

## 0.1 杂题

**例题 0.1** 设  $Y, x_0, \delta > 0$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx.$$

**证明**


$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{Y}} \int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.2** 设  $f \in C^3[0, x], x > 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, x)$  使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \quad (1)$$

若还有  $f'''(0) \neq 0$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x}$ .

 **笔记** 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x) - f(0))t + f(0) + f''(\xi)t(t-x), t \in [0, x].$$

两边同时对  $t$  在  $[0, x]$  上积分就能得到(1)式.

**证明** 设  $K \in \mathbb{R}$  使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t) dt - \frac{y}{2}[f(0) + f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0) + f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y) - f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由  $g(x) = g(0) = 0$  和罗尔中值定理得  $\xi_1 \in (0, x)$  使得  $g'(\xi_1) = 0$ . 注意到  $g'(0) = 0$ . 再次由罗尔中值定理得  $\xi \in (0, x)$  使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即  $K = f''(\xi)$ , 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0, \xi).$$

于是

$$f'''(\eta) \frac{\xi}{x} = \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) \frac{\xi}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \int_0^x f(t) dt + 6x[f(0)+f(x)] - f''(0)x^3}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12f(x) + 6[f(x)+f(0)] + 6xf'(x) - 3f''(0)x^2}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6xf''(x) - 6f''(0)x}{12x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'''(0).
 \end{aligned}$$

因为  $0 < \eta < \xi < x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) = f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}.$$

□

**例题 0.3** 设  $f$  是  $[0, +\infty)$  上的递增正函数. 若  $g \in C^2[0, +\infty)$  满足

$$g''(x) + f(x)g(x) = 0. \quad (2)$$

证明: 存在  $M > 0$  使得

$$|g(x)| \leq M, \quad |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

**证明** 对  $\forall x > 0$ , 有  $f$  在  $[0, x]$  上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知  $f \in R[0, x], \forall x > 0, f$  在  $[0, +\infty)$  上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + \int_0^x f(y)g'(y)g(y) dy = 0, \quad \forall x > 0 \quad (4)$$

利用  $f$  递增和第二积分中值定理和 (4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + f(x) \int_{\xi}^x g'(y)g(y) dy = 0, \quad \xi \in [0, x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2 - \frac{1}{2}|g'(0)|^2 + \frac{[f(x)]^2}{2} [g^2(x) - g^2(\xi)] = 0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2 = |g'(0)|^2 - f(x)g^2(x) + f(x)g^2(\xi) \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi). \quad (5)$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g'(x)g(x) = 0, \quad \forall x > 0.$$

即

$$\int_0^x \frac{g''(y)g'(y)}{f(y)} dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \forall x > 0$$

由  $f$  递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)} \int_0^{\eta} g''(y)g'(y) dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \eta \in [0, x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] \leq g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \quad (6)$$

由  $g \in C[0, +\infty)$  知  $g$  有界, 即存在  $C_1 > 0$ , 使得  $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$ . 于是由(5)式知

$$|g'(x)|^2 \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(x) \leq |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \quad (7)$$

又因为  $f$  是递增正函数, 所以  $f(x) \geq f(0) > 0, \forall x > 0$ . 从而存在  $C_2 > 0$ , 使得

$$|g'(0)|^2 \leq C_2 f(0) \leq f(x), \forall x > 0.$$

于是取  $M = \max \left\{ C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)} \right\}$ , 则由(7)式和(6)式可得, 对  $\forall x > 0$ , 有

$$|g(x)|^2 \leq M \leq M^2,$$

$$|g'(x)|^2 \leq C_2 f(x) + C_1 f(x) \leq M f(x) \leq M^2 f(x).$$

进而

$$|g(x)| \leq M, |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了(3). □

**例题 0.4** 设函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上严格单调下降, 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**证明** 反证, 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in (a, +\infty)$ , 则存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 满足  $x_{n_k} \rightarrow c$ . 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

则  $f(x_n)$  的子列极限也收敛到  $A$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$ . 由  $x_{n_k} \rightarrow c$  知, 存在  $K \in \mathbb{N}$ , 使得

$$x_{n_k} \in (c - \delta, c + \delta), \forall k > K.$$

其中  $\delta = \min \left\{ \frac{c-a}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ . 任取  $x_1, x_2 \in (c + \delta, +\infty)$  且  $x_1 < x_2$ , 则由  $f$  严格递减知

$$f(x_{n_k}) > f(x_1) > f(x_2) > f(x), \forall x > x_2, \forall k > K.$$

左边令  $k \rightarrow +\infty$ , 右边令  $x \rightarrow +\infty$  得

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_1) > f(x_2) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

显然矛盾! □

**例题 0.5** 设  $\{x_n\} \subset (0, 1)$  满足对  $i \neq j$ , 有  $x_i \neq x_j$ , 讨论函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$  连续性.

**证明** 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有  $\operatorname{sgn}(x - x_n)$  在  $x = x_n$  处间断, 在  $x \neq x_n$  处连续.

当  $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  时,  $f(x)$  的每一项都连续. 又  $f(x)$  一致收敛, 故  $f$  在  $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  处都连续.

当  $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  时, 有

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x - x_k)}{2^k} + \sum_{n \neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在  $x = x_k$  处间断. 故  $f(x)$  在  $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  处都间断. □

**例题 0.6** 证明  $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x}$  在  $x \in [0, +\infty)$  一致收敛性.

**证明** 由 Abel 变换得, 对  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$  成立

$$\begin{aligned} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^n (-1)^t \frac{t}{t^2+x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{t=m}^{n-1} \left( \frac{t}{t^2+x} - \frac{t+1}{(t+1)^2+x} \right) s_t + \frac{n}{n^2+x} s_n \right] \\ &= \sum_{t=m}^{\infty} \left( \frac{t}{t^2+x} - \frac{t+1}{(t+1)^2+x} \right) s_t \\ &= \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t, \end{aligned}$$

这里  $s_t = \sum_{i=1}^t (-1)^i = (-1)^t \in \{1, -1\}$ . 一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由  $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$  和  $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}$  都收敛知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)} = 0.$$

于是我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x} = 0, \text{ 关于 } x \in [0, +\infty) \text{ 一致,}$$

这就证明了  $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x}$  在  $x \in [0, +\infty)$  一致收敛.

