## 0.1 同态基本定理

**定义 0.1 (同态核)**

1. 设 $f$ 是群 $G_1$ 到群 $G_2$ 的同态,$G_2$ 的幺元 $e_2$ 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$$
称为 $f$ 的**核**或**同态核**.
$G_1$ 中所有元素的像集合
$$\mathrm{im}(f) = f(G_1) = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G_1\} \subseteq G_2.$$
称为 $f$ 的**像**.
2. 设 $f$ 是环 $R_1$ 到环 $R_2$ 的同态,$R_2$ 的零元素 0 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in R_1 | f(x) = 0\}$$
称为 $f$ 的**核**或**同态核**.
$G_1$ 中所有元素的像集合
$$\mathrm{im}(f) = f(G_1) = \{y \in R_2 : \exists x \in R_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in R_1\} \subseteq R_2.$$
称为 $f$ 的**像**.
3. 设 $R$ 是一个环,$M_1, M_2$ 都是 $R$ 模,$f$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的模同态. $M_2$ 的零元素 0 的原像集合
$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in M_1 | f(x) = 0\}$$
称为 $f$ 的**核**或**同态核**.
$G_1$ 中所有元素的像集合
$$\mathrm{im}(f) = f(G_1) = \{y \in M_2 : \exists x \in M_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in M_1\} \subseteq M_2.$$
称为 $f$ 的**像**.

♣

**例题 0.1**

1. 设 $H$ 是群 $G$ 的正规子群. $\pi$ 是 $G$ 到商群 $G/H$ 的自然同态 (见定理**??**), 则有 $\ker \pi = H$.
2. 设 $I$ 是环 $R$ 的理想,$\pi$ 是 $R$ 到商环 $R/I$ 的自然同态 (见定理**??**), 则有 $\ker \pi = I$.
3. 设 $N$ 是 $R$ 模 $M$ 的子模,$\pi$ 是 $M$ 到商模 $M/N$ 的自然同态, 则有 $\ker \pi = N$.

**定理 0.1 (群的同态基本定理)**

设 $f$ 是群 $G$ 到群 $H$ 上的满同态, 则有下列结论:

(1) $\ker f \lhd G$;

(2) 设 $\pi$ 为 $G$ 到商群 $G/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $G/\ker f$ 到 $H$ 上的群同构映射 $\overline{f}$, 使得
$$f = \overline{f} \cdot \pi, \tag{1}$$
进而
$$G \backslash \ker f \cong H = f(G).$$
如图 1所示.

♡

笔记

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G\backslash\ker f \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
H &
\end{tikzcd}
$$

图 1

**证明**

(1) 设 $e, e'$ 分别为 $G, H$ 的幺元, 于是 $f(e) = e'$, 又设 $x, y \in \ker f, z \in G$, 则

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e',$$

因此 $xy^{-1} \in \ker f$, 故知 $\ker f$ 是 $G$ 的子群, 而且有

$$f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1} = e',$$

即 $zxz^{-1} \in \ker f$, 由此知 $\ker f \lhd G$.

(2) 根据 $f$ 是 $G$ 到 $H$ 上的 m 满映射知 $H = f(G)$. 并且由定理**??**知 $f$ 在 $G$ 中诱导一个等价关系

$$R : xRy, \quad x, y \in G,$$

当且仅当 $f(x) = f(y)$, 即

$$f(x) = f(y) \iff f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) = e' \iff x^{-1}y \in \ker f.$$

因而 $f$ 诱导的等价关系恰好是 $G$ 的正规子群 $\ker f$ 诱导的同余关系, 即有商群 $G/R = G/\ker f$ 且

$$\pi(x) = \pi(y) \text{ 当且仅当 } f(x) = f(y).$$

又由定理**??**知有 $G/\ker f$ 到 $H$ 的一一对应 $\overline{f}$, 使得 $\overline{f} \cdot \pi = f$, 又 $\forall x, y \in G$ 有

$$\overline{f}(\pi(x)\pi(y)) = \overline{f}(\pi(xy)) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\pi(x)) \cdot \overline{f}(\pi(y)).$$

由此知 $\overline{f}$ 是 $G/\ker f$ 到 $H$ 上的群同构.

