0.1 其他

例题 0.1 设 $f \in C^2[0,1]$, 证明

(1)

$$|f'(x)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f''(x)|dx. \tag{1}$$

(2)

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f''(x)|dx. \tag{2}$$

(3) 若 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 则

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f''(x)|dx. \tag{3}$$

笔记 对于 $[a,b]$ 的情况, 考虑 $f(a+(b-a)x), x \in [0,1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |f''(x)|dx,$$

以及

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

当 $f(a)f(b) \geqslant 0$, 我们有

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

证明

(1) 注意到对任何 $\theta \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x f''(y)dy\right| + |f'(\theta)| \\ &\leqslant \int_0^1 |f''(y)|dy + |f'(\theta)|.\end{aligned}$$

于是只需证明存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|dx. \tag{4}$$

如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0,1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足 (4) 式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性可知,f' 要么恒正, 要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点, 不妨设 $f > 0$, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geqslant xf'(\eta) \geqslant x\min_{[0,1]}|f'| \implies \int_0^1 |f(x)|dx \geqslant \min_{[0,1]}|f'| \geqslant \frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|,$$

这也给出了 (4) 式. 若存在 $t \in [0,1]$, 使得 $f(t) = 0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x) = f'(\theta)(x-t) \Longrightarrow |f(x)| = |f'(\theta)|\,|x-t| \geqslant \min_{[0,1]} f'\,|x-t|, \quad \forall x \in [0,1].$$

从而

$$\int_0^1 |f(x)|dx \geqslant \min_{[0,1]}|f'| \cdot \int_0^1 |x-t|dx \overset{\text{命题 0.4}}{\geqslant} \min_{[0,1]}|f'| \cdot \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = \frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|.$$

这也给出了 (4) 式. 于是我们证明了不等式(1)式.

(2) 直接对(1)式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分得(2)式.

(3) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|dx. \tag{5}$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0) \geqslant 0$, 则当 f 递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\cdot\min|f'|\Longrightarrow\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min|f'\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

当 f 递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\alpha)\geqslant(1-x)\min|f'|\Longrightarrow\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

于是必有 (5) 式成立, 这就给出了(3)式.

□

例题 0.2 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s=\dfrac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$. 证明

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

证明 令 $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $F'(t)=f(t)$ 连续递增, 故 F 是下凸的. 显然 $s\in[0,1]$, 于是

$$F(x)\geqslant F(s)+F'(s)(x-s)=F(s)+f(s)(x-s),\quad\forall x\in[0,1].$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^1\left[F(s)f(x)+f(s)f(x)(x-s)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\int_0^1\left[xf(x)-sf(x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Longrightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant F(s)=\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\Longrightarrow\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x+\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\Longrightarrow\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x)}{F(1)}=1-\frac{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}{F(1)},$$

即 $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=(1-s)F(1)$. 又由 F 的下凸性可知

$$F(x)\leqslant\begin{cases}\dfrac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\ \dfrac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0), & x\in[0,s]\end{cases}.$$

于是

$$(1-s)F(1)=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^s\left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s)\right]\,\mathrm{d}x+\int_s^1\left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1)\leqslant\frac{1}{2}F(s)\implies F(1)\leqslant\frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(s)\leqslant\left(\frac{1}{1-s}-1\right)F(s)=\frac{s}{1-s}F(s)=\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.3 求最小实数 C, 使得对一切满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 f, 都有

$$\int_0^1|f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x\leqslant C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x=1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是 n 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1|f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t=2.$$

令 $f_n(t)=(n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=1$. 于是

$$\int_0^1|f_n(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 t(n+1)t^n\,\mathrm{d}t=2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2,n\to\infty.$$

因此若 $C<2$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1|f_N(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x>C$. 故 $C=2$ 就是最佳上界.

□

命题 0.1

设 $f\in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=1,k=0,1,2,\cdots,n-1$. 证明

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant n^2.$$

笔记 也可以利用命题 9.53得到

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}=\lambda_{\max}\left(JH^{-1}\right)=n^2.$$

证明 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\int_0^1(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x\geqslant\left[\int_0^1 f(x)(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x\right]^2$$
$$=(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^2=\left(\sum_{j=0}^{n-1}a_j\right)^2.$$

注意到

$$\int_0^1(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_ja_ix^{i+j}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_ja_i\int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_ja_i}{i+j+1}.$$

因此

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{a_ja_i}{i+j+1}}=\frac{a^TJa}{a^THa},$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n},\quad H=\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n\times n}.$$

显然 J 半正定, 由例题 8.18(3)可知 H 正定. 于是我们只需求 $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 注意到

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}=\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^TJ\frac{a}{\|a\|}}{\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^TH\frac{a}{\|a\|}}=\sup_{a\in\{\alpha\in\mathbb{R}^n:\|\alpha\|=1\}}\frac{a^TJa}{a^THa},$$

又 $\frac{a^TJa}{a^THa}$ 是定义在单位球面的 n 元连续函数, 故由单位球面的紧性和 H 的正定性以及 J 的半正定性知

$$0<\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}=\sup_{a\in\{\alpha\in\mathbb{R}^n:\|\alpha\|=1\}}\frac{a^TJa}{a^THa}<+\infty.$$

又 H 正定, 故

$$\begin{aligned}\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界}&\Longleftrightarrow\lambda\geqslant\frac{a^TJa}{a^THa},\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow a^TJa\leqslant\lambda a^THa,\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow a^T(\lambda H-J)a\geqslant 0,\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow\lambda H-J\text{半正定}.\end{aligned}$$

因此 $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}=\inf\{\lambda>0\mid\lambda H-J\text{半正定}\}$. 设 H_k,J_k 分别为 H,J 的 k 阶主子阵, 再设 $\lambda>0$. 根据打洞原理及例题 2.41(1)可得

$$|\lambda H_k-J_k|=|H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}J_k|=|H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}\mathbf{1}_k\mathbf{1}_k^T|=\lambda^{k-1}|H_k|(\lambda-\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k).$$

其中 $\mathbf{1}_k^T=(1,1,\cdots,1)_{1\times k}$. 由 H 正定可知 $|H_k|>0$, 又因为 $\lambda>0$, 所以

$$|\lambda H_k-J_k|\geqslant 0\Longleftrightarrow\lambda\geqslant\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k\xlongequal{\text{引理 6.3}}n^2.$$

因此

$$\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界}\Longleftrightarrow\lambda H-J\text{半正定}\Longleftrightarrow\lambda H-J\text{的主子式都大于等于}0\Longleftrightarrow\lambda\geqslant n^2.$$

故

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa}=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\inf\left[n^2,+\infty\right)=n^2.$$

结论得证.

