq R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I,$$

即 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I = R[u_1,u_2,\cdots,u_n]$. 又由 $I \neq \{0\}$, 故 I 中有非零元素

$$\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},$$

其中有有限多个 $a_{k_1k_2\cdots k_n} \neq 0$. 而

$$\pi\left(\sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\right) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n} = 0.$$

又因为 $\pi(R) \cong R$, 所以上式有有限个 $\pi(a_{k_1k_2\cdots k_n}) \neq 0$. 故 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是代数相关的.

□