0.1 孤立奇点

定义 0.1

设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 如果 f 在无心圆盘 (即除去圆心后的圆盘)$\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ 中全纯, 但在 z_0 处不全纯, 就称 z_0 是 f 的**孤立奇点**. 不是孤立奇点的奇点称为**非孤立奇点**.

f 在孤立奇点 z_0 附近可能有三种情形:

(i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$,$a$ 是一有限数, 这时称 z_0 是 f 的**可去奇点**;

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, 这时称 z_0 是 f 的**极点**;

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在, 这时称 z_0 是 f 的**本性奇点**或**本质奇点**.

♣

定理 0.1

$a \in \mathbb{C}$ 是函数 $f(z)$ 的非孤立奇点的充要条件是存在一列奇点 $\{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$.

♡

证明

□

定理 0.2 (Riemann 定理)

如果 $a \in \mathbb{C}$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 a 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零. 即存在 a 的某个去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内可 Laurent 展开为一个幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ z \in D.$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ n = 0, 1, \cdots.$$

且 $0 < \rho < R, \gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - a| = \rho\}$.

(2) $\lim\limits_{z \to a} f(z) = b \neq \infty$.

(3) 存在 a 的某个去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内有界.

♡

注 从上面定理可以看出,f 在可去奇点处的特征是 Laurent 展开式没有主要部分, 只有全纯部分. 在 a 是 f 的可去奇点的情形下,f 在 $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ 中的展开式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

只要令 $f(a) = a_0$, 上式便在圆盘 $B(aR)$ 中成立了, 因而由定理**??**知 f 在 a 处全纯. 换句话说, 在这种情形下, 只要补充定义 f 在 a 处的值, 便能使 f 在 a 处全纯. 这就是称 a 为 f 的可去奇点的原因.

证明 由可去奇点的定义知 a 为可去奇点与 (2) 等价. 故只需证 (1)(2)(3) 等价即可.

(1)$\Longrightarrow$(2): 由 (1) 知, 可设 f 在 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}(R \in \mathbb{R})$ 内, 有

$$f(z) = a_0 + c_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots \quad (0 < |z - a| < R),$$

于是

$$\lim_{z \to a} f(z) = a_0 \neq \infty.$$

(2)$\Longrightarrow$(3): 即命题**??**.

(3)$\Longrightarrow$(1): 设 f 在 a 附近有界, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 z 满足 $0 < |z - a| < \varepsilon$ 时,$|f(z)| < M$. 因为 a 是 f 的孤立奇点, 所以存在 a 的去心邻域 $D = \{z : 0 < |z - a| < R\}$, 使得 f 在 D 中全纯. 根据定理**??**,f 在 D 中有 Laurent 展

开式:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ z\in D, \tag{1}$$

其中,$a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$,$0<\rho<R$,$\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-a|=\rho\}$. 任取 $\rho\in(0,\varepsilon)$, 故当 $\zeta\in\gamma_\rho$ 时,$|f(\zeta)|<M$. 于是, 由长大不等式得

$$|a_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{M}{2\pi\rho^{-n+1}}\cdot 2\pi\rho=M\rho^n,$$

让 $\rho\to 0$, 即得 $a_{-n}=0$,$n=1,2,\cdots$. 这说明在 f 的 Laurent 展开式 (1) 中, 所有负次幂的系数都是零, 因而展开式 (1) 是一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ z\in D.$$

□

定理 0.3

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $a\in\mathbb{C}$ 为极点的充要条件是 a 为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点.

证明 如果 a 是 f 的极点, 即 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, 那么存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $0<|z-a|<\varepsilon$ 时,$f(z)$ 不等于零. 故 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在无心圆盘 $\{z:0<|z-a|<\varepsilon\}$ 中全纯, 且 $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=0$, 即 a 是 φ 的可去奇点, 且 $\varphi(a)=0$.

反之, 如果 a 是 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点, 则

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty,$$

即 a 是 f 的极点.

□

定义 0.2

如果 z_0 是 $\dfrac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 就称 z_0 是 f 的 m **阶极点**.

