

0.1 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如 $\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx, n \rightarrow \infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a, b]$ 且 g 在 $[a, b]$ 上有界; 或者 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a, b]$ 且 g 在 $[a, b]$ 上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx = \int_a^b e^{n \ln f(x)} g(x) dx.$$

若参变量 n, x 在积分区间上, 或者估计的不是 $n, x \rightarrow +\infty$ 处的渐近展开式, 而是其他点处 ($x \rightarrow x_0$) 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$, 其中 $f, g \in C[a, b]$.

思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有 $e^{f(x)}$, 则积分得到的结果中一定仍含有 $e^{f(x)}$), 我们可以大致估计积分 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$ 的结果是 $C_1 h_1(x) e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x) e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$, 其中 C 为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$. 而我们注意到到改变指数函数 $e^{p x + q}$ 的幂指数部分的常数 p 会对这个指数函数的阶 ($x \rightarrow +\infty$) 产生较大影响, 而改变 q 不会影响这个指数函数的阶. 比如, e^{2x} 比 e^x 高阶 ($x \rightarrow +\infty$). 由此我们可以发现 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$ 中的幂指数部分中 $f(x, a), f(x, b)$ 中除常数项外的含 x 项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的 $f(x, y)$ 和积分区间决定的, 但是在实际问题中 $f(x, y)$ 的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间 $[a, b]$ 上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量 x 固定时, 并且当积分区间为某一点 y_0 附近时, 只要被积函数的 $e^{f(x,y)}$ 在 y_0 处 (关于 y) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与 x 轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在 y_0 附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量 x 固定时, $f(x, y)$ (关于 y) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0 (余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 Taylor 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 Taylor 定理将主体部分的被积函数的指数部分 $f(x, y)$ 在最大值点附近 (关于 y) 展开 (注意: 此时最多展开到 x^2 项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到 $\infty + \infty$ 或 $0 \cdot \infty$ 等这一类无效的结果). Taylor 展开之后, 我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处不为 0, 则 $g(x)$ 只会影响渐近展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理 $g(x)$ 的方法: (i) 在余项部分, 直接将 $g(x)$ 放缩成其在相应区间上的上界或下界即可. (ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在 $f(x, y)$ (关于 y) 的某些最大值点 y_i 的邻域内, 所以结合 $g(x)$ 的连续性, 直接将 $g(x)$ 用 $g(y_i)$ 代替即可 (将 $g(x)$ 放缩成 $g(y_i) \pm \varepsilon$ 即可). 即相应的主体部分 (y_i 点附近) 乘以 $g(x)$ 相应的函数值 $g(y_i)$. 具体例题见例题 0.9. 也可以采取拟合法处理 $g(x)$, 具体例题见例题 0.10.

若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处为 0, 则在估计积分的阶的时候就要将 $g(x)$ 考虑进去. 需要结合 $g(x)$ 的具体结构、性质进行分析.

严谨的证明过程最好用上下极限和 $\varepsilon - \delta$ 语言书写. 具体严谨的证明书写见例题: 例题 0.4, 例题 0.5, 例题 0.6, 例题 0.9.



笔记 Laplace 方法的思路蕴含了一些常用的想法: 分段估计、Taylor 定理估阶. 而严谨的证明书写也使用一些常用方法: 上下极限、 $\varepsilon - \delta$ 语言、拟合法.

注 上述 Laplace 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和

技巧 (比如 *Puiseux* 级数展开 (见清疏讲义) 等).

例题 0.1 设 $a_1, a_2, \dots, a_m > 0, m \in \mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j.$$

注 熟知, 极限蕴含在 a_1, a_2, \dots, a_m 的最大值中.

证明 显然


$$\max_{1 \leq j \leq m} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{1 \leq j \leq m} a_j^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \max_{1 \leq j \leq m} a_j \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j, \quad (1)$$

从而我们证明了(1). □

例题 0.2 设非负函数 $f \in C[a, b]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

注 熟知, 极限蕴含在 f 的最大值中.

