0.1 Cauchy-Binet 公式

定理 0.1 (Cauchy-Binet 公式)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵.$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$ 表示 A 的一个 s 阶子式, 它是由 A 的第 $i_1,\cdots,i_s$ 行与第 $j_1,\cdots,j_s$ 列交点上的元素按原次序排列组成的行列式. 同理定义 B 的 s 阶子式.

(1) 若 $m>n$, 则有 $|AB|=0$;

(2) 若 $m\leqslant n$, 则有

$$|AB|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

证明

(1) 若 $m>n$, 则 $r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}\leqslant \min\{m,n\}=n<m$, 故 $|-AB|=0$.

(2)

□

推论 0.1 (Cauchy-Binet 公式推论)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵,r 是一个正整数且 $r\leqslant m$.

(1) 若 $r>n$, 则 AB 的任意 r 阶子式都等于零;

(2) 若 $r\leqslant n$, 则 AB 的 r 阶子式

$$AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}.$$

例题 0.1 设 $n\geqslant 3$, 证明下列矩阵是奇异阵:

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \end{pmatrix}.$$

由Cauchy-Binet 公式, 可知 $|A|=0$. □

例题 0.2 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, 求证: 矩阵 AA' 的任一主子式都非负.

证明 若 $r\leqslant n$, 则由Cauchy-Binet 公式推论可得

$$AA'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n}\left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right)^2\geqslant 0;$$

若 $r>n$, 则 AA' 的任一 r 阶主子式都等于零, 结论也成立. □

例题 0.3 设 A 是 n 阶实方阵且 $AA'=I_n$. 求证: 若 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$, 则

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n}\left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right)^2=1.$$

证明 对等式 $AA' = I_n$ 两边同时求 r 阶子式, 因为 $r \leqslant n$, 所以由Cauchy-Binet 公式即得结论成立. □

例题 0.4 设 A, B 分别是 $m \times n$,$n \times m$ 矩阵, 求证:AB 和 BA 的 r 阶主子式之和相等, 其中 $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$.

证明 由Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m} AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\
=&\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m}\ \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\
=&\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \\
=&\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n} BA\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

引理 0.1 (Lagrange 恒等式)

证明 Lagrange 恒等式 $(n \geqslant 2)$:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

证明 左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy - Binet 公式可得

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

□

定理 0.2 (Cauchy - Schwarz 不等式)

设 a_i, b_i 都是实数, 证明 Cauchy - Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

证明 由Lagrange 恒等式, 恒等式右边总非负, 即得结论. □

例题 0.5 设 A, B 都是 $m \times n$ 实矩阵, 求证:

$$|AA'||BB'| \geqslant |AB'|^2.$$

证明 若 $m > n$, 则 $|AA'| = |BB'| = |AB'| = 0$, 结论显然成立. 若 $m \leqslant n$, 则由 Cauchy - Binet 公式可得

$$|AA'| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} \left(A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \right)^2;$$

$$|BB'| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} \left(B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \right)^2;$$

$$|AB'| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

再由Cauchy - Schwarz 不等式即得结论. □