定理 0.4

如果函数 $f(z)$ 以点 $z_0\in\mathbb{C}$ 为孤立奇点, 则 a 为 m 阶极点的充要条件是下列两条中的任何一条成立:

(1) 存在 z_0 的某个去心邻域 $D=\{z:0<|z-z_0|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots, \tag{2}$$

其中 $a_{-m}\neq 0$, 并且

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$.

(2) 存在 z_0 的某个去心邻域 $D=\{z:0<|z-z_0|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内可以表示为

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{3}$$

这里 g 在 z_0 点全纯且 $g(z_0)\neq 0$.

注 从这个定理的 (1) 可以看出,f 在极点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分只有有限项.

证明

(1) 如果 z_0 是 f 的 m 阶极点, 根据定义, 它是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点. 由定理**??**知存在 z_0 的去心邻域 $D=\{z:0<|z-a|<R\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 $\frac{1}{f}$ 在 D 中可以表示为 $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$, 这里,$g$ 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$, 因而 $\frac{1}{g}$ 也在 z_0 处全纯. 由定理**??**, 可设 $\frac{1}{g}$ 在 D 的 Taylor 展开为

$$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

这里 $c_0\neq 0$, 并且 $c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, n=0,1,\cdots$, 而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$,. 于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-m}=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-z_0}+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots.$$

记 $a_n=c_{n+m}, n=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots$, 即得展开式 (2).

反之, 如果 f 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为 (2) 式, 那么

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

若记上式右端的幂级数为 $\varphi(z)$, 则 φ 在 z_0 处全纯, 且 $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$. 因而 $\frac{1}{\varphi}$ 也在 z_0 处全纯, 于是

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}$$

在 z_0 附近成立. 由定理**??**,z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 所以是 f 的 m 阶极点.

(2) 若 z_0 为 f 的 m 阶极点, 则由定理 0.4(1)知 f 在 z_0 的某个去心邻域内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

其中 $a_{-m}\neq 0$. 令

$$g(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

则 g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$. 并且

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

反之, 若(3)式成立, 则

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{g(z)}$$

在 z_0 处全纯, 直接计算即知 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点, 即 z_0 为 f 的 m 阶极点.

□

定理 0.5

(1) 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本质奇点的充要条件是 $f(z)$ 在 $z=a$ 的主要部分有无穷多项负幂不等于零. 即存在 a 的某个去心邻域 $D=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<r\}(r\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 D 内可 Laurent 展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n,\ z\in D.$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,\pm1,\cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}\,(0<\rho<R)$. 并且存在子列 $\{n_k\}\subseteq\mathbb{N}$, 使得 $a_{n_k}\neq 0,\forall k\in\mathbb{N}$.

(2) 若 $z=a\in\mathbb{C}$ 为函数 $f(z)$ 的一本质奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内不为零, 则 $z=a$ 亦必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的本质奇点.

♡

证明

(1)

(2) 令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. 由假设,$z=a$ 必为 $\varphi(z)$ 的孤立奇点. 若 $z=a$ 为 $\varphi(z)$ 的可去奇点或零点, 则 $z=a$ 必为 $f(z)$ 的可去奇点或极点, 此与假设矛盾! 若 $z=a$ 为 $\varphi(z)$ 的极点, 则 $z=a$ 必为 $f(z)$ 的零点, 亦与假设矛盾. 故 $z=a$ 必为 $\varphi(z)$ 的本质奇点.

□

定义 0.3

如果 f 在无穷远点的邻域 (不包括无穷远点) $\{z: 0 \leqslant R<|z|<+\infty\}$ 中全纯, 就称 ∞ 是 f 的**孤立奇点**.

注 在这种情形下, 作变换 $z=\dfrac{1}{\zeta}$, 记

$$g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

则 g 在 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ 中全纯, 即 $\zeta=0$ 是 g 的孤立奇点.

定义 0.4

设 $g(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, 如果 $\zeta=0$ 是 g 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 那么我们相应地称 $z=\infty$ 是 f 的**可去奇点**、**m 阶极点**或**本性 (质) 奇点**.