 **笔记** 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

证明 事实上记 $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x), x_0 \in [a, b]$, 不失一般性我们假设 $x_0 \in (a, b)$. 那么对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 我们由积分中值定理知道存在 $\theta_n \in (x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n})$, 使得

$$f(\theta_n) \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0) dx} = f(x_0) \sqrt[n]{b-a}. \quad (2)$$

两边取极限即得(2). □

例题 0.3 设非负严格递增函数 $f \in C[a, b]$, 由积分中值定理我们知道存在 $x_n \in [a, b]$, 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx.$$

计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明 由(上一题) 例题 0.2, 我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b-a}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = f(b).$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$, 我们知道对任何 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = f(b)$. 又由于 f 为严格递增函数, 因此只能有 $c = b$, 利用命题??的 (a)(Heine 归结原理), 我们知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. 证毕! □

定理 0.1 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3)$$

注 我们只需要记住 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$ 及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

 **笔记** (3)式等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \sqrt{\pi n} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}. \quad (4)$$

证明的想法是把(4)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

证明 我们只证明 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$, 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \quad (5)$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln \sin^2 x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right], \quad (6)$$

即 $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \frac{\ln \sin^2 x}{-(x - \frac{\pi}{2})^2} = -1$. 于是利用(6), 对任何 $\varepsilon \in (0, 1)$, 我们知道存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得对任何 $x \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}]$, 都有

$$-(1 + \varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \ln \sin^2 x \leq -(1 - \varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (7)$$

利用(7)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n \ln \sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\varepsilon)y^2} dy \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}} e^{-z^2} dz \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx = \int_0^{\delta} e^{-n(1+\varepsilon)y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-z^2} dz.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

由 ε 任意性即可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(5)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sqrt{n}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1.$$

故 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$. □

例题 0.4 求 $\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+x^2)^n} dx, n \rightarrow \infty$ 的等价无穷小.

解 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [0, \delta]$ 时, 有

$$\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n} dx = \frac{1}{2^n} \left(\int_0^{\delta} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\int_0^{\delta} e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left(\int_0^{\delta} e^{-n\left(\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2\right)} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}}}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{2}}{(1+\frac{\delta^2}{2})^{n-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy + \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\frac{\delta^2}{2})^{n-1}} \right) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\frac{\delta^2}{2})^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2(1+\frac{\delta^2}{2})^{n-1}}.$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2(1+\frac{\delta^2}{2})^{n-1}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x^2}{2})^n} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta \frac{1}{(1+\frac{x^2}{2})^n} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n \ln(1+\frac{x^2}{2})} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n(\frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2)} dx \\ & \stackrel{\text{令 } y=x\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}{=} \frac{1}{2^n \sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy.$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取下极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}.$$


再由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

因此, 再结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx$, 我们就有

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 即 $\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{2^n \sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty.$ □

例题 0.5 求 $\int_0^x e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty$ 的渐近估计 (仅两项).

 **笔记** 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以实际上只需要估计

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-y^2} dy - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_x^\infty e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty.$$

解 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [0, \delta]$ 时, 有

$$2x - \varepsilon x \leq x^2 + 2x \leq 2x + \varepsilon x.$$

现在,一方面我们有

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\
 &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2t - x^2} dt = xe^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \\
 &= xe^{-x^2} \left(\int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \right) \\
 &\leq xe^{-x^2} \left(\int_0^\delta e^{-x^2(2t+\varepsilon t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t+2)} e^{-x^2\delta} dt \right) \\
 &= xe^{-x^2} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{(2+\varepsilon)x^2} + \frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2} \right) \\
 &= \frac{e^{-x^2}}{x} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right).
 \end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令 $x \rightarrow +\infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right) = \frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}$.

