



# 分析学基础

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: August 27, 2025

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

# 目录

第一章 实数基本定理与上下极限	1
1.1 实数基本定理	1
1.1.1 定理介绍	1
1.1.2 综合应用	1
1.2 上下极限	5
第二章 极限与渐近分析方法	9
2.1 基本的渐进估计与求极限方法	9
2.1.1 基本极限计算	9
2.1.1.1 基本想法	9
2.1.1.2 带 $\ln$ 的极限计算	11
2.1.1.3 幂指函数的极限问题	12
2.1.1.4 拟合法求极限	13
2.1.2 Taylor 公式	14
2.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限	14
2.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限	17
2.1.4 L'Hospital's rules	18
2.1.5 与方程的根有关的渐进估计	26
2.1.5.1 可以解出 $n$ 的类型	26
2.1.5.2 迭代方法	28
2.2 估计和式的常用方法	29
2.2.1 和式放缩成积分	29
2.2.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分	29
2.2.3 和式内部对 $n$ 可求极限 (极限号与求和号可换序)	30
2.2.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 $n, k$ 不同阶)	33
2.2.5 分段估计 (Toeplitz 定理)	36
2.2.6 Euler-Maclaurin 公式 (E-M 公式)	40
2.3 Stirling 公式	49
2.4 Abel 变换	51
2.5 Stolz 定理	53
2.5.1 数列 Stolz 定理	53
2.5.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限	55
2.5.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限	60
2.5.2 函数 Stolz 定理	65
2.6 递推数列求极限和估阶	69
2.6.1 “折线图 (蛛网图)” 分析法 (图未完成, 但已学会)	69
2.6.2 单调性分析法	71
2.6.3 利用上下极限求递推数列极限	74
2.6.4 类递增/类递减递推数列	75
2.6.5 压缩映像	80
2.6.6 利用不等放缩求递推数列极限	83

2.6.7 可求通项和强求通项 . . . . .	83
2.6.7.1 三角换元求通项 . . . . .	83
2.6.8 直接求通项公式法 . . . . .	85
2.6.8.1 凑出可求通项的递推数列 . . . . .	87
2.6.8.2 直接凑出通项 . . . . .	89
2.6.8.3 凑裂项 . . . . .	89
2.6.8.4 母函数法求通项 . . . . .	90
2.6.8.5 强求通项和强行裂项 . . . . .	91
2.6.9 递推数列综合问题 . . . . .	97
2.7 分部积分 . . . . .	104
2.8 Laplace 方法 . . . . .	106
2.9 Riemann 引理 . . . . .	122
2.10 极限问题综合 . . . . .	128
<b>第三章 函数与微分</b>	<b>139</b>
3.1 基本定理 . . . . .	139
3.2 微分学计算 . . . . .	139
3.2.1 单变量微分学计算 . . . . .	139
<b>第四章 微分中值定理</b>	<b>146</b>
4.1 Hermite 插值定理 . . . . .	146
4.2 函数构造类 . . . . .	151
4.2.1 单中值点问题 (一阶构造类) . . . . .	151
4.2.2 多中值点问题 . . . . .	154
4.2.3 只能猜的类型 . . . . .	155
4.3 中值极限问题 . . . . .	156
4.4 性态分析类 . . . . .	157
4.5 微分不等式问题 . . . . .	163
4.5.1 一阶/二阶构造类 . . . . .	163
4.5.2 双绝对值问题 . . . . .	165
4.5.3 极值原理 . . . . .	167
<b>第五章 函数性态分析</b>	<b>169</b>
5.1 基本性态分析模型 . . . . .	169
5.2 函数方程 . . . . .	176
5.3 凸函数与上半连续函数 . . . . .	179
5.3.1 凸函数 . . . . .	179
5.3.2 上半连续函数 . . . . .	188
5.4 一致连续 . . . . .	191
5.5 函数列极限 . . . . .	199
5.6 更弱定义的导数 . . . . .	200
5.7 逼近方法 . . . . .	202
5.7.1 Bernstein 多项式 . . . . .	202
5.7.2 可积函数的逼近 . . . . .	210
5.7.3 齐次微分不等式问题 . . . . .	217
5.8 函数性态分析综合 . . . . .	219

<b>第六章 反常积分</b>	<b>230</b>
6.1 反常积分敛散性判别	230
6.2 反常积分收敛抽象问题	246
<b>第七章 积分不等式</b>	<b>253</b>
7.1 著名积分不等式	253
7.2 积分不等式的应用	256
7.3 重积分方法	267
7.4 直接求导法	270
7.5 凸性相关题型	274
7.6 数值比较类	275
7.7 Fourier 积分不等式	277
7.8 其他	279
<b>第八章 积分计算</b>	<b>305</b>
8.1 不定积分计算	305
8.1.1 直接猜原函数	305
8.1.2 换元积分	305
8.2 定积分	306
8.2.1 建立积分递推	306
8.2.2 区间再现	309
8.2.3 Frullani(傅汝兰尼) 积分	312
8.2.4 化成多元累次积分(换序)	314
8.2.5 化成含参积分(求导)	315
8.2.6 级数展开方法	316
8.2.7 重积分计算	320
8.2.8 其他	324
8.3 含参量积分	326
8.4 Euler 积分	329
<b>第九章 级数</b>	<b>330</b>
9.1 级数基本结论	330
9.1.1 级数的敛散性	330
9.1.2 幂级数阶与系数阶的关系	342
9.1.3 Cauchy 积	346
9.2 具体级数敛散性判断	350
9.2.1 估阶法	350
9.2.2 带对数换底法	353
9.2.3 Taylor 公式法	354
9.2.4 分组判别法	354
9.2.5 杂题	355
9.3 级数计算	357
9.3.1 裂项方法	357
9.3.2 凑已知函数	359
9.3.3 生成函数和幂级数计算方法	360
9.3.4 多重求和	363

9.3.5 级数特殊算法 (换序法) . . . . .	364
9.4 级数一致收敛性判断 . . . . .	366
9.5 级数证明 . . . . .	376
9.6 特殊级数 . . . . .	393
<b>第十章 Fourier 级数</b>	<b>394</b>
10.1 Fourier 级数及基本性质 . . . . .	394
<b>第十一章 多元函数</b>	<b>399</b>
11.1 多元函数的连续性和微分 . . . . .	399
<b>第十二章 无理数初步</b>	<b>406</b>
<b>第十三章 求和与求积符号</b>	<b>407</b>
13.1 求和符号 . . . . .	407
13.1.1 求和号交换顺序 . . . . .	407
13.1.2 裂项求和 . . . . .	411
13.2 求积符号 . . . . .	413
<b>第十四章 未分类习题</b>	<b>414</b>
14.1 杂题 . . . . .	414
<b>附录 A 常用公式</b>	<b>423</b>
A.1 常用 Taylor 级数 . . . . .	423
A.2 常用积分公式 . . . . .	424
A.2.1 不定积分 . . . . .	424
A.2.2 定积分 . . . . .	425
A.3 常用初等不等式 . . . . .	426
A.4 重要不等式 . . . . .	427
A.5 基本组合学公式 . . . . .	431
A.6 三角函数相关 . . . . .	432
A.6.1 三角函数 . . . . .	432
A.6.2 反三角函数 . . . . .	433
A.6.3 双曲三角函数 . . . . .	435
<b>附录 B 小技巧</b>	<b>436</b>
B.1 长除法 . . . . .	436
B.2 将多项式分式分解为其部分因式的和 . . . . .	436

# 第一章 实数基本定理与上下极限

## 1.1 实数基本定理

### 1.1.1 定理介绍

#### 定理 1.1 (实数基本定理)

1. 确界存在定理: 有上界的非空数集一定有上确界.
2. 单调有界原理: 单调有界数列一定收敛.
3. 柯西收敛准则: 数列  $\{x_n\}$  收敛当且仅当任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $m, n > N$  都有  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .
4. 闭区间套定理: 闭区间套  $I_n = [a_n, b_n]$  满足  $I_{n+1} \subset I_n$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 则存在唯一的  $\xi$ , 使得  $\xi$  属于每一个  $I_n$ .
5. 聚点定理: 有界数列必有收敛子列.
6. 有限覆盖定理: 有界闭集的任意一族开覆盖, 都存在有限子覆盖.

#### 定义 1.1 (点集相关概念)

1. 如果存在  $r > 0$  使得  $(a - r, a + r) \subset A$ , 则称  $a$  是集合  $A$  的内点 (高维改为开球即可).
2. 如果一个集合  $A$  中的每一个点都是内点, 则称  $A$  是开集.
3. 如果集合  $A$  中的任意一个收敛序列  $x_n$  的极限点  $x$ , 都有  $x \in A$ , 则称  $A$  是闭集.
4. 设  $B \subset A$ , 如果对任意  $r > 0$  和任意  $x \in A$ , 都有  $(x - r, x + r) \cap B \neq \emptyset$ , 则称  $B$  在  $A$  中稠密.

### 1.1.2 综合应用

**例题 1.1** 设  $f(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  单调递增且  $f(0) > 0, f(1) < 1$ , 证明: 存在  $x$  使得  $f(x) = x$ .

**笔记** 因为题目条件中的函数  $f$  只是一个实值函数, 并没有其他更进一步的性质 (连续性、可微性、凸性等). 所以我们只能利用最基本的实数基本定理证明. 证明存在性, 考虑反证法会更加简便.

**注**  $f$  并不是连续函数, 不能用介值定理.

**证明** (反证法) 假设对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有  $f(x) \neq x$ . 将闭区间  $[0, 1]$  记作  $[a_1, b_1]$ , 且由条件可知  $f(a_1) > a_1, f(b_1) < b_1$ . 令  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , 若  $f(c_1) > c_1$ , 则取  $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ ; 若  $f(c_1) < c_1$ , 则取  $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ . 从而得到闭区间  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ , 并且  $f(a_2) > a_2, f(b_2) < b_2$ . 以此类推, 可得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 并且  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

根据闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又由  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增及  $f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 可知  $a_n < f(a_n) \leq f(\xi) \leq f(b_n) < b_n$ . 令  $n \rightarrow \infty$  可得  $\xi \leq f(\xi) \leq \xi$ , 即  $f(\xi) = \xi$ . 这与假设矛盾.  $\square$

#### 引理 1.1 (Lebesgue 数引理)

如果  $\{O_\alpha\}$  是区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 则存在一个正数  $\delta > 0$ , 使得对于区间  $[a, b]$  中的任何两个点  $x', x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖  $x', x''$ . (称这个数  $\delta$  为开覆盖的 Lebesgue 数.)

**笔记** 本题谢惠民上的证明是利用有限覆盖定理, 而 CMC 红宝书上通过直接构造出  $\delta$  进行证明. 这里我们采用的是聚点定理进行证明.


**证明** (反证法) 假设对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 取  $\delta = \frac{1}{n} > 0$ , 都存在相应的  $x_n, y_n \in [a, b]$  且  $|x_n - y_n| < \delta$ , 使得对  $\forall I \in \{O_\alpha\}$ , 要么  $x_n \notin I$ , 要么  $y_n \notin I$ . 由聚点定理可知, 有界数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  一定存在收敛子列. 设  $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$  为相应的收敛子列, 则由  $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$  可知  $x_{n_k}, y_{m_k}$  收敛于同一个极限点. 故设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = x_0 \in [a, b]$ .

因为  $\{O_\alpha\}$  是区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 所以存在  $I_0 \in \{O_\alpha\}$ , 使得  $x_0 \in I_0$ . 又由于  $I_0$  是开集, 因此存在  $\eta > 0$ , 使得  $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset I_0$ . 从而由  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = x_0 \in [a, b]$  可知, 存在充分大的  $K$ , 使得  $|x_{n_K} - x_0| < \eta, |y_{m_K} - x_0| < \eta$ . 于是  $x_{n_K}, y_{m_K} \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset I_0$ . 即开区间  $I_0 \in \{O_\alpha\}$  同时覆盖了  $x_{n_K}, y_{m_K}$  这两个点, 与假设矛盾.  $\square$

**注** 注意对于两个收敛子列  $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$ , 此时  $n_k = m_k$  并不一定对  $\forall k \in \mathbb{N}_+$  都成立, 即这两个收敛子列的指标集  $\{n_k\}_{k=1}^\infty, \{m_k\}_{k=1}^\infty$  不相同也不一定有交集, 故无法利用聚点定理反复取子列的方法取到两个指标相同且同时收敛的子列  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  (取  $\{x_n\}$  为一个奇子列收敛, 偶子列发散的数列; 取  $\{y_n\}$  为一个奇子列发散, 偶子列收敛的数列就能得到反例.).

### 例题 1.2

1. 设  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  中且对任意  $x$ , 都存在与  $x$  有关的  $r > 0$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(x - r, x + r)$  中为常值函数, 证明:  $f(x)$  是常值函数.
2. 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  中的实值函数, 如果对任意  $x \in [a, b]$ , 均存在  $\delta_x > 0$  以及  $M_x$ , 使得  $|f(y)| \leq M_x, \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ , 证明:  $f(x)$  是有界的.
3. 设  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上, 对任意  $x_0 \in \mathbb{R}$  均存在与  $x_0$  有关的  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  是单调递增的, 证明:  $f$  在整个  $\mathbb{R}$  上也是单调递增的.

 **笔记** 这个结果说明: 局部常值函数就是常值函数, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数, 局部单调递增函数在整个区间上也是单调递增的, **实数基本定理能够将局部性质扩充为整体性质.**

### 证明

1. **证法一 (有限覆盖定理)(不建议使用):** 对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $r_x > 0$  使得  $f(t)$  在区间  $(x - r_x, x + r_x)$  为常值函数, 则  $\bigcup_{x \in [a, b]} (x - r_x, x + r_x) \supset [a, b]$ , 故存在其中有限个区间  $(x_k - r_k, x_k + r_k), 1 \leq k \leq n$  使得他们的并集包含  $[a, b]$ .

直观来看只需要将这些区间“从小到大”排列, 就可以依次推出每一个区间上都是相同的一个常值函数, 但是所谓“从小到大”排列目前是无法准确定义的, 所以这样说不清楚, 优化如下:

方案 1: 选择其中个数尽可能少的区间, 使得它们的并集可以覆盖  $[a, b]$  但是任意删去一个都不可以 (这是能够准确定义的一个操作), 此时区间具备性质“任意一个不能被其余的并集盖住”, 接下来将这些区间按照左端点的大小关系来排序, 去论证它们确实是如你所想的那样“从小到大”排列的 (关注右端点), 进而得证.

方案 2: 利用 **Lebesgue 数引理**, 将区间  $[a, b]$  分为有限个  $[a, a + \delta], [a + \delta, a + 2\delta], \dots, [a + n\delta, b]$ , 其中  $\delta$  是 Lebesgue 数. 则每一个闭区间都可以被开覆盖中的某一个开区间覆盖住, 于是分段常值函数, 并且还能拼接起来, 所以是常值函数.

**证法二 (确界存在定理):** (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 构造数集

$$E = \{x \in [a, b] | f(t) = f(a), \forall t \in [a, x]\}.$$

从而  $E \neq \emptyset$  且  $E \in [a, b]$ . 于是由确界存在定理, 可知数集  $E$  存在上确界, 设  $x_0 = \sup E$ .

如果  $f(a) \neq f(x_0)$ , 则由条件可知, 存在  $r_0 > 0$ , 使得  $f(t) = f(x_0), \forall t \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ . 由  $x_0 = \sup E$  可知, 存在  $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0)$  且  $x_1 \in E$ . 于是  $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_1]$ . 从而  $f(t) = f(a) = f(x_0), \forall t \in (x_0 - r_0, x_1)$ . 这与  $f(x_0) \neq f(a)$  矛盾.

如果  $f(a) = f(x_0)$ , 则由条件可知, 存在  $r_1 > 0$ , 使得  $f(t) = f(x_0) = f(a), \forall t \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ . 又由  $x_0 = \sup E$  可知, 存在  $x_2 \in (x_0 - r_1, x_0)$  且  $x_2 \in E$ . 于是  $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_2]$ . 进而对  $\forall t \in [a, x_2] \cup (x_0 - r_1, x_0 + \frac{r_1}{2}] = [a, x_0 + \frac{r_1}{2}]$ , 有  $f(t) = f(a)$ . 从而  $x_0 + \frac{r_1}{2} \in E$ , 这与  $x_0 = \sup E$  矛盾. 故假设不成立, 命题得证.

**证法三 (闭区间套定理):** (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 不妨设  $f(a) < f(b)$ , 则记闭区间  $[a, b] = [a_1, b_1]$ . 若  $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > f(a_1)$ , 则记闭区间  $[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] = [a_2, b_2]$ ; 若  $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < f(b_1)$ , 则记闭区间  $[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$ . 以此类推, 可以得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n]$ . 又由条件可知, 存在



$r > 0$ , 使得  $f(t) = f(\xi), \forall t \in (\xi - r, \xi + r)$ . 从而存在充分大的  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $|a_N - \xi| < r, |b_N - \xi| < r$ , 即  $a_N, b_N \in (\xi - r, \xi + r)$ . 于是  $f(a_N) = f(b_N)$ , 这与  $f(a_N) < f(b_N)$  矛盾.

2. (聚点定理): (反证法) 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 则对  $\forall n > 0$ , 都存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得  $|f(x_n)| > n$ . 从而得到一个有界数列  $\{x_n\}$ . 由聚点定理, 可知其存在收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ . 由条件可知, 存在  $\delta_{x_0} > 0$  以及  $M_{x_0}$ , 使得  $|f(y)| \leq M_{x_0}, \forall y \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ . 又由  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$  可知, 存在  $K > M_{x_0}$ , 使得  $|x_{n_K} - x_0| < \delta_{x_0}$ , 即  $x_{n_K} \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ . 于是  $|f(x_{n_K})| \leq M_{x_0}$ . 而  $|f(x_{n_K})| > n_K \geq K > M_{x_0}$  矛盾.

3. (闭区间套定理): (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \geq f(b)$ . 记闭区间  $[a, b] = [a_1, b_1]$ , 若  $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \leq f(a_1)$ , 则记闭区间  $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] = [a_2, b_2]$ ; 若  $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \geq f(b_1)$ , 则记闭区间  $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right] = [a_2, b_2]$ . 以此类推, 可以得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) \geq f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n]$ . 由条件可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(\xi - \delta, \xi + \delta)$  上单调递增. 又由  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  可知, 存在  $N > 0$ , 使得  $|a_N - \xi| < \delta, |b_N - \xi| < \delta$ , 即  $a_N, b_N \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ , 且  $a_N < b_N$ . 于是  $f(a_N) \leq f(b_N)$ . 而  $f(a_N) \geq f(b_N)$ , 这就产生了矛盾.  $\square$

### 引理 1.2

设  $f(x)$  定义在区间  $I$  中, 则  $f(x)$  的全体极值构成的集合是至多可数集.

**证明** 极值只有极大值和极小值, 因此只要证明极大值全体与极小值全体都是至多可数的即可.

设  $f(x)$  的全体极小值构成的集合为  $A$ , 则

$$A = \{f(x) | \exists \delta > 0, \forall t \in (x - \delta, x + \delta), f(t) \geq f(x)\}.$$

故对  $\forall y \in A$ , 都存在  $x \in I$ , 使得  $y = f(x)$ , 并且  $\exists \delta > 0, \forall t \in (x - \delta, x + \delta), f(t) \geq f(x)$ . 由有理数的稠密性可知, 存在  $r \in (x - \delta, x) \cap \mathbb{Q}, s \in (x, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ . 从而  $(r, s) \subset (x - \delta, x + \delta)$ , 于是对  $\forall t \in (r, s)$ , 同样有  $f(t) \geq f(x)$ .

再设全体有理开区间构成的集合为  $B$ , 现在定义一个映射

$$\varphi: A \longrightarrow B; \quad y \longmapsto (r, s).$$

任取  $y_1, y_2 \in A$  且  $y_1 \neq y_2$ , 则存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 假设  $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = (r_0, s_0)$ , 则对  $\forall t \in (r_0, s_0)$ , 都有  $f(t) \geq y_1, y_2$ . 于是  $y_1 = f(x_1) \geq y_2, y_2 = f(x_2) \geq y_1$ , 从而  $y_1 = y_2$ , 这产生了矛盾. 故  $\varphi(y_1) \neq \varphi(y_2)$ , 因此  $\varphi$  是单射.

而由全体有理开区间构成的集合  $B$  是至多可数的, 因此  $f(x)$  的全体极小值构成的集合  $A$  也是至多可数的. 同理,  $f(x)$  的全体极大值构成的集合也是至多可数的.  $\square$

**注** 由全体有理开区间构成的集合  $B$  是可数集的原因:

构造一个映射

$$\phi: B \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \quad (r, s) \longmapsto (r, s).$$

显然  $\phi$  是一个双射, 而  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  是可数集, 故  $B$  也是可数集.

**例题 1.3** 设  $f(x)$  在区间  $I$  中连续, 并且在每一点  $x \in I$  处都取到极值, 证明:  $f(x)$  是常值函数.

**注** 连续这一条件不可删去, 也不可减弱为至多在可数个点不连续. 反例: 考虑黎曼函数即可, 它处处取极值, 并且在有理点不连续, 无理点连续.

**证明** **证法一 (引理 1.2):** (反证) 假设  $f(x)$  不是常值函数, 则存在  $a, b \in I$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 由  $f$  的连续性及其连续函数的介值性可知,  $f(x)$  可以取到  $f(a), f(b)$  中的一切值. 故  $f(x)$  的值域是不可数集 (区间都是不可数集). 又由条件可知,  $f(x)$  的值域就是由  $f(x)$  的全体极值构成的. 于是根据引理 1.2 可得,  $f(x)$  的值域是至多可数集. 这与  $f(x)$  的值域是不可数集矛盾.

**证法二 (闭区间套定理):** 假设  $f(x)$  不是常值函数, 则存在  $a_1, b_1 \in I$ , 使得  $f(a_1) \neq f(b_1)$ . 不妨设  $f(a_1) < f(b_1)$ . 因为  $f$  在  $I$  上连续, 所以由介值定理可知, 存在  $c_1 \in [a_1, b_1]$ , 使得  $f(a_1) < f(c_1) = \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} < f(b_1)$ . 若  $b_1 - c_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$ , 则令  $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ ; 若  $c_1 - a_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$ , 则令  $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ . 无论哪种情况, 都有



$f(a_2) < f(b_2)$ .

在  $[a_2, b_2]$  上重复上述操作, 并依次类推下去, 得到一列闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}$  满足

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由闭区间套定理可知, 存在唯一  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , 使得  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . 再由  $f$  的连续性以及 Heine 归结原则可知,  $f(a_n)$  严格递增收敛于  $f(x_0)$ ,  $f(b_n)$  严格递减收敛于  $f(x_0)$ . 故  $f(a_n) < f(x_0) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 因此对  $\forall \delta > 0$ , 都存在  $N > 0$ , 使得  $|a_N - x_0| < \delta, |b_N - x_0| < \delta$ , 并且  $f(a_N) < f(x_0) < f(b_N)$ . 从而  $x_0 \in I$  不是  $f(x)$  的极值点, 这与  $f$  在  $I$  上处处取极值矛盾.  $\square$

### 定理 1.2 (Baire 纲定理)

1. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列没有内点的闭集, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也没有内点.
2. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列开集并且都在  $\mathbb{R}$  稠密, 则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  也在  $\mathbb{R}$  中稠密.
3. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列闭集, 并且  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也是闭集, 则存在开区间  $(a, b)$  (可以无穷区间) 和正整数  $N$  使得  $(a, b) \cap A \subset A_N$ .
4. 设  $A_n$  是一列无处稠密集 (闭包没有内点), 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也没有内点.

### 证明

1. 用反证法. 设  $x_0 \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  为内点, 则存在  $\delta_0 > 0$ , 使得  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$ . 因为  $A_1$  没有内点, 故存在  $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$ . 由于  $A_1$  为闭集, 故存在  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \emptyset$$

不妨设  $\delta_1 < 1$ . 因为  $A_2$  没有内点, 故存在  $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$ . 由于  $A_2$  为闭集, 故存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \emptyset$$

不妨设  $\delta_2 < \frac{1}{2}$ . 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$

使得  $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \emptyset, \delta_n < \frac{1}{n} (n \geq 1)$ . 根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n], \forall n \geq 1$ . 因此  $\xi \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$ , 这和  $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$  相矛盾.

- 2.
- 3.
- 4.

$\square$

**例题 1.4** 设数列  $a_n$  单调递增趋于正无穷, 并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ , 函数  $f(x)$  定义在  $(0, +\infty)$  中且对任意  $x \geq 1$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x) = 0$ .

1. 若  $f(x)$  是连续函数, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;
2. 若删去连续这一条件, 或者虽然连续, 但是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , 则上述结论均不成立.

### 证明

1. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 定义  $E_n = \{x \geq 1 | \forall k \geq n, |f(a_k x)| \leq \varepsilon\}$ , 则  $E_n$  是一列闭集, 根据条件有  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [1, +\infty)$ . 于是根据 Baire 纲定理可知存在正整数  $N$  和区间  $(u, v)$  使得  $(u, v) \subset E_N$ , 也就是说, 任意  $x \in (u, v)$ , 任意  $n \geq N$  都有  $|f(a_n x)| \leq \varepsilon$ , 换句话说我们得到了一个一致的  $N$ . 因此  $|f(x)|$  在区间  $(a_N u, a_N v), (a_{N+1} u, a_{N+1} v), \cdots$  中

都是不超过  $\varepsilon$  的, 只要这些区间在  $n$  很大之后能够相互有重叠, 一个接着下一个, 全覆盖就行了. 换句话说, 我们要证明: 存在  $N_0$  使得任意  $n \geq N_0$  都有  $a_{n+1}u < a_nv$ , 这等价于  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{v}{u}$ , 注意条件: 极限等于 1 并且右端  $\frac{v}{u} > 1$ , 所以上式成立. 将前面推导的东西梳理一下, 就是说: 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M$  使得  $x > M$  时恒有  $|f(x)| < \varepsilon$ , 结论得证.

2. 例如考虑  $a_n = n$ , 定义  $f(x)$  为: 当  $x = m \cdot 2^{\frac{1}{k}}, m \in \mathbb{N}^+$  时候取 1, 其余情况都取 0, 则对任意的  $x > 0$ , 数列  $f(nx)$  中都至多只有一项为 1, 因此极限总是 0, 但是很明显  $f(x)$  的极限并不存在. 另外一个反例, 可以考虑  $a_n = e^n$ , 现在看连续性, 条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{n+\ln x}) = 0$$

将  $\ln x \in \mathbb{R}$  看成一个变量, 相应的考虑  $g(x) = f(e^x)$ , 则连续函数  $g(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{y+n}) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , 我们构造一个例子使得  $g(x)$  在无穷处极限非零或者不存在即可. 这与经典的命题有关: 设  $f(x)$  一致连续且  $f(x+n) \rightarrow 0$  对任意  $x$  成立, 则  $f(x) \rightarrow 0$ , 现在删去了一致连续性命题自然是错的, 具体构造留作习题.

□

**注** 通常, 点态收敛 (上题) 或者数列极限 (本题) 这种非一致性的条件, 描述起来是 “任意  $x \in (0, 1)$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $n > N$  都有  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ” 或者 “任意  $x > 0$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $n > N$  都有  $|f(a_n x)| < \varepsilon$ ”, 很明显这里的  $N$  是与  $x, \varepsilon$  都有关系的, 如果我们事先取定  $\varepsilon > 0$ , 那么这个过程可以说是 “给定  $x$ , 去找对应的  $N$ ”. 而 baire 纲定理的想法就是反过来找: 不同的  $x$  对应的  $N$  确实可以不一样, 那就先取好  $N$ , 我们看都有哪些  $x$  对应到这一个  $N$ , 也就是说事先取定  $\varepsilon > 0$ , 然后对每一个  $n$  去定义集合, 反找  $x$ . 所有 baire 纲定理相关的问题, 思想都是如此, 根据定理便能得到一个一致的东西, 拿来做事情.

**例题 1.5** 设  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  中可导, 证明:  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  中的一个稠密子集中连续.

**证明**

□

### 引理 1.3

有界数列  $x_n$  如果满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 则  $x_n$  的全体聚点构成一个闭区间.

♥

**证明**

□

**例题 1.6** 设连续函数  $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x_1 \in [0, 1], x_{n+1} = f(x_n)$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ .

**证明** 必要性 ( $\Rightarrow$ ): 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  显然成立.

充分性 ( $\Leftarrow$ ):

□

## 1.2 上下极限

### 命题 1.1 (子列极限命题)

- (a): 给定  $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  的充分必要条件是对任何广义存在的  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , 都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .  
 (b): 设  $m \in \mathbb{N}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn+r}, \forall r = 0, 1, 2, \dots, m-1$  相同, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}$ .

♠



**笔记** 当  $m = 2$ , 上述命题是在说如果序列奇偶子列极限存在且为同一个值, 则序列的极限存在且极限和偶子列极限值相同. 所谓奇偶, 就是看除以 2 的余数是 1 还是 0. 对一般的  $m \in \mathbb{N}$ , 我们也可以看除以  $m$  的余数是

$\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  中的哪一个来对整数进行分类, 即  $\bmod m$  分类. 严格的说, 我们有无交并

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{m-1} \{mk + r : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**证明** 对 (a): 考虑上下极限即可.

对 (b): 记  $A \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}$ . 事实上对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $k > N$  时, 我们有

$$|x_{mk+r} - A| < \varepsilon, \forall r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}. \quad (1.1)$$

我们知道对任何正整数  $n > mN + m - 1$ , 存在唯一的  $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  和  $k > N$ , 使得  $n = km + r$ , 于是运用(1.1)我们有  $|x_n - A| < \varepsilon$ , 因此我们证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}.$$


□

### 定义 1.2 (上下极限的定义)

我们定义

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k. \quad (1.2)$$

♣

 **笔记** 注意到由定义,  $\sup_{k \geq n} a_k$  是单调递减的,  $\inf_{k \geq n} a_k$  是单调递增的. 因此(1.2)式的极限存在或为确定符号的  $\infty$ .

### 命题 1.2 (上下极限的等价定义)

假定  $\{a_n\}$  是个实数列, 则有

- (1): 设  $A$  是某个实数, 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  的充分必要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $x_n < A + \varepsilon$  且存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $x_{n_k} > A - \varepsilon, k = 1, 2, \dots$ .
- (2):  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  的充分必要条件是对任何  $A > 0$ , 存在  $n$ , 使得  $a_n > A$ .
- (3): 设  $A$  是某个实数, 则  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  的充分必要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $x_n > A - \varepsilon$  且存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $x_{n_k} < A + \varepsilon, k = 1, 2, \dots$ .
- (4):  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  的充分必要条件是对任何  $A < 0$ , 存在  $n$ , 使得  $a_n < A$ .


♣

### 命题 1.3 (上下极限的性质)

我们有如下的

1.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $-\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$ .
3.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
4. 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab$ .

♣

 **笔记** 上下极限的性质都可以通过考虑其子列的极限快速得到证明. 因此我们一般不需要额外记忆上下极限的性质, 只需要熟悉通过考虑子列极限直观地得到结论即可. 并且因为上下极限就是(最大/最小)子列极限, 所以一般极限的性质对于上下极限都成立.

**证明** 1.

2.

3.

4. 由于  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 因此我们可设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ . 根据极限的四则运算法则, 可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$ . 从而  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$ . 又由上下极限的性质, 可知  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n = ab$ . 故  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n =$

ab.

**例题 1.7** 求上极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

**解** 注意到

$$n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi + n\pi) = (-1)^n n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi) = (-1)^n n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{\pi}{2}.$$

**注** 本题最后一个等号其实是直接套用了上极限的性质得到的.**命题 1.4**对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \varepsilon) \leq a_n \leq f_2(n, \varepsilon), \forall n \geq N,$$

这里

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(n, \varepsilon) = A \in \mathbb{R}.$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .**笔记** 以后可以直接使用这个命题, 但是要按照证法一的格式书写.**证明** 证法一 (利用上下极限)(也是实际做题中直接使用这个命题的书写步骤):已知对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \varepsilon) \leq a_n \leq f_2(n, \varepsilon), \forall n \geq N,$$

上式两边令  $n \rightarrow +\infty$ , 则有

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 两边令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 可得

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon) = A.$$

又显然有  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , 于是

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon) = A.$$

故由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .**证法二 ( $\varepsilon - \delta$  语言):** $\forall \varepsilon > 0$ , 记  $g_1(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon)$ ,  $g_2(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon)$ . 由  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_2(\varepsilon) = A$ , 可知对  $\forall \eta > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$g_1(\delta) > A - \frac{\eta}{2}, \quad g_2(\delta) < A + \frac{\eta}{2}.$$

由于  $g_1(\delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \delta)$ ,  $g_2(\delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \delta)$ , 因此存在  $N' \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \delta) > g_1(\delta) - \frac{\eta}{2}, \quad f_2(n, \delta) < g_2(\delta) + \frac{\eta}{2}, \quad \forall n > N'.$$

又由条件可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \delta) \leq a_n \leq f_2(n, \delta), \forall n > N.$$

于是当  $n > \max\{N, N'\}$  时, 对  $\forall \eta > 0$ , 我们都有

$$A - \eta < g_1(\delta) - \frac{\eta}{2} < f_1(n, \delta) \leq a_n \leq f_2(n, \delta) < g_2(\delta) + \frac{\eta}{2} < A + \eta.$$

故由夹逼准则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ .

□

## 第二章 极限与渐近分析方法


### 2.1 基本的渐进估计与求极限方法

#### 2.1.1 基本极限计算

##### 2.1.1.1 基本想法

裂项、作差、作商的想法是解决极限问题的基本想法.

**例题 2.1** 对正整数  $v$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v)}$ .


 **笔记** 直接裂项即可.

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+v)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{v!} - \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+v)} \right] = \frac{1}{v!v}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.2** 设  $p_0 = 0, 0 \leq p_j \leq 1, j = 1, 2, \dots$ . 求  $\sum_{j=1}^{\infty} \left( p_j \prod_{i=0}^{j-1} (1-p_i) \right) + \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j)$  的值.

 **笔记** 遇到求和问题, 可以先观察是否存在裂项的结构.


**解** 记  $q_i = 1 - p_i$ , 则有

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j \prod_{i=0}^{j-1} (1-p_i) + \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-q_j) \prod_{i=0}^{j-1} q_i + \prod_{i=0}^{\infty} q_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^{j-1} q_i - \prod_{i=0}^j q_i \right) + \prod_{i=0}^{\infty} q_i = q_0 - \prod_{i=0}^{\infty} q_i + \prod_{i=0}^{\infty} q_i = q_0.$$

□

**例题 2.3** 设  $|x| < 1$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})$ .

**注** 如果把幂次  $1, 2, 2^2, \dots$  改成  $1, 2, 3, \dots$ , 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题.

 **笔记** 平方差公式即可

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.4** 对正整数  $n$ , 方程  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} = e$  的解记为  $t = t(n)$ , 证明  $t(n)$  关于  $n$  递增并求极限 ( $t \rightarrow +\infty$ ).

**解** 解方程得到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} = e \Leftrightarrow (n+t) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n.$$

设  $f(x) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, x > 0$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \frac{1}{x^2 + x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2 + x} \Leftrightarrow \ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{1+t}}, t = \frac{1}{x} \in (0, 1).$$



最后的不等式由关于  $\ln$  的常用不等式可知显然成立, 于是  $f(x)$  单调递增, 故  $t(n) = f(n)$  也单调递增. 再来求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

□

## 命题 2.1

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n!}{(n+1)^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.$$

◆

证明

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1+k}{k}\right)^k = \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n!}{(n+1)^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{(n+1)^n e^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}. \end{aligned}$$

□

例题 2.5 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}$ .

解 因为

$$\sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k} = \sqrt{n} \frac{e^{n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt{nn!} e^n}{(n+1)^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

由 Stirling 公式  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) 及

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow +\infty$$

得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{(1+1/n)^n e^{\ln n + \gamma}} = \sqrt{2\pi} e^{-(1+\gamma)}$$

□

## 命题 2.2 (数列常见的转型方式)

数列常见的转型方式:

$$(1) \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k);$$

$$(2) \quad a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k};$$

$$(3) \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ 其中 } S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

从而我们可以得到

1. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  收敛.

2. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ( $a_n \neq 0$ ) 收敛的充要条件是  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  收敛.

◆

注 在关于数列的问题中, 将原数列的等式或不等式条件转化为相邻两项的差或商的等式或不等式条件的想法是非常常用的.



笔记 这个命题给我们证明数列极限的存在性提供了一种想法: 我们可以将数列的收敛性转化为级数的收敛性, 或者将数列的收敛性转化为累乘的收敛性. 而累乘可以通过取对数的方式转化成级数的形式, 这样就可以利用级数

的相关理论来证明数列的收敛性.

这种想法的**具体操作方式**:

(i) 先令数列相邻两项作差或作商, 将数列的极限写成其相邻两项的差的级数或其相邻两项的商的累乘形式.(如果是累乘的形式, 那么可以通过取对数的方式将其转化成级数的形式.)

(ii) 若能直接证明累乘或级数收敛, 就直接证明即可. 若不能, 则再利用级数的相关理论来证明上述构造的级数的收敛性, 从而得到数列的极限的存在性. 此时, 我们一般会考虑这个级数的通项, 然后去找一个通项能够控制住所求级数通项的收敛级数(几何级数等), 最后利用级数的比较判别法来证明级数收敛

**证明**

1. 必要性( $\Rightarrow$ )和充分性( $\Leftarrow$ )都可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$  直接得到.

2. 必要性( $\Rightarrow$ )和充分性( $\Leftarrow$ )都可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}$  直接得到.

□

**例题 2.6** 设  $a_n = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$ , 证明: 数列  $a_n$  收敛到一个正数.

**证明** 由条件可得  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left( \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+3}}{\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 1.$$

从而  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right] = e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]}. \quad (2.1)$$

注意到

$$\ln \left[ 1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right] \sim \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, n \rightarrow \infty.$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$  收敛, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]$  存在. 于是由 (2.1) 式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]}$$

也存在.

□

### 2.1.1.2 带 $\ln$ 的极限计算

通常, 带着一堆  $\ln$  的极限算起来都非常烦人, 并不是简单的一个泰勒就秒杀的, 比如这种题. 这种题不建议用泰勒, 很多时候等价无穷小替换、拆项和加一项减一项会方便不少.

**注** 另外, 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然.

**例题 2.7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right)$ .

**注** 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然, 比如下面的做法就是错的(过程和答案都不对)

$$\frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x+3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x+3) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi x = \frac{3\pi}{2}.$$

**解** 根据洛必达法则, 显然  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 1$ , 拆分一下有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (2x+3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x \ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
&= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{\ln(1+x)} \left( \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{\ln(1+x)} - 1 \right) \right) + \frac{3}{2} \pi \\
&= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
&= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi - 2.
\end{aligned}$$

□

### 2.1.1.3 幂指函数的极限问题

幂指函数的极限问题, 一律写成  $e^{\ln}$  形式, 并利用等价无穷小替换和加一项减一项去解决, 方便.


**注** 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看 Taylor 展开的第一项并且是严谨的, 泰勒则需要展开好几项, 计算量爆炸.

**例题 2.8** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x}$ .

**注** 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$\begin{aligned}
x^{\sin x} &= e^{\sin x \ln x} = 1 + \sin x \ln x + \frac{1}{2} \sin^2 x \ln^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x \ln^3 x + O(x^4 \ln^4 x) \\
(\sin x)^x &= e^{x \ln \sin x} = 1 + x \ln \sin x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 \sin x + \frac{1}{6} x^3 \ln^3 \sin x + O(x^4 \ln^4 \sin x)
\end{aligned}$$

然后你不仅需要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦.

 **笔记** 先说明写成  $e^{\ln}$  形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可.

**解** 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = 1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \frac{e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln x + x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2 \ln x} \left( \frac{\sin x}{x} \sim 1 - \frac{1}{6} x^2, x \rightarrow 0^+ \right) \\
&= -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3 \ln x} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

□

**例题 2.9** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{e^x} \right)$ .

**解** 注意到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{ex \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^e.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1 + \frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \left( e^{(1 + \frac{1}{x})^x - ex \ln(1 + \frac{1}{x})} - 1 \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1 + \frac{1}{x})^x - ex \ln(1 + \frac{1}{x})} - 1 \right) = e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{x \ln(1 + \frac{1}{x}) - 1} - x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &\stackrel{\text{Taylor 展开}}{=} e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{2} \left( x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{8} \end{aligned}$$

□

### 2.1.1.4 拟合法求极限

**例题 2.10** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}}$ .



**笔记** 核心想法是**拟合法**, 但是最后的极限估计用到了**分段估计**的想法.

**证明** 注意到  $\frac{\ln n}{\ln(2n)} \rightarrow 1$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{2} - 2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$ , 所以只需证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意对称性, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$  即可, 待定一个  $m$  来分段放缩. 首先容易看出数列  $\ln k \ln(n-k)$  在  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$  时是单调递增的, 这是因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \ln(n-x), f'(x) = \frac{\ln(n-x)}{x} - \frac{\ln x}{n-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-x) \ln(n-x) > x \ln x, \forall x \in \left(2, \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

显然成立, 所以待定  $m \in [2, \frac{n}{2}]$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left( \frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) = \frac{m}{n} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \right) \leq \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \end{aligned}$$

为了让第一个趋于零, 可以取  $m = \frac{n}{2 \ln^2 n}$ , 然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln \frac{n}{2 \ln^2 n} \ln \left(n - \frac{n}{2 \ln^2 n}\right)} - 1 = 0$$

所以结论得证 (过程中严格来讲应补上取整符号, 这里方便起见省略了). □

## 2.1.2 Taylor 公式

### 定理 2.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设  $f$  在  $x = a$  是  $n$  阶右可微的, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (2.2)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (2.3)$$



**笔记** 用 Taylor 公式计算极限, 如果展开  $n$  项还是不方便计算, 那么就多展开一项或几项即可.

**证明** (1) 要证明(2.2)式等价于证明

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0.$$

对上式左边反复使用  $n-1$  次 *L'Hospital's rules*, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} \xrightarrow{\text{L'Hospital's rules}} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}} \\ & \xrightarrow{\text{L'Hospital's rules}} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!} (x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\ & \xrightarrow{\text{L'Hospital's rules}} \dots \xrightarrow{\text{L'Hospital's rules}} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} \\ & = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \xrightarrow{\text{n阶导数定义}} 0 \end{aligned}$$

故(2.2)式成立.

(2) 要证明(2.3)式等价于证明: 存在  $C > 0$  和  $\delta > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} \right| \leq C, \forall x \in [a, a+\delta].$$

□

### 2.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限

**例题 2.11** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n.$$

**笔记** 由  $\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1), n \rightarrow +\infty$ , 可得  $f(n) = n + o(n), n \rightarrow +\infty$ . 这个等式的意思是:  $f(n) = n + o(n)$  对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$  都成立. 并且当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + o(n)}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 1$ . 其中  $o(n)$  表示一个 (类) 数列, 只

不过这个(类)数列具有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 0$  的性质.

**解 解法一(一般解法):**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(n)}} = e.$$

**解法二(渐进估计):**

由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 可知

$$\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1), n \rightarrow +\infty.$$

从而

$$\left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + o(1)}\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} (1 + o(1))\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e^{n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}, n \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1 + o(1)} = e.$$

□

**例题 2.12** 计算:


1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sin x - \cos x}{x^4}.$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right].$

**解**

- 1.
- 2.

□

**例题 2.13** 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} (\alpha > 0).$

 **笔记** 利用 Taylor 公式即可得到结果. 类似  $\ln(xe^{-x} - 1) \sim \ln(xe^{-x} + o(xe^{-x})) \sim \ln(xe^{-x})$  的等价关系可以直接凭直觉写出, 要严谨证明的话, 只需要利用 L'Hospital 法则即可.

**解** 由

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} = e^{\frac{\ln(\sqrt[n]{n} - 1)}{(\ln n)^\alpha}}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt[n]{n} - 1)}{(\ln n)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{xe^{-x}} - 1)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(xe^{-x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \\ &= \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ -1, & \alpha = 1, \\ -\infty, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} = \begin{cases} 1, & \alpha > 1, \\ e^{-1}, & \alpha = 1, \\ 0, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

□

**例题 2.14** 计算  $(1 + \frac{1}{x})^x, x \rightarrow +\infty$  的渐进估计.

**解** 由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{x \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]} = e^{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$



$$\begin{aligned}
&= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 + o\left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \right] \\
&= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\
&= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \frac{e}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ x \left( e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) - \frac{e}{2} \right] = -\frac{11e}{24}. \quad (2.4)$$

□

**注** 反复利用上述(2.4)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到  $e$  的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

**例题 2.15** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}.$$

**解** 记  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}$ , 则由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\begin{aligned}
\cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx) &= \left[ 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right] \left[ 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \right] \cdots \left[ 1 - \frac{(nx)^2}{2} + o(x^2) \right] \\
&= 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 6}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

$$\text{故 } I = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

□

**例题 2.16** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 次复合}}}{x^3}.$$

**解** 先证明  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))) \cdots)}_{n \text{ 次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ .

当  $n=1$  时, 由 Taylor 公式结论显然成立. 假设  $n=k$  时, 结论成立. 则当  $n=k+1$  时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sin \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right) \\
&= x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 + o \left( \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 \right) \\
&= x - \frac{n+1}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

由数学归纳法得  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))) \cdots)}_{n \text{ 次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 次复合}}}{x^3} = \frac{n}{6}$ . □

**例题 2.17** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!).$$

**解** 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式可知

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta x^{n+2}}{(n+2)!}, \theta \in (0, x).$$

从而

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}, \theta \in (0, 1).$$

于是

$$2\pi en! = 2\pi n! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!}, \theta \in (0, 1).$$

而  $n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$ , 因此

$$\begin{aligned} n \sin(2\pi en!) &= n \sin \left( 2\pi n! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!} \right) = n \sin \left( \frac{2\pi n!}{(n+1)!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!} \right) \\ &= n \sin \left( \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right) \sim n \left[ \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right] \rightarrow 2\pi, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

### 2.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

**例题 2.18** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})].$$

**解** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $\theta_n \in (\sqrt{n+1}, \sqrt{n})$ , 使得

$$\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n.$$

从而当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\theta_n \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n \right] = 0.$$

□

**例题 2.19** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right).$$

**证明** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $\theta_n \in \left( \frac{2024}{n}, \frac{2024}{n+1} \right)$ , 使得

$$\arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} = \frac{1}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right).$$

并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right) = 2024 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 2024.$$

□

**例题 2.20**

1. 对  $\alpha \neq 0$ , 求  $(n+1)^\alpha - n^\alpha, n \rightarrow \infty$  的等价量;
2. 求  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1), n \rightarrow \infty$  的等价量.



**笔记** 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

**注** 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

解 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设  $\alpha > 1$ , 则有  $\alpha n^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha (n+1)^{\alpha-1}$  (若  $\alpha \leq 1$ , 则有  $\alpha (n+1)^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha n^{\alpha-1}$ ). 故

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \theta_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha (n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = \alpha.$$

因此  $(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \rightarrow \infty$ .

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - (n-1)) \cdot (1 + \ln \theta_n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又  $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} < \frac{\ln \theta_n}{\ln n} < \frac{\ln n}{\ln n} = 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1) \sim \ln n, n \rightarrow +\infty$ . □

例题 2.21 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x}.$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall x \in U(0)$ , 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x) \sin \theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \sin \theta}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 \cdot \sin \theta}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x}.$$

又由  $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$  可知

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

故  $\sin \theta \sim \theta \sim x, x \rightarrow 0$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}$ . □

## 2.1.4 L'Hospital's rules

### 定理 2.2 (上下极限 L'Hospital 法则)

1. 设  $f, g$  在  $(a, b)$  内可微, 满足 (i)  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ . (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.5)$$

且


$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right|. \quad (2.6)$$

2. 设  $f, g$  在  $(a, b)$  内可微, 满足 (i)  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ . (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.7)$$

且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right|. \quad (2.8)$$

 **笔记** 此定理第一部分(2.5)和(2.7)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况. 但(2.6)和(2.8)一般是不能直接用的, 需要给证明.

**证明** 以第一问为例, 事实上, 固定  $x$ , 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x < \xi < y.$$

我们断言对  $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , 必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = A. \quad (2.9)$$

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A$ . 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y_n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{g(x)}{g(y_n)}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right|.$$

利用

$$\left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| - \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \infty,$$

我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| = A.$$

反之设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = A$ , 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| = A.$$

于是由

$$\left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| - \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} |g(y_n)| = \infty,$$

我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A.$$

现在就证明了(2.9).

于是结合  $x \rightarrow +\infty$ , 我们容易得到

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y)}{g(y)} \right| &= \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| = \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| \\ \underline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y)}{g(y)} \right| &= \underline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| = \underline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \geq \underline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| \end{aligned}$$

这就完成了证明.  $\square$

**例题 2.22** 若  $f \in D^1[0, +\infty)$ .

(1) 设


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = s$ .

(2) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x) \right] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{s}{2}$ .

 **笔记** (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:  $y' + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} y = 0$ , 整理可得  $\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ , 再对其两边同时积分得到  $\ln y = -\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx + C_0$ . 从而  $y = C e^{-\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ , 于是  $C = y e^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ . 故我们要构造的函数就是  $C(x) = f(x) e^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ . 并且此时

$C(x)$  满足  $C'(x) = f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x)$ .

**证明**

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + f'(x)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f + f'] = s.$$

(2) 注意到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt} = +\infty$ , 从而由 L'Hospital'rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}}{e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital'rules}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x) \right] e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x} \left[ f(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f'(x) \right] = \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.23** 设可微函数  $a, b, f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$f(x) \geq 0, g(x) > 0, g'(x) > 0, \frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x) \frac{f(x)}{g(x)} = b(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = A > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = B > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

**证明:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}.$$

**注** 如果直接使用 L'Hospital 法则, 再结合条件会得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ b(x) - a(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right].$$

但是注意这里并不能直接使用极限运算的四则运算法则得到结果, 这是因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不一定存在.

**证明** 令  $p(x) = e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}$ , 则  $p'(x) = a(x) \frac{g'(x)}{g(x)}$ , 进而

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}}{e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}} = a(x) \frac{g'(x)}{g(x)}. \quad (2.10)$$

于是由条件可得

$$f'(x) + a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} f(x) = b(x) g'(x) \iff f'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} f(x) = b(x) g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

又由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = A > 0$  可知, 存在  $M > 0$ , 使得

$$a(x) \geq \frac{A}{2}, \quad \forall x > M.$$

从而对  $\forall x > M$ , 我们有

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt} \geq e^{\int_M^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt} \\ &\geq e^{\frac{A}{2} \int_M^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt} = e^{\frac{A}{2} \ln \frac{g(x)}{g(M)}} = \left[ \frac{g(x)}{g(M)} \right]^{\frac{A}{2}}. \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ . 因此, 利用 L'Hospital 法则, 再结合 (2.10) 和 (2.11) 式, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)p(x)}{g(x)p(x)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)p(x) + f(x)p'(x)}{g'(x)p(x) + g(x)p'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} f(x)}{g'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)g'(x)}{g'(x) + a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{1 + a(x)} = \frac{B}{A+1}. \end{aligned}$$

□

## 命题 2.3 (L'Hospital 法则 (复变函数版本))

设  $f(x) = u(x) + iv(x)$ ,  $g(x)$  为实值函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = z_0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = z_0$ .

**证明** 由实数 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{u'(x)}{g'(x)} + i \frac{v'(x)}{g'(x)} \right) = z_0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x)}{g(x)} = \operatorname{Re} z_0, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{v(x)}{g(x)} = \operatorname{Im} z_0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x) + iv(x)}{g(x)} = z_0. \end{aligned}$$

□

**例题 2.24** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可微且  $a, b \in \mathbb{R}$ , 满足  $a > 0, a^2 - 4b < 0$  或者  $a > 0, b > 0, a^2 - 4b > 0$  且有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f''(x) + af'(x) + bf(x)) = \ell \in \mathbb{R}$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ell}{b}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

**笔记** 对于二阶微分方程而言, 一般考虑降阶. 本题利用 L'Hospital 法则实现降阶.

**证明** 不妨设  $\ell = 0$ , 否则用  $f(x) - \frac{\ell}{b}$  代替  $f(x)$  即可.

①当  $a > 0, b > 0, a^2 - 4b > 0$  时, 考虑二次方程  $x^2 + ax + b = 0$ , 则此时该方程必有两负根. 设这两个负根分别为  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , 则  $x^2 + ax + b = x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ . 注意到

$$[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))] = e^{-\lambda_2 x} [f''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)f'(x) + \lambda_1\lambda_2 f(x)] = e^{-\lambda_2 x} [f''(x) + af'(x) + bf(x)],$$

因此由条件可得

$$\frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{-\lambda_2 x})'} = \frac{f''(x) + af'(x) + bf(x)}{-\lambda_2} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

从而利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))}{e^{-\lambda_2 x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{-\lambda_2 x})'} = 0.$$

又注意到

$$[e^{-\lambda_1 x} f(x)]' = e^{-\lambda_1 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)],$$

因此

$$\frac{[e^{-\lambda_1 x} f(x)]'}{(e^{-\lambda_1 x})'} = \frac{f'(x) - \lambda_1 f(x)}{-\lambda_1} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

于是再利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_1 x} f(x)}{e^{-\lambda_1 x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_1 x} f(x)]'}{(e^{-\lambda_1 x})'} = 0.$$

故由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0$  和极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] + \lambda_1 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

进而再由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] = 0$  可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] - a \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) - b \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

②当  $a > 0, a^2 - 4b < 0$  时, 考虑二次方程  $x^2 + ax + b = 0$ , 则此时该方程必有两复根, 并且  $\lambda_1 + \lambda_2 = a < 0$ .

于是设这两个复根分别为  $\lambda_1 = -u + vi, \lambda_2 = -u - vi (u > 0, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ , 则  $x^2 + ax + b = x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ .

从而由 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ivx} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(u+iv)x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)]}{e^{ux}} \stackrel{\text{L' Hospital 法则 (复变函数版本)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{(u+iv)x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{ux})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{ux})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_2 x} [f''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)f'(x) + \lambda_1\lambda_2 f(x)]}{ue^{ux}} \end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(u+iv)x} [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{ue^{ux}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ivx} [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{u} = 0,$$

因此

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + uf(x) + ivf(x)].$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + uf(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} vf(x) = 0.$$

又因为  $u > 0, v \neq 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 进而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . 再由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] = 0$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

综上, 结论得证.  $\square$

**注** 第②中情况中不使用 **L'Hospital 法则 (复变函数版本)** 的方法: 考虑

$$e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = e^{(u+iv)x} [f'(x) - (-u+iv)f(x)] = e^{ux} (\cos vx + i \sin vx) [f'(x) + uf(x) - ivf(x)].$$

则上述复变函数实部和虚部分别为

$$\text{实部: } e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx];$$

$$\text{虚部: } e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \sin vx - vf(x) \cos vx].$$

于是利用 **L' Hospital 法则** 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx]}{e^{ux}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{ux} ((f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx)]'}{(e^{ux})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ux} \cos vx [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{ue^{ux}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos vx [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{u} = 0. \end{aligned}$$

同理利用 **L' Hospital 法则** 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f'(x) + uf(x)) \sin vx - vf(x) \cos vx] = 0.$$

因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)]$  的实部和虚部都趋于 0, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0$ , 后续同理可证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

**例题 2.25** 给定正整数  $n$ , 设  $f(x) \in C^n[-1, 1], |f(x)| \leq 1$ , 证明: 存在与  $f(x)$  无关的常数  $C$ , 使得只要  $|f'(0)| \geq C, f^{(n)}(x)$  在  $(-1, 1)$  中就会有至少  $n-1$  个不同的根.

**证明** 证明见豌豆 (2024-2025 竞赛班下数学类讲义洛必达法则部分), 本题证明直观上定性分析比较容易, 但是要严谨地书写过程比较繁琐 (证明太麻烦没看).  $\square$

**例题 2.26** 设  $f(x)$  在  $(0, 1)$  中任意阶可导且各阶导数均非负, 证明:  $f(x)$  是实解析函数. (伯恩斯坦定理) 类似的, 如果  $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$  恒成立, 则  $f(x)$  也是实解析的.

**证明** 对  $\forall x \in (0, 1)$ , 固定  $x$ , 则任取  $h > 0$ , 使得  $x+2h \in (0, 1)$ . 于是由 Taylor 定理可知

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x) \cdot 2h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (2h)^n + \frac{1}{n!} \int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(t) (x+2h-t)^n dt.$$

又由于  $f$  任意阶导数均非负, 故  $f$  的任意阶导数都是单调递增函数. 从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} f^{(n+1)}(t) (x+h-t)^n dt &\leq \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} f^{(n+1)}(2t-x) (x+h-t)^n dt \\ &\stackrel{u=2t-x}{=} \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(u) (x+2h-u)^n du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left[ f(x+2h) - \left( f(x) + f'(x) \cdot 2h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (2h)^n \right) \right] \\
&\leq \frac{f(x+2h) - f(x)}{2^{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

因此  $f$  可以在  $x$  的任意右邻域展开成幂级数 (因为余项趋于 0), 即

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n, \quad \forall y \in U_+(x).$$

但是同样的方法对于  $x < 0$  时似乎难以处理, 因为单调性对不上, 所以换个方法 (可以一次解决问题, 直接对高阶导数进行估计, 由此说明余项趋于零, 也无需讨论正负)

设  $|f(x)|$  在  $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$  中的最大值为  $M$ , 对任意  $|x| < \frac{1}{4}$  有

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{1}{2^k} + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \frac{1}{2^n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} \geq f(x) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \frac{1}{2^n}$$

由此得到

$$0 \leq \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq 2^n \left( f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \right) \leq 2^{n+1} M, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

进而

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq 2^{n+2} M |x|^{n+1} \leq 2^{n+2} M \frac{1}{4^{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

所以  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ , 这就证明了实解析

对于第二问, 考虑函数  $f(-x)$  即可. □

**例题 2.27** 设  $g(x)$  是  $(0, +\infty)$  中恒正的连续函数,  $a > 0$  使得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$ , 若  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  中恒正且二阶可导, 满足  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  恒成立, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**证明** 由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x)) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$  可得

$$(e^x f'(x))' = e^x (f''(x) + f'(x)) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

从而  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增.

(i) 若  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无零点, 则

$$e^x f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

(ii) 若  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有零点, 则由其严格递增性可知, 存在唯一的  $a > 0$ , 使得  $e^a f'(a) = 0$ . 于是

$$e^x f'(x) > e^a f'(a) = 0, \quad \forall x \in (a, +\infty).$$

故一定存在  $X > 0$ , 使得  $f'(x) > 0, \forall x \in (X, +\infty)$ . 从而  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上严格递增.

由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x)) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$  还可以得到

$$[f'(x) + f(x)]' = f''(x) + f'(x) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

于是  $f'(x) + f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增. 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = L$  为有限数或  $+\infty$  (广义存在).

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f'(x) + f(x)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = L.$$

又由  $f$  恒正可知  $L \geq 0$ . 反证, 假设  $L \neq 0$ , 则

①当  $L \in (0, +\infty)$  时, 此时, 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

再对  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f''(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right).$$

即  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \geq g(L)$ . 于是由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $c > X + 1$ , 使得

$$f'(x) = f'(X+1) + f''(c)(x - X - 1) \geq f'(X+1) + g(L)(x - X - 1), \forall x > X + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  矛盾!

②当  $L = +\infty$  时, 此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  可得

$$\frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} > \frac{g(f(x))}{(f(x))^{1+a}} = \frac{g(x)}{x^{1+a}}.$$

从而由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = +\infty$ .

由  $f(x) > 0, \forall x > X$  可得, 对  $\forall x > X$ , 我们有

$$\frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a}(f'(x) + f(x))} < \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)}.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty$ .

又由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f'(x) + f(x))^2}{(f(x))^{2+a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(f'(x) + f(x))^2]'}{[(f(x))^{2+a}]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(2+a)(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty.$$

于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$ . 又由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = 0$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$ . 故存在  $M > X + 1$ , 使得

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} > 1, \forall x > M.$$

两边同时积分可得

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}} dx = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} df(x) = \int_M^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} dx \geq \int_M^{+\infty} dx = +\infty.$$

而  $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}} dx$  收敛, 矛盾! □

**例题 2.28** 设  $f(x)$  非负且二阶可导,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)} dt = 0.$$

**证明** 由条件可知存在  $X > 0$  使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} > 0, \forall x > X \implies f''(x) > 0, \forall x > X.$$

从而  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上下凸  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增于是由下凸函数的单调性可知  $f$  在  $(X, +\infty)$  上的单调性只有三种情况递减、递增、先递减再递增若  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增或者先递减再递增则一定存在  $X_2 > X$  使得  $f(x)$  在  $(X_2, +\infty)$  上递增现在只在  $(X_2, +\infty)$  上考虑由  $f$  递增且非负可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A_1$  为正数或  $+\infty$  假设  $A_1$  为某个正数则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A_1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^2}.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$  于是由 Lagrange 中值定理可知存在  $\eta > X_2 + 1$  使得

$$f'(x) = f'(X_2 + 1) + f''(\eta)(x - X_2 - 1), \forall x > X_2 + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  再利用 Lagrange 中值定理同理可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A_1$  为某个正数矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  再利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[-\frac{1}{1+(f'(x))^2}\right]'}{[f^2(x)]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2f''(x)f'(x)}{(1+f'^2(x))^2}}{2f(x)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty.$$

而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} \leq 0$  矛盾故  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上必然单调递减则  $f'(x) < 0 \quad \forall x > X$  又  $f(x) > 0$  故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A \geq 0$  由  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \leq 0$  假设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \triangleq A' < 0$  则存在  $X_1 > X$  使得

$$f'(x) < \frac{A'}{2} < 0 \quad \forall x > X_1.$$

于是由 Lagrange 中值定理可知存在  $\xi > X_1 + 1$  使得

$$f(x) = f(X_1 + 1) + f'(\xi)(x - X_1 - 1) < f(X_1 + 1) + \frac{A'}{2}(x - X_1 - 1) \quad \forall x > X_1 + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$  矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  从而再由条件可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

再考虑  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A \geq 0$  假设  $A > 0$  则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  及条件可得

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A} \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty.$$

于是存在  $M > X_1 + 1$  使得

$$f''(x) > 1 \quad \forall x > M.$$

从而由 Lagrange 中值定理可知存在  $\xi_1 > M + 1$  使得

$$f'(x) = f'(M + 1) + f''(\xi_1)(x - M - 1) > f'(M + 1) + (x - M - 1) \quad \forall x > M + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  再利用 Lagrange 中值定理同理可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$  矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  综上可知  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递减进而  $f'(x) \leq 0$  并且  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增还有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

于是显然  $f(x) \geq 0$  从而存在  $X' > X$  使得

$$f'(x) \leq 1 \quad \forall x > X'. \quad (2.12)$$

又因为  $f \in D^2(\mathbb{R})$  所以  $f, f'$  都连续从而在  $[0, X']$  上都有界即存在  $L > 0$  使得

$$|f(x)|, |f'(x)| < L \quad \forall x \in [0, X']. \quad (2.13)$$

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty$  可知存在  $X'' > X'$  使得

$$f''(x) > f(x) \quad \forall x > X''.$$

从而结合  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt < \int_x^{+\infty} f''(t) dt = f'(+\infty) - f'(x) = -f'(x) \quad \forall x > X''. \quad (2.14)$$

于是由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0. \quad (2.15)$$

利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(f'(x))^2]'}{[(f(x))^2]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)f'(x)}{f(x)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

又因为  $f'(x) \leq 0, f(x) \geq 0$  所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f'(x)}{f(x)} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

再结合 (2.15) 式及  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t) dt}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0. \quad (2.16)$$

令  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  并且

$$0 = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

由 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x g(t) dt}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{g'(x)} = 0. \quad (2.17)$$

于是由 (2.12) (2.13) (2.14) 式可得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt &\leq \left( \int_0^{X''} \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt + \int_{X''}^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \sqrt{2} \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq \sqrt{2} \left( \int_0^{X''} \frac{\sqrt{1+L^2}}{-L} dt + \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq -\sqrt{2} \left( \frac{X''\sqrt{1+L^2}}{-L} + \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L} \int_x^{+\infty} f(t) dt - \sqrt{2} \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L} f'(x) - \sqrt{2}f(x) \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \frac{\int_x^{+\infty} f(t) dt}{f(x)}, \forall x > X''. \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则由 (2.17) (2.16) 式和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt \leq 0.$$

故结论得证. □

## 2.1.5 与方程的根有关的渐近估计

### 2.1.5.1 可以解出 $n$ 的类型

**例题 2.29** 设  $x^{2n+1} + e^x = 0$  的根记为  $x_n$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n).$$

**解** 注意到  $0^{2n+1} + e^0 > 0$ ,  $(-1)^{2n+1} + e^{-1} < 0$  且  $x^{2n+1} + e^x$  严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在唯一的  $x_n \in (-1, 0)$ , 使得

$$x_n^{2n+1} + e^{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = 2n+1 \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

任取  $\{x_n\}$  的一个收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 又  $x_n \in (-1, 0)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [-1, 0]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)}$ . 又

因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)} = +\infty,$$

故  $c = -1$ . 于是由子列极限命题 (a) 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ . 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(1+x)}{\ln(-x)} = \frac{1}{2}.$$

□

**例题 2.30** 设  $a_n \in (0, 1)$  是  $x^n + x = 1$  的根, 证明

$$a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**证明** 注意到  $0^n + 0 - 1 < 0, 1^n + 1 - 1 > 0$ , 且  $x^n + x - 1$  在  $(0, 1)$  上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在唯一的  $a_n \in (0, 1)$ , 使得

$$a_n^n + a_n = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n} = n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty. \quad (2.18)$$

任取  $\{a_n\}$  的一个收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 又  $a_n \in (0, 1)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = c \in [0, 1]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1 - c)}{\ln c}$ .

又由 (1.1) 式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1 - c)}{\ln c} = +\infty.$$

故  $c = 1$ , 于是由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c = 1. \quad (2.19)$$

而要证  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ , 等价于证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - 1 + \frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = 0$ . 利用 (2.18)(2.19) 式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n} \cdot a_n - \frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n} + 1}{\frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n}} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(a_n - 1) \ln(1 - a_n)}{\ln a_n \left( \ln \frac{\ln(1 - a_n)}{\ln a_n} \right)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{(x - 1) \ln(1 - x)}{\ln x \left( \ln \frac{\ln(1 - x)}{\ln x} \right)} + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1 + x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1 + x)} \right)} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1 + x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1 + x)} \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{\ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1 + x)}} \stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1 + x)}{\ln(-x)} \cdot \frac{\frac{1}{x} \ln(1 + x) - \frac{1}{1 + x} \ln(-x)}{\ln^2(1 + x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) \cdot \ln(1 + x)}{\ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x} \ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x} \ln(-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{\ln(1 + x)}{\ln(-x)} - \frac{x}{1 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-\frac{x}{1 + x}} = -1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

于是结合 (2.20)(2.21) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1 + x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1 + x)} \right)} + 1 \right] = -1 + 1 = 0.$$

故  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ . □

**例题 2.31** 设  $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 1$  在  $[0, 1]$  的根为  $x_n$ . 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解** 注意到  $f_n(x) - 1$  严格单调递增, 且  $f_n(0) - 1 = -1 < 0, f_n(1) - 1 = n - 1 > 0, \forall n \geq 2$ . 故由零点存在定理可知, 当  $n \geq 2$  时, 存在唯一的  $x_n \in (0, 1)$ , 使得  $f_n(x_n) = 1$ . 从而

$$f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1 \Rightarrow x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n \Rightarrow x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \Rightarrow n + 1 = \frac{\ln(2x_n - 1)}{\ln x_n}. \quad (2.22)$$

由上式 (2.22) 可知  $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$  且  $x_n \in (0, 1)$ , 因此

$$0 \leq x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \leq 1 \Rightarrow x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$



任取  $\{x_n\}$  的收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 则由 (1.1) 式和 Heine 归结原则可知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x_{n_k} - 1)}{\ln x_{n_k}} = \frac{\ln(2a - 1)}{\ln a} = +\infty.$$


故  $a = \frac{1}{2}$ , 再由子列极限命题 (a) 可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \frac{1}{2}$ . □

### 2.1.5.2 迭代方法

**例题 2.32** 设  $x_n$  是  $x = \tan x$  从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - An - B) = C,$$

求  $A, B, C$ .

 **笔记** 主要想法是结合  $\arctan x$  的性质:  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$ , 再利用迭代法计算渐近展开.

**解** 令  $f(x) = \tan x - x, x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 则  $f'(x) = \tan^2 x > 0, \forall x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ . 因此  $f(x)$  在  $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$  上严格单调递增, 其中  $n = 1, 2, \dots$ . 又注意到  $\lim_{x \rightarrow (n\pi)^+} (\tan x - x) = -n\pi < 0, \lim_{x \rightarrow (n\pi + \frac{\pi}{2})^-} (\tan x - x) = +\infty > 0$ .

故由零点存在定理可知, 存在唯一的  $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 使得

$$\tan x_n = x_n.$$

从而  $x_n - n\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 于是

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - n\pi) \Rightarrow x_n = \arctan x_n + n\pi. \quad (2.23)$$

又因为  $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 所以当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $x_n \rightarrow +\infty$ . 再结合 (2.23) 式可得

$$x_n = \arctan x_n + n\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1), n \rightarrow +\infty. \quad (2.24)$$

注意到  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$ , 从而  $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ . 于是利用 (2.24) 式可得

$$\begin{aligned} x_n &= \arctan x_n + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left( \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \right) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left[ \frac{1}{n\pi} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left[ \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( x_n - \frac{\pi}{2} - n\pi \right) = -\frac{1}{\pi}$ . □

#### 命题 2.4 (Lampert W 的渐进估计)

设  $x_n > 0$  满足  $x_n e^{x_n} = n, n = 1, 2, \dots$ , 证明

$$x_n = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right), n \rightarrow \infty.$$

**证明** 注意到

$$1 \leq x_n = \ln n - \ln x_n \leq \ln n \Rightarrow x_n = O(\ln n), n = 3, 4, \dots,$$

于是

$$\begin{aligned} \ln x_n &= \ln \ln n + \ln \left( 1 - \frac{\ln x_n}{\ln n} \right) = \ln \ln n - \frac{\ln x_n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln \ln n - \frac{\ln O(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}\right) \\ &= \ln \ln n - \frac{\ln \ln n + \ln O(1)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n + \ln O(1)}{\ln n}\right) \\ &= \ln \ln n - \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right), \end{aligned}$$

即

$$x_n = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right).$$

□

## 2.2 估计和式的常用方法

### 2.2.1 和式放缩成积分

#### 命题 2.5

设  $f$  在  $(0, 1)$  单调且  $\int_0^1 f(x)dx$  收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

**证明** 不妨设  $f$  递减, 则一方面, 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_0^1 f(x) dx.$$

另一方面, 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

故


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

□

### 2.2.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分

**例题 2.33** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}.$$

 **笔记** 证明的想法要么是凑定积分定义. 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

**注** 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

**解 解法一:** 注意到

$$\frac{i}{n} < \frac{\sqrt{i^2+1}}{n} < \frac{i+1}{n}, i = 1, 2, \dots, n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

解法二:注意到

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \left( n + \frac{i^2+1}{n} \right) \left( n + \frac{i^2}{n} \right)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$


故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

□

### 例题 2.34 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n}.$$

 **笔记** 长得神似定积分定义且很容易观察到  $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}}$  和  $\frac{i}{n^2}$  没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方法, 即做差  $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2}$  强估证明不影响极限.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| = \left| \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2} \right) \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^2 \left( n^2 + \frac{1}{i} \right)} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^4} = \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4}, \end{aligned}$$

于是

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \\ & = \int_0^2 x \sin^4 \pi x dx \stackrel{\substack{\text{区间再现} \\ \text{令 } x=2-y}}{=} \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi (2-y) dy \\ & = \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi y dy = \int_0^2 \sin^4 \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx \\ & = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□


### 2.2.3 和式内部对 $n$ 可求极限 (极限号与求和号可换序)

当和式内部对  $n$  可求极限时, 极限号与求和号可以换序.(当和式内部对  $n$  求极限是  $\frac{\infty}{\infty}$  或  $\frac{0}{0}$  等都不能换序) 本质上就是控制收敛定理的应用.

**注** 不能按照极限号与求和号可换序的想法书写过程, 应该利用不等式放缩、夹逼准则和上下极限进行严谨地书写证明.

## 例题 2.35 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

 **笔记** 求这种前  $n$  项和关于  $n$  的极限 ( $n$  既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_0 \in \mathbb{N}_+$ , 使得对  $\forall n > N_0$ , 都有

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} - \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| = \left| \sum_{k>N_0} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}} - \cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| > \sum_{k>N_0} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对  $\forall N > N_0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 0$ .

因此对  $\forall N > N_0$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2$ .

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2 (如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不收敛).

**注意:** 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2.

(上述论证实际上就是一种“猜测”这种极限的值得方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的“度”). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前  $N$  项的极限, 原和式除前  $N$  项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前  $N$  项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

**注:** 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

**注** 上述思路本质上就是控制收敛定理的应用, 也可以使用 *Toplitz* 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去书写证明过程 (夹逼定理和 *Toplitz* 定理).

**解 解法一 (夹逼定理):**

$$\text{一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 于是 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$\text{另一方面, 注意到对 } \forall N \in \mathbb{N}_+, \text{ 都有 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}, \forall n > N. \text{ 从而}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{于是令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2.$$

综上所述, 我们有  $2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq 2$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 2$ .

解法二 (Toplitz 定理):

□

例题 2.36 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$ .

注 注意倒序求和与顺序求和相等.(看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下倒序求和)

解法一 笔记 解法一思路: 我们利用上一题的想法计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}$ . 先假设级数  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$  收敛, 则由 Cauchy 收敛准则可知, 存在  $N' > 0$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k}, \forall N > N'.$$

令  $N \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}$ . 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

解法二 解法一: 注意到

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用  $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \leq \sum_{k=1}^n e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^n e^{1-k}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{令 } n \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{1-k} = \frac{e}{e-1}.$$

另一方面, 注意到  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \geq \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 两边同时对  $n$  取下极限, 可得对

$\forall N \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \\ &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k} \end{aligned}$$

令  $N \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}$ .

解法二 (单调有界定理): 因为

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

所以证明  $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, 1 \leq k \leq n-1$  即可, 这等价于  $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \leq \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$ . 实际上  $a_k = \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}, 1 \leq k \leq n$  是单调递减数列, 因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}} = \frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right), x = k+1 \in [2, n].$$

又由于

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq -\frac{n}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x^2} \leq 0, \forall x = k+1 \in [2, n].$$

从而  $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e^{n \ln(1 - \frac{1}{x^2}) + \ln(1 + \frac{1}{x})} \leq e^0 = 1, \forall x = k+1 \in [2, n]$ , 故  $a_{k+1} \leq a_k, \forall 1 \leq k \leq n$ . 于是  $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n} = a_k \geq a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ , 也即  $S_n$  单调递增. 注意

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为  $S$ . 对任意正整数  $n > m$ , 先固定  $m$ , 对  $n$  取极限有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^m e^{-k}$$

这对任意正整数  $m$  均成立, 再令  $m \rightarrow \infty$  有  $S \geq \frac{1}{e-1}$ , 从而所求极限为  $\frac{1}{e-1}$ .  $\square$

## 2.2.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 $n, k$ 不同阶)

只有当和式内部  $n, k$  不同阶时, 我们才可以直接利用 Taylor 展开进行计算. 但是书写过程不能用 Taylor 展开书写 (关于  $o$  和  $O$  余项的求和估计不好说明), 这样书写不严谨 (见例题 2.37 证法一).

我们可以采用拟合法 (见例题 2.38)、夹逼准则 (见例题 2.39)、 $\varepsilon - \delta$  语言 (见例题 2.37 证法二) 严谨地书写过程

 **笔记** 虽然这三种方法都比较通用, 但是更推荐**拟合法**和**夹逼准则**, 一般比较简便.

虽然  $\varepsilon - \delta$  语言书写起来比较繁琐, 但是当有些和式不容易放缩、拟合的时候, 用这个方法更简单.

这类和式内部  $n, k$  不同阶的问题的处理方式: 先利用 Taylor 展开计算极限 (可以先不算出极限), 并判断到底要展开多少项, 然后根据具体问题综合运用拟合法、夹逼准则、 $\varepsilon - \delta$  语言严谨地书写过程 (怎么书写简便就怎么写).

**注** 这类和式内部  $n, k$  不同阶的问题, Taylor 公式是本质, 拟合法、夹逼准则、 $\varepsilon - \delta$  语言只是形式上的过程.

**例题 2.37** 设  $f$  在 0 处可微,  $f(0) = 0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

 **笔记** 本题如果使用例题 2.35 的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot 0) = +\infty \cdot 0.$$

而  $+\infty \cdot 0$  我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述 “ $+\infty \cdot 0$ ” 的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们使用 Taylor 展开并引入余项方法和  $\varepsilon - \delta$  方法更加精细地估计原级数的阶.

**注** 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的  $\varepsilon - \delta$  语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的  $\varepsilon - \delta$  语言进行证明.

**证明 证法一 (不严谨的余项方法):** 由  $f$  在 0 处可微且  $f(0) = 0$  和带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可知

$$f(x) = f'(0)x + o(x), x \rightarrow 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) &= \sum_{i=1}^n \left[ f'(0) \cdot \frac{i}{n^2} + o\left(\frac{i}{n^2}\right) \right] = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{i}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{f'(0)}{2}, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**证法二 ( $\varepsilon - \delta$  严谨的证明):** 由 Taylor 定理, 可知对  $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta > 0$ , 当  $|x| \leq \delta$  时, 有  $|f(x) - f'(0)x| \leq \varepsilon|x|$ .

只要  $n > \frac{1}{\delta}$ , 有  $\left|\frac{i}{n^2}\right| \leq \delta, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , 故  $\left|f\left(\frac{i}{n^2}\right) - f'(0)\frac{i}{n^2}\right| \leq \varepsilon \frac{i}{n^2}, i = 1, 2, \dots, n$ .

从而

$$f'(0)(1-\varepsilon)\frac{i}{n^2} \leq f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1+\varepsilon)\frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1-\varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n} = f'(0)(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1+\varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{f'(0)}{2}(1+\varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n}.$$

于是


$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2} \leq \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leq \frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left| \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| \leq \frac{|f'(0)|}{2} \varepsilon.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{f'(0)}{2}$ . □

**例题 2.38** 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right)$ .

 **笔记** 本题采用**拟合法**书写过程.

**解** 由于对  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $\frac{\sqrt{k}}{n} \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$ , 故由 Taylor 定理可得, 对  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\frac{1}{n + \sqrt{k}} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{k}{n^2} + \cdots \right), n \rightarrow \infty.$$

于是考虑拟合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right).$$

又由于


$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Stolz公式或定积分定义}} \frac{2}{3}.$$

□

**例题 2.39** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ .

 **笔记** 本题采用**夹逼准则**书写过程. 注意  $n, k$  不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉, 然后使用夹逼准则即可.

**证明** 注意到


$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \leq \frac{k}{2n^2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

所以

$$\frac{n+1}{2n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是  $\frac{1}{4}$ . □

**例题 2.40** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n$ .

 **笔记** 证法二综合运用了拟合法和夹逼准则书写过程(只用其中一种方法的话,书写起来很麻烦).

**解** 证法一(不严谨的余项方法):注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)}.$$

由带 Peano 余项的 Taylor 公式,可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ 1 - \frac{k}{2n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right] = \frac{1}{n} \left[ n - \frac{\sum_{k=1}^n k}{2n^2} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{n+1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \left( -\frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

证法二(严谨地书写过程):注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)}. \quad (2.25)$$

因为对  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ , 有  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 所以利用 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = 1 - \frac{k}{2n^2} + \cdots, n \rightarrow \infty.$$

从而考虑拟合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 + \frac{k}{2n^2} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{2n^2} \right) \right].$$

由于

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 + \frac{k}{2n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} + \frac{k}{2n^3} \right) - 1 \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{n} + \frac{k}{2n^3} \right) - 1 = \frac{n+1}{4n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{2n^2} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^3} = 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n - \sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}} \end{aligned}$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{\sqrt{n^2+k} (n + \sqrt{n^2+k})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}. \quad (2.26)$$

注意到

$$-\frac{n+1}{2(n+1+\sqrt{n^2+n})} = \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{2n^2} = -\frac{n+1}{4n}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} = -\frac{1}{4}$ . 再结合(2.25)(2.26)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

□

### 2.2.5 分段估计 (Toeplitz 定理)

对于估计级数或积分的极限或阶的问题, 当问题难以直接处理时, 我们可以尝试分段估计, 分段点的选取可以直接根据级数或积分的性质选取, 也可以根据我们的需要待定分段点  $m$ , 然后再选取满足我们需要的  $m$  作为分段点.

#### 定理 2.3 (Toeplitz 定理)


(a): 设  $\{t_{nk}\}_{1 \leq k \leq n} \subset [0, +\infty)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a. \quad (2.27)$$

(b): 设  $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^\infty \subset [0, +\infty)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} = 1$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} a_k = a. \quad (2.28)$$

♡

 **笔记** 无需记忆 Toeplitz 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 Toeplitz 定理, 即当  $n$  比较小的时候, 用  $t_{nk}$  趋于 0 来控制, 当  $n$  比较大的时候, 用  $a_n$  趋于  $a$  来控制.

我们需要熟悉蕴含在 Toeplitz 定理其中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

Toeplitz 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前  $N$  项), 另一部分是余项 (从  $N+1$  项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前  $N$  项) 和余项 (从  $N+1$  项开始包括后面的所有项).

**注** 注意区分 (a), (b) 两者的条件:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m t_{nk} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk}$ .

**证明** (a): 事实上, 不妨设  $a = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$  即可.

对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k|.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由  $N$  的任意性, 再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

故(2.27)式成立.

(b): 事实上, 不妨设  $a = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$  即可.

对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k|.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由  $N$  的任意性, 再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

故(2.28)式成立. □

**例题 2.41** 设  $p_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$  且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a.$$



**笔记** 理解到本质之后不需要记忆 **Toeplitz 定理**, 但是这里可以直接套用 **Toeplitz 定理** 我们就引用了. 今后我们不再直接套用 **Toeplitz 定理**, 而是利用 **Toeplitz 定理** 的证明方法解决问题.

**证明** 记  $t_{nk} = \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ . 则  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{\sum_{k=1}^n p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 1$ . 又因为

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n+k+1}} = 0.$$

所以由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 故由 **Toeplitz 定理** 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

□

### 命题 2.6

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  且  $b_n \geq 0$ . 记  $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n) = aS.$$

**证明** (i) 若  $S = 0$ , 则  $b_n \equiv 0$ . 此时结论显然成立.

(ii) 若  $S > 0$ , 则令  $t_{nk} = \frac{1}{S} b_{n-k+1}, k = 1, 2, \dots, n$ . 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{n-k+1} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

又因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  存在, 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk}.$$

不妨设  $a = 0$ , 则对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk}.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk} \right) = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = a$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = aS$ . □

**例题 2.42** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . 且存在常数  $K > 0$ , 使得  $\sum_{j=0}^n |y_j| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = 0.$$

**证明** 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \left| \sum_{i=N+1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \sup_{i \geq N+1} |x_i| \cdot \sum_{i=N+1}^n |y_{n-i}| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|$ .

由  $N$  任意性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{i \geq N+1} |x_i| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

□

### 命题 2.7

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$



**笔记** 可以不妨设  $a = b = 0$  的原因: 假设当  $a = b = 0$  时, 结论成立. 则当  $a, b$  至少有一个不为零时, 我们有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b) = 0$ . 从而由假设可知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_{n-k+1} - b)}{n} = 0. \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} + ab - a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} - b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = 0 \end{aligned}$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} + b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} - ab = ab.$$

**证明** 不妨设  $a = b = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$ , 用  $b_n - b$  代替  $b_n$ . 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} \right| &\leq \left| \frac{\sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1}}{n} \right| + \left| \frac{\sum_{k=N+1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |b_{n-k+1}| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k|. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \right| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |b_k|}{n} \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = 0. \quad \square$$

**例题 2.43** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$ .


**注** 取  $m = [\sqrt{\sqrt{n} \ln n}] + 1$  的原因: 我们希望找到一个合适的分段点  $m$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 0$ . 由

$$\sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \frac{(m-1)\sqrt{n}}{n} = \frac{(m-1)}{\sqrt{n}} \text{ 可知, 我们可以希望 } \frac{(m-1)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \text{ 即 } m = o(\sqrt{n}). \text{ 又由上述证明的积分放缩可}$$

知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n - m + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}-1}$ , 从而我们希望  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}-1} = 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{m}} = 1$ , 也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{m} = 0.$$

综上, 我们希望当  $n \rightarrow \infty$  时,  $m$  的阶比  $\sqrt{n}$  低但比  $\ln n$  高, 于是我们考虑  $\ln n$  和  $\sqrt{n}$  的几何平均, 即令  $m = \sqrt{\sqrt{n} \ln n}$ , 恰好满足需要. 又由于  $m$  表示求和项数, 因此取整保证严谨性.

 **笔记** 本题核心想法是: **分段估计**. 分段后的估计方式和分段点的选取方法较多. (清疏讲义上有另一种分段估计的做法)

注意: 本题使用 Stolz 定理解决不了, 直接放缩也不行.

**证明** 取  $m = [\sqrt{\sqrt{n} \ln n}] + 1$ , 考虑  $\sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1 + \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} + \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$ . 不难发现

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\sqrt{\sqrt{n} \ln n}}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \frac{(m-1)\sqrt{n}}{n} \leq \frac{\sqrt{\sqrt{n} \ln n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 0$ . 并且一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_{k-1}^k n^{\frac{1}{x}} dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_{k-1}^k n^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n} \int_{m-1}^n n^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}} \frac{n^x}{x^2} dx \leq \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{x^2} dx = \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} (n - m + 1). \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} n^{\frac{1}{k}} dx \geq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} n^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n} \int_m^{n+1} n^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{n^x}{x^2} dx \leq \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x^2} dx = \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n-m+1).\end{aligned}$$

又注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{m-1} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{m-1}}} = 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{m}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{m} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 1.\end{aligned}$$

故

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m}}}{n} (n-m+1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n} (n-m+1) = 1.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = 1$ . 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=2}^m \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} + \sum_{k=m}^n \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n} \right) = 1 + 0 + 1 = 2$ . □

## 2.2.6 Euler-Maclaurin 公式 (E-M 公式)

### 定理 2.4 (0 阶 Euler-Maclaurin 公式)

设  $a, b \in \mathbb{Z}, f \in D[a, b], f' \in L^1[a, b]$ , 让我们有

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.$$

**注** 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即可), 再使用.

E-M 公式求和通项与求和号上限无关.

**笔记** 在  $[0, 1)$  上  $x - [x] - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ , 它也是  $x - \frac{1}{2}$  做周期 1 延拓得到的函数. 故  $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ . □

**证明**

$$\begin{aligned}\int_a^b \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left( x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) f'(x+k) dx \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[ \frac{1}{2} f(1+k) + \frac{1}{2} f(k) - \int_0^1 f(x+k) dx \right] \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[ \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b-1} [f(k) + f(k+1)] - \int_a^b f(x) dx \\ &= -\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

**注** 假设已知  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于  $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ , □

因此直接将  $b_1(x)$  放大成  $\frac{1}{2}$  就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见例题 2.44.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对  $b_1(x)$  使用分部积分. 但是由于  $b_1$  并非连续函数, 为了把  $\int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})f'(x)dx$  继续分部积分, 我们需要寻求  $b_1$  的原函数  $b_2$  使得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)dx = \int_a^b f'(x)db_2(x),$$

即期望  $b_2(x)$  是  $b_1(x)$  的一个原函数并且仍然有周期 1 (因为求导不改变周期性, 又由于  $b_1(x)$  周期为 1, 故原函数  $b_2(x)$  的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x) = \int_0^x b_1(y)dy, b_2(x+1) = b_2(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(构造  $b_2(x)$  的想法: 先找到  $x \in [0, 1)$  这个特殊情况下的  $b_2(x)$ , 再由此构造出  $x \in \mathbb{R}$  这个一般情况下的  $b_2(x)$ , 即由特殊推广到一般)

先考虑  $x \in [0, 1)$  的情况 (因为此时  $[x] \equiv 0$ , 方便后续计算得到原函数  $b_2(x)$ ), 于是就需要  $\int_0^1 b_1(x)dx = b_2(1) = b_2(0) = 0$ . 显然

$$b_2(1) = \int_0^1 b_1(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0 = b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要  $b_2(x) = \int_0^x b_1(y)dy = \int_0^x \left(y - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$  (其中  $c$  为任意常数),  $x \in [0, 1)$ . 又因为我们需要  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 所以再将  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$  做周期 1 延拓到  $\mathbb{R}$  上, 得到在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1 的  $b_2(x)$  (易知此时  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式为

$$b_2(x) = b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y)dy = \int_0^{x-[x]} \left(y - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

此时又由  $\int_0^1 b_1(y)dy = 0$  可得

$$\begin{aligned} b_2(x) &= b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y)dy = \int_{[x]}^x b_1(y - [x])dy = \int_{[x]}^x b_1(y)dy \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y)dy + \int_{[x]}^x b_1(y)dy = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y+k)dy + \int_{[x]}^x b_1(y)dy \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} b_1(y)dy + \int_{[x]}^x b_1(y)dy = \int_0^{[x]} b_1(y)dy + \int_{[x]}^x b_1(y)dy \\ &= \int_0^x b_1(y)dy, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的  $b_2(x)$  恰好就是  $b_1(x)$  的一个原函数. 即  $b_1(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有连续且周期为 1 的原函数  $b_2(x)$ ,  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续. 因此我们可以对  $b_1(x)$  进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)dx = \int_a^b f'(x)db_2(x)$$

成立. 并且此时  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ . 其中  $c$  为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要  $b_3(x)$  是  $b_2(x)$  的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望  $b_3(1) = b_3(0)$  和  $b_3(x) = \int_0^x b_2(y)dy, \forall x \in [0, 1)$ . 即

$$\begin{aligned} \int_0^1 b_2(x)dx &= b_3(1) = b_3(0) = 0, \\ b_3(x) &= \int_0^x b_2(y)dy, \forall x \in [0, 1). \end{aligned}$$

然后以此构造出  $[0, 1)$  上的  $b_3(x)$ , 再对其做周期 1 延拓, 就能得到  $\mathbb{R}$  上的  $b_3(x)$ , 并且  $b_3(x)$  满足在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1. 进而可以利用这个  $b_3(x)$  继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由  $\int_0^1 b_2(x)dx = b_3(1) = b_3(0) = 0$  可知

$$\int_0^1 b_2(x)dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c \right) dx = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时  $b_1(x)$  的原函数  $b_2(x)$  就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么  $c$  可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的  $c = \frac{1}{12}$ ). 此时这个唯一确定的  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1);$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, b_2(x) = \int_0^x b_1(y)dy, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

依次下去我们给出计算  $b_n, n \in \mathbb{N}$  的算法.

### 定义 2.1 ( $b_n(x)$ 定义和算法)

我们令  $b_1(x)$  为  $x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1)$  的周期 1 延拓. 对所有  $n = 2, 3, \dots, b_n(x)$  是  $b_{n-1}(x)$  的一个原函数.

### 笔记 $b_n(x)$ 的算法:

根据上述构造  $b_2(x), b_3(x)$  的想法可知, 我们只需期望  $b_n(1) = b_n(0)$  和  $b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y)dy, \forall x \in [0, 1)$ . 即

$$\int_0^1 b_{n-1}(x)dx = b_n(1) = b_n(0) = 0,$$

$$b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y)dy, \forall x \in [0, 1).$$

然后以此构造出  $[0, 1)$  上的  $b_n(x)$ , 再对其做周期 1 延拓, 就能得到  $\mathbb{R}$  上的  $b_n(x)$ , 并且  $b_n(x)$  满足在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1. 并且根据  $\int_0^1 b_{n-1}(x)dx = b_n(1) = b_n(0) = 0$  我们可唯一确定  $b_{n-1}(x)$  在  $[0, 1)$  上的表达式. 从而可以唯一确定  $b_n(x)$  之前的所有  $b_{n-1}(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一确定所有的  $b_n(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述  $b_n(x)$  的定义和算法, 可知  $b_n(x)$  是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在  $M_n > 0$ , 使得对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $|b_n(x)| \leq M_n$ .

**注** 我们可以利用这些  $b_n(x)$  不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见 **例题 2.6, 例题 2.44**.

**结论** 我们计算一些  $b_n(x)$  以备:

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1).$$

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, |b_1(x)| \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_3(x) = \frac{(x - [x])^3}{6} - \frac{(x - [x])^2}{4} + \frac{(x - [x])}{12}, |b_3(x)| \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{36}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}, x \in [0, 1).$$

$$b_4(x) = \frac{(x - [x])^4}{24} - \frac{(x - [x])^3}{12} + \frac{(x - [x])^2}{24} - \frac{1}{720}, |b_4(x)| \leq \frac{1}{720}, x \in \mathbb{R}.$$

**命题 2.8** ( $b_n(x)$  的傅立叶级数表达式)

对  $k \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$b_1(x) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n},$$

$$b_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}},$$

$$b_{2k+1}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}}.$$



**注**  $b_1(x)$  的傅立叶级数并不总是收敛到  $b_1(x)$ . 事实上, 由狄利克雷收敛定理, 我们知道

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n} = \begin{cases} b_1(x), & x \text{ 不是整数} \\ 0, & x \text{ 是整数} \end{cases}.$$

**证明**

□

**命题 2.9** ( $b_n(x)$  基本性质)

对每个  $k \in \mathbb{N}$ , 我们有

1.

$$b_{2k+1}(0) = 0, \quad b_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}.$$

其中  $B_{2k}$  是 Bernoulli 数.

2.

$$|b_k(x)| \leq \frac{2\zeta(k)}{(2\pi)^k}.$$

其中  $\zeta(x)$  是 Riemann Zeta 函数, 定义为

$$\zeta(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x > 1 \quad \text{或} \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, s > 1.$$



**证明**

□

**定理 2.5 (Euler-Maclaurin 公式)**

设  $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, f \in D^{2m}[a, b], f^{(2m)} \in L^1[a, b]$ . 则有

$$\sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx = \frac{f(b) + f(a)}{2} + \sum_{k=1}^m [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] b_{2k}(0) - \int_a^b b_{2m}(x) f^{(2m)}(x) dx.$$



**证明** 由定理 2.4, 我们有

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b b_1(x) f'(x) dx. \quad (2.29)$$



现在利用  $b_2$  周期性和分部积分得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)dx = \int_a^b f'(x)db_2(x) = [f'(b) - f'(a)]b_2(0) - \int_a^b b_2(x)f''(x)dx.$$

代入等式 (2.29), 就证明了定理中  $m=2$  的情况, 类似的反复分部积分即可对一般  $m$  得到等式

$$\sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x)dx = \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=2}^m [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] b_k(0) + (-1)^{m+1} \int_a^b b_m(x)f^{(m)}(x)dx.$$

又因为命题 2.9 中的  $b_{2k+1}(0) = 0, k \in \mathbb{N}$ , 代入上式, 这就完成了定理的证明.  $\square$

**例题 2.44** 估计  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \rightarrow \infty$ .

**解 解法一:** 一方面, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  我们有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

另一方面, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  我们也有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n.$$

于是对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都有

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由夹逼准则可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$ . 即  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, n \rightarrow \infty$ .

**解法二 (E-M 公式):** 由 E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx. \quad (2.30)$$

因为  $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$  存在, 所以可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq C < \infty.$$

于是  $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx$ . 从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left[C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx\right] \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

故  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{2} - C + o\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ . 此时令  $\frac{1}{2} - C = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq$

$\gamma$ (欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

由  $b_n(x)$  的构造和分部积分可知, 上述结果只是对  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ ,  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}$ . 则不难发现  $b_2(x)$  是连续且周期为 1 的函数,  $b_2(x)$  是  $b_1(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的一个原函数, 并且  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$ . 而由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx$  收敛, 于是设  $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \triangleq C$ . 从而再对 (2.30) 分部积分得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left( \int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} db_2(x) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{b_2(x)}{x^2} \Big|_n^{+\infty} + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

又由  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$  可知

$$\left| 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} \right| \leq 2 \left| \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \right| + \frac{|b_2(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{6} \left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \right| + \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即

$$2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.33)$$

再结合 (2.32) 和 (2.33) 式可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$


记  $\gamma \triangleq \frac{1}{2} - C$  ( $\gamma$  为欧拉常数), 则我们就得到了比 (2.31) 式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**例题 2.45** 计算

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$$

 **笔记** 估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.

**解** 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + (-1)^{2m-2} \frac{\ln(2m-1)}{2m-1} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2m-1)}{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (2.34)$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列  $\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$  即可. 又注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^m \left[ (-1)^{2n-2} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + (-1)^{2n-1} \frac{\ln 2n}{2n} \right] = \sum_{n=1}^m \left[ \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln 2n}{2n} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

由例题 2.44 可知

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln 2}{n} = \ln 2 (\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (2.36)$$

又由 E-M 公式可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

因为

$$\left| \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

并且  $\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$  收敛, 所以  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C < \infty$ . 即

$$\int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (2.38)$$

于是结合 (2.37)(2.38) 式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.39)$$

因此由 (2.35)(2.36)(2.39) 式可得


$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 2m + C + o(1) - \left[ \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 2m - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) \\ &= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

即  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$ . 再结合 (2.34) 式可得

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

故  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$ . □

**例 2.46** 设  $f \in C^1[1, +\infty)$  且  $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$ , 证明  $\int_1^\infty f(x) dx$  收敛等价于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在.

 **笔记** 关键想法参考:E-M 公式和命题 6.4.

**证明** 由E-M 公式可知

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n f(x)dx + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx. \quad (2.40)$$

注意到  $0 \leq \left| \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \right| \leq \frac{1}{2} |f'(x)|$ , 并且  $\int_1^\infty |f'(x)| dx$  收敛, 因此  $\int_1^\infty \left| \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \right| dx$  也收敛. 从而  $\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$  也收敛, 故由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$  存在.

(1) 若  $\int_1^\infty f(x)dx$  存在, 则由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx$  存在. 又由  $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$  可知  $\int_1^\infty f'(x)dx$  收敛. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f'(y)dy = \int_1^\infty f'(x)dx < \infty.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 从而由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$  也存在. 又由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$  存在, 再结合(2.40)式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在.

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$  存在, 再结合(2.40)式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx$  也存在. 于是对  $\forall x \geq 1$ , 一定存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x < n+1$ . 从而可得

$$\int_1^x f(x)dx = \int_1^n f(x)dx + \int_n^x f(x)dx. \quad (2.41)$$

并且

$$\int_n^x f(x)dx \leq \int_n^x |f(x)| dx \leq \int_n^{n+1} |f(x)| dx \leq \sup_{y \geq n} |f(y)|. \quad (2.42)$$

对(2.42)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 进而可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x)dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \geq n} |f(y)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|.$$

由于此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 因此  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x)dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x)dx = 0$ . 于是再对(2.41)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 从而可得

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx.$$

又因为此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx$  存在, 所以  $\int_1^\infty f(x)dx$  也存在. □


#### 例题 2.47

1. 先证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n \right)$$

存在.

2. 再用积分放缩法求  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, n \rightarrow \infty$  的等价无穷大.

 **笔记** 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

**证明**

1. 设

$$a_n \triangleq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n, n = 2, 3, \dots$$

我们有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \ln \ln(n+1) + \ln \ln n \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \ln \left[ \ln n + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] + \ln \ln n \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \ln \ln n - \ln \left( 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \right) + \ln \ln n \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \frac{1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right). \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \right| < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \frac{1}{n \ln n} \right] = -\frac{1}{2 \ln 2},$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=2}^n (a_{k+1} - a_k) + a_2 \right]$$

存在.

2. 注意到对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k} dx \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln(n+1) - \ln \ln 2. \quad (2.43)$$

同时, 也有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k \ln k} dx \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln n. \quad (2.44)$$

从而对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 由(2.43)(2.44)式可得

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \ln \ln n.$$

于是对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\frac{\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2}{\ln \ln n} \leq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} \leq 1.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} = 1$ . 即  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln \ln n, n \rightarrow \infty$ .

□

**例题 2.48** 用积分放缩法得到  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, x \rightarrow 1^-$  的等价无穷大.

**证明** 注意到对  $\forall x \in (0, 1)$ , 固定  $x$ , 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{n^2} dt \geq -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2} dt = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (2.45)$$

同时也有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{n^2} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (2.46)$$

又由于  $x \in (0, 1)$ , 因此  $\ln x \in (-\infty, 0)$ . 从而

$$\int_0^\infty x^{t^2} dt = \int_0^\infty e^{t^2 \ln x} dt \stackrel{\text{令 } y=t\sqrt{-\ln x}}{=} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

故  $\int_0^\infty x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$  收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \int_0^\infty x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \quad (2.47)$$

从而对  $\forall x \in (0, 1)$ , 结合(2.45)(2.46)(2.47)式可得

$$-1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{t^2} dt \leq \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x \in (0, 1).$$

令  $x \rightarrow 1^-$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 即  $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} x \rightarrow 1^-$ .

又由  $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$  可知  $-\ln x = -\ln(1+x-1) \sim 1-x, x \rightarrow 1^-$ . 因此

$$\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

□


## 2.3 Stirling 公式

对于阶乘问题, 最好用的估计工具就是 Stirling 公式. 与组合数相关的极限问题, 都可以尝试将其全部转化为阶乘然后估计大小.

### 定理 2.6 (Stirling 公式)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty.$$

♡

 **笔记** 提示: 用欧拉麦克劳林公式估计  $\sum_{k=1}^n \ln k, n \rightarrow \infty$  的渐近展开式, 以此结合 Wallis 公式:  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow \infty$  证明.

**证明** 由 E-M 公式可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx. \quad (2.48)$$

由 Dirichlet 判别法可知,  $\int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx$  收敛. 则可设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx \triangleq C_0 < \infty$ . 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , 再令  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$ . 则不难发现  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, \quad |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

从而对(2.48)式使用分部积分可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln k &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \frac{b_1(x)}{x} dx = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx \\ &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + C_0 - \int_n^{+\infty} \frac{1}{x} db_2(x) = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + C_0 - \frac{b_2(x)}{x} \Big|_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + C_0 + \frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

又因为  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$ . 所以对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\left| \frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right) = \frac{1}{6n}.$$

故  $\frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是再记  $C = 1 + C_0$ , 则

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.49)$$

注意到

$$(2n)!! = 2^n n!, n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.50)$$

于是由 Wallis 公式:  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow \infty$ . 再结合 (2.49)(2.50) 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! \cdot n!}{(2n)! \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! \prod_{k=1}^n k}{\sqrt{n} \prod_{k=n+1}^{2n} k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{\sum_{k=1}^n \ln k}}{\sqrt{n} e^{\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{(n+\frac{1}{2}) \ln n - n + C + O(\frac{1}{n})}}{\sqrt{n} e^{(2n+\frac{1}{2}) \ln 2n - 2n + C + O(\frac{1}{n})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{(n+\frac{1}{2}) \ln n - n + C + O(\frac{1}{n}) - [(2n+\frac{1}{2}) \ln 2n - 2n + C + O(\frac{1}{n})]}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{-n \ln n + n - (2n+\frac{1}{2}) \ln 2 + O(\frac{1}{n})}}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! 2^{-2n-\frac{1}{2}} e^n}{n^n \sqrt{n}} e^{O(\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} e^{O(\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{O(\frac{1}{n})}} = \sqrt{\pi}$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ . 故  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**例题 2.49** 设  $n, v$  为正整数且  $1 < v < n$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = \lambda > 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2}$ .

**证明** 根据条件, 显然在  $n \rightarrow \infty$  时  $v$  也会趋于无穷, 设  $v = \frac{n}{2} + w\sqrt{n}$ , 则  $w = \frac{v - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} w = \lambda > 0$ , 则有

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{n!}{v!(n-v)!}, n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{n!}{v!(n-v)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi v} \left(\frac{v}{e}\right)^v \sqrt{2\pi(n-v)} \left(\frac{n-v}{e}\right)^{n-v}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^{nv} (n-v)^{n-v}} \frac{n}{\sqrt{v(n-v)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^v \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{n-v}} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = e^{-2\lambda^2}. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right) \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4w^2}{\sqrt{n}}}} = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^v \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{n-v}} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = e^{-2\lambda^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{2^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)} \left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}} \left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{(n+2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}} (n-2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}} \left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right) \ln \left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right) \ln \left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right) \right] = 2\lambda^2. \quad (2.51)
\end{aligned}$$

又由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right) \ln \left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right) \ln \left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right) \left(\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) + \left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right) \left(-\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$


再结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} w = \lambda$  可知(2.51)式成立, 因此结论得证.  $\square$

## 2.4 Abel 变换

### 定理 2.7 (Abel 变换)

设  $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$  是数列, 则有恒等式

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N a_k b_k &= (a_1 - a_2)b_1 + \cdots + (a_{N-1} - a_N)(b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}) + a_N(b_1 + b_2 + \cdots + b_N) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i.
\end{aligned}$$

 **笔记** Abel 变换的证明想法“强行裂项”是一种很重要的思想.

**证明** 为了计算  $\sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i$ , 我们来强行构造裂项, 差什么就给他补上去再补回来, 即:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i = \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_j \sum_{i=1}^j b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^j b_i \right) + a_N \sum_{i=1}^N b_i \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_j \sum_{i=1}^j b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} b_i \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^j b_i \right) + a_N \sum_{i=1}^N b_i \\
&= a_1 b_1 - a_N \sum_{i=1}^N b_i + \sum_{j=1}^{N-1} a_{j+1} b_{j+1} + a_N \sum_{i=1}^N b_i = \sum_{j=1}^N a_j b_j.
\end{aligned}$$

$\square$


### 命题 2.10 (经典乘积极限结论)

设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_k$  存在. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) a_n = 0.$$





 **笔记** 为了估计  $\sum_{j=1}^n b_j$ , 前面的有限项不影响. 而要用上极限  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 自然想到  $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \frac{b_j a_j}{a_j}$  和 Abel 变换. 而  $a_j$  的单性能用在 Abel 变换之后去绝对值.

**证明** 不妨设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ . 则由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \sum_{i=N+1}^m a_i b_i \right| \leq \varepsilon, \forall m \geq N+1.$$

当  $n \geq N+1$ , 由 Abel 变换, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=N+1}^n b_j \right| &= \left| \sum_{j=N+1}^n \frac{a_j b_j}{a_j} \right| = \left| \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right) \sum_{i=N+1}^j a_i b_i + \frac{1}{a_n} \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \left| \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right| \cdot \left| \sum_{i=N+1}^j a_i b_i \right| \right) + \frac{1}{|a_n|} \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \cdot \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \left| \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right| \right) + \frac{1}{|a_n|} \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \varepsilon \left[ \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_j} \right) + \frac{1}{a_n} \right] = \varepsilon \left( \frac{2}{a_n} - \frac{1}{a_{N+1}} \right). \end{aligned}$$


因此我们有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^n b_j \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^N b_j \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=N+1}^n b_j \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^N b_j \right| + \varepsilon \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{a_n}{a_{N+1}} \right) = 2\varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性即可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^n b_j \right| = 0$ , 于是就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) a_n = 0$ . □

**例题 2.50** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = x.$$

 **笔记** 可以不妨设  $x = 0$  的原因: 假设当  $x = 0$  时, 结论成立, 则当  $x \neq 0$  时, 令  $y_n = x_n - x$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ . 从而由假设可知

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k y_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (x_k - x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k - x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k - x.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = x$ .

**证明** 不妨设  $x = 0$ , 则对  $\forall N > 0$ , 当  $n > N$  时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k x_k \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k \sup_{k \geq N+1} |x_k| \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k \sup_{k \geq N+1} |x_k| \\ &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \sup_{k \geq N+1} |x_k| \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow +\infty$ , 则结合  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| \stackrel{\text{因为分子是关于 } n \text{ 的多项式}}{=} 0$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \sup_{k \geq N+1} |x_k|, \forall N > 0.$$

由  $N$  的任意性, 上式两边令  $N \rightarrow +\infty$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |x_k|.$$

又根据上极限的定义, 可知  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |x_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

从而

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq 0.$$

故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| = 0$ . 原命题得证. □

## 2.5 Stolz 定理

### 2.5.1 数列 Stolz 定理

#### 定理 2.8 (Stolz 定理)

(a): 设  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(b): 设  $x_n$  是严格递减数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(c): 分别在 (a), (b) 的条件基础上, 若还有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (2.52)$$

♡

**注** 注意 (c) 由 (a), (b) 是显然的, 且只有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$  时才 (2.52) 式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即 **Stolz 定理** 是离散的洛必达法则.

**证明** 我们仅证明  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} < \infty$  时有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (2.53)$$

记  $A \triangleq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ , 由上极限定义我们知道对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq A + \varepsilon, \forall n \geq N$ .

利用  $x_n$  严格递增时, 成立  $y_{n+1} - y_n \leq (A + \varepsilon)(x_{n+1} - x_n), n \geq N$ , 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) \leq (A + \varepsilon) \sum_{j=N}^{n-1} (x_{j+1} - x_j), \forall n \geq N + 1.$$

即

$$y_n - y_N \leq (A + \varepsilon)(x_n - x_N), \forall n \geq N + 1.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 取上极限就得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_N}}{1 - \frac{x_N}{x_n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} \leq A + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性得到式(2.53). □

### 命题 2.11 (Cauchy 命题)

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

 **笔记** 这个命题说明Stolz 定理是一种有效的把求和消去的降阶方法.

**证明** 容易由Stolz 定理的 (a) 直接得出. □


### 定理 2.9 (反向 Stolz 定理)


对某个  $C > 0$ , 如果有  $n(a_n - a_{n-1}) \geq -C, \forall n \geq 2$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \in \mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

 **笔记** 反向 Stolz 定理本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

 **笔记** 不妨设  $a = 0$ , 记

$$b_1 = a_1, b_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

证明的想法是用  $S_n, S_m$  来表示  $a_n$ ,  $m$  是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m} = S_n + ma_n + mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+m} - S_n}{m} - \frac{mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}}{m} \\ &\leq \frac{|S_{n+m}| + |S_n|}{m} + \frac{1}{m} \left[ m \frac{C}{n+1} + (m-1) \frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+m} \right]. \end{aligned}$$

然后想办法取合适的  $m$  即可.

**证明** 不妨设  $a = 0$ , 记

$$b_1 = a_1, b_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

我们有  $b_n \geq -\frac{C}{n}$ .

对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $|S_n| \leq n\varepsilon, \forall n \geq N$ , 于是当  $n \geq N$ , 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} - S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}]b_{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} \right) \\ &\leq \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}] \frac{C}{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) \frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} \right) \\ &\leq \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}] \frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) \frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n} \right) \\ &= \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] + 1}{2n} C \\ &\leq \frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] + 1}{2n} C + \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.54}$$

于是我们得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

另外一方面, 当  $n \geq \frac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$ , 有  $n - [n\sqrt{\varepsilon}] \geq n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geq N$ , 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}] - 1)b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2)b_{n-1} + \cdots + b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{([n\sqrt{\varepsilon}] - 1)\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2)\frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{(n - [n\sqrt{\varepsilon}])[n\sqrt{\varepsilon}]} (([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2) + \cdots + 1) \\ &\geq \frac{|S_n| + |S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2} \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] - 1}{n - [n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2} \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] - 1}{n - [n\sqrt{\varepsilon}]} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.55)$$

于是我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq -2\sqrt{\varepsilon} - \frac{C}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

□

### 命题 2.12

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  且  $a_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

▲

**证明** 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

□

### 命题 2.13

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}, a_n > 0$ , 并且对某个  $C > 0$ , 如果有  $n(a_n - a_{n-1}) \geq -C, \forall n \geq 2$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ .

▲

**证明** 由反向 Stolz 定理可得


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln a_{n+1} - \ln a_n} \xrightarrow{\text{反向 Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=0}^n (\ln a_{k+1} - \ln a_k)}{n+1 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n - \ln a_0}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

□

## 2.5.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限

**例题 2.51** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}.$$

 **笔记** 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

**证明** 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}})}.$$

又由Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{2020} - (n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020 \cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}} = 0.$$


于是再利用Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n \cdot (n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n^{2021}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021} - n^{2021}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{2021 \cdot n^{2020}} = \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \frac{1}{2021}.$  □

### 例题 2.52

- (1) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}.$
- (2) 证明下述极限存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$
- (3) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right).$

 **笔记** 注意,  $\gamma \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.577 \dots$  是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道  $\gamma$  会不会是一个分数.