□

命题 0.2

设 $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $g(a) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha} [g(x) - g(a)]^{\alpha} M, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

证明 不妨设 $g(a) = 0$, 否则用 $g(x) - g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M = 0$, 则不等式(7)显然成立. 当 $M \neq 0$ 可以不妨设 $M = 1$.

现在对非负函数 g, 当 $g'(x_0) = 0$, 不等式(7)显然成立. 当 $g'(x_0) > 0$, 则利用(6)有

$$\begin{aligned}
g(x_0) \geqslant g(x_0) - g(h) &= \int_h^{x_0} g'(t)\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_h^{x_0} [g'(x_0) - |t - x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t \\
&= g'(x_0)(x_0 - h) - \frac{(x_0 - h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},
\end{aligned}$$

取 $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(7)成立. 类似的考虑 $g'(x_0) < 0$ 可得(7).

当 $g'(x_0) < 0$, 则利用(6)有

$$\begin{aligned}
g(x_0) \geqslant -g(h) + g(x_0) &= -\int_{x_0}^{h} g'(t)\mathrm{d}t \\
&\geqslant -\int_{x_0}^{h} [g'(x_0) + |t - x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t \\
&= -g'(x_0)(h - x_0) - \frac{(h - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},
\end{aligned}$$

取 $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(7)成立.

□

推论 0.1

设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

证明 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x.

(i) 若 $f'(x) = 0$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $f'(x) < 0$, 则令 $h = \left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. 由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}
0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) + \int_x^{x+h} \left[f'(t) - f'(x)\right] \mathrm{d}t + f'(x)h \\
&\leqslant f(x) + \int_x^{x+h} (t - x)^{\alpha}\, \mathrm{d}t + f'(x)h = f(x) + \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f'(x)h \\
&= f(x) + \frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x)\right] \left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) \Longleftrightarrow f'(x) \left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

(iii) 若 $f'(x) > 0$, 则令 $h = \left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\mathrm{d}t + f(x) = \int_{x-h}^{x} \left[f'(x) - f'(t)\right] \mathrm{d}t + f(x) - f'(x)h \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^{\alpha}\, \mathrm{d}t + f(x) - f'(x)h = \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)h \\
&= \frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x)\right]\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) \Longleftrightarrow \left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

□

例题 0.4 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数的非负函数, 且存在 $M > 0$ 使得对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|.$$

证明: 对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x)$.

证明 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x. 由 $f \geqslant 0$ 可得, 对 $\forall h > 0$, 有

$$\int_{x-h}^{x} [f'(x) - f'(t)]\mathrm{d}t = f'(x)h - [f(x) - f(x-h)] \geqslant f'(x)h - f(x).$$

又由条件可得, 对 $\forall h > 0$, 有

$$\int_{x-h}^{x} |f'(x) - f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant M \int_{x-h}^{x} |x-t|\mathrm{d}t = \frac{M}{2}h^2.$$

于是对 $\forall h > 0$, 有

$$f'(x)h - f(x) \leqslant \int_{x-h}^{x} [f'(x) - f'(t)]\mathrm{d}t \leqslant \int_{x-h}^{x} |f'(x) - f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{2}h^2.$$

故对 $\forall h > 0$, 都有

$$\frac{M}{2}h^2 - f'(x)h + f(x) \geqslant 0.$$

因此

$$\Delta = (f'(x))^2 - 2Mf(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow (f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x).$$

再由 x 的任意性可知结论成立.

□

例题 0.5 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 成立

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x) > 0, \quad f'''(x) \leqslant f(x).$$

证明:$\forall x \in \mathbb{R}$ 成立

$$f'(x) < 2f(x).$$

证明 证法一:由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x, t \in \mathbb{R}$, 都存在 ξ 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0 < f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}t^3. \tag{8}$$

当 $t \leqslant 0$ 时, 由(8)式和条件可得

$$0 < f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}t^3 \leqslant f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2.$$

当 $t > 0$ 时, 由条件可得

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0.$$

故

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

由二次函数的性质可知

$$\Delta=\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^2<2f''(x)f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

同理, 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都存在 η 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0<f'(x+t)=f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2.$$

由 $f'>0$ 知 f 递增, 再结合 $f'''(x)<f(x)$, 由上式可得, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都有

$$0<f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2<f'(x)+f''(x)t+\frac{f(\eta)}{2}t^2\leqslant f'(x)+f''(x)t+\frac{f(x)}{2}t^2.$$

于是由二次函数的性质可知

$$\Delta'=\left[f''(x)\right]^2-2f'(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f'(x)f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

由(9)(10)式可得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left[f'(x)\right]^4<4\left[f''(x)\right]^2f^2(x)<8f'(x)f^3(x)\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^3<8f^3(x)\Longrightarrow f'(x)<2f(x).$$

证法二 (能量积分法):由条件知 f,f',f'' 都是递增函数且有下界 0, 故

$$f(-\infty),f'(-\infty),f''(-\infty)\in[0,+\infty).$$

若 $f'(-\infty)=A>0$, 则存在 $-M<0$, 使得

$$f'(x)>\frac{A}{2},\quad \forall x\leqslant -M.$$

于是对 $\forall x<-M$, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(-M)+\int_{-M}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t=f(-M)-\int_{x}^{-M}f'(t)\,\mathrm{d}t\\&<f(-M)-\int_{x}^{-M}\frac{A}{2}\mathrm{d}t=f(-M)-\frac{A}{2}(-M-x)\\&=f(-M)+\frac{A}{2}(x+M).\end{aligned}$$