另外一方面,我们有

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\
 &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2t - x^2} dt = xe^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \\
 &\geq xe^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt \geq xe^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(2t-\varepsilon t)} dt \\
 &= xe^{-x^2} \cdot \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.
 \end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令 $x \rightarrow +\infty$ 并取下极限得到

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2} = \frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1}{2}$.

因此,再结合 $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy$, 我们就有

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}$, 即 $\int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$.

因此 $\int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$. □

例题 0.6 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx$.

解 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得当 $x \in [0, \delta]$ 时, 有

$$-t - \varepsilon t \leq \ln(1 - \sin t) \leq -t + \varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \stackrel{\text{令 } x=nt}{=} n \int_0^{10} (1 - |\sin t|)^n dt = n \int_0^{10} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ & \quad + n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \\ & \quad + n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned} & n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=\pi-t}{=} -n \int_\delta^0 e^{n \ln(1 - \sin(\pi-u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} n \int_0^\delta e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_{2\pi-\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-2\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin(2\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du. \end{aligned}$$

从而

$$n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt.$$

同理, $n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt$. 于是原积分(8)式可化为

$$\int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt.$$

进而, 一方面我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \\ & \leq 7n \int_0^\delta e^{n(-t+\varepsilon t)} dt + 3n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin \delta)} dt \\ & = 7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1 - \sin \delta)}(\pi - 2\delta). \end{aligned}$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1 - \sin \delta)}(\pi - 2\delta) \right] = \frac{7}{1 - \varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \\ & \geq 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \geq 7n \int_0^\delta e^{n(-t-\varepsilon t)} dt = 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon + 1} \end{aligned}$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取下极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1} = \frac{7}{\varepsilon+1}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \frac{7}{\varepsilon+1}$.

因此, 再结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx$, 我们就有

$$7 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7$. □

例题 0.7 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1 - \frac{x}{2})^n (1 - \frac{x}{4})^n dx}{\int_0^1 (1 - \frac{x}{2})^n dx}$.

证明 首先注意到

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \quad (9)$$

接着, 由 Taylor 定理可知

$$\ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right) = -\frac{3}{4}x + o(x).$$

从而对 $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, 都存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$-\frac{3}{4}x - \varepsilon x \leq \ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right) \leq -\frac{3}{4}x + \varepsilon x, \forall x \in [-\delta, \delta].$$

于是另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx = \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx \\ &\leq \int_0^\delta e^{n(-\frac{3}{4}x + \varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4}x + \varepsilon x)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^\delta e^{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)x} dx + e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} (1 - \delta) = -\frac{1}{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)n} + e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} (1 - \delta). \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx = \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx \\ &\geq \int_0^\delta e^{n(-\frac{3}{4}x - \varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4}x - \varepsilon x)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^\delta e^{(-\frac{3}{4} - \varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4} - \varepsilon)\delta} dx \\ &= \frac{e^{(-\frac{3}{4} - \varepsilon)n\delta} - 1}{(-\frac{3}{4} - \varepsilon)n} + e^{n(-\frac{3}{4} - \varepsilon)\delta} (1 - \delta). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{e^{(-\frac{3}{4} - \varepsilon)n\delta} - 1}{-\frac{3}{4} - \varepsilon} + ne^{n(-\frac{3}{4} - \varepsilon)\delta} (1 - \delta) \leq n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{3}{4} + \varepsilon} + ne^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} (1 - \delta).$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$-\frac{1}{-\frac{3}{4} - \varepsilon} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{3}{4} + \varepsilon}.$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得


$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx = \frac{4}{3}.$$

故 $\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx = \frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. 于是再结合(9)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.8 证明极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 \ln^n(1+x)x^{-n} dx}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} dx}$ 存在并求其值.

 **笔记** 原式可写成 $\frac{\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx}{\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx}$, 求导可知 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 故原式分子和分母的阶都集中在 $x=0$ 处. 因为分母积分的被积函数除指数部分外, x 在 0 处取值也为 0, 所以我们在估阶的时候需要将 x 也考虑进去. 利用 Laplace 方法估计分子、分母的阶, 但是此时 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 在极值点 $x=0$ 处间断, 故我们需要先对 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 补充定义, 使相关函数光滑, 才能进行 Taylor 展开.

