

0.1 么半群

定义 0.1 (代数运算/二元运算)

设 A 是一个非空集合, 若对 A 中任意两个元素 a, b , 通过某个法则 “ \cdot ”, 有 A 中唯一确定的元素 c 与之对应, 则称法则 “ \cdot ” 为集合 A 上的一个 **代数运算 (algebraic operation)** 或 **二元运算**. 元素 c 是 a, b 通过运算 “ \cdot ” 作用的结果, 将此结果记为 $a \cdot b = c$.

定义 0.2 (半群和交换半群)

非空集合 S 和 S 上满足结合律的二元运算 \cdot 所形成的代数结构叫做 **半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

这个半群记成 (S, \cdot) 或者简记成 S , 运算 $x \cdot y$ 也常常简写成 xy . 此外, 如果半群 (S, \cdot) 中的运算 “ \cdot ” 又满足交换律, 则 (S, \cdot) 叫做 **交换半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\forall x, y \in S, x \cdot y = y \cdot x.$$

注 像通常那样令 $x^2 = x \cdot x, x^{n+1} = x^n \cdot x (= x \cdot x^n, n \geq 1)$.

定义 0.3 (么元素)

设 S 是半群, 元素 $e \in S$ 叫做半群 S 的 **么元素 (也叫单位元 (unit element) 或恒等元 (identity))**, 是指对每个 $x \in S, xe = ex = x$.

命题 0.1 (么元素存在必唯一)

如果半群 (S, \cdot) 中有么元素, 则么元素一定唯一. 我们将半群 (S, \cdot) 中这个唯一的么元素 (如果存在的话) 通常记作 **1_S 或者 1** .

证明 因若 e' 也是么元素, 则 $e' = e' e = e$. □

定义 0.4 (含么半群和交换含么半群)

如果半群 (S, \cdot) 含有么元素, 则 (S, \cdot) 称为 **(含) 么半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in S, \forall x \in S, e \cdot x = x \cdot e = x.$$

此外, 如果么半群 (S, \cdot) 中的运算 “ \cdot ” 又满足交换律, 则 (S, \cdot) 叫做 **交换么半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in S, \forall x \in S, e \cdot x = x \cdot e = x,$$

$$\forall x, y \in S, x \cdot y = y \cdot x.$$

例题 0.1 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是一个含么 (乘法) 半群.

证明 $\forall A, B, C \in (M_n(\mathbb{R}), \cdot)$, 则不妨设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}, C = (c_{ij})_{n \times n}$. 再设 $A \cdot B = (d_{ij})_{n \times n}, B \cdot C = (e_{ij})_{n \times n}, (A \cdot B) \cdot C = (f_{ij})_{n \times n}, A \cdot (B \cdot C) = (g_{ij})_{n \times n}$. 于是

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, e_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kl}.$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$.

从而

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^n d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

由二重求和号的可交换性, 可知 $f_{ij} = g_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 故 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

记 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, 于是 $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, 则不妨设 $X = (x_{ij})_{n \times n}, I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$. 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$. 再设 $I_n \cdot X = (x'_{ij})_{n \times n}, X \cdot I_n = (x''_{ij})_{n \times n}$, 于是由矩阵乘法的定义可知

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} \delta_{kj} = x_{ij} \delta_{jj} = x_{ij}.$$

$$x''_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_{kj} = \delta_{ii} x_{ij} = x_{ij}.$$

故 $x'_{ij} = x''_{ij} = x_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 从而 $X = I_n \cdot X = X \cdot I_n$. 因此 I_n 是 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 的单位元. 综上所述, $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是一个含么 (乘法) 半群. \square

定义 0.5 (么半群中多个元素的乘积)

设 (S, \cdot) 是一个么半群, 令 $x_1, \dots, x_n \in S$, 我们递归地定义

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}) \cdot x_n$$

令 $x \in S, n \in \mathbb{N}$. 若 $n > 0$, 我们定义 $x^n = x \cdots x$, 而 $x^0 = e$.


定义 0.6 (广义结合律)

设 S 是一个非空集合, “ \cdot ” 是一个二元运算, 若对于任意有限多个元素 $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$, 乘积 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ 的任何一种 “有意义的加括号方式” (即给定的乘积的顺序) 都得出相同的值.

命题 0.2

设 S 是一个非空集合, “ \cdot ” 是一个满足结合律的二元运算, 令 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$, 则

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_m = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_m) \quad (1.6)$$

 **笔记** 根据这个命题, 我们就可以得到一个半群 (S, \cdot) 一定满足广义结合律, 只要 $x_1, \dots, x_n \in S$ 的 \cdot 运算顺序是固定的, 无论怎么添加括号, 我们都可以利用这个命题的结论, 将括号重排至从前往后依次乘的顺序而保持结果不变. 所以, 如果一个集合上的二元运算有结合律, 我们就可以在连续元素的乘积中不加括号, 也可以按照我们的需要随意加括号.

