0.1 二重积分

0.1.1 二重积分的定义及其存在性

定义 0.1

我们称一个平面图形 P 是**有界的**或**平面有界图形**, 是指构成这个平面图形的点集是平面上的有界点集, 即存在一矩形 R, 使得 $P \subset R$.

设 P 是一平面有界图形, 用某一平行于坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形 (图 1). 这时直线网 T 的网眼——小闭矩形 Δ_i 可分为三类:

(i) Δ_i 上的点都是 P 的内点,

(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点,

(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点.

我们将所有属于直线网 T 的第 (i) 类小矩形 (图 1中阴影部分) 的面积加起来, 记这个和数为 $s_P(T)$, 则有 $s_P(T) \leqslant \Delta_R$(这里 Δ_R 表示包含 P 的那个矩形 R 的面积); 将所有第 (i) 类与第 (iii) 类小矩形 (图 1中含有粗线的小矩形) 的面积加起来, 记这个和数为 $S_P(T)$, 则有 $s_P(T) \leqslant S_P(T)$.

由确界存在定理可以推得, 对于平面上所有直线网, 数集 $\{s_P(T)\}$ 有上确界, 数集 $\{S_P(T)\}$ 有下确界, 记

$$\underline{I}_P = \sup_T\{s_P(T)\}, \quad \overline{I}_P = \inf_T\{S_P(T)\}.$$

显然有

$$0 \leqslant \underline{I}_P \leqslant \overline{I}_P.$$

通常称 $\underline{I}_P$ 为 P 的**内面积**,$\overline{I}_P$ 为 P 的**外面积**.

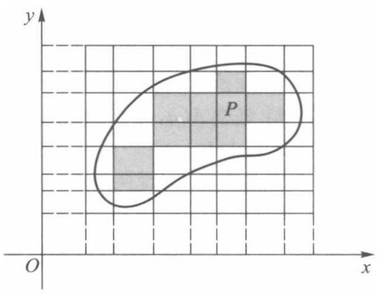

图 1

定义 0.2

若平面有界图形 P 的内面积 $\underline{I}_P$ 等于它的外面积 $\overline{I}_P$, 则称 P 为**可求面积**, 并称其共同值 $I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$ 为 P 的**面积**.

定理 0.1

平面有界图形 P 可求面积的充要条件是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon. \tag{1}$$

证明 **必要性**: 设平面有界图形 P 的面积为 I_P. 由定义 1, 有 $I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由 $\underline{I}_P$ 及 $\overline{I}_P$ 的定义知道, 分别存在直线网 T_1 与 T_2, 使得

$$s_P(T_1) > I_P - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_P(T_2) < I_P + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

记 T 为由 T_1 与 T_2 这两个直线网合并而成的直线网, 可证得

$$s_P(T_1) \leqslant s_P(T), \quad S_P(T_2) \geqslant S_P(T).$$

于是由(2)可得

$$s_P(T) > I_P - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_P(T) < I_P + \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而得到对直线网 T 有 $S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$.

充分性: 设对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在某直线网 T, 使得(1)式成立. 但

$$s_P(T) \leqslant \underline{I}_P \leqslant \overline{I}_P \leqslant S_P(T).$$

所以

$$\overline{I}_P - \underline{I}_P \leqslant S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得 $\underline{I}_P = \overline{I}_P$, 因而平面图形 P 可求面积.

□

推论 0.1

平面有界图形 P 的面积为零的充要条件是它的外面积 $\overline{I}_P = 0$, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) < \varepsilon,$$

或对任给的 $\varepsilon > 0$, 平面图形 P 能被有限个其面积总和小于 ε 的小矩形所覆盖.

定理 0.2

平面有界图形 P 可求面积的充要条件是:P 的边界 K 的面积为零.

证明 由定理 0.1,P 可求面积的充要条件是: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在直线网 T, 使得 $S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$. 由于

$$S_K(T) = S_P(T) - s_P(T),$$

所以也有 $S_K(T) < \varepsilon$. 由推论 0.1,P 的边界 K 的面积为零.