□

**定理 0.2**

设 $f$ 是群 $G$ 到群 $H$ 上的满同态,$f$ 的核为 $K$, 即 $K = \ker f$,$G$ 中包含 $K$ 的子群的集合为 $\Sigma$,$H$ 的子群的集合为 $\Gamma$, 则有下列结论:

(1) $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 $G_1 \lhd G$,$G_1 \supseteq K$, 则

$$f(G_1) \lhd H.$$

若 $H_1 \lhd H$, 则

$$f^{-1}(H_1) \lhd G.$$

(3) 若 $G_1 \lhd G$,$G_1 \supseteq K$, 则

$$G/G_1 \cong H/f(G_1). \tag{2}$$

♡

**证明**

(1) 对 $\forall G_1 \in \Sigma$, 由 $f(G_1)$ 是 $G_1$ 在 $f|_{G_1}$ 下的像, 又 $f$ 是群同态, 故 $f(G_1)$ 为 $H$ 的子群, 即 $f(G_1) \in \Gamma$. 由此知 $f$ 是 $\Sigma$ 到 $\Gamma$ 的良定义的映射. 设 $H_1 \in \Gamma$,$H_1$ 在 $f$ 下原像的集合

$$G_1 = f^{-1}(H_1) = \{x \in G | f(x) \in H_1\} \supseteq \{x \in G | f(x) = e',\ e' \text{ 为} H \text{ 的幺元}\} = K,$$

而且对 $\forall x, y \in G_1$,$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H_1$, 故 $xy^{-1} \in G_1$, 因而 $G_1$ 为 $G$ 的子群, 故 $G_1 \in \Sigma$, 因此 $f^{-1}$ 可视为 $\Gamma$ 到 $\Sigma$ 的良定义的映射.

由 $f$ 是 $G \to H$ 上的满同态知 $f(G_1) = f(f^{-1}(H_1)) = H_1$, 由 $H_1$ 的任意性知 $ff^{-1} = \mathrm{id}_\Gamma$. 反之, 设 $G_1 \in \Sigma$, 显然有 $G_1 \subseteq f^{-1}(f(G_1))$. 若 $u \in f^{-1}(f(G_1))$, 即有 $v \in G_1$, 使得 $f(u) = f(v)$, 从而

$$f(uv^{-1}) = f(u)f(v)^{-1} = e'.$$

因而 $uv^{-1} \in K \subseteq G_1$, 故 $u \in G_1$, 即有 $f^{-1}(f(G_1)) = G_1$, 由 $G_1$ 的任意性知 $f^{-1}f = \mathrm{id}_\Sigma$.

综上所述知 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应,$f^{-1}$ 是其逆映射. 故结论 (1) 成立.

(2) 设 $G_1 \supset K$ 且 $G_1 \lhd G$, 即 $G_1 \in \Sigma$ 且 $G_1 \lhd G$, 则由 (1) 可知 $f(G_1)$ 是 $H$ 的子群. 对 $\forall g \in f(G_1), y \in H$, 因为 $f$ 是满同态, 所以存在 $a \in G_1$,$x \in G$, 使得 $f(a) = g, f(x) = y$. 从而

$$ygy^{-1} = f(x)f(a)f(x)^{-1} = f(xax^{-1}) \in f(G_1).$$

故知 $f(G_1) \lhd H$.

反之, 若 $H_1 \lhd H$ 且对 $\forall b \in f^{-1}(H_1)$,$y \in G$, 由

$$f(yby^{-1}) = f(y)f(b)f(y)^{-1} \in H_1$$

知 $yby^{-1} \in f^{-1}(H_1)$, 故知 $f^{-1}(H_1) \lhd G$, 即结论 (2) 成立.