**解**

- (1) 直接由Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

- (2) 记  $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ , 则

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \left[ \frac{1}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right] = -\frac{1}{n(n+1)} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \\ &= O \left( \frac{1}{n^2} \right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

从而存在常数  $C > 0$ , 使得  $|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{C}{n^2}$ , 又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$  收敛, 所以由比较原则可知  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+1} - c_n|$  也收敛.

由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1} - c_n)$  也收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_1)$

存在. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$  也存在.

(3) 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.$$

□

例题 2.53 计算

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right)$ .

证明

1. 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} - \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{n+1}{n} - 1 \right)} = e^{-1}. \end{aligned}$$

2. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1}} - e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = e^{-1}.$$

故  $e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \sim \frac{n}{e}, n \rightarrow \infty$ . 并且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - (n+1) \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2(n+1)} = 0. \end{aligned}$$

因此


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \cdot \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n+1} \\
&\stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - n \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \ln k \right] \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \ln(n+2) - (n+1) \ln(n+1)] = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[ \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \right] = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

□

例题 2.54 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2}.$$

 **笔记** 注意到, 分子求和时, 不是单纯的  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_n^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ , 而是  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ .

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.


**结论**  $C_a^b = \frac{a}{b} C_{a-1}^{b-1}$ .

**解** 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{n+1}{k} C_n^{k-1} \right) - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k + \sum_{k=1}^n (\ln C_n^{k-1} - \ln C_n^k)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k - (\ln C_n^0 - \ln C_n^n)}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+2) - n \ln(n+1) - \ln(n+1)}{1} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left( \frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

例题 2.55 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

 **笔记** 倒序求和与顺序求和相等!(看到  $n+1-k$ , 就应该想到倒序求和)

**解** 解法一 (Stolz 公式):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^{n+1-k} k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}} = 1.$$

**解法二** (和式内部对  $n$  可求极限 (极限号与求和号可换序)): 一方面, 注意到对  $\forall N \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \geq \sum_{k=1}^N \frac{n+1}{2^k(n+1-k)}, \forall n > N.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^N})}{1 - \frac{1}{2}}, \forall N \in \mathbb{N}_+.$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^N})}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ .

另一方面, 我们有

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k(n+1-n)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限, 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

故

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} \leq 1.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = 1. \quad \square$$

**例题 2.56** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma)$ , 其中  $\gamma$  为欧拉常数,  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ .

**证明**


$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\square$

**注** 类似的, 你可以继续计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n(H_n - \ln n - \gamma) - \frac{1}{2} \right)$ , 并且仅用 Stolz 公式就能证明存在一系列  $c_1, \dots, c_k$  使得

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), n \rightarrow \infty.$$

**例题 2.57** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ .

 **笔记** 这题也可以凑积分定义是显然的.

**证明**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+2} - \sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

$\square$

#### 命题 2.14

设  $\alpha \in (0, 1)$ , 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha}).$$



**证明** 由 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}{n^{1-\alpha}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}(n+1)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{1-\alpha} - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1-\alpha}{n}} = \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

$\square$



## 2.5.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限

**例题 2.58** 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{4}} x_n$ .

**证明** 归纳易证  $x_n$  单调递增, 如果  $x_n$  有界则设  $x_n \leq A < \infty$ , 代入条件可知  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n} x_n} \geq \frac{1}{A \sqrt{n}}$ , 从而  $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{A \sqrt{k}}$ . 而这个不等式右边发散, 故  $x_n$  也发散, 矛盾. 所以  $x_n$  单调递增趋于无穷, 下面用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n \sqrt{n}} \left(2x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x_n^2 \sqrt{n}}\right) = 4.$$

因此所求的极限是 2. □

**注**

1. 直接用 stolz 会做不出来:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{1}{4} n^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{1}{x_n \sqrt{n}}}{n^{-\frac{3}{4}}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{x_n}.$$

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}} = A$ , 则由上式可得  $A = \frac{4}{A}$ , 解得  $A = 2$ .

但是注意我们事先并没有论证上式最后一个极限存在, 所以不满足 Stolz 定理的条件, 这导致前面的等号都不一定成立. 因此不可以“解方程”得到所求极限为 2.

2. 上述证明中最后一步求原式平方的极限而不求其他次方的极限的原因: 我们也可以待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定  $a, b > 0$ , 则由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}}\right)^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \left(\left(1 + \frac{1}{x_n^2 \sqrt{n}}\right)^a - 1\right)}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \frac{a}{x_n^2 \sqrt{n}}}{bn^{b-1}} = \frac{a}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac{1}{2}}}.$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数, 因此令  $a = 2, b = \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \frac{a}{b} = 4$ . 故

实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$  即可.

类似题目的最后一步求的极限式都是通过这种待定系数的方式得到的, 并不是靠猜.

**例题 2.59** 设  $0 < x_0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = \sin y_n$  ( $n \geq 0$ ). 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ .

**证明** 因为  $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$  ( $n \geq 0$ ), 所以数列  $\{x_n\}$  严格递减有下界. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 则  $\sin a = a$ , 于是  $a = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . 同理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

另外, 由  $0 < x_0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$  可以推得  $0 < x_n < y_n < \frac{\pi}{2}$  ( $n \geq 0$ ). 取正整数  $\ell$  使得  $y_\ell < x_0$ , 则  $y_\ell < x_0 < y_0$ , 从而对任意的正整数  $n$  有

$$y_{n+\ell} < x_n < y_n$$

进而

$$\frac{y_{n+\ell}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < 1$$

注意到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+\ell}}{y_n} = 1$ , 由夹逼准则即得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ . □


**注** 事实上, 通过待定系数, 利用 Stolz 公式做形式计算可以得到  $x_n$  的阶. 待定  $\alpha, \beta > 0$ , 由 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta x_n^\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{\frac{1}{x_n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta n^{\beta-1}}{\frac{1}{\sin^\alpha x_n} - \frac{1}{x_n^\alpha}} \\ &= \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^\alpha \sin^\alpha x_n}{x_n^\alpha - \sin^\alpha x_n} = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^{2\alpha}}{x_n^\alpha - \left(x_n - \frac{1}{6} x_n^3 + o(x_n^3)\right)^\alpha} \end{aligned}$$

$$= \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^{2\alpha}}{C_1^\alpha x_n^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{6} x_n^3 + o(x_n^{\alpha+2})} = \frac{6\beta}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1}}{x_n^{2-\alpha} + o(x_n^{2-\alpha})}.$$

于是取  $\alpha = 2, \beta = 1$ , 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$ . 同理可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n y_n^2 = 3$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} y_n = \sqrt{3}$ .

**例题 2.60** 设  $k \geq 2, a_0 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ .

 **笔记** 这题很容易能猜出要先对原极限开  $k$  次方再用 Stolz 定理求解.

实际上, 我们也可以同 **例题 2.58** 一样, 待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定  $a, b > 0$ , 则由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{a(k+1)} - a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{a(k+1)} - a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)} \left[\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{a(k+1)} - 1\right]}{bkn^{bk-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1) \frac{1}{k}+1}}{bkn^{bk-1}} = \frac{k+1}{bk^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)-\frac{k+1}{k}}}{n^{bk-1}}. \end{aligned}$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数值, 因此令  $a = b = \frac{1}{k}$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{\frac{1}{k}k^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{k+1}{k}-\frac{k+1}{k}}}{n^{\frac{k}{k}-1}} = \frac{k+1}{k}$ . 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}$  即可.

**证明** 归纳易证  $a_n$  单调递增, 假设  $a_n$  有界, 则由单调有界定理可知,  $a_n$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < \infty$ . 则由递推条件可得,  $A = A + \frac{1}{\sqrt[k]{A}}$ , 无解, 矛盾. 于是  $a_n$  单调递增且无上界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 根据 Stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + x^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k}\right) x^{-(1+\frac{1}{k})} = 1 + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

因此所求极限是  $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ . □

**注** 如果题目没给出需要求的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ , 而是问求  $a_n$  的渐近展开式 (只展开一项), 那么我们就需要待定系数自己探索  $a_n$  的阶. 待定  $\alpha > 0$ , 由 Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha &= \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^\alpha = a_n^\alpha + \alpha a_n^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}} + o\left(a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right) \\ &\Rightarrow a_{n+1}^\alpha \approx a_n^\alpha + \alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}} \Rightarrow a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \approx \alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

从而令  $\alpha = \frac{3}{2}$ , 则

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^n (a_{k+1}^{\frac{3}{2}} - a_k^{\frac{3}{2}}) \approx \sum_{k=1}^n \alpha a_k^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} a_k^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{3n}{2}.$$

这样就能写出  $a_n$  渐近展开式的第一项, 即  $a_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ .

**例题 2.61** 设  $k$  为正整数, 正数列  $\{x_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k) = 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^{k+1} = \frac{1}{k+1}$ .

**证明** 设  $S_n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ , 则  $S_n$  单调递增. 如果  $S_n$  有界, 则  $x_n$  趋于零,  $x_n S_n \rightarrow 0$ , 这与已知条件矛盾, 所以  $S_n$  单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件可知  $x_n$  趋于零. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} S_{n+1} S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}} = 1.$$

下面运用等价无穷小替换和 Stolz 公式来求极限:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^{k+1} S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}^{k+1} - S_n^{k+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(S_{n+1} - S_n)(S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{n+1}^k (S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_{n+1} S_{n+1})^k + (x_{n+1} S_{n+1})^{k-1} (x_{n+1} S_n) + \cdots + (x_{n+1} S_{n+1})(x_{n+1} S_n)^{k-1} + (x_{n+1} S_n)^k} \\
 &= \frac{1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

□

**例题 2.62** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} a_n$ .

**解** 因为  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}$  单调递增, 故由单调有界定理可知,  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}$  的极限要么为有限数, 要么为  $+\infty$ . 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

或不存在, 则此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = +\infty$ . 否则, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = c < \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \right) = c - c = 0$

矛盾. 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$  可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = 0$ , 这与  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  或不存在矛盾. 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 并且由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$  可知  $a_n \sim \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \left[ \left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \right]
 \end{aligned}$$

又由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 a_n = 0$ , 因此由 Taylor 公式可知  $\left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \sim \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 从而上式可

化为

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \left[ \left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2 \right)^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^2 - 2a_{n+1}^4 \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6 \right] = 3 + 0 + 0 = 3.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{na_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

□

**例题 2.63**

1. 设  $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $x_1 > 0$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_n - 2)}{\ln n}$ .
2. 设  $x_{n+1} = \sin x_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $x_1 \in (0, \pi)$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n)$ .
3. 设  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ .

**解**

1. 由  $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 并且  $x_1 > 0$ , 假设  $x_n > 0$ , 则  $x_{n+1} = \ln(1+x_n) > 0$ . 从而由数学归纳法, 可知  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是由单调有界定理, 可知数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$ . 对  $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+x_n) = \ln(1+a).$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 进而, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 2$ . 即  $x_n \sim \frac{2}{n}, n \rightarrow \infty$ .  
因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_n - 2)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n \left( n - \frac{2}{x_n} \right)}{\ln n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{2}{x_n}}{\ln n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{\ln(1+x)}}{x} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)\ln(1+x) - 2x}{x^2 \ln(1+x)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - 2x}{x^3} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到  $x_n$  在  $n \rightarrow \infty$  时的渐进估计:

$$\begin{aligned} \frac{n(x_n - 2)}{\ln n} &= \frac{2}{3} + o(1) \Rightarrow nx_n - 2 = \frac{2 \ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. 由  $\sin x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 又由于  $0 < x_1 < \pi$  及  $0 < x_{n+1} = \sin x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 故归纳可得  $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \geq 2$ . 因此  $\{x_n\}$  极限存在, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ . 从而对  $x_{n+1} = \sin x_n$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$  可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{nx_n^2} &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} \right) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = 1.\end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = 3$ . 即  $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, n \rightarrow \infty$ . 进而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left( 1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right) &\stackrel{\text{平方差公式}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 1 - \frac{n}{3} x_n^2 \right)}{\ln n \left( 1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^2 \left( \frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3} \right)}{\ln n \left( 1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3}}{\ln n} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}}{x^2} = \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x - \frac{1}{3} x^2 \sin^2 x}{x^4 \sin^2 x} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 - \frac{1}{3} x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2}{x^6} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^6}{36} - \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{9} + o(x^6)}{x^6} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

(最几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^2)$ , 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $x_1 = 1 > 0$ , 故归纳可得  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由单调有界定理可知数列  $\{x_n\}$  的极限要么是  $+\infty$ , 要么是有限数. 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ , 则对  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = a + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 0$  矛盾. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1 - n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 \right)} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x_n^2} \right)} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

因此  $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 从而  $x_n + \sqrt{2n} \sim 2\sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} &\stackrel{\text{平方差公式}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{2\sqrt{2n} \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

**例题 2.64** 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$ .

**解** 由于  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 并且  $a_1 > 0$ , 故由数学归纳法可知  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $a_2 = a_1 + \frac{1}{S_1} > a_1$ , 再根据递推式, 可以归纳得到数列  $\{a_n\}$  单调递增. 因此, 数列  $\{a_n\}$  要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < \infty$ , 要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 由条件可知

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{S_n} \geq \frac{1}{na_1} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 \geq \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_{n+1}^2 - a_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( a_n + \frac{1}{S_n} \right)^2 - a_n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right). \end{aligned}$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}^2} = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

由递推公式, 可得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned} 1 &= n+1 - n \leq n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} = n+1 - \frac{na_n}{a_n + \frac{1}{S_n}} = 1 + \frac{\frac{n}{a_n S_n}}{1 + \frac{1}{a_n S_n}} \\ &= 1 + \frac{n}{1 + a_n S_n} \leq 1 + \frac{n}{1 + a_1 S_n} = 1 + \frac{n}{1 + S_n}. \end{aligned}$$

又由 Stolz 定理, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$ . 故由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right] = 1$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} = 2 + 0 = 2.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$ . □

## 2.5.2 函数 Stolz 定理

### 定理 2.10 (函数 Stolz 定理)

设  $T > 0, f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是内闭有界函数.

(1) 设  $g(x+T) > g(x)$ , 若有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

(2) 设  $0 < g(x+T) < g(x)$ , 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$



**注** 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 利用夹逼准则和数列 Stolz 定理进行证明. 具体可见 **例题 2.65**.

### 笔记

(1) 不妨设  $A = 0$  的原因:

(2) 不妨设  $T = 1$  的原因:

**证明** 我们仅考虑  $A \in \mathbb{R}$ , 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设  $A = 0$ , 否则用  $f - Ag$  代替  $f$  即可. 不妨设  $T = 1$ , 否则用  $f(Tx)$  代替  $f$  即可.

(1) 不妨设  $A = 0$ , 否则用  $f - Ag$  代替  $f$  即可. 不妨设  $T = 1$ , 否则用  $f(Tx)$  代替  $f$  即可. 对任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x+1) - g(x)], g(x) > 0. \quad (2.56)$$

于是对  $\forall x > X$ , 利用 (2.56) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} + \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\stackrel{(2.56) \text{ 式}}{\leq} \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [g(x-k+1) - g(x-k)]}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &= \varepsilon \frac{g(x) - g(x-[x]+X)}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\stackrel{(2.56) \text{ 式 } g>0}{\leq} \varepsilon + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right|. \end{aligned}$$

于是利用  $f$  在  $[X, X+1]$  有界及  $X \leq x - [x] + X < X+1$ , 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

由  $\varepsilon$  任意性即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

这就完成了证明.

(2) 不妨设  $A = 0$ , 否则用  $f - Ag$  代替  $f$  即可. 不妨设  $T = 1$ , 否则用  $f(Tx)$  代替  $f$  即可. 任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件可知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x) - g(x+1)]. \quad (2.57)$$

于是对  $\forall x > X, \forall n \in \mathbb{N}$ , 利用(2.57)可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n [f(x+k-1) - f(x+k)] + f(x+n)}{g(x)} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |f(x+k-1) - f(x+k)|}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leq \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^n [g(x+k-1) - g(x+k)]}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &= \varepsilon \frac{g(x) - g(x+n)}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leq \varepsilon + \frac{|f(x+n)|}{g(x)}. \end{aligned}$$


再利用  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x+n)|}{g(x)} = 0 \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon, \forall x > X.$$

从而结论得证. □

### 例题 2.65

- (1) 设  $\alpha > -1$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}}$ .
- (2) 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x}$ .
- (3) 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt$ , 这里  $[ \cdot ]$  表示向下取整函数.

 **笔记** 虽然这几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见下述证明.

**注** 第(1)题如果直接洛必达得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\sin x|}{\alpha+1} \text{ 不存在,}$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

### 证明

- (1) **直接使用函数 Stolz 定理:** 由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt - \int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{(x+\pi)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}} \\ &\stackrel{\text{Lagrange 中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} \stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}, \end{aligned}$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x+\pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

**不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):** 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ . 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}} \leq \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n\pi)^{\alpha+1}}, \forall x \in [0, +\infty). \quad (2.58)$$

又由数列 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n\pi)^{\alpha+1}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$



$$\frac{\text{积分中值定理}}{\text{Lagrange 中值定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n\pi)^\alpha \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \quad (2.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\frac{\text{积分中值定理}}{\text{Lagrange 中值定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n\pi)^\alpha \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}. \quad (2.60)$$

又因为  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用(2.58)(2.59)(2.60)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 直接使用函数 Stolz 定理: 由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt - \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} \xrightarrow{\text{Lagrange 中值定理}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\frac{\pi}{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x}. \quad (2.61)$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x+\pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 再结合(2.61)式可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} = \frac{2}{\pi}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写): 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ . 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \leq \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)}, \forall x > 0. \quad (2.62)$$

又由数列 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi) - \ln((n-1)\pi)}$$

$$\xrightarrow{\text{积分中值定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1 + \frac{1}{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad (2.63)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+2)\pi) - \ln((n+1)\pi)}$$

$$\xrightarrow{\text{积分中值定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1 + \frac{1}{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}. \quad (2.64)$$

又因为  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用(2.62)(2.63)(2.64)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 直接使用函数 Stolz 定理: 注意到  $t - [t]$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的非负函数, 故由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+1} (t - [t]) dt - \int_0^x (t - [t]) dt}{x+1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写): 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x \leq n+1$ . 故

$$\frac{\int_0^n (t - [t]) dt}{n+1} \leq \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt \leq \frac{\int_0^{n+1} (t - [t]) dt}{n}, \forall x > 0. \quad (2.65)$$

又由数列 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n+1} (t - [t]) dt}{n} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} (t - [t]) dt = \int_0^1 (t - [t]) dt = \int_0^1 t dt = 1, \quad (2.66)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n (t - [t])dt}{n+1} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{n-1}^n (t - [t])dt}{n} = \int_0^1 (t - [t])dt = \int_0^1 tdt = 1. \quad (2.67)$$

又因为  $n \leq x \leq n+1, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用 (2.65)(2.66)(2.67) 式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t])dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n (t - [t])dt = 1.$$

□

## 2.6 递推数列求极限和估阶

### 2.6.1 “折线图 (蛛网图)” 分析法 (图未完成, 但已学会)

关于递推数列求极限的问题, 可以先画出相应的“折线图”, 然后根据“折线图 (蛛网图)”的性质来判断数列的极限. 这种方法可以帮助我们快速得到数列的极限, 但是对于数列的估阶问题, 这种方法并不适用.

**注** 这种方法只能用来分析问题, 严谨的证明还是需要用单调性分析法或压缩映像法书写.

一般的递推数列问题, 我们先画“折线图 (蛛网图)”分析, 分析出数列 (或奇偶子列) 的收敛情况, 就再用单调分析法或压缩映像法严谨地书写证明.

如果递推函数是单调递增的, 则画蛛网图分析起来非常方便, 书写证明过程往往用单调有界 (单调性分析法) 就能解决问题.

**例题 2.66** 设  $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$ , 求  $a, b$  的值使得  $a_n$  收敛, 并求其极限.

**笔记** 显然递推函数只有一个不动点  $x = a$ , 画蛛网图分析能够快速得到取不同初值时,  $u_n$  的收敛情况. 但是需要注意严谨地书写证明过程.

**解** 由条件可得

$$u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 = (u_n - a)^2 + u_n \geq u_n.$$

故  $u_n$  单调递增. (i) 若  $b > a$ , 则由  $u_n$  单调递增可知,  $u_n > a, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又由单调有界定理可知  $u_n$  要么发散到  $+\infty$ , 要么收敛到一个有限数. 假设  $u_n$  收敛, 则可设  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u > u_1 > a$ . 从而由递推条件可得

$$u = (u - a)^2 + u \Rightarrow u = a$$

矛盾. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

(ii) 若  $b = a$ , 则由递推条件归纳可得  $u_n = a, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

(iii) 若  $b \in [a-1, a]$ , 令  $f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$ , 则

$$a-1 < a - \frac{1}{4} = f\left(\frac{2a-1}{2}\right) \leq f(x) \leq \max\{f(a-1), f(a)\} = a, \forall x \in [a-1, a].$$

由于  $u_1 = b \in [a-1, a]$ , 假设  $u_n \in [a-1, a]$ , 则

$$a-1 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq a.$$

由数学归纳法可得  $u_n \in [a-1, a], \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 于是由单调有界定理可知  $u_n$  收敛. 再对  $u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$  两边同时取极限, 解得  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ .

(iv) 若  $b < a-1$ , 则

$$u_2 = (u_1 - a)^2 + u_1 > a \Leftrightarrow (b-a)^2 + b > a \Leftrightarrow (b-a)(b-a+1) > 0.$$

由  $b < a-1$  可知上式最后一个不等式显然成立, 故  $u_2 > a$ . 于是由 (i) 同理可证  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

综上, 只有当  $a \in \mathbb{R}, b \in [a-1, a]$  时, 数列  $u_n$  才收敛, 极限为  $a$ .

□

**例题 2.67** 设  $x_1 > 0, x_1 \neq 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$ , 证明  $x_n$  收敛并求极限.

**笔记** 显然递推函数有两个不动点  $x = 0, 2$ , 画蛛网图分析能够快速得到取不同初值时,  $x_n$  的收敛情况. 这里利用压缩映像书写过程更加简便.

**解** (i) 如果  $x_1 > 1$ , 则归纳易证  $x_n \geq 2, \forall n \geq 2$ , 所以

$$|x_{n+1} - 2| = \left| \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} - 2 \right| = \frac{(x_n - 2)^2}{2(x_n - 1)} = |x_n - 2| \left| \frac{x_n - 2}{2(x_n - 1)} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n - 2| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - 2|$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由此可知  $x_n$  的极限是 2.

(ii) 如果  $x_1 \in (0, 1)$ , 则归纳易证  $x_n \leq 0, \forall n \geq 2$ , 所以

$$|x_{n+1}| = \left| \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} \right| = |x_n| \left| \frac{x_n}{2(x_n - 1)} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n} |x_1|$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由此可知  $x_n$  的极限是 0. □

**例题 2.68** 设  $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**笔记** 递推函数性质及例题分析递推函数递减时候, 意味着奇偶两个子列具有相反的单调性, 本题没有产生新的不动点, 是容易的.

画蛛网图分析表明递推函数 (在  $(0, 1)$  内) 是递减的, 所以数列不单调, 但是奇偶子列分别单调, 并且 (这一步只能说“似乎”, 因为对于不同的递减的递推式, 可能结论是不一样的, 取决于二次复合有没有新的不动点) 奇子列单调递增趋于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 偶子列单调递减趋于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 数列的范围自然是在  $[S_1, S_2]$  之间, 显然不动点只有  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  一个, 因此证明单调有界即可解决问题.

**证明**  $S_1 = 1, S_2 = 2 - \sqrt{2}$ , 先证明  $S_n \in [2 - \sqrt{2}, 1]$  恒成立, 采用归纳法.  $n = 1, 2$  时显然成立, 如果  $n$  时成立, 则  $n + 1$  时, 注意  $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$  在区间  $(0, 1)$  中单调递减, 所以

$$2 - \sqrt{2} \leq S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \leq 1$$

这就证明了  $S_n$  是有界数列, 且  $S_3 \leq S_1, S_4 \geq S_2$ , 下面证明  $S_{2n-1}$  递减,  $S_{2n}$  递增: 注意函数  $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$  在区间  $(0, 1)$  中单调递减, 所以如果已知  $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}, S_{2n+2} \geq S_{2n}$ , 则

$$S_{2n+3} = f(S_{2n+2}) \leq f(S_{2n}) = S_{2n+1}, S_{2n+4} = f(S_{2n+3}) \geq f(S_{2n+1}) = S_{2n+2}$$

根据归纳法可得单调性, 这说明  $S_{2n-1}, S_{2n}$  都是单调有界的, 因此极限存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = b, a, b \in [2 - \sqrt{2}, 1]$$

在递推式  $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$  中分别让  $n$  取奇数, 偶数, 然后令  $n \rightarrow \infty$  取极限, 可得关于极限  $a, b$  的方程组  $a = b + \frac{1}{b} - \sqrt{2}, b = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}$ , 希望证明  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 为了解这个方程组, 三种方法:

**方法一:** 直接硬算, 将其中一个式子代入到另一个中

$$a = b + \frac{1}{b} - \sqrt{2} = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2} + \frac{1}{a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1 - 3\sqrt{2}a + 7a^2 - 3\sqrt{2}a^3 + a^4}{a(1 - \sqrt{2}a + a^2)}$$

$$1 - 3\sqrt{2}a + 7a^2 - 3\sqrt{2}a^3 + a^4 - a^2(1 - \sqrt{2}a + a^2) = -(\sqrt{2}a - 1)^3 = 0$$

由此可知  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 所以数列  $S_n$  收敛于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**方法二:** 上面硬算起来实在太麻烦了, 我们可以先对递推式变形化简, 减小计算量

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2} = \frac{S_n^2 - \sqrt{2}S_n + 1}{S_n} = \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{S_n}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_n}{S_n} = \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(S_n - \sqrt{2})}{S_n}$$

然后对奇偶子列 (代入递推式) 分别取极限可得方程组

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b}, b - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a - \sqrt{2})}{a}$$

如果  $a, b$  之中有一个是  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则另一个也是, 显然数列  $S_n$  收敛于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 如果都不是则

$$\begin{aligned} a - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b} = \frac{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a - \sqrt{2})(b - \sqrt{2})}{ab} \\ &\Rightarrow (a - \sqrt{2})(b - \sqrt{2}) - ab = 2 - \sqrt{2}(a + b) = 0 \Rightarrow a + b = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow a - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - b = \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b} \Rightarrow b - \sqrt{2} = -b, b = \frac{\sqrt{2}}{2} = a. \end{aligned}$$

导致矛盾.

**方法三:**(最快的方法): 如果  $a \neq b$ , 则根据方程组  $a = b + \frac{1}{b} - \sqrt{2}, b = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}$  有

$$\begin{aligned} ab &= b^2 - \sqrt{2}b + 1 = a^2 - \sqrt{2}a + 1 \Rightarrow a^2 - b^2 = \sqrt{2}(a - b) \Rightarrow a + b = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow b = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - a \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

最后一个不等式等号成立当且仅当  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 由此可知  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  矛盾.  $\square$

**注** 一般来说, 递推函数递减时候是否收敛完全取决于递推函数二次复合之后在区间内 (这个数列的最大, 最小值对应的区间) 是否会有新的不动点, 如果没有就收敛, 如果有, 则通常奇偶子列收敛到不同极限, 于是数列不收敛. 可以看到核心是二次复合后是否有新的不动点, 也即解方程  $f(f(x)) = x$ , 一般不建议硬算, 尤其是多项式或者分式类型, 往往化为两个方程  $a = f(b), b = f(a)$  然后作差会比较方便, 只有出现超越函数时候, 才有必要真的把二次复合化简算出来, 然后硬解方程, 或者求导研究问题, 这样“迫不得已”的例子见最后一个练习题.

**例题 2.69** 定义数列  $a_0 = x, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + y^2}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$ , 求  $D \triangleq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{数列 } a_n \text{ 收敛}\}$  的面积.

**解**

$\square$

## 2.6.2 单调性分析法

### 命题 2.15 (不动点)

设数列  $\{x_n\}$  满足递推公式  $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}_+$ . 若有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ , 同时又成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$  则极限  $\xi$  一定是方程  $f(x) = x$  的根 (这时称  $\xi$  为函数  $f$  的不动点).

**证明** 对  $x_{n+1} = f(x_n)$  两边取极限即得.  $\square$

关于递推数列求极限和估阶的问题, 单调性分析法只适用于

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}.$$

$f$  是递增或者递减的类型, 且大多数情况只适用于  $f$  递增情况, 其余情况不如压缩映像思想方便快捷. 显然递推数列  $x_{n+1} = f(x_n)$  确定的  $x_n$  如果收敛于  $x \in \mathbb{R}$ , 则当  $f$  连续时一定有  $f(x) = x$ , 此时我们也把这个  $x$  称为  $f$  的不动点. 因此  $f(x) = x$  是  $x_n$  收敛于  $x \in \mathbb{R}$  的必要条件.

### 命题 2.16 (递增函数递推数列)

设  $f$  是递增函数, 则递推

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \quad (2.68)$$

确定的  $x_n$  一定单调, 且和不动点大小关系恒定.



**笔记** 本结论表明由递增递推(2.68)确定的数列的单调性和有界性, 完全由其  $x_2 - x_1$  和  $x_1$  与不动点  $x_0$  的大小关系确定. 即  $x_2 > x_1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+. x_1 > x_0 \Rightarrow x_n > x_0, \forall n \in \mathbb{N}_+.$

**证明** 我们只证一种情况, 其余情况是完全类似的. 设  $x_0$  是  $f$  的不动点且  $x_1 \leq x_0, x_2 \geq x_1$ , 则若  $x_n \leq x_{n+1}, x_n \leq x_0, n \in \mathbb{N}$ , 运用  $f$  递增性有

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_0) = x_0, x_{n+2} = f(x_{n+1}) \geq f(x_n) = x_{n+1}.$$

由数学归纳法即证明了 **命题 2.16** □

### 命题 2.17 (递减函数递推数列)

设  $f$  是递减函数, 则递推

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \quad (2.69)$$

确定的  $\{x_n\}$  一定不单调, 且和不动点大小关系交错. 但  $\{x_n\}$  的两个奇偶子列  $\{x_{2k-1}\}$  和  $\{x_{2k}\}$  分别为单调数列, 且具有相反的单调性. ◆

**笔记** 我们注意到  $f \circ f$  递增就能把  $f$  递减转化为递增的情况, 本结论无需记忆或证明, 只记得思想即可.  $x_n$  和不动点关系交错, 即若  $x_0$  为数列  $x_n$  的不动点, 且  $x_1 \geq x_0, x_2 \leq x_0$ , 则  $x_3 \geq x_0, \dots, x_{2n} \leq x_0, x_{2n-1} \geq x_0, \dots$ ; 并且  $x_2 \leq x_1, x_3 \geq x_1, x_4 \leq x_2, x_5 \geq x_3, \dots, x_{2n} \leq x_{2n-2}, x_{2n-1} \geq x_{2n-3}, \dots$ .

**证明** 由 **命题 2.16** 类似证明即可. □

### 例题 2.70 递增/递减递推数列

1. 设  $x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, n = 1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
2. 设  $x_1, a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3}), n = 1, 2, \dots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
3. 设  $x_1 = 2, x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3, (n = 2, 3, \dots)$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
4. 设  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1, n = 1, 2, \dots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**笔记**

1. 不妨设  $x_1 \geq 0$  的原因: 我们只去掉原数列  $\{x_n\}$  的第一项, 得到一个新数列, 并且此时新数列是从原数列  $\{x_n\}$  的第二项  $x_2$  开始的. 对于原数列  $\{x_n\}$  而言, 有  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 故新数列的每一项都大于等于 0. 将新数列重新记为  $\{x_n\}$ , 则  $x_1 \geq 0$ . 若此时能够证得新数列收敛到  $x_0$ , 则由于数列去掉有限项不会影响数列的敛散性以及极限值, 可知原数列也收敛到  $x_0$ . 故不妨设  $x_1 \geq 0$  是合理地.

(简单地说, 就是原数列用  $x_2$  代替  $x_1$ , 用  $x_{n+1}$  代替  $x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 而由  $x_1 > -6$ , 可知  $x_2 = \sqrt{6+x_1} \geq 0$ .)

**注** 这种不妨设的技巧在数列中很常用, 能减少一些不必要的讨论. 实际上就是去掉数列中有限个有问题的项, 而去掉这些项后对数列的极限没有影响.

**解**

1. 不妨设  $x_1 \geq 0$ , 则设  $f(x) = \sqrt{6+x}$ , 则  $f(x)$  单调递增.

当  $x_1 < 3$  时, 由条件可知

$$x_2 - x_1 = \sqrt{6+x_1} - x_1 = \frac{(3-x_1)(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1} + x_1}. \quad (2.70)$$

从而此时  $x_2 > x_1$ . 假设当  $n = k$  时, 有  $x_k < 3$ . 则当  $n = k+1$  时, 就有

$$x_{k+1} = f(x_k) = \sqrt{6+x_k} < \sqrt{6+3} = 3.$$

故由数学归纳法, 可知  $x_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

假设当  $n = k$  时, 有  $x_{k+1} \geq x_k$ . 则当  $n = k+1$  时, 就有

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) \geq f(x_k) = x_{k+1}.$$

故由数学归纳法, 可知  $\{x_n\}$  单调递增. 于是由单调有界定理, 可得数列  $\{x_n\}$  收敛.

当  $x_1 \geq 3$  时, 由 (2.70) 式可知, 此时  $x_2 \leq x_1$ . 假设当  $n = k$  时, 有  $x_k \geq 3$ . 则当  $n = k+1$  时, 就有

$$x_{k+1} = f(x_k) = \sqrt{6+x_k} \geq \sqrt{6+3} = 3.$$

故由数学归纳法, 可知  $x_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

假设当  $n = k$  时, 有  $x_{k+1} \leq x_k$ . 则当  $n = k + 1$  时, 就有

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) \leq f(x_k) = x_{k+1}.$$

故由数学归纳法, 可知  $\{x_n\}$  单调递减. 于是由单调有界定理, 可得数列  $\{x_n\}$  收敛.

综上, 无论  $x_1 > 3$  还是  $x_1 \leq 3$ , 都有数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 则对  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$  可得  $a = \sqrt{6+a}$ , 解得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 3$ .

2.

3.

4.

□

**例题 2.71** 设  $c, x_1 \in (0, 1)$ , 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = c(1 - x_n^2)$ ,  $x_2 \neq x_1$ , 证明  $x_n$  收敛当且仅当  $c \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**证明** 根据题目显然有  $x_n \in (0, 1)$ , 考虑函数  $f(x) = c(1 - x^2)$ , 则  $f(x)$  单调递减, 并且  $f(x) = x$  在区间  $(0, 1)$  中有唯一解  $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$ , 则  $x_1 \neq t_0$ , 不妨设  $x_1 \in (0, t_0)$  (若不然  $x_1 > t_0$ , 则  $x_2 = f(x_1) < f(t_0) = t_0$ , 从  $x_2$  开始考虑即可), 所以  $x_2 > t_0, x_3 < t_0, \dots$  也即  $x_{2n-1} < t_0, x_{2n} > t_0$  恒成立.

为了研究奇偶子列的单调性, 考虑二次复合, 计算有

$$f(f(x)) - x = c(1 - c^2(1 - x^2)^2) - x = (-cx^2 + c - x)(c^2x^2 + cx + 1 - c^2)$$

两个因子都是二次函数, 前者开口向下, 在  $(0, 1)$  区间中与  $y = x$  的唯一交点 (横坐标) 是  $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$ , 后者开口向上, 解方程有 (形式上)  $x = \frac{-c \pm \sqrt{4c^2-3}}{2c}$ .

因此我们应该以  $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$  分类, 当  $c \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  时,  $c^2x^2 + cx + 1 - c^2 \geq 0$  也即当  $x \in (0, t_0)$  时  $f(f(x)) \geq x, x \in (t_0, 1)$  时  $f(f(x)) \leq x$ , 代入可知

$$x_1 \leq x_3 \leq x_5 \leq \dots \leq t_0, x_2 \geq x_4 \geq x_6 \geq \dots \geq t_0$$

也即奇子列单调递增有上界  $t_0$ , 偶子列单调递减有下界  $t_0$ , 所以奇偶子列分别都收敛, 解方程  $f(f(x)) = x$  可知其在  $(0, 1)$  中有唯一解  $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$ , 所以奇偶子列收敛到同一值, 数列收敛.

当  $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$  时, **方法一**: 显然有  $\frac{-c - \sqrt{4c^2-3}}{2c} < \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c} < \frac{-c + \sqrt{4c^2-3}}{2c}$ , 从左至右依次记为  $t_1 < t_0 < t_2$ . 采用反证法, 如果  $x_n$  收敛, 则解方程  $f(x) = x$  可知  $x_n \rightarrow t_0$ , 注意  $x_{2n-1} \in (0, t_0), x_{2n} \in (0, 1)$  并且反证法表明这两个子列也都收敛到  $t_0$ , 则存在  $N$  使得  $n > N$  时恒有  $x_{2n-1} \in (t_1, t_0), x_{2n} \in (t_0, t_2)$ . 注意

$$f(f(x)) - x = (-cx^2 + c - x)(c^2x^2 + cx + 1 - c^2)$$

因此在区间  $(t_1, t_0)$  中  $f(f(x)) < x$ , 区间  $(t_0, t_2)$  中  $f(f(x)) > x$ , 所以  $n > N$  时奇子列单调递减, 偶子列单调递增, 根据单调有界, 只能奇子列收敛到  $t_1$ , 偶子列收敛到  $t_2$ , 这与  $x_n \rightarrow t_0$  矛盾.

**方法二**: 这个方法可以快速说明  $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$  时数列一定不收敛, 但是剩下一半似乎用不了. 显然  $f(x) = x$  的解是  $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$ , 如果  $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求导有  $f'(x) = -2cx, |f'(t_0)| = \sqrt{1+4c^2} - 1 > 1$ . 所以在  $t_0$  附近的一个邻域内都有  $|f'(x)| \geq 1 + \delta > 1$ , 而如果此时  $x_n$  收敛, 则必然收敛到  $t_0$ , 也就是说存在  $x_N$  落入  $t_0$  附近一个去心邻域内 (条件  $x_2 \neq x_1$  保证了  $x_n \neq t_0$  恒成立), 于是

$$|x_{N+1} - t_0| = |f(x_N) - f(t_0)| = |f'(\xi)| |x_N - t_0| \geq (1 + \delta) |x_N - t_0|$$

以此类推下去, 显然  $x_n$  与  $t_0$  的距离只会越来越远, 因此不可能收敛到  $t_0$  导致矛盾. □

**注 方法一** 是标准方法也是通用的, 注意多项式时候一定有整除关系  $f(x) - x \mid f(f(x)) - x$  所以必定能因式分解. **方法二** 则是回忆之前讲过的“极限点处导数大于等于 1 时候就不可能压缩映射”, 利用这个原理我们很快能发现  $c$  的分界线, 同时也能快速说明  $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$  时数列一定不收敛.



## 2.6.3 利用上下极限求递推数列极限

利用上下极限求递推数列极限, 首先要先确定数列有界, 进而说明上下极限存在. 其次, 运用这种方法前提是需要递推式中出现分式或负号, 这样对递推式两边分别取上、下极限后, 才会得到一个关于上极限和下极限的值的等式. 只有通过这个等式将上、下极限的值联系起来后, 才能利用反复抽子列或其他方法证明上、下极限相等.

**例题 2.72** 设  $A, B > 0, a_1 > A$  以及  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n}, n \in \mathbb{N}_+$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**证明** 显然  $a_n > A > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n} \leq A + \frac{B}{A}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 故数列  $\{a_n\}$  有界. 于是可设  $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, b = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 对等式  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n}$  两边同时关于  $n \rightarrow +\infty$  取上下极限得到

$$\begin{aligned} a &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{a_n} = A + \frac{B}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = A + \frac{B}{b}, \\ b &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{a_n} = A + \frac{B}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = A + \frac{B}{a}. \end{aligned}$$

于是我们有  $\begin{cases} ab = Ab + B \\ ab = Aa + B \end{cases}$ , 解得  $a = b = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ . 又由  $a_n > A > 0$ , 可知  $a = b = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}. \quad \square$$

**例题 2.73** 设  $x_0, y_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1}, y_{n+1} = \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1}$ , 证明: 数列  $x_n, y_n$  都收敛且极限相同.

**注**  $1 + \frac{3}{4}u^2$  的放缩思路: 我们希望  $\frac{x}{(1 + \frac{3}{4}x^2)^2} < 1$ , 待定  $m > 0$ , 利用均值不等式可知

$$\left(1 + \frac{3}{4}x^2\right)^2 = \left(\frac{3}{4}x^2 + \overbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}^{m \uparrow}\right)^2 \geq \left((m+1)^{m+1} \sqrt{\frac{3}{4}x^2 \cdot \frac{1}{m^m}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m^{\frac{2m}{m+1}}} x^{\frac{4}{m+1}}.$$

从而我们希望  $x^{\frac{4}{m+1}} = x$ , 即  $m = 3$ . 这样就能使得

$$\frac{x}{(1 + \frac{3}{4}x^2)^2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m^{\frac{2m}{m+1}}} x^{\frac{4}{m+1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{4}} \cdot \frac{4}{3^{\frac{6}{4}}} < 1.$$

故取  $m = 3$ .

**证明** 根据条件可知  $x_n, y_n > 0$ , 并且进一步归纳易证  $x_n, y_n \in [0, 1]$ , 所以上下极限也都在  $[0, 1]$  之间.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - y_{n+1} &= \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} - \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \\ &= \frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

由均值不等式可得

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy \geq (x+y)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2.$$

记  $u = x_n + y_n \geq 0$ , 则由均值不等式可得

$$1 + \frac{3}{4}u^2 = \frac{3}{4}u^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{u^2}{36}} = 4\sqrt{\frac{|u|}{6}} \Rightarrow \frac{u}{(1 + \frac{3}{4}u^2)^2} \leq \frac{8}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &= \frac{|x_n - y_n|(x_n + y_n)}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \\ &\leq |x_n - y_n| \frac{x_n + y_n}{(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$\leq |x_n - y_n| \frac{x_n + y_n}{(1 + \frac{3}{4}(x_n + y_n)^2)^2} = |x_n - y_n| \frac{u}{(1 + \frac{3}{4}u^2)^2}$$

故

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{3}{8} |x_n - y_n| \leq \cdots \leq (\frac{3}{8})^n |x_1 - y_1|.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ . 因此, 设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A, B \in [0, 1]$ ,  $A \geq B$  利用上下极限的基本性质有

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \leq \frac{1}{4B^2 + 1} \\ B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \geq \frac{1}{4A^2 + 1} \\ \Rightarrow A &\leq \frac{1}{4B^2 + 1} \leq \frac{1}{\frac{4}{(4A^2 + 1)^2} + 1} = \frac{(4A^2 + 1)^2}{(4A^2 + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

方法一: 去分母并化简, 因式分解得到 (这个方法难算, 建议用 mma, 或者慢慢手动拆)

$$A((4A^2 + 1)^2 + 4) - (4A^2 + 1)^2 = (2A - 1)^3(2A^2 + A + 1) \leq 0$$

于是  $A \leq \frac{1}{2}$ , 同理可知  $B \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $A = B = \frac{1}{2}$ , 因此  $x_n, y_n$  都收敛到  $\frac{1}{2}$ .

方法二: 最后计算  $A, B$  时候如果采用上述方法硬做有点难算, 其实有巧妙一些的选择. 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (x_n - y_n) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)(x_n - y_n) = 0$  (有界量乘无穷小量). 进而上下极限也有等式  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4x_n^2 = 4A^2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4x_n^2 = 4B^2$  代入可知

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} = \frac{1}{4B^2 + 1} \\ B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} = \frac{1}{4A^2 + 1} \\ \Rightarrow 4AB^2 + A &= 4A^2B + B = 1, (4AB - 1)(B - A) = 0 \end{aligned}$$

所以若  $A = B$  则显然成立, 进而由递推条件可得  $A = B = \frac{1}{2}$ . 若  $A \neq B$  则  $AB = \frac{1}{4}$ , 代入有  $A + B = 1$ , 显然解出  $A = B = \frac{1}{4}$  矛盾.  $\square$

注 有必要先来证明  $x_n - y_n \rightarrow 0$  而不是上来直接设  $x_n, y_n$  的上下极限一共四个数字, 这样的话根本算不出来 (用 mma 都算不出来), 而如果证明了  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , 则只有两个变量了. 方法二好做是因为都是等式了, 所以可以作差然后简单的因式分解解出来, 而方法一那样无脑硬算, 就要麻烦. 本题运用的若干上下极限性质都可以在任何一本数学分析教材上面找到证明. 只要你记住三点:

1. 逐项 (包括加法也包括乘法) 取上下极限通常都会成立一个确定方向的不等式.
2. 计算上下极限时候, 如果其中某一项极限就是存在的, 那么上下极限的不等式将会成为等式.
3. 对于都是正数的问题, 取倒数的上下极限运算规则就是你脑海中最自然的那种情况. 这样考试时候就算忘了具体的结论, 也可以通过画图 and 举例快速确定下来.

## 2.6.4 类递增/类递减递推数列

### 例题 2.74 类递增模型

1. 设  $c_1, c_2 > 0, c_{n+2} = \sqrt{c_{n+1}} + \sqrt{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .
2. 设  $a_k \in (0, 1), 1 \leq k \leq 2021$  且  $(a_{n+2021})^{2022} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}, n = 1, 2, \dots$ , 这里  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

 **笔记** 解决此类问题一般先定界 (即确定  $c_n$  的上下界的具体数值), 再对等式两边同时取上下极限即可.

注

1. 记  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$  的原因: 为了证明数列  $c_n$  有界, 我们需要先定界 (即确定  $c_n$  的上下界的具体数值), 然后



再利用数学归纳法证得数列  $c_n$  有界. 显然  $c_n$  有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列  $c_n$  的一个上界, 我们可以先假设  $c_n$  有一个上界  $b$  (此时  $b$  是待定常数). 则  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} \leq \sqrt{b} + \sqrt{b} = 2\sqrt{b} \leq b$ , 由此解得  $b \geq 4$ . 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证  $b$  同时也是  $c_1, c_2$  的上界. 故只要取  $b \geq 4, c_1, c_2$  就一定能归纳出  $b$  是  $c_n$  的一个上界. 而我们取  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$  满足这个条件.

2. 记  $M =$  的原因: 同上一问, 假设数列  $a_n$  有一个上界  $M$  (此时  $M$  是待定常数), 则

$$a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}} \leq \sqrt[2022]{M + M + \cdots + M} = \sqrt[2022]{2021M} \leq M.$$

由此解得  $M \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}$ . 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证  $M$  同时也是  $a_1, a_2, \cdots, a_{2020}$  的上界. 故只要取  $M \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \cdots, a_{2020}$  就一定能归纳出  $M$  是  $a_n$  的一个上界. 而我们取  $M = \max\{(2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \cdots, a_{2020}\}$  满足这个条件.

解

1. 记  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$ , 则  $0 < c_1, c_2 \leq b$ . 假设  $0 < c_n \leq b$ , 则

$$0 < c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} \leq \sqrt{b} + \sqrt{b} = 2\sqrt{b} \leq b.$$

由数学归纳法, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $0 < c_n \leq b$  成立. 即数列  $\{c_n\}$  有界.

因此可设  $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n < \infty, l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n < \infty$ . 令  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$  两边同时对  $n \rightarrow \infty$  取上下极限, 可得

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_{n-1}} = 2\sqrt{L} \Rightarrow L \leq 4,$$

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_{n-1}} = 2\sqrt{l} \Rightarrow l \geq 4.$$

又  $l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ , 故  $L = l = 4$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 4$ .

2. 取  $M = \max\{(2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \cdots, a_{2020}\}$ , 显然  $a_n > 0$  且  $a_1, a_2, \cdots, a_{2020} \leq M$ . 假设  $a_k \leq M, k = 1, 2, \cdots, n$  则由条件可得

$$a_{n+1} = \sqrt[2022]{a_n - 2020 + a_{n-2019} + \cdots + a_n} \leq \sqrt[2022]{M + M + \cdots + M} = \sqrt[2022]{2021M} \leq M.$$

由数学归纳法, 可知  $0 < a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 即数列  $a_n$  有界. 因此可设  $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 由条件可得

$$a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}}.$$

上式两边同时对  $n \rightarrow \infty$  取上下极限得到

$$A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2021} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020})}$$

$$\leq \sqrt[2022]{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + \cdots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{A + A + \cdots + A} \Rightarrow A \leq (2021)^{\frac{1}{2021}},$$

$$a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2021} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020})}$$


$$\geq \sqrt[2022]{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + \cdots + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{a + a + \cdots + a} \Rightarrow a \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}.$$

又  $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 故  $A = a = (2021)^{\frac{1}{2021}}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (2021)^{\frac{1}{2021}}$ .

□

### 例题 2.75 类递减模型

1. 设  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}, a_1, a_2 > 0, n = 1, 2, \cdots$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.
2. 设  $x_1 = a > 0, x_2 = b > 0, x_{n+2} = 3 + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_n^2}, n = 1, 2, \cdots$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

 **笔记** 此类问题一定要记住, 先定界. 这里我们提供两种方法:

第一题我们使用上下极限, 再隔项抽子列的方法.(这里就算我们解不出不动点也能用这个方法证明极限存在.)

第二题我们使用构造二阶差分的线性递推不等式的方法。(这里也可以设出不动点  $x_0$ , 由条件可知  $x_0 = 3 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}$ , 解出不动点. 然后两边减去不动点, 类似的去构造一个二阶线性递推数列, 然后待定系数放缩一下说明收敛.)

这类题如果不记住做题时会难以想到. 与类递推模型一样, 一开始要定界.

**注** 第二题的极限是一个无理数, 特征方程比较难解, 因此我们只证明极限的存在性.

**证明**

1. 取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\} > 0$ , 则有  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$  成立. 假设  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}$ , 则由条件可得

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}.$$

由数学归纳法, 可知  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 即数列  $a_n$  有界. 于是可设  $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, B = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 由致密性定理, 可知存在一个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k-1} = l_3 < \infty.$$

并且根据上下极限的定义, 可知  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$ . 对等式  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  两边同时关于  $n \rightarrow +\infty$  取上下极限得到

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} \Rightarrow AB \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \right) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} \Rightarrow AB \geq 2. \end{aligned}$$

故  $AB = 2$ . 因为  $\{a_{n_k}\}$  是数列  $a_n$  的一个子列, 所以  $\{a_{n_k}\}$  也满足  $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}, \forall k \in \mathbb{N}_+$ . 并且子列  $\{a_{n_k-1}\}, \{a_{n_k}\}, \{a_{n_k+1}\}, \{a_{n_k+2}\}$  的极限都存在, 于是对  $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}$  等式两边同时关于  $k \rightarrow +\infty$  取极限, 再结合  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$  得到

$$\begin{aligned} A &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k+1}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} \\ &= \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \leq \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} = A \Rightarrow l_1 = l_2 = B. \end{aligned}$$

同理再对  $a_{n_k+1} = \frac{1}{a_{n_k}} + \frac{1}{a_{n_k-1}}$  等式两边同时关于  $k \rightarrow +\infty$  取极限, 再结合  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$  得到

$$\begin{aligned} B &= l_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k-1}} \\ &= \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \geq \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = B \Rightarrow l_2 = l_3 = A. \end{aligned}$$

故  $A = B = l_1 = l_2 = l_3$ , 又由于  $AB = 2$ , 因此  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A = B = \sqrt{2}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ .

2. 证法一: 根据递推条件显然,  $x_n \geq 3, \forall n \geq 3$ . 从而  $x_5 = 3 + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4$ . 假设  $x_n \leq 4, \forall n \geq 5$ , 则

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \leq 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4.$$

由数学归纳法可知  $x_n \in [3, 4], \forall n \geq 5$ . 可设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = L < \infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = l < \infty$ . 对  $x_{n+2} = 3 + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_n^2}$  两边令

$n \rightarrow \infty$  并分别取上、下极限得

$$L = 3 + \frac{2}{l^2}, \quad l = 3 + \frac{2}{L^2}. \quad (2.71)$$

由致密性定理知, 存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+2} = L, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k-1} = l_3 < \infty$ . 显然  $l \leq l_1, l_2, l_3 < L$ . 再对  $x_{n_k+2} = 3 + \frac{1}{x_{n_k+1}^2} + \frac{1}{x_{n_k}^2}$  两边同时令  $k \rightarrow \infty$  得

$$L = 3 + \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \leq 3 + \frac{2}{l^2}.$$

由(2.71)式知, 上式等号成立, 故  $l_1 = l_2 = l$ . 同理对  $x_{n_k+1} = 3 + \frac{1}{x_{n_k}^2} + \frac{1}{x_{n_k-1}^2}$  两边同时令  $k \rightarrow \infty$  得

$$l = l_1 = 3 + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \geq 3 + \frac{2}{L^2}.$$

由(2.71)式知, 上式等号成立, 故  $l_2 = l_3 = L$ . 综上可知  $l = l_2 = L$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

**证法二:** 根据递推条件显然,  $x_n \geq 3, \forall n \geq 3$ . 从而  $x_5 = 3 + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4$ . 假设  $x_n \leq 4, \forall n \geq 5$ , 则

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \leq 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4.$$

由数学归纳法可知  $x_n \in [3, 4], \forall n \geq 5$ . 于是

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left| \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right| + \left| \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2} \right| = \frac{|x_n^2 - x_{n+1}^2|}{x_{n+1}^2 x_n^2} + \frac{|x_{n-1}^2 - x_n^2|}{x_n^2 x_{n-1}^2} \\ &= \frac{x_n + x_{n+1}}{x_{n+1}^2 x_n^2} |x_{n+1} - x_n| + \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n^2 x_{n-1}^2} |x_n - x_{n-1}| \\ &= \frac{1}{x_{n+1} x_n} \left( \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} \right) |x_{n+1} - x_n| + \frac{1}{x_n x_{n-1}} \left( \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} \right) |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{2}{27} |x_{n+1} - x_n| + \frac{2}{27} |x_n - x_{n-1}|, \forall n \geq 6. \end{aligned}$$

记  $q = \frac{1}{2} \in (0, 1), \lambda = \frac{1}{3}, u_n = |x_n - x_{n-1}|$ , 则由上式可得

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\leq \frac{2}{27} u_{n+1} + \frac{2}{27} u_n \leq (q - \lambda) u_{n+1} + q \lambda u_n, \forall n \geq 6. \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leq q(u_{n+1} + \lambda u_n), \forall n \geq 6. \end{aligned}$$

从而对  $\forall n \geq 10$  ( $n$  大于 7 就行), 我们有

$$u_n \leq u_n + \lambda u_{n-1} \leq q(u_{n-1} + \lambda u_{n-2}) \leq \cdots \leq q^{n-7} (u_7 + \lambda u_6).$$

于是对  $\forall n \geq 10$ , 我们有

$$x_n \leq \sum_{k=10}^n |x_{k+1} - x_k| + x_6 = \sum_{k=10}^n u_k + x_6 \leq (u_7 + \lambda u_6) \sum_{k=10}^n q^{k-7} + x_6.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则由上式右边收敛可知  $x_n$  也收敛.

□

**注**

- (1) 取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\}$  的原因: 为了证明数列  $a_n$  有界, 我们需要先定界, 然后再利用数学归纳法证得数列  $a_n$  有界. 显然  $a_n$  有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列  $a_n$  的上下界, 我们可以先假设  $b$  为数列  $a_n$  的一个上界 (此时  $b$  是待定常数), 但是我们根据  $a_n > 0$  和  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  只能得到  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} < +\infty$ , 无法归纳法出  $a_n \leq b$ , 故我们无法归纳出  $0 < a_n < b, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 因此仅待定一个上界并不够, 下界并不能简单的取为 0, 我们还需要找到一个更接近下确界的大于零的下界, 不妨先假设这个下界为  $a > 0$  (此时  $a$  也是待定常数). 利用这个下界和递推式  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  归

给出  $0 < a \leq a_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}_+$  (此时  $a, b$  都是待定常数). 于是由已知条件可得

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \leq b \Rightarrow ab \geq 2,$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} \geq a \Rightarrow ab \leq 2.$$


从而  $ab = 2$ , 即  $b = \frac{2}{a}$ . 进而  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}$ . 又由数学归纳法的原理, 可知我们需要同时保证  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$ . 因此找到一个合适的  $a$ , 使得  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$  成立就一定能归纳出  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 即数列  $\{a_n\}$  有界. 而当我们取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\}$  时, 有  $a_1, a_2 \leq a, \frac{2}{a} \geq \frac{2}{a_1} = a_1, \frac{2}{a} \geq \frac{2}{a_2} = a_2$ . 恰好满足这个条件.

(2) 能取到一个子列  $a_{n_k}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k-1} = l_3 < \infty$  成立的原因: 由  $A = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$  和上极限的定义 (上极限就是最大的子列极限), 可知存在一个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A$ . 因为数列  $\{a_{n_k+1}\}$  有界 (因为数列  $\{a_n\}$  有界), 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_k+1}\}$  一定存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_j}+1}\}$ , 并记  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}+1} = l_1 < \infty$ . 又因为  $\{a_{n_{k_j}+2}\}$  是  $\{a_{n_k+2}\}$  的子列, 所以  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}+2} = A$ . 由于  $\{a_{n_{k_j}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_j}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty$ . 同理由数列  $\{a_{n_k}\}$  有界, 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_k}\}$  存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$ , 并记  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}} = l_2$ . 又因为  $\{a_{n_{k_l}+2}\}$  是  $\{a_{n_k+2}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_l}+1}\}$  是  $\{a_{n_k+1}\}$  的子列, 所以  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}+2} = A, \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}+1} = l_1$ . 由于  $\{a_{n_{k_l}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_l}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty$ . 再同理由数列  $\{a_{n_k}\}$  有界, 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_k}\}$  存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_s}}\}$ , 并记  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}} = l_3$ . 又因为  $\{a_{n_{k_s}+2}\}$  是  $\{a_{n_k+2}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_s}+1}\}$  是  $\{a_{n_k+1}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_s}}\}$  是  $\{a_{n_k}\}$  的子列, 所以  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}+2} = A, \lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}+1} = l_1, \lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}} = l_3$ . 由于  $\{a_{n_{k_s}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_s}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k-1} = l_3 < \infty$ .

2. 记  $q = \frac{1}{2} \in (0, 1), \lambda = \frac{1}{3}$  的原因: 记  $u_n = |x_n - x_{n-1}|$ , 则  $u_{n+2} \leq \frac{2}{27}(u_{n+1} + u_n)$ , 类比二阶线性递推数列方法, 希望找到  $\lambda > 0, q \in (0, 1)$  使得  $u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leq q(u_{n+1} + \lambda u_n)$  恒成立, 这样一直递推下去就有  $u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leq Cq^n, C > 0$ , 说明  $|x_{n+1} - x_n|$  是以等比数列速度趋于零的, 根据级数收敛的比较判别法显然  $x_n$  收敛, 结论成立.

而对比已知不等式  $u_{n+2} \leq \frac{2}{27}(u_{n+1} + u_n)$  和目标不等式  $u_{n+2} \leq (q - \lambda)u_{n+1} + q\lambda u_n$  可知, 只要满足  $u_{n+2} \leq \frac{2}{27}(u_{n+1} + u_n) \leq (q - \lambda)u_{n+1} + q\lambda u_n, q \in (0, 1), \lambda > 0$  即可达到目的. 即只需取合适的  $q, \lambda$  使其满足  $q - \lambda \geq \frac{2}{27}, q\lambda \geq \frac{2}{27}, q \in (0, 1), \lambda > 0$  即可. 这明显有很多可以取的取法, 例如  $q = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{3}$ , 因此得证.

**例题 2.76** 设  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k > 0, k \geq 2, a_n = \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{a_{n-i}}, n \geq k+1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^k b_i}$ .

 **笔记** 本题是例题 2.75 第一题的推广. 核心想法就是反复抽收敛子列.

**证明** 先证明数列是有界的, 为此取充分大的正数  $M$  使得

$$a_n \in \left[ \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{M}, M \right], n = 1, 2, \dots, k$$

然后归纳证明对任意  $n \in \mathbb{N}^+$  都有上述不等式成立, 若  $n$  时成立, 则  $n+1$  时

$$a_{n+1} = \frac{b_1}{a_n} + \frac{b_2}{a_{n-1}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k+1}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{M}$$

$$a_{n+1} = \frac{b_1}{a_n} + \frac{b_2}{a_{n-1}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k+1}} \leq \frac{b_1}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} + \frac{b_2}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} + \dots + \frac{b_k}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} = M$$

因此  $a_n$  是有界数列, 设其上极限为  $L$ , 下极限为  $l$ , 则  $L \geq l$ . 在递推式两边取上下极限可知

$$\begin{aligned} L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_1}{a_{n-1}} + \frac{b_2}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{b_k}{a_{n-k}} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{a_{n-1}} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{a_{n-2}} + \cdots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_{n-k}} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{l} \\ l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_1}{a_{n-1}} + \frac{b_2}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{b_k}{a_{n-k}} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{a_{n-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{a_{n-2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_{n-k}} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{L} \end{aligned}$$

所以  $Ll = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ , 只要证明  $L = l$  便可得到需要的结论.

根据上极限定义, 可以取子列  $a_{n_i} \rightarrow L$ , 不妨要求  $n_{i+1} - n_i > 2k + 2$ , 然后关注各个  $a_{n_i}$  的上一项  $a_{n_{i-1}}$  构成的数列, 这也是一个有界数列, 所以一定存在收敛子列, 我们可以将其记为  $a_{n_{i_j-1}}, j = 1, 2, \cdots$ , 那么对于这个子列的每一项, 它后面的那一项  $a_{n_{i_j}}$  构成的数列, 是之前取的数列  $a_{n_i} \rightarrow L$  的子列, 自然成立  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{i_j-1}} = l_1 \in [l, L]$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{i_j}} = L$ , 为了方便起见, 我们将这两个数列分别记为  $a_{n_{i-1}}, a_{n_i}$ . ( $n_{i_j}$  的指标集是可列集, 按对角线或正方形法则排序)

进一步考虑每个  $a_{n_{i-1}}$  的上一项构成的数列, 作为有界数列一定存在收敛子列, 然后取出这个收敛子列, 则对于这个子列, 它后面一项构成的数列趋于  $l_1$ , 它后面第二项构成的数列趋于  $L$ .

以此类推反复操作有限次 (可以保证每次取的子列  $n_{i+1} - n_i \geq 2$ , 从而反复取  $k+1$  次后就有  $n_{i+1} - n_i \geq 2(k+1)$ , 但本题用不上这个条件), 最终我们可以得到一列正整数  $n_i$  单调递增趋于无穷, 满足

$$a_{n_i} \rightarrow L, a_{n_{i-1}} \rightarrow l_1, a_{n_{i-2}} \rightarrow l_2, \cdots, a_{n_{i-k}} \rightarrow l_k, a_{n_{i-k-1}} \rightarrow l_{k+1}, n_{i+1} - n_i \geq 2k + 2, l_1, \cdots, l_{k+1} \in [l, L]$$

代入到条件递推式中, 取极限有

$$\begin{aligned} L &= \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{b_1}{a_{n_{i-1}}} + \frac{b_2}{a_{n_{i-2}}} + \cdots + \frac{b_k}{a_{n_{i-k}}} \right) = \frac{b_1}{l_1} + \frac{b_2}{l_2} + \cdots + \frac{b_k}{l_k} \leq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{l} = L \\ \Rightarrow l_1 &= l_2 = \cdots = l_k = l \\ l_1 &= \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_{i-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{b_1}{a_{n_{i-2}}} + \frac{b_2}{a_{n_{i-3}}} + \cdots + \frac{b_k}{a_{n_{i-k-1}}} \right) = \frac{b_1}{l_2} + \frac{b_2}{l_3} + \cdots + \frac{b_k}{l_{k+1}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{L} = l_1 \\ \Rightarrow l_2 &= l_3 = \cdots = l_{k+1} = L \end{aligned}$$

于是  $L = l_1 = l_2 = l$  (这是公共的一个值, 注意  $k \geq 2$ ), 结论得证. 再对递推条件两边取极限得到极限值.  $\square$

### 2.6.5 压缩映像

我们来看一种重要的处理模型, 压缩映像方法, 它是我们以后解决基础题的重要方法. 其思想内核有两种, 一种是找到不动点  $x_0$ , 然后得到某个  $L \in (0, 1)$ , 使得

$$|x_n - x_0| \leq L|x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|.$$


还有一种是得到某个  $L \in (0, 1)$ , 使得

$$|x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq L^{n-2}|x_2 - x_1|.$$

当数列由递推确定时, 我们有

$$|x_n - x_0| = |f(x_{n-1}) - f(x_0)|, |x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|,$$

因此往往可适用中值定理或者直接放缩法来得到渴望的  $L \in (0, 1)$ , 特别强调  $L = 1$  是不对的.

 **笔记** 常规的递减递推数列求极限问题我们一般使用压缩映像证明. 压缩映像的书写过程往往比用递推函数的二次复合和数学归纳法的书写要简便的多.

**注** 当递推函数的不动点/极限点处导数大于等于 1 的时候, 就不可能压缩映射.

#### 例题 2.77

1. 设  $x_1 > -1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, n = 1, 2, \cdots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
2. 求数列  $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \cdots$  极限.

**解**

1. 解法一 (递减递推归纳法): 不妨设  $x_1 > 0$  (因为  $x_2 = \frac{1}{1+x_1} > 0$ ), 归纳可知  $x_n > 0$ . 由于原递推函数是递减函数, 因此考虑递推函数的二次复合  $x_{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x_n}} = \frac{1+x_n}{2+x_n}$ , 这个递推函数一定是单调递增的. 进而考虑

$$\frac{1+x}{2+x} - x = \frac{\left(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x\right)}{2+x}.$$

于是当  $x_1 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时, 有  $x_3 - x_1 = \frac{1+x_1}{2+x_1} - x_1 \leq 0$ , 即  $x_3 \leq x_1$ . 从而由 **递增递推结论** 可知,  $\{x_{2n-1}\}$  单调递减且  $x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 此时  $x_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (由  $x = \frac{1}{1+x}$  以及  $x_n > 0$  可以解得不动点  $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 又因为原数列是递减递推, 所以  $x_n$  与  $x_0$  大小关系交错. 而  $x_1 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 故  $x_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ). 于是  $x_4 - x_2 = \frac{1+x_2}{2+x_2} - x_2 > 0$ ,

即  $x_4 > x_2$ . 从而由 **递增递推结论** 可知,  $\{x_{2n}\}$  单调递增且  $x_{2n} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

因此由单调有界定理可知,  $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = b > 0$ . 又由  $x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}}, x_{2n-1} = \frac{1}{1+x_{2n}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 再令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = \frac{1}{1+a}, b = \frac{1}{1+b}$ , 进而解得  $a = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 同理, 当  $x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时, 也有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

解法二 (压缩映像): 不妨设  $x_1 > 0$  (用  $x_2 = \frac{1}{1+x_1} > 0$  代替  $x_1$ ), 归纳可知  $x_n > 0$ . 设  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 则

$$|x_{n+1} - x| = \left| \frac{1}{1+x_n} - x \right| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x} \right| = \frac{|x_n - x|}{(1+x_n)(1+x)} \leq \frac{1}{1+x} |x_n - x|.$$

从而

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{1}{1+x} |x_n - x| \leq \frac{1}{(1+x)^2} |x_{n-1} - x| \leq \cdots \leq \frac{1}{(1+x)^n} |x_1 - x|.$$

于是令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x| = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

2. 由条件可知,  $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7+x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$  (由此可解得  $x = 2$  为不动点). 于是

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 2| &= |\sqrt{7 - \sqrt{7+x_n}} - 2| = \frac{|3 - \sqrt{7+x_n}|}{\sqrt{7 - \sqrt{7+x_n}} + 2} \\ &= \frac{|2 - x_n|}{(\sqrt{7 - \sqrt{7+x_n}} + 2)(3 + \sqrt{7+x_n})} \leq \frac{1}{6} |x_n - 2|. \end{aligned}$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} |x_{2n} - 2| &\leq \frac{1}{6} |x_{2n-2} - 2| \leq \frac{1}{6^2} |x_{2n-4} - 2| \leq \cdots \leq \frac{1}{6^{n-1}} |x_2 - 2|; \\ |x_{2n+1} - 2| &\leq \frac{1}{6} |x_{2n-1} - 2| \leq \frac{1}{6^2} |x_{2n-3} - 2| \leq \cdots \leq \frac{1}{6^n} |x_1 - 2|. \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2n} - 2| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2n+1} - 2| = 0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 2$ . □

**例题 2.78** 设数列  $x_1 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \cos x_n, n \in \mathbb{N}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解** 令  $g(x) = x - \cos x$ , 则  $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ , 且  $g'(x)$  不恒等于 0. 又  $g(0) = -1 < 0, g(1) = 1 - \cos 1 > 0$ , 因此由零点存在定理可知,  $g$  存在唯一零点  $x_0 \in (0, 1)$ . 不妨设  $x_1 \in [-1, 1]$  (用  $x_2$  代替  $x_1$ ), 则  $x_n \in [-1, 1]$ . 再令  $f(x) = \cos x$ , 则  $f'(x) = -\sin x$ . 于是记  $C \triangleq \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| \in (0, 1)$ .

故由 Lagrange 中值定理, 可得存在  $\theta_n \in (\min\{x_n, x_0\}, \max\{x_n, x_0\})$ , 使得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\theta_n)| |x_n - x_0| \leq C |x_n - x_0|.$$

进而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| \leq C |x_n - x_0| \leq C^2 |x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq C^n |x_1 - x_0|.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 再结合  $C \in (0, 1)$ , 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_0| = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $\square$

**命题 2.18 (加强的压缩映像)**

设可微函数  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  满足  $|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ . 证明: 对

$$x_1 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N},$$

必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

**注** 注意到  $f'$  未必是连续函数, 所以  $\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$  未必可以严格小于 1.

**笔记** 实际上, 用压缩映像证明  $\{x_n\}$  的极限是  $x_0$ , 也同时蕴含了  $x_0$  就是这个递推数列的唯一不动点 (反证易得).

**证明** 令  $g(x) = x - f(x)$ , 则  $g(a) = a - f(a) \leq 0, g(b) = b - f(b) \geq 0$ . 由零点存在定理可知, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使

得  $x_0 = f(x_0)$ . 令  $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ , 则由导数定义可知  $h \in C[a, b]$ . 又由  $|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ , 可知

$|h(x_0)| < 1$ . 对  $\forall x \neq x_0$ , 由 Lagrange 中值定理可知

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\theta_x)| < 1, \quad \theta_x \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$$

故  $|h(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ . 于是记  $L \triangleq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \in (0, 1)$ . 因此再由 Lagrange 中值定理可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\xi_n)| |x_n - x_0|, \quad \xi_n \in (\min\{x_n, x_0\}, \max\{x_n, x_0\})$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|f'(\xi_n)| = \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = |h(x_n)| \leq L$$

进而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f'(\xi_n)| |x_n - x_0| \leq L |x_n - x_0| \leq L^2 |x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq L^n |x_1 - x_0|$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_0| = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $\square$

**命题 2.19 (反向压缩映像)**

设  $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}, x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N},$$

证明: 若  $f$  在  $x = a$  可导, 则  $|f'(a)| \leq 1$ .

**证明** (反证法) 假设  $|f'(a)| > 1$ , 由导数定义及极限保号性可知, 存在  $r > 1, \delta > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \geq r > 1, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta].$$

即

$$|f(x) - f(a)| \geq r|x - a|, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta].$$

因为  $f$  在  $x = a$  可导以及  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . 又  $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 从而等式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = f(a)$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0$ , 因此存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对  $\forall n \geq N$ , 有

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \geq r|x_n - a|.$$

故对  $\forall n \geq N$ , 有


$$|x_{n+1} - a| \geq r|x_n - a| \geq r^2|x_{n-1} - a| \geq \cdots \geq r^n|x_1 - x_0|.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - a| = +\infty$ , 矛盾.  $\square$



## 2.6.6 利用不等放缩求递推数列极限

**例题 2.79** 对  $x \geq 0$ , 定义  $y_n(x) = \sqrt[n]{[x[x \cdots [x] \cdots]]}$ , 这里一共  $n$  层取整, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ .

 **笔记** 这里求极限运用了递推的想法找关系, 如果直接对取整函数用不等式放缩, 只能得到  $x-1 < y_n(x) \leq x$ , 这没什么用处, 因为放缩太粗糙了.

实际上, 由 Stolz 定理可知, 数列  $\frac{1}{n}$  次幂的极限与其相邻两项项除的极限近似相等.

**解** 显然  $x \in [0, 1)$  时  $y_n(x) = 0$ ,  $x \in [1, 2)$  时  $y_n(x) = 1$ , 这两个式子对任意  $n$  都成立, 下面来看  $x \geq 2$  时的极限.

令  $u_n(x) = (y_n(x))^n = \overbrace{[x \cdots [x] \cdots]]}^{n \text{ 次复合}} \geq 0$ , 由于单调递增函数的复合仍是单调递增函数, 且  $[x]$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 故  $u_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增. 从而由  $u_n(x)$  的单调性可得

$$u_n(x) \geq u_n(2) = \overbrace{[2 \cdots [2] \cdots]]}^{n \text{ 次复合}} = 2^n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

再结合  $[x]$  的基本不等式  $x-1 < [x] \leq x$  可知

$$\begin{aligned} xu_{n-1}(x) - 1 &\leq u_n(x) = [xu_{n-1}(x)] \leq xu_{n-1}(x), \forall x \geq 2. \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{u_{n-1}(x)} &\leq \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \leq x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = x, \forall x \geq 2. \end{aligned}$$

再根据 Stolz 公式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n(x)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n(x) - \ln u_{n-1}(x)}{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = x.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$


□

## 2.6.7 可求通项和强求通项

## 2.6.7.1 三角换元求通项

先来看能够直接构造出数列通项的例子. 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数或双曲三角函数的形式, 再利用三角函数或双曲三角函数的性质递推归纳.

**例题 2.80** 设  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n$ .

 **笔记** 本题是经典的例子, 注意此类问题如果不能求出通项就无法求出具体的值, 本题便是一个能求出通项从而算出极限值的经典例子.

**注** 这类问题只能靠记忆积累.

**解** 利用

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}, \theta \in \mathbb{R},$$

因为  $a_1 \in (0, 1)$ , 所以一定存在  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $a_1 = \cos \theta$ . 则  $\theta = \arccos a_1$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1 - a_1^2}$ . 并且由  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  可得

$$a_2 = \cos \frac{\theta}{2}, a_3 = \cos \frac{\theta}{2^2}, \dots, a_n = \cos \frac{\theta}{2^{n-1}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n-2}}}{2 \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} \prod_{k=0}^{n-2} \cos \frac{\theta}{2^k}$$




$$= \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = \frac{\sin(2 \arccos a_1)}{2 \arccos a_1} = \frac{a_1 \sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}.$$

□

**例题 2.81** 设  $x_1 = \sqrt{5}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

 **笔记** 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数/双曲三角函数的形式, 再利用三角函数/双曲三角函数的性质递推归纳.

**解** 注意到  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  在  $\mathbb{R}$  上无解, 因此推测类似的双曲三角函数可以做到. 设  $x_1 = 2 \cosh \theta$ ,  $\theta \in (0, +\infty)$ . 利用

$$\cosh x = 2 \cosh^2 \frac{x}{2} - 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

我们归纳可证

$$x_n = 2 \cosh(2^{n-1} \theta), n = 1, 2, \cdots.$$

于是利用  $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \prod_{k=0}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sinh \theta \prod_{k=0}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \sinh(2\theta) \prod_{k=1}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \sinh(2^2 \theta) \prod_{k=2}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh 2^n \theta}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tanh 2^n \theta}{2 \sinh \theta} = \frac{1}{2 \sinh \theta} = 1, \end{aligned}$$

这里倒数第二个等号来自  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$ .

□

**例题 2.82** 设  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ ,  $n = 2, 3, \cdots$ , 则计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

**注** 因为双曲三角函数  $\cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上的值域为  $(1, +\infty)$ , 并且  $\cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增, 所以一定存在唯一的  $\theta \in (0, +\infty)$ , 使得  $a_1 = \cosh \theta = 3$ .

**证明** 设  $a_1 = \cosh \theta = 3$ ,  $\theta \in (0, +\infty)$ . 则利用  $\cosh 2\theta = 2 \cosh^2 \theta - 1$ , 再结合条件归纳可得


$$a_n = 2a_{n-1}^2 - 1 = \cosh 2^{n-1} \theta, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh 2^{n-1} \theta}{2^n \prod_{k=1}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2^n \sinh \theta \prod_{k=1}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2^{n-1} \sinh 2\theta \prod_{k=2}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} = \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2 \sinh 2^{n-1} \theta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta}{2 \tanh 2^{n-1} \theta} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh 2^{n-1} \theta = 1}{2} = \frac{\sinh \theta}{2} = \frac{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.83** 设  $y_0 \geq 2$ ,  $y_n = y_{n-1}^2 - 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$ .

 **笔记** 关于求和的问题, 要注意求和的通项能否凑成相邻两项相减的形式, 从而就能直接求和消去中间项, 进而将求和号去掉.

**注** 因为双曲三角函数  $2 \cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上的值域为  $(1, +\infty)$ , 并且  $2 \cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增, 所以一定存在唯一的  $\theta \in (0, +\infty)$ , 使得  $y_0 = 2 \cosh \theta \geq 2$ .

**证明** 设  $y_0 = 2 \cosh \theta, \theta \in (0, +\infty)$ , 则利用  $\cosh 2\theta = 2 \cosh^2 \theta - 1$ , 再结合条件归纳可得

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0^2 - 2 = 4 \cosh^2 \theta - 2 = 2(2 \cosh^2 \theta - 1) = 2 \cosh 2\theta, \\ y_2 &= y_1^2 - 2 = 4 \cosh^2 2\theta - 2 = 2(2 \cosh^2 2\theta - 1) = 2 \cosh 2^2 \theta, \\ &\dots\dots \\ y_n &= y_{n-1}^2 - 2 = 4 \cosh^2 2^{n-1} \theta - 2 = 2(2 \cosh^2 2^{n-1} \theta - 1) = 2 \cosh 2^n \theta, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n 2^{n+1} \cosh 2^k \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{2^{n+1} \sinh \theta \prod_{k=0}^n \cosh 2^k \theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{2^n \sinh 2\theta \prod_{k=1}^n \cosh 2^k \theta} = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{\sinh 2^{n+1} \theta} \\ &= 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{2^{n+1} \theta} - e^{-2^{n+1} \theta}} = 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2^{n+1} \theta}}{e^{2^{n+2} \theta} - 1} \\ &= 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{2^{n+1} \theta} - 1} - \frac{1}{e^{2^{n+2} \theta} - 1} \right) = \frac{2 \sinh \theta}{e^{2\theta} - 1} \\ &= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta (e^\theta - e^{-\theta})} = e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta \\ &= \frac{y_0}{2} - \sqrt{\cosh^2 \theta - 1} = \frac{y_0}{2} - \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - 1}. \end{aligned}$$

□

#### 例题 2.84

1. 设  $x_1 = \sqrt{5}, x_{n+1} = x_n^2 - 2$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

2. 设  $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1, n = 2, 3, \dots$ , 则计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

3. 设  $y_0 > 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$ , 计算

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{y_n} \right).$$

**解**

- 1.
- 2.
- 3.

□

### 2.6.8 直接求通项公式法

直接利用高中知识, 求出几类递推数列的通项, 进而求出极限.

**命题 2.20 (可直接求通项——类型一)**

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = pa_n + q$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} a_1 + (n-1)q, & p = 1; \\ \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}, & p \neq 1. \end{cases}$$

于是, 当  $p = 1$  时,  $\{a_n\}$  收敛等价于  $q = 0$ ; 当  $p \neq 1$  时,  $\{a_n\}$  收敛等价于  $|p| < 1$  或  $a_1 = \frac{q}{1-p}$ .

**证明** 当  $p = 1$  时, 有  $a_{n+1} - a_n = q$ , 所以  $\{a_n\}$  是以  $q$  为公差的等差数列, 从而  $a_n = a_1 + (n-1)q$ .

当  $p \neq 1$  时, 可设  $a_{n+1} - A = p(a_n - A)$ , 即  $a_{n+1} = pa_n + (1-p)A$ , 由对应系数相等可知  $(1-p)A = q$ , 即  $A = \frac{q}{1-p}$ , 此时  $\left\{a_n - \frac{q}{1-p}\right\}$  是以  $p$  为公比的等比数列, 于是

$$a_n - \frac{q}{1-p} = \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}.$$

$$\text{即 } a_n = \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}.$$

□

**命题 2.21 (可直接求通项——类型二)**

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$  ( $p, q$  不全为零), 则可以构造特征方程  $x^2 + px + q = 0$ , 根据  $\Delta = p^2 - 4q$  来分类:

(1) 当  $\Delta = 0$  时, 此时特征方程有二重根, 设为  $x_0$ , 则  $a_n = (nC_1 + C_2)x_0^n$ ;

(2) 当  $\Delta \neq 0$  时, 设特征方程的两个根为  $x_1, x_2$ , 则  $a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$ .

其中  $C_1, C_2$  是待定常数, 具体可将  $a_1, a_2$  的值代入解得.

**证明** 设  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} - Aa_{n+1} = B(a_{n+1} - Aa_n)$ , 即  $a_{n+2} - (A+B)a_{n+1} + ABa_n = 0$ , 结合已知可得  $A+B = -p$ ,  $AB = q$ , 即  $A, B$  就是特征方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个解.

(1) 当  $\Delta = 0$  时, 此时设特征方程的二重根为  $x_0$ , 即  $A = B = x_0 \neq 0$ , 于是

$$a_{n+2} - Aa_{n+1} = A(a_{n+1} - Aa_n).$$

从而

$$a_n - Aa_{n-1} = A(a_{n-1} - Aa_{n-2}) = \cdots = A^{n-2}(a_2 - Aa_1).$$

两边同除以  $A^n$  就有

$$\frac{a_n}{A^n} - \frac{a_{n-1}}{A^{n-1}} = \frac{a_2 - Aa_1}{A^2}.$$

于是

$$\frac{a_n}{A^n} = \frac{a_1}{A} + \sum_{k=2}^n \left( \frac{a_k}{A^k} - \frac{a_{k-1}}{A^{k-1}} \right) = \frac{a_1}{A} + (n-1) \cdot \frac{a_2 - Aa_1}{A^2} \stackrel{\text{def}}{=} nC_1 + C_2.$$

于是  $a_n = (nC_1 + C_2)A^n = (nC_1 + C_2)x_0^n$ .

(2) 当  $\Delta \neq 0$  时, 此时设特征方程的两个根为  $x_1, x_2$ , 则  $A = x_1, B = x_2$  或  $A = x_2, B = x_1$ , 于是

$$\begin{cases} a_{n+2} - x_1a_{n+1} = x_2(a_{n+1} - x_1a_n); \\ a_{n+2} - x_2a_{n+1} = x_1(a_{n+1} - x_2a_n). \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} a_n - x_1a_{n-1} = x_2(a_{n-1} - x_1a_{n-2}) = x_2^2(a_{n-2} - x_1a_{n-3}) = \cdots = x_2^{n-2}(a_2 - x_1a_1); \\ a_n - x_2a_{n-1} = x_1(a_{n-1} - x_2a_{n-2}) = x_1^2(a_{n-2} - x_2a_{n-3}) = \cdots = x_1^{n-2}(a_2 - x_2a_1). \end{cases}$$

上面第一个式子两端乘以  $x_1$  减去第二个式子两端乘以  $x_2$  得

$$(x_1 - x_2)a_n = x_1^{n-1}(a_2 - x_2a_1) - x_2^{n-1}(a_2 - x_1a_1).$$

即

$$a_n = \frac{x_1^{n-1}(a_2 - x_2a_1) - x_2^{n-1}(a_2 - x_1a_1)}{x_1 - x_2} \stackrel{\text{def}}{=} C_1x_1^n + C_2x_2^n.$$

□

### 命题 2.22 (可直接求通项——类型三)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$ , 此时对应的特征函数为  $f(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ , 则

(1) 当方程  $f(x) = x$  只有一个解  $x_0$  时, 则数列  $\left\{\frac{1}{a_n - x_0}\right\}$  是等差数列;

(2) 当方程  $f(x) = x$  有两个解  $x_1, x_2$  时, 则数列  $\left\{\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}\right\}$  是等比数列.

▲

证明

□

### 命题 2.23 (可直接求通项——类型四)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{Aa_n^2 + B}{2Aa_n + D}$ , 此时对应的特征函数为  $f(x) = \frac{Ax^2 + B}{2Ax + D}$ , 则

(1) 当方程  $f(x) = x$  有两个解  $x_1, x_2$  时, 则数列  $\left\{\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}\right\}$  满足  $\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} = \left(\frac{a_{n-1} - x_1}{a_{n-1} - x_2}\right)^2$ ;

(2) 当方程  $f(x) = x$  只有一个解  $x_0$  时, 则数列  $\{a_n - x_0\}$  是等比数列.

▲

证明

□

**例题 2.85** 设  $a_2 > a_1 > 0$ ,  $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} (n = 3, 4, \dots)$ , 证明数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求极限值.

**证明** 由条件可知

$$\ln a_n = \frac{\ln a_{n-1} + \ln a_{n-2}}{2}, n = 3, 4, \dots$$

从而

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_{n-1} &= \frac{\ln a_{n-2} - \ln a_{n-1}}{2} = -\frac{1}{2}(\ln a_{n-1} - \ln a_{n-2}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(\ln a_2 - \ln a_1), n = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln a_1 + \sum_{k=2}^n (\ln a_k - \ln a_{k-1}) = \ln a_1 + (\ln a_2 - \ln a_1) \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= \ln a_1 + (\ln a_2 - \ln a_1) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} \rightarrow \ln a_1 + \frac{2(\ln a_2 - \ln a_1)}{3}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} = a_1^{\frac{1}{3}} a_2^{\frac{2}{3}}.$$

□

#### 2.6.8.1 凑出可求通项的递推数列

利用比值换元等方法, 可以将原本不能直接求通项的递推数列转化成可三角换元或用高中方法求通项的递推数列. 求出通项后, 后续问题就很简单了.

**例题 2.86** 设  $a > b > 0$ , 定义  $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**注** 这是算数-调和平均数数列, 与算术-几何平均不同, 这个通项以及极限值都可以求出来.

**笔记**  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)$  是一个经典的可求通项的递推数列 (高中学过), 处理方法必须掌握. 即先求解其特征方程, 然后用  $x_{n+1}$  分别减去两个特征根再作商, 再将递推式代入这个分式, 反复递推得到一个等比数列, 进而得到  $x_n$  的通项. 具体步骤见下述证明.

**证明** 由条件可得

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{a_nb_n}{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \cdots = a_0b_0 = ab.$$

因此  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{ab}{a_n} \right)$ . 令  $a_n = \sqrt{ab}x_n, x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1$ , 则  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}}}{\frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}}} = \frac{(x_n - 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \cdots = \left( \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = C^{2^n}, C = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \in (0, 1).$$

于是  $x_n = \frac{1 + C^{2^n}}{1 - C^{2^n}}$ . 再由  $a_n = \sqrt{ab}x_n$  可得

$$a_n = \sqrt{ab} \frac{1 + C^{2^n}}{1 - C^{2^n}} \rightarrow \sqrt{ab}, n \rightarrow \infty.$$

$$b_n = \frac{ab}{a_n} \rightarrow \sqrt{ab}, n \rightarrow \infty.$$

□

**例题 2.87** 设  $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ , 证明:  $a_n, b_n$  收敛到同一极限, 并且在  $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$  时, 上述极限值为  $\pi$ .

**注** 这是几何-调和平均数列, 通项也能求出来, 自然求极限就没有任何问题.

**笔记** (1) 因为  $a_n, b_n$  的递推式都是齐次式, 所以我们尝试比值换元, 将其转化为可求通项的递推数列. 实际上, 我们利用的比值换元是  $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ , 但是为了避免讨论数列  $a_n$  能否取 0 的情况, 我们就取  $b_n = a_nc_n$ .

(2) 三角换元求通项的一些问题: 由递推条件易证  $a_n, b_n \geq 0$ , 其实当  $a_n, b_n$  中出现为零的项时, 由递推条件易知  $a_n, b_n$  后面的所有项都为零, 此时结论平凡. 因此我们只需要考虑  $a_n, b_n > 0$  的情况. 此时直接设  $\cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$  似乎不太严谨. 因为虽然  $c_1 > 0$ , 但是  $c_1$  不一定在  $(0, 1)$  内, 所以我们需要对其进行分类讨论.

当  $c_1 \in (0, 1)$  时, 设  $\cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$ , 其中  $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ;

当  $c_1 > 1$  时, 设  $\cosh x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$ , 其中  $x_1 \in (0, +\infty)$ .

实际上, 我们直接设  $\cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$ , 只要将  $x_1$  看作一个复数, 就可以避免分类讨论. 因为由复变函数论可知,  $\cos x$  在复数域上的性质与极限等结论与在实数域上相同, 而且由  $c_1 > 0$  可知, 一定存在一个复数  $x_1$ , 使得  $\cos x_1 = c_1$ . 所以这样做是严谨地. (考试的时候最好还是分类讨论书写)

**证明** 设  $b_n = a_nc_n$  代入有

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{2a_nc_n}{c_n + 1}, a_{n+1}c_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}a_nb_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c_n}{c_{n+1}^2} = \frac{2c_n}{c_n + 1} \Rightarrow c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n + 1}{2}} \quad (2.72)$$

设  $\cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$ , 其中  $x_1 \in \mathbb{C}$ , 则由 (2.72) 式归纳可得  $c_n = \cos \left( \frac{x_1}{2^{n-1}} \right)$ . 代入回去求  $a_n, b_n$  有

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{b_n}{a_n} = \cos \left( \frac{x_1}{2^{n-1}} \right), b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} \Rightarrow b_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n = \frac{b_{n+1}b_n}{c_{n+1}} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\cos \left( \frac{x_1}{2^n} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_1} = \frac{1}{\cos \left( \frac{x_1}{2} \right) \cos \left( \frac{x_1}{2^2} \right) \cdots \cos \left( \frac{x_1}{2^n} \right)} = \frac{2^n \sin \frac{x_1}{2^n}}{\sin x_1} \Rightarrow b_n = b_1 \frac{2^{n-1} \sin \frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1} \\ &\Rightarrow a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{b_1 \frac{2^{n-1} \sin \frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1}}{\cos \frac{x_1}{2^{n-1}}} = 2^{n-1} \frac{b_1}{\sin x_1} \tan \frac{x_1}{2^{n-1}}, \cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1} \end{aligned}$$

由此可见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \frac{b_1 \arccos \frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{a_1 b_1 \arccos \frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$$

所以收敛到同一极限对于  $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$  的情况有

$$\cos x_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = \frac{\pi}{6}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \pi$$

结论得证. □

**例题 2.88** 设  $a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, n \geq 1$ , 求  $a_0$  的所有可能值, 使得  $a_n$  严格单调递增.

**证明** 直接裂项, 求通项即可得到

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} &= \frac{a_n}{(-3)^n} + \frac{2^n}{(-3)^{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-3)^n} = \frac{2^n}{(-3)^{n+1}} \\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} &= \frac{a_0}{(-3)^0} - \frac{1}{3} \left( 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) = a_0 - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5}{3}} \\ \Rightarrow \frac{a_n}{(-3)^n} &= a_0 - \frac{1}{5} \left( 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) \Rightarrow a_n = \left(a_0 - \frac{1}{5}\right) (-3)^n + \frac{1}{5} 2^n. \end{aligned}$$

由此可见  $a_0 = \frac{1}{5}$  是唯一解. □

**例题 2.89** 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**证明** 解方程  $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} &= \frac{1 + \frac{1}{x_n} - \lambda_1}{1 + \frac{1}{x_n} - \lambda_2} = \frac{(1 - \lambda_1)x_n + 1}{(1 - \lambda_2)x_n + 1} = \frac{\lambda_2 x_n + 1}{\lambda_1 x_n + 1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_n + \frac{1}{\lambda_2}}{x_n + \frac{1}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2} \\ \Rightarrow \frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \frac{x_1 - \lambda_1}{x_1 - \lambda_2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . □

**例题 2.90** 设  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ , 求  $a_n$  的通项公式.

**证明** 设  $a_n = 2b_n$  则问题转化为已知  $b_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n + 1}{2}}$ , 求  $b_n$  的通项公式. 由 **例题 2.87**, 立即得到

$$a_n = 2 \cos \frac{\theta_1}{2^{n-1}}, \cos \theta_1 = \frac{1}{2} a_1.$$
□

### 2.6.8.2 直接凑出通项

**例题 2.91** 设  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n^2 + 2a_n$ , 求  $a_n$  的通项公式.

**证明**

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n^2 + 2a_n = 2 \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2a_{n+1} + 1 = (2a_n + 1)^2 = \cdots = (2a_1 + 1)^{2^n} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{(2a_1 + 1)^{2^{n-1}} - 1}{2} = \frac{2^{2^{n-1}} - 1}{2}. \end{aligned}$$
□

### 2.6.8.3 凑裂项

凑裂项: 根据已知的递推式, 将要求解的累乘或求和的通项凑成裂项的形式, 使得其相邻两项相乘或相加可以抵消中间项, 从而将累乘或求和号去掉.

**例题 2.92** 设  $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**证明** 由条件可知  $a_n + 1 = \frac{a_{n+1}}{n+1}$ , 从而

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k + 1}{a_k} = \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

再根据  $a_n = n(a_{n-1} + 1)$  可得

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

故

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \cdots = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e.$$

□

**例题 2.93** 设  $y_0 > 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)$ .

**笔记** 关于累乘的问题, 要注意累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式, 从而就能直接累乘消去中间项, 进而将累乘号去掉.

本题是利用已知条件和平方差公式将累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式.

**证明** 一方面

$$y_n + 1 = y_{n-1}^2 - 1 = (y_{n-1} - 1)(y_{n-1} + 1) \Rightarrow y_{n-1} - 1 = \frac{y_n + 1}{y_{n-1} + 1} \Rightarrow y_n - 1 = \frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1}.$$

另外一方面

$$y_n - 2 = y_{n-1}^2 - 4 = (y_{n-1} - 2)(y_{n-1} + 2) \Rightarrow y_n - 2 = (y_{n-1} - 2)y_{n-2} \Rightarrow y_n = \sqrt{\frac{y_{n+2} - 2}{y_{n+1} - 2}}.$$

于是结合  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = +\infty$  我们有

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{y_n}\right) &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{y_n - 1}{y_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_{n+1} - 2}{y_{n+2} - 2}}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^m \left(\frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_{n+1} - 2}{y_{n+2} - 2}}\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+1} + 1}{y_0 + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_1 - 2}{y_{m+2} - 2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+1} + 1}{\sqrt{y_{m+1}^2 - 4}} \cdot \frac{\sqrt{y_0^2 - 4}}{y_0 + 1} = \frac{\sqrt{y_0^2 - 4}}{y_0 + 1}. \end{aligned}$$

□

#### 2.6.8.4 母函数法求通项

**例题 2.94** 设  $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}, n \geq 1, a_0 > 0, a_1 > 0$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ .

**注** 本题采用单调有界只能证明极限存在, 而并不能算出来极限值:

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{2n^2a_{n-1} - (2n+1)(n+1)a_n}{n^2(n+1)^3} < 0$$

**证明** 这类线性递推数列问题采用母函数方法是无敌的, 因为能求出来通项公式. 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  则根据条件有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}\right) x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_1 + x f'(x) + f(x) - a_0 + 2x f(x) \\ &\Rightarrow f'(x) + \frac{2x+1}{1-x} f(x) = \frac{a_1 - a_0}{1-x}, f(0) = a_0, f'(0) = a_1 \end{aligned}$$

这是一阶线性微分方程, 容易求出

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 5}{(1-x)^3} \frac{a_1 - a_0}{4} + \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \frac{9a_0 - 5a_1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

然后对左边这两个函数 (先不看系数) 做泰勒展开, 关注  $x^n$  前面的  $n^2$  项系数, 就对应极限.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n \\ \frac{2x^2 - 6x + 5}{(1-x)^3} &= (2x^2 - 6x + 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2}) x^n \\ b_n &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow 5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2} = \frac{1}{2} n^2 + O(n) \end{aligned}$$

由此可见第一部分对应着极限  $\frac{a_1 - a_0}{8}$ , 然后算第二部分

$$\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m!} x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{(-2)^m}{m!} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^k$$

所以每一个  $x^m$  项相应的系数是

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{k!} \frac{(k+2-k)(k+1-k)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{k!} (m - (k-1))(m - (k-2))$$

由 Stolz 公式和  $e^x$  的无穷级数展开式可得, 对应的极限为

$$\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{k!} (m^2 - (2k-3)m + (k-1)(k-2))}{m^2} = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{k!} = \frac{1}{2e^2}$$

这是因为括号里面的  $m$  一次项和常数项部分, 对应的求和的极限是零, 由 stolz 公式是显然的. 所以第二部分提供了  $\frac{9a_0 - 5a_1}{8e^2}$ , 最终所求极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_1 - a_0}{8} + \frac{9a_0 - 5a_1}{8e^2}$ .  $\square$

### 2.6.8.5 强求通项和强行裂项

若数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$  满足下列递推条件之一:

1.  $a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \dots$ ;

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = A$ .

则我们都可以考虑对  $a_n$  进行强行裂项和强求通项, 从而可以将  $a_n$  写成关于  $b_n, d_n$  或  $A, d_n$  的形式, 进而将题目条件和要求进行转化.

#### 命题 2.24 (强求通项和强行裂项)

(1) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$  满足递推条件:

$$a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \dots, \quad (2.73)$$

则令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 一定有

$$a_n = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots$$

(2) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$  满足递推条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = A, \quad (2.74)$$



则令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 再令  $b_0 = 1, b_n = a_n - \frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A,$$

$$a_n = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots$$

**注** 此时只能都对  $a_n$  进行强行裂项和强求通项,  $b_n$  和  $d_n$  都无法通过这种方法强行裂项和强求通项!

**笔记** 也可以通过观察原数列  $a_n$  的递推条件直接得到需要构造的数列, 从而将  $a_n$  强行裂项和强求通项. 具体可见例题 2.95 解法一. (1) 的具体应用可见例题 2.96 笔记; (2) 的具体应用可见例题 2.95 笔记.

**证明** (强行裂项和强求通项的具体步骤)

(1) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件(2.73)式, 则令  $c_0 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ , 由递推条件(2.73)式可得

$$c_n a_n = c_n d_n a_{n-1} + c_n b_n, n = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

我们希望  $c_n d_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{d_n}, n = 2, 3, \dots$ . 从而  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 1, 2, \dots$ , 且

该式对  $n = 0$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 则由(2.75)式可知

$$c_n a_n = c_n d_n a_{n-1} + c_n b_n \Rightarrow c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1} = c_n b_n, n = 1, 2, \dots$$

于是

$$a_n = \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项, 并将  $a_n$  写成了关于  $b_n, d_n$  的形式.

(2) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件(2.74)式, 则令  $c_0 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ , 由递推条件(2.74)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_n d_n a_{n-1}}{c_n} = A. \quad (2.76)$$

我们希望  $c_n d_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{d_n}, n = 2, 3, \dots$ . 从而  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 1, 2, \dots$ , 且

该式对  $n = 0$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 则由(2.76)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_n d_n a_{n-1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = A. \quad (2.77)$$

于是令  $b_0 = 1$ , 待定  $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 即  $b_n = \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = a_n - \frac{c_{n-1} a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ . 因此, 令  $b_0 = 1, b_n = a_n - \frac{c_{n-1} a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 则  $b_n$  满足

$$c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}, n = 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

并且由(2.77)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = A.$$


从而由(2.78)式可得

$$a_n = \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项.

□

**例题 2.95** 设  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, |\lambda| < 1$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

 **笔记 解法二** 构造数列  $c_n, b_n$  的思路: 待定数列  $c_n$  且  $c_0 = 1$ , 由条件可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - \lambda c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = a$ . 希望  $c_{n-1} = \lambda c_n$ ,

即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{\lambda}$ , 等价于  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{1}{\lambda^n}$ . 该式对  $n=0$  也成立. 于是令  $c_n = \frac{1}{\lambda^n}$ , 则由条件可知

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - \lambda c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n}$$

从而待定  $b_n$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ , 即  $\frac{b_n}{\lambda^n} = \frac{a_n}{\lambda^n} - \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}} = \frac{a_n - \lambda a_{n-1}}{\lambda^n}$ . 于是令  $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}$ , 则由条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] \\ &= \frac{1}{c_n} \left( \sum_{k=1}^n c_k b_k + c_0 a_0 \right) = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n. \end{aligned}$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项. 后续计算极限的方法与解法一相同.

**解 解法一** (通过观察直接构造出裂项数列  $b_n$ ): 当  $\lambda = 0$  问题时显然的, 当  $\lambda \neq 0$ , 记  $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 我们有

$$\frac{b_n}{\lambda^n} = \frac{a_n - \lambda a_{n-1}}{\lambda^n} = \frac{a_n}{\lambda^n} - \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}}, n = 1, 2, \dots$$

上式对  $n = 1, 2, \dots$  求和得

$$a_n = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n, n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

由于  $|\lambda| < 1$ , 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \lambda^n = 0$ . 于是由 Stolz 定理, 可知当  $\lambda > 0$  时, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}} - \frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

当  $\lambda < 0$  时 (此时分母  $\frac{1}{\lambda^n}$  不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于 (2.79) 式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{b_k}{\lambda^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}} + \frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+2} + \lambda b_{2n+1}}{1 - \lambda^2} = \frac{a + \lambda a}{1 - \lambda^2} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

对于 (2.79) 式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} - \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} \xrightarrow{\text{因为偶子列的极限}} \frac{a}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

因此无论如何我们都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{1 - \lambda}$ .

**解法二** (强求通项和强行裂项的标准解法): 令  $c_n = \frac{1}{\lambda^n}, n = 0, 1, \dots, b_n = a_n - \lambda a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 则由条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] \\ &= \frac{1}{c_n} \left( \sum_{k=1}^n c_k b_k + c_0 a_0 \right) = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n. \end{aligned} \quad (2.80)$$

由于  $|\lambda| < 1$ , 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \lambda^n = 0$ . 于是由 Stolz 定理, 可知当  $\lambda > 0$  时, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}} - \frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

当  $\lambda < 0$  时 (分母  $\frac{1}{\lambda^n}$  不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 而我们发现其奇偶子列恰好严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于 (2.80) 式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{b_k}{\lambda^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}} + \frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+2} + \lambda b_{2n+1}}{1 - \lambda^2} = \frac{a + \lambda a}{1 - \lambda^2} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

对于 (2.80) 式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} - \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} \xrightarrow{\text{因为偶子列的极限}} \frac{a}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{1-\lambda}.$$

因此无论如何我们都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$ . □

**例题 2.96** 设  $a_1 = 2, a_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} a_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 2$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  存在.

 **笔记** 构造数列  $c_n, b_n$  的思路: 待定数列  $c_n$  且  $c_1 = 1$ , 由条件可得  $c_n a_n = \frac{n+1}{2n} c_n a_{n-1} + \frac{c_n}{n}$ , 希望  $c_n$  满足  $\frac{n+1}{2n} c_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n+1}{n}$ , 等价于  $c_n = \prod_{k=2}^n \frac{2k}{k+1} = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}$  且该式对  $n = 1$  也成立. 于是令  $c_n = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}$ , 则由条件可知

$$c_n a_n = \frac{n+1}{2n} c_{n-1} + \frac{c_n}{n} = c_{n-1} a_{n-1} + \frac{c_n}{n}, n = 2, 3, \dots$$

于是待定  $b_n$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ , 即  $c_n b_n = \frac{1}{n}$ . 从而令  $b_n = \frac{1}{n}$ , 则  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 因此对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{c_m} (c_m a_m - c_1 a_1 + c_1 a_1) = \frac{1}{c_m} \left[ \sum_{n=1}^m (c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}) + c_1 a_1 \right] \\ &= \frac{1}{c_m} \left( \sum_{n=1}^m c_n b_n + c_1 a_1 \right) = \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} + 2 \right). \end{aligned}$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项. 后续再利用 Stolz 定理计算极限即可.

**证明** 令  $c_n = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}, b_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , 则由条件可知  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 从而对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$c_m a_m - 2 = c_m a_m - c_1 a_1 = \sum_{n=2}^m (c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{n} = \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!},$$

从而

$$a_m = \frac{1}{c_m} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right) = \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right).$$

再由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m a_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!}}{\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}} \\ &\xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}}{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!} - \frac{(2m)!!}{m(m+1)!}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2m+2}{m+1}}{\frac{2m+2}{m+1} - \frac{m+2}{m}} = \frac{2}{2-1} = 2. \end{aligned}$$

□

**例题 2.97** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  存在, 令

$$a_{n+1} = b_n - \frac{na_n}{2n+1},$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

**笔记** 构造数列  $c_n$  的思路: 令  $c_1 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , 由条件可知  $c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n - \frac{n}{2n+1}c_{n+1}a_n$ . 希望  $-\frac{n}{2n+1}c_{n+1} = c_n$ , 则  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{2n+1}{n}$ , 从而

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{2k+1}{k} \right) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$$

该式对  $n=1$  也成立. 因此令  $c_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$ , 则由条件可知

$$c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n + c_na_n \Rightarrow c_{n+1}a_{n+1} - c_na_n = c_{n+1}b_n$$

从而

$$a_n = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=2}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_1 a_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=2}^n c_k b_{k-1} + c_1 a_1 \right]$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项.

**注** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  的思路分析: 如果此时我们将(2.81)中的  $\frac{(2n+1)!!}{n!}$  看作分母, 将  $(-1)^n$  放到分子上, 那么由 Wallis 公式可知分母严格单调递增趋于  $+\infty$ , 此时  $a_n$  满足 Stolz 定理条件. 但是使用一次 Stolz 定理后我们并不能直接得到结果, 并且此时  $(-1)^n$  仍未消去. 因此我们不采用这种处理方式.

如果此时我们将(2.81)中的  $\frac{(-1)^n (2n+1)!!}{n!}$  看作分母, 则由于  $(-1)^n$  的振荡性, 导致这个分母不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此我们可以分奇偶子列进行讨论.

**证明** 令  $c_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则由条件可知

$$c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n - \frac{n}{2n+1}c_{n+1}a_n = c_{n+1}b_n + c_na_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而  $c_{n+1}a_{n+1} - c_na_n = c_{n+1}b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ . 于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1}a_{k+1} - c_k a_k) + c_1 a_1 \right] = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n c_{k+1}b_k + c_1 a_1 \right] \\ &= \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n c_{k+1}b_k + a_1 \right] = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right], \quad n \in \mathbb{N}_+. \end{aligned} \quad (2.81)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

由 Wallis 公式可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

从而我们有

$$\frac{n!}{(2n+1)!!} = \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)2^n(2n-1)!!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{n2^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.82)$$

于是由(2.81)(2.82)式以及 Stolz 定理和  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  可知, 一方面, 考虑  $\{a_n\}$  的奇子列, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} (2n)!}{(4n+1)!!} \left[ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} + a_1 \right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} \right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \frac{(4n+1)!!}{(2n)!} b_{2n} - \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} b_{2n-1} \right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n} - 2^{2n-1}\sqrt{2n-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{2^{2n+1} \sqrt{n} - 2^{2n-1} \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \sqrt{2n-1} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{2^{2n+1} \sqrt{n} - 2^{2n-1} \sqrt{n-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{4\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{4\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{4 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \cdot (2b - b) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot b = \frac{2}{3}b.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

另一方面, 考虑  $\{a_n\}$  的偶子列, 我们有


$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n-1} (2n-1)!}{(4n-1)!!} \left[ \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} + a_1 \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1}} \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!} b_{2n-2} - \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} b_{2n-1} \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} \\
&= -\sqrt{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!} (b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1})}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} \sqrt{2n-2} (b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1})}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} \\
&= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-2} (b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1})}{4\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}} = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-2}}{4\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1} \right) \\
&= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{2}{n}}}{4\sqrt{2 - \frac{1}{n}} - \sqrt{2 - \frac{3}{n}}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot (-b) = \frac{2}{3}b.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

故由(2.83)(2.84)式, 再结合子列极限命题(b)可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \frac{2}{3}b.$$

□

**例题 2.98** 设  $a_n, b_n > 0, a_1 = b_1 = 1, b_n = a_n b_{n-1} - 2, n \geq 2$  且  $b_n$  有界, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$ .

 **笔记** 构造数列  $c_n$  的思路: 观察已知的数列递推条件:  $b_n = a_n b_{n-1} - 2$ , 可知我们只能对  $b_n$  进行强行裂项和强求通项. 于是令  $c_1 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , 则由条件可知  $c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2$ . 希望  $a_n c_n = c_{n-1}$ , 则  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{a_n}$ ,

从而  $c_n = \prod_{k=2}^n \frac{1}{a_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ . 该式对  $n=1$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ , 则由条件可知

$$c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n = c_{n-1} b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2.$$

于是

$$c_n b_n - c_{n-1} b_{n-1} = -2c_n, n \geq 2.$$

故

$$b_{n+1} = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1} b_{k+1} - c_k b_k) + c_1 b_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^n c_k \right).$$

这样就完成了对  $b_n$  的强行裂项和强求通项, 而我们发现  $\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  恰好就是题目要求的数列极限.

**证明** 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ , 则由条件可知  $c_n > 0$ , 且

$$c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n = c_{n-1} b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2.$$

于是

$$c_n b_n - c_{n-1} b_{n-1} = -2c_n, n \geq 2.$$

故

$$b_{n+1} = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1}b_{k+1} - c_k b_k) + c_1 b_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^n c_{k+1} \right), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \sum_{k=1}^n c_k = 1 + \sum_{k=1}^n c_{k+1} = 1 + \frac{1 - b_{n+1} c_n}{2} = \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (2.85)$$

由于  $a_n, b_n, c_n > 0$ , 再结合(2.85)式, 可知  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  单调递增且  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2} \leq \frac{3}{2}$ , 因此

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  一定存在. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . 从而再结合(2.85)式和  $b_n$  有界可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

□

## 2.6.9 递推数列综合问题

再次回顾命题 2.2 的想法. 这个想法再解决递推数列问题中也很常用.

**例题 2.99** 设  $a_n, b_n \geq 0$  且  $a_{n+1} < a_n + b_n$ , 同时  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 证明:  $a_n$  也收敛.

**注** 不妨设  $m_k > n_k$  的原因: 由假设  $a_n$  不收敛可知, 存在  $\delta > 0$ , 对  $\forall N > 0$ , 都存在  $m \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_m - A| \geq \delta$ . 从而

取  $N = n_1 > 0$ , 则存在  $m_1 \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{m_1} - A| \geq \delta$ .

取  $N = n_2 > 0$ , 则存在  $m_2 \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{m_2} - A| \geq \delta$ .

.....

取  $N = n_k > 0$ , 则存在  $m_k \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{m_k} - A| \geq \delta$ .

.....

这样就得到了一个子列  $\{a_{m_k}\}$  满足对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $m_k > n_k$  且  $|a_{m_k} - A| \geq \delta$ .

**证明** 由  $a_{n+1} < a_n + b_n$  可得

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) < a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i, \forall n \geq 2. \quad (2.86)$$

又  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 故对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $\sum_{i=1}^n b_i$  有界. 再结合 (2.86) 式可知,  $a_n$  也有界. 由聚点定理可知, 存在一个收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A < \infty$ .

(反证) 假设  $a_n$  不收敛, 则存在  $\delta > 0$  和一个子列  $\{a_{m_k}\}$ , 使得

$$|a_{m_k} - A| \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

不妨设  $m_k > n_k, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 此时分两种情况讨论.

(i) 如果有无穷多个  $k$ , 使得  $a_{m_k} \geq A + \delta$  成立. 再结合条件可得, 对这些  $k$ , 都有

$$a_{m_k} - a_{n_k} = \sum_{i=n_k}^{m_k-1} (a_{i+1} - a_i) < \sum_{i=n_k}^{m_k-1} b_i, \quad (2.87)$$

$$a_{m_k} - a_{n_k} = (a_{m_k} - A) + (A - a_{n_k}) \geq \delta + (A - a_{n_k}). \quad (2.88)$$

又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛和  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ , 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n_k}^{m_k-1} b_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (A - a_{n_k}) = 0.$$

于是对 (2.87)(2.88) 式两边同时令  $k \rightarrow \infty$ , 得到

$$0 < \delta \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{m_k} - a_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n_k}^{m_k-1} b_i = 0.$$

上述不等式矛盾.

