

0.1 练习

练习 0.1 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

笔记 组合数公式: $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$.
于是有

$$C_m^k = C_{m+1}^k - C_m^{k-1}$$

$$C_m^{k-1} = C_{m+1}^k - C_m^k$$

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, \dots, 2]{(-1) \cdot r_{i-1} + r_i} \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_2^1 - C_1^0 & \cdots & C_n^1 - C_{n-1}^0 \\ 0 & C_3^2 - C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^2 - C_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[i=n, \dots, 2]{(-1) \cdot j_{i-1} + j_i} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 - C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 - C_{n-2}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 - C_2^2 & \cdots & C_n^2 - C_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} - C_{2n-4}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分, 并具有相同的规律. 不断这样做下去, 最后可得 $|A| = 1$ \square

练习 0.2 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

□

练习 0.3 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-a_i)r_1+r_i} a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & a_3b_n - a_nb_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{按第 } n \text{ 列展开}} (-1)^{n+1} a_1b_n \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i) \\ &= a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}b_i - a_ib_{i+1}). \end{aligned}$$

□

练习 0.4 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} a^n + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^n - a^{n-2}.$$

□

注 本题也可由命题??直接得到, $|A| = a^n - a^{n-2}$.练习 0.5 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 Vieta 定理可知, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 因此, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

□

练习 0.6 设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{11} & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{21} & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n1} & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[i=2, \dots, n]{j_i + j_1} \begin{vmatrix} (n-1)(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (n-1)(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-1)j_1 + j_i} (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow[i=2, \dots, n]{j_i+j_1} (n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{n-1} (n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$


□

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

 **练习 0.7** 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$


解

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-1)r_1+r_i} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).
\end{aligned}$$


□

注 因为 $|A|$ 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{命题1.2}} - \sum_{i=2}^n (-1)^{n-2} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

 **练习 0.8** 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 既可以将 $|A|$ 看作命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.
也可以利用求和法将 $|A|$ 化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}]{\substack{-r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$


$$\xrightarrow{\text{命题??}} (a_1+b)b^{n-1} - \sum_{i=2}^n b^{n-2}a_i(-b) = b^{n-1} \left[(a_1+b) + \sum_{i=2}^n a_i \right] = \left((b + \sum_{i=1}^n a_i) \right) b^{n-1}.$$

解法二:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\dots,n}]{\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\dots,n}} (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-a_i \cdot j_1+j_i \\ i=2,\dots,n}]{\substack{-a_i \cdot j_1+j_i \\ i=2,\dots,n}} (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b + \sum_{i=1}^n a_i) b^{n-1}.$$

□

 **练习 0.9** 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 求和法的经典应用.

解

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{\substack{j_i+j_1 \\ 2}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[i=2, \dots, n]{\substack{-r_1+r_i \\ 2}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[i=2, \dots, n]{\substack{-j_1+j_i \\ 2}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \\
&= -\frac{n(n+1)}{2} (-n)^{n-2} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

练习 0.10 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$

解 由二项式定理可知

$$(a_i + b_j)^n = a_i^n + C_n^1 a_i^{n-1} b_j + \cdots + C_n^{n-1} a_i b_j^{n-1} + b_j^n, \text{ 其中 } i, j = 0, 1, \dots, n.$$

从而

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_0 b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_0 b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_1 b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_1 b_n^{n-1} + b_n^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_n^n + C_n^1 a_n^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_n b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_n^n + C_n^1 a_n^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_n b_n^{n-1} + b_n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & a_0 & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^n & a_{n-1}^{n-1} & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ C_n^1 b_0 & C_n^1 b_1 & \cdots & C_n^1 b_{n-1} & C_n^1 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} b_0^{n-1} & C_n^{n-1} b_1^{n-1} & \cdots & C_n^{n-1} b_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_{n-1}^{n-1} & b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \leq j < i \leq n} (b_i - b_j) = \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \leq j < i \leq n} (a_j - a_i) (b_i - b_j).
\end{aligned}$$

□

练习 0.11 求证: n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \cos nx.$$

解 解法一:

设 $|A| = D_n$, 其中 n 表示 $|A|$ 的阶数 ($n \geq 0$). 易知 $D_0 = 1, D_1 = \cos x$.