(3) 设 $G_1 \in \Sigma$ 且 $G_1 \lhd G$. 由结论 (2) 的证明知 $f(G_1) \lhd H$. 令 $\pi'$ 是 $H$ 到商群 $H/f(G_1)$ 的自然同态, 由此可知有 $G$ 到 $H/f(G_1)$ 上的同态映射 $\pi' \cdot f$, 注意到 $H/f(G_1)$ 的幺元为 $f(G_1)$, 则知

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in G | \pi' f(x) = f(G_1)\} \\ &= \{x \in G | f(x) \in f(G_1)\} \\ &= f^{-1}(f(G_1)) = G_1.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 设 $\pi$ 为 $G$ 到 $G/G_1$ 的自然同态, 又因为自然同态 $\pi'$ 是满同态且 $f$ 也是满同态, 所以由群的同态基本定理知有 $G/G_1$ 到 $H/f(G_1)$ 的群同构 $\overline{f}$, 使得 $\pi' f = \overline{f} \cdot \pi$, 亦使图 2为交换图, 即式(2)成立.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi' f"] & H \arrow[d, "\pi'"] \\ G/G_1 \arrow[r, "\overline{f}"'] & H/f(G_1) \end{tikzcd}$$

图 2

□

**推论 0.1**

设 $N$ 为群 $G$ 的正规子群,$\pi$ 为 $G$ 到商群 $G/N$ 上的自然同态,$G$ 中包含 $N$ 的子群的集合为 $\Sigma$,$G/N$ 的子群的集合为 $\Gamma$, 则

(1) $\pi$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 $H \lhd G$,$H \supseteq N$, 则

$$\pi(H) \lhd G/N.$$

若 $H' \lhd G/N$, 则

$$\pi^{-1}(H') \lhd G.$$

(3) 若 $H \lhd G$,$H \supseteq N$, 则

$$G/H \cong (G/N)/(H/N).$$

♡

**证明** 事实上, 由于自然同态必是满同态, 故只要在定理 0.2中将 $H$ 换成 $G/N$,$f$ 换成 $\pi$, 即得本推论. 对于 (3), 由命题**????**知 $\pi(H) = H/N$, 故我们有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi''"'] \arrow[dr, "\pi'\pi"] & G/N \arrow[d, "\pi'"] \\
G/H \arrow[r, "\pi"'] & (G/N)/(H/N)
\end{tikzcd}$$

图 3

□

**定理 0.3**

设 $N$ 是群 $G$ 的正规子群,$\pi$ 是 $G$ 到商群 $G/N$ 上的自然同态,$H$ 是 $G$ 的一个子群, 则有下列结论:

(1) $HN$ 是 $G$ 中包含 $N$ 的子群且

$$N \lhd HN = \pi^{-1}(\pi(H)). \tag{3}$$

(2) $H \cap N \lhd H$ 且 $H \cap N = \ker(\pi|_H)$,$\pi|_H$ 表示 $\pi$ 在 $H$ 上的限制;

(3)

$$HN/N \cong H/H \cap N. \tag{4}$$

♡

**证明**

(1) 显然,$HN \supseteq N$. 设 $h_i n_i \in HN (i = 1, 2)$, 则由 $N \lhd G$ 有

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 h_2^{-1} (h_2 (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in HN.$$

故 $HN$ 是 $G$ 中含 $N$ 的子群且 $\pi(h_1 n_1) = \pi(h_1)\pi(n_1) = \pi(h_1) \in \pi(H)$, 故 $HN \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$.
又设 $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$, 则 $\pi(x) \in \pi(H)$, 从而存在 $h \in H$, 使得

$$\pi(x) = \pi(h) \iff xN = hN \iff x^{-1}h \in N.$$

于是存在 $n \in N$, 使得 $x^{-1}h = n$. 故 $x = hn^{-1} \in HN$. 因此 $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$. 综上可知 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$. 因为 $H$ 是 $G$ 的包含 $N$ 的子群且 $N \lhd G$, 所以由命题**????**知 $N \lhd HN$.

(2) 由于 $N \lhd G$, 对 $\forall h \in H$,$a \in N \cap H$ 有 $hah^{-1} \in N \cap H$, 故 $N \cap H \lhd H$. 又 $\pi|_H(h) = \pi(h)$ 且 $\ker \pi = N$, 于是 $\ker(\pi|_H) = H \cap N$.

