0.1 环的局部化

定义 0.1 (乘法子集)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $S\subset R$. 则我们称 S 是一个**乘法子集**, 若 S 是 $(R\setminus\{0\},\cdot)$ 的（乘法）子幺半群, 即

$$0\notin S, 1\in S,$$
$$\forall a,b\in S, ab\in S.$$

♣

定义 0.2 ((交换) 环的局部化)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的**局部化**, 记作 $(S^{-1}R,+,\cdot)$, 定义为

$$S^{-1}R=\left\{\frac{r}{s}:r\in R,s\in S\right\}/\sim$$

其中

$$\frac{r}{s}\sim\frac{r'}{s'}\iff\exists t\in S,t(rs'-r's)=0$$

若 $r,r'\in R,s,s'\in S$, 我们定义

$$\frac{r}{s}+\frac{r'}{s'}=\frac{rs'+sr'}{ss'},$$
$$\frac{r}{s}\frac{r'}{s'}=\frac{rr'}{ss'}.$$

♣

证明 我们先证明 $\sim$ 是个等价关系, 再证明加法和乘法是良定义的.

第一, 我们来证明 $\sim$ 是个等价关系.$r/s\sim r/s$ 是显然的, 这是因为 $1(rs-rs)=0(1\in S)$. 若 $r/s\sim r'/s'$, 则存在 $t\in S$, 使得

$$t(rs'-r's)=0.$$

则

$$(-t)(r's-rs')=0.$$

故 $r'/s'\sim r/s$. 最后, 如果 $r/s\sim r'/s'$,$r'/s'\sim r''/s''$, 只须证明 $r/s\sim r''/s''$. 我们取 $t,t'\in S$, 使

$$t(rs'-r's)=0,$$
$$t'(r's''-r''s')=0.$$

则我们可以通过不断的尝试, 凑出一个美妙的 $t''=tt's'$. 于是 $t''(rs''-r''s)=0$, 这是因为

$$(tt's')rs''=t's''(trs')=t's''(tr's)=ts(t'r's'')=ts(t'r''s')=(tt's')r''s.$$

由于 S 是乘法子群, 故 $t''=tt's'\in S$. 接下来, 即使局部化中的每个元素实际上是等价类, 我们还是为了方便起见, 用等号来代替所有的等价号.

第二, 我们来证明加法和乘法是良定义的. 假设

$$\frac{r_1}{s_1}\sim\frac{r_1'}{s_1'}.$$
$$\frac{r_2}{s_2}\sim\frac{r_2'}{s_2'}.$$

故存在 $t,t'\in S$, 使得

$$t(r_1s_1'-r_1's_1)=0,$$
$$t'(r_2s_2'-r_2's_2)=0.$$

我们只须证明

$$\frac{r_1}{s_1}+\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1s_2+r_2s_1}{s_1s_2}\sim\frac{r_1's_2'+r_2's_1'}{s_1's_2'}=\frac{r_1'}{s_1'}+\frac{r_2'}{s_2'},$$
$$\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1r_2}{s_1s_2}\sim\frac{r_1'r_2'}{s_1's_2'}=\frac{r_1'}{s_1'}\cdot\frac{r_2'}{s_2'}.$$

重新分组, 对于 $tt'\in S$, 我们有

$$\begin{aligned}&tt'\left((r_1s_2+r_2s_1)s_1's_2'-(r_1's_2'+r_2's_1')s_1s_2\right)\\ =&tt'\left((r_1s_1'-r_1's_1)s_2s_2'+(r_2s_2'-r_2's_2)s_2s_1'\right)\\ =&0+0=0.\end{aligned}$$

根据拆项补项, 同样对于 $tt'\in S$, 我们有

$$\begin{aligned}&tt'(r_1r_2s_1's_2'-r_1'r_2's_1s_2)\\ =&tt'(r_1r_2s_1's_2'-r_1'r_2s_1s_2')+tt'(r_1'r_2s_1s_2'-r_1'r_2's_1s_2)\\ =&tt'(r_1s_1'-r_1's_1)r_2s_2'+tt'(r_2s_2'-r_2's_2)r_1's_1\\ =&0+0=0.\end{aligned}$$

□

命题 0.1 ((交换) 环的局部化的基本性质)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的局部化, 即 $(S^{-1}R,+,\cdot)$ 满足

(1) 若 $s\in S$, 则 $\dfrac{s}{s}\sim\dfrac{1}{1}$.

