0.1 可解群和幂零群

定义 0.1 (换位子)

设 g_1, g_2 是群 G 中的两个元素, 称

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$$

为 g_1 与 g_2 的**换位子**.

♣

定义 0.2 (换位子群)

若 H, K 是群 G 的两个子群, 称

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H,\ k \in K\} \rangle$$

为 H 与 K 的**换位子群**.

♣

命题 0.1

设 H, K 是群 G 的两个子群, 则

(1) $\alpha([g_1, g_2]) = [\alpha(g_1), \alpha(g_2)], \quad \forall \alpha \in \mathrm{Aut}G,\ g_1, g_2 \in G.$

(2) $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)], \quad \forall \alpha \in \mathrm{Aut}G.$

(3) 若 $H \lhd G$, 则 G/H 为 Abel 群的充要条件是 $H \supseteq [G, G]$.

♠

证明

(1) 从换位子的定义即得.

(2) 因为 $\forall a \in H, b \in K$, 有 $\alpha(a) \in \alpha(H), \alpha(b) \in \alpha(K)$. 注意到

$$\alpha([a, b]) = \alpha(aba^{-1}b^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)\alpha(a)^{-1}\alpha(b)^{-1} = [\alpha(a), \alpha(b)],$$

故 $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$.

(3) G/H 为 Abel 群, 当且仅当对 $\forall a, b \in G$, $(aH)(bH) = (bH)(aH)$, 即 $abH = baH, \forall a, b \in G$, 当且仅当 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H, \forall a, b \in G$, 即 $H \supseteq [G, G]$.

□

引理 0.1

设 H, K 是群 G 的子群, 则有

(1) $[H, K] = \{1\} \iff H \subseteq C_G(K)$;

(2) $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$,

$[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$;

(3) 若 $H \lhd G, K \lhd G$, 则 $[H, K] \lhd G$ 且 $[H, K] \subseteq H \cap K$. 特别地, 由 $G \lhd G$ 知 $[G, G] \lhd G$;

(4) 当 H_1, K_1 分别为 H, K 的子群时有 $[H_1, K_1] \subseteq [H, K]$.

(5) 设 H, K 是两个群,$N \lhd H, K$, 则

$$[H, K] \subseteq N \iff [H/N, K/N] = N \iff H/N \subseteq C(K/N).$$

♡

证明

(1) $[H, K] = \{1\}$ 当且仅当对 $\forall h \in H, k \in K$ 有

$$[h, k] = 1 \iff h^{-1}k^{-1}hk = 1 \iff hk = kh \iff hkh^{-1} = k,$$

即 $h \in C_G(K), \forall h \in H$, 即 $H \subseteq C_G(K)$.

(2) 先证 $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$. 若 $[H, K] \subseteq K$, 则

$$[h, k] \in K, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in K, \quad \forall k \in K,\ h \in H.$$

对 $\forall h \in H$, 设 $k \in K$, 则由 $[h,k] \in K$ 知存在 $k_1 \in K$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = k_1 \Longleftrightarrow hkk_1^{-1} = kh \Longleftrightarrow k = hkk_1^{-1}h^{-1} \in hKh^{-1},$$

故 $K \subseteq hKh^{-1}$. 再设 $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$, 则由 $[h^{-1},k^{-1}] \in K$ 知存在 $k_2 \in K$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = k_1 \Longleftrightarrow hkh^{-1} = kk_1 \in K,$$

故 $hKh^{-1} \subseteq K$. 因此 $hKh^{-1} = K, ,\forall h \in H$. 即 $h \in N_G(K), \forall h \in H$. 故 $H \subseteq N_G(K)$.
反之, 若 $H \subseteq N_G(K)$, 对 $\forall h \in H$, $k \in K$, 有 $hKh^{-1} = K$, 从而存在 $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, 使

$$k = h_1k_1h_1^{-1} \Longleftrightarrow k^{-1} = h_1k_1^{-1}h_1^{-1}.$$

于是

$$[h,k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}h_1k_1^{-1}h_1^{-1}hk = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k.$$

注意到 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} \in hKh^{-1}$, 所以存在 $k_2 \in K$, 使 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} = k_2$. 从而

$$[h,k] = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k = k_2k \in K, \ \forall k \in K, h \in H.$$

故 $[H,K] \subseteq K$.
再证 $[H,K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$. 若 $[H,K] \subseteq H$, 则

$$[h,k] \in H, \quad [h^{-1},k^{-1}] \in H, \quad \forall k \in K, \ h \in H.$$

对 $\forall k \in K$, 设 $h \in H$, 则由 $[h,k] \in H$ 知存在 $h_1 \in H$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = h_1 \Longleftrightarrow hk = khh_1 \Longleftrightarrow h = khh_1k^{-1} \in kHk^{-1},$$

故 $H \subseteq kHk^{-1}$. 再设 $khk^{-1} \in kHk^{-1}$, 则由 $[h^{-1},k^{-1}] \in H$ 知存在 $h_2 \in H$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = h_1 \Longleftrightarrow khk^{-1} = h^{-1}h_1 \in H,$$

故 $kHk^{-1} \subseteq H$. 因此 $kHk^{-1} = H, \forall k \in K$. 即 $k \in N_G(H), \forall k \in K$. 故 $K \subseteq N_G(H)$.
反之, 若 $K \subseteq N_G(H)$, 对 $\forall h \in H$, $k \in K$, 有 $kHk^{-1} = H$, 从而存在 $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, 使

$$h = k_1h_1k_1^{-1}.$$

于是

$$[h,k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}k^{-1}k_1h_1k_1^{-1}k = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1}.$$

注意到 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} \in kHk^{-1}$, 所以存在 $h_2 \in H$, 使 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h_2$. 从而

$$[h,k] = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h^{-1}h_2 \in H.$$

故 $[H,K] \subseteq H$.