令 $x\to-\infty$ 得 $f(-\infty)=-\infty$, 这与 $f(-\infty)\in[0,+\infty)$ 矛盾! 故 $f'(-\infty)=0$. 同理可证 $f''(-\infty)=0$. 由条件可得

$$\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'=f'''(x)f''(x)<f(x)f''(x)=\left[f(x)f'(x)\right]'-\left[f'(x)\right]^2<\left[f(x)f'(x)\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'\mathrm{d}t<\int_{-\infty}^{x}\left[f(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t\Longleftrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f(x)f'(x). \tag{11}$$

同理, 由条件可得

$$\left[f''(x)f'(x)\right]'-\left[f''(x)\right]^2=f'''(x)f'(x)<f(x)f'(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2.$$

从而

$$\left[f''(x)f'(x)\right]'<\frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\left[f''(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t<\int_{-\infty}^{x}\frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'\mathrm{d}t\Longleftrightarrow f''(x)f'(x)<\frac{3}{2}f^2(x). \tag{12}$$

将(11)(12)两式相乘得

$$\left[f''(x)\right]^3<3f^3(x)\Longrightarrow f''(x)<\sqrt[3]{3}f(x)\Longrightarrow f''(x)f'(x)<\sqrt[3]{3}f(x)f'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

两边再同时积分得

$$\int_{-\infty}^{x} f''(t)f'(t)\mathrm{d}t < \sqrt[3]{3}\int_{-\infty}^{x} f(t)f'(t)\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \left[f'(x)\right]^2 < \sqrt[3]{3}f^2(x) \Longleftrightarrow f'(x) < \sqrt[6]{3}f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

□

命题 0.3 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13}$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

但是上述**分部积分**部分需要零边界条件 (即需要 $\lim\limits_{x\to\infty} x|f(x)|^2=0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 **专业技术**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

取紧化序列 $h_n, n\in\mathbb{N}$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |(h_nf)'(x)|^2\mathrm{d}x\\ &= 4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

右边让 $n\to+\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x\right]=\left[4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2<\infty$, 因此不能直接换序. 但是Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而不等式(13)成立.

Method 2 **正常方法**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty} x|f(x)|^2=0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty>\sqrt{\int_x^{\infty} y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^{\infty}|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant}\int_x^{\infty} y|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y\geqslant x\int_x^{\infty}|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y, \tag{14}$$

于是 $\int_x^{\infty} f(y)f'(y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2-\frac{1}{2}|f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$, 因此由积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在 $x_n\to\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n|f(x_n)|=0$, 于是再结合 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0\Rightarrow\lim_{y\to+\infty} f(y)=0.$$

现在继续用(14), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2 \mathrm{d}y} \geqslant x\int_x^{\infty} f'(y)f(y)\mathrm{d}y = \frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

令 $x \to +\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2 \mathrm{d}y} \to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x|f(x)|^2 = 0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

即不等式(13)成立.

□

例题 0.6 设 $f : [0, +\infty) \to (0, 1)$ 是内闭 Riemman 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 < 2\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x. \tag{15}$$

证明 记 $a = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 0$, 待定 $s > 0$, 则不等式(15)等价于

$$\int_0^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{s} x f(x)\mathrm{d}x + \int_s^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\int_0^{s} x f(x)\mathrm{d}x + s\int_s^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow \int_0^{s} x f(x)\mathrm{d}x + s\left(a - \int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{a^2}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + s\int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{s} x f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x) f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

利用 $f < 1$, 取 $s = a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x) f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x) f(x)\mathrm{d}x < -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而

$$\int_0^{a} x f(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a} x f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{a} x f(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(15).

□

命题 0.4

设 f 是 $[0, 1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 a 有

$$\int_0^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}x. \tag{16}$$

证明 不妨设 f 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (16) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x)\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |a-f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)-a|\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 |f(x)-a|\,\mathrm{d}x.$$

故式 (16) 成立.

□

例题 0.7 若 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 由已知条件, 对任意正数 ε, 存在正整数 k 使得

$$|f_k(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

因为 $f_k \in R([a,b])$, 所以存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\omega_j(f_k)$ 是 f_k 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的振幅. 因为

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(y)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x)-f_k(y)|, \end{aligned}$$

所以

$$\omega_j(f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)\left(x_j - x_{j-1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j\left(f_k\right)\left(x_j - x_{j-1}\right) < \varepsilon.$$

故 f 在 $[a,b]$ 上可积.

□

例题 0.8 设 f 在 $[a,b]$ 上非负可积. 求证: 数列 $I_n = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

注 当 f 是连续函数时, 可以进一步证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$(见例题**??**).

证明 要比较 I_n 与 I_{n+1} 的大小, 就要比较 f^n 的积分与 f^{n+1} 之间的关系. 这可以利用 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b 1\cdot f^n(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_a^b 1^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}}, \end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故 $\{I_n\}$ 是单调递增数列.

□

例题 0.9 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证: 对 $p \geqslant 1$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b \left[(b-a)^p - (x-a)^p\right] |f'(x)|^p\mathrm{d}x.$$

证明 为了建立 $|f|^p$ 的积分与 $|f'|^p$ 的积分之间的关系, 先建立 $|f|$ 与 $|f'|$ 的积分的关系. 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

所以对于 $p>1$ 应用 Hölder 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left(\int_a^x 1^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=(x-a)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 因而

$$|f(x)|^p\leqslant (x-a)^{p-1}\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

注意到上式对 $p=1$ 也是成立的. 上式两边在 $[a,b]$ 上积分, 可得

$$\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant \int_a^b (x-a)^{p-1}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\displaystyle\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t$ 是 $|f'|^p$ 的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{p}(x-a)^p\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\Big|_a^b-\frac{1}{p}\int_a^b (x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{p}(b-a)^p\int_a^b |f'(t)|^p\mathrm{d}t-\frac{1}{p}\int_a^b (x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{p}\int_a^b \left[(b-a)^p-(x-a)^p\right]|f'(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例题 0.10 设 f 是 $[0,a]$ 上的连续函数, 且存在正常数 M,c 使得

$$|f(x)|\leqslant M+c\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

求证: $|f(x)|\leqslant M\mathrm{e}^{cx}$ $(\forall x\in[0,a])$.

