

0.1 群

定义 0.1

令 (S, \cdot) 是一个么半群, $x \in S$ 。我们称 x 是**可逆的**, 当且仅当

$$\exists y \in S, x \cdot y = y \cdot x = e$$

其中 y 被称为 x 的**逆元**, 记作 x^{-1} 。

命题 0.1 (逆元存在必唯一)

令 (S, \cdot) 是一个么半群。假设 $x \in S$ 是可逆的, 则其逆元唯一。也就是说, 如果 $y, y' \in S$ 都是它的逆元, 则 $y = y'$ 。

证明 假设 y, y' 都是 x 的逆元。则 $y \cdot x = e, x \cdot y' = e$ 。从而

$$y = y \cdot e = y \cdot x \cdot y' = e \cdot y' = y'.$$

□

定义 0.2 (群)

令 (G, \cdot) 是一个么半群, 若 G 中所有元素都是可逆的, 则我们称 (G, \cdot) 是一个**群**。换言之, 若 \cdot 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 (G, \cdot) 是个**群**, 或 G 对 \cdot 构成群, 当这个运算满足结合律, 存在单位元, 且每个元素具有逆元。再进一步展开来说, 同样等价地, 若 \cdot 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 (G, \cdot) 是个**群**, 当

$$\forall x, y, z \in G, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \cdot e = e \cdot x = x,$$

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

♣

命题 0.2

令 (G, \cdot) 是一个群, 令 $x \in G$, 则 $(x^{-1})^{-1} = x$ 。

♣

证明 方便起见, 我们令 $y = x^{-1}$, 于是有 $x \cdot y = y \cdot x = e$ 。我们要证明 $y^{-1} = x$, 而这就是 $y \cdot x = x \cdot y = e$, 显然成立。这就证明了逆元的逆元是自身。 □

命题 0.3

令 (G, \cdot) 是一个群, 令 $x, y \in G$, 则 $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ 。

♣

证明 我们利用定义来证明。一方面, 利用广义结合律, $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e$; 另一方面, 同理可以得到另一边的等式 $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = e$, 这就告诉我们 $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ 。 □

定义 0.3

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$ 。若 $n \in \mathbb{N}_1$, 我们定义 $x^{-n} = (x^{-1})^n$, 另外定义 $x^0 = e$ 。

♣

命题 0.4

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$ 。则满足

$$(1) \ x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \ x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) \ x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

♣

证明

(1) (i) 当 $n = 0$ 时, 结论显然成立.

(ii) 当 $n \in \mathbb{N}_1$ 时, 只需证明 $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$ 即可. 注意到

$$\begin{aligned} x^n \cdot (x^{-1})^n &= \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \uparrow} \right) = e, \\ (x^n)^{-1} \cdot x^n &= \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) = e. \end{aligned}$$

故根据逆元的定义可知结论成立.

(iii) 当 n 为负整数时, 令 $m = -n$, 则 $m \in \mathbb{N}_1$. 从而我们只需证 $x^m = (x^{-1})^{-m} = (x^{-m})^{-1}$ 即可. 根据定义 0.3 可得

$$\begin{aligned} x^{-m} \cdot x^m &= (x^{-1})^m \cdot x^m = \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{m \uparrow} \right) = e, \\ x^m \cdot x^{-m} &= x^m \cdot (x^{-1})^m = \left(\underbrace{x \cdots x}_{m \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m \uparrow} \right) = e. \end{aligned}$$

故根据逆元的定义可知 $x^m = (x^{-m})^{-1}$. 又由定义 0.3 可知, $(x^{-1})^{-m} = ((x^{-1})^{-1})^m = x^m$. 故结论成立.

(2) 首先注意到,

(i) 如果 $m, n \in \mathbb{N}_1$, 则由推论 ?? 就立刻得到这个性质. 若 m 或 n 是 0, 利用单位元的性质也是显然的. 从而我们只需证明当 m, n 至少有一个小于 0 时, $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$. 故我们可以不失一般性, 假设 $m < 0$, 记 $m' = -m$, 则 $x^m = x^{-m'} = (x^{-1})^{m'}$.

(ii) 若 $n < 0$, 记 $n' = -n$, 则同理, $x^n = (x^{-1})^{n'}$, 故 $x^{m+n} = (x^{-1})^{m'+n'}$, 这里 $m', n' \in \mathbb{N}_1$, 于是就有

$$x^{m+n} = (x^{-1})^{m'+n'} = (x^{-1})^{m'} (x^{-1})^{n'} = x^m x^n,$$

因此得证了.

