0.1 逼近方法

0.1.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在 $[a,b]$ 上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设 $[a,b]=[0,1]$.

定义 0.1 (一维 Bernstein 多项式)

设 $f\in C[0,1], n\in\mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}.$$

设 $f\in C[a,b], n\in\mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

♣

注 $[a,b]$ 区间上的 Bernstein 多项式可由 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设 $f\in C[a,b], n\in\mathbb{N}_0$, 令 $x=(b-a)y+a,\forall x\in[a,b]$, 则 $y\in[0,1]$, 并且

$$y=\frac{x-a}{b-a},1-y=\frac{b-x}{b-a}.$$

再令 $g(y)=f((b-a)y+a)$, 则由 $f\in C[a,b]$ 可知 $g\in C[0,1]$. 于是 g 在 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g,y)\triangleq\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)C_n^ky^k(1-y)^{n-k}.$$

故 $[a,b]$ 区间上 f 的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^{n}f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

引理 0.1

1. $B_n(C,x)=C\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=C.$
2. $B_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=x.$
3. $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=0.$
4. $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$

♡

证明

1. 由二项式定理可得 $B_n(C,x)=C\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=C(x+1-x)^n=C.$
2. $B_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^ky^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^ky^k\right)'=\left[(1+y)^n\right]'=n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^ky^k=ny(1+y)^{n-1}.$$

故

$$B_n(x,x)=\frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=\frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}=x.$$

3. 由 2 的结论可直接得到.

4. 首先, 展开得到

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\mathrm{C}_n^kx^k(1-x)^{n-k}=(1-x)^n\sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2xk}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
$$=x^2\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$
$$=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k. \tag{1}$$

接着, 计算 $\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^ky^k$ 和 $\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^ky^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^ky^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ky^k\right)'=\left[(1+y)^n\right]'=n(1+y)^{n-1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^ky^k=y\left[\left(\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^ky^k\right)'\right]=y\left[\left(y\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ky^k\right)'\right)'\right]$$
$$=y\left[\left(y\left((1+y)^n\right)'\right)'\right]=y\left[\left(ny(1+y)^{n-1}\right)'\right]$$
$$=y\left[n(1+y)^{n-1}+n(n-1)y(1+y)^{n-2}\right]$$
$$=ny(1+y)^{n-2}\left[(1+y)+(n-1)y\right]$$
$$=ny(1+y)^{n-2}(ny+1).$$

令 $y=\frac{x}{1-x}$, 则由上式可得

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1}=\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}=\frac{nx}{(1-x)^n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-2}\left(\frac{nx}{1-x}+1\right)=\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2}\frac{(n-1)x+1}{1-x}=\frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n}.$$

将上式代入(1)可得

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$
$$=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\cdot\frac{nx}{(1-x)^n}+\frac{(1-x)^n}{n^2}\cdot\frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n}$$
$$=x^2-2x^2+\frac{(n-1)x^2+x}{n}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

□

定理 0.1 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设 $\varphi(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right]$, $n=1,2,3,\cdots$, 则有

$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x),n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

(2) 若 f 递增或者递减, 则 $B_n(f,x),n\in\mathbb{N}_0$ 也递增或者递减.

(3) 若 f 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数, 则对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 都有 $B_n(f,x)$ 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数.

(4) 设 $f \in C^k[0,1], k \in \mathbb{N}_0$, 则关于 $x \in [0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x), \lim_{n\to\infty} B_n'(f,x) = f'(x), \cdots, \lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(f,x) = f^{(k)}(x). \tag{3}$$

注 **性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!**

即当 $f \in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n^{(k)}(f,x) = f^{(k)}(x)$ **不成立!**

也即当 $f \in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在一个 N(与 k 无关, 公共的 N), 使得 $\forall n > N$, 都有 $B_n^{(k)}(f,x) \rightrightarrows f^{(k)}(x)$ **不成立!**

证明

(1) 对 $n \geqslant 1$, 直接计算得

$$\begin{aligned}
B_n'(f,x) &= \left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right]' \\
&= \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[n f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} - n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= B_{n-1}(\varphi,x),
\end{aligned}$$

这就给出了式(2).

(2) 如果 f 递增, 那么就有 $\varphi \geqslant 0$, 则由(2)知 $B_n'(f,x) = B_{n-1}(\varphi,x) \geqslant 0$, 故 $B_n(f,x)$ 递增. 类似可得递减.