证明 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x)\leqslant M+cF(x).$$

令

$$G(x)=F(x)\mathrm{e}^{-cx}+\frac{M}{c}\mathrm{e}^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned}G'(x)&=F'(t)\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}\\ &=|f(x)|\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}\\ &\leqslant (M+cF(x))\mathrm{e}^{-cx}-cF(x)\mathrm{e}^{-cx}-M\mathrm{e}^{-cx}=0.\end{aligned}$$

这说明 G 在 $[0,a]$ 上单调递减. 因为 $G(0)=\dfrac{M}{c}$, 所以 $G\leqslant\dfrac{M}{c}$. 因而

$$F(x)+\frac{M}{c}\leqslant\frac{M}{c}\mathrm{e}^{cx}.$$

再结合条件可得 $|f(x)|\leqslant M+cF(x)\leqslant M\mathrm{e}^{cx}$.

□

例题 0.11 设 f 在区间 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 1.$$

求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

注 结论中的 $\frac{\pi}{4}$ 是最佳的, 这只要取 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 即可验证.

证明 结论中出现 π 且条件中要求 $x,y\in[0,1]$. 因此将条件中的 x,y 分别换成 $\sin t$ 和 $\cos t$, 有

$$f(\cos t)\sin t+f(\sin t)\cos t\leqslant 1,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由区间再现恒等式可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

作变换 $\sin t=x$ 即得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

□

例题 0.12 设 f 在区间 $[0,1]$ 上有可积的导函数且满足 $f(0)=0,f(1)=1$. 求证: 对任意 $a\geqslant 0$ 有

$$\int_0^1|af(x)+f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

证明 因为 $\mathrm{e}^{-ax}\geqslant\mathrm{e}^{-a}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1|af(x)+f'(x)|\mathrm{d}x&=\int_0^1|(\mathrm{e}^{ax}f(x))'\mathrm{e}^{-ax}|\mathrm{d}x\geqslant\mathrm{e}^{-a}\int_0^1|(\mathrm{e}^{ax}f(x))'|\mathrm{d}x\\&\geqslant\mathrm{e}^{-a}\left|\int_0^1(\mathrm{e}^{ax}f(x))'\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-a}|\mathrm{e}^{a}f(1)-f(0)|=1.\end{aligned}$$

□

例题 0.13 设 f 在 $[0,2]$ 上可导且 $|f'|\leqslant 1,f(0)=f(2)=1$. 求证:

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3$$

证明 由 Taylor 中值定理可知, 存在 $\xi_1\in[0,1],\xi_2\in[1,2]$, 使得

$$f(x)=1+f'(\xi_1)x,\forall x\in[0,1].$$
$$f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2),\forall x\in[1,2].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1[1+f'(\xi_1)x]\mathrm{d}x+\int_1^2[1+f'(\xi_2)(x-2)]\mathrm{d}x\\&=2+\frac{f'(\xi_1)}{2}-\frac{1}{2}f'(\xi_2).\end{aligned}$$

由 $|f'|\leqslant 1$ 可知

$$1=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\leqslant 2+\frac{f'(\xi_1)}{2}-\frac{1}{2}f'(\xi_2)\leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3.$$

故

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

□

例题 0.14 设 f 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$

且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 其中 A 是常数.

笔记 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑 $(ax+b)f'(x)$ 的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

证明 设 t 是任意常数, 有

$$\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x = (x+t)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{3}+t+t^2\right)\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取 $t=-\dfrac{1}{2}$, 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数 C 使得 $f'(x)=C\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 注意到 $f(0)=f(1)=0$, 可得 $f(x)=Ax(1-x)$, 这里 A 为任意常数.

□

例题 0.15 设 f,g 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 使得对 $[0,1]$ 上任意满足 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 的连续可导函数 φ 有

$$\int_0^1 \left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x = 0$$

求证:f 可导, 且 $f'=g$.

证明 设

$$c=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t$$

考察函数

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+c$$

显然 G 可导且 $G'(x)=g(x)$,$G(1)=\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+c$. 只需证明 $f=G$. 令

$$\varphi(x)=\int_0^x \left[f(t)-G(t)\right]\mathrm{d}t$$

则 φ 可导, 且 $\varphi(0)=0$,

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\left[tG(t)\Big|_0^1-\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-G(1)+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t-c+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1 \left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x = 0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = G(x)\varphi(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 \left[f(x)-G(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=0$$

注意到 $\varphi'=f-G$. 我们有

$$\int_0^1 \left[f(x)-G(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

于是 $f=G$.

□

命题 0.5

设 f 是区间 $[a,b]$ 上的严格单调递减连续函数,$f(a)=b,f(b)=a,g$ 是 f 的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $p>0,q>0$ 取 $f(x)=(1-x^q)^{\frac{1}{p}},g(x)=(1-x^p)^{\frac{1}{q}}$, 可得

$$\int_0^1 (1-x^p)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x^q)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}x.$$

证明 因为可以用在 a,b 分别插值于 $f(a),f(b)$ 的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在 $[a,b]$ 上一致逼近 $f(x)$, 所以只需对 f 是连续可微函数的情况证明.

作变换 $x=f(t)$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_b^a g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_b^a tf'(t)\,\mathrm{d}t\\&=tf(t)\Big|_b^a-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故所证等式成立.

□

例题 0.16 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=f(y)$. 因此对任意 $x\in[a,b]$, 有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)-f(x)=f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

关于 x 在 $[a,b]$ 上积分, 即得

$$(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

两边除以 $b-a$ 即得所证.

□

例题 0.17 设 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right],f\in C^1[0,1]$ 且满足 $f(1)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{4}{3-4\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 $\alpha\in[0,1)$ 且 $\alpha\neq\frac{1}{2}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对 $x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}f^2(x)&=\left(\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_x^1 t^{-\alpha}\cdot t^{\alpha}f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\\&\leqslant\int_x^1 t^{-2\alpha}\,\mathrm{d}t\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\alpha}(1-x^{1-2\alpha})\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1 (1-x^{1-2\alpha})\left(\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{1-2\alpha}\left[\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big|_0^1\right.\\ &\quad\left.+\int_0^1\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)x^{2\alpha}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left|\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1\left(\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= x\left(\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}}\cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \left(\int_0^1 x^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合式 (17), 可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x - \frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{19}$$

在上式中取 $\alpha=\dfrac{3}{4}$, 即得

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

对 $\alpha\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$, 将式 (19) 两边乘以 $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$ 再与式 (20) 相加可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{4}{3-4\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.18 设 f 在 $[0,1]$ 上非负且连续可导. 求证:

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x - f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$, 则有

$$-Mf(x)\leqslant f(x)f'(x)\leqslant Mf(x),\quad \forall x\in[0,1]$$

因此

$$-M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(0)\leqslant M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[0,1]$$

上式两边乘以 f 得

$$-Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}f^3(x)-\frac{1}{2}f^2(0)f(x) \leqslant Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[0,1]$$

将上式关于变量 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$-M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x - f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

结论得证.