□

### 命题 0.1

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上连续实值右可导函数, 记  $D^+f(x)$  为  $f(x)$  的右导函数, 如果  $f(a) = 0$ , 且  $D^+f(x) \leq 0$ , 则  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ .

♠

**证明** (1) 先假定  $D^+f(x) < 0$ , 如果结论不成立, 则存在  $x_1 \in (a, b)$ , 使  $f(x_1) > 0$ . 记

$$x_0 = \inf \{x \mid f(x) > 0\}.$$

由  $x_0$  的定义, 我们有序列  $\{x_n\}$ , 使  $x_n$  单调递减趋于  $x_0$ , 且  $f(x_n) > 0$ . 从而由  $f(x)$  的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq 0. \quad (8)$$

根据  $x_0$  的定义可知, 对  $\forall x < x_0$ , 都有  $f(x) < f(x_0)$ , 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列  $\{x'_n\}$  单调递增趋于  $x_0$ , 且  $f(x'_n) < f(x_0)$ . 于是由  $f(x)$  的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \leq 0. \quad (9)$$

故由(8)(9)知  $f(x_0) = 0$ . 于是

$$D^+f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0,$$

这与  $D^+f(x_0) < 0$  矛盾, 于是  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ .

(2) 若  $D^+f(x) \leq 0$ , 对任给的  $\varepsilon > 0$  构造函数

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon(x - a),$$

对  $f_\varepsilon(x)$  有  $f_\varepsilon(a) = 0$  且

$$D^+f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon < 0.$$

从而由 (1) 得  $f_\varepsilon(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . 因此  $f(x) \leq \varepsilon(x - a) \leq \varepsilon(b - a)$ , 由  $\varepsilon$  的任意性, 得  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . □

**例题 0.7** 设  $\varphi(x)$  是  $[a, b)$  上连续且右可导的函数, 如果  $D^+\varphi(x)$  在  $[a, b)$  上连续, 证明:  $\varphi(x)$  在  $[a, b)$  上连续可导,  $\varphi'(x) = D^+\varphi(x)$ .

**证明** 设

$$f(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+\varphi(t) dt - \varphi(x), \quad x \in [a, b).$$

则  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续且右可导, 并且

$$D^+f(x) = D^+\varphi(x) - D^+\varphi(x) = 0.$$

又  $f(a) = 0$ , 由 **命题 0.1** 得  $f(x) \leq 0$ . 又  $-f(x)$  满足  $-f(a) = 0, D^+[-f(x)] = 0$ , 同理由 **命题 0.1** 得  $-f(x) \leq 0$ , 故  $f(x) = 0$ . 于是

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+\varphi(t) dt.$$

由  $D^+\varphi(x)$  的连续性, 得  $\varphi'(x) = D^+\varphi(x)$ . □

**例题 0.8** 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{2n}{\pi} (\ln 2n + \gamma - \ln \pi) + o(1).$$

**证明** 见 [here](#). □

**例题 0.9**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} = 1$ .

**证明** **证法一**: 对任意充分大的  $n$ , 由 Frullani (傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned} A &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k = \sum_{k=1}^n \left[ (-1)^k C_n^k \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx \right) \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{-kx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} (1-1)^n - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx. \end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$(1 - e^{-x})^n \geq 1 - ne^{-x}.$$

取  $M_n > 1$ , 满足  $M_n e^{M_n} = n$ . 于是

$$0 \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - ne^{-x})}{M_n} dx = \frac{n}{M_n} \int_{M_n}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{n}{M_n e^{M_n}} = 1.$$

从而

$$A = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1). \quad (10)$$

因为  $M_n e^{M_n} = n$ , 所以由命题??知

$$M_n = \ln n + o(\ln n), n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

于是

$$(1 - e^{-x})^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})} \leq e^{-(n-1)e^{-x}} \leq e^{-(n-1)e^{-M_n}} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, \forall x \in [0, M_n].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} \leq \frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

即  $\int_0^{M_n} \frac{(1 - e^{-x})^n}{x} dx = o\left(\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx\right), n \rightarrow \infty$ . 故

$$\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_0^{M_n} \frac{(1 - e^{-x})^n}{x} dx = (1 + o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

故  $\frac{1 - e^{-x}}{x}$  在  $[0, 1]$  上有界, 进而  $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = O(1)$ . 又注意到

$$\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx \leq -e^{-M_n} \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

故  $\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx = O(1)$ . 于是再结合(11)式可知

$$\begin{aligned} \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \\ &= O(1) + \ln M_n = \ln(\ln n + o(\ln n)) + O(1) \\ &= \ln \ln n + o(1) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此再由(12)式可知

$$\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = (1 + o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = (1 + o(1)) (\ln \ln n + O(1)) = \ln \ln n + o(\ln \ln n), n \rightarrow \infty.$$

故由(10)可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\ln(\ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1)}{\ln(\ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + o(\ln \ln n) + O(1)}{\ln(\ln n)} = 1. \end{aligned}$$

证法二:注意到

$$\begin{aligned} S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx.
\end{aligned}$$

又由二项式定理可知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 t^{k+y-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^{k+y-1} dt \\
&= \int_0^1 t^{y-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^k dt = \int_0^1 t^{y-1} [(1-t)^{n-1} - 1] dt.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
S &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} dy = \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dt dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dy dt = \int_0^1 \frac{t-1}{t \ln t} [1 - (1-t)^{n-1}] dt \\
&\stackrel{t=e^{-x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-x}) [1 - (1-e^{-x})^{n-1}]}{x} dx.
\end{aligned}$$

后续估阶与证法一相同.

