0.1 非齐次 Cauchy 积分公式

定义 0.1

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数, 把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量, 定义微分 $dz,d\bar{z}$ 的**外积**为

$$dz\wedge dz=0, d\bar{z}\wedge d\bar{z}=0, dz\wedge d\bar{z}=-d\bar{z}\wedge dz.$$

dx,dy 的**外积**定义与 $dz,d\bar{z}$ 的外积定义一样, 即

$$dx\wedge dx=0, dy\wedge dy=0, dx\wedge dy=-dy\wedge dx.$$

定义**面积元素**$dA=dx\wedge dy$.

♣

命题 0.1

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数, 则

$$dz\wedge d\bar{z}=-2idx\wedge dy=-2idA.$$

♠

证明 由于 $dz=dx+idy$,$d\bar{z}=dx-idy$, 所以

$$\begin{aligned}dz\wedge d\bar{z}&=(dx+idy)\wedge(dx-idy)\\&=idy\wedge dx-idx\wedge dy\\&=-2idx\wedge dy=-2idA.\end{aligned}$$

这里,dA 是面积元素. □

定义 0.2

称 $z,\bar{z}$ 的函数 $f(z,\bar{z})$ 为**零次微分形式**,$f_1(z,\bar{z})dz+f_2(z,\bar{z})d\bar{z}$ 为**一次微分形式**,$f(z,\bar{z})dz\wedge d\bar{z}$ 为**二次微分式**.

♣

定义 0.3

定义算子 $\partial,\bar{\partial}$ 如下:

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial z}dz, \bar{\partial}f=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

这里

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\\\frac{\partial}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

定义算子 $d=\partial+\bar{\partial}$, 即

$$df=\partial f+\bar{\partial}f=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{1}$$

♣

定义 0.4

算子 $\partial,\bar{\partial}$ 对一次微分形式的作用定义为

$$\begin{aligned}\partial(f_1(z,\bar{z})dz+f_2(z,\bar{z})d\bar{z})&=\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dz+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\wedge d\bar{z}=\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\wedge d\bar{z},\\\bar{\partial}(f_1(z,\bar{z})dz+f_2(z,\bar{z})d\bar{z})&=\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\wedge dz+\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\wedge d\bar{z}=-\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}dz\wedge d\bar{z}.\end{aligned}$$

所以

$$d(f_1(z,\bar{z})dz+f_2(z,\bar{z})d\bar{z})=\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}\right)dz\wedge d\bar{z}. \tag{2}$$

算子 $\partial, \bar{\partial}$ 作用在二次微分形式上的结果定义为零:

$$\partial(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$
$$\bar{\partial}(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

因而

$$d(f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}) = 0. \tag{3}$$

定义 0.5

定义 $d^2\omega = d(d\omega)$, $\quad \partial^2\omega = \partial(\partial\omega)$, $\quad \bar{\partial}^2\omega = \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \partial\bar{\partial}\omega = \partial(\bar{\partial}\omega)$, $\quad \bar{\partial}\partial\omega = \bar{\partial}(\partial\omega)$.

命题 0.2

$d^2 = 0$, $\quad \partial^2 = 0$, $\quad \bar{\partial}^2 = 0$, $\quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0$.

证明 当 ω 是一 C^2 函数时, 由 (1) 式和 (2) 式, 得

$$d^2\omega = d(d\omega) = d\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{z}\partial z} - \frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

当 ω 是一个一次微分形式时, 由 (2) 式知 $d\omega$ 是一个二次微分形式, 由 (3) 式即知 $d^2\omega = 0$. 当 ω 是一个二次微分形式时, 由 (3) 式知 $d^2\omega = 0$. 总之, 不论 ω 是零次、一次或二次微分形式, 都有 $d^2\omega = 0$, 所以 $d^2 = 0$.

根据上述证明, 同样可以证明

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0.$$

□

定理 0.1 (Green 公式)

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $\omega = f_1(z,\bar{z})dz + f_2(z,\bar{z})d\bar{z}$ 是域 D 上的一个一次微分形式, 这里,$f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 那么

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \tag{4}$$

笔记 公式 (4) 在高维空间中也成立, 通常称为 **Stokes 公式**, 这里只是它的一个特例.