(3) 如果 f 下凸, 对 $n=1$ 的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设 $n \geqslant 2$. 注意继续由(2)知

$$B_n''(f,x) = B_{n-1}'(\varphi,x) = B_{n-2}(\psi,x), \psi(x) = (n-1)\left[\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right)\right],$$

从而由 f 的下凸性可得

$$\begin{aligned}
B_{n-2}(\psi,x) &= \sum_{j=0}^{n-2} \psi\left(\frac{j}{n-2}\right) C_{n-2}^k (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= n\sum_{j=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j} x^j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{j+1}{n}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{\frac{j+2}{n}+\frac{j}{n}}{2}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

这就证明了 $B_n(f,x)$ 下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明 $k=0$ 时命题成立. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|x-y|\leqslant\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
|B_n(f,x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leqslant \sum_{|\frac{k}{n}-x|\leqslant\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|+\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leqslant \varepsilon\sum_{|\frac{k}{n}-x|\leqslant\delta}\left|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|+2\sup|f|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\delta}\left|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\overset{\text{类似}Chebeshev\text{不等式的证明}}{\leqslant} \varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\sup|f|}{\delta^2}\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant \varepsilon+\frac{2\sup|f|}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
&\overset{0.1}{=} \varepsilon+\frac{2\sup|f|}{n\delta^2}x(1-x),
\end{aligned}
$$

于是从上式立得

$$\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{\sup|f|}{2n\delta^2}.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f,x)-f(x)|=0.$$

故我们得到了 $k=0$ 时, 式(3)成立.

Step2 ($*$) 我们定义

$$T_nf(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right],n\in\mathbb{N}.$$

$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(T_nf,x),\forall n\in\mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1}\cdots T_nf(x)=(n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right),\forall j\in\mathbb{N}.$$

事实上, 当 $j=1$, 由(2)可知命题显然成立, 假设命题对 $j\in\mathbb{N}$ 成立, 则

$$
\begin{aligned}
&T_{n-j}\cdots T_nf(x)\\
=&T_{n-j}\left((n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kT_{n-j}\left(f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\frac{n!(n-j)}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right]\\
=&\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)\\
&-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
=&\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{j+1}{n}\right)-\frac{n!}{(n-j-1)!}(-1)^jf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1+j}(C_j^{k-1}+C_j^k)f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
=&\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^{k+1+j}C_{j+1}^kf\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}
$$

因此我们证明了对 $j+1$, 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有 $j\in\mathbb{N}$, 命题都成立.

Step3 (*) 我们证明一个中值定理的结果. 由 Hermite 插值定理, 对 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in[0,1]$, 我们有

$$
f(x)=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(x-\frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n})}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(x-\frac{s+i}{n}\right).
$$

特别的存在 $\theta\in[\frac{i}{n},\frac{i+j}{n}]$, 使得

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{i}{n}\right)&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n})}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{s}{s-k}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}\\
&=\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}C_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j},
\end{aligned}
$$

从而

$$
\sum_{k=0}^{j}(-1)^kC_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)=\frac{(-1)^jf^{(j)}(\theta)}{n^j}.
$$

Step4 (∗) 注意到

$$B_n^{(j)}(f,x)=B_{n-j}(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf,x),1\leqslant j\leqslant k,n>k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned}
&|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)|\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+|B_{n-j}(f^{(j)},x)-B_{n-j}(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf,x)|\\
&\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_nf\left(\frac{i}{n-j}\right)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&=|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^kf\left(\frac{k+i}{n}\right)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&=|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!f^{(j)}(\theta)}{(n-j)!n^j}|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&\leqslant|B_{n-j}(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)|+\sum_{i=0}^{n-j}|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-f^{(j)}(\theta)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-j}\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|\cdot|f^{(j)}(\theta)|C_{n-j}^ix^i(1-x)^{n-j-i}.
\end{aligned}$$

Step5 (∗) **Step1** 告诉我们关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_n\left(f^{(j)},x\right)=f^{(j)}(x),j=0,1,2,\cdots,k.$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right)=0,$$

以及

$$\left|\frac{i}{n}-\frac{i}{n-j}\right|=\frac{ji}{n(n-j)}\leqslant\frac{j}{n},\left|\frac{i+j}{n}-\frac{i}{n-j}\right|\leqslant\frac{2j}{n},\forall n>j.$$