证明 由 Taylor 公式可知

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \\ \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) &= \ln \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).\end{aligned}$$

从而对 $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$, 都存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned}-\frac{x^2}{6} - \varepsilon x^2 &\leq \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \leq -\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2, \forall x \in [-\delta, \delta], \\ -\frac{x}{2} - \varepsilon x &\leq \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \leq -\frac{x}{2} + \varepsilon x, \forall x \in [-\delta, \delta].\end{aligned}$$

于是从一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx &= \int_0^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx = \int_0^\delta x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx \\ &\leq \int_0^\delta x e^{n\left(-\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n\left(-\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2\right)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{(-\frac{1}{6} + \varepsilon)x^2} dx + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon\right)\delta^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty x e^{(-\frac{1}{6} + \varepsilon)x^2} dx + e^{n\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon\right)\delta^2} (1 - \delta) = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon\right)\delta^2} (1 - \delta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx = \int_0^\delta e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx \\ &\leq \int_0^\delta e^{n\left(-\frac{x}{2} + \varepsilon x\right)} dx + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{x}{2} + \varepsilon x\right)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{n\delta} e^{(-\frac{1}{2} + \varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\delta} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{1}{2} + \varepsilon)x} dx + e^{n\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\delta} (1 - \delta) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\delta} (1 - \delta).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx &= \int_0^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx = \int_0^\delta x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx \\ &\geq \int_0^\delta x e^{n\left(-\frac{x^2}{6} - \varepsilon x^2\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n\left(-\frac{x^2}{6} - \varepsilon x^2\right)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{(-\frac{1}{6} - \varepsilon)x^2} dx + \int_\delta^1 e^{n\left(-\frac{1}{6} - \varepsilon\right)\delta} dx \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^\infty x e^{(-\frac{1}{6} - \varepsilon)x^2} dx + e^{n\left(-\frac{1}{6} - \varepsilon\right)\delta} (1 - \delta) = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6} - \varepsilon\right)n} + e^{n\left(-\frac{1}{6} - \varepsilon\right)\delta} (1 - \delta).\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx = \int_0^1 e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx = \int_0^\delta e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} dx$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_0^\delta e^{n(-\frac{x}{2}-\varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{x}{2}-\varepsilon x)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^\delta e^{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)} dx \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)x} dx + e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)}(1-\delta) = -\frac{1}{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)n} + e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)}(1-\delta). \end{aligned}$$

因此,我们就有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} + ne^{n(-\frac{1}{6}-\varepsilon)}(1-\delta) &\leq n \int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \leq -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}+\varepsilon)} + ne^{n(-\frac{1}{6}+\varepsilon)\delta}(1-\delta), \\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} + ne^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)}(1-\delta) &\leq n \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + ne^{n(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\delta}(1-\delta). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \leq -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}+\varepsilon)} \\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \end{aligned}$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx = 2.$$

故


$$\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \ln^n(1+x)x^{-n} dx}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx}{\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.9 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx}$.

 **笔记** 我们首先可以求解出被积函数带 n 次幂部分的最大值点即 $1-x^2+x^3$ 的最大值点为 $x=0, 1$. 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

注 注意由 $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1)$, $x \rightarrow 1$. 得到的是 $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1)$, $x \rightarrow 1$. 而不是.