证明 记 $f_1 = u_1 + iv_1$,$f_2 = u_2 + iv_2$, 这里,u_1, v_1, u_2, v_2 是 $z, \bar{z}$ 的实值函数, 于是

$$\begin{aligned}\omega &= f_1 dz + f_2 d\bar{z} = (u_1 + iv_1)(dx + idy) + (u_2 + iv_2)(dx - idy) \\ &= \{(u_1 + u_2)dx + (-v_1 + v_2)dy\} + i\{(v_1 + v_2)dx + (u_1 - u_2)dy\}.\end{aligned} \tag{5}$$

由(2)式, 得

$$\begin{aligned}d\omega &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_2 + iv_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 + iv_1)\right\} 2idA \\ &= \left\{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right\} dA.\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, 所以 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^1(\bar{D})$. 于是根据实值函数的 Green 公式, 我们有

$$\int_{\partial D} (u_1 + u_2)dx + (-v_1 + v_2)dy = \int_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-v_1 + v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u_1 + u_2)\right\} dA, \tag{7}$$

$$\int_{\partial D} (v_1 + v_2)dx + (u_1 - u_2)dy = \int_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) - \frac{\partial}{\partial y}(v_1 + v_2)\right\} dA. \tag{8}$$

由等式(5),(6),(7),(8) 即得我们要证明的公式 (4). □

定理 0.2 (非齐次 Cauchy 积分公式 (Pompeiu 公式))

设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部,D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域, 用 ∂D 记 D 的边界. 如果 $f\in C^1(\bar{D})$, 那么对任意 $z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \tag{9}$$

♡

笔记 如果 $f\in H(D)$, 那么由 Cauchy-Riemann 方程,$\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}=0$, 这时公式 (9) 右端的第二项就消失了, 公式 (9) 就是 Cauchy 积分公式. 所以, 公式 (9) 是 Cauchy 积分公式在 C^1 函数类中的推广, 有时也称为**非齐次 Cauchy 积分公式**.

公式 (9) 首先是由 Pompeiu 在 1912 年证明的 (所以有时也称之为 Pompeiu 公式), 但长期以来似乎被人们遗忘了. 直到 1950 年,Grothendieck 和 Dolbeault 用它来解 $\bar{\partial}$ 方程时, 人们才发现它的意义所在.

证明 不妨设 D 是图 1所示的二连通域,D 的边界 ∂D 由 γ_0 和 γ_1 组成. 任取 $z\in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\zeta-z|<\delta$ 时,$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 记 $\rho=\inf\limits_{\zeta\in\partial D}|\zeta-z|>0$, 取 η, 使得 $0<\eta<\min(\rho,\delta)$, 于是 $\overline{B(z,\eta)}\subset D$. 记 $B_\eta=B(z,\eta)$, 令 $G_\eta=D\setminus\overline{B_\eta}$, 则 G_η 的边界 ∂G_η 由 γ_0,γ_1 和 ∂B_η 三条曲线组成. 考虑一次微分形式

$$\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

它在域 G_η 上满足Green 公式的条件, 因而有

$$\int_{\partial G_\eta}\omega=\int_{G_\eta}d\omega. \tag{10}$$

由于 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 在 G_η 中全纯, 所以由定理**??**可知 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\dfrac{1}{\zeta-z}\right)=0$. 因此

$$\bar{\partial}\omega=\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\bar{\zeta}\wedge d\zeta \xlongequal{\text{乘积求导法则}}\left\{f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)+\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\right\}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

易知

$$\partial\omega=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\wedge d\zeta=0,$$

因而

$$d\omega=\partial\omega+\bar{\partial}\omega=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

这样,(10) 式可以写成

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{G_\eta}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta. \tag{11}$$

注意

$$\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+f(z)\int_{\partial B_\eta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\xlongequal{\text{例题??}}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+2\pi i f(z),$$

而

$$\left|\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant\int_{\partial B_\eta}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}|d\zeta|\leqslant\frac{\varepsilon}{\eta}\cdot 2\pi\eta=2\pi\varepsilon,$$

由此即得

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z). \tag{12}$$

另一方面, 由 $f\in C^1(\bar{D})$ 可知 $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上连续, 故有常数 M, 使得 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\right|\leqslant M$ 在 $\bar{B}_\eta$ 上成立. 于是

$$\left|\int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\right|\leqslant 2\int_{B_\eta}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\right|\frac{1}{|\zeta-z|}dA\leqslant 4M\pi\eta\to 0\ (\eta\to 0).$$

因而

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{G_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\bar\zeta\wedge d\zeta=\lim_{\eta\to 0}\left\{\int_D\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\bar\zeta\wedge d\zeta-\int_{B_\eta}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\bar\zeta\wedge d\zeta\right\}=\int_D\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\bar\zeta\wedge d\zeta. \tag{13}$$

在等式 (11) 两端令 $\eta\to 0$, 并利用 (12) 式和 (13) 式, 即得所要证明的公式 (9). □

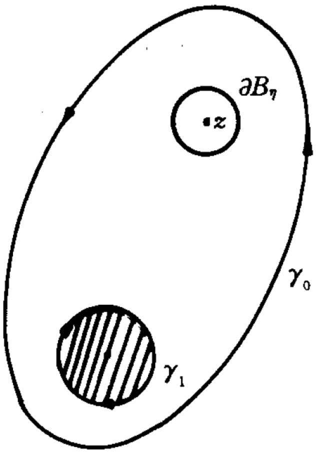

图 1