(3) 设 $H \lhd G, K \lhd G$, 于是对 $\forall \alpha = L_gR_{g^{-1}} \in \mathrm{Int}G$, 由命题 0.1(2)有

$$g[H,K]g^{-1} = \alpha([H,K]) = [\alpha(H),\alpha(K)] = [gHg^{-1}, gKg^{-1}] = [H,K],$$

即 $[H,K] \lhd G$. 由 $H \lhd G, K \lhd G$ 知

$$gHg^{-1} = H, \quad gKg^{-1} = K, \quad \forall g \in G.$$

故

$$kHk^{-1} = H, \quad \forall k \in K;$$

$$hKh^{-1} = K, \quad \forall h \in H.$$

即 $K \subseteq N_G(H)$, $H \subseteq N_G(K)$. 再由结论 (2) 知 $[H,K] \subseteq H \cap K$.

(4) 此结论是显然的.

(5) 由引理 0.1(1)知

$$[H/N, K/N] = N \Longleftrightarrow H/N \subseteq C(K/N).$$

于是对 $\forall a \in H, b \in K$, 有

$$N = [aN, bN] = (a^{-1}N)(b^{-1}N)(aN)(bN) = (a^{-1}b^{-1}ab)N = [a, b]N.$$

这也当且仅当

$$[a, b] \in N, \quad \forall a \in H, b \in K.$$

即 $[H, K] \subseteq N$.

□

定义 0.3

幺元为 1 的群 G 中的子群序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}.$$

若满足 $G_i \lhd G_{i-1}(2 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称之为**次正规序列**,$t$ 称为此序列的**长度**.$G_{i-1}/G_i(2 \leqslant i \leqslant t+1)$ 称为此序列的**因子**. 若在上述序列中还有 $G_i \lhd G(1 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称此序列为**正规序列**.
若两个次正规序列 (正规序列)

$$G = G_1' \supseteq G_2' \supseteq \cdots \supseteq G_r' \supseteq G_{r+1}' = \{1\},$$

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_t \supseteq G_{t+1} = \{1\}$$

满足 $\forall G_i'(1 \leqslant i \leqslant r+1), \exists G_{i_j} = G_i'(1 \leqslant i_j \leqslant t+1)$, 则称此序列 $\{G_j\}$ 是序列 $\{G_i'\}$ 的**加细**.

♣

例题 0.1 $S_3 \supset A_3 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_3 的正规序列.

证明

□

例题 0.2 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的正规序列, 而 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \langle(12)(34)\rangle \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的次正规序列, 后者是前者作为次正规序列的加细.

证明

□

定义 0.4

在群 G 中分别归纳地定义 G 的子群序列 $\{G^{(k)}\}$,$\{\Gamma_k(G)\}$,$\{C_k(G)\}$ 为

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad k > 0;$$

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)], \quad k > 1;$$

$$C_0(G) = \{1\}, \quad C_k(G)/C_{k-1}(G) = C(G/C_{k-1}(G)), \quad k > 0.$$

分别称群 G 中序列

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots,$$

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots,$$

$$C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq C_2(G) \subseteq \cdots$$

为 G 的**导出列**、**降中心列**和**升中心列**.
若有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $G^{(k)} = \{1\}$, 则称 G 是**可解群**. 若有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$, 则称 G 是**幂零群**.

♣

注 显然有

$$G^{(0)} = G \supseteq [G, G] = G^{(1)}.$$

假设 $G^{(k-1)} \supseteq G^{(k)}$, 则由引理 0.1(4)可得

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \supseteq [G^{(k)}, G^{(k)}] = G^{(k+1)}.$$

故由数学归纳法知

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots.$$

因此 G 的导出列是良定义的.

显然有

$$\Gamma_1(G) = G \supseteq [G, G] = \Gamma_2(G).$$

假设 $\Gamma_{k-1}(G) \supseteq \Gamma_k(G)$, 则由引理 0.1(4)可得

$$\Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)] \supseteq [G, \Gamma_k(G)] = \Gamma_{k+1}(G).$$

故由数学归纳法知

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots.$$

因此 G 的降中心列是良定义的.