□

例题 0.19 设 f 在 $[0,1]$ 上非负单调递增连续函数,$0<\alpha<\beta<1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

并且 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

注 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

证明 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in(\alpha,\beta)$ 使得

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

因而由 f 的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (\beta-\alpha)f(\beta)$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^1 f(\beta)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + (1-\beta)f(\beta) \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1-\beta}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

取正整数 n 使得 $\alpha+\dfrac{1}{n}<\beta$. 构造函数

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant\alpha, \\ n(x-\alpha), & \alpha<x\leqslant\alpha+\dfrac{1}{n}, \\ 1, & \alpha+\dfrac{1}{n}<x\leqslant 1. \end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1-\alpha-\frac{1}{2n},\qquad \int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x = \beta-\alpha-\frac{1}{2n}.$$

因而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

故题中 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换成更大的数.

□

例题 0.20 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续的二阶导函数,$f(0)=f(1)=0,f'(1)=\dfrac{a}{2}$. 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的 f.

注 当 f 在端点的值为零,f' 在端点的值确定时, 可以考虑 f'' 与线性函数的乘积的积分.

证明 根据分部积分,Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^1 x(f''(x)-a)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x - 2a\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x - 2a\left(xf'(x)\big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{a^2}{2} \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x - 2a\left(f'(1)-f(1)+f(0)\right) + \frac{a^2}{2} \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x) = a$$

即 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$. 因为 $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$, 所以 $c = 0, b = -\frac{a}{2}$. 因此

$$f(x) = \frac{1}{2}ax(x-1).$$

□

例题 0.21 设 n 是正整数, 且 $m > 2$. 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{m\cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

注 当利用积分的可加性把区间 $[a,b]$ 上的积分分为区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的 c.

证明 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

设 $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 则有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^a tn^m\,\mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^m \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}}\right).
\end{aligned}$$

易知函数 $g(a) = \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$ 当 $a = \frac{\pi}{2n}$ 时取最小值. 于是将上面的 a 换成 $\frac{\pi}{2n}$ 可得

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{m\cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

□

例题 0.22 设 $n \geqslant 1$ 是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2}\ln n.$$

证明 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

因为当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$, 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t<\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\frac{1}{2t/\pi}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/(2n+1)}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

用数学归纳法容易证明当 $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, 有 $|\sin nt|\leqslant n\sin t$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/(2n+1)}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t&=\int_0^{\pi/(2n+1)}\left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}+\cos 2nt\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/(2n+1)}\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\\&=\int_0^{\pi/(2n+1)}2n\cos t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}<2n\sin\frac{\pi}{2n+1}+\frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\\&=\left(2n+\frac{1}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1},\end{aligned}$$

$$-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n}\left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}+\cos 2nt\right)\mathrm{d}t<-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n}\cos 2nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}\sin\frac{\pi}{2n+1}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t<\left(2n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1}<\left(2n+\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2n+1}=\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t<\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi+\frac{\pi}{2}\ln n.$$

两边同时除以 π 得:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t<\frac{2n^2+1}{2n^2+n}+\frac{1}{2}\ln n.$$

□

命题 0.6

设 f 在区间 $[0,a)$ 上有二阶连续导数, 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且 $f''(x)>0\,(0<x<a)$. 求证: 对任意 $x\in(0,a)$, 有

$$\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,\mathrm{d}t<x+\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}.\tag{21}$$

注 式 (21) 左端是弧长计算公式, 不等式 (21) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点 A 和终点 B 处的切线在曲线凸出的一侧相交于 C 点, 则直线段 AC 与 BC 的长度之和大于这条曲线段的长度.

证明 将式 (21) 右端第一项 x 移到左端, 有

$$\int_0^x\left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $f'(t)$ 和 $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$ 都是单调递增函数, 所以 $\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}$ 是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x\left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)\mathrm{d}t<\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}\cdot\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}.$$

□

例题 0.23 f 是区间 $[0,1]$ 上的正连续函数,$k\geqslant 1$. 求证:

$$\int_0^1\frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f^k(x)}\,\mathrm{d}x,\tag{22}$$

并讨论等号成立的条件.

证明 当 $k \geqslant 1$ 时, 函数 $\dfrac{t^k}{1+t}$ 和 t^{k+1} 都是单调递增的. 因此对于任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)}\left(\frac{f^k(x)}{1+f(x)}-\frac{f^k(y)}{1+f(y)}\right)\left(f^{k+1}(x)-f^{k+1}(y)\right) \geqslant 0, \tag{23}$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)}+\frac{f(y)}{1+f(x)} \leqslant \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\cdot\frac{1}{f^k(y)}+\frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)}\cdot\frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量 x, y 在区间 $[0,1]$ 上积分, 即得所证.

要使式 (22) 成为等式, 必须式 (23) 成为等式. 因此对任意 $x, y \in [0,1]$, 有 $f(x)=f(y)$, 即 f 在 $[0,1]$ 上为常数.

□

例题 0.24 设 $b \geqslant a+2$. 函数 f 在 $[a,b]$ 上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x = 1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1. \tag{24}$$

并求式 (24) 成为等式的条件.

证明 令 $g(x)=\dfrac{b-a}{1+f(x)}$, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续且 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = b-a$. 从 g 的定义可得 $f(x)=\dfrac{b-a-g(x)}{g(x)}$. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} &= \frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a}\\
&= \frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1}\right] \leqslant \frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1}\right]\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $g(x)=1$, 即 $f(x)=b-a-1$ 时成立.