(iii) 若 $0 < n < m'$, 则 $x^{m+n} = x^{-(m'-n)} = (x^{-1})^{m'-n}$. 而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ \Leftrightarrow (x^{-1})^{m'-n} &= (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} &= \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \end{aligned}$$

对上式两边左乘 $x^{m'-n}$, 得到

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \Leftrightarrow \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} = \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow x^{m'-n} \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} \right) &= x^{m'-n} \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{m'-n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} \right) &= \left(\underbrace{x \cdots x}_{m'-n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow e &= \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \uparrow} \right) \cdot x^n \Leftrightarrow e = (x^n)^{-1} \cdot x^n \end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(iv) 若 $n \geq m'$, 则 $x^{m+n} = x^{n-m'}$. 而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ \Leftrightarrow x^{n-m'} &= (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} &= (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \end{aligned}$$

对上式两边右乘 $(x^{-1})^{n-m'}$, 得到

$$\begin{aligned} x^{m+n} = x^m \cdot x^n &\Leftrightarrow \underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} \right) \cdot (x^{-1})^{n-m'} = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \cdot (x^{-1})^{n-m'} \\ &\Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m' \uparrow} \right) = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m' \uparrow} \right) \\ &\Leftrightarrow e = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{m' \uparrow} \right) \Leftrightarrow e = (x^{-1})^{m'} \cdot x^{m'} \end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(3) 先证 $x^{mn} = (x^m)^n$. 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 固定 m , 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n = k$ 时, 结论成立, 即 $x^{mk} = (x^m)^k$. 则由 (2) 的结论可得

$$x^{m(k+1)} = (x^m)^{k+1} = (x^m)^k \cdot x^m = (x^m)^{k+1}.$$

故由数学归纳法可知, $x^{mn} = (x^m)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 再由 m 的任意性可知 $x^{mn} = (x^m)^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 同理可证 $x^{nm} = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 由于 $x^{nm} = x^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 因此 $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. □

定义 0.4 (Abel 群)

若 (G, \cdot) 是一个群, 我们称它是 **Abel 群**, 或 **交换群**, 当该运算满足交换律, 即

$$\forall x, y \in G, x \cdot y = y \cdot x$$



例题 0.1 常见的群

1. 我们称只有一个元素的群为**平凡群**, 记作 e . 其中的二元运算是 $e \cdot e = e$.
2. 常见的加法群有 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ 等. 这些加法群分别称为**整数加群**、**有理数加群**、**实数加群**、**复数加群**.
3. 常见的乘法群有 $(\mathbb{Q}^\times, +)$, $(\mathbb{R}^\times, +)$, $(\mathbb{C}^\times, +)$ 等, 其中 $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, 类似地定义其余两个集合. 这些乘法群分别称为**有理数乘群**、**实数乘群**、**复数乘群**.
4. 在向量空间中, n 维欧式空间对加法构成群即 $(\mathbb{R}^n, +)$. 类似地 $(\mathbb{C}^n, +)$, $(\mathbb{Q}^n, +)$, $(\mathbb{Z}^n, +)$ 也是群. 对于这些群, 单位元都是零向量, 加法逆元则是对每个坐标取相反数, 如 (x_1, \dots, x_n) 的加法逆元是 $(-x_1, \dots, -x_n)$.
5. 所有的 $m \times n$ 矩阵也对加法构成群, 单位元都是零矩阵, 加法逆元则是对每一项取相反数. 对于 $n \times n$ 的实矩阵加法群, 我们记作 $(M(n, \mathbb{R}), +)$, 类似地我们将 $n \times n$ 的复矩阵加法群记作 $(M(n, \mathbb{C}), +)$.