(ii) 如果有无穷多个  $k$ , 使得  $a_{m_k} \leq A - \delta$  成立. 取  $\{a_{n_k}\}$  的一个子列  $\{a_{t_k}\}$ , 使得  $t_k > m_k, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ . 再结合条件可得, 对这些  $k$ , 都有

$$a_{t_k} - a_{m_k} = \sum_{i=m_k}^{t_k-1} (a_{i+1} - a_i) < \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i, \quad (2.89)$$

$$a_{t_k} - a_{m_k} = (a_{t_k} - A) + (A - a_{m_k}) \geq (a_{t_k} - A) + \delta. \quad (2.90)$$

又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛和  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{t_k} = A$ , 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{t_k} - A) = 0.$$

于是对 (2.89)(2.90) 式两边同时令  $k \rightarrow \infty$ , 得到

$$0 < \delta \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{t_k} - a_{m_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i = 0.$$

上述不等式矛盾. 结论得证.  $\square$

**例题 2.100** 设  $a_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right), a_1 = 1$ , 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  存在.

 **笔记** 本题证明的思路分析:

注意到递推函数  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $a_1 = 1 > 0$ . 因此直接利用单调分析法归纳证明  $\{a_n\}$  单调有界且  $a_n \in (0, 1]$ . 进而得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 再利用 **命题 2.2** 将  $2^n a_n$  转化为级数的形式. 因为递推函数与  $\ln$  有关, 所以我们考虑作差转换, 即

$$2^{n+1} a_{n+1} = \sum_{k=1}^n (2^{k+1} a_{k+1} - 2^k a_k) = \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln\left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k}\right) - \frac{1}{2} a_k \right).$$

因此我们只需证明级数  $\sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln\left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k}\right) - \frac{1}{2} a_k \right)$  收敛即可. 考虑其通项  $2^{n+1} \left( \ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n \right)$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 因此利用 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n &= \ln \frac{a_n + \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)}{a_n} - \frac{1}{2} a_n = \ln \left( 1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2) \right) - \frac{1}{2} a_n \\ &= \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2) - \left( \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2) \right)^2 + o(a_n^2) - \frac{1}{2} a_n = \frac{a_n^2}{24}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故当  $n$  充分大时, 我们有

$$2^{n+1} \left( \ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n \right) = \frac{1}{24} 2^{n+1} a_n^2.$$

于是我们只须证级数  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{24} 2^{k+1} a_k^2$  收敛即可. 因此我们需要找到一个收敛级数  $\sum_{k=1}^n c_n$ , 使得  $2^{n+1} a_n^2$  被这个收敛级

数的通项  $c_n$  控制, 即当  $n$  充分大时, 有

$$2^{n+1}a_n^2 \leq c_n.$$

又题目要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  存在, 说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  一定存在, 从而一定有

$$a_n \sim \frac{c}{2^n}, n \rightarrow \infty, \quad (2.91)$$

其中  $c$  为常数. 虽然无法直接证明 (2.91) 式, 但是 (2.91) 式给我们提供了一种找  $c_n$  的想法. (2.91) 式表明  $a_n$  与几何级数的通项近似, 于是一定存在  $\lambda \in (0, 1)$ , 使得  $a_n \approx \frac{c}{2^n} \leq c_0 \lambda^n, n \rightarrow \infty$ . 其中  $c_0$  为常数. 从而

$$2^{n+1}a_n^2 \leq c_0^2 2^{n+1} \lambda^{2n} = c_1 (2\lambda^2)^n, n \rightarrow \infty.$$

故我们只需要保证  $\sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda^2)^n$  收敛, 就能由级数的比较判别法推出  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{24} 2^{n+1} a_n^2$  收敛. 因此我们待定  $\lambda \in (0, 1)$ , 使

得  $\sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda^2)^n$  恰好就是一个几何级数. 于是  $2\lambda^2 < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 故我们只要找到一个恰当的  $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 使得

$$a_n \leq c_0 \lambda^n, n \rightarrow \infty. \quad (2.92)$$

其中  $c_0$  为常数, 即可. 我们需要与已知的递推条件联系起来, 因此考虑

$$a_{n+1} \leq c_0 \lambda^{n+1}, n \rightarrow \infty. \quad (2.93)$$

又  $a_n \in (0, 1]$ , 显然将 (2.92) 与 (2.93) 式作商得到

$$a_n \leq c_0 \lambda^n, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{f(a_n)}{a_n} \leq \lambda, n \rightarrow \infty$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 故上式等价于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \leq \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} \leq \lambda$$

注意到  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x} = \frac{1}{2}$ , 所以任取  $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  即可. 最后根据上述思路严谨地书写证明即可.

(注: 也可以利用  $f(x)$  的凸性去找  $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 见下述证明过程.)

**证明** 令  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ , 注意到对  $\forall x > 0$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) < x &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < x \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} < e^x \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{t} > 1 - t, \text{ 其中 } t = \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln t < t - 1, \text{ 其中 } t = \frac{1}{x} > 0. \end{aligned}$$

上式最后一个不等式显然成立. 因此

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < x, \forall x > 0. \quad (2.94)$$

由  $e^x - 1 > x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) > \ln 1 = 0, \forall x > 0. \quad (2.95)$$

从而由 (2.94)(2.95) 式及  $a_1 = 1$ , 归纳可得  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$a_{n+1} = f(a_n) < a_n, \quad a_{n+1} = f(a_n) > 0.$$

故数列  $\{a_n\}$  单调递减且有下界 0. 于是  $a_n \in (0, 1]$ , 并且由单调有界原理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in [0, 1]$ . 对  $a_{n+1} =$

$\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$A = \ln\left(\frac{e^A-1}{A}\right) \Leftrightarrow Ae^A = e^A - 1 \Leftrightarrow (1-A)e^A = 1.$$



显然上述方程只有唯一解:  $A = 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 下面证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  存在. 由  $a_{n+1} = \ln \left( \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right)$  可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$2^{n+1} a_{n+1} - 2^n a_n = 2^{n+1} \left[ \ln \left( \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2} a_n \right].$$

从而

$$2^{n+1} a_{n+1} = 2a_1 + \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln \left( \frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2} a_k \right) = 2 + \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln \left( \frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2} a_k \right), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

故要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$  存在, 即证  $\sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln \left( \frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2} a_k \right)$  收敛. 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{2}x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} - \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) - \frac{1}{2}x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{24} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{24} < 1, \end{aligned}$$

再结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  可得,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2} a_n}{a_n^2} = \frac{1}{24} < 1$ . 故存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$\ln \left( \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2} a_n < a_n^2, \forall n > N. \quad (2.96)$$

由  $f(x) = \ln \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$  可知,  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ . 注意到对  $\forall x \in (0, 1]$ , 都有

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln^2 t} > \frac{t}{(t - 1)^2}, \text{ 其中 } t = e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow \ln t < \frac{t - 1}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ 其中 } t = e^x > 1 \end{aligned}$$

而上式最后一个不等式显然成立(见关于  $\ln$  的常用不等式 (2)). 故  $f''(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$ . 故  $f$  在  $(0, 1]$  上是下凸函数. 从而由下凸函数的性质(切割线放缩)可得,  $\forall x \in (0, 1]$ , 固定  $x$ , 对  $\forall y \in (0, x)$ , 都有

$$f'(y)x \leq f(x) \leq [f(1) - f(y)]x = [\ln(e - 1) - f(y)]x. \quad (2.97)$$

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{e^y - 1}{y} \right) = \ln \left( \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \right) = \ln 1 = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} f'(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^y}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y(y - 1) + 1}{y(e^y - 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2))(y - 1) + 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是令 (2.97) 式  $y \rightarrow 0^+$ , 得到

$$\frac{1}{2}x = \lim_{y \rightarrow 0^+} f'(y)x \leq f(x) \leq [\ln(e - 1) - \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y)]x = x \ln(e - 1), \forall x \in (0, 1].$$

又  $a_n \in (0, 1]$ , 故

$$\frac{1}{2}a_n \leq a_{n+1} = f(a_n) \leq \ln(e - 1)a_n, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ln(e - 1) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (2.98)$$

因此

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq [\ln(e-1)]^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (2.99)$$

于是结合 (2.96)(2.99) 式可得对  $\forall n > N$ , 我们有

$$2^{n+1} \left( \ln \left( \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2} a_n \right) < 2^{n+1} a_n^2 \leq 2^{n+1} [\ln(e-1)]^{2n-2} = \frac{2}{\ln^2(e-1)} [2 \ln^2(e-1)]^n.$$

又由 (2.98) 式可知,  $2 \ln^2(e-1) < 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$ . 故  $\sum_{k=1}^n \frac{2}{\ln^2(e-1)} [2 \ln^2(e-1)]^k$  收敛. 从而由比较判别法知,  $\sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left( \ln \left( \frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2} a_k \right)$

$\forall$  也收敛. 结论得证.  $\square$

**例题 2.101 Herschfeld 判别法** 设  $p > 1$ , 令  $a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}}$ ,  $b_n > 0$ , 证明: 数列  $a_n$  收敛等价于数列  $\frac{\ln b_n}{p^n}$  有界.

**注** 这个很抽象的结果叫做 Herschfeld 判别法, 但是证明起来只需要单调有界.

**证明** 由条件可知  $a_2 > a_1$ , 假设  $a_n > a_{n-1}$ , 则由  $b_n > 0$  可得

$$a_{n+1} = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n + \sqrt[p]{b_{n+1}}}}} > \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} = a_n.$$

由数学归纳法可知  $\{a_n\}$  单调递增.

若  $a_n$  收敛, 则由单调有界定理可知,  $a_n$  有上界. 即存在  $M > 0$ , 使得  $a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而

$$M > a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} > \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} = b_n^{\frac{1}{p^n}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

故

$$\frac{\ln b_n}{p^n} = \ln b_n^{\frac{1}{p^n}} < \ln M, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即  $\frac{\ln b_n}{p^n}$  有界.

若  $\frac{\ln b_n}{p^n}$  有界, 则存在  $M_1 > 0$ , 使得

$$\frac{\ln b_n}{p^n} < M_1, \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (2.100)$$

记  $C = e^{M_1}$ , 则由 (2.100) 式可得

$$b_n < e^{M_1 p^n} = C^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} < \sqrt[p]{C^{p^1} + \sqrt[p]{C^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{C^{p^n}}}} = C \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}. \quad (2.101)$$

考虑数列  $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 显然  $x_n > 0$ , 记  $f(x) = \sqrt[p]{1+x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{p} (1+x)^{\frac{1}{p}-1} < \frac{1}{p} < 1, \forall x > 0.$$

而显然  $f(x) = x$  有唯一解  $a > 1$ , 从而由 Lagrange 中值定理可得  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $\xi_n \in (\min\{x_n, a\}, \max\{x_n, a\})$ , 使得

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = f'(\xi_n) |x_n - a| < \frac{1}{p} |x_n - a|.$$

于是

$$|x_{n+1} - a| < \frac{1}{p} |x_n - a| < \frac{1}{p^2} |x_{n-1} - a| < \cdots < \frac{1}{p^n} |x_1 - a| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

故  $x_n$  收敛到  $a$ , 因此  $x_n$  有界, 即存在  $K$ , 使得  $x_n < K, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 于是结合 (2.101) 可得

$$a_n = C \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} = C x_n < CK, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即  $a_n$  有界, 又因为  $\{a_n\}$  单调递增, 所以由单调有界定理可知,  $a_n$  收敛.  $\square$

**引理 2.1** (有界数列差分极限为 0 则其闭包一定是闭区间)

有界数列  $x_n$  如果满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 则  $x_n$  的全体聚点构成一个闭区间 (且这个闭区间的端点就是数列的上下极限).



**笔记** 先根据条件直观地画图分析, 分析出大致的思路后, 再考虑严谨地书写证明.

**证明** 当数列  $x_n$  收敛时,  $x_n$  的聚点集为单点集, 结论显然成立.

当数列  $x_n$  不收敛时, 因为数列  $x_n$  有界, 所以可设  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = L < \infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = l < L$ . 假设  $\exists A \in (l, L)$ , 使得  $A$  不是  $x_n$  的极限点. 则  $\exists \delta \in (0, \min\{L - A, A - l\})$ , 使得区间  $(A - \delta, A + \delta) \subseteq (l, L)$  中只包含了数列  $x_n$  中有限项. 因此存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_1$  时, 有  $|x_n - A| \geq \delta$ . 即

$$\text{当 } n > N_1 \text{ 时, 要么 } x_n \geq A + \delta, \text{ 要么 } x_n \leq A - \delta. \quad (2.102)$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  可知, 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|x_{n+1} - x_n| < \delta, \forall n > N_2. \quad (2.103)$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . 由  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  和  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  可知, 对  $\forall \varepsilon \in \left(0, \min\{L - A - \delta, A - l - \delta, \frac{L - l}{2}\}\right)$ , 存在子列  $\{x_{n_k}\}, \{x_{m_k}\}$ , 使得对  $\forall k \in \mathbb{N}_+ \cap (N, +\infty)$ , 都有

$$x_{m_k} < l + \varepsilon \leq A - \delta < A + \delta \leq L - \varepsilon < x_{n_k}.$$

任取  $K \in \mathbb{N}_+ \cap (N, +\infty)$ , 则  $x_{m_K} < l + \varepsilon \leq A - \delta < A + \delta \leq L - \varepsilon < x_{n_K}$ . 不妨设  $n_K > m_K$ , 则  $n_K > m_K \geq K > N$ . 现在考虑  $x_{m_K}, x_{m_K+1}, \dots, x_{n_K-1}, x_{n_K}$  这些项. 将其中最后一个小于等于  $A - \delta$  的项记为  $x_s$ , 显然  $n_K - 1 \geq s \geq m_K \geq K > N$ , 进而  $s + 1 \in [m_K + 1, n_K]$ , 于是  $x_{s+1} > A - \delta$ . 又因为  $s + 1 \geq m_K + 1 > K > N$ , 所以结合 (2.102) 可知,  $x_{s+1} \geq A + \delta$ . 因此  $|x_{s+1} - x_s| \geq 2\delta$ . 这与 (2.103) 式矛盾! 因此  $x_n$  的全体聚点构成一个闭区间  $[l, L]$ .  $\square$

**例题 2.102** 设连续函数  $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x_1 \in [0, 1], x_{n+1} = f(x_n)$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

**笔记** 先根据条件直观地画图分析, 分析出大致的思路后, 再考虑严谨地书写证明.

**注**  $x_{n_k} \rightarrow A \Rightarrow x_{n_{k+1}} \rightarrow A, k \rightarrow \infty$ . 但是  $x_{n_k} \rightarrow A \not\Rightarrow x_{n_{k+1}} \rightarrow A, k \rightarrow \infty$ .

**证明 必要性:** 如果  $x_n$  收敛, 则显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ .

**充分性:** 假设数列  $x_n$  不收敛. 设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = L, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 则由条件可知  $l < L$  且  $[l, L] \subseteq [0, 1]$ . 从而由引理 2.1 可知, 数列  $x_n$  的全体聚点构成一个闭区间  $[l, L]$ . 于是  $\forall A \in [l, L]$ , 则存在一个子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ . 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  可知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$ . 根据  $x_{n+1} = f(x_n)$  可得  $x_{n_{k+1}} = f(x_{n_k})$ , 令  $k \rightarrow \infty$ , 再结合  $f \in C[0, 1]$  可得

$$A = f(A), \forall A \in [l, L]. \quad (2.104)$$

因此取  $A = \frac{l+L}{2}$ , 这也是  $x_n$  的一个极限点, 从而令  $\varepsilon_0 = \frac{L-l}{2}$  存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$l = A - \varepsilon_0 < x_N < A + \varepsilon_0 = L.$$

即  $x_N \in [l, L]$ . 于是由  $x_{n+1} = f(x_n)$  及 (2.104) 式可得  $x_{N+1} = f(x_N) = x_N$ . 从而归纳可得  $x_n = x_N, \forall n \in \mathbb{N}_+ \cap (N, +\infty)$ . 显然此时  $x_n$  收敛到  $x_N$ , 这与  $x_n$  不收敛矛盾! 故数列  $x_n$  收敛.  $\square$

**例题 2.103** 设  $d$  为正整数, 给定  $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}, x_0, x_1, \dots, x_d \in (0, a-1)$ , 令  $x_{n+1} = x_n(a - x_{n-d}), n \geq d$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求极限.

**证明** 证明见 Isz(2024-2025) 数学类讲义的不动点与蛛网图方法部分.  $\square$

**例题 2.104** 设  $x_n$  满足当  $|i-j| \leq 2$  时总有  $|x_i - x_j| \geq |x_{i+1} - x_{j+1}|$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  存在.

**注** 仅凭  $|x_{n+1} - x_n|$  单调递减无法保证极限存在, 只能说明数列  $\frac{x_n}{n}$  有界, 但是完全有可能其聚点集合是一个闭区间, 所以  $|x_{n+2} - x_n|$  的递减性是必要的. 本题其实画图来看走势很直观.

**证明** 条件等价于  $|x_{n+1} - x_n|, |x_{n+2} - x_n|$  这两个数列都是单调递减的, 显然非负, 所以它们的极限都存在.

(i) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ , 则由 stolz 公式显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 0$ .

(ii) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , 则奇偶两个子列分别都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+2} - x_{2n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n+1}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} - x_{2n-1} = 0$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$ , 因此下面只需讨论  $|x_{n+1} - x_n|, |x_{n+2} - x_n|$  的极限都非零的情况.

不妨设  $|x_{n+1} - x_n|$  单调递减趋于 1 (如果极限不是 1 而是别的正数, 考虑  $kx_n$  这样的数列就可以了), 由于非负递减数列  $|x_{n+2} - x_n|$  的极限非零, 故存在  $\delta \in (0, 1)$  使得  $|x_{n+2} - x_n| \geq \delta$  恒成立.

(i) 如果  $x_n$  是最终单调的, 也就是说存在  $N$  使得  $n > N$  时  $x_{n+1} - x_n$  恒正或者恒负, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 1$  或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = -1$ , 再用 stolz 公式可知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  存在.

(ii) 如果  $x_n$  不是最终单调的, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 1$ , 所以存在  $N$  使得  $n > N$  时恒有  $|x_{n+1} - x_n| \in \left[1, 1 + \frac{\delta}{2}\right]$ , 并且  $n > N$  时  $x_n$  不是单调的, 故存在  $n > N$  使得以下两种情况之一成立

$$(a): 1 \leq x_{n+1} - x_n \leq 1 + \frac{\delta}{2}, 1 \leq x_{n+1} - x_{n+2} \leq 1 + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x_{n+2} - x_n| \leq \frac{\delta}{2}.$$


$$(b): 1 \leq x_n - x_{n+1} \leq 1 + \frac{\delta}{2}, 1 \leq x_{n+2} - x_{n+1} \leq 1 + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x_{n+2} - x_n| \leq \frac{\delta}{2}.$$

可见不论哪种情况成立, 都会与  $|x_{n+2} - x_n| \geq \delta$  恒成立矛盾, 结论得证.  $\square$

**例题 2.105** 设四个正数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{t_n\}$  满足

$$t_n \in (0, 1), \sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{t_n} = 0, x_{n+1} \leq (1 - t_n)x_n + a_n + b_n$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

 **笔记** 这类问题直接强求通项即可.

**证明** 根据条件有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{(1-t_n) \cdots (1-t_1)} &\leq \frac{x_n}{(1-t_{n-1}) \cdots (1-t_1)} + \frac{a_n + b_n}{(1-t_n) \cdots (1-t_1)} \\ \frac{x_{n+1}}{(1-t_n) \cdots (1-t_1)} &\leq x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{(1-t_k) \cdots (1-t_1)} \\ x_{n+1} &\leq x_1(1-t_n) \cdots (1-t_1) + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(1-t_{k+1}) \cdots (1-t_n) \end{aligned}$$

换元令  $u_n = 1 - t_n \in (0, 1)$ , 则

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} t_n = -\infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} u_n = 0$$

代入有

$$x_{n+1} \leq x_1 u_1 u_2 \cdots u_n + \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n + \sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n$$

显然  $x_1 u_1 u_2 \cdots u_n \rightarrow 0$ , 于是只需要看后面两项. 对于最后一项, 我们待定正整数  $N \leq n$ , 则有

$$\sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n = \sum_{k=1}^N b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n + \sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n$$

其中  $\sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n \leq \sum_{k=N+1}^n b_k < \sum_{k=N}^{\infty} b_k$ , 于是对任意  $\varepsilon > 0$ , 可以取充分大的  $N$  使得  $\sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n < \varepsilon$ , 现在  $N$  已经取定, 再对前面有限项取极限有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n \leq \sum_{k=1}^N b_k \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n) + \varepsilon = \varepsilon$$

由此可见最后一项的极限是零, 最后来看中间一项, 记  $s_n = \frac{a_n}{t_n} = \frac{a_n}{1-u_n} \rightarrow 0$ , 则对任意  $N$  有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n &= \sum_{k=1}^n s_k (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n \\ &= \sum_{k=1}^N s_k (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n + \sum_{k=N+1}^n s_k (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n \\ \sum_{k=N+1}^n s_k (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n &\leq \sup_{k \geq N} s_k \sum_{k=N+1}^n (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n \leq \sup_{k \geq N} s_k \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k (1-u_k) u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_n + \sup_{k \geq N} s_k = \sup_{k \geq N} s_k \end{aligned}$$

再令  $N \rightarrow \infty$ , 由此可见这一部分的极限也是零, 结论得证.  $\square$

## 2.7 分部积分

分析学里流传着一句话: “遇事不决分部积分”.

分部积分在渐近分析中的用法:

- (1) 有时候分部积分不能计算出某一积分的具体值, 但是我们可以利用分部积分去估计原积分 (或原含参积分) 的范围. 并且我们可以通过不断分部积分来提高估计的精确程度.
- (2) 分部积分也可以转移被积函数的导数.
- (3) 分部积分可以改善阶. 通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计. 并且可以通过反复分部积分得到更加精细的估计.

### 定理 2.11 (Newton-Leibniz 公式)

1. 若  $f \in \mathbf{R}[a, b]$ , 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

2. 若函数  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

若函数  $f$  在  $(-\infty, a]$  上无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

若函数  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

### 定理 2.12 (分部积分公式)

1. 设函数  $u, v$  在  $[a, b]$  上连续可微, 则

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

2. 设函数  $u, v$  在  $[a, +\infty)$  上连续可微且极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$  存在. 若  $u'v$  和  $uv'$  中有一个在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 则另一个在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x) v(x) dx.$$

**注** 广义积分的分部积分公式形式上与常义积分的分部积分公式一样, 既可用于计算 (已知收敛的) 广义积分, 也能

用来证明广义积分收敛.

**例题 2.106**

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt.$$

证明  $|f(x)| \leq \frac{1}{x}, x > 0$ .

 **笔记** 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (1).

**证明** 由分部积分可得, 对  $\forall x > 0$ , 都有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt \right| = \left| \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right| = \left| -\frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} \cos u du - \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{(x+1)^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} du \right| + \left| \frac{\cos x}{2x} - \frac{\cos(x+1)}{2(x+1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(x+1)}{(x+1)} \right| \\ &= \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x[\cos x - \cos(x+1)] + \cos x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{x+1}{2} + \cos x}{2x(x+1)} \\ &\leq \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x+1}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.107** 设  $f(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{y} dy$ , 求  $f'(0)$ .

 **笔记** 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (3).

**解** 注意到

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy}{x} \stackrel{\text{令 } t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy, \quad (2.105)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy}{x} \stackrel{\text{令 } t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} t \int_t^{-\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy. \quad (2.106)$$

由分部积分可得

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = - \int_t^{+\infty} \frac{1}{y^2} d \cos y = \frac{\cos y}{y^2} \Big|_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \cos y d \frac{1}{y^2} = \frac{\cos t}{t^2} - 2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} dy.$$

故对  $\forall t > 0$ , 我们有

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy \right| = \left| \frac{\cos t}{t^2} - 2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} dy \right| \leq \frac{1}{t^2} + 2 \int_t^{+\infty} \frac{1}{y^3} dy = \frac{2}{t^2}.$$

即  $\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \forall t > 0$ . 再结合 (2.105) 式可知

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = 0.$$

同理可得  $f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t \int_t^{-\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = 0$ . 故  $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ .

□

**例题 2.108** 设  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数并满足  $0 \leq f(x) \leq x$ . 求证:

$$\int_0^1 f(x) dx - \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 x^2 f(x) dx \geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

并且上式成为等式当且仅当  $f(x) = x$ .

**证明** 设  $f$  是连续函数满足所给的条件,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F' = f$ . 由  $0 < f(x) \leq x$  得  $F(x) \leq \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$ . 因而

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \geq \int_0^1 2F(x)F'(x) dx = F^2(x) \Big|_0^1 = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 f(x) dx &= x^2 F(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x F(x) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2x F(x) dx \\
 &\leq \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2f(x) F(x) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx - F^2(x) \Big|_0^1 \\
 &= \int_0^1 f(x) dx - \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.
 \end{aligned}$$

由证明过程可知只有当  $f(x) = x$  时, 所证不等式成为等式. □

## 2.8 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如  $\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx, n \rightarrow \infty$  的渐近展开式, 其中  $f, g \in C[a, b]$  且  $g$  在  $[a, b]$  上有界; 或者  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$  的渐近展开式, 其中  $f, g \in C[a, b]$  且  $g$  在  $[a, b]$  上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx = \int_a^b e^{n \ln f(x)} g(x) dx.$$

若参变量  $n, x$  在积分区间上, 或者估计的不是  $n, x \rightarrow +\infty$  处的渐近展开式, 而是其他点处 ( $x \rightarrow x_0$ ) 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$ , 其中  $f, g \in C[a, b]$ .

思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有  $e^{f(x)}$ , 则积分得到的结果中一定仍含有  $e^{f(x)}$ ), 我们可以大致估计积分  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$  的结果是  $C_1 h_1(x) e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x) e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$ , 其中  $C$  为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是  $e^{f(x,b)}$  和  $e^{f(x,a)}$ . 而我们注意到到改变指数函数  $e^{p x + q}$  的幂指数部分的常数  $p$  会对这个指数函数的阶 ( $x \rightarrow +\infty$ ) 产生较大影响, 而改变  $q$  不会影响这个指数函数的阶. 比如,  $e^{2x}$  比  $e^x$  高阶 ( $x \rightarrow +\infty$ ). 由此我们可以发现  $e^{f(x,b)}$  和  $e^{f(x,a)}$  中的幂指数部分中  $f(x, a), f(x, b)$  中除常数项外的含  $x$  项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的  $f(x, y)$  和积分区间决定的, 但是在实际问题中  $f(x, y)$  的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间  $[a, b]$  上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量  $x$  固定时, 并且当积分区间为某一点  $y_0$  附近时, 只要被积函数的  $e^{f(x,y)}$  在  $y_0$  处 (关于  $y$ ) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与  $x$  轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在  $y_0$  附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量  $x$  固定时,  $f(x, y)$  (关于  $y$ ) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0 (余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 Taylor 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 Taylor 定理将主体部分的被积函数的指数部分  $f(x, y)$  在最大值点附近 (关于  $y$ ) 展开 (注意: 此时最多展开到  $x^2$  项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到  $\infty + \infty$  或  $0 \cdot \infty$  等这一类无效的结果). Taylor 展开之后,




我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 若原积分中的有界连续函数  $g(x)$  在  $f$  的极值点处不为 0, 则  $g(x)$  只会影响渐近展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理  $g(x)$  的方法: (i) 在余项部分, 直接将  $g(x)$  放缩成其在相应区间上的上界或下界即可. (ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在  $f(x, y)$  (关于  $y$ ) 的某些最大值点  $y_i$  的邻域内, 所以结合  $g(x)$  的连续性, 直接将  $g(x)$  用  $g(y_i)$  代替即可 (将  $g(x)$  放缩成  $g(y_i) \pm \varepsilon$  即可). 即相应的主体部分 ( $y_i$  点附近) 乘以  $g(x)$  相应的函数值  $g(y_i)$ . 具体例题见 [例题 2.117](#). 也可以采取拟合法处理  $g(x)$ , 具体例题见 [例题 2.118](#).

若原积分中的有界连续函数  $g(x)$  在  $f$  的极值点处为 0, 则在估计积分的阶的时候就要将  $g(x)$  考虑进去. 需要结合  $g(x)$  的具体结构、性质进行分析.

严谨的证明过程最好用上下极限和  $\varepsilon - \delta$  语言书写. 具体严谨的证明书写见例题: [例题 2.112](#), [例题 2.113](#), [例题 2.114](#), [例题 2.117](#).

 **笔记** Laplace 方法的思路蕴含了一些常用的想法: **分段估计**、**Taylor 定理估计**. 而严谨的证明书写也使用一些常用方法: **上下极限**、 **$\varepsilon - \delta$  语言**、**拟合法**.

**注** 上述 Laplace 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和技巧 (比如 *Puiseux* 级数展开 (见清疏讲义) 等).

**例题 2.109** 设  $a_1, a_2, \dots, a_m > 0, m \in \mathbb{N}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j.$$

**注** 熟知, 极限蕴含在  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的最大值中.

**证明** 显然


$$\max_{1 \leq j \leq m} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{1 \leq j \leq m} a_j^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \max_{1 \leq j \leq m} a_j \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j, \quad (2.107)$$

从而我们证明了 (2.107). □

**例题 2.110** 设非负函数  $f \in C[a, b]$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**注** 熟知, 极限蕴含在  $f$  的最大值中.

 **笔记** 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

**证明** 事实上记  $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x), x_0 \in [a, b]$ , 不失一般性我们假设  $x_0 \in (a, b)$ . 那么对充分大的  $n \in \mathbb{N}$ , 我们由积分中值定理知道存在  $\theta_n \in (x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n})$ , 使得

$$f(\theta_n) \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0) dx} = f(x_0) \sqrt[n]{b-a}. \quad (2.108)$$

两边取极限即得 (2.108). □

**例题 2.111** 设非负严格递增函数  $f \in C[a, b]$ , 由积分中值定理我们知道存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx.$$

计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**证明** 由 (上一题) [例题 2.110](#), 我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b-a}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = f(b).$$

注意到  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ , 我们知道对任何  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$ , 都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = f(b)$ . 又由于  $f$  为严格递增函数, 因此只能有  $c = b$ , 利用 [命题 1.1](#) 的 (a) (**Heine 归结原理**), 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . 证毕! □



## 定理 2.13 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (2.109)$$

注 我们只需要记住  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$  及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

 笔记 (2.109) 式等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \sqrt{\pi n} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}. \quad (2.110)$$

证明的想法是把(2.110)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

证明 我们只证明  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$ , 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \quad (2.111)$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln \sin^2 x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right], \quad (2.112)$$

即  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \frac{\ln \sin^2 x}{-(x - \frac{\pi}{2})^2} = -1$ . 于是利用(2.112), 对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 我们知道存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得对任何  $x \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}]$ , 都有

$$-(1+\varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \ln \sin^2 x \leq -(1-\varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (2.113)$$

利用(2.113)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n \ln \sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\varepsilon)y^2} dy \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}} e^{-z^2} dz \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx = \int_0^{\delta} e^{-n(1+\varepsilon)y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-z^2} dz.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

由  $\varepsilon$  任意性即可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(2.111)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sqrt{n}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1.$$

故  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$ . □

**例题 2.112** 求  $\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx, n \rightarrow \infty$  的等价无穷小.

**解** 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \ln \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right) \leq \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx = \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta e^{-n \ln \left(1+\frac{x^2}{2}\right)} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta e^{-n \left(\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2\right)} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} dx \right) \\ &\stackrel{\text{令 } y=x\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}}{=} \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy + \frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right) = \frac{1}{2^n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n \ln \left(1+\frac{x^2}{2}\right)} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n \left(\frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2\right)} dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=x\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}{=} \frac{1}{2^n \sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}.$$


再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

因此, 再结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx$ , 我们就有

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . 即  $\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{2^n \sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty$ . □

**例题 2.113** 求  $\int_0^x e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty$  的渐近估计 (仅两项).

 **笔记** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 所以实际上只需要估计

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-y^2} dy - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_x^\infty e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty.$$

**解** 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$2x - \varepsilon x \leq x^2 + 2x \leq 2x + \varepsilon x.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2 t - x^2} dt = x e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \\ &= x e^{-x^2} \left( \int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \right) \\ &\leq x e^{-x^2} \left( \int_0^\delta e^{-x^2(2t+\varepsilon t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t+2)} e^{-x^2 \delta} dt \right) \\ &= x e^{-x^2} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{(2+\varepsilon)x^2} + \frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2} \right) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right). \end{aligned}$$

于是就有

$$x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$  并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right) = \frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}$ .

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2 t - x^2} dt = x e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \\ &\geq x e^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt \geq x e^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(2t-\varepsilon t)} dt \\ &= x e^{-x^2} \cdot \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2 \delta}}{(2-\varepsilon)x^2}. \end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$  并取下极限得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2} = \frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1}{2}$ .

因此, 再结合  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy$ , 我们就有

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}$ , 即  $\int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$ .

因此  $\int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$ . □

**例题 2.114** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx$ .

**解** 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$-t - \varepsilon t \leq \ln(1 - \sin t) \leq -t + \varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx \stackrel{\text{令 } x=nt}{=} n \int_0^{10} (1 - |\sin t|)^n dt = n \int_0^{10} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &+ n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \\ &+ n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt. \end{aligned} \quad (2.114)$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned} & n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=\pi-t}{=} -n \int_\delta^0 e^{n \ln(1 - \sin(\pi-u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} n \int_0^\delta e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ & n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-2\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin(2\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du. \end{aligned}$$

从而

$$n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt.$$

同理,  $n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = n \int_{2\pi-\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt$ . 于是原积分(2.114)式可化为

$$\int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx = 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt.$$

进而,一方面我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx &= 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin t)} dt \\ &\leq 7n \int_0^\delta e^{n(-t+\varepsilon t)} dt + 3n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin \delta)} dt \\ &= 7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1-\sin \delta)}(\pi - 2\delta).\end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ 7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1-\sin \delta)}(\pi - 2\delta) \right] = \frac{7}{1-\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7$ .

另外一方面,我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx &= 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin t)} dt \\ &\geq 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt \geq 7n \int_0^\delta e^{n(-t-\varepsilon t)} dt = 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon + 1}\end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon + 1} = \frac{7}{\varepsilon + 1}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \frac{7}{\varepsilon + 1}$ .

因此,再结合  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx$ ,我们就有

$$7 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7$ . □

**例题 2.115** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1 - \frac{x}{2})^n (1 - \frac{x}{4})^n dx}{\int_0^1 (1 - \frac{x}{2})^n dx}$ .

**证明** 首先注意到

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \quad (2.115)$$

接着,由 Taylor 定理可知

$$\ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right) = -\frac{3}{4}x + o(x).$$

从而对  $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ , 都存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得

$$-\frac{3}{4}x - \varepsilon x \leq \ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right) \leq -\frac{3}{4}x + \varepsilon x, \forall x \in [-\delta, \delta].$$

于是,一方面,我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx = \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8})} dx \\ &\leq \int_0^\delta e^{n(-\frac{3}{4}x + \varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4}x + \varepsilon x)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{n\delta} e^{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)x} dx + e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} (1 - \delta) = -\frac{1}{(-\frac{3}{4} + \varepsilon)n} + e^{n(-\frac{3}{4} + \varepsilon)\delta} (1 - \delta).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right)} dx = \int_0^\delta e^{n \ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right)} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}\right)} dx \\ &\geq \int_0^\delta e^{n \left(-\frac{3}{4}x - \varepsilon x\right)} dx + \int_\delta^1 e^{n \left(-\frac{3}{4}x - \varepsilon x\right)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^{n\delta} e^{(-\frac{3}{4}-\varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n \left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)} dx \\ &= \frac{e^{(-\frac{3}{4}-\varepsilon)n\delta} - 1}{(-\frac{3}{4}-\varepsilon)n} + e^{n \left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)} (1 - \delta). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{e^{(-\frac{3}{4}-\varepsilon)n\delta} - 1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon} + ne^{n \left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)} (1 - \delta) \leq n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon} + ne^{n \left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)} (1 - \delta).$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$-\frac{1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 得


$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx = \frac{4}{3}.$$

故  $\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx = \frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . 于是再结合(2.115)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

**例题 2.116** 证明极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 \ln(1+x)x^{-n} dx}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} dx}$  存在并求其值.

 **笔记** 原式可写成  $\frac{\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n dx}{\int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx}$ , 求导可知  $\frac{\sin x}{x}$  和  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  在  $(0, 1]$  上单调递增, 故原式分子和分母的阶都集中在  $x=0$  处. 因为分母积分的被积函数除指数部分外,  $x$  在 0 处取值也为 0, 所以我们在估阶的时候需要将  $x$  也考虑进去. 利用 Laplace 方法估计分子、分母的阶, 但是此时  $\frac{\sin x}{x}$  和  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  在极值点  $x=0$  处间断, 故我们需要先对  $\frac{\sin x}{x}$  和  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  补充定义, 使相关函数光滑, 才能进行 Taylor 展开.

**证明** 由 Taylor 公式可知

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x} = \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \\ \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) &= \ln \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = \ln \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2). \end{aligned}$$

从而对  $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$ , 都存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{6} - \varepsilon x^2 &\leq \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \leq -\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2, \forall x \in [-\delta, \delta], \\ -\frac{x}{2} - \varepsilon x &\leq \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \leq -\frac{x}{2} + \varepsilon x, \forall x \in [-\delta, \delta]. \end{aligned}$$

于是另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx &= \int_0^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx = \int_0^\delta x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} dx \\ &\leq \int_0^\delta x e^{n \left(-\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2\right)} dx + \int_\delta^1 x e^{n \left(-\frac{x^2}{6} + \varepsilon x^2\right)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{(-\frac{1}{6}+\varepsilon)x^2} dx + \int_\delta^1 e^{n \left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)} dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty x e^{(-\frac{1}{6}+\varepsilon)x^2} dx + e^{n(-\frac{1}{6}+\varepsilon)\delta^2} (1-\delta) = -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}+\varepsilon)n} + e^{n(-\frac{1}{6}+\varepsilon)\delta^2} (1-\delta).$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx = \int_0^\delta e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx \\ &\leq \int_0^\delta e^{n(-\frac{x}{2}+\varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{x}{2}+\varepsilon x)} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^\delta e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\delta} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)x} dx + e^{n(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\delta} (1-\delta) = -\frac{1}{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)n} + e^{n(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\delta} (1-\delta). \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx &= \int_0^1 x e^{n \ln(\frac{\sin x}{x})} dx = \int_0^\delta x e^{n \ln(\frac{\sin x}{x})} dx + \int_\delta^1 x e^{n \ln(\frac{\sin x}{x})} dx \\ &\geq \int_0^\delta x e^{n(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2)} dx + \int_\delta^1 x e^{n(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}\delta} x e^{(-\frac{1}{6}-\varepsilon)x^2} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} dx \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^\infty x e^{(-\frac{1}{6}-\varepsilon)x^2} dx + e^{n(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} (1-\delta) = -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}-\varepsilon)n} + e^{n(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} (1-\delta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx &= \int_0^1 e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx = \int_0^\delta e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx + \int_\delta^1 e^{n \ln(\frac{\ln(1+x)}{x})} dx \\ &\geq \int_0^\delta e^{n(-\frac{x}{2}-\varepsilon x)} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{x}{2}-\varepsilon x)} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^\delta e^{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)x} dx + \int_\delta^1 e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)} dx \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)x} dx + e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)} (1-\delta) = -\frac{1}{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)n} + e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)} (1-\delta). \end{aligned}$$

因此, 我们就有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} + n e^{n(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} (1-\delta) &\leq n \int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \leq -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}+\varepsilon)} + n e^{n(-\frac{1}{6}+\varepsilon)\delta} (1-\delta), \\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} + n e^{n(-\frac{1}{2}-\varepsilon)} (1-\delta) &\leq n \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + n e^{n(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\delta} (1-\delta). \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}-\varepsilon)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx \leq -\frac{1}{2(-\frac{1}{6}+\varepsilon)} \\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx \leq -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \end{aligned}$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx = 2.$$

故

$$\int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \ln^n(1+x) x^{-n} dx}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^n dx}{\int_0^1 x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

**例题 2.117** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx}$ .



**笔记** 我们首先可以求解出被积函数带  $n$  次幂部分的最大值点即  $1-x^2+x^3$  的最大值点为  $x=0, 1$ . 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

**注** 注意由  $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x \rightarrow 1$ . 得到的是  $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x \rightarrow 1$ . 而不是.

**证明** 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3) = -x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x \rightarrow 1.$$

从而对  $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ , 存在  $\delta_1 \in (0, \frac{1}{10})$ , 使得

$$-x^2 - \varepsilon x^2 \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq -x^2 + \varepsilon x^2, \forall x \in (0, \delta_1);$$

$$x-1-\varepsilon(x-1) \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq x-1+\varepsilon(x-1), \forall x \in (1-\delta_1, 1).$$

设  $f \in C[0, 1]$  且  $f(0), f(1) > 0$ , 则由连续函数最大值、最小值定理可知,  $f$  在闭区间  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$  上都存在最大值和最小值. 设  $M_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x), M_2 = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f(x)$ . 又由连续性可知, 对上述  $\varepsilon$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon, \forall x \in [0, \delta_2];$$

$$f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon, \forall x \in [1-\delta_2, 1].$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \int_0^{\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &= \int_0^{\delta} e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &\leq (f(0) + \varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)} dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n dx \\ &= \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right), \end{aligned}$$

又易知  $1-x^2+x^3$  在  $[0, \frac{2}{3}]$  上单调递减, 在  $(\frac{2}{3}, 1]$  上单调递增. 再结合  $\delta < \frac{1}{10}$  可知,  $1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3 < 1-(\frac{1}{10})^2+(\frac{1}{10})^3 < 1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3$ . 从而当  $x \in (\frac{1}{2}, 1-\delta)$  时, 我们就有  $1-x^2+x^3 < 1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3 < 1$ . 进而可得

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} M_2 (1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3)^n dx + (f(1) + \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]} dx \\ &= M_2 (1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} (1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}). \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \sqrt{n} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right), \\ n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq n M_2 \left(\frac{3}{4} + (1-\delta)^3\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon} (1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}). \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}} (f(0) + \varepsilon), \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$



再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1)$ .

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_0^{\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^{\delta} e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\ &\geq (f(0) - \varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2 - \varepsilon x^2)} dx = \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\ &\geq (f(1) - \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]} dx = \frac{f(1) - \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}). \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\ n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1) - \varepsilon}{1+\varepsilon} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}). \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}} (f(0) - \varepsilon), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1) - \varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq f(1)$ .

因此, 我们就有

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0), \\ f(1) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1). \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = f(1)$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty; \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ .


从而当  $f \equiv 1$  时, 上式等价于  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ ; 当  $f(x) = \ln(x+2)$  时, 上式等价于  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx = \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \ln 2.$$

□

**例题 2.118** 设  $f \in R[0, 1]$  且  $f$  在  $x = 1$  连续, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = f(1).$$

 **笔记** 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 也可以用拟合法进行证明.

**证明** 由于  $f \in R[0, 1]$ , 因此存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$ . 于是对  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall \delta \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} & \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| = \left| n \int_0^1 [f(x) - f(1)] x^n dx \right| \\ & \leq n \int_0^1 |[f(x) - f(1)] x^n| dx = n \int_0^\delta |f(x) - f(1)| x^n dx + n \int_\delta^1 |f(x) - f(1)| x^n dx \\ & \leq n \int_0^\delta |M + f(1)| \delta^n dx + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_\delta^1 x^n dx \\ & \leq n |M + f(1)| \delta^{n+1} + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_0^1 x^n dx \\ & = n |M + f(1)| \delta^{n+1} + \frac{n}{n+1} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|. \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 并取上极限可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|, \quad \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据  $\delta$  的任意性, 令  $\delta \rightarrow 1^-$  可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 1^-} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)|.$$

又因为  $f$  在  $x = 1$  处连续, 所以  $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)| = 0$ . 故

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq 0.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(1) x^n dx = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = f(1)$ . □

**例题 2.119**  $f$  是  $[0, 1]$  上 Riemann 可积的函数, 且在  $x = 1$  处存在导数,  $f(1) = 0, f'(1) = -1$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

 **笔记** 本题也可以类似例题 2.118 用拟合法进行证明.

**证明** 由 Taylor 定理可知, 存在  $\delta \in (0, 1)$ , 对  $\forall x \in [\delta, 1]$ , 存在  $\theta \in (x, 1)$ , 使得

$$f(x) = f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 = 1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2.$$

记  $M \triangleq \sup_{[0, 1]} f, m \triangleq \inf_{[0, 1]} f$ , 则一方面, 我们有

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx &= n^2 \int_0^\delta x^n f(x) dx + n^2 \int_\delta^1 x^n f(x) dx \leq M n^2 \delta^n + n^2 \int_\delta^1 x^n \left[ 1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 \right] dx \\ &\leq M n^2 \delta^n + n^2 \int_0^1 \left[ x^n - x^{n+1} + \frac{f''(\theta)}{2}(x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n) \right] dx = M n^2 \delta^n + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^2 f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx \leq 1.$$

另一方面, 我们有

$$n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = n^2 \int_0^\delta x^n f(x) dx + n^2 \int_\delta^1 x^n f(x) dx \geq n^2 \min\{0, m\} \delta^n + n^2 \int_\delta^1 x^n \left[ 1-x + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 \right] dx$$

$$= n^2 \min\{0, m\delta^n\} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} - n^2 \left( \frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2} \right) + \frac{n^2 f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - n^2 \left( \frac{\delta^{n+3}}{n+3} - \frac{2\delta^{n+2}}{n+2} + \frac{\delta^{n+1}}{n+1} \right).$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx \geq 1.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

□

**例题 2.120 Poisson 核** 设  $f \in R[0, 1]$  且  $f$  在  $x = 0$  连续, 证明

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

**证明** 因为  $f \in R[0, 1]$ , 所以存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$ . 于是对  $\forall \delta \in (0, 1)$ , 固定  $\delta$ , 再对  $\forall t > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx \\ &= \int_0^\delta \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \int_0^\delta \frac{t}{x^2 + t^2} dx + \int_0^1 \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| dx \\ &= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \arctan \frac{x}{t} \Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| \\ &= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \cdot \arctan \frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)|. \end{aligned}$$

上式两边同时令  $t \rightarrow 0^+$  并取上极限, 可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)|, \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据  $\delta$  的任意性, 令  $\delta \rightarrow 0^+$  可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| = \frac{\pi}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)|.$$

又由于  $f$  在  $x = 0$  处连续, 从而  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0$ . 故

$$0 \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq 0.$$

因此  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx = f(0) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} f(0)$ . □

**例题 2.121 Fejer 核** 设  $f$  在  $x = 0$  连续且在  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  可积, 则

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = f(0).$$

**证明** 因为  $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , 所以存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . 又因为  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ , 所以对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta_0 > 0$ , 使得当  $|x| \leq \delta_0$  时, 有  $\sin x \geq (1 - \varepsilon)x$ . 于是对  $\forall \delta \in \min\{\frac{1}{2}, \delta_0\}$ , 我们有

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx \\
&\leq \sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)| \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} |M + f(0)| dx \\
&\leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\
&\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\
&= \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx.
\end{aligned}$$

上式两边同时令  $N \rightarrow +\infty$  并取上极限, 得到

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy.$$

又由 *Dirichlet* 判别法, 可知  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy$  收敛. 从而根据  $\delta$  的任意性, 上式两边同时令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 再结合  $f$  在  $x=0$  处连续, 可得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \\
&\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy}{1 - \varepsilon} \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0.
\end{aligned}$$

从而

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq 0.$$

故  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| = 0$ . 即  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx$ . 而一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} f(0) dx \\
&\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = f(0).
\end{aligned}$$

另一方面, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$  我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \\
&\leq f(0) \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} f(0) dx \leq \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx \\
&\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

再根据  $\varepsilon$  的任意性, 可知

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \leq f(0).$$

因此, 由夹逼准则, 可知  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx = f(0)$ . □

**例题 2.122** 设  $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi_n(x-y) dy = f(x).$$

**证明** 由条件可知, 存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ . 于是对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 固定  $x$ , 再对  $\forall \delta > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} 2M \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 \delta^2} dy \\ &\stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 再结合  $f$  在  $\forall x \in \mathbb{R}$  上连续, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| = \lim_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)| = 0.$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &= f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = f(x). \end{aligned}$$

□

**例题 2.123** 设  $f(x) \in C[0, 1]$ ,  $f'(0)$  存在, 证明: 对任意正整数  $m$ , 在  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\int_0^1 f(x^n) dx = f(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{\ln^k x}{k!} dx + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

**注** 这里积分换元之后, 再 Taylor 展开, 但是后续积分与求和的换序以及余项的估计并不好处理.

**笔记** 估计抽象函数的渐近展开一般考虑拟合和分段. 如果考虑积分与求和换序的话并不好处理, 一般只有估计具体函数的渐近才会考虑换序.

这里分段的想法也是将原积分分成主体部分和余项部分. 容易观察 (直观地分析一下即可) 到这里积分的阶的主体部分集中在 0 附近.

**证明** 记  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ , 则由条件可知,  $g \in C[0, 1]$ , 从而

$$|g(x)| \leq C, \forall x \in [0, 1]. \quad (2.116)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x^n) dx - f(0) &= \int_0^1 [f(x^n) - f(0)] dx \stackrel{\text{令 } y=x^n}{=} \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n} [f(x) - f(0)] dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx. \end{aligned}$$

因此原问题等价于证明对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 都有

$$\frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

由 Taylor 公式可知,  $\forall x \in [\delta, 1]$ , 对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$e^{\frac{\ln x}{n}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} + O\left(\frac{1}{n^m}\right), n \rightarrow \infty.$$

即存在  $M > 0$ , 使得  $\forall x \in [\delta, 1]$ , 对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $N > 0$ , 使得  $\forall n > N$ , 都有

$$\left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| \leq \frac{M}{n^m}. \quad (2.117)$$

取  $\delta = \frac{1}{n^{2m}} \in (0, 1)$ , 则对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 结合 (2.116)(2.117) 式, 我们有

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx \right| = \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k! n^k} g(x) dx \right| \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} g(x) dx \right| = \left| \frac{1}{n} \int_0^1 \left( e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right) g(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\delta \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| |g(x)| dx + \frac{1}{n} \int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| |g(x)| dx \\ &\leq \frac{C}{n} \int_0^\delta \left( x^{\frac{1}{n}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\ln x|^k}{k! n^k} \right) dx + \frac{C}{n} \int_\delta^1 \left| e^{\frac{\ln x}{n}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ln^k x}{k! n^k} \right| dx \leq \frac{C}{n} \int_0^\delta \left( 1 + \sum_{k=0}^{m-1} |\ln x|^k \right) dx + \frac{C}{n} \int_0^1 \frac{M}{n^m} dx \\ &\leq \frac{C}{n} \int_0^\delta (1 + m |\ln x|^{m-1}) dx + \frac{MC}{n^{m+1}} = \frac{C}{n} \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} (1 - m \ln^{m-1} x) dx + \frac{MC}{n^{m+1}} \\ &= \frac{C}{n^{2m+1}} - \frac{mC}{n} \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x dx + \frac{MC}{n^{m+1}} \leq \frac{MC + C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x dx \right|. \end{aligned} \quad (2.119)$$

注意到

$$\int \ln^n x dx = x(a_0 + a_1 \ln x + \cdots + a_n \ln^n x) + c = x \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \ln^k x \right) + c,$$

其中  $a_0, a_1, \dots, a_n, c$  都是常数. 又因为对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都成立  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n x}{x} = 0$ , 所以一定存在  $N' > 0$ , 使得当  $n > N'$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x dx \right| &= \left| x(b_0 + b_1 \ln x + \cdots + b_{m-1} \ln^{m-1} x) \Big|_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \right| = \left| \frac{1}{n^{2m}} \left( b_0 + b_1 \ln \frac{1}{n^{2m}} + \cdots + b_{m-1} \ln^{m-1} \frac{1}{n^{2m}} \right) \right| \\ &\leq \frac{mB}{n^{2m}} \left| \ln^{m-1} \frac{1}{n^{2m}} \right| = \frac{2m^2 B \ln^{m-1} n}{n^{2m}} \leq \frac{2m^2 B}{n^{2m-1}} \leq \frac{2m^2 B}{n^m}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

其中  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$  都是常数,  $B = \max\{b_0, b_1, \dots, b_{m-1}\}$ . 因此由 (2.119)(2.120) 式可得, 对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > \max\{N, N'\}$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx \right| &\leq \frac{MC + C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \left| \int_0^{\frac{1}{n^{2m}}} \ln^{m-1} x dx \right| \\ &\leq \frac{MC + C}{n^{m+1}} + \frac{mC}{n} \cdot \frac{2m^2 B}{n^m} = \frac{MC + C - 2m^3 BC}{n^{m+1}}. \end{aligned}$$

即  $\frac{1}{n} \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}} g(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^1 \frac{\ln^k x}{k!} g(x) dx = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), n \rightarrow \infty$ . 结论得证.  $\square$

## 2.9 Riemann 引理

## 定理 2.14 (Riemann 引理)

设  $E \subset \mathbb{R}$  是区间且  $f$  在  $E$  上绝对可积,  $g$  是定义在  $\mathbb{R}$  的周期  $T > 0$  函数, 且在任意有界闭区间上 Riemann 可积, 则我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy. \quad (2.121)$$

注  $f$  在  $E$  上绝对可积包含  $f$  为反常积分的情况 (即反常积分绝对收敛).

考试中, Riemann 引理不能直接使用, 需要我们根据具体问题给出证明. 具体可见例题 2.124.

## 笔记

- (1) 不妨设  $E = \mathbb{R}$  的原因: 若 (1.1) 式在  $E = \mathbb{R}$  时已得证明, 则当  $E \subseteq \mathbb{R}$  时, 令  $\tilde{f}(y) = f(y) \cdot \chi_E, y \in \mathbb{R}$ , 则由  $f(y)$  在  $E$  上绝对可积, 可得  $\tilde{f}(y)$  在  $\mathbb{R}$  上也绝对可积. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$$

故可以不妨设  $E = \mathbb{R}$ .

- (2) 不妨设  $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$  的原因: 若  $\sup_{\mathbb{R}} |g| = 0$ , 则  $g(x) \equiv 0$ , 此时结论显然成立. 因此我们只需要考虑当  $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$  时的情况.

- (3) 不妨设  $T = 1$  的原因: 若 (2.121) 式在  $T = 1$  时已得证明, 则当  $T \neq 1$  时, 有

$$\frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy \stackrel{\text{令 } y=Tx}{=} \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Tx)dx = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (2.122)$$

由于  $g(y)$  是  $\mathbb{R}$  上周期为  $T \neq 1$  的函数, 因此  $g(Ty)$  就是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的函数. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (2.123)$$

又由 (2.122) 式及  $T > 0$  可得

$$\begin{aligned} \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy &= \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy &\stackrel{\text{令 } t=Tx}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(ty)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy \end{aligned}$$

再结合 (2.123) 式可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$ . 故可以不妨设  $T = 1$ .

- (4) 不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  的原因: 若 (2.121) 式在  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  时已得证明, 则当  $\int_0^1 g(y)dy \neq 0$  时, 令  $G(y) = g(y) - \int_0^1 g(t)dt$ , 则  $G(y)$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的函数, 并且  $\int_0^1 G(y)dy = 0$ . 于是由假设可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)G(xy)dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 G(y)dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y) \left[ g(xy) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 \left[ g(y) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_E f(y)g(xy)dy - \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \right) &= \int_E f(y)dy \int_0^1 g(y)dy - \int_E f(y)dy \int_0^1 g(t)dt = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy &= \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \end{aligned}$$

再结合(2)可知, 此时原结论成立. 故可以不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$ .

**证明** 不妨设  $E = \mathbb{R}, \sup_{\mathbb{R}} |g| > 0, T = 1$ , 再不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$ . 因此只需证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$ . 由  $g$  的周期为 1 及  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \int_{-n}^0 g(t)dt &\stackrel{\text{令 } x=t+n}{=} \int_0^n g(x-n)dx \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \int_0^n g(x)dx = \int_0^n g(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(t)dt \stackrel{\text{令 } y=t-k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y+k)dy \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y)dy \\ &= (n-1) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

从而对  $\forall \beta > \alpha > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \right| &= \left| \int_0^{\beta} g(t)dt - \int_0^{\alpha} g(t)dt \right| = \left| \int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t+[\beta])dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t+[\alpha])dt \right| \\ &= \left| \int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt \right| = \left| \int_0^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_0^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha-[\alpha]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g|. \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(xy)dy \right| \stackrel{\text{令 } t=xy}{=} \frac{1}{x} \left| \int_{x\alpha}^{x\beta} g(t)dt \right| \leq \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x}, \quad \forall x > 0, \forall \beta > \alpha > 0. \quad (2.124)$$

因为  $f$  在  $\mathbb{R}$  上绝对可积, 所以由 Cauchy 收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \int_{|y|>N} f(y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (2.125)$$

由于  $f$  在  $\mathbb{R}$  上绝对可积, 从而  $f$  在  $\mathbb{R}$  上也 Riemann 可积, 因此由可积的充要条件可知, 存在划分

$$-N = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \left( \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \right) (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (2.126)$$

于是当  $x > \frac{3 \sum_{j=1}^n \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g|}{\varepsilon}$  时, 结合(2.124)(2.125)(2.126)可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(xy)dy \right| &\leq \left| \int_{-N}^N f(y)g(xy)dy \right| + \left| \int_{|y|>N} f(y)g(xy)dy \right| \stackrel{(2.125)}{\leq} \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(y)g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f] g(xy)dy \right| + \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\stackrel{(2.124)}{\leq} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f| dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f| dy + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left( \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) (t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\stackrel{(2.126)}{<} \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\stackrel{x \text{ 充分大}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$ . 结论得证.  $\square$

### 定理 2.15 ( $L^p$ 版本 Riemann 引理)

设  $E$  是有界勒贝格可测集,  $f \in L^p(E)$ ,  $x \in L^q[0, T]$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p > 1$  且  $x$  周期为  $T > 0$ . 则

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_E f(t)x(yt)dt = \frac{1}{T} \int_E f(t)dt \int_0^T x(t)dt.$$

**证明** 见清疏讲义.  $\square$

### 定理 2.16

设  $E \subset \mathbb{R}$  是可测集且  $f \in L^1(E)$ ,  $g$  是定义在  $\mathbb{R}$  的有界可测函数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt = A \in \mathbb{R}.$$

则我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = A \cdot \int_E f(y)dy.$$

**证明** 见清疏讲义.  $\square$

**例题 2.124** 设  $f \in R[0, 2\pi]$ , 不直接使用 Riemann 引理计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx.$$

**证明** 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 固定  $n$ . 将  $[0, 2\pi]$  等分成  $2n$  段, 记这个划分为

$$T: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 2\pi,$$

其中  $t_i = \frac{i\pi}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . 此时我们有

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sin(nx)| dx = \int_{\frac{(i-1)\pi}{n}}^{\frac{i\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \frac{1}{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{n}. \quad (2.127)$$

由  $f \in R[0, 2\pi]$  可知,  $f$  在  $[0, 2\pi]$  上有界也内闭有界. 从而利用 (2.127) 式可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \leq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(2.127) \text{ 式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (2.128)
\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \geq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(2.127) \text{ 式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (2.129)
\end{aligned}$$

由  $f \in R[0, 2\pi]$  和 Riemann 可积的充要条件可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

于是对(2.128)(2.129)式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

□

**例题 2.125** 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上周期  $2\pi$  函数且在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积, 设

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, n = 1, 2, \dots$$

若  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  是  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  唯一间断点且存在下述极限

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - A}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - B}{x - x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2}.$$

### 笔记

(1) 计算  $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路: 由于  $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上只可能有奇点  $t = 0$ , 因此

$\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上不一定绝对可积, 从而不能直接利用 Riemann 引理. 于是我们需要将  $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  转化为在  $[0, \pi]$  上无奇点的函数 (排除  $t = 0$  这个奇点, 即证明  $t = 0$  不再是奇点), 只要被积函数在积分区间上无奇点且 Riemann 可积, 就一定绝对可积. 进而满足 Riemann 引理的条件, 再利用 Riemann 引理就能求解出  $I_1$ . 具体处理方式见下述证明.

计算  $I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路同理, 也是要排除  $t = 0$  这个可能的奇点, 再利用 Riemann 引理进行求解. 具体计算方式见下述证明.

(2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路: 注意由于  $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上有一个奇点  $t = 0$ , 并且对  $\forall t \in (0, \pi]$ , 都有

$$\left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \geq \left| \frac{1}{2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2}} \right| = \frac{\pi}{2t} > 0.$$

而  $\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2t} dt$  是发散的, 故  $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt$  也发散. 因此  $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上一定不是绝对可积的, 从而不能利用 Riemann 引理计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ . 真正能计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的方法

有多种, 下述证明利用的是 **强行替换/拟合法**.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &\stackrel{\text{令 } y=-t}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \end{aligned} \quad (2.130)$$

记  $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ , 则由(2.130)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2). \quad (2.131)$$

于是

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, \quad (2.132)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt. \quad (2.133)$$

由条件可知  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-A}{x-x_0}$  存在,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-B}{x-x_0}$  存在, 因此  $\frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}}, \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  都没有奇点且 Riemann 可积, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$$

都满足 Riemann 引理的条件. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0. \quad (2.134)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ .

$$\left| \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt - \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \right| = \left| \int_0^\pi \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \right|. \quad (2.135)$$

而  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{t^2} \stackrel{\text{L'Hospital'rules}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{2}}{2t} = 0$ , 因此  $\frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上无奇点且 Riemann 可

积, 从而由 Riemann 引理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0$ . 于是再结合 (2.135) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{2n+1}{2} \pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (2.136)$$

因此, 由 (2.132)(2.133)(2.134)(2.136) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{A}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{B}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{B}{2}.$$

再结合 (2.131) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \frac{A+B}{2}.$$

□

**例题 2.126** 设  $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(0) = 0$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} f(x) dx.$$

**注** 由于  $x = 0$  可能是  $\frac{f(x)}{\sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的奇点, 因此我们需要将其转化为在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上不含奇点的函数, 才能利用 Riemann 引理进行计算.

**证明** 注意到

$$\frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx. \quad (2.137)$$

先计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$ . 由  $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$  可知,  $f \in D^2[0, \frac{\pi}{2}]$ . 从而由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

于是  $\frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 故由 **Riemann 引理** 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx < \infty.\end{aligned}\quad (2.138)$$

利用 (2.138) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = 0. \quad (2.139)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$ . 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 我们有

$$\left| \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx - \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \right| = \left| \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx \right|. \quad (2.140)$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}$ , 故  $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 于是由 **Riemann 引理** 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx < \infty. \quad (2.141)$$

利用 (2.141) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = 0. \quad (2.142)$$

因此, 对 (2.140) 式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 利用 (2.142) 式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\quad (2.143)$$

而由 **函数 Stolz 定理** 可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = f'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt. \quad (2.144)$$

由 **积分中值定理** 可知, 对  $\forall x > 0$ , 存在  $\theta_x \in [x, x+\pi]$ , 使得

$$\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{\theta_x} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2\theta_x}.$$

又由  $\theta_x \in [x, x+\pi]$  可知,  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 从而 (2.144) 式可化为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi x}{2\theta_x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

于是由 **Heine 归结原则** 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{2}. \quad (2.145)$$

利用 (2.139)(2.145) 式, 对 (2.137) 式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{f'(0)}{2}.$$

□

## 2.10 极限问题综合

**例题 2.127** 设二阶可微函数  $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  满足

$$f''(x) \leq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

求极限

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)}.$$

**笔记** 本例非常经典,深刻体现了“拉格朗日中值定理”保持阶不变和“和式和积分”转化的思想.

**证明** 由条件  $f''(x) \leq 0$  可知,  $f$  是上凸函数. 而上凸函数只能在递增、递减、先增后减中发生一个. 又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 因此  $f$  一定在  $[1, +\infty)$  上递增. 再结合  $f''(x) \leq 0$  可知  $f' \geq 0$  且单调递减. 下面来求极限.

由 Lagrange 中值定理可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $\theta_n \in (2n-1, 2n)$ , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{f^s(2n)} - \frac{1}{f^s(2n-1)} \right] \xrightarrow{\text{Lagrange 中值定理}} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}. \quad (2.146)$$

由于  $\theta_n \in (2n-1, 2n), \forall n \in \mathbb{N}_+$  且  $f \geq 0$  单调递增,  $f' \geq 0$  单调递减, 因此

$$s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} \leq s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} \leq s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}. \quad (2.147)$$

又因为  $\left[ \frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)} \right]' = \frac{f''(x)f(x) - (s+1)f'(x)}{f^{s+2}(x)} \leq 0$ , 所以  $\frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}$  单调递减. 从而一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} &\leq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n-1}^{2n} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} &\geq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_2^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_2^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(2)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

于是利用(2.148)(2.149)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} = -\frac{1}{2}. \quad (2.150)$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\leq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[ \frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{f'(2x-1)}{f^{s+1}(2x-1)} dx \right] = -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[ \frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \int_{2n-3}^{2n-1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \right] \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[ \frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \right] = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\geq -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\
&= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \quad (2.152)$$

于是利用(2.151)(2.152)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} = -\frac{1}{2}. \quad (2.153)$$

故结合(2.146)(2.147)(2.150)(2.153)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} = -\frac{1}{2}.$$

□

**例题 2.128** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$ .

**证明** 根据对称性, 不妨设  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 先尝试找到最大值点. 在  $x = 0, \frac{1}{2}$  时代入, 很明显对应的极限是零, 考虑  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 根据等比数列求和公式有

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n)$$

如果  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  已经取定, 则在区间  $\left[\delta, \frac{1}{2}\right]$  中

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

右端是指数级趋于零的并且上式不依赖于  $x$ , 所以函数会一致趋于零. 因此最大值点应该在  $x = 0$  附近, 近似的有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \approx nx(1-x)^n$$

取  $x = \frac{1}{n}$  显然极限是  $\frac{1}{e}$ , 我们猜测这就是答案, 下面开始证明. 首先取  $x = \frac{1}{n}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(\frac{1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{e}$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \geq \frac{1}{e}$ , 下面估计上极限. 根据对称性, 不妨只考虑  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 对任意  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  取定, 当  $x \in \left[\delta, \frac{1}{2}\right]$  时总有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

当  $x \in [0, \delta]$  时, 结合均值不等式有


$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \approx \frac{nx(1-x)^n}{1-2\delta} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-2\delta} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

所以可以取  $n > N$  充分大, 使得  $\frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}} < \frac{1}{e}$ , 此时便有

$$n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

最后, 根据  $\delta$  的任意性, 可知结论成立.  $\square$

**例题 2.129** 设  $x_n > 0, k$  为正整数, 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+k}}{x_n} \geq \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$  且常数是最佳的.

 **笔记** 此类问题反证法将会带来一个恒成立的不等式, 有很强的效果, 所以一般都用反证法, 证明的灵感来源于  $k=1$  时的情况.

**证明** 设  $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 采用反证法, 则存在  $N$  使得  $n \geq N$  时恒成立

$$S_{n+k} \leq \lambda(S_n - S_{n-1}), \lambda \in \left[1, \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right)$$

显然  $S_n$  是单调递增的, 如果  $S_n$  有界, 则在不等式两端取极限可知  $S_n$  收敛到零, 矛盾, 所以  $S_n$  严格单调递增趋于正无穷, 因此对任意  $n \geq N$  有  $S_n > S_{n-1}$ . 如果已经得到了  $S_n > cS_{n-1}$  对任意  $n \geq N$  恒成立, 这里  $c$  是正数, 则对任意  $n \geq N$  有

$$S_{n+k} > cS_{n+k-1}, S_{n+k-1} > cS_{n+k-2}, \cdots, S_{n+1} > cS_n \Rightarrow S_{n+k} > c^k S_n$$

$$0 < S_{n+k} - c^k S_n \leq (\lambda - c^k)S_n - \lambda S_{n-1} \Rightarrow S_n > \frac{\lambda}{\lambda - c^k} S_{n-1}$$

这样不等式就加强了, 记  $c' = \frac{\lambda}{\lambda - c^k}$ , 我们得到  $S_n > c'S_{n-1}$  对任意  $n \geq N$  恒成立. 定义数列  $u_n$  为  $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\lambda}{\lambda - u_n^k}$ , 则重复以上过程可知  $S_n > u_m S_{n-1}$  对任意  $m$  以及  $n \geq N$  都恒成立, 所以  $u_m$  这个数列必须是有界的, 下面我们就由此导出矛盾. 因为  $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k)u_n < \lambda \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k)u_n^k < \lambda^k$ , 由均值不等式有

$$kx^k(\lambda - x^k)^k \leq \left(\frac{k\lambda}{k+1}\right)^{k+1} < k\lambda^k \Leftrightarrow \lambda < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

显然成立, 所以  $u_m$  单调递增, 而如果极限存在, 则极限点满足方程  $x = \frac{\lambda}{\lambda - x^k} \Leftrightarrow x(\lambda - x^k) = \lambda$ , 这与前面均值不等式导出的结果矛盾, 所以  $u_m$  单调递增趋于正无穷, 又与有界性矛盾. 综上所述得证.  $\square$

**例题 2.130** 设  $x_n > 0, x_n \rightarrow 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = a < 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$ .

**证明** 不妨设  $a = -1$ , 否则将  $x_n$  换成  $x_n^k$  即可, 取  $k$  将  $a$  变成  $-1$ .

设  $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 则  $S_n > 0$  严格单调递增, 如果  $S_n$  收敛, 则  $\ln x_n \rightarrow -\infty$  与条件矛盾, 所以  $S_n$  单调递增趋于正无穷.

因为  $\frac{\ln x_n}{\ln n} = \frac{\ln x_n}{S_n} \frac{S_n}{\ln n}$ ,  $\frac{\ln x_n}{S_n} \rightarrow -1$ , 所以等价的只要证明  $\frac{S_n}{\ln n} \rightarrow 1$ .

条件为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{S_n} = -1$ , 设想作为等式, 对应着  $S_n - S_{n-1} = e^{-S_n}$  是一个隐函数类型的递推式, 不方便使用, 所以考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_{n+1}} \frac{S_{n+1}}{S_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n+1}}{S_n}\right) = -1$$

现在等价的, 已知  $S_n$  单调递增趋于无穷且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(S_{n+1} - S_n)}{S_n} = -1$ , 要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$ . 由极限定义, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $n > N$  都有  $(-1 - \varepsilon)S_n < \ln(S_{n+1} - S_n) < (-1 + \varepsilon)S_n$  也即

$$\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^{S_n} + S_n < S_{n+1} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{S_n} + S_n, \forall n \geq N$$

不妨要求  $S_N > 1$ , 考虑

$$f(x) = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x + x, f'(x) = 1 + \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x \ln\left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right) > 1 - \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x > 0$$

再定义  $u_N = S_N, u_{n+1} = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{u_n} + u_n$ , 于是若有  $u_n \leq S_n$  则结合单调性可知  $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(S_n) = S_{n+1}$ , 这说

明  $S_n \leq u_n$  对任意  $n \geq N$  恒成立. 同样考虑

$$g(x) = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x + x, g'(x) = 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) > 0$$

再定义  $v_N = S_N, v_{n+1} = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^{v_n} + v_n$ , 同样道理  $S_n \geq v_n$  恒成立, 于是  $\frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n}, n \geq N$ .

注意  $u_n, v_n$  具备完全一样的形式, 所以统一的考虑  $a_1 > 1, a_{n+1} = a_n + e^{ca_n}$ , 其中  $c$  在  $\frac{1}{e}$  附近, 显然这个数列是单调递增趋于正无穷的, 我们用 stolz 公式来计算相应的极限, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-ca_n}}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-ca_n}(c^{-(a_{n+1}-a_n)} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{ca_n}}{c^{-e^{ca_n}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{e^{-x \ln c} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{e^{-x \ln c} - 1} = \frac{1}{-\ln c} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} + \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} - \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}$$

这意味着

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \geq \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}, \forall \varepsilon > 0$$

由此可知结论成立. □

**例题 2.131** 设  $n \in \mathbb{N}$ , 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos(2x)} \cdot \sqrt[3]{\cos(3x)} \cdots \sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}.$$

**解** 由 Taylor 公式知

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{x}{k} + o(x), x \rightarrow 0.$$

于是

$$\sqrt[k]{\cos x} = \sqrt[k]{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{k} + o(x^2) = 1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

从而

$$\prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2}\right)x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

□

**例题 2.132** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}}\right).$$

 **笔记** 注意到

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}},$$

对  $\forall i \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\frac{\sqrt{i}}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$



故  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}}$  中的每一项  $\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}}$  都可以 Taylor 展开.

**解** 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\sqrt{i}}{n} + \frac{i}{n^2} + O\left(\frac{i\sqrt{i}}{n^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left[ n - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} + nO\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n^2} + \frac{n+1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$


于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

□

**例题 2.133** 设  $f \in R[0, 1]$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

 **笔记** 注意  $\frac{2k}{2n-1}, \frac{2k-1}{2n-1} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ .

**证明** 注意到


$$\begin{aligned}\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 0, n \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n-1}\right) &= \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 0, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

故由子列极限命题 (b) 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

□

**例题 2.134** 设  $x_{n+1} = x_n - x_n^3, x_1 \in \mathbb{R}$ , 判断  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  收敛性.

 **笔记** 因为递推函数  $g(x) = x(1-x^2)$  关于原点对称, 而  $\{x_n\}$  的敛散性只由  $x_1$  决定, 所以我们只需要考虑  $x_1 > 0$  的情况即可, 由于  $g(x)$  关于原点对称, 故  $x_1 < 0$  的情况和  $x_1 > 0$  的情况类似. 因此我们可以直接考虑数列  $\{|x_n|\}$ . 这

样能避免很多分类讨论. 注意这个递推函数  $g(x)$  只有一个不动点  $x=0$ .

如果不加绝对值, 原递推函数的蛛网图会比较杂乱, 加上绝对值后讨论会比较清晰. 实际上, 通过蛛网图分析, 也能得到使得  $\{x_n\}$  发散的  $x_1$  的临界点满足  $g(x_1)=x_2, g(x_2)=x_1$ , 即  $g(g(x_1))=x_1$ . 于是就有

$$-x_1^6 + 3x_1^4 - 3x_1^2 + 2 = 0. \quad (2.154)$$

但是当  $x_1 = \pm 1, \pm 2$  上式不成立, 故上述方程没有有理根. 令  $t = x_1^2$ , 则上式可化为

$$-t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = 0.$$

当  $t=2$  时, 上式成立. 故上式可化为

$$(t-2)(-t^2+t-1)=0.$$

因此上式只有一个实根  $t=2$ , 即(2.154)式只有当  $x_1^2=2$  时才有实根. 故(2.154)式只有两个实根  $x_1 = \pm\sqrt{2}$ .

考虑  $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$ , 记  $f(x) = x|1 - x^2|$ , 则  $f(x)$  有两个不动点  $x = \pm\sqrt{2}$ .

**证明** 考虑  $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$ , 则

(1) 当  $|x_1| > \sqrt{2}$  时, 则  $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \geq |x_n| > \sqrt{2}$ . 故此时  $\{|x_n|\}$  递增, 且有下界  $\sqrt{2}$ . 而  $f$  没有大于  $\sqrt{2}$  的不动点, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$ .

(2) 当  $|x_1| \leq \sqrt{2}$  时, 则  $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \leq |x_n| \leq \sqrt{2}$ . 故此时  $\{|x_n|\}$  递减, 且有下界  $\sqrt{2}$ . 于是  $A \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$  存在. 对  $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1|$  两边同时取极限得  $A = 0$  或  $\sqrt{2}$ .

(i) 若  $A = 0$ , 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = A = 0$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(ii) 若  $A = \sqrt{2}$ , 则由  $\{|x_n|\}$  递减, 且  $|x_n| \leq \sqrt{2}$  知  $\sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq |x_n| \leq \sqrt{2} \Rightarrow |x_n| = \sqrt{2}, n = 1, 2, \dots$ . 此时  $x_1 = \pm\sqrt{2}$ , 再代入  $x_{n+1} = x_n - x_n^3$  得  $x_n = (-1)^n x_1, n = 2, 3, \dots$ . 故此时  $\{x_n\}$  发散.

综上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \text{发散} & , |x_1| \geq \sqrt{2} \\ 0 & , |x_1| < \sqrt{2} \end{cases}.$$

□

**例题 2.135** 设函数  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  满足

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$$

设递推

$$x_1 \in [a, b], x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), n = 1, 2, \dots$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

**证明** 由于  $a \leq f(x) \leq b$ , 因此归纳易得  $a \leq x_n \leq b$ . 令  $g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$ , 则

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(y) - f(x)]}{2} \geq 0, \forall y \geq x.$$

由命题可知递增递推数列  $\{x_n\}$  一定单调, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. □

**例题 2.136** 设  $f(x) \in C[0, 1], f(x) > 0$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} = \max_{[0,1]} f.$$



**笔记** 回顾例题 2.110 和 命题 2.12. 因此我们只需证明命题 2.12 的反向, 再结合例题 2.110 就能得证. 但是反向 Stolz 定理一般不会直接应用, 因此我们可以尝试利用单调有界定理证明比值极限存在, 再利用命题 2.12 就能直接得证.

实际上, 只要证明了单调性, 就能利用反向 Stolz 定理证明命题 2.12 的反向也成立, 再利用例题 2.110 就能得到结论.

**证明** 注意到

$$\frac{\int_0^1 f^{n+2}(x)dx}{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx} \geq \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} \iff \int_0^1 f^{n+2}(x)dx \int_0^1 f^n(x)dx \geq \left( \int_0^1 f^{n+1}(x)dx \right)^2. \quad (2.155)$$

由 Cauchy 不等式知

$$\int_0^1 f^{n+2}(x)dx \int_0^1 f^n(x)dx \geq \left( \int_0^1 f^{\frac{n+2}{2}}(x) f^{\frac{n}{2}}(x)dx \right)^2 = \left( \int_0^1 f^{n+1}(x)dx \right)^2.$$

故(2.155)式成立, 即  $\left\{ \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} \right\}_{n=0}^{\infty}$  单调递增. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . 由例题 2.110 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = \max_{[0,1]} f.$$

再根据命题 2.12 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = \max_{[0,1]} f.$$

□

### 例题 2.137

1. 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  满足

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求极限.

2. 设  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  满足

$$a_{n+1} + \frac{4}{a_n} < 4, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在并求极限.

3. 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  满足


$$x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求极限.

4. 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  满足

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求极限.

 **笔记** 此类问题其实就是把  $x_{n+1}, x_n$  部分全部换成  $x$ , 数字部分往往是  $x$  部分的一个最值, 从把这个数字用不等式放缩为数列来得到估计.

**证明**

1. 由均值不等式可知

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2 \leq x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n.$$

并且  $x_n < 2 - \frac{1}{x_{n+1}} < 2$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \triangleq x$  存在. 于是

$$2 \leq x + \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) \leq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

2.  
3.  
4.

□

**例题 2.138** 设  $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $|f(x)| \leq 1$ ,  $f'(x) > 0$ , 证明: 对任意  $b > a > 0$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

**证明** 证法一:

$$\begin{aligned} \int_a^b f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx &= \int_a^b \frac{1}{n + \frac{1}{x^2}} \left( n + \frac{1}{x^2} \right) f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx = \int_a^b \frac{1}{n + \frac{1}{x^2}} df \left( nx - \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{f \left( nb - \frac{1}{b} \right)}{n + \frac{1}{b^2}} - \frac{f \left( na - \frac{1}{a} \right)}{n + \frac{1}{a^2}} + \int_a^b f \left( nx - \frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3 \left( n + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{a^2}} + \frac{2}{a^3 \left( n + \frac{1}{b^2} \right)^2} \int_a^b f \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{n + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{a^2}} + \frac{2(b-a)}{a^3 \left( n + \frac{1}{b^2} \right)^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

证法二: 令  $y = nx - \frac{1}{x}$ , 则  $x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4n}}{2n} > a > 0$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f' \left( nx - \frac{1}{x} \right) dx &= \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} f'(y) \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{2n} dy = \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{2n} df(y) \\ &= \frac{1 + \frac{nb - \frac{1}{b}}{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n}}}{2n} f \left( nb - \frac{1}{b} \right) - \frac{1 + \frac{na - \frac{1}{a}}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{2n} f \left( na - \frac{1}{a} \right) - \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} f(y) \frac{\sqrt{y^2 + 4n} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{4n^2(y^2 + 4n)} dy \\ &\leq \frac{1 + \frac{nb - \frac{1}{b}}{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n}}}{2n} + \frac{1 + \frac{na - \frac{1}{a}}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{2n} + \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} \frac{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n} + \frac{(nb - \frac{1}{b})^2}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{4n^2 \left( (na - \frac{1}{a})^2 + 4n \right)} dy \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

**例题 2.139** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx.$$

**证明** 证法一: 对  $\forall \delta > 0$ , 我们有

$$\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx < \frac{1}{\delta} \int_\delta^\infty \frac{1}{e^x} dx < +\infty.$$

于是由 Riemann 引理可知

$$\int_\delta^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx \int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx &\sim \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} dx, \delta \rightarrow 0^+, \\ \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} dx &= \int_0^{n\delta} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{命题 8.3(2)}}{=} \frac{\pi}{2}, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx + \int_\delta^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

证法二: 记  $p(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$ ,  $p(0) = -1$ , 则  $p(x)$  可导, 并且

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} \sin nx dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx \stackrel{\text{命题 8.3(2)}}{=} \int_0^{\infty} p(x) \sin nx dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} p(x) d \frac{\cos nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \left( 1 - \int_0^{\infty} p'(x) \cos nx dx \right).\end{aligned}$$

求导有  $p'(x) = \frac{1 - xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$ ,  $p'(0) = \frac{1}{2}$ , 所以  $\left| \int_0^{\infty} p'(x) \cos nx dx \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{1 - xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} dx < \infty$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

例题 2.140 设  $f(x), g(x) \in C[0, 1]$  且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$  为有限数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

证明 证法一: 注意到

$$n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = \int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) g(x) x^{\frac{1}{n}-1} dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{x} \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx.$$

令  $h(x) \triangleq \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $h \in C[0, 1]$ . 从而

$$n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx.$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 对  $\forall x \in [\delta, 1]$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$  及  $f \in C[0, 1]$  可知, 存在  $N > 0$ , 使得

$$\left| x^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

设  $|h(x)|, |f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ , 则

$$\begin{aligned}& \left| \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx - f(1) \int_0^1 h(x) dx \right| = \left| \int_0^1 h(x) \left[ x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right] dx \right| \\ & \leq \int_0^{\delta} |h(x)| \left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| dx + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| dx \\ & \leq 2M^2\delta + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left[ \left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - x^{\frac{1}{n}} f(1) \right| + \left| x^{\frac{1}{n}} f(1) - f(1) \right| \right] dx \\ & = 2M^2\delta + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left[ x^{\frac{1}{n}} \left| f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| + f(1) \left| x^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \right] dx \\ & < 2M^2\varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 M [1 + f(1)] \varepsilon dx = (2M^2 + M [1 + f(1)] (1 - \varepsilon)) \varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx = f(1) \int_0^1 h(x) dx.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

证法二: 因为可以用在两个端点, 插值于  $f$  的多项式 ( $f$  的 Bernstein 多项式也可以) 在  $[0, 1]$  上一致逼近  $f$ , 所以只需对连续可导的函数  $f$  证明.

对  $x \in (0, 1]$  定义  $G(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{t} dt$ , 则  $G$  可导, 且  $G'(x) = \frac{g(x)}{x}$ . 因而  $\left(\frac{1}{n}G(x^n)\right)' = \frac{g(x^n)}{x}$ . 用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} n \int_0^1 f(x)g(x^n) dx &= n \int_0^1 x f(x) \cdot \frac{g(x^n)}{x} dx \\ &= n \left[ x f(x) \cdot \frac{1}{n} G(x^n) \Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) \frac{1}{n} G(x^n) dx \right] \\ &= f(1)G(1) - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx \\ &= f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx. \end{aligned}$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$  收敛, 所以存在  $M > 0$ , 使得

$$|f(x) + x f'(x)| \leq M, \quad G'(x) = \frac{|g(x)|}{x} \leq M \quad (x \in [0, 1]).$$

因此  $|G(x)| \leq Mx$ .

故


$$\left| \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx \right| \leq M^2 \int_0^1 x^n dx = \frac{M^2}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(x)g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

□

**例题 2.141** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 且  $f(0) = 0$ , 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} \cos \frac{3}{t} \cos \frac{5}{t} \cos \frac{7}{t} dt$ , 求证:  $f$  是可导的, 并求  $f'(0)$ .

 **笔记** 此类问题一般都是利用 **Riemman 引理** 解决.

**证明** 由 **Riemman 引理** 可知

$$\int_1^\infty \frac{\cos nx}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$


于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \cos \frac{1}{t} \cos \frac{3}{t} \cos \frac{5}{t} \cos \frac{7}{t} dt \\ &\stackrel{t=\frac{1}{u}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\cos u \cos 3u \cos 5u \cos 7u}{u^2} du = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_\lambda^\infty \frac{\cos u \cos 3u \cos 5u \cos 7u}{u^2} du \\ &\stackrel{u=\lambda x}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\cos(\lambda x) \cos(3\lambda x) \cos(5\lambda x) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2} (\cos(2\lambda x) + \cos(4\lambda x)) \cos(5\lambda x) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{4} (\cos(3\lambda x) + \cos(7\lambda x) + \cos(9\lambda x) + \cos(\lambda x)) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{8} [\cos(16\lambda x) + \cos(14\lambda x) + \cos(10\lambda x) + \cos(6\lambda x) + \cos(4\lambda x) + \cos(2\lambda x) + 1]}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

□

**例题 2.142** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0.$$

 **笔记** 如果需要估计得更精确, 就需要利用 E-M 公式对  $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2}$  进行更精确的估计和计算.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{k\pi} \frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{(x+(n+k-1)\pi)^2} dx = \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+(n+k-1)\pi)^2} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx. \end{aligned}$$

对  $\forall x \in [0, \pi]$ , 我们有

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{[(k+1)\pi]^2} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

又因为

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

所以一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k\pi)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{[(k+1)\pi]^2} dx \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

故由夹逼准则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0.$$

□

## 第三章 函数与微分

### 3.1 基本定理

常见的反例:  $f(x) = x^m \sin \frac{1}{x^n}$ .

#### 定理 3.1 (Leibniz 公式)

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

**例题 3.1** 设  $f(x)$  定义在  $[0, 1]$  中且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

**笔记** 将极限定义中的  $\varepsilon, \delta$  适当地替换成  $\frac{1}{n}, \frac{1}{N}$  往往更方便我们分析问题和书写过程.

**证明** 用  $\{x\}$  表示  $x$  的小数部分, 则  $x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = x\left\{\frac{1}{x}\right\}$ .

对任意  $\varepsilon > 0$ , 依据极限定义, 存在  $\delta > 0$  使得任意  $x \in (0, \delta)$  都有  $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$ .

取充分大的正整数  $N$  使得  $\frac{1}{N} < \delta$ , 则任意  $x \in \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right)$  都有  $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$ .

考虑函数  $x\left\{\frac{1}{x}\right\}$  在区间  $\left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right)$  中的值域, 也就是连续函数

$$g(u) = \frac{u - [u]}{u} = \frac{u - N}{u}, u \in (N, N+1)$$

的值域, 考虑端点处的极限可知  $g(u)$  的值域是  $\left(0, \frac{1}{N+1}\right)$ , 且严格单调递增. 所以对任意  $y \in \left(0, \frac{1}{N+1}\right)$ , 都存在  $x \in \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right) \subset (0, \delta)$  使得  $\frac{1}{x} = g^{-1}(y) \in (N, N+1)$ , 即  $y = g\left(\frac{1}{x}\right) = x\left\{\frac{1}{x}\right\}$ , 故  $|f(y)| = \left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$ .

也就是说, 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得任意  $y \in \left(0, \frac{1}{N+1}\right)$ , 都有  $|f(y)| < \varepsilon$ , 结论得证.  $\square$

#### 例题 3.2

**证明**

$\square$

### 3.2 微分学计算

#### 3.2.1 单变量微分学计算

##### 例题 3.3

(1) 设  $f(x) = \prod_{k=0}^n (x - k)$ . 对整数  $0 \leq j \leq n$ , 求导数  $f'(j)$ .

(2) 设  $g(x) = \prod_{k=0}^n (e^x - k)$ , 求  $g'(\ln j), j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**解**



(1) 解法一: 注意到  $f'(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x-k)$ , 故

$$\begin{aligned} f'(j) &= \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (j-k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (j-k) \\ &= (-1)^{n-j} j!(n-j)! + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (j-j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n (j-k) \\ &= (-1)^{n-j} j!(n-j)! \end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned} f'(j) &= \lim_{x \rightarrow j} \frac{f(x) - f(j)}{x - j} = \lim_{x \rightarrow j} \frac{\prod_{k=0}^n (x-k) - \prod_{k=0}^n (j-k)}{x - j} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k) + \lim_{x \rightarrow j} \frac{(j-j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k)}{x - j} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k) = (-1)^{n-j} j!(n-j)! \end{aligned}$$

(2) 记  $f(x) = \prod_{i=0}^n (x-k)$ , 则  $g(x) = f(e^x)$ . 从而  $g'(x) = e^x f'(e^x)$ , 于是由 (1) 可知

$$g'(\ln j) = j f'(j) = j \cdot (-1)^{n-j} j!(n-j)!$$

□

例题 3.4 对  $n \in \mathbb{N}$ ,

- (1) 设  $f(x) = \sin(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 求  $f^{(n)}$ .
- (2) 设  $f(x) = e^x \cos x$ , 求  $f^{(n)}$ .
- (3) 设  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 求  $f^{(n)}$ .
- (4) 设  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , 求  $f^{(n)}$ .
- (5) 设  $f(x) = \arctan x$ ,  $x > 0$ , 求  $f^{(n)}$ .

解

(1) 我们断言

$$f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

当  $n=0$  时, 上式显然成立. 假设当  $n=k$  时上式成立, 则

$$f^{(k+1)}(x) = a^{k+1} \cos\left(ax + \frac{k}{2}\pi\right) = a^{k+1} \sin\left(ax + \frac{k+1}{2}\pi\right).$$

故由数学归纳法可知 (3.1) 式成立.

(2) 由 Euler 公式可知,  $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ , 从而  $f(x) = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}]$ . 于是

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{Re}[(1+i)^n e^{(1+i)x}], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

注意到

$$1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i},$$

进而  $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n\pi}{4}i}$ . 故

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{Re} \left[ 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n\pi}{4}i + (1+i)x} \right] = 2^{\frac{n}{2}} e^x \operatorname{Re} \left[ e^{(x + \frac{n\pi}{4})i} \right] = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos \left( x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

(3) 令  $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $\ln x = xy$ . 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 两边同时对  $x$  求  $n$  阶导, 得

$$(\ln x)^{(n)} = (xy)^{(n)} \iff \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} = \sum_{k=0}^n x^{(k)} y^{(n-k)} = xy^{(n)} + ny^{(n-1)}.$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} xy^{(n)} + ny^{(n-1)} &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \\ \iff (-1)^n x^{n+1} y^{(n)} - (-1)^{n-1} n x^n y^{(n-1)} &= -(n-1)! \\ \iff \frac{(-1)^n x^{n+1} y^{(n)}}{n!} - \frac{(-1)^{n-1} x^n y^{(n-1)}}{(n-1)!} &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{(-1)^n x^{n+1} y^{(n)}}{n!} - xy = \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{k} \right).$$

故

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left( \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{k} \right) - \ln x \right).$$


(4) 注意到  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$ , 则  $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right)$ .

(5) 注意到  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ , 故

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left( \frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \left[ \frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^n} [(x+i)^n - (x-i)^n] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^n} \left[ \left( \sqrt{1+x^2} e^{i \arctan \frac{1}{x}} \right)^n - \left( \sqrt{1+x^2} e^{-i \arctan \frac{1}{x}} \right)^n \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \left( e^{i \arctan \frac{1}{x}} - e^{-i \arctan \frac{1}{x}} \right) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \cdot 2i \cdot \sin \left( n \arctan \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin \left( n \arctan \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

□

**例题 3.5** 设  $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , 计算  $f^{(n)}(0), n \in \mathbb{N}$ .

 **笔记** 此类问题都是通过背 Taylor 公式之后通过拼凑来得到  $f^{(n)}(0)$ , 这是因为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**解** 注意到

$$\begin{aligned} \left[ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]' &= [\operatorname{arcsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{广义二项式定理}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^n x^{2n}, \end{aligned}$$

于是

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-\frac{1}{2}}^n}{2n+1} x^{2n+1} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-\frac{1}{2}}^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1} \\
 &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

从而  $f(x) = x^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+3}$ , 因此

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 6, & n=3 \\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!(2m+3)!}{m! \cdot 2^m(2m+1)}, & n=2m+3, m=1, 2, \cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$


□

### 命题 3.1

$$\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-1, 1).$$

**例题 3.6** 生成级数或者建立递推法求解高阶导数值 对  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

- (1) 设  $f(x) = \arcsin^2 x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .
- (2) 设  $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .
- (3) 设  $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m, m \in \mathbb{N}$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .
- (4) 设  $f(x) = \arctan^2 x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

 **笔记** 此类问一般是先建立函数满足的微分方程, 然后用乘积求导法则或者形式幂级数对比系数来得到导数的递推, 从而完成了证明.

**解**

(1) **解法一:** 注意到

$$f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} f' = 2 \arcsin x,$$

令  $y = f(x)$ , 则对上式两边同时求导得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f' + \sqrt{1-x^2} f'' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \iff -xy' + (1-x^2)y'' = 2.$$

再对上式两边同时对  $x$  求  $n (n \geq 2)$  阶导, 得

$$\begin{aligned}
 &[-xy' + (1-x^2)y'']^{(n)} = 2^{(n)} \\
 \iff &-[ny^{(n)} + xy^{(n+1)}] + \left[ \binom{n}{2} \cdot (-2)y^{(n)} + \binom{n}{1}(-2x)y^{(n+1)} + (1-x^2)y^{(n+2)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

将  $x=0$  代入上式得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0), \forall n \geq 2. \quad (3.2)$$

显然上式对  $n=1$  也成立. 又注意到  $f''(0)=2$ , 因此对  $\forall n \in \mathbb{N}_1$ , 由(3.2)式可得

$$\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)} = 4n^2 \Rightarrow \frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)} = \prod_{i=1}^n 4i^2 \Rightarrow f^{(2n+2)}(0) = 2^{2n+1}(n!)^2.$$

显然上式对  $n=0$  也成立. 故

$$f^{(2n+2)}(0) = 2^{2n+1}(n!)^2, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

又  $f'''(0)=0$ , 故由(3.2)式可得

$$f^{(2n-1)}(0) = (2n-1)^2 f^{(2n-3)}(0) = \cdots = [(2n-1)!!]^2 f^{(3)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

解法二:注意到

$$f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} f' = 2 \arcsin x,$$

令  $y = f(x)$ , 则对上式两边同时求导得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f' + \sqrt{1-x^2} f'' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \iff -xy' + (1-x^2)y'' = 2. \quad (3.3)$$

因为  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 所以由 Taylor 公式可知

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

其中  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . 再将上式代入(3.3)式可得

$$\begin{aligned} 2 &= -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - n(n-1) a_n] x^n. \end{aligned}$$

比较上式两边系数, 得对  $\forall n \in \mathbb{N}_1$ , 都有

$$\begin{aligned} &(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - n(n-1) a_n = 0 \\ \iff &(n+2)(n+1) \cdot \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} - n \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - n(n-1) \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \\ \iff &f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

又  $f''(0) = 2$ , 因此对  $\forall n \in \mathbb{N}_1$ , 由(3.4)式可得

$$\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)} = 4n^2 \Rightarrow \frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)} = \prod_{i=1}^n 4i^2 \Rightarrow f^{(2n+2)}(0) = 2^{2n+1} (n!)^2.$$

显然上式对  $n=0$  也成立. 故

$$f^{(2n+2)}(0) = 2^{2n+1} (n!)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

又  $f'''(0) = 0$ , 故由(3.4)式可得

$$f^{(2n-1)}(0) = (2n-1)^2 f^{(2n-3)}(0) = \cdots = [(2n-1)!!]^2 f^{(3)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

(2)

(3)

(4)

□

### 命题 3.2

设  $f$  在  $a$  处  $n+1$  阶连续可导的, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

▲

**注** 不妨设  $a=0, f(a)=0$  的原因: 先证不妨设  $f(a)=0$  成立. 假设  $f(a) \neq 0$  时结论成立, 则当  $f(a) \neq 0$  时, 令  $g(x) = f(x) - f(a)$ , 则  $g(a) = 0$ , 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{g(x)}{x - a} \right] = \frac{g^{(n+1)}(a)}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

故可以不妨设  $f(a) = 0$ .

再证不妨设  $a = 0$  成立. 假设  $a = 0$  时结论成立, 则当  $a \neq 0$  时, 令  $g(x) = f(x + a)$ , 则由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{g(x)}{x} \right] = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x)}{x-a} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x+a)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{g(x)}{x} \right] \\ &= \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}. \end{aligned}$$

故可以不妨设  $a = 0$ .

**证明** 不妨设  $a = 0, f(a) = 0$ , 不妨设  $a = 0, f(a) = 0$ , 从而

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}} = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (-x)^k.$$

于是由 L'Hospital 法则可得


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] &= n!(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (-x)^k}{x^{n+1}} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital 法则}}{=} n!(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x) (-x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x) (-x)^{k-1}}{(n+1)x^n} \\ &= n!(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x) (-x)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k)!} f^{(k+1)}(x) (-x)^k}{(n+1)x^n} \\ &= n!(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x) (-x)^n}{(n+1)x^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}. \end{aligned}$$

□

**例题 3.7** 设  $f \in C^\infty(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$  满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, n-1, f^{(n)}(0) \neq 0.$$

证明:  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^n}, & x \neq 0 \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, & x = 0 \end{cases}$  在  $\mathbb{R}$  上无穷次可微.

 **笔记** 本题不能对 Taylor 公式的 peano 余项求导来说明  $g$  可微分性, 这是不严格的.

**证明** 当  $n = 0$  时,  $g = f \in C^\infty(\mathbb{R})$  显然成立. 假设命题对  $n \in \mathbb{N}$  成立, 考虑  $n+1$  的情形. 令  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 则

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{\frac{f(x)}{x}}{x^n} = \frac{h(x)}{x^n}. \quad (100.119)$$

对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 由 **命题 3.2** 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} h^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{x} \right]^{(k)} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}.$$

于是由 **导数极限定理** 可知  $h^{(k)}(x) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$ , 故  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ . 并且

$$h^{(j)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h^{(j)}(x) = \frac{f^{(j+1)}(0)}{j+1} = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

$$h^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \neq 0. \quad (3.5)$$

因此  $h(x)$  满足归纳假设条件, 进而由归纳假设及(3.4)(3.5)式可知

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^{n+1}} & , x \neq 0 \\ \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{h(x)}{x^n} & , x \neq 0 \\ \frac{h^{(n)}(0)}{n!} & , x = 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

因此由数学归纳法可知, 结论成立. □

## 第四章 微分中值定理

### 4.1 Hermite 插值定理

#### 定理 4.1 (Taylor 定理)

(1) 带 Peano 余项:

设  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导. 则  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $x \in U(x_0, \delta)$  时, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

(2) 带 Lagrange 余项:

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在  $n$  阶连续导数, 且  $(a, b)$  上存在  $n+1$  阶导数,  $x_0$  为  $[a, b]$  内一定点, 则对于任意的  $x \in [a, b]$ , 在  $x, x_0$  之间存在一个数  $\xi$  使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

(3) 带积分型余项:

设  $f(x)$  定义是在  $U(x_0, \delta)$  上的函数  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n+1$  阶可导, 对任意  $x \in U(x_0, \delta)$ ,  $t$  在  $x$  与  $x_0$  之间, 都有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt.$$

(4) 带 Cauchy 型余项:

设  $f(x)$  定义是在  $U(x_0, \delta)$  上的函数  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n+1$  阶可导, 对任意  $x \in U(x_0, \delta)$ , 都存在  $\xi$  在  $x$  与  $x_0$  之间, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n (x - x_0).$$

#### 证明

(1) 带 Peano 余项:

(2) 带 Lagrange 余项:

(3) 带积分型余项:

(4) 带 Cauchy 型余项:

□

#### 定理 4.2 (Hermite 插值定理)


给定  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < b$  和非负整数  $s_j, j = 0, 1, 2, \cdots, m$ . 设  $f \in C^{\sum_{j=1}^m (s_j+1)-1} [a, b]$  且  $f \in D^{\sum_{j=1}^m (s_j+1)} (a, b)$ , 设  $p(x)$  满足条件: 对闭区间  $[a, b]$  中的  $m$  个点  $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b, s_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, 2, \cdots, m$ , 都有唯一的次数不超过  $\sum_{j=1}^m (s_j + 1) - 1$  的多项式  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 并且

$$p^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), i = 0, 1, \cdots, s_j, j = 1, 2, \cdots, m.$$

并称满足上述条件的多项式  $p(x)$  为 **Hermite 插值多项式**, 则对每个  $x \in [a, b]$ , 都存在  $\theta \in (\min\{x, x_1\},$

$\max\{x, x_m\}$ , 使得

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(\sum_{j=1}^m (s_j+1))}(\theta)}{\left(\sum_{j=1}^m (s_j+1)\right)!} (x-x_1)^{s_1+1} (x-x_2)^{s_2+1} \cdots (x-x_m)^{s_m+1}.$$

 **笔记**  $p(x)$  的求法: 先由各插值点的次数确定  $p(x)$  的最高次数 (即  $\sum_{j=1}^m (s_j+1) - 1$ ), 再由方程  $p^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), i = 0, 1, \cdots, s_j, j = 1, 2, \cdots, m$ . 直接解出.

**证明**


□

#### 命题 4.1 (Lagrange 插值公式)

设  $f \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$ , 证明: 对  $\forall x \in [a, b]$ , 存在  $\theta \in (a, b)$  使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{f''(\theta)}{2} (x-a)(x-b).$$

**注** 考试中先用 K 值法证明, 再直接用.

 **笔记** K 值法: 先令要证的中值等式中的高阶导数中值点 (本题为  $f''(\theta)$ ) 为常数, 再构造函数由 Rolle 中值定理推出结论即可.

**证明** 当  $x = a$  或  $b$  时, 结论显然成立.

对  $\forall x \in (a, b)$ , 固定  $x$ , 记

$$K = \frac{2 \left[ f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right]}{(x-a)(x-b)}.$$

令  $g(y) = f(y) - \frac{y-b}{a-b} f(a) - \frac{y-a}{b-a} f(b) - \frac{K}{2} (y-a)(y-b)$ , 则

$$g'(y) = f'(y) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a} - \frac{K}{2} (2y-a-b), \quad g''(y) = f''(y) - K.$$

从而  $g(a) = g(b) = g(x) = 0$ , 由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\theta_1 \in (a, x), \theta_2 \in (x, b)$ , 使得

$$g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在  $\theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset (a, b)$ , 使得  $g''(\theta) = f''(\theta) - K = 0$ , 即  $f''(\theta) = K$ .

□

#### 定理 4.3 (带积分型余项的 Lagrange 插值公式)

设  $f$  是  $[a, b]$  上的二阶可微函数且  $f''$  在  $[a, b]$  可积, 则成立

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \int_a^b f''(y) k(x, y) dy,$$

这里

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} (y-b), & b \geq y \geq x \geq a, \\ \frac{b-x}{b-a} (a-y), & b \geq x \geq y \geq a. \end{cases}$$

特别的, 若还有  $f(a) = f(b) = 0$ , 则有

$$f(x) = \int_a^b f''(y) k(x, y) dy. \quad (4.1)$$

□

 **笔记**  $k(x, y)$  也叫 Green 函数. 容易验证  $|k(x, y)| \leq |k(x, x)|$ .



**证明** 考虑

$$g(x) = f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b), x \in [a, b],$$

则有  $g''(x) = f''(x)$ ,  $g(a) = g(b) = 0$ . 因此只需对  $g$  证明式(4.1).

事实上, 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(y)k(x, y)dy &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x g''(y)(a-y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b g''(y)(y-b)dy \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[ (a-x)g'(x) - \int_a^x g'(y)dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[ -g'(x)(x-b) + \int_x^b g'(y)dy \right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} [(a-x)g'(x) + g(x)] + \frac{x-a}{b-a} [-g'(x)(x-b) + g(x)] \\ &= g(x). \end{aligned}$$

这就证明了(4.1)式. □

**例题 4.1** 设  $f \in D^3[0, 1]$  满足  $f(0) = -1$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ , 证明对任何  $x \in [0, 1]$ , 存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6}f'''(\theta).$$

**证明** 当  $x = 0$  或  $1$  时, 结论显然.

对  $\forall x \in (0, 1)$ , 固定  $x$ , 记  $K = \frac{6[f(x) + 1 - x^2]}{x^2(x-1)}$ . 令  $g(y) = f(y) + 1 - y^2 - \frac{y^2(y-1)}{6}K$ , 则

$$g'(y) = f'(y) - 2y - \frac{y(y-1)}{3}K - \frac{y^2}{6}K,$$

$$g''(y) = f''(y) - 2 - \frac{2y-1}{3}K - \frac{y}{3}K,$$

$$g'''(y) = f'''(y) - K.$$

从而  $g(0) = g(1) = g(x) = 0$ , 由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\theta_1 \in (0, x)$ ,  $\theta_2 \in (x, 1)$ , 使得

$$g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$

又由  $f'(0) = 0$  可知

$$g'(0) = g'(\theta_1) = g'(\theta_2) = 0.$$


再由 Rolle 中值定理可得, 存在  $\xi_1 \in (0, \theta_1)$ ,  $\xi_2 \in (\theta_1, \theta_2)$ , 使得

$$g''(\xi_1) = g''(\xi_2) = 0.$$

于是再由 Rolle 中值定理可得, 存在  $\theta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ , 使得  $g'''(\theta) = f'''(\theta) - K$ . 即  $f'''(\theta) = K$ . □

**例题 4.2** 设  $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$  满足  $f(0) = f(2) = 0$ ,  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (0, 2)$ . 证明

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq M.$$

 **笔记** 靠近哪个点就用哪个点的插值多项式.(原因是: 越靠近插值点, 拟合的效果越好)

**证明** 当  $x \in [0, 1]$ , 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\theta(x))}{1!}(x-0) = f'(\theta(x))x,$$

于是

$$|f(x)| \leq |f'(\theta(x))| \cdot x \leq Mx. \quad (4.2)$$

当  $x \in [1, 2]$ , 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\zeta(x))}{1!}(x-2) = f'(\zeta(x))(x-2),$$

于是

$$|f(x)| \leq |f'(\zeta(x))| \cdot |x-2| \leq M(2-x). \quad (4.3)$$


结合(4.2)和(4.3), 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 (Mx) dx + \int_1^2 (M(2-x)) dx = M. \end{aligned}$$

□

**例题 4.3** 设  $f \in D^2[0, 1]$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $|f''(x)| \leq M$ , 证明

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}.$$

 **笔记** 最多可以拟合  $f(0), f(1)$  两个条件, 需要插值一次多项式, 余项需要 2 阶导数, 条件完美符合. 因此先由 Hermite 插值定理 (Lagrange 插值公式) 直接写出插值多项式和余项: 存在  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1), \forall x \in [0, 1].$$

但是注意考试时, 需要先用 K 值法证明上式再使用.

**证明** 由 Hermite 插值定理可知, 存在  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1), \forall x \in [0, 1].$$


积分并取绝对值就有

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2} x(x-1) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\theta(x))}{2} \right| |x(x-1)| dx \leq \frac{M}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{M}{12}.$$

□

**例题 4.4** 设  $f \in D^2[a, b]$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

 **笔记** 题目并没有明确给出插值点的相关条件, 需要我们自己选取合适的插值点. (一般插值点都是特殊点, 比如: 端点、中点、极值点等)

我们观察到需要证明的等式中含有  $a, b$  两点并且  $f$  2 阶可导, 因此直接选取这两点作为插值点即可.

**注** 考试中下述证明中的 Lagrange 插值公式也需要先用 K 值法证明才能使用.

本题也可以直接用 K 值法证明. 只需令  $g(y) = \int_a^y f(x) dx = (y-a) \frac{f(a)+f(y)}{2} - \frac{(y-a)^3}{12} K$  即可.

**证明** 由 Lagrange 插值公式可知, 对  $\forall x \in [a, b]$ , 存在  $\theta(x) \in (a, b)$  使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{f''(\theta(x))}{2} (x-a)(x-b). \quad (4.4)$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\theta(x)) (x-a)(x-b) dx. \quad (4.5)$$

由(4.4)式可得

$$f''(\theta(x)) = \frac{2 \left[ f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right]}{(x-a)(x-b)} \in C(a, b).$$

又由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f''(\theta(x)) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2 \left( f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{a-b} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b)}{x-a} \\ &= \frac{2}{a-b} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2}{b-a} \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(a) \right], \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f''(\theta(x)) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{2 \left( f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{b-a} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b)}{x-a} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{b-a} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}]}{b-a}.$$

从而  $f''(\theta(x))$  可以连续延拓到  $[a, b]$  上, 又因为改变有限个点的函数值后, 其积分结果不变, 所以可以不妨设  $f''(\theta(x)) \in C[a, b]$ . 于是由积分中值定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{1}{2} \int_a^b f''(\theta(x))(x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \quad (4.6)$$


利用(4.5)和(4.6)式可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi). \end{aligned}$$

□

**例题 4.5** 设  $f \in C^2[a, b]$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

 **笔记** 本题需要我们选取合适的插值点和插值条件, 这里我们应该选  $f(\frac{a+b}{2}), f'(\frac{a+b}{2})$  作为插值条件, 插值多项式为 1 次, 余项需要 2 阶导数.

**注** 本题也可以直接用 K 值法证明.

**证明** 由 Taylor 定理 (Hermite 插值定理) 可知, 存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\theta)}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边同时积分, 并由积分中值定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \frac{f''(\theta)}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \end{aligned}$$

□

**例题 4.6** 设  $f \in C^2[0, 1]$  满足  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

**证明** 由带积分余项的 Lagrange 插值定理可知, 我们有

$$f(x) = \int_0^1 f''(y) k(x, y) dy, \quad \text{其中} \quad k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a, \\ \frac{b-a}{b-x}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \int_0^1 |f''(y)| |k(x, y)| dy \leq |k(x, x)| \int_0^1 |f''(y)| dy \\ &= x(1-x) \int_0^1 |f''(y)| dy \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f''(y)| dy. \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{\frac{1}{4} \int_0^1 |f''(y)| dy} dx = \frac{4}{\int_0^1 |f''(y)| dy} \int_0^1 |f''(x)| dx = 4.$$

但实际上, 我们可以得到

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x) \int_0^1 |f''(y)| dy} dx = \frac{1}{\int_0^1 |f''(y)| dy} \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x)} dx.$$

□

## 4.2 函数构造类

### 4.2.1 单中值点问题 (一阶构造类)

#### 例题 4.7

1. 设  $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$  满足  $f(0) = f(2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ . 则存在  $\xi \in (0, 2)$  使得


$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$

2. 设  $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ ,  $f(0) = 0$ , 证明: 存在  $u \in (0, 1)$ , 使得

$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 设  $f \in C[-1, 2] \cap D(-1, 2)$  且有  $f(-1) = f(2) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 1$ . 证明对任何实数  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 都存在  $\xi \in (-1, 2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[ f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

 **笔记** 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

**注**

1. **Step1** 考虑微分方程  $y' = \frac{2x-y}{x}$ , 解得  $y = \frac{c}{x} + x$ .  
**Step2** 分离常数  $c$  得  $c = x(y-x)$ , 常数变易得构造函数  $c(x) = x(f(x) - x)$ .
2. **Step1** 考虑微分方程  $y' = \frac{xy}{1-x}$ , 解得  $y = \frac{ce^{-x}}{x-1}$ .  
**Step2** 分离常数  $c$  得  $c = e^x(x-1)y$ , 常数变易得构造函数  $c(x) = e^x(x-1)f(x)$ .
3. **Step1** 考虑微分方程  $y' = \lambda \left[ y - \frac{x}{2} \right] + \frac{1}{2}$ , 解得  $y = ce^{\lambda x} + \frac{x}{2}$ .  
**Step2** 分离常数  $c$  得  $c = \frac{y - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$ , 常数变易得构造函数  $c(x) = \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$ .

**证明**

1. 由  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$  及  $f \in C[0, 2]$  可知

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) + 2 = 2.$$

从而

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5.$$

构造函数  $c(x) = x(f(x) - x)$ , 我们求得

$$c'(x) = f(x) - 2x + xf'(x). \quad (4.7)$$

注意到

$$c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4.$$

于是由 Lagrange 中值定理得  $\alpha \in (0, 1), \beta \in (1, 2)$ , 使得

$$c'(\alpha) = \frac{c(1) - c(0)}{1 - 0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1) - c(2)}{1 - 2} = -5.$$

由导数介值定理知存在  $\xi \in (0, \eta)$  使得  $c'(\xi) = 0$ . 由(4.7)知

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$

这就完成了证明.