□

定理 0.3

若曲线 K 为定义在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图像, 则曲线 K 的面积为零.

证明 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 所以它在 $[a, b]$ 上一致连续. 因而对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n, x_0 = a, x_n = b)$ 并且满足

$$\max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \cdots, n\} < \delta$$

时, 可使 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅都成立 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 现把曲线 K 按自变量 $x = x_0, x_1, \cdots, x_n$ 分成 n 个小段, 这时每一个小段都能被以 Δx_i 为宽,ω_i 为高的小矩形所覆盖. 由于这 n 个小矩形面积的总和为

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

所以由推论 0.1即得曲线 K 的面积为零.

□

推论 0.2

参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ 所表示的光滑曲线 (或按段光滑曲线)K 的面积为零.

证明 由光滑曲线的定义,$\varphi'(t), \psi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且不同时为零. 对任意 $t_0 \in [\alpha, \beta]$, 不妨设 $\varphi'(t_0) \neq 0$, 于是存在 t_0 的邻域 $U(t_0)$, 使得 $x = \varphi(t)$ 在此邻域上严格单调, 从而存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$. 再由有限覆盖定理可把 $[\alpha, \beta]$ 分

成有限段:$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 在每一小区间段上,$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ 或 $x = \varphi(\psi^{-1}(y))$. 由定理 0.3, 每一小段的曲线面积为零, 因此整条曲线面积为零.

□

推论 0.3

由平面上分段光滑曲线所围成的有界闭区域是可求面积的.

注 并非平面中所有的点集都是可求面积的. 例如

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}.$$

易知 $0 = \underline{I}_D < \overline{I}_D = 1$,$D$ 是不可求面积的.

定义 0.3

设 D 为 xy 平面上可求面积的有界闭区域,$f(x, y)$ 为定义在 D 上的函数. 用任意的曲线把 D 分成 n 个可求面积的小区域

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n.$$

以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积, 这些小区域构成 D 的一个**分割** T, 以 d_i 表示小区域 σ_i 的直径, 称 $\|T\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$ 为分割 T 的**细度**. 在每个 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i), 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

称它为函数 $f(x, y)$ 在 D 上属于分割 T 的一个**积分和**,(ξ_i, η_i) 称为**介点**.

定义 0.4

设 $f(x, y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的函数.J 是一个确定的数, 若对任给的正数 ε, 总存在某个正数 δ, 使对于 D 的任何分割 T, 当它的细度 $\|T\| < \delta$ 时, 属于 T 的所有积分和都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i - J \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

则称 $f(x, y)$ 在 D 上**可积**, 数 J 称为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的**二重积分**, 记作

$$J = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $f(x, y)$ 称为二重积分的**被积函数**,x, y 称为积分变量,D 称为**积分区域**.

若选用平行于坐标轴的直线网 T_1 来分割 D, 只要当 $\|T_1\| < \delta$ 时,(3)式都成立, 则每一小网眼区域 σ 的面积 $\Delta\sigma = \Delta x\Delta y$. 此时通常把 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 记作

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 当 $f(x, y) \geqslant 0$ 时, 二重积分 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上就表示以 $z = f(x, y)$ 为曲顶,D 为底的曲顶柱体的体积. 当 $f(x, y) = 1$ 时, 二重积分 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 的值就等于积分区域 D 的面积.

定理 0.4

函数 $f(x, y)$ 在有界、可求面积区域 D 上可积的必要条件是它在 D 上有界.

证明

□

定义 0.5

设函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界,T 为 D 的一个分割, 它把 D 分成 n 个可求面积的小区域 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$. 令

$$M_i=\sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$
$$m_i=\inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$$

作和式 $S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i,s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i$. 它们分别称为函数 $f(x,y)$ 关于分割 T 的**上和与下和.**

定理 0.5

$f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是:

$$\lim_{\|T\|\to0}S(T)=\lim_{\|T\|\to0}s(T).$$

定理 0.6

$f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是: 对于任给的正数 ε, 存在 D 的某个分割 T, 使得 $S(T)-s(T)<\varepsilon$.