证明 证明都是显然的. □

引理 0.1

令 (S, \cdot) 是一个么半群, 令 G 是其所有可逆元素构成的子集, 则 (G, \cdot) 是个群. ♥

注 我们称呼么半群中的可逆元素为“单位”，因此 G 是由所有该运算下的单位构成的集合（在这里甚至是群）。

证明 首先结合律完全继承自 S ，不需要证明。而单位元是可逆的，因此 $e \in G$ 。剩下要证明 G 中每个元素都有（ G 中的）逆元，而这几乎是显然的。假设 $x \in G$ ，则 x 是可逆元素，我们取 $y \in S$ ，使得 $x \cdot y = y \cdot x = e$ （这里要注意我们只能首先保证 y 在全集 S 中）。接下来我们要证明 $y \in G$ ，即 y 可逆，而这是显然的，因为 x 正是它的逆。所以 $y \in G$ 。这样，就证明了 (G, \cdot) 是个群。 \square

定义 0.5 (子群)

设 (G, \cdot) 是一个群，且 $H \subset G$ 。我们称 H 是 G 的**子群**，记作 $H < G$ ，当其包含了单位元，在乘法和逆运算下都封闭，即

$$\begin{aligned} e &\in H, \\ \forall x, y \in H, x \cdot y &\in H, \\ \forall x \in H, x^{-1} &\in H. \end{aligned}$$

命题 0.5 (子群也是群)

令 (G, \cdot) 是一个群。若 H 是 G 的子群，则 (H, \cdot) 也是个群。

证明 就二元运算的良好定义性而言，子群第一个条件（封闭性）就满足了，这使得我们后面的讨论是有意义的。首先，结合律肯定满足，因为它是个子集。其次，根据子群的第二个条件， $e \in H$ 是显然的。再次，我们要证明每个 H 中元素有 H 中的逆元，而这是子群的第三个条件。 \square

推论 0.1 (子群的传递性)

若 (G, \cdot) 是一个群，且 $H < G, K < H$ ，则一定有 $K < G$ 。因此我们可以将 $H < G, K < H$ 简记为 $K < H < G$ 。

证明 证明是显然的。 \square

命题 0.6 (子群的等价条件)

(H, \cdot) 是子群等价于

$$\begin{aligned} e &\in H, \\ \forall x, y \in H, x \cdot y^{-1} &\in H. \end{aligned}$$

证明 设 (H, \cdot) 是子群。令 $x, y \in H$ ，利用逆元封闭性得到 $y^{-1} \in H$ ，再利用乘法封闭性得到 $x \cdot y^{-1} \in H$ 。

反过来，假设上述条件成立。令 $x \in H$ ，则 $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$ ，这证明了逆元封闭性。接下来，令 $x, y \in H$ ，则利用逆元封闭性， $y^{-1} \in H$ ，故 $x \cdot (y^{-1})^{-1} = x \cdot y \in H$ 。这就证明了乘法封闭性。

综上，这的确是子群的等价条件。 \square

命题 0.7 (子群的任意交仍是子群)

设 G 是一个群， $(H_i)_{i \in I}$ 是一族 G 的子群，则它们的交集仍然是 G 的子群，即

$$\bigcap_{i \in I} H_i < G.$$

证明 首先，设 e 是 G 的单位元，则由子群对单位元封闭可知， $e \in H_i, \forall i \in I$ 。从而 $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$ 。

其次，对 $\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$ ，都有 $x, y \in H_i, \forall i \in I$ 。根据子群对逆元封闭可知， $y^{-1} \in H_i, \forall i \in I$ 。于是再由子群对乘法封闭可知， $xy^{-1} \in H_i, \forall i \in I$ 。故 $xy^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$ 。

综上， $\bigcap_{i \in I} H_i < G$ 。 \square

定义 0.6 (一般线性群)

我们对于那些 $n \times n$ 可逆实矩阵构成的乘法群, 称为 **(实数上的) n 阶一般线性群**, 记作 $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 。由于一个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零, 因此

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}.$$

定义 0.7 (特殊线性群)

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n \times n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的) n 阶特殊线性群**, 记作 $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, 即

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

命题 0.8

$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 是个群。

证明 根据定义, $SL(n, \mathbb{R})$ 首先是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子集, 那么只要证明它是个子群即可。首先, 乘法单位元单位矩阵的行列式恰好是 1 (这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因), 这就证明了 $I \in SL(n, \mathbb{R})$ ($I = I_n$ 指的是 n 阶单位矩阵)。另外, 我们要证明 $SL(n, \mathbb{R})$ 在乘法下封闭。令 A, B 是两个行列式为 1 的 $n \times n$ 实矩阵。由于行列式满足 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, 因此 AB 的行列式也是 1, 也就在特殊线性群中。这就证明了特殊线性群确实是个群。至于逆元封闭性, 我们利用 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ 。假设 $\det(A) = 1$, 则 $\det(A^{-1}) = 1$, 于是 $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$ 。综上, 特殊线性群确实是个群。 \square

定义 0.8 (群同态)

