0.1 Cauchy 积分定理

定理 0.1 (Cauchy 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$, 且 f' 在 D 中连续, 则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明 由 γ 围成的域记为 G, 因为 f' 连续, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 连续, 故可用 Green 公式. 又因 f 在 D 中全纯, 故由定理**??**可知 Cauchy-Riemann 方程成立. 于是由 Green 公式可得

$$\int_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$$\int_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

由命题**??**, 即得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

引理 0.1

设 f 是域 D 中的连续函数,γ 是 D 内的可求长曲线. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一条 D 中的折线 P, 使得

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点,P 中其他的顶点都在 γ 上;

(ii) $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$.

证明 因为 ∂D 是一个闭集,γ 是一个紧集, 且两者不相交, 根据定理**??**,$d(\gamma, \partial D) = \rho > 0$. 作有界的域 G, 使得 $\gamma \subset \overline{G} \subset D$. 因为 f 在紧集 $\overline{G}$ 上连续, 故由定理**??**(iii) 可知 f 必一致连续. 于是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z', z'' \in \overline{G}$,$|z' - z''| < \delta$ 时,$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$, 这里,$L$ 是 γ 的长度. 现取 $\eta = \min(\rho, \delta)$. 在 γ 上取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$, 使得每一个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度都小于 η, 这里,z_0, z_n 分别记为 γ 的起点和终点. 连接 z_{k-1} 和 $z_k (k = 1, \cdots, n)$, 就得到一条折线 P, 它与 γ 有相同的起点和终点, 且其他顶点都在 γ 上. 由于 $|z_{k-1} - z_k| < \eta \leqslant \rho$, 所以线段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 都在 D 内, 即折线 P 都在 D 内.

现在估计下面的积分差, 记 $\gamma_k = \widehat{z_{k-1}z_k}$,$P_k = \overline{z_{k-1}z_k}$, 则有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z_{k-1})\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{P_k} (f(z) - f(z_{k-1}))\mathrm{d}z\right|.
\end{aligned}$$

当 $z \in \gamma_k$ 或 P_k 时, 都有 $|z - z_{k-1}| < \eta \leqslant \delta$, 因而 $|f(z) - f(z_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2L}$. 对上面两个积分用长大不等式, 它们都不超过 $\frac{\varepsilon}{2L}|\gamma_k|$, 因而

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P_k} f(z)\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{L}\sum_{k=1}^n |\gamma_k| = \varepsilon.$$

故折线 P 完全符合定理的要求.

□

定理 0.2 (Cauchy-Goursat 定理 (Cauchy 积分定理))

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域, 如果 $f \in H(D)$, 那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ, 均有

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

♡

注 注意, 对于非单连通的域, 定理不一定成立. 例如,D 是除去原点的单位圆盘,$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 当然在 D 中全纯, 若设 $\gamma = \{z : |z| = r < 1\}$, 则由例题??知,$\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$.

证明 证明分为下面三步:

(1) 先假定 γ 是一个三角形的边界.

如果 $\left|\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| = M$, 我们证明 $M = 0$. 连接三角形三边的中点, 把三角形分成四个全等的小三角形 (图 1),

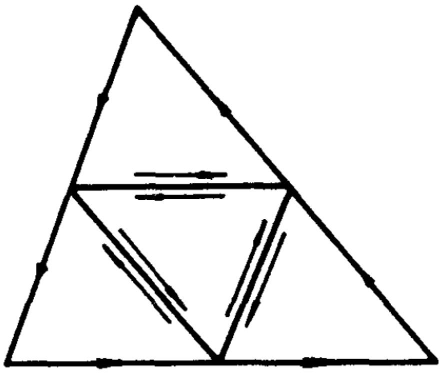

图 1

这四个小三角形的边界分别记为 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ 和 $\gamma^{(4)}$. 让 f 沿这四个小三角形的边界积分, 从图中可以看出, 中间那个小三角形的边界被来回走了两次,f 在其上的积分恰好抵消, 剩下的积分的和正好等于大三角形边界上的积分, 即

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z,$$

或者

$$M = \left|\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(3)}} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\gamma^{(4)}} f(z)\mathrm{d}z\right|.$$

因此上述四个小三角形中必有一个小三角形 Δ_1, 它的边界记为 γ_1,f 在其上的积分满足 $\left|\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4}$. 把 Δ_1 再分成四个全等的小三角形, 按照同样的推理, 其中又有一个小三角形 Δ_2, 它的边界记为 γ_2,f 在其上的积分满足 $\left|\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4^2}$. 这个过程可以一直进行下去, 我们得到一串三角形 Δ_n, 记它们的边界为 γ_n, 这串三角形具有下列性质:

(i) $\Delta \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$;

(ii) $\mathrm{diam}\Delta_n \to 0 (n \to \infty)$;

(iii) $|\gamma_n| = \dfrac{L}{2^n}, n = 1, 2, \cdots$, 这里,$L$ 为 γ 的长度;

(iv) $\left|\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4^n}, n = 1, 2, \cdots$.