(2) 若 $r,s,s'\in S$, 则 $\dfrac{rs'}{ss'}\sim\dfrac{r}{s}$.

证明

(1) 因为 $1\cdot(s\cdot 1-1\cdot s)=0$, 所以根据(交换) 环的局部化的定义可知 $\dfrac{s}{s}\sim\dfrac{1}{1}$.

(2) 因为 $1\cdot(rs's-ss'r)=0$, 所以根据(交换) 环的局部化的定义可知 $\dfrac{rs'}{ss'}\sim\dfrac{r}{s}$.

□

命题 0.2 ((交换) 环的局部化还是交换环)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的局部化, 即 $(S^{-1}R,+,\cdot)$, 是个交换环.

证明 根据定义, 加法和乘法的封闭性和交换律是显然的. 而加法单位元是 $0/1$, 乘法单位元是 $1/1$, 因为对于任何 $r/s\in S^{-1}R$, 我们有

$$\frac{0}{1}+\frac{r}{s}=\frac{0s+1r}{1s}=\frac{r}{s},$$
$$\frac{1}{1}\cdot\frac{r}{s}=\frac{1r}{1s}=\frac{r}{s}.$$

乘法的结合律是显然的, 而加法的结合律也很简单, 我们很容易检验

$$\left(\frac{r_1}{s_1}+\frac{r_2}{s_2}\right)+\frac{r_3}{s_3}=\frac{r_1s_2s_3+s_1r_2s_3+s_1s_2r_3}{s_1s_2s_3}=\frac{r_1}{s_1}+\left(\frac{r_2}{s_2}+\frac{r_3}{s_3}\right).$$

加法的逆元也是显然的.r/s 的加法逆元当然是 $(-r)/s$.

最后, 我们只须证明乘法对加法的分配律. 令 $r_1/s_1,r_2/s_2,r_3/s_3\in S^{-1}R$, 则我们很容易检验

$$\frac{r_1}{s_1}\cdot\left(\frac{r_2}{s_2}+\frac{r_3}{s_3}\right)=\frac{r_1(r_2s_3+r_3s_2)}{s_1s_2s_3}=\frac{r_1r_2s_3}{s_1s_2s_3}+\frac{r_1r_3s_2}{s_1s_2s_3}=\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}+\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_3}{s_3}.$$

综上所述, 我们就证明了 R 对 S 的局部化 $S^{-1}R$ 是个交换环. □

命题 0.3

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个整环, 而 S 是一个乘法子集, 则

$$\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d}\iff ad-bc=0.$$

证明 先证充分性. 假如 $ad-bc=0$, 那么我们取 $s=1$, 则 $1(ad-bc)=1\cdot 0=0$, 这就证明了

$$\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d}.$$

再证必要性. 假如 $a/b=c/d$, 则存在 $s\in S$, 使得 $s(ad-bc)=0$. 由 S 是一个乘法子集可知,$s\neq 0$. 可是因为 R 是个整环, 所以 $ad-bc=0$.

这就证明了这个命题. □

命题 0.4

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个整环, 则 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集.

证明 显然 $0\notin R/\{0\}$. 因为 R 是整环, 所以 $R\neq\{0\}$, 从而由命题??可知 $0\neq 1$, 故 $1\in R/\{0\}$. 对 $\forall a,b\in R/\{0\}$, 都有 $a,b\neq 0$. 于是 $ab\neq 0$, 否则, 由 R 是整环可知一定有 $a=0$ 或 $b=0$ 矛盾! 又因为 $a,b\in R$, 而 R 对乘法封闭, 所以 $ab\in R$. 又 $ab\neq 0$, 故 $ab\in R/\{0\}$. 因此 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集. □

定义 0.3 (分式域)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个整环, 我们定义 R 上的**分式域**, 记作 $\mathrm{Frac}(R)$, 定义为 $(S^{-1}R,+,\cdot)$, 其中 $S=R\setminus\{0\}$.

笔记 由命题 0.4可知 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集, 从而 $\mathrm{Frac}(R)$ 实际上就是 R 对 $R/\{0\}$ 的局部化 (最大的局部化).

命题 0.5 (分式域是域)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个整环, 则 R 上的分式域 $\mathrm{Frac}(R)$ 是个域. 进而,$\mathrm{Frac}(R)$ 是 R 的子环.

证明 令 $S=R\setminus\{0\}$.

由(交换) 环的局部化还是交换环可知 $\mathrm{Frac}(R)=S^{-1}R$ 是个交换环, 因此只须证明对任意非零元素

$$\frac{r}{s}\in S^{-1}R$$

我们都能找到逆元即可.