令 $(G, \cdot), (G', *)$ 是两个群, 且 $f: G \rightarrow G'$ 是一个映射。我们称 f 是一个**群同态**, 当其保持了乘法运算, 即

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

命题 0.9

若 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则 $f(e) = e', f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ 。

笔记 也就是说, f 不仅把乘积映到乘积, 而且把单位元映到单位元, 把逆元映到逆元。在这个意义下, 实际上 f 将所有群 G 的“信息”都保持到了 G' 上, 包括单位元, 乘法和逆元。至于结合律 (或者更基础的封闭性), 显然两边本来就有, 就不必再提。

证明 首先, 因为 $e \cdot e = e$, 所以利用同态的性质, $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) * f(e)$ 。这时, 两边同时左乘 $f(e)^{-1}$, 就可以各约掉一个 $f(e)$, 得到 $e' = f(e)$, 这就证明了 f 把单位元映到单位元。

另一方面, 令 $x \in G$, 则 $e' = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ 。同理 $e' = f(x^{-1}) * f(x)$ 。于是由定义, $f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元, 即 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ 。这就证明了这个命题。 \square

命题 0.10

$\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ 是一个乘法群同态。


证明 证明是显然的。 \square

定义 0.9 (群同态的核与像)

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则我们定义 f 的**核**与**像**, 记作 $\ker(f)$ 与 $\text{im}(f)$, 分别为

$$\ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\} \subset G,$$

$$\text{im}(f) = \{y \in G' : \exists x \in G, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G\} \subset G'.$$

 **笔记** 群同态的核与像示意图如下:

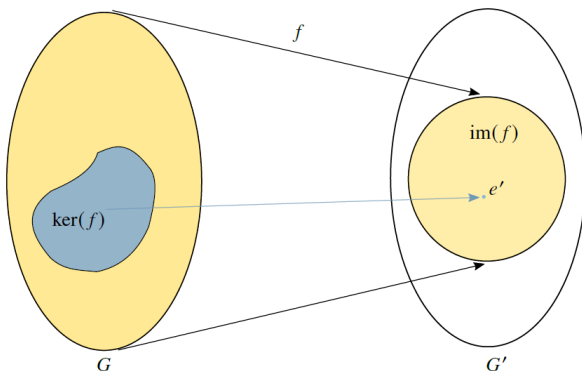


图 1: 群同态的核与像示意图

命题 0.11

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则核是定义域的子群, 像是陪域的子群, 即

$$\ker(f) < G, \quad \text{im}(f) < G'.$$

证明 先证明第一个子群关系。我们利用 $f(e) = e'$ 来说明 $e \in \ker(f)$ 。接着, 设 $x, y \in \ker(f)$, 只需证明 $xy^{-1} \in \ker(f)$ 。利用同态的性质, $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e'e'^{-1} = e'$, 这就证明了 $xy^{-1} \in \ker(f)$ 。第一个子群关系得证。

再证明第二个子群关系。同样由于 $f(e) = e'$, 我们有 $e' \in \text{im}(f)$ 。接着, 设 $y = f(x), y' = f(x') \in \text{im}(f)$, 只需证明 $yy'^{-1} \in \text{im}(f)$ 。同样利用同态的性质, $yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \text{im}(f)$ 。第二个子群关系也得证。这样我们就证完了整个命题。 \square

例题 0.2 证明: $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 。

证明 由命题 0.10 可知, $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ 是一个乘法群同态。注意到 $\ker(\det) = (SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, 因此由命题 0.11 可知, $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) = \ker(\det) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 。 \square

定义 0.10 (满同态与单同态)


令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 我们称 f 是一个**满同态**当 f 是满射, 称 f 是一个**单同态**当 f 是单射。

命题 0.12

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则 f 是一个单同态当且仅当 $\ker(f) = \{e\}$ 。也就是说, 一个群同态是单的当且仅当核是平凡的。

证明 假设 f 是单的, 那么因为 $f(e) = e'$, 因此若 $f(x) = e'$, 则利用单射的性质我们一定有 $x = e$, 这就证明了核是平凡的。(这个方向是显然的)

另一个方向不那么显然。我们假设 $\ker(f) = \{e'\}$ 。假设 $x, x' \in G$, 使得 $f(x) = f(x')$, 我们只须证明 $x = x'$ 。在这里, 我们同时右乘 $f(x')^{-1}$, 得到 $f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) = e'$ 。而因为核是平凡的, 所以必须有 $xx'^{-1} = e$ 。接下来同时右乘 x' , 我们就得到 $x = x'$ 。这就证明了这个命题。 \square

