0.1 直接求导法

例题 0.1

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, 证明
$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x,$$
并判断取等条件.

2. 设 f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \lambda, \lambda > 0$ 为常数, 证明
$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^m \geqslant \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$
并判断取等条件.

证明

1. 由 $0 < f'(x)\,(x>0)$ 及 $f(0)=0$ 可知 $f(x)>0\,(0<x\le 1)$. 设
$$g(t)=\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \quad (t\in[0,1]),$$
则
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right).$$
令 $h(t)=f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$, 则由 $0<f'(x)\leqslant 1(x>0)$ 可知
$$h'(t)=2f(t)\left[f'(t)-1\right]\leqslant 0, \forall t\in[0,1].$$
从而 $h(t)\leqslant h(0)=0, \forall t\in[0,1]$. 于是 $g'(t)\leqslant 0, \forall t\in[0,1]$. 因而 g 在 $[0,1]$ 上单调递减. 由 $g(0)=0$ 知 $g\le 0$. 若
$$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$
则 $g(1)=0$, 因而 $g(t)\equiv 0$. 所以
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)=0.$$
这推出 $f\equiv 0$ 或 $f^2(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. 因而
$$2f(t)f'(t)=2f(t) \quad (0<t\le 1).$$
这推出 $f'(t)=1$, 即 $f(t)=t$. 故当 $f(t)\equiv 0$ 或 $f(t)=t$ 时等号成立.

2. 定义
$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^m-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)dt.$$
求导得
$$\begin{aligned}g'(x)&=mf(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1}-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x)\\&=mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1}-\frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x)\right].\end{aligned}$$
令 $h(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则
$$h'(x)=\left[\int_0^x f(t)dt-\frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]'=f(x)-\frac{f(x)f'(x)}{\lambda}=\frac{f(x)}{\lambda}[\lambda-f'(x)]\geqslant 0,$$

从而 $h(x) \geq h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$

从而 g 递增且

$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$

这就是不等式(1). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t)dt$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0 \text{或者} f(x) = \lambda x.$$

□

例题 0.2 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)dt}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

证明 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t)dt} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x)\mathrm{d}x \leqslant a + \int_a^y 1\mathrm{d}x = y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)dt\right) - f(y)g(y) \leqslant 0 \to h(b) \leqslant h(a) = 0,$$

故不等式(2)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(2). □

命题 0.1

设 f 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 许多有关连续函数积分的不等式可以通过变上限积分的性质来证明.

证明 令

$$F(t) = \int_a^t xf(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

只需证明 $F(b) \geq 0$. 由于 f 是连续函数, F 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}f(t) \\ &= \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}(t-a)f(t) = 0. \end{aligned}$$

这说明 f 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a)=0$, 所以 $F(b)\geq 0$. □

例题 0.3 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数并满足 $0 \leq f(x) \leq x$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

并且上式成为等式当且仅当 $f(x)=x$.

证明 设 f 是连续函数满足所给的条件, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F' = f$. 由 $0 < f(x) \leq x$ 得 $F(x) \leq \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$. 因而

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x = F^2(x)\Big|_0^1 = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x &= x^2F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2f(x)F(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - F^2(x)\Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

由证明过程可知只有当 $f(x)=x$ 时, 所证不等式成为等式. □