我们同时假设

$$M_j\triangleq\sup_{x\in[0,1]}|f^{(j)}(x)|,j=0,1,2,\cdots,k.$$

并注意到 $f^{(j)}$ 是一致连续的. 现在对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x\in[0,1],$$

$$\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|<\frac{\varepsilon}{3M_j},\forall n>N,$$

$$\left|f^{(j)}(x)-f^{(j)}(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall|x-y|<\delta,x,y\in[0,1].$$

因此当正整数 $n>\max\left\{\frac{2j}{\delta},j,N\right\}$, 利用 **Step4**, 我们有

$$\left|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)\right|<\varepsilon,\forall x\in[a,b],$$

这就完成了证明.

□

命题 0.1

设 $f\in C[0,1]$ 使得

$$\int_0^1f(x)x^n\mathrm{d}x=0,\forall n=0,1,2,\cdots.$$

证明

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

注 $p_n(x)$ 的良定义性可由Bernstein 多项式的性质 (4)得到. 实际上, 我们这里取的 $p_n(x)$ 就是 g 的 Bernstein 多项式 $B_n(g,x)$.

证明 由条件可知, 对任意实系数多项式 $p(x)$, 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)\mathrm{d}x=0,\forall p(x)\in\mathbb{R}[x].$$

对 $\forall g\in C[0,1]$, 取 $p_n(x)\in\mathbb{R}[x]$, 使得 $p_n(x)\rightrightarrows g(x)$, 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f(x)p_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,\forall g\in C[a,b].$$

再取 $g=f$, 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)\equiv 0.$$

□

例题 0.1 设 $f\in C[0,\pi]$ 满足: 对 $n=0,1,2,\cdots$, 有 $\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$. 求证: $f(x)\equiv 0$.

证明 由定理??可知, $\cos^n x$ 可表示为 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$ 的线性组合. 于是由条件, 对于 $n=0,1,2,\cdots$, 有

$$\int_0^\pi f(x)\left(\cos^n x-\cos^{n+2}x\right)\mathrm{d}x=0.$$

作变换 $x=\arccos t$ 得

$$\int_{-1}^1 f(\arccos t)\sqrt{1-t^2}\,t^n\mathrm{d}t=0,\quad n=0,1,\cdots.$$

根据命题 0.1可知 $f(\arccos t)\sqrt{1-t^2}\equiv 0\,(t\in[-1,1])$. 因而 $f(x)\equiv 0$. □

注 这里在积分中考虑 $(\cos^n x-\cos^{n+2}x)$ 是为了防止变换后分母上出现 $\sqrt{1-t^2}$, 从而避免讨论无界函数的积分.

定理 0.2

设 $f(x)\in C^k[a,b]$, 这里 $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_0$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\left|f^{(s)}(x)-p^{(s)}(x)\right|\leqslant\varepsilon,\forall x\in[a,b],s=0,1,2,\cdots,k.$$

注 $q(x)$ 的良定义性可由 $f^{(k)}$ 的连续性和 Bernstein 多项式的性质 (4) 直接得到. 实际上, $q(x)=B(f^{(k)},x)$.

证明 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)\mathrm{d}t.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $q\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$|q(x)-f^{(k)}(x)|\leqslant\varepsilon,\forall x\in[a,b].\tag{4}$$

设

$$p(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}q(t)\mathrm{d}t,$$

则对 p 求导可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$p^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1} q(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$f^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1} f^{(k)}(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

于是利用(4)(5)(6)式可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| = \left|\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}[f^{(k)}(t) - q(t)]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!}, \forall x \in [a,b].$$

故结论得证. □

例题 0.2 设多项式列 $p_n, n = 1, 2, \cdots$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f, 证明 f 为多项式.

证明 由条件可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$|p_m(x) - p_n(x)| \leqslant 1, \forall m > n \geqslant N, x \in \mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此 $p_m(x) - p_n(x) = C, \forall m > n \geqslant N, x \in \mathbb{R}$. 其中 C 是一个常数. 故

$$p_n(x) = p_N(x) + c_n, \forall n \geqslant N, x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

其中 $\{c_n\}$ 是一个常数列. 从而任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}[p_n(x_0) - p_N(x_0)] = f(x_0) - p_N(x_0).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ 存在. 于是由 x_0 的任意性可得

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = f(x) - p_N(x), x \in \mathbb{R}.$$

即 $f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$. 因此结论得证. 或者对(7)式两边同时令 $n \to \infty$, 也能得到

$$f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

0.1.2 可积函数的逼近

定理 0.3 (可积被连续函数逼近)

(1) 设 $f \in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(2) 设 $f \in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(3) 设 $f \in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(a,b)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这里 $g \in C_c(a,b)$ 表示 g 是有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.