由定理**????**知 $C_1(G) = C(G) \lhd G$. 设 π_1 是 G 到 $G/C_1(G)$ 上的自然同态. 令

$$C_2(G) = \pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))),$$

则由定理**????**知 $\pi_1(C_2(G)) = C(G/C_1(G)) \lhd G/C_1(G)$, 再由定理**????**知 $C_2(G) \lhd \pi_1^{-1}(G/C_1(G)) = G$. 因为 $\pi_1(C_1(G)) = \{1\} \subseteq C(G/C_1(G))$, 所以

$$C_1(G) \subseteq \pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))) = C_2(G).$$

从而由命题**????**知 $C_1(G) \lhd C_2(G)$. 将 π_1 看作限制在 $C_2(G)$ 上的同态, 则由群的同态基本定理知

$$C_2(G)/C_1(G) = C_2(G)/\ker\pi_1|_{C_2(G)} \cong \pi_1|_{C_2(G)}(C_2(G)) = C(G/C_1(G)).$$

因此

$$C_2(G)/C_1(G) = C(G/C_1(G)).$$

再令 π_2 是 G 到 $G/C_2(G)$ 上的自然同态, 则

$$C_3(G) = \pi_2^{-1}(C(G/C_2(G))),$$

同理可得

$$C_2(G) \lhd C_3(G), \quad C_3(G)/C_2(G) = C(G/C_2(G)).$$

如此进行下去, 即得所有 $C_k(G)$. 因此 G 的升中心列是良定义的.

命题 0.2

(1) 若 G 是一个群, 则 $G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right), \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

(2) 若 A 是群 B 的子群, 则 $A^{(k)} \subseteq B^{(k)}, \Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(B), \forall k \in \mathbb{N}$.

(3) 若 f 是群 G 到群 B 的同态, 则 $(f(G))^{(k)} = f(G^{(k)}), \Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G)), \forall k \in \mathbb{N}$.

(4) 设 A, B 是两个群, 则

$$(nA \times B)^{(k)} = A^{(k)} \times B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\Gamma_k(A \times B) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(5) 设 π_k 群是 G 到 $G/C_k(G)(k \in \mathbb{N})$ 上的自然同态, 则

$$C_{k+1}(G) = \pi_k^{-1}(C(G/C_k(G))), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(6) 设 G 是一个群, 则对 $\forall a \in G$, 有

$$a \in C_{k+1}(G) \Longleftrightarrow [a,b] \in C_k(G), \forall b \in G.$$

(7) 设 G 是一个群, 则

$$G^{(k+1)} \lhd G^{(k)}, \quad G^{(k)} \lhd G, \quad k = 0, 1, \cdots.$$
$$\Gamma_{k+1}(G) \lhd \Gamma_k(G), \quad \Gamma_k(G) \lhd G, \quad k = 0, 1, \cdots.$$
$$C_k(G) \lhd C_{k+1}(G), \quad C_k(G) \lhd G, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

证明

(1) 对 $\forall k_1 \in \mathbb{N}$, 都有

$$G^{(k_1+1)} = [G^{(k_1)}, G^{(k_1)}] = (G^{(k_1)})^{(1)}.$$

假设 $G^{(k_1+k_2-1)} = (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}$, 则

$$G^{(k_1+k_2)} = [G^{(k_1+k_2-1)}, G^{(k_1+k_2-1)}] = [(G^{(k_1)})^{(k_2-1)}, (G^{(k_1)})^{(k_2-1)}] = (G^{(k_1)})^{(k_2)}.$$

故由数学归纳法知

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由 k_1 的任意性可得

$$G^{(k_1+k_2)} = (G^{(k_1)})^{(k_2)}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

对 $\forall k_1 \in \mathbb{N}$, 都有

$$\Gamma_{k_1+1}(G) = \left[G, \Gamma_{k_1}(G)\right] = \Gamma_1\left(\Gamma_{k_1}(G)\right).$$

假设 $\Gamma_{k_1+k_2-1}(G) = \Gamma_{k_2-1}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right)$, 则

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \left[G, \Gamma_{k_1+k_2-1}(G)\right] = \left[G, \Gamma_{k_2-1}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right)\right] = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right), \quad \forall k_2 \in \mathbb{N}.$$

再由 k_1 的任意性可得

$$\Gamma_{k_1+k_2}(G) = \Gamma_{k_2}\left(\Gamma_{k_1}(G)\right), \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

(2) 由条件知 $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$. 假设 $A^{(k-1)} \subseteq B^{(k-1)}$, 则由引理 0.1(4)知

$$A^{(k)} = \left[A^{(k-1)}, A^{(k-1)}\right] \subseteq \left[B^{(k-1)}, B^{(k-1)}\right] = B^{(k)}.$$

故由数学归纳法知

$$A^{(k)} \subseteq B^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由条件知 $\Gamma_1(A) = A \subseteq B = \Gamma_1(B)$. 假设 $\Gamma_{k-1}(A) \subseteq \Gamma_{k-1}(B)$, 则由引理 0.1(4)知

$$\Gamma_k(A) = [A, \Gamma_{k-1}(A)] \subseteq [B, \Gamma_{k-1}(B)] = \Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法知

$$\Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(B), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(3) 显然 $f\left(G^{(0)}\right) = f(G) = (f(G))^{(0)}$. 假设 $f\left(G^{(k-1)}\right) = (f(G))^{(k-1)}$. 任取 $f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f\left(\left[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\right]\right) = f\left(G^{(k)}\right)$, 则 $a, b \in G^{(k-1)}$, 进而

$$f(a), f(b) \in f\left(G^{(k-1)}\right) = (f(G))^{(k-1)}.$$

从而

$$f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in \left[(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}\right] = (f(G))^{(k)}.$$

