0.1 中值定理及推广

定理 0.1 (积分中值定理)

(1) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx.$$

(2) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$$

(3) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx + g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$$

(4) $f(x) \in R[a,b]$ 且不变号,$g(x) \in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta\int_a^b f(x)dx.$$

(5) $f(x) \in R[a,b]$ 且不变号,$g(x) \in C[a,b]$, 则存在 $\zeta \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\zeta)\int_a^b f(x)dx.$$

(6) 若 (1),(2),(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta \in (a,b)$.

♡

定理 0.2 (Hadamard 不等式)

f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

♡

笔记 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间 $[0,1]$。

证明 由 f 在 $[a,b]$ 上下凸, 一方面, 我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(a(1-t)+bt)dt \leqslant \int_0^1 [(1-t)f(a)+tf(b)]dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [f(a+b-x)+f(x)]dx \\ &\geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

故结论成立. □

定理 0.3 (达布中值定理/导数介值定理)

设 $f \in D[a,b]$, 对任何介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的 η, 存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f'(c) = \eta$.

♡

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理。即不妨设 $f'(a) < 0 < f'(b)$, 去找 $c \in [a,b]$ 使得 $f'(c) = 0$。事实上由极限保号性和

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < 0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b) > 0,$$

我们知道存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) < f(a), \forall x \in (a, a+\delta], f(x) < f(b), \forall x \in [b-\delta, b).$$

因此 f 最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的导数为 0, 从而证毕! □

定理 0.4 (加强的 Rolle 中值定理)

(a)：设 $f \in D(a,b)$ 且在 $[a,b]$ 上 f 有介值性，则若 $f(a)=f(b)$，必然存在 $\theta \in (a,b)$，使得 $f'(\theta)=0$。

(b)：设 $f \in C[a,+\infty) \cap D^1(a,+\infty)$ 满足 $f(a)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$，则存在 $\theta \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$。

♡

笔记 一旦罗尔成立，所有中值定理和插值定理都会有类似的结果，可以具体情况具体分析。

证明 对于 (a)：不妨设 f 不恒为常数，则可取 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f(x_0) \neq f(a)$，不妨设 $f(x_0) > f(a)$，则由 f 的介值性，我们知道存在 $x_1 \in (a,x_0), x_2 \in (x_0,b)$，使得

$$f(x_1)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2}, f(x_2)=\frac{f(b)+f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a)=f(b)$，我们知道 $f(x_1)=f(x_2)$，由罗尔中值定理可知道存在 $\theta \in (a,b)$，使得 $f'(\theta)=0$。这就完成了 (a) 的证明。对于 (b)：若对任何 $x \in (0,+\infty)$ 使得 $f'(x) \neq 0$，则 f 在 $[0,+\infty)$ 严格单调，不妨设为递增。现在

$$f(x) \geqslant f(a+1) > f(a), \forall x \geqslant a+1,$$

于是

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty} f(x) \geqslant f(a+1) > f(a),$$

这就是一个矛盾！因此我们证明了存在 $\theta \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$。 □