证明 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3) = -x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x \rightarrow 1.$$

从而对 $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, 存在 $\delta_1 \in (0, \frac{1}{10})$, 使得

$$-x^2 - \varepsilon x^2 \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq -x^2 + \varepsilon x^2, \forall x \in (0, \delta_1);$$

$$x-1-\varepsilon(x-1) \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq x-1+\varepsilon(x-1), \forall x \in (1-\delta_1, 1).$$

设 $f \in C[0, 1]$ 且 $f(0), f(1) > 0$, 则由连续函数最大值、最小值定理可知, f 在闭区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上都存在最大值和最小值. 设 $M_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x)$, $M_2 = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f(x)$. 又由连续性可知, 对上述 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon, \forall x \in [0, \delta_2];$$

$$f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon, \forall x \in [1-\delta_2, 1].$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则一方面我们有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^\delta (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_\delta^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\delta e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx + \int_\delta^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\
&\leq (f(0) + \varepsilon) \int_0^\delta e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)} dx + \int_\delta^{\frac{1}{2}} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2 \right)^n dx \\
&= \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2 \right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta \right),
\end{aligned}$$

又易知 $1-x^2+x^3$ 在 $[0, \frac{2}{3}]$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{3}, 1]$ 上单调递增. 再结合 $\delta < \frac{1}{10}$ 可知, $1 - (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 < 1 - (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 < 1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3$. 从而当 $x \in (\frac{1}{2}, 1-\delta)$ 时, 我们就有 $1-x^2+x^3 < 1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3 < 1$. 进而可得

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} M_2 (1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3)^n dx + (f(1) + \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]} dx \\
&= M_2 (1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3)^n \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} (1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}).
\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \sqrt{n} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2 \right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta \right), \\
n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq n M_2 \left(\frac{3}{4} + (1-\delta)^3 \right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon} (1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}).
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取上极限得到

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}} (f(0) + \varepsilon), \\
\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1)$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_0^\delta (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^\delta e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\
&\geq (f(0) - \varepsilon) \int_0^\delta e^{n(-x^2-\varepsilon x^2)} dx = \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\
\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\
&\geq (f(1) - \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]} dx = \frac{f(1) - \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}).
\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\
n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1) - \varepsilon}{1+\varepsilon} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}).
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 并取下极限得到

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}} (f(0)-\varepsilon), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq f(1)$.

因此, 我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0), \\ f(1) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1).\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = f(1)$. 从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty; \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

故 $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$.


从而当 $f \equiv 1$ 时, 上式等价于 $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$; 当 $f(x) = \ln(x+2)$ 时, 上式等价于 $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx = \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \ln 2.$$

□

例题 0.10 设 $f \in R[0, 1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = f(1).$$

 **笔记** 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 也可以用拟合法进行证明.

证明 由于 $f \in R[0, 1]$, 因此存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$. 于是对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall \delta \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned}\left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| &= \left| n \int_0^1 [f(x) - f(1)] x^n dx \right| \\ &\leq n \int_0^1 |[f(x) - f(1)] x^n| dx = n \int_0^\delta |f(x) - f(1)| x^n dx + n \int_\delta^1 |f(x) - f(1)| x^n dx \\ &\leq n \int_0^\delta [M + f(1)] \delta^n dx + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_\delta^1 x^n dx \\ &\leq n[M + f(1)] \delta^{n+1} + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_0^1 x^n dx \\ &= n[M + f(1)] \delta^{n+1} + \frac{n}{n+1} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|.\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 并取上极限可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|, \quad \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \rightarrow 1^-$ 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x)x^n dx - n \int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 1^-} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)|.$$


又因为 f 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)| = 0$. 故

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x)x^n dx - n \int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x)x^n dx - n \int_0^1 f(1)x^n dx \right| \leq 0.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x)x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(1)x^n dx = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = f(1)$. □

例题 0.11 f 是 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $x=1$ 处存在导数, $f(1)=0, f'(1)=-1$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

 **笔记** 本题也可以类似例题 0.10 用拟合法进行证明.

证明 由 Taylor 定理可知, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 对 $\forall x \in [\delta, 1]$, 存在 $\theta \in (x, 1)$, 使得

$$f(x) = f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 = 1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2.$$