(3) 由 (1) 的结论及自然同态是满同态知 $\pi(HN) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H)$. 又注意到 $\ker(\pi|_{HN}) = HN \cap N = N$, 故由群的同态基本定理知 $HN/N \cong \pi(H)$. 另有 $\pi(H) = \pi|_H(H)$,$\ker(\pi|_H) = N \cap H$, 故由群的同态基本定理知 $\pi(H) \cong H/H \cap N$, 即式(4)成立.

□

**定理 0.4 (环的同态基本定理)**

设 $f$ 是环 $R$ 到环 $R'$ 上的满同态, 则有下列结论:

(1) $\ker f$ 是 $R$ 的理想;

(2) 设 $\pi$ 是 $R$ 到商环 $R/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $R/\ker f$ 到 $R'$ 上的环同构映射 $\overline{f}$, 使得

$$f = \overline{f} \cdot \pi. \tag{5}$$

♡

**证明**

(1) 设 $x, y \in \ker f$, 则有 $f(x-y) = 0$, 故 $x - y \in \ker f$. 又显然有 $\ker f$ 对乘法满足结合律且加法与乘法间满足左右分配律, 因此 $\ker f$ 是 $R$ 的子环. 又设 $a \in R$, 则 $f(ax) = f(a)f(x) = 0$,$f(xa) = f(x)f(a) = 0$, 即 $ax, xa \in \ker f$, 故 $\ker f$ 为 $R$ 的理想.

(2) $f$ 为环同态, 故也是加法群 $R$ 到加法群 $R'$ 上的同态,$\pi$ 也是加法群 $R$ 到商群 $R/\ker f$ 上的自然同态, 于是由群的同态基本定理知有加法群 $R/\ker f$ 到加法群 $R'$ 上的同构 $\overline{f}$, 使 $f = \overline{f} \cdot \pi$.

另外,$\forall a, b \in R$ 有

$$\begin{aligned}\overline{f}(\pi(a)\pi(b)) &= \overline{f}(\pi(ab)) = f(ab) = f(a)f(b) \\ &= \overline{f}(\pi(a))\overline{f}(\pi(b)),\end{aligned}$$

因而 $\overline{f}$ 也是环 $R/\ker f$ 到环 $R'$ 上的环同构.

□

**定理 0.5**

设 $f$ 是环 $R$ 到环 $R'$ 上的满同态, 又 $K = \ker f$,$R$ 中包含 $K$ 的子环集合为 $\Sigma$,$R'$ 的子环集合为 $\Gamma$, 则有下列结论:

(1) $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应;

(2) 若 $H$ 为 $R$ 的理想且 $H \supseteq K$, 则 $f(H)$ 为 $R'$ 的理想;

若 $H'$ 为 $R'$ 的理想, 则 $f^{-1}(H')$ 为 $R$ 的理想;

(3) 若 $I$ 是 $R$ 的理想且 $I \supseteq K$, 则

$$R/I \cong R'/f(I). \tag{6}$$

♡

**证明**

(1) 设 $H$ 为 $R$ 的子环且 $H \supseteq K$, 由环同态的基本性质**??**知 $f(H)$ 为 $R'$ 的子环. 故 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 上的良定义的映射. 反之, 若 $H'$ 为 $R'$ 的子环, 则 $H'$ 也是 $R'$ 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 $f$ 建立了加法群 $R$ 中包含 $K$ 的子群与加法群 $R'$ 的子群间的一一对应, 故 $f^{-1}(H')$ 是 $R$ 中唯一包含 $K$ 的加法子群. 又若 $a, b \in f^{-1}(H')$, 则有 $f(ab) = f(a)f(b) \in H'$, 即 $ab \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 对乘法构成半群. 再设 $c \in f^{-1}(H')$, 则

$$\begin{aligned} f((a+b)c) = f(a+b)f(c) = f(a)f(c) + f(b)f(c) \in H', \\ f(c(a+b)) = f(c)f(a+b) = f(c)f(a) + f(c)f(b) \in H'. \end{aligned}$$

因而 $f^{-1}(H')$ 是 $R$ 中包含 $K$ 的子环, 故 $f^{-1}$ 可视为 $\Gamma \to \Sigma$ 上的良定义的映射.