(4) 设 $p \geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这里 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 表示 g 是有含于 $\mathbb{R}$ 的紧支撑的连续函数.

♡

笔记 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

证明

(1) 对任何 $\varepsilon > 0$, 因为 $f \in R[a,b]$, 所以存在一个划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \varepsilon, w_i(f) \text{ 表示} f \text{ 在}[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n \text{ 的振幅.}$$

构造 $[a,b]$ 上的连续函数 g 使得它的图像就是连接各点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 的折线, 即

$$g(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

不难发现 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f|$, 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x_{i-1})| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} w_i(f) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(2) 根据第 1 问可知, 存在 $g \in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理 0.2可知, 存在多项式 $P(x)$ 使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - P(x)|\, \mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - P(x)|\, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \mathrm{d}x = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(3) 对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 由第 1 问可知, 存在 $g \in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的 $\delta > 0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{16}.$$

再取 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

(a): $0 \leqslant h(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b): $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a+\delta) \cup (b-\delta, +\infty)$;

(c): $h(x) = 1, \forall x \in [a+2\delta, b-2\delta]$.

于是取 $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a,b)$, 由第 1 问可知 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f|$, 从而 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g_1| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f|$. 从而

$$\int_a^b |f(x) - g_1(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g(x)h(x)| \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + 2\int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|\mathrm{d}x + 2\int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

(4) 证明的想法和第 3 问类似. 由条件可知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得

$$\int_{|x|\geqslant X} |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_X^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因为 f 在 $[-X,X]$ 黎曼可积, 所以由第 2 问, 存在 $g \in C_c(-X,X)$ 使得

$$\int_{-X}^{X} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{1+\sup_{[-X,X]}|2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X,X]} |g| \leqslant \sup_{[-X,X]} |f|,$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_{|x|\geqslant X} |f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{-X}^{X} |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon + \sup_{[-X,X]} |f-g|^{p-1} \int_{-X}^{X} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon + \sup_{[-X,X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^{X} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \\
&< \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

□

例题 0.3 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数, 且 $f(1)=1$. 求证:

(1)

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}, \tag{8}$$

(2)

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

注 若取 $f(x)=x$, 则式 (9) 成为等式, 因而 (9) 式中的系数 $\frac{2}{3}$ 是最佳的.

注 (10)式实际上就是凹函数的割线放缩, 用凹函数的定义表示了而已.

笔记 构造 f_δ 的想法就是将端点与其邻域内一点连接, 其余点的值不变, 使得 $f_\delta \in C[0,1]$. 但后续分部积分需要 f_δ 二阶连续可微, 于是再用 Berstein 多项式 $B(f_\delta,n)$ 逼近 f_δ, 从而 $B(f_\delta,n) \rightrightarrows f_\delta$, 并且 Berstein 多项式 $B(f_\delta,n)$ 任意阶连续可微, 端点值不变. 但是注意此时不一定有 $B^k(f_\delta,n) \rightrightarrows f_\delta^k$, 因为 f_δ 不可导!

证明 (1) 由定理??知, 凹函数在定义域内部是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改 f 在 0 的值为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

这不改变积分的值, 此时 f 在 0 处连续, 故可不妨设 $f \in C[0,1)$. 对于给定的 $\delta \in (0,1)$ 以及 $x \in (\delta,1)$, 有

$$x = \frac{1-x}{1-\delta}\delta + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right)\cdot 1.$$

因为 f 是凹函数, 有

$$f(x) \geqslant \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta) + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) f(1). \tag{10}$$

由上式和条件 $f(1)=1$, 得 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \geqslant 1$. 若 f 在 1 处不连续, 则 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) > 1$. 可取 δ 充分靠近 1, 使得在 $(\delta,1)$ 上 $f(x)>1$. 令

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ \dfrac{x-\delta}{1-\delta}\cdot 1 + \dfrac{1-x}{1-\delta} f(\delta), & \delta < x \leqslant 1, \end{cases}$$

则 f_δ 是 $[0,1]$ 上连续的凹函数且 $f_\delta(1)=1$, $f_\delta(x) \leqslant f(x)$. 由此可知, 只需对连续的凹函数证明式 (8). 又由于连续函数的 Bernstein 多项式在两个端点插值、保持凸性且一致收敛到该连续函数, 只需对有二阶连续导数的凹函数来证明式 (8). 因此, 不妨设 $f \in C^2[0,1]$.