故 $f\left(G^{(k)}\right) \subseteq (f(G))^{(k)}$. 再任取 $f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in \left[(f(G))^{(k-1)}, (f(G))^{(k-1)}\right] = (f(G))^{(k)}$, 则

$$f(a), f(b) \in (f(G))^{(k-1)} = f\left(G^{(k-1)}\right),$$

进而由命题 1.5(i)知 $a, b \in G^{(k-1)}$. 从而

$$f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f\left(\left[G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\right]\right) = f\left(G^{(k)}\right).$$

故 $f\left(G^{(k)}\right) \supseteq (f(G))^{(k)}$. 因此 $f\left(G^{(k)}\right) = (f(G))^{(k)}$. 故由数学归纳法知 $f\left(G^{(k)}\right) = (f(G))^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.
显然 $\Gamma_1(f(G)) = f(G) = f(\Gamma_1(G))$. 假设 $\Gamma_{k-1}(f(G)) = f(\Gamma_{k-1}(G))$. 任取 $f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f([G, \Gamma_{k-1}(G)]) = f(\Gamma_k(G))$, 则 $a \in G, b \in \Gamma_{k-1}(G)$, 进而

$$f(a) \in f(G), \quad f(b) \in f(\Gamma_{k-1}(G)) = \Gamma_{k-1}(f(G)).$$

从而

$$f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in \left[f(G), \Gamma_{k-1}(f(G))\right] = \Gamma_k(f(G)).$$

因此 $f(\Gamma_k(G)) \subseteq \Gamma_k(f(G))$. 再任取 $f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in \left[f(G), \Gamma_{k-1}(f(G))\right] = \Gamma_k(f(G))$, 则

$$f(a) \in f(G), \quad f(b) \in \Gamma_{k-1}(f(G)) = f(\Gamma_{k-1}(G)).$$

进而由命题 1.5(i)知 $a \in G, b \in \Gamma_{k-1}(G)$. 从而

$$f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = f\left(a^{-1}b^{-1}ab\right) \in f([G, \Gamma_{k-1}(G)]) = f(\Gamma_k(G)).$$

因此 $\Gamma_k(f(G)) \subseteq f(\Gamma_k(G))$. 综上可知 $\Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G))$. 故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(f(G)) = f(\Gamma_k(G)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(4) 显然 $(A \times B)^{(0)} = A \times B = A^{(0)} \times B^{(0)}$. 假设 $(A \times B)^{(k-1)} = A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}$, 则

$$(A \times B)^{(k)} = \left[(A \times B)^{(k-1)}, (A \times B)^{(k-1)}\right] = \left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right]. \tag{1}$$

下证 $\left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right] = A^{(k)} \times B^{(k)}$. 任取 $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in \left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right]$, 则

$$a_i \in A^{(k-1)}, \quad b_i \in B^{(k-1)}, \quad i = 1, 2.$$

从而

$$\begin{aligned}
[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] &= \left(a_1^{-1}, b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1}, b_2^{-1}\right)(a_1, b_1)(a_2, b_2) = \left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2, b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right) \\
&= ([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in \left[A^{(k-1)}, A^{(k-1)}\right] \times \left[B^{(k-1)}, B^{(k-1)}\right] = A^{(k)} \times B^{(k)}.
\end{aligned}$$

故 $\left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right] \subseteq A^{(k)} \times B^{(k)}$. 再任取

$$([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \in A^{(k)} \times B^{(k)} = \left[A^{(k-1)}, A^{(k-1)}\right] \times \left[B^{(k-1)}, B^{(k-1)}\right],$$

则

$$a_i \in A^{(k-1)}, \quad b_i \in B^{(k-1)}, \quad i = 1, 2.$$

从而

$$\begin{aligned}
([a_1, a_2], [b_1, b_2]) &= \left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2, b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right) = \left(a_1^{-1}, b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1}, b_2^{-1}\right)(a_1, b_1)(a_2, b_2) \\
&= [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \in \left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right].
\end{aligned}$$

故 $A^{(k)} \times B^{(k)} \subseteq \left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right]$. 因此 $\left[A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}, A^{(k-1)} \times B^{(k-1)}\right] = A^{(k)} \times B^{(k)}$. 再结合(1)式可得

$$(A \times B)^{(k)} = A^{(k)} \times B^{(k)}.$$

故由数学归纳法可知

$$(A\times B)^{(k)}=A^{(k)}\times B^{(k)},\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

显然 $\Gamma_1(A\times B)=A\times B=\Gamma_1(A)\times\Gamma_1(B)$. 假设 $\Gamma_{k-1}(A\times B)=\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)$, 则

$$\Gamma_k(A\times B)=[A\times B,\Gamma_{k-1}(A\times B)]=[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]. \tag{2}$$

