0.1 点集的 Lebesgue 外测度

定义 0.1 (Lebesgue 外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体, 且有

$$E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 **L-覆盖** (显然, 这样的覆盖有很多, 且每一个 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum_{k \geq 1} |I_k|$ (可以是 $+\infty$, $|I_k|$ 表示 I_k 的体积)). 称

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为} E \text{ 的} L - \text{覆盖} \right\}$$

为点集 E 的 **Lebesgue 外测度**, 简称**外测度**.

注 显然, 若 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k \geq 1} |I_k| = +\infty,$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

定理 0.1 ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)

(1) 非负性: $m^*(E) \geq 0$, $m^*(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$;

(3) 次可加性: $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

证明

(1) 这可从定义直接得出.

(2) 这是因为 E_2 的任一个 $L-$ 覆盖都是 E_1 的 $L-$ 覆盖.

(3) 不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及每个自然数 k, 存在 E_k 的 $L-$ 覆盖 $\{I_{k,l}\}$, 使得

$$E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |I_{k,l}| < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

由此可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} |I_{k,l}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

显然, $\{I_{k,l} : k, l = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 $L-$ 覆盖, 从而有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论成立.

□

命题 0.1

$\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_0\}) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 同理, $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\left\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t_0, \xi_i, \cdots, \xi_n) : a_j \leq \xi_j \leq b_j, j \neq i\right\}$$

($n-1$ 维超平面块) 的外测度也为零.

证明 这是因为可作一开矩体 I, 使得 $x_0 \in I$ 且 $|I|$ 可任意地小. □

推论 0.1

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数点集, 则 $m^*(E) = 0$.

注 由此可知有理点集的外测度 $m^*(\mathbb{Q}^n) = 0$. 这里我们看到了一个虽然处处稠密但外测度为零的可列点集.

证明 由外测度的次可加性不难证明. □

命题 0.2

$[0,1]$ 中的 Cantor 集 C 的外测度是零.

注 这个命题 0.2说明外测度为零的点集不一定是可列集.

证明 事实上, 因为 $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中的 F_n (在构造 C 的过程中第 n 步所留存下来的) 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并集, 所以我们有

$$m^*(C) \leq m^*(F_n) \leq 2^n \cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C) = 0$. □

命题 0.3

设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(I) = m^*(\bar{I}) = |I|$.

证明 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作一开矩体 J, 使得 $J \supset \bar{I}$ 且 $|J| < |I| + \varepsilon$, 从而由外测度的单调性有

$$m^*(\bar{I}) \leq |J| < |I| + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $m^*(\bar{I}) \leq |I|$. 现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意的 $L-$ 覆盖, 则因为 $\bar{I}$ 是有界闭集, 所以存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖

$$\{I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_l}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{l} I_{i_j} \supset \bar{I}.$$

由外测度的单调性和次可加性可得

$$|I| \leq \sum_{j=1}^{l} |I_{i_j}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

再由下确界是最大的下界可得 $|I| \leq m^*(\bar{I})$, 从而我们有 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

又因为 $I \subset \bar{I}$, 所以由外测度的单调性可得 $m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = |I|$. 同理可证 $|I| \leq m^*(I)$, 故 $m^*(I) = |I| = m^*(\bar{I})$.
□

引理 0.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\delta > 0$. 令

$$m_\delta^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E, \text{每个开矩体} I_k \text{ 的边长} < \delta\right\},$$

则 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.

证明 显然有 $m_\delta^*(E) \geq m^*(E)$. 为证明其反向不等式也成立, 不妨设 $m^*(E) < +\infty$. 由外测度的定义可知, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

对于每个 k, 我们把 I_k 分割成 $l(k)$ 个开矩体:

$$I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,l(k)},$$

它们互不相交且每个开矩体的边长都小于 $\delta/2$. 现在保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动, 边长扩大 $\lambda(1<\lambda<2)$ 倍做出开矩体, 并记为 $\lambda I_{k,i}$, 显然, 对每个 k, 有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|.$$

易知 $\{\lambda I_{k,i} : i=1,2,\cdots,l(k); k=1,2,\cdots\}$ 是 E 的边长小于 δ 的 $L-$ 覆盖, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \lambda^n (m^*(E)+\varepsilon),$$