2. 构造  $c(x) = e^x(x-1)f(x)$ , 则  $c(0) = c(1) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $u \in (0, 1)$ , 使得  $c'(u) = 0$ , 这恰好是

$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 构造  $c(x) = \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$ . 注意到

$$c(-1) = 0, c(2) = -\frac{3}{2e^{2\lambda}}, c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

由零点定理知存在  $\theta \in (\frac{1}{2}, 2)$ , 使得  $c(\theta) = 0$ . 再由罗尔中值定理知存在  $\xi \in (-1, \theta) \subset (-1, 2)$ , 使  $c'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) = \lambda \left[ f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}.$$

□

**例题 4.8** 设  $f \in D[0, 1]$  且  $f(0) > 0, f(1) > 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

**注** 虽然本题直接考虑微分方程:  $y' + 3y^2 = 0$  解出  $y$ , 然后常数变易也不难得到构造函数. 但是下述证明的方法旨在介绍一种新的解决这类问题的方法.

**笔记** 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是要把部分  $f$  视为已知函数来构造, 对于本题, 即  $3f^2$  视为已知的函数. 考虑  $y' + 3f^2y = 0$ . 解得  $y = ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$ , 分离变量得构造函数  $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$ .

**证明** **证法一:** 构造函数  $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$ , 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt} [f'(x) + 3f^3(x)].$$

以及由**积分中值定理**, 我们知道存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

注意到若  $f$  只有一个零点, 则因为  $f(0) > 0, f(1) > 0$ , 我们知道  $f(x) > 0, \forall x \in [0, \theta) \cup (\theta, 1]$ , 从而  $\int_0^1 f(x)dx > 0$ , 这就是一个矛盾! 于是存在  $\theta_1 \neq \theta_2$ , 使得  $f(\theta_1) = f(\theta_2) = 0$ . 现在就有  $c(\theta_1) = c(\theta_2) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $c'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

**证法二:** 构造函数  $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$ , 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt} [f'(x) + 3f^3(x)].$$

以及由**积分中值定理**, 我们知道存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

从而  $c(\theta) = 0$ . 因为  $f(0), f(1) > 0$ , 所以  $c(0), c(1) > 0$ . 又由  $c \in C[0, 1]$ , 故  $c(x)$  在  $[0, 1]$  上可取到最大、最小值. 由于  $c(\theta) = 0 < c(0), c(1)$ , 因此  $c(x)$  只能在  $(0, 1)$  上可取到最小值, 即存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $c(\xi) \leq c(x), \forall x \in [0, 1]$ . 由费马引理可知  $c'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

□

**例题 4.9** 设  $f \in C^1[0, 1]$ , 证明存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得

$$f'(\xi) = \int_0^1 (12x - 6)f(x)dx.$$

**笔记** 核心想法: **分部积分转移导数, 但是需要控制非积分部分为零.**

**注**  $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx$  的原因: 我们希望利用分部积分后能够直接转移导数而没有多余部分, 因此我们待定  $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)'f(x)dx$ , 即  $12x - 6 = (ax^2 + bx + c)'$ . 分部积分得到

$$\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)'f(x)dx = (ax^2 + bx + c)f(x)|_0^1 - \int_0^1 (ax^2 + bx + c)f'(x)dx.$$

我们希望  $(ax^2 + bx + c)f(x)|_0^1 = (a + b + c)f(1) - cf(0) = 0$ , 即希望  $x = 0, 1$  恰好是  $ax^2 + bx + c$  的根, 并且  $12x - 6 = (ax^2 + bx + c)'$ . 从而

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \\ 2a = 12 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -6 \\ c = 0 \end{cases}.$$

由此可知, 满足我们期望的二次函数只有  $6x^2 - 6x$ , 即  $\int_0^1 (12x - 6)f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx$ .

**证明**

$$\begin{aligned} \int_0^1 (12x - 6)f(x)dx &= \int_0^1 (6x^2 - 6x)'f(x)dx \xrightarrow{\text{分部积分}} - \int_0^1 (6x^2 - 6x)f'(x)dx \\ &\xrightarrow{\text{积分中值定理}} f'(\xi) \int_0^1 (6x - 6x^2)dx = f'(\xi), \xi \in [0, 1]. \end{aligned}$$

□

#### 例题 4.10

1. 设  $f \in D^2[0, 1]$  使得  $f(0) = f(1)$ , 证明存在  $\eta \in (0, 1)$  使得

$$f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1 - \eta}.$$

2. 设  $f \in D^2[0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ , 证明存在  $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得

$$f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

**注**

1. 考虑微分方程  $y'' = \frac{2y'}{1-x}$ , 解得  $y' = \frac{c}{(1-x)^2}$ , 常数变易得到构造函数  $c(x) = (1-x)^2 f'(x)$ .  
2. 虽然我们可以通过解微分方程得到构造函数, 但是也不要忘记直接猜测构造函数的想法. 当需要考虑的微分方程比较难解时, 就只能猜测构造函数.

考虑微分方程:  $y'' = 2yy'$ , 解得  $y' = y^2 + c$ , 得到构造函数  $c(x) = f'(x) - f^2(x)$ . 但是根据这个构造函数结合已知条件再利用中值定理无法得到结论. ( $f(\frac{\pi}{4}) = 1$  用不了) 因此需要构造更加具体的函数才行.

然而原问题等价于利用 Rolle 中值定理找一个中值点  $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得  $c'(\xi) = 0$ . 但由条件只能得到  $c(0) = 1, c(\frac{\pi}{4})$  无法确定. 因此我们希望还能找一个点  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得  $c(x_0) = f'(x_0) - f^2(x_0) = 1$ .

将这个看作一个新的中值问题, 即已知设  $f \in D^2[0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ , 证明: 存在  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得

$$c(x_0) = f'(x_0) - f^2(x_0) = 1.$$

考虑微分方程:  $y' - y^2 = 1$ , 解得  $\arctan y = x + C$ , 常数变易得到新的构造函数  $g(x) = \arctan f(x) - x$ . 由条件可知  $g(0) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$ , 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得  $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - f^2(x_0) = 1$ . 从而找到了满足我们需求的中值点  $x_0$ , 故结论得证. (具体证明见下述证明)

**证明**

1. 令  $c(x) = (1-x)^2 f'(x)$ , 则  $c'(x) = 2(x-1)f'(x) + (1-x)^2 f''(x)$ . 由  $f(0) = f(1)$  及 Rolle 中值定理可得, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ . 从而  $c(1) = c(\xi) = 0$ , 再根据 Rolle 中值定理可得, 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$c'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$

2. 令  $c(x) = f'(x) - f^2(x)$ ,  $g(x) = \arctan f(x) - x$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x) - f^2(x) - 1}{1 + f^2(x)}$ . 进而由条件可得  $g(0) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$ ,  $g'(0) = 0$ . 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $a \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得  $g'(a) = 0$ , 即  $f'(a) = f^2(a) + 1$ . 从而  $c(a) =$

$1, c(0) = f'(0) - f^2(0) = 1$ , 故再由 Rolle 中值定理可得, 存在  $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得


$$c(1) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

□

## 4.2.2 多中值点问题

**例题 4.11** 设  $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$  且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明存在互不相同的  $\lambda, \mu \in (0, 1)$  使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

 **笔记** 核心想法: 插入一个点  $c$ , 将两个中值点问题转换为如何确定这单个插入点  $c$  的问题.

**注** 思路分析: 待定  $c \in (0, 1)$ , 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在  $\lambda \in (0, c), \mu \in (c, 1)$ , 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

需要

$$2 = f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c} \left[ 1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1} \right],$$

只需找到一个  $c \in (0, 1)$  使得上式成立. 但是直接考虑上式比较困难, 我们希望能找到一个特殊的  $c$  从而将上式化简. 因此待定  $k$ , 我们希望  $f(c)$  同时满足  $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = k$  (这里期望  $f(c)$  满足  $\frac{f(c)}{c} = k$  也可以), 从而上式就转化为

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{kc - k + 1}{c} \cdot (k + 1) \Leftrightarrow (k^2 + k - 2)c - (k^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (k - 1)[(k + 2)c - k - 1] = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ 或 } k = \frac{1 - 2c}{c - 1}. \end{aligned}$$

若取  $k = 1$ , 则我们只需找到一个  $c \in (0, 1)$ , 使得  $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = 1$ , 即  $f(c) = c$ . 此时令  $g(x) = f(x) - x$ , 则现在我们只需找到一个  $c \in (0, 1)$ , 使得  $g(c) = 0$  即可. 但是由条件可知  $g(0) = g(1) = 0$ , 无法用中值定理直接找出  $c \in (0, 1)$ , 使得  $g(c) = 0$ . 故取  $k = 1$  不能找到满足我们的需求的  $c$ .

若取  $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$ , 则我们只需找到一个  $c \in (0, 1)$ , 使得  $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = \frac{1 - 2c}{c - 1}$ , 即  $f(c) = 2 - 2c$ . 此时令  $g(x) = f(x) + 2x - 2$ , 则现在我们只需找到一个  $c \in (0, 1)$ , 使得  $g(c) = 0$  即可. 由条件可知  $g(0) = -2, g(1) = 1$ , 从而由连续函数介值定理可得, 存在  $c \in (0, 1)$ , 使得  $g(c) = 0$ . 故取  $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$  能找到满足我们的需求的  $c$ , 进而就确定了满足题目要求的  $\lambda$  和  $\mu$ .

**证明** 令  $g(x) = f(x) + 2x - 2$ , 则由条件可知  $g(0) = -2, g(1) = 1$ , 从而由连续函数介值定理可得, 存在  $c \in (0, 1)$ , 使得  $g(c) = 0$ , 即  $f(c) = 2 - 2c$ . 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道存在  $\lambda \in (0, c), \mu \in (c, 1)$ , 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$


再结合  $f(c) = 2 - 2c$  可得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c} \left[ 1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1} \right] = 2.$$

故结论得证. □

**例题 4.12** 设  $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$  使得  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 正实数满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ . 证明存在互不相同的  $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, 1)$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1.$$

 **笔记** 核心想法: 插入  $n - 1$  个点  $y_i$ , 将  $n$  个中值点问题转换为如何确定这些插入点  $y_i$  的问题.

**注** 思路分析: 证明的想法就是插入  $n - 1$  个点  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$  之后用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是需要满足

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(y_i - y_{i-1})}{f(y_i) - f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = 1.$$

而为了得到(4.8), 我们只需反复用介值定理即可. 由条件可知  $0 = f(0) < \lambda_1 < f(1) = 1$ , 从而由连续函数介值定理可得, 存在  $y_1 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_1) = \lambda_1$ . 进而  $\lambda_1 = f(y_1) < \lambda_1 + \lambda_2 < f(1) = 1$ , 于是再由连续函数介值定理可得, 存在  $y_2 \in (y_1, 1)$ , 使得  $f(y_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ . 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

其中  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1$ .

**证明** 由条件可知  $0 = f(0) < \lambda_1 < f(1) = 1$ , 从而由连续函数介值定理可得, 存在  $y_1 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_1) = \lambda_1$ . 进而  $\lambda_1 = f(y_1) < \lambda_1 + \lambda_2 < f(1) = 1$ , 于是再由连续函数介值定理可得, 存在  $y_2 \in (y_1, 1)$ , 使得  $f(y_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ . 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

其中  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1$ . 再利用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(y_i - y_{i-1})}{f(y_i) - f(y_{i-1})} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = 1.$$

故结论得证. □

### 4.2.3 只能猜的类型

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.


**例题 4.13** 设  $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$  且  $f(0) = 0$  且  $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1]$ , 证明对任何  $\alpha > 0$ , 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得

$$\alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

**注** 注意到

$$\alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) f(1-\xi) - f(\xi) f'(1-\xi) = 0.$$

因此想到构造函数  $g(x) = f^\alpha(x)f(1-x)$ .

 **笔记** 不妨设  $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$  的原因: 如果  $f(x) < 0$ , 则  $f^\alpha(x)$  可能无意义.

由  $f \in C[0, 1]$  且  $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1]$  可知,  $f(x)$  在  $(0, 1]$  要么恒大于零, 要么恒小于零. 否则由零点存在定理得到矛盾! 假设结论对  $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$  成立, 则当  $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1]$  时, 令  $F(x) = -f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$ , 则  $F(0) = 0$ . 从而由假设可知, 对  $\forall \alpha > 0$ , 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\alpha \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = \frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)} \Leftrightarrow \alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

故不妨设成立.

**证明** 不妨设  $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1]$ . 对  $\forall \alpha > 0$ , 令  $g(x) = f^\alpha(x)f(1-x)$ , 则  $g(0) = g(1) = 0$ . 从而由 Rolle 中值定理可



知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) = \alpha f^{\alpha-1}(\xi) f'(\xi) f(1-\xi) - f^\alpha(\xi) f'(1-\xi) \Rightarrow \alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□

### 4.3 中值极限问题

此类问题有一个固定操作, 即对中值点再套一次中值定理, 使得中值参数可以暴露出来, 从而解出参数求极限得到证明.

**例题 4.14** 设  $f \in C^2[0, 1]$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) \neq 0$ , 证明对任何  $x \in (0, 1)$ , 存在  $\xi(x) \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^x f(t) dt = f(\xi(x))x,$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**证明** 对  $\forall x \in (0, 1)$ , 由积分中值定理可知, 存在  $\xi(x) \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^x f(t) dt = f(\xi(x))x.$$

从而对  $\forall x \in (0, 1)$ , 由 Taylor 定理可知, 存在  $\theta(x) \in (0, \xi(x))$ , 使得

$$f(\xi(x)) = f(0) + f'(0)\xi(x) + \frac{1}{2}f''(\theta(x))\xi^2(x) = f(0) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x).$$

从而将  $\int_0^x f(t) dt = f(\xi(x))x$  代入上式可得

$$\int_0^x f(t) dt = x \left[ f(0) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x) \right].$$

故  $f''(\theta(x))\xi^2(x) = 2 \left( \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} - f(0) \right)$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(\theta(x)) = f''(0).$$

因此由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi^2(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(\theta(x))\xi^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \left( \int_0^x f(t) dt - x f(0) \right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(f(x) - f(0))}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{3x} = \frac{f''(0)}{3}. \end{aligned}$$

又  $f''(0) \neq 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi^2(x)}{x^2} = \frac{1}{3}$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . □

**例题 4.15** 设  $f$  在  $x = a$  的邻域  $n + p$  阶可导且  $p \geq 1$ , 于是有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \quad (4.9)$$

如果对于  $j = 1, 2, \dots, p-1$  都有  $f^{(n+j)}(a) = 0, f^{(n+p)}(a) \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c-a}{x-a}$ .

**证明** 由 Taylor 中值定理及条件可知, 存在  $\theta \in U(a)$ , 使得

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^p. \quad (4.10)$$

从而结合上式, 再利用带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f^{(n+p)}(\theta) = \lim_{x \rightarrow a^+} p! \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{(c-a)^p} = \lim_{x \rightarrow a^+} p! \frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{p!}(c-a)^p + o((c-a)^p)}{(c-a)^p} = f^{(n+p)}(a).$$

于是利用(4.9)(4.10)式,再结合带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{c-a}{x-a} \right)^p &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ p! \cdot \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)} \right] = \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ p! \cdot \frac{\frac{n! [f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j]}{(x-a)^n} - f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ n! p! \cdot \frac{f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j}{(x-a)^{n+p} f^{(n+p)}(\theta)} \right] = \frac{n! p!}{f^{(n+p)}(a)} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!} (x-a)^{n+p} + o[(x-a)^{n+p}]}{(x-a)^{n+p}} \\&= \frac{n! p!}{(n+p)!}.\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c-a}{x-a} = \sqrt[p]{\frac{n! p!}{(n+p)!}}.$$

□

## 4.4 性态分析类

### 定理 4.4 (积分中值定理)

(1)  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $g(x)$  是  $[a, b]$  上的非负递减函数, 则存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\zeta f(x)dx.$$

(2)  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $g(x)$  是  $[a, b]$  上的非负递增函数, 则存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_\zeta^b f(x)dx.$$

(3)  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $g(x)$  是  $[a, b]$  上的单调函数, 则存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\zeta f(x)dx + g(b) \int_\zeta^b f(x)dx.$$

(4)  $f(x) \in R[a, b]$  且不变号,  $g(x) \in R[a, b]$ , 则存在  $\eta$  介于  $g(x)$  上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b f(x)dx.$$

(5)  $f(x) \in R[a, b]$  且不变号,  $g(x) \in C[a, b]$ , 则存在  $\zeta \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\zeta) \int_a^b f(x)dx.$$

(6) 若 (1),(2),(3) 中再加入条件  $g(x)$  在  $(a, b)$  中不为常数, 则结论可以加强到  $\zeta \in (a, b)$ .

♡

### 定理 4.5 (Hadamard 不等式)

$f$  是  $[a, b]$  上的下凸函数, 则

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

♡

 **笔记** 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间  $[0, 1]$ .

**注** 左边的不等式证明中的线性换元构造思路: 我期望找到一个线性函数  $g(t)$ , 使得令  $x = g(t)$  换元后, 有

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=g(t)}{=} \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt.$$

即  $g(0) = a, g(1) = b$ . 因此  $g(t) = \frac{b-a}{1-0}t + a = a + (b-a)t$ . 从而

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=a+(b-a)t}{=} (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)t)dt = (b-a) \int_0^1 f((1-t)a+bt)dt.$$

**证明** 由  $f$  在  $[a, b]$  上下凸, 一方面, 我们有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(a(1-t)+bt)dt \leq \int_0^1 [(1-t)f(a)+tf(b)]dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b [f(a+b-x)+f(x)]dx \\ &\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

故结论成立.  $\square$

**例题 4.16** 若  $f$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数且  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$ , 证明存在  $\eta \in (0, 1)$  使得  $f''(\eta) < -2$ .

**注** 通过  $f''(x) + 2 \geq 0, \forall x \in (0, 1)$  来推出  $f + x^2$  在  $[0, 1]$  下凸: 实际上, 令  $g = f + x^2$ , 则  $g'' \geq 0, \forall x \in (0, 1)$ , 从而  $g$  在  $(0, 1)$  下凸. 因为  $g = f + x^2 \in C[0, 1]$  和  $g$  在  $(0, 1)$  下凸我们就有

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y), \forall x, y \in (0, 1), \lambda \in [0, 1].$$

上式中令  $x$  趋于 0 或者 1 也成立, 再令  $y$  趋于 1 或者 0 也成立. 因此  $g$  在  $[0, 1]$  下凸.

**证明** 若不然, 对任何  $x \in (0, 1)$  都有  $f''(x) \geq -2$ , 于是  $f(x) + x^2$  是  $[0, 1]$  的下凸函数. 于是由 **Hadamard 不等式** 我们知道

$$\frac{4}{3} = \int_0^1 [f(x) + x^2]dx \leq \frac{f(0) + 0^2 + f(1) + 1^2}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

矛盾! 现在存在  $\eta \in (0, 1)$  使得  $f''(\eta) < -2$ .  $\square$

#### 命题 4.2

设  $f \in C^3(\mathbb{R})$  满足

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \forall b \neq a.$$

证明:  $f$  是下凸函数.

**注** 本题对一般情况  $f \in C(\mathbb{R})$  也成立, 需要取磨光函数如 **卷积磨光核**. 详细见清疏讲义.

 **笔记** 这就是 **Hadamard 不等式** 的反向结果.

**证明** 当  $f \in C^3(\mathbb{R})$  时, 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} &\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{6}(b-a)^3} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{2}(b-a)^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f'(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \left( f''(b) - \frac{3}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{8}f''' \left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4}f''(a) \geq 0. \end{aligned}$$

因此

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

所以  $f$  是下凸函数.  $\square$

**定理 4.6 (Darboux 中值定理/导数介值定理)**

设  $f \in D[a, b]$ , 对任何介于  $f'(a), f'(b)$  之间的  $\eta$ , 存在  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = \eta$ .

**证明** 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理. 即不妨设  $f'(a) < 0 < f'(b)$ , 去找  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = 0$ . 事实上由极限保号性和

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) > 0,$$

我们知道存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x) < f(a), \forall x \in (a, a + \delta], \quad f(x) < f(b), \forall x \in [b - \delta, b).$$

因此  $f$  最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的导数为 0, 从而证毕!  $\square$

**定理 4.7 (加强的 Rolle 中值定理)**

(a): 设  $f \in D(a, b)$  且在  $[a, b]$  上  $f$  有介值性, 则若  $f(a) = f(b)$ , 必然存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\theta) = 0$ .

(b): 设  $f \in C[a, +\infty) \cap D^1(a, +\infty)$  满足  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $\theta \in (a, +\infty)$  使得  $f'(\theta) = 0$ .

**笔记** 一旦罗尔成立, 所有中值定理和插值定理都会有类似的结果, 可以具体情况具体分析.

**证明** 对于 (a): 不妨设  $f$  不恒为常数, 则可取  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) \neq f(a)$ , 不妨设  $f(x_0) > f(a)$ , 则由  $f$  的介值性, 我们知道存在  $x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, b)$ , 使得

$$f(x_1) = \frac{f(a) + f(x_0)}{2}, \quad f(x_2) = \frac{f(b) + f(x_0)}{2}.$$

因为  $f(a) = f(b)$ , 我们知道  $f(x_1) = f(x_2)$ , 由 Rolle 中值定理 ( $f \in C[x_1, x_2] \cap D(x_1, x_2)$ ) 可知, 存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\theta) = 0$ . 这就完成了 (a) 的证明.

对于 (b): 若对任何  $x \in (0, +\infty)$  使得  $f'(x) \neq 0$ , 则由导数介值性可知,  $f'$  恒大于 0 或恒小于 0 (否则, 由导数介值性可得到一个零点). 从而  $f$  在  $[0, +\infty)$  严格单调, 不妨设为递增. 现在

$$f(x) \geq f(a+1) > f(a), \quad \forall x \geq a+1,$$

于是

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq f(a+1) > f(a),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在  $\theta \in (a, +\infty)$  使得  $f'(\theta) = 0$ .  $\square$

**例题 4.17** 设  $f$  在  $[a, b]$  连续,  $(a, b)$  可微且不是线性函数, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**笔记**  $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  这个线性构造必须记忆!

**证明** 考虑

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

则  $g(a) = g(b) = 0$  且  $g$  不是常值函数. 因  $g' \leq 0$  恒成立会导致  $g$  在  $[a, b]$  递减, 从而  $0 = g(b) < g(a) = 0$ , 这不可能! 现在存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $g'(\xi) > 0$ , 即结论成立.  $\square$

**例题 4.18**

1. 设  $f \in C[0, \pi] \cap D(0, \pi)$  满足


$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0.$$

证明存在  $\xi \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

2. 设  $f \in C[0, \frac{\pi}{2}]$  满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = 0. \quad (4.11)$$

证明:  $f$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  至少有三个互不相同的零点.

 **笔记** 此类给出积分等式的问题, 往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标. 即本题我们要寻求合适的  $a, b \in \mathbb{R}$ , 考虑积分

$$\int_0^{\pi} f(x)(a \cos x + b \sin x) dx = 0.$$

一句话证明本题 1 问, 就是寻求合适的  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $a \cos x + b \sin x$  和  $f$  的符号一致. 第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合.

**证明**

1. 我们只需断言  $f$  在  $[0, \pi]$  至少有两个不相同的零点, 之后由罗尔定理就给出了存在  $\xi \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ . 由积分中值定理可知, 存在  $x_0 \in (0, \pi)$ , 使得

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = f(x_0) \int_0^{\pi} \sin x dx = 2f(x_0) = 0.$$

即  $f$  在  $(0, \pi)$  上有一个零点  $x_0$ . 若  $f$  在  $[0, \pi]$  只有一个零点, 则  $f$  在  $[0, x_0), (x_0, \pi]$  不同号 (否则  $f$  不变号, 则由  $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = 0$  知  $f = 0$ , 与  $f$  只有一个零点矛盾!). 不妨设

$$f(x) < 0, \forall x \in [0, x_0), f(x) > 0, \forall x \in (x_0, \pi].$$

此时根据条件就有

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(x - x_0) dx = \int_0^{\pi} f(x) (\cos x_0 \sin x - \sin x_0 \cos x) dx = \cos x_0 \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - \sin x_0 \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0.$$

又注意到

$$f(x) \sin(x - x_0) > 0, \forall x \in [0, \pi] \setminus \{x_0\},$$

故  $0 = \int_0^{\pi} f(x) \sin(x - x_0) dx > 0$ , 矛盾! 这就完成了证明.

2. 不妨设  $f$  不恒为 0, 由积分中值定理和(4.11)式知  $f$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  至少有一个零点且变号. 若  $f$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  只变号一次, 设在  $x_1$  变号, 则  $f$  在  $x_1$  两侧符号相反. 由(4.11)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(x - x_1) dx = 0.$$

但是  $f(x) \sin(x - x_1)$  不变号, 这就推出  $f = 0$  而矛盾! 若  $f$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  只变号两次, 设变号处为  $x_1, x_2$ , 考虑

$$g(x) \triangleq \sin x - \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \cos x + \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 - \cos x_1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

注意到

$$g'(x) = \cos x + \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \sin x = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \cos x \left( \tan x - \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\sin x_2 - \sin x_1} \right),$$

我们知  $g'$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  有且只有一个零点. 注意  $g(x_1) = g(x_2) = 0$ , 我们由罗尔中值定理知道  $g'$  在  $(x_1, x_2)$  有零点, 因此  $g$  当且仅当在  $x_1, x_2$  变号. 现由(4.11)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx = 0.$$

但是  $fg$  不变号, 故  $f = 0$ , 这就是一个矛盾! 至此我们证明了  $f$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  至少有三个互不相同的零点. □

**例题 4.19** 设  $f \in C([0, \pi])$ , 证明: 不能同时有

$$\int_0^{\pi} |f(x) - \sin x|^2 dx < \frac{\pi}{4} \quad \text{和} \quad \int_0^{\pi} |f(x) - \cos x|^2 dx < \frac{\pi}{4}. \quad (4.12)$$

又问何时上面的两个不等式成为等式?

**证明** 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\int_0^{\pi} (\sin x - f(x))(f(x) - \cos x) dx \leq \left( \int_0^{\pi} |\sin x - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^{\pi} |f(x) - \cos x|^2 dx \right)^{1/2}.$$

因此当式(4.12)中的两个不等式同时成立时,有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2 dx &= \int_0^\pi |\sin x - f(x) + f(x) - \cos x|^2 dx \\ &= \int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2 dx + \int_0^\pi |f(x) - \cos x|^2 dx + 2 \int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x) - \cos x) dx \\ &< \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

但是,另一方面,

$$\int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2 dx = \int_0^\pi (1 - \sin 2x) dx = \pi.$$

于是所证结论成立.

当式(4.12)中两个不等式都是等式时,应有

$$\int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x) - \cos x) dx = \left( \int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^\pi |f(x) - \cos x|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}.$$

此时,有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left( f(x) - \frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2 dx &= \int_0^\pi \left( \frac{\sin x - f(x)}{2} - \frac{f(x) - \cos x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^\pi |f(x) - \cos x|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x) - \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{8} = 0. \end{aligned}$$

注意到  $f$  为连续函数,有  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2}$ .

□

**例题 4.20** 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 证明:

(1) 存在唯一的  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^\xi e^{f(t)} dt = \int_\xi^1 e^{-f(t)} dt$$

(2) 对任何大于 1 的正整数  $n$ , 存在唯一的  $\xi_n \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)} dt$$

并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ .

**证明**

(1) 令  $F(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt - \int_x^1 e^{-f(t)} dt$ , 则  $F(0) = -\int_0^1 e^{-f(t)} dt < 0, F(1) = \int_0^1 e^{f(t)} dt > 0$ . 又  $F'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$ , 故由零点存在定理可知, 存在唯一的  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $\int_0^\xi e^{f(t)} dt = \int_\xi^1 e^{-f(t)} dt$ .

(2) 令  $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x e^{f(t)} dt - \int_x^1 e^{-f(t)} dt$ , 则  $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)} dt < 0, F_n(1) = \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)} dt > 0$ . 又  $F'_n(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$ , 故由零点存在定理可知, 存在唯一的  $\xi_n \in \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ , 使得  $F(\xi_n) = 0$ , 即

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)} dt. \quad (4.13)$$

因为  $\xi_n \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N}$ , 所以由聚点定理可知,  $\{\xi_n\}$  存在收敛子列. 任取  $\{\xi_n\}$  的一个收敛子列  $\{\xi_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = a$ , 则由(4.13)式可知

$$\int_{\frac{1}{n_k}}^{\xi_{n_k}} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_{n_k}}^1 e^{-f(t)} dt.$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 由归结原则得到

$$\int_0^a e^{f(t)} dt = \int_a^1 e^{-f(t)} dt.$$

由 (1) 可知  $a = \xi$ . 故由命题 1.1(a) 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ .

□

**例题 4.21**  $f \in C(0, 1)$  且存在互不相同的  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1)$  满足

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = b.$$

证明对任何  $\lambda \in (a, b)$ , 存在互不相同的  $x_5, x_6 \in (0, 1)$ , 使得  $\lambda = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$ .

**证明** 要证原结论, 等价于对  $\forall \lambda \in (a, b)$ , 存在  $x_5 \neq x_6$  且  $x_5, x_6 \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x_6) - f(x_5) = \lambda(x_6 - x_5) \Leftrightarrow f(x_6) - \lambda x_6 = f(x_5) - \lambda x_5.$$

即证  $f(x) - \lambda x$  在  $(0, 1)$  上不是单射. 又由命题 5.10 及  $f \in C(0, 1)$ , 故只须证  $f(x) - \lambda x$  不是严格单调的. 对  $\forall \lambda \in (a, b)$ , 令  $g(x) = f(x) - \lambda x$ , 不妨设  $x_2 > x_1, x_4 > x_3$ , 则

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a - \lambda < 0, \quad \frac{g(x_4) - g(x_3)}{x_4 - x_3} = b - \lambda > 0.$$

从而  $g(x_2) < g(x_1), g(x_4) > g(x_3)$ , 故  $g$  在  $(0, 1)$  上非严格单调, 结论得证.

□

**例题 4.22**  $f \in D[a, b]$ , 且在  $(a, b)$  上  $f'$  有零点. 证明: 存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}.$$

**注** 先考虑微分方程:  $y' = \frac{y - f(a)}{b - a}$ , 解出微分方程的解, 再常数变易得到构造函数:  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$ .

**证明** 令  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}$ . 由条件可设  $f'(c) = 0, c \in (a, b)$ . 从而  $g'(c) = \frac{-\frac{f(c) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}}$ .

(i) 若  $g'(c) = 0$ , 则取  $\theta = c$  即可.

(ii) 若  $g'(c) > 0$ , 则  $f(c) < f(a)$ . 从而  $g(c) = \frac{f(c) - f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}} < 0$ . 于是存在  $\delta > 0$ , 使得

$$g(x) \leq g(c) < 0, \forall x \in (c - \delta, c + \delta).$$

又因为  $g(a) = 0$ , 所以

$$g(x) \leq g(c) < g(a), \forall x \in (c - \delta, c + \delta). \quad (4.14)$$

由于  $g \in C[a, c]$ , 因此  $g$  在  $[a, c]$  上存在最小值. 由 (4.14) 式可知,  $g$  在  $[a, c]$  上的最小值一定在  $(a, c)$  上取到. 故存在  $\theta \in (a, c)$ , 使得

$$g(\theta) = \min_{x \in (a, c)} g(x).$$

由 Fermat 引理可知,  $g'(\theta) = 0$ , 即  $f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}$ .

(iii) 若  $g'(c) < 0$ , 则由 (ii) 同理可证, 存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}$ .

□

**例题 4.23** 设  $f \in C[0, 1]$  满足  $\int_0^1 f(x) dx = 0, \int_0^1 x f(x) dx = 1$ , 证明: 存在  $\xi \in [0, 1]$  使得  $|f(\xi)| = 4$ .

**笔记** 考虑题目条件的线性组合, 待定  $a \in \mathbb{R}$  考虑

$$1 = \left| \int_0^1 (x - a) f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |x - a| \cdot |f(x)| dx \leq \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 |x - a| dx.$$

为了使放缩最精确, 我们希望右边积分  $\int_0^1 |x - a| dx$  达到最小, 容易知道是  $a = \frac{1}{2}$ .

**证明** 注意到

$$1 = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot |f(x)| dx \leq \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

故  $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \geq 4$ . 又因为  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 所以由积分中值定理可知, 存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得  $f(\theta) = |f(\theta)| = 0$ . 从而由介值定理可知, 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得  $|f(\xi)| = 4$ .

□

## 4.5 微分不等式问题

### 4.5.1 一阶/二阶构造类

**例题 4.24 Gronwall 不等式** 设  $\alpha, \beta, \mu \in C[a, b]$  且  $\beta$  非负, 若还有

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds, \forall t \in [a, b]. \quad (4.15)$$

证明:

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds, \forall t \in [a, b].$$

若还有  $\alpha$  递增, 我们有

$$\mu(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

 **笔记** 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑  $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$ , 则

$$F'(t) = \beta(t)\mu(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y' = \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)y \Rightarrow y = ce^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds.$$

故得到构造函数

$$c(t) = \frac{F(t) - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds}{e^{\int_a^t \beta(s)ds}} = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du} ds, t \in [a, b].$$

**证明** 令

$$c(t) = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du} ds, t \in [a, b], \quad (4.16)$$

这里  $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$ . 由不等式(4.15)知

$$F'(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + F(t)\beta(t), \forall t \in [a, b]. \quad (4.17)$$

于是由(4.16)和(4.17)可知

$$c'(t) = [F'(t) - \alpha(t)\beta(t) - \beta(t)F(t)]e^{\int_t^a \beta(s)ds} \leq 0,$$

因此  $c(t)$  在  $[a, b]$  上单调递减, 从而

$$c(t) \leq c(a) = 0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du} ds.$$

再用一次不等式(4.15), 即得

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + F(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds, \forall t \in [a, b].$$

特别的, 当  $\alpha$  递增, 对  $\forall t \in [a, b]$ , 固定  $t$ , 记  $G(s) = \int_s^t \beta(u)du$ , 我们有不等式

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds = \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t -G'(s)e^{G(s)} ds \\ &= \alpha(t) - \alpha(t) \int_a^t e^{G(s)} dG(s) = \alpha(t) + \alpha(t) [e^{G(a)} - 1] = \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}. \end{aligned}$$




□

**例题 4.25** 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geq 0, f''(x) \geq f(x), \forall x \geq 0. \quad (4.18)$$

证明:

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x, \forall x \geq 0. \quad (4.19)$$

 **笔记** 通过  $f'' - f' = f - f'$  视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑  $f''f' = ff'$ , 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

**证明** 令  $h(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$ , 由(4.18)知

$$h'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x \geq 0.$$

故

$$h(x) \geq h(0) = f'(0) - f(0) \Rightarrow [f'(x) - f(x)]e^x \geq f'(0) - f(0) = h(0).$$

继续视为一阶构造类可得

$$c(x) = \frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}, c'(x) = \frac{[f'(x) - f(x)]e^x - h(0)}{e^{3x}} \geq 0.$$

于是

$$\frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x} \geq f(0) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{f'(0) + f(0)}{2}.$$

继续利用(4.18)即得

$$f(x) \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2}f(0) + \frac{e^x - e^{-x}}{2}f'(0) \geq f(0) + f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq x.$$

可以分别利用均值不等式和求导进行证明.


□

**例题 4.26** 设  $f \in C^1[0, +\infty) \cap D^2(0, +\infty)$  且满足

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0, f(0) = 1, f'(0) = 0. \quad (4.20)$$

证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geq 0. \quad (4.21)$$

 **笔记** 显然如果把式(4.20)得不等号改为等号, 则微分方程的解为  $3e^{2x} - 2e^{3x}$ . 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(4.21)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2, 3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

**证明** 把不等式(4.20)改写为

$$f''(x) - 2f'(x) \geq 3(f'(x) - 2f(x)).$$

考虑  $g_1(x) = f'(x) - 2f(x)$ , 则上式可化为

$$g_1'(x) \geq 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为  $g_2(x) = \frac{g_1(x)}{e^{3x}}$ . 于是有

$$g_2'(x) \geq 0 \Rightarrow g_2(x) \geq g_2(0) = -2 \Rightarrow f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + 2e^x, g_3'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}}{e^{2x}} \geq 0,$$

于是


$$g_3(x) \geq g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

我们完成了证明.  $\square$

**例题 4.27** 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geq 0. \quad (4.22)$$

证明  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界.

 **笔记**  $f + f''$  的出现暗示我们构造  $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ , 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数  $g(x)$ , 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑  $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$ , 两边同时积分得到  $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$ . 由此得到构造函数  $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ .

**证明** 构造  $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ , 则由 (4.22) 知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是  $h$  在  $(-\infty, 0]$  递增,  $[0, +\infty)$  递减. 现在我们有

$$h(x) \leq h(0) \Rightarrow |f(x)|^2 \leq h(0),$$

即  $f$  有界.  $\square$

## 4.5.2 双绝对值问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

**例题 4.28** 对某个  $D > 0$ ,

1. 设  $f \in D(\mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$ , 使得


$$|f'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

证明  $f \equiv 0$ .

2. 设  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f^{(j)}(0) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$ , 使得

$$|xf'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

 **笔记** 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程  $y' = dy, y' = -dy$  得构造函数

$$C_1(x) = \frac{y(x)}{e^{dx}}, C_2(x) = y(x)e^{dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

**证明**

1. 构造  $C_1(x) = \frac{f^2(x)}{e^{2dx}}, C_2(x) = f^2(x)e^{2dx}$ , 我们有

$$C_1'(x) = \frac{2f(x)f'(x) - 2Df^2(x)}{e^{2dx}}, C_2'(x) = [2f(x)f'(x) + 2Df^2(x)]e^{2dx}.$$

由条件 (4.23), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x) \leq |f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

于是  $C_1$  递减,  $C_2$  递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2dx}} \leq \frac{f^2(0)}{e^{20}} = 0, \forall x \geq 0, f^2(x)e^{2dx} \leq f^2(0)e^{20} = 0, \forall x \leq 0,$$

于是就得到了  $f \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. 构造  $C(x) = \frac{f^2(x)}{x^{2D}}, x > 0$  (因为只需证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ , 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x) = \frac{2f(x)f'(x)x - 2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(4.24), 我们有

$$xf'(x)f(x) \leq x|f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

即  $C$  递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有  $f(x) = o(x^m), \forall m \in \mathbb{N} \cap (D, +\infty)$ , 于是

$$C(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{x^{2D}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^m)}{x^{2D}} = 0,$$


故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

□

**例题 4.29** 设  $f \in D^2[0, +\infty)$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  以及

$$|f''(x)|^2 \leq |f(x)f'(x)|, \forall x \geq 0.$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

 **笔记** 本题的加强版本见命题 5.30.

**证明** 令  $M > 0$ , 考虑

$$g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2], x \geq 0.$$

利用  $1+t^2 \geq \sqrt{t}, \forall t \geq 0$ , 我们有

$$1 + \frac{|f|^2}{|f'|^2} \geq \sqrt{\frac{|f|}{|f'|}} \Rightarrow |f'|^2 + |f|^2 \geq |f|^{\frac{1}{2}} |f'|^{\frac{3}{2}} = |f'| \sqrt{|ff'|}. \quad (4.25)$$

于是

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'| \sqrt{|ff'|} - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{(4.25)}{\leq} e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [|f|^2 + |f'|^2 + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] = 0. \end{aligned}$$

只要取充分大的  $M$ , 就有  $g$  递减, 从而  $0 \leq g(x) \leq g(0) = 0$ , 故  $f(x) \equiv 0$ .


□

**例题 4.30** 设  $f \in D^2(\mathbb{R})$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

 **笔记** 本题的加强版本见命题 5.31.

**证明** 令  $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2]$ , 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2f'(|f| + |f'|) - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2(f')^2 + f^2 + (f')^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &= e^{-Mx} [(2-M)f^2 + (4-M)(f')^2]. \end{aligned}$$

取充分大的  $M$ , 就有  $g'(x) \leq 0$ . 于是  $g(x) \leq g(0) = 0, \forall x \geq 0$ . 又注意到  $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2] \geq 0$ , 因此  $g(x) \equiv 0, \forall x \geq 0$ . 故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

□

**例题 4.31** 设  $f \in D^2(\mathbb{R})$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geq 0.$$

**注** 与例题 4.29 不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 4.29 的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含  $M$  的项的次数大于系数含  $M$  的项, 从而无法直接通过控制  $M$  的取值, 使得  $g'(x) \leq 0$ . 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 4.28 类比, 采用同样的方法. 因为只需证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ , 所以将原不等式视为(等式)函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是  $f'' = f f'$ . 我们将其中的  $f$  看作已知函数, 考虑的微分方程转化为  $y'' = f y'$ , 则

$$y'' = f y' \Rightarrow \frac{y''}{y'} = f \Rightarrow \ln y' = \int_0^x f(t) dt + C \Rightarrow y' = C e^{\int_0^x f(t) dt}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$ .

**证明** 令  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$ , 则

$$C'(x) = \frac{2f'(x)f''(x) - 2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}.$$

又因为

$$f' f'' \leq |f' f''| \leq |f|(f')^2.$$

所以  $C'(x) \leq 0$ , 故  $C(x) \leq C(0) = 0$ . 又注意到  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}} \geq 0$ , 故  $C(x) \equiv 0$ . 于是  $f'(x) = 0, \forall x \geq 0$ . 进而  $f$  就是常值函数, 又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .  $\square$

### 4.5.3 极值原理

**例题 4.32** 设  $f \in C^2[0, 1]$  且  $f(0) = f(1) = 0$ , 若还有

$$f''(x) - g(x)f'(x) = f(x). \quad (4.26)$$

证明:  $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .

**证明** 如果  $f$  在  $(0, 1)$  取得在  $[0, 1]$  上的正的最大值, 设最大值点为  $c$  且  $f(c) > 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$ , 代入(4.26)式知  $f''(c) = f(c) > 0$ . 又由极值的充分条件, 我们知道  $c$  是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑  $f$  在  $(0, 1)$  取得在  $[0, 1]$  上的负的最小值, 设最小值点为  $c$  且  $f(c) < 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$ , 代入(4.26)式知  $f''(c) = f(c) < 0$ . 又由极值的充分条件, 我们知道  $c$  是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上,  $f$  在  $(0, 1)$  上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即


$$0 \leq f(x) \leq 0.$$

$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .  $\square$

**例题 4.33** 设  $f \in C(a, b)$  且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] du \right\} = 0, \forall x \in (a, b),$$

证明:  $f$  是线性函数.

 **笔记** 还可以不妨设  $a = 0, b = 1$ , 否则用  $f(a(1-x) + bx) = f((b-a)x + a)$  代替  $f$  即可. 这样就可以直接不妨设  $f \in C[0, 1]$  且  $f(0) = f(1) = 0$ .

不妨设  $a = 0, b = 1$  的原因: 令  $g(x) \triangleq f((b-a)x + a)$ , 则对  $\forall x \in (0, 1)$ , 记  $y = (b-a)x + a \in [a, b]$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [g(x+u) + g(x-u) - 2g(x)] du \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y + (b-a)u) + f(y - (b-a)u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)^3 h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} = 0.
\end{aligned}$$

因此  $g$  仍然满足题目条件. 若已证  $g \equiv 0$ , 就有

$$f((b-a)x+a) = 0, \forall x \in [0, 1] \iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

故可以不妨设  $a=0, b=1$ .

**证明** 不妨设  $f \in C[a, b]$ , 否则内闭的考虑或修改  $f$  在端点的值即可. 用  $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$  代替  $f$  可以不妨设  $f(a) = f(b) = 0$ . 此时只需证  $f \equiv 0$  即可.

若

$$f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x) > 0,$$

则  $x_0 \in (a, b)$ . 取  $\varepsilon > 0$  使得

$$f(x_0) + \varepsilon(x_0 - a)(x_0 - b) > 0.$$

考虑

$$f_\varepsilon(x) \triangleq f(x) + \varepsilon(x-a)(x-b),$$

则存在  $x_1 \in (a, b)$ , 使得

$$f_\varepsilon(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_0) > 0.$$

现在

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1) + f_\varepsilon(x_1) - 2f_\varepsilon(x_1)] du \right\} \\
&\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1+u) + f_\varepsilon(x_1-u) - 2f_\varepsilon(x_1)] du \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h 2\varepsilon u^2 du}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}\varepsilon h^3}{h^3} = \frac{2}{3}\varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此我们有

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq 0 \implies f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

考虑  $-f$ , 令  $-f_\varepsilon(x) = -f(x) - \varepsilon(x-a)(x-b)$ , 同理可得

$$\max_{x \in [a, b]} (-f(x)) \leq 0 \implies -f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \implies f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$$

现在就有

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b],$$

即所求函数  $f$  为线性函数. □

## 第五章 函数性态分析

### 5.1 基本性态分析模型

#### 命题 5.1 (多个函数取最值或者中间值)

设  $f, g, h$  是定义域上的连续函数, 则 (a):  $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$  是定义域上的连续函数. (b):  $\text{mid}\{f, g, h\}$  是定义域上的连续函数.

**注** 这里  $\text{mid}\{f, g, h\}$  表示取中间值函数, 显然这个命题可以推广到多个函数的情况.

**证明** 只需要注意到

$$\begin{aligned}\max\{f, g\} &= \frac{f + g + |f - g|}{2}, \\ \min\{f, g\} &= \frac{f + g - |f - g|}{2}, \\ \text{mid}\{f, g, h\} &= f + g + h - \max\{f, g, h\} - \min\{f, g, h\}.\end{aligned}$$

□

#### 命题 5.2

若  $f$  是区间  $I$  上处处不为零的连续函数, 则  $f$  在区间  $I$  上要么恒大于零, 要么恒小于零.

**证明** 用反证法, 若存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , 则由零点存在定理可知, 存在  $\xi \in (\min x_1, x_2, \max x_1, x_2)$ , 使得  $f(\xi) = 0$  矛盾.

□

#### 命题 5.3

设  $f$  为区间  $I$  上的可微函数. 证明:  $f'$  为  $I$  上的常值函数的充分必要条件是  $f$  为线性函数.

**证明** 充分性显然, 下证必要性. 设  $f'(x) \equiv C$ , 其中  $C$  为某一常数.  $\forall x \in I$ , 任取固定点  $x_0 \in I$ , 由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\xi \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\})$ , 使得

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0) = C(x - x_0) + f(x_0).$$

故  $f(x)$  为线性函数.

□

#### 定理 5.1 (闭区间上单调函数必可积)

设  $f$  在  $[a, b]$  上单调, 则  $f \in R[a, b]$ .

♥

**证明**

□

#### 命题 5.4 (连续的周期函数的基本性质)

设  $f \in C(\mathbb{R})$  且以  $T > 0$  为周期, 则

- (1)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界.
- (2)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续.

♥

**证明**


- (1)
- (2)

□

**命题 5.5 (导数有正增长率则函数爆炸)**

设  $f$  在  $[a, +\infty)$  可微且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c > 0$ , 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

 **笔记** 类似的还有趋于  $-\infty$  或者非极限形式的结果, 读者应该准确理解含义并使得各种情况都能复现, 我们引用本结论时未必就是本结论本身, 而是其蕴含的思想.

**证明** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c > 0$ , 所以存在  $X > a$ , 使得  $f'(x) > \frac{c}{2}, \forall x \geq X$ . 于是由 Lagrange 中值定理得到, 对  $\forall x \geq X$ , 存在  $\theta \in (X, x)$ , 使得

$$f(x) = f(X) + f'(\theta)(x - X) \geq f(X) + \frac{c}{2}(x - X), \forall x \geq X.$$

让  $x \rightarrow +\infty$  就得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

**命题 5.6 (函数不爆破则各阶导数必然有趋于 0 的子列)**

设  $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$  且  $f \in D^k[a, +\infty)$ , 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \neq +\infty$ , 那么存在趋于正无穷的  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, +\infty)$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0.$$

◆

 **笔记**

(1) 存在  $X > 0$  使得  $f^{(k)}$  在  $(X, +\infty)$  要么恒正, 要么恒负的原因: 否则, 对  $\forall X > 0$ , 存在  $x_1, x_2 \in (X, +\infty)$ , 使得  $f^{(k)}(x_1) > 0, f^{(k)}(x_2) < 0$ . 从而由导数的介值性可知, 存在  $\xi_X \in (x_1, x_2)$ , 使得  $f^{(k)}(\xi_X) = 0$ . 于是

令  $X = 1$ , 则存在  $y_1 > 1$ , 使得  $f^{(k)}(y_1) = 0$ ;

令  $X = \max\{2, y_1\}$ , 则存在  $y_2 > \max\{2, y_1\}$ , 使得  $f^{(k)}(y_2) = 0$ ;

.....

令  $X = \max\{n, y_{n-1}\}$ , 则存在  $y_n > \max\{n, y_{n-1}\}$ , 使得  $f^{(k)}(y_n) = 0$ ;

.....

这样得到一个数列  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \text{ 且 } f^{(k)}(y_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这与假设矛盾!

(2) 存在  $m > 0$ , 使得  $f^{(k)}(x) \geq m > 0, \forall x \geq X$  的原因: 假设对  $\forall m > 0$ , 有  $m > f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geq X$ . 再令  $m \rightarrow 0^+$ , 则由夹逼准则可得  $f^{(k)}(x) = 0, \forall x \geq X$ . 这与假设矛盾! (也可以用下极限证明)

**证明** 注意到若不存在  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$  成立那么将存在  $X > 0$  使得  $f^{(k)}$  在  $(X, +\infty)$  要么恒正, 要么恒负 (见笔记 (1)), 如果找不到子列使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$  成立, 那么不妨设存在  $X > 0$  使得

$$f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geq X.$$

从而一定存在  $m > 0$  (见笔记 (2)), 使得

$$f^{(k)}(x) \geq m > 0, \forall x \geq X. \quad (5.1)$$

则由 Taylor 中值定理, 我们知道对每个  $x > X$ , 运用 (5.1), 都有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!} (x-X)^j + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!} (x-X)^k \geq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!} (x-X)^j + \frac{m}{k!} (x-X)^k,$$

于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 这这就是一个矛盾! 因此我们证明了必有子列使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(x_n) = 0$  成立. □

**定理 5.2 (严格单调和导数的关系)**

1. 设  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$  且  $f$  递增, 则  $f$  在  $[a, b]$  严格递增的充要条件是对任何  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  都存在  $c \in (x_1, x_2)$  使得  $f'(c) > 0$ .
2. 设  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$  且  $f$  递减, 则  $f$  在  $[a, b]$  严格递减的充要条件是对任何  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  都存在  $c \in (x_1, x_2)$  使得  $f'(c) < 0$ .

**证明** 若  $f$  在  $[a, b]$  严格递增, 则对任何  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ , 由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $c \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

反之对任何  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  都存在  $c \in (x_1, x_2)$  使得  $f'(c) > 0$ . 任取  $[s, t] \subset [a, b]$ , 现在有  $c \in (s, t)$  使得  $f'(c) > 0$ ,

则根据  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) - f(c-h)}{h} > 0$ , 再结合  $f$  递增, 可知存在充分小的  $h > 0$  使得

$$f(s) \leq f(c-h) < f(c) < f(c+h) \leq f(t),$$

这就证明了  $f$  严格递增. 严格递减是类似的, 我们完成了证明.  $\square$

**定理 5.3 (单侧导数极限定理)**

设  $f \in C[a, b] \cap D^1(a, b)$  且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = c$  存在, 证明  $f$  在  $a$  右可导且  $f'_+(a) = c$ .

**注** 本结果当然也可对应写出左可导的版本和可导的版本, 以及对应的无穷版本 (即  $a, b, c$  相应的取  $\pm\infty$ ).

**笔记** 本结果告诉我们可在  $f$  连续的时候用  $f'$  的左右极限存在性来推  $f$  可导性.

**证明** 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\theta(x)) = c,$$

其中  $\theta(x) \in (a, x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} \theta(x) = a$ . 这就完成了这个定理的证明.  $\square$

**例题 5.1 经典光滑函数** 考虑

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & |x| > 0 \\ 0, & |x| = 0 \end{cases}$$

则  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  且  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**证明** 我们归纳证明, 首先  $f \in C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$ , 假定  $f \in C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ . 注意到存在多项式  $p_{k+1} \in \mathbb{R}[x]$ , 使得

$$f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} p_{k+1}(x) e^{-x^2} = 0,$$


运用导数极限定理, 我们知道  $f^{(k+1)}(0) = 0$ . 由数学归纳法我们知道  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 这就完成了证明.  $\square$

**定理 5.4 (连续函数中间值定理)**

设  $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$  且  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ . 则对有介值性函数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  和  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$ , 必然存在  $\theta \in [x_1, x_n]$ , 使得

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j).$$



 **笔记** 中间值可以通过介值定理取到是非常符合直观的. 特别的当  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ , 就是所谓的平均值定理

$$f(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

**证明** 设

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i), m = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i).$$

于是

$$m = m \sum_{j=1}^n p_j \leq \sum_{j=1}^n p_j f(x_j) \leq M \sum_{j=1}^n p_j = M.$$

因此由  $f$  的介值性知: 必然存在  $\theta \in [x_1, x_n]$ , 使得  $f(\theta) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j)$  成立. □

#### 命题 5.7

若  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 则  $f'$  没有第一类间断点与无穷间断点.

**注** 也可以利用 Darboux 定理进行证明.

**证明** 若  $f'$  存在第一类间断点  $c \in [a, b]$ , 则由单侧导数极限定理可知

$$f'(c^-) = f'_-(c), \quad f'(c^+) = f'_+(c).$$

又因为  $f$  在  $x = c$  处可导, 所以  $f'_-(c) = f'_+(c)$ . 从而

$$f'(c^-) = f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c^+).$$

即  $f$  在  $x = c$  处既左连续又右连续, 故  $f$  在  $x = c$  处连续, 矛盾!

由于单侧导数极限定理同样适用于单侧导数为无穷大的情况, 因此对于无穷大的情况可同理证明. □

#### 命题 5.8

设  $f$  是一个定义在区间  $I \subset \mathbb{R}$  上的单调函数, 并且满足  $f(I) = I'$ , 其中  $I' \subset \mathbb{R}$  是一个区间, 则  $f$  在区间  $I$  上连续, 即  $f \in C(I)$ .

**证明** 反证, 假设  $f$  在某个点  $c \in I$  处间断. 若  $c$  在区间  $I$  的内部, 则由  $f$  在区间  $I$  上单调递增, 利用单调有界定理可知  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  存在, 并且

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

又因为  $f(x)$  在  $x = c$  处间断, 所以上式至少有一个严格不等号成立, 故不妨设

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) < \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

对  $\forall x > c$ , 固定  $x$ , 由  $f$  在  $I$  上递增可知

$$f(x) > f(y), \quad \forall y \in (c, x).$$

令  $y \rightarrow c^+$ , 得  $f(x) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ . 对  $\forall x < c$ , 由  $f$  在  $I$  上递增可知  $f(x) \leq f(c)$ . 因此  $f(I) \subset (-\infty, f(c)] \cup [\lim_{x \rightarrow c^+} f(x), +\infty)$ , 故  $(f(c), \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)) \not\subset f(I)$ , 但  $(f(c), \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)) \subset I'$ . 这与  $f(I) = I'$  矛盾!

若  $c$  是区间  $I$  的端点, 则同理可得矛盾! □

#### 命题 5.9

定义在区间  $I$  上的单调函数  $f$  只有第一类间断点, 特别地, 若  $x_0$  在区间  $I$  的内部, 则  $x_0$  要么是跳跃间断点, 要么就是连续点.

**证明**

**命题 5.10 (连续单射等价严格单调)**

设  $f$  是区间  $I$  上的连续函数, 证明  $f$  在  $I$  上严格单调的充要条件是  $f$  是单射.

**证明** 必要性是显然的, 只证充分性. 如若不然, 不妨考虑  $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2), x_1 < x_2 < x_3$  (其他情况要么类似, 要么平凡), 于是由连续函数介值定理知存在  $\theta \in [x_2, x_3]$  使得  $f(\theta) = f(x_1)$ , 这就和  $f$  在  $I$  上单射矛盾! 故  $f$  严格单调.  $\square$

**例题 5.2** 证明不存在  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f$  满足方程

$$f(f(x)) = e^{-x}.$$

**笔记** 注意积累二次复合的常用处理手法, 即运用 **命题 5.10**.

**证明** 假设存在满足条件的函数  $f$ . 设  $f(x) = f(y)$ , 则

$$e^{-x} = f(f(x)) = f(f(y)) = e^{-y}.$$

由  $e^{-x}$  的严格单调性我们知  $x = y$ , 于是  $f$  是单射. 由 **命题 5.10** 知  $f$  严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道  $f(f(x)) = e^{-x}$  递增, 这和  $e^{-x}$  严格递减矛盾! 故这样的  $f$  不存在.  $\square$

**例题 5.3** 求  $k \in \mathbb{R}$  的范围, 使得存在  $f \in C(\mathbb{R})$  使得  $f(f(x)) = kx^9$ .

**笔记** 取  $f(x) = \sqrt[9]{k}x^3$  的原因: 当  $k \geq 0$  时, 我们可待定  $f(x) = cx^3$ , 需要  $c^4x^9 = kx^9$ , 从而可取  $c = \sqrt[4]{k}$ .

**证明** 当  $k < 0$  时, 假设存在满足条件的函数  $f$ . 设  $f(x) = f(y)$ , 则

$$kx^9 = f(f(x)) = f(f(y)) = ky^9.$$

由  $kx^9$  的严格单调性我们知  $x = y$ , 于是  $f$  是单射. 由 **命题 5.10** 知  $f$  严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道  $f(f(x)) = kx^9$  递增, 这和  $kx^9$  严格递减矛盾! 故这样的  $f$  不存在.

当  $k \geq 0$  时, 取  $f(x) = \sqrt[9]{k}x^3$ , 此时  $f(x)$  满足条件.  $\square$

**命题 5.11 ( $[a, b]$  到  $[a, b]$  的连续函数必有不动点)**

设  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  是连续函数, 证明  $f$  在  $[a, b]$  上有不动点.

**笔记** 注意  $[a, b] \rightarrow [a, b]$  表示  $f$  是从  $[a, b] \rightarrow [a, b]$  的映射, 右端的  $[a, b]$  是像集而不是值域,  $f$  可能取不到整个  $[a, b]$ .

**证明** 考虑  $g(x) = f(x) - x \in C[a, b]$ , 注意到  $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$ , 由连续函数的零点定理知道  $f$  在  $[a, b]$  上有不动点.  $\square$

**命题 5.12 (没有极值点则严格单调)**

设  $f \in C[a, b]$  且  $f$  在  $(a, b)$  没有极值点, 证明  $f$  在  $[a, b]$  严格单调.

**证明** 因为闭区间上连续函数必然取得最值, 且在  $(a, b)$  的最值点必然是极值点, 因此由假设我们不妨设  $f$  在  $[a, b]$  端点取得最值. 不失一般性假设

$$f(a) = \min_{x \in [a, b]} f(x), f(b) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

此时若在  $[a, b]$  上  $f$  严格单调, 则只能是严格单调递增. 若在  $[a, b]$  上  $f$  不严格递增, 则存在  $x_2 > x_1$ , 使得  $f(x_2) \leq f(x_1)$ .

若  $x_1 > a$ , 在  $[a, x_2]$  上我们注意到  $f(x_1) \geq \max\{f(a), f(x_2)\}$ , 又由  $f$  的连续性可知,  $f$  一定能在  $[a, x_2]$  上取到最大值. 于是  $f$  只能在  $(a, x_2)$  达到最大值, 从而  $f$  在  $(a, x_2)$  存在极大值点, 这和  $f$  在  $(a, b)$  没有极值点矛盾!

若  $x_1 = a, x_2 < b$ , 则注意到  $f(x_2) \leq \min\{f(a), f(b)\}$ , 同样的  $f$  在  $(a, b)$  取得极小值而矛盾.

若  $x_1 = a, x_2 = b$ , 则  $f$  恒为常数而矛盾! 这就完成了证明.  $\square$

**命题 5.13 (函数值相同的点导数值相同就一定单调)**

设  $f \in D(a, b)$  满足  $f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in (a, b)$ , 必有  $f'(x_1) = f'(x_2)$ , 证明  $f$  在  $(a, b)$  是单调函数.

**笔记** 令  $\sigma = \max \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$  的原因: 设  $E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ . 实际上, 这里取  $\sigma = \sup \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$  也可以, 效果类似.

(1)  $\sigma$  的存在性证明: 由  $f$  的介值性知, 存在  $\eta \in (c, \xi)$ , 使得

$$f(\xi) \leq f(\eta) = f(d) \leq f(c).$$

从而  $\eta \in E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ , 故  $E$  非空. 又由  $E$  的定义, 显然  $E$  有界, 故由确界存在定理可知,  $E$  存在上确界. 于是令  $\sigma = \sup \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\} \leq \xi$ . 下证  $\sigma = \sup \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\} = \max \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ , 即  $\sigma \in E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$ .

由上确界的性质可知, 存在  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  满足  $x_n \in E$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sigma$ . 从而  $f(x_n) = f(d)$ . 于是由  $f$  的连续性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(\sigma) = f(d).$$

故  $\sigma \in E$ . 这样就完成了证明.

(2) 取  $\sigma = \max \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$  的原因: 当  $f(c) \geq f(d)$  时,  $E = \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}$  中的其他点  $a \in E$ , 可能有  $f'(a) > 0$ , 也可能有  $f'(a) \leq 0$ . 而  $\sigma$  一定只满足  $f'(\sigma) \leq 0$ .

**证明** 若  $f$  不在  $(a, b)$  是单调, 则不妨设  $a < c < d < b$ , 使得  $f'(c) < 0 < f'(d)$ .

由  $f'(d) = \lim_{x \rightarrow d^-} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} > 0$  知在  $d$  的左邻域内,  $f(x) < f(d)$ . 由  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$  知  $f$  在  $c$  的右邻域内有  $f(x) < f(c)$ , 于是  $f(c), f(d)$  不是  $f$  在  $[c, d]$  上的最小值, 又由  $f \in C[c, d]$  可知  $f$  在  $[c, d]$  上一定存在最小值. 故可以设  $f$  在  $[c, d]$  最小值点为  $\xi \in (c, d)$ .

当  $f(c) \geq f(d)$  时, 令

$$\sigma = \max \{x \in [c, \xi] : f(x) = f(d)\}.$$

注意到  $\sigma < \xi$ . 显然  $f'(\sigma) \leq 0$ , 因为如果  $f'(\sigma) > 0$  会导致在  $\sigma$  右邻域内有大于  $f(d)$  的点, 由介值定理可以找到  $\xi > \sigma' > \sigma$ , 使得  $f(\sigma') = f(d)$  而和  $\sigma$  是最大值矛盾! 而函数值相同的点导数值也相同, 因此  $f'(\sigma) = f'(d) > 0$ , 这与  $f'(\sigma) \leq 0$  矛盾!

当  $f(c) \leq f(d)$  时类似可得矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

**命题 5.14 (一个经典初等不等式)**

设  $a, b \geq 0$ , 证明:

$$\begin{cases} a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), & p \geq 1, p \leq 0 \\ a^p + b^p \geq (a+b)^p \geq 2^{p-1}(a^p + b^p), & 0 < p < 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

**笔记** 不等式左右是奇次对称的, 我们可以设  $t = \frac{a}{b} \in [0, 1]$ , 于是(5.2)两边同时除以  $b^p$  得

$$\begin{cases} t^p + 1 \leq (t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1), & p \geq 1, p \leq 0 \\ t^p + 1 \geq (t+1)^p \geq 2^{p-1}(t^p + 1), & 0 < p < 1 \end{cases}.$$

**证明** 考虑  $f(t) \triangleq \frac{(t+1)^p}{1+t^p}, t \in [0, 1]$ , 我们有

$$f'(t) = p(t+1)^{p-1} \frac{1-t^{p-1}}{(1+t^p)^2} \begin{cases} \geq 0, & p \geq 1, p \leq 0 \\ < 0, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} 2^{p-1} = f(1) \geq f(t) \geq f(0) = 1, & p \geq 1, p \leq 0 \\ 2^{p-1} = f(1) \leq f(t) \leq f(0) = 1, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

这就完成了证明.  $\square$

### 定理 5.5 (反函数存在定理)

设  $y = f(x), x \in D$  为严格增(减)函数, 则  $f$  必有反函数  $f^{-1}$ , 且  $f^{-1}$  在其定义域  $f(D)$  上也是严格增(减)函数.  $\heartsuit$

**证明** 设  $f$  在  $D$  上严格增. 对任一  $y \in f(D)$ , 有  $x \in D$  使  $f(x) = y$ . 下面证明这样的  $x$  只能有一个. 事实上, 对于  $D$  中任一  $x_1 \neq x$ , 由  $f$  在  $D$  上的严格增性, 当  $x_1 < x$  时,  $f(x_1) < y$ , 当  $x_1 > x$  时, 有  $f(x_1) > y$ , 总之  $f(x_1) \neq y$ . 这就说明, 对每一个  $y \in f(D)$ , 都只存在唯一的一个  $x \in D$ , 使得  $f(x) = y$ , 从而函数  $f$  存在反函数  $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$ .

现证  $f^{-1}$  也是严格增的. 任取  $y_1, y_2 \in f(D), y_1 < y_2$ . 设  $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ , 则  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ . 由  $y_1 < y_2$  及  $f$  的严格增性, 显然有  $x_1 < x_2$ , 即  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ . 所以反函数  $f^{-1}$  是严格增的.  $\square$

### 定理 5.6 (反函数连续定理)

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上严格单调并连续, 则反函数  $f^{-1}$  在其定义域  $[f(a), f(b)]$  或  $[f(b), f(a)]$  上连续.  $\heartsuit$

**证明** 不妨设  $f$  在  $[a, b]$  上严格增. 此时  $f$  的值域即反函数  $f^{-1}$  的定义域为  $[f(a), f(b)]$ . 任取  $y_0 \in (f(a), f(b))$ , 设  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , 则  $x_0 \in (a, b)$ . 于是对任给的  $\varepsilon > 0$ , 可在  $(a, b)$  上  $x_0$  的两侧各取异于  $x_0$  的点  $x_1, x_2 (x_1 < x_0 < x_2)$ , 使它们与  $x_0$  的距离小于  $\varepsilon$ .

设与  $x_1, x_2$  对应的函数值分别为  $y_1, y_2$ , 由  $f$  的严格增性知  $y_1 < y_0 < y_2$ . 令

$$\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$$

则当  $y \in U(y_0; \delta)$  时, 对应的  $x = f^{-1}(y)$  的值都落在  $x_1$  与  $x_2$  之间, 故有

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

这就证明了  $f^{-1}$  在点  $y_0$  连续, 从而  $f^{-1}$  在  $(f(a), f(b))$  上连续.

类似地可证  $f^{-1}$  在其定义区间的端点  $f(a)$  与  $f(b)$  分别为右连续与左连续. 所以  $f^{-1}$  在  $[f(a), f(b)]$  上连续.  $\square$

### 定理 5.7 (反函数求导定理)

设  $y = f(x)$  为  $x = \varphi(y)$  的反函数, 若  $\varphi(y)$  在点  $y_0$  的某邻域上连续, 严格单调且  $\varphi'(y_0) \neq 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0 (x_0 = \varphi(y_0))$  可导, 且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

**证明** 设  $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0), \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 因为  $\varphi$  在  $y_0$  的某邻域上连续且严格单调, 故  $f = \varphi^{-1}$  在  $x_0$  的某邻域上连续且严格单调. 从而当且仅当  $\Delta y = 0$  时  $\Delta x = 0$ , 并且当且仅当  $\Delta y \rightarrow 0$  时  $\Delta x \rightarrow 0$ . 由  $\varphi'(y_0) \neq 0$ , 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

$\square$


## 5.2 函数方程

### 定义 5.1

我们称  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足的方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

为 **Cauchy 方程**.

 **笔记** 显然  $f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$  为 Cauchy 方程的解, 一个自然的问题是, 满足 Cauchy 方程的函数  $f$  是否一定是  $cx$ ?

### 命题 5.15 (Cauchy 方程基本性质)

设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 Cauchy 方程:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  的解, 则

$$f(rx) = rf(x), \forall r \in \mathbb{Q}.$$

**证明**  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 由条件可知  $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ , 然后就有

$$f(3x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x).$$

依次下去可得

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (5.3)$$

现在对  $\forall r = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}, p \neq 0, q, p \in \mathbb{Z}$ . 我们由条件可得

$$rf(x) = f(rx) \Leftrightarrow qf(x) = pf\left(\frac{q}{p}x\right). \quad (5.4)$$

利用 (5.3) 式可得

$$pf\left(\frac{q}{p}x\right) = f(qx) = qf(x).$$

故由 (5.4) 式可知, 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $rf(x) = f(rx), \forall r \in \mathbb{Q}$  成立. □

### 定理 5.8

设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足 Cauchy 方程:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  且  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 则

$$f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**证明** 由命题 5.15 可知, 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有

$$rf(x) = f(rx), \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (5.5)$$

成立. 现在对每个无理数  $a$ , 由有理数的稠密性可知, 存在有理数列  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ . 于是由  $f$  的连续性 & (5.5) 式可得

$$f(ax) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(x) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

故  $f(ax) = af(x), \forall a, x \in \mathbb{R}$ . 取  $x = 1$ , 则  $f(a) = f(1)a, \forall a \in \mathbb{R}$ . □

### 定理 5.9 (Cauchy 方程基本定理)

设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是 Cauchy 方程:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  的解, 则满足下述条件之一:

1.  $f$  在某点连续.
2.  $f$  在某个区间有上界或者下界.
3.  $f$  在某个区间上单调.
4.  $f$  在一个正测集上有界.

5.  $f$  可测.

6.  $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  在  $\mathbb{R}^2$  不稠密.

我们就有  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .



**注** 不妨设  $f$  在包含原点的对称区间  $I$  上有上界原因: 假设已证  $f$  在  $(-a, a)$  上有上界时, 结论成立.

如果  $f$  在  $(c, d)$  上有上界, 那么记  $x_0 = \frac{c+d}{2}, a = \frac{d-c}{2}$  ( $x_0$  可根据我们的期望, 待定系数得到, 具体见豌豆讲义), 则  $(c, d) = (x_0 - a, x_0 + a)$ , 即  $f$  在  $(x_0 - a, x_0 + a)$  上有上界. 从而令  $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$ , 则由条件可得

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y+x_0) - f(x_0) = f(x+y+2x_0-x_0) - f(x_0) \\ &= f(x+x_0) + f(y+x_0-x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(y+x_0) - 2f(x_0) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

故  $g(x)$  满足 Cauchy 方程且在  $(-a, a)$  上有上界, 于是由假设可知,  $g(x) = g(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ . 又注意到

$$g(x) = f(x+x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(-x_0) = f(x).$$

故  $f(x) = g(x) = g(1)x = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ . 因此不妨设合理.

**证明**

1. 如果  $f$  在  $x_0$  连续, 则对任何  $x' \in \mathbb{R}$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow x'} f(x) = \lim_{x \rightarrow x'} f(x - x' + x_0) + \lim_{x \rightarrow x'} f(x' - x_0) = f(x_0) + f(x' - x_0) = f(x').$$

于是我们证明了  $f$  在  $x'$  连续. 于是由定理 5.8 我们知道  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. 不妨设  $f$  在包含原点的对称区间  $I$  上有上界. 下证  $f$  在原点连续. 注意到由命题 5.15 我们知道

$$f(x) = \frac{f(rx)}{r}, \forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

现在对任何  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 取  $r_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n x_n = 0. \quad (5.7)$$

注意到在 (5.6) 中令  $r = -1$  知  $f$  是奇函数, 从而  $f$  在  $I$  上有下界. 现在由于有界和无穷小之积也为无穷小, 我们由 (5.6) 和 (5.7) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n x_n)}{r_n} = 0.$$

由 Heine 归结原理即得  $f$  在  $x = 0$  连续. 故由第一点知  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

3. 在区间单调自然在子区间上有界, 用第二点即得  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

4. 其依托于经典结论

**结论** 设勒贝格可测集  $A, B$  的勒贝格测度都非 0, 则  $A + B$  包含一个区间.

上述结论可以在任何一本实变函数习题集中找到, 例如徐森林. 运用此结论假设  $f$  在  $E$  上有界,  $E$  的勒贝格测度非 0. 则  $E + E$  包含一个区间  $I$ , 于是对  $z \in I$ , 存在  $x, y \in E$  使得  $z = x + y$ , 然后

$$|f(z)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2 \sup_E |f|.$$

由第二点即得  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

5. 由 Lusin 定理, 存在有正测度的紧集  $K$  和  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $g$  使得  $f(x) = g(x), \forall x \in K$ , 故  $f$  在  $K$  上有界. 现在我们就可以运用上一条知  $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

6. 若存在  $x_0 \in \mathbb{R}$  使得  $f(x_0) \neq f(1)x_0$ , 显然  $x_0 \neq 0, 1$ . 于是


$$\begin{aligned} &(1, f(1)), (x_0, f(x_0)) \text{ 线性无关} \\ \Rightarrow \mathbb{R}^2 &= \{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow \mathbb{R}^2 &= \overline{\{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}} \\ \Rightarrow \mathbb{R}^2 &= \overline{\{(c_1 + c_2 x_0, f(c_1 + c_2 x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}},$$

这就证明了  $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  在  $\mathbb{R}^2$  稠密. 这是一个矛盾!

□

**例题 5.4** 求函数方程  $2f(2x) = f(x) + x$  的所有  $\mathbb{R}$  上在  $x = 0$  的连续解.

 **笔记** 这里也能利用强求通项和强行裂项的想法. 具体操作如下:

$\forall x \in \mathbb{R}$ , 固定  $x$ , 则由条件可知

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}.$$

从而由上式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是令  $x_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 则

$$x_n = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

对上式进行强行裂项并强求通项得到

$$\frac{x_n}{2^{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$2x_0 - \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{x_k}{2^{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{2^k} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{x}{2^{2k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^n \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这就完成了对  $x_n$  的强行裂项并强求通项.

**注** 只有除以 2 的迭代才能与  $f$  在  $x = 0$  处连续联系起来, 如果是乘 2 的迭代则不行.

**证明** 设  $f$  在  $x = 0$  处连续,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 固定  $x$ , 则由条件可知

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}, \\ 2f(0) &= f(0) \Rightarrow f(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

从而由  $f$  在  $x = 0$  处连续可知,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . 由 (5.8) 式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

注意到

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^n \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{2^{2k+2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{4}x}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{x}{3}.$$

根据  $x$  的任意性, 可知  $f(x) = \frac{x}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$  就是原方程符合条件的一个解.

再将  $f(x) = \frac{x}{3}$  代入原方程, 仍然成立. 故  $f(x) = \frac{x}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$  就是原方程符合条件的所有解.  $\square$

**例题 5.5**  $\mathbb{R}$  上的既凸又凹的连续函数是直线  $\mathbb{R}$  上的既凸又凹的连续函数是直线.

**笔记** 容易由证明知道任何开区间  $(a, b)$  上的既凸又凹的连续函数也是直线.

**证明** 设函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上既凸又凹, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

考虑  $g(x) = f(x) - f(0)$ , 则运用  $f(x+y) + f(0) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  知  $g$  满足 Cauchy 方程, 于是由定理 5.8 可得

$$f(x) = f(0) + [f(1) - f(0)]x.$$

 $\square$ 

**例题 5.6** 求方程  $f(xy) = xf(y) + yf(x)$  的全部连续解.

**证明** 设  $f \in C(\mathbb{R})$ , 则由条件可得

$$f(0) = xf(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$f(x) = xf(1) + f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow xf(1) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$f(1) = -f(-1) - f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0.$$

$$f(-x) = xf(-1) - f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) + f(-x) = xf(-1) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的奇函数.}$$

于是对  $\forall x, y > 0$ , 我们取  $x = e^s, y = e^t, \forall s, t \in \mathbb{R}$ . 则由条件可得

$$\frac{f(e^{s+t})}{e^{s+t}} = \frac{f(e^s)}{e^s} + \frac{f(e^t)}{e^t}.$$

从而  $\frac{f(e^x)}{e^x}$  满足 Cauchy 方程, 且  $f \in C(\mathbb{R})$ , 因此由定理 5.8 可得

$$\frac{f(e^x)}{e^x} = \frac{f(e)}{e}x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \frac{f(e)}{e}x \ln x, \forall x > 0.$$

又因为  $f$  是奇函数, 所以

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f(e)}{e}x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{f(e)}{e}x \ln(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

最后, 将上述  $f(x)$  代入原方程, 等式仍成立. 故上述  $f(x)$  就是原方程的全部连续解.  $\square$

## 5.3 凸函数与上半连续函数

### 5.3.1 凸函数

#### 定义 5.2 (下凸函数的定义)

对集  $S \subset \mathbb{R}^n$ , 我们称

1.  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  是一个 Jensen 下凸函数, 如果对任何  $x, y \in S$ , 只要

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$



2.  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  是一个严格 Jensen 下凸函数, 如果对任何  $x \neq y \in S$ , 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

3. 称  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  是一个下凸函数, 如果对任何  $x, y \in S$ , 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in [0, 1].$$

4. 称  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  是一个严格下凸函数, 如果对任何  $x \neq y \in S$ , 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in (0, 1).$$



注 同理可以定义上凸函数.

### 笔记

1. 我们常用  $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$  来表示连接  $x, y$  的线段.
2. 显然  $f$  在  $S$  上各种凸的充要条件都是对任何含于  $S$  的线段  $\ell$ , 都有  $f|_{\ell}$  上是对应的那种一元凸函数.
3. 开集上的二阶可微函数为下凸函数等价于 Hess 矩阵半正定可以在任何一般数学分析教材上找到.
4. 显然下凸蕴含 Jensen 下凸, 实际运用中我们更偏爱下凸而不是 Jensen 下凸, 推导二者的联系是重要的命题.

#### 命题 5.16

闭区间上的连续函数如果在开区间内是下凸函数, 则必然在闭区间上也是下凸函数.



证明

□

#### 命题 5.17 (下凸函数的基本性质)

##### 1. 下凸函数恒在割线下方

(1) 设  $I$  为一区间,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , 则  $f$  在  $I$  上下凸的充要条件是对任何  $[s, t] \subset I$  成立

$$f(x) \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - s) + f(s) = \frac{t - x}{t - s}f(s) + \frac{x - s}{t - s}f(t), \forall x \in [s, t].$$

(2) 设  $I$  为一区间,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , 则  $f$  在  $I$  上严格下凸的充要条件是对任何  $[s, t] \subset I$  成立

$$f(x) < \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - s) + f(s) = \frac{t - x}{t - s}f(s) + \frac{x - s}{t - s}f(t), \forall x \in [s, t].$$

##### 2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 设  $I$  为一区间,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , 则  $f$  在  $I$  上下凸的充要条件是对  $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(2) 设  $I$  为一区间,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , 则  $f$  在  $I$  上严格下凸的充要条件是对  $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

##### 3. 可微的下凸函数恒在切线上方

(1) 设  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  是可微函数, 则  $f$  在  $(a, b)$  下凸的充要条件是对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 我们都有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b).$$

(2) 设  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  是可微函数, 则  $f$  在  $(a, b)$  严格下凸的充要条件是对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 我们都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}.$$

**注** 上述下凸函数的性质都可以通过几何作图直观地得到.

**笔记** 下凸函数割线斜率递增也表明: 下凸函数对  $\forall x_0 \in I$ , 都有  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  单调递增.(但是不能由这个结论推出  $f$  下凸)

**证明**

### 1. 函数恒在割线下方

(1) 首先证明充分性 ( $\Rightarrow$ ): 对  $\forall [s, t] \subset I, \forall x \in [s, t]$ , 可设  $x = \lambda s + (1 - \lambda)t$ , 其中  $\lambda \in [0, 1]$ . 由  $f$  在  $I$  上下凸可知, 对  $\forall x \in [s, t]$ , 有

$$f(x) = f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t) = (\lambda - 1)[f(s) - f(t)] + f(s).$$

再结合  $\lambda = \frac{x - t}{s - t}$  可得

$$f(x) \leq \left( \frac{x - t}{s - t} - 1 \right) [f(s) - f(t)] + f(s) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t} (x - s) + f(s), \quad \forall x \in [s, t].$$

接着证明必要性 ( $\Leftarrow$ ): 对  $\forall s, t \in I$ , 不妨设  $s < t$ , 则  $[s, t] \subset I$ . 对  $\forall x \in [s, t]$ , 可设  $x = \lambda s + (1 - \lambda)t$ , 其中  $\lambda \in [0, 1]$ . 则由条件可知, 对  $\forall x \in [s, t]$ , 有

$$f(x) = f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t} (\lambda s + (1 - \lambda)t - s) + f(s) = \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t).$$

即  $\forall s, t \in I$ , 都有  $f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t)$ . 故  $f$  在  $I$  上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

### 2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 首先证明充分性 ( $\Rightarrow$ ): 对于任意的  $x_1, x_2, x_3 \in I$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 取  $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0, 1)$ . 因为函数  $f$  在区间  $I$  上下凸, 所以有

$$f(x_2) = f(\lambda x_3 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_3) + (1 - \lambda)f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1).$$

即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

接下来证明必要性 ( $\Leftarrow$ ): 由已知条件可知, 对于任意的  $x_1, x_2, x_3 \in I$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 都满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

这等价于

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1). \quad (5.9)$$

进而, 对于任意的  $x_1, x_3 \in I$  且  $x_1 < x_3$ , 以及任意的  $\lambda \in [0, 1]$ , 令  $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 \in (x_1, x_3)$ , 此时  $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ . 于是, 根据(5.9)式可以得到

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) = f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

所以, 函数  $f$  在区间  $I$  上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

### 3. 可微的下凸函数恒在切线上方

(1) 首先证明充分性 ( $\Rightarrow$ ): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的  $x_0 \in (a, b)$ , 函数  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(a, b)$  上单调递增.

对于任意的  $x \in (x_0, b)$ , 取  $x' \in (x_0, x)$ , 根据  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  的递增性, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

令  $x' \rightarrow x_0^+$ , 则可得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的  $x \in (a, x_0)$ , 取  $x'' \in (x, x_0)$ , 由  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  的递增性可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}.$$

令  $x'' \rightarrow x_0^-$ , 则有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x'' \rightarrow x_0^-} \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的  $x_0 \in (a, b)$ , 都有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

接下来证明必要性 ( $\Leftarrow$ ): 由已知条件可知, 对于任意的  $x_1, x_2, x_3 \in I$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 都有

$$f(x_1) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) \geq f'(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知  $f$  在  $I$  上下凸.

- (2) 首先证明充分性 ( $\Rightarrow$ ): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的  $x_0 \in (a, b)$ , 函数  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(a, b)$  上单调递增.

对于任意的  $x \in (x_0, b)$ , 取  $x' \in \left(x_0, \frac{x + x_0}{2}\right)$ , 根据  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  的递增性, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} > \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

令  $x' \rightarrow x_0^+$ , 则可得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} \geq \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的  $x \in (a, x_0)$ , 取  $x'' \in \left(x_0, \frac{x + x_0}{2}\right)$ , 由  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  的递增性可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} > \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}.$$

令  $x'' \rightarrow x_0^-$ , 则有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} \geq \lim_{x'' \rightarrow x_0^-} \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的  $x_0 \in (a, b)$ , 都有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

接下来证明必要性 ( $\Leftarrow$ ): 由已知条件可知, 对于任意的  $x_1, x_2, x_3 \in I$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 都有

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) > f'(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2) < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

所以,由下凸函数割线斜率递增可知  $f$  在  $I$  上下凸.

□

**例题 5.7** 导数递增则割线斜率也递增 函数  $f$  在  $(a, b)$  可导, 证明:

1.  $f'$  递增的充要条件是对  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

2.  $f'$  严格递增的充要条件是对  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

**证明**

(1) 首先证明必要性 ( $\Rightarrow$ ): 对于满足  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$  的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及  $f'$  单调递增的性质可知, 存在  $y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$ , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(y_1) \leq f'(y_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 ( $\Leftarrow$ ): 由已知条件可知, 对于满足  $a < x_1 < x_2 < b$  的情况, 取  $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} &\leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \forall s \in (a, x_1), \\ \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} &\leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}, \quad \forall t \in (x_2, b). \end{aligned}$$

令  $s \rightarrow x_1^-, t \rightarrow x_2^+$ , 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s \rightarrow x_1^-} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq \lim_{t \rightarrow x_2^+} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'(x_2).$$

所以有  $f'(x_1) \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq f'(x_2)$ . 再由  $x_1, x_2$  的任意性可知,  $f'$  单调递增.

(2) 首先证明必要性 ( $\Rightarrow$ ): 对于满足  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$  的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及  $f'$  单调递增的性质可知, 存在  $y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$ , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(y_1) < f'(y_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 ( $\Leftarrow$ ): 由条件可知, 对于满足  $a < x_1 < x_2 < b$  的情况, 取  $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} &< \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \forall s \in (a, x_1), \\ \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} &< \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}, \quad \forall t \in (x_2, b). \end{aligned}$$

令  $s \rightarrow x_1^-, t \rightarrow x_2^-$ , 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s \rightarrow x_1^-} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq \lim_{t \rightarrow x_2^-} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'(x_2).$$

故  $f'(x_1) \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq f'(x_2)$ . 若  $f'(x_1) = f'(x_2)$ , 则由命题 5.3 可知,  $f$  在  $[x_1, x_2]$  上为线性函数. 设  $f(x) = cx + d, x \in [x_1, x_2]$ , 其中  $c, d \in \mathbb{R}$ . 从而

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = c = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}.$$


这与已知条件矛盾! 故  $f'(x_1) < f'(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a, b)$  且  $a < x_1 < x_2 < b$ , 即  $f'$  递增.

□

#### 命题 5.18

设  $f$  在  $(a, b)$  上的下凸函数, 则  $f$  在  $(a, b)$  有上界的充要条件是  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在.

▲

 **笔记** 由这个命题及命题 5.16 可知: 如果下凸函数  $f$  在  $(a, b)$  上有上界, 则  $f$  可连续延拓到  $[a, b]$  (补充定义端点的函数值等于端点的左右极限即可), 使得  $f$  在  $[a, b]$  上仍是下凸函数.

**证明** ( $\Leftarrow$ ): 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知,  $f$  在  $(a, b)$  上连续. 又因为  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 所以由 Cantor 定理可知,  $f$  可以连续延拓到  $[a, b]$  上, 故  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 从而在  $(a, b)$  上有界.

( $\Rightarrow$ ): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对  $\forall x_0 \in (a, b)$ , 有  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$  上递增. 由  $f$  在  $(a, b)$  上有上界可知, 存在  $M > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in (a, b). \quad (5.10)$$

由  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  的递增性及 (5.10) 式可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{M - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in (x_0, b). \quad (5.11)$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{M - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{M - f(x_0)}{b - x_0}$ , 所以  $\frac{M - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(x_0, b)$  上有界. 从而存在  $K > 0$ , 使得

$$\frac{M - f(x_0)}{x - x_0} \leq K, \forall x \in (x_0, b). \quad (5.12)$$

于是结合 (5.11)(5.12) 式可知,  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq K, \forall x \in (x_0, b)$ . 进而由单调有界定理可知  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  存在. 于是

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \right] = (b - x_0) \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0).$$

故  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  也存在. 同理可得  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  也存在.

□

#### 命题 5.19 (下凸函数的单调性刻画)

##### 1. 闭区间凸函数的单调性刻画

设  $f$  是  $[a, b]$  上的下凸函数, 则  $f$  只有下述三种情况:

- (1)  $f$  在  $[a, b]$  递减,
- (2)  $f$  在  $[a, b]$  递增,
- (3) 存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f$  在  $[a, c]$  递减, 在  $[c, b]$  递增.

##### 2. 开区间凸函数的单调性刻画

设  $f$  是  $(a, b)$  上的下凸函数,  $a$  允许取  $-\infty, b$  允许取  $+\infty$ , 则  $f$  只有下述三种情况:

- (1)  $f$  在  $(a, b)$  递减;
- (2)  $f$  在  $(a, b)$  递增;
- (3) 存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f$  在  $(a, c)$  递减, 在  $(c, b)$  递增.

**证明**

##### 1. 闭区间凸函数的单调性刻画

由下凸函数恒在割线下方, 我们有

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) + f(a), \forall x \in [a, b].$$

因此  $f$  在  $[a, b]$  上有上界. 于是由命题 5.18 可知,  $f$  可以连续延拓到  $[a, b]$ , 并且仍然在  $[a, b]$  上下凸. 记这个连续延拓函数为  $\bar{f}$ , 则  $\bar{f} \in C[a, b]$  且  $\bar{f}$  在  $[a, b]$  上也下凸.

下证

$$f(a) \geq \bar{f}(a), f(b) \geq \bar{f}(b). \quad (5.13)$$

事实上,由下凸函数割线斜率递增可知  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  在  $(x_0, b]$  递增,从而

$$\begin{aligned}\tilde{f}(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \left[ (x-x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \right] \\ &\leq \lim_{x \rightarrow b^-} \left[ (x-x_0) \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} + f(x_0) \right] = f(b),\end{aligned}$$

类似可得  $f(a) \geq \tilde{f}(a)$ , 这就证明了(5.13). 下面证明  $\bar{f}$  的单调性.

由上述证明可知  $\bar{f} \in C[a, b]$  且在  $[a, b]$  上下凸. 不妨设  $\bar{f}$  最小值为 0. 现在设  $c \in [a, b]$  是  $f$  的最小值点. 若  $c \in (a, b)$ , 则对  $b \geq x_2 > x_1 > c$ , 我们有

$$\frac{\bar{f}(x_2) - \bar{f}(c)}{x_2 - c} \geq \frac{\bar{f}(x_1) - \bar{f}(c)}{x_1 - c} \Rightarrow \bar{f}(x_2) \geq \frac{x_2 - c}{x_1 - c} \bar{f}(x_1) \geq \bar{f}(x_1). \quad (5.14)$$

故  $\bar{f}$  在  $[c, b]$  递增. 类似可知  $\bar{f}$  在  $[a, c]$  递减. 这就证明了第三种情况. 若  $c = a$ , 则不等式(5.14)也成立, 故  $\bar{f}$  在  $[a, b]$  递增. 同样的若  $c = b$  则  $\bar{f}$  在  $[a, b]$  递减.

于是再结合(5.13)可知

(i) 当  $\bar{f}$  的最小值  $c = b$  时, 若  $f(b) > \bar{f}(b)$ , 则  $f$  只在  $[a, b)$  上单调递减; 若  $f(b) = \bar{f}(b)$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上单调递减. 故此时无论如何,  $f$  一定在  $[a, b]$  上单调递减.

(ii) 当  $\bar{f}$  的最小值  $c = a$  时, 若  $f(a) > \bar{f}(a)$ , 则  $f$  只在  $(a, b]$  上单调递增; 若  $f(a) = \bar{f}(a)$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上单调递增. 故此时无论如何,  $f$  一定在  $(a, b]$  上单调递增.

(iii) 当  $\bar{f}$  的最小值  $c \in (a, b)$  时,  $f$  的单调性与  $\bar{f}$  相同, 即  $f$  在  $[c, b]$  递增, 在  $[a, c]$  递减.

因此结论得证.

2. 开区间凸函数的单调性刻画 由(1)的证明类似, 只是不再额外需要考虑  $f$  的两个端点, 同理证明即可. □

#### 定理 5.10 (Jensen 不等式)

对集  $S \subset \mathbb{R}^n$ , 设  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  是一个 Jensen 下凸函数, 则对完全含于  $S$  内的一条线段上的点  $x_1, x_2, \dots, x_m$  和


$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \lambda_k \in [0, 1] \cap \mathbb{Q},$$

我们有

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k). \quad (5.15)$$

特别的,

$$f\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(x_k). \quad (5.16)$$

 **笔记** 初等的, 如果  $S$  性质足够好且  $f$  二阶可微, 读者可以通过把  $f$  在  $\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k$  Taylor 展开, 然后丢掉二阶微分那

项来得到不等式  $f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k)$ . 本部分的证明尽可能追求一般性.

**证明** 首先不等式(5.16)的建立是经典高中数学习题, 一个参考可以见 Jensen 不等式. 我们归纳证明不等式(5.15), 当  $m = 2$ , 设有有理数  $\frac{p}{q} \in [0, 1], q > 0$ , 运用不等式(5.16), 我们有

$$f\left(\frac{p}{q}x + \left(1 - \frac{p}{q}\right)y\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \frac{x}{q} + \dots + \frac{x}{q}}_p + \underbrace{\frac{y}{q} + \frac{y}{q} + \dots + \frac{y}{q}}_{q-p}\right) \leq \frac{p}{q}f(x) + \left(1 - \frac{p}{q}\right)f(y).$$

这就证明了(5.15)的  $m = 2$  的情况. 假定  $m$  时不等式(5.15)成立, 当  $m + 1$  时, 我们不妨设  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$ , 否则不等

式(5.15)是平凡的. 现在

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(x_j) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x_j) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\
 &\geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f\left(\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_j\right) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\
 &\geq f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_j + \lambda_{m+1} x_{m+1}\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j\right),
 \end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自  $m=2$  时的不等式. 于是就对一般的  $m \in \mathbb{N}$ , 我们证明了(5.15).  $\square$

### 引理 5.1

设  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  的邻域内是 Jensen 下凸函数, 若  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) < \infty$ , 则  $f$  在  $x_0$  连续.

**证明** 要证  $f$  在  $x_0$  连续, 只须证  $f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ .

由条件可知

$$-\infty < f(x_0) \leq \frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2}, \quad \forall x \in U(0).$$

令  $x \rightarrow 0$  并取下极限, 得到

$$-\infty < f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2} \leq \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x_0 - x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x_0 + x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (5.17)$$

根据条件可得

$$f(x) \leq \frac{f(x_0) + f(2x - x_0)}{2}, \quad \forall x \in U(x_0).$$

令  $x \rightarrow x_0$  并取上极限, 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + f(2x - x_0)}{2} \leq \frac{f(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(2x - x_0) = \frac{f(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

于是  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ . 将其代入(5.17)式得到

$$-\infty < f(x_0) \leq \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

因此  $f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ . 即  $f$  在  $x_0$  处连续.  $\square$

### 定理 5.11 (开区间下凸函数左右导数处处存在)

$(a, b)$  上的下凸函数  $f$  在每一点左右导数都存在, 从而  $f$  在  $(a, b)$  连续.

**证明** 由下凸函数割线斜率递增可知, 对  $\forall x_0 \in (a, b)$ , 有  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$  上递增. 从而

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq \frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2} - x_0}, \quad \forall x \in (a, x_0), \\
 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq \frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2} - x_0}, \quad \forall x \in (x_0, b).
 \end{aligned}$$

于是  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(a, x_0)$  上有上界  $\frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2} - x_0}$ ,  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  在  $(x_0, b)$  上有下界  $\frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2} - x_0}$ .

故由单调有界定理可知  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  都存在, 即  $f'_+(x_0)$  和  $f'_-(x_0)$  都存在. 进而

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = f'_+(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x) - f(x_0)] = f'_-(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) = 0.$$

因此  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 即  $f$  在  $x = x_0$  处连续, 再根据  $x_0$  的任意性可知,  $f$  在  $(a, b)$  上连续.  $\square$

**定理 5.12 (开区间上的下凸函数内闭 Lipschitz 连续)**

$(a, b)$  上的下凸函数  $f$  一定内闭 Lipschitz 连续.

**证明** 对  $\forall [A, B] \subset (a, b)$ , 任取  $s \in (a, A), t \in (B, b)$ , 固定  $s, t$ . 则由下凸函数割线斜率递增可知

$$\frac{f(A) - f(s)}{A - s} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(t) - f(B)}{t - B}, \quad \forall x, y \in [A, B].$$


记  $L = \max \left\{ \left| \frac{f(A) - f(s)}{A - s} \right|, \left| \frac{f(t) - f(B)}{t - B} \right| \right\}$ , 则

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [A, B].$$

故  $f$  在  $(a, b)$  上内闭 Lipschitz 连续.  $\square$

**定理 5.13**

设  $f$  在  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  的邻域内是下凸函数, 则  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  连续.

 **笔记** 下述证明表明:  $n$  元下凸函数一定也关于单变量下凸.

**证明** 仅证明  $n = 2$  的情形, 一般情况是类似的.

由条件可知, 当  $n = 2$  时, 设  $\delta > 0$ ,  $f$  在  $(x_0 - \delta, y_0 - \delta) \times (x_0 + \delta, y_0 + \delta)$  上下凸, 则对  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [x_0 - \delta, y_0 - \delta] \times [x_0 + \delta, y_0 + \delta], \forall \lambda \in [0, 1]$ , 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x_1, y_1) + (1 - \lambda)f(x_2, y_2). \quad (5.18)$$

$\forall x' \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , 固定  $x'$ , 在 (5.18) 式中令  $x_1 = x_2 = x'$ , 则对  $\forall y_1, y_2 \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ , 都有

$$f(x', \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = f(\lambda x' + (1 - \lambda)x', \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x', y_1) + (1 - \lambda)f(x', y_2).$$

故  $f$  关于单变量  $y$  在  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  上下凸. 同理可得  $f$  关于单变量  $x$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  上下凸. 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知  $f$  关于单变量  $x$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  上连续, 关于单变量  $y$  在  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  上连续. 因此对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 \in (0, \delta)$ , 使得当  $|x - x_0| \leq \delta_1$  时, 有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.19)$$

任取  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , 固定  $x$ , 从而此时  $f(x, y)$  是在  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  上关于  $y$  的一元连续下凸函数. 于是由开区间上的下凸函数一定内闭 Lipschitz 连续可知,  $f(x, y)$  在  $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$  上内闭 Lipschitz 连续. 进而存在  $\delta_2 \in (0, \delta)$ , 使得对  $\forall y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ , 有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \max \left\{ \frac{f(x, y_0 - \delta_2) - f(x, y_0 - \delta_2)}{\delta_2}, \frac{f(x, y_0 + \delta_2) - f(x, y_0 + \delta_2)}{\delta_2} \right\} \cdot |y - y_0|. \quad (5.20)$$

由  $f$  关于单变量  $x$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  上连续可知,  $f(x, y_0 - \delta_2), f(x, y_0 - \delta_2), f(x, y_0 + \delta_2), f(x, y_0 + \delta_2)$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  上都有界, 从而我们记

$$L = \max \left\{ \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x, y_0 - \delta_2) - f(x, y_0 - \delta_2)}{\delta_2}, \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x, y_0 + \delta_2) - f(x, y_0 + \delta_2)}{\delta_2} \right\}.$$

令  $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{2L}\}$ , 于是由 (5.20) 式可知, 对  $\forall (x, y) \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ , 都有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L|y - y_0|. \quad (5.21)$$



利用 (5.19) (5.21) 式可得, 对上述  $\varepsilon, \delta'$ , 当  $(x, y) \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta']$  时, 我们都有

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< L|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故  $f$  在  $(x_0, y_0)$  连续. □

#### 推论 5.1 (开集上的下凸函数必连续)

开集上的下凸函数是连续函数.

### 5.3.2 上半连续函数

#### 定义 5.3 (半连续函数定义)

拓扑空间  $X$  上的一个函数  $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$  被称为**上半连续的**, 如果对每个  $c \in \mathbb{R}$  都有

$$\{x \in X : f(x) < c\}$$

是  $X$  的开集.

**注** 下半连续函数同理定义.



**笔记**

- (1) 显然  $f$  连续等价于  $f$  上半连续且下半连续.
- (2) 上半连续等价于对  $\forall x_0 \in X$ , 都有  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ .

#### 命题 5.20 (上半连续函数基本性质)

设  $X$  是拓扑空间,

- (1) 若  $f_\alpha$  是一族  $X$  上的上半连续函数, 则  $f = \inf_\alpha f_\alpha$  也是上半连续函数.
- (2) 若  $f$  是  $X$  上的上半连续函数, 则对每一个紧集  $K \subset X$  有  $a \in K$  使得  $f(x) \leq f(a), \forall x \in K$ .
- (3) 设  $I \subset [-\infty, +\infty)$  是开区间, 如果  $f: X \rightarrow I$  和  $g: I \rightarrow [-\infty, +\infty)$  是上半连续函数且  $g$  递增, 则  $g \circ f$  是上半连续函数.

**注** 下半连续函数同理也有相应的性质.



**笔记** (2) 是说紧集上的上半连续函数一定有上界且取得最大值. 一个经典的技巧是, 很多时候如果一个命题对所有紧集成立, 则等价于这个命题局部上成立, 即对每个点, 都存在一个邻域使得在这个邻域上成立. 现在我们注意到对每个点  $x$ , 如果其所有邻域上, 上半连续函数  $f$  无上界, 那么取  $x_n \rightarrow x$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ , 则  $f$  在紧集  $\{x_n\} \cup \{x\}$  上无上界, 这就是一个矛盾!

**证明**

1. 对任何  $x_0 \in X, \beta$ , 由  $f_\alpha$  下半连续和下确界的定义, 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \inf_\alpha f_\alpha(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f_\beta(x) \leq f_\beta(x_0).$$

两边对  $\beta$  取下确界即得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \inf_\alpha f_\alpha(x) \leq \inf_\beta f_\beta(x_0).$$

故  $f = \inf_\alpha f_\alpha$  也是上半连续函数.

2. 注意到开覆盖  $K = \bigcup_c \{x \in K : f(x) < c\}$ , 由  $K$  是紧集可知, 必有有限子覆盖

$$K = \bigcup_{i=1}^n \{x \in K : f(x) < c_i\}.$$

不妨设  $c_1$  是  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$  的最大值, 则  $f(x) < c_1, \forall x \in K$ . 即上半连续函数  $f$  在  $K$  上有上界. 取  $c = \sup_K f$ ,

如果  $f$  达不到最大值, 注意到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{c - f(x)} \leq \frac{1}{c - \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)} \leq \frac{1}{c - f(x_0)}.$$

故  $\frac{1}{c - f(x)}$  在  $K$  上上半连续. 因此同理可得  $\frac{1}{c - f(x)}$  在  $K$  上也有上界. 于是存在  $M > 0$ , 使得

$$\frac{1}{c - f(x)} \leq M \Rightarrow f(x) \leq c - \frac{1}{M} < c.$$

这与  $c = \sup_K f$  矛盾! 从而  $f$  能取到最大值, 于是一定存在  $a \in K$ , 使得  $c = f(a)$ , 故  $f(x) < c = f(a), \forall x \in K$ .

3. 注意到  $\{x \in X : g(x) < c\} = [-\infty, \alpha_c)$ , 因此

$$\{x \in X : g \circ f(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < \alpha_c\},$$

这就证明了  $g \circ f$  是上半连续函数. □

#### 定理 5.14 (半连续函数逼近定理)

设  $X$  是一个度量空间,  $f$  是  $X$  上的上半连续函数, 则存在递减函数列  $f_n \in C(X)$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$$

**证明** 如果  $f \equiv -\infty$ , 取  $f_n = -n, n = 1, 2, \dots$ . 现在假定  $f \not\equiv -\infty$ , 然后考虑  $g = e^{-f} : X \rightarrow (0, +\infty]$  并定义

$$g_n(x) = \inf_{z \in X} \{g(z) + nd(x, z)\}, n = 1, 2, \dots$$

显然

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq g(x), \forall x \in X, n = 1, 2, \dots$$

因为  $g \not\equiv +\infty$ , 我们知道  $g_n, n \in \mathbb{N}$  都是有限函数. 若对某个  $n \in \mathbb{N}$  和  $x \in X$ , 有  $g_n(x) = 0$ . 则存在  $z_m \in X, m \in \mathbb{N}$  使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [g(z_m) + nd(z_m, x)] = 0,$$

即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(z_m, x) = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} f(z_m) = +\infty.$$

又由上半连续函数基本性质 (2) 和笔记知  $f$  局部有上界, 这就是矛盾! 因此我们证明了

$$g_n(x) > 0, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

为了说明  $f_n = -\ln g_n, n \in \mathbb{N}$  是我们需要的函数, 我们只需证明

$$g_n \in C(X), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g.$$

事实上, 对任何  $x, y, z \in X$ , 我们有

$$g_n(x) \leq g(z) + nd(z, x) \leq g(z) + nd(y, z) + nd(x, y).$$

对  $z$  取下确界得

$$g_n(x) \leq g_n(y) + nd(x, y),$$

对称得

$$g_n(y) \leq g_n(x) + nd(x, y),$$

即

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leq nd(x, y).$$

故  $g_n \in C(X), \forall n \in \mathbb{N}$ .

给定  $x \in X$  和  $\varepsilon > 0$ , 因为  $g$  下半连续, 所以存在  $x$  的半径为  $\delta > 0$  的开球邻域  $U$ , 使得

$$g(z) > g(x) - \varepsilon, \forall z \in U.$$

于是由  $g_n$  定义知

$$g_n(x) \geq \min\{g(x) - \varepsilon, n\delta\}.$$


当  $n$  充分大, 我们知道  $g(x) \geq g_n(x) \geq g(x) - \varepsilon$ , 这就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ . 我们完成了证明.  $\square$

#### 定理 5.15 (下凸函数的局部定义)

设开集  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  在  $V$  上半连续, 如果对任何  $x \in V, y \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$ , 都存在  $h \in (0, \delta)$ , 使得

$$f(x) \leq \frac{f(x+hy) + f(x-hy)}{2}. \quad (5.22)$$

证明  $f$  是  $V$  上的下凸函数.

 **笔记** 本定理表明下凸函数是个局部的概念, 只要局部是下凸函数, 整体也是下凸函数. 从证明可以看到, 若对  $y \neq 0$ , 不等式(5.22)改为严格不等号, 则  $f$  也是严格下凸的.

**证明** 对  $x \in V, y \in \mathbb{R}^n$ , 满足  $x+wy \in V, \forall w \in [-1, 1]$ , 考虑上半连续函数

$$g(w) = f(x+wy) - \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}w - \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2},$$

现在有

$$g(1) = g(-1) = 0.$$

如果存在  $s \in (-1, 1)$ , 使得  $g(s) > 0$ , 那么记

$$M \triangleq \sup_{[-1, 1]} g > 0, A \triangleq \{x \in [-1, 1] : g(x) = M\}.$$

显然  $A$  是  $(-1, 1)$  中的紧集, 设  $A$  的最大值点  $w_0$ , 则  $1 - w_0 > 0$ , 现在运用条件不等式(5.22), 我们知道存在充分小的  $h > 0$ , 使得

$$f(x+w_0y) \leq \frac{f(x+w_0y+hy) + f(x+w_0y-hy)}{2}.$$

于是对这个  $h$ , 我们有

$$\begin{aligned} g(w_0) &= f(x+w_0y) - \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}w_0 - \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} \\ &\leq \frac{f(x+w_0y+hy) + f(x+w_0y-hy)}{2} - \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}w_0 - \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} \\ &= \frac{g(w_0+h) + g(w_0-h)}{2} < M, \end{aligned}$$

这是一个矛盾! 因此

$$g(w) \leq 0, \forall w \in [-1, 1],$$

因此

$$g(0) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2},$$

故  $f$  是 Jensen 下凸函数, 因为  $f$  上半连续, 所以  $f$  局部有上界, 所以由引理 5.1 知  $f$  在  $V$  上连续, 因此我们证明了  $f$  是下凸函数.  $\square$

**例题 5.8** 设有限函数

$$S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m u_n(x), u_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N}.$$

若  $u_n, n \in \mathbb{N}$  非负, 证明  $S(x)$  在  $[a, b]$  达到最小值.

**证明** 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 由  $u_n \in C[a, b]$  且非负可得

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} S(x) &= \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m u_n(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^m u_n(x) \\ &\geq \sum_{n=1}^m \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^m u_n(x_0).\end{aligned}$$

令  $m \rightarrow +\infty$ , 则  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} S(x) \geq S(x_0)$ , 故  $S(x)$  在  $[a, b]$  上下半连续. 由半连续函数的基本性质 (2) 可知,  $S(x)$  在  $[a, b]$  上达到最小值.  $\square$

**例题 5.9** 设  $\{g_n\}_{n=1}^\infty, \{h_n\}_{n=1}^\infty \subset C[a, b]$ , 若

$$h_n \geq h_{n+1}, g_{n+1} \geq g_n, n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \text{ 存在.}$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$  是连续函数.

**证明** 记  $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ , 则一方面, 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 由条件可知

$$h_n(x) \leq h_{n-1}(x) \leq \dots \leq h_N(x), \forall n > N.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$h(x) \leq h_N(x), \forall n > N.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$ , 令  $x \rightarrow x_0$ , 并取上极限, 结合  $h_N \in C[a, b]$  可得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h_N(x) = h_N(x_0), \forall n > N.$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 得到  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq h(x_0)$ . 故  $h$  在  $[a, b]$  上上半连续.

另一方面, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 由条件可知

$$g_n(x) \geq g_{n-1}(x) \geq \dots \geq g_m(x), \forall n > m.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$g(x) \geq h_m(x), \forall n > m.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$ , 令  $x \rightarrow x_0$ , 并取上极限, 结合  $g_m \in C[a, b]$  可得

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g_m(x) = g_m(x_0), \forall n > m.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 得到  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$ . 故  $g$  在  $[a, b]$  上下半连续. 因此  $h = g$  在  $[a, b]$  上既上半连续又下半连续, 从而  $h = g$  在  $[a, b]$  上连续.  $\square$

## 5.4 一致连续

### 定理 5.16

$f$  在区间  $I$  一致连续的充要条件是对任何  $\{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{x''_n\}_{n=1}^\infty \subset I$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = 0$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) = 0$ .

### 定理 5.17 (Cantor 定理)

$f \in C(a, b)$  一致连续的充要条件是  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在.

**注** 这个定理对  $f \in C(a, b]$  和  $f \in C[a, b)$  也成立.

### 推论 5.2

若  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续.

## 命题 5.21

设  $f \in C[0, +\infty)$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 证明:  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续.

**注** 这个命题反过来并不成立, 反例:  $f(x) = \sqrt{x}$ . 因此这个条件只是函数一致连续的充分不必要条件.

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在  $A > 0$ , 对  $\forall x_1, x_2 \geq A$ , 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (5.23)$$

由 Cantor 定理可知,  $f$  在  $[0, A+1]$  上一致连续. 故存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得  $\forall x_1, x_2 \in [0, A+1]$  且  $|x_2 - x_1| \leq \delta$ , 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (5.24)$$

现在对  $\forall |x_1 - x_2| \leq \delta < 1$ , 必然有  $x_1, x_2 \in [0, A+1]$  或  $x_1, x_2 \in [A, +\infty)$ , 从而由 (5.23)(5.24) 式可知, 此时一定有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

故  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.  $\square$

## 命题 5.22

设  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续且  $g \in C[0, +\infty)$  满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

证明:  $g$  在  $[0, +\infty)$  一致连续.

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $f$  一致连续可知, 存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得对  $\forall x, y \in [0, +\infty)$  且  $|x - y| \leq \delta$ , 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.25)$$

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$  可知, 存在  $A > 0$ , 使得对  $\forall x \geq A$ , 有

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.26)$$

由 Cantor 定理可知,  $g$  在  $[0, A+1]$  上一致连续. 故存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得对  $\forall x, y \in [0, A+1]$  且  $|x - y| \leq \eta$ , 有

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.27)$$

故对  $\forall x, y \geq 0$  且  $|x - y| \leq \eta$ , 要么都落在  $[0, A+1]$ , 要么都落在  $[A, +\infty)$ .

(i) 若  $x, y \in [0, A+1]$ , 则由 (5.27) 式可得  $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ;

(ii) 若  $x, y \in [A, +\infty)$ , 则由 (5.25)(5.26) 式可得

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故  $g$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.  $\square$

## 命题 5.23 (连续周期函数必一致连续)

设  $f$  是周期  $T > 0$  的  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 则  $f$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续.

**证明** 由 Cantor 定理,  $f$  在  $[0, 2T]$  一致连续, 所以对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta \in (0, T)$  使得对  $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [0, 2T]$  都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

现在对  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  使得  $0 < x_2 - x_1 < \delta$ . 注意到

$$x_1 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T \in [0, T), x_2 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T \in [0, 2T), |x_1 - x_2| < \delta,$$

我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| f\left(x_1 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T\right) - f\left(x_2 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T\right) \right| \leq \varepsilon,$$

这就证明了  $f$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续.  $\square$

## 命题 5.24

设  $f$  定义在区间  $I$  的函数. 证明  $f$  在区间  $I$  一致连续的充要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M > 0$ , 使得对任何  $x_1, x_2 \in I$ , 都有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_1 - x_2| + \varepsilon.$$

**注** 这个命题相当重要! 但是考试中不能直接使用, 需要证明.

**证明 充分性:** 由条件可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , 则当  $|x_2 - x_1| \leq \delta$  且  $x_1, x_2 \in I$  时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| + \varepsilon \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

故  $f$  在  $I$  上一致连续.