下证 $[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)$. 任取 $[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]\in[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]$, 则

$$a_1\in A,\quad b_1\in B,\quad a_2\in\Gamma_{k-1}(A),\quad b_2\in\Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]&=\left(a_1^{-1},b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1},b_2^{-1}\right)(a_1,b_1)(a_2,b_2)=\left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2,b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right)\\&=([a_1,a_2],[b_1,b_2])\in[A,\Gamma_{k-1}(A)]\times[B,\Gamma_{k-1}(B)]=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B).\end{aligned}$$

因此 $[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]\subseteq\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)$. 再任取

$$([a_1,a_2],[b_1,b_2])\in\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)=[A,\Gamma_{k-1}(A)]\times[B,\Gamma_{k-1}(B)],$$

则

$$a_1\in A,\quad a_2\in\Gamma_{k-1}(A),\quad b_1\in B,\quad b_2\in\Gamma_{k-1}(B).$$

从而

$$\begin{aligned}([a_1,a_2],[b_1,b_2])&=\left(a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2,b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2\right)=\left(a_1^{-1},b_1^{-1}\right)\left(a_2^{-1},b_2^{-1}\right)(a_1,b_1)(a_2,b_2)\\&=[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]\in[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)].\end{aligned}$$

因此 $\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)\subseteq[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]$. 故 $[A\times B,\Gamma_{k-1}(A)\times\Gamma_{k-1}(B)]=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B)$. 再由(2)式可得

$$\Gamma_k(A\times B)=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B).$$

故由数学归纳法可知

$$\Gamma_k(A\times B)=\Gamma_k(A)\times\Gamma_k(B),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(5) 由 G 的升中心列的定义可得

$$\pi_k(C_{k+1}(G))=C_{k+1}(G)/C_k(G)=C(G/C_k(G)),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(6) 由命题 0.2(5)可得

$$\begin{aligned}a\in C_{k+1}(G)=\pi_k^{-1}(C(G/C_k(G)))&\Longleftrightarrow\pi_k(a)\in\pi_k(C_{k+1}(G))\\&\Longleftrightarrow aC_k(G)\in C_{k+1}(G)/C_k(G)=C(G/C_k(G))\\&\Longleftrightarrow(aC_k(G))(bC_k(G))=(bC_k(G))(aC_k(G)),\forall b\in G\\&\Longleftrightarrow[a,b]C_k(G)=a^{-1}b^{-1}abC_k(G)=C_k(G),\forall b\in G\\&\Longleftrightarrow[a,b]\in C_k(G),\forall b\in G.\end{aligned}$$

(7) 由引理 0.1(3)知

$$G^{(k)}=[G^{(k-1)},G^{(i-1)}]\lhd G^{(k-1)},k=1,2,\cdots.$$

又显然 $G^{(0)}=G\lhd G$. 假设 $G^{(k-1)}\lhd G$, 则由引理 0.1(3)可得

$$G^{(k)}=\left[G^{(k-1)},G^{(k-1)}\right]\lhd G.$$

故由数学归纳法知 $G^{(k)}\lhd G,k=1,2,\cdots$.

显然 $\Gamma_1(G)=G\lhd G$. 假设 $\Gamma_{k-1}(G)\lhd G$, 则由引理 0.1(3)可得

$$\Gamma_k(G)=[G,\Gamma_{k-1}(G)]\lhd G.$$

故由数学归纳法知 $\Gamma_k(G) \lhd G, k=1,2,\cdots$. 又 $\Gamma_k(G) \subseteq \Gamma_{k-1}(G), k=1,2,\cdots$, 再由命题**????**知

$$\Gamma_k(G) \lhd \Gamma_{k-1}(G), \ \ k=1,2,\cdots.$$

显然 $C_0(G)=\{1\} \lhd G$. 假设 $C_k(G) \lhd G$. 设 π_k 是 G 到 $G/C_k(G)$ 的自然同态, 则由命题 0.2(5)知

$$C_{k+1}(G)=\pi_k^{-1}\left(C\left(G/C_k(G)\right)\right), \quad k=0,1,\cdots.$$

由定理**????**知 $C(G/C_k) \lhd G/C_k$. 再由定理**????**知

$$C_{k+1}(G)=\pi_k^{-1}\left(C\left(G/C_k(G)\right)\right) \lhd G, \quad k=0,1,\cdots.$$

故由数学归纳法知

$$C_k(G) \lhd G, \quad k=0,1,\cdots.$$

再由命题**????**知

$$C_k(G) \lhd C_{k+1}(G), \quad k=0,1,\cdots.$$

□

命题 0.3

Abel 群是幂零群, 也是可解群. 特别地, 循环群都是幂零群, 也都是可解群.

证明

因为循环群都是 Abel 群, 所以循环群都是幂零群, 也都是可解群.

□

例题 0.3 设 $G=S_3$, 于是 $G^{(1)}=\Gamma_2(G)=A_3$, 因而 $G^{(2)}=\{1\}$, 但 $\Gamma_3(G)=A_3=\Gamma_2(G)$, 故当 $k \geqslant 2$ 时均有 $\Gamma_k(G)=A_3 \neq \{1\}$, 故 S_3 是可解群但不是幂零群.

证明

□

定理 0.1

(1) 设 G 是可解群,A 是可解群 G 的子群, 则 A 也是可解群.