从而可知 $m^*_\delta(E) \le \lambda^n(m^*(E)+\varepsilon)$. 令 $\lambda \to 1$ 并注意到 ε 的任意性, 我们得到 $m^*_\delta(E) \le m^*(E)$. 这说明 $m^*_\delta(E) = m^*(E)$. □

定理 0.2

设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集. 若 $d(E_1,E_2)>0$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

证明 只需证明 $m^*(E_1\cup E_2) \ge m^*(E_1)+m^*(E_2)$ 即可. 为此, 不妨设 $m^*(E_1\cup E_2) < +\infty$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 作 $E_1\cup E_2$ 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon,$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1,E_2)/\sqrt{n}$. 现在将 $\{I_k\}$ 分为如下两组:

$$\text{(i)} J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k\ge 1} J_{i_k} \supset E_1; \quad \text{(ii)} J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k\ge 1} J_{l_k} \supset E_2.$$

且其中任一矩体皆不能同时含有 E_1 与 E_2 中的点, 从而得

$$\begin{aligned} m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon &> \sum_{k\ge 1} |I_k| = \sum_{k\ge 1} |J_{i_k}| + \sum_{k\ge 1} |J_{l_k}| \\ &\ge m^*(E_1)+m^*(E_2). \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可知 $m^*(E_1\cup E_2) \ge m^*(E_1)+m^*(E_2)$. □

命题 0.4

设 $E \subset [a,b]$, $m^*(E)>0$, $0<c<m^*(E)$, 则存在 E 的子集 A, 使得 $m^*(A)=c$.

证明 记 $f(x) = m^*([a,x)\cap E)$, $a\le x\le b$, 则 $f(a)=0$, $f(b)=m^*(E)$. 考查 x 与 $x+\Delta x$. 不妨设 $a\le x<x+\Delta x\le b$, 则由

$$[a,x+\Delta x)\cap E = ([a,x)\cap E)\cup([x,x+\Delta x)\cap E)$$

可知 $f(x+\Delta x) \le f(x)+\Delta x$, 即

$$f(x+\Delta x) - f(x) \le \Delta x.$$

对 $\Delta x<0$ 也可证得类似不等式. 总之, 我们有

$$|f(x+\Delta x)-f(x)| \le |\Delta x|, \quad a\le x\le b.$$

这说明 $f\in C([a,b])$. 根据连续函数中值定理, 对 $f(a)<c<f(b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=c$. 取 $A=[a,\xi)\cap E$, 即得证. □

定理 0.3 (外测度的平移不变性)

设 $E \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$. 记 $E + \{x_0\} = \{x + x_0, x \in E\}$, 则

$$m^*(E + \{x_0\}) = m^*(E). \tag{1}$$

证明 首先, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体 I, 易知 $I + \{x_0\}$ 仍是一个开矩体且其相应边长均相等, $|I| = |I + \{x_0\}|$. 其次, 对 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k + \{x_0\}\}$ 仍是 $E + \{x_0\}$ 的 $L-$ 覆盖. 从而由

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k + \{x_0\}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

可知 (对一切 $L-$ 覆盖取下确界)

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq m^*(E).$$

反之, 考虑对 $E + x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移, 可得原点集 E. 同理又有

$$m^*(E) \leq m^*(E + \{x_0\}).$$

□

定理 0.4 (外测度的数乘)

设 $E \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

证明 因为 $E \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} (a_n, b_n)$ 等价于 $\lambda E \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} \lambda(a_n, b_n)$, $m^*([a_n, b_n]) = m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间 (α, β), 有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda| m^*((\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$. □

定义 0.2 (集合上的外测度)

设 X 是一个非空集合, μ^* 是定义在幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个取广义实值的集合函数, 且满足:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0, \mu^*(E) \geq 0\ (E \subset X)$;

(ii) 若 $E_1, E_2 \subset X, E_1 \subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;

(iii) 若 $\{E_n\}$ 是 X 的子集列, 则有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**外测度**.

若 (X, d) 是一个距离空间, 且其上的外测度 μ^* 还满足**距离外测度性质**: 当 $d(E_1, E_2) > 0$ 时, 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**距离外测度** (利用距离外测度性质可以证明开集的可测性).