**必要性:** 由  $f$  在  $I$  上一致连续可知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对  $\forall x_1, x_2 \in I$  且  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ , 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (5.28)$$

因此任取  $x, y \in I$ , ①当  $|x - y| \leq \delta$  时, 由(5.28)式可知  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \leq M|x - y| + \varepsilon$ . 由  $x, y$  的任意性可知结论成立.

②当  $|x - y| > \delta$  时, (i) 当  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  时, 此时结论显然成立;

(ii) 当  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$  时, 不妨设  $y > x, f(y) > f(x)$  (其它情况类似), 令  $f(y) - f(x) = kt$ , 其中  $k \in \mathbb{N}, t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$ . 由介值定理可知, 存在  $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y$ , 使得

$$f(x) \leq f(x_j) = f(x) + jt \leq f(x) + kt = f(y), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

于是

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = t > \varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

此时由(5.28)式可知  $x_j - x_{j-1} > \delta, j = 1, 2, \cdots, k$ . 从而我们有

$$y - x = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) > k\delta \Rightarrow k < \frac{y - x}{\delta}. \quad (5.29)$$

取  $M = \frac{2\varepsilon}{\delta} > 0$ , 于是结合(5.29)式及  $t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$  就有

$$|f(y) - f(x)| = kt \leq \frac{t}{\delta} |y - x| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} |y - x| = M|y - x|.$$

再由  $x, y$  的任意性可知结论成立.  $\square$

**注** 这里  $k, t$  的存在性可以如此得到: 考虑  $(\varepsilon, +\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (k\varepsilon, 2k\varepsilon]$  即可, 又因为  $(k+1)\varepsilon \leq 2k\varepsilon$ , 所以相邻的  $(k\varepsilon, 2k\varepsilon]$

一定相交. 于是存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $f(y) - f(x) \in (k\varepsilon, 2k\varepsilon]$ , 从而  $\frac{f(y) - f(x)}{k} \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$ . 故取  $t = \frac{f(y) - f(x)}{k} \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$ . 此时就有  $f(y) - f(x) = kt$ .

## 推论 5.3 (一致连续函数被线性函数控制)

若  $f$  在  $\mathbb{R}$  一致连续且  $f(0) = 0$ , 证明存在  $M > 0$  使得

$$|f(x)| \leq 1 + M|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



**笔记** 读者应该积累大概的感觉: 一致连续函数的增长速度不超过线性函数, 这能帮助我们快速排除一些非一致连续函数.

**证明** 取命题 5.24 中的  $\varepsilon = 1, x_1 = x \in \mathbb{R}, x_2 = 0$ , 则一定存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq 1 + M|x|, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 推论 5.4

若  $f$  在  $I$  上一致连续, 则存在  $M, c > 0$  使得

$$|f(x)| \leq c + M|x|, \quad \forall x \in I.$$

## 推论 5.5 (一致连续函数的阶的提升)

若  $f$  在  $[1, +\infty)$  一致连续, 证明存在  $M > 0$  使得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M, \forall x \geq 1.$$



**证明** 取命题 5.24 中的  $\varepsilon = 1, x_1 = x \geq 1, x_2 = 1$ , 则一定存在  $C > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(1)| \leq C|x - 1| + 1, \forall x \geq 1.$$

于是

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(1)}{x} \right| + \frac{|f(1)|}{x} \leq \frac{C|x - 1| + 1}{x} + |f(1)|, \forall x \geq 1.$$

上式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C.$$

由上极限的定义可知, 存在  $X > 1$ , 使得  $\sup_{x \geq X} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C$ . 从而我们有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C, \forall x > X. \quad (5.30)$$

又因为  $f$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续, 所以由 Cantor 定理可知  $f$  在  $[1, X]$  上连续, 从而  $f$  在  $[1, X]$  上有界, 即存在  $C' > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C', \forall x \in [1, X]. \quad (5.31)$$

于是取  $M = \max\{C, C'\}$ , 则由 (5.30)(5.31) 式可知

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M, \forall x \geq 1.$$

□

## 命题 5.25

证明区间  $I$  上的函数  $f$  一致连续的充要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\ell > 0$ , 使得当  $x_1 \neq x_2 \in I$ , 就有:

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$



**证明** 必要性: 由命题 5.24 可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| + \varepsilon, \forall x, y \in I.$$

取  $\ell = \frac{\varepsilon}{\delta} + M$ , 任取  $x_1 \neq x_2 \in I$ , 当  $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell$  时, 我们有

$$\ell < \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \frac{M|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|} + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|} = M + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|}.$$

从而

$$|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{\ell - M} = \delta. \quad (5.32)$$

又由  $f$  在  $I$  上一致连续可知

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'' \in I \text{ 且 } |x' - x''| < \delta. \quad (5.33)$$

因此结合 (5.32)(5.33) 式可得  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ . 故必要性得证.

**充分性:** 已知对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\ell > 0$ , 使得  $\forall x_1 \neq x_2 \in I$ , 有

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (5.34)$$

取  $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\ell}\right)$ , 若  $|f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon$  但  $|x_2 - x_1| \leq \delta$ , 则我们有

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \geq \frac{\varepsilon}{\delta} > \ell.$$

而由(5.34)式可得, 此时  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ . 矛盾! 故  $f$  在  $I$  上一致连续.  $\square$

#### 命题 5.26 (一致连续函数的拼接)

设  $f \in C[0, +\infty)$ , 若存在  $\delta > 0$  使得  $f$  在  $[\delta, +\infty)$  一致连续, 则  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续.

**笔记** 证明的想法比结论本身重要, 在和本命题叙述形式不同的时候需要快速准确判断出来  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续.

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 由 Cantor 定理可知,  $f$  在  $[0, \delta + 1]$  上一致连续. 故存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $\forall x, y \in [0, \delta + 1]$  且  $|x - y| \leq \eta$ , 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (5.35)$$

由  $f$  在  $[\delta, +\infty)$  上一致连续可知, 对  $\forall x, y \in [\delta, +\infty)$  且  $|x - y| \leq \eta$ , 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (5.36)$$

现在对  $\forall x, y \in [0, +\infty)$ , 都有  $|x - y| \leq \eta$ .

(i) 若  $x, y \in [0, \delta + 1]$  或  $[\delta, +\infty)$ , 则由(5.35)(5.36)式可直接得到  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ;

(ii) 若  $x \in [0, \delta + 1], y \in [\delta, +\infty)$ , 则  $|x - y| \geq 1 > \eta$ , 这是不可能的.

故原命题得证.  $\square$

**例题 5.10** 设  $f$  在  $[1, +\infty)$  一致连续. 证明:  $\frac{f(x)}{x}$  也在  $[1, +\infty)$  一致连续.

**证明** 由  $f$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续可知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对  $\forall x, y \geq 1$  且  $|x - y| \leq \delta$ , 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.37)$$

由推论 5.5 可知,  $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$  有界. 故可设  $M \triangleq \sup_{x \geq 1} \left| \frac{f(x)}{x} \right| < +\infty$ . 取  $\delta' = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2M} \right\}$ , 则对  $\forall x, y \geq 1$  且  $|x - y| \leq \delta'$ , 由(5.37)式可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leq \frac{|yf(x) - yf(y)| + |y - x| |f(y)|}{xy} \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{x} + \frac{|y - x|}{xy} |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| + M |y - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故  $\frac{f(x)}{x}$  也在  $[1, +\infty)$  一致连续.  $\square$

#### 命题 5.27 (函数爆炸一定不一致连续)

设  $f$  在  $[a, +\infty)$  可微且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 证明:  $f$  在  $[a, +\infty)$  不一致连续.

**证明** 证法一: 假设  $f$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续, 则由推论 5.4 可知, 存在  $c, d > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \quad (5.38)$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| < +\infty. \quad (5.39)$$

由上下极限 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$



这与(5.39)式矛盾. 故  $f$  在  $[a, +\infty)$  不一致连续.

**证法二:** 假设  $f$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续, 则由推论 5.4 可知, 存在  $c, d > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \quad (5.40)$$

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  可知, 存在  $X > 0$ , 使得对  $\forall x \geq X$ , 有

$$f'(x) \geq c+1 \Leftrightarrow f'(x) - c + 1 \geq 0.$$

从而  $f(x) - (c+1)x$  在  $[X, +\infty)$  上单调递增, 于是就有

$$f(x) - (c+1)x \geq f(X) - (c+1)X \triangleq D, \forall x \geq X.$$

故  $f(x) \geq (c+1)x + D, \forall x \geq X$ . 再结合(5.40)式可得

$$(c+1)x + D \leq f(x) \leq cx + d, \forall x \geq X > 0.$$

即  $x \leq d - D, \forall x \geq X > 0$ . 令  $x \rightarrow +\infty$ , 则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \leq d - D.$$

矛盾. 故  $f$  在  $[a, +\infty)$  不一致连续. □

**例题 5.11** 判断下述函数的一致连续性:

- (1)  $f(x) = \ln x, \quad x \in (0, 1];$
- (2)  $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1];$
- (3)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, +\infty);$
- (4)  $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R};$
- (5)  $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$
- (6)  $f(x) = \sin x^2, \quad x \in [0, +\infty);$
- (7)  $f(x) = \sin(x \sin x), \quad x \in [0, +\infty);$
- (8)  $f(x) = x \cos x, \quad x \in [0, +\infty);$
- (9) 设  $a > 0$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, a)$  和  $x \in (a, +\infty);$

 **笔记** 关于三角函数找数列的问题, 一般  $\sin, \cos$  函数就多凑一个  $2n\pi$  或  $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ .

**注 (6)** 中找这两个数列  $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + \frac{1}{\sqrt{n}}$  的方式: 待定  $c_n$ , 令  $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + c_n$ , 我们希望

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x''_n) - f(x'_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) \neq 0.$$

再结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin c_n^2 \cos 2c_n\sqrt{2n\pi} + \cos c_n^2 \sin 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2c_n\sqrt{2n\pi}.$$

故我们希望  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2c_n\sqrt{2n\pi} \neq 0$ . 从而令  $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  即可.

(7)(8) 找数列的方式与 (6) 类似.

**解**

- (1) 不一致连续. 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty$  及 **Cantor 定理** 可得.
- (2) 不一致连续. 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cos \frac{1}{x}$  不存在及 **Cantor 定理** 可得.
- (3) 一致连续. 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1)$  存在 (连续性),  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$  及 **Cantor 定理** 可知,  $f$  在  $(0, 1]$  上一致连续. 又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , 所以由 **命题 5.21** 可知,  $f$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续. 再根据 **一致连续函数的拼接** 可知,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续.

(4) 一致连续. 由  $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x \leq 2$  及由 Lagrange 中值定理, 易知  $f(x)$  是 Lipschitz 连续的, 从而一致连续.

(5) 不一致连续. 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  及命题 5.27 可得.

(6) 不一致连续. 令  $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ . 但是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( 2n\pi + \frac{1}{n} + 2\sqrt{2\pi} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{1}{n} + 2\sqrt{2\pi} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sin 2\sqrt{2\pi} \cos \frac{1}{n} + \cos 2\sqrt{2\pi} \sin \frac{1}{n} \right] = \sin 2\sqrt{2\pi} \neq 0. \end{aligned}$$

故根据定理 5.16 可知  $f$  不一致连续.

(7) 不一致连续. 令  $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0.$$

但是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[ \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \sin \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[ \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[ \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[ \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \left( \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[ \pi^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sin \pi^2 \cos o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos \pi^2 \sin o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \sin \pi^2 \neq 0. \end{aligned}$$

故根据定理 5.16 可知  $f$  不一致连续.

(8) 不一致连续. 令  $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0.$$

但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \cos \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{1}{n} = -2\pi.$$

故根据定理 5.16 可知  $f$  不一致连续.

(9) 在  $(0, a)$  上不一致连续, 在  $(a, +\infty)$  上一致连续. 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x} = 0$  及 Cantor 定理可得.

□

#### 命题 5.28 (一个重要不等式)

对  $\alpha \in (0, 1)$ , 证明

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

▲

**证明** 不妨设  $y \geq x \geq 0$ , 则只须证  $y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$ . 则只须证  $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \leq \left(\frac{y}{x} - 1\right)^\alpha$ . 故只须证

$$t^\alpha - 1 \leq (t - 1)^\alpha, \quad \forall t \geq 1.$$

令  $g(t) = t^\alpha - 1 - (t - 1)^\alpha$ , 则  $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(t - 1)^{\alpha-1} \leq 0$ . 从而  $g(t) \leq g(1) = 0, \forall t \geq 1$ . 故  $t^\alpha - 1 \leq (t - 1)^\alpha, \forall t \geq 1$ .

□

**例题 5.12** 证明:  $f(x) = x^\alpha \ln x$  在  $(0, +\infty)$  一致连续的充要条件是  $\alpha \in (0, 1)$ .


**证明** 当  $\alpha \geq 1$  时,  $f$  不被线性函数控制, 故由一致连续函数被线性函数控制可知  $f$  不一致连续.

当  $\alpha \leq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  不存在, 由 Cantor 定理可知,  $f$  在  $(0, 2)$  上不一致连续. 故此时  $f$  在  $(0, +\infty)$  上不一致连续.

当  $\alpha \in (0, 1)$  时, 有  $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x - 1)$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 于是  $f'(x)$  在  $[2, +\infty)$  上有界, 从而由 Lagrange 中值定理易得  $f$  在  $[1, +\infty)$  上 Lipschitz 连续, 故  $f$  在  $[2, +\infty)$  上一致连续. 此时, 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , 故

由Cantor定理可知,  $f$  在  $(0, 2]$  上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续.  $\square$

**例题 5.13** 设  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . 求  $\alpha$  的范围使得  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续.

 **笔记** 找这两个数列  $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$  的方法: 当  $\alpha > 1$  时, 待定  $c_n$ , 令  $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + c_n$ . 我们希望  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x''_n) - f(x'_n)] \neq 0$ . 注意到

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x'_n) &= (2n\pi + c_n)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{(2n\pi + c_n)^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi}\right)^\alpha - 1\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi} + O\left(\frac{c_n^2}{n^2}\right)\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi} + O\left(\frac{c_n}{n^2}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

于是取  $c_n = n^{1-\alpha}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 并且由上式可得

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x'_n) &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1})\right] \\ &= \alpha (2\pi)^{\alpha-1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \alpha (2\pi)^{\alpha-1} \neq 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故我们可取  $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$ .

**证明** 当  $\alpha \leq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  不存在, 由Cantor定理可知,  $f$  在  $(0, 1)$  上不一致连续. 故此时  $f$  在  $(0, +\infty)$  上不一致连续.

当  $\alpha \in (0, 1]$  时, 由条件可知, 对  $\forall x \geq 1$ , 都有

$$|f'(x)| = \left| \left(x^\alpha \cos \frac{1}{x}\right)' \right| = \left| \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x} \right| + \left| x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \alpha + 1.$$

因此  $f'(x)$  在  $[1, +\infty)$  上有界. 从而由Lagrange中值定理易得  $f$  在  $[1, +\infty)$  上Lipschitz连续, 故  $f$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续. 此时, 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , 故由Cantor定理可知,  $f$  在  $(0, 1]$  上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续.

当  $\alpha > 1$  时, 令  $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} = 0.$$

此时我们有

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x'_n) &= (2n\pi + n^{1-\alpha})^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + n^{1-\alpha}} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + n^{1-\alpha}} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{(2n\pi + n^{1-\alpha})^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^\alpha - 1\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n\pi)^\alpha \left[ \frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1}) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
&= (2n\pi)^\alpha \left[ \frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1}) \right] \\
&= \alpha (2\pi)^{\alpha-1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \alpha (2\pi)^{\alpha-1} \neq 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

故根据定理 5.16 可知  $f$  在  $[0, +\infty)$  上不一致连续.  $\square$

**例题 5.14** 设  $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$  是一致连续函数且  $f_n \rightarrow f$ , 证明:  $f$  在  $(0, +\infty)$  一致连续.

**证明**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n \geq N$  时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (5.41)$$

由  $f_N$  一致连续, 可知  $\exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x, y \in (0, +\infty)$  且  $|x - y| \leq \delta$ , 有


$$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon. \quad (5.42)$$

于是对  $\forall x, y \in (0, +\infty)$  且  $|x - y| \leq \delta$ , 结合 (5.41) 和 (5.42) 式, 我们有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

故  $f$  在  $(0, +\infty)$  一致连续.  $\square$

**例题 5.15** 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续且对任何  $x \geq 0$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 并说明如果去掉一致连续则结论不对.

 **笔记** 证明的想法即把点拉回到  $[0, 1]$  并用一致连续来解决. 反例可积累

$$f(x) = \frac{x \sin(\pi x)}{1 + x^2 \sin^2(\pi x)}.$$

**核心想法: 分段放缩、取整平移、一致连续.**

**证明** 由  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $x, y \in [0, +\infty)$  且  $|x - y| \leq \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (5.43)$$

把  $[0, 1]$  做  $N$  等分, 其中  $N = \frac{1}{\delta}$ . 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{N} + n\right) = 0, i = 0, 1, \dots, N$  可知, 存在  $N' \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n \geq N'$ , 有

$$\left| f\left(\frac{i}{N} + n\right) \right| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.44)$$

从而对  $\forall x \geq 1 + N'$ , 一定存在  $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, n \in \mathbb{N} \cap [N', +\infty)$ , 使得  $x \in \left[\frac{i}{N} + n, \frac{i+1}{N} + n\right]$ . 注意到此时

$$\left| x - \left(\frac{i}{N} + n\right) \right| \leq \left| \left(\frac{i+1}{N} + n\right) - \left(\frac{i}{N} + n\right) \right| = \frac{1}{N} = \delta.$$

于是结合 (5.43) 和 (5.44) 式我们就有

$$|f(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{i}{N} + n\right) \right| + \left| f\left(\frac{i}{N} + n\right) \right| < 2\varepsilon.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\square$

## 5.5 函数列极限

### 定理 5.18 (Dini 定理)

若  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([a, b]), f \in C([a, b])$  且对每一个  $x \in [a, b]$ , 都有  $f_n(x)$  关于  $n$  单调并成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  关于  $x \in [a, b]$  一致. 即  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ .



**注** 不妨设  $f(x) = 0$  的原因: 假设当  $f(x) = 0$  时结论已经成立, 则当  $f(x) \neq 0$  时, 令  $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ , 此时

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C[a, b]$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ . 因为对任意  $x \in [a, b]$ , 都有  $f_n(x)$  关于  $n$  单调, 所以对任意  $x \in [a, b]$ , 也有  $g_n(x)$  关于  $n$  单调. 于是由假设可知,  $g_n(x)$  一致收敛到 0. 因此  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ . 故不妨设成立.

**证明** 不妨设  $f(x) = 0$ , 不妨设对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f_n(x)$  关于  $n$  单调递减, 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  可知, 对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有

$$f_n(x) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 考虑  $U_n \triangleq \{x \in [a, b] | f_n(x) < \varepsilon\}$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  可得

$$[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n.$$

因为  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C[a, b]$ , 又注意  $f_n^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = U_n$ , 所以  $U_n$  是开集. 又由于对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f_n(x)$  关于  $n$  单调递减, 因此  $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$ . 这是因为对  $\forall x \in U_n$ , 都有  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) < \varepsilon$ , 于是  $x \in U_{n+1}$ . 从而由有限覆盖定理可知, 存在  $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}_1$ , 使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m U_{n_k}.$$

取  $N \triangleq \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ , 则此时  $[a, b] \subset U_N$ . 故对  $\forall n \geq N$ , 由  $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$  可知,  $[a, b] \subset U_N \subset U_n$ , 即对  $\forall n \geq N$ , 都有  $f_n(x) < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ . 因此  $f_n(x)$  一致收敛到 0. 故原定理得证.  $\square$

#### 定理 5.19 (Dini 定理函数单调版本)

设  $f_n \in C[a, b], n = 1, 2, \dots$  都是单调函数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in C[a, b].$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  是一致的. 即  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ .



**证明** 由 Cantor 定理可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有  $f_n$  在  $[a, b]$  上一致连续. 从而对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall |y - x| \leq \delta. \quad (5.45)$$

设  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , 使得  $x_i - x_{i+1} \leq \delta, i = 0, 1, 2, \dots, m$ . 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n \geq N$  时, 有

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}. \quad (5.46)$$

对  $\forall x \in [a, b]$ , 当  $n \geq N$  时, 一定存在  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 使得  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . 从而当  $n \geq N$  时, 利用(5.45)和(5.46)式以及  $f_n$  的单调性可得

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| + \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + 2\varepsilon \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon. \end{aligned}$$

故  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ .  $\square$

## 5.6 更弱定义的导数

#### 定理 5.20 (最弱递增条件)

1. 设  $f \in C[a, b]$  满足对任何  $x_0 \in (a, b)$  都有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

则  $f$  在  $[a, b]$  递增.

2. 设  $f \in C[a, b]$  满足对任何  $x_0 \in (a, b)$  都有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad (5.47)$$

则  $f$  在  $[a, b]$  严格递增.

3. 设  $f \in C(a, b)$  满足对任何  $x \in (a, b)$ , 都有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0.$$

证明  $f$  在  $(a, b)$  严格递增.

4. 设  $f \in C(a, b)$  满足对任何  $x \in (a, b)$ , 都有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \geq 0.$$

证明  $f$  在  $(a, b)$  递增.



**注** 只需证明  $f(b) \geq f(a)$  或  $f(b) > f(a)$  的原因: 假设  $f(b) \geq f(a)$  或  $f(b) > f(a)$  已经成立. 任取  $c, d \in (a, b)$  或  $[a, b]$ , 则我们考虑  $(c, d)$  或  $[c, d]$  这个区间, 并且已知  $f$  在  $(c, d)$  或  $[c, d]$  上连续且满足上述条件, 于是由假设可知  $f(d) \geq f(c)$  或  $f(d) > f(c)$ . 故我们只需证明  $f(b) \geq f(a)$  或  $f(b) > f(a)$  即可.

**证明**

1. 只需证明  $f(b) \geq f(a)$ . 由  $f$  的连续性和极限保号性, 我们只需证明对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 有  $f(b) \geq f(a + \varepsilon)$ . 考虑

$$F(x) = f(x) - f(a + \varepsilon) - \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon}(x - a - \varepsilon).$$

则  $F(b) = F(a + \varepsilon) = 0$ ,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon}$ ,  $\forall x_0 \in [a + \varepsilon, b)$ . 于是设  $F$  在  $[a + \varepsilon, b]$  最大值为  $c$ ,

(i) 当  $c \in [a + \varepsilon, b)$  时, 则

$$0 \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow c^+} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \overline{\lim}_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon} \geq -\frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon}$$

故  $f(b) \geq f(a + \varepsilon)$ .

(ii) 当  $c = b$  时, 则对  $\forall x \in [a + \varepsilon, b]$ , 都有  $0 = F(b) = F(c) \geq F(x)$ . 从而

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a + \varepsilon) - \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon}(x - a - \varepsilon) \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{f(x) - f(a + \varepsilon)}{x - a - \varepsilon} &\leq \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{f(b) - f(a + \varepsilon)}{b - a - \varepsilon} &\geq \overline{\lim}_{x \rightarrow (a + \varepsilon)^+} \frac{f(x) - f(a + \varepsilon)}{x - a - \varepsilon} > 0 \\ \Rightarrow f(b) &> f(a + \varepsilon) \end{aligned}$$

证毕.

2. 若  $f$  在  $[a, b]$  不严格增, 则存在  $[c, d] \subset [a, b]$  使得  $f(d) = f(c)$ , 注意到由第 1 问可知  $f$  在  $[c, d]$  递增, 从而只能为常数, 于是  $f(x) \equiv f(c)$ . 不妨设  $[c, d] \subset (a, b)$ , 否则任取  $[a, b]$  一个子区间即可. 因此

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

这显然和(5.47)矛盾! 故我们证明了  $f$  在  $[a, b]$  严格递增.

3. 对  $[c, d] \subset (a, b)$ , 我们断言存在  $x_1 \in (c, d)$  使得

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} \geq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} \quad (5.48)$$

现在我们用  $g(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c) + f(c) - f(x)$  代替  $f$ . 于是考虑  $g \in C^1[c, d]$ ,  $g(d) = g(c) = 0$ , 此时要

证明(5.48), 就只需证明存在  $x_1 \in (c, d)$  使得

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x_1 + h) - g(x_1 - h)}{2h} \geq 0 \quad (5.49)$$

若  $g \equiv 0$ , 已经得到了不等式(5.49).

若  $t \in (a, b)$  是  $g$  的最大值点使得  $g(t) > 0$ . 取  $k \in (0, g(t))$ , 则构造非空有界集  $U = \{x \in [c, t] : g(x) > k\}$ . 记  $x_1 = \inf U$ , 则存在  $t_n \in U, n \in \mathbb{N}$  使得  $t_n \geq x_1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x_1$ . 注意  $x_1 \neq c$ , 若  $g(x_1) > k$ , 则且由函数连续性知  $x_1$  左侧仍有  $g > k$ , 这和  $x_1$  是  $\inf$  矛盾! 故我们只有  $x_1 \notin U$  且  $g(x_1) = k$ . 注意到  $\frac{g(x_1 + t_n - x_1) - g(x_1 - (t_n - x_1))}{2(t_n - x_1)} \geq \frac{k - k}{2(t_n - k_1)} = 0$  这就给出了(5.49).

若  $f$  有负的最小值  $g(t) < 0$ . 取  $k \in (g(c), 0)$ , 构造非空有界集  $V = \{x \in [t, d] : g(x) < k\}$ . 并取  $x_1 = \sup V$ , 同样的  $g(x_1) = k$  且  $x_1 \neq d$ . 存在  $s_n \in V$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_1$ . 于是由  $\frac{g(x_1 + x_1 - s_n) - g(x_1 - (x_1 - s_n))}{2(x_1 - s_n)} \geq \frac{k - k}{2(x_1 - s_n)} = 0$  知(5.49)成立.

现在由不等式(5.48)和题目条件就证明了  $f(d) > f(c)$ , 从而  $f$  严格递增.

4. 注意到  $f(x) + \varepsilon x, \varepsilon > 0$  满足第 3 问要求, 因此  $f(y) + \varepsilon y > f(x) + \varepsilon x, \forall b > y > x > a, \varepsilon > 0$ . 让  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 我们有  $f(y) \geq f(x)$ , 这就证明了  $f$  在  $(a, b)$  递增.

□

## 5.7 逼近方法

### 5.7.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在  $[a, b]$  上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设  $[a, b] = [0, 1]$ .

#### 定义 5.4 (一维 Bernstein 多项式)

设  $f \in C[0, 1], n \in \mathbb{N}_0$ , 定义  $f$  的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

设  $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$ , 定义  $f$  的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

♣

**注**  $[a, b]$  区间上的 Bernstein 多项式可由  $[0, 1]$  区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设  $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$ , 令  $x = (b-a)y + a, \forall x \in [a, b]$ , 则  $y \in [0, 1]$ , 并且

$$y = \frac{x-a}{b-a}, 1-y = \frac{b-x}{b-a}.$$

再令  $g(y) = f((b-a)y + a)$ , 则由  $f \in C[a, b]$  可知  $g \in C[0, 1]$ . 于是  $g$  在  $[0, 1]$  区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g, y) \triangleq \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k y^k (1-y)^{n-k}.$$

故  $[a, b]$  区间上  $f$  的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

#### 引理 5.2

$$1. B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad B_n(x, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x. \\
3. \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= 0. \\
4. \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$



### 证明

1. 由二项式定理可得  $B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C(x+1-x)^n = C$ .
2.  $B_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$ . 由幂级数可逐项求导得
 
$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k\right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k = ny(1+y)^{n-1}.$$

故

$$\begin{aligned}
B_n(x, x) &= \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^{n-1} \\
&= \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} = x.
\end{aligned}$$

3. 由 2 的结论可直接得到.
4. 首先, 展开得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^n \sum_{k=0}^n \left(x^2 - \frac{2xk}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= x^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k. \tag{5.50}
\end{aligned}$$

接着, 计算  $\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k$  和  $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k$ . 由幂级数可逐项求导得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k\right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}. \\
\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k &= y \left[ \left(\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k\right)' \right] = y \left[ \left(y \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k\right)'\right)' \right] \\
&= y \left[ (y((1+y)^n)')' \right] = y \left[ (ny(1+y)^{n-1})' \right] \\
&= y \left[ n(1+y)^{n-1} + n(n-1)y(1+y)^{n-2} \right] \\
&= ny(1+y)^{n-2} [(1+y) + (n-1)y] \\
&= ny(1+y)^{n-2} (ny+1).
\end{aligned}$$



令  $y = \frac{x}{1-x}$ , 则由上式可得

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = n \left(\frac{x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^{n-1} = \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} = \frac{nx}{(1-x)^n}.$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = n \left(\frac{x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^{n-2} \left(\frac{nx}{1-x} + 1\right) = \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2} \frac{(n-1)x + 1}{1-x} = \frac{nx[(n-1)x + 1]}{(1-x)^n}.$$

将上式代入(5.50)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\ &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \cdot \frac{nx}{(1-x)^n} + \frac{(1-x)^n}{n^2} \cdot \frac{nx[(n-1)x + 1]}{(1-x)^n} \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

□

### 定理 5.21 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设  $\varphi(x) = n \left[ f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 则有

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x), n \in \mathbb{N}. \quad (5.51)$$

(2) 若  $f$  递增或者递减, 则  $B_n(f, x), n \in \mathbb{N}_0$  也递增或者递减.

(3) 若  $f$  是  $[0, 1]$  的凸或者凹函数, 则对每个  $n \in \mathbb{N}_0$  都有  $B_n(f, x)$  是  $[0, 1]$  的凸或者凹函数.

(4) 设  $f \in C^k[0, 1], k \in \mathbb{N}_0$ , 则关于  $x \in [0, 1]$ , 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} B'_n(f, x) = f'(x), \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x). \quad (5.52)$$

♡

**注** 性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!

即当  $f \in C^\infty[0, 1]$  时, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x)$  不成立!

也即当  $f \in C^\infty[0, 1]$  时, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 存在一个  $N$  (与  $k$  无关, 公共的  $N$ ), 使得  $\forall n > N$ , 都有  $B_n^{(k)}(f, x) \not\Rightarrow f^{(k)}(x)$  不成立!

**证明**

(1) 对  $n \geq 1$ , 直接计算得

$$\begin{aligned} B'_n(f, x) &= \left[ \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right]' \\ &= \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ n f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} - n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= B_{n-1}(\varphi, x),
\end{aligned}$$

这就给出了式(5.51).

(2) 如果  $f$  递增, 那么就有  $\varphi \geq 0$ , 则由(5.51)知  $B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x) \geq 0$ , 故  $B_n(f, x)$  递增. 类似可得递减.

(3) 如果  $f$  下凸, 对  $n=1$  的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设  $n \geq 2$ . 注意继续由(5.51)知

$$B''_n(f, x) = B'_{n-1}(\varphi, x) = B_{n-2}(\psi, x), \psi(x) = (n-1) \left[ \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right) \right],$$

从而由  $f$  的下凸性可得

$$\begin{aligned}
B_{n-2}(\psi, x) &= \sum_{j=0}^{n-2} \psi\left(\frac{j}{n-2}\right) C_{n-2}^j (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{j}{n-1}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{j+1}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{\frac{j+2}{n} + \frac{j}{n}}{2}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

这就证明了  $B_n(f, x)$  下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明  $k=0$  时命题成立. 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $|x-y| \leq \delta$ , 就有

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
|B_n(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} \left| \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| + \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left| \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2 \sup |f| \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{\text{类似Chebyshev不等式的证明}}{\leq} \varepsilon \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{5.2}{=} \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{n\delta^2} x(1-x),
\end{aligned}$$

于是从上式立得

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\sup |f|}{2n\delta^2}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| = 0.$$

故我们得到了  $k=0$  时, 式(5.52)成立.

**Step2** (\*) 我们定义

$$T_n f(x) = n \left[ f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right], n \in \mathbb{N}.$$

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(T_n f, x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1} \cdots T_n f(x) = (n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right), \forall j \in \mathbb{N}.$$

事实上, 当  $j=1$ , 由(5.51)可知命题显然成立, 假设命题对  $j \in \mathbb{N}$  成立, 则

$$\begin{aligned} & T_{n-j} \cdots T_n f(x) \\ &= T_{n-j} \left( (n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k T_{n-j} \left( f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \frac{n!(n-j)}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k \left[ f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right) \right] \\ &= \frac{n!(-1)^j \left[ f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right) \right]}{(n-j-1)!} \\ &\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k+1}{n}\right) \\ &\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right) \\ &\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{n!(-1)^j \left[ f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right) \right]}{(n-j-1)!} \\ &\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{j+1}{n}\right) - \frac{n!}{(n-j-1)!} (-1)^j f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1+j} (C_j^{k-1} + C_j^k) f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+1+j} C_{j+1}^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

因此我们证明了对  $j+1$ , 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有  $j \in \mathbb{N}$ , 命题都成立.

**Step3 (\*)** 我们证明一个中值定理的结果. 由 **Hermite 插值定理**, 对  $x \in [0, 1]$ , 存在  $\theta \in [0, 1]$ , 我们有

$$f(x) = \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(x - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left(x - \frac{s+i}{n}\right).$$

特别的存在  $\theta \in [\frac{i}{n}, \frac{i+j}{n}]$ , 使得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\ &= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{s}{s-k} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\ &= \sum_{k=1}^j \frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!} (-1)^{k-1} f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\ &= \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j}, \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right) = \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j}.$$

**Step4 (\*)** 注意到

$$B_n^{(j)}(f, x) = B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x), 1 \leq j \leq k, n > k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned} |B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x)| \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f\left(\frac{i}{n-j}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n! f^{(j)}(\theta)}{(n-j)! n^j}| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-j} \left|1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j}\right| \cdot |f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i}. \end{aligned}$$

**Step5 (\*) Step1** 告诉我们关于  $x \in [0, 1]$ , 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f^{(j)}, x) = f^{(j)}(x), j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

同时注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j}\right) = 0,$$

以及

$$\left|\frac{i}{n} - \frac{i}{n-j}\right| = \frac{ji}{n(n-j)} \leq \frac{j}{n}, \left|\frac{i+j}{n} - \frac{i}{n-j}\right| \leq \frac{2j}{n}, \forall n > j.$$

我们同时假设

$$M_j \triangleq \sup_{x \in [0,1]} |f^{(j)}(x)|, j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

并注意到  $f^{(j)}$  是一致连续的. 现在对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  和  $\delta > 0$ , 使得

$$|B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [0, 1],$$

$$\left| 1 - \frac{n!}{(n-j)!n^j} \right| < \frac{\varepsilon}{3M_j}, \forall n > N,$$

$$|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall |x - y| < \delta, x, y \in [0, 1].$$

因此当正整数  $n > \max \left\{ \frac{2j}{\delta}, j, N \right\}$ , 利用 **Step4**, 我们有

$$|B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b],$$

这就完成了证明. □

### 命题 5.29

设  $f \in C[0, 1]$  使得

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

证明

$$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

**注**  $p_n(x)$  的良好性可由 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 得到. 实际上, 我们这里取的  $p_n(x)$  就是  $g$  的 Bernstein 多项式  $B_n(g, x)$ .

**证明** 由条件可知, 对任意实系数多项式  $p(x)$ , 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0, \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

对  $\forall g \in C[0, 1]$ , 取  $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 使得  $p_n(x) \Rightarrow g(x)$ , 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)p_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_n(x)dx = 0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0, \forall g \in C[a, b].$$

再取  $g = f$ , 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0. \quad \square$$

**例题 5.16** 设  $f \in C[0, \pi]$  满足: 对  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 有  $\int_0^\pi f(x) \cos nx dx = 0$ . 求证:  $f(x) \equiv 0$ .

**证明** 由 **定理 A.13** 可知,  $\cos^n x$  可表示为  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$  的线性组合. 于是由条件, 对于  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$\int_0^\pi f(x) (\cos^n x - \cos^{n+2} x) dx = 0.$$

作变换  $x = \arccos t$  得

$$\int_{-1}^1 f(\arccos t) \sqrt{1-t^2} t^n dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

根据 **命题 5.29** 可知  $f(\arccos t) \sqrt{1-t^2} \equiv 0 (t \in [-1, 1])$ . 因而  $f(x) \equiv 0$ . □

**注** 这里在积分中考虑  $(\cos^n x - \cos^{n+2} x)$  是为了防止变换后分母上出现  $\sqrt{1-t^2}$ , 从而避免讨论无界函数的积分.

## 定理 5.22

设  $f(x) \in C^k[a, b]$ , 这里  $a < b, a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$ , 那么对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $p(x)$ , 使得

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b], s = 0, 1, 2, \dots, k.$$



注  $q(x)$  的良好定义性可由  $f^{(k)}$  的连续性和 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 直接得到. 实际上,  $q(x) = B(f^{(k)}, x)$ .

证明 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $q \in \mathbb{R}[x]$ , 使得

$$|q(x) - f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (5.53)$$

设

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} q(t) dt,$$

则对  $p$  求导可得, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$p^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} q(t) dt. \quad (5.54)$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$f^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} f^{(k)}(t) dt. \quad (5.55)$$

于是利用 (5.53)(5.54)(5.55) 式可得, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| = \left| \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} [f^{(k)}(t) - q(t)] dt \right| \leq \frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!}, \forall x \in [a, b].$$

故结论得证. □

**例题 5.17** 设多项式列  $p_n, n = 1, 2, \dots$  在  $\mathbb{R}$  一致收敛到  $f$ , 证明  $f$  为多项式.

证明 由条件可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|p_m(x) - p_n(x)| \leq 1, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此  $p_m(x) - p_n(x) = C, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}$ . 其中  $C$  是一个常数. 故

$$p_n(x) = p_N(x) + c_n, \forall n \geq N, x \in \mathbb{R}. \quad (5.56)$$

其中  $\{c_n\}$  是一个常数列. 从而任取  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n(x_0) - p_N(x_0)] = f(x_0) - p_N(x_0).$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  存在. 于是由  $x_0$  的任意性可得

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f(x) - p_N(x), x \in \mathbb{R}.$$

即  $f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ . 因此结论得证. 或者对 (5.56) 式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 也能得到

$$f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

## 5.7.2 可积函数的逼近

## 定理 5.23 (可积被连续函数逼近)

(1) 设  $f \in R[a, b]$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C[a, b]$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

(2) 设  $f \in R[a, b]$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P(x)$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - P(x)| dx < \varepsilon.$$

(3) 设  $f \in R[a, b]$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C_c(a, b)$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

这里  $g \in C_c(a, b)$  表示  $g$  是有含于  $(a, b)$  的紧支撑的连续函数.

(4) 设  $p \geq 1$  且反常积分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

这里  $g \in C_c(\mathbb{R})$  表示  $g$  是有含于  $\mathbb{R}$  的紧支撑的连续函数.



**笔记** 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

**证明**

(1) 对任何  $\varepsilon > 0$ , 因为  $f \in R[a, b]$ , 所以存在一个划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  使得

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon, \quad w_i(f) \text{ 表示 } f \text{ 在 } [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n \text{ 的振幅.}$$

构造  $[a, b]$  上的连续函数  $g$  使得它的图像就是连接各点  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  的折线, 即

$$g(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

不难发现  $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ , 则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x_{i-1})| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n w_i(f) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{3}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

这就完成了证明.

(2) 根据第 1 问可知, 存在  $g \in C[a, b]$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理 5.22 可知, 存在多项式  $P(x)$  使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - P(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - P(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon.\end{aligned}$$

(3) 对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 由第 1 问可知, 存在  $g \in C[a, b]$  使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的  $\delta > 0$ , 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}.$$

再取  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  使得

(a):  $0 \leq h(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

(b):  $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a+\delta) \cup (b-\delta, +\infty)$ ;

(c):  $h(x) = 1, \forall x \in [a+2\delta, b-2\delta]$ .

于是取  $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a, b)$ , 由第 1 问可知  $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ , 从而  $\sup_{x \in [a, b]} |g_1| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ . 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - g_1(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - g(x)h(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x) - g(x)| dx + \int_{a+2\delta}^{b-2\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} + 2 \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx + 2 \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(4) 证明的想法和第 3 问类似. 由条件可知, 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $X > 0$ , 使得

$$\int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx = \int_X^\infty |f(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

因为  $f$  在  $[-X, X]$  黎曼可积, 所以由第 2 问, 存在  $g \in C_c(-X, X)$  使得

$$\int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{1 + \sup_{[-X, X]} |2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X, X]} |g| \leq \sup_{[-X, X]} |f|,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |f(x) - g(x)|^p dx &= \int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx + \int_{-X}^X |f(x) - g(x)|^p dx \\ &\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} |f - g|^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx\end{aligned}$$



$$< \varepsilon + \varepsilon,$$

这就完成了证明. □

**例题 5.18** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的凹函数, 且  $f(1) = 1$ . 求证:

(1)

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}, \quad (5.57)$$

(2)

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx. \quad (5.58)$$

**注** 若取  $f(x) = x$ , 则式 (5.58) 成为等式, 因而 (5.58) 式中的系数  $\frac{2}{3}$  是最佳的.

**注** (5.59) 式实际上就是凹函数的割线放缩, 用凹函数的定义表示了而已.

**笔记** 构造  $f_\delta$  的想法就是将端点与其邻域内一点连接, 其余点的值不变, 使得  $f_\delta \in C[0, 1]$ . 但后续分部积分需要  $f_\delta$  二阶连续可微, 于是再用 Bernstein 多项式  $B(f_\delta, n)$  逼近  $f_\delta$ , 从而  $B(f_\delta, n) \Rightarrow f_\delta$ , 并且 Bernstein 多项式  $B(f_\delta, n)$  任意阶连续可微, 端点值不变. 但是注意此时不一定有  $B^k(f_\delta, n) \Rightarrow f_\delta^k$ , 因为  $f_\delta$  不可导!

**证明** (1) 由定理 5.11 知, 凹函数在定义域内部是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改  $f$  在 0 的值为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 这不改变积分的值, 此时  $f$  在 0 处连续, 故可不妨设  $f \in C[0, 1]$ . 对于给定的  $\delta \in (0, 1)$  以及  $x \in (\delta, 1)$ , 有

$$x = \frac{1-x}{1-\delta} \delta + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) \cdot 1.$$

因为  $f$  是凹函数, 有

$$f(x) \geq \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta) + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) f(1). \quad (5.59)$$

由上式和条件  $f(1) = 1$ , 得  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq 1$ . 若  $f$  在 1 处不连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > 1$ . 可取  $\delta$  充分靠近 1, 使得在  $(\delta, 1)$  上  $f(x) > 1$ . 令

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \delta, \\ \frac{x-\delta}{1-\delta} \cdot 1 + \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta), & \delta < x \leq 1, \end{cases}$$

则  $f_\delta$  是  $[0, 1]$  上连续的凹函数且  $f_\delta(1) = 1$ ,  $f_\delta(x) \leq f(x)$ . 由此可知, 只需对连续的凹函数证明式 (5.57). 又由于连续函数的 Bernstein 多项式在两个端点插值、保持凸性且一致收敛到该连续函数, 只需对有二阶连续导数的凹函数来证明式 (5.57). 因此, 不妨设  $f \in C^2[0, 1]$ .

**解法一:** 设  $a, b$  是两个待定常数, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \frac{a}{2} + ab + b^2, \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)f(x) dx &= \left[ \left( \frac{1}{2} ax^2 + bx \right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} ax^2 + bx \right) f'(x) dx = \frac{1}{2} a + b - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} ax^2 + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} a + b - \left[ \left( \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f'(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f''(x) dx. \end{aligned}$$

取  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ , 则有

$$\int_0^1 \left( \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 (x-1)x^2 f''(x) dx.$$

由于  $f$  是凹函数, 有  $f''(x) \leq 0$ . 因而

$$\int_0^1 \left( \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

将此代入式 (5.60), 可得式 (5.57).

**解法二:** 设  $a, b$  是两个待定常数, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax+b)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 (ax+b) f(x) dx \right)^2 \\ \iff \left( \frac{a}{2} + ab + b^2 \right) \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 (ax+b) f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax+b) f(x) dx &= \frac{a}{2} + b - \int_0^1 \left( \frac{ax^2}{2} + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{a}{2} + b - \left( \frac{a}{6} + \frac{b}{2} \right) f'(1) + \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 (ax+3b) f''(x) dx. \end{aligned}$$

由  $\begin{cases} \frac{a}{6} + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + b = \frac{1}{4} \end{cases}$  解得  $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ . 于是取  $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ , 代入上式得

$$\int_0^1 (ax+b) f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx.$$

由  $f$  是  $[0, 1]$  上的凹函数可知,  $f''(x) \leq 0$ . 从而

$$\int_0^1 (ax+b) f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

再代入(5.61)即得

$$\frac{1}{4} \int_0^1 f^2(x) dx \geq \left( \frac{1}{4} \right)^2 \implies \int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

(2) 设  $c \in (0, 1)$  是待定系数, 则  $g(x) = \frac{f(x)-c}{1-c}$  仍是  $[0, 1]$  上的凹函数且  $g(1) = 1$ . 由式 (5.57) 有

$$\int_0^1 g^2(x) dx \geq \frac{1}{4},$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx - 2c \int_0^1 f(x) dx + c^2 \geq \frac{1}{4}(1-c)^2.$$

取  $c = \frac{1}{3}$ , 则  $c^2 = \frac{1}{4}(1-c)^2$ . 于是

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx.$$

□

### 引理 5.3

二元函数  $K(x, t)$  定义为

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

(1) 对  $\forall p \in \mathbb{Z}$ , 都有

$$\int_0^1 K^p(x, t) dx = \frac{t^p(1-t)^p}{p+1}, \quad \int_0^1 K^p(x, t) dt = \frac{x^p(1-x)^p}{p+1}.$$

(2) 设  $f \in C^2[0, 1]$ , 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 则

$$f(x) = \int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

♡

证明

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 K^p(x, t) dx &= \int_0^t x^p (1-t)^p dx + \int_t^1 t^p (1-x)^p dx \\
 &= \frac{t^{p+1} (1-t)^p}{p+1} + \frac{t^p (1-t)^{p+1}}{p+1} \\
 &= \frac{t^p (1-t)^p}{p+1}. \\
 \int_0^1 K^p(x, t) dt &= \int_0^x t^p (1-x)^p dt + \int_x^1 x^p (1-t)^p dt \\
 &= \frac{x^{p+1} (1-x)^p}{p+1} + \frac{x^p (1-x)^{p+1}}{p+1} \\
 &= \frac{x^p (1-x)^p}{p+1}.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 K(x, t) (-f''(t)) dt &= \int_0^x K(x, t) (-f''(t)) dt + \int_x^1 K(x, t) (-f''(t)) dt \\
 &= \int_0^x t(1-x) (-f''(t)) dt + \int_x^1 x(1-t) (-f''(t)) dt \\
 &= -x(1-x) f'(x) + \int_0^x (1-x) f'(t) dt + x(1-x) f'(x) - \int_x^1 x f'(t) dt \\
 &= \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x x f'(t) dt - \int_x^1 x f'(t) dt \\
 &= f(x) - x \int_0^1 f'(t) dt \\
 &= f(x) - x [f(1) - f(0)] \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

□

**定理 5.24 (Favard 不等式)**

若  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的非负凹函数, 则有对  $p \geq 1$ ,

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$

♡

**注** (1) 可以用连续函数的积分来逼近可积函数的积分;

(2) 对  $[0, 1]$  上的凸或凹的连续函数  $f$ , 可以用 Bernstein 多项式列  $B_n(f; x)$  一致逼近  $f$ , 且  $B_n(f; x)$  与  $f$  有相同的凸性或凹性, 而且  $B_n(f; x)$  在两个端点与  $f$  的值相同;

(3) 当  $f$  二阶连续可导且在两个端点 0 和 1 取零值时,  $f$  可表示为

$$\int_0^1 K(x, t) (-f''(t)) dt.$$

**证明** 由定理 5.11 知, 凹函数在内点是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改  $f$  在 0 的值为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 在 1 的值为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  这不改变积分的值, 此时  $f$  在  $0, 1$  处连续, 故可不妨设  $f \in C[0, 1]$ . 选充分小的  $\delta > 0$ , 并修改  $f$  在  $[0, \delta]$  和  $[1 - \delta, 1]$  上的值, 使得修改后的函数是在  $[0, 1]$  的连续凹函数, 且在  $0, 1$  取零值:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{f(\delta)}{\delta} x, & x \in [0, \delta), \\ f(x), & x \in [\delta, 1 - \delta), \\ \frac{f(1 - \delta)}{\delta} (1 - x), & x \in [1 - \delta, 1]. \end{cases}$$

易知

$$\int_0^1 f_\delta(x) dx = \frac{\delta[f(\delta) + f(1-\delta)]}{2} + \int_\delta^{1-\delta} f(x) dx.$$

因而

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^1 f_\delta(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

因此只需对  $[0, 1]$  上满足  $f(0) = f(1) = 0$  的连续凹函数证明. 又因为  $f$  的 Bernstein 多项式

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ , 且  $B_n(f; x)$  仍是在两个端点取零值的凹函数. 因此只需对有二阶连续导数的函数证明. 此时有  $f''(x) \leq 0$ . 由  $f(0) = 0$ , 得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = xf'(x) - \int_0^x tf''(t) dt.$$

再由  $f(1) = 0$ , 可得

$$f'(1) = \int_0^1 tf''(t) dt,$$

由定理 5.3(2) 可知

$$\begin{aligned} f(x) &= x(f'(x) - f'(1)) + xf'(1) - \int_0^x tf''(t) dt \\ &= -x \int_x^1 f''(t) dt + x \int_0^1 tf''(t) dt - \int_0^x tf''(t) dt \\ &= - \int_0^1 K(x, t) f''(t) dt, \end{aligned}$$

其中二元函数  $K(x, t)$  定义为

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

由  $f$  是凹函数可知  $f'' \leq 0$ . 于是由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) (-f''(t)) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 K^p(x, t) (-f''(t))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\stackrel{\text{定理 5.3(1)}}{=} \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t) |f''(t)| dt \\ &= - \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) f''(t) dt \right) dx \\ &= - \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) f''(t) dx \right) dt \\ &\stackrel{\text{定理 5.3(1)}}{=} - \frac{1}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$


□

## 引理 5.4

证明: 若  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , 则存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

♡

 **笔记** 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

**证明** 令

$$S \triangleq \{(A, B, C) \mid |A|^p + |B|^p + |C|^p = 1\},$$

则  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  上的有界闭集, 从而  $S$  是紧集. 于是  $|A + B + C|^p$  可以看作紧集  $S$  上关于  $(A, B, C)$  的连续函数, 故一定存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p, \forall (A, B, C) \in S. \quad (5.62)$$

对  $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ , 固定  $A, B, C$ , 不妨设  $A, B, C$  不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$L = \frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p + |B|^p + |C|^p}},$$

考虑  $(LA, LB, LC)$ , 则此时

$$|LA|^p + |LB|^p + |LC|^p = 1.$$

因此  $(LA, LB, LC) \in S$ . 从而由(5.62)式可知

$$|LA + LB + LC|^p \leq C_p.$$

于是

$$|A + B + C|^p \leq \frac{C_p}{L^p} = C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$


故结论得证. □

## 定理 5.25 (积分的绝对连续性)

设  $p \geq 1$  且反常积分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ , 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \quad (5.63)$$

♡

 **笔记** 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

**证明 Step1:** 当  $f \in C_c(\mathbb{R})$  时, 则存在  $X > 0$ , 使得

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X.$$

从而当  $h \in (-1, 1)$  时, 就有

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X+1.$$

又因为  $f \in C[-X-1, X+1]$ , 所以由 Cantor 定理可知  $f$  在  $[-X-1, X+1]$  上一致连续. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| \leq X+1} |f(x+h) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{|x| \leq X+1} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

**Step2:** 对一般的  $f$ , 满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ . 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由定理 5.23(3)可知, 存在  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h) + g(x+h) - g(x) + g(x) - f(x)|^p dx$$

利用齐次化方法得到引理 5.4, 从而可知若  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , 则存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &\leq C_p \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right) \\ &\stackrel{\text{换元}}{=} 2C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx \\ &\leq 2\varepsilon C_p + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (5.64)$$

由  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 结合 Step1 可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx = 0. \quad (5.65)$$

于是由(5.64)(5.65) 式可得

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq 2\varepsilon C_p.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性得证. □

### 5.7.3 齐次微分不等式问题

#### 命题 5.30


设  $f \in D^s(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$ ,  $s \in \mathbb{N}$  且满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

若还存在  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, C > 0$ , 满足

$$|f^{(s)}(x)| \leq C |f(x)|^{\lambda_1} |f'(x)|^{\lambda_2} \dots |f^{(s-1)}(x)|^{\lambda_s}, \forall x \geq 0. \quad (5.66)$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

 **笔记** 我们把下述证明中左右两边各项次数均相同的不等式:  $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \dots x_n^{2\lambda_n} \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  称为**齐次不等式**. (虽然也可以直接利用幂平均不等式得到, 但这里我们旨在介绍如何利用**齐次化方法**证明一般的齐次不等式.)

**证明** 令  $g(x) = e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \dots + (f^{(s-1)})^2], M > 0$ , 显然  $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ . 则利用均值不等式和条件 (5.66) 式可得, 对  $\forall x \geq 0$ , 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' + 2f''f''' + \dots + 2f^{(s-1)}f^{(s)} - Mf^2 - M(f')^2 - \dots - M(f^{(s-1)})^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \dots + (f^{(s-1)})^2 + |f^{(s)}|^2 - Mf^2 - M(f')^2 - \dots - M(f^{(s-1)})^2] \\ &\stackrel{(5.66) \text{ 式}}{\leq} e^{-Mx} [(1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \dots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + C^2 |f(x)|^{2\lambda_1} |f'(x)|^{2\lambda_2} \dots |f^{(s-1)}(x)|^{2\lambda_s}]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

我们先证明  $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \dots x_n^{2\lambda_n} \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

令  $S \triangleq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ , 则  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  上的有界闭集, 从而  $S$  是紧集. 于是  $x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \dots x_n^{2\lambda_n}$

为紧集  $S$  上的连续函数, 故一定存在  $K > 0$ , 使得

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S. \quad (5.68)$$

对  $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ , 固定  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ . 不妨设  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  不全为零, 否则结论显然成立. 取  $L = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} > 0$ , 考虑  $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n)$ , 则此时  $(Lx_1)^2 + (Lx_2)^2 + \cdots + (Lx_n)^2 = 1$ , 因此  $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n) \in S$ . 从而由(5.68)式可知

$$(Lx_1)^{2\lambda_1} (Lx_2)^{2\lambda_2} \cdots (Lx_n)^{2\lambda_n} \leq K.$$

于是

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq \frac{K}{L^{2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2\lambda_n}} = \frac{K}{L^2} = K(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

故由  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的任意性可得

$$x_1^{2\lambda_1} x_2^{2\lambda_2} \cdots x_n^{2\lambda_n} \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0. \quad (5.69)$$

因此由(5.67) (5.69) 式可得, 对  $\forall x \geq 0$ , 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &\leq e^{-Mx} \left[ (1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + C^2 |f(x)|^{2\lambda_1} |f'(x)|^{2\lambda_2} \cdots |f^{(s-1)}(x)|^{2\lambda_s} \right] \\ &\leq e^{-Mx} \left[ (1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + KC^2 (f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2) \right] \\ &= e^{-Mx} \left[ (KC^2 + 1 - M)f^2 + (KC^2 + 2 - M)(f')^2 + \cdots + (KC^2 + 2 - M)(f^{(s-1)})^2 \right]. \end{aligned}$$

于是任取  $M > KC^2 + 2$ , 利用上式就有  $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 0$ . 故  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 因此  $g(x) \leq g(0) = 0$ . 又因为  $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ , 所以  $g(x) = 0, \forall x \geq 0$ . 故  $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(s-1)}(x) = 0, \forall x \geq 0$ .  $\square$

### 命题 5.31

设  $f \in D^s(0, +\infty) \cap C[0, +\infty), s \in \mathbb{N}$  且满足

$$f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, s-1.$$

若还存在  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \geq 0$ , 满足

$$|f^{(s)}(x)| \leq \lambda_1 |f(x)| + \lambda_2 |f'(x)| + \cdots + \lambda_s |f^{(s-1)}(x)|, \forall x \geq 0. \quad (5.70)$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

**证明** 令  $g(x) = e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2], M > 0$ , 显然  $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ . 则利用均值不等式和条件(5.70)式可得, 对  $\forall x \geq 0$ , 都有

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} \left[ 2ff' + 2f'f'' + 2f''f''' + \cdots + 2f^{(s-1)}f^{(s)} - Mf^2 - M(f')^2 - \cdots - M(f^{(s-1)})^2 \right] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} \left[ f^2 + (f')^2 + (f'')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2 + |f^{(s)}|^2 - Mf^2 - M(f')^2 - \cdots - M(f^{(s-1)})^2 \right] \\ &\stackrel{(5.70)\text{式}}{\leq} e^{-Mx} \left[ (1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + (\lambda_1 |f| + \lambda_2 |f'| + \cdots + \lambda_s |f^{(s-1)}|)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

我们先证明  $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_s x_s)^2 \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ .

令  $S \triangleq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ , 则  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  上的有界闭集, 从而  $S$  是紧集. 于是  $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_s x_s)^2$  为紧集  $S$  上的连续函数, 故一定存在  $K > 0$ , 使得

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq K, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S. \quad (5.72)$$

对  $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ , 固定  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ . 不妨设  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  不全为零, 否则结论显然成立. 取  $L = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} > 0$ , 考虑  $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n)$ , 则此时  $(Lx_1)^2 + (Lx_2)^2 + \cdots + (Lx_n)^2 = 1$ , 因此  $(Lx_1, Lx_2, \cdots, Lx_n) \in S$ . 从而由(5.72)式

可知

$$(\lambda_1 Lx_1 + \lambda_2 Lx_2 + \cdots + \lambda_s Lx_s)^2 \leq K.$$

于是

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_s x_s)^2 \leq \frac{K}{L^2} = K(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

故由  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的任意性可得

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_s x_s)^2 \leq K(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0. \quad (5.73)$$

因此由 (5.71) (5.73) 式可得, 对  $\forall x \geq 0$ , 都有


$$\begin{aligned} g'(x) &\leq e^{-Mx} \left[ (1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + (\lambda_1 |f| + \lambda_2 |f'| + \cdots + \lambda_s |f^{(s-1)}|)^2 \right] \\ &\leq e^{-Mx} \left[ (1-M)f^2 + (2-M)(f')^2 + \cdots + (2-M)(f^{(s-1)})^2 + K(f^2 + (f')^2 + \cdots + (f^{(s-1)})^2) \right] \\ &= e^{-Mx} \left[ (K+1-M)f^2 + (K+2-M)(f')^2 + \cdots + (K+2-M)(f^{(s-1)})^2 \right]. \end{aligned}$$

于是任取  $M > K+2$ , 利用上式就有  $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 0$ . 故  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 因此  $g(x) \leq g(0) = 0$ . 又因为  $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ , 所以  $g(x) = 0, \forall x \geq 0$ . 故  $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(s-1)}(x) = 0, \forall x \geq 0$ .  $\square$

## 5.8 函数性态分析综合

### 命题 5.32

设  $f'$  在  $[0, +\infty)$  一致连续且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

 **笔记** 本题也有积分版本: 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  一致连续且  $\int_0^\infty f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . (令  $F = \int_0^x f(x) dx$  就可以将这个积分版本转化为上述命题)

**证明** 反证, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$ , 则可以不妨设存在  $\delta > 0, \{x_n\}_{n=1}^\infty$ , 使得

$$x_n \rightarrow +\infty \text{ 且 } f'(x_n) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由  $f'$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续可知, 存在  $\eta > 0$ , 使得对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$f'(x) \geq f'(x_n) - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}, \forall x \in [x_n - \eta, x_n + \eta].$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$f(x_n + \eta) - f(x_n) = \int_{x_n}^{x_n + \eta} f'(x) dx \geq \int_{x_n}^{x_n + \eta} \frac{\delta}{2} dx = \frac{\delta\eta}{2} > 0, \forall x \in [x_n - \eta, x_n + \eta].$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在可得  $0 \geq \frac{\delta\eta}{2} > 0$ , 矛盾! 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .  $\square$

**例题 5.19 时滞方程** 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上可微且满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1, \quad f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明存在常数  $C \in \mathbb{R}$  使得  $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**证明** 由  $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$  及  $f \in D(\mathbb{R})$  可知  $f' \in C(\mathbb{R})$ . 对  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ , 固定  $x_1$ , 记

$$A = \{z > x_1 \mid f'(z) = f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及  $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$  可知

$$\exists x_2 \in (x_1, x_1 + 1) \text{ s.t. } f'(x_1) = f(x_1 + 1) - f(x_1) = f'(x_2).$$

故  $x_2 \in A$ , 从而  $A$  非空. 现在考虑  $y \triangleq \sup A \in (x_1, +\infty)$ , 下证  $y = +\infty$ . 若  $y < +\infty$ , 则存在  $\{z'_n\}_{n=1}^\infty$ , 使得

$$z'_n \rightarrow y \text{ 且 } f'(z'_n) = f'(x_1).$$



两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 由  $f' \in C(\mathbb{R})$  可得

$$f'(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(z'_n) = f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及  $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$  可得

$$\exists y' \in (y, y+1) \text{ s.t. } f'(y) = f(y+1) - f(y) = f'(y').$$

从而  $y' \in A$  且  $y' > y$ , 这与  $y = \sup A$  矛盾! 故  $y = +\infty$ . 于是存在  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ , 使得

$$z_n \rightarrow +\infty \text{ 且 } f'(z_n) = f'(x_1).$$

两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 由  $f' \in C(\mathbb{R})$  及  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$  可得

$$f'(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(z_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1.$$

因此由  $x_1$  的任意性得, 存在  $C$  为常数, 使得  $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R}$ . □

**例题 5.20** 设  $f \in C^2(\mathbb{R})$  满足  $f(1) \leq 0$  以及

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - |x|] = 0. \quad (12.27)$$

证明: (1): 存在  $\xi \in (1, +\infty)$ , 使得  $f'(\xi) > 1$ .

(2): 存在  $\eta \in \mathbb{R}$ , 使得  $f''(\eta) = 0$ .

**证明** (1) 如果对任何  $x \in (1, +\infty)$ , 都有  $f'(x) \leq 1$ , 那么  $[f(x) - x]' \leq 0$  知  $f(x) - x$  在  $[1, +\infty)$  单调递减. 从而

$$-1 \geq f(1) - 1 \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - |x|] = 0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何  $x \in \mathbb{R}$ , 我们有  $f''(x) \neq 0$ . 从而  $f''(x)$  要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取  $\xi \in \mathbb{R}$ .

当  $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , 我们知道  $f$  在  $\mathbb{R}$  上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \forall x > \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi) - 1)x] = +\infty,$$

这就是一个矛盾!

当  $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , 我们知道  $f$  在  $\mathbb{R}$  上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x) \leq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \forall x < \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi) + 1)x] = -\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). □

**例题 5.21** 设  $f$  在  $[a, b]$  上每一个点极限都存在, 证明:  $f$  在  $[a, b]$  有界.



**笔记** 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即局部的性质等价于在所有紧集上的性质. 证明的想法就是有限覆盖.

**证明** 对  $\forall c \in [a, b]$ , 由  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  存在可知, 存在  $c$  的邻域  $U_c$  和  $M > 0$ , 使得

$$\sup_{x \in U_c \cap [a, b]} |f(x)| \leq M_c.$$

注意  $[a, b] \subset \bigcup_{c \in [a, b]} U_c$ , 由有限覆盖定理得, 存在  $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$ , 使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n U_{c_k}.$$

故  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} M_k$ . □


**例题 5.22** 设  $f$  是  $(a, +\infty)$  有界连续函数, 证明对任何实数  $T$ , 存在数列  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

**注** 因为  $|f(x+T) - f(x)| \geq 0$ , 所以

$$0 \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)|.$$

原结论的反面只用考虑  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)|$  即可. 若  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| = 0$ , 则一定存在子列  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得结论成立. 因此原结论等价于  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| = 0$ . 故原结论的反面就是  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| > 0$ .

 **笔记** 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画  $f(x)$  的大致走势图), 就容易找到矛盾.

**证明** 当  $T = 0$  时, 显然存在这样的数列. 不妨设  $T > 0$ , 假设  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| > 0$ , 则存在  $\varepsilon_0 > 0, X > 0$ , 使得

$$|f(x+T) - f(x)| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \forall x \geq X \quad (5.74)$$

令  $g(x) \triangleq f(x+T) - f(x)$ , 则若存在  $x_1, x_2 \geq X$ , 使得

$$g(x_1) = f(x_1+T) - f(x_1) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad g(x_2) = f(x_2+T) - f(x_2) \leq -\varepsilon_0 < 0.$$

不妨设  $x_1 < x_2$ , 由  $g$  连续及介值定理可知, 存在  $x_3 \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$g(x_3) = f(x_3+T) - f(x_3) = 0$$

与 (5.74) 式矛盾! 故  $g(x) \triangleq f(x+T) - f(x)$  在  $[X, +\infty)$  上要么恒大于  $\varepsilon_0$ , 要么恒小于  $\varepsilon_0$ . 于是不妨设

$$f(x+T) - f(x) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq X. \quad (5.75)$$

从而对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 存在  $X_k \geq X$ , 使得当  $x \geq X_1$  时, 有  $x + (k-1)T > X$ . 于是由 (5.75) 式可得

$$f(x+kT) - f(x+(k-1)T) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq X_k. \quad (5.76)$$

因此对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 取  $K_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ , 则由 (5.76) 式可知

$$f(x+kT) - f(x+(k-1)T) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq K_n, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

进而对上式求和可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n [f(x+kT) - f(x+(k-1)T)] = f(x+nT) - f(x) \geq n\varepsilon_0, \quad \forall x \geq K_n$$

任取  $x_0 \geq K_n$ , 则  $f(x_0+nT) - f(x_0) \geq n\varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . 令  $n \rightarrow \infty$ , 得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 这与  $f$  在  $(a, +\infty)$  上有界矛盾! □

### 命题 5.33

1. 设  $f_n \in C[a, b]$  且关于  $[a, b]$  一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

证明: 对  $\{x_n\} \subset [a, b], \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(c).$$

2. 设  $f_n(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足对任何  $x_0 \in \mathbb{R}$  和  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0),$$

证明:  $f \in C(\mathbb{R})$ .

**证明**

1. 由  $f_n$  一致收敛到  $f(x)$  可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_0 \in \mathbb{N}$ , 使得对  $\forall N \geq N_0$ , 当  $n \geq N$  时, 对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \varepsilon.$$

从而由上式可得

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(c)| &\leq |f_n(x_n) - f_N(x_n)| + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &\leq \varepsilon + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)|. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 由  $f$  的连续性 &  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$  可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq \varepsilon + |f_N(c) - f(c)|.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$  可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(c)$ .

2. 反证, 若  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}$  处不连续, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 存在  $y_m \in (x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m})$ , 使得

$$|f(y_m) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0. \quad (5.77)$$

对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 令条件中的  $x_0 = y_m, x_n \equiv y_m, \forall n \in \mathbb{N}$ , 从而由条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(y_m) - f(y_m)| = 0, m = 1, 2, \dots$ , 故对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 存在严格递增的数列  $n_m \rightarrow +\infty$ , 使得

$$|f_{n_m}(y_m) - f(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (5.78)$$

从而由(5.77)(5.78)式可知, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$|f(y_{n_m}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0, \quad (5.79)$$

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (5.80)$$

因此由(5.79)(5.80)式可得, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(x_0)| \geq |f(y_{n_m}) - f(x_0)| - |f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (5.81)$$

注意到  $y_m \rightarrow x_0$ , 于是  $y_{n_m} \rightarrow x_0$ . 从而由已知条件可知  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(y_{n_m}) = f(x_0)$ . 这与(5.81)式矛盾! 故  $f \in C(\mathbb{R})$ . □

**例题 5.23** 设  $g \in C(\mathbb{R})$  且以  $T > 0$  为周期, 且有

$$f(f(x)) = -x^3 + g(x). \quad (5.82)$$

证明: 不存在  $f \in C(\mathbb{R})$ , 使得(5.82)式成立.

**证明** 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在  $M > 0$ , 使得  $|g(x)| \leq M$ . 反证, 假设存在  $f \in C(\mathbb{R})$ , 使得(5.82)式成立. 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + g(x)) = -\infty, \quad (5.83)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + g(x)) = +\infty. \quad (5.84)$$

假设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , 则存在  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $f(x_n) \rightarrow A$ . 从而由(5.82)式可得

$$f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n^3 + g(x_n)) = -\infty.$$

上式显然矛盾! 又因为  $f \in C(\mathbb{R})$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  或  $-\infty$ . 否则, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x)$  振荡, 则由零点存在定理可知, 存在  $y_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $f(y_n) = 0, n = 1, 2, \dots$ . 从而由(5.83)式可知

$$-\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(y_n)) = f(0).$$

显然矛盾!

(i) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty.$$

显然矛盾!

(ii) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , 则

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty. \quad (5.85)$$

从而对上式两边同时作用  $f$  可得

$$f(-\infty) = f(f(-\infty)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x^3 + g(x)] = +\infty. \quad (5.86)$$

于是(5.85)式与(5.86)式显然矛盾! 综上,  $f \in C(\mathbb{R})$  的解不存在.  $\square$

### 例题 5.24

1. 设  $f \in C[0, +\infty)$  是有界的. 若对任何  $r \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(x) = r$  在  $[0, +\infty)$  只有有限个或者无根, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.
2. 设  $f \in C(\mathbb{R})$ ,  $n$  是一个非 0 正偶数, 使得对任何  $y \in \mathbb{R}$ , 都有  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$  是  $n$  元集. 证明: 这样的  $f$  不存在.

### 证明

1. 反证, 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在, 由  $f$  有界, 可设  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > B = \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . 任取  $C \in (B, A)$ , 则由  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > C$  可知, 存在  $x_1 \geq 0$ , 使得  $f(x_1) > C$ . 又由  $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B < C$  可知, 存在  $x_2 > x_1 + 1$ , 使得  $f(x_2) < C$ . 于是再由  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > C$  可知, 存在  $x_3 > x_2 + 1$ , 使得  $f(x_3) > C$ . 又由  $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B < C$  可知, 存在  $x_4 > x_3 + 1$ , 使得  $f(x_4) < C$ . 依此类推, 可得递增数列  $\{x_n\}$ , 使得

$$x_{n+1} > x_n + 1, \quad f(x_{2n-1}) > C, \quad f(x_{2n}) < C, \quad n = 1, 2, \dots$$

从而由  $f \in C[0, +\infty)$  及介值定理可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $y_n \in (x_{2n-1}, x_{2n})$ , 使得  $f(y_n) = C$ , 矛盾!

2. 设  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  是  $f$  的所有零点, 记  $x_0 = -\infty, x_{n+1} = +\infty$ , 则由  $f$  的连续性及其介值定理可知,  $f$  在  $(x_{i-1}, x_i)$  上不变号. 这里共有  $n+1$  个区间, 现在考虑  $(x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \dots, n$ , 这  $n-1$  个区间. 于是由抽屉原理可知, 这  $n-1$  个区间中必存在  $\frac{n}{2}$  区间, 使  $f$  在这  $\frac{n}{2}$  个区间内都同号. 不妨设  $f$  在这  $\frac{n}{2}$  个区间内恒大于 0, 记  $f$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最大值记为  $f(m_i) \triangleq M_i > 0$ , 其中  $m_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \dots, n$ . 由介值定理知, 至少存在  $c_i \in (x_{i-1}, m_i), c'_i \in (m_i, x_i)$ , 使得

$$f(c_i) = f(c'_i) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0, i = 2, 3, \dots, n.$$

注意到在  $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$  上  $f$  必不同号. 否则, 不妨设在  $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$  上  $f$  恒大于 0, 则由  $f \in C(\mathbb{R})$  可知, 存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| < M, \forall x \in [x_1, x_{n+1}]$ . 从而  $f(x) \geq -M, \forall x \in \mathbb{R}$ . 这与对  $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$  都有根矛盾!


不妨设  $f$  在  $(x_0, x_1)$  上恒小于 0, 在  $(x_n, x_{n+1})$  上恒大于 0, 则  $f$  在  $(x_n, x_{n+1})$  上无上界. 否则, 存在  $K > \max_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$ , 使得  $f(x) < K, \forall x \in (x_n, x_{n+1})$ . 又因为  $f(x) < 0 < K, \forall x \in (x_0, x_1), f(x) \leq \max_{2 \leq i \leq n} M_i < K, \forall x \in (x_1, x_n)$ . 所以  $f(x) < K, \forall x \in \mathbb{R}$ . 这与对  $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$  都有根矛盾!

又  $f(x_n) = 0$ , 故至少存在一个  $c \in (x_n, x_{n+1})$ , 使得  $f(c) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$ . 综上, 至少有  $n+1$  个点使得  $f(x) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$ . 这与  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i\}$  是  $n$  元集矛盾!  $\square$

**例题 5.25** 设  $f \in C^2[0, +\infty), g \in C^1[0, +\infty)$  且存在  $\lambda > 0$  使得  $g(x) \geq \lambda, \forall x \geq 0$ . 若  $g'$  至多只有有限个零点且

$$f''(x) + g(x)f(x) = 0, \quad \forall x \geq 0,$$

证明:  $f$  在  $[0, +\infty)$  有界.

 **笔记** 形式计算分析需要的构造函数: 由条件微分方程可得

$$y'y'' = -gyy' \Rightarrow \frac{(y')^2}{2} = - \int gyy'dx = -\frac{1}{2} \int g dy^2 = -\frac{1}{2} g y^2 + \frac{1}{2} \int y^2 dg$$

$$\Rightarrow (y')^2 = -gy^2 + \int y^2 dg \Rightarrow \frac{(y')^2}{g} + y^2 = \int y^2 dg.$$

于是考虑构造函数  $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x)$ ,  $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$ .

**证明** 因为  $g'$  至多只有有限个零点, 所以存在  $X > 0$ , 使得  $g'(x) \neq 0, \forall x \geq X$ . 从而由导数介值性可知,  $g'$  在  $[X, +\infty)$  上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令  $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), x \geq X$ , 则结合条件  $f'' = -gf$  可得

$$F_1'(x) = \frac{2f'f''g - g'(f')^2 + 2ff'g}{g^2} = \frac{-2f'fg^2 - g'(f')^2 + 2ff'g^2}{g^2} = -\frac{g'(f')^2}{g^2}. \quad (5.87)$$

(i) 若  $g'(x) > 0, \forall x \geq X$ , 则由(5.87)式可知  $F_1'(x) \leq 0$ , 即  $F_1(x)$  在  $[X, +\infty)$  上递减. 于是再结合  $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$  可知, 存在  $C > 0$ , 使得

$$f^2(x) \leq F_1(x) \leq C, \quad \forall x \geq X.$$

故  $f(x)$  在  $[X, +\infty)$  上有界. 又  $f \in C[0, +\infty)$ , 故  $f$  在  $[0, X]$  上必有界. 因此  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有界.

(ii) 若  $g'(x) < 0, \forall x \geq X$ , 令  $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$ , 则结合条件  $f'' = -gf$  可得

$$F_2'(x) = 2f'f'' + g'f^2 + 2gff' = -2f'fg + g'f^2 + 2gff' = g'f^2 \leq 0. \quad (5.88)$$

从而  $F_2(x)$  在  $[X, +\infty)$  上递减, 于是存在  $C' > 0$ , 使得

$$g(x)f^2(x) \leq F_2(x) \leq C, \quad \forall x \geq X.$$

进而由  $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$  可得

$$f^2(x) \leq \frac{C}{g(x)} \leq \frac{C}{\lambda}, \quad \forall x \geq X.$$

故  $f(x)$  在  $[X, +\infty)$  上有界. 又  $f \in C[0, +\infty)$ , 故  $f$  在  $[0, X]$  上必有界. 因此  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有界.  $\square$

**例题 5.26** 设  $a, b > 1$  且  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x = 0$  邻域有界. 若

$$f(ax) = bf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

证明:  $f$  在  $x = 0$  连续.

**证明** 注意到

$$f(0) = bf(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

由条件可得

$$f(ax) = bf(x) \Rightarrow f(x) = \frac{f(ax)}{b} = \frac{f(a^2x)}{b^2} = \cdots = \frac{f(a^Nx)}{b^N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.89)$$

因为  $f$  在  $x = 0$  邻域有界, 所以存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in (-\delta, \delta). \quad (5.90)$$

从而对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\frac{M}{b^N} < \varepsilon. \quad (5.91)$$

于是当  $x \in \left(-\frac{\delta}{a^N}, \frac{\delta}{a^N}\right)$  时, 结合(5.89)(5.90)(5.91)式, 我们有

$$|f(x)| = \left| \frac{f(a^Nx)}{b^N} \right| \leq \frac{M}{b^N} < \varepsilon.$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .  $\square$

**例题 5.27** 设  $f \in C(\mathbb{R})$  满足  $f(x), f(x^2)$  都是周期函数, 证明:  $f$  为常值函数.

**证明** 由连续周期函数必一致连续可知,  $f(x), f(x^2)$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续. 于是对任意满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$  的数列  $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ , 都有

$$|f(x'_n) - f(x''_n)|, |f((x'_n)^2) - f((x''_n)^2)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.92)$$

设  $f(x)$  的周期为  $T > 0$ , 则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , 取  $x'_n = \sqrt{nT+c}$ ,  $x''_n = \sqrt{nT}$ , 显然  $x'_n - x''_n = \frac{c}{\sqrt{nT+c} + \sqrt{nT}} \rightarrow 0$ . 从而由 (5.92) 式可得

$$|f((x'_n)^2) - f((x''_n)^2)| = f(nT+c) - f(nT) = f(c) - f(0) \rightarrow 0.$$

故  $f(c) = f(0), \forall c \in \mathbb{R}$ . 故  $f$  为常值函数. □

**例题 5.28** 计算函数方程  $f(\log_2 x) = f(\log_3 x) + \log_5 x$  所有  $\mathbb{R}$  上的连续解.

 **笔记** 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5}, x > 0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n \in \mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3}, \quad \frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比  $\frac{\ln 3}{\ln 2} > 1$ , 后者公比  $\frac{\ln 2}{\ln 3} < 1$ , 为了求和方便我们选取后者.

**证明** 设  $f \in C(\mathbb{R})$ , 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 取  $a_1 = x, \ln a_n = \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1} \cdot \ln x, n \in \mathbb{N}$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = 0$ . 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) &= f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln a_n}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}}. \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) \right] &= f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0). \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}} = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0) \xrightarrow{y = \frac{\ln x}{\ln 2}} f(y) = f(0) + \frac{y \ln 2 \ln 3}{\ln 5 \ln \frac{3}{2}}.$$

□

**例题 5.29** 设  $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+2}(\mathbb{R})$  使得存在  $\theta \in \mathbb{R}$  满足对任何  $x, h \in \mathbb{R}$  都有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明:  $f$  是不超过  $n+1$  次的多项式.

**证明** 对  $\forall x, h \in \mathbb{R}$ , 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x+\theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!} h^n \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2}{n!} h^n, \end{aligned} \quad (5.93)$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} h^{n+2}. \quad (5.94)$$

比较(5.93)式和(5.94)式得

$$\left[ \frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!} \right] f^{(n+1)}(x) = \left[ \frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} - \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \right] h. \quad (5.95)$$

当  $\theta = \frac{1}{n+1}$  时, 我们有

$$\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令  $h \rightarrow 0$ , 则  $\xi, \eta \rightarrow x$ , 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2} = \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} \Rightarrow f^{(n+2)}(x) = 0.$$

当  $\theta \neq \frac{1}{n+1}$  时, 对(5.95)式令  $h \rightarrow 0$ , 则  $\xi, \eta \rightarrow x$ , 故此时就有

$$\left[ \frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!} \right] f^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0.$$

因此, 无论如何都有  $f$  是不超过  $n+1$  次的多项式. □


### 例题 5.30

1. 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.96)$$

证明多项式  $P_n$  的全部根都是实数且分布在  $(-1, 1)$ .

2. 设  $g(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ , 证明  $g$  是只有实根的多项式.

 **笔记** 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

**证明**

1. 显然  $P_n$  是  $n$  次多项式, 且  $\pm 1$  是  $\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n$  的  $n-k$  重根 ( $0 \leq k \leq n$ ). 由 Rolle 定理可知,  $\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n$  在  $(-1, 1)$  有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知,  $\frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^n$  在  $(-1, 1)$  有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得,  $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  在  $(-1, 1)$  有  $n$  个不同实根. 而  $n$  次多项式有且仅有  $n$  个根, 故  $P_n$  的全部根都是实数且分布在  $(-1, 1)$  上.

2. 设  $\frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) = P_k(x) e^{-x^2}$ ,  $P_k$  是  $k$  次多项式,  $k \in \mathbb{N}$ , 显然  $P_0(x) = 1$ , 于是

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (e^{-x^2}) = [P'_k(x) - 2xP_k(x)] e^{-x^2}.$$

令  $P_{k+1}(x) = P'_k(x) - 2xP_k(x)$ , 则由  $P_k$  是  $k$  次多项式可知  $P_{k+1}(x)$  是  $k+1$  次多项式. 故由数学归纳法可知

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = P_n(x) e^{-x^2}, \quad P_n \in \mathbb{R}[x], \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此  $g(x) = e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = P_n(x)$  是  $n$  次多项式 ( $n \in \mathbb{N}$ ). 设  $P_k$  是有  $k$  个不同实根的多项式, 这  $k$  个根为

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k.$$

从而这  $k$  个根也是  $P_k(x) e^{-x^2}$  的根. 由 Rolle 定理可知

$$P_{k+1}(x) = e^{-x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) = e^{-x^2} \frac{d}{dx} (P_k(x) e^{-x^2})$$

在  $(x_{j-1}, x_j)$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$  有实根. 而  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_k(x) e^{-x^2} = 0$ , 故由 Rolle 定理可知  $P_{k+1}(x)$  在  $(-\infty, x_1), (x_k, +\infty)$  上还各有一个实根. 因此  $P_{k+1}(x)$  有  $k+1$  个根. 故由数学归纳法可知  $P_n(x)$  有  $n$  个实根 ( $n \in \mathbb{N}$ ). 又因为

$g(x) = P_n(x)$  是  $n$  次多项式, 而  $n$  次多项式有且仅有  $n$  个根, 所以  $g(x) = P_n(x)$  是只有实根的多项式. □

**例题 5.31** 设  $f \in C^2(\mathbb{R})$  且  $f, f', f''$  都是正值函数. 若存在  $a, b > 0$  使得

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

求  $f'(x) \leq cf(x)$  恒成立的最小的  $c$ .

**证明** 考虑微分方程  $y'' = ay + by'$ , 其特征方程为

$$x^2 - bx - a = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} < 0.$$

于是

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x) \iff f''(x) - x_1 f'(x) \leq x_2 [f'(x) - x_1 f(x)].$$

令  $g(x) \triangleq f'(x) - x_1 f(x)$ , 则  $g'(x) \leq x_2 g(x)$ . 再令  $c(x) \triangleq \frac{g(x)}{e^{x_2 x}}$ , 则

$$c'(x) = \frac{g'(x) - x_2 g(x)}{e^{x_2 x}} \leq 0 \Rightarrow c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由  $f'', f', f > 0$  可知  $f, f'$  递增有下界. 故  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$  都存在. 因此

$$c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

即

$$f'(x) \leq x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

取  $f(x) = e^{x_1 x}$ , 此时等号成立. 故  $c_{\min} = x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$ . □

**注** 若存在  $c < x_1$ , 使得  $f'(x) \leq cf(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , 则


$$f'(x) \leq cf(x) < x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

但是取当  $f(x) = e^{x_1 x}$  时,  $f'(x) = x_1 f(x)$  矛盾! 故  $c_{\min} = x_1$ .

**例题 5.32** 设  $f \in C^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . 若对某个  $M > 0$  和  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2} \geq 0, \lambda_{n-1} \geq 1$  有不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \prod_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明  $f(x) \equiv 0$ .

 **笔记** 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)} = f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = \int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}.$$

$$f^{(n)} = -f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = -g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = -\int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{-\int_{x_0}^x g(y) dy}.$$

分离常量得到构造函数  $c_1(x) \triangleq \frac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}}, c_2(x) \triangleq f^{(n-1)}(x) e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}$ . 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的

构造函数应是  $C_1(x) \triangleq c_1^2(x) = \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}}, C_2(x) \triangleq c_2^2(x) = [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2 \int_{x_0}^x g(y) dy}$ .

**证明** 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)| \cdot g(x),$$

其中  $g(x) = M \prod_{k=1}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_{k-1}}$ . 从而  $f^{(n)}(x) f^{(n-1)}(x) \leq |f^{(n)}(x) f^{(n-1)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)|^2 \cdot g(x)$ .

(5.97)



令  $C_1(x) \triangleq \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}}$ , 则由 (5.97) 式可知

$$C_1'(x) = \frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) - 2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}} \leq 0.$$

故  $C_1(x) \leq C_1(x_0) = 0, \forall x \geq x_0$ . 因此  $C_1(x) = 0, \forall x \geq x_0$ . 进而  $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \geq x_0$ . 令  $C_2(x) \triangleq [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}$ , 则由 (5.97) 式可知

$$C_2'(x) = [2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) + 2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2] e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy} \geq 0.$$

故  $C_2(x) \leq C_2(x_0) = 0, \forall x \leq x_0$ . 因此  $C_2(x) = 0, \forall x \leq x_0$ . 进而  $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \leq x_0$ . 综上,  $f^{(n-1)}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$ . 又  $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ , 故  $f(x) \equiv 0$ .  $\square$

**例 5.33** 设  $f$  是直线上的非常值连续周期函数. 若  $g \in C(\mathbb{R})$  且  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|g(x)|}{x} = +\infty$ , 证明:  $f \circ g$  不是周期函数.

 **笔记**  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$ . 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

**证明** 若  $f \circ g$  是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知  $f \circ g$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续. 设  $f$  的周期为  $T > 0$ , 记  $a \triangleq \max f - \min f > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使

$$|f(g(x)) - f(g(y))| < a, \forall |x - y| \leq \delta. \quad (5.98)$$

先证  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$ . 若  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| \neq +\infty$ , 则存在  $A > 0$ , 使  $|g(x+\delta) - g(x)| \leq A, \forall x \geq 0$ . 对  $x \in [n\delta, (n+1)\delta], n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{|g(x - n\delta)|}{n\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{g(x - k\delta) - g(x - (k+1)\delta)}{n\delta} \right| \leq \frac{1}{n\delta} \sup_{x \in [0, \delta]} |g(x)| + \frac{A}{\delta}.$$

故  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{A}{\delta}$  矛盾! 因此  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$ . 于是存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $|g(x_0 + \delta) - g(x_0)| \geq T$ . 由介值定理可知, 存在  $s, t \in [x_0, x_0 + \delta]$ , 使得  $f(g(s)) = \max f, f(g(t)) = \min f$ . 从而由 (5.98) 式可知

$$a = |f(g(s)) - f(g(t))| < a$$

矛盾! 故  $f \circ g$  不是周期函数 ( $f \circ g$  甚至不是一致连续函数).  $\square$

**例 5.34** 已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少 2 个零点.

**证明** 设  $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $F_1(a) = F_1(b) = 0$ . 再设  $F_2(x) = \int_a^x F_1(t) dt = \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt$ , 则  $F_2(a) = 0, F_2'(x) = F_1(x), F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$ . 由条件可知


$$0 = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F_1'(x) dx = \int_a^b x dF_1(x) = x F_1(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_1(x) dx = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$ . 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$ , 使得  $F_1'(\eta_1) = F_1'(\eta_2) = 0$ . 即  $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$ .  $\square$

**例 5.35** 已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少  $n+1$  个零点.

 **笔记** 利用分部积分转换导数的技巧.

**证明** 令  $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \cdots \int_a^{x_3} \left[ \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_n$ . 则  $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$ . 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当  $1 \leq k \leq n$  且  $k \in \mathbb{N}$  时, 有

$$0 = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F^{(n+1)}(x) dx = F^{(n)}(x) \Big|_a^b = F^{(n)}(b),$$

$$0 = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = x F^{(n)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x) dx = -F^{(n-1)}(b),$$

.....

$$0 = \int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x) \Big|_a^b - n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx$$


$$= -n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx = \cdots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x) dx = (-1)^n n! F(b).$$

从而  $F(b) = F'(b) = \cdots = F^{(n)}(b) = 0$ . 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 *Rolle* 中值定理可知存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a, b)$ , 使得  $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \cdots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a, b)$ , 使得  $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \cdots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ . 即  $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \cdots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ .  $\square$

**例题 5.36** 已知  $f(x) \in D^2[0, 1]$ , 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}, \int_0^1 x f(x) dx = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = 16$ .

 **笔记** 构造  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$  的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个  $g(x) = f(x) - p(x)$ , 使得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = \int_0^1 x^k [f(x) - p(x)] dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k p(x) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c, \\ 0 &= \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}, \\ \frac{1}{60} &= \int_0^1 x^2 p(x) dx = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}. \end{aligned}$$

解得:  $a = 8, b = -9, c = 2$ . 于是就得到  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ .

**证明** 令  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ , 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令  $G(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t \left( \int_0^s g(y) dy \right) ds \right] dt$ , 则  $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$ . 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'''(x) dx = G''(1), \\ 0 &= \int_0^1 x g(x) dx = \int_0^1 x G'''(x) dx = \int_0^1 x dG''(x) = x G''(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x) dx = -G'(1), \\ 0 &= \int_0^1 x^2 g(x) dx = \int_0^1 x^2 G'''(x) dx = \int_0^1 x^2 dG''(x) = x^2 G''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x G''(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 x dG'(x) = 2 \int_0^1 G'(x) dx - 2x G'(x) \Big|_0^1 = 2G(1). \end{aligned}$$

从而  $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$ . 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (0, 1)$ , 使得  $G'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0, 1)$ , 使得  $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0, 1)$ , 使得  $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$ . 即  $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$ . 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $g''(\xi) = 0$ . 即  $f''(\xi) = 16$ .  $\square$

## 第六章 反常积分

### 6.1 反常积分敛散性判别

#### 定理 6.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛等价于对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A > a$  使得任意  $x_1, x_2 > A$  都有  $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$ .

#### 定理 6.2

设在  $[a, +\infty)$  上  $f \geq 0$ ,  $f$  在  $[a, +\infty)$  的任何有界子区间上可积, 则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是: 存在  $M > 0$  使得对任何  $b > a$  都有

$$\int_a^b f(x)dx < M,$$

即  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$  对于任何  $b$  有界.

#### 定理 6.3 (比较判别法)

设  $f$  和  $g$  在  $[a, +\infty)$  上有定义, 对任意  $b > a$ ,  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  可积, 且对充分大的  $x$ , 成立不等式  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

#### 定理 6.4 (比较判别法极限形式)

如果  $f$  和  $g$  在  $[a, +\infty)$  上有定义且非负, 并且对任意  $b > a$ ,  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上可积,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , 那么有 (1) 若  $0 < k < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  同敛散; (2) 若  $k = 0$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛; (3) 若  $k = +\infty$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也发散.

#### 定理 6.5 (A-D 判别法)

设  $f(x), g(x)$  在任何闭区间上黎曼可积, 其  $f, g$  在  $x = a$  处都有界.

1. Abel 判别法: 若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 并且  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

2. Dirichlet 判别法: 若  $\int_a^x f(t)dt$  在  $[a, +\infty)$  上有界, 并且  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

**注** Dirichlet 判别法要强于 Abel 判别法. 因为可以由 Dirichlet 判别法直接推出 Abel 判别法. 证明如下:

设  $f(x), g(x)$  在任何闭区间上黎曼可积, 其  $f, g$  在  $x = a$  处都有界. 若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 并且  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \triangleq A \in \mathbb{R}$ , 令  $h(x) = g(x) - A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ , 并且  $h(x)$  与  $g(x)$  有相同单调性. 由  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛可知,  $\int_a^x f(t)dt$  在  $[a, +\infty)$  上必有界. 从而由 Dirichlet 判别法可知  $\int_a^{+\infty} f(x)h(x)dx$  收敛. 于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)h(x)dx + A \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty.$$

**例题 6.1** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  中非负且递减, 证明:  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ ,  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  同敛散性.

**证明** (i) 若  $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$ , 则由条件可知

$$f(x) \sin^2 x \leq f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$ .

(ii) 若  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$ , 则由  $f$  非负递减, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq a > 0$ , 则存在  $M > 0$ , 使得

$$f(x) \sin^2 x > \frac{a}{2} \sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \quad (6.1)$$

又因为

$$\int_0^b \sin^2 x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( b - \frac{\sin 2b}{2} \right),$$

而上式右边极限不存在, 所以  $\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$  发散. 从而结合 (6.1) 式, 由比较判别法可知  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散, 矛盾! 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

注意到

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty.$$

即  $\int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty$ . 考虑  $\int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx$ , 注意到

$$\int_0^C \cos 2x dx = \frac{\sin 2C}{2} < 1, \quad \forall C > 0.$$

又由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知  $\int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty$ . 因此

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty.$$

(iii) 当  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  或  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散时, 实际上,  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  或  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证.  $\square$

### 命题 6.1

设  $f(x), g(x)$  在任何闭区间上黎曼可积, 其  $f, g$  在  $x = a$  处都有界.

- (1) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  绝对收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  一定条件收敛.
- (2) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^{+\infty} g(x) dx$  都绝对收敛, 则  $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$  也绝对收敛.
- (3) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  绝对收敛,  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  条件收敛, 则  $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.
- (4) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^{+\infty} g(x) dx$  都条件收敛, 则  $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$  的收敛性无法直接判断.

**证明**

(1) 由  $f(x) \leq |f(x)|$  立得.

(2) 由  $|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  立得.

(3) 由 (1) 可知  $\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^{+\infty} g(x) dx$  都条件收敛, 从而  $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$  也条件收敛. 若  $\int_a^{+\infty} |f(x) \pm g(x)| dx < \infty$ , 注意到  $g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ , 从而由 (2) 可知  $\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^{+\infty} [(f(x) + g(x)) - f(x)] dx$  也绝对收敛, 矛盾!

(4)

□

**例题 6.2** 判断如下积分的收敛性:

1.  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ ;
2.  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx, m, n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\int_2^{\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} dx$ .

**证明**

1. 四个瑕点  $x = 0, 1, 2, \infty$ , 分别估阶讨论即得收敛.
2. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{x^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}}}, x \rightarrow 0^+.$$

又  $\frac{1}{n} < 1 + \frac{2}{m}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ , 故  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \ln^{\frac{2}{m}}(1-x), x \rightarrow 1^-.$$


并且对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{2}{m}}(1-x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{2}{m}} x dx \stackrel{x=e^t}{=} \int_{-\infty}^{-\ln 2} t^{\frac{2}{m}} e^t dt \\ &\stackrel{t=-u}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} u^{\frac{2}{m}} e^{-u} du \leq \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{m}} e^{-u} du \\ &= \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) < +\infty. \end{aligned}$$

故  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛. 综上,  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛.

3. 由于  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} \sim \frac{1}{x^{1+\frac{p}{2}}}, x \rightarrow +\infty$ . 故  $\int_2^{\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} dx$  收敛当且仅当  $p > 0$ .

□

**例题 6.3** 设  $p, q > 0$ , 判断  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛性. **笔记** 一个经验上的小结论. 在幂函数次数不为 1 时, 趋于无穷或者趋于 0 时  $\ln$  可忽略.**证明** 先讨论  $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  的收敛性. 由于

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}, x \rightarrow 1^+.$$

因此  $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $q < 1$ .

再讨论  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  的收敛性.

① 当  $p > 1$  时, 我们有

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^p}} = \frac{1}{\ln^q x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

从而存在  $C > 0$ , 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{C}{x^p} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

而  $\int_2^{\infty} \frac{C}{x^p} dx$  收敛, 故  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  此时收敛.

②当  $0 < p < 1$  时, 取  $\varepsilon > 0$ , 使得  $p + \varepsilon < 1$ , 从而

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}} = \frac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty.$$

于是存在  $M > 0$ , 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} > \frac{M}{x^{p+\varepsilon}}, x \rightarrow +\infty.$$

而  $\int_2^\infty \frac{M}{x^{p+\varepsilon}} dx$  发散, 故  $\int_2^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  此时发散.

③当  $p = 1$  时, 我们有

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^q x} dx = \int_2^\infty \frac{1}{\ln^q x} d \ln x = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^q} dt.$$

于是此时  $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $q > 1$ .

综上所述,  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $p > 1, q < 1$ . □

**例 6.4** 对  $a, b \in \mathbb{R}$ , 判断  $\int_0^\infty \frac{\sin x^b}{x^a} dx$  的收敛性和绝对收敛性.

**证明** 收敛性:

1. 当  $b = 0$  时, 此时  $\int_0^\infty \frac{\sin 1}{x^a} dx$  必定发散.
2. 当  $b \neq 0$  时, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx \stackrel{y=x^b}{=} \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a}{b}}} y^{\frac{1}{b}-1} dy = \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy. \quad (6.2)$$

(a). 先考虑  $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 注意到

$$\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, y \rightarrow 0^+.$$

因此  $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛当且仅当  $\frac{a-1}{b} < 1$ .

(b). 再考虑  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ .

I. 当  $\frac{a-1}{b} + 1 \leq 0$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \right| &\geq \left( \frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \sin y dy \right| \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \right| = \left( \frac{\pi}{4} \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知, 此时  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散.

II. 当  $\frac{a-1}{b} + 1 > 0$  时, 我们有

$$\left| \int_0^x \sin y dy \right| \leq 2 \quad (\forall x > 0), \quad \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \text{ 单调递减趋于 } 0 \quad (y \rightarrow +\infty).$$

于是由 Dirichlet 判别法可知, 此时  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛.

综上,  $\int_0^\infty \frac{\sin x^b}{x^a} dx$  收敛当且仅当  $b \neq 0$  且  $-1 < \frac{a-b}{b} < 1$ .

**绝对收敛性:** 在  $-1 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$  情况下, 先考虑  $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 我们有

$$\frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \rightarrow 0^+.$$

又因为  $\frac{a-1}{b} < 1$ , 所以  $\int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}} dy$  必收敛, 因此  $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  必绝对收敛.

再考虑  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 当  $\frac{a-1}{b} > 0$ , 注意到由 (6.2) 知道

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx = \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \leq \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy < \infty,$$

故此时  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  绝对收敛.


当  $\frac{a-1}{b} \leq 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy &\geq \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|^2}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy = \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \\ &= \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy - \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \end{aligned}$$

显然  $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛, 由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散. 故此时  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散.

综上, 这就证明了原积分在  $-1 < \frac{a-1}{b} \leq 0, b \neq 0$  情况下条件收敛,  $0 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$  情况下绝对收敛.  $\square$

**例题 6.5** 判断收敛性  $\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx$ .

 **笔记** 注意运用  $x^{\square} = e^{\square \ln x} = (e^{\square})^{\ln x}$ .


**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx &= \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln \ln x}} dx = \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln \ln x}} dx \\ &= \int_{e^2}^{e^{e^2}} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx = \int_{e^2}^{e^{e^2}} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx + \int_{e^{e^2}}^{\infty} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx \\ &\leq \int_{e^2}^{e^{e^2}} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx + \int_{e^{e^2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty. \end{aligned}$$

故原积分收敛.  $\square$

**例题 6.6** 判断收敛性和绝对收敛性:

- $\int_1^{\infty} \tan\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ ,
- $\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx, p > 0$ .

 **笔记** 经验上, Taylor 公式应该展开到余项里面的函数绝对收敛为止.

**证明**

- 由 Taylor 公式可知

$$\tan \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty. \quad (6.3)$$

由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 显然有  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  条件收敛. 注意到

$$\left| O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right) \right| \leq M \left| \frac{\sin x}{x} \right|^3 \leq \frac{M}{x^3}, x \rightarrow +\infty.$$

故  $\int_1^{\infty} O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right) dx$  绝对收敛. 因此由(6.3)式可得  $\int_1^{\infty} \tan \frac{\sin x}{x} dx$  条件收敛.

2. 注意到

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx = \int_2^{+\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1 + \frac{\sin x}{x^p})} dx.$$

取  $m \in \mathbb{N}$ , 使  $m > \frac{1}{p} - 1$ . 由 Taylor 公式可知

$$\frac{t}{1+t} = t - t^2 + \cdots + (-1)^m t^{m-1} + O(t^m), t \rightarrow 0^+.$$

从而

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1 + \frac{\sin x}{x^p})} = \frac{\sin x}{x^{2p}} - \frac{\sin^2 x}{x^{3p}} + \cdots + (-1)^m \frac{\sin^{m-1} x}{x^{mp}} + O\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right), x \rightarrow +\infty. \quad (6.4)$$

注意到

$$\frac{\sin^2 x}{x^{3p}} = \frac{1}{2x^{3p}} - \frac{\cos 2x}{x^{3p}}, \quad (6.5)$$

(i) 当  $p \leq \frac{1}{3}$  时, 有  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{3p}} dx$  发散, 从而此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$  发散.

(ii) 当  $p > \frac{1}{3}$  时, 有  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{3p}} dx$  收敛, 并且由 Dirichlet 判别法可知  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2p}} dx, \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{3p}} dx$  收敛. 从而由(6.5)式可知, 此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{3p}} dx$  收敛. 又因为对  $\forall k \geq 2$ , 都有

$$\left| \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} \right| \leq \frac{1}{x^{(k+1)p}} \leq \frac{1}{x^{3p}}, \forall x > 2.$$

而  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$  收敛, 所以此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx$  都绝对收敛. 故由(6.4)式可知, 此时原积分收敛.

综上, 原积分在  $p \leq \frac{1}{3}$  时发散,  $p > \frac{1}{3}$  收敛. 再讨论绝对收敛性.

(a). 当  $p > \frac{1}{2}$  时, 由  $M$  判别法易知  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (1 \leq k \leq m)$  绝对收敛. 再由(6.4)式可知, 此时原积分绝对收敛.

(b). 当  $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{2}$  时, 我们有

$$\left| \frac{\sin x}{x^{2p}} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} = \frac{1}{2x^{2p}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2p}}.$$

显然  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{2p}} dx$  发散, 故此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2p}} dx$  条件收敛. 注意到对  $\forall k \geq 2$ , 都有

$$\left| \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} \right| \leq \frac{1}{x^{(k+1)p}} \leq \frac{1}{x^{3p}}, \forall x > 2.$$

而显然此时  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$  收敛, 故  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (2 \leq k \leq m)$  绝对收敛. 因此再由(6.4)式及命题 6.1(3)可知原积分此时条件收敛.

□

**例题 6.7** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上非负连续, 对任意正整数  $k$  有  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq 1$ , 证明:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq 1$ .

**注** 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**证明** 由条件可得, 对  $\forall A > 0$ , 我们有

$$1 \geq \int_{-A}^A e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \geq e^{-\frac{1}{k}} \int_{-A}^A f(x) dx. \Rightarrow \int_{-A}^A f(x) dx \leq e^{-\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$



令  $k \rightarrow \infty$ , 则  $\int_{-A}^A f(x)dx \leq 1, \forall A > 0$ . 于是再令  $A \rightarrow +\infty$ , 可得  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq 1$ .

实际上再由单调有界可知  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$  收敛. □

**例题 6.8** 对实数  $a$ , 讨论  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性.

**证明 证法一:** 先讨论  $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性. 注意到

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^1 = \tan 1 < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

故  $\forall a \in \mathbb{R}$ , 都有  $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛. 再讨论  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性.

(i) 当  $a \leq 2$  时,

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = +\infty.$$

(ii) 当  $a > 2$  时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x + n\pi}{\cos^2 x + (x + n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

注意到对  $\forall \lambda > 0$ , 我们都有

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \lambda \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合 (6.6) 式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

由于被积函数非负, 因此再结合 **命题 6.3** 可知

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \int_{\pi}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

从而当  $\frac{a}{2}-1 \leq 1$  时, 即  $2 < a \leq 4$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  发散; 当  $\frac{a}{2}-1 > 1$ , 即  $a > 4$  时,  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛.

综上, 当  $a > 4$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $a \leq 4$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  发散.

**证法二:** 由于被积函数非负, 因此由 **命题 6.3** 可知

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy. \end{aligned}$$

一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\pi}{\cos^2 y + [(n-1)\pi]^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2n\pi}{\cos^2 y + [(n-1)\pi]^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2n\pi}{\cos^2 y}}{1 + [(n-1)\pi]^a \tan^2 y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{t=\tan y}{=} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + [(n-1)\pi]^a t^2} \\
& = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{[(n-1)\pi]^a}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

故当  $a < 4$  时, 有  $\frac{a}{2} - 1 < 1$ , 此时原积分收敛. 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy & \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi}{\cos^2 y + (n\pi)^a \sin^2 y} dy \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y + (n\pi)^a \sin^2 y} dy \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y}}{1 + (n\pi)^a \tan^2 y} dy \\
& \stackrel{t=\tan y}{=} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (n\pi)^a t^2} \\
& = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{(n\pi)^a}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_2}{n^{\frac{a}{2}-1}}, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

故当  $a \geq 4$  时, 有  $\frac{a}{2} - 1 \geq 1$ , 此时原积分发散. □

**例题 6.9** 对  $x > 0$ , 判断积分  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$  收敛性.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + a}{t + x} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a + k + x) \ln \left( 1 + \frac{1}{k + x} \right) - 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a - \frac{1}{2}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]. \quad (6.7)
\end{aligned}$$

故当  $a \neq \frac{1}{2}$  时, 有  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - \frac{1}{2}}{k}$  发散, 从而结合(6.7)式可知, 此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt$  不存在. 因此由子列极限命题

(a)可知, 此时  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$  发散.

当  $a = \frac{1}{2}$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \quad (6.8)$$

对  $\forall y > 0$ , 存在唯一  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq y < n+1$ . 于是

$$\int_0^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt + \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt. \quad (6.9)$$

注意到

$$\left| \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt \right| \leq \int_n^y \frac{1 + \frac{1}{2}}{t + x} dt \leq \frac{3}{2} \int_n^{n+1} \frac{1}{t + x} dt = \frac{3}{2} \ln \frac{n+1+x}{n+x}.$$

当  $y \rightarrow +\infty$  时, 有  $n \rightarrow +\infty$ , 故  $\int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty$ . 再结合(6.8)(6.9)式可知

$$\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt < \infty.$$

故当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt$  收敛. □

**例题 6.10** 对正整数  $n$ , 讨论  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  的敛散性.

**证明** 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

又注意到

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \geq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \frac{4}{\pi^2} x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} dx \sim \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

故  $\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda \rightarrow +\infty$ , 其中  $C$  为某一常数. 因此

$$\int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

又因为

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx,$$

所以  $\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C_1}{k^6}, k \rightarrow +\infty$ , 其中  $C_1$  为某一常数. 于是结合 (6.10) 式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

其中  $C_2$  为某一常数. 因此

$$\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

故当  $n < 5$  时,  $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $n \geq 5$  时,  $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  发散. 又因为

$$\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \leq \pi^n,$$

所以  $\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都收敛. 从而由

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx + \int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx,$$

可知当  $n < 5$  时,  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $n \geq 5$  时,  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  发散. □

**例题 6.11** 设  $p, q$  为正整数, 求反常积分  $I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛的充要条件.

**证明** 因为当  $p = q$  时, 积分显然收敛, 所以只需考虑  $p \neq q$  的情形. 由  $I(q, p) = -I(p, q)$  可知, 可以不妨设  $p > q$ , 否则用  $I(q, p) = -I(p, q)$  代替  $I(p, q)$  即可

先讨论  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$-\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2, \quad \forall x \in [0, \delta].$$

于是

$$\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_0^{\delta} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_{\delta}^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\delta \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2)^p - (1 - \frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2)^q}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\
&\leq \int_0^\delta \frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2 + (p+q)C_p^2 x^4}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\
&= \frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4}\delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1 - \delta).
\end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 得  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx \leq \frac{q-p}{4}\delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1-\delta)$ . 故对  $\forall p > q$  且  $p, q \in \mathbb{N}$ , 都有  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛.

再讨论  $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  的敛散性.

(i) 当  $p, q$  都是奇数时, 由定理 A.13 可知

$$\begin{aligned}
\cos^p x &= \sum_{k=1}^p p_k \cos kx, \quad \text{其中 } p_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p. \\
\cos^q x &= \sum_{k=1}^q q_k \cos kx, \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, q.
\end{aligned}$$

从而此时

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_1^\infty \frac{\sum_{k=1}^p p_k \cos kx - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx \\
&= \sum_{k=1}^q (p_k - q_k) \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx + \sum_{k=q+1}^p p_k \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx.
\end{aligned}$$

注意到对  $\forall k \in \mathbb{N}$  都有

$$\int_1^x \cos kt dt = \frac{\sin kx - \sin k}{k} < 2, \quad \forall x > 1.$$

并且  $\frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知,  $\int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx (k \in \mathbb{N})$  都收敛. 因此再结合(??)式可知,  $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛.

(ii) 当  $p, q$  中至少有一个是偶数时, 不妨设  $p$  是偶数  $q$  不是偶数, 则由定理 A.13 可知

$$\begin{aligned}
\cos^p x &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}. \\
\cos^q x &= \sum_{k=1}^q q_k \cos kx \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \dots, q.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x} dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx.
\end{aligned}$$

由于  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  发散, 故此时  $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  也发散.

综上, 由

$$\int_0^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx.$$

可知当  $p = q$  或  $p, q$  均为奇数时,  $\int_0^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛, 其余情形均发散.  $\square$

**例题 6.12** 对实数  $p \neq 0$ , 讨论  $I = \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx$  的敛散性.

**证明** 对  $I$  进行积分换元可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx \stackrel{u=\frac{1}{1-x}}{=} \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{(1-(1-\frac{1}{u})^2)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{u^2} du \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2})^{\frac{1}{p}} u^2} du = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du. \end{aligned} \quad (6.11)$$

(i) 当  $p > \frac{1}{2}$  时, 令  $f(u) = \left[ (2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}} \right]^p = (2 - \frac{1}{u}) u^{2p-1}$ , 则显然有  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$  且  $f(u)$  递增. 于是  $\frac{1}{(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2})^{\frac{1}{p}} u^2} = \frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0. 又显然有  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 所以结合 (6.11) 式, 再由 Dirichlet 判别法可知  $I$  收敛.

(ii) 当  $p \in [0, \frac{1}{2}]$  时, 若  $p = \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 2$ ; 若  $p \in [0, \frac{1}{2})$ , 则  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = +\infty$ . 因此对  $\forall p \in [0, \frac{1}{2}]$ , 都存在  $K > 0$ , 使得

$$\frac{1}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} \geq 1, \forall u > K.$$

于是对  $\forall k \in \mathbb{N} \cap (K, +\infty)$ , 都有

$$\left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{\cos u}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du \right| \geq \left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \cos u du \right| = 1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知,  $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du$  发散.

(iii) 当  $p < 0$  时, 显然有  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 0$ . 令  $g(u) = (2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}$ , 则

$$g'(u) = \frac{2}{p} u^{-\frac{1}{p}} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1} + \left(2 - \frac{1}{u}\right) \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{1-\frac{1}{p}} > 0, \forall u \in [1, +\infty).$$

因此  $g(u)$  单调递增, 于是  $\frac{1}{(2 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{g(u)}$  单调递减趋于 0. 又显然有  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 所以结合 (6.11) 式, 再由 Dirichlet 判别法可知  $I$  收敛.  $\square$

**例题 6.13** 对实数  $p$ , 讨论反常积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  的敛散性.

**注** 令  $u = x + \frac{1}{x}$ , 则

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \int_u^{\infty} \frac{\sin u}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right) du.$$

显然  $\int_0^A \sin u du$  关于  $A$  有界. 再证明  $\frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p}$  单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到  $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$

收敛. 再同理讨论  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

**证明** 显然  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  有两个奇点  $x = 0, +\infty$ .

(1) 当  $p \leq 0$  时, 考虑区间  $\left[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ , 则

$$x + \frac{1}{x} \in \left[2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当  $n > 10$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) > 0. \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  发散. 故此时  $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  发散.

(2) 当  $p > 0$  时, 先考虑  $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ .

(i) 若  $p > 1$ , 则

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

因此  $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  绝对收敛.