定理 0.7

有界闭区域 D 上的连续函数必可积.

定理 0.8

设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上有界, 且其不连续点集 E 是零面积集, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限个矩形 (不含边界) 覆盖了 E, 而这些矩形面积之和小于 ε. 记这些矩形之并集为 K, 则 $D\setminus K$ 是有界闭域 (也可能是有限多个不交的有界闭域的并集). 设 $K\cap D$ 的面积为 Δ_K, 则 $\Delta_K<\varepsilon$. 由于 $f(x,y)$ 在 $D\setminus K$ 上连续, 因此由定理 0.6和定理 0.7, 存在 $D\setminus K$ 上的分割 $T_1=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$, 使得 $S(T_1)-s(T_1)<\varepsilon$. 令 $T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,K\cap D\}$, 则 T 是 D 的一个分割. 且

$$S(T)-s(T)=S(T_1)-s(T_1)+\omega_K\Delta_K<\varepsilon+\omega\varepsilon,$$

其中 ω_K 是 $f(x,y)$ 在 $K\cap D$ 上的振幅,ω 是 $f(x,y)$ 在 D 上的振幅. 由定理 0.6,$f(x,y)$ 在 D 上可积.

□

定理 0.9

(1) 若 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积,k 为常数, 则 $kf(x,y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 若 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上都可积, 则 $f(x,y)\pm g(x,y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 若 $f(x,y)$ 在 D_1 和 D_2 上都可积, 且 D_1 与 D_2 无公共内点, 则 $f(x,y)$ 在 $D_1\cup D_2$ 上也可积, 且

$$\iint_{D_1\cup D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上可积, 且

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(5) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 则函数 $|f(x,y)|$ 在 D 上也可积, 且

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

(6) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M, \quad (x,y) \in D,$$

则

$$mS_D \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS_D,$$

这里 S_D 是积分区域 D 的面积.

(7) (中值定理) 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则存在 $(\xi,\eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D,$$

这里 S_D 是积分区域 D 的面积.

注 中值定理的几何意义: 以 D 为底,$z = f(x,y)$ ($f(x,y) \geqslant 0$) 为曲顶的曲顶柱体体积等于一个同底的平顶柱体的体积, 这个平顶柱体的高等于 $f(x,y)$ 在区域 D 中某点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$.

证明

□

0.1.2 直角坐标系下二重积分的计算

定理 0.10

设 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上可积, 且对每个 $x \in [a,b]$, 积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在, 则累次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

也存在, 且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

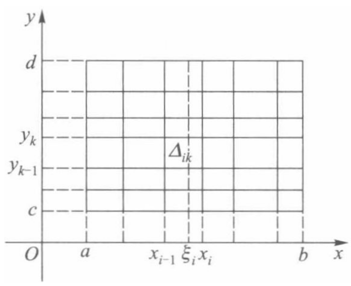

图 2

证明 令 $F(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 定理要求证明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且积分的结果恰为二重积分. 为此, 对区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 分别作分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_s = d.$$

按这些分点作两组直线

$$x = x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

及

$$y = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, s-1),$$

它把矩形 D 分为 rs 个小矩形(图 2). 记 Δ_{ik} 为小矩形 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ $(i = 1, 2, \cdots, r, k = 1, 2, \cdots, s)$; 设 $f(x, y)$ 在 Δ_{ik} 上的上确界和下确界分别为 M_{ik} 和 m_{ik}. 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任取一点 ξ_i, 于是就有不等式

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y)\mathrm{d}y \leqslant M_{ik}\Delta y_k,$$