定理 0.6

设 f 在 ∞ 的某邻域 $N \setminus\{\infty\}=\{z: R<|z|<+\infty\}$ 内全纯, 则 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 内有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n,\ z \in N \setminus\{\infty\}.$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2 \pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d} \zeta,\ n=0, \pm 1, \cdots.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(r<\rho<R)$.

这时, 我们称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 为 f 的**主要部分**, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}$ 为 f 的**全纯部分**.

证明 令 $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, 则 $g \in H(\{z: 0<|z|<\dfrac{1}{R}\})$ 从而由定理**??**知 g 在原点的邻域 $\{z: 0<|z|<\dfrac{1}{R}\}$ 中有 Laurent 展开:

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,\ 0<|z|<\frac{1}{R},$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2 \pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d} \zeta,\ n \in \mathbb{Z},$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}(r<\rho<R)$. 于是 f 在 $N \setminus\{\infty\}$ 中有下面的 Laurent 展开:

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n,$$

其中 $b_n=a_{-n}, n=0, \pm 1, \cdots$, 即

$$b_n=\frac{1}{2 \pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d} \zeta,\ n=0, \pm 1, \cdots.$$

□

定理 0.7

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为零. 即存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内可 Laurent 展开为一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ z\in N\setminus\{\infty\}.$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ \ n=0,1,\cdots.$$

且 $0<\rho<R,\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=b\neq\infty$.

(3) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内有界.

♡

证明 令 $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, 再利用Riemann 定理易证.

□

定理 0.8

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 阶极点的充要条件是下列三条中的任何一条成立:

(1) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内有下面的 Laurent 展开式:

$$f(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,\ z\in N\setminus\{\infty\}.$$

其中 $b_m\neq 0$, 并且

$$b_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ \ n=\cdots,-1,0,1,\cdots,m.$$

而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta|=\rho\}\,(0<\rho<R)$.

(2) 存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z:R<|z|<+\infty\}(R\in\mathbb{R})$, 使得 f 在 $N\setminus\{\infty\}$ 内能表示成

$$f(z)=z^mh(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域 N 内解析, 且 $h(\infty)\neq 0$.

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 $z=\infty$ 为 m 阶零点.

♡

证明 令 $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, 再利用定理 0.4易证.

□

定理 0.9

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

♡

证明 令 $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, 再利用定理 0.3易证.

□

定理 0.10

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为本质奇点的充要条件是下列两条中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分有无穷多项正幂不等于零. 即存在 ∞ 的某个去心邻域 $N\setminus\{\infty\}=\{z\in\mathbb{C}:$

$r < |z| < +\infty\}(r \in \mathbb{R})$, 使得 f 在 $N \setminus \{\infty\}$ 内可 Laurent 展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n,\ z \in N \setminus \{\infty\}.$$

其中

$$b_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta,\ n = 0, \pm 1, \cdots.$$

而 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta| = \rho\}(0 < \rho < R)$. 并且存在子列 $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$, 使得 $b_{n_k} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在 (即当 z 趋向于 ∞ 时,$f(z)$ 不趋向于任何 (有限或无穷) 极限).

♡

证明

□

定理 0.11

若函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - a| < R$ 内解析, 且不恒为零; 又若 $f(z)$ 有一列异于 a 但却以 a 为聚点的零点, 则 a 必为 $f(z)$ 的本质奇点.

♡

证明 $z = a$ 必是 $f(z)$ 的孤立奇点且不能是可去奇点. 否则 $f(z)$ 于 $|z - a| < R$ 内解析 (令 $f(a) = 0$) 且以 a 为非孤立的零点. 由推论**??**必有 $f(z)$ 恒为零, 这与假设矛盾.

其次,$z = a$ 也不能是 $f(z)$ 的极点. 否则, 对任给 $M > 0$, 有 $\delta > 0$, 使当 $0 < |z - a| < \delta$ 时,$|f(z)| > M$, 也与假设矛盾.

故 $z = a$ 必为 $f(z)$ 的本质奇点.