(ii) 若  $p \in (0, 1]$ , 则

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx = \int_1^\infty \sin x \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} dx + \int_1^\infty \cos x \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx. \quad (6.12)$$

显然  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 并且  $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx$  收敛. 令  $f(u) = u^p \cos u$ , 则当  $u \in \left(0, \frac{4p}{\pi}\right)$  时, 有

$$f'(u) = pu^{p-1} \cos u - u^p \sin u = u^{p-1} \cos u (p - u \tan u) > 0.$$

于是  $f(u)$  在  $\left(0, \frac{4p}{\pi}\right)$  上单调递增, 从而  $\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} = f\left(\frac{1}{x}\right)$  在  $\left(\frac{\pi}{4p}, +\infty\right)$  上单调递减趋于 0. 又显然  $\int_{\frac{\pi}{4p}}^A \sin x dx$  关于  $A$  有界, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_{\frac{\pi}{4p}}^\infty \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$  收敛, 又  $\frac{\pi}{4}p < 1$ , 故此时  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$  收敛. 因此再由 (6.12) 式可知  $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  收敛.

注意到

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} \right| dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\cos\left(2x + \frac{2}{x}\right)}{x^p} dx.$$

显然  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$  发散. 故此时  $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑  $\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ .

(i) 若  $p \in (0, 1)$ , 则

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

故此时  $\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  绝对收敛.

(ii) 若  $p \geq 1$ , 则

$$\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{\sin(t + \frac{1}{t})}{t^{2-p}} dt.$$

此时  $2-p \leq 1$ . 于是当  $2-p \leq 0$  即  $p \geq 2$  时, 由 (1) 可知  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散. 当  $2-p \in (0, 1]$  即  $p \in [1, 2)$  时,

由 (i) 可知  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当  $p \leq 0$  时,  $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散; 当  $p \in (0, 2)$  时,  $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  条件收敛; 当  $p \geq 2$  时,  $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散.  $\square$

**例题 6.14** 判断广义积分  $\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$ ,  $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx$  的敛散性.

**证明** (1) 由于  $e^{\cos x} \sin(2 \sin x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_0^{2\pi} e dx = 2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx &= \int_0^{2\pi[\frac{A}{2\pi}]} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx \\ &\leq 0 + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^{2\pi([\frac{A}{2\pi}] + 1)} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq 2\pi e, \forall A > 2\pi. \end{aligned}$$

又显然有  $\frac{1}{x}$  单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_0^\infty e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx$  收敛.

(2) 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 我们有


$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \frac{C}{n},$$

其中  $C$  为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计,  $C$  需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{C}{n} = \infty.$$

故  $\int_1^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$  发散.  $\square$

**例题 6.15** 设  $f(x) \in C^1[1, +\infty)$ ,  $0 \leq f(x) \leq x^2 \ln x$ ,  $f'(x) > 0$ , 证明:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f'(x)} dx$  发散.

 **笔记** 首先形式计算一下, 假如  $f(x) = x^2 \ln x$ , 则  $f'(x) = 2x \ln x + x$ , 量级是  $x \ln x$ , 代入进去刚刚好积分是发散的, 可以把这个视为取等条件, 然后对着这个取等, 使用柯西不等式 (目标是去掉难以处理的分母).

**证明** 对任意充分大的  $b > a$ , 令  $A = e^a$ ,  $B = e^b$ , 则由 Cauchy 不等式有

$$\int_A^B \frac{f'(x)}{x^2 \ln^2 x} dx \int_A^B \frac{1}{f'(x)} dx \geq \left( \int_A^B \frac{1}{x \ln x} dx \right)^2 = (\ln \ln B - \ln \ln A)^2 = \left( \ln \frac{\ln B}{\ln A} \right)^2.$$

注意到

$$\int_A^B \frac{f'(x)}{x^2 \ln^2 x} dx = \int_A^B \frac{1}{x^2 \ln^2 x} df(x) = \frac{f(B)}{B^2 \ln^2 B} - \frac{f(A)}{A^2 \ln^2 A} + 2 \int_A^B \frac{f(x)(\ln x + 1)}{x^3 \ln^3 x} dx,$$

故

$$\left( \ln \frac{\ln B}{\ln A} \right)^2 \leq \int_A^B \frac{1}{f'(x)} dx \left[ \frac{f(B)}{B^2 \ln^2 B} - \frac{f(A)}{A^2 \ln^2 A} + 2 \int_A^B \frac{f(x)(\ln x + 1)}{x^3 \ln^3 x} dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_A^B \frac{1}{f'(x)} dx \left[ \frac{f(B)}{B^2 \ln^2 B} - \frac{f(A)}{A^2 \ln^2 A} + 4 \int_A^B \frac{f(x)}{x^3 \ln^2 x} dx \right] \\
&\leq \int_A^B \frac{1}{f'(x)} dx \left( \frac{1}{\ln B} + 4 \int_A^B \frac{1}{x \ln x} dx \right) \\
&= \int_A^B \frac{1}{f'(x)} dx \left( \frac{1}{\ln B} + 4 \ln \frac{\ln B}{\ln A} \right).
\end{aligned}$$

从而


$$\left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 \leq \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{f'(x)} dx \left( \frac{1}{b} + 4 \ln \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{f'(x)} dx \geq \frac{\left( \ln \frac{b}{a} \right)^2}{\left( \frac{1}{b} + 4 \ln \frac{b}{a} \right)}.$$

于是对任意充分大的  $a$ , 取  $b = 2a$ , 则

$$\int_{e^a}^{e^{2a}} \frac{1}{f'(x)} dx \geq \frac{(\ln 2)^2}{\left( \frac{1}{2a} + 4 \ln 2 \right)} \rightarrow \frac{\ln 2}{4}, a \rightarrow +\infty.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f'(x)} dx$  发散. □

**例题 6.16** 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递减趋于零,  $p > 1$ , 若  $\int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx$  收敛, 证明:  $\int_1^{\infty} f^p(x) dx$  收敛.

 **笔记** 首先要搞清楚一个误区: 一定不存在  $C > 0$ , 使得

$$\int_1^{\infty} f^p(x) dx \leq C \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx \quad (6.13)$$

成立. 因为如果上式成立, 则对  $\forall k > 0$ , 用  $kf(x)$  代替  $f(x)$  就有

$$\begin{aligned}
k^p \int_1^{\infty} f^p(x) dx &\leq C k^{p-1} \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx \\
\Rightarrow \frac{k}{C} \int_1^{\infty} f^p(x) dx &\leq \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx.
\end{aligned}$$

令  $k \rightarrow \infty$  得  $\int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx > +\infty$ , 矛盾! 因此, 只有 (6.13) 式左右  $f$  的次数相同 (齐次不等式), 才可能存在上述的  $C$ . 由此得到启发, 我们可以尝试建立如下不等式

$$\int_0^{\infty} f^p(x) dx \leq C \left( \int_0^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

因为  $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} dx$  收敛, 所以

$$\int_0^1 \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx \leq \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}} dx < +\infty.$$

故  $\int_0^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx$  收敛. 从而可以不妨将积分下限改成 0, 方便后续计算. 定义  $F(x) \triangleq \begin{cases} f(1), x \in [0, 1] \\ f(x), x > 1 \end{cases}$ , 则

$F(x)$  递减,  $F(x) = f(x), \forall x \geq 1$ , 并且

$$\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx = \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}} dx + \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx < +\infty.$$

待定  $C > 0$ , 令  $g(x) = \int_0^x F^p(t) dt - C \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{p}{p-1}}$ , 则  $g(0) = 0$ , 形式计算 ( $f$  不一定连续,  $g$  不一定可导) 可得

$$g'(x) = F^p(x) - \frac{Cp}{p-1} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}$$



$$= \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \left[ F(x)x^{\frac{1}{p}} - \frac{Cp}{p-1} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \right].$$

由  $F$  递减可得

$$\frac{Cp}{p-1} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \geq \frac{Cp}{p-1} \left( F^{p-1}(x) \int_0^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} = C \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取  $C = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ , 则上式可化为

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}} = F(x)x^{\frac{1}{p}}, \forall x \geq 1. \quad (6.14)$$

于是  $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 1$  再结合  $g(0) = 0$  就有

$$\int_0^x F^p(t) dt - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{p}{p-1}} = g(x) \leq g(0) = 0, \forall x \geq 1.$$

令  $x \rightarrow \infty$  得

$$\int_0^\infty F^p(x) dx \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^\infty \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx \right)^{\frac{p}{p-1}} < +\infty.$$

但是注意上述  $g$  不一定可导, 所以还是需要通过定性地放缩得到严谨的证明, 只需注意到(6.14)式始终成立.

当然也可以通过逼近方法, 构造一个折线函数  $h(x)$  逼近  $F(x)$ , 此时  $h(x)$  连续, 从而用  $h(x)$  代替  $g(x)$  中的  $F(x)$  得到的新的  $G(x)$  是可导的. 就能按照上述方法进行严谨证明.(逼近得到的不等式系数往往更加精确)

**证明** 定义  $F(x) \triangleq \begin{cases} f(1), & x \in [0, 1] \\ f(x), & x > 1 \end{cases}$ , 则  $F(x)$  递减,  $F(x) = f(x), \forall x \geq 1$ , 并且

$$\int_0^\infty \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx = \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}} dx + \int_1^\infty \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx < +\infty.$$

待定  $C > 0$ , 令  $g(x) = \int_0^x F^p(t) dt - C \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{p}{p-1}}$ , 则由  $F$  递减可得

$$\frac{Cp}{p-1} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \geq \frac{Cp}{p-1} \left( F^{p-1}(x) \int_0^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} = C \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取  $C = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ , 则上式可化为

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}} = F(x)x^{\frac{1}{p}}, \forall x \geq 1.$$

由  $\int_0^\infty \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt$  收敛可知, 存在  $C > 0$ , 使得

$$F(x)x^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \int_0^\infty \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} < C, \forall x \geq 1.$$

于是


$$\int_0^\infty F^p(x) dx = \int_0^\infty \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}} dx \leq C \int_0^\infty \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} dx < +\infty.$$

□

### 命题 6.2

设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  中连续, 证明: 广义积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛的充要条件有

1. 存在  $u(x), v(x)$  使得  $f(x) = u(x)v(x)$ , 其中  $u(x)$  单调趋于零,  $\int_0^A v(x) dx$  有界.
2. 存在  $u(x), v(x)$  使得  $f(x) = u(x)v(x)$ , 其中  $u(x)$  单调有界,  $\int_0^{+\infty} v(x) dx$  收敛,

 **笔记** 这个命题说明:A-D 判别法“几乎”是充要条件(只有确定  $f$  的分解逆命题才成立),并且“逆命题”当中,依然是 Dirichlet 判别法强于 Abel 判别法. 级数版本见命题 9.10.

**证明** 充分性由 A-D 判别法立得. 下证明必要性.

1. 由  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛及 Cauchy 收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall B > A > M$ , 有

$$\left| \int_A^B f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{n^3}$ , 则存在  $M_n > 0$ , 对  $\forall B > M_n$ , 有

$$\left| \int_{M_n}^B f(x) dx \right| < \frac{1}{n^3}. \quad (6.15)$$

取  $\varepsilon = \frac{1}{(n+1)^3}$ , 则存在  $M_{n+1} > M_n + 1$ , 对  $\forall B > M_{n+1}$ , 有

$$\left| \int_{M_{n+1}}^B f(x) dx \right| < \frac{1}{(n+1)^3}.$$

由  $M_{n+1} > M_n + 1$  及(6.15)式可知

$$\left| \int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x) dx \right| < \frac{1}{n^3}.$$

令  $u(x) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [M_n, M_{n+1}) \\ 1, & x \in [0, M_1) \end{cases}$ ,  $v(x) \triangleq \frac{f(x)}{u(x)}$ , 则  $u(x)$  单调递减, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ . 对  $\forall A > 0$ , 存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得

得  $A \in [M_n, M_{n+1})$ . 从而

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A \frac{f(x)}{u(x)} dx \right| &= \left| \int_0^{M_1} \frac{f(x)}{u(x)} dx + \int_{M_1}^{M_2} \frac{f(x)}{u(x)} dx + \cdots + \int_{M_{n-1}}^{M_n} \frac{f(x)}{u(x)} dx + \int_{M_n}^A \frac{f(x)}{u(x)} dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{M_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{M_1}^{M_2} f(x) dx \right| + \cdots + \left| \int_{M_{n-1}}^{M_n} (n-1)f(x) dx \right| + \left| \int_{M_n}^A n f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{M_1} f(x) dx \right| + 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\ &< \left| \int_0^{M_1} f(x) dx \right| + \frac{\pi^2}{6} < +\infty. \end{aligned}$$

这就完成了证明.

2. 由第 1 问可知, 存在  $u(x), v(x)$ , 使得  $f(x) = u(x)v(x)$ , 其中  $u(x)$  单调趋于 0,  $\int_0^A v(x) dx$  有界. 令  $u_1(x) = \sqrt{u(x)}$ ,  $v_1(x) = \sqrt{u(x)}v(x)$ , 则  $f(x) = u_1(x)v_1(x)$ . 由  $u(x)$  单调趋于 0 可知,  $u_1(x)$  单调有界. 因为  $\sqrt{u(x)}$  单调趋于 0,  $\int_0^A v(x) dx$  有界, 所以由第 1 问可知

$$\int_0^\infty v_1(x) dx = \int_0^\infty \sqrt{u(x)}v(x) dx < +\infty.$$

故  $u_1(x), v_1(x)$  就是第 2 问中我们要找的分解.

□

## 6.2 反常积分收敛抽象问题

## 命题 6.3

设  $f$  为  $[a, +\infty)$  上的非负可积函数, 若存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy.$$

进而可得

- (i)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的充要条件是存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy$  存在.  
 (ii)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散的充要条件是存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy = +\infty$ .

**注** 对于瑕积分也有类似的结论.

**笔记** 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

**证明** 令  $g(x) = \int_a^x f(y) dy$ , 则  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上非负单调递增. 由单调收敛定理可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . 从而由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

□

## 命题 6.4

若  $f \in R[a, +\infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n |f(x)| dx$  存在且  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ , 则  $\int_a^\infty f(x) dx$  一定存在.

**笔记** 若已知  $\int_a^\infty f(x) dx$  存在, 则由 Heine 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$  一定存在. 但是反过来,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$  只是  $\int_a^\infty f(x) dx$  的一个子列极限, 故  $\int_a^\infty f(x) dx$  不一定存在. 还需要额外的条件才能使得  $\int_a^\infty f(x) dx$  存在.

**证明** 对  $\forall x \geq a$ , 一定存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x < n+1$ . 从而可得

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^n f(x) dx + \int_n^x f(x) dx. \quad (6.16)$$

并且

$$\int_n^x f(x) dx \leq \int_n^x |f(x)| dx \leq \int_n^{n+1} |f(x)| dx \leq \sup_{y \geq n} |f(y)|. \quad (6.17)$$

对 (6.17) 式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 进而可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \geq n} |f(y)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|.$$

由于此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 因此  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx = 0$ . 于是再对 (6.16) 式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 从而可得

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx.$$


又因为此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x)dx$  存在, 所以  $\int_a^\infty f(x)dx$  也存在.  $\square$

### 命题 6.5 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足  $\int_0^\infty f(x)dx$  收敛, 则

(1) 存在趋于  $+\infty$  的  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ .

(2) 若  $f$  不一定连续, 但有  $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ , 则存在严格递增的  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n f(x_n) = 0$ .

 **笔记** 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的  $x_n \ln x_n$  可以换成任意数列  $\{a_n\}$ , 只要满足  $\int_a^\infty a_n dx = +\infty$  即可

**证明**

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x)dx = f(\theta(A)), A+1 > \theta(A) > A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{A+1} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} f(\theta(A)), \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta(A) = +\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若  $|f(x)| > \frac{1}{x \ln x}, \forall x > e$ , 则由  $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = +\infty$  可得  $\int_e^\infty |f(x)| dx = +\infty$  矛盾! 故存在  $x_1 > e$  使得  $|f(x_1)| \leq \frac{1}{x_1 \ln x_1}$ . 同样的, 如果  $|f(x)| > \frac{1}{2x \ln x}, \forall x > x_1 + 1$ , 同理可得矛盾! 因此必然存在  $x_2 > x_1 + 1$  使得  $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2x_2 \ln x_2}$ . 依次下去我们得到

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{nx_n \ln x_n}, n = 1, 2, \dots,$$

即


$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n \cdot |f(x_n)| = 0.$$

$\square$

### 命题 6.6

设  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $\int_0^{+\infty} f(y)dy$  收敛, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x y f(y)dy}{x} = 0.$$

 **笔记** 本题不可直接洛必达. 这个命题是命题 9.1 的连续版本, 在那里我们先 abel 变换再 Stolz 定理, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

**证明** 记  $F(x) \triangleq \int_0^x f(y)dy$ , 则

$$\int_0^x y f(y)dy \stackrel{\text{R-S 积分}}{=} \int_0^x y dF(y) = xF(x) - \int_0^x F(y)dy.$$

由  $F \in C[0, +\infty)$ , 利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x y f(y)dy}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(y)dy \stackrel{\text{L'Hospital 法则}}{=} \int_0^{+\infty} f(y)dy - \int_0^{+\infty} f(y)dy = 0.$$

$\square$

## 命题 6.7

- (1) 设  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  单调, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ .
- (2) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛且  $xf(x)$  单调, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln xf(x) = 0$ .

## 证明

(1) 不妨设  $f$  递减, 否则用  $-f$  代替  $f$ , 从而

$$Af(A) \geq \int_A^{2A} f(x) dx, \quad \frac{A}{2}f(A) \leq \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x) dx \leq Af(A) \leq 2 \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

由  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{2A} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故  $\lim_{A \rightarrow +\infty} Af(A) = 0$ .

(2) 不妨设  $xf$  递减, 否则用  $-f$  代替  $f$  即可. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A \ln Af(A) &= Af(A) \int_{\sqrt{A}}^A \frac{1}{x} dx \leq \int_{\sqrt{A}}^A \frac{xf(x)}{x} dx = \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx, \\ \int_A^{A^2} f(x) dx &= \int_A^{A^2} \frac{xf(x)}{x} dx \leq Af(A) \int_A^{A^2} \frac{1}{x} dx = A \ln Af(A). \end{aligned}$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x) dx \leq A \ln Af(A) \leq 2 \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx$$

又由  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{A^2} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故由夹逼准则可知  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A \ln Af(A) = 0$ .

□

## 命题 6.8

若  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且  $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## 证明

□

**例题 6.17** 设  $f(x)$  单调下降, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 证明: 若  $f'(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 则反常积分  $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$  收敛.

## 证明

□

**例题 6.18** 设  $f \in D^1(0, +\infty)$  且  $|f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减. 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$ .

**证明** 若存在  $a > 0$ , 使得  $f'(a) = 0$ , 则由  $|f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减可得

$$f'(x) = 0, \quad \forall x > a.$$

此时结论显然成立.

若  $f' \neq 0, \forall x \in (0, +\infty)$ , 则由导数介值性可知,  $f'$  在  $(0, +\infty)$  上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设  $f' > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ , 故此时  $f$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增. 并且此时  $f' = |f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减, 故此时  $f'$  在  $(0, +\infty)$  内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y) dy = f(x) - f(1).$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 所以  $\int_1^{+\infty} f'(y) dy$  收敛. 于是由命题 6.7(1) 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$ .  $\square$

**例题 6.19** 设  $f$  在  $(a, +\infty)$  可导. 如果  $f$  有界且  $x f'$  为单调函数, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0.$$

**证明** 由  $x f'$  单调可知,  $g(x) \triangleq x f'$  在  $(a, +\infty)$  上内闭 Riemann 可积. 从而  $f' = \frac{g(x)}{x}$  在  $(a, +\infty)$  上也内闭 Riemann 可积. 不妨设  $x f'$  单调递增, 由单调有界定理可知,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x)$  存在或  $+\infty$ . 由  $f$  有界可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) \leq 0$ . 否则, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) > 0$ , 则存在  $C > 0$ , 使得

$$x f'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a, 0\}, +\infty). \quad (6.18)$$

对 (6.18) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{C}{t} dt = C \ln |x| - C \ln a.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 这与  $f$  有界矛盾! 于是由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) \leq 0$  可知存在  $X > \max\{a, 0\}$ , 使得

$$x f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0, \quad x \in (X, +\infty).$$

故  $f$  在  $(X, +\infty)$  上递减. 又因为  $f$  有界, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在可得  $\int_a^{+\infty} f'(t) dt$  收敛. 又  $x f'(x)$  单调, 于是由命题 6.7(2) 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0$ .  $\square$

**例题 6.20** 设  $f \in D[a, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  且  $f'$  严格递增, 证明  $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$  收敛.

**证明** 由命题 5.7 和命题 5.9 可知,  $f' \in C[a, +\infty)$ . 又由命题 5.5 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 故存在  $X > 0$ , 使得  $f', f$  在  $[X, +\infty)$  上恒正, 且  $f$  在  $[X, +\infty)$  上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,  $f$  存在严格单调递增的反函数

$$g: [f(X), +\infty) \rightarrow [X, +\infty).$$

于是令  $x = g(y)$ , 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y) dy.$$

又由反函数求导定理可知  $g'(y) f'(g(y)) = 1$ , 并且  $f(g(y)) = y$ , 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y) dy = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))} dy.$$

因为  $f', g$  都严格递增趋于  $+\infty$ , 所以  $\frac{1}{f'(g(x))}$  严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left| \int_{f(X)}^A \sin y dy \right| \leq 2, \quad \forall A \geq f(X).$$

故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$  收敛.  $\square$

**例题 6.21**

(1) 设  $f$  内闭可积且  $f(x) > 0, x_0 > 0$ . 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛, } \ell < 1 \\ \text{发散, } \ell > 1 \end{cases}.$$

(2) 设  $f > 0$  内闭可积, 若有常数  $k > 1$  使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛, } \ell < \frac{1}{k} \\ \text{发散, } \ell > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设  $f > 0$  内闭可积, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{收敛, } -\infty \leq p < -1 \\ \text{发散, } -1 < p \leq +\infty \end{cases}.$$

**注** 第(1)题中当  $\ell = 1$  时无法判断反常积分的敛散性!

第(3)题中当  $p = 1$  时无法判断反常积分的敛散性!

**注** 第(3)题的条件  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p$  可改为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = p$ . 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = p.$$

**证明**

(1) 注意到

$$\int_a^\infty f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x) dx \triangleq \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由题设可知, 存在  $X > a$ , 使得

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{f(x_0+x)}{f(x)} \leq \ell + \varepsilon, \forall x \geq X.$$

从而当  $n > \frac{X-a}{x_0}$  时, 就有  $a+nx_0 > X$ , 进而

$$a_{n+1} = \int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x) dx = \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0) dx \in [(\ell - \varepsilon)a_n, (\ell + \varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon, \forall n > \frac{X-a}{x_0}.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ , 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令  $x = e^t$ , 任取  $c > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \int_c^\infty f(x) dx &= \int_{\ln c}^\infty f(e^t) e^t dt. \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(e^{t+\ln k}) e^{t+\ln k}}{f(e^t) e^t} &= k \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(ke^t)}{f(e^t) e^t} = k\ell. \end{aligned}$$

于是由 (??) 可知结论成立.

(3) 只讨论  $p \in \mathbb{R}$  的情况, 其余  $p = \pm\infty$  情况类似. 由题意可知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $X > e$ , 使得当  $x > X$  时, 有

$$p - \varepsilon \leq \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq p + \varepsilon \iff x^{p-\varepsilon} \leq f(x) \leq x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$


再由比较判别法即得结论. □

**注** 上述例题第 (3) 题的证明中, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为  $X$  是与  $\varepsilon$  有关的. 因此只有固定  $\varepsilon$  时, 才有  $\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$  成立. 故再利用比较判别法, 不能令  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**例题 6.22** 若  $f \in C^1[0, +\infty)$  且  $f(0) > 0, f'(x) > 0$ . 若  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < \infty$ , 证明  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$ .

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

**证明** 由条件可知  $f(x)$  严格递增且恒正, 从而  $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是


$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{f(x) + f'(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| dx = \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f(x)[f(x) + f'(x)]} dx \leq \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{f^2(x)} df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x) + f'(x)} \right| + \frac{1}{f(x) + f'(x)}.$$

又  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < +\infty$ , 故  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$ . □

**例题 6.23** 设非负函数  $f \in C(\mathbb{R})$  使得对任何  $k \in \mathbb{N}$  都有  $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M$ , 证明  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  收敛且  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \leq M$ .

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

**证明** **证法一:**  $\forall a < b$ , 注意到  $1 - x \leq e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ . 从而对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x) dx \leq \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

于是

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{k} \int_a^b |x| f(x) dx + M.$$

令  $k \rightarrow +\infty$  得  $\int_a^b f(x) dx \leq M$ . 再由  $a, b$  的任意性可得  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq M$ .

**证法二:** 由 Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

□

**例题 6.24** 设  $f \in C^1[0, +\infty)$  满足

$$|f'(x)| \leq M, \forall x \geq 0, \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty.$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$



**证明** 由条件可得

$$\int_0^{+\infty} |f^2(x)f'(x)| dx \leq M \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

故  $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx$  收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x)$  存在. 由  $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  及 **命题 6.5(1)** 可知, 存在  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $f(x_n) \rightarrow 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^3(x_n) = 0$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\square$

**例题 6.25** 设  $f \in D^2[0, +\infty)$  且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2 dx < \infty.$$

证明  $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty$ .

**证明** 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2 dx} < +\infty.$$

故  $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx$  收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^x |f'(y)|^2 dy = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(y)f''(y) dy \quad (6.19)$$

由 **命题 6.3** 可知, 只须找一个  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使  $f(x_n)f'(x_n)$  极限存在即可.

由于  $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$ , 故由 **命题 6.5(1)** 可知存在  $a_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n)|^2 = 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$ . 于是再由 **命题 5.6** 可知, 存在  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f^2(x_n)]' = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由 **命题 6.3** 及 (6.19) 式可知结论成立.  $\square$

**例题 6.26**

**证明**

$\square$

## 第七章 积分不等式


### 7.1 著名积分不等式

#### 定理 7.1 (Young 不等式初等形式)

设  $(x_i)_{i=1}^n \subset [0, +\infty), (p_i)_{i=1}^n \subset (1, +\infty), \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ , 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  相等.

 **笔记** 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何  $a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$  有  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

**证明** 不妨设  $x_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ . 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \ln \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \ln x_i^{p_i} \leq \ln \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \right),$$

而最后一个等价之后就是  $\ln$  的上凸性结合 Jensen 不等式给出. □

#### 定义 7.1

(1)  $d\mu = g(x)dx$ , 这里  $g$  是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若  $E \subset \mathbb{Z}$ , 则  $\int_E f(x)d\mu = \sum_{n \in E} f(n)$ .

#### 定理 7.2 (Cauchy 不等式)

$$\left( \int_E f(x)g(x)d\mu \right)^2 \leq \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的  $c_1, c_2$ , 使得  $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$ . ♥

**证明** 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leq \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu} \sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当  $\int_E |f(x)|d\mu$  或  $\int_E |g(x)|d\mu = 0$  时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当  $\int_E |f(x)|d\mu \neq 0$  且  $\int_E |g(x)|d\mu \neq 0$  时, 不妨设  $\int_E |f(x)|^2 d\mu = \int_E |g(x)|^2 d\mu = 1$ , 否则, 用  $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$  代

替  $f(x)$ ,  $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$  代替  $g(x)$  即可. 利用 Young 不等式可得


$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leq \int_E \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} d\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的  $c_1, c_2$ , 使得  $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$ . □

**定理 7.3 (Jensen 不等式 (积分形式))**

设  $\varphi$  是下凸函数且  $p(x) \geq 0$ ,  $\int_a^b p(x)dx > 0$ , 则在有意义时, 必有

$$\varphi \left( \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \right) \leq \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \quad (7.1)$$

 **笔记** 1. 类似的对上凸函数, 不等式(7.1)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被  $C^2$  的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3. Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

**证明** 为书写简便, 我们记  $d\mu = \frac{p(x)}{\int_a^b p(y)dy} dx$ , 那么有  $\int_a^b 1d\mu = 1$ . 于是我们记  $x_0 = \int_a^b f(x)d\mu$  并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))d\mu \geq \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]d\mu = \varphi(x_0) = \varphi \left( \int_a^b f(x)d\mu \right),$$

这就完成了证明. □

**例题 7.1** 对连续正值函数  $f$ , 我们有

$$\ln \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)dx.$$

**证明** 令  $d\mu = \frac{1}{b-a} dx$ , 则  $\int_a^b d\mu = 1$ , 再令  $x_0 \triangleq \int_a^b f(x)d\mu > 0$ , 则由  $\ln x$  的上凸性可知

$$\ln x \leq \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln f(x)d\mu &\leq \int_a^b \ln x_0 d\mu + \frac{1}{x_0} \int_a^b (f(x) - x_0)d\mu \\ &= \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \left( \int_a^b f(x)d\mu - x_0 \int_a^b d\mu \right) \\ &= \ln x_0 = \ln \int_a^b f(x)d\mu. \end{aligned}$$

故结论得证. □

**定理 7.4 (Hold 不等式)**

设  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  中有体积的有界集,  $f$  和  $g$  都在  $V$  上可积, 又设  $p, q$  是满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  的正数, 且  $p > 1$ , 则有

$$\int_V |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_V |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_V |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当  $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$  几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).

**注** 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要“调幂次”的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于  $p \in (0, 1)$  的情况会有反向赫尔德不等式.

**证明** 不妨设  $f, g \geq 0$ , 否则用  $|f|, |g|$  代替  $f, g$ . 由 Young 不等式可知

$$f(x)g(x) \leq \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}.$$

由于  $f, g$  在  $V$  上都可积, 故可不妨设  $\int_V f^p(x)dx = \int_V g^q(x)dx = 1$ , 否则用  $\frac{f}{(\int_V f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}}, \frac{g}{(\int_V g^q(x)dx)^{\frac{1}{q}}}$  代替  $f, g$ . 从而

$$\int_V f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{p} \int_V f^p(x)dx + \frac{1}{q} \int_V g^q(x)dx = 1 = \left(\int_V f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x) \leq \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}$$

在  $V$  上几乎处处取等. 根据 **Young 不等式** 的取等条件可知, 此即  $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$  几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零).  $\square$

#### 定理 7.5 (Minkowski 不等式)

若  $f$  是  $[a, b] \times [c, d]$  上的非负连续函数, 则对  $p \geq 1$  有 (若  $p \in (0, 1)$  则不等式反向)

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

 **笔记** 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用赫尔德不等式.

**注** 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为“绝对值不等式”, 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用  $p$  范数来写会好记并且清晰:

$$\left\|\int_c^d f(x, y)dy\right\|_p \leq \int_c^d \|f(x, y)\|_p dy.$$

对于  $p \in (0, 1)$  的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向赫尔德不等式.

**证明** 假设  $p \geq 1$ , 记  $g(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ , 换序并利用 **赫尔德不等式** 有

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^p dx &= \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy \cdot \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^{p-1} dx \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y)g^{p-1}(x)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)g^{p-1}(x)dx dy \\ &\leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y)dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\ &= \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy. \end{aligned}$$

其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 进而  $q(p-1) = p$ . 两边约掉  $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^p dx$  就有

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

$\square$

#### 定理 7.6 (Hardy 不等式)

设  $p > 1$  或  $p < 0$ ,  $f(x)$  恒正且连续, 记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx.$$



**注** 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后赫尔德 (连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再赫尔德, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外  $p < 0$  的情况证明完全类似, 利用反向赫尔德即可.

**证明** 假设  $p > 1$ , 对任意  $M > 0$ , 利用分部积分和赫尔德不等式有

$$\begin{aligned} \int_0^M \left( \frac{F(x)}{x} \right)^p dx &= -\frac{1}{p-1} \int_0^M F^p(x) d \frac{1}{x^{p-1}} = -\frac{1}{p-1} \left( \frac{F^p(x)}{x^{p-1}} \Big|_0^M - \int_0^M \frac{1}{x^{p-1}} dF^p(x) \right) \\ &= -\frac{1}{p-1} \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_0^M \frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}} dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^M \left( \frac{F(x)}{x} \right)^{p-1} f(x) dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left( \int_0^M \left( \frac{F(x)}{x} \right)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_0^M f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

其中利用了

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \left( \frac{F(x)}{x} \right)^{p-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

所以

$$\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} \Big|_0^M = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.$$

现在约掉相同的部分, 再令  $M \rightarrow \infty$  就有

$$\int_0^\infty \left( \frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

□

### 推论 7.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列  $a_n$  非负, 对任意  $p > 1$  或者  $p < 0$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

♥

**注** 如果  $p < 0$ , 则同样使用反向赫尔德不等式即可完成

**证明** 记  $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ , 不妨设  $p > 1$ , 利用均值不等式或者 Young 不等式容易证明

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1} \frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}} a_k \leq \frac{1}{p-1} \left( (k-1) \frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k \frac{S_k^p}{k^p} \right)$$

求和有

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^{p-1} a_k.$$

效果上就和前面分部积分完全一样, 然后再用赫尔德不等式即可.

□

## 7.2 积分不等式的应用

**例题 7.2** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上可积且满足

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1.$$

求证:  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$ .

**证明 证法一:** 对于任意常数  $a$  和  $b$  有  $\int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx \geq 0$ . 由此并根据条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b) f(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \geq 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx &\geq 2 \int_0^1 (ax + b) f(x) dx - \int_0^1 (ax + b)^2 dx = 2(a + b) - \frac{1}{3}a^2 - ab - b^2. \end{aligned}$$

取  $a = 6, b = -2$  即得所证.

**证法二:** 对  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 由 Cauchy 不等式可知

$$\int_0^1 (ax + b)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx \geq \left[ \int_0^1 (ax + b) f(x) dx \right]^2 = (a + b)^2.$$

从而

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{(a + b)^2}{\int_0^1 (ax + b)^2 dx} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{\frac{a^2}{3} + ab + b^2} = 3 - \frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3}.$$

再由  $a, b$  的任意性知

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 3 + \sup_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3} \right\}. \quad (7.2)$$

令  $g(x) = -\frac{3x + 6}{x^2 + 3x + 3}$ , 则

$$g'(x) = \frac{3(x+1)(x+3)}{(x^2 + 3x + 3)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, -3.$$

又  $g(-1) = -3 < 1 = g(-3)$ , 故  $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1$ . 因此

$$\sup_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{3\frac{a}{b} + 6}{\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 3} \right\} = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 1.$$

再由(7.2)式可知

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4.$$

并且这个不等式右边不可改进. □

**例题 7.3** 设  $f \in C^1[0, 1]$ , 解决下列问题.

1. 若  $f(0) = 0$ , 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

2. 若  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

**注** 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

**证明**

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy = \int_0^x f'(y) dy.$$

从而

$$|f(x)|^2 = \left| \int_0^x f'(y) dy \right|^2 \leq \int_0^x 1^2 dy \int_0^x |f'(y)|^2 dy = x \int_0^x |f'(y)|^2 dy \leq x \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

于是对上式两边同时积分可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x dx \int_0^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

2. 由牛顿莱布尼兹公式(带积分型余项的插值公式)可得

$$f(x) = \int_0^x f'(y)dy, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \quad f(x) = \int_x^1 f'(y)dy, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

从而

$$|f(x)|^2 = \left| \int_0^x f'(y)dy \right|^2 \leq \int_0^x 1^2 dy \int_0^x |f'(y)|^2 dy = x \int_0^x |f'(y)|^2 dy \leq x \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

$$|f(x)|^2 = \left| \int_x^1 f'(y)dy \right|^2 \leq \int_x^1 1^2 dy \int_x^1 |f'(y)|^2 dy \leq (1-x) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

于是对上面两式两边同时积分可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x dx \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy.$$

将上面两式相加得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

□

#### 例题 7.4 opial 不等式

特例:

1. 设  $f \in C^1[a, b]$  且  $f(a) = 0$ , 证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

2. 设  $f \in C^1[a, b]$  且  $f(a) = 0, f(b) = 0$ , 证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$


一般情况:

1. 设  $f \in C^1[a, b], p \geq 0, q \geq 1$  且  $f(a) = 0$ . 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{p+q} \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \quad (7.3)$$

2. 若还有  $f(b) = 0$ . 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \quad (7.4)$$

 **笔记** 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

**证明** 特例:

1. 令  $F(x) \triangleq \int_a^x |f'(y)|dy$ , 则  $F'(x) = |f'(x)|, F(a) = 0$ . 从而

$$f(x) = \int_0^x f'(y)dy \Rightarrow |f(x)| \leq \int_a^x |f'(y)|dy = F(x).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \int_a^b F(x)F'(x)dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_a^b = \frac{1}{2} F^2(b) = \frac{1}{2} \left( \int_a^b |f'(y)|dy \right)^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{1}{2} \int_a^b 1^2 dx \int_a^b |f'(y)|^2 dy = \frac{b-a}{2} \int_a^b |f'(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

2. 由第 1 问可知

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{\frac{a+b}{2} - a}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2 dy = \frac{b-a}{4} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2 dy.$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{\frac{a+b}{2} - a}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2 dy = \frac{b-a}{4} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2 dy.$$

将上面两式相加可得

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(y)|^2 dy.$$

一般情况:

1. 只证  $q > 1$ .  $q = 1$  可类似得到. 考虑

$$f(x) = \int_a^x f'(y)dy, F(x) = \int_a^x |f'(y)|^q dy.$$

则由 **Hölder 不等式**, 我们知道

$$|f(x)|^p \leq \left( \int_a^x |f'(y)|dy \right)^p \leq \left( \int_a^x |f'(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_a^x 1^{\frac{q}{q-1}} dy \right)^{\frac{p(q-1)}{q}} = F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$

这里  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx &\leq \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} |f'(x)|^q dx = \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} dF(x) \\ &\leq (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x) dF(x) = \frac{q}{q+p} (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} F^{\frac{p+q}{q}}(b) \\ &= \frac{q}{q+p} (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \left( \int_a^b |f'(y)|^q dy \right)^{\frac{p+q}{q}} \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{q}{q+p} (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}} \left( \int_a^b |f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})} dy \right)^{\frac{q}{q+p}} \left( \int_a^b 1^{(\frac{p+q}{q-1})} dy \right)^{\frac{q-1}{q+p}} \\ &= \frac{q(b-a)^p}{p+q} \int_a^b |f'(y)|^{p+q} dy, \end{aligned}$$

这就证明了不等式(7.3).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q} dx,$$

对称得


$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q} dx.$$

故上面两式相加得到(7.4)式.

□

**例题 7.5** 设  $f \in C[0, 1]$  满足  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明:

$$\left( \int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

 **笔记** 从条件  $\int_0^1 f(x)dx = 0$  来看, 我们待定  $a \in \mathbb{R}$ , 一定有

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 (x-a) f(x) dx.$$

然后利用 **Cauchy 不等式**得

$$\left( \int_0^1 (x-a) f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望  $\int_0^1 (x-a)^2 dx$  达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出  $a = \frac{1}{2}$  就是



达到最小值的  $a$ .

**证明** 利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x) dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx \\ &\geq \left( \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \right)^2 \\ &= \left( \int_0^1 x f(x) dx \right)^2,\end{aligned}$$

这就证明了(??)式. □

**例题 7.6** 设  $f \in C^1[0, 1]$ ,  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 0$ , 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 27 \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

**笔记** 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设  $g(0) = g(1) = 0$  且  $g$  是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数  $g(x) = \begin{cases} x-1, & c \leq x \leq 1 \\ x, & 0 \leq x \leq c \end{cases}$ . 为了让  $g$  连续会发现  $c = c-1$ , 这不可能. 结合  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 0$ , 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

**证明** 令

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 |g(x)|^2 dx &\geq \left( \int_0^1 f'(x) g(x) dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} \left( \int_0^1 f(x) g'(x) dx \right)^2 \\ &= \left( \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx - 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx \right)^2 \\ &= \left( \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx \right)^2 = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2,\end{aligned}$$

结合  $\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \frac{1}{27}$ , 这就完成了证明. □

**例题 7.7** 设  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$  且  $f(a) = f(b) = 0$  且  $f$  不恒为 0, 证明存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

**注** 不妨设  $\int_a^b f(x) dx > 0$  的原因: 若  $\int_a^b f(x) dx < 0$  则用  $-f$  代替  $f$ ,  $\int_a^b f(x) dx = 0$  是平凡的.

**证明** 反证, 若  $|f'(x)| \leq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \triangleq M$ , 则不妨设  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , 由 Hermite 插值定理可知, 存在

$\theta_1 \in (a, x), \theta_2 \in (x, b)$ , 使得

$$f(x) = f(a) + f'(\theta_1)(x-a) \leq M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$f(x) = f(b) + f'(\theta_2)(x-b) \leq -M(x-b) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx = \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b |f(x)| dx.$$

于是结合  $f$  的连续性可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx \Rightarrow f(x) = M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx \Rightarrow f(x) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

故  $f$  在  $x = \frac{a+b}{2}$  处不可导, 这与  $f \in D(a, b)$  矛盾! □

**例题 7.8** 设  $f \in C^1[0, \pi]$  且满足  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ , 证明:

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt}, \forall x \in [0, \pi].$$

**注** 原不等式等价于

$$f^2(x) \leq \frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt, \forall x \in [0, \pi].$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 先待定  $g(x)$ , 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \int_0^\pi g^2(t) dt \geq \left( \int_0^\pi f'(t)g(t) dt \right)^2, \forall x \in [0, \pi]. \quad (7.5)$$

此时, 我们对  $\forall x \in [0, \pi]$ , 固定  $x$ , 都有  $\int_0^\pi f'(t)g(t) dt = kf(x)$ , 其中  $k$  为某一常数. 因此  $g(t)$  必和  $x$  有关, 于是令

$$g(t) = \begin{cases} t - \pi, & t \in [x, \pi] \\ t, & t \in [0, x] \end{cases},$$

再代入(7.5)式验证即可.

实际上, 回忆定理 4.3 中的 Green 函数, 可以发现上述构造的  $g(x) = \frac{dk(x, t)}{dx}$ ,  $x, t \in [0, \pi]$ .

希望  $\int_0^\pi f(t)g'(t) dt = f(x)$ , 考虑广义导数, 使得  $g'(x) = \delta(x)$ . 实际上, 这里的  $g$  就是  $H$  函数 (详细参考 rudin 的泛函分析).

**证明** 令

$$g(t) = \begin{cases} t - \pi, & t \in [x, \pi] \\ t, & t \in [0, x] \end{cases},$$

则对  $\forall x \in [0, \pi]$ , 都有

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\pi f'(t)g(t) dt \right)^2 &= \left( \int_x^\pi (t-\pi)f'(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left( -(x-\pi)f'(x) - \int_x^\pi f(t) dt + xf(x) - \int_0^x f(t) dt \right)^2 \\ &= \pi^2 |f(x)|^2 \\ \int_0^\pi g^2(t) dt &= \int_x^\pi (t-\pi)^2 dt + \int_0^x t^2 dt = \frac{\pi}{3} (3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \end{aligned}$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt = \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \int_0^\pi g^2(t) dt \geq \left( \int_0^\pi f'(t)g(t) dt \right)^2 = \pi^2 |f(x)|^2, \forall x \in [0, \pi]$$

即

$$|f(x)|^2 \leq \frac{1}{3\pi}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2) \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \leq \frac{\pi}{3} \int_0^\pi |f'(t)|^2 dt, \forall x \in [0, \pi]$$

□

### 命题 7.1 (反向 Cauchy 不等式)

设  $f, g \in R[a, b], g \geq 0, 0 < m \leq f \leq M$ , 证明

$$\left( \int_a^b g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2 \left( \int_a^b g(x) dx \right)^2.$$

▲

**证明** 由 Cauchy 不等式可得

$$\left( \int_a^b g(x) dx \right)^2 = \left( \int_a^b \sqrt{f(x)g(x)} \cdot \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_a^b [\sqrt{f(x)g(x)}]^2 dx \int_a^b \left[ \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}} \right]^2 dx = \int_a^b f(x)g(x) dx \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx.$$

故第一个不等式成立. 下证第二个不等式. 由条件和均值不等式可知

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{[f(x) - m][M - f(x)]}{f(x)} g(x) dx &\geq 0 \iff \int_a^b \frac{Mf(x) + mf(x) - mM - f^2(x)}{f(x)} g(x) dx \geq 0 \\ &\iff (M + m) \int_a^b g(x) dx \geq mM \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx + \int_a^b f(x)g(x) dx \geq 2\sqrt{mM} \sqrt{\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx}. \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left[ \frac{(M + m)}{2\sqrt{mM}} \int_a^b g(x) dx \right]^2.$$

即

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2 \left( \int_a^b g(x) dx \right)^2.$$

□

**例题 7.9** 设  $f, g \in R[a, b]$  满足

$$0 < m \leq f(x) \leq M, \quad \int_a^b g(x) dx = 0.$$

证明:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

**注** 待定常数  $k$ , 由条件  $\int_a^b g(x) dx = 0$  和 Cauchy 不等式可得

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 = \left( \int_a^b (f(x) - k)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x) - k)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

于是我们希望

$$\int_a^b (f(x) - k)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx \leq \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

从而希望

$$(f(x) - k)^2 \leq \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 f^2(x).$$

又因为  $m \leq f(x) \leq M$ , 所以只需要下式成立即可

$$(t-k)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t^2, \quad \forall t \in [m, M]. \quad (7.6)$$

我们只需要找到一个合适的  $k$ , 使这个  $k$  满足上式即可.

现在, 我们先求不等式  $(t-k)^2 \leq Ct^2, \forall t \in [m, M]$  的最佳系数  $C$ . 即求最小的  $C > 0$ , 存在  $k \in \mathbb{R}$ , 使得

$$(t-k)^2 \leq Ct^2, \quad \forall t \in [m, M].$$

上式等价于

$$\left(1 - \frac{k}{t}\right)^2 \leq C, \quad \forall t \in [m, M] \iff \left(1 - \frac{k}{M}\right)^2, \left(1 - \frac{k}{m}\right)^2 \leq C.$$

令  $h(x) \triangleq \max \left\{ \left(1 - \frac{x}{M}\right)^2, \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2 \right\}$ , 则  $C = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x)$ ,  $k$  是  $h(x)$  的最小值点.

(画图) 易知  $h(x)$  的最小值就在  $\left(1 - \frac{x}{M}\right)^2$  和  $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^2$  中间的一个交点处取到, 即  $k \in \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{m}\right)$ . 于是由  $\left(1 - \frac{x}{M}\right)^2 = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2$  可得

$$(i) \quad 1 - \frac{x}{M} = 1 - \frac{x}{m} \implies x = 0, \quad h(0) = 1,$$

$$(ii) \quad 1 - \frac{x}{M} = \frac{x}{m} - 1 \implies 2 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)x \implies x = \frac{2mM}{M+m}, \quad h\left(\frac{2mM}{M+m}\right) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

故  $k = \frac{2mM}{M+m}, C = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$ . 再结合 (7.6) 式, 可知原不等式的系数就是最佳系数, 并且此时我们找到了证明需要的  $k = \frac{2mM}{M+m}$ . 证明只需要将  $k = \frac{2mM}{M+m}$  代入上述步骤验证即可.

**证明** 由条件  $\int_a^b g(x) dx = 0$  和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 &= \left(\int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)g(x) dx\right)^2 \\ &\leq \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned} \quad (7.7)$$

注意到

$$\left(t - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t = \frac{4mM(t-M)(m-t)}{(m+M)^2} \leq 0, \quad \forall t \in [m, M].$$

因此由  $f(x) \in [m, M], \forall x \in \mathbb{R}$  可得

$$\left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是再结合 (7.7) 式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b \left(f(x) - \frac{2mM}{M+m}\right)^2 dx \int_a^b g^2(x) dx \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**例题 7.10** 设  $f \in C^2[0, 1]$  满足  $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$ . 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq 4.$$

**注** 待定  $g(x)$ , 由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 f''(x)g(x) dx\right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left(g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x) dx\right)^2 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left( g(1) + \int_0^1 f(x)g''(x) dx \right)^2.$$

将上式两边与要证不等式对比, 我们希望  $g''(x) \equiv 0$ , 从而  $\int_0^1 f(x)g''(x) dx = 0$ , 于是上式可化为

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq g^2(1) \\ \iff \int_0^1 |f''(x)|^2 dx &\geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

因此只要  $g(x)$  还满足  $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} \geq 4$  即可.

因为  $g''(x) \equiv 0$ , 所以我们可以设  $g(x)$  为一次函数, 即  $g(x) = ax + b, a \neq 0$ . 又因为  $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$  越大, 不等式

(7.8) 越强, 所以现在我们想要找到一个一次函数  $g(x)$  使得  $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$  达到最大值.

不妨设  $g(x) = ax - 1, a \neq 0$ , 否则用  $-bg(x)$  代替  $g(x)$ , 不改变  $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx}$  的取值. 此时, 我们有

$$\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = 3 \cdot \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 3a + 3} = 3 \left( 1 + \frac{a}{a^2 - 3a + 3} \right).$$

令  $h(a) = \frac{a}{a^2 - 3a + 3}$ , 则由  $h'(a) = \frac{3 - a^2}{(a^2 - 3a + 3)^2} = 0$  可得  $h$  的极大值点为  $a = \sqrt{3}$ . 又因为

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} h(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a}{a^2 - 3a + 3} = 0, \quad h(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

所以  $\max_{a \in \mathbb{R}} h(a) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$ . 从而

$$\max_{a \in \mathbb{R}} \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = \max_{a \in \mathbb{R}} 3 \left( 1 + \frac{a}{a^2 - 3a + 3} \right) = 3 \left( 1 + \max_{a \in \mathbb{R}} h(a) \right) = 6 + 2\sqrt{3} > 4.$$

综上, 取  $g(x) = \sqrt{3}x - 1$ , 就能得到

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = 6 + 2\sqrt{3} > 4.$$

实际上,  $6 + 2\sqrt{3}$  就是原不等式的最佳下界. 只需要再将  $g(x) = \sqrt{3}x - 1$  代入最开始的 Cauchy 不等式验证即可.

**证明** 令  $g(x) = \sqrt{3}x - 1$ , 则

$$g''(x) \equiv 0, \quad g(1) = \sqrt{3} - 1.$$

于是由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 f''(x)g(x) dx \right)^2 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \left( g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x) dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} \left( g(1) + \int_0^1 f(x)g''(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x) dx} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\int_0^1 (\sqrt{3}x - 1)^2 dx} = 6 + 2\sqrt{3} > 4.$$

□

**例题 7.11** 设  $f \in C^2[0, 2]$ , 证明:

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2.$$

注 不妨设  $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$  的原因:

(1) 当  $f(0) + f(2) - 2f(1) = 0$  时, 结论显然成立.

(2) 当  $f(0) + f(2) - 2f(1) \neq 0$  时, 则待定  $a, b, c$ , 令  $g(x) = cf(x) - ax - b$ , 希望  $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$ , 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

注意到上述方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{vmatrix} = f(0) + f(2) - 2f(1) \neq 0.$$

故由 Cramer 法则可知, 存在唯一的解  $a = a_0, b = b_0, c = c_0$  满足方程组 (7.9). 即  $g(x) = c_0f(x) - a_0x - b_0$  满足  $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$ .

下证不妨设成立. 假设原不等式已经对  $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$  的情况成立, 则对一般的  $f(x)$  而言, 令  $g(x) = c_0f(x) - a_0x - b_0$ , 显然  $g''(x) = c_0f''(x)$ , 并且由上述推导可知  $g(0) = g(2) = 0, g(1) = 1$ . 从而此时由假设可得

$$\int_0^2 |g''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [g(0) + g(2) - 2g(1)]^2.$$

于是

$$\begin{aligned} |c_0|^2 \int_0^2 |f''(x)|^2 dx &= \int_0^2 |g''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [g(0) + g(2) - 2g(1)]^2 \\ &= \frac{3}{2} [(c_0f(0) - b_0) + (c_0f(2) - 2a_0 - b_0) - 2(c_0f(1) - a_0 - b_0)]^2 \\ &= \frac{3|c_0|^2}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2. \end{aligned}$$

故

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2.$$

因此不妨设成立.

于是我们可以不妨设  $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$ , 否则用  $c_0f(x) - a_0x - b_0$  代替即可. 从而只须证

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2} [f(0) + f(2) - 2f(1)]^2 = 6.$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 因此待定  $g(x)$ , 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2 dx \int_0^2 g^2(x) dx \geq \left( \int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2.$$

对上式右边分部积分可得

$$\left( \int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2 = \left( f'(2)g(2) - f'(0)g(0) - \int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2. \quad (7.10)$$

于是我们希望  $g'(x) \equiv C$ , 其中  $C$  为某一常数,  $g(2) = g(0) = 0$ , 从而设  $g(x)$  为一次函数, 即设  $g(x) = px + q$ . 从而由  $g(2) = g(0) = 0$  可得  $q = p = 0$ , 进而  $g \equiv 0$ , 显然不行!

因此我们猜测  $g(x)$  为满足  $g(2) = g(0) = 0$  的分段一次函数, 则待定  $m$ , 令

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ m(x-2), & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

(因为有  $f(1) = 1$  这个条件, 所以选先  $x = 1$  为分段点) 又由 (7.10) 式可知需要  $f$  和  $g$  都连续才能分部积分, 因此  $g$

在  $x = 1$  处要连续, 故  $m = 1$ , 即

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

再代入 (7.10) 式中验证即可得到证明.

**证明** 不妨设  $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1$ , 否则用  $c_0 f(x) - a_0 x - b_0$  代替即可. 令

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

则

$$\int_0^2 g^2(x) dx = \frac{2}{3}, \quad \left( \int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2 = (-1-1)^2 = 4.$$


于是由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \int_0^2 g^2(x) dx &\geq \left( \int_0^2 f''(x)g(x) dx \right)^2 \xrightarrow{\text{分部积分}} \left( \int_0^2 f'(x)g'(x) dx \right)^2 \\ &\iff \frac{2}{3} \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq 4 \iff \int_0^2 |f''(x)|^2 dx \geq 6. \end{aligned}$$

□

**例题 7.12** 设  $f \in C^1[0, 1], f(0) = f(1) = -\frac{1}{6}$ , 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

 **笔记** 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

**注** 显然要利用 Cauchy 不等式, 待定  $g(x)$ , 由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx \geq \left( \int_0^1 f'(x)g(x) dx \right)^2 \xrightarrow{\text{分部积分}} \left( -\frac{1}{6}g(1) + \frac{1}{6}g(0) - \int_0^1 f(x)g'(x) dx \right)^2. \quad (7.11)$$

将上式与要证不等式对比, 于是我们希望  $g'(x) = C$ , 其中  $C$  为某一常数. 这样才能使

$$\int_0^1 f(x)g'(x) dx = C \int_0^1 f(x) dx,$$

进而不等式右边才会出现我们需要的  $\int_0^1 f(x) dx$ . 从而待定的  $g(x)$  为线性函数. 设  $g(x) = ax + c, a \neq 0$ , 进而不妨

设  $g(x) = x + c$ , 否则用  $\frac{1}{a}g$  代替  $g$  仍有不等式 (7.11) (因为不等式两边齐次). 于是不等式 (7.11) 可化为

$$\begin{aligned} \frac{3c^2 + 3c + 1}{3} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx &= \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 (x+c)^2 dx \\ &\geq \left( -\frac{1}{6}(1+c) + \frac{1}{6}c - \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &\iff \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{3}{3c^2 + 3c + 1} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (7.12)$$

因此只需要找到一个合适的  $c$ , 使得上述不等式右边满足

$$\frac{3}{3c^2 + 3c + 1} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}. \quad (7.13)$$

即对  $\forall t = \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$ , 找到一个  $c$ , 记  $K = \frac{3}{3c^2 + 3c + 1} \in \mathbb{R}$ , 使得

$$K \left( \frac{1}{6} + t \right)^2 \geq 2t + \frac{1}{4} \iff \Delta = \frac{12-K}{3} \leq 0 \iff K \geq 12.$$

因此取  $c = -\frac{1}{2}$ , 得  $K = \frac{3}{3c^2 + 3c + 1} = 12$ .

综上, 令  $g(x) = x - \frac{1}{2}$ , 则由 (7.12) 和 (7.13) 式可知

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{3}{3c^2 + 3c + 1} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

只需要将  $g(x) = x - \frac{1}{2}$  代入上述步骤进行验证即可得到证明.

**证明** 令  $g(x) = x - \frac{1}{2}$ , 则

$$\int_0^1 g^2(x) dx = \frac{1}{12}, \quad g(1) = \frac{1}{2}, \quad g(0) = -\frac{1}{2}.$$

于是由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 g^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 f'(x)g(x) dx \right)^2 \xrightarrow{\text{分部积分}} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ &\iff \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

注意到  $\frac{1}{12} \left( \frac{1}{6} + t \right)^2 \geq 2t + \frac{1}{4}$  对  $\forall t \in \mathbb{R}$  恒成立, 故

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{6} + \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}.$$

□

### 例题 7.13(一类)Hilbert 不等式

1. 设  $f(x), g(x)$  在  $[0, +\infty)$  中可积, 证明:

$$\iint_{[0, +\infty)} \frac{f(x)g(y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} dx dy \leq 2 \sqrt{\int_0^\infty f^2(x) dx \int_0^\infty g^2(x) dx}.$$

2. 设  $N$  为正整数,  $a_k, b_k$  为实数, 证明:

$$\sum_{m,n=1}^N \frac{a_m b_n}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{m=1}^N a_m^2 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^2}.$$

**证明**

- 1.
- 2.

□

## 7.3 重积分方法

### 定理 7.7 (Chebeshev 不等式积分形式)


设  $p \in R[a, b]$  且非负,  $f, g$  在  $[a, b]$  上是单调函数, 则

$$\left( \int_a^b p(x)f(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x)g(x) dx \right) \leq \left( \int_a^b p(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \right), f, g \text{ 单调性相同}$$



$$\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right), f, g \text{ 单调性相反}$$



 **笔记** 本不等式要牢记于心,它是很多不等式的基本模型,其特征就是出现单调性.

**注** 证法二中的  $d\mu$  应该看作测度.

**证明** 证法一:

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right) - \left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right) \\ &= \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)dy\right) - \left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)dy\right) \\ &= \iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x) - f(y)]dxdy \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y) - f(x)]dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y) - g(x)][f(x) - f(y)]dxdy, \end{aligned}$$

故结论得证.

**证法二:** 令  $\frac{p(x)}{\int_a^b p(x)dx}dx = d\mu$ , 则  $\int_a^b d\mu = \int_a^b \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)dx}dx = 1$ . 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)d\mu \int_a^b g(x)d\mu - \int_a^b f(x)g(x)d\mu \\ &= \int_a^b f(x)d\mu \int_a^b g(y)d\mu - \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)d\mu(y)d\mu(x) \\ &= \int_a^b \int_a^b [f(x) - f(y)]g(y)d\mu(y)d\mu(x) \\ &= \int_a^b \int_a^b [f(y) - f(x)]g(x)d\mu(y)d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] \end{aligned}$$

故结论得证. □

**例题 7.14** 设  $f \in C[0, 1]$  递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \geq \frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

**证明**

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \geq \frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 xf(x)dx\right) \geq \left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right).$$

令  $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)dx}dx = d\mu$ , 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)d\mu \int_0^1 xd\mu \geq \int_0^1 xf(x)d\mu.$$

上式由 **Chebeshv** 不等式积分形式可直接得到. □

**命题 7.2 (反向切比雪夫不等式)**

设  $f, g \in R[a, b]$  且  $m_1 \leq f(x) \leq M_1, m_2 \leq g(x) \leq M_2$ , 证明

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{(M_2 - m_2)(M_1 - m_1)}{4}.$$


**注** 不妨设  $a = 0, b = 1$  的原因: 假设当  $a = 0, b = 1$  时,

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \right| \leq \frac{(M_2 - m_2)(M_1 - m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的  $[a, b]$ , 原不等式等价于

$$\left| \int_0^1 f(a + (b-a)x)g(a + (b-a)x)dx - \int_0^1 f(a + (b-a)x)dx \int_0^1 g(a + (b-a)x)dx \right| \leq \frac{(M_2 - m_2)(M_1 - m_1)}{4}. \quad (7.14)$$

又注意到  $f(a + (b-a)x), g(a + (b-a)x) \in R[0, 1]$ , 且  $f(x) \in [m_1, M_1], g(x) \in [m_2, M_2]$ . 故由假设可知(7.14)式成立. 因此不妨设也成立.

 **笔记** 积累本题的想法.

**证明** 不妨设  $a = 0, b = 1$ , 则记  $A = \int_0^1 f(x)dx, B = \int_0^1 g(x)dx$ . 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \right|^2 &= \left| \int_0^1 (f(x) - A)(g(x) - B)dx \right|^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy不等式}}{\leq} \int_0^1 |f(x) - A|^2 dx \cdot \int_0^1 |g(x) - B|^2 dx \\ &= \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 \right) \cdot \left( \int_0^1 |g(x)|^2 dx - \left( \int_0^1 g(x)dx \right)^2 \right). \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 (M_1 - f)(f - m_1)dx = M_1 A + m_1 A - M_1 m_1 - \int_0^1 |f(x)|^2 dx,$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2 dx - A^2 \\ &= (M_1 - A)(A - m_1) - \int_0^1 (M_1 - f)(f - m_1)dx \\ &\leq (M_1 - A)(A - m_1) \leq \frac{(M_1 - m_1)^2}{4}. \end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx - \left( \int_0^1 g(x)dx \right)^2 \leq \frac{(M_2 - m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \right|^2 \leq \frac{(M_1 - m_1)^2}{4} \frac{(M_2 - m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立. □

**例题 7.15** 设  $f \in C[a, b]$  且

$$0 \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b].$$

证明

$$\left( \int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2. \quad (7.15)$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

$\sin x < x$  两边同时在  $[0, 1]$  上积分也可得  $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ .

证明 一方面

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 &= \int_a^b f(x) \cos x dx \int_a^b f(y) \cos y dy + \int_a^b f(x) \sin x dx \int_a^b f(y) \sin y dy \\ &= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[\cos x \cos y + \sin x \sin y] dx dy = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y) \cos(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

另外一方面

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 = \int_a^b f(x) \cos x dx \int_a^b f(y) \cos y dy = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y) dx dy.$$

于是不等式(7.15)变为

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1 - \cos(x-y)] dx dy \leq \frac{M^2(b-a)^4}{12}. \quad (7.17)$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1 - \cos(x-y)] dx dy \stackrel{(7.16)}{\leq} M^2 \iint_{[a,b]^2} \frac{(x-y)^2}{2} dx dy = \frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(7.17). □

## 7.4 直接求导法

### 例题 7.16

1. 设  $f \in C^1[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $0 \leq f'(x) \leq 1$ , 证明

$$\left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx,$$

并判断取等条件.

2. 设  $f$  在  $[0, a]$  可导且  $f(0) = 0$ ,  $0 \leq f'(x) \leq \lambda$ ,  $\lambda > 0$  为常数, 证明

$$\left[ \int_0^a f(x) dx \right]^m \geq \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x) dx, \quad (7.18)$$

并判断取等条件.

证明

1. 由  $0 < f'(x)$  ( $x > 0$ ) 及  $f(0) = 0$  可知  $f(x) > 0$  ( $0 < x \leq 1$ ). 设

$$g(t) = \int_0^t f^3(x) dx - \left( \int_0^t f(x) dx \right)^2 \quad (t \in [0, 1]),$$

则

$$g'(t) = f^2(t) \left( f'(t) - 2 \int_0^t f(x) dx \right).$$

令  $h(t) = f^2(t) - 2 \int_0^t f(x) dx$ , 则由  $0 < f'(x) \leq 1$  ( $x > 0$ ) 可知

$$h'(t) = 2f(t)[f'(t) - 1] \leq 0, \forall t \in [0, 1].$$

从而  $h(t) \leq h(0) = 0, \forall t \in [0, 1]$ . 于是  $g'(t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$ . 因而  $g$  在  $[0, 1]$  上单调递减. 由  $g(0) = 0$  知  $g \leq 0$ . 若

$$\int_0^1 f^3(x) dx = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2,$$

则  $g(1) = 0$ , 因而  $g(t) \equiv 0$ . 所以

$$g'(t) = f(t) \left( f^2(t) - 2 \int_0^t f(x) dx \right) = 0.$$

这推出  $f \equiv 0$  或  $f^2(t) = 2 \int_0^t f(x) dx$ . 因而

$$2f(t)f'(t) = 2f(t) \quad (0 < t \leq 1).$$

这推出  $f'(t) = 1$ , 即  $f(t) = t$ . 故当  $f(t) \equiv 0$  或  $f(t) = t$  时等号成立.

2. 定义

$$g(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^m - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^x f^{2m-1}(t) dt.$$

求导得

$$\begin{aligned} g'(x) &= mf(x) \left( \int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-1}(x) \\ &= mf(x) \left[ \left( \int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \right]. \end{aligned}$$

令  $h(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}$ , 则

$$h'(x) = \left[ \int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda} [\lambda - f'(x)] \geq 0,$$

从而  $h(x) \geq h(0) = 0$ . 进而

$$h^{m-1}(x) \geq \left( \int_0^x f(t) dt \right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geq 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geq g'(0) = 0,$$

从而  $g$  递增且

$$g(a) \geq g(0) = 0,$$

这就是不等式(7.18). 要使得等号成立, 我们需要  $g$  为常数, 因此需要  $g' \equiv 0$ , 故需要  $f \equiv 0$  或者

$$\int_0^x f(t) dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令  $y = \int_0^x f(t) dt$ , 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0 \text{ 或者 } f(x) = \lambda x.$$

□

**例题 7.17** 设  $f, g \in C[a, b]$  使得  $f$  递增且  $0 \leq g \leq 1$ , 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_{b-\int_a^b g(t) dt}^b f(x) dx. \quad (7.19)$$

**证明** 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t) dt} f(x) dx - \int_a^y f(x)g(x) dx.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x) dx \leq a + \int_a^y 1 dx = y,$$

再结合  $f$  递增, 我们有


$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)dt\right) - f(y)g(y) \leq 0 \rightarrow h(b) \leq h(a) = 0,$$

故不等式(7.19)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(7.19).  $\square$

### 命题 7.3

设  $f$  是  $[a, b]$  上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

 **笔记** 许多有关连续函数积分的不等式可以通过变上限积分的性质来证明.

**证明** 令

$$F(t) = \int_a^t xf(x)dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x)dx.$$

只需证明  $F(b) \geq 0$ . 由于  $f$  是连续函数,  $F$  在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x)dx - \frac{a+t}{2} f(t) \\ &= \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x)dx \\ &\geq \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} (t-a) f(t) = 0. \end{aligned}$$

这说明  $f$  在  $[a, b]$  上单调递增. 因为  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \geq 0$ .  $\square$

**例题 7.18** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上正的可导函数, 且满足  $|f'| \leq 1$ . 记

$$m = \min f(x), \quad M = \max f(x), \quad \beta = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx. \quad (7.20)$$

1. 求证:  $M \leq me^\beta$ .
2. 求证: 对  $n > -1$ , 有

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{m^{n+1}}{n+1} (e^{(n+1)\beta} - 1). \quad (7.21)$$

**注** 第 2 问中, 令  $n = 0$ , 可得  $\frac{m+1}{m} \leq e^\beta$ . 式 (7.21) 两边开  $n$  次方根, 再令  $n \rightarrow +\infty$ , 可得  $M \leq me^\beta$ .

**证明**

1. 设  $m = f(x), M = f(y)$ , 则有

$$\ln M - \ln m = \ln f(y) - \ln f(x) = \int_x^y \frac{f'(t)}{f(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt = \beta.$$

因而有  $M \leq me^\beta$ .

2. 设

$$h_1(t) = \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_0^t f^n(x) dx, \quad t \in [0, 1],$$

$$h_2(t) = \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_t^1 f^n(x) dx, \quad t \in [0, 1],$$

其中

$$\beta_1(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx, \quad \beta_2(t) = \int_t^1 \frac{1}{f(x)} dx,$$

则有  $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, h_1(0) = 0, h_2(1) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= e^{(n+1)\beta_1(t)} f^n(t) + (e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1) f^n(t) f'(t) - f^n(t) \\ &= f^n(t) (e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1) (1 + f'(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= -e^{(n+1)\beta_2(t)} f^n(t) + (e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1) f^n(t) f'(t) + f^n(t) \\ &= f^n(t) (e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1) (-1 + f'(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

这说明  $h_1$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 而  $h_2$  在  $[0, 1]$  上单调递减. 于是  $h_1$  和  $h_2$  都是非负函数, 即

$$\int_0^t f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t), \quad (7.22)$$

$$\int_t^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t). \quad (7.23)$$

将以上两式相加, 可得

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} + e^{(n+1)\beta_2(t)} - 2}{n+1} f^{n+1}(t). \quad (7.24)$$

容易证明对任意  $x > 0, y > 0$  有

$$e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1.$$

因此从式 (7.24) 可得

$$\int_0^1 f^n(x) dx \leq \frac{e^{(n+1)(\beta_1(t)+\beta_2(t))} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) = \frac{e^{(n+1)\beta} - 1}{n+1} f^{n+1}(t),$$

这里  $t \in [0, 1]$  是任意的. 故式 (7.21) 成立. □

**例题 7.19** 设  $f \in C[a, b]$  是一个正的连续函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

对于区间  $[c, d] \subset [a, b]$ , 记

$$\beta = \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx, \quad \alpha = \int_c^d \frac{1}{f(x)} dx.$$

求证:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx. \quad (7.25)$$

**证明** 只需证明对任意的  $t \in [a, b]$ , 有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L} f^2(t), \quad (7.26)$$

这是因为将式 (7.26) 两端除以  $f(t)$ , 然后关于变量  $t$  在区间  $[c, d]$  上积分, 即得式 (7.25). 不妨假设  $a = 0, b = 1$ , 不然考虑新的函数  $g(t) = (b-a)f(a(1-t)+bt) = (b-a)f(a+(b-a)t), t \in [0, 1]$ .  $g$  满足 Lipschitz 条件  $|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_1|x_1 - x_2|, L_1 = (b-a)^2L$ . 由于  $f$  的 Bernstein 多项式  $B_n(f)$  保持  $f$  的 Lipschitz 常数, 而且在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ , 我们一开始就可以假设  $f$  是可导的, 此时  $|f'| \leq L$ .

以下就在  $a = 0, b = 1$  且  $|f'| \leq L$  的条件下证明式 (7.26). 设

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{2L} f^2(t) - \int_0^t f(x) dx, \quad t \in [0, 1], \\ h_2(t) &= \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{2L} f^2(t) - \int_t^1 f(x) dx, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx, \quad \beta_2(t) = \int_t^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

则有  $h_1(0) = 0, h_2(1) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= e^{2L\beta_1(t)} f(t) + \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{L} f(t) f'(t) - f(t) \\ &= \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{L} f(t) (L + f'(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= -e^{2L\beta_2(t)} f(t) + \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{L} f(t) f'(t) + f(t) \\ &= \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{L} f(t) (f'(t) - L) \leq 0. \end{aligned}$$

这说明  $h_1$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 而  $h_2$  在  $[0, 1]$  上单调递减. 于是  $h_1$  和  $h_2$  都是非负函数, 即

$$\int_0^t f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_1(t)} - 1}{2L} f^2(t), \quad (7.27)$$

$$\int_t^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_2(t)} - 1}{2L} f^2(t). \quad (7.28)$$

将此两式相加, 可得

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta_1(t)} + e^{2L\beta_2(t)} - 2}{2L} f^2(t). \quad (7.29)$$

容易证明对任意  $x > 0, y > 0$  有

$$e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1.$$

因此从式 (7.29) 可得

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{e^{2L(\beta_1(t) + \beta_2(t))} - 1}{2L} f^2(t) = \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L} f^2(t).$$

即式 (7.26) 成立. □

## 7.5 凸性相关题型

**例题 7.20** 设  $f$  是  $[a, b]$  上的非负上凸函数. 证明对任何  $x \in (a, b)$ , 都有

$$f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y) dy. \quad (7.30)$$

特别的, 若  $f \in C[a, b]$ , 则对  $x = a, b$ , 也有 (7.30) 式成立.

**注 Step2** 中的  $g(x)$  的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

**笔记** 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造  $g(x) = f(x) - p(x)$  (其中  $p(x)$  是  $f$  过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

**证明** 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设  $f \in C[a, b]$ . 不妨设  $a = 0, b = 1$ , 否则用  $f(a + (b-a)x)$  代替  $f(x)$  即可.

**Step1** 当

$$f(a) = f(b) = 0, x_0 \text{ 是 } f(x) \text{ 最大值点}, x_0 \in (a, b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x) \geq \frac{f(x_0)}{x_0} x, & x \in [0, x_0] \\ f(x) \geq \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} (x - 1), & x \in [x_0, 1] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0} x dx + \int_{x_0}^1 \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} (x - 1) dx = \frac{1}{2} f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式 (7.30).

当  $x_0 = a$  或  $b$  时, 由  $f(a) = f(b) = 0$  且  $f$  非负可知, 此时  $f(x) \equiv 0$  结论显然成立.

**Step2** 一般情况可设

$$g(x) = f(x) - [f(1) - f(0)]x - f(0),$$

从而  $g(0) = g(1) = 0$ , 于是  $g$  就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(7.30)知

$$g(x) \leq 2 \int_0^1 g(y) dy, \forall x \in [0, 1]. \quad (7.31)$$

于是利用(7.31)知

$$f(x) - [(f(1) - f(0))x + f(0)] \leq 2 \int_0^1 f(y) dy - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy, \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$f(x) - 2 \int_0^1 f(y) dy \leq [(f(1) - f(0))x + f(0)] - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy, \forall x \in [0, 1].$$

注意到对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有


$$\begin{aligned} & [(f(1) - f(0))x + f(0)] - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy \leq 0 \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x + f(0) \leq 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))x + f(0)] dx \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x + f(0) \leq f(1) + f(0) \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x \leq f(1) \\ \Leftrightarrow & f(1)(1-x) + f(0)x \geq 0 \end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由  $x \in [0, 1], f(1), f(0) \geq 0$  直接得到. 于是我们完成了证明.  $\square$

## 7.6 数值比较类

**例题 7.21** 证明如下积分不等式:

1.  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$
3.  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

 **笔记** 此类问题都是考虑分母更小的时候正的更多, 通过换元把负的区间转化到正的同一个区间.

**证明**

1.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx & \stackrel{x=\sqrt{y}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{2\sqrt{y+\pi}} dy \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin y \left( \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y+\pi}} \right) dy > 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2} dx & = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1+x^2} dx + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1+x^2} dx \\ & = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{1+(\frac{\pi}{4}-y)^2} dy + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(-y)}{1+(\frac{\pi}{4}+y)^2} dy \end{aligned}$$



$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4} - y\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4} + y\right)^2} \right] dy > 0.$$

3. 本题稍有不同, 注意到

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\sin y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin y) dy, \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos y) dy.$$

现在利用  $\sin x < x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$  可得不等式链  $\cos \sin x > \cos x > \sin \cos x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 于是

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

□

### 定理 7.8 (Jordan 不等式)

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

♡

**证明** 利用  $\sin x$  的上凸性及割线放缩可得

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

□

**例题 7.22** 证明如下积分不等式

$$1. \quad \frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} dx < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$2. \quad \int_0^\pi e^{\sin^2 x} dx \geq \sqrt{e}\pi.$$

$$3. \quad \frac{\pi}{2} e^{-R} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx < \frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}, R > 0.$$

$$4. \quad \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \ln(n+1), n \geq 2.$$

**注**  $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ .

**证明**

1.

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{\sin^2 x} dx &= \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^\pi \sin^{2n} x dx \\ &= \pi \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!} \right] = \pi \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (n!)^2} \right] \\ &\stackrel{(2n-1)!! \geq n!}{\geq} \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e}\pi. \end{aligned}$$

3.

$$\frac{\pi}{2} e^{-R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx \stackrel{\text{Jordan 不等式}}{<} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} x} dx = \frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}, R > 0.$$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \stackrel{x=k\pi+y}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin y|}{k\pi+y} dy \\ &> \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin y|}{(k+1)\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(k+2) - \ln(k+1)] \\
 &= \frac{2}{\pi} \ln(n+1).
 \end{aligned}$$

还可以使用积分放缩法处理  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ , 如下所示:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{\pi} \ln(n+1).$$

□

## 7.7 Fourier 积分不等式

### 定理 7.9 (Fourier 型积分不等式)

若  $f(x) \in C^1[a, b]$ , 则

(1)

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立条件为

$$f(x) = c_1 + c_2 \cos \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) 若  $f(a) = f(b)$ , 则

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c_1 + c_2 \cos \left( \frac{2\pi x}{b-a} \right) + c_3 \sin \left( \frac{2\pi x}{b-a} \right), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(3) 若  $f(a) = f(b) = 0$ , 则

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c \sin \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right), c \in \mathbb{R}.$$

♡

**注** (1) 中对  $f$  进行偶延拓的原因是: 使延拓后的区间端点函数值相等, 从而就能利用 Fourier 级数的逐项微分定理.

(2) 已经有区间端点函数值相等的条件了, 所以不需要进行延拓.

(3) 中对  $f$  进行奇延拓的原因是:  $f$  满足  $f(a) = f(b) = 0$ , 此时对  $f$  做奇延拓后能使得  $f \in C^1[2a-b, b]$ , 进而就能得到更好的结论.(如果只有  $f(a) = f(b) \neq 0$ , 那么  $f$  奇延拓后在  $x=a$  处间断.)

**证明**

(1) 把  $f(x)$  延拓到  $[2a-b, b]$ , 使得  $f(x) = f(2a-x), x \in [a, b]$ , 则  $f(b) = f(2a-b), f \in C[2a-b, b]$  且分段可微, 并且此时  $f$  关于  $x=a$  轴对称. 因此设  $f(x)$  有傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{\pi n(x-a)}{b-a} \right),$$

进而由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x) \sim -\frac{\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} [n a_n \sin \left( \frac{\pi n(x-a)}{b-a} \right)].$$

这里

$$a_n = \frac{1}{b-a} \int_{2a-b}^b f(x) \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx, n \in \mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\begin{aligned} \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx &= (b-a) \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right], \\ \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx &= \frac{\pi^2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx - (b-a) \frac{a_0^2}{2} &= (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx \\ \iff \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2(b-a)} \left( \int_{2a-b}^b f(x) dx \right)^2 &\leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

利用对称性, 就有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{(b-a)} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立条件为

$$f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x) \sim \frac{2\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -na_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + nb_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right).$$

这里

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) dx. \end{aligned}$$

由 Parseval 恒等式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx &= \frac{b-a}{2} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right], \\ \int_a^b |f'(x)|^2 dx &= \frac{2\pi^2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{(b-a)a_0^2}{4} &= \frac{b-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{b-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) = \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx \\ \iff \int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 &\leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

等号成立条件是

$$f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right).$$

(3) 令

$$f(x) = -f(2a - x), x \in [2a - b, a],$$

则  $f(x) \in C^1[2a - b, b]$ , 并且此时  $f$  关于  $(a, 0)$  点中心对称. 设  $f(x)$  有傅立叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x) \sim \frac{\pi}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right).$$

这里

$$b_n = \frac{1}{b-a} \int_{2a-b}^b f(x) \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx, n \in \mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\begin{aligned} \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx &= (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \\ \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx &= \frac{\pi^2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx &= (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{2a-b}^b |f'(x)|^2 dx \\ \iff \int_{2a-b}^b |f(x)|^2 dx &\leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_{2b-a}^b |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

利用对称性, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立条件是


$$f(x) = c \sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

□

## 7.8 其他

**例题 7.23** 设  $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  是连续递增函数, 记  $s = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$ . 证明

$$\int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx \leq \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x) dx.$$

 **笔记** 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

**证明** 令  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ , 则  $F'(t) = f(t)$  连续递增, 故  $F$  是下凸的. 显然  $s \in [0, 1]$ , 于是

$$F(x) \geq F(s) + F'(s)(x-s) = F(s) + f(s)(x-s), \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$\int_0^1 F(x) f(x) dx \geq \int_0^1 [F(s) f(x) + f(s) f(x)(x-s)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= F(s) \int_0^1 f(x) dx + f(s) \int_0^1 [xf(x) - sf(x)] dx \\
&= F(s) \int_0^1 f(x) dx + f(s) \left[ \int_0^1 xf(x) dx - \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \int_0^1 f(x) dx \right] \\
&= F(s) \int_0^1 f(x) dx.
\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x) dx = \int_0^1 F(x) dF(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 &\geq F(s) \int_0^1 f(x) dx \implies \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \geq F(s) = \int_0^s f(x) dx \\
&\implies \int_0^s f(x) dx + \int_s^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \geq 2 \int_0^s f(x) dx \\
&\implies \int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx.
\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s = \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 x dF(x)}{F(1)} = 1 - \frac{\int_0^1 F(x) dx}{F(1)},$$

即  $\int_0^1 F(x) dx = (1-s)F(1)$ . 又由  $F$  的下凸性可知

$$F(x) \leq \begin{cases} \frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s), & x \in [s, 1] \\ \frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0), & x \in [0, s] \end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}
(1-s)F(1) &= \int_0^1 F(x) dx \leq \int_0^s \left[ \frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0) \right] dx + \int_s^1 \left[ \frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s) \right] dx \\
&= \frac{1}{2}F(s) + \frac{1-s}{2}F(1).
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1) \leq \frac{1}{2}F(s) \implies F(1) \leq \frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x) dx = F(1) - F(s) \leq \left( \frac{1}{1-s} - 1 \right) F(s) = \frac{s}{1-s} F(s) = \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x) dx.$$

□

**例题 7.24** 求最小实数  $C$ , 使得对一切满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续函数  $f$ , 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx \leq C.$$

**注** 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在  $x=1$  处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是  $n$  的函数), 类似进行构造函数列即可.

**证明** 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f(t)| dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2.$$

令  $f_n(t) = (n+1)t^n$ , 则  $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ . 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f(t)| dt = 2 \int_0^1 t(n+1)t^n dt = 2(n+1) \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty.$$

因此若  $C < 2$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})| dx > C$ . 故  $C = 2$  就是最佳上界.  $\square$

**例题 7.25** 设  $f \in C[0, 1]$  使得  $\int_0^1 x^k f(x) dx = 1, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq n^2.$$

**证明** 设  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &\geq \left[ \int_0^1 f(x)(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) dx \right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})^2 = \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &= \int_0^1 \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \right)^2 dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i x^{i+j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i \int_0^1 x^{i+j} dx = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \frac{\left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2}{\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}} = \frac{a^T J a}{a^T H a},$$

其中  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ,  $H = \left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{n \times n}$ . 于是我们只需求  $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$ . 设  $\lambda$  为  $\frac{a^T J a}{a^T H a}$  的一个大于 0

的上界, 由 [例题 8.16\(3\)](#) 可知  $H$  正定, 则

$$\begin{aligned} \lambda \text{ 为 } \frac{a^T J a}{a^T H a} \text{ 的一个上界} &\iff \lambda \geq \frac{a^T J a}{a^T H a}, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T J a \leq \lambda a^T H a, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T (\lambda H - J) a \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \lambda H - J \text{ 半正定}. \end{aligned}$$

因此  $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a} = \min\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\}$ . 设  $H_k, J_k$  分别为  $H, J$  的  $k$  阶顺序主子阵, 再根据 [打洞原理](#) 及 [例题 2.38\(1\)](#) 可得

$$\begin{aligned} |\lambda H_k - J_k| &= |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} J_k| = |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T| \\ &= \lambda^{k-1} |H_k| (\lambda - \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k). \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{1}_k^T = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times k}$ . 由  $H$  正定可知  $|H_k| > 0$ , 又因为  $\lambda > 0$ , 所以再由 [引理 6.4](#) 可得

$$|\lambda H_k - J_k| > 0 \iff \lambda > \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k \stackrel{\text{引理 6.4}}{=} n^2.$$

因此对  $\forall \lambda > n^2$ , 都有  $\lambda H - J$  的顺序主子式都大于 0, 故此时  $\lambda H - J$  正定. 于是对  $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , 固定  $a$ , 都有

$$a^T(\lambda H - J)a > 0, \forall \lambda > n^2.$$

令  $\lambda \rightarrow n^2$ , 则由  $a^T(\lambda H - J)a$  的连续性可知

$$a^T(n^2 H - J)a \geq 0.$$

故  $n^2 H - J$  半正定. 因此  $n^2 = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$ . 结论得证.  $\square$

**例题 7.26** 设  $A, B$  都是  $n$  级实对称矩阵, 若  $B$  正定, 证明

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\alpha^T A \alpha}{\alpha^T B \alpha} = \lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

**证明**

### 引理 7.1

设  $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$ . 存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $g(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$ , 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (7.32)$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha [g(x) - g(a)]^\alpha M, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.33)$$

**证明** 不妨设  $g(a) = 0$ , 否则用  $g(x) - g(a)$  代替  $g(x)$ . 当  $M = 0$ , 则不等式(7.33)显然成立. 当  $M \neq 0$  可以不妨设  $M = 1$ .

现在对非负函数  $g$ , 现在我们正式开始我们的证明, 当  $g'(x_0) = 0$ , 不等式(7.33)显然成立. 当  $g'(x_0) > 0$ , 则利用(7.32)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geq g(x_0) - g(h) = \int_h^{x_0} g'(t) dt \\ &\geq \int_h^{x_0} [g'(x_0) - |t - x_0|^\alpha] dt \\ &= g'(x_0)(x_0 - h) - \frac{(x_0 - h)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取  $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$ , 就得到了  $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha+1} |g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$ , 即不等式(7.33)成立. 类似的考虑  $g'(x_0) < 0$  可得(7.33).

当  $g'(x_0) < 0$ , 则利用(7.32)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geq -g(h) + g(x_0) = - \int_{x_0}^h g'(t) dt \\ &\geq - \int_{x_0}^h [g'(x_0) + |t - x_0|^\alpha] dt \\ &= -g'(x_0)(h - x_0) - \frac{(h - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取  $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$ , 就得到了  $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha+1} |g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$ , 即不等式(7.33)成立.  $\square$

### 命题 7.4 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx. \quad (7.34)$$

**注** 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left( \int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$

但是上述分部积分部分需要零边界条件 (即需要  $\lim_{x \rightarrow \infty} x|f(x)|^2 = 0$  上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在  $\mathbb{R}$  上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

**证明** Method 1 专业技术: 对一般的  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

取紧化序列  $h_n, n \in \mathbb{N}$ , 则对每一个  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |(h_n f)'(x)|^2 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x) f(x) + h_n(x) f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

右边让  $n \rightarrow +\infty$ , 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x) f(x) + h_n(x) f'(x)|^2 dx \right] = \left[ 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right].$$

但是左边暂时不知道是否有  $\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 < \infty$ , 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

从而不等式(7.34)成立.

Method 2 正常方法: 对一般的  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x|f(x)|^2 = 0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty > \sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\geq} \int_x^\infty y |f'(y) f(y)| dy \geq x \int_x^\infty |f'(y) f(y)| dy, \quad (7.35)$$

于是  $\int_x^\infty f(y) f'(y) dy = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2 - \frac{1}{2} |f(x)|^2$  收敛. 因此  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2$  存在. 注意  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty$ , 因此由积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在  $x_n \rightarrow \infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n |f(x_n)| = 0$ , 于是再结合  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2$  存在可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0.$$

现在继续用(7.35), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \geq x \int_x^\infty f'(y) f(y) dy = \frac{x}{2} |f(x)|^2,$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 由 Cauchy 收敛准则即得  $\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \rightarrow 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x|f(x)|^2 = 0$ , 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 我们有

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left( \int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx,$$



即不等式(7.34)成立.  $\square$

**例题 7.27** 设  $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$  是内闭 Riemann 可积函数, 若  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$  均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} xf(x)dx. \quad (7.36)$$

**证明** 记  $a = \int_0^{+\infty} f(x)dx > 0$ , 待定  $s > 0$ , 则不等式(7.36)等价于

$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^s xf(x)dx + \int_s^{+\infty} xf(x)dx > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^s xf(x)dx + s \int_s^{+\infty} f(x)dx &\geq \frac{a^2}{2} \iff \int_0^s xf(x)dx + s \left(a - \int_0^s f(x)dx\right) \geq \frac{a^2}{2} \\ \iff \frac{a^2}{2} - sa + s \int_0^s f(x)dx - \int_0^s xf(x)dx &\leq 0 \iff \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x)f(x)dx \leq 0. \end{aligned}$$

利用  $f < 1$ , 取  $s = a$ , 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x)f(x)dx = -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x)f(x)dx < -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x)dx = 0.$$

从而

$$\int_0^a xf(x)dx + a \int_a^{+\infty} f(x)dx > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^s xf(x)dx + \int_s^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_0^a xf(x)dx + a \int_a^{+\infty} f(x)dx > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(7.36).  $\square$

#### 命题 7.5

设  $f$  是  $[0, 1]$  上的单调函数. 求证: 对任意实数  $a$  有

$$\int_0^1 |f(x) - a| dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx. \quad (7.37)$$

**证明** 不妨设  $f$  是单调递增函数. 注意到  $\frac{1}{2}$  是积分区间的中点, 将式(7.37)右端的积分从  $\frac{1}{2}$  处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - a| dx. \end{aligned}$$

故式(7.37)成立.  $\square$

**例题 7.28** 若  $[a, b]$  上的可积函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于函数  $f$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

**证明** 由已知条件, 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $k$  使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a, b].$$

因为  $f_k \in R([a, b])$ , 所以存在  $[a, b]$  的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里  $\omega_j(f_k)$  是  $f_k$  在区间  $[x_{j-1}, x_j]$  上的振幅. 因为

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x) - f_k(y)|, \end{aligned}$$

所以

$$\omega_j(f) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon.$$

故  $f$  在  $[a, b]$  上可积. □

**例题 7.29** 设  $f$  在  $[a, b]$  上非负可积. 求证: 数列  $I_n = \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$  是单调递增的.

**注** 当  $f$  是连续函数时, 可以进一步证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  (见 **例题 2.110**).

**证明** 要比较  $I_n$  与  $I_{n+1}$  的大小, 就要比较  $f^n$  的积分与  $f^{n+1}$  之间的关系. 这可以利用 **Hölder 不等式**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^n(x) dx &= \int_a^b 1 \cdot f^n(x) dx \\ &\leq \left( \int_a^b 1^{n+1} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{n+1}} \left( \int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{n}{n+1}}, \end{aligned}$$

即

$$\left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故  $\{I_n\}$  是单调递增数列. □

**例题 7.30** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可导, 且  $f(a) = 0$ . 求证: 对  $p \geq 1$  有

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx.$$

**证明** 为了建立  $|f|^p$  的积分与  $|f'|^p$  的积分之间的关系, 先建立  $|f|$  与  $|f'|$  的积分的关系. 根据 **Newton-Leibniz 公式**, 有

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

所以对于  $p > 1$  应用 **Hölder 积分不等式**, 可得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \left( \int_a^x 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (x-a)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 因而

$$|f(x)|^p \leq (x-a)^{p-1} \int_a^x |f'(t)|^p dt, \quad x \in [a, b].$$

注意到上式对  $p=1$  也是成立的. 上式两边在  $[a, b]$  上积分, 可得

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \int_a^b (x-a)^{p-1} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right) dx.$$

注意到  $\int_a^x |f'(t)|^p dt$  是  $|f'|^p$  的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p dx &\leq \frac{1}{p} (x-a)^p \int_a^x |f'(t)|^p dt \Big|_a^b - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} (b-a)^p \int_a^b |f'(t)|^p dt - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx. \end{aligned}$$

□

**例题 7.31** 设  $f$  是  $[0, a]$  上的连续函数, 且存在正常数  $M, c$  使得

$$|f(x)| \leq M + c \int_0^x |f(t)| dt,$$

求证:  $|f(x)| \leq Me^{cx} (\forall x \in [0, a])$ .

**证明** 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x) \leq M + cF(x).$$

令

$$G(x) = F(x)e^{-cx} + \frac{M}{c}e^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x)e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &= |f(x)|e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &\leq (M + cF(x))e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} = 0. \end{aligned}$$

这说明  $G$  在  $[0, a]$  上单调递减. 因为  $G(0) = \frac{M}{c}$ , 所以  $G \leq \frac{M}{c}$ . 因而

$$F(x) + \frac{M}{c} \leq \frac{M}{c}e^{cx}.$$

再结合条件可得  $|f(x)| \leq M + cF(x) \leq Me^{cx}$ .

□

**例题 7.32** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续且对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证:  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**证明** 结论中出现  $\pi$  且条件中要求  $x, y \in [0, 1]$ . 因此将条件中的  $x, y$  分别换成  $\sin t$  和  $\cos t$ , 有

$$f(\cos t) \sin t + f(\sin t) \cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

由对称性可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换  $\sin t = x$  即得  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ . □

**例题 7.33** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续且对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证:  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**注** 结论中的  $\frac{\pi}{4}$  是最佳的, 这只要取  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  即可验证.

**证明** 结论中出现  $\pi$  且条件中要求  $x, y \in [0, 1]$ . 因此将条件中的  $x, y$  分别换成  $\sin t$  和  $\cos t$ , 有

$$f(\cos t) \sin t + f(\sin t) \cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

由 **区间再现恒等式** 可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换  $\sin t = x$  即得  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ . □

**例题 7.34** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上有可积的导函数且满足  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 求证: 对任意  $a \geq 0$  有

$$\int_0^1 |af(x) + f'(x)| dx \geq 1.$$

**证明** 因为  $e^{-ax} \geq e^{-a}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 |af(x) + f'(x)| dx &= \int_0^1 |(e^{ax} f(x))' e^{-ax}| dx \geq e^{-a} \int_0^1 |(e^{ax} f(x))'| dx \\ &\geq e^{-a} \left| \int_0^1 (e^{ax} f(x))' dx \right| = e^{-a} |e^a f(1) - f(0)| = 1. \end{aligned}$$

□

**例题 7.35** 设  $f$  在  $[0, 2]$  上可导且  $|f'| \leq 1, f(0) = f(2) = 1$ . 求证:

$$1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3$$

**证明** 由 Taylor 中值定理可知, 存在  $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [1, 2]$ , 使得

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$f(x) = 1 + f'(\xi_2)(x-2), \quad \forall x \in [1, 2].$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 [1 + f'(\xi_1)x] dx + \int_1^2 [1 + f'(\xi_2)(x-2)] dx \\ &= 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2). \end{aligned}$$

由  $|f'| \leq 1$  可知

$$1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2) \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

故


$$1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3.$$

□

**例题 7.36** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ . 求证:

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当  $f(x) = Ax(1-x)$ , 其中  $A$  是常数.

 **笔记** 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑  $(ax+b)f'(x)$  的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

**证明** 设  $t$  是任意常数, 有

$$\int_0^1 (x+t)f'(x) dx = (x+t)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 &= \left( \int_0^1 (x+t)f'(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_0^1 (x+t)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \left( \frac{1}{3} + t + t^2 \right) \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

取  $t = -\frac{1}{2}$ , 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数  $C$  使得  $f'(x) = C \left( x - \frac{1}{2} \right)$ . 注意到  $f(0) = f(1) = 0$ , 可得  $f(x) = Ax(1-x)$ , 这里  $A$  为任意常数. □

**例题 7.37** 设  $f, g$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 使得对  $[0, 1]$  上任意满足  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  的连续可导函数  $\varphi$  有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

求证:  $f$  可导, 且  $f' = g$ .

**证明** 证明设

$$c = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt$$

考察函数

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt + c$$

显然  $G$  可导且  $G'(x) = g(x)$ ,  $G(1) = \int_0^1 g(t) dt + c$ . 只需证明  $f = G$ . 令

$$\varphi(x) = \int_0^x [f(t) - G(t)] dt$$

则  $\varphi$  可导, 且  $\varphi(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 G(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \left[ tG(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 t g(t) dt \right] \\ &= \int_0^1 f(t) dt - G(1) + \int_0^1 t g(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt - c + \int_0^1 t g(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = G(x)\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx$$

所以

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)] \varphi'(x)dx = 0$$

注意到  $\varphi' = f - G$ . 我们有

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)]^2 dx = 0$$

于是  $f = G$ . □

### 命题 7.6

设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的严格单调递减连续函数,  $f(a) = b, f(b) = a, g$  是  $f$  的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

特别地, 对  $p > 0, q > 0$  取  $f(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{p}}, g(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{q}}$ , 可得

$$\int_0^1 (1 - x^p)^{\frac{1}{q}} dx = \int_0^1 (1 - x^q)^{\frac{1}{p}} dx.$$

**证明** 因为可以用在  $a, b$  分别插值于  $f(a), f(b)$  的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在  $[a, b]$  上一致逼近  $f(x)$ , 所以只需对  $f$  是连续可微函数的情况证明.

作变换  $x = f(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_b^a g(f(t))f'(t) dt = \int_b^a t f'(t) dt \\ &= t f(t)\Big|_b^a - \int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

故所证等式成立. □

**例题 7.38** 设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

**证明** 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设  $\max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(y)$ . 因此对任意  $x \in [a, b]$ , 有

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) - f(x) = f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt$$

关于  $x$  在  $[a, b]$  上积分, 即得

$$(b-a) \max_{a \leq x \leq b} f(x) - \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)| dt.$$

两边除以  $b-a$  即得所证. □

**例题 7.39** 设  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f \in C^1[0, 1]$  且满足  $f(1) = 0$ . 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

**证明** 设  $\alpha \in [0, 1)$  且  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ . 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对  $x \in [0, 1]$  有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left( \int_x^1 f'(t) dt \right)^2 = \left( \int_x^1 t^{-\alpha} \cdot t^{\alpha} f'(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int_x^1 t^{-2\alpha} dt \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{1-2\alpha} (1-x^{1-2\alpha}) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &\leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 (1-x^{1-2\alpha}) \left( \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right) dx \\ &= \frac{1}{1-2\alpha} \left[ \left( x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left( x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) x^{2\alpha} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx - \frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (7.38)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \left| \int_1^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left( \int_x^1 |f'(t)| dt \right) dx \\ &= x \left( \int_x^1 |f'(t)| dt \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 x |f'(x)| dx \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 x |f'(x)| dx. \quad (7.39)$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 &\leq \left( \int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}} |f'(x)| dx \right)^2 \\ &\leq \left( \int_0^1 x^{1-2\alpha} dx \right) \left( \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

结合式 (7.38), 可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx - \frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \quad (7.40)$$

在上式中取  $\alpha = \frac{3}{4}$ , 即得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq 4 \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (7.41)$$

对  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ , 将式 (7.40) 两边乘以  $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$  再与式 (7.41) 相加可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

□

**例题 7.40** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上非负且连续可导. 求证:

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

**证明** 记  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$ , 则有

$$-Mf(x) \leq f(x)f'(x) \leq Mf(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

因此

$$-M \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f^2(0) \leq M \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

上式两边乘以  $f$  得

$$-Mf(x) \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{1}{2} f^2(0)f(x) \leq Mf(x) \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

将上式关于变量  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$-M \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \leq M \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

结论得证.

□

**例题 7.41** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上非负单调递增连续函数,  $0 < \alpha < \beta < 1$ . 求证:

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

并且  $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$  不能换为更大的数.

**注** 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

**证明** 根据积分中值定理, 存在  $\xi \in (\alpha, \beta)$  使得

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

因而由  $f$  的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \leq (\beta - \alpha)f(\beta)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(\beta) dx \\ &= \int_\alpha^\beta f(x) dx + (1 - \beta)f(\beta) \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \frac{1-\beta}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx \\ &= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx. \end{aligned}$$

取正整数  $n$  使得  $\alpha + \frac{1}{n} < \beta$ . 构造函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ n(x - \alpha), & \alpha < x \leq \alpha + \frac{1}{n}, \\ 1, & \alpha + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \alpha - \frac{1}{2n}, \quad \int_\alpha^\beta f_n(x) dx = \beta - \alpha - \frac{1}{2n}.$$



因而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 f_n(x) dx}{\int_\alpha^\beta f_n(x) dx} = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

故题中  $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$  不能换成更大的数. □

**例题 7.42** 设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续的二阶导函数,  $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$ . 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的  $f$ .

**注** 当  $f$  在端点的值为零,  $f'$  在端点的值确定时, 可以考虑  $f''$  与线性函数的乘积的积分.

**证明** 根据分部积分, Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 x(f''(x) - a)^2 dx = \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \int_0^1 x f''(x) dx + a^2 \int_0^1 x dx \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \left( x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \right) + \frac{a^2}{2} \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a (f'(1) - f(1) + f(0)) + \frac{a^2}{2} \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x) = a$$

即  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ . 因为  $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$ , 所以  $c = 0, b = -\frac{a}{2}$ . 因此

$$f(x) = \frac{1}{2}ax(x-1).$$

□

**例题 7.43** 设  $n$  是正整数, 且  $m > 2$ . 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left( \frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

**注** 当利用积分的可加性把区间  $[a, b]$  上的积分分为区间  $[a, c]$  和区间  $[c, b]$  上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的  $c$ .

**证明** 用数学归纳法容易证明  $|\sin nt| \leq n \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . 另外又有

$$|\sin nt| \leq 1, \quad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

设  $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt &= \int_0^a t \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt \\ &\leq \int_0^a t n^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left( \frac{1}{2t/\pi} \right)^m dt \\ &= \frac{1}{2} n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^m \left( \frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}} \right). \end{aligned}$$

易知函数  $g(a) = \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$  当  $a = \frac{\pi}{2n}$  时取最小值. 于是将上面的  $a$  换成  $\frac{\pi}{2n}$  可得

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left( \frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

□

**例题 7.44** 设  $n \geq 1$  是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

**证明** 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt.$$

因为当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ , 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{2t/\pi} dt = \frac{\pi}{2} \ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

用数学归纳法容易证明当  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时, 有  $|\sin nt| \leq n \sin t$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt &= \int_0^{\pi/(2n+1)} \left( \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \int_0^{\pi/(2n+1)} 2n \cos t dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} < 2n \sin \frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \left( 2n + \frac{1}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1}, \end{aligned}$$

$$- \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \left( \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt < - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \cos 2nt dt = \frac{1}{2n} \sin \frac{\pi}{2n+1}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \left( 2n + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} < \left( 2n + \frac{1}{n} \right) \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n^2+1}{2n^2+n} \pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} \pi + \frac{\pi}{2} \ln n.$$

两边同时除以  $\pi$  得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

□

**例题 7.45** 设  $f \neq 0$ , 在  $[a, b]$  上可微,  $f(a) = f(b) = 0$ . 求证: 至少存在一点  $c \in [a, b]$  使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.42)$$

**证明** 记上式右端为  $M$ . 假设对一切  $c \in [a, b]$  有  $|f'(c)| \leq M$ , 下面推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于  $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$  存在  $\xi \in (a, x)$ , 使

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leq M(x-a), \quad x \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \quad (7.43)$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 M. \quad (7.44)$$

再根据微分中值定理, 对于  $x \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$ , 存在  $\eta \in (x, b)$ , 使得

$$f(x) - f(b) = f'(\eta)(x-b),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leq M(b-x), \quad x \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right], \quad (7.45)$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 M. \quad (7.46)$$

将式 (7.44) 与式 (7.46) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 M = \int_a^b |f(x)| dx.$$

这说明式 (7.44) 与式 (7.46) 必须是等式, 因而式 (7.43) 与式 (7.45) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \\ M^2(b-x)^2, & x \in \left( \frac{a+b}{2}, b \right], \end{cases}$$

此分段函数在  $x = \frac{a+b}{2}$  不可导, 这与  $f$  在  $[a, b]$  可导矛盾! □

**例题 7.46** 设  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的下凸函数. 求证: 对一切  $t \in [0, 1]$ , 有


$$t(1-t)f(t) \leq (1-t)^2 \int_0^t f(x) dx + t^2 \int_t^1 f(x) dx.$$

**注** 从本题结论知: 当  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的下凸函数时, 有

$$\int_0^1 t(1-t)f(t) dt \leq \frac{1}{3} \int_0^1 [t^3 + (1-t)^3] f(x) dt.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^1 t(1-t)f(t) dt &\leq \int_0^1 (1-t)^2 \left( \int_0^t f(x) dx \right) dt + \int_0^1 t^2 \left( \int_t^1 f(x) dx \right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_0^t f(x) dx \right) d(1-t)^3 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_t^1 f(x) dx \right) dt^3 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{3} \int_0^1 (1-t)^3 f(x) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [t^3 + (1-t)^3] f(x) dt. \end{aligned}$$

 **笔记** 构造思路: 待定  $a = a(t, x), b = b(t, x)$ , 使得  $t = ta + (1-t)b$ . 由  $f$  是下凸函数可知

$$f(t) \leq tf(a) + (1-t)f(b), \quad \forall t \in (0, 1).$$

并且上式两边对  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} t \int_0^1 f(a) dx + (1-t) \int_0^1 f(b) dx &= \frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x) dx + \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^1 f(b) dx &= \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = \int_0^1 f(tx) dx \\ \Rightarrow b &= tx, t = ta + (1-t)b \\ \Rightarrow a &= t - tx + t^2x = t(1-x+tx). \end{aligned}$$

**证明** 对于  $t=0$  和  $t=1$  所证不等式是显然的. 设  $t \in (0, 1)$ , 由定理 5.11 可知, 下凸函数在  $t$  点是连续的, 所以  $f$  在  $[0, 1]$  上可积. 对于  $x \in [0, 1]$ , 有  $t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx)$ . 因此根据下凸函数的定义, 得

$$f(t) \leq (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$

上式对变量  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leq (1-t) \int_0^1 f(tx) dx + t \int_0^1 f(1-x+tx) dx \\ &= \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x) dx + \frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

□

### 命题 7.7

设  $f$  在区间  $[0, a)$  上有二阶连续导数, 满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且  $f''(x) > 0$  ( $0 < x < a$ ). 求证: 对任意  $x \in (0, a)$ , 有

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2} dt < x + \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2} + 1}. \quad (7.47)$$

▲

**注** 式 (7.47) 左端是弧长计算公式, 不等式 (7.47) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点  $A$  和终点  $B$  处的切线在曲线凸出的一侧相交于  $C$  点, 则直线段  $AC$  与  $BC$  的长度之和大于这条曲线段的长度.

**证明** 将式 (7.47) 右端第一项  $x$  移到左端, 有

$$\int_0^x (\sqrt{1+(f'(t))^2} - 1) dt = \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + 1} \cdot f'(t) dt.$$

因为  $f'(t)$  和  $\frac{t}{\sqrt{1+t^2} + 1}$  都是单调递增函数, 所以  $\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + 1}$  是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x (\sqrt{1+(f'(t))^2} - 1) dt < \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2} + 1} \cdot \int_0^x f'(t) dt = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2} + 1}.$$

□

**例题 7.47**  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的正连续函数,  $k \geq 1$ . 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} dx \int_0^1 \frac{1}{f^k(x)} dx, \quad (7.48)$$

并讨论等号成立的条件.

**证明** 当  $k \geq 1$  时, 函数  $\frac{t^k}{1+t}$  和  $t^{k+1}$  都是单调递增的. 因此对于任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)} \left( \frac{f^k(x)}{1+f(x)} - \frac{f^k(y)}{1+f(y)} \right) (f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)) \geq 0, \quad (7.49)$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)} + \frac{f(y)}{1+f(x)} \leq \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} \cdot \frac{1}{f^k(y)} + \frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)} \cdot \frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量  $x, y$  在区间  $[0, 1]$  上积分, 即得所证.

要使式 (7.48) 成为等式, 必须式 (7.49) 成为等式. 因此对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有  $f(x) = f(y)$ , 即  $f$  在  $[0, 1]$  上为常数. □

**例题 7.48** 设  $b \geq a+2$ . 函数  $f$  在  $[a, b]$  上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)} dx = 1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx \leq 1. \quad (7.50)$$

并求式 (7.50) 成为等式的条件.

**证明** 令  $g(x) = \frac{b-a}{1+f(x)}$ , 则  $g$  在  $[a, b]$  上连续且  $\int_a^b g(x) dx = b-a$ . 从  $g$  的定义可得  $f(x) = \frac{b-a-g(x)}{g(x)}$ . 因此

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} &= \frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ -1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1} \right] \leq \frac{1}{b-a} \left[ -1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx &\leq \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $g(x) = 1$ , 即  $f(x) = b-a-1$  时成立.  $\square$

**例题 7.49** 设  $f$  是  $(-\infty, +\infty)$  上连续函数, 且在  $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$  上等于零. 又设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \quad (h > 0).$$

求证:

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**证明** 作变换  $u = t - x$ , 得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt = \int_{-h}^h |f(u+x)| du.$$

因此

$$\int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du.$$

作变换  $v = u + x$ , 得

$$\int_a^b |f(u+x)| dx = \int_{a+u}^{b+u} |f(v)| dv = \begin{cases} \int_{a+u}^b |f(v)| dv, & u \geq 0, \\ \int_a^{b+u} |f(v)| dv, & u < 0 \end{cases} \leq \int_a^b |f(v)| dv.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b |\varphi(x)| dx &= \int_a^b \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \right| dx \leq \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt dx \\ &= \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(v)| dv du = \int_a^b |f(v)| dv. \end{aligned}$$

$\square$

**例题 7.50** 设  $f$  在区间  $[1, +\infty)$  上连续并满足

$$x \int_1^x f(t) dt = (x+1) \int_1^x t f(t) dt. \quad (7.51)$$

求  $f$ .

**解** 假设  $f$  是满足条件的连续函数, 则对式 (7.51) 两边求导得

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x t f(t) dt + x^2 f(x). \quad (7.52)$$

由此可知,  $f(1) = 0$ , 且当  $x \geq 1$  时,  $f$  可导. 对式 (7.52) 两边求导得

$$f(x) = x f(x) + 2x f(x) + x^2 f'(x),$$

即

$$f'(x) = \frac{1-3x}{x^2} f(x), \quad x \geq 1. \quad (7.53)$$

所以

$$|f'(x)| \leq 2|f(x)|. \quad (7.54)$$

令  $g(x) = e^{-4x} f^2(x)$ , 则有

$$g'(x) = 2e^{-4x} (f(x)f'(x) - 2f^2(x)).$$

结合式(7.54)可知  $g' \leq 0$ , 这说明  $g$  单调递减. 因为  $g(1) = 0$ , 所以  $g \leq 0$ . 但从  $g$  的定义知  $g \geq 0$ . 于是  $g = 0$ , 从而  $f = 0$ .

实际上, 由(7.53)可解得  $f(x) = Ce^{\int_1^x \frac{1-3t}{t^2} dt} = Ce^{1-\frac{1}{x}-3\ln x}$ , 再将  $f(1) = 0$  代入得  $C = 0$ . 故  $f \equiv 0$ .

总之, 原方程(7.51)的解只有  $f \equiv 0$ . □

**例题 7.51** 设  $f$  在任意有限区间上可积, 且对任意  $x$  及任意  $a \neq 0$  满足

$$\frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = f(x).$$

试求函数  $f$ .

**解** 易知线性函数满足上面的式子. 下面证明满足上式的函数必是线性函数. 由条件知, 对任意  $x$  和  $a$ , 有

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = 2af(x).$$

因此

$$2af(x+y) = \int_{x+y-a}^{x+y+a} f(t) dt = \int_{y+a-x}^{y+a-x} f(t) dt + \int_{y+a-x}^{x+y+a} f(t) dt = 2(a-x)f(y) + 2xf(y+a).$$

取  $a = 1, y = 0$  就得

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0),$$

即  $f$  是线性函数. □

**例题 7.52** 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上有下界的连续函数. 若存在常数  $a \in (0, 1]$  使得

$$f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt$$

为常数, 则  $f$  无穷可微且它的任意阶导函数都是非负的.