解法一: 设 a,b 是两个待定常数, 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^1 (f(x)-ax-b)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2} + ab + b^2, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a+b-\int_0^1\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}a+b-\left[\left(\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}\right)f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1\left(\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}\right)f''(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

取 $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}$, 则有

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 (x-1)x^2 f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 f 是凹函数, 有 $f''(x) \leqslant 0$. 因而

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}.$$

将此代入式 (11), 可得式 (8).

解法二:设 a,b 是两个待定常数, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ \Longleftrightarrow &\left(\frac{a}{2}+ab+b^2\right)\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}+b-\int_0^1\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{2}+b-\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}\right)f'(1)+\frac{1}{6}\int_0^1 x^2(ax+3b)f''(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由 $\begin{cases} \dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{2}=0 \\ \dfrac{a}{2}+b=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ 解得 $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}$. 于是取 $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}$, 代入上式得

$$\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 x^2(x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 f 是 $[0,1]$ 上的凹函数可知,$f''(x)\leqslant 0$. 从而

$$\int_0^1 (ax+b)\,f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 x^2(x-1)\,f''(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}.$$

再代入(12)即得

$$\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2\Longrightarrow\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}.$$

(2) 设 $c\in(0,1)$ 是待定系数, 则 $g(x)=\dfrac{f(x)-c}{1-c}$ 仍是 $[0,1]$ 上的凹函数且 $g(1)=1$. 由式 (8) 有

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4},$$

即

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-2c\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+c^2\geqslant\frac{1}{4}(1-c)^2.$$

取 $c=\dfrac{1}{3}$, 则 $c^2=\dfrac{1}{4}(1-c)^2$. 于是

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

引理 0.2

二元函数 $K(x,t)$ 定义为

$$K(x,t)=\begin{cases}t(1-x), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\\ x(1-t), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}.$$

(1) 对 $\forall p\in\mathbb{Z}$, 都有

$$\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x=\frac{t^p(1-t)^p}{p+1},\qquad\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^p(1-x)^p}{p+1}.$$

(2) 设 $f\in C^2[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$, 则

$$f(x)=\int_0^1 K(x,t)(-f''(t))\,\mathrm{d}t,\forall x\in[0,1].$$

♡

证明

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x&=\int_0^t x^p(1-t)^p\,\mathrm{d}x+\int_t^1 t^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x\\&=\frac{t^{p+1}(1-t)^p}{p+1}+\frac{t^p(1-t)^{p+1}}{p+1}\\&=\frac{t^p(1-t)^p}{p+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^x t^p(1-x)^p\,\mathrm{d}t+\int_x^1 x^p(1-t)^p\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x^{p+1}(1-x)^p}{p+1}+\frac{x^p(1-x)^{p+1}}{p+1}\\&=\frac{x^p(1-x)^p}{p+1}.\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^1 K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t=\int_0^x K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t+\int_x^1 K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x t(1-x)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t + \int_x^1 x(1-t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= -x(1-x)f'(x) + \int_0^x (1-x)f'(t)\,\mathrm{d}t + x(1-x)f'(x) - \int_x^1 xf'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x xf'(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 xf'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - x\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - x\left[f(1)-f(0)\right] \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

□

定理 0.4 (Favard 不等式)

若 f 是区间 $[0,1]$ 上的非负凹函数, 则有对 $p \geqslant 1$,

$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p.$$

♡

注 (1) 可以用连续函数的积分来逼近可积函数的积分;

(2) 对 $[0,1]$ 上的凸或凹的连续函数 f, 可以用 Bernstein 多项式列 $B_n(f;x)$ 一致逼近 f, 且 $B_n(f;x)$ 与 f 有相同的凸性或凹性, 而且 $B_n(f;x)$ 在两个端点与 f 的值相同;