 **笔记** 平凡群, 满同态和单同态示意图如下:

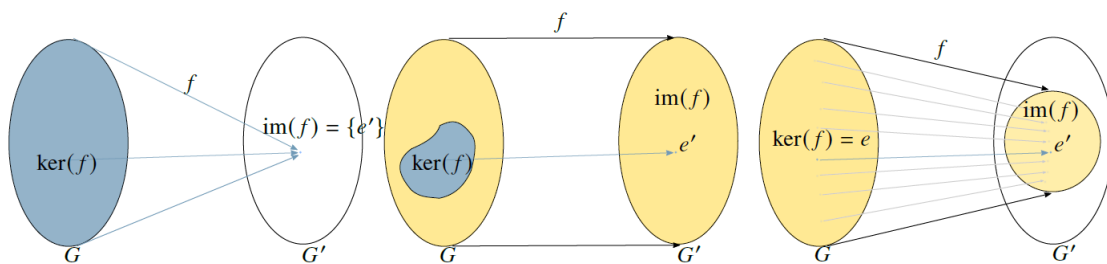


图 2: 平凡群, 满同态和单同态示意图

定义 0.11 (群同构)

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**群同构**, 当 f 既是一个双射, 又是一个群同态。简单来说, 同构就是双射的同态。

命题 0.13 (群同构的逆也是群同构)

若 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同构, 则 f^{-1} 也是群同构。

证明 因为 f^{-1} 也是双射, 所以我们只须证明 f^{-1} 是群同态。令 $x', y' \in G'$, 设 $x' = f(x), y' = f(y)$ 。则 $x' * y' = f(x \cdot y), x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 故 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。这就完成了证明。 \square

定义 0.12 (两个群的直积)

令 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 我们记 $(G \times G', *)$ 为 (G, \cdot_1) 和 (G', \cdot_2) 的**直积**。满足对于 $(x, y), (x', y') \in G \times G'$, 有

$$(x, y) * (x', y') = (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y').$$

命题 0.14 (两个群的直积仍是群)

若 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 则它们的直积 $(G \times G', *)$ 还是一个群。

证明 封闭性: 因为 G 在 \cdot_1 下封闭, G' 在 \cdot_2 下封闭, 而 $G \times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的, 则 $G \times G'$ 在 $*$ 下也是封闭的。

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律。

单位元: 设 e, e' 分别是 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 的单位元, 则不难想象, (e, e') 是直积的单位元。对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 我们有 $(x, y) * (e, e') = (x \cdot_1 e, y \cdot_2 e') = (x, y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 (e, e') 是直积的单位元。

逆元: 对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 设 x^{-1}, y^{-1} 分别是 x, y 的逆元, 则同样不难想象, (x^{-1}, y^{-1}) 是 (x, y) 的逆元。

\square

定义 0.13 (一族群的直积)


令 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, 其中 I 是一个指标集。我们记它们的**直积**为 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 。满足对于 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 有

$$(x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i \in I}.$$

$$(x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i \in I}.$$

命题 0.15 (一族群的直积仍是群)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, 则它们的直积 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个群。

 **笔记** 最经典的例子就是通过 n 个实数加群 $(\mathbb{R}, +)$ 直积得到的 $(\mathbb{R}^n, +)$ 。

证明 证明与命题 0.14 同理. 故我们只列出一些重点. 封闭性与结合律是显然的. 单位元是 $(e_i)_{i \in I}$, 而 $(x_i)_{i \in I}$ 的逆元是 $(x_i^{-1})_{i \in I}$. □

定义 0.14 (投影映射)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, $j \in I$ 是任意指标, 我们定义映射到指标 j 的**投影映射**为

$$p_j : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j.$$

对于 $(x_i)_{i \in I}$, 我们称 $p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ 为 $(x_i)_{i \in I}$ 的**投影**. ♣

命题 0.16 (投影映射是群同态)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, $j \in I$ 是任意指标, 则投影映射 $p_j : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j$ 是个群同态. ♠

证明 令 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 则

$$p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j, \quad p_j((y_i)_{i \in I}) = y_j$$

$$p_j((x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I}) = p_j((x_i \cdot_i y_i)_{i \in I}) = x_j \cdot_j y_j = p_j((x_i)_{i \in I}) \cdot_j p_j((y_i)_{i \in I}).$$

□