[证法三](#): 注意到

$$\begin{aligned}
S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx \\
&= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} dx \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} \right) dx \\
&\stackrel{\text{命题??}}{=} \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+(n-1))} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+(n-1))} \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \right) dx.$$

由命题??(4) 知

$$e^{x^2-x} \geq \frac{1}{1+x} \geq e^{-x}, \forall x > 0.$$

于是

$$e^{x^2-x} \cdot e^{(\frac{x}{2})^2-\frac{x}{2}} \cdots e^{(\frac{x}{n-1})^2-\frac{x}{n-1}} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2})-x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})}.$$

注意到

$$x^2 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \leq x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} x < 2x, \forall x \in [0, 1],$$

故

$$e^{-x \left( -2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right)} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数  $e^{-x}$  的介值性知, 存在  $C_n \in \left[ -2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right]$ , 使得

$$\frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} = e^{-C_n x}.$$

于是由  $-2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq C_n \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$  知

$$C_n = \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} (1 - e^{-C_n x}) dx \\ &= \int_0^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^{-t}}{t} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1,$$

故  $\frac{1-e^{-t}}{t}$  在  $[0, 1]$  上有界, 进而  $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$ . 又注意到

$$\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt \leq 1 - e^{-C_n} = 1 - e^{-\ln n + O(1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

故  $\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$ . 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln(\ln n + O(1)) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + O(1)}{\ln \ln n} = 1.$$



□

**例题 0.10** 已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少 2 个零点.

**证明** 设  $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $F_1(a) = F_1(b) = 0$ . 再设  $F_2(x) = \int_a^x F_1(t) dt = \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt$ , 则  $F_2(a) = 0, F_2'(x) = F_1(x), F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$ . 由条件可知

$$0 = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F_1'(x) dx = \int_a^b x dF_1(x) = x F_1(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_1(x) dx = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$ . 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$ , 使得  $F_1'(\eta_1) = F_1'(\eta_2) = 0$ . 即  $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$ .

□


### 命题 0.2

已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少  $n+1$  个零点.

◆

 **笔记** 利用分部积分转换导数的技巧或匹配零点, 得到不变号的被积函数.

**证明** **证法一:** 令  $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1) dx_1 \dots dx_{n-1}$ . 则  $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$ . 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当  $1 \leq k \leq n$  且  $k \in \mathbb{N}$  时, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F^{(n+1)}(x) dx = F^{(n)}(x) \Big|_a^b = F^{(n)}(b), \\ 0 &= \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = x F^{(n)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x) dx = -F^{(n-1)}(b), \\ &\dots\dots \\ 0 &= \int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x) \Big|_a^b - n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx \\ &= -n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx = \dots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x) dx = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而  $F(b) = F'(b) = \dots = F^{(n)}(b) = 0$ . 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 Rolle 中值定理可知存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a, b)$ , 使得  $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在  $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a, b)$ , 使得  $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \dots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ . 即  $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \dots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ .

**证法二:** 假设  $f$  在  $(a, b)$  上只有  $s \leq n$  个不同的零点  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_s < b$ . 由  $f$  的介值性知,  $f$  在  $(x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, s$  上不变号. 不妨设  $f$  在相邻两个区间变号, 否则把这两个区间合并. 现在

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_s) f(x)$$

在  $[a, b]$  上不变号. 又由条件得

$$\int_a^b (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_s) f(x) dx = 0,$$

故  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ . 这与  $f$  在  $(a, b)$  上只有  $s$  个不同的零点矛盾! 故结论得证.

□

**例题 0.11** 设

$$f \in C[a, b], \int_a^b f(x) e^{kx} dx = 0, k = 1, 2, \dots, n+1,$$

证明:  $f$  在  $(a, b)$  至少有  $n+1$  个不同零点.

**证明** 注意到

$$\int_a^b f(x) e^{kx} dx \stackrel{x=\ln t}{=} \int_{e^a}^{e^b} f(\ln t) t^{k-1} dt = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n+1.$$

即

$$\int_{e^a}^{e^b} f(\ln t) t^k dt = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

且  $f(\ln t) \in C[e^a, e^b]$ , 故由 **命题 0.2** 知  $f(\ln t)$  在  $(e^a, e^b)$  上至少有  $n+1$  个不同零点. 因此  $f$  在  $(a, b)$  上至少有  $n+1$  个不同零点. □

**例题 0.12** 已知  $f(x) \in D^2[0, 1]$ , 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}, \int_0^1 x f(x) dx = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = 16$ .

**笔记** 构造  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$  的原因: 受到 **上一题** 的启发, 我们希望找到一个  $g(x) = f(x) - p(x)$ , 使得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = \int_0^1 x^k [f(x) - p(x)] dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k p(x) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c, \\ 0 &= \int_0^1 xp(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}, \\ \frac{1}{60} &= \int_0^1 x^2 p(x) dx = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}. \end{aligned}$$

解得:  $a = 8, b = -9, c = 2$ . 于是就得到  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ .

**证明** 令  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ , 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令  $G(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t \left( \int_0^s g(y) dy \right) ds \right] dt$ , 则  $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$ . 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'''(x) dx = G''(1), \\ 0 &= \int_0^1 xg(x) dx = \int_0^1 xG'''(x) dx = \int_0^1 x dG''(x) = xG''(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x) dx = -G'(1), \\ 0 &= \int_0^1 x^2 g(x) dx = \int_0^1 x^2 G'''(x) dx = \int_0^1 x^2 dG''(x) = x^2 G''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xG''(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 x dG'(x) = 2 \int_0^1 G'(x) dx - 2xG'(x) \Big|_0^1 = 2G(1). \end{aligned}$$

从而  $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$ . 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (0, 1)$ , 使得  $G'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0, 1)$ , 使得  $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0, 1)$ , 使得  $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$ . 即  $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$ . 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $g''(\xi) = 0$ . 即  $f''(\xi) = 16$ .