(2) 设 G 是可解群,f 是群 G 到群 G_1 的同态, 则 $f(G)$ 也是可解群.

(3) 设群 G 是群 B 过群 A 的扩张, 则 G 可解的充分必要条件是 A,B 都是可解群.

证明

(1) 由 G 是可解群知, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)}=\{1\}$. 再由命题 0.2(2)知 $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)}=\{1\}$, 故 $A^{(k_0)}=\{1\}$, 即 A 是可解群.

(2) 由 G 是可解群知, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)}=\{1\}$. 再由命题 0.2(3)知 $(f(G))^{(k_0)}=f\left(G^{(k_0)}\right)=\{1\}$, 故 $f(G)$ 是可解群.

(3) 由 G 是 B 过 A 的扩张, 故可假定 $A \lhd G, B=G/A$. 又设 π 是 G 到 B 的自然同态. 由命题 0.2(2)知

$$A^{(k)} \subseteq G^{(k)}, \ \ k=0,1,\cdots. \tag{3}$$

由命题 0.2(3)知

$$B^{(k)}=\pi(G^{(k)}), \ \ k=0,1,\cdots. \tag{4}$$

若 G 可解, 则存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $G^{(k_0)}=\{1\}$. 于是由(3)式得 $A^{(k_0)} \subseteq G^{(k_0)}=\{1\}$, 故 $A=\{1\}$, 即 A 可解. 再由(4)式得 $B^{(k_0)}=\pi(G^{(k_0)})=\pi(\{1\})=\{1\}$, 故 B 可解.

反之, 若 A,B 可解, 则存在 k_1,k_2, 使 $A^{(k_1)}=B^{(k_2)}=\{1\}$, 故由(4)式得 $\pi(G^{(k_2)})=B^{k_2}=\{1\}$, 即 $G^{(k_2)} \subseteq \ker\pi=A$. 由命题 0.2(2)知 $(G^{(k_1)})^{(k)} \subseteq A^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$. 因而再由命题 0.2(1)知 $G^{(k_1+k_2)}=(G^{(k_1)})^{(k_2)} \subseteq A^{(k_2)}=\{1\}$, 故 $G^{(k_1+k_2)}=\{1\}$, 于是 G 可解.

□

定理 0.2

设 G 是有限群, 则下列条件等价:

(1) G 是可解群;

(2) 存在 G 的正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使 G_i/G_{i+1} 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 G 的次正规序列

$$G = G_1' \supseteq G_2' \supseteq \cdots \supseteq G_s' = \{1\},$$

使 G_i'/G_{i+1}' 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant s-1$;

(4) 存在 G 的次正规序列

$$G = G_1'' \supseteq G_2'' \supseteq \cdots \supseteq G_t'' = \{1\},$$

使 G_i''/G_{i+1}'' 为素数阶群,$1 \leqslant i \leqslant t-1$.

注 由这个定理的证明知: **群 G 是可解群的充要条件是 G 的导出列都是正规序列且因子都是 Abel 群.**

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由于 G 可解, 故有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $G^{(k)} = \{1\}$. 再由命题 0.2(7)知 G 中有正规序列

$$G = G^0 \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(k)} = \{1\}.$$

因为 $G^{(i)} = \left[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}\right], G^{(i)} \lhd G^{(i-1)}$, 所以由命题 0.1(3)知 $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ 是 Abel 群, 故 G 的导出列满足 (2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由于正规序列必为次正规序列, 故条件 (2) 成立一定有条件 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $G = G_1' \supseteq G_2' \supseteq \cdots \supseteq G_s' = \{1\}$ 是 G 的次正规序列, 并且 G_i'/G_{i+1}' 为 Abel 群. 由于 G 是有限群, 故 G_i'/G_{i+1}' 也是有限群. 如果对某个 i 有

$$|G_i'/G_{i+1}'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中 $k \geqslant 1, p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相等的素数,$\sum\limits_{j=1}^{k} a_j > 1$. 令 P_j 是 Abel 群 G_i'/G_{i+1}' 的 Sylow p_j 子群, 则 $|P_j| = p_j^{a_j}$. 由命题**????**知 P_j 是 G_i'/G_{i+1}' 的正规子群. 由命题**??**知有内直积分解

$$G_i'/G_{i+1}' = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

又设 P_k' 为 P_k 的 $p_k^{a_k-1}$ 阶子群, 则 P_k' 也为 Abel 群 G_i'/G_{i+1}' 的子群, 由命题**????**知 $P_k' \lhd G_i'/G_{i+1}'$. 由定理**????**知

$$H' \triangleq P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_{k-1} \otimes P_k' \lhd G_i'/G_{i+1}'.$$

再利用 Lagrange 定理及定理**????**可得

$$|H'| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1},$$
$$[G_i'/G_{i+1}' : H'] = \frac{|G_i'/G_{i+1}'|}{|H'|} = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k-1}} = p_k. \tag{5}$$

设 π 为 G_i' 到 G_i'/G_{i+1}' 上的自然同态, 令 $H = \pi^{-1}(H')$, 则由 $1 \in H'$ 和推论**????**知

$$G_{i+1}' = \ker \pi = \pi^{-1}(1) \subseteq \pi^{-1}(H') = H = \pi^{-1}(H') \lhd G_i'.$$