(3) 当 f 二阶连续可导且在两个端点 0 和 1 取零值时, f 可表示为

$$\int_0^1 K(x,t)(-f''(t))\,\mathrm{d}t.$$

证明 由定理??知, 凹函数在内点是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改 f 在 0 的值为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, 在 1 的值为 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ 这不改变积分的值, 此时 f 在 0, 1 处连续, 故可不妨设 $f \in C[0,1]$. 选充分小的 $\delta > 0$, 并修改 f 在 $[0,\delta]$ 和 $[1-\delta,1]$ 上的值, 使得修改后的函数是在 $[0,1]$ 的连续凹函数, 且在 0, 1 取零值:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(\delta)}{\delta}x, & x \in [0,\delta), \\ f(x), & x \in [\delta, 1-\delta), \\ \dfrac{f(1-\delta)}{\delta}(1-x), & x \in [1-\delta, 1]. \end{cases}$$

易知

$$\int_0^1 f_\delta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta[f(\delta)+f(1-\delta)]}{2} + \int_\delta^{1-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因而

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_0^1 f_\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此只需对 $[0,1]$ 上满足 $f(0)=f(1)=0$ 的连续凹函数证明. 又因为 f 的 Bernstein 多项式

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad n = 1,2,\cdots$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f, 且 $B_n(f;x)$ 仍是在两个端点取零值的凹函数. 因此只需对有二阶连续导数的函数证明. 此时有 $f''(x) \leqslant 0$. 由 $f(0)=0$, 得

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = xf'(x) - \int_0^x tf''(t)\,\mathrm{d}t.$$

再由 $f(1)=0$, 可得

$$f'(1) = \int_0^1 tf''(t)\,\mathrm{d}t,$$

由定理 0.2(2)可知

$$\begin{aligned}f(x)&=x(f'(x)-f'(1))+xf'(1)-\int_0^x tf''(t)\,\mathrm{d}t\\&=-x\int_x^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^1 tf''(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf''(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中二元函数 $K(x,t)$ 定义为

$$K(x,t)=\begin{cases}t(1-x), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\\ x(1-t), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由 f 是凹函数可知 $f''\leqslant 0$. 于是由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)(-f''(t))\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1 K^p(x,t)(-f''(t))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{定理 0.2(1)}}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 t(1-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{定理 0.2(1)}}-\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p.$$

□

引理 0.3

证明: 若 $A,B,C\in\mathbb{R}$, 则存在 $C_p>0$, 使得

$$|A+B+C|^p\leqslant C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

♡

笔记 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

证明 令

$$S\triangleq\{(A,B,C)\mid|A|^p+|B|^p+|C|^p=1\},$$

则 S 是 $\mathbb{R}^3$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $|A+B+C|^p$ 可以看作紧集 S 上关于 (A,B,C) 的连续函数, 故一定存在 $C_p>0$, 使得

$$|A+B+C|^p\leqslant C_p,\forall(A,B,C)\in S. \tag{13}$$

对 $\forall(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$, 固定 A,B,C, 不妨设 A,B,C 不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$L=\frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p+|B|^p+|C|^p}},$$

考虑 (LA, LB, LC), 则此时

$$|LA|^p + |LB|^p + |LC|^p = 1.$$

因此 $(LA, LB, LC) \in S$. 从而由(13)式可知

$$|LA + LB + LC|^p \leqslant C_p.$$

于是

$$|A + B + C|^p \leqslant \frac{C_p}{L^p} = C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故结论得证. □

定理 0.5 (积分的绝对连续性)

设 $p \geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$, 证明

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

笔记 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

证明 **Step1**: 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$ 时, 则存在 $X > 0$, 使得

$$f(x) = 0, \forall |x| \geqslant X.$$

从而当 $h \in (-1, 1)$ 时, 就有

$$f(x) = 0, \forall |x| \geqslant X + 1.$$

又因为 $f \in C[-X-1, X+1]$, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[-X-1, X+1]$ 上一致连续. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0} \int_{|x|\leqslant X+1} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\leqslant X+1} \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Step2: 对一般的 f, 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由定理 0.3(3)可知, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h) + g(x+h) - g(x) + g(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x$$

利用齐次化方法得到引理 0.3, 从而可知若 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A + B + C|^p \leqslant C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant C_p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right) \\ &\xlongequal[y=x+h]{\text{换元}} 2C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\varepsilon C_p + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{15}$$

由 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 结合 **Step1** 可知

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{16}$$

于是由(15)(16) 式可得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant 2\varepsilon C_p.$$

再由 ε 的任意性得证. □