□

例题 0.13 设

$$x_n = \int_0^1 \ln(1+x+\cdots+x^n) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx, n=1, 2, \cdots$$

(1) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

(2) 计算:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{\ln n} (2 - x_n) \right]$ .

证明

(1) 注意到

$$x_n = \int_0^1 \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} \right| dx &\leq \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \ln^2 x dx \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} -2 \int_0^1 \ln x dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} 2. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \ln^2 x dx = 2. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} x_n &= \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx + 2, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 2 - x_n &= - \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx \\ &\stackrel{x=e^{-\frac{y}{n+1}}}{=} \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln\left(1-e^{-\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy. \end{aligned} \tag{13}$$

注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} = 0$ , 故存在  $M > 0$ , 使得

$$\left| e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} \right| \leq M, \forall y \in (0, +\infty).$$

又注意到

$$\left| \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} \right| \leq \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln y, \forall y \in (0, +\infty).$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot 0 \cdot 1 dy = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y dy \stackrel{x=e^{-y}}{=} - \int_0^1 \ln(1-x) dx \\
&= \int_0^1 \ln x dx = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) dy = - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n} dy \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny}}{n} dy = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

故再由(13)式可得


$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (2 - x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln \left( \frac{1 - e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}} \right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1)}{(n+1) \ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

□

**例题 0.14** 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于  $x \geq 0$ , 定义  $F(x) = \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt$ .

(1) 若  $\alpha \in (-1, 0)$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 证明:  $F$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

(2) 若  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f$  以  $T > 0$  为周期,  $\int_0^3 f(t) dt = 2022$ . 证明:  $F$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

 **笔记** 本题 (1) 中的  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  可以削弱为  $\exists M, X > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, x \in [X, +\infty)$ .

**证明**

(1) 由于  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 所以  $\exists M > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, +\infty).$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \left[ \frac{(\alpha+1)\varepsilon}{3M} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$ , 则当  $0 \leq x < \delta$  时, 有

$$x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} < \delta^{1+\alpha}.$$

当  $x \geq \delta$  时, 有

$$\begin{aligned}
x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} &= \frac{x-y}{\left[ (x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1} + (x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-2} y^{\alpha+1} + \dots + (y^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1} \right]} \\
&< \frac{\delta}{(x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1}} < \frac{\delta}{(\delta^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1}} = \delta^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

因此对  $\forall x, y \in [0, +\infty)$  且  $0 < x - y < \delta$ , 都有

$$x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} < \delta^{1+\alpha}.$$

从而对  $\forall x, y \in [0, +\infty)$  且  $0 < x - y < \delta$ , 都有

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^x t^\alpha f(t+y) dt - \int_0^y t^\alpha f(t+x) dt \right| = \left| \int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_y^x (t-y)^\alpha f(t) dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] f(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha |f(t)| dt + \int_y^x (t-y)^\alpha |f(t)| dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] |f(t)| dt \\
 &\leq M \left[ \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha dt + \int_y^x (t-y)^\alpha dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] dt \right] \\
 &= \frac{M}{\alpha+1} [x^{\alpha+1} - (2y-x)^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1} + (2y-x)^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1}] \\
 &= \frac{M}{\alpha+1} (x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + 2(x-y)^{\alpha+1}) \\
 &< \frac{3M}{\alpha+1} \delta^{1+\alpha} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

故  $F$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

(2) 假设  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续. 那么存在  $a, b > 0$ , 使得  $F(x) < a|x| + b$ .

从而  $\left| \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} \right| < \frac{a|x| + b}{|x|^{\alpha+1}}$ , 进而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$ .

于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} &= \frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_1^2 x^{\alpha+1} (t-1)^\alpha f(tx) dt}{x^{\alpha+1}} \\
 &\xrightarrow{\text{Riemann 引理}} \int_1^2 (t-1)^\alpha f(tx) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dt \int_1^2 (t-1)^\alpha dt = 0
 \end{aligned}$$

再结合  $\int_1^2 (t-1)^\alpha dt > 0$ , 知  $\int_0^T f(x) dt = 0$ .

现在有

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt = \int_0^x t^\alpha d \left[ \int_0^{x+t} f(y) dy \right] \\
 &\xrightarrow{\text{分部积分}} x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left[ \int_0^{x+t} f(y) dy \right] dt \\
 &= x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t) dt
 \end{aligned}$$

设  $G(x) = \int_0^x f(x) dt$ , 则由  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积知,  $G \in C[0, +\infty)$ . 又由  $\int_0^T f(x) dt = 0$ , 得

$$G(x+T) - G(x) = \int_0^x f(x+T) dt - \int_0^x f(x) dt = \int_x^{x+T} f(x) dt = \int_0^T f(x) dt = 0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以  $G(x)$  有界.

又  $\alpha - 1 \in (-1, 0)$ , 故由 (1) 可得,  $-\alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t) dt$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

下面证明  $x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy$  不一致连续.

由于  $G(2x)$  在  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记  $M = \max_{x \in [0, \frac{T}{2}]} G(2x)$ , 则存在  $x_2 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ , 使得  $M = G(2x_2) \geq G(2x), x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ .

又因为  $G(3) = \int_0^3 f(t) dt = 2022$ , 且  $G(2x)$  以  $\frac{T}{2}$  为周期, 所以存在  $x_1 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ , 使得  $G(2x_1) = G(3) > 0$ .