其中 $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. 因此

$$\sum_{k=1}^{s} m_{ik}\Delta y_k \leqslant F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\mathrm{d}y \leqslant \sum_{k=1}^{s} M_{ik}\Delta y_k,$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 记 Δ_{ik} 的对角线长度为 d_{ik} 和

$$\|T\| = \max_{i,k} d_{ik}.$$

由于二重积分存在, 由定理 0.5, 当 $\|T\| \to 0$ 时,$\sum\limits_{i,k} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i$ 和 $\sum\limits_{i,k} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i$ 有相同的极限, 且极限值等于 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$. 因此当 $\|T\| \to 0$ 时, 由不等式(**??**)可得

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

由于当 $\|T\| \to 0$ 时, 必有 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \Delta x_i \to 0$, 因此由定积分定义,(**??**)式左边

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y.$$

□

定理 0.11

设 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 且对每个 $y \in [c, d]$, 积分 $\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$ 存在, 则累次积分

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$$

也存在, 且

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

♡

推论 0.4

当 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上连续时, 则有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由定理 0.10和定理 0.11易得.

□

定义 0.6

称平面点集

$$D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\} \tag{5}$$

为 x 型区域 (图 3(a)); 称平面点集

$$D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), c \leqslant y \leqslant d\} \tag{6}$$

为 y 型区域 (图 3(b)).

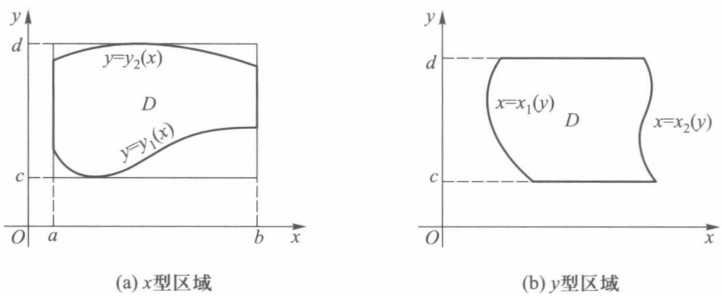

图 3

注 这些区域的特点是当 D 为 x 型区域时, 垂直于 x 轴的直线 $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ 至多与区域 D 的边界交于两点; 当 D 为 y 型区域时, 直线 $y = y_0$ $(c < y_0 < d)$ 至多与 D 的边界交于两点.

许多常见的区域都可以分解成有限个除边界外无公共内点的 x 型区域或 y 型区域 (如图 4所示的区域 D 可分解成三个区域, 其 , 为 x 型区域, 为 y 型区域). 因而解决了 x 型区域或 y 型区域上二重积分的计算问题, 那么一般区域上二重积分的计算问题也就得到了解决.

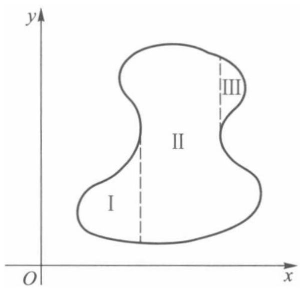

图 4

定理 0.12

(1) 若 $f(x, y)$ 在如(5)式所示的 x 型区域 D 上连续, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

即二重积分可化为先对 y 后对 x 的累次积分.

(2) 若 D 为(6)式所示的 y 型区域, 其中 $x_1(y), x_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 则二重积分可化为先对 x 后对 y 的累次积分

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

即二重积分可化为先对 x 后对 y 的累次积分.

证明 只证 (1),(2) 类似可证. 由于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 故存在矩形区域 $[a, b] \times [c, d] \supset D$(如图

3(a)), 现作一定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

可以验证, 函数 $F(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 而且

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

注 从几何意义上可以这样来理解化二重积分为累次积分, 二重积分是计算以 D 为底面,$f(x,y)$ ($\geqslant 0$) 为高的曲顶柱体的体积, 这个曲顶柱体可视为介于平行平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的立体, 可以利用截面面积 $S(x), x\in[a,b]$ 的积分求出. 而截面面积 $S(x)$ 是一元函数 $f(x,y)$(其中 x 为参量) 与 y 轴以及直线 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 所围图形的面积 (图 5), 所以

