0.1 同时合同对角化

命题 0.1 (同时合同对角化)

设 A 是 n 阶正定实对称矩阵,B 是同阶实对称矩阵, 求证: 必存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \tag{1}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值.

证明 因为 A 正定, 故存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP = I_n$. 由于 $P'BP$ 仍为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q'(P'BP)Q = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

令 $C = PQ$, 则 C 满足(1)式的要求. 注意到

$$C'(\lambda A - B)C = \lambda I_n - C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \cdots, \lambda - \lambda_n\},$$

故 λ_i 是多项式 $|\lambda A - B|$ 的根, 又 A 可逆, 所以也是 $|\lambda I_n - A^{-1}B|$ 的根, 即为 $A^{-1}B$ 的特征值.

□

命题 0.2

设 A 是 n 阶半正定实对称矩阵,B 是 n 阶半正定实对称矩阵. 求证:

$$|A + B| \geqslant |A| + |B|,$$

等号成立的充要条件是 $n = 1$ 或当 $n \geqslant 2$ 时,$B = O$.

注 这个命题 0.2也可通过与命题??和命题??完全类似的讨论来得到, 具体的细节留给读者完成.

证明 不妨设 A 是正定矩阵, 否则用 $A + tI_n$ 摄动即可. 由命题 0.1可知, 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

因为 B 半正定, 故 $C'BC$ 也半正定, 从而 $\lambda_i \geqslant 0$. 注意到

$$\begin{aligned} |C'||A + B||C| &= |C'AC + C'BC| = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \cdots (1 + \lambda_n) \\ &\geqslant 1 + \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |C'AC| + |C'BC| = |C'|(|A| + |B|)|C|, \end{aligned}$$

故有 $|A + B| \geqslant |A| + |B|$, 等号成立当且仅当 $n = 1$ 或当 $n \geqslant 2$ 时, 所有的 $\lambda_i = 0$, 这也当且仅当 $n = 1$ 或当 $n \geqslant 2$ 时,$B = O$.

□

命题 0.3

设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证:

$$|A + B| \geqslant 2^n |A|^{\frac{1}{2}} |B|^{\frac{1}{2}},$$

等号成立的充要条件是 $A = B$.

证明 不妨设 A 是正定矩阵, 否则用 $A + tI_n$ 摄动即可. 由命题 0.1可知, 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

因为 B 正定, 故 $C'BC$ 也正定, 从而 $\lambda_i > 0$. 注意到

$$\begin{aligned} |C'||A + B||C| &= |C'AC + C'BC| = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \cdots (1 + \lambda_n) \geqslant 2\sqrt{\lambda_1} \cdot 2\sqrt{\lambda_2} \cdots 2\sqrt{\lambda_n} \\ &\geqslant 2^n \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = 2^n |C'AC|^{\frac{1}{2}} |C'BC|^{\frac{1}{2}} = |C'|(2^n |A|^{\frac{1}{2}} |B|^{\frac{1}{2}})|C|, \end{aligned}$$

故 $|A + B| \geqslant 2^n |A|^{\frac{1}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}$, 等号成立当且仅当所有的 $\lambda_i = 1$, 也当且仅当 $A = B$.

□

例题 0.1 设 A,B 都是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $A \geqslant B$, 求证:$B^{-1} \geqslant A^{-1}$.

证明 由命题 0.1可知, 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

因为 B 正定, 故 $C'BC$ 也正定, 从而 $\lambda_i > 0$. 一方面, 我们有

$$C'(A-B)C = \mathrm{diag}\{1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n\},$$

因为 $A-B$ 半正定, 故 $\lambda_i \leqslant 1$, 从而 $\lambda_i^{-1} \geqslant 1$. 另一方面, 我们有

$$C^{-1}A^{-1}(C')^{-1} = I_n, \quad C^{-1}B^{-1}(C')^{-1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}\},$$

于是

$$C^{-1}(B^{-1}-A^{-1})(C^{-1})' = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1}-1, \lambda_2^{-1}-1, \cdots, \lambda_n^{-1}-1\}$$

为半正定阵, 因此 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是半正定阵.