证明 对 m 做数学归纳. 当 $m = 1$ 时, 由定义 0.5 直接得到. 接下来, 假设

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_k = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_k)$$

则由 “ \cdot ” 满足结合律, 我们有

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_{k+1} \quad (1.7)$$

$$= ((x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_k)) \cdot y_{k+1} \quad (1.8)$$

$$= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot ((y_1 \cdot y_2 \cdots y_k) \cdot y_{k+1}) \quad (1.9)$$

$$= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_{k+1}) \quad (1.10)$$

□

推论 0.1

令 $x \in S, m, n \in \mathbb{N}$, 则

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$$

♥

证明 令命题 0.2 中的所有 x_i 和 y_j 都等于 x 即可得到.

□

定义 0.7 (子么半群)

令 (S, \cdot) 是一个么半群, 若 $T \subset S, e \in T$, 且 T 在乘法下封闭, 即

$$e \in T,$$

$$\forall x, y \in T, x \cdot y \in T.$$

则我们称 (T, \cdot) 是 (S, \cdot) 的一个**子么半群**

♣

命题 0.3 (子么半群也是么半群)

若 (T, \cdot) 是 (S, \cdot) 的一个子么半群, 则 (T, \cdot) 是个么半群.

♠

证明 就二元运算的定义而言, 子群第一个条件 (封闭性) 就满足了, 这使得我们后面的谈论是有意义的。首先, 结合律对于 S 中元素都满足, 当然对 T 中元素也满足 (T 是子集)。接下来, 类似地, e 对于所有 S 中元素都是单位元, 固然对于 T 中元素亦是单位元。

□

定义 0.8 (么半群同态)

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个么半群, 且 $f: S \rightarrow T$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**么半群同态**, 当 f 保持了乘法运算, 且把单位元映到了单位元。此即

$$\forall x, y \in S, f(x \cdot y) = f(x) * f(y),$$

$$f(e) = e'.$$

其中, e 和 e' 分别是 (S, \cdot) 和 $(T, *)$ 的单位元。

♣

定义 0.9 (由 A 生成的子么半群)

假设 (S, \cdot) 是一个么半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集。我们称 S 中所有包含了 A 的子么半群的交集为**由 A 生成的子么半群**, 记作 $\langle A \rangle$ 。此即

$$\langle A \rangle = \bigcap \{T \subset S : T \supset A, T \text{ 是子么半群}\}.$$

♣

命题 0.4 ($\langle A \rangle$ 包含了 A 的最小的子么半群)

假设 (S, \cdot) 是一个么半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集。则 $\langle A \rangle$ 也是一个子么半群。因此, 这是包含了 A 的最小的子么半群。

♠

注 这里说的“最小”, 指的是在包含关系下最小的, 也就是, 它包含于所有包含 A 的子么半群。

证明 要证明 $\langle A \rangle$ 是子么半群, 只需要证明它包含了 e , 并在乘法运算下封闭。首先, 因为族中每一个 T , 作为子么半群, 都会包含 e ; 因此 $\langle A \rangle$ 作为这些集合的交集也会包含 e , 这就证明了第一点。而对于第二点, 我们首先假设 $x, y \in \langle A \rangle$, 而想要证明 $x \cdot y \in \langle A \rangle$ 。注意到, 因为 $x, y \in \langle A \rangle$, 任取一个包含了 A 的子么半群 T (族中的集合), 我们都有 $x, y \in T$, 于是有 $x \cdot y \in T$ 。而 $x \cdot y \in T$ 对于所有这样的 T 都成立, 我们就有 $x \cdot y$ 属于它们

的交集,也就是 $\langle A \rangle$ 。这样,我们就证明了第二点。综上,由一个么半群 S 的任意子集 A 生成的子么半群都确实是一个子么半群。□

定义 0.10 (么半群同构)

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个么半群, 且 $f: S \rightarrow T$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**么半群同构**, 当 f 是一个双射, 且是一个同态。

$$\begin{aligned} f &\text{ 是双射,} \\ \forall x, y \in S, f(x \cdot y) &= f(x) * f(y), \\ f(e) &= e'. \end{aligned}$$

其中, e 和 e' 分别是 (S, \cdot) 和 $(T, *)$ 的单位元。



注 容易验证同构是一个等价关系.

命题 0.5 (么半群同构的逆映射一定是么半群同态)

若 $f: (S, \cdot) \rightarrow (T, *)$ 是一个么半群同构, 则 $f^{-1}: T \rightarrow S$ 是一个么半群同态。因此, f^{-1} 也是个么半群同构。



证明 令 $x', y' \in T$, 我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。为了方便起见, 根据 f 是一个双射, 从而存在 $x, y \in S$, 使得 $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 并且 $f(x) = x', f(y) = y'$ 。我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y$ 。而由于 f 是么半群同态, 所以 $f(x \cdot y) = f(x) * f(y) = x' * y'$ 。反过来说, $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。这就证明了这个命题。□