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

那么曲顶柱体的体积

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

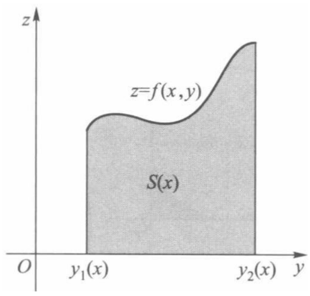

图 5

0.1.3 Green 公式

定义 0.7

设区域 D 的边界 L 由一条或几条光滑曲线所组成. 边界曲线的**正方向**规定为: 当人沿边界行走时, 区域 D 总在他的左边, 如图 6所示. 与上述规定的方向相反的方向称为**负方向**, 记为 $-L$.

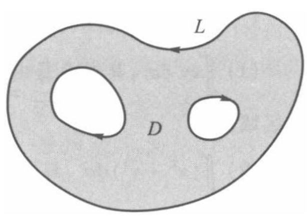

图 6

定理 0.13

若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \tag{7}$$

这里 L 为区域 D 的边界曲线, 分段光滑, 并取正方向. 公式(7)称为**格林 (Green) 公式**.

注 格林公式沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系. 为便于记忆, 格林公式(7)也可写成下述形式:

$$\iint_D\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

证明 根据区域 D 的不同形状, 一般可分三种情形来证明:

(i) 若区域 D 既是 x 型区域又是 y 型区域, 即平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点 (图 7).

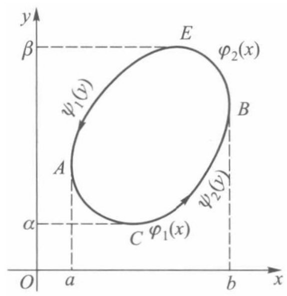

图 7

这时区域 D 可表示为

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b$$

或

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta.$$

这里 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 分别为曲线 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{AEB}$ 的方程. 而 $x=\psi_1(y)$ 和 $x=\psi_2(y)$ 则分别是曲线 $\overset{\frown}{CAE}$ 和 $\overset{\frown}{CBE}$ 的方程. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}\sigma&=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\\&=\int_\alpha^\beta Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_\alpha^\beta Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理可以证得

$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma=\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x.$$

将上述两个结果相加即得

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

(ii) 若区域 D 是由一条按段光滑的闭曲线围成, 如图 8所示, 则先用几段光滑曲线将 D 分成有限个既是 x 型又是 y 型的子区域, 然后逐块按 (i) 得到它们的格林公式, 并相加即可. 如图 8所示的区域 D. 可将 D 分成三个既是 x 型又是 y 型的区域 D_1,D_2,D_3.

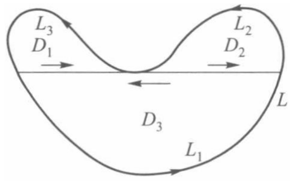

图 8

于是

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\\ &= \oint_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_3} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\ &= \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(iii) 若区域 D 由几条闭曲线所围成, 如图 9所示, 这时可适当添加直线段 AB, CE, 把区域转化为 (ii) 的情况来处理. 在图 9中联结了 AB, CE 后, 则 D 的边界曲线由 $AB, L_2, BA, \overset{\frown}{AFC}, CE, L_3, EC$ 及 $\overset{\frown}{CGA}$ 构成.

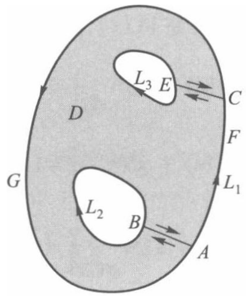

图 9

由 (ii) 知

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma &= \left\{\int_{AB}+\int_{L_2}+\int_{BA}+\int_{\overset{\frown}{AFC}}+\int_{CE}+\int_{L_3}+\int_{EC}+\int_{\overset{\frown}{CGA}}\right\}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\\ &= \left(\oint_{L_2}+\oint_{L_3}+\oint_{L_1}\right)(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\\ &= \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

定义 0.8

若对于平面区域 D 上任一封闭曲线, 皆可不经过 D 以外的点而连续收缩于属于 D 的某一点, 则称此平面区域为**单连通区域**, 否则称为**复连通区域**.