由 (i) 和 (ii), 根据 Cantor 闭集套定理, 存在唯一的 $z_0 \in \Delta_n (n = 1, 2, \cdots)$. 因为 D 是单连通的, 所以 $z_0 \in D$. 由于 f 在 z_0 处全纯, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 成立

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|. \tag{1}$$

取 n 充分大, 使得 $\Delta_n\subset B(z_0,\delta)$, 故当 $z\in\gamma_n$ 时,(1)式成立. 显然,$z\in\gamma_n$ 时,$|z-z_0|<|\gamma_n|=\dfrac{L}{2^n}$. 因而, 当 $z\in\gamma_n$ 时, 有

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\frac{\varepsilon L}{2^n}. \tag{2}$$

因为 γ_n 是闭曲线, 由例题??知道, 有

$$\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z=0,\quad \int_{\gamma_n}z\mathrm{d}z=0.$$

于是有

$$\int_{\gamma_n}[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]\mathrm{d}z=\int_{\gamma_n}f(z)\mathrm{d}z-f(z_0)\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z-f'(z_0)\int_{\gamma_n}z\mathrm{d}z+z_0f'(z_0)\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z=\int_{\gamma_n}f(z)\mathrm{d}z.$$

利用(2)式、(iii) 和长大不等式, 即得

$$\left|\int_{\gamma_n}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\varepsilon L}{2^n}|\gamma_n|=\varepsilon\left(\frac{L}{2^n}\right)^2.$$

再由 (iv), 可得 $M\leqslant\varepsilon L^2$. 又因为 ε 是任意小的正数, 所以 $M=0$.

(2) 假定 γ 是一个多边形的边界.

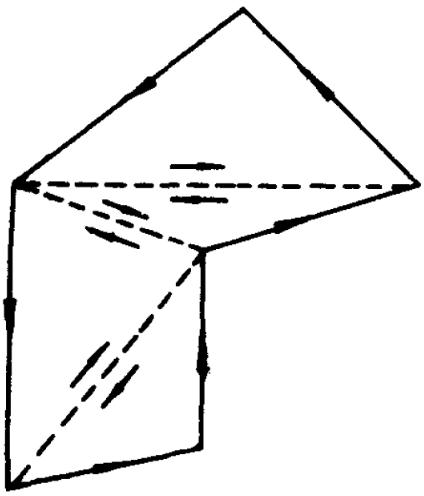

图 2

从图 2可以看出, 我们可以把多边形分解成若干个三角形. 与刚才的道理一样,f 沿 γ 的积分等于沿各个三角形边界积分的和, 由 (1) 已知沿三角形边界的积分为零, 因而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(3) 假定 γ 是一般的可求长闭曲线.

根据引理 0.1, 在 D 内存在闭折线 P, 使得

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z-\int_P f(z)\mathrm{d}z\right|<\varepsilon, \tag{3}$$

这里,ε 是任意事先给定的正数. 由(3)式和 (2) 即知

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

□

推论 0.1

设函数 $f(z)$ 在 z 平面上的单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关. 即对 D 内任意两点 z_0 与 z_1, 积分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

之值, 不依赖于 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的曲线.

证明 设 C_1 与 C_2 是 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的任意两条曲线 (如图 3). 则正方向曲线 C_1 与负方向曲线 C_2^- 就衔接成 D 内的一条闭曲线 C. 于是, 由Cauchy 积分定理与复积分的基本性质 (3), 有

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

因而

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

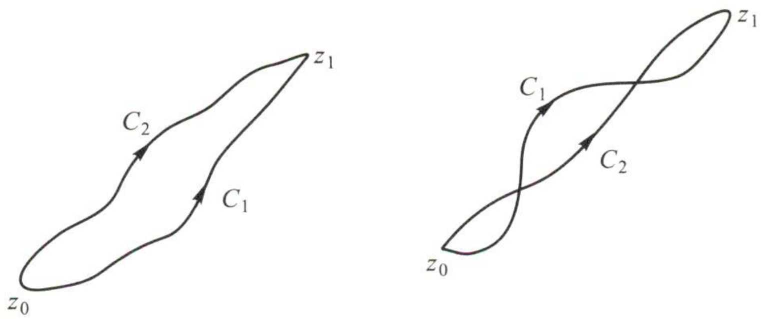

图 3

□

定理 0.3

设函数 $f(z),g(z)$ 在单连通区域 D 内解析,α,β 是 D 内两点, 试证

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

证明

□

定理 0.4

设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部, 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

注 这里已不再假定 f 在积分路径 γ 上全纯, 而代之以在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 条件确实是减弱了. 一般地, 证明这个定理还需要一些其他的知识, 我们这里对 γ 附加两个条件:

(i) γ 是逐段光滑的;

(ii) 在 D 中存在点 z_0, 使得从 z_0 出发的每条射线与 γ 只有一个交点. 例如, 凸多边形和圆盘都满足这两个条件.