因此,  $M = G(2x_2) \geq G(2x_1) = G(3) = \int_0^3 f(t) dt > 0$ .

构造数集  $E = \left\{ x' \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \mid G(2x') = M \right\}$ , 由  $x_2 \in E$  知,  $E \neq \emptyset$ . 又因为  $E$  有界, 所以由确界存在定理知,  $E$  必有上确界, 取  $x_0 = \sup E$ .

假设  $x_0 \notin E$ , 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} |G(2x_0) - M|$ , 则  $\varepsilon_0 > 0$ , 否则  $x_0 \in E$  矛盾.

从而  $\forall \delta' > 0, \exists x_{\delta'} \in E$ , 使得  $x_0 - \delta' < x_{\delta'} < x_0$ , 都有  $|G(2x_0) - G(2x_{\delta'})| \geq \varepsilon_0$ .

这与  $G(2x)$  在闭区间  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  上连续, 进而一致连续矛盾. 故  $x_0 \in E$ .

任取  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} - x_0\right)\right)$ , 则  $G(2x_0 + \delta) < M = G(2x_0)$ , 否则与  $x_0 = \sup E$  矛盾.

进而  $\left| \int_{2x_0}^{2x_0+\delta} f(y) dy \right| = |G(2x_0 + \delta) - G(2x_0)| > 0$ .

从而当  $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$  时, 由积分中值定理, 得

存在  $\xi_n \in \left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ , 使得

$$\left| \int_{2x_0}^{2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y) dy \right| = \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} |f(\xi_n)| > 0 \quad (14)$$

又因为  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以  $f$  在  $\left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$  上有界.

于是存在  $K, L > 0$ , 使得

$$K \leq |f(\xi_n)| \leq L \quad (15)$$

取数列  $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ , 其中  $x_n = x_0 + n\frac{T}{2}$ ,  $y_n = x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ . 并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 0$ .

由拉格朗日中值定理, 得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ,

存在  $\xi_n \in \left(x_0 + n\frac{T}{2}, x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ , 使得  $\left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} = \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1}$

从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} = 0$ .

于是存在  $N > 0$ , 使得  $\forall n > N$ , 有

$$\left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0} f(y) dy} \quad (16)$$

现在, 当  $n > \max \left\{ N, \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\}$  时, 结合(14)(15)(16), 我们有

$$\begin{aligned} & \left| x_n^{\alpha} \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^{\alpha} \int_0^{2y_n} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy + \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right] \right| \\ &= \left| \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &\geq \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| - \left| \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left( x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\alpha} \int_{2x_0}^{2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y) dy \right| - \left| \left[ \left( x_0 + n \frac{T}{2} \right)^{\alpha} - \left( x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\alpha} \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\
&= \left| \left( x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\alpha} \right| \cdot \left| \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} f(\xi_n) \right| - \left| \left[ \left( x_0 + n \frac{T}{2} \right)^{\alpha} - \left( x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\alpha} \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\
&\geq 2 \left( \frac{T}{2} \right)^{\alpha} |f(\xi_n)| \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon \\
&\geq 2 \left( \frac{T}{2} \right)^{\alpha} K \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon
\end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( x_n^{\alpha} \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^{\alpha} \int_0^{2y_n} f(y) dy \right) = +\infty$ . 故  $x^{\alpha} \int_0^{2x} f(y) dy$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

这与  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续矛盾. 因此,  $F$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

□

**例题 0.15** 计算

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \left( \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots \right)$$

**解** 对  $\forall t \in (0, 1)$ , 一方面, 我们有

$$(1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+t^k} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+x} dx = \int_0^t \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+t)$$

另一方面, 我们有

$$(1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+t^k} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{t}{1+x} dx = t \ln 2.$$

故

$$\ln 2 = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln(1+t)] \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} (t \ln 2) = \ln 2.$$

□

**例题 0.16** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x}$ .

**解** 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $t_n \in \mathbb{N}$ , 使得  $(t_n+1)\pi < n < (t_n+2)\pi$ . 从而  $n-7 < t_n\pi < n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = \frac{1}{\pi}$ . 现在我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} &= \sum_{k=0}^{t_n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} + \int_{(t_n+1)\pi}^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \\
&= \sum_{k=0}^{t_n} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2(x+k\pi)} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2(x+(t_n+1)\pi)} \\
&= t_n \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x}.
\end{aligned} \tag{17}$$

注意到对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} \right| &\leq \frac{1}{1+\cos^2 x}, \\
n \left| \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right| &= \left| \frac{n^3 (x^2 - \cos^2 x)}{(1+n^2 \cos^2 x)(1+n^2 x^2)} \right| \\
&\leq \left| \frac{n^3 (x^2 - \cos^2 x)}{n^4 x^2 \cos^2 x} \right| \leq \frac{|x^2 - \cos^2 x|}{x^2 \cos^2 x},
\end{aligned}$$

故由控制收敛定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\pi \left( \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right) dx = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{n}{1+n^2 x^2} \right) dx = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} \cdot n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \int_0^\pi \frac{1}{1+n^2 x^2} + n \int_0^\pi \left( \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{dx}{1+x^2} = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

综上, 由(17)(18)(19)式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = 1.$$

□

**例题 0.17** 计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}} dx$ .

**证明** 注意到对  $\forall k \in [1, 2018] \cap \mathbb{N}$ , 都有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{(1+x)^{2021}} dx \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2018-k}}{(1+t)^{2021}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}} dx.$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k - x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}} dx = 0, \quad \forall k \in [1, 2018] \cap \mathbb{N}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}} dx = 0.$$

□

**例题 0.18** 设  $I(f) = \int_0^\pi (\sin x - f(x))f(x)dx$ , 求当遍历  $[0, \pi]$  上所有连续函数  $f$  时  $I(f)$  的最大值.

**解** 对函数配方, 有

$$(\sin x - f(x))f(x) = -\left(f(x) - \frac{\sin x}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2 x}{4}.$$

代入积分式, 得

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{4} dx - \int_0^\pi \left(f(x) - \frac{\sin x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \int_0^\pi \left(f(x) - \frac{\sin x}{2}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

故当  $f(x) = \frac{\sin x}{2}$  时,  $I(f)$  取得最大值  $\frac{\pi}{8}$ .