而这是因为由

$$\frac{r}{s}\neq 0$$

我们可以得知 $r\neq 0$.

因此,

$$\frac{s}{r}\in S^{-1}R$$

而且

$$\frac{r}{s}\frac{s}{r}=\frac{s}{r}\frac{r}{s}=\frac{sr}{sr}=\frac{1}{1}=1$$

这就证明了 $\mathrm{Frac}(R)$ 是个域. 进而, $\mathrm{Frac}(R)$ 对单位元、加法、乘法和逆元都封闭. 又因为 $S\subset R$, 所以 $S^{-1}R\subset R$, 故 $\mathrm{Frac}(R)$ 就是 R 的一个子环. □

引理 0.1

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个整环,$s\in R/\{0\}$, 则由 s 生成的乘法子幺半群 $\langle s\rangle$ 是 R 的一个乘法子集.

证明 由命题??可知 $\langle s\rangle=\{1,s,s^2,\cdots\}$. 由于 $\langle s\rangle$ 是 $(R,\cdot)$ 的子幺半群, 因此我们只需证 $0\notin\langle s\rangle=\{1,s,s^2,\cdots\}$(即

证 s 不是幂零的). 已知 $s \neq 0$, 假设 $s^n \neq 0$, 则由 R 是整环可知

$$s^{n+1} = s \cdot s^n \neq 0.$$

故由数学归纳法可知 $s^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. 因此 $0 \notin \langle s \rangle$. 于是 $\langle s \rangle$ 是 R 的一个乘法子集. □

推论 0.1

整环中的任意非零元素都不是幂零的.

证明 设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环,$s \in R/\{0\}$, 则由引理 0.1 的证明可知 $s^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. 因此结论得证. □

定义 0.4

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环,$s \in R/\{0\}$, 则我们称 $(\langle s \rangle^{-1} R, +, \cdot)$ 是 R **对 s 的局部化**.

注 由引理 0.1可知 $\langle s \rangle$ 是 R 的一个乘法子集, 故上述定义是良定义的. 并且由命题**??**可知 $\langle s \rangle = \{1, s, s^2, \cdots\}$, 从而

$$\langle s \rangle^{-1} R = \left\{ \frac{r}{s} : r \in R, s \in \langle s \rangle \right\} = \left\{ \frac{r}{s^n} : r \in R, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

笔记 整数环 $\mathbb{Z}$ 对 3 的局部化就是 $\langle 3 \rangle^{-1} \mathbb{Z} = \{\frac{m}{3^n} : n \in \mathbb{N}_0\}$.

引理 0.2

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $\mathfrak{p} \lhd R$ 是一个素理想, 则 $S = R \setminus \mathfrak{p}$ 是一个乘法子集.

证明 首先, 由 $\mathfrak{p} \lhd R$ 是一个素理想可知 $(\mathfrak{p}, +) < (R, +)$, 从而 $0 \in \mathfrak{p}$, 于是 $0 \notin R/\mathfrak{p} = S$.

其次, 若 $1 \in \mathfrak{p}$, 则由命题**??**可知 $\mathfrak{p} = R$, 可是素理想根据定义是不能等于整个环的. 因此 $1 \in R/\mathfrak{p} = S$.

接着, 设 $s_1, s_2 \in S = R/\mathfrak{p}$, 我们只须证明 $s_1 s_2 \in S$.

因为 $s_1 \notin \mathfrak{p}$,$s_2 \notin \mathfrak{p}$, 所以根据 $\mathfrak{p} \lhd R$ 是一个素理想及素理想 (第一条性质) 的逆否命题,

$$s_1 s_2 \notin \mathfrak{p}$$

也就是说,

$$s_1 s_2 \in R/\mathfrak{p} = S$$

这就证明了素理想的补集是一个乘法子集. □

定义 0.5

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $\mathfrak{p} \lhd R$ 是一个素理想, 则我们称 $((R \setminus \mathfrak{p})^{-1} R, +, \cdot)$ 是 R **在素理想 $\mathfrak{p}$ 上的局部化**, 记作 $R_{\mathfrak{p}}$.

注 由引理 0.2可知 $R/\mathfrak{p}$ 是 R 的一个乘法子集, 故上述定义是良定义的.

笔记 整数环 $\mathbb{Z}$ 在其素理想 $3\mathbb{Z}$ 上的局部化就是 $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z}\}$.