♣

定理 0.14

设 D 是单连通闭区域. 若函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(i) 沿 D 内任一按段光滑封闭曲线 L, 有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0;$$

(ii) 对 D 中任一按段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

与路线无关, 只与 L 的起点及终点有关;

(iii) $Pdx + Qdy$ 是 D 内某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即在 D 内有

$$du = Pdx + Qdy;$$

(iv) 在 D 内处处成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证明 (i)⇒(ii) 如图 10, 设 $\widehat{ARB}$ 与 $\widehat{ASB}$ 为联结点 A, B 的任意两条按段光滑曲线.

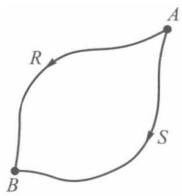

图 10

由 (i) 可推得

$$\int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BSA}} Pdx + Qdy = \oint_{\widehat{ARBSA}} Pdx + Qdy = 0,$$

所以

$$\int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy.$$

(ii)⇒(iii) 设 $A(x_0, y_0)$ 为 D 内某一定点,$B(x, y)$ 为 D 内任意一点. 由 (ii), 曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$$

与路线的选择无关, 故当 $B(x, y)$ 在 D 内变动时, 其积分值是 $B(x, y)$ 的函数, 即有

$$u(x, y) = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy.$$

取 Δx 充分小, 使 $(x + \Delta x, y) \in D$, 则函数 $u(x, y)$ 对于 x 的偏增量 (图 11)

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy.$$

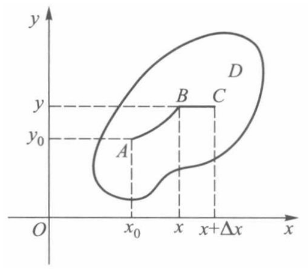

图 11

因为在 D 内曲线积分与路线无关, 所以

$$\int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy.$$

由于直线段 BC 平行于 x 轴, 所以 $dy = 0$, 从而由积分中值定理可得

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{BC} Pdx + Qdy = \int_x^{x+\Delta x} P(s, y)ds = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x,$$

其中 $0<\theta<1$. 根据 $P(x,y)$ 在 D 上连续, 于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y).$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. 因此

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

(iii)⟹(iv) 设存在函数 $u(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

所以 $P(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,y),Q(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}u(x,y)$. 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

因为 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

从而在 D 内每一点处都有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(iv)⟹(i) 设 L 为 D 内任一按段光滑封闭曲线, 记 L 所围的区域为 σ. 由于 D 为单连通区域, 所以区域 σ 含在 D 内. 应用格林公式及在 D 内恒有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 的条件, 就得到

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

上面我们将四个条件循环推导了一遍, 这就证明了它们是相互等价的.

□

定义 0.9

设 D 是单连通闭区域. 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则由定理 0.14的证明可看到二元函数

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{\overset{\frown}{AB}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)}P(s,t)\mathrm{d}s+Q(s,t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

具有性质

$$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

它与一元函数的原函数相仿. 所以我们也称 $u(x,y)$ 为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个**原函数**.

0.1.4 二重积分的变量替换

引理 0.1

设变换 $T:x=x(u,v),y=y(u,v)$ 将 uv 平面上由按段光滑封闭曲线所围的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D, 函数 $x(u,v),y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

则区域 D 的面积

$$\mu(D)=\iint_\Delta |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证明 下面给出当 $y(u,v)$ 在 Δ 内具有二阶连续偏导数时的证明. 对 $y(u,v)$ 具有一阶连续偏导数条件下的证明后续给出.