□

例题 0.25 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续函数, 且在 $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ 上等于零. 又设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (h>0).$$

求证:

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 作变换 $u=t-x$, 得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-h}^{h} |f(u+x)|\,\mathrm{d}u.$$

因此

$$\int_a^b\int_{-h}^{h} |f(u+x)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h}\int_a^b |f(u+x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u.$$

作变换 $v=u+x$, 得

$$\int_a^b |f(u+x)|\,\mathrm{d}x=\int_{a+u}^{b+u}|f(v)|\,\mathrm{d}v=\begin{cases}\displaystyle\int_{a+u}^{b}|f(v)|\,\mathrm{d}v, & u\ge 0,\\ \displaystyle\int_a^{b+u}|f(v)|\,\mathrm{d}v, & u<0\end{cases}\leqslant\int_a^b|f(v)|\,\mathrm{d}v.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\int_a^b|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{-h}^{h}|f(u+x)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_a^b|f(u+x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\\&\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_a^b|f(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\int_a^b|f(v)|\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

□

例题 0.26 设 f 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续并满足

$$x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

求 f.

解 假设 f 是满足条件的连续函数, 则对式 (25) 两边求导得

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x). \tag{26}$$

由此可知,$f(1)=0$, 且当 $x\geqslant 1$ 时,f 可导. 对式 (26) 两边求导得

$$f(x)=xf(x)+2xf(x)+x^2f'(x),$$

即

$$f'(x)=\frac{1-3x}{x^2}f(x),\quad x\geqslant 1. \tag{27}$$

所以

$$|f'(x)|\leqslant 2|f(x)|. \tag{28}$$

令 $g(x)=\mathrm{e}^{-4x}f^2(x)$, 则有

$$g'(x)=2\mathrm{e}^{-4x}\left(f(x)f'(x)-2f^2(x)\right).$$

结合式(28) 可知 $g'\leqslant 0$, 这说明 g 单调递减. 因为 $g(1)=0$, 所以 $g\leqslant 0$. 但从 g 的定义知 $g\geqslant 0$. 于是 $g=0$, 从而 $f=0$.

实际上, 由(27)可解得 $f(x)=Ce^{\int_1^x\frac{1-3t}{t^2}\mathrm{d}t}=Ce^{1-\frac{1}{x}-3\ln x}$, 再将 $f(1)=0$ 代入得 $C=0$. 故 $f\equiv 0$.

总之, 原方程 (25) 的解只有 $f\equiv 0$.

□

例题 0.27 设 f 在任意有限区间上可积, 且对任意 x 及任意 $a\neq 0$ 满足

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

试求函数 f.

解 易知线性函数满足上面的式子. 下面证明满足上式的函数必是线性函数. 由条件知, 对任意 x 和 a, 有

$$\int_{x-a}^{x+a}f(t)\,\mathrm{d}t=2af(x).$$

因此

$$2af(x+y)=\int_{x+y-a}^{x+y+a}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{y+x-a}^{y+a-x}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{y+a-x}^{x+y+a}f(t)\,\mathrm{d}t=2(a-x)f(y)+2xf(y+a).$$

取 $a=1,y=0$ 就得

$$f(x)=(f(1)-f(0))x+f(0),$$

即 f 是线性函数.

□

例题 0.28 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有下界的连续函数. 若存在常数 $a \in (0,1]$ 使得

$$f(x) - a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数, 则 f 无穷可微且它的任意阶导函数都是非负的.

证明 不妨设 $m = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ (不然将 f 换为 $f-m$ 之后再证明). 此时 $f \geqslant 0$. 记

$$A = f(x) - a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{29}$$

则 $f \geqslant A$. 因此, $A \leqslant 0$. 由式 (29) 知 f 无穷可微, 且

$$f'(x) = af(x+1) - af(x). \tag{30}$$

记 $a_1 = a$, 则

$$f'(x) + a_1 f(x) \geqslant 0.$$

假设存在 $a_n > 0$ 使得

$$f'(x) + a_n f(x) \geqslant 0. \tag{31}$$

则 $(e^{a_n x} f(x))' \geqslant 0$. 这说明函数 $e^{a_n x} f(x)$ 是递增的. 由式 (29) 可得

$$\begin{aligned}
f(x) &\leqslant a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = a\int_x^{x+1} e^{a_n t} f(t) e^{-a_n t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant a e^{a_n(x+1)} f(x+1)\int_x^{x+1} e^{-a_n t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{a_n}-1}{a_n} a f(x+1) \\
&= \frac{e^{a_n}-1}{a_n}(f'(x) + af(x)).
\end{aligned}$$

由此可得

$$f'(x) + a_{n+1} f(x) \geqslant 0, \tag{32}$$

其中

$$a_{n+1} = a - \frac{a_n}{e^{a_n}-1}.$$

若 $a_{n+1} \leqslant 0$, 则由 (32) 得 $f' \geqslant 0$. 若 $a_{n+1} > 0$, 则接着可构造 a_{n+2}. 若 $\{a_n\}$ 均为正的, 则 $\{a_n\}$ 为递减正数列, 设其极限为 $r \geqslant 0$. 若 $r > 0$, 则从上式得 $r = a - \frac{r}{e^r - 1}$, 即 $a = \frac{re^r}{e^r-1} > 1$. 这与条件不符, 因此必有 $r = 0$. 在式 (31) 中令 $n \to +\infty$, 即得对一切 x 有 $f'(x) \geqslant 0$. 注意到

$$f^{(n)}(x) - a\int_x^{x+1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad n = 1,2,\cdots,$$

因而将前面的 f 换为 f', 可以得到 $f''(x) \geqslant 0$, 依次可以证明 $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

□

例题 0.29 求所有连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意正整数 n, 有

$$n^2\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = nf(x) + \frac{1}{2}.$$

解 设 f 是要求的一个连续函数, 则 f 是可导的且

$$n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x). \tag{33}$$

由此知 f 二阶可导, 且

$$n\left[f'\left(x+\frac{1}{n}\right) - f'(x)\right] = f''(x). \tag{34}$$

将 (33) 中的 n 换成 $2n$, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{2n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{35}$$

将上式中的 x 换成 $x+\dfrac{1}{2n}$ 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right). \tag{36}$$

将式 (33) 两边乘以 2 再减去式 (35) 两边, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'(x). \tag{37}$$

从式 (36) 和式 (37) 得

$$f'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right),\quad \forall n\in\mathbb{Z}^{+},\forall x\in\mathbb{R}.$$

由(34)式可知 $f''=0$. 因而存在常数 a,b 使得 $f(x)=ax+b$. 代入题设条件可得 $a=1$. 于是 $f(x)=x+b$, 这里 b 是任意常数.