□

**例题 0.19** 设  $\alpha > 1, \Gamma_k = \left[ k^\alpha, \left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha \right) \cap \mathbb{N} (k \geq 1)$ . 试判断级数  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  和  $\sum_{n=1}^\infty b_n$  的敛散性, 其中

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{存在 } k \text{ 使得 } n = \min \Gamma_k, \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{其他,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{存在 } k \text{ 使得 } n \in \Gamma_k, \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{其他.} \end{cases}$$

**证明** 由  $\alpha > 1$  和条件直接可得

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{\substack{n \neq \min \Gamma_k, \\ \forall k \in \mathbb{N}}}^\infty \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\substack{\exists k \in \mathbb{N}, \\ n = \min \Gamma_k}}^\infty \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\min \Gamma_k} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} < \infty.$$

注意到

$$\sum_{n=1}^\infty b_n = \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^\infty \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^\infty \frac{1}{n} = \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^\infty \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^\infty \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{n}$$



$$\geq \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha}. \quad (20)$$

记  $N_k$  为  $\Gamma_k$  所含元素的个数, 则

$$\lfloor \left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha - k^\alpha \rfloor \leq N_k < \left\lfloor \left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha - k^\alpha \right\rfloor + 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

再结合 Lagrange 中值定理知

$$N_k \sim \left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha - k^\alpha \sim \frac{\alpha}{2} k^{\alpha-1}, \quad k \rightarrow \infty.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} k^{\alpha-1}}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha-1}}{2^\alpha k^\alpha} = \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha} = +\infty.$$

故由 (20) 式知  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

□

**例题 0.20** 证明:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n};$$

$$(2) \text{ 计算 } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}, \text{ 并说明理由.}$$

**证明**

(1) 注意到对  $\forall \alpha \geq 0$ , 都有

$$\left| \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}} \right| \leq \frac{|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)|}{n},$$

并且对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n [\sin(k+1) - \sin k]}{2 \sin \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin(n+1) - \sin 1}{2 \sin \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

故由 Dirichlet 判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n}$  收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}$  关于  $\alpha \geq 0$  一致收敛. 从而

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n}.$$

(2) 注意到对  $\forall \alpha \in (0, 1)$ , 都有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \sin n}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2(n+1)^{\alpha} \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha} \sin \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

由 Lagrange 中值定理知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $\xi \in (n, n+1)$ , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}} \leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)|}{n^{1+\alpha}}.$$

于是再结合 (1) 的结论可得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}} = 0.$$

故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}} = \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}.$$

□

**例题 0.21** 计算广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$ , 这里  $(x)$  表示  $x$  的小数部分 (例如: 当  $n$  为正整数且  $x \in [n, n+1)$  时, 则  $(x) = x - n$ ).

**证明** 注意到  $(x)$  是周期为 1 的函数, 并且在  $[0, 1)$  上恒有  $(x) = x$ . 因此

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{(x)}{x^3} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x+k)}{(x+k)^3} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x)}{(x+k)^3} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(x+k)^3} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left[ \frac{1}{(x+k)^2} - \frac{k}{(x+k)^3} \right] dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{(1+k)^2} - \frac{1}{k} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{(1+k)^2} - \frac{1}{1+k} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(1+k)^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

□

**例题 0.22** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$  单调递减, 证明  $f(x) \equiv 0$ .

**证明** 证法一: 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt, G(x) = \frac{F^2(x)}{2}$ , 则

$$g(x) = F(x) F'(x) = \left[ \frac{F^2(x)}{2} \right]' = G'(x),$$

由条件知  $g(x) = G'(x)$  单调递减, 故  $G(x)$  是上凸函数. 注意到  $G'(0) = g(0) = 0$ , 由  $g$  递减知  $G'(x) = g(x) \leq$

$0, \forall x > 0$ . 从而  $G(x)$  在  $[0, +\infty)$  上递减. 故

$$0 \leq G(x) = \frac{F^2(x)}{2} \leq G(0) = 0.$$

因此  $G(x) = 0, \forall x \geq 0$ . 于是  $F(x) \equiv 0$ , 故  $f(x) = F'(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

**证法二:** 证明: 若  $\exists X_0 > 0$ , s.t.  $f(X_0) \neq 0$ . 不妨设  $f(X_0) > 0$ , 则由  $g$  递减知

$$g(X_0) = f(X_0) \int_0^{X_0} f(t) dt \leq g(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{X_0} f(t) dt \leq 0.$$

从而由积分中值定理知,  $\exists \xi \in (0, X_0)$ , s.t.  $f(\xi) \leq 0$  于是由介值定理知,  $\exists x_1 \in (0, X_0)$ , s.t.  $f(x_1) = 0$ . 记

$$x_2 \triangleq \sup\{x \in [x_1, X_0] \mid f(x) = 0\}.$$

则  $f(x) > 0, \forall x \in (x_2, X_0)$ , 否则,

$$\exists \eta \in (x_2, X_0), \text{ s.t. } f(\eta) \leq 0.$$

由介值定理知,  $\exists \eta' \in (x_2, X_0)$ , s.t.  $f(\eta') = 0$ . 这与上确界定义矛盾! 再记  $f(x') = \max_{x \in [x_2, X_0]} f(x)$ , 任取  $x_3 \in (x_2, x')$ . 则