由于 T 是一对变换, 且 $J(u,v)\neq 0$, 因而 T 把 Δ 的内点变为 D 的内点, 所以 Δ 的按段光滑边界曲线 L_Δ 变换到 D 时, 其边界曲线 L_D 也是按段光滑的.

设曲线 L_Δ 的参数方程为

$$u=u(t),\quad v=v(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

由于 L_Δ 按段光滑, 所以 $u'(t),v'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上至多除去有限个第一类间断点外, 在其他的点上都连续. 因为 $L_D=T(L_\Delta)$, 所以 L_D 的参数方程为

$$x=x(t)=x(u(t),v(t)),\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

$$y=y(t)=y(u(t),v(t))$$

若规定 t 从 α 变到 β 时, 对应于 L_D 的正向, 则根据格林公式, 取 $P(x,y)=0,Q(x,y)=x$, 有

$$\mu(D)=\oint_{L_D}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta x(u(t),v(t))\left[\frac{\partial y}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{8}$$

另一方面, 在 uv 平面上

$$\oint_{L_\Delta}x(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right]=\pm\int_\alpha^\beta x(u(t),v(t))\left[\frac{\partial y}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\right]\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中正号及负号分别由 t 从 α 变到 β 时, 是对应于 L_Δ 的正方向或负方向所决定. 由(8)及(9)式得到

$$\mu(D)=\pm\oint_{L_\Delta}x(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right]=\pm\oint_{L_\Delta}x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

令 $P(u,v)=x(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial u},Q(u,v)=x(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial v}$, 在 uv 平面上对上式应用格林公式, 得到

$$\mu(D)=\pm\iint_\Delta\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由于函数 $y(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 即有 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}$, 因此, $\dfrac{\partial Q}{\partial u}-\dfrac{\partial P}{\partial v}=J(u,v)$, 于是

$$\mu(D)=\pm\iint_\Delta J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

又因为 $\mu(D)$ 总是非负的, 而 $J(u,v)$ 在 Δ 上不为零且连续, 故其函数值在 Δ 上不变号, 所以

$$\mu(D)=\iint_\Delta|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

□

定理 0.15

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 变换 $T:x=x(u,v),y=y(u,v)$ 将 uv 平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D, 函数 $x(u,v),y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

♡

证明 用曲线网把 Δ 分成 n 个小区域 Δ_i, 在变换 T 作用下, 区域 D 也相应地被分成 n 个小区域 D_i. 记 Δ_i 及 D_i 的面积为 $\mu(\Delta_i)$ 及 $\mu(D_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由引理 0.1及二重积分中值定理, 有

$$\mu(D_i)=\iint_{\Delta_i}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|J(\tilde u_i,\tilde v_i)|\mu(\Delta_i),$$

其中 $(\tilde u_i,\tilde v_i)\in\Delta_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $\xi_i = x(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), \eta_i = y(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$, 则 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 作二重积分 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\mu(D_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), y(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i))|J(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)|\mu(\Delta_i).$$

上式右边的和式是 Δ 上可积函数 $f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|$ 的积分和. 又由变换 T 的连续性可知, 当区域 Δ 的分割 $T_\Delta : |\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n|$ 的细度 $\|T_\Delta\| \to 0$ 时, 区域 D 相应的分割 $T_D : |D_1, D_2, \cdots, D_n|$ 的细度 $\|T_D\|$ 也趋于零. 因此得到

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

□

定理 0.16

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 且在极坐标变换

$$T : \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ t = r\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