对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 $H$ 也是 $R$ 中包含 $K$ 的加法子群,$H'$ 也是 $R'$ 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 $H$ 的任意性知 $f^{-1}f = \mathrm{id}_\Sigma, ff^{-1} = \mathrm{id}_\Gamma$. 故 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应,$f^{-1}$ 是其逆映射. 即结论 (1) 成立.

(2) 对 $\forall a', b' \in R', h \in H$, 由环同态都是满同态知存在 $a, b \in R$, 使得 $f(a) = a', f(b) = b'$. 于是再由 $H$ 是 $R$ 的理想知

$$a' f(a) b' = f(a)f(h)f(b) = f(ahb) \in f(H).$$

故 $f(H)$ 为 $R'$ 的理想.

反之, 设 $H'$ 为 $R'$ 的理想. 对 $\forall b \in R$,$x \in f^{-1}(H')$, 由 $H'$ 是 $R'$ 的理想知

$$f(bx) = f(b)f(x) \in H', f(xb) = f(x)f(b) \in H'.$$

即 $bx, xb \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 为 $R$ 的理想. 由此知结论 (2) 成立.

(3) 设 $\pi$ 是 $R$ 到 $R/I$ 的自然同态,$\pi'$ 是 $R'$ 到 $R'/f(I)$ 的自然同态. 由命题**????**知 $\pi' f$ 是 $R$ 到 $R'/f(I)$ 上的环同态. 注意到

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in R : \pi' f(x) = f(I)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(I)\} \\ &= f^{-1}(f(I)) = I.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 于是由环的同态基本定理得式(6)成立.

□

**推论 0.2**

设 $A, B$ 均为环 $R$ 的理想且 $A \subseteq B$, 则有

$$R/B \cong (R/A)/(B/A).$$

♡

**证明** 事实上, 只要在定理 0.5中取 $R' = R/A, f$ 为 $R$ 到 $R/A$ 的自然同态, 并且由定理**????**知 $\pi(B) = B/A$, 因此即得本推论.

□

**定理 0.6**

设 $H$ 为环 $R$ 的子环,$K$ 为 $R$ 的理想, 则有 $H+K$ 为 $R$ 的子环,$H \cap K$ 为 $H$ 的理想且

$$(H+K)/K \cong H/(H \cap K). \tag{7}$$

♡

**证明** 设 $\pi$ 是环 $R$ 到商环 $R/K$ 上的自然同态. 因 $H$ 是 $R$ 的子环, 故 $\pi(H)$ 是 $R/K$ 的子环. 与定理 0.3一样有 $H+K = \pi^{-1}(\pi(H))$ 且 $K$ 是 $H+K$ 的理想. 又根据定理 0.3知 $H+K$ 是 $R$ 的子环且 $\pi(H) \cong (H+K)/K$, 又 $\pi|_H$ 是 $H$ 到 $\pi(H)$ 上的同态且 $\ker(\pi|_H) = H \cap K$, 因而 $\pi(H) \cong H/(H \cap K)$, 即得式(7). □

**定理 0.7 (模同态的基本定理)**

设 $M, M'$ 都是幺环 $R$ 上的模,$f$ 是 $M$ 到 $M'$ 上的模同态,$M$ 中包含 $N$ 的子模集合为 $\Sigma$,$M'$ 中子模集合为 $\Gamma$, 则有下面结论:

(1) $\ker f = N$ 是 $M$ 的子模. 若 $\pi$ 是 $M$ 到 $M/N$ 上的自然模同态, 则有 $M/N$ 到 $M'$ 的模同构 $\overline{f}$, 使得

$$\overline{f} \cdot \pi = f \tag{8}$$

(2) $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应.