从而 $|A| = D_n \xrightarrow{\text{按最后一列展开}} 2 \cos x D_{n-1} - D_{n-2} (n \geq 2)$.

命题??

其对应的特征方程为 $\lambda^2 = 2 \cos x \lambda - 1$, 解得 $\lambda_1 = \cos x + i \sin x, \lambda_2 = \cos x - i \sin x$.

于是当 $n \geq 2$ 时, 我们有 $D_n = (\lambda_1 + \lambda_2) D_{n-1} + \lambda_1 \lambda_2 D_{n-2}$.

进而

$$\begin{aligned}
D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= \lambda_2 (D_n - \lambda_1 D_{n-1}), \\
D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= \lambda_1 (D_n - \lambda_2 D_{n-1}).
\end{aligned} \tag{1}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= \lambda_2^{n-1} (D_1 - \lambda_1 D_0) = -i \sin x \cdot \lambda_2^{n-1}, \\
D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= \lambda_1^{n-1} (D_1 - \lambda_2 D_0) = i \sin x \cdot \lambda_1^{n-1}.
\end{aligned}$$

若 $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则联立上面两式, 解得

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{i \sin x \cdot \lambda_1^n + i \sin x \cdot \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{i \sin x \cdot (\cos x + i \sin x)^n + i \sin x \cdot (\cos x - i \sin x)^n}{2i \sin x} \\
&\xrightarrow{\text{Euler 公式}} \frac{i \sin x \cdot e^{nxi} + i \sin x \cdot e^{-nxi}}{2i \sin x} = \frac{i \sin x \cdot (\cos nx + i \sin nx) + i \sin x \cdot (\cos nx - i \sin nx)}{2i \sin x} \\
&= \frac{2i \sin x \cdot \cos nx}{2i \sin x} = \cos nx.
\end{aligned}$$


若 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos k\pi$. 从而由(1)式可得, $D_n - \cos k\pi D_{n-1} = -i \sin x \cdot (\cos k\pi) = 0$.

于是


$$D_n = \cos k\pi D_{n-1} = (\cos k\pi)^2 D_{n-2} = \cdots = (\cos k\pi)^n D_0 = (\cos k\pi)^n = (-1)^{kn} = \cos(nk\pi) = \cos nx.$$

解法二: 仿照练习 0.13 中的数学归纳法证明.

□

 **练习 0.12** 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 观察原行列式我们可以得到, D_n 的每列和有一定的规律, 即除了第一列和最后一列, 中间每列和均为 0. 并且 D_n 是三对角行列式. 因此, 我们既可以应用三对角行列式的结论 (即命题??), 又可以使用求和法进行求解. 如果我们直接应用三对角行列式的结论 (即命题??), 按照对一般的三对角行列式展开的方法能得到相应递推式, 但是这样得到的递推式并不是相邻两项之间的递推, 后续求解通项并不简便. 又因为使用求和法计算行列式后续计算一般比较简便所以我们先采用求和法进行尝试.

解 解法一: 当 $n \geq 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i+r_1]{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{按第一行展开}} -a_1 D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= -a_1 D_{n-1} + (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \\ &= 1 - a_1 D_{n-1}. \end{aligned}$$

其中 D_{n-i} 表示 D_{n-i+1} 去掉第一行和第一列得到的 $n-i$ 阶行列式, $i = 1, 2, \dots, n-1$. (或者称 D_{n-i} 表示以 a_{i+1}, \dots, a_n 为未定元的 $n-i$ 阶行列式, $i = 1, 2, \dots, n-1$)

由递推不难得到

$$D_n = 1 - a_1 (1 - a_2 D_{n-2}) = 1 - a_1 + a_1 a_2 D_{n-2} = \cdots = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$


解法二: 仿照练习 0.13 中的数学归纳法证明. □

 **练习 0.13** 设 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$A_n = a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

 **笔记** 用**数学归纳法**证明与行列式有关的结论.

练习 0.11 和练习 0.12 都可同理使用数学归纳法证明 (对阶数 n 进行归纳即可).