□

例题 0.2 设 A,B 都是 n 阶正定实对称矩阵, 满足 $A \geqslant B$, 求证:$A^{\frac{1}{2}} \geqslant B^{\frac{1}{2}}$.

证明 由命题 0.1可知, 存在可逆矩阵 C, 使得

$$(C^{-1})'A^{\frac{1}{2}}C^{-1} = I_n, \quad (C^{-1})'B^{\frac{1}{2}}C^{-1} = \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

因为 $B^{\frac{1}{2}}$ 正定, 故 $(C^{-1})'B^{\frac{1}{2}}C^{-1}$ 也正定, 从而 $\lambda_i > 0$. 设正定阵 $CC' = D = (d_{ij})$, 则 $d_{ii} > 0$. 注意到 $A^{\frac{1}{2}} = C'C$,$B^{\frac{1}{2}} = C'\Lambda C$, 故有

$$A - B = (C'C)^2 - (C'\Lambda C)^2 = C'(D - \Lambda D\Lambda)C \geqslant O,$$

于是 $D - \Lambda D\Lambda$ 是半正定阵, 从而其 (i,i) 元素 $d_{ii}(1-\lambda_i^2) \geqslant 0$, 故 $0 < \lambda_i \leqslant 1$. 因此

$$A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}} = C'(I_n - \Lambda)C = C'\mathrm{diag}\{1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n\}C \geqslant O,$$

从而结论得证.

□

例题 0.3 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 其中 A 正定且 B 与 $A-B$ 均半正定, 求证:$|\lambda A - B| = 0$ 的所有根全落在 $[0,1]$ 中, 并且 $|A| \geqslant |B|$.

注 这一不等式也可由命题 0.2的半正定版本得到.

证明 由命题 0.1可知, 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

其中 λ_i 是矩阵 $A^{-1}B$ 的特征值, 即是 $|\lambda A - B| = 0$ 的根. 因为 B 半正定, 故 $C'BC$ 也半正定, 从而 $\lambda_i \geqslant 0$. 因为 $A-B$ 半正定, 故 $C'(A-B)C = \mathrm{diag}\{1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n\}$ 也半正定, 从而 $\lambda_i \leqslant 1$, 因此 $|\lambda A - B| = 0$ 的所有根 λ_i 全落在 $[0,1]$ 中. 由 $|A^{-1}B| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \leqslant 1$ 可得 $|A| \geqslant |B|$.

□

例题 0.4 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵,B 是 $s \times n$ 实矩阵, 又假设它们都是行满秩的. 令 $M = AB'(BB')^{-1}BA'$, 求证:M 和 $AA' - M$ 都是半正定阵, 并且 $|M| \leqslant |AA'|$.

证明 设 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 则 $CC' = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}(A', B') = \begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB' \end{pmatrix}$ 是半正定阵. 因为 A,B 都是行满秩阵, 故由命题**??**可得 AA',BB' 都是正定阵, 从而 $(BB')^{-1}$ 也是正定阵, 于是 $M = AB'(BB')^{-1}BA'$ 是半正定阵. 对矩阵 CC' 实施对称分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AA' - AB'(BB')^{-1}BA' & O \\ BA' & BB' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AA' - M & O \\ O & BB' \end{pmatrix},$$

由此即得 $AA'-M$ 是半正定阵. 再由命题 0.2或例题 0.3即得

$$|M| \leqslant |AA'-M|+|M| \leqslant |AA'-M+M| = |AA|.'$$

□

命题 0.4 (两个半正定阵可同时合同对角化)

设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = \mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\},\ C'BC = \mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_r,\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}.$$

注 命题 0.1的结论一般并不能推广到一个是半正定阵, 另一个是实对称矩阵的情形. 例如,$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 经过简单的计算可知 A,B 不能同时合同对角化. 不过这个命题 0.4告诉我们, 若 A,B 都是半正定阵, 则它们可以同时合同对角化.