于是由定理**????**可得

$$G_{i+1}' \lhd H \lhd G_i', \quad G_i'/H \cong \left(G_i'/G_{i+1}'\right)/\pi(H) = \left(G_i'/G_{i+1}'\right)/H'.$$

将 π 限制在 H 上, 则 $\pi|_H$ 是 H 到 H' 的满同态. 再利用定理**????**可得

$$H/G_{i+1}' \cong \pi(H)/\pi\left(G_{i+1}'\right) = \pi(H)/\{1\} = H'.$$

再结合(5)式可得

$$[G_i':H]=[G_i'/G_{i+1}':H']=p_k,$$
$$[H:G_{i+1}']=|H'|=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_{k-1}^{a_{k-1}}p_k^{a_k-1}.$$

故 G_i'/H 是素数阶群,H/G_{i+1}' 仍是 Abel 群. 同理可由 Abel 群 H/G_{i+1}' 得到 H_1, 使得 $G_{i+1}'\lhd H_1\lhd H$,H/H_1 是素数阶群,H_1/G_{i+1}' 仍是 Abel 群且

$$\left[H_1:G_{i+1}'\right]=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_{k-1}^{a_{k-1}}p_k^{a_k-2}.$$

依次进行下去, 因为 $\left[G_i':G_{i+1}'\right]$ 的阶有限, 所以这个操作必会在有限步后终止, 最终得到

$$G_{i+1}'\lhd H_m\lhd\cdots\lhd H_2\lhd H_1\lhd H,\quad m=\sum_{i=1}^{k}a_i-2,$$

H/H_1,H_k/H_{k+1},$k=1,2,\cdots m$ 都是素数阶群, 并且 $\left[H_m:G_{i+1}'\right]=p_1$, 故 H_m/G_{i+1}' 也是素数阶群. 根据 i 的任意性, 我们在每个 G_i',G_{i+1}' 之间都可以像这样插入一列群, 最终得到一个新的次正规序列, 并且这个新的次正规序列的因子都是素数阶群.

(4) $\Rightarrow$ (1). 因 $G_{t-1}'',G_{t-2}''/G_{t-1}''$ 都是素数阶群, 故由命题**??**知 $G_{t-1}'',G_{t-2}''/G_{t-1}''$ 都是循环群, 因而由命题 0.3知它们都可解. 注意到短正合序列

$$1\longrightarrow G_{t-1}''\xrightarrow{\lambda}G_{t-2}''\xrightarrow{\mu}G_{t-2}''/G_{t-1}''\longrightarrow 1,$$

故 G_{t-2}'' 是循环群 G_{t-2}''/G_{t-1}'' 过可解群 G_{t-1}'' 的扩张, 由定理 0.1知 G_{t-2}'' 是可解群. 假设 G_{i+1}'' 为可解群, 则同理可得 G_i'' 是循环群 G_i''/G_{i+1}'' 过可解群 G_{i+1}'' 的扩张, 故由定理 0.1知 G_i'' 是可解群. 因此由数学归纳法知当 $i=1$ 时知 G 为可解群.

□

例题 0.4 在 A_4 中有正规序列

$$A_4\supseteq K_4\supseteq\{\mathrm{id}\}.$$

A_4/K_4 是 3 阶群,K_4 是 Abel 群, 于是 A_4 是可解群.

证明

□

定理 0.3

(1) 设 G 是幂零群,A 是幂零群 G 的子群, 则 A 也是幂零群.

(2) 设 G 是幂零群,f 是群 G 到群 G_1 的同态, 则 $f(G)$ 也是幂零群.

(3) 设 G 是幂零群 B 过幂零群 A 的扩张, 若 G 是中心扩张或平凡扩张, 则 G 也是幂零群.

证明

(1) 由 G 是幂零群知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$. 再由命题 0.2(2)知 $\Gamma_{k_0}(A)\subseteq\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$, 故 $\Gamma_{k_0}(A)=\{1\}$. 由此知 A 也为幂零群.

(2) 由 G 是幂零群知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\Gamma_{k_0}(G)=\{1\}$. 再由命题 0.2(2)知 $\Gamma_{k_0}(f(G))=f(\Gamma_{k_0}(G))=f(\{1\})=\{1\}$, 故 $\Gamma_{k_0}(f(G))=\{1\}$. 由此知 G_1 也是幂零群.

(3) 若 G 是中心扩张, 则由条件知 $A\subseteq C(G),G/A=B$, 又设 π 是 G 到 B 上的自然同态. 由 B 幂零知, 存在 $k_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$\pi(\Gamma_{k_1}(G))=\Gamma_{k_1}(B)=\{1\},$$

因而 $\Gamma_{k_1}(G)\subseteq\ker\pi=A\subseteq C(G)$. 故 $\forall a\in\Gamma_{k_1}(G),b\in G$ 有

$$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab=a^{-1}a=1.$$

于是 $\Gamma_{k_1+1}(G)=[G,\Gamma_{k_1}(G)]=\{1\}$, 这就证明了 G 是幂零群.