$f(x_3) > 0$ , 进而  $\int_{x_3}^{x'} f(t) dt > 0$ . 于是

$$\begin{aligned} g(x_3) &= f(x_3) \int_0^{x_3} f(t) dt < f(x') \left( \int_0^{x_3} f(t) dt + \int_{x_3}^{x'} f(t) dt \right) \\ &= f(x') \int_0^{x'} f(t) dt = g(x'). \end{aligned}$$

这与  $g$  递减矛盾! 故  $f(x) = 0, \forall x > 0$ . 同理可得  $f(x) = 0, \forall x < 0$ . 再由  $f$  的连续性可知  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) \equiv 0$ . □

**例题 0.23** 设  $f \in C^1[0, +\infty)$  满足

$$|f(x)| \leq e^{-\sqrt{x}}, f'(x) = -3f(x) + 6f(2x), \forall x \geq 0.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx < \infty.$$

并且证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx = 0$$

的充要条件是  $\int_0^\infty f(x) dx = 0$ .

**证明** 由  $f'(x) = -3f(x) + 6f(2x)$  可得

$$\begin{aligned} I_n &\triangleq \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} -\frac{3^n}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} f'(x) dx \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} [f(x) - 2f(2x)] dx \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx - 2 \int_0^\infty x^{n+1} f(2x) dx \right] \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx - \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx \right] \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot I_{n+1}. \end{aligned}$$

故

$$I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} I_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$I_n = \frac{2^n}{2^n - 1} I_{n-1} = \cdots = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1} \cdots \frac{2}{2 - 1} I_0 = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2^k}{(2^k - 1)}.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right) \geq \sum_{k=1}^n \left( -\frac{2}{2^k} \right) = -2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

(注: 原文中分母“3”为笔误, 等比数列  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$  的和为  $1 - \frac{1}{2^n}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$ , 求和公式分母应为  $1 - \frac{1}{2}$ , 此处按正确公式修正) 因此对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\prod_{k=1}^n \frac{2^k}{(2^k - 1)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right)} = e^{-\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right)} \leq e^{4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)} \leq e^4.$$

故  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)}$  收敛. 于是

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)} \iff I_0 = 0.$$

□

**例题 0.24** 设连续函数  $g: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  满足  $g$  单调递减. 设

$$x_0 > 0, x_{n+1} = x_n + g(x_n), n = 0, 1, 2, \cdots,$$

以及  $x \in D^1[0, +\infty)$  满足

$$x(0) = x_0, x'(t) = g(x(t)), \forall t \geq 0.$$

证明

$$x_n = x(n) + O(1), n \rightarrow \infty.$$

**证明** 由条件可知

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) > 0, \quad x'(t) = g(x(t)) > 0.$$

故  $\{x_n\}$  严格递增,  $x(t)$  在  $[0, +\infty)$  上也严格递增. 由条件知  $x_0 \geq x(0)$ , 假设  $x_n \geq x(n)$ , 则由条件知

$$n = \int_0^n \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt = \int_{x(0)}^{x(n)} \frac{1}{g(t)} dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

从而

$$\int_{x(0)}^{x_{n+1}} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x(0)}^{x_n} \frac{1}{g(t)} dt + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{g(t)} dt \geq n + \frac{x_{n+1} - x_n}{g(x_n)} = n + 1 = \int_{x(0)}^{x(n+1)} \frac{1}{g(t)} dt.$$

又因为  $g$  非负, 所以  $x_{n+1} \geq x(n+1)$ . 故由数学归纳法知,  $x_n \geq x(n), \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) = x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x_k) dt \\ &\leq x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x(t)) dt = x_0 + g(x_0) + \int_0^{n-1} g(x(t)) dt \\ &= x_0 + g(x_0) + \int_0^{n-1} x'(t) dt = x_0 + g(x_0) + x(n-1) \\ &< x_0 + g(x_0) + x(n). \end{aligned}$$

故

$$x(n) \leq x_n \leq x(n) + x_0 + g(x_0) \iff x_n = x(n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

□

**例题 0.25** 设  $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  是连续满射且满足对某个  $\alpha \in (0, 1)$  有

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s - t|^\alpha, \forall s, t \in [0, 1].$$

证明:  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .

**证明** 记

$$B_k \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| x - \gamma\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

对  $\forall x \in [0, 1]$ , 存在  $k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$ , 使得  $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ . 由条件可知

$$\left| \gamma(x) - \gamma\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq \frac{M}{n^\alpha} \implies \gamma(x) \in B_k.$$

故  $\gamma$  的值域  $[0, 1]^2 \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$ . 于是

$$1 \leq S\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} B_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} S(B_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi M^2}{n^{2\alpha}} = \frac{\pi M^2}{n^{2\alpha-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .

□

**例题 0.26** 设  $f \in D^2(\mathbb{R})$  满足对某个  $M > 0$  成立

$$0 < f(x) < M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明存在  $\xi \in \mathbb{R}$  使得

$$f(\xi)f''(\xi) + 2[f'(\xi)]^2 = 0.$$

**证明** 注意到

$$(f^3(x))'' = 3f(x)[f''(x)f(x) + 2[f'(x)]^2].$$

若  $\xi$  不存在, 则  $(f^3(x))''$  不变号, 从而  $f^3(x)$  是上凸或者下凸函数. 但是无穷区间上的有界凸函数必为常函数, 因此  $f$  为常值函数, 这就和  $\xi$  不存在矛盾! 现在我们知道存在  $\xi \in \mathbb{R}$  使得

$$f(\xi)f''(\xi) + 2[f'(\xi)]^2 = 0.$$

□

**例题 0.27** 已知: 存在连续正函数  $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , 满足

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

$$(2) \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \text{ 有界}.$$

证明: 当  $\alpha > 1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1+f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1+x)} = 0.$$