**证明** 不妨设  $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  (不然将  $f$  换为  $f - m$  之后再证明). 此时  $f \geq 0$ . 记

$$A = f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt, \quad (7.55)$$

则  $f \geq A$ . 因此,  $A \leq 0$ . 由式(7.55)知  $f$  无穷可微, 且

$$f'(x) = af(x+1) - af(x). \quad (7.56)$$

记  $a_1 = a$ , 则

$$f'(x) + a_1 f(x) \geq 0.$$

假设存在  $a_n > 0$  使得

$$f'(x) + a_n f(x) \geq 0. \quad (7.57)$$

则  $(e^{a_n x} f(x))' \geq 0$ . 这说明函数  $e^{a_n x} f(x)$  是递增的. 由式 (7.55) 可得

$$\begin{aligned} f(x) &\leq a \int_x^{x+1} f(t) dt = a \int_x^{x+1} e^{a_n t} f(t) e^{-a_n t} dt \\ &\leq a e^{a_n(x+1)} f(x+1) \int_x^{x+1} e^{-a_n t} dt \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} a f(x+1) \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} (f'(x) + a f(x)). \end{aligned}$$

由此可得

$$f'(x) + a_{n+1} f(x) \geq 0, \quad (7.58)$$

其中

$$a_{n+1} = a - \frac{a_n}{e^{a_n} - 1}.$$

若  $a_{n+1} \leq 0$ , 则由 (7.58) 得  $f' \geq 0$ . 若  $a_{n+1} > 0$ , 则接着可构造  $a_{n+2}$ . 若  $\{a_n\}$  均为正的, 则  $\{a_n\}$  为递减正数列, 设其极限为  $r \geq 0$ . 若  $r > 0$ , 则从上式得  $r = a - \frac{r}{e^r - 1}$ , 即  $a = \frac{r e^r}{e^r - 1} > 1$ . 这与条件不符, 因此必有  $r = 0$ . 在式 (7.57) 中令  $n \rightarrow +\infty$ , 即得对一切  $x$  有  $f'(x) \geq 0$ . 注意到

$$f^{(n)}(x) - a \int_x^{x+1} f^{(n)}(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

因而将前面的  $f$  换为  $f'$ , 可以得到  $f''(x) \geq 0$ , 依次可以证明  $f^{(n)}(x) \geq 0$ . □

**例题 7.53** 求所有连续函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得对任意  $x \in \mathbb{R}$  和任意正整数  $n$ , 有

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt = n f(x) + \frac{1}{2}.$$

**解** 设  $f$  是要求的一个连续函数, 则  $f$  是可导的且

$$n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (7.59)$$

由此知  $f$  二阶可导, 且

$$n \left[ f'\left(x + \frac{1}{n}\right) - f'(x) \right] = f''(x). \quad (7.60)$$

将 (7.59) 中的  $n$  换成  $2n$ , 得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{2n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (7.61)$$

将上式中的  $x$  换成  $x + \frac{1}{2n}$  得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right). \quad (7.62)$$

将式 (7.59) 两边乘以 2 再减去式 (7.61) 两边, 得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'(x). \quad (7.63)$$

从式 (7.62) 和式 (7.63) 得

$$f'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{R}.$$

由 (7.60) 式可知  $f'' = 0$ . 因而存在常数  $a, b$  使得  $f(x) = ax + b$ . 代入题设条件可得  $a = 1$ . 于是  $f(x) = x + b$ , 这里  $b$  是任意常数. □

**例题 7.54** 设  $f \in C[-1, 1]$  且对任意整数  $n$  满足

$$\int_0^1 f(\sin(nx)) dx = 0. \quad (7.64)$$

求证: 对任意  $x \in [-1, 1]$  有  $f(x) = 0$ .

**证明** 在式 (7.64) 中取  $n = 0$ , 可得  $f(0) = 0$ . 对任意非零整数  $n$ , 将式 (7.64) 中的积分作变换  $t = nx$  可得

$$\int_0^n f(\sin t) dt = 0.$$

令

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(\sin t) dt,$$

则  $F$  可导, 且  $F(n) = 0$ . 对整数  $k$  有

$$\begin{aligned} F(x + 2k\pi) &= \int_{x+2k\pi}^{x+2k\pi+1} f(\sin t) dt = \int_x^{x+1} f(\sin(t + 2k\pi)) dt \\ &= \int_x^{x+1} f(\sin t) dt = F(x). \end{aligned}$$

因而  $F(n + 2k\pi) = F(n) = 0$ . 这说明  $F$  在集合  $A = \{n + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$  上取值为 0. 由于集合  $A$  在  $\mathbb{R}$  上是稠密的, 由  $F$  的连续性可知  $F(x) = 0 (x \in \mathbb{R})$ . 于是

$$F'(x) = f(\sin(x+1)) - f(\sin x) = 0.$$

这说明  $f(\sin x)$  是以 1 和  $2\pi$  为周期的连续函数. 仍由集合  $A$  的稠密性可知  $f(\sin x)$  是常数. 因此  $f$  在  $[-1, 1]$  上是常数. 故  $f(x) = f(0) = 0$ .  $\square$

**例题 7.55** 设  $f$  是  $[0, 2\pi]$  上可导的凸函数,  $f'$  有界, 试证

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \geq 0.$$

**证明** 因为  $f$  是可导的凸函数, 所以  $f'$  是单调递增的函数. 由  $f'$  的单调有界性, 知  $f'$  在  $[0, 2\pi]$  上可积. 根据分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f'(x) \sin nx \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin((k-1)\pi + x) \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) (-1)^{k-1} \sin x \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin x \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^n \left( f' \left( x + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) - f' \left( x + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) \right) \sin x \, dx. \end{aligned}$$

注意到  $f'$  是单调递增的, 即知  $a_n \geq 0$ .  $\square$

**例题 7.56** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续可微,  $f(0) = 0$ . 求证:

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^1 (f'(x))^2 dx, \quad (7.65)$$

且右边的系数 4 是最佳的.

**证明** 证法一: 因为

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f(x)}{2x},$$

所以

$$(f'(x))^2 = \left[ x^{\frac{1}{2}} \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' \right]^2 + \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2} \geq \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2}.$$



因而

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2} f^2(1) + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx,$$

即所证不等式 (7.65) 成立.

若存在常数  $c \in (0, 4)$  使得

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq c \int_0^1 (f'(x))^2 dx \quad (7.66)$$

对任意满足条件的  $f$  成立, 则对  $\delta \in (0, 1)$  取

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [\delta, 1], \\ \frac{3}{2\sqrt{\delta}}x - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x^2, & x \in [0, \delta]. \end{cases}$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx &= \int_0^\delta \left( \frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{2\delta^2} + \frac{x^2}{4\delta^3} \right) dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{19}{12} + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx, \\ \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= \int_0^\delta \left( \frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_\delta^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{\delta^3} \right) dx + \frac{1}{4} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{13}{12} + \frac{1}{4} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

因此式 (7.66) 导致

$$\left(1 - \frac{c}{4}\right) \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{13}{12}c - \frac{19}{12}.$$

此式当  $\delta$  充分小时是不成立的. 这个矛盾说明 4 是最佳的.

**证法二:** 利用 **Minkowski 不等式**, 可得

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 f'(xt) dt \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f'(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \stackrel{\text{换元}}{=} \int_0^1 \left( \frac{\int_0^t |f'(x)|^2 dx}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \left( \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \left( \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从上式推导可以看出, 对于不恒为零的  $f$ , 严格不等号成立.

为说明相关常数不可改进, 任取  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 考察不恒为零的  $\bar{f} \in C[\varepsilon, 1]$  使得

$$\frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|\bar{f}(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} = \lambda \equiv \sup_{\substack{f \in C[\varepsilon, 1] \\ f \neq 0}} \frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx}{\int_\varepsilon^1 |f'(x)|^2 dx}.$$

这样的  $\bar{f}$  的存在性一般需要用泛函分析. 这里只作形式推导. 任取  $\varphi \in C_c^1(\varepsilon, 1)$ , 则

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \frac{\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\bar{f}(x) + s\varphi(x)|^2}{x^2} dx}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x) + s\varphi'(x)|^2 dx} \bigg|_{s=0} \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \left( \frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\bar{f}(x)\varphi(x)}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^1 \bar{f}'(x)\varphi'(x) dx \right) \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \int_{\varepsilon}^1 \left( \bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{(x+\varepsilon)^2} \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

因此, 尝试寻找  $\bar{f}$  满足

$$\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{x^2} = 0, \quad x \in [\varepsilon, 1].$$

若取  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\bar{f}(x) = x^\alpha$  满足上述方程. 对应的  $\lambda = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$ , 为使得  $\lambda$  最大, 取  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

以上讨论启发我们考虑

$$f'_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

则

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \sqrt{x} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

直接计算得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 \frac{|f_\varepsilon(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |f'_\varepsilon(x)|^2 dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{4} - \ln \varepsilon - \frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{\ln \varepsilon}{4}} = 4.$$

这就表明不等式中的常数 4 是最佳的. □

**例题 7.57** 设  $f, g: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  都是连续函数, 且  $f \neq g$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ . 定义数列

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

求证:  $\{I_n\}$  严格单调递增, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

**证明** 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \cdot \sqrt{g(x)} dx \leq \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx$$

即  $I_0 \leq I_1$ , 等号成立当且仅当存在常数  $c$  使得  $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = c\sqrt{g(x)}$ , 即  $f(x) = cg(x)$ . 再由条件  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$  可得  $c = 1$ . 这与  $f \neq g$  矛盾, 故  $I_0 < I_1$ .

假设  $I_0 < I_1 < \dots < I_n$ , 根据 Hölder 不等式, 有

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \cdot g^{\frac{(n+1)^2}{n+2} - n}(x) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \left( \int_a^b \left( \frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}} \left( \int_a^b \left( g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x) \right)^{n+2} dx \right)^{\frac{1}{n+2}} \\ &= I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_0^{\frac{1}{n+2}} < I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_n^{\frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

因而  $I_n < I_{n+1}$ , 这样, 根据数学归纳法原理, 就证明了  $\{I_n\}$  严格单调递增.

若对任意  $x \in (a, b)$ , 有  $g(x) \geq f(x)$ , 则  $g(x) - f(x) \geq 0$ . 根据条件  $g(x) - f(x)$  连续且满足  $\int_a^b (g(x) - f(x))dx = 0$ , 这可推出  $f = g$ , 与条件矛盾! 因此必存在  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x_0) > g(x_0)$ , 因而存在正数  $\delta < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$  使得

$$f(x) > g(x), \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

记  $m = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x)}{g(x)}$ , 则  $m > 1$ , 因此

$$I_n \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^n f(x) dx \geq m^n \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx$$

令  $n \rightarrow +\infty$  得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ . □

**例题 7.58** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  连续, 定义  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). 如果  $g$  是  $\mathbb{R}$  上的递减函数, 求证:  $f \equiv 0$ .

**证明** 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F$  可导且  $F' = f$ . 由条件知

$$(F^2(x))' = 2F'(x)F(x) = 2g(x)$$

是单调递减函数. 注意到  $F(0) = 0$ . 有  $(F^2(x))' \leq 0$  ( $x > 0$ ),  $(F^2(x))' \geq 0$  ( $x < 0$ ). 这说明  $F^2(x)$  当  $x \geq 0$  时单调递减, 当  $x \leq 0$  时单调递增. 因此  $F^2$  的最大值为  $F^2(0) = 0$ . 但显然  $F^2 \geq 0$ . 故  $F = 0$ , 于是  $f = F' = 0$ . □

**例题 7.59** 设  $f \in C[0, 1]$ . 如果对任意  $x \in [0, 1]$  有

$$\int_0^x f(t) dt \geq f(x) \geq 0,$$

求证:  $f(x) \equiv 0$ .


**证明** 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 则  $F$  可导且  $F' = f$ . 由条件知  $F(x) \geq F'(x)$ . 因此  $(e^x F(x))' \leq 0$ , 即  $e^x F(x)$  单调递减. 由  $F(0) = 0$ , 得  $F(x) \leq 0$ . 但由条件  $F(x) \geq f(x) \geq 0$ , 故  $F(x) = 0$ , 于是  $f(x) = F'(x) = 0$ . □

### 命题 7.8

设  $g(x) \in C^2[0, 1]$  是递增的下凸函数, 则有

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 |g'(x)|^2 dx, \quad (7.67)$$

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 |g'(x)|^2 dx. \quad (7.68)$$

 **笔记** 这题的下确界  $\inf$  可以改成最小值  $\min$ , 因为可取到等号.

**证明** 我们令

$$F(x) = \int_x^1 f(y) dy + g(x),$$

则  $F(x^2) \geq F(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , 因此由  $F$  连续性, 就有

$$F(x) \geq F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \geq F\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \geq \cdots \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = F(1), \quad \forall x \in (0, 1],$$

于是我们有  $F(x) \geq F(1)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , 现在就有

$$\int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

因此

$$\left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx : f \in C[0, 1], \int_{x^2}^x f(y) dy \geq g(x) - g(x^2) \right\} \subset \left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx : f \in C[0, 1], \int_{x^2}^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x^2) \right\}.$$

故

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

取  $f(y) = g'(y)$ , 可以知道(7.67)(7.68)式等号都成立. 从而

$$\int_0^1 |g'(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

故只须证明

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \\ \iff & \text{对 } \forall f \in C[0, 1] \text{ 且 } \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x), \text{ 都有 } \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

于是设  $f \in C[0, 1]$  且  $\int_x^1 f(y) dy$ , 由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \int_0^1 |f(x)|^2 dx & \geq \left( \int_0^1 f(x) g'(x) dx \right)^2 = \left( \int_0^1 g'(x) d \int_x^1 f(y) dy \right)^2 \\ & = \left( -g'(0) \int_0^1 f(y) dy - \int_0^1 \left( \int_x^1 f(y) dy \right) g''(x) dx \right)^2 \\ & = \left( g'(0) \int_0^1 f(y) dy + \int_0^1 \left( \int_x^1 f(y) dy \right) g''(x) dx \right)^2 \\ & \geq \left( g'(0) \int_0^1 f(y) dy + \int_0^1 (g(1) - g(x)) g''(x) dx \right)^2 \\ & = \left( g'(0) \int_0^1 f(y) dy - g'(0)(g(1) - g(0)) + \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \right)^2 \\ & \geq \left( \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \right)^2 \end{aligned}$$

因此  $\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx$ . 这样我们就完成了证明. □

### 推论 7.2

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq \frac{x^2 - x^4}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq \frac{1-x^2}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{3} \\ \inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq \frac{x^3 - x^6}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq \frac{1-x^3}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

### 例题 7.60

证明

□

### 例题 7.61

证明

☐

例题 7.62

证明

☐

例题 7.63

证明

☐

例题 7.64

证明

☐


## 第八章 积分计算

### 8.1 不定积分计算

#### 8.1.1 直接猜原函数

计算定积分, 能直接猜出原函数, 就直接写出原函数, 然后求导验证即可.

**例题 8.1** 计算  $\int \frac{e^{-\sin x} \sin(2x)}{(1 - \sin x)^2} dx$ .

 **笔记** 因为  $e^{g(x)}$  的原函数一定仍含有  $e^{g(x)}$ , 并且  $\frac{1}{1 - \sin x}$  求导后一部分是  $\frac{1}{(1 - \sin x)^2}$ , 所以我们猜测原函数与  $\frac{e^{-\sin x}}{1 - \sin x}$  有关. 因此对其求导进行尝试.

**证明** 注意到


$$\left( \frac{e^{-\sin x}}{1 - \sin x} \right)' = \frac{-\cos x e^{-\sin x} (1 - \sin x) + \cos x e^{-\sin x}}{(1 - \sin x)^2} = \frac{e^{-\sin x} \cos x \sin x}{(1 - \sin x)^2}.$$

故原函数为  $\frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$ , 其中  $C$  为任意常数. 求导验证:

$$\left( \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} \right)' = \frac{e^{-\sin x} (2 \cos x \sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2}.$$

□

**例题 8.2** 计算  $\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$ .

 **笔记** 由  $(x - \ln x)^2$  知可待定原函数  $\frac{f(x)}{x - \ln x}$ , 从而猜出答案.

**证明** 注意到


$$\left( \frac{x}{x - \ln x} \right)' = \frac{x - \ln x - x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

故原函数为  $\frac{x}{x - \ln x} + C$ , 其中  $C$  为任意常数.

□

#### 8.1.2 换元积分

**例题 8.3** 设  $y(x - y)^2 = x$ , 计算  $\int \frac{dx}{x - 3y}$ .

 **笔记** 令  $y = tx$ , 则  $t = \frac{y}{x}$  (这里是猜测过程,  $t$  只是中间变量, 不用考虑  $x$  是否取 0), 从而由条件可得

$$\begin{aligned} tx(x - tx)^2 = x &\Rightarrow tx^3(1 - t)^2 = x \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{1}{t(1 - t)^2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t)}. \end{aligned}$$

因为这里是猜测的过程 (只要最后能得到一个正确的原函数即可), 不需要保证严谨性, 所以我们直接取  $x = \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t)}$ ,

于是  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t)} \\ y = \frac{\sqrt{t}}{1 - t} \end{cases}$ . 代入不定积分得

$$\int \frac{dx}{x - 3y} = \int \frac{dx}{x - 3y} = \int \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{t}(1 - t)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}(1 - t)} - \frac{3\sqrt{t}}{1 - t}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dt}{2(t^2 - t)} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x}} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-x}{y} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中  $C$  为任意常数. 因此我们断言  $\int \frac{dx}{x-3y} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-x}{y} \right| + C$ .

**证明** 对原方程两边同时关于  $x$  求导得

$$y'(x-y)^2 + 2y(1-y')(x-y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-2y(x-y)}{(x-y)(x-3y)}.$$

于是利用上式经过计算可得

$$\left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-x}{y} \right| + C \right)' = \frac{1}{x-3y}.$$

故  $\int \frac{dx}{x-3y} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-x}{y} \right| + C$ , 其中  $C$  为任意常数. □

## 8.2 定积分

### 8.2.1 建立积分递推

**例题 8.4** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx) dx, n \in \mathbb{N}$ .

**证明** 利用分部积分和和差化积公式可得

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)] dx \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x [\sin(nx) \cos x + \cos(nx) \sin x] dx \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{I_n}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(nx) d \cos x \\
&= \frac{I_{n-1} + I_n}{2} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) d \cos^n x \\
&= \frac{I_{n-1} + I_n}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx) dx \\
&= \frac{I_{n-1} + I_n}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{I_n}{2} \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

故  $I_n = \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2n}$ , 则两边同乘  $2^n$  (强行裂项)

$$2^n I_n = 2^{n-1} I_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n}, n = 1, 2, \dots$$

又注意到  $I_0 = 0$ , 从而

$$2^n I_n = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k} \Rightarrow I_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k}.$$

□


## 命题 8.1

证明:

$$(1) \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \pi, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx = n\pi.$$

$$(3) \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1}.$$

 **笔记** 提示:  $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y)$  (证明见命题 A.12).

证明

(1) 记  $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$ , 则

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^\pi \frac{2\cos((n+1)x)\sin x}{\sin x} dx = 2 \int_0^\pi \cos((n+1)x) dx = 0.$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = I_n = I_{n-2} = \cdots = \begin{cases} I_0, & n \text{ 为偶数} \\ I_1, & n \text{ 为奇数} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \pi, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

(2) 记  $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx$ , 则

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x \cdot \sin((2n+1)x)}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx \stackrel{\text{命题 8.1(1)}}{=} \pi. \end{aligned} \quad (8.1)$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx = I_n = \pi + I_{n-1} = \cdots = (n-1)\pi + I_1 = n\pi.$$

(3) 记  $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx$ , 则

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)}{\sin x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x \cdot \sin((2n+1)x)}{\sin x} dx \\ &= \int_0^\pi \sin((2n+1)x) dx = \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)x) \Big|_\pi^0 = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx = I_n = \frac{2}{2n-1} + I_{n-1} = \cdots = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{2k+1} + I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1}.$$

□

**例题 8.5** 设  $a > 1$ , 计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \cos^2 x) dx$ .

**注** 很多情况下不求出被积函数的原函数, 只需充分利用换元、分部积分以及被积函数的性质, 即可求出积分的值. 见下述解法二.

**解 解法一:** 设  $a_0 = a > 1$ . 构造数列如下:

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1 \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

则由例题 2.82 可知, 存在  $x_0 > 0$  使得

$$a_0 = \operatorname{ch}(x_0), \quad a_n = \operatorname{ch}(2^n x_0),$$



其中  $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ . 可以解得

$$x_0 = \ln \left( a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1} \right). \quad (8.3)$$

故

$$a_n = \frac{e^{2^n x_0} + e^{-2^n x_0}}{2}.$$

设

$$I_n = \int_0^\pi \ln(a_n - \cos x) dx,$$

则

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\pi \ln(a_0 - \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a_0 - \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(a_0 - \cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a_0 - \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a_0 + \cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a_0^2 - \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( a_0^2 - \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \frac{a_1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \left( \frac{a_1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

同理, 有

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n+1} - \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (8.4)$$

由此递推公式, 可得

$$I_0 = \frac{1}{2^n} I_n - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (8.5)$$

因为

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \ln(a_n - \cos x) dx = \int_0^\pi \ln \left( \frac{e^{2^n x_0} + e^{-2^n x_0}}{2} - \cos x \right) dx \\ &= 2^n x_0 \pi + \int_0^\pi \ln \left( \frac{1 + e^{-2^{n+1} x_0}}{2} - e^{-2^n x_0} \cos x \right) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2^n} I_n \rightarrow x_0 \pi \quad (n \rightarrow +\infty).$$

故从式 (8.5) 可得

$$I_0 = x_0 \pi - \pi \ln 2 = \pi \ln \left( \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}}{2} \right),$$

即所求的积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \cos^2 x) dx = \pi \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2} \right).$$

解法二: 我们有

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \cos^2 x) dx = \int_0^\pi \ln(a - \cos x) dx.$$

由定理 8.7, 关于  $a$  求导得到

$$F'(a) = \int_0^\pi \frac{1}{a - \cos x} dx \xrightarrow{\text{万能公式}} \int_0^{+\infty} \frac{2}{a(1+t^2) - (1-t^2)} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

因此

$$F(a) = \int_1^a F'(a) da = \pi \ln \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right) + C, \quad a > 1.$$

结合

$$F(1) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2.$$

可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \cos^2 x) \, dx = \pi \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2} \right), \quad a > 1.$$

□

## 8.2.2 区间再现

### 定理 8.1 (区间再现恒等式)

当下述积分有意义时, 我们有

1.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] \, dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)] \, dx.$$

2.

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^\infty f(x) \, dx = \int_0^1 \left[ f(x) + \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} \right] \, dx.$$

♥



**笔记** 注意: 倒代换具有将  $[0, 1]$  转化为  $[1, +\infty)$  的功能.

**证明** 证明是显然的.(第 1 问中最后一个等号是由轴对称得到的)

□

### 命题 8.2

证明

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$3. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

♣

**证明**

1.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \ln \cos x + \ln \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x \sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{1}{2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x) \, dx \\ &= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} I \\ \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \ln \cos x + \ln \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x \sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{1}{2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x) \, dx \\ &= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &\stackrel{x=\tan \theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan \theta)}{1+\tan^2 \theta} d \tan \theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta \cdot \ln(1+\tan \theta)}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[ \ln(1+\tan \theta) + \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[ \ln(1+\tan \theta) + \ln\left(1+\frac{1-\tan \theta}{1+\tan \theta}\right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[ \ln(1+\tan \theta) + \ln \frac{2}{1+\tan \theta} \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2 d\theta = \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

□

**例题 8.6** 计算

1.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, a > 0.$
2.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1} dx.$
3.  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}} dx.$

解

1. 注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx \stackrel{x=at}{=} \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(at)}{1+t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{1+t^2} dt + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt. \quad (8.6)$$

又注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln x}{1+x^2} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

于是再结合(8.6)式可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1} dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_0^{\infty} \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}} d\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln t}{1+t+t^2} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1} dx = 0.$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}} dx &\stackrel{x=\sin^2 y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin^2 y}{\sqrt{\sin^2 y(1-\sin^2 y)}} d \sin^2 y \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y dy \stackrel{\text{命题 8.2}}{=} 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2\right) = -2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

□

**例题 8.7**

1. 对  $n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x) \sin x} dx.$
2.  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} dx.$
3. 对  $n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx.$

解

1.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} dx &= \int_{-\pi}^0 \left[ \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} + \frac{\sin(nx)}{(1+2^{-x})\sin x} \right] dx = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(nx)}{\sin x} \left( \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(nx)}{\sin x} \cdot \frac{2+2^x+2^{-x}}{2+2^x+2^{-x}} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx \stackrel{\text{例题 8.1}}{=} \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数} \\ \pi, n \text{ 为奇数} \end{cases}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} dx &= \int_{-\pi}^0 \left( \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} + \frac{x \sin x \arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x} \right) dx = \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) dx \\ &\stackrel{\text{命题 A.3(1)}}{=} \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \cdot \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi-x) \sin x}{1+\cos^2 x} \right) dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} \arctan \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{8}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin[\sin(2\pi-x) + n(2\pi-x)] dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(-\sin x - nx) dx = - \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0. \end{aligned}$$

□

**例题 8.8** 计算积分  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

**注** 此例中无法求出被积函数的原函数, 但通过积分的性质仍可算出积分的值.

**解 解法一:** 作变换  $x = \tan \varphi$ , 则  $d\varphi = \frac{1}{1+x^2} dx$ , 且当  $x=0$  时,  $\varphi=0$ ; 当  $x=1$  时,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \ln \left( \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right) \right) - \ln(\cos \varphi) \right\} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \ln \sqrt{2} + \ln \left( \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \ln(\cos \varphi) \right\} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) d\varphi \stackrel{\varphi = \frac{\pi}{4} - t}{=} - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt,$$

所以  $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

**解法二:** 考虑含参量积分

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in [0, 1].$$

显然  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = I$ , 且函数  $\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$  在  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  上满足 **定理 8.7** 的条件, 于是

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} dx.$$

因为

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \frac{\alpha+x}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right),$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \int_0^1 \frac{\alpha}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha x} dx \right) \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \alpha \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \ln(1+\alpha x) \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \alpha \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln(1+\alpha) \right].\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi'(\alpha) d\alpha &= \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \frac{\pi}{4} \alpha + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln(1+\alpha) \right] d\alpha \\ &= \frac{\pi}{8} \ln(1+\alpha^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln 2 \arctan \alpha \Big|_0^1 - \varphi(1) \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{\pi}{8} \ln 2 - \varphi(1) \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \varphi(1).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_0^1 \varphi'(\alpha) d\alpha = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi(1),$$

所以  $I = \varphi(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

□

### 8.2.3 Frullani(傅汝兰尼) 积分

#### 定理 8.2 (Frullani(傅汝兰尼) 积分)

设  $f \in C(0, +\infty)$ .

1. 若存在极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad (8.7)$$

则对  $a, b > 0$  有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] \ln \frac{b}{a}.$$

2. 若存在极限和积分

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \alpha, \int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx. \quad (8.8)$$

则对  $a, b > 0$ , 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \alpha \ln \frac{b}{a}.$$

3. 若存在极限和积分

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha, \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx. \quad (8.9)$$

则对  $a, b > 0$ , 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \alpha \ln \frac{a}{b}.$$


4. 若  $f$  是周期  $T > 0$  函数且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  存在, 则对  $a, b > 0$  有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right] \ln \frac{b}{a}.$$

5. 若  $f$  满足  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$  存在, 则对  $a, b > 0$  有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy \right] \ln \frac{b}{a}.$$



 **笔记** 傅汝兰尼积分有诸多变种, 无需记忆具体表达式, 知道有大概这么一个东西即可.

**证明** 不妨设  $b > a$ .

1. 给定  $A > \delta > 0$ , 考虑

$$\begin{aligned} \int_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x} dx \\ &\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} f(\theta_1) \int_{bA}^{aA} \frac{1}{x} dx - f(\theta_2) \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{1}{x} dx, \end{aligned}$$

这里  $\theta_1 \in (aA, bA)$ ,  $\theta_2 \in (a\delta, b\delta)$ , 于是让  $A \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0^+$ , 由(8.7), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] \ln \frac{b}{a}.$$

2. 给定  $A > \delta > 0$ , 考虑

$$\begin{aligned} \int_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x} dx \\ &\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - f(\theta) \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{1}{x} dx, \end{aligned}$$

这里  $\theta \in (a\delta, b\delta)$ , 于是让  $A \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0^+$ , 由(8.8), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \alpha \ln \frac{b}{a}.$$

3. 给定  $A > \delta > 0$ , 考虑

$$\begin{aligned} \int_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x} dx \\ &\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} f(\theta) \int_{bA}^{aA} \frac{1}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x} dx, \end{aligned}$$

这里  $\theta \in (aA, bA)$ , 于是让  $A \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0^+$ , 由(8.9), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \alpha \ln \frac{a}{b}.$$

4. 给定  $A > \delta > 0$ , 考虑

$$\int_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx \\
&= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x} dx \\
&\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - f(\theta) \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{1}{x} dx \\
&= \int_b^a \frac{f(Ax)}{x} dx - f(\theta) \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{1}{x} dx,
\end{aligned}$$

这里  $\theta \in (a\delta, b\delta)$ . 现在

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( -f(\theta) \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln \frac{b}{a}.$$

由 **Riemann 引理**, 我们有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_b^a \frac{f(Ax)}{x} dx = \int_b^a \frac{1}{x} dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = -\frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \cdot \ln \frac{b}{a},$$

这就证明了

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right] \ln \frac{b}{a}.$$

5. 上一问证明中把使用的 **Riemann 引理** 用 **平均值极限版本**的 **Riemann 引理** 代替即可.

□


## 8.2.4 化成多元累次积分 (换序)

### 命题 8.3

证明:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \\
(2) \quad & \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \\
(3) \quad & \int_0^\infty \sin x^2 dx, \int_0^\infty \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

◆

 **笔记** 本结果可以直接使用.

**证明**

(1) 注意到

$$\begin{aligned}
\left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \stackrel{\text{把 } \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \text{ 看作常数}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dx \right) dy \\
&\stackrel{\text{把 } e^{-x^2} \text{ 看作常数}}{=} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \stackrel{e^{-(x^2+y^2)} \text{ 连续}}{=} \iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(2) 注意到

$$\int_0^{+\infty} \sin x e^{-yx} dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{ix-yx} dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-(y-i)x} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{y-i} = \operatorname{Im} \frac{y+i}{y^2+1} = \frac{1}{y^2+1}.$$

因此就有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \sin x \left( \int_0^{+\infty} e^{-yx} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \sin x e^{-yx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} dy \left( \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{ix-yx} dx \right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

当然本题也可以直接利用分部积分计算  $\int_0^{+\infty} \sin x e^{-yx} dx = \frac{1}{y^2+1}$ .

(3) 注意到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \stackrel{x=\frac{t}{\sqrt{a}}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

并且  $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ , 从而  $\sqrt{-i} = e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}} = \frac{1}{2} \sqrt{-i\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \operatorname{Re} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \\ \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx &= \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \operatorname{Im} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

□

**例题 8.9** 计算  $\int_0^1 \sin \ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$  ( $b > a > 0$ ).

**证明**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin \ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \sin \ln \frac{1}{x} \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin \ln \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_a^b dy \int_{+\infty}^0 e^{-ty} \sin t de^{-t} = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t dt \\ &\stackrel{\text{命题 8.3(2) 的证明过程}}{=} \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = \arctan(b+1) - \arctan(a+1).\end{aligned}$$

□

### 8.2.5 化成含参积分 (求导)

**例题 8.10** 设  $a, b \geq 0$  且不全为 0, 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$ .

**注** 实际上, 根据  $a > b$  时得到的结果, 可以看出  $F(a, b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$  对  $a, b$  有轮换对称性, 故这个结果对其他情况显然也成立.

**证明** 设  $F(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$ , 当  $a > b$  时, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b} F(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial b} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b \sin^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b \tan^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2bt^2}{(a^2 + b^2 t^2)(1+t^2)} dt \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2 t^2} - \frac{2b}{1+t^2} \right) dt\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \frac{2a^2b}{a^2 + b^2t^2} dt - \frac{2b}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \frac{2b}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}t\right)^2} dt - \frac{b\pi}{a^2 - b^2} \\
&= \frac{2b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{b\pi}{a^2 - b^2} = \frac{\pi}{a+b}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
F(a, b) &= F(a, 0) + \int_0^b \frac{\partial}{\partial b'} F(a, b') db' = F(a, 0) + \int_0^b \frac{\pi}{a+b'} db' \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a \cos x) dx + \pi \ln \frac{a+b}{a} \stackrel{\text{例 8.2}}{=} \pi \ln \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

当  $a < b$  时, 类似可得  $F(a, b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$ . 当  $a = b$  时,  $F(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 dx = \pi \ln a = \pi \ln \frac{a+b}{2}$ .

综上, 对  $\forall a, b \geq 0$ , 都有  $F(a, b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$ . □

### 8.2.6 级数展开方法

积分和求和换序  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$ , 等价于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

又由于有限和随意交换, 因此上式等价于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{n=1}^m f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) dx = 0.$$

**例题 8.11** 计算  $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x} dx$ .

**解** 由于

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad 0 < x < 1.$$

并且  $0 < e^{-x} < 1$ , 故

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)x} dx \\
&\stackrel{\text{换序}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} x e^{-(n+1)x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.
\end{aligned}$$

又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

下面证明(??)式换序成立, 等价于证明  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{\infty} x(-1)^n e^{-(n+1)x} dx = 0$ . 由交错级数不等式及  $xe^{-(n+1)x}$  关于  $n$  非负递减, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\int_0^{+\infty} \left| \sum_{n=m}^{\infty} x(-1)^n e^{-(n+1)x} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-(m+1)x} dx = -\frac{x e^{-(m+1)x}}{m+1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{m+1} \int_0^{+\infty} e^{-(m+1)x} dx = \frac{1}{(m+1)^2}.$$

令  $m \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{\infty} x(-1)^n e^{-(n+1)x} dx = 0$ . 故(??)式换序成立.  $\square$

#### 命题 8.4

证明:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin(nx)}{n} = \arctan \frac{q \sin x}{1 - q \cos x}, |q| \leq 1.$
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 + q^2 - 2q \cos x), |q| \leq 1.$
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos(nx)}{n!} = e^{q \cos x} \cos(q \sin x) - 1, |q| \leq 1, x \in \mathbb{R}.$
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin(nx)}{n!} = e^{q \cos x} \sin(q \sin x), |q| \leq 1, x \in \mathbb{R}.$

 **笔记** 在  $\mathbb{C}$  上,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

我们定义主值支

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

本部分内容无需记忆, 只需要大概有个可以算的感觉即可, 实际做题中可以围绕这种级数给出构造.

**证明**  $\Im$  表示取虚部,  $\Re$  表示取实部.

(1) 利用欧拉公式有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin(nx)}{n} &= \Im \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n e^{inx}}{n} \right) = \Im \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qe^{ix})^n}{n} \right) = \Im(-\ln(1 - qe^{ix})) \\ &= -\Im \left( \ln |1 - qe^{ix}| + i \frac{-q \sin x}{1 - q \cos x} \right) = \arctan \frac{q \sin x}{1 - q \cos x}. \end{aligned}$$

(2) 利用欧拉公式有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos(nx)}{n} &= -\Re \left( \ln |1 - qe^{ix}| + i \frac{-q \sin x}{1 - q \cos x} \right) = -\frac{1}{2} \ln [(1 - q \cos x)^2 + q^2 \sin^2 x] \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1 + q^2 - 2q \cos x). \end{aligned}$$

(3) 利用欧拉公式有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos(nx)}{n!} &= \Re \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qe^{ix})^n}{n!} \right) = \Re (e^{qe^{ix}} - 1) = \Re (e^{q \cos x + iq \sin x} - 1) \\ &= \Re (e^{q \cos x} \cos(q \sin x) - 1 + ie^{q \cos x} \sin(q \sin x)) \\ &= e^{q \cos x} \cos(q \sin x) - 1.\end{aligned}$$

(4) 利用 (3) 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin(nx)}{n!} &= \Im (e^{q \cos x} \cos(q \sin x) - 1 + ie^{q \cos x} \sin(q \sin x)) \\ &= e^{q \cos x} \sin(q \sin x).\end{aligned}$$

□

**例题 8.12** 计算

- $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx.$
- $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx, a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$

**注** 由 1 的证明可得

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

实际上, 上式就是 **命题 8.4(3)** 的结论.

**注** 第 2 问也可以用含参积分求导的方法进行计算 (这个方法更容易想到).

**证明**

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} e^{\cos x} e^{i \sin x} dx \right) = \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} e^{\cos x + i \sin x} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} dx \right) = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} dx \right] = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{ix})^n}{n!} dx \right] \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{n!} dx \right) = \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} \frac{e^{i \cdot 0 \cdot x}}{0!} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x} - 1}{in \cdot n!} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} 1 dx + 0 \right) = 2\pi.\end{aligned}$$

2. 注意到当  $a \in (0, 1)$  时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n} &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^n}{n} \right] = -\operatorname{Re} [\ln(1 - ae^{ix})] \\ &= -\operatorname{Re} [\ln |1 - ae^{ix}| + i \arg(1 - ae^{ix})] = -\ln |1 - ae^{ix}| \\ &= -\ln |(1 - a \cos x) + ai \sin x| = -\frac{1}{2} \ln(1 + a^2 - 2a \cos x).\end{aligned}$$

于是当  $a \in (0, 1)$  时, 就有

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n} dx = 0.$$

若  $a > 1$ , 则  $\frac{1}{a} \in (0, 1)$ , 从而此时我们有

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \pi \ln a^2 + \int_0^{\pi} \ln \left( \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} \cos x + 1 \right) dx = \pi \ln a^2 = 2\pi \ln a.$$

又由  $\ln(1 - 2a \cos x + a^2)$  关于  $a$  的偏导存在可知  $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$  关于  $a$  连续. 于是由

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln a, \quad \forall a > 1.$$

可知当  $a = 1$  时, 我们有

$$\int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos x) dx = \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \lim_{a \rightarrow 1^+} (2\pi \ln a) = 0.$$

□

### 定义 8.1 (多重对数函数-Li<sub>2</sub> 函数)

定义

$$\text{Li}_2(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

♣

### 命题 8.5

$$(1) \text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \cdot \ln(1-x), x \in (0, 1).$$

$$(2) \text{Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{Li}_2(0) = 0, \quad \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{2}.$$

♣

证明

(1) 记  $f(x) \triangleq \text{Li}_2(x)$ ,  $F(x) \triangleq f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ . 则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x).$$

于是

$$F'(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{\ln x}{1-x} - \frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} = 0.$$

$$\text{故 } F(x) \equiv F(1) = f(0) + f(1) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 显然  $\text{Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\text{Li}_2(0) = 0$ . 由 (1) 可得

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 \frac{1}{2} \implies \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{2}.$$

□

**例题 8.13** 计算  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} dx$ .

解

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n-1} dx \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{命题 8.5}}{=} -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

## 8.2.7 重积分计算

## 定理 8.3 (二重积分换序)

证明:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx, \quad (10)$$

其中  $f(x, y)$  是在由直线  $y = a, x = b, y = x$  所围成的三角形 ( $\Delta$ ) 上连续的任意函数.

证明

□

## 命题 8.6

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 试证: 对任意  $x \in (a, b)$ , 有

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f(y) dy, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明 当  $n = 1$  时, 由二重积分换序可知

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_a^x dx_2 \int_{x_2}^x f(x_2) dx_1 = \int_a^x (x-x_2) f(x_2) dx_2 = \int_a^x (x-y) f(y) dy.$$

设原结论对  $n = k-1$  的情形成立, 考虑  $n = k$  的情形, 由归纳假设可知

$$\int_a^{x_1} dx_1 \cdots \int_a^{x_k} f(x_{k+1}) dx_{k+1} = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^{x_1} (x_1-y)^{k-1} f(y) dy.$$

于是再利用二重积分换序得

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_k} f(x_{k+1}) dx_{k+1} &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} (x_1-y)^{k-1} f(y) dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x dy \int_y^x (x_1-y)^{k-1} f(y) dx_1 \\ &= \frac{1}{k!} \int_a^x (x-y)^k f(y) dy. \end{aligned}$$

故由数学归纳法知原结论成立. □

**例题 8.14** 求定义在星形区域  $D = \{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$  上满足  $f(1, 0) = 1$  的正值连续函数  $f$  使得  $\iint_D \frac{f(x, y)}{f(y, x)} dx dy$

达到最小, 并求出这个最小值.

**解** 对积分  $I = \iint_D \frac{f(x, y)}{f(y, x)} dx dy$  作变换  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$ , 由  $D$  的对称性, 知  $I = \iint_D \frac{f(y, x)}{f(x, y)} dx dy$ . 因而由均值不等式可得

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{f(x, y)}{f(y, x)} + \frac{f(y, x)}{f(x, y)} \right) dx dy \geq \iint_D 1 dx dy = \sigma(D),$$

这里  $\sigma(D)$  是  $D$  的面积.

$$I - \sigma(D) = \frac{1}{2} \iint_D \left( \sqrt{\frac{f(x, y)}{f(y, x)}} - \sqrt{\frac{f(y, x)}{f(x, y)}} \right)^2 dx dy \geq 0.$$

$I = \sigma(D)$  当且仅当  $f(x, y) = f(y, x)$ . 故所求函数为所有满足  $f(x, y) = f(y, x)$  及  $f(1, 0) = 1$  的连续正值函数.

 $D$  的边界的参数方程为

$$x = \cos^3 \varphi, \quad y = \sin^3 \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

故  $I$  的最小值为

$$\sigma(D) = \iint_D 1 dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi dr d\varphi$$

$$= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} \pi.$$

所以所求最小值是  $\frac{3}{8}\pi$ , 且当  $f(x, y) = f(y, x)$  并满足  $f(1, 0) = 1$  时, 取到该最小值.  $\square$

**例题 8.15** 求证:  $\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 t^t dt$ .

**证明** 首先化为累次积分

$$\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{t^t}{x} dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx,$$

其中  $f(x) = \int_0^x t^t dt$ . 由分部积分,

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = f(x) \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^x \ln x dx = - \int_0^1 x^x \ln x dx.$$

因为  $(x^x)' = x^x \ln x + x^x$ , 所以

$$\int_0^1 x^x \ln x dx = \int_0^1 ((x^x)' - x^x) dx = - \int_0^1 x^x dx.$$

于是

$$\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 t^t dt.$$

$\square$

**例题 8.16** 计算二重积分  $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**解** 设  $D$  在第一象限部分为  $D_1$ , 则由对称性

$$I = 4 \iint_{D_1} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$$

设  $D_2$  是  $D_1$  中使得  $x^2 - y^2 + 2 < 0$  的部分,  $D_3$  是  $D_1$  中使得  $x^2 - y^2 + 2 \geq 0$  的部分, 则  $D_1 = D_2 \cup D_3$ . 因此

$$\begin{aligned} I &= 4 \left[ \iint_{D_3} dx dy - \iint_{D_2} dx dy \right] = 4[\sigma(D_3) - \sigma(D_2)] \\ &= 4 \left[ \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - 2\sigma(D_2) \right] = 4\pi - 8\sigma(D_2), \end{aligned}$$

其中  $\sigma(D_2), \sigma(D_3)$  分别表示  $D_2$  和  $D_3$  的面积. 在极坐标  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  之下,  $D_2$  为

$$\left\{ (r, \varphi) \mid \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \sqrt{-\frac{2}{\cos 2\varphi}} \leq r \leq 2 \right\}.$$

因而

$$\begin{aligned} \sigma(D_2) &= \iint_{D_2} dx dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\sqrt{-\frac{2}{\cos 2\varphi}}}^2 r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 4 + \frac{2}{\cos 2\varphi} \right) d\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}), \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{4\pi}{3} + 4 \ln(2 + \sqrt{3}).$$

$\square$

**例题 8.17** 设  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . 求  $I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$ .

**解** 由极坐标变换  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \left| \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\sqrt{2}} - r \right| r^2 dr d\varphi \\ &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \left| \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - r \right| r^2 dr d\varphi = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} |\sin \varphi - r| r^2 dr d\varphi \\ &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} |\sin \varphi - r| r^2 dr d\varphi + \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ \pi \leq \varphi \leq 2\pi}} |\sin \varphi - r| r^2 dr d\varphi \\ &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} |\sin \varphi - r| r^2 dr d\varphi + \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} (\sin \varphi + r) r^2 dr d\varphi. \end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} (\sin \varphi - r) r^2 dr + \int_0^\pi d\varphi \int_{\sin \varphi}^1 (r - \sin \varphi) r^2 dr \\ &\quad + \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} (\sin \varphi + r) r^2 dr + \int_0^\pi d\varphi \int_{\sin \varphi}^1 (\sin \varphi + r) r^2 dr \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} 2 \sin \varphi \cdot r^2 dr + \int_0^\pi d\varphi \int_{\sin \varphi}^1 2r \cdot r^2 dr \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{3} \sin^4 \varphi d\varphi + \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \sin^4 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{16} \pi. \end{aligned}$$

□

**例题 8.18** 设  $f$  是定义在正方形  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  上的四阶连续可微函数, 在  $S$  的边界上为零, 并且

$$\left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \leq M.$$

求证:

$$\left| \iint_S f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{144} M.$$

**证明** 考虑函数  $g(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ . 易知

$$\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} = 4, \quad \iint_S g(x, y) dx dy = \frac{1}{36}.$$

因为  $f$  在  $S$  的边界上为零, 所以  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  在  $x=0$  和  $x=1$  时为零. 于是

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot g dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot g dx \\ &= \int_0^1 dy \left( \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot g \right|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} dx \\ &= - \int_0^1 dy \left( \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx \right) \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \iint_S \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx dy.$$

同理, 由于  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  在  $y=0$  和  $y=1$  时为零, 作与上面类似的推导, 可得

$$\iint_S \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot f dx dy = \iint_S \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx dy.$$

因此

$$\iint_S \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot g dx dy = \iint_S \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot f dx dy.$$

从而

$$\begin{aligned} \left| \iint_S f dx dy \right| &= \frac{1}{4} \left| \iint_S 4f dx dy \right| = \frac{1}{4} \left| \iint_S \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} f dx dy \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \iint_S \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot g dx dy \right| \leq \frac{M}{4} \iint_S g dx dy = \frac{M}{144}. \end{aligned}$$

□

#### 定理 8.4 (Poincaré(庞加莱) 不等式)

设  $\varphi, \psi$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $f$  在区域  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  上连续可微, 且有  $f(x, \varphi(x)) = 0$  ( $x \in [a, b]$ ). 则存在  $M > 0$ , 使得

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq M \iint_D (f'_y(x, y))^2 dx dy.$$

♡

**证明** 由 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} f^2(x, y) &= [f(x, y) - f(x, \varphi(x))]^2 = \left( \int_{\varphi(x)}^y \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt \right)^2 \\ &\leq (y - \varphi(x)) \int_{\varphi(x)}^y \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D f^2(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x, y) dy \\ &\leq \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (y - \varphi(x)) dy \int_{\varphi(x)}^y \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt \int_t^{\psi(x)} (y - \varphi(x)) dy \\ &\leq \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (y - \varphi(x)) dy \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{1}{2} (\psi(x) - \varphi(x))^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt \\ &\leq M \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 dt \right) dx \\ &= M \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 dx dy, \end{aligned}$$

这里  $M$  是满足  $M > \max_{a \leq x \leq b} \frac{1}{2} (\psi(x) - \varphi(x))^2$  的常数.

□

**例题 8.19** 设  $a > 0$ ,  $\Omega_n(a) : x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a, x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 求积分

$$I_n(a) = \int \cdots \int_{\Omega_n(a)} x_1 x_2 \cdots x_n dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$



**解** 作变换  $x_i = at_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$I_n(a) = a^{2n} \int \cdots \int_{\Omega_n(1)} t_1 t_2 \cdots t_n dt_1 dt_2 \cdots dt_n = a^{2n} I_n(1).$$

再用累次积分, 可得

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \int \cdots \int_{\Omega_n(1)} t_1 t_2 \cdots t_n dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ &= \int_0^1 t_n dt_n \int \cdots \int_{t_1+t_2+\cdots+t_{n-1} \leq 1-t_n} t_1 \cdots t_{n-1} dt_1 \cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^1 t_n I_{n-1}(1-t_n) dt_n = \int_0^1 t_n (1-t_n)^{2(n-1)} I_{n-1}(1) dt_n. \end{aligned}$$

因此,

$$I_n(1) = \frac{1}{2n(2n-1)} I_{n-1}(1).$$

注意到  $I_1(1) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ . 由上面的递推公式, 可得  $I_n(1) = \frac{1}{(2n)!}$ . 故  $I_n(a) = \frac{a^{2n}}{(2n)!}$ . □

### 8.2.8 其他

**例题 8.20** 证明积分  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, a, b > 0$ .

**证明** 当  $a = 1$  时, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{b}{x^2}} dx &= e^{-2\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx \stackrel{y=\frac{\sqrt{b}}{x}}{=} e^{-2\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{b}}{y^2} e^{-\left(\frac{\sqrt{b}}{y} - y\right)^2} dy \\ &= \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{y^2}\right) e^{-\left(y - \frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2} dy = \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2} d\left(y - \frac{\sqrt{b}}{y}\right) \\ &= \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

于是对  $\forall a > 0$ , 就有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{ab}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

□

**例题 8.21** 计算  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx, a \in \mathbb{R}$ .

**注** 本题可以用复变函数的方法 (留数定理) 来计算. 但是我们这里用基本的高等数学的方法来计算.

$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{1+x^2} dx$  这个积分没办法算出具体的初等数值.

**证明**

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax) \left( \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)y} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)y} \cos(ax) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)y} \cos(ax) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+x^2)y} \cos(ax) dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 y} \cos(ax) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 y + iax} dx \right) dy \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y \left( x^2 - \frac{aix}{y} + \left( \frac{ai}{2y} \right)^2 \right) - \frac{a^2}{4y}} dx \right) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y \left( x - \frac{ai}{2y} \right)^2 - \frac{a^2}{4y}} dx \right) dy \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y \left( x + \frac{a}{2iy} \right)^2 - \frac{a^2}{4y}} dx \right) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y \left( x + \frac{a}{2iy} \right)^2 - \frac{a^2}{4y}} d \left( x + \frac{a}{2iy} \right) \right) dy \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2 - \frac{a^2}{4y}} dx \right) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y - \frac{a^2}{4y}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2} dx \right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y - \frac{a^2}{4y}} dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{y=t^2}{=} \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{a^2}{4t^2}} dt \stackrel{\text{例题 8.20}}{=} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|a|} = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

□

**例题 8.22** 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^8)^2} dx$ .

**注** 由命题 8.7 可知对  $\forall s > 0$ , 都有

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy, \forall t \in \mathbb{R}.$$

本题的核心想法就是利用上式将  $\frac{z}{1+x^8}$  转化成积分形式.

**证明** 注意到

$$\int_0^{+\infty} y e^{-(1+x^8)y} dy \stackrel{y=\frac{z}{1+x^8}}{=} \frac{1}{(1+x^8)^2} \int_0^{+\infty} z e^{-z} dz = \frac{1}{(1+x^8)^2},$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^8)^2} dx &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} y e^{-(1+x^8)y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} y e^{-(1+x^8)y} dx \right) dy \\ &= \int_0^{+\infty} y e^{-y} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^8 y} dx \right) dy \stackrel{x=y^{-\frac{1}{8}} z^{\frac{1}{8}}}{=} \int_0^{+\infty} y e^{-y} \left( \int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{8}} e^{-z} dz^{\frac{1}{8}} \right) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} y^{\frac{7}{8}} e^{-y} \left( \int_0^{+\infty} z^{-\frac{7}{8}} e^{-z} dz \right) dy = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} y^{\frac{7}{8}} e^{-y} \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) dy \\ &= \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{15}{8}\right) \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) \\ &\stackrel{8.11}{=} \frac{7\pi}{64 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{7\pi}{32\sqrt{2-\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

□

**例题 8.23** 计算积分  $I = \int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ .

**注** 在此例中  $I \neq F(2) - F(-1)$ . 这是因为  $F$  并不是  $f$  在区间  $[-1, 2]$  上的原函数.

**解** 在不包含 0 的区间上作变换  $t = x - \frac{1}{x}$  得

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \int \frac{x - \frac{1}{x}}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int \frac{dt}{2+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C. \end{aligned}$$

这说明在区间  $[-1, 0)$  和  $(0, 2]$  上, 函数  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  的一个原函数是

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= F(0^-) - F(-1) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\ \int_0^2 f(x) dx &= F(2) - F(0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

故

$$I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

□

## 8.3 含参量积分

### 定义 8.2 (含参量积分)

设  $f(x, y)$  是定义在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上的二元函数. 当  $x$  取  $[a, b]$  上某定值时, 函数  $f(x, y)$  则是定义在  $[c, d]$  上以  $y$  为自变量的一元函数. 倘若这时  $f(x, y)$  在  $[c, d]$  上可积, 则其积分值是  $x$  在  $[a, b]$  上取值的函数, 记它为  $\varphi(x)$ , 就有

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]. \quad (8.10)$$

一般地, 设  $f(x, y)$  为定义在区域  $G = \{(x, y) \mid c(x) \leq y \leq d(x), a \leq x \leq b\}$  上的二元函数, 其中  $c(x), d(x)$  为定义在  $[a, b]$  上的连续函数, 若对于  $[a, b]$  上每一固定的  $x$  值,  $f(x, y)$  作为  $y$  的函数在闭区间  $[c(x), d(x)]$  上可积, 则其积分值是  $x$  在  $[a, b]$  上取值的函数, 记作  $F(x)$  时, 就有

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]. \quad (8.11)$$

用积分形式所定义的这两个函数 (8.10) 与 (8.11), 通称为定义在  $[a, b]$  上含参量  $x$  的 (正常) 积分, 或简称含参量积分.

### 定理 8.5 (连续性)

若二元函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则函数

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad \psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

都在  $[a, b]$  上连续.

**注** 对于这个定理的结论也可以写成如下的形式: 若  $f(x, y)$  在矩形区域  $R$  上连续, 则对任何  $x_0 \in [a, b]$ , 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy.$$

这个结论表明, 定义在矩形区域上的连续函数, 其极限运算与积分运算的顺序是可以交换的.

**证明** 设  $x \in [a, b]$ , 对充分小的  $\Delta x$ , 有  $x + \Delta x \in [a, b]$  (若  $x$  为区间的端点, 则仅考虑  $\Delta x > 0$  或  $\Delta x < 0$ ), 于是

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_c^d [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy. \quad (8.12)$$

由于  $f(x, y)$  在有界闭域  $R$  上连续, 从而一致连续, 即对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在某个正数  $\delta$ , 对  $R$  内任意两点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$ , 只要

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad |y_1 - y_2| < \delta,$$

就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \quad (8.13)$$

所以由 (8.12), (8.13) 可推得: 当  $|\Delta x| < \delta$  时,

$$|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| \leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \int_c^d \varepsilon dx = \varepsilon(d - c).$$

这就证明了  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

同理可证: 若  $f(x, y)$  在矩形区域  $R$  上连续, 则含参量  $y$  的积分

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

在  $[c, d]$  上连续. □

**定理 8.6 (连续性)**

设二元函数  $f(x, y)$  在区域

$$G = \{(x, y) \mid c(x) \leq y \leq d(x), a \leq x \leq b\}$$

上连续, 其中  $c(x), d(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy. \quad (8.14)$$

在  $[a, b]$  上连续.



**证明** 对积分 (8.14) 用换元积分法, 令

$$y = c(x) + t(d(x) - c(x)).$$

当  $y$  在  $c(x)$  与  $d(x)$  之间取值时,  $t$  在  $[0, 1]$  上取值, 且

$$dy = (d(x) - c(x)) dt.$$

所以从 (8.14) 式可得

$$F(x) \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \int_0^1 f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x)) dt.$$

由于被积函数

$$f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x))$$

在矩形区域  $[a, b] \times [0, 1]$  上连续, 由定理 8.5 得积分 (8.14) 所确定的函数  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续. □

**定理 8.7 (可微性)**

若函数  $f(x, y)$  与其偏导数  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  都在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$



**证明** 对于  $[a, b]$  内任一点  $x$ , 设  $x + \Delta x \in [a, b]$  (若  $x$  为区间端点, 则讨论单侧导数), 则

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy.$$

由微分学的拉格朗日中值定理及  $f_x(x, y)$  在有界闭域  $R$  上连续 (从而一致连续), 对任给正数  $\varepsilon$ , 存在正数  $\delta$ , 只要当  $|\Delta x| < \delta$  时, 就有

$$\left| \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} - f_x(x, y) \right| = |f_x(x + \theta \Delta x, y) - f_x(x, y)| < \varepsilon,$$

其中  $\theta \in (0, 1)$ . 因此

$$\left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x, y) dy \right| \leq \int_c^d \left| \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} - f_x(x, y) \right| dy < \varepsilon(d - c).$$

这就证得对一切  $x \in [a, b]$ , 有

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$



**定理 8.8 (可微性)**

设  $f(x, y), f_x(x, y)$  在  $R = [a, b] \times [p, q]$  上连续,  $c(x), d(x)$  为定义在  $[a, b]$  上其值含于  $[p, q]$  内的可微函数, 则函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

在  $[a, b]$  上可微, 且

$$F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y) dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x). \quad (8.15)$$

**证明** 把  $F(x)$  看作复合函数

$$F(x) = H(x, c, d) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad c = c(x), \quad d = d(x).$$

由复合函数求导法则及变限积分的求导法则, 有

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial c} \frac{dc}{dx} + \frac{\partial H}{\partial d} \frac{dd}{dx} = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y) dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x).$$

□

**定理 8.9 (可积性)**

若  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则  $\varphi(x)$  和  $\psi(y)$  分别在  $[a, b]$  和  $[c, d]$  上可积. 这就是说: 在  $f(x, y)$  连续性假设下, 同时存在两个求积顺序不同的积分:

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad \text{与} \quad \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

为书写简便起见, 今后将上述两个积分写作

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{与} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

前者表示  $f(x, y)$  先对  $y$  求积然后对  $x$  求积, 后者则求积顺序相反. 它们统称为**累次积分**, 或更确切地称为**二次积分**.

♡

**证明**

□

**定理 8.10**

若  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (8.16)$$

♡



**笔记** 这个定理指出, 在  $f(x, y)$  连续性假设下, 累次积分与求积顺序无关.

**证明** 记

$$\varphi_1(u) = \int_a^u dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \varphi_2(u) = \int_c^d dy \int_a^u f(x, y) dx,$$

其中  $u \in [a, b]$ , 现在分别求  $\varphi_1(u)$  与  $\varphi_2(u)$  的导数.

$$\varphi_1'(u) = \frac{d}{du} \int_a^u \varphi(x) dx = \varphi(u).$$

对于  $\varphi_2(u)$ , 令  $H(u, y) = \int_a^u f(x, y) dx$ , 则有

$$\varphi_2(u) = \int_c^d H(u, y) dy.$$

因为  $H(u, y)$  与  $H_u(u, y) = f(u, y)$  都在  $R$  上连续, 由定理 8.7,

$$\varphi_2'(u) = \frac{d}{du} \int_c^d H(u, y) dy = \int_c^d H_u(u, y) dy = \int_c^d f(u, y) dy = \varphi(u).$$

故得  $\varphi_1'(u) = \varphi_2'(u)$ , 因此对一切  $u \in [a, b]$ , 有

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) + k \quad (k \text{ 为常数}).$$

当  $u = a$  时,  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = 0$ , 于是  $k = 0$ , 即得

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u), \quad u \in [a, b].$$

取  $u = b$ , 就得到所要证明的 (8.16) 式. □

## 8.4 Euler 积分

### 定理 8.11 (余元公式)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1.$$

证明 □

### 命题 8.7

对  $\forall s > 0$ , 都有

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.17)$$

证明 已知  $\Gamma$  函数:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

令  $x = ty$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ , 得

$$\Gamma(s) = t^s \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy.$$

故

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy.$$

□

## 第九章 级数


### 9.1 级数基本结论

#### 9.1.1 级数的敛散性

##### 定理 9.1 (交错级数不等式)

设  $\{a_n\}$  递减非负数列, 则对  $m, p \in \mathbb{N}_0$ , 必有

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} (-1)^n a_n \right| \leq a_m. \quad (9.1)$$

 **笔记** 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

**证明** 不妨设  $m = 0$ , 则

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为偶数} \\ a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-2} - a_{p-1}) - a_p & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \leq a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-2} - a_{p-1}) + a_p & , p \text{ 为偶数} \\ (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \geq 0,$$

这就证明了不等式(9.1). □

##### 定理 9.2 (Leibniz(莱布尼兹) 判别法)

设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  为交错级数, 若满足:

(1) 数列  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递减;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛, 且其和不超过  $u_1$ .

**证明** □

##### 定理 9.3 (A-D 判别法)

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  满足下列条件之一时收敛.

1.  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$  有界,  $b_n$  递减到 0;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $b_n$  单调有界.

**证明** 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \sum_{j=n}^k a_j + b_m \sum_{k=n}^m a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M = 2 \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|,$$

我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M|b_m| = Mb_n \rightarrow 0, \text{ 当 } n, m \rightarrow \infty.$$

对于第二种情况, 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故对任何  $\varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大, 对任何  $p \in \mathbb{N}_0$ , 必有

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$


于是当  $n, m$  充分大, 我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + \varepsilon |b_m| = \varepsilon |b_m - b_n| + \varepsilon |b_m| \leq 3\varepsilon \sup_{n \geq 1} |b_n|.$$

因此无论如何都有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛. □

#### 定理 9.4 (积分判别法)

若  $f$  是  $[1, +\infty)$  的单调不变号函数, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  和  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  同敛散.

 **笔记** 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

**证明** 不妨设  $f$  非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x) dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

由夹逼准则即证. □

#### 定理 9.5 (比值判别法)

对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0, 1)$  使得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**注** 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.



**定理 9.6 (Cauchy 链)**

设正值递增函数  $F \in C^1[a, +\infty)$ ,  $\frac{F'}{F}$  在  $[a, +\infty)$  递减. 若满足  $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$  发散, 则对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  有如下判别法:

极限版:

1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \quad (9.2)$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \quad (9.3)$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, \forall n \geq N,$$


则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (9.3) 为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq 1$ , 则  $\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$  仍然可能在  $n$  充分大时严格超过 1.

**注** 取  $F(x) = e^x$ , 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{n - \ln a_n}{n} = 1 - \ln \sqrt[n]{a_n},$$

这恰好是**根值判别法**.

取  $F(x) = x$ , 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{-\ln a_n}{\ln n},$$

这恰好是**对数判别法**.

**证明 Step 1** 先证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty. \quad (9.4)$$

设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$ , 则**积分判别法**表明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_a^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln F(x) \Big|_a^{\infty},$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)}$  收敛. 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{A}$ , 这就和  $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$  发散矛盾! 故我们证明了 (9.4).

**Step 2** 当 (9.2) 成立, 再利用 (9.4) 式, 存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, F(n) > 1, \forall n \geq N.$$

因此

$$\frac{F'(n)}{a_n} \geq e^{c \ln F(n)} \Rightarrow \frac{F'(n)}{F^c(n)} \geq a_n, \forall n \geq N.$$

结合  $\frac{F'(n)}{F^c(n)} = \frac{F'(n)}{F(n)} \cdot \frac{1}{F^{c-1}(n)}$  递减, 由 **积分判别法**, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F^c(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F^c(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y^c} dy < \infty,$$

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**Step 3** 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, F(n) \geq 1, \forall n \geq N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有  $\frac{F'(n)}{F(n)} \leq \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leq a_n, \forall n \geq N$  以及由 **积分判别法** 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty,$$

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. □

### 定理 9.7 (对数判别法)

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 则有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 9.8 (根值判别法)**

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 则有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c < 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \geq 1$  和无穷多个  $n$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



**注** 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 **Cauchy 链** 的叙述, 不应该是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , 而应该是  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ . 也不应是无穷多个  $n$ , 而是任何  $n \geq N$ . 所以我们需要一些加强的证明.

**证明** 若存在  $c \geq 1$  和无穷多个  $n$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则存在  $n_k \rightarrow \infty$ , 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq c \geq 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. □

**定理 9.9 (Kummer 链)**

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \dots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:

极限版:


1. 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n < 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$  使得  $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $K_n \leq 0, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$ .

**注** 当  $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$ . 我们有  $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ , 这恰好就是**比值判别法**.

当  $d_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , 我们有  $K_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$ , 这恰好是**拉比判别法**.

当  $d_n = \frac{1}{n \ln n}, n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) \\ &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln n - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

即得一个**较为广泛的判别法**. 要注意我们在阶的层面对  $K_n$  做了变形, 因此不再给出不等式版本的**较为广泛的判别法**.

**证明** 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$  使得  $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则

$$\frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \right) \geq a_{n+1}, \forall n \geq N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^m a_{k+1} \leq \sum_{k=N}^m \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_k}{d_k} - \frac{a_{k+1}}{d_{k+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{d_N} - \frac{a_{m+1}}{d_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a_N}{d_N},$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $K_n \leq 0, \forall n \geq N$ . 则  $\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \geq \frac{a_n}{d_n}, \forall n \geq N$ . 现在

$$a_{n+1} \geq \frac{a_n}{d_n} d_{n+1}, \forall n \geq N, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

这就完成了证明. □

#### 定理 9.10 (拉比判别法)

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 1$  使得  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**证明** □

**定理 9.11 (较为广泛的判别法)**

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:


极限版 1:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

极限版 2:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



 **笔记** 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是 **Kummer** 链的  $d_n = \frac{1}{n \ln n}$  的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

**证明**

1. 设  $t > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > t, \forall n \geq N.$$

然后

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{n} + \frac{t}{n \ln n}, \forall n \geq N.$$

现在求和得

$$\ln \frac{a_N}{a_{n+1}} > \sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right), \forall n \geq N.$$

于是

$$a_{n+1} < a_N e^{-\sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)}, \forall n \geq N.$$

现在由 **例题 2.52(2)** 和 **例题 2.47**, 我们有

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1), \sum_{k=N}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

于是

$$e^{-\sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)} = e^{-\ln n - \ln \ln n + O(1)} = \frac{e^{O(1)}}{n \ln^t n}.$$

结合 **积分判别法**有

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy < \infty,$$

我们知道  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

2. 设  $0 < t < 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < t, \forall n \geq N.$$

然后相似第 1 问的证明和

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy = +\infty,$$

我们有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

□

### 定理 9.12 (Herschfeld 判别法)

设  $p > 1$  且  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$ . 定义

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}}, n \in \mathbb{N},$$

然后  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛的充要条件是  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界. 显然  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递增.

♡

**证明** 必要性: 若  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛, 则由

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \geq \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{p^n}}$$

和  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  有界知  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界.

充分性: 若  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界, 则设  $a_n^{\frac{1}{p^n}} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ , 于是我们有  $a_n \leq M^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . 因此

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \leq \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}} \\ &= M \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}}_{n \text{ 个根号}}, \end{aligned}$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1 = \sqrt[p]{1}, x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

注意到  $x_2 = \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1}} > 1 = x_1$ , 不动点  $x_0 > 1$  满足  $x_0^p - x_0 - 1 = 0$ . 因此由命题 2.16 知  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  递增有上界, 从而极限存在.

□

### 命题 9.1

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = 0$ .

♠

**笔记** 这个命题是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人卡住.

这个命题是命题 6.6 的离散版本.

**注** 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理就可以的. 笔记如果我们直接使用 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在, 而 Stolz 定理不可以逆用.

**证明** 记  $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , 则由 Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} [k - (k+1)] s_k + n s_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s_n - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} s_k}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

□

**命题 9.2**

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则

1. 若  $a_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .
2. 若  $na_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$ .
3. 若  $n \ln n \cdot a_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$ .

▲

**证明**

1. 不妨设  $a_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道  $a_n$  递减到 0. 注意到由  $a_n$  递减知

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \quad 0 \leq (2n-1)a_{2n-1} \leq 2na_{2n-1} \leq 2 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0.$$

由命题 1.1 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

2. 不妨设  $na_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = c \neq 0$  会导致  $a_n \sim \frac{c}{n}$ , 进而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 所以我们知道  $na_n$  递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{ka_k}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \\ &= na_n \int_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}^n \frac{1}{x} dx = na_n \ln \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \geq na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} na_n \ln n \geq 0, \end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$ .

3. 不妨设  $n \ln n \cdot a_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = c \neq 0$ . 注意到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散,  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = 0$ , 从而  $a_n \geq 0$ . 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} a_k &= \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{k \ln k \cdot a_k}{k \ln k} \geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{1}{k \ln k} \\ &\geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = n \ln n \cdot a_n \int_{[\ln n]}^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]} \geq n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln n}{\ln \ln n} \sim n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n, \end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$ .

□

**定理 9.13 (级数的控制收敛定理)**

设  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$  满足

$$|a_n(s)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及  $\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$ .

则

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里  $\lim_s$  表示  $s$  趋于某个  $s_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .



**证明** 事实上由极限保号性, 我们知道  $|b_n| \leq c_n, n = 1, 2, \dots$ , 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n(s) - b_n| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n. \end{aligned}$$

对  $s$  取极限得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

由  $m$  任意性及  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| = 0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

**例题 9.1** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ .

**解** 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left| \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) \right| \leq e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq e^{n \cdot (-\frac{k}{n})} = e^{-k}.$$

又  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} < \infty$ , 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \\ &= \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}. \end{aligned}$$



#### 定理 9.14 (级数的 Levi 定理)


若非负  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$  满足  $a_n(s)$  是  $s$  的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是  $s \rightarrow s_0^+$ , 那么应该是关于  $s$  的递减函数) 且

$$\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$



证明

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

**证明** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 那么由于  $0 \leq a_n(s) \leq b_n$ , 取控制级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$  也单调递增, 故  $\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$  广义存在. 假设

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

此时对任何  $N \in \mathbb{N}$ , 都有


$$\sum_{n=1}^N b_n = \lim_s \sum_{n=1}^N a_n(s) \leq \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

#### 引理 9.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_s a_n(s) \leq \liminf_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s).$$

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

**证明** 不妨设  $s \rightarrow +\infty$ , 考虑  $g_n(s) \triangleq \inf_{t \geq s} a_n(t)$ , 则  $g_n$  关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_s a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_s g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geq s} a_n(t) \leq \liminf_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s),$$

这就完成了证明. □


#### 定理 9.15 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \quad (9.5)$$

1.  $a_{m,n} \geq 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ ;
- 2.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

 **笔记** 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

**证明**

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到  $\{\sum_{n=1}^N a_{m,n}\}$  关于  $N$  非负递增, 于是有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad (9.6)$$

这就是 (9.5).

2. 注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^N a_{m,n} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

于是由级数的控制收敛定理知 (9.6) 仍然成立, 这就是 (9.5).

□

### 定理 9.16 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致.

♥

证明

1. 设加括号后新的级数是  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$ , 其中  $n_k$  递增趋于  $+\infty$ . 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$

这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, n_1 = 0$ , 如果  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$  收敛且对任何  $k \in \mathbb{N}$  都有  $a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots, a_{n_{k+1}}$

将符号相同, 则  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (9.7)$$

事实上, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在唯一的  $m \in \mathbb{N}$ , 使得  $n_m < n \leq n_{m+1}$ , 此时

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j + \sum_{j=n_m+1}^n a_j.$$

则当  $a_j \geq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$ , 我们有

$$\sum_{j=1}^n a_j \geq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j, \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j - \sum_{j=n_m+1}^{n_{m+1}} a_j \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (9.8)$$

若  $a_j \leq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$ , 可得 (9.8) 的类似式

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \leq \sum_{j=1}^n a_j \leq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (9.9)$$

让  $n \rightarrow +\infty$ , 我们由 (9.8), (9.9) 和夹逼准则得 (9.7). 这就完成了证明.


□

### 命题 9.3

设  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty), S_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$ . 若  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  不恒为 0, 不妨设  $a_1 \neq 0$ , 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} \begin{cases} \text{收敛,} & p > 1 \\ \text{和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 同敛散,} & 0 < p \leq 1 \end{cases}.$$

♣

 **笔记** 本结果虽然不能直接使用,但连同证明方法却要记住!并且要学会联想和转化到本题的样子,例如

$$\sum \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right), \sum \left(\frac{\ln \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

**证明** 当  $p > 1$ , 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^p} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} dx = \int_{S_1}^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \frac{1}{x^p} dx,$$

可以看到无论  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛性如何都有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  收敛.

当  $0 < p \leq 1$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则有  $\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{a_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p} = ca_n, n \rightarrow \infty$ , 其中  $c$  是某个常数, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  收敛. 当

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 我们对任何充分大的  $m, k \in \mathbb{N}$  都有

$$1 - \frac{S_k}{S_{k+m}} = \frac{S_{k+m} - S_k}{S_{k+m}} = \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_{k+m}} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n^p}.$$

让  $m \rightarrow +\infty$ , 利用  $S_{k+m} \rightarrow +\infty$ , 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  发散. 这就完成了证明.  $\square$

### 9.1.2 幂级数阶与系数阶的关系

**定理 9.17 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)**

(1) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1) \quad (9.10)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (9.11)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (9.12)$$

(2) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (9.13)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (9.14)$$

(3) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (9.15)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \quad (9.16)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (9.17)$$

(4) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (9.18)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \quad (9.19)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (9.20)$$



**注** 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

**证明**

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{g(x)} = 0.$$

由 **Toeplitz 定理 (b)** 以及 (9.11) 即得 (9.12).

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$  和 (1) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (9.14).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \leq \frac{b_n x^n}{b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + b_{n+1} x},$$

即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = 0$ . 由 **Toeplitz 定理 (b)** 以及 (9.16) 我们就得到 (9.17).

(4) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$  和 (3) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (9.20).

□

**例题 9.2** 设  $p$  是  $\mathbb{R}$  上实解析函数且  $0 < \prod_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(0) < \infty$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)}$ .

**证明** 注意到

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\prod_{n=0}^{m+1} p^{(n)}(0)}{\prod_{n=0}^m p^{(n)}(0)} = \lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)}(0),$$

所以  $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$  是有界数列, 故

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

在  $\mathbb{R}$  上有定义且收敛. 于是

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n+1)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

由定理 9.17(3), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 1.$$

□

**例题 9.3** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

**解** 注意到

$$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty.$$

由定理 9.17 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \stackrel{\text{例题 9.27}}{=} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

□

**例题 9.4** 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(1-y)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}} = -\frac{1}{2}.$$

**证明** 注意到

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &= \int_0^1 \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} y^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] y^{2k} \\ &\stackrel{x=\cos \theta}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta d\theta \right] y^{2k} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 y^{2k}. \end{aligned}$$

又由 Wallis 公式知

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \sqrt{\pi k}, k \rightarrow \infty.$$

故由定理 9.17 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &\sim \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{\pi k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y^2)^k}{k} = -\frac{1}{2} \ln(1-y^2) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-y) - \frac{1}{2} \ln(1+y) \sim -\frac{1}{2} \ln(1-y), y \rightarrow 1^-.\end{aligned}$$

□

例题 9.5 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

证明 注意到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$  在  $(-1, 1)$  上绝对收敛, 由 Cauchy 积收敛定理及推论 9.1 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \stackrel{\text{推论 9.1}}{=} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n.$$

下证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$ . 一方面, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln(n-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}}{\ln(n-1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

另一方面, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} &\leq \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{(n-k) \ln k} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \\ &\leq \frac{1}{n(1-\varepsilon)} \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{\ln 2} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln \varepsilon n} \\ &\leq \frac{\varepsilon n}{n(1-\varepsilon) \ln 2} + \frac{\sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{k}}{\ln \varepsilon + \ln n}.\end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \ln 2} + 1.$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq 1.$$

故由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$ . 于是由定理 9.17 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n \sim \sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$


即  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$

□

例题 9.6 设

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{5}{4}, a_n = \frac{(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}}{4n}, n = 2, 3, \dots$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

 笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的  $f$  的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出

一个具体的  $f$ , 对这个  $f$  来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了  $a_n$  的通项. 此外考虑  $\frac{1}{1-x}f(x)$  的幂级数并用 Cauchy 积可以导出  $\sum_{k=0}^n a_k$  的信息.

如果要严谨地证明, 就是用数学归纳法证明下述求出来的  $a_n$  通项表达式 (其实就是下面解出来的  $f$  的 Taylor 展开式中的通项) 就是满足题目条件的  $a_n$ , 再直接计算其极限即可.

**证明** 记  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ . 由条件可得

$$\begin{aligned} 4n a_n &= (2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}, \quad n=2, 3, \dots \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} [(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}] x^n. \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4a_1 x &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n x^{n+2} \\ \Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5x &= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5x &= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 5x \\ \Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} &+ (x^2 + 5x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ \Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x)f'(x) &+ (x^2 + 5x)f(x) = 0. \end{aligned}$$

又注意到  $f(0) = a_0 = 1, f'(0) = a_1 = \frac{5}{4}$ , 故分离变量解上述微分方程得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x+2}}{1-x}.$$

因为  $\sqrt{x+2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 所以可记  $\sqrt{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , 则  $\sqrt{3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . 由 Cauchy 积收敛定理及推论 9.1 知

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n b_k \right) x^n.$$

因此  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n b_k$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . □

### 9.1.3 Cauchy 积

#### 定义 9.1 (Cauchy 积)

设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  的 **Cauchy(乘) 积**. 我们记

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, B_n = \sum_{k=0}^n b_k, S_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$



**注** 我们暂时并不清楚  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

**结论** 延续定义 9.1, 我们有

$$\begin{cases} a_0 b_0 = c_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2 \\ \vdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = c_n \end{cases}$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则当  $a_0 \neq 0$ , 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

**例题 9.7** 设  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n = 0, 1, \dots$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

**注** 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

**证明** 事实上, 我们有

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+1)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \rightarrow 2,$$

上式的放缩实际上利用了二次函数  $(n-k+1)(k+1) = -k^2 + nk + n + 1$  的最值大值点  $k = \frac{n}{2}$ . 这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$



发散.

□

### 命题 9.4

延续定义 9.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (9.21)$$

◆

**证明** 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^n S_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n A_{n-i} B_i$$

由命题 2.7 可得(9.21).

□

### 推论 9.1

设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都收敛, 则它们的 Cauchy 积  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

♥

**证明** 延续定义 9.1, 充分性显然成立, 下证必要性. 由命题 9.4 及 Stolz 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

□

### 定理 9.18 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义 9.1, 我们有

1. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  有一个绝对收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛.
2. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都绝对收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  绝对收敛.

♥

**证明** 1. 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

因此我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设 (否则, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ , 则用  $B_n - B$  代替  $B_n$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

于是运用命题 2.6 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot |B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot 0 = 0$$

这就证明了  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛.

2. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \left( |a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right)$$

于是由命题 2.6 就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left( |a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

这就证明了  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  绝对收敛. □

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

#### 命题 9.5

延续定义 9.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛}. \quad (9.22)$$

**证明** 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

即  $\sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n c_k$ . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} &= \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{j=0}^n b_{n-j} - \sum_{j=k}^n b_{n-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \left( \sum_{k=0}^n a_k - a_0 \right) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n c_k \end{aligned}$$

由于 Cauchy 积收敛, 则由推论 9.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛}$$

□

**例题 9.8** 设递减数列  $a_n, b_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ , 且  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$  收敛, 记  $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ , 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ 收敛} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (9.23)$$

**证明** 左推右显然, 现在假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 由 **命题 9.5**, 我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} = 0$$

现在

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| &\leq \sum_{k=1}^n a_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} = c_{n+1} \end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于 **交错级数不等式**. 于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| = 0$$

我们证明了 (9.23). □

#### 命题 9.6

设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1, 1).$$

记  $S_n \triangleq \sum_{k=0}^n a_k$ , 则

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, x \in (-1, 1).$$

**证明** 由 Taylor 级数可知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1).$$

显然  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $(-1, 1)$  上绝对收敛, 故由 **Cauchy 积收敛定理** 可知  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的 Cauchy 积也收敛, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_k x^k) x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n < +\infty.$$

故由 **推论 9.1** 可知

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

□

## 9.2 具体级数敛散性判断

### 9.2.1 估阶法

**例题 9.9** 判断下述级数收敛性.

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(e^n + n^2)}{\sqrt[n]{n^8 + n^2 + 1} \cdot \ln^2(n+1)};$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^p};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}.$$

证明

1. 注意到

$$\frac{\ln(e^n + n^2)}{\sqrt[4]{n^8 + n^2 + 1} \cdot \ln^2(n+1)} = \frac{\ln(e^n) + \ln\left(1 + \frac{n^2}{e^n}\right)}{\sqrt[4]{n^8 + n^2 + 1} \cdot \ln^2(n+1)} \sim \frac{n}{n^2 \cdot \ln^2 n} = \frac{1}{n \ln^2 n}, n \rightarrow \infty.$$

由积分判别法, 我们有

$$\sum \frac{1}{n \ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy < \infty,$$

故原级数收敛.

2. 注意到运用 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \sum_{k=1}^n \ln^2 k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln^2 n - (n-1) \ln^2(n-1)} \xrightarrow{\text{拉中保持阶不变}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln^2 n + 2 \ln n} = 1.$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^p} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln^2 n}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}.$$

当  $p > 2$  时, 取  $\delta > 0$ , 使得  $p-1-\delta > 1$ . 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^\delta} = 0$ , 故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{p-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1-\delta}} \cdot \frac{\ln^2 n}{n^\delta} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{p-1-\delta}} < +\infty.$$

当  $p \leq 2$  时, 有

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{p-1}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n^{p-1}} = +\infty.$$

因此原级数收敛等价于  $p > 2$ .

3. 由 Laplace 方法, 我们有


$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} = \int_0^1 e^{-n \ln(1+t^4)} dt \sim \int_0^{\infty} e^{-nt^4} dt = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \int_0^{\infty} e^{-x^4} dx, n \rightarrow \infty.$$

现在

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n} \sim \frac{C}{n^{\frac{5}{4}}}, n \rightarrow \infty,$$

故原级数收敛. □

**例题 9.10** 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt, n \in \mathbb{N}$ , 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛性.

 **笔记** 如果需要  $a_n$  的一个精确的上界, 那么 (就是证法一) 我们可以先待定分段点  $\theta$ , 利用不等式 (这个不等式可用数学归纳法证明)

$$|\sin(nt)| \leq n |\sin t|, \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

再结合 Jordan 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt = \int_0^{\theta} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\theta \frac{tn^3 \sin^3 t}{\sin^3 t} dt + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3} dt \\ &= \frac{\theta^2 n^3}{2} + \frac{\pi^3}{8\theta} - \frac{\pi^2}{4} = g(\theta), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

此时再求出  $g(\theta)$  的最小值点, 就能确定  $\theta$  的取值, 进而得到一个较为精确的上界. 求导易知  $g(\theta) \geq g\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{3\pi^2}{8}n$ , 即

$$\theta = \frac{\pi}{2n}, a_n \leq \frac{3\pi^2}{8}n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**证明 证法一:** 利用不等式

$$|\sin(nt)| \leq n|\sin t|, \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{tn^3 \sin^3 t}{\sin^3 t} dt = \frac{n^3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8}n.$$

利用不等式  $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 我们有

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt \leq \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3} dt \leq \frac{\pi^3}{8} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2} dt = \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{2n}{\pi} = \frac{\pi^2}{4}n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

现在

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t} \right| dt \leq \frac{\pi^2}{8}n + \frac{\pi^2}{4}n = \frac{3\pi^2}{8}n, \forall n \in \mathbb{N},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geq \frac{8}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

**证法二:** 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = 1$ , 故存在  $c > 0$ , 使得

$$|\sin^3 x| \geq cx^3, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

从而

$$a_n \leq \frac{1}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin^3(nt)|}{t^2} dt = \frac{n}{c} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^3 y|}{y^2} dy \leq \frac{n}{c} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1}{y^2} dy \leq Kn, \forall n \in \mathbb{N}.$$

其中  $K$  为某个常数. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Kn} = +\infty.$$

□

**例题 9.11** 对  $x > 0$ , 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}}) \right]$  收敛性.

**证明** 当  $x = 2^m, m \in \mathbb{N}$ , 我们知道级数末项在  $n$  充分大时恒为 0, 因此原本的级数收敛. 下设  $x \neq 2^m, \forall m \in \mathbb{N}$ . 此时由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}})}{(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n+1}})} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\ln x}{n+1} = \ln x,$$

以及拉比判别法, 我们就有  $x > e$  时级数收敛,  $x < e$  时级数发散. 当  $x = e$  时, 计算 Taylor 展开式得

$$\ln \frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), n \rightarrow \infty,$$

然后

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \ln \frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}} - 1 \right] = 0.$$

运用较为广泛的判别法 (极限版 2), 我们知道原级数发散. □

**例题 9.12** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}}, x \in (0, 1)$  收敛性.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x^{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}}}{x^{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n+1}}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{x^{\sin \frac{1}{n+1}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{-\sin \frac{1}{n+1} \cdot \ln x} - 1 \right) = -\ln x \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n+1} = -\ln x. \end{aligned}$$

由拉比判别法, 我们有  $0 < x < \frac{1}{e}$  时原级数收敛,  $\frac{1}{e} < x < 1$  时原级数发散. 当  $x = \frac{1}{e}$ , 由较为广泛的判别法 (极限版 2) 和

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \ln \frac{x^{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}}}{x^{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n+1}}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \ln \frac{1}{x^{\sin \frac{1}{n+1}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \ln e^{-\sin \frac{1}{n+1} \ln x} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \left[ e^{-\sin \frac{1}{n+1} \ln x} - 1 + O \left( \left( e^{-\sin \frac{1}{n+1} \ln x} - 1 \right)^2 \right) \right] - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \left[ -\sin \frac{1}{n+1} \ln x + O \left( \left( -\sin \frac{1}{n+1} \ln x \right)^2 \right) + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right] - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( \left[ n \sin \frac{1}{n+1} + O \left( \frac{1}{n} \right) \right] - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n \cdot O \left( \frac{1}{n} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

我们有原级数在  $x = \frac{1}{e}$  发散. □

## 9.2.2 带对数换底法

**例题 9.13** 判断下列级数收敛性.

1.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{\ln n}} \ (r > 0);$
2.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln n} n};$
3.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}};$
4.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}};$
5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}};$
6.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\ln \ln n}} \ln n}$

**证明**

1. 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln r}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln r}},$$

我们有原级数收敛等价于  $r > e$ .

2. 注意到

$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln n} n} = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln \ln n}} = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln n}} \leq \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln 100}} < \infty,$$

我们有原级数收敛.

3. 注意到

$$\sum_{n=[e^{e^e}] + 1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \sum_{n=[e^{e^e}] + 1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln \ln n}} \leq \sum_{n=[e^{e^e}] + 1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln \ln (e^{e^e} + 1)}} = \sum_{n=[e^{e^e}] + 1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln (e^{e^e} + 1)}} < \infty,$$

我们有原级数收敛.

4. 由积分判别法, 我们有

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln^2 \ln n}} \sim \int_3^{\infty} \frac{1}{e^{\ln^2 \ln x}} dx \stackrel{x=e^y}{=} \int_{\ln 3}^{\infty} e^{y - \ln^2 y} dy = \infty,$$

故原级数发散.

5. 首先

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}},$$

于是我们结合

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{t}}} dt < \infty$$

知原级数收敛.

6. 当  $n$  充分大有

$$\frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\ln \ln n}} \ln n} = \frac{1}{e^{(1 + \frac{1}{\ln \ln n}) \ln n} \ln n} = \frac{1}{n \ln ne^{\frac{\ln n}{\ln \ln n}}} \leq \frac{1}{n \ln ne^{\frac{(\ln \ln n)^2}{\ln \ln n}}} = \frac{1}{n \ln ne^{\ln \ln n}} = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

由积分判别法知


$$\sum \frac{1}{n \ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy < \infty,$$

因此  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\ln \ln n}} \ln n}$  收敛.

□

### 9.2.3 Taylor 公式法

**例题 9.14** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt[n]{n}}$  收敛性.

 **笔记** 此类问题可采用 Taylor 公式的 peano 余项方法, 主要要展开到余项的级数绝对收敛. 注意积累绝对 ± 绝对 = 绝对, 绝对 ± 条件 = 条件的结论.

**证明** 注意到


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right) \right).$$

于是由  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} + \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right) \right)$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$  发散知原级数发散.

□

### 9.2.4 分组判别法

**例题 9.15** 设  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$  收敛.

 **笔记** 待定常数  $c$ , 记

$$M \triangleq \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n \leq ca_n^{\frac{n}{n+1}} \right\}, N \triangleq \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n > ca_n^{\frac{n}{n+1}} \right\}.$$

则对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$a_n > ca_n^{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{c} > a_n^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow a_n < \left(\frac{1}{c}\right)^{n+1}.$$

现在我们想要利用几何级数将原级数进行分组, 故只需任取  $c > 1$  即可, 不妨取  $c = 2$ , 就有下述证明.

**证明** 记

$$M \triangleq \left\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq \frac{1}{2} a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}, N \triangleq \left\{n \in \mathbb{N} : a_n > \frac{1}{2} a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

现在

$$a_n^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow a_n^{\frac{n}{n+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in M,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}} = \sum_{n \in M} a_n^{\frac{n}{n+1}} + \sum_{n \in N} a_n^{\frac{n}{n+1}} \leq \sum_{n \in M} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \sum_{n \in N} a_n < \infty,$$

这就完成了证明. □

**例题 9.16** 设  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}$ ,  $s > 1 - \frac{1}{p}$ ,  $p > 1$  收敛.

**注** 本题也可用分组判别法进行证明.

**证明** 利用 Young 不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{p} + \frac{1}{qn^{sq}} \right) < \infty, sq = \frac{s}{1 - \frac{1}{p}} > 1,$$

这就完成了证明. □

## 9.2.5 杂题

**例题 9.17** 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$  条件收敛.

**证明** 相似(10.1)式的计算, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \sin j \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\sin j \cdot \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\cos(j - \frac{1}{2}) - \cos(j + \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \\ &= \left| \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \sin n - \cot \frac{1}{2} \cos n + \cot \frac{1}{2} \right| \\ &\leq \frac{2}{2 \sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}, \\ \left| \sum_{j=1}^n \cos j \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\cos j \cdot \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\sin(j + \frac{1}{2}) - \sin(j - \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \\ &= \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) - \sin \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \cos n + \cot \frac{1}{2} \sin n - 1 \right| \\ &\leq \frac{2}{2 \sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

都是有界的. 又  $\frac{1}{n}$  递减到 0, 我们由 A-D 判别法得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$  收敛.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2n)}{2n} = \text{发散} - \text{收敛} = \text{发散};$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(2n)}{2n} = \text{发散} + \text{收敛} = \text{发散}.$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$  条件收敛. □

**例题 9.18** 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$  收敛.

**注** 实际上, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都存在  $t \in \mathbb{N}$ , 使得

$$t \leq \sqrt{n} < t+1 \iff t^2 \leq n \leq (t+1)^2 - 1.$$

因此

$$(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = (-1)^t, \forall k \in [t^2, (t+1)^2 - 1].$$

**注**  $\ln(1+x) \leq x \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leq -\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$

**证明** **证法一:** 由级数加括号的理得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k}.$$

我们来证明上式右边级数符合莱布尼兹判别法.

首先

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \ln \frac{k}{k-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{(t+1)^2 - 1}{t^2 - 1} = 0,$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} = 0.$$

然后对  $t \in \mathbb{N}, t \geq 3$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=(t+1)^2}^{(t+2)^2-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{2t} \frac{1}{k+t^2} - \sum_{k=0}^{2t+2} \frac{1}{k+t^2+2t+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2t} \left( \frac{1}{k+t^2} - \frac{1}{k+t^2+2t+1} \right) - \frac{1}{t^2+4t+2} - \frac{1}{t^2+4t+3} \\ &= \sum_{k=0}^{2t} \frac{2t+1}{(k+t^2)(k+t^2+2t+1)} - \frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} \\ &\geq \frac{(2t+1)^2}{(2t+t^2)(2t+t^2+2t+1)} - \frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} \\ &\geq \frac{(2t+1)^2}{(t^2+2t+2)(t^2+4t+3)} - \frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} \\ &= \frac{2t^2-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} \geq \frac{6t-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} > 0, \end{aligned}$$

这就证明了  $\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k}$  单调递减! 现在由莱布尼兹判别法得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$  收敛.

**证法二:** 由级数加括号的理得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k}.$$

我们用估阶方法进行证明. 由例 2.52(2) 可知

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{t^2-1} \frac{1}{k} = \ln(t^2-1) + \gamma + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} = \ln[(t+1)^2-1] + \gamma + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

于是

$$\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} = \ln \frac{t^2+2t}{t^2-1} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{2t+1}{t^2-1}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

进而

$$\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1} \frac{1}{k} = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \left[ \ln\left(1 + \frac{2t+1}{t^2-1}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right].$$


显然  $\ln\left(1 + \frac{2t+1}{t^2-1}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  单调递减趋于 0, 故由莱布尼兹判别法可知原级数收敛.  $\square$

**注** 虽然这里的  $O$  估计只对  $n$  充分大时成立, 但实际上级数的前有限项的和一定是有限数, 因此讨论级数的敛散性时, 可以只讨论从  $n$  的充分大的一项开始的级数. 上述证明中省略了这步, 总体问题不大.

## 9.3 级数计算

### 9.3.1 裂项方法

**例题 9.19** 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\sqrt[n]{2})}$ .

 **笔记** 继续采用强行裂项的想法, 猜出裂项之后的模样之后还原看看差什么.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1)} - \frac{1}{2^n(2^{\frac{1}{2^n}}-1)} &= \frac{2}{2^n(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1)} - \frac{2^{\frac{1}{2^n}}+1}{2^n(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1)} = -\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1)} \\ &= -\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n(2^{\frac{1}{2^n}}+1)(2^{\frac{1}{2^n}}-1)} = -\frac{1}{2^n(2^{\frac{1}{2^n}}+1)}, \end{aligned}$$


我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(2^{\frac{1}{2^n}}+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^n(2^{\frac{1}{2^n}}-1)} \right) - 1 = \frac{1}{\ln 2} - 1.$$

$\square$

**例题 9.20** 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$$

 **笔记** 想法的关键是强行裂项.

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)!} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(k+1)(k+2)!} - \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \stackrel{e \text{ 的 Taylor 展开}}{=} \frac{1}{2} - \left( e - 1 - 1 - \frac{1}{2} \right) = 3 - e.
\end{aligned}$$

□

例题 9.21 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

 **笔记** 此类问题化部分和之后估阶.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2m+1)}{2m+1}.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$$

于是由子列极限命题 (b) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left( \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln(2n)}{2n} \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln(2n)}{2n} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2}{n} \right)
\end{aligned}$$

利用 例题 2.52(2), 我们知道

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln 2}{n} = \ln 2 \cdot \ln m + \ln 2 \cdot \gamma + o(1), m \rightarrow \infty$$

由 0 阶 E-M 公式知道

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\ln x}{x} \right)' dx$$

注意到  $\int_1^m \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 m$  以及

$$\left| \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\ln x}{x} \right)' dx \right| = \left| \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{|1 - \ln x|}{x^2} dx < \infty$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \rightarrow \infty$$

这里  $C = \int_1^{\infty} \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\ln x}{x} \right)' dx$ . 现在结合上述渐近估计式就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \ln^2(2m) - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \ln 2 \cdot \gamma + o(1) \right] = \frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 \cdot \gamma$$

□


例题 9.22

1. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$$

2. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n(n+1)}$$

 **笔记** 证明的想法即强行裂项.

**证明**

1. 记  $H_n \triangleq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m \frac{H_n}{n+1} - \sum_{n=1}^m \frac{H_n}{n+2} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m \frac{H_n}{n+1} - \sum_{n=1}^m \frac{H_{n+1}}{n+2} \right) + \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m \frac{H_{n+1}}{n+2} - \sum_{n=1}^m \frac{H_n}{n+2} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{H_1}{2} - \frac{H_{m+1}}{m+2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1. \end{aligned}$$

2. 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_n}{n} - \frac{H_n}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_n}{n} - \frac{H_{n+1}}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_{n+1}}{n+1} - \frac{H_n}{n+1} \right) \\ &= H_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

**例题 9.23** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$$

 **笔记** 证明的想法即利用合适范围内都成立的恒等式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$$

来裂项.

**证明** 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{n}{n+1} - \arctan \frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

### 9.3.2 凑已知函数

**例题 9.24** 对  $|x| < 1$ , 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$$

**证明** 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' + \frac{2}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} dy \\
&= \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' + \frac{2}{x} \int_0^x \frac{1}{1-y^2} dy \\
&= \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

□

**例题 9.25** 计算

$$1 - \frac{1}{6} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3k-4)(3k-7) \cdots 5 \cdot 2}{6^k k!}.$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{6} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3k-4)(3k-7) \cdots 5 \cdot 2}{6^k k!} &= 1 - \frac{1}{6} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k-1} \prod_{j=2}^k (j - \frac{4}{3})}{6^k k!} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1} 3 \prod_{j=1}^k (\frac{1}{3} - j + 1)}{6^k k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

□

**例题 9.26** 对  $|x| < 1$ , 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}.$$

**证明** 相似 **例题 2.80** 的计算, 我们有恒等式

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{x}{2^k} = \ln \sin x - n \ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2^n}.$$

两边求导有

$$-\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

于是就有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = -\frac{\cos x}{\sin x} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \begin{cases} -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

□

### 9.3.3 生成函数和幂级数计算方法

**例题 9.27** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

**笔记** 使用 **Cauchy 积** 计算幂级数有一个特点, 即系数往往出现求和结构.

**证明** 考虑  $a_n = 1, n \in \mathbb{N}_0, b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ . 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x}, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = -\ln(1-x),$$

并且上述级数在  $(-1, 1)$  上绝对收敛, 于是由 **Cauchy 积收敛定理** 及 **推论 9.1** 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x| < 1.$$

收敛域可以直接注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1,$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) 1^n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) (-1)^n = \infty$$


故收敛域就是  $(-1, 1)$ . □

**例题 9.28** 设

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}.$$

 **笔记** 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的  $f$  的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的  $f$ , 对这个  $f$  来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于 **先猜后证** 的方法.

对本题而言,  $f(x)$  已知, 且容易求出其收敛半径. 此时用形式幂级数法本身就是严谨地.

**证明** 考虑  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则对任意在其收敛域内的  $x$  我们有

$$\begin{aligned} 1 &= (1-x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n, \end{aligned}$$

于是对比系数得

$$a_0 = 1, a_1 = a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

显然有

$$a_n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2}.$$

**注** (证明可见复分析教材) 为了求出  $f$  收敛半径, 可以展开点为中心作圆并一直扩大直到接触到和函数在  $\mathbb{C}$  上第一个奇点为止. 对于  $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ , 第一个奇点即使得  $\frac{1}{1-x-x^2}$  分母为 0 且模更小的点  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 于是

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 于是我们得到一个极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

□

**例题 9.29** 设  $a_0 = 0, a_1 = \frac{2}{3}, (n+1)a_{n+1} = 2a_n + (n-1)a_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$  收敛域和和函数.

**证明** 记  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 形式的, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n-1}.$$

于是

$$\frac{1}{x}[f'(x) - a_1] = \frac{2}{x}[f(x) - a_0] + x f'(x) \Rightarrow \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{x}f(x) + x f'(x).$$

故解微分方程得  $f(x) = \frac{2x}{3-3x}, x \in (-1, 1)$ . 这给出了  $a_n = \frac{2}{3}, n \in \mathbb{N}$ . 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{2}{3} x \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \frac{2}{3} x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{2x}{3(1-x)^2}, x \in (-1, 1).$$

□

### 例题 9.30

#### 1. 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}.$$

#### 2. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right) \cdot \frac{1}{n+1} \right].$$

**注** 第 2 问是第十届大学生数学竞赛非数学类决赛得分率非常低的一个题. 可以看到如果我们平时记忆  $\arcsin^2 x$  展开, 就能快速解题而规避掉最容易考的构造微分方程求解幂级数的技巧. 这一点我们在命题 3.1 中也提到过.

**证明**

#### 1. 考虑

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, g'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n},$$

我们有

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} 2nx^{2n-1} = 1 + x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right)' \\ &= 1 + x \left( x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} \right)' = 1 + x[xg(x)]', \end{aligned}$$

即

$$g'(x) - \frac{x}{1-x^2} g(x) = \frac{1}{1-x^2}, g(0) = 0.$$

由常数变易法得  $g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . 于是收敛区间为  $|x| < 1$ . 由

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$$

知幂级数在  $x = \pm 1$  不收敛, 故收敛域为  $|x| < 1$ .

2. 首先把级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right) \cdot \frac{1}{n+1} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{n+1} \right].$$

然后利用等式  $(2n)!! = 2^n n!$  可考虑

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(\sqrt{2}x)^{2n+2}}{n+1} \right].$$

现在所求级数为  $2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . 我们利用第 1 问有

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = 2 \left( \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right).$$

于是我们有

$$2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2f(0) = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[ 2 \left( \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right) \right] dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

□

**例题 9.31** 计算  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$ .

**证明** 注意到

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, f'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}.$$

于是我们有


$$f + f' + f'' + f''' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

注意到  $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ , 求解微分方程 (Euler 待定指数法) 得解  $f(x) = \frac{1}{4}(e^{-x} + e^x + 2\cos x)$ . □

### 9.3.4 多重求和

**例题 9.32** 计算

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)}.$$

 **笔记** 二重级数一类题型往往会用对称性来简化结构.

**证明** 直接计算有

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)} &\stackrel{\text{级数的 Fubini 定理}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn^2}{3^n (m3^n + n3^m)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^m mn^2 + 3^n m^2 n}{3^{n+m} (m3^n + n3^m)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{3^{n+m}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{3^m} \right)^2 = \frac{9}{32}, \end{aligned}$$

这里最后的级数是一个差比数列, 高中数学的错位相减可以直接算出结果. 或者利用凑已知函数的方法计算:

$$\sum_{m=1}^{\infty} mx^m = x \left( \sum_{m=1}^{\infty} x^m \right)' = x \cdot \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

将  $x = \frac{1}{3}$  代入得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{3^m} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{3^m} \right)^2 = \frac{9}{32}.$$



□

**例题 9.33** 计算

$$\left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100m^2n}{2^m(n2^m + m2^n)} \right].$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100m^2n}{2^m(n2^m + m2^n)} &\stackrel{\text{级数的 Fubini 定理}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100mn^2}{2^n(m2^n + n2^m)} = 50 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2n}{2^m(n2^m + m2^n)} + \frac{n^2m}{2^n(m2^n + n2^m)} \right) \\ &= 50 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{mn \left( \frac{m}{2^m} + \frac{n}{2^n} \right)}{n2^m + m2^n} \right) = 50 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{2^{m+n}} = 50 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \right)^2 = 200. \end{aligned}$$

□

### 9.3.5 级数特殊算法 (换序法)

**例题 9.34**

1. 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .
2. 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ .
3. 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$ .

**注** 熟知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .**证明**

1. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. (考试肯定会给提示或多设置一问) 注意到傅立叶展开  $f(x) = x^3 - \pi^2 x, x \in [-\pi, \pi]$  得

$$x^3 - \pi^2 x \sim 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

考虑  $x = \frac{\pi}{2}$  即得

$$12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = -12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = -12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}.$$

$$\text{故 } 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. 由 **命题 8.5(2)** 得到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$ .

□

**例题 9.35** 设  $f \in C^1[0, 1], f(x) \geq 0$ , 证明下述级数收敛且求值

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

**笔记** 为了有换序

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx,$$

我们只需要

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int f_n(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \sum_{n=1}^m f_n(x) dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx,$$

即需要证明

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) dx = 0.$$

**注** 实际上, 这里的换序就是**控制收敛定理**.

**证明** 显然  $\int_0^1 x^n f(x) dx$  递减且

$$0 \leq \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \max f \cdot \int_0^1 x^n dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

故由交错级数判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 x^n f(x) dx$  收敛. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 x^n f(x) dx = - \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n f(x) dx = \int_0^1 \frac{x f(x)}{1+x} dx,$$

这里换序来自

$$\left| \int_0^1 \sum_{n=m}^{\infty} (-x)^n f(x) dx \right| \stackrel{\text{交错级数不等式}}{\leq} \int_0^1 x^m f(x) dx \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

□

#### 命题 9.7 (组合数的无穷和技巧)

1. 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k \Rightarrow b_k = x^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k a_n x^n.$$

2. 我们有

$$\sum_{n=0}^m a_n (y+x)^n = \sum_{k=0}^m b_k y^k \Rightarrow b_k = x^{-k} \sum_{n=k}^m C_n^k a_n x^n.$$

◆

**证明**

□

**例题 9.36** 计算

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, k \in \mathbb{N}.$$

**证明** 取  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ . 由 **例题 9.27**, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) (y+x)^n &= -\frac{\ln(1-x-y)}{1-x-y} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-\frac{y}{1-x}} - \frac{1}{1-x} \frac{\ln\left(1-\frac{y}{1-x}\right)}{1-\frac{y}{1-x}} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{(1-x)^k} + \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \frac{y^k}{(1-x)^k} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}} \right] y^k \end{aligned}$$

于是由 **命题 9.7**, 我们有

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = b_k x^k = \left[ \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}} \right] x^k$$

注意到和函数第一个奇点是  $x = 1$ , 所以幂级数收敛半径是 1. 注意到和函数在  $x = 1$  的左极限发散, 因此幂级数在  $x = 1$  不收敛. 虽然和函数在  $x = -1$  的右极限收敛, 但并不能一定能推出幂级数在  $x = -1$  收敛, 为了判断  $x = -1$  的收敛性, 我们要使用小 o Tauber 定理.

若  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) (-x)^n$  存在, 则由小 o Tauber 定理知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=k}^{k+m} \left[ (-1)^n n C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right] = 0.$$

注意到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{n=k}^{k+2m} \left[ (-1)^n n C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right] = 0.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=k}^{k+2m+1} \left[ (-1)^n n C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right] = 0.$$

我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+2m+1} (k+2m+1) C_{k+2m+1}^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+2m+1}\right)}{2m+1} = 0.$$

又

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{k+2m+1}^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(k+2m+1)!}{k!(2m+1)!} = +\infty.$$

矛盾! 因此我们证明了原幂级数收敛域是  $(-1, 1)$ . □

## 9.4 级数一致收敛性判断

### 定理 9.19 (函数列一致收敛的柯西准则)

函数列  $\{f_n\}$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件是: 对任给正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $N$ , 使得当  $n, m > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (9.24)$$

**证明 必要性** 设  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ , 即对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.25)$$

于是当  $n, m > N$ , 由 (9.25) 就有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**充分性** 若条件 (9.24) 成立, 由数列收敛的柯西准则,  $\{f_n\}$  在  $D$  上任一点都收敛, 记其极限函数为  $f(x), x \in D$ . 现固定 (9.24) 式中的  $n$ , 让  $m \rightarrow \infty$ , 于是当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

因此,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ . □

### 定理 9.20

函数列  $\{f_n\}$  在区间  $D$  上一致收敛于  $f$  的充要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (9.26)$$

**证明 必要性** 若  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ . 则对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在不依赖于  $x$  的正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in D.$$

由上确界的定义, 亦有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这就证得 (9.26) 式成立.

由假设, 对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (9.27)$$

因为对一切  $x \in D$ , 总有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|,$$

故由 (9.27) 式得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f$ . □

#### 推论 9.2

函数列  $\{f_n\}$  在  $D$  上不一致收敛于  $f$  的充分且必要条件是: 存在  $\{x_n\} \subset D$ , 使得  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$  不收敛于 0.

#### 定理 9.21 (一致收敛的柯西准则)

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在某正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$  和一切正整数  $p$ , 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

#### 推论 9.3

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的必要条件是函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于零.

#### 定理 9.22

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛于  $S(x)$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

#### 定理 9.23 (A-D 判别法)

若  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在定义域内满足下列两条件之一, 则其在定义域上一致收敛

(1)  $\{a_n(x)\}$  对于固定的  $x$  关于  $n$  单调, 且在定义域内一致有界;  $\sum_{i=1}^n b_n$  一致收敛. (Abel 判别法)

(2)  $\{a_n(x)\}$  对于固定的  $x$  关于  $n$  单调, 且一致趋于 0;  $\sum_{i=1}^n b_n$  一致有界. (Dirichlet 判别法)

#### 定理 9.24

设函数列  $\{f_n\}$  在  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$  上一致收敛于  $f(x)$ , 且对每个  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  均存在且相等.

**证明** 先证  $\{a_n\}$  是收敛数列. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\{f_n\}$  一致收敛, 故有  $N$ , 当  $n > N$  时, 对任意正整数  $p$  和对一切  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , 有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad (9.28)$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知  $\{a_n\}$  是收敛数列.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . 再证  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

由于  $f_n(x)$  一致收敛于  $f(x)$  及  $a_n$  收敛于  $A$ , 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $N$ , 当  $n > N$  时, 对任意  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别取  $n = N + 1$ , 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$ , 故存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$


这样, 当  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . □

#### 定理 9.25 (连续性)

若函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数  $f$  在  $I$  上也连续. ♡

 **笔记** 由这个定理可知, 若各项为连续函数的函数列在区间  $I$  上其极限函数不连续, 则此函数列在区间  $I$  上不一致收敛.

**证明** 设  $x_0$  为  $I$  上任一点. 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ , 于是由定理 9.24 知  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  亦存在, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ , 因此  $f(x)$  在  $x_0$  上连续. □

#### 推论 9.4

若连续函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上内闭一致收敛于  $f$ , 则  $f$  在  $I$  上连续. ♡

#### 定理 9.26 (可积性)

若函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (9.29) \quad \text{♡}$$

**证明** 设  $f$  为函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上的极限函数. 由定理 9.25,  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 从而  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 与  $f$  在  $[a, b]$  上都可积.

因为在  $[a, b]$  上  $f_n \rightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故对任给正数  $\varepsilon$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in [a, b]$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再根据定积分的性质, 当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

这就证明了等式 (9.29). □

#### 定理 9.27 (可微性)

设  $\{f_n\}$  为定义在  $[a, b]$  上的函数列, 若  $x_0 \in [a, b]$  为  $\{f_n\}$  的收敛点,  $\{f_n\}$  的每一项在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $\{f'_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x). \quad (9.30)$$

**证明** 设  $f_n(x_0) \rightarrow A$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $f'_n \Rightarrow g$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $x \in [a, b]$ . 我们要证明函数列  $\{f_n\}$  在区间  $[a, b]$  上收敛, 且其极限函数的导数存在且等于  $g$ .

由定理条件, 对任一  $x \in [a, b]$ , 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 右边第一项极限为  $A$ , 第二项极限为  $\int_{x_0}^x g(t) dt$  (定理 9.26), 所以左边极限存在, 记为  $f$ , 则有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$


其中  $f(x_0) = A$ . 由  $g$  的连续性 & 微积分学基本定理推得

$$f' = g.$$

这就证明了等式 (9.30). □

#### 定理 9.28 (连续性)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在  $[a, b]$  上也连续.

 **笔记** 这个定理指出: 在一致收敛条件下, (无限项) 求和运算与求极限运算可以交换顺序, 即

$$\sum \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum u_n(x) \right).$$

#### 定理 9.29 (逐项求积)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项  $u_n(x)$  都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

#### 定理 9.30 (逐项求导)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上每一项都有连续的导函数,  $x_0 \in [a, b]$  为  $\sum u_n(x)$  的收敛点, 且  $\sum u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\sum \left( \frac{d}{dx} u_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum u_n(x) \right).$$

**例题 9.37** 判断下列级数在指定区间一致收敛性:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}, [0, +\infty);$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}, [-a, a], a > 0;$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right), [-1, 1];$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}, [0, +\infty);$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right), (0, +\infty);$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}, (0, +\infty);$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2, [0, +\infty).$

注 第4问可以通过裂项算出级数的和函数:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\
 &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \right] \\
 &= \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.
 \end{aligned}$$

但  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$  的一致收敛性不好判断 (这个方法比较复杂), 因此我们不采取这个方法.

证明

1. 显然  $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$  以及对每一个  $x \in [0, +\infty)$  都有  $\frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}$  单调递减. 又

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

2. 显然  $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$  以及对每一个  $x \in [-a, a]$  都有  $\frac{n+x^2}{n^2}$  单调递减. 又

$$\frac{n+x^2}{n^2} \leq \frac{n+a^2}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$  在  $[-a, a]$  一致收敛.

3. 注意到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{x^m}{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} = 0,$$

我们有  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right)$  在  $[-1, 1]$  一致收敛.

4. 一方面, 对  $x \in [1, +\infty), n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall x \in [1, +\infty).$$

另外一方面, 对  $n \geq 2, x \in [0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})} &\leq \frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})} \\ &\leq \frac{x^{2n}}{\underbrace{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}_n} \leq \frac{x^{2n}}{C_n^2 x^{2n}} = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

即由 Weierstrass 判别法和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} < \infty,$$

我们知道原级数一致收敛.

5. 首先

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right) \right| \leq \sqrt{\frac{x}{n}}, \forall x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

然后

$$\left( \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \right)' = \frac{\sqrt{x}(3-nx^2)}{2n(1+nx^2)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \Big|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{7}{4}}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{x}{1+nx^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{7}{4}} < +\infty.$$

这就证明了  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right)$  在  $(0, +\infty)$  一致收敛.

6. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2n^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}} \leq \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{\sin^2 x}{2x^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2}$  在  $(0, +\infty)$  一致收敛.