证明 因为 A 是半正定阵, 故存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 此时 $P'BP = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ 仍是半正定阵. 由命题??可知 $\mathrm{r}(B_{21},B_{22}) = \mathrm{r}(B_{22})$, 故存在实矩阵 M, 使得 $B_{21} = B_{22}M$. 考虑两个矩阵如下的同时合同变换:

$$\begin{pmatrix} I_r & -M' \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ -M & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}-M'B_{22}M & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_r & -M' \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ -M & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

由于 $B_{11}-M'B_{22}M$ 和 B_{22} 都是半正定阵, 故存在正交矩阵 Q_1,Q_2, 使得

$$Q_1'(B_{11}-M'B_{22}M)Q_1 = \mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}, Q_2'B_{22}Q_2 = \mathrm{diag}\{\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}.$$

令 $C = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ -M & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$, 则 C 是可逆矩阵, 使得

$$C'AC = \mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}, C'BC = \mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_r,\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}.$$

□

命题 0.5

设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证:

(1) $A+B$ 是正定阵的充要条件是存在 n 个线性无关的实列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 以及指标集 $I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $\alpha_i'A\alpha_j = \alpha_i'B\alpha_j = 0\ (\forall i \neq j)$,$\alpha_i'A\alpha_i > 0\ (\forall i \in I)$,$\alpha_j'B\alpha_j > 0\ (\forall j \notin I)$;

(2) $\mathrm{r}(A \mid B) = \mathrm{r}(A+B)$.

证明 (1) 在命题 0.4中, 令 $C = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为其列分块, 由此即得结论.

(2) 证明 $\mathrm{r}(A \mid B) = \mathrm{r}(A+B)$ 有 3 种方法.

第一种是利用线性方程组的求解理论, 其讨论过程类似于命题??的证法一.

第二种方法是直接利用命题??的结论, 请参考命题??的证明.

第三种方法是直接利用命题 0.4的结论, 有 $\mathrm{r}(A \mid B) = \mathrm{r}(C'AC \mid C'BC)$, 此时 $C'AC$ 和 $C'BC$ 都是半正定对角矩阵. 若 $C'AC$ 和 $C'BC$ 同一行的主对角元全为零, 则 $(C'AC \mid C'BC)$ 和 $C'(A+B)C$ 的这一行都是零向量, 对求秩不起作用; 若 $C'AC$ 和 $C'BC$ 同一行的主对角元至少有一个大于零, 则 $(C'AC \mid C'BC)$ 和 $C'(A+B)C$ 的这一行对求秩都起了加 1 的作用, 因此 $\mathrm{r}(A \mid B) = \mathrm{r}(C'AC \mid C'BC) = \mathrm{r}(C'(A+B)C) = \mathrm{r}(A+B)$.

□

命题 0.6

设 A,B,C 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 使得 ABC 是对称矩阵, 即满足 $ABC=CBA$, 求证:ABC 是半正定阵.

证明 由命题 0.4可知, 存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$,$P'CP=\mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_r,\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}$. 注意到问题的条件和结论在合同变换 $A\mapsto P'AP$,$B\mapsto P^{-1}B(P^{-1})'$,$C\mapsto P'CP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设

$$A=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & O\\ O & \Lambda_2\end{pmatrix},$$

其中 $r=\mathrm{r}(A)$,$\Lambda_1=\mathrm{diag}\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$,$\Lambda_2=\mathrm{diag}\{\mu_{r+1},\cdots,\mu_n\}$ 都是半正定对角矩阵. 设 $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ 为对应的分块, 则由 $ABC=\begin{pmatrix}B_{11}\Lambda_1 & B_{12}\Lambda_2\\ O & O\end{pmatrix}$ 是对称矩阵可知,$B_{11}\Lambda_1$ 是对称矩阵且 $B_{12}\Lambda_2=O$. 由 B 半正定可得 B_{11} 半正定, 再由命题**??**的半正定版本可知 $B_{11}\Lambda_1$ 是半正定阵, 因此 $ABC=\mathrm{diag}\{B_{11}\Lambda_1,O\}$ 也是半正定阵.

□