□

定理 0.12 (Weierstrass 定理)

设 z_0 是 f 的本性奇点, 那么对任意 $A \in \mathbb{C}_\infty$, 必存在趋于 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

♡

注 f 在本性奇点处的特征是 Laurent 展开式的主要部分有无穷多项. 实际上, 这个定理证明了更深刻的结果.

证明 先设 $A = \infty$. 因为 z_0 是 f 的本性奇点, 故 f 在 z_0 附近无界. 于是对任意自然数 n, 总能找到 z_n, 使得 $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$, 但 $|f(z_n)| > n$, 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

再设 A 是一个有限数. 令 $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$, 我们证明 φ 在 z_0 的邻域中无界. 不然的话,z_0 是 φ 的可去奇点, 适当选择 $\varphi(z_0)$ 的值, 可使 φ 在 z_0 处全纯. 如果 $\varphi(z_0) \neq 0$, 则因 $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)} + A$,$f$ 也在 z_0 处全纯, 这不可能. 故必有 $\varphi(z_0) = 0$, 由定理 0.3可知 z_0 是 $f(z) - A$ 的极点, 也不可能. 所以,φ 在 z_0 的邻域中无界. 于是, 对任意自然数 n, 存在 z_n, 使得 $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$, 但 $\dfrac{1}{|f(z) - A|} > n$, 即 $|f(z) - A| < \dfrac{1}{n}$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

□

定理 0.13 (Picard 定理)

每个非常数整函数都取遍每一个复数值, 至多有一个例外.

此外, 函数在任何本性奇点的邻域内, 都可以无穷多次地取到每个有穷复值, 最多只有一个例外. 即若 $a \in \mathbb{C}_\infty$ 为函数 f 的本性奇点, 则对于每一个复数 $A \neq \infty$, 除掉一个可能值 $A = A_0$ 外, 必有趋于 a 的无限点列 $\{z_n\}$, 使 $f(z_n) = A(n = 1, 2, \cdots)$.

♡

注 例如, 考虑函数 $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, 它在 $z = 0$ 附近是全纯的. 若让 z 沿着 x 轴分别从 0 的左边和右边趋于 0, 可得

$$\lim_{z=x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{z=x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

这说明 $\lim\limits_{z\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 不存在, 所以 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 对于任意复数 $a\neq 0$, 若取 $z_n=(\ln a+2n\pi\mathrm{i})^{-1}$, 则 $f(z_n)=\mathrm{e}^{\ln a+2n\pi\mathrm{i}}=a$. 由于 $z_n\to 0$, 这说明 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的邻域中可以无穷多次地取到非零值 a, 但 0 是它的唯一的例外值.

命题 0.1

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 则

(1) 当 $m>n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点;

当 $m<n$ 时,z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶极点;

当 $m=n$ 时, 若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点;

若 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$, 则 z_0 是 $f(z)\pm g(z)$ 大于 m 阶的零点.

(2) z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 当 $m>n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点;

当 $m<n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点;

当 $m=n$ 时,z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 所以由定理??知

$$\begin{aligned} f(z)&=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\\ g(z)&=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots, \end{aligned}\tag{4}$$

其中 $a_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0,b_n=\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.

(1) 如果 $m>n$, 那么由(4)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^n\left[\pm b_n\pm b_{n+1}(z-z_0)\pm\cdots\pm(a_m\pm b_m)(z-z_0)^{m-n}+\cdots\right],$$

从而 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶零点.

如果 $n>m$, 那么同理可得 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点.

如果 $m=n$, 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)\neq 0$ 时, 由(4)式可得

$$f(z)\pm g(z)=(z-z_0)^m\left[(a_m\pm b_m)+(a_{m+1}\pm b_{m+1})(z-z_0)+\cdots\right],$$

从而此时 z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 m 阶零点; 当 $f^{(m)}(z_0)\pm g^{(m)}(z_0)=0$ 时, 此时零点 z_0 的阶数大于 m.

(2) 由(4)式可得

$$f(z)\cdot g(z)=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+(a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n)(z-z_0)^{m+n+1}+\cdots,$$

故 z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 由(4)式可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)}{(z-z_0)^n(b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}.$$

当 $m>n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点.