记 $M \triangleq \sup_{[0,1]} f, m \triangleq \inf_{[0,1]} f$, 则一方面, 我们有

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx &= n^2 \int_0^\delta x^n f(x) dx + n^2 \int_\delta^1 x^n f(x) dx \leq Mn^2 \delta^n + n^2 \int_\delta^1 x^n \left[1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 \right] dx \\ &\leq Mn^2 \delta^n + n^2 \int_0^1 \left[x^n - x^{n+1} + \frac{f''(\theta)}{2}(x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n) \right] dx = Mn^2 \delta^n + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^2 f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx \leq 1.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx &= n^2 \int_0^\delta x^n f(x) dx + n^2 \int_\delta^1 x^n f(x) dx \geq n^2 \min\{0, m\delta^n\} + n^2 \int_\delta^1 x^n \left[1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 \right] dx \\ &= n^2 \min\{0, m\delta^n\} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} - n^2 \left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2} \right) + \frac{n^2 f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - n^2 \left(\frac{\delta^{n+3}}{n+3} - \frac{2\delta^{n+2}}{n+2} + \frac{\delta^{n+1}}{n+1} \right). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx \geq 1.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

□

例题 0.12 Possion 核 设 $f \in R[0, 1]$ 且 f 在 $x=0$ 连续, 证明

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证明 因为 $f \in R[0, 1]$, 所以存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$. 于是对 $\forall \delta \in (0, 1)$, 固定 δ , 再对 $\forall t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(0) dx \right| \leq \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} |f(x) - f(0)| dx \\ &= \int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2} |f(x) - f(0)| dx + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2} |f(x) - f(0)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \int_0^\delta \frac{t}{x^2 + t^2} dx + \int_0^1 \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| dx \\
&= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \arctan \frac{x}{t} \Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| \\
&= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \cdot \arctan \frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $t \rightarrow 0^+$ 并取上极限, 可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)|, \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \rightarrow 0^+$ 可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| = \frac{\pi}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)|.$$

又由于 f 在 $x = 0$ 处连续, 从而 $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0$. 故

$$0 \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq 0.$$

因此 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx = f(0) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} f(0)$. \square

例题 0.13 Fejer 核 设 f 在 $x = 0$ 连续且在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 可积, 则

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = f(0).$$

证明 因为 $f \in R\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 所以存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 又因为 $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$, 所以对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|x| \leq \delta_0$ 时, 有 $\sin x \geq (1 - \varepsilon)x$. 于是对 $\forall \delta \in \min\left\{\frac{1}{2}, \delta_0\right\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx \\
&= \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx \\
&\leq \sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)| \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} |M + f(0)| dx \\
&\leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\
&\stackrel{\text{令 } y = Nx}{=} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\
&= \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $N \rightarrow +\infty$ 并取上极限, 得到

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy.$$

又由 *Dirichlet* 判别法, 可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy$ 收敛. 从而根据 δ 的任意性, 上式两边同时令 $\delta \rightarrow 0^+$, 再结合 f 在 $x = 0$ 处连续, 可得

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy}{1 - \varepsilon} \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0. \end{aligned}$$

从而

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq 0.$$

$$\text{故 } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| = 0. \text{ 即 } \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx.$$

而一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx &\geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} f(0) dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = f(0). \end{aligned}$$

另一方面, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \\ &\leq f(0) \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} f(0) dx \leq \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

再根据 ε 的任意性, 可知

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \leq f(0).$$

因此, 由夹逼准则, 可知 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx = f(0)$. □

例题 0.14 设 $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$, $n = 1, 2, \dots$, f 是 \mathbb{R} 上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi_n(x - y) dy = f(x).$$

证明 由条件可知, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$. 于是对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x , 再对 $\forall \delta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} 2M \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 \delta^2} dy \\ &\stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0^+$, 再结合 f 在 $\forall x \in \mathbb{R}$ 上连续, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| = \lim_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)| = 0.$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &= f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = f(x). \end{aligned}$$

□

例题 0.15 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f'(0)$ 存在, 证明: 对任意正整数 m , 在 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\int_0^1 f(x^n) dx = f(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{\ln^k x}{k!} dx + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

注 这里积分换元之后, 再 Taylor 展开, 但是后续积分与求和的换序以及余项的估计并不好处理.