(3) 若 $M_1$ 是 $M$ 的子模且 $M_1 \supseteq N$, 则

$$M/M_1 \cong M'/f(M_1) \tag{9}$$

♡

**证明**

(1) 对 $\forall x, y \in \ker f$, 由 $f$ 是模同态知 $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. 从而 $x - y \in \ker f$, 于是 $\ker f = N$ 是加法群 $M$ 的子群, 设 $a \in R, x \in N$, 则 $f(ax) = af(x) = 0$, 因而 $ax \in N$, 故 $N$ 是 $M$ 的子模. 由群的同态基本定理知有加法群 $M/N$ 到加法群 $M'$ 上的同构 $\overline{f}$, 使 $\overline{f} \cdot \pi = f$. 现只需证 $\overline{f}$ 是模同构. 又设 $a \in R, x \in M$, 于是有

$$\overline{f}(a\pi(x)) = \overline{f}(\pi(ax)) = f(ax) = af(x) = a\overline{f}(\pi(x)),$$

即 $\overline{f}$ 为模同构. 故定理结论 (1) 成立.

(2) 若 $M_1$ 为 $M$ 的子模, 则由定理**????**知 $f(M_1)$ 为 $M'$ 的子模. 故 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 上的良定义的映射.
反之, 若 $M_1'$ 为 $M'$ 的子模, 则 $M_1'$ 也是 $M'$ 的加法子群. 从而由定理 0.2(1)知 $f^{-1}(M_1')$ 是 $M$ 中唯一包含 $N$ 的加法子群. 又设 $a \in R, x \in f^{-1}(M_1')$. 由 $f(ax) = af(x) \in M_1'$ 知 $ax \in f^{-1}(M_1')$, 即 $f^{-1}(M')$ 是 $M$ 的子模. 故 $f^{-1}$ 可视为 $\Gamma \to \Sigma$ 上的良定义的映射.
对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 $H$ 也是 $R$ 中包含 $K$ 的加法子群,$H'$ 也是 $R'$ 的加法子群, 由定理 0.2(1)知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 $H$ 的任意性知 $f^{-1}f = \mathrm{id}_\Sigma, ff^{-1} = \mathrm{id}_\Gamma$. 故 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应,$f^{-1}$ 是其逆映射, 即结论 (2) 成立.

(3) 设 $M_1$ 为 $M$ 的子模且 $M_1 \supseteq N$. 又设 $\pi_1$ 是 $M$ 到 $M/M_1$ 的自然同态,$\pi'$ 是 $M'$ 到 $M'/f(M_1)$ 的自然同态. 于是 $\pi' f$ 是 $M$ 到 $M'/f(M_1)$ 上的同态, 而且

$$\begin{aligned}\ker(\pi' f) &= \{x \in R : \pi' f(x) = f(M_1)\}\\ &= \{x \in R : f(x) \in f(M_1)\}\\ &= f^{-1}(f(M_1)) = M_1.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由结论 (2) 知 $f$ 是 $\Sigma \to \Gamma$ 的一一对应. 故由结论 (1) 可知式(9)成立.

□

**推论 0.3**

设 $M_1, N$ 都是 $R$ 模 $M$ 的子模, 而且 $M_1 \supseteq N$, 则 $M/M_1$ 与 $(M/N)/(M_1/N)$ 是模同构.

♡

**证明** 事实上, 只要在模同态的基本定理中取 $M' = M/N, f$ 为 $M$ 到 $M' = M/N$ 的自然同态, 即得本推论. □

**定理 0.8**

设 $H, N$ 为 $R$ 模 $M$ 的子模, 则

$$(H+N)/N \cong H/(H \cap N) \tag{10}$$

♡

**证明** 设 $\pi$ 为 $M$ 到 $M/N$ 的自然同态, 于是有 $\pi(H+N) = \pi(H)$, 因而

$$H + N/\ker(\pi|_{H+N}) \cong H/\ker(\pi|_H).$$

由 $\ker(\pi|_{H+N}) = N, \ker(\pi|_H) = H \cap N$, 即得式(10)成立. □