**证明** 由  $x^\alpha \ln(1+x)$  递增可得, 对  $\forall A > 1$ , 都有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1+f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1+x)} &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_A^x f^\alpha(t) \ln(1+f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1+x)} \\ &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_A^x f(t) \cdot \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} dt \\ &\leq \sup_{t \geq A} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \sup_{t \geq A} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_A^x f(t) dt}{x}. \end{aligned} \quad (21)$$

由条件可知

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq A} \left( \frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0 \implies f(t) \leq t, \quad t \rightarrow +\infty.$$

从而

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq A} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+t)} = 1.$$

于是令(21)式  $A \rightarrow +\infty$  得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1+f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1+x)} \leq 0.$$

□

**例题 0.28** 设  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的连续下凸函数, 实数  $m$  满足

$$\int_a^b |f(x) - m| dx = \min_{t \in [a, b]} \int_a^b |f(x) - f(t)| dx,$$

证明:  $m \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

**证明** 不妨设  $a=0, b=1$ , 否则用  $f(a+(b-a)x)$  代替  $f(x)$  即可. 再不妨设  $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ , 否则用  $f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)$  代替即可. 现在只需证明  $m \geq 0$ . 因为  $f$  在  $[0, 1]$  上连续下凸, 所以  $f$  在  $[0, 1]$  上存在最小值, 不妨设

$$\min_{x \in [0, 1]} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

根据下凸性知,  $f$  在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上非负递增. 反证, 假设  $m < 0$ , 则由条件可知 (取  $t = \frac{1}{2}$ )

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \int_0^1 |f(x) - m| dx.$$

但是另一方面, 根据绝对值不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|f(x) - m| - |f(x)|) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|f(x) - m| - |f(x)|) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(f(x) - m) - f(x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|f(x) - m| - |f(x)|) dx - \frac{m}{2} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|m| + |f(x) - m| - |f(x)|) dx \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} (|m + f(x) - m| - |f(x)|) dx = 0. \end{aligned}$$

因此上述绝对值不等式取等, 即对  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 都有

$$\begin{aligned} |m| + |f(x) - m| &= |m + f(x) - m| = |f(x)| \\ \implies m^2 + f^2(x) - 2mf(x) + m^2 &= f^2(x) \\ \implies f(x) &= m. \end{aligned}$$

这与  $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$  矛盾!

□

**例题 0.29** 设  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 定义

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \quad n \geq 2.$$

请问  $\{x_n\}$  是否收敛? 若收敛, 请证明; 若不收敛, 请举反例.

**证明** 由条件可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$x_{n+1} - x_n = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x_n - x_{n-1}) = \cdots = (-1)^{n-1}(x_2 - x_1) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

于是对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$x_n = x_1 + \sum_{m=1}^{n-1} (x_{m+1} - x_m) = x_1 + (x_2 - x_1) \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

注意到对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \Rightarrow \left\{ \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right\} \text{ 递减.}$$

并且

$$\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = e^{\sum_{k=2}^m \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \leq e^{-\sum_{k=2}^m \frac{1}{\sqrt{k}}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

令  $m \rightarrow \infty$  得

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=2}^m \frac{1}{\sqrt{k}}} = 0,$$

故  $\left\{ \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right\}$  单调递减趋于 0. 由 leibniz 判别法知

$$\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-1} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < +\infty.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_1 + (x_2 - x_1) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < +\infty.$$

□

**例题 0.30** 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, n = 0, 1, 2, \dots$ .

(1) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}(a_{n-2} + a_n)$ .

(2) 求  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域.

**证明**

(1) 由条件可知

$$a_{n-2} + a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\tan^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x) = \frac{1}{n-1}.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}(a_{n-2} + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

(2) 注意到对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt,$$

又因为

$$\left(\frac{t}{1+t^2}\right)' = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

所以

$$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} = t^{n-1} \cdot \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{t^{n-1}}{2}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

故对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt \leq a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{2} dt = \frac{1}{2n}.$$

因此  $a_n \sim \frac{1}{2n}, n \rightarrow \infty$ . 而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$  的收敛域为  $[-1, 1)$ , 故  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域为  $[-1, 1)$ .

□

**例题 0.31** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  是一可微函数, 且对所有  $x, y \in \mathbb{R}$ , 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|^\alpha,$$

其中  $\alpha \in (0, 1]$  是常数. 求证: 对所有  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

**证明** 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 固定  $x$ .

(i) 若  $f'(x) = 0$ , 则结论显然成立.

(ii) 若  $f'(x) < 0$ , 则令  $h = (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ . 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} 0 &< f(x+h) = f(x) + \int_x^{x+h} f'(t) dt \\ &= f(x) + \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)] dt + f'(x)h \\ &\leq f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^\alpha dt + f'(x)h \\ &= f(x) + \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f'(x)h \\ &= f(x) + \frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f'(x) (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left[ f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x) \right] (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} &< f(x) \\ \iff f'(x) (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} &< \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

(iii) 若  $f'(x) > 0$ , 则令  $h = (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ . 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} 0 &< f(x-h) = - \int_{x-h}^x f'(t) dt + f(x) \\ &= \int_{x-h}^x [f'(x) - f'(t)] dt + f(x) - f'(x)h \\ &\leq \int_{x-h}^x (x-t)^\alpha dt + f(x) - f'(x)h \\ &= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)h \\ &= \frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x) (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left[ f'(x) - \frac{1}{\alpha+1} f'(x) \right] (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} &< f(x) \\ \iff (f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} &< \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x). \end{aligned}$$



从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

□

例题 0.32

证明

□

例题 0.33

证明

□

例题 0.34

证明

□

例题 0.35

证明

□

例题 0.36

证明

□

例题 0.37

证明

□

例题 0.38

证明

□

例题 0.39

证明

□

例题 0.40

证明

□

例题 0.41

证明

□