下,xy 平面上有界闭区域 D 与 $r\theta$ 平面上区域 Δ 对应, 则成立

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{10}$$

♡

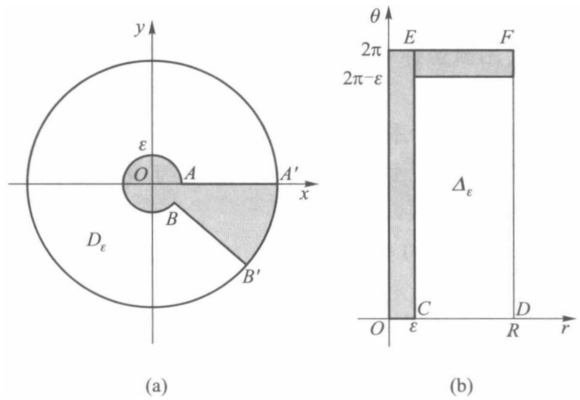

图 12

证明 若 D 为圆域 $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, 则 Δ 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0, R] \times [0, 2\pi]$. 设 D_ε 为在圆环 $\{(x, y)|0 < \varepsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 中除去中心角为 ε 的扇形 $BB'A'A$ 所得的区域 (图 12(a)), 则在变换 T 下,D_ε 对应于 $r\theta$ 平面上的矩形区域 $\Delta_\varepsilon = [\varepsilon, R] \times [0, 2\pi - \varepsilon]$(图 12(b)). 但极坐标变换 T 在 D_ε 与 Δ_ε 之间是一对一变换, 且在 Δ_ε 上函数行列式 $J(r, \theta) > 0$. 于是由定理 0.15, 有

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_\varepsilon} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

因为 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上有界, 在上式中令 $\varepsilon \to 0$, 即得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

若 D 是一般的有界闭区域, 则取足够大的 $R > 0$, 使 D 包含在圆域 $D_R = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 内, 并且在 D_R 上定义函数

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

函数 $F(x,y)$ 在 D_R 内至多在有限条按段光滑曲线上间断, 因此, 对函数 $F(x,y)$, 由前述有

$$\iint_{D_R} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_R} F(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 Δ_R 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0,R]\times[0,2\pi]$. 由函数 $F(x,y)$ 的定义, 即得(10)式.

□

命题 0.1

(i) 若原点 $O \notin D$, 且 xy 平面上射线 $\theta=$ 常数与 D 的边界至多交于两点 (图 13), 则 Δ 必可表示成

$$r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$$

于是有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

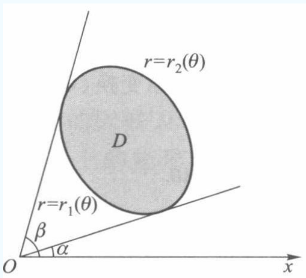

图 13

(ii) 类似地, 若 xy 平面上的圆 $r=$ 常数与 D 的边界至多交于两点 (图 14), 则 Δ 必可表示成

$$\theta_1(r) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(r),\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2,$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

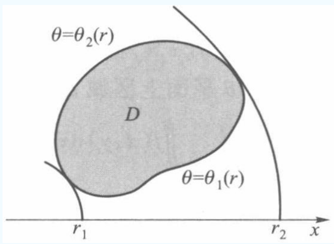

图 14

(iii) 若原点为 D 的内点 (图 15),D 的边界的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, 则 Δ 可表示成

$$0 \leqslant r \leqslant r(\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

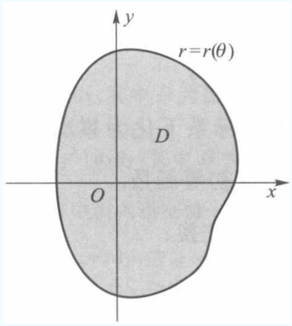

图 15

(iv) 若原点 O 在 D 的边界上 (图 15), 则 Δ 为

$$0 \leqslant r \leqslant r(\theta),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

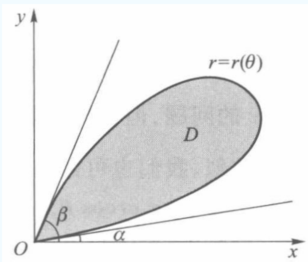

图 16

证明

□

定理 0.17

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 作如下广义极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

xy 平面上有界闭区域 D 与 $r\theta$ 平面上区域 Δ 对应, 并计算得

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr.$$

则成立

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

证明

□