□

例题 0.30 设 $f\in C[-1,1]$ 且对任意整数 n 满足

$$\int_0^1 f(\sin(nx))\,\mathrm{d}x=0. \tag{38}$$

求证: 对任意 $x\in[-1,1]$ 有 $f(x)=0$.

证明 在式 (38) 中取 $n=0$, 可得 $f(0)=0$. 对任意非零整数 n, 将式 (38) 中的积分作变换 $t=nx$ 可得

$$\int_0^n f(\sin t)\,\mathrm{d}t=0.$$

令

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

则 F 可导, 且 $F(n)=0$. 对整数 k 有

$$\begin{aligned}F(x+2k\pi)&=\int_{x+2k\pi}^{x+2k\pi+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1} f(\sin(t+2k\pi))\,\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t=F(x).\end{aligned}$$

因而 $F(n+2k\pi)=F(n)=0$. 这说明 F 在集合 $A=\{n+2k\pi\mid n,k\in\mathbb{Z}\}$ 上取值为 0. 由于集合 A 在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的, 由 F 的连续性可知 $F(x)=0\,(x\in\mathbb{R})$. 于是

$$F'(x)=f(\sin(x+1))-f(\sin x)=0.$$

这说明 $f(\sin x)$ 是以 1 和 2π 为周期的连续函数. 仍由集合 A 的稠密性可知 $f(\sin x)$ 是常数. 因此 f 在 $[-1,1]$ 上是常数. 故 $f(x)=f(0)=0$.

□

例题 0.31 设 f 是 $[0,2\pi]$ 上可导的凸函数, f' 有界, 试证

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

证明 因为 f 是可导的凸函数, 所以 f' 是单调递增的函数. 由 f' 的单调有界性, 知 f' 在 $[0,2\pi]$ 上可积. 根据分部

积分公式, 得

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = f(x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\sin\left((k-1)\pi+x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)(-1)^{k-1}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(f'\left(x+\frac{(2k-2)\pi}{n}\right) - f'\left(x+\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\right)\sin x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

注意到 f' 是单调递增的, 即知 $a_n \geqslant 0$.

□

例题 0.32 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, $f(0)=0$. 求证:

$$
\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x, \tag{39}
$$

且右边的系数 4 是最佳的.

证明 证法一:因为

$$
f'(x) = x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)' + \frac{f(x)}{2x},
$$

所以

$$
\left(f'(x)\right)^2 = \left[x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)'\right]^2 + \left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2} \geqslant \left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2}.
$$

因而

$$
\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}f^2(1) + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2}\mathrm{d}x,
$$

即所证不等式 (39) 成立.

若存在常数 $c\in(0,4)$ 使得

$$
\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant c\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x \tag{40}
$$

对任意满足条件的 f 成立, 则对 $\delta\in(0,1)$ 取

$$
f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x\in[\delta,1], \\ \dfrac{3}{2\sqrt{\delta}}x - \dfrac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x^2, & x\in[0,\delta). \end{cases}
$$

此时, 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^\delta \left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x\right)^2\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\delta \left(\frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{2\delta^2} + \frac{x^2}{4\delta^3}\right)\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{19}{12} + \int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_0^\delta \left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}}x\right)^2 \mathrm{d}x + \int_\delta^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\delta \left(\frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{\delta^3}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{13}{12} + \frac{1}{4}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此式(40)导致

$$\left(1 - \frac{c}{4}\right)\int_\delta^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{13}{12}c - \frac{19}{12}.$$

此式当 δ 充分小时是不成立的. 这个矛盾说明 4 是最佳的.

证法二: 利用 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 f'(xt)\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(xt)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \xlongequal{\text{换元}} \int_0^1 \left(\frac{\int_0^t |f'(x)|^2\mathrm{d}x}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

从上式推导可以看出, 对于不恒为零的 f, 严格不等号成立.

为说明相关常数不可改进, 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 考察不恒为零的 $\bar{f} \in C[\varepsilon, 1]$ 使得

$$\frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|\bar{f}(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^1 |\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x} = \lambda \equiv \sup_{\substack{f\in C[\varepsilon,1] \\ f\neq 0}} \frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_\varepsilon^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

这样的 $\bar{f}$ 的存在性一般需要用泛函分析. 这里只作形式推导. 任取 $\varphi \in C_c^1(\varepsilon, 1)$, 则

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|\bar{f}(x)+s\varphi(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_\varepsilon^1 |\bar{f}'(x)+s\varphi'(x)|^2\mathrm{d}x}\Bigg|_{s=0} \\ &= \frac{2\lambda}{\int_\varepsilon^1 |\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\lambda}\int_\varepsilon^1 \frac{\bar{f}(x)\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^1 \bar{f}'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2\lambda}{\int_\varepsilon^1 |\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x}\int_\varepsilon^1 \left(\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda}\frac{\bar{f}(x)}{(x+\varepsilon)^2}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此, 尝试寻找 $\bar{f}$ 满足

$$\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda}\frac{\bar{f}(x)}{x^2} = 0, \quad x \in [\varepsilon, 1].$$

若取 $\alpha \in (0,1)$, 则 $\bar{f}(x) = x^\alpha$ 满足上述方程. 对应的 $\lambda = \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$, 为使得 λ 最大, 取 $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

以上讨论启发我们考虑

$$f'_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

则

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

直接计算得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^1 \frac{|f_\varepsilon(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^1 |f_\varepsilon'(x)|^2\mathrm{d}x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{4}-\ln\varepsilon-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{\ln\varepsilon}{4}}=4.$$

这就表明不等式中的常数 4 是最佳的.