若 G 是平凡扩张, 则由定理??知 $G \cong A \times B$ 且 A, B 都是幂零群. 由命题 0.2(4)知

$$\Gamma_k(G) = \Gamma_k(A) \times \Gamma_k(B), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由 A, B 是幂零群知, 存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $\Gamma_{k_1}(A) = \Gamma_{k_2}(B) = \{1\}$. 又因为

$$\Gamma_{k_1}(A) \supseteq \Gamma_k(A), \ \forall k \geqslant k_1; \quad \Gamma_{k_2}(B) \supseteq \Gamma_k(B), \ \forall k \geqslant k_2.$$

所以

$$\Gamma_k(A) = \{1\}, \ \forall k \geqslant k_1; \quad \Gamma_k(B) = \{1\}, \ \forall k \geqslant k_2.$$

于是取 $K = \max\{k_1, k_2\}$, 则

$$\Gamma_K(G) = \Gamma_K(A) \times \Gamma_K(B) = \{1\} \times \{1\} = \{1\}.$$

故 G 也为幂零群.

□

定理 0.4

设 G 是群, 则下列条件等价:

(1) G 是一个幂零群;

(2) G 中有正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$,$1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $C_k(G) = G$.

注 由这个定理的证明知: **群 G 是幂零群的充要条件是 G 的降中心列都是正规序列且 $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \subseteq C(G/\Gamma_{i+1})$.**

证明 (1)⇒(2). 因 G 是幂零群, 故有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$. 再由命题 0.2(7)知 G 中有正规序列

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_k(G) = \{1\},$$

因而由推论????知 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq G/\Gamma_{i+1}(G)$. 设 π 为 G 到 $G/\Gamma_{i+1}(G)$ 的自然同态, 由命题 0.2(3)及 $[G, \Gamma_i(G)] = \Gamma_{i+1}(G)$ 知

$$[G/\Gamma_{i+1}(G), \Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G)] = [\pi(G), \pi(\Gamma_i(G))] = \pi([G, \Gamma_i(G)]) = \pi(\Gamma_{i+1}(G)) = \{1\},$$

因而由引理 0.1(1)知 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq C(G/\Gamma_{i+1}(G))$, 故 G 的降中心列满足条件 (2) 的要求.

(2) ⇒ (3). 用反序归纳法证明 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$, 其中 $C_0(G) = \{1\}$. 当 $i = r$ 时,$G_r = \{1\} = C_0(G) = C_{r-r}(G)$. 设 $i+1$ 时已成立, 因而 $G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G)$. 又 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$, 由命题????知

$$[G_i, G] \subseteq G_{i+1}.$$

即对 $\forall a \in G_i$, 有

$$[a, b] \in G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G), \forall b \in G.$$

因而由命题 0.2(6)知 $a \in C_{r-i}(G)$, 故 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$. 特别地, 有 $G_1 = G \subseteq C_{r-1}(G)$, 即取 $k = r-1$ 知条件 (3) 成立.

(3) ⇒ (1). 设有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $C_k(G) = G$, 再结合命题 0.2(7)知 G 中有正规序列

$$G = C_k(G) \supseteq C_{k-1}(G) \supseteq \cdots \supseteq C_1(G) \supseteq C_0(G) = \{1\}.$$

用数学归纳法证明 $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G), i = 1, 2, \cdots$. 当 $i = 1$ 时, 显然成立. 假设结论对 i 成立, 现在考虑 $i+1$ 的情形. 由于 $C_{k-i+1}(G)/C_{k-i}(G) = C(G/C_{k-i}(G))$, 故由命题????有 $[G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G)$, 于是再结合引理 0.1(4)得

$$\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \subseteq [G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G).$$

故由数学归纳法知 $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G), i = 1, 2, \cdots$. 特别地, 有 $\Gamma_{k+1}(G) \subseteq C_0(G) = \{1\}$, 故 $\Gamma_{k+1} = \{1\}$. 因而 G 是幂零群.

□

定理 0.5

设 p 是一个素数, 则有限 p 群都是幂零群.

♡

证明 由命题 0.3知阶数为 p 的有限 p 群都是幂零群. 假设结论对阶数小于等于 p^{n-1} 的有限 p 群都成立, 现设 $|G| = p^n$, 则由定理**????**知 $C(G) \neq \{1\}$, 从而 $|C(G)| > 1$. 若 $|C(G)| = |G|$, 则 G 是 Abel 群, 由命题 0.3知 G 是幂零群. 下设 $|C(G)| = p^k (1 \leqslant k < n)$, 则由 Lagrange 定理得

$$|G| = [G : C(G)] \cdot |C(G)| \Longleftrightarrow [G : C(G)] = p^{n-k} < p^n.$$

于是由归纳假设知 $G/C(G), C(G)$ 都是幂零群. 又显然 G 是 $G/C(G)$ 过 $C(G)$ 的中心扩张, 故由定理 0.3(3)知 G 为幂零群. 因此由数学归纳法知任何有限 p 群都是幂零群.

□

例题 0.5 设 H 是四元数体,$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, 其中 $1, i, j, k \in H$ 如命题**??**所述, 则 G 是 8 阶群. 这是一个非 Abel 幂零群的例子.

证明

□