证明 (数学归纳法) 对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1, 2$ 时, 结论显然成立. 假设阶数小于 n 结论成立.


现证明 n 阶的情形. 注意到

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix} = (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1}^2 A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子中得

$$\begin{aligned} A_n &= (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1}^2 A_{n-2} \\ &= (a_{n-1} + a_n) a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) - a_{n-1}^2 a_0 a_1 \cdots a_{n-2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} \right) \\ &= a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + a_0 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1}^2 \frac{1}{a_{n-1}} \\ &= a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \left[a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + 1 \right] \\ &= a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right). \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论对任意正整数 n 都成立. □

 **练习 0.14** 设 $n(n > 2)$ 阶行列式 $|A|$ 的所有元素或为 1 或为 -1, 求证: $|A|$ 的绝对值小于等于 $\frac{2}{3}n!$.

解 对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 3$ 时, 将 $|A|$ 的第一列元素为 -1 的行都乘以 -1, 再将 $|A|$ 的第一行元素为 1 的列都乘以 -1, $|A|$ 的绝对值不改变.

$$\text{因此不妨设 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_0, b_0, c_0, d_0 = 1 \text{ 或 } -1.$$

从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3]{j_1+j_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a, b, c, d = 0 \text{ 或 } 2.$$

于是

$$\text{abs}(|A|) = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} \right) = \text{abs}(ad - bc) \leq 4 = \frac{2}{3} \cdot 3!$$


假设 $n-1$ 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形. 将 $|A|$ 按第一行展开得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \text{ 其中 } a_{1i} = 1 \text{ 或 } -1 (i = 1, 2, \cdots, n).$$


从而由归纳假设可得

$$\begin{aligned} \text{abs}(|A|) &= \text{abs}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) \leq \text{abs}(A_{11}) + \text{abs}(A_{12}) + \cdots + \text{abs}(A_{1n}) \\ &\leq \frac{2}{3}(n-1)! + \frac{2}{3}(n-1)! + \cdots + \frac{2}{3}(n-1)! \\ &= n \cdot \frac{2}{3}(n-1)! = \frac{2}{3}n!. \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立. □

 **练习 0.15** 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 解法一(大拆分法): 注意到

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n A_i = (a-b)^n + \sum_{i=1}^n A_i. \end{aligned}$$

其中 A_i 是第 i 行元素全为 b , 主对角元素除了 (i, i) 元外都为 $a-b$, 其他元素都为 0 的 n 阶行列式.

又因为

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & a-b & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ i & b & \cdots & b & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & & \\ n & & & & a-b \end{vmatrix} = b(a-b)^{n-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$|A| = (a-b)^n + \sum_{i=1}^n A_i = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法二(小拆分法): 记原行列式为 D_n , 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \cdots & b \\ b+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}. (n \geq 2) \end{aligned}$$

从而由上式递推可得


$$\begin{aligned} D_n &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \\ &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)[b(a-b)^{n-2} + (a-b)D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\ &= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\ &= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\ &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法三(求和法):

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

解法四(“爪”型行列式的推广):

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{-j_i+j_1} \begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a-(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

 练习 0.16 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一(大拆分法): 令

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |A| + tu, u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

当 $t = -b$ 时, 可得

$$|A(-b)| = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} = |A| - bu = (a-b)^n.$$

当 $t = -c$ 时, 可得

$$|A(-c)| = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} = |A| - cu = (a-c)^n.$$

若 $b \neq c$, 则联立上面两式可得

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b = c$, 则由练习0.15可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n , 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} \\ &= b(a-c)^{n-1} + (a-b) D_{n-1}. (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+(a-c) & b & \cdots & b \\ c+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= c \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} \\ &= c(a-b)^{n-1} + (a-c) D_{n-1}. (n \geq 2) \end{aligned}$$

若 $b \neq c$, 则联立上面两式可得

$$|A| = D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$


若 $b = c$, 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned} |A| &= D_n = b(a-b)^{n