□

例题 0.33 设 $f,g:[a,b]\to(0,+\infty)$ 都是连续函数, 且 $f\neq g$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 定义数列

$$I_n=\int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,\cdots$$

求证:$\{I_n\}$ 严格单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

证明 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}\cdot\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\&=\left(\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

即 $I_0\leqslant I_1$, 等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}=c\sqrt{g(x)}$, 即 $f(x)=cg(x)$. 再由条件 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 可得 $c=1$. 这与 $f\neq g$ 矛盾, 故 $I_0<I_1$.

假设 $I_0<I_1<\cdots<I_n$, 根据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_a^b\frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)}\cdot g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_a^b\left(\frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+1}{n+2}}\left(\int_a^b\left(g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x)\right)^{n+2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+2}}\\&=I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}}\cdot I_0^{\frac{1}{n+2}}<I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}}\cdot I_n^{\frac{1}{n+2}}\end{aligned}$$

因而 $I_n<I_{n+1}$, 这样, 根据数学归纳法原理, 就证明了 $\{I_n\}$ 严格单调递增.

若对任意 $x\in(a,b)$, 有 $g(x)\geqslant f(x)$, 则 $g(x)-f(x)\geqslant 0$. 根据条件 $g(x)-f(x)$ 连续且满足 $\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x=0$, 这可推出 $f=g$, 与条件矛盾! 因此必存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>g(x_0)$, 因而存在正数 $\delta<\min\{x_0-a,b-x_0\}$ 使得

$$f(x)>g(x),\quad x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$$

记 $m=\min\limits_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $m>1$, 因此

$$I_n\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n f(x)\mathrm{d}x\geqslant m^n\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x$$

令 $n\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.

□

例题 0.34 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 定义 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (x\in\mathbb{R})$. 如果 g 是 $\mathbb{R}$ 上的递减函数, 求证:$f\equiv 0$.

证明 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 F 可导且 $F'=f$. 由条件知

$$(F^2(x))'=2F'(x)F(x)=2g(x)$$

是单调递减函数. 注意到 $F(0)=0$. 有 $(F^2(x))'\leqslant 0\,(x>0)$,$(F^2(x))'\geqslant 0\,(x<0)$. 这说明 $F^2(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时单调递减, 当 $x\leqslant 0$ 时单调递增. 因此 F^2 的最大值为 $F^2(0)=0$. 但显然 $F^2\geqslant 0$. 故 $F=0$, 于是 $f=F'=0$.

□

例题 0.35 设 $f \in C[0,1]$. 如果对任意 $x \in [0,1]$ 有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

求证:$f(x) \equiv 0$.

证明 记 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则 F 可导且 $F' = f$. 由条件知 $F(x) \geqslant F'(x)$. 因此 $(\mathrm{e}^x F(x))' \leqslant 0$, 即 $\mathrm{e}^x F(x)$ 单调递减. 由 $F(0) = 0$, 得 $F(x) \leqslant 0$. 但由条件 $F(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$, 故 $F(x) = 0$, 于是 $f(x) = F'(x) = 0$.

□

命题 0.7

设 $g(x) \in C^2[0,1]$ 是递增的下凸函数, 则有

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^x f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(x)-g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{41}$$

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{42}$$

笔记 这题的下确界 inf 可以改成最小值 min, 因为可取到等号.

证明 我们令

$$F(x) = \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y + g(x),$$

则 $F(x^2) \geqslant F(x), \forall x \in [0,1]$, 因此由 F 连续性, 就有

$$F(x) \geqslant F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \geqslant F\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \geqslant \cdots \geqslant \lim_{n\to\infty} F\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = F(1), \forall x \in (0,1],$$

于是我们有 $F(x) \geqslant F(1), \forall x \in [0,1]$, 现在就有

$$\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(1) - g(x), \forall x \in [0,1],$$

因此

$$\left\{\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x : f \in C[0,1], \int_{x^2}^x f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant g(x) - g\left(x^2\right)\right\} \subset \left\{\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x : f \in C[0,1], \int_{x^2}^1 f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant g(1) - g\left(x^2\right)\right\}.$$

故

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^x f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(x)-g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

取 $f(y) = g'(y)$, 可以知道(41)(42)式等号都成立. 从而

$$\int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^x f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(x)-g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

故只须证明

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \text{对}\forall f \in C[0,1] \text{且} \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant g(1) - g(x), \text{都有} \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

于是设 $f \in C[0,1]$ 且 $\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y$, 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 |g'(x)|^2 \mathrm{d}x \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - \int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&\geqslant \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 (g(1)-g(x))g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - g'(0)(g(1)-g(0)) + \int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\\
&\geqslant \left(\int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}
$$

因此 $\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x$. 这样我们就完成了证明.

□

例题 0.36 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$, 都有

1. $\int_{x^2}^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2-x^4}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{10}$.
2. $\int_{x^2}^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^3-x^6}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{9}{20}$.

证明

1. 证法一:由命题 0.7可得

$$
\inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^x f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{x^2-x^4}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{1-x^2}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}
$$

证法二:注意到

$$
\int_0^1 \left(\sqrt{t}-t\right) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\int_t^{\sqrt{t}} f(t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\int_{x^2}^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{15}.
$$

从而待定 $a>0$,

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^1 \left[af(x) - \left(\sqrt{t}-t\right)\right]^2\mathrm{d}x\\
&= a^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2a\int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right) f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right)^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant a^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \frac{2}{15}a + \frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{15a} - \frac{1}{30a^2}.
$$

当 $a=2$ 时, 上式右边取到最大值 $\frac{2}{15}$. 故

$$
\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.
$$

证法三: 条件可得, 对 $\forall a\in(0,1)$, 都有

$$
\int_{a^{2^n}}^a f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{a^{2^k}}^{a^{2^{k-1}}} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{a^{2^k}-a^{2^{k+1}}}{2} = \frac{a^2-a^{2^{n+1}}}{2}.
$$

于是

$$
\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{a^{2^n}}^a f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{a^2}{2}.
$$

进而

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}.$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

2. 由命题 0.7可得

$$\inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{x^3-x^6}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{1-x^3}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{9}{20}$$

□

例题 0.37 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 记 $a_k = \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x, k = 1, 2, \cdots, n$. 若存在 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $a_k = 0$, 则结论显然成立. 下设 $a_k > 0, k = 1, 2, \cdots, n$.

于是由均值不等式可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x}{a_k} = 1.$$

故由积分不等式知, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

□