证明 在所设的两个条件下,γ 的方程可以写成

$$z = z_0 + \lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

记

$$p = \max\{|\lambda(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}, \quad q = \max\{|\lambda'(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

由于 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 故必一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z_1, z_2 \in \overline{D}$, 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. 今取 $\delta_0 < \min(\delta, p)$, 于是 $\frac{\delta_0}{p} < 1$. 取 ρ, 使得 $1 - \frac{\delta_0}{p} < \rho < 1$. 记 γ_ρ 为曲线

$$z = z_0 + \rho\lambda(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

则显然有 $\gamma_\rho \subset D$. 由Cauchy-Goursat 定理, 成立

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\rho\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0,$$

即

$$\int_a^b f(z_0 + \rho\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t = 0.$$

由于

$$|(z_0 + \rho\lambda(t)) - (z_0 + \lambda(t))| = (1 - \rho)|\lambda(t)| \leqslant (1 - \rho)p < \delta_0 < \delta,$$

所以

$$|f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(z_0 + \lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b [f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))]\lambda'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))||\lambda'(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon q(b - a).\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

□

定理 0.5 (多连通域的 Cauchy 积分定理)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 γ 记 D 的边界. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{4}$$

这里, 积分沿 γ 的正方向进行, 并且 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$.(4)式也可写为

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z, \tag{5}$$

(5)式右端的积分分别沿 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 的逆时针方向进行.

♡

证明 如图 4所示, 我们用一些辅助线把几个“洞”连接起来, 这样,D 就被分成若干个单连通域. 由定理 0.4, 沿每个单连通域的边界的积分为零, 若干个单连通域的边界积分之和仍为零. 由于在辅助线上的积分来回各进行一次, 正好抵消, 所以总和恰好就是 γ 上的积分, 因而 (4)式成立. 而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

移项即得(5)式.

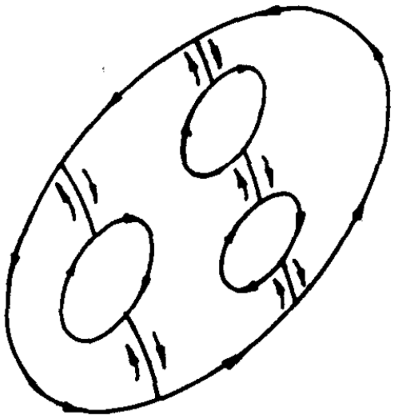

图 4

□

推论 0.2

设 γ_0 和 γ_1 是两条可求长的简单闭曲线,γ_1 在 γ_0 的内部,D 是由 γ_0 和 γ_1 围成的域. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明 由定理 0.5中 $n = 1$ 的情况立得. □

例题 0.1 设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a \notin \gamma$, 试计算积分

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

解 若 a 在 γ 的外部, 则因 $\frac{1}{z-a}$ 在 γ 围成的闭域上全纯, 所以由 Cauchy 积分定理, $\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0$.

若 a 在 γ 的内部, 则有充分小的 $r > 0$, 使得 $B(a,r)$ 落在 γ 的内部 (图 5). 记 $B(a,r)$ 的边界为 γ_1, 由 γ 和 γ_1 围成的域记为 D, 则 $\frac{1}{z-a}$ 在 $\overline{D}$ 上全纯, 因而由推论 0.2, 得

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi\mathrm{i}.$$

最后的等式利用了例题??的结果.

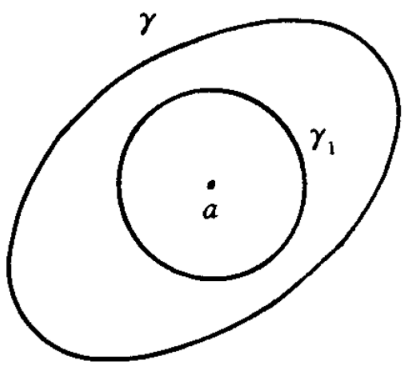

图 5

□

例题 0.2 设 γ 是一可求长简单闭曲线,$a, b \notin \gamma$, 试计算积分

$$I = \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}.$$

解 上面的积分可写为

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b}\right).$$

由例题 0.1即可得

$$I = \begin{cases} 0 & ,\text{若} a, b \text{ 都在} \gamma \text{ 的外部;} \\ \dfrac{2\pi \mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若} a \text{ 在} \gamma \text{ 的内部,} b \text{ 在} \gamma \text{ 的外部;} \\ -\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{a-b} & ,\text{若} a \text{ 在} \gamma \text{ 的外部,} b \text{ 在} \gamma \text{ 的内部;} \\ 0 & ,\text{若} a, b \text{ 都在} \gamma \text{ 的内部.} \end{cases}$$

□