当 $m<n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

当 $m=n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

□

命题 0.2

函数 $f(z),g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 阶极点及 n 阶极点. 则

(1) 当 $m\neq n$ 时,$z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点;

当 $m=n$ 时, 若 $\left[f(z)(z-a)^m\pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}\neq 0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇

点或高于 0 阶零点;

若 $\left[f(z)(z-a)^m \pm g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=0$, 则 $z=a$ 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点.

(2) $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 当 $m>n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点.

当 $m<n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点.

当 $m=n$ 时,$z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

证明 因为 $z=a$ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 级极点, 所以由定理 0.4(2)知

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{g_1(z)}{(z-a)^n},\tag{5}$$

其中 $f_1(z)$ 与 $g_1(z)$ 在 $z=a$ 全纯, 且 $f_1(a)\neq 0, g_1(a)\neq 0$. 并且 $\left[f(z)(z-a)^m+g(z)(z-a)^n\right]_{z=a}=f_1(a)+g_1(a)$.

(1) 由(5)可得

$$f(z)\pm g(z)=\begin{cases}\dfrac{f_1(z)\pm(z-a)^{m-n}g_1(z)}{(z-a)^m}, & m>n,\\ \dfrac{(z-a)^{n-m}f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & n>m,\\ \dfrac{f_1(z)\pm g_1(z)}{(z-a)^n}, & m=n.\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\neq 0$. 当 $n>m$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $g_1(a)\neq 0$. 当 $m=n$ 时, 将 $z=a$ 代入分子中得 $f_1(a)\pm g_1(a)$, 各个分子显然在 $z=a$ 是全纯的, 所以有以下结论:

当 $m\neq n$ 时, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\max(m,n)$ 阶极点; 当 $m=n$ 时, 若 $f_1(a)\pm g_1(a)\neq 0$, 点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 n 阶极点; 若 $f_1(a)\pm g_1(a)=0$, 设 a 是 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 的 k 阶零点, 则由定理**??**知 $f_1(z)\pm g_1(z)$ 在 a 的邻域内可以表示为

$$f_1(z)\pm g_1(z)=(z-a)^k h(z),$$

其中 h 在 a 点全纯且 $h(a)\neq 0$.

从而此时

$$f(z)\pm g(z)=\frac{(z-a)^k h(z)}{(z-a)^n}=\begin{cases}\dfrac{h(z)}{(z-a)^{n-k}}, & k<n,\\ (z-a)^{k-n}h(z), & k\geqslant n.\end{cases}$$

因此当 $k<n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $n-k$ 阶极点; 当 $k=n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的可去奇点; 当 $k>n$ 时,a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的 $k-n$ 阶零点. 故此时点 a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的低于 n 阶极点或可去奇点或高于 0 阶零点.

(2) 由(5)可得 $f(z)\cdot g(z)=\dfrac{f_1(z)g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$, 因为 $f_1(z)g_1(z)$ 在 $z=a$ 解析, 且 $f_1(a)g_1(a)\neq 0$, 所以 $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

(3) 由(5)可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\cdot\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m>n, & a\text{是}m-n\text{阶极点},\\ (z-a)^{n-m}\cdot\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m<n, & a\text{是}n-m\text{阶零点},\\ \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}, & m=n, & a\text{是可去奇点}.\end{cases}$$

□

命题 0.3

设函数 $f(z)$ 不恒为零且以 $z=a$ 为解析点或极点, 而函数 $\varphi(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点, 则 $z=a$ 是 $\varphi(z)\pm f(z), \varphi(z)\cdot f(z)$ 及 $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明 反证, 如果 $z=a$ 不是 $\varphi(z) \pm f(z), \varphi(z) \cdot f(z)$ 及 $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点, 则

$$\varphi(z)=\left[\varphi(z) \pm f(z)\right] \mp f(x), \quad \varphi(z)=\frac{\varphi(z)}{f(z)} \cdot f(x) \quad, \varphi(z)=\frac{\varphi(z) \cdot f(z)}{f(x)}.$$

由命题 0.1和命题 0.2知 $\varphi(z)$ 就以 $z=a$ 为可去奇点或极点或零点, 这与题设矛盾.

□