笔记 估计抽象函数的渐近展开一般考虑拟合和分段. 如果考虑积分与求和换序的话并不好处理, 一般只有估计具体函数的渐近才会考虑换序.

这里分段的想法也是将原积分分成主体部分和余项部分. 容易观察 (直观地分析一下即可) 到这里积分的阶的主体部分集中在 0 附近.

证明 记 $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$, 则由条件可知, $g \in C[0, 1]$, 从而

$$|g(x)| \leq C, \forall x \in [0, 1]. \quad (10)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x^n) dx - f(0) &= \int_0^1 [f(x^n) - f(0)] dx \stackrel{\text{令 } y=x^n}{=} \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n} [f(x) - f(0)] dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx. \end{aligned}$$

因此原问题等价于证明对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 都有

$$\frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

由 Taylor 公式可知, $\forall x \in [\delta, 1]$, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$e^{\frac{\ln x}{n}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} + O\left(\frac{1}{n^m}\right), n \rightarrow \infty.$$

即存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in [\delta, 1]$, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N > 0$, 使得 $\forall n > N$, 都有

$$\left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| \leq \frac{M}{n^m}. \quad (11)$$

取 $\delta = \frac{1}{n^{2m}} \in (0, 1)$, 则对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 结合 (10)(11) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k! n^k} g(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} g(x) dx \right| = \left| \frac{1}{n} \int_0^1 \left(e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right) g(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\delta \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| |g(x)| dx + \frac{1}{n} \int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| |g(x)| dx \\ &\leq \frac{C}{n} \int_0^\delta \left(x^{\frac{1}{n}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\ln x|^k}{k! n^k} \right) dx + \frac{C}{n} \int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| dx \leq \frac{C}{n} \int_0^\delta \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |\ln x|^k \right) dx + \frac{C}{n} \int_0^1 \frac{M}{n^m} dx \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{n} \int_0^\delta (1+m|\ln x|^{m-1}) dx + \frac{MC}{n^{m+1}} = \frac{C}{n} \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} (1-m\ln^{m-1}x) dx + \frac{MC}{n^{m+1}} \\
&= \frac{C}{n^{2m+1}} - \frac{mC}{n} \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1}x dx + \frac{MC}{n^{m+1}} \leq \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1}x dx \right|.
\end{aligned} \tag{13}$$

注意到

$$\int \ln^n x dx = x(a_0 + a_1 \ln x + \cdots + a_n \ln^n x) + c = x \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \ln k \right) + c,$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_n, c 都是常数. 又因为对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都成立 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n x}{x} = 0$, 所以一定存在 $N' > 0$, 使得当 $n > N'$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1}x dx \right| &= \left| x(b_0 + b_1 \ln x + \cdots + b_{m-1} \ln^{m-1}x) \Big|_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \right| = \left| \frac{1}{n^{2m}} \left(b_0 + b_1 \ln \frac{1}{n^{2m}} + \cdots + b_{m-1} \ln^{m-1} \frac{1}{n^{2m}} \right) \right| \\
&\leq \frac{mB}{n^{2m}} \left| \ln^{m-1} \frac{1}{n^{2m}} \right| = \frac{2m^2 B \ln^{m-1} n}{n^{2m}} \leq \frac{2m^2 B}{n^{2m-1}} \leq \frac{2m^2 B}{n^m},
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 b_0, b_1, \dots, b_{m-1} 都是常数, $B = \max\{b_0, b_1, \dots, b_{m-1}\}$. 因此由 (13)(14) 式可得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \max\{N, N'\}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx \right| \leq \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1}x dx \right| \\
&\leq \frac{MC+C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \cdot \frac{2m^2 B}{n^m} = \frac{MC+C-2m^3 BC}{n^{m+1}}.
\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), n \rightarrow \infty$. 结论得证. \square