7. 因为

$$\left( \frac{x}{n^2+x^2} \right)' = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2},$$


于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n^2+n^2} \right)^2 < \infty,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

□

**例题 9.38** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  是否一致收敛.

 **笔记** 连续函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  一致收敛, 则在  $\bar{I}$  也一致收敛, 这是因为有等式

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{x \in \bar{I}} |f_n(x) - f_m(x)|.$$



我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Im \left( \frac{e^{inx}}{n} \right) = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \Im (-\ln(1 - e^{ix})) = -\arg(1 - e^{ix}) \\ &= -\arg(1 - \cos x - i \sin x) = -\arctan \frac{-\sin x}{1 - \cos x} = \arctan \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \arctan \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \tan \frac{x}{2} = \frac{\pi - x}{2},\end{aligned}$$

然后对  $\frac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi)$  做奇延拓之后在  $[-\pi, \pi]$  展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi).$$

这个级数结果应当记忆. 注意到上述和函数与  $x$  有关, 故原级数一定不一致收敛, 下面将证明严格化.

**证明** 对  $\frac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi)$  做奇延拓之后在  $[-\pi, \pi]$  展开为傅立叶级数, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi).$$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  一致收敛, 则在  $[0, \frac{\pi}{2})$  也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot 0)}{n} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

这就和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $x=0$  应该连续矛盾! 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  不一致收敛.  $\square$

**例题 9.39** 设  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 令

$$f_n(x) = n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right], n = 1, 2, \dots$$

试证明对任给区间  $[a, b]$  都有  $f_n(x)$  一致收敛到  $f'(x)$ .

**证明** 由 **Cantor 定理** 及  $f \in C^1(\mathbb{R})$  可知  $f'$  内闭一致连续性, 于是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $x \in [a, b], t \in [0, \delta]$ , 我们有

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq \varepsilon.$$

当  $n > \frac{1}{\delta}$ , 我们对任何  $x \in [a, b]$  有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f'(x)| &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(y) - f'(x) dy \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(y) - f'(x)| dy = n \int_0^{\frac{1}{n}} |f'(x+t) - f'(x)| dt \\ &\leq \varepsilon n \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dt = \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  一致收敛到  $f'(x)$ .  $\square$

**例题 9.40** 讨论下列函数在给定区间可微性.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}, (0, +\infty);$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, (-\infty, +\infty);$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), (-\infty, +\infty);$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x, \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$

证明

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$  显然收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 \pi x})' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}.$$

对任何  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ , 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |-n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi e^{-n^2 \pi a} < \infty,$$

即内闭一致收敛, 因此由定理 9.30 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$  在  $(0, +\infty)$  可微.

2. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$  在  $(-\infty, +\infty)$  可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}.$$

注意到

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{1}{n + x^2} \right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

以及对任何  $x \in \mathbb{R}$  都有  $\frac{1}{n + x^2}$  递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 可微.}$$

4. 显然  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$  在  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在任何  $[a, b] \subset \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  一致收敛.

显然存在  $c_{a,b} \in (0, 1)$  使得

$$|\tan x| \leq c_{a,b}, \forall x \in [a, b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} c_{a,b}^{n-1} < \infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在  $[a, b]$  一致收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$  在  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  可微.

□

**例题 9.41** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$  在  $[0, \lambda], \lambda > 0$  的一致收敛性.

**证明** 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \left[ \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right], n = 2, 3, \dots$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^m \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$

现在

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

于是由级数和函数不连续知其  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$  在  $[0, \lambda], \lambda > 0$  不一致收敛.

□

**例题 9.42** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, b]$  和  $[0, +\infty)$  的一致收敛性.

**证明** 首先注意到

$$\left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]' = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0,$$

我们有

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned} e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n &= e^b \left[ 1 - e^{n \ln(1 + \frac{b}{n}) - b} \right] = e^b \left[ 1 - e^{n \left[ \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - b} \right] \\ &= e^b \left[ 1 - e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} \right] = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

(实际上我们可以写出具体的等价量  $e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \sim \frac{e^b b^2}{2n}, n \rightarrow \infty$ ) 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \right] < \infty.$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, b]$  一致收敛. 注意到

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right] \right| = +\infty,$$

我们知道  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, +\infty)$  不一致收敛.

□

**例题 9.43** 对  $\alpha > 0$ , 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛性.

**证明** 注意到

$$(x^\alpha e^{-nx})' = (\alpha - nx)x^{\alpha-1} e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{n}.$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx} \leq \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当  $\alpha > 1$ , 我们由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$  知原级数在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

当  $\alpha \in [0, 1)$ , 注意到


$$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

如果原级数在  $[0, +\infty)$  一致收敛, 那么上述和函数在  $x = 0$  应该连续. 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} \neq 0,$$

故原级数在  $[0, +\infty)$  不一致收敛. □

**例题 9.44** 求  $\alpha$  的范围, 使得  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  一致收敛.

 **笔记** 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha = +\infty$$

时一定有  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对  $x$  赋值往往能实现这一点.

**证明** 当  $\alpha > 1$ , 首先由

$$\left[\left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha\right]' = \left(x - \frac{1}{n}\right)^{n-1} (1-x)^{\alpha-1} \left[n + \frac{\alpha}{n} - (n+\alpha)x\right] = 0 \Rightarrow x = \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha}$$

知

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha &= \left(\frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha}\right)^\alpha = \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \left(\frac{\alpha n - \alpha}{n^2 + \alpha n}\right)^\alpha \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n = \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(1+\alpha)n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} e^{-\frac{(1+\alpha)n^3}{n^3 + \alpha n^2}} \sim \frac{e^{-(1+\alpha)} \alpha^\alpha}{n^\alpha}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故由 Weierstrass 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  一致收敛.

当  $\alpha \leq 0$ , 原级数在  $x = 1$  时通项极限不等于 0, 故此时级数在  $x = 1$  时发散.

当  $0 < \alpha \leq 1$ , 当  $N \rightarrow +\infty$ , 取  $x = n + \frac{\alpha}{n}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha &\geq \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha = \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\sim N e^{-\frac{(1+\alpha)(2N-1)}{N+\alpha}} \cdot \frac{\alpha^\alpha}{N^\alpha} \sim \frac{\alpha^\alpha e^{-2(1+\alpha)}}{N^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  不一致收敛. □

**例题 9.45** 设  $f_1 \in C[a, b], x_0 \in [a, b]$ . 考虑函数列

$$f_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

讨论  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  一致收敛性.

 **笔记** 注意到

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \leq M &\Rightarrow |f_2(x)| \leq \int_{x_0}^x M dx = M|x - x_0| \\ \Rightarrow |f_3(x)| &\leq \int_{x_0}^x M|x - x_0| dx = \frac{M}{2}|x - x_0|^2 \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

于是就有下述归纳.

**注** 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 因此我们放缩时在积分号外面再加了一个绝对值 (当然也可以分类讨论).

**证明** 设  $M \triangleq \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x)|$ , 我们归纳证明

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1}. \quad (9.31)$$

现在 (9.31) 对  $n=1$  已经成立. 假设  $n$  时成立, 我们对  $x_0 \in [a, b]$  有

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t)| dt \right| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_{x_0}^x |x - x_0|^{n-1} dx = \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

现在由数学归纳法知对一切  $n \in \mathbb{N}$  都有 (9.31) 成立, 故

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1} \leq \frac{M}{(n-1)!} \max \{|b - x_0|^{n-1}, |x_0 - a|^{n-1}\},$$

即  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  一致收敛到 0. □

## 9.5 级数证明

**例题 9.46** 设  $f \in \mathbb{R}[x]$  是只有正实根的多项式, 求  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  在  $x=0$  幂级数展开和收敛域.

**证明** 设  $f(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_n)^{k_n}$ , 其中  $a \neq 0$ , 并且

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, k_i \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= [\ln f(x)]' = [\ln a + k_1 \ln(x-x_1) + k_2 \ln(x-x_2) + \cdots + k_n \ln(x-x_n)]' \\ &= \frac{k_1}{x-x_1} + \frac{k_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-x_n} = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x-x_j} \\ &= -\frac{k_j}{x_j} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-\frac{x}{x_j}} = -\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_j}\right)^m \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j^{m+1}} x^m. \end{aligned}$$

显然收敛半径就是  $x_1$ , 注意到

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{x_j^{m+1}} x_1^m = \frac{k_1}{x_1} \neq 0,$$

故收敛域为  $(-x_1, x_1)$ . □

**例题 9.47** 设  $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$ ,  $a_n > 0$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

**证明** 显然  $e^{b_n} = e^{a_n} - a_n \geq 1$ , 故  $b_n \geq 0$ , 并且由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛知  $a_n \rightarrow 0$ . 于是

$$\begin{aligned} b_n &= \ln(e^{a_n} - a_n) = \ln e^{a_n} + \ln(1 - a_n e^{-a_n}) \\ &= a_n + O(a_n e^{-a_n}), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

注意到  $O(a_n e^{-a_n}) \leq a_n$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} O(a_n e^{-a_n})$  也收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛. □

**例题 9.48** 设  $\{a_n\}$  是递减正数列且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1.$$

**证明** 由条件可知对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \leq a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1},$$


故  $A \leq 1$ . 注意到

$$\begin{aligned} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} &\geq \frac{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1 - \frac{a_1 - a_{2n+1}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} \\ &\geq 1 - \frac{a_1}{\frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{2} + \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{2}} = 1 - \frac{2a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故  $A \geq 1$ . 因此  $A = 1$ . □

#### 命题 9.8

设  $a_n$  递减到 0, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 并且  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

 **笔记** (9.32)式可由Abel变换直接得到, 也可以采用下述证明一样的强行凑裂项的思路.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n [ka_k - (k+1)a_{k+1}] + \sum_{k=1}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_{k+1}] \\ &= a_1 - (n+1)a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

**充分性:** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则由命题 9.2 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ . 再由(9.32)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

**必要性:** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛, 则由  $\{a_n\}$  的单调性知, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq m$  时, 有

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \geq \sum_{k=1}^m a_k + (n-m)a_n.$$

又由(9.32)式和  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛知, 存在  $A > 0$ , 使得

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k - na_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故

$$A \geq \sum_{k=1}^n a_k - na_n \geq \sum_{k=1}^m a_k + (n-m)a_n - na_n = \sum_{k=1}^m a_k - ma_n.$$

令  $n \rightarrow +\infty$  得  $\sum_{k=1}^m a_k \leq A$ . 再由  $m$  的任意性可知  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收敛. 此时由命题 9.2 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ , 再由(9.32)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

**例题 9.49** 设  $a_n$  递减到 0, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 证明

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx$$

发散, 这里  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$ .

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 故  $f(x)$  的收敛域为  $\mathbb{R}$ . 显然  $f > 0, x > 0$ , 且  $f$  在  $(0, +\infty)$  上递增. 待定  $\{b_n\}$  满足:  $b_n \nearrow +\infty$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx &\geq \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(b_n)}{x^2} dx = \ln f(b_n) \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ &\geq \ln(a_n^n b_n^n) \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = n \ln(a_n b_n) \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

取  $b_n = \frac{C}{a_n}, C > \max\{1, a_1\}$ , 则

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq n \ln(a_n b_n) \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{\ln C}{C} n(a_n - a_{n+1}).$$

由命题 9.8 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  发散. 故

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \frac{\ln C}{C} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = +\infty.$$

□


**例题 9.50** 证明:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}} \leq p, \forall p \in (1, +\infty).$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}} \geq p, \forall p \in (0, 1).$$

 **笔记** 注意强行凑裂项和熟悉 Bernoulli 不等式.

**证明**

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} &\leq p \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \\
 \Leftrightarrow \sqrt[p]{n} \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) &= 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq \frac{1}{p(n+1)} \\
 \Leftrightarrow \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} &\leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}.
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

下证  $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$ . 令  $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x} - \frac{x}{p}$ , 则

$$f'(x) = -\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left[ 1 - (1-x)^{\frac{1}{p}-1} \right] < 0.$$

故

$$f(x) \leq f(0) = 1 \Leftrightarrow \sqrt[p]{1-x} \leq 1 - \frac{x}{p}.$$

令  $x = \frac{1}{n+1}$  得  $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$ , 从而(9.33)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = p.$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} &\geq p \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \\
 \Leftrightarrow \sqrt[p]{n} \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) &= 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{p(n+1)} \\
 \Leftrightarrow \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} &\geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}.
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

下证  $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$ . 令  $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x} - \frac{x}{p}$ , 则

$$f'(x) = -\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left[ 1 - (1-x)^{\frac{1}{p}-1} \right] > 0.$$

故

$$f(x) \geq f(0) = 1 \Leftrightarrow \sqrt[p]{1-x} \geq 1 - \frac{x}{p}.$$

令  $x = \frac{1}{n+1}$  得  $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{p(n+1)}$ , 从而(9.34)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p \left( \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = p.$$

□

**例题 9.51** 对  $t \in \mathbb{R}$ , 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} dx.$$

**证明**

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{x^{tx}} dx &= \int_0^1 e^{-tx \ln x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tx \ln x)^n}{n!} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-tx \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx
 \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} & \stackrel{x=e^{-y}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y} y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! (n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^n dy \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Gamma(n+1)}{n! (n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^n}. \end{aligned}$$

□

**命题 9.9**

1. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $a_n > 0$ , 则存在  $A_n$  使得  $a_n = o(A_n)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  收敛.
2. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散,  $a_n > 0$ , 则存在  $A_n$  使得  $A_n = o(a_n)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  发散.

◆

 **笔记** 这个命题说明: 没有收敛最慢的级数, 也没有发散最慢的级数.

**证明**

1. 令

$$A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} < +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \left( \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} \right)}{a_n} = 0.$$

故  $a_n = o(A_n), n \rightarrow \infty$ .

2. 令

$$A_1 = 1, \quad A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

则

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{a_1} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} \right)} = 0.$$

故  $A_n = o(a_n), n \rightarrow \infty$ .

□

**例题 9.52** 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$ , 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} < \infty.$$

**注** 本题的想法就是把  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}$  放大为阶更小的量, 从而其收敛.

**证明** 记  $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n p_k$ , 则对  $N \geq 2$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} &= \sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2} = \sum_{n=2}^N \frac{n^2 (S_n - S_{n-1})}{S_n^2} \\ &= \sum_{n=2}^N n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{n=2}^N n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^2} dx = \sum_{n=2}^N n^2 \left( \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \left[ \frac{n^2}{S_{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{S_n} \right] + \sum_{n=2}^N \frac{(n+1)^2 - n^2}{S_n} \\ &= \frac{4}{S_1} - \frac{(N+1)^2}{S_N} + \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{S_n} \\ &\leq \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} = \frac{4}{S_1} + 3 \sum_{n=2}^N \left( \frac{n\sqrt{p_n}}{S_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right) \\ &\stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\leq} \frac{4}{S_1} + 3 \sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2} \cdot \sum_{n=2}^N \frac{1}{p_n}} \\ &\leq \frac{4}{S_1} + C \sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}. \end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \leq \frac{4}{S_1} \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=2}^N \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}} + C.$$

若  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}$  发散, 则对上式令  $N \rightarrow +\infty$  得  $+\infty \leq C$  矛盾! 故  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} < +\infty$ . □

### 例题 9.53

1. 设  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 0.$$

证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

2. 设  $\alpha \in (0, 1), \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$ .

**注** 由  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}} = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  收敛可知  $\sum_{k=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$  收敛, 故  $\sum_{k=1}^n o\left(\frac{1}{k^2}\right) = O(1), \forall n \in \mathbb{N}$ .

**证明**

1. 由条件可知, 存在  $c > 0, N \in \mathbb{N}$ , 使得对  $\forall n \geq N$  有

$$b_n \leq \frac{c}{2} n, \quad b_n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > c > 0.$$

不妨设  $N = 1$ , 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{c}{b_n} \implies a_1 > a_{n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{b_k}\right).$$

于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_1 \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{c}{b_k}} = a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{c}{b_k}\right)} \\ &\leq a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)} = a_1 e^{-\sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]} \\ &= a_1 e^{-2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O(1)} = a_1 e^{-2[\ln n + O(1)] + O(1)} \\ &= a_1 e^{-2\ln n + O(1)} \sim \frac{C}{n^2}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

2. 由条件可知, 当  $n$  充分大时, 有

$$n^\alpha \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 0 \implies \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

从而不妨设  $\{a_n\}$  递减. 再根据条件可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$n^\alpha \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > \frac{\lambda}{2}, \forall n \geq N.$$

故

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\lambda}{2n^\alpha}, \forall n \geq N.$$

于是对  $\forall n \geq N$ , 有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_N \prod_{k=N}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2k^\alpha}} = a_N e^{-\sum_{k=N}^n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{2k^\alpha}\right)} \\ &= a_N e^{-\sum_{k=N}^n \left[\frac{\lambda}{2k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right]} \stackrel{\text{命题 2.14}}{=} a_N e^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} + O(n^{1-2\alpha})\right]} \\ &= a_N e^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} + O(n^{1-2\alpha})\right]} \leq a_N e^{-Cn^{1-\alpha}}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$


注意到  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Cn^{1-\alpha}} < +\infty$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

□

### 命题 9.10

证明:

1. 实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛等价于存在分解  $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$  使得  $\{a_n\}$  单调趋于 0 且  $\sum b_n$  部分和有界.
2. 实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛等价于存在分解  $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$  使得  $\{a_n\}$  单调有界且  $\sum b_n$  部分和收敛.

 **笔记** 这个命题说明:A-D 判别法是级数收敛的“充要条件”. 积分版本见命题 6.2.

**证明** 充分性就是由级数收敛的 A-D 判别法. 下证必要性.

1. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall i \in \mathbb{N}$ , 存在  $n_i \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} u_n \right| \leq \frac{1}{i^3}, \forall k \geq n_i, p \in \mathbb{N}.$$

定义

$$a_0 = 1, \quad a_n \triangleq \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq n_1 \\ \frac{1}{i}, & n_i < n \leq n_{i+1} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{u_n}{a_n}.$$

显然  $a_n \searrow 0$ . 当  $1 \leq n \leq n_1$  时, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n_1} |u_k|.$$

当  $n > n_1$  时, 存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $n_k < n \leq n_{k+1}$ , 于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n b_j \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} i u_j + k \sum_{j=n_k+1}^n u_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} i \left| \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} u_j \right| + k \left| \sum_{j=n_k+1}^n u_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i^3} + \frac{k}{k^3} \leq \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 由第 1 问可知, 存在  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  使得  $u_n = \alpha_n \beta_n$ , 并且  $\{\alpha_n\}$  单调递减趋于 0,  $\sum \beta_n$  部分和有界. 令

$$a_n \triangleq \sqrt{\alpha_n}, \quad b_n \triangleq \beta_n \sqrt{\alpha_n} = \beta_n a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

显然  $a_n \searrow 0$ , 进而  $\{a_n\}$  单调有界. 又  $\sum \beta_n$  部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知,  $\sum b_n$  部分和收敛.  $\square$

**例题 9.54** 设实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$  条件收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t \neq s$  是一个重排. 证明: 对任何  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $|n - f(n)| > N$ .

**证明** 若  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $|n - f(n)| \leq N$ , 那么对  $\forall m > N$ , 就有

$$\sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \text{ 中一定不包含 } a_1, a_2, \dots, a_m, a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(m-N)}.$$

$$\text{并且 } \sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \text{ 至多含有 } m + N + m - (2m - N) = 2N \text{ 项.}$$

故对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_1$  时, 有  $|a_n| \leq \varepsilon$ . 于是对  $\forall m > N_1$ , 就有

$$\left| \sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq 2N\varepsilon.$$

令  $m \rightarrow +\infty$  得  $|s - t| \leq 2N\varepsilon$ . 由  $\varepsilon$  的任意性知  $s = t$ , 矛盾!  $\square$

**例题 9.55**

1. 设  $f$  满足: 对任何绝对收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 都有  $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$  绝对收敛, 证明  $f(x) = O(x), x \rightarrow 0$ .
2. 设  $f$  满足: 对任何收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 都有  $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$  收敛, 证明存在  $k \in \mathbb{R}$  使得在 0 的某个邻域内有  $f(x) = kx$ .

**证明**

1. 反证, 若  $\frac{f(x)}{x}$  在  $x = 0$  邻域内无界, 则  $\exists x_n \rightarrow 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x_n)}{x_n} \right| > n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.35)$$

取  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得

$$|x_{n_k}| < \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

从而对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\frac{2}{k^2 |x_{n_k}|} - \frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} = \frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} > 1,$$

于是存在正整数  $m_k$ , 使得

$$\frac{1}{k^2 |x_{n_k}|} < m_k < \frac{2}{k^2 |x_{n_k}|}. \quad (9.36)$$

令

$$a_n \triangleq x_{n_k}, \quad m_{k-1} < n \leq m_k.$$

则由(9.36)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k |x_{n_k}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < +\infty.$$

由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(a_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k |f(x_{n_k})| < +\infty. \quad (9.37)$$

又由(9.35)(9.36)式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f(a_n)| &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k |f(x_{n_k})| \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_k n_k |x_{n_k}| \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} k m_k |x_{n_k}| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \end{aligned}$$

这与(9.37)式矛盾!

2. 目标证明  $f$  在  $x=0$  邻域满足 Cauchy 方程. 考虑  $g(x, y) = f(x+y) + f(-x) + f(-y)$ . 如果对任何 0 的开邻域  $U$  都有  $g$  在  $U \times U$  上不恒为 0, 那么存在  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$  使得  $g(x_n, y_n) \neq 0$ .

考虑

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x_1 + y_1) - x_1 - y_1, (x_1 + y_1) - x_1 - y_1, \dots, (x_1 + y_1) - x_1 - y_1}_{m_1} + \\ &\underbrace{(x_2 + y_2) - x_2 - y_2, (x_2 + y_2) - x_2 - y_2, \dots, (x_2 + y_2) - x_2 - y_2}_{m_2} + \\ &\vdots \end{aligned}$$

上述级数的部分和只可能出现  $x_n + y_n, y_n, 0$ , 而当  $n \rightarrow +\infty$  时它们都趋于 0, 因此上述级数收敛. 由题目条件, 我们有

$$\begin{aligned} &\underbrace{(f(x_1) + f(y_1)) + f(-x_1) + f(-y_1), \dots, (f(x_1) + f(y_1)) + f(-x_1) + f(-y_1)}_{m_1} + \\ &\underbrace{(f(x_2) + f(y_2)) + f(-x_2) + f(-y_2), \dots, (f(x_2) + f(y_2)) + f(-x_2) + f(-y_2)}_{m_2} + \\ &\vdots \end{aligned}$$

收敛. 由收敛级数加括号也收敛, 我们知道对任何一组  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$  都有  $\sum_{n=1}^{\infty} m_n g(x_n, y_n)$  收敛. 这显然不可能! 因此我们证明了  $f(x+y) + f(-x) + f(-y)$  在某个  $U \times U$  上恒为 0, 这里  $U$  是一个开区间. 现在由

$$f(0) + f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

知

$$f(x-x) + f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f \text{ 是奇函数,}$$

即  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

再证明  $f$  在  $x=0$  连续. 设  $x_n \rightarrow 0$ , 我们考虑收敛级数  $x_1 - x_1 + x_2 - x_2 + \cdots$ , 故级数

$$f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) - f(x_2) + \cdots$$

收敛. 考虑上述级数部分和可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ , 从而  $f$  在  $x=0$  连续. 现在由定理 5.9 知存在  $k \in \mathbb{R}$  使得在 0 的某个邻域内有  $f(x) = kx$ .

□

**例题 9.56** 给定  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

若


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = +\infty(-\infty),$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty(-\infty),$$

并指出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| = +\infty \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = +\infty.$$

 **笔记** 熟记命题 9.6.

**证明** 记  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , 不妨设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

于是对任意  $C > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对任意  $n > N$ , 成立  $S_n \geq C$ . 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{f(x)}{1-x} \stackrel{\text{命题 9.6}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[ \sum_{n=0}^N S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n \right] \\ &\geq \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[ \sum_{n=0}^N S_n x^n + C \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right] \\ &= C \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{x^{N+1}}{1-x} = C, \end{aligned}$$

由  $C$  任意性, 我们证明了

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f(x) = \frac{x-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) x^n.$$

□

#### 命题 9.11

1. 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是两两不同的实数,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  为复数. 证明:


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j x} = 0 \Leftrightarrow C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. 设  $m \geq 2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{C}$ . 若

$$\lambda_j - \lambda_k \neq 2\ell\pi, \forall 1 \leq j < k \leq m, \ell \in \mathbb{Z},$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m C_j e^{ni\lambda_j} = 0 \Leftrightarrow C_j = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

 **笔记** 想法即类比傅立叶系数, 做积分使得系数暴露出来. 离散版本可以类似连续版本证明, 连续的处理方式核心是乘上某个  $e^{-i\lambda x}$  均值形式的积分取极限, 从而离散的时候应该是乘上某个  $e^{-i\lambda y}$  均值的取和.

**证明**

1. 充分性显然, 只需证明必要性. 考虑  $f(x) \triangleq \sum_{j=1}^n C_j e^{i\lambda_j x}$ , 其中  $i$  是虚数单位. 对  $T > 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 我们有

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} f(x) dx &= \int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} \left( \sum_{j=1}^n C_j e^{i\lambda_j x} \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \int_T^{2T} e^{i(\lambda_j - \lambda_k)x} dx = TC_k + \sum_{j \neq k} C_j \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)2T} - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)T}}{\lambda_j - \lambda_k}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |C_k| &= \frac{\left| \int_T^{2T} e^{-i\lambda_k x} f(x) dx - \sum_{j \neq k} C_j \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)2T} - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)T}}{\lambda_j - \lambda_k} \right|}{T} \\ &\leq \frac{\int_T^{2T} |f(x)| dx + \sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|\lambda_j - \lambda_k|}}{T} = \frac{|f(\theta_T)|T + \sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|\lambda_j - \lambda_k|}}{T}, \end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 **积分中值定理** 且  $\theta_T \in (T, 2T)$ . 现在由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  可知

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} C_k = 0, k = 1, 2, \dots, n,$$

这就证明了  $C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ , 必要性得证.

2. 充分性显然, 只需证明必要性. 对  $k = 1, 2, \dots, m$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( C_k + \sum_{j \neq k} C_j e^{in(\lambda_j - \lambda_k)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{-in\lambda_k} \sum_{j=1}^m C_j e^{in\lambda_j} \right) = 0.$$

现在由 **Stolz 定理** 我们有

$$\begin{aligned} C_k &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \neq k} C_j e^{in(\lambda_j - \lambda_k)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell=0}^n \sum_{j \neq k} C_j e^{i\ell(\lambda_j - \lambda_k)}}{n+1} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} \sum_{\ell=0}^n C_j e^{i\ell(\lambda_j - \lambda_k)}}{n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} C_j \frac{1 - e^{i(n+1)(\lambda_j - \lambda_k)}}{1 - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}}}{n+1}. \end{aligned}$$

结合

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{j \neq k} C_j \frac{1 - e^{i(n+1)(\lambda_j - \lambda_k)}}{1 - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}} \right|}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \neq k} |C_j| \frac{2}{|1 - e^{i(\lambda_j - \lambda_k)}|}}{n+1} = 0,$$

我们知道  $C_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ , 这就证明了必要性!

□

**例题 9.57** 设  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m \sin(n\alpha_i) = 0.$$

证明: 必有一个  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  使得  $\frac{\alpha_i}{\pi} \in \mathbb{Z}$ .

 **笔记** 本题是命题 9.11 的一个应用.

**证明** 由 Euler 公式得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \frac{e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}}{2i} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m (e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0.$$

打开括号得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1, 1\}} (-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)} = 0. \quad (9.38)$$

注意到若有

$$\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m = \varepsilon_1' \alpha_1 + \varepsilon_2' \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m' \alpha_m + 2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}, \quad (9.39)$$

则

$$e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)} = e^{in(\varepsilon_1' \alpha_1 + \varepsilon_2' \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m' \alpha_m)}.$$

因此将(9.38)式中满足(9.39)式的项合并, 得到新的和式的任意两项中的  $\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m$  的差值都不等于  $2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$ . 于是由命题 9.11 知

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1, 1\}} (-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} e^{in(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \dots + \varepsilon_m \alpha_m)}$$

恒为 0. 否则, 上式每项系数  $(-1)^{|\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \varepsilon_i = -1\}|} = 0$  矛盾! 故现在就有  $\prod_{j=1}^m (e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 取  $n = 1$ ,

则必存在一个  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 使得

$$e^{i\alpha_j} - e^{-i\alpha_j} = 0 \Rightarrow e^{2i\alpha_j} = 0 \Rightarrow 2\alpha_j = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\alpha_j}{\pi} = k \in \mathbb{Z}.$$

□

**例题 9.58** 设对  $n \in \mathbb{N}$  都有

$$u_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \dots + u_{n+m}^2).$$

证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$  存在, 则  $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**注** 题目条件中写了极限等于  $u_n$  就是默认这个极限存在.

**证明** 注意到

$$u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+4u_n} - 1}{2}, n = 1, 2, \dots, \quad (9.40)$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k$  存在知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . 若  $u_n \neq 0 (n \in \mathbb{N})$ , 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nu_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{1+4u_n} - 1} - \frac{1}{u_n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2}{\sqrt{1+4x} - 1} - \frac{1}{x} \right) = 1. \end{aligned}$$

故  $u_n \sim \frac{1}{n}$ , 从而  $\sum u_n$  发散, 矛盾! 故存在  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $u_{n_0} = 0$ . 于是由(9.40)式, 利用数学归纳法可知

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\sqrt{1+4u_n} - 1}{2} = \dots = 0, \forall n > n_0. \\ u_n &= u_{n+1}^2 + u_{n+1} = \dots = u_{n_0}^2 + u_{n_0} = 0, \forall n < n_0. \end{aligned}$$



故此时  $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**例题 9.59** 设  $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}, n \in \mathbb{N}$ . 证明:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$  收敛并求值.

**注**  $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \dots\}$ .

**注** 级数可求值的情况只有两种:

1. 级数通项可求.

2. 级数通项可以写成裂项形式.

**证明** 归纳易得  $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ . 注意到

$$a_{n+1} + (n+1)a_na_{n+1} = na_n^2 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} = na_n - (n+1)a_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故  $\{na_n\}$  递减且有下界 0. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ , 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1}{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} [ka_k - (k+1)a_{k+1}] = \frac{1}{2} + a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1 - a < +\infty.$$

由  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < +\infty$  知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ , 从而存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$a_{k+1} \leq \frac{1}{2}a_k, \forall k \geq N.$$

于是对  $n \geq N$ , 有

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n \leq \frac{1}{2^2}a_n \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-N+1}}a_N.$$


因此

$$na_n \leq \frac{n}{2^{n-N+1}}a_N \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

故  $a = 0$ , 从而  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ . □

**例题 9.60** 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调递减的正数列并且满足  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ , 并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}} = +\infty$$

 **笔记** 利用分组判别的想法.

**证明** 任取  $M > 1$ , 定义

$$A_M \triangleq \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq M \right\}.$$

则

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in A_M} x_n + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A_M} x_n.$$

若  $\sum_{n \in A_M} x_n = +\infty$ , 则

$$\sum_{n \in A_M} x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}} \geq \sum_{n \in A_M} x_n e^{-M} = +\infty.$$

若  $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A_M} x_n = +\infty$ , 显然  $\mathbb{N} \setminus A_M$  中有无穷项, 记  $\mathbb{N} \setminus A_M = \{n_k\}$ , 且满足  $n_k \nearrow +\infty$ , 则

$$x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k+1} < \frac{1}{M}x_{n_k}.$$

从而对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有

$$x_{n_k} \leq \frac{1}{M}x_{n_{k-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{M^{k-1}}x_{n_1} \rightarrow 0.$$

故


$$\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A_M} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M^{k-1}} x_{n_1} < +\infty,$$

这与  $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A_M} x_n = +\infty$  矛盾! 综上所述可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}} \geq \sum_{n \in A_M} x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}} = +\infty.$$

□

**例题 9.61** 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln(1+n)}$  收敛.

 **笔记** 利用分组判别的想法.

**证明**

□

**例题 9.62** 设  $\{\lambda_n\}, \{a_n\} \subset \mathbb{R}$ .

1. 如果对任何收敛于 0 的数列  $\{\lambda_n\}$  都有  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛.
2. 设  $p > 1$ , 如果对任何  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty$  都有  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty$ , 这里  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**证明**

1. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ , 记  $S_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ , 取  $\lambda_n = \frac{\operatorname{sgn} a_n}{S_n}$ , 故由 **命题 9.3** 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{S_n} = +\infty$$

矛盾!

2. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q = +\infty$ , 记  $S_n = \sum_{k=1}^n |a_k|^q$ , 取  $\lambda_n = \frac{|a_n|^{q-1} \operatorname{sgn} a_n}{S_n}$ , 则由  $p > 1$  和 **命题 9.3** 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^q}{S_n^p} < +\infty.$$

再由 **命题 9.3** 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^q}{S_n} = +\infty.$$

矛盾!

□

**例题 9.63** 设  $a_n$  递减到 0 且  $b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0, n = 1, 2, \dots$ , 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} n b_n$  收敛并计算值.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n b_n &= \sum_{n=1}^m n (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^m n [(a_n - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_{n+2})] \\ &\stackrel{\text{Abel 变换}}{=} \sum_{j=1}^{m-1} (j - (j+1)) \sum_{i=1}^j [(a_i - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_{i+2})] + m \sum_{i=1}^m [(a_i - a_{i+1}) - (a_{i+1} - a_{i+2})] \\ &= - \sum_{j=1}^{m-1} [(a_1 - a_2) - (a_{j+1} - a_{j+2})] + m [(a_1 - a_2) - (a_{m+1} - a_{m+2})] \\ &= a_1 - a_2 + a_2 - a_{m+1} - m(a_{m+1} - a_{m+2}) \\ &= a_1 - (m+1)a_{m+1} + m a_{m+2} \end{aligned}$$

$$= a_1 - (m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) - a_{m+2}.$$

由  $b_n = (a_n - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_{n+2}) \geq 0$  可知,  $\{a_n - a_{n+1}\}$  单调递减. 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a_1 < +\infty.$$

因此由命题 9.2 可知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) = 0.$$

于是

$$\sum_{n=1}^m nb_n = a_1 - (m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) - a_{m+2} \rightarrow a_1, m \rightarrow \infty.$$

□

**例题 9.64** 设  $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, +\infty)$  满足

$$b_{n+1} - b_n \geq \delta > 0, n = 1, 2, \dots$$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_n)}}{b_n b_{n+1}} < +\infty.$$

**证明** 由均值不等式可知

$$\begin{aligned} \frac{n \sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_n)}}{b_n b_{n+1}} &\leq \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{b_n b_{n+1}} = \frac{\delta \sum_{j=1}^n a_j b_j}{\delta b_n b_{n+1}} \\ &\leq \frac{b_{n+1} - b_n}{\delta b_n b_{n+1}} \sum_{j=1}^n a_j b_j = \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) \sum_{j=1}^n a_j b_j. \end{aligned}$$

由  $b_{n+1} - b_n > \delta > 0$  可得

$$b_n \geq b_1 + (n-1)\delta \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_n)}}{b_n b_{n+1}} &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) a_j b_j \leq \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \left( \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) a_j b_j \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \sum_{n=j}^{\infty} \left( \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \sum_{n=j}^{\infty} \left( \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} a_j < +\infty. \end{aligned}$$

□

**例题 9.65** 设

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) a_k, n = 1, 2, \dots$$

若  $\sum_{k=1}^{\infty} |S_k - T_k|^2 < \infty$ , 证明:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ .

**证明** 注意到

$$T_n = S_n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k a_k,$$

故由条件可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S_n - T_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n ka_k\right)^2}{(n+1)^2} < +\infty. \quad (9.41)$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=1}^n ka_k \\ &\stackrel{\text{Abel 变换}}{=} \sum_{j=1}^{m-1} (-(j+1)a_{j+1}) \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \sum_{j=1}^m ja_j \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{m-1} ja_{j+1} + \frac{m}{m+1} \sum_{j=1}^m ja_j \\ &= \frac{m}{m+1} a_1 + \frac{m}{m+1} \sum_{j=2}^m ja_j - \sum_{j=2}^m (j-1)a_j \\ &= \frac{m}{m+1} a_1 + \sum_{j=2}^m a_j - \frac{1}{m+1} \sum_{j=2}^m ja_j \\ &= \sum_{j=1}^m a_j - \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^m ja_j \\ &= S_m - \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^m ja_j. \end{aligned} \quad (9.42)$$

由 (9.41) 式得

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n ka_k\right)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n ka_k\right)^2}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n} = 0.$$

因此只须证  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} < +\infty$ , 即可由 (9.42) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^m ja_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} < +\infty.$$

下证  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} < +\infty$ . 由均值不等式和 (9.41) 式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\sum_{k=1}^n ka_k\right)^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} \right] < +\infty.$$

故结论得证. □

**例题 9.66** 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$  满足  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} = 1$ , 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n^2} \leq 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} < 1.$$

**证明**

□

**例题 9.67** 设  $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$  满足

(1)  $a_n - a_{n+1}$  递减;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = +\infty$$

**证明** 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+1}) = 0 \implies a_n - a_{n+1} \geq 0.$$

从而  $\{a_n\} \searrow 0$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2}.$$

注意到

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1}) \\ &\leq (a_n - a_{n+1}) \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}), \end{aligned}$$

又  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1})} = +\infty.$$

□

**例题 9.68** 设  $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, x > 0$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$  收敛的充要条件是  $a_0 = a_1 = 0$ .

**证明** 令  $g(x) = \phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , 则  $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ . 于是

$$g(x) = a_0 + a_1 x + O(x^2), x \rightarrow 0.$$

从而

$$\phi(n) = g\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_0 + \frac{a_1}{n} \right) < +\infty \iff a_0 = a_1 = 0.$$

□

## 9.6 特殊级数

命题 9.12 ( $\frac{\sin x}{x}$  因式分解)

对任意  $x$  都有  $\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ , 这里  $x$  可以为复数.

证明

□

命题 9.13

1.  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right).$
2.  $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}+x} \right).$
3.  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n\pi)^2}.$
4.  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right).$

证明

1. 对命题 9.12 中级数两边同时取对数得

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right).$$

两边同时求导得

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2x}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right).$$

故

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right).$$

2. 由第 1 问及  $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$  可得

$$\begin{aligned} \tan x &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x + n\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x - n\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} + x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} + x} \right). \end{aligned}$$

3.

4.

□

## 第十章 Fourier 级数

### 10.1 Fourier 级数及基本性质

我们首先需要熟悉傅立叶级数的现代形式:

#### 定义 10.1

设  $f$  是周期 1 的可积函数, 则定义  $f$  的傅立叶系数为

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx, m \in \mathbb{Z}.$$

$f$  的傅立叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}.$$



**注** 定义 10.1 中的傅立叶级数(??)不意味着收敛到  $f$  或者收敛.

#### 定义 10.2

对每个  $N \in \mathbb{N}_0$ ,

1. 我们称

$$D_N(x) = \sum_{|m| \leq N} e^{2\pi i m x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N+1} [D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_N(x)] \\ &= \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x} \\ &= \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2 \end{aligned}$$

为 **Fejr 核**.



**注** 定义 10.2 中的等式关系都是等比数列求和和欧拉公式, 二重求和换序的应用. 我们略去证明

下面我们在高数框架下给出 Dirichlet 核和 Fejr 核, 为了形式上的统一, 我们定义

#### 定义 10.3

对每个  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

1. 我们称

$$D_0(x) = 1, D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, n = 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x) = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \cos kx = \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \right]^2 \quad (10.2)$$

为 **Fejr 核**.



**证明** 证明的关键是如下结论

**结论** [三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法] 三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法可以通过欧拉公式之后用等比数列求和公式或者乘  $\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$  之后对分子和差化积得到.

1. 我们有

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{x}{2} \cos kx}{2 \sin \frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n [\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)x] \\ &= 1 + \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

我们证明了式(10.1)式.

2. 我们有

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x) = \frac{1}{n+1} \left( 1 + \sum_{j=1}^n \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^j \cos kx \right) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( n+1 + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \cos kx \right) = \frac{1}{n+1} \left( n+1 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \cos kx \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( n+1 + 2 \sum_{k=1}^n (n-k+1) \cos kx \right) = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \cos kx, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{\sin \left(j + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{j=0}^n \sin \left(j + \frac{1}{2}\right)x = -\frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{j=0}^n [\cos(j+1)x - \cos jx] \\ &= -\frac{\cos(n+1)x - 1}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

这就证明了(10.2)式.

□

### 定理 10.1 (傅立叶部分和积分表达式)

设  $f$  是周期  $2\pi$  的可积函数, 其傅立叶系数为  $a_n, b_n$ . 记  $S_0(x) = \sigma_0(x) = \frac{a_0}{2}$  以及

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x), n = 1, 2, \dots$$

则我们有


**Dirichlet :**

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt, n = 0, 1, \dots$$

**Fejr :**

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt, n = 0, 1, \dots$$

♡

 **笔记** 根据经验, 取平均性质会更好一些, 因此 Fejér 是一个好核而 Dirichlet 核性质就相当糟糕, 在后面的证明中我们将充分感受到这一点.



**证明** 当  $n = 0$ , 这个定理显然成立. 当  $n > 0$ , 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky \cos kx dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky \sin kx dy \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos k(y-x) dy \right) \\
 &\stackrel{\text{注意周期 } 2\pi}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) dy + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) 2 \cos ky dy \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos ky \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y) dy.
 \end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_j(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) F_n(y) dy.
 \end{aligned}$$

这就证明了这个定理. □

### 定理 10.2 (Fourier 级数的逐项积分定理)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则  $f(x)$  的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意  $c, x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

### 定理 10.3 (Fourier 级数的逐项微分定理)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$ , 且除了有限个点外  $f(x)$  可导. 进一步假设  $f'(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积 (注意:  $f'(x)$  在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则  $f'(x)$  的 Fourier 级数可由  $f(x)$  的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x) \sim \frac{d}{dx} \left( \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx).$$

### 推论 10.1

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  是某个在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  收敛.

**定理 10.4 (Bessel 不等式)**

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或平方可积, 则  $f(x)$  的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$



**笔记** 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

**定理 10.5 (Parseval 恒等式)**

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或平方可积, 则  $f(x)$  的 Fourier 系数满足恒等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

**引理 10.1**

设  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续可微函数, 且  $f(-\pi) = f(\pi)$ .  $a_n, b_n$  为  $f$  的 Fourier 系数,  $a'_n, b'_n$  为  $f$  的导函数  $f'$  的 Fourier 系数, 证明

$$a'_0 = 0, a'_n = nb_n, b'_n = -na'_n (n = 1, 2, \dots).$$



**注** 分部积分的条件, 需要  $f$  的导函数  $f'$  在积分区域上连续.

**证明** 由于  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续可微函数, 因此  $f' \in C([-\pi, \pi])$ . 又  $f(\pi) = f(-\pi)$ , 故

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n (n = 1, 2, \dots), \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na'_n (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

因此结论得证. □

**例题 10.1** 设  $f$  以  $2\pi$  为周期且具有二阶连续的导函数, 证明  $f$  的 Fourier 级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛于  $f$ .

**证明** 因为  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的具有二阶连续导数的函数, 故  $f(x), f'(x)$  可展开成傅里叶级数, 不妨设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx).$$

先证  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  收敛. 由引理 10.1 可知

$$a'_0 = 0, a'_n = nb_n, b'_n = -na'_n (n = 1, 2, \dots),$$

从而

$$|a_n| + |b_n| = \frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ (b'_n)^2 + \frac{1}{n^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ (a'_n)^2 + \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2]. \quad (10.3)$$

又由 Bessel 不等式可知

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx < +\infty.$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2]$  收敛. 再结合  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛及 (10.3) 式可知  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  收敛, 进而  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  收敛. 注意到

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|), \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

因此由 Weierstrass 判别法可知,  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛, 即  $f$  的 Fourier 级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛于  $f$ . □

## 第十一章 多元函数

### 11.1 多元函数的连续性和微分

我们的极限采用聚点定义, 即只需要沿着有定义的地方趋近即可.

**例题 11.1** 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , 证明  $f$  沿着每条射线  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, & t > 0, \alpha \in [0, 2\pi) \\ y = t \sin \alpha, & t > 0, \alpha \in [0, 2\pi) \end{cases}$  趋于  $(0, 0)$

时都趋于 0, 但是  $f$  在  $(0, 0)$  不连续.

**笔记** 本结果表明, 使用极坐标求二重极限不一定正确. 实际上, 我们用极坐标求二重根极限时, 都是固定  $\alpha$ , 再令  $t \rightarrow 0$  求极限. 因此得到的只是沿着每个过原点的射线 (与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ ) 趋于  $(0, 0)$  的极限, 比如还可以沿  $y = kx^2$  这条曲线趋于  $(0, 0)$ .

**证明** 一方面,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3 \cos \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \cos \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = 0,$$

另外一方面

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, kx^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

故  $f$  在  $(0, 0)$  不连续. 矛盾! □

**注** 实际上, 使用极坐标变换求极限时, 只需要在  $t \rightarrow 0$  的时候让  $\alpha$  也发生变化 (不再固定  $\alpha$ ), 再求极限才能得到正确的极限值, 但这样反而不方便求极限.

那么什么时候固定  $\alpha$  后求出来的极限就是原函数的极限呢? 实际上只需要极限关于  $\alpha \in [0, 2\pi)$  一致, 因为你直接考察定义  $\varepsilon - \delta$  语言即可. 实际做题中可以体现为

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{\alpha \in [0, 2\pi)} |f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - A| = 0$$

更直白的, 你需要得到形如

$$|f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - A| \leq g(t)$$

的不等式且  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$ .

#### 命题 11.1

设二元函数  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  的某个去心邻域内有定义, 若对  $\forall \alpha \in [0, 2\pi)$ , 都有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha) = A \in \mathbb{R},$$

并且

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{\alpha \in [0, 2\pi)} |f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - A| = 0,$$

或者存在函数  $g(t)$  满足对  $\forall \alpha \in [0, 2\pi)$ , 都有

$$|f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha) - A| \leq g(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0,$$

则

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = A.$$

**证明** 显然条件  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{\alpha \in [0, 2\pi)} |f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - A| = 0$  和条件存在函数  $g(t)$  满足对  $\forall \alpha \in [0, 2\pi)$ , 都有

$$|f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha) - A| \leq g(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$$

等价. 由  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$  知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|g(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in (0, \delta).$$

对  $\forall (x, y)$ , 满足  $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ , 令

$$t = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{y-b}{x-a},$$

则  $x = a + t \cos \alpha, y = b + t \sin \alpha$ . 于是

$$|f(x, y) - A| = |f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha) - A| \leq g(t) < \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in B((a, b), \delta).$$

□

### 例题 11.2 计算

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$$

**证明** 考虑

$$|f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)| = t^2 \left| \frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right| = t^2 |\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha| \leq 2t^2,$$

于是

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} |f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)| \leq 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 = 0$$

故我们得到了


$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x + y} = 0.$$

□

### 例题 11.3 设 $f$ 在 $(0, 0)$ 连续且满足

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - xy}{x^2 + y^2} = a > 0$$

求  $a$  的范围使得  $f$  在  $(0, 0)$  一定取到极值. 再求  $a$  的范围使得  $f$  在  $(0, 0)$  一定取不到极值.

 **笔记** 注意到  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  不存在, 但是

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

即猜测  $\frac{1}{2}$  是  $a$  的分界点.

**证明** 由条件容易得到

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - xy}{x^2 + y^2} &= a \\ \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= a \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0 \\ \implies f(0, 0) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \end{aligned}$$

以及

$$f(x, y) = (a + g(x, y))(x^2 + y^2) + xy, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0.$$

当  $a > \frac{1}{2}$ , 当  $(x, y)$  足够靠近 0 使得  $g(x, y) > \frac{1}{2} - a$ . 此时我们有

$$f(x, y) = (a + g(x, y))(x^2 + y^2) + xy > \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy = \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq 0$$

故  $a > \frac{1}{2}$  时,  $f$  在  $(0, 0)$  处取得极小值.

当  $0 < a < \frac{1}{2}$ , 当  $(x, y)$  足够靠近 0 使得  $-a < g(x, y) < \frac{1-2a}{4}$ , 则此时当  $x > 0, y > 0$  有  $f(x, y) > 0$ . 但是

$$f(x, y) = (a + g(x, y))(x^2 + y^2) + xy < \frac{1+2a}{4}(x^2 + y^2) + xy$$

又  $\frac{1+2a}{4}(x^2 + y^2) + xy$  在  $y = -x$  上有

$$\frac{1+2a}{4}2x^2 - x^2 = \frac{2a-1}{2}x^2 < 0,$$

故此时  $(0, 0)$  不是  $f$  的极值点.

当  $a = \frac{1}{2}$  问题无法判断, 这是因为考虑  $f(x, y) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2(x^2 + y^2)$ , 则

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2(x^2 + y^2) > 0,$$

即  $(0, 0)$  是极值. 但是考虑  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy - x(x^2 + y^2)$ , 就有

$$f(x, -x) = x^2 - x^2 - 2x^3 = -2x^3 < 0, x > 0,$$

$$f(x, x) = x^2 + x^2 - 2x^3 = 2x^2 - 2x^3 > 0, 0 < x < 1.$$

即  $(0, 0)$  不是极值. □

### 定理 11.1

设  $u = f(x, y), v = g(x, y)$  在区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上有连续偏导数, 则  $u$  与  $v$  之间有函数关系当且仅当

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

**证明** 必要性. 假定  $u, v$  满足  $F(u, v) = 0$ , 则由  $F(u, v) = F[f(x, y), g(x, y)]$  可知

$$F'_u \cdot f'_x + F'_v g'_x = 0, \quad F'_u f'_y + F'_v g'_y = 0.$$

注意到  $F'_u, F'_v$  不同时为 0, 故上述方程组存在非零解, 从而有  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ .

充分性. 若  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$  全为 0, 则  $u, v$  是常数, 从而有关系  $u = cv$ . 若上述四个值有一个非 0, 例如是  $v'_y \neq 0$ , 则由隐函数存在定理, 可从  $v = g(x, y)$  可确定函数  $y = \psi(x, v)$ . 代入  $u = f(x, y)$  可得  $u = f(x, \psi(x, v))$ , 记为  $F(x, v)$ . 因此, 我们有

$$0 = J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_x + F'_v v'_x & F'_v v'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = F'_x v'_y.$$

由此知  $F'_x = 0$ . 这说明  $F$  不是  $x$  的函数, 即  $u = F(v)$ . □

**例题 11.4** 设  $xf'_x + yf'_y = 0$ , 证明  $f$  是  $\frac{y}{x}$  的函数.

**证明** 注意到

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} (xf'_x + yf'_y) = 0, \quad \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

我们由定理 11.1 知  $f$  是  $\frac{y}{x}$  的函数. □

### 定理 11.2 (用矩阵判定极值)

设  $f$  是某个区域  $V \subset \mathbb{R}^n$  的二阶连续可微函数, 我们定义其 Hess(黑塞) 矩阵为

$$Hf = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

则对  $\mathbf{x}_0 \in V$  满足  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$  有

1.  $Hf(\mathbf{x}_0)$  是正定的, 则  $\mathbf{x}_0$  是  $f$  严格极小值点;

2.  $Hf(\mathbf{x}_0)$  是负定的, 则  $\mathbf{x}_0$  是  $f$  严格极大值点;
3.  $Hf(\mathbf{x}_0)$  是不定的 (既不是正定, 也不是负定), 则  $\mathbf{x}_0$  不是  $f$  极值点;
4. 若  $\mathbf{x}_0$  是  $f$  极小值点, 则  $Hf(\mathbf{x}_0)$  是半正定的;
5. 若  $\mathbf{x}_0$  是  $f$  极大值点, 则  $Hf(\mathbf{x}_0)$  是半负定的.



证明

□

### 定义 11.1

我们称  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为齐  $n(n \in \mathbb{N})$  次函数, 如果  $f$  满足

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}, t > 0.$$



### 命题 11.2 (齐次函数基本性质)

若  $f \in D^2(\mathbb{R}^2)$ , 则  $f$  是齐  $n$  次函数的充要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$



证明 若  $f$  是齐  $n$  次函数, 则

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}, t > 0.$$

两边对  $t$  求导得

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = nt^{n-1} f(x, y),$$

于是

$$tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = nt^n f(x, y) = nf(tx, ty),$$

再令  $\mathbf{x} = tx, \mathbf{y} = ty$ , 即证.

反过来若

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

成立, 固定  $x, y \in \mathbb{R}$  并考虑  $g(t) = f(tx, ty)$ . 则有

$$tg'(t) = tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = nf(tx, ty) = ng(t).$$

故解微分方程得  $g(t) = Ct^n$ , 从而将  $g(1) = f(x, y)$  代入得  $C = f(x, y)$ , 于是

$$g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

这就证明了

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}, t > 0.$$

□

**例题 11.5** 设  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  且  $u(0, y) = y^2, u(x, 1) = \cos x$ , 求  $u$ .

**证明** 对  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  两边关于  $y$  积分得  $\frac{\partial u}{\partial x} + u = C(x)$ . 由  $u(x, 1) = \cos x$  得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 1) = -\sin x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1) + u(x, 1) = C(x) = \cos x - \sin x.$$

又

$$\frac{\partial(ue^x)}{\partial x} = e^x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) = e^x(\cos x - \sin x) \Rightarrow ue^x = e^x \cos x + C_2(y),$$

我们有

$$u(x, y) = \cos x + C_2(y)e^{-x}.$$

现在

$$y^2 = u(0, y) = 1 + C_2(y) \Rightarrow C_2(y) = y^2 - 1.$$

故

$$u(x, y) = \cos x + (y^2 - 1)e^{-x}.$$

□

**例题 11.6** 设  $l_1, l_2$  夹角为  $\varphi \in (0, \pi)$  且  $f$  连续可微, 证明

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \leq \frac{2}{\sin^2 \varphi} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial l_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|^2 \right].$$

**证明** 由可微时方向导数计算公式有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l_1} &= \cos a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin a \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} &= \cos(a + \varphi) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(a + \varphi) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial l_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} & \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} \\ \frac{\partial f}{\partial l_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 a + \cos^2(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a \\ \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a & \sin^2 a + \sin^2(a + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用

$$\begin{pmatrix} \cos^2 a + \cos^2(a + \varphi) & \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a \\ \sin(a + \varphi) \cos(a + \varphi) + \sin a \cos a & \sin^2 a + \sin^2(a + \varphi) \end{pmatrix}$$

的特征值为  $1 \pm \cos \varphi$  和 **Rayleigh quotient(瑞丽商)** 的基本性质, 我们知道

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \leq \frac{1}{1 - |\cos \varphi|} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial l_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|^2 \right] \leq \frac{2}{\sin^2 \varphi} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial l_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|^2 \right],$$

即证. 上式最后一个不等式是因为


$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - |\cos \varphi|} &\geq \frac{2}{\sin^2 \varphi} \\ \Leftrightarrow 1 - |\cos \varphi| &\leq \frac{\sin^2 \varphi}{2} \\ \Leftrightarrow 2 - 2|\cos \varphi| &\leq 1 - \cos^2 \varphi \\ \Leftrightarrow \cos^2 \varphi - 2|\cos \varphi| + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (|\cos \varphi| - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$



□

**例题 11.7** 设  $D$  为单位圆盘, 考虑  $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$  且  $|f| \leq 1$ , 证明: 存在  $D$  中的一个点  $(x_0, y_0)$  使得

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|^2 \leq 16.$$

 **笔记** 摄动想法, 考虑  $g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$ , 其中  $\varepsilon$  待定. 此外很多同学疑惑构造函数咋来的, 实际上这是完全没有必要的! 因为大家几乎都是记的. 本题有一些更高端的技术可以加强到最佳系数.

**证明** 考虑  $g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$ , 则由  $|f| \leq 1$  知  $g|_{\partial D} \geq 1$ ,  $g(0, 0) = f(0, 0) \leq 1$ . 故  $g$  最小值在  $D$  内取到. 又由  $g \in C(D)$ , 从而存在  $D$  中的一个  $g$  的最小值点  $(x_0, y_0)$  使得  $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ , 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -4x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -4y_0,$$

这就得到了证明. □

### 命题 11.3


设  $f(x, y)$  是  $D$  上的二元函数且偏导数都存在, 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , 则

$$\begin{aligned} r \frac{\partial g}{\partial r} &= x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

**证明** 直接求导得证. □

**例题 11.8** 设  $\lim_{r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = a > 0$ , 证明  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  取得最小值.

**注** 本题关键是有个隐藏条件: 条件极限关于角度  $\theta$  的一致性.

 **笔记** 积累想法设  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , 则

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

即联想命题 11.3.

**证明** 注意到


$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r g'_r = \lim_{r \rightarrow +\infty} r \frac{\partial g}{\partial r} = a > 0,$$

于是存在  $r_0 > 0$  使得  $g'_r > 0, \forall r \geq r_0$ . 则此时

$$g(r, \theta) \geq g(r_0, \theta), \forall r \geq r_0, \theta \in [0, 2\pi),$$

故  $g$  的最小值在  $D = \{(r, \theta) : r \in [0, r_0], \theta \in [0, 2\pi)\}$  取到, 因此  $\min_{\substack{r \in [0, r_0], \\ \theta \in [0, 2\pi]}} g(r, \theta)$  为  $g$  最小值. □

**例题 11.9** 设  $f$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续可微函数且  $f(0, 1) = f(1, 0)$ , 证明存在单位圆周上两个不同的点使得  $y \frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial f}{\partial y}$ .

 **笔记** 联想命题 11.3.

**证明** 令  $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ , 考虑  $g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$ , 注意到

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(2\pi).$$

由 Rolle 中值定理知, 存在  $\theta_1 \neq \theta_2 \in [0, 2\pi)$ , 记  $x_i = \cos \theta_i, y_i = \sin \theta_i (i = 1, 2)$ , 使得

$$\begin{aligned} g'(\theta_1) &= g'(\theta_2) = 0 \\ \iff \begin{cases} -\sin \theta_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\cos \theta_1, \sin \theta_1) + \cos \theta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(\cos \theta_1, \sin \theta_1) = 0, \\ -\sin \theta_2 \frac{\partial f}{\partial x}(\cos \theta_2, \sin \theta_2) + \cos \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\cos \theta_2, \sin \theta_2) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1), \\ y_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) = x_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2). \end{cases}$$

即单位圆周上有两个不同的点, 使得  $y \frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial f}{\partial y}$ . □

### 例题 11.10

1. 设  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(0, 0) = 0$  且  $|\nabla f| \leq 1$ , 证明  $|f(1, 2)| \leq \sqrt{5}$ .
2. 设  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(0, 0) = 0$  且

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq 2|x - y|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2|x - y|,$$

证明:  $|f(5, 4)| \leq 1$ .

**注** 梯度及其模定义为  $\nabla f \triangleq \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ,  $|\nabla f| \triangleq \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$ .

**注** 第二问如果和上一问完全类似, 取积分路径为连接  $(0, 0)$ ,  $(5, 4)$  的线段, 那么由第一型曲线积分和第二型曲面积分的联系和 **Cauchy 不等式 (离散版本)** 我们有

$$\begin{aligned} |f(5, 4)| &= \left| \int_{(0,0)}^{(5,4)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \right| = \left| \int_{(0,0)}^{(5,4)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\widehat{t, x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\widehat{t, x}) \right) ds \right| \\ &\leq \int_{(0,0)}^{(5,4)} |\nabla f| ds \leq \sqrt{8} \int_{(0,0)}^{(5,4)} |x - y| ds \\ &= \frac{\sqrt{8}}{5} \int_0^5 x \sqrt{1 + \left( \frac{4}{5} \right)^2} dx = \sqrt{82}. \end{aligned}$$

其中  $(\cos(\widehat{t, x}), \sin(\widehat{t, y}))$  为积分路径曲线正切向的方向余弦. 没能成功的原因就是两类曲线积分转换时的损失, 没有充分利用题目条件: 当  $y = x$  时,  $f$  的两个偏导数都为 0. 上述证明中选取的积分路径与  $y = x$  这条直线关系不大.

### 证明

1. 注意到

$$f(1, 2) - f(0, 0) = \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)$$

这里积分路径待定. 于是由第一型曲线积分和第二型曲面积分的联系和 **Cauchy 不等式 (离散版本)** 得

$$\begin{aligned} |f(1, 2)| &= \left| \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\widehat{t, x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\widehat{t, x}) \right) ds \right| \\ &\leq \int_{(0,0)}^{(1,2)} |\nabla f| ds \leq \int_{(0,0)}^{(1,2)} 1 ds \end{aligned}$$

其中  $(\cos(\widehat{t, x}), \sin(\widehat{t, y}))$  为积分路径曲线正切向的方向余弦. 为了得到这个方法最佳的估计, 我们取积分路径为连接  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  的线段, 这恰好给出了  $|f(1, 2)| \leq \sqrt{5}$ .

2. 先沿着  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 4$  积分, 此时知积分  $\int_{(0,0)}^{(4,4)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)$  为 0. 于是

$$\begin{aligned} |f(5, 4)| &= \left| \int_{(0,0)}^{(5,4)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \right| = \left| \int_{(4,4)}^{(5,4)} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \right| \\ &= \left| \int_4^5 \frac{\partial f}{\partial x} dx \right| \leq 2 \int_4^5 |x - 4| dx = 1. \end{aligned}$$

□

## 第十二章 无理数初步

### 定理 12.1 (狄利克雷定理)

对于无理数  $a$ , 则存在无穷多对互素的整数  $p, q$  使得  $\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$ , 而对有理数  $a$ , 这样的互素整数对  $(p, q)$  只能是有有限个.



**笔记** 这通常称为“**齐次逼近**”, 证明利用抽屉原理即可.

### 推论 12.1

对于实数  $a$ , 则  $a$  为无理数当且仅当任意  $\varepsilon > 0$ , 存在整数  $x, y$  使得  $0 < |ax - y| < \varepsilon$ .



**证明** 对任意正整数  $N$ , 将  $[0, 1]$  均分为  $N$  个闭区间, 每一个长度  $\frac{1}{N}$ , 则  $n+1$  个数  $0, \{a\}, \{2a\}, \dots, \{Na\}$  全部落在  $[0, 1]$  中, 根据抽屉原理必定有两个数落入同一区间, 也即存在  $0 \leq i < j \leq N$  使得  $\{ia\}, \{ja\} \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ . 注: 因为  $a$  是无理数, 所以任意  $i \neq j$  都一定有  $\{ia\} \neq \{ja\}$ , 否则  $ia - [ia] = ja - [ja]$  意味着  $a$  是有理数. 所以

$$|\{ia\} - \{ja\}| = |(j-i)a - M| \leq \frac{1}{N} \Rightarrow \left|a - \frac{M}{j-i}\right| \leq \frac{1}{N(j-i)}$$

这里  $M$  是一个整数, 现在不一定有  $M$  与  $j-i$  互素, 但是我们可以将其写成既约分数  $M = up, j-i = uq$ , 其中  $(p, q) = 1, u \in \mathbb{N}^+$ , 代入得到: 对任意正整数  $N$ , 都存在互素的整数  $p, q$ , 其中  $1 \leq q \leq N$  是正整数, 使得  $\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$ . 现在还没有说明“无穷多个”, 采用反证法, 假如使得  $\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$  成立的互素的整数  $(p, q)$  只有有限对, 记为  $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m)$ , 那么 (在上面证明的结论里面) 依次取  $N = 3, 4, \dots$ , 则每一个  $N$  都能够对应这  $m$  对  $(p, q)$  中的某一个, 而  $N = 3, 4, \dots$  是无限的,  $m$  是有限的, 所以必定有一个  $(p_i, q_i)$  对应了无穷多个正整数  $N$ . 不妨设  $i = 1$ , 换句话说: 存在一系列正整数  $N_k$  单调递增趋于正无穷, 使得  $\left|a - \frac{p_1}{q_1}\right| \leq \frac{1}{N_k q_1}$  恒成立, 令  $k \rightarrow \infty$  可知  $a = \frac{p}{q}$  是有理数, 导致矛盾.

而如果  $a = \frac{m}{n}$  是有理数, 但是有无穷个互素的  $(p, q)$  使得  $\left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$ , 则当  $q$  充分大时, 所有这些  $(p, q)$  中的  $p$  也都会充分大 (相当于同时趋于无穷), 然而不等式等价于  $\frac{1}{q} \geq \frac{|mq - np|}{n}$ , 则当  $p, q$  都充分大时  $mq - np \neq 0$  (不然会导致  $p|mq$  结合互素有  $p|m$  (对充分大的  $p$  均成立), 显然矛盾), 于是  $\frac{1}{q} \geq \frac{|mq - np|}{n} \geq \frac{1}{n}$  导致  $q$  有上界, 还是矛盾, 结论得证.  $\square$

## 第十三章 求和与求积符号

### 13.1 求和符号

定义 13.1 (空和 (Empty sum))

$$\sum_{i=b+1}^b f(i) \triangleq 0, b \in \mathbb{Z}. \quad (13.1)$$

定理 13.1 (关于求和号下限大于上限的计算)

$$\sum_{i=a}^c f(i) \equiv - \sum_{i=c+1}^{a-1} f(i), a, c \in \mathbb{Z} \text{ 且 } a > c. \quad (13.2)$$

 **笔记** 上述空和的定义与关于求和号下限大于上限的计算定理都来自论文: Interpreting the summation notation when the lower limit is greater than the upper limit(Kunle Adegoke).

定理 13.2 (求和号基本性质)

1. (倒序求和) 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

 **笔记**

1. 看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下将其转化为倒序求和的形式.

#### 13.1.1 求和号交换顺序

定理 13.3 (基本结论)

1. 当  $n, m$  均为非负整数时, 有

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

2. 当  $n, m$  均为非负整数,  $p \leq n, q \leq m$  且  $p, q \in \mathbb{N}_+$  时, 有

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}.$$

3. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}.$$

4. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$


5. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j.$$

6. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \geq 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j.$$



 **笔记** 如果上述命题第 1 条中的  $n$  或  $m$  取到无穷, 第 2 条中的  $n$  取到无穷, 则求和号不能直接交换顺序. 此时, 往往要添加一个条件, 相应的交换和号的结论才能成立. 比如, 著名的 *Fubini* 定理 (见关于无限和的 *Fubini* 定理).

**证明** 1. 利用矩阵证明该结论.

设一个  $m$  行  $n$  列的矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

则矩阵  $A$  的第  $i$  行的和记为

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

矩阵  $A$  的第  $j$  列的和记为

$$c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和  $r_i, i = 1, 2, \dots, m$  求和也等于所有列和  $c_j, j = 1, 2, \dots, n$  求和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} &= \sum_{i=1}^m r_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}, \\ \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} &= \sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}.$$

2. 同理利用矩阵证明该结论.

设一个  $m$  行  $n$  列的矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} a_{pq} & a_{p,q+1} & \cdots & a_{pm} \\ a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{p+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mq} & a_{m,q+1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵  $A$  的第  $i$  行的和记为

$$r_i = \sum_{j=q}^m a_{ij} \quad (i = p, p+1, \dots, m).$$

矩阵  $A$  的第  $j$  列的和记为

$$c_j = \sum_{i=p}^n a_{ij} \quad (j = q, q+1, \dots, m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和  $r_i, i = p, p+1, \dots, n$  求和也等于所有列和  $c_j, j = q, q+1, \dots, m$  求和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{ij} &= \sum_{i=p}^n r_i = \sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij}, \\ \sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{ij} &= \sum_{j=q}^m c_j = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij} = \sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{ij}.$$

3. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \chi_{i \leq j}(i) \xrightarrow{\text{1. 的结论}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_{i \leq j}(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}.$$

4. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \chi_{i < j}(i) \xrightarrow{\text{1. 的结论}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n a_{ij} \chi_{i < j}(i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij}.$$

5. 结论是显然的.

6. 结论是显然的. □

**注** 设  $X$  是全集, 对任意集合  $A \subset X$ , 把函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

称为集合  $A$  的示性函数.

**例题 13.1** 计算

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)}.$$

**解** 令  $I = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} \xrightarrow[\text{(轮换换元)}]{\text{将 } i \text{ 换成 } j, \text{ 换成 } i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i+j}{2^{i+j}(i+j)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2^n} \right]^2. \end{aligned}$$

□

**例题 13.2** 记

$$T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b, c \text{ 可以构成某个三角形的三边长}\}.$$

证明:

$$\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}.$$

 **笔记** 核心想法: 两个集合间可以建立一一映射.

**结论** 若  $x, y, z \in \mathbb{N}_+$ ,  $x, y, z$  具有相同奇偶性的充要条件为

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c, \text{ 其中 } a, b, c \in \mathbb{N}_+.$$

**证明** 必要性显然. 下面证明充分性. 假设  $x, y, z$  具有不同的奇偶性, 则不妨设  $x, z$  为奇数,  $y$  为偶数. 从而  $x + y$  一定为奇数, 这与  $x + y = 2a$  矛盾. 故  $x, y, z$  具有相同奇偶性.  $\square$

**证明** 设  $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b, c \text{ 可以构成某个三角形的三边长}\}$ .

$$\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}.$$

记  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x, y, z \text{ 有相同的奇偶性}\}$ , 则对  $\forall (x, y, z) \in S$ , 取  $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{z+x}{2}$ . 此时我们有

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{x + 2y + z}{2} > \frac{z + x}{2} = c, \\ b + c &= \frac{x + y + 2z}{2} > \frac{x + y}{2} = a, \\ a + c &= \frac{2x + y + z}{2} > \frac{y + z}{2} = b. \end{aligned}$$

从而  $a, b, c$  可以构成某个三角形的三边长, 即此时  $(a, b, c) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}) \in T$ .

于是我们可以构造映射

$$\tau : S \rightarrow T, (x, y, z) \mapsto (a, b, c) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}).$$

反之, 对  $\forall (a, b, c) \in T$ , 取  $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$ . 此时我们有

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c.$$

从而  $x, y, z$  具有相同的奇偶性, 即此时  $(x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a) \in S$ .

于是我们可以构造映射

$$\tau' : T \rightarrow S, (a, b, c) \mapsto (x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a).$$

因此对  $\forall (x, y, z) \in S$ , 都有  $\tau\tau'(x, y, z) = \tau'(x, y, z) = (x, y, z)$ . 即  $\tau\tau' = I$ . 故映射  $\tau$  存在逆映射  $\tau'$ . 从而映射  $\tau$  是双射.

因此集合  $S$  中的每一个元素都能在集合  $T$  中找到与之一一对应的元素. 于是两和式  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$  和

$\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$  的项数一定相同. 并且任取  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$  中  $(x, y, z)$  所对应的一项  $A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ ,  $\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$  中一定存在与之一一对应的  $\tau(x, y, z)$  所对应的一项  $A_{\tau(x,y,z)}$ . 而  $\tau(x, y, z) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2})$ , 因此  $A_{\tau(x,y,z)} = A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ . 故  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}} = \sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$ .  $\square$

**注** 上述证明中逆映射的构造可以通过联立方程  $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{z+x}{2}$  解出  $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$  得到.

#### 定理 13.4 (关于无限和的 Fubini 定理)

设  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个使得  $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n, m)$  绝对收敛的函数. 那么

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n, m).$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f(n, m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m).$$



**笔记** 这个命题是关于求和号换序的基本结论的推广.

**证明**

□

**例题 13.3** (PutnamA3) 已知  $a_0, a_1, \dots, a_n, x$  是实数, 且  $0 < x < 1$ , 并且满足

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \cdots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

证明: 存在一个  $0 < y < 1$ , 使得

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0.$$

**证明** 由题意可知, 将  $\frac{1}{1-x^{k+1}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 根据幂级数展开可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{+\infty} a_k x^{(k+1)i}.$$

又因为  $0 < x < 1$ , 所以几何级数  $\sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i}$  是绝对收敛的. 从而有限个绝对收敛的级数的线性组合  $\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i}$  也是绝对收敛的. 于是根据关于无限和的 **Fubini 定理** 可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{+\infty} a_k x^{(k+1)i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^{(k+1)i} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i \sum_{k=0}^n a_k x^{ki}.$$

设  $f(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0, y \in (0, 1)$ , 则  $f \in \mathbb{C}(0, 1)$ . 假设对任意的  $y \in (0, 1)$ , 有  $f(y) \neq 0$ . 则  $f$  要么恒为正数, 要么恒为负数. 否则, 存在  $y_1, y_2 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_1) > 0, f(y_2) < 0$ . 那么由连续函数介值定理可知, 一定存在  $y_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_0) = 0$ . 这与假设矛盾. 因此不失一般性, 我们假设  $f(y) > 0, \forall y \in (0, 1)$ . 又由  $0 < x < 1$  可知,  $x^i \in (0, 1)$ . 从而

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i \sum_{k=0}^n a_k x^{ki} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i f(x^i) > 0.$$

这与题设矛盾. 故原结论成立.

□

### 13.1.2 裂项求和

#### 定理 13.5 (基本结论)

(1) 当  $a, b \in \mathbb{Z}$  且  $a \leq b$  时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b [f(n) - f(n+1)] &= f(a) - f(b+1); \\ \sum_{n=a}^b [f(n+1) - f(n)] &= f(b+1) - f(a); \\ \sum_{n=a}^b [f(n) - f(n-1)] &= f(b) - f(a-1); \\ \sum_{n=a}^b [f(n-1) - f(n)] &= f(a-1) - f(b). \end{aligned}$$



(2) 当  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  且  $a \leq b$  时, 有

$$\sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n); \quad (13.3)$$

$$\sum_{n=a}^b [f(n) - f(n+m)] = \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) - \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n). \quad (13.4)$$



**证明** (1) 将求和展开后很容易得到证明.

(2) 因为 (2) 中上下两个式子(13.3)(13.4)互为相反数, 所以我们只证明(13.3)即可.

当  $m \geq 0$  时, 若  $m \leq b-a$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] \\ &= f(a+m) + \cdots + f(b) + f(b+1) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(a+m-1) - f(a+m) - \cdots - f(b) \\ &= f(b+1) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(a+m-1) \\ &= \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) \end{aligned}$$

若  $m > b-a$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) \\ &= f(b+1) + \cdots + f(a+m-1) + f(a+m) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(b) - f(b+1) - \cdots - f(a+m-1) \\ &= f(a+m) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(b) \\ &= \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] \end{aligned}$$

综上, 当  $m \geq 0$  时, 有  $\sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n)$ .

当  $m < 0$  时, 我们有  $-m > 0$ , 从而

$$\begin{aligned} & \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=a+m}^{b+m} [f(n) - f(n-m)] = - \sum_{n=a+m}^{b+m} [f(n-m) - f(n)] \\ &= - \left( \sum_{n=b+m+1}^{b+m-m} f(n) - \sum_{n=a+m}^{a+m-m-1} f(n) \right) = \sum_{n=a+m}^{a-1} f(n) - \sum_{n=b+m+1}^b f(n) \\ &\quad \underline{\underline{\text{求和号下限大于上限}}} \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n). \end{aligned}$$

综上所述, 结论得证. □

**例题 13.4** 1. 对  $m \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{n=1}^m (\sin n^2 \cdot \sin n)$ . 2. 对  $n, m \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)}$ .

**解** 1.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m (\sin n^2 \cdot \sin n) \xrightarrow{\text{积化和差公式}} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [\cos(n^2 + n) - \cos(n^2 - n)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [\cos(n(n+1)) - \cos(n(n-1))] \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(m(m+1)) - 1] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+m} \right)\end{aligned}$$

□

## 13.2 求积符号

### 定义 13.2 (求积符号)

$$\prod_{k=1}^n a_k \triangleq a_1 a_2 \cdots a_n.$$

♣

### 定理 13.6 (基本结论)

当  $p, q \in \mathbb{Z}$  且  $p \leq q$  时, 有

$$\begin{aligned}\prod_{n=p}^q \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a_{q+1}}{a_p}; \\ \prod_{n=p}^q \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{a_p}{a_{q+1}}.\end{aligned}$$

♥

**证明** 由求积符号定义很容易得到证明.

□

**注** 对于正数列的乘积, 我们可以通过取对数的方式, 将其转化为  $\ln \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln a_k$  来研究.

**例题 13.5** 计算:  $\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ .


**解**

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} &= \prod_{k=2}^n \left( \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k(k+1)+1}{k(k-1)+1} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{3 \cdot 4 \cdots n+1} \cdot \frac{n(n+1)+1}{2+1} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)+1}{3} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2}{3n+3}\end{aligned}$$

□

**例题 13.6** 证明:

$$\frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

 **笔记** 利用“糖水”不等式: 对任意真分数  $\frac{b}{a}$ ,  $a, b, c > 0$ , 都有  $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$  成立.

**证明** 根据“糖水”不等式, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 我们有

$$\begin{aligned}\left[ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]^2 &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right)^2 = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \\ &< \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

故对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $\frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$  成立.

□

## 第十四章 未分类习题

### 14.1 杂题

**例题 14.1** 设  $Y, x_0, \delta > 0$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx.$$

**证明**


$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{Y}} \int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}. \end{aligned}$$

□

**例题 14.2** 设  $f \in C^3[0, x], x > 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, x)$  使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \quad (14.1)$$

若还有  $f'''(0) \neq 0$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x}$ .

 **笔记** 我们当然可以直接用Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x) - f(0))t + f(0) + f''(\xi)t(t-x), t \in [0, x].$$

两边同时对  $t$  在  $[0, x]$  上积分就能得到(14.1)式.

**证明** 设  $K \in \mathbb{R}$  使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t) dt - \frac{y}{2}[f(0) + f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0) + f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y) - f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由  $g(x) = g(0) = 0$  和罗尔中值定理得  $\xi_1 \in (0, x)$  使得  $g'(\xi_1) = 0$ . 注意到  $g'(0) = 0$ . 再次由罗尔中值定理得  $\xi \in (0, x)$  使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即  $K = f''(\xi)$ , 这就得到了(14.1)式. 由(14.1)式得

$$f''(\xi) = -12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0, \xi).$$

于是

$$f'''(\eta) \frac{\xi}{x} = \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} [f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) \frac{\xi}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} [f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \int_0^x f(t) dt + 6x[f(0)+f(x)] - f''(0)x^3}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12f(x) + 6[f(x)+f(0)] + 6xf'(x) - 3f''(0)x^2}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6xf''(x) - 6f''(0)x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'''(0). \end{aligned}$$

因为  $0 < \eta < \xi < x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) = f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}.$$

□

**例题 14.3** 设  $f$  是  $[0, +\infty)$  上的递增正函数. 若  $g \in C^2[0, +\infty)$  满足

$$g''(x) + f(x)g(x) = 0. \quad (14.2)$$

证明: 存在  $M > 0$  使得

$$|g(x)| \leq M, \quad |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \quad \forall x > 0. \quad (14.3)$$

**证明** 对  $\forall x > 0$ , 有  $f$  在  $[0, x]$  上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知  $f \in R[0, x], \forall x > 0, f$  在  $[0, +\infty)$  上内闭连续. 由(14.2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + \int_0^x f(y)g'(y)g(y) dy = 0, \quad \forall x > 0 \quad (14.4)$$

利用  $f$  递增和第二积分中值定理和(14.4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + f(x) \int_{\xi}^x g'(y)g(y) dy = 0, \quad \xi \in [0, x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2 - \frac{1}{2}|g'(0)|^2 + \frac{[f(x)]^2}{2} [g^2(x) - g^2(\xi)] = 0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2 = |g'(0)|^2 - f(x)g^2(x) + f(x)g^2(\xi) \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi). \quad (14.5)$$

另外一方面由(14.2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g'(x)g(x) = 0, \quad \forall x > 0.$$

即

$$\int_0^x \frac{g''(y)g'(y)}{f(y)} dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \forall x > 0$$

由  $f$  递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)} \int_0^{\eta} g''(y)g'(y) dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \eta \in [0, x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)} [ |g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2 ] + \frac{1}{2} g^2(x) - \frac{1}{2} g^2(0) = 0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)} [ |g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2 ] \leq g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \quad (14.6)$$

由  $g \in C[0, +\infty)$  知  $g$  有界, 即存在  $C_1 > 0$ , 使得  $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$ . 于是由 (14.5) 式知

$$|g'(x)|^2 \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(x) \leq |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \quad (14.7)$$

又因为  $f$  是递增正函数, 所以  $f(x) \geq f(0) > 0, \forall x > 0$ . 从而存在  $C_2 > 0$ , 使得

$$|g'(0)|^2 \leq C_2 f(0) \leq f(x), \forall x > 0.$$

于是取  $M = \max \left\{ C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)} \right\}$ , 则由 (14.7) 式和 (14.6) 式可得, 对  $\forall x > 0$ , 有

$$\begin{aligned} |g(x)|^2 &\leq M \leq M^2, \\ |g'(x)|^2 &\leq C_2 f(x) + C_1 f(x) \leq M f(x) \leq M^2 f(x). \end{aligned}$$

进而

$$|g(x)| \leq M, |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了 (14.3). □

**例题 14.4** 设  $f \in C^2[0, 1]$ , 证明

(a)

$$|f'(x)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (14.8)$$

(b)

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (14.9)$$

(c) 若  $f(0)f(1) \geq 0$ , 则

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (14.10)$$

**证明**

(a) 注意到对任何  $\theta \in [0, 1]$ , 我们有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leq \left| \int_{\theta}^x f''(y) dy \right| + |f'(\theta)| \\ &\leq \int_0^1 |f''(y)| dy + |f'(\theta)|. \end{aligned}$$

于是只需证明存在  $\theta \in [0, 1]$  使得

$$|f'(\theta)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (14.11)$$

如果  $f'$  有零点, 则显然存在  $\theta \in [0, 1]$ , 使得  $f'(\theta) = 0$ , 从而满足 (14.11) 式. 下设  $f'$  没有零点. 由  $f'$  的介值性可知,  $f'$  要么恒正, 要么恒负. 不妨设  $f$  严格递增. 若  $f$  没有零点, 不妨设  $f > 0$ , 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geq xf'(\eta) \geq x \min_{[0,1]} |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \geq \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|,$$

这也给出了 (14.11) 式. 若存在  $t \in [0, 1]$ , 使得  $f(t) = 0$ . 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x) = f'(\theta)(x - t).$$

从而

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 |x-t| dx \stackrel{\text{命题 7.5}}{\geq} \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|.$$

这也给出了 (14.11) 式. 于是我们证明了不等式 (14.8) 式.

(b) 直接对 (14.8) 式两边关于  $x$  在  $[0, 1]$  上积分得 (14.9) 式.

(c) 由 (a) 同理只需证明存在  $\theta \in [0, 1]$  使得

$$|f'(\theta)| \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (14.12)$$

不妨假定  $f'$  没有零点且  $f(0) \geq 0$ , 则当  $f$  递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(0) + x f'(\eta) \geq x f'(\eta) \geq x \cdot \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min |f'| \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$

当  $f$  递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(\alpha) \geq (1-x) \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$

于是必有 (14.12) 式成立, 这就给出了 (14.10) 式. □

**例题 14.5** 设函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上严格单调下降, 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**证明** 反证, 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in (a, +\infty)$ , 则存在子列  $\{x_{n_k}\}$ , 满足  $x_{n_k} \rightarrow c$ . 不妨设  $\{x_{n_k}\}$  严格递增. 记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = A$ . 于是对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$A - \varepsilon \leq f(x_{n_k}) \leq A + \varepsilon, \forall k > N.$$

又由  $f$  严格递减知

$$f(x) \geq A, \forall x > a.$$

从而

$$A \leq f(x_{n_k}) \leq A + \varepsilon, \forall k > N.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 则  $f(x_{n_k}) = A, \forall k > N$ . 这与  $f$  严格递减矛盾! □

**例题 14.6** 设  $\{x_n\} \subset (0, 1)$  满足对  $i \neq j$ , 有  $x_i \neq x_j$ , 讨论函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$  连续性.

**证明** 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有  $\operatorname{sgn}(x-x_n)$  在  $x=x_n$  处间断, 在  $x \neq x_n$  处连续.

当  $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  时,  $f(x)$  的每一项都连续. 又  $f(x)$  一致收敛, 故  $f$  在  $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  处都连续.

当  $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  时, 有

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k} + \sum_{n \neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在  $x = x_k$  处间断. 故  $f(x)$  在  $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$  处都间断. □

**例题 14.7** 证明  $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x}$  在  $x \in [0, +\infty)$  一致收敛性.

**证明** 由 Abel 变换得, 对  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$  成立

$$\begin{aligned} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^n (-1)^t \frac{t}{t^2+x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{t=m}^{n-1} \left( \frac{t}{t^2+x} - \frac{t+1}{(t+1)^2+x} \right) s_t + \frac{n}{n^2+x} s_n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=m}^{\infty} \left( \frac{t}{t^2+x} - \frac{t+1}{(t+1)^2+x} \right) s_t \\
&= \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t,
\end{aligned}$$

这里  $s_t = \sum_{i=1}^t (-1)^i = (-1)^t \in \{1, -1\}$ . 一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由  $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$  和  $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}$  都收敛知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)} = 0.$$

于是我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x} = 0, \text{ 关于 } x \in [0, +\infty) \text{ 一致,}$$

这就证明了  $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x}$  在  $x \in [0, +\infty)$  一致收敛. □

#### 命题 14.1

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上连续实值右可导函数, 记  $D^+f(x)$  为  $f(x)$  的右导函数, 如果  $f(a) = 0$ , 且  $D^+f(x) \leq 0$ , 则  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . ▲

**证明** (1) 先假定  $D^+f(x) < 0$ , 如果结论不成立, 则存在  $x_1 \in (a, b)$ , 使  $f(x_1) > 0$ . 记

$$x_0 = \inf\{x \mid f(x) > 0\}.$$

由  $x_0$  的定义, 我们有序列  $\{x_n\}$ , 使  $x_n$  单调递减趋于  $x_0$ , 且  $f(x_n) > 0$ . 从而由  $f(x)$  的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq 0. \quad (14.13)$$

根据  $x_0$  的定义可知, 对  $\forall x < x_0$ , 都有  $f(x) < f(x_0)$ , 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列  $\{x'_n\}$  单调递增趋于  $x_0$ , 且  $f(x'_n) < f(x_0)$ . 于是由  $f(x)$  的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \leq 0. \quad (14.14)$$

故由 (14.13)(14.14) 知  $f(x_0) = 0$ . 于是

$$D^+f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0,$$

这与  $D^+f(x_0) < 0$  矛盾, 于是  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ .

(2) 若  $D^+f(x) \leq 0$ , 对任给的  $\varepsilon > 0$  构造函数

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon(x - a),$$

对  $f_\varepsilon(x)$  有  $f_\varepsilon(a) = 0$  且

$$D^+f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon < 0.$$

从而由 (1) 得  $f_\varepsilon(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . 因此  $f(x) \leq \varepsilon(x - a) \leq \varepsilon(b - a)$ , 由  $\varepsilon$  的任意性, 得  $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . □

**例题 14.8** 设  $\varphi(x)$  是  $[a, b]$  上连续且右可导的函数, 如果  $D^+\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续可

导,  $\varphi'(x) = D^+ \varphi(x)$ .

**证明** 设

$$f(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+ \varphi(t) dt - \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且右可导, 并且

$$D^+ f(x) = D^+ \varphi(x) - D^+ \varphi(x) = 0.$$

又  $f(a) = 0$ , 由命题 14.1 得  $f(x) \leq 0$ . 又  $-f(x)$  满足  $-f(a) = 0, D^+[-f(x)] = 0$ , 同理由命题 14.1 得  $-f(x) \leq 0$ , 故  $f(x) = 0$ . 于是

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+ \varphi(t) dt.$$

由  $D^+ \varphi(x)$  的连续性, 得  $\varphi'(x) = D^+ \varphi(x)$ . □

**例题 14.9** 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{2n}{\pi} (\ln 2n + \gamma - \ln \pi) + o(1).$$

**证明** 见 here. □

**例题 14.10**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} = 1.$

**证明** 证法一: 对任意充分大的  $n$ , 由 Frullani (傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned} A &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k = \sum_{k=1}^n \left[ (-1)^k C_n^k \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx \right) \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{-kx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} (1-1)^n - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx. \end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$(1 - e^{-x})^n \leq 1 - ne^{-x}.$$

取  $M_n > 1$ , 满足  $M_n e^{M_n} = n$ . 于是

$$0 \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - ne^{-x})}{M_n} dx = \frac{n}{M_n} \int_{M_n}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{n}{M_n e^{M_n}} = 1.$$

从而

$$A = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1). \quad (14.15)$$

因为  $M_n e^{M_n} = n$ , 所以由命题 2.4 知

$$M_n = \ln n + o(\ln n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (14.16)$$

于是

$$(1 - e^{-x})^{n-1} = e^{(n-1) \ln(1-e^{-x})} \leq e^{-(n-1)e^{-x}} \leq e^{-(n-1)e^{-M_n}} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, \quad \forall x \in [0, M_n].$$



从而

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} &\leq \frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \\ \text{即 } \int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx &= o\left(\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx\right), n \rightarrow \infty. \text{ 故} \\ \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx &= \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx = (1+o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14.17)$$

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1, \\ \text{故 } \frac{1-e^{-x}}{x} \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上有界, 进而 } \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx &= O(1). \text{ 又注意到} \\ \int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx &\leq -e^{-M_n} \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

故  $\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx = O(1)$ . 于是再结合(14.16)式可知

$$\begin{aligned} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \\ &= O(1) + \ln M_n = \ln(\ln n + o(\ln n)) + O(1) \\ &= \ln \ln n + o(1) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此再由(14.17)式可知

$$\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx = (1+o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx = (1+o(1))(\ln \ln n + O(1)) = \ln \ln n + o(\ln \ln n), n \rightarrow \infty.$$

故由(14.15)可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\ln(\ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx + O(1)}{\ln(\ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + o(\ln \ln n) + O(1)}{\ln(\ln n)} = 1. \end{aligned}$$

证法二:注意到

$$\begin{aligned} S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx. \end{aligned}$$

又由二项式定理可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 t^{k+y-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^{k+y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{y-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^k dt = \int_0^1 t^{y-1} [(1-t)^{n-1} - 1] dt.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}S &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} dy = \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dt dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dy dt = \int_0^1 \frac{t-1}{t \ln t} [1 - (1-t)^{n-1}] dt \\ &\stackrel{t=e^{-x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-x}) [1 - (1-e^{-x})^{n-1}]}{x} dx.\end{aligned}$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$\begin{aligned}S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} \right) dx \\ &\stackrel{\text{命题 A.2}}{=} \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n-1})} \right) dx.\end{aligned}$$

由命题 (4)(4) 知

$$e^{x^2-x} \geq \frac{1}{1+x} \geq e^{-x}, \forall x > 0.$$

于是

$$e^{x^2-x} \cdot e^{(\frac{x}{2})^2-\frac{x}{2}} \cdots e^{(\frac{x}{n-1})^2-\frac{x}{n-1}} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \geq \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geq e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

注意到

$$x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \leq x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}x < 2x, \forall x \in [0, 1],$$

故

$$e^{-x\left(-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)} \geq \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geq e^{-x\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数  $e^{-x}$  的介值性知, 存在  $C_n \in \left[-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}, \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right]$ , 使得

$$\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} = e^{-C_n x}.$$

于是由  $-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \leq C_n \leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$  知

$$C_n = \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} (1 - e^{-C_n x}) dx \\ &= \int_0^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^{-t}}{t} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1,$$

故  $\frac{1-e^{-t}}{t}$  在  $[0, 1]$  上有界, 进而  $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$ . 又注意到

$$\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt \leq 1 - e^{-C_n} = 1 - e^{-\ln n + O(1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

故  $\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$ . 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln(\ln n + O(1)) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + O(1)}{\ln \ln n} = 1.$$

□

## 附录 A 常用公式

### A.1 常用 Taylor 级数

1.  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$ .
2.  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \cdots, x \in (-1, 1]$ .
3.  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \cdots$ .
4.  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \cdots$ .
5.  $\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4^n - 1)(2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
6.  $\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \cdots, x \in (0, \pi)$ .
7.  $\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{50521}{3628800}x^{10} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \in (0, \pi)$ .
8.  $\csc x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 (2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \cdots, x \in (0, \pi)$ .
9.  $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1)$ .
10.  $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \cdots, x \in (-1, 1)$ .
11.  $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ .
12.  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$ .
13.  $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
14.  $\operatorname{sech} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 - \frac{50521}{3628800}x^{10} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
15.  $\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 - \frac{63}{2816}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1)$ .
16.  $\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1)$ .
17.  $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + \frac{1}{90}x^7 + \frac{31}{5760}x^8 - \frac{1}{5670}x^9 - \frac{2951}{3628800}x^{10} + o(x^{10})$ .
18.  $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{37}{120}x^5 + \frac{59}{240}x^6 + \frac{137}{720}x^7 + \frac{871}{5760}x^8 + \frac{41641}{3628800}x^9 + o(x^9)$ .

19.  $e^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{17}{144}x^6 + \frac{13}{126}x^7 + \frac{629}{8064}x^8 + \frac{325}{4536}x^9 + o(x^9).$
20.  $e^{\arctan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{29}{144}x^6 - \frac{1}{1008}x^7 - \frac{1249}{8064}x^8 - \frac{1163}{72576}x^9 + o(x^9).$
21.  $\tan(\tan x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{181}{315}x^7 + \frac{59}{105}x^9 + \frac{3455}{6237}x^{11} + o(x^{11}).$
22.  $\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + \frac{13}{2830}x^9 - \frac{47}{49896}x^{11} + o(x^{11}).$
23.  $\tan(\sin x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 - \frac{73}{24192}x^9 + \frac{41897}{39916800}x^{11} + o(x^{11}).$
24.  $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{846}x^7 - \frac{143}{3456}x^9 - \frac{968167}{39916800}x^{11} + o(x^{11}).$
25.  $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \cdots, x \in (-1, 1).$
26.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \frac{2447e}{5760}x^4 - \frac{959e}{2304}x^5 + \frac{281343e}{580608}x^6 - \frac{67223e}{168885}x^7 + o(x^7).$
27.  $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{11}{120}x^5 + \frac{271}{720}x^6 + \frac{53}{2320}x^7 - \frac{4069}{13410}x^8 + o(x^8).$
28.  $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 - \frac{3e}{16}x^3 + \frac{139e}{560}x^4 - \frac{899e}{11520}x^5 + \frac{29811e}{580608}x^6 - \frac{180617e}{580608}x^7 + o(x^7).$

## A.2 常用积分公式

### A.2.1 不定积分

1.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ (a > 0).$
2.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \ (a > 0).$  3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \ (a > 0).$
3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \ (a > 0).$
4.  $\int \ln x dx = x \ln x - x + C.$
5. (1)  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C;$   
 (2)  $\int \csc x dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$
6.  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right] + C \ (a > 0);$   
 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] + C \ (a > 0).$
7.  $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \ (ab \neq 0);$   
 $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \ (ab \neq 0).$
8.  $\int x \cos nx dx = \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{n} \sin nx + C \ (n \neq 0);$

$$\int x \sin nx dx = \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx + C \quad (n \neq 0).$$

9. 记  $I(m, n) = \int \cos^m x \sin^n x dx, \forall n, m \in \mathbb{N}$ , 则

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2, n) \quad (m \geq 2, n \geq 0); \\ &= -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2) \quad (m \geq 0, n \geq 2). \end{aligned}$$

证明

1.

2.

3.

4.

5. (1)

(2) 第一种:

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x - 1} d(\cos x) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1} d(\cos x) \\ &= \frac{1}{2} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

第二种:

$$\int \csc x dx = \frac{1}{2} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

第三种:

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \frac{\csc x (\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \\ &\stackrel{\csc^2 x - \cot^2 x = 1}{=} \ln \left| \frac{1}{\csc x + \cot x} \right| + C = -\ln |\csc x + \cot x| + C. \end{aligned}$$

6.

7.

8.

9.

□

### A.2.2 定积分

1. 记  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \forall n \in \mathbb{N}$ , 则

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

从而

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

2. 记  $J(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx, \forall n, m \in \mathbb{N}$ , 则

$$J(m, n) = \frac{m-1}{m+n} J(m-2, n), \quad \forall n, m \geq 2.$$

$$J(m, n) = \frac{n-1}{m+n} J(m, n-2), \quad \forall n, m \geq 2.$$

从而

$$J(m, n) = \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m, n \text{ 不全为偶数} \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m, n \text{ 全为偶数} \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

3.

注 公式(A.1)(A.2)通常称为“点火公式”.

### A.3 常用初等不等式

#### 命题 A.1 (常用不等式)

- (1)  $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$
- (2)  $\ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0.$
- (3)  $e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$
- (4)  $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \leq e^{x^2-x}, \forall x > 0.$

证明

- (1) 令  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x \geq 0$ , 则

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - x - 2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+x-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x > 0.$$

故  $f$  在  $(0, +\infty)$  上严格单调递减, 又  $f \in C[0, +\infty)$ , 因此  $f$  在  $[0, +\infty)$  上也严格单调递减. 从而

$$f(x) \leq f(0) = 0, \forall x > 0.$$

即  $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2)

(3) 注意到

$$(e^x - 1)(e^y - 1) > 0, \forall x, y > 0,$$

故

$$e^x + e^y < e^{x+y} + 1 \implies e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$$

(4) 由  $e^x \geq 1+x, \forall x > 0$  可得

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x}, \forall x > 0.$$

$$e^{x^2-x} \geq 1+x^2-x = \frac{1+x^3}{1+x} \geq \frac{1}{1+x}, \forall x > 0.$$

□

## A.4 重要不等式

## 定理 A.1 (Cauchy 不等式)

对任何  $n \in \mathbb{N}, (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (\text{A.3})$$

且等号成立条件为  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.



**证明** (i) 当  $b_i$  全为零时, (A.3) 式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当  $b_i$  不全为零时, 注意到  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . 等价于

$$t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$ .

从而  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$ . 下证 (A.3) 式等号成立的充要条件.

若 (A.3) 式等号成立, 则

(i) 当  $b_i$  全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.

(ii) 当  $b_i$  不全为零时, 此时我们有  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$ . 根据一元二次方程根的存在性定理,

可知存在  $t_0 \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t_0 b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0.$$

于是  $a_i + t_0 b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 即  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.

反之, 若  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关, 则存在不全为零的  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

不妨设  $\lambda \neq 0$ , 则  $a_i = -\frac{\mu}{\lambda} b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 从而当  $t = \frac{\mu}{\lambda}$  时,  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = 0$ .

即一元二次方程  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$  有实根  $\frac{\mu}{\lambda}$ .

因此  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$ . 即 (A.3) 式等号成立. □

**例题 A.1** 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

**证明** 对  $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ , 由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i})^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = n^2.$$



$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0. \quad \square$$

**例题 A.2** 求函数  $y = \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x}$  在定义域内的最大值和最小值.

**笔记** 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后通过简单的放缩就能得到  $y(0)$  就是最小值. 再利用 **Cauchy 不等式** 我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设  $A, B, C > 0$ , 则由 Cauchy 不等式可得

$$\left( \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{Ax+27A} + \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{13B-Bx} + \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{Cx} \right)^2 \leq \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) [(A+C-B)x + 27A + 13B]$$

并且当且仅当  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx}$  时, 等号成立.

令  $A+C-B=0$  (因为要求解  $y$  的最大值, 我们需要将  $y$  放大成一个不含  $x$  的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases} \sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx} \\ A+C-B=0 \end{cases}$$

解得:  $A=1, B=3, C=2, x=9$ .

从而得到我们需要构造的 Cauchy 不等式为

$$\left( \sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x} \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) (x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当  $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$ , 即  $x=9$  时, 等号成立.

**解** 由题可知, 函数  $y$  的定义域就是:  $0 \leq x \leq 13$ . 而

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x+27} + \sqrt{[\sqrt{13-x} + \sqrt{x}]^2} \\ &= \sqrt{x+27} + \sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}} \\ &\geq \sqrt{27} + \sqrt{13} = 3\sqrt{3} + \sqrt{13} = y(0) \end{aligned}$$

于是  $y$  的最小值为  $3\sqrt{3} + \sqrt{13}$ . 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} y^2(x) &= (\sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x})^2 \\ &= (\sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x})^2 \\ &\leq (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x) \\ &= 121 = y^2(9) \end{aligned}$$

即  $y(x) \leq y(9) = 11$ . 并且当且仅当  $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$ , 即  $x=9$  时, 等号成立. 故  $y$  的最大值为 11.

□


#### 定理 A.2 (均值不等式)

设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 则下述函数是连续递增函数

$$f(r) = \begin{cases} \left( \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_n}, & r = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

其中若  $r_1 \neq r_2$ , 则  $f(r_1) = f(r_2)$  的充要条件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

♡

 **笔记** 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

**定理 A.3 (均值不等式常用形式)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$



**例题 A.3** 设  $f(x) = 4x(x-1)^2, x \in (0, 1)$ , 求  $f$  的最大值.

**解** 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2 \cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2 \cdot \left[ \sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)} \right]^3 \\ &\leq 2 \cdot \left[ \frac{2x + 1 - x + 1 - x}{3} \right]^3 \\ &= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当  $2x = 1 - x$ , 即  $x = \frac{1}{3}$  时等号成立.



**定理 A.4 (Bernoulli 不等式)**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq -1$  且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$



**证明** 当  $n=1$  时, 我们有  $1+x_1 \geq 1+x_1$ , 结论显然成立.

假设当  $n=k$  时, 结论成立. 则当  $n=k+1$  时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立.



**定理 A.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)**

设  $x \geq -1, n \geq 0$ , 则

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$



**定理 A.6 (Jesen 不等式)**

设  $\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 则对下凸函数  $f$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数  $f$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$



## 定理 A.7 (Young 不等式)

对任何  $a, b \geq 0$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$  有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

当且仅当  $a^p = b^q$  时等号成立.



**笔记** 若  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则我们称  $p$  与  $q$  共轭.

**注** 这个 Young 不等式和加权均值不等式等价.

**证明** (i) 当  $a, b$  至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当  $a, b$  均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\ &\Leftrightarrow \ln a + \ln b \leq \ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \end{aligned}$$

由 Jensen 不等式和  $f(x) = \ln x$  函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由 Jensen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立.  $\square$

## 定理 A.8 (Hold 不等式)

设  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ , 则有

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}.$$



**证明** (i) 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  不全为零时, 令

$$a'_k = \frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}}, b'_k = \frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}}, k = 1, 2, \dots, n.$$

从而只需证明  $\sum_{k=1}^n a'_k b'_k \leq 1$ . 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a'_k b'_k &\leq \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(a'_k)^p}{p} + \frac{(b'_k)^q}{q} \right] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} \right) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{\sum_{k=1}^n b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

故原结论成立.  $\square$

## 定理 A.9 (排序和不等式)

设  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$  满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  是  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

且等号成立的充要条件是  $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$  或者  $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$ .



**笔记** 简单记为倒序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  同序和.

#### 定理 A.10 (Chebeshev 不等式)

设  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$  满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  是  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

且等号成立的充要条件是  $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$  或者  $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$ .



## A.5 基本组合学公式

#### 定义 A.1 (组合数定义的扩充)

对  $\forall n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , 定义

$$C_n^k = \binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} 0 & , k < 0, \\ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & , 0 < k \leq n, \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

特别地,  $C_n^0 \triangleq 1$ . 若  $n, k \in \mathbb{N}$  且  $0 \leq k \leq n$ , 则还有

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



#### 定理 A.11 (二项式定理的推广)

$$(a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} \left( \prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in \{1, 2, \dots, n\} - I} b_j \right).$$



**证明** 用数学归纳法证明即可.



#### 命题 A.2

对  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , 都有

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{x+k} = \frac{m!}{x(x+1) \cdots (x+m)}.$$



**证明** 设

$$f(x) = \frac{m!}{x(x+1) \cdots (x+m)},$$

则由有理分式分解定理知, 存在  $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ , 使得

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{x+j},$$

两边同乘  $x+j (j=0, 1, \dots, m)$ , 再取  $x=-j$  得

$$\begin{aligned} c_j &= [(x+j)f(x)]_{x=-j} = \frac{m!}{-j(-j+1)\cdots(-j+j-1)(-j+j+1)\cdots(-j+m)} \\ &= (-1)^j \frac{m!}{j(j-1)\cdots 1 \cdot 1 \cdots (m-j)} = (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} \\ &= (-1)^j \binom{m}{j}, j=0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

故结论得证. □

## A.6 三角函数相关

### A.6.1 三角函数

#### 定理 A.12 (三角平方差公式)

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y) = \cos(y-x)\cos(y+x) = \cos^2 y - \cos^2 x.$$



**证明** 首先, 我们有

$$\cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - (1 - \sin^2 y) = \sin^2 y - \sin^2 x.$$

接着, 我们有

$$\begin{aligned} \sin(x-y)\sin(x+y) &= (\sin x \cos y - \cos x \sin y)(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y \\ &= \sin^2 x(1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x) \sin^2 y \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(y-x)\cos(y+x) &= (\cos x \cos y + \sin x \sin y)(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ &= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y \\ &= \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) \\ &= \cos^2 x - \cos^2 y. \end{aligned}$$

故结论得证. □

#### 定理 A.13

1.

$$\sin(n\theta) = \sum_{\substack{r=0 \\ 2r+1 \leq n}} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos^{n-2r-1}(\theta) \sin^{2r+1}(\theta).$$

2.

$$\cos(n\theta) = \sum_{\substack{r=0 \\ 2r \leq n}} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos^{n-2r}(\theta) \sin^{2r}(\theta).$$

3.

$$\tan(n\theta) = \frac{\sum_{\substack{r=0 \\ 2r+1 \leq n}} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \tan^{2r+1}(\theta)}{\sum_{\substack{r=0 \\ 2r \leq n}} (-1)^r \binom{n}{2r} \tan^{2r}(\theta)}.$$


4.

$$\cos^n \theta = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=0 \\ 2r < n}} \binom{n}{2r} \cos((n-2r)\theta) + \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=0 \\ 2r < n}} \binom{n}{2r} \cos((n-2r)\theta), & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

5.

$$\sin^n \theta = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=0 \\ 2r < n}} (-1)^r \binom{n}{2r} \sin((n-2r)\theta), & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=0 \\ 2r < n}} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos((n-2r)\theta) + \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$



 **笔记** 上述结论 4 表明:  $\cos^n x$  可以表示为  $1, \cos x, \dots, \cos nx$  的线性组合.

**证明** 具体证明见 **Expansions of  $\sin(nx)$  and  $\cos(nx)$** .

□

## A.6.2 反三角函数

### 定理 A.14 (常用反三角函数性质)

1.

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) & , xy < 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) & , x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) & , x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

2.

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) & , xy \geq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) & , x > 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) & , x < 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

3.

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & , x + y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & , x + y < 0 \end{cases}.$$

4.

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & , x \geq y \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & , x < y \end{cases}.$$

5.

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1 \\ \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, x > 0 & , xy > 1. \\ -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, x < 0 & , xy > 1 \end{cases}$$

6.

$$\arctan x - \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x-y}{1+xy}, & xy > -1 \\ \pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy}, & x > 0, xy < -1. \\ -\pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy}, & x < 0, xy < -1 \end{cases}$$

7.

$$2 \arcsin x = \begin{cases} \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) & , |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) & , \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1 \\ -\pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) & , -1 \leq x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

8.

$$2 \arccos x = \begin{cases} \arccos (2x^2 - 1) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2\pi - \arccos (2x^2 - 1) & , -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

9.

$$2 \arctan x = \begin{cases} \arctan \frac{2x}{1-x^2}, |x| \leq 1 \\ \pi + \arctan \frac{2x}{1-x^2} & , |x| > 1. \\ -\pi + \arctan \frac{2x}{1-x^2} & , x < -1 \end{cases}$$

10.

$$\cos (n \arccos x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \quad (n \geq 1).$$



证明

□

## 命题 A.3

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}.$$



**证明** 令  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{(\frac{1}{x})^2 + 1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

故  $f(x)$  为常函数, 于是就有  $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0; f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \forall x < 0$ .

□

## A.6.3 双曲三角函数

## 命题 A.4

$$(1) \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1,$$

$$(2) \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq x.$$



**证明** 可以分别利用均值不等式和求导进行证明.



## 命题 A.5

$$1. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$2. \cosh(2x) = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x.$$

$$3. \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x.$$



**证明**






## 附录 B 小技巧

### B.1 长除法

例题 B.1 利用多项式除法计算 Taylor 级数和 Laurent 级数

已知  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$ ,  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$ .

1. 求  $\tan x$ .      2. 求  $\frac{1}{\sin^2 x}$ .

 **笔记** 实际问题中需要多展开几项, 展开得越多, 得到的结果也越多.

**解** 1. 根据多项式除法可得

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \overline{) x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots} \\ \underline{x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots} \\ -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \cdots} \\ \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \underline{\frac{2}{15}x^5 + \cdots} \\ 0 + \cdots \end{array}$$

因此  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ .

2. 根据多项式乘法可得

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

再根据多项式除法可得

$$\begin{array}{r} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots \\ x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots \overline{) 1} \\ \underline{1 - \frac{1}{3}x^2 + \cdots} \\ \frac{1}{3}x^2 + \cdots \\ \underline{\frac{1}{3}x^2 + \cdots} \\ 0 + \cdots \end{array}$$

因此  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots$ .

□

### B.2 将多项式分式分解为其部分因式的和

例题 B.2

1. 分解  $a > 0, \frac{1}{(1+x^2)(1+ax)}$ .
2. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2}$ .
3. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)^2(1+x)}$ .
4. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)^2(1+x)^2}$ .

解

1. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+ax}. \quad (\text{B.1})$$

其中  $A, B, C$  均为常数.

解法一(待定系数法):

将(B.1)式右边通分得到

$$\frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+ax} = \frac{(Ax+B)(1+ax) + C(1+x^2)}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{(Aa+C)x^2 + (A+Ba)x + B+C}{(1+x^2)(1+ax)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} Aa + C = 0 \\ A + Ba = 0 \\ B + C = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}, C = \frac{a^2}{1+a^2}.$$

于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法二(留数法):

$$(\text{B.1}) \text{ 式两边同时乘 } 1+ax, \text{ 得到 } \frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+ax) + C. \text{ 再令 } x \rightarrow -\frac{1}{a}, \text{ 得 } C = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{1+a^2}.$$

$$(\text{B.1}) \text{ 式两边同时乘 } 1+x^2, \text{ 得到 } \frac{1}{1+ax} = Ax + B + \frac{C}{1+ax} \cdot (1+x^2). \text{ 再分别令 } x \rightarrow \pm i, \text{ 可得}$$

$$\begin{cases} Ai + B = \frac{1}{1+ai} \\ -Ai + B = \frac{1}{1-ai} \end{cases}$$

$$\text{解得: } A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}.$$

于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法三(留数法+待定系数法):

$$(\text{B.1}) \text{ 式两边同时乘 } 1+ax, \text{ 得到 } \frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+ax) + C. \text{ 再令 } x \rightarrow -\frac{1}{a}, \text{ 得 } C = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{1+a^2}.$$

容易直接观察出(B.1)式右边通分后分子的最高次项系数为  $Aa+C$ , 常数项为  $B+C$ . 并将其与(B.1)式左边的分子对比, 可以得到

$$\begin{cases} Aa + C = 0 \\ B + C = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}.$$

于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

2. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}. \quad (\text{B.2})$$

其中  $A, B, C, D$  均为常数.

(B.2)式两边同时乘  $(1+x)^2$ , 得到

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2 + C(1+x) + D. \quad (\text{B.3})$$

再令  $x \rightarrow -1$ , 可得  $D = \frac{1}{2}$ . 对(B.3)式两边同时求导得到

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \bigg|_{x \rightarrow -1} = \left[ \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2 \right]' \bigg|_{x \rightarrow -1} + C = C.$$

从而  $C = \frac{1}{2}$ . 令(B.2)中的  $x = 0$ , 得到  $1 = B + C + D$ , 将  $C = D = \frac{1}{2}$  代入解得:  $B = 0$ . 再令(B.2)中的  $x = 1$ , 得到  $\frac{1}{8} = \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4}$ , 将  $C = D = \frac{1}{2}, B = 0$  代入解得:  $A = -\frac{1}{2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2(1+x)^2}.$$

3.

4.

□

**例题 B.3** 分解  $\frac{1}{1+x^4}$ .

**解** 首先我们注意到

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(1+x^2) - 2x^2} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}.$$

然后根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \quad (\text{B.4})$$

其中  $A, B, C, D$  均为常数. 将上式右边通分可得

$$\frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{(Ax+B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx+D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0 \\ A + C = 0 \end{cases}$$

解得:  $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{\sqrt{2}}{4}, D = \frac{1}{2}$ .

于是原式可分解为

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

□

**例题 B.4** 分解  $\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)}$ .

**解** 先利用多项式除法用  $x^4$  除以  $(1+x)(1+x^2)$  得到  $x^4 = (x-1)(1+x)(1+x^2) + 1$ . 从而

$$\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{(x-1)(1+x)(1+x^2) + 1}{(1+x)(1+x^2)} = x - 1 + \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}.$$

然后再利用多项式分式的分解方法(待定系数法和留数法)将  $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$  分解为部分因式的和. 最后我们可将原式分解为

$$\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)} = x - 1 + \frac{1}{2+2x} + \frac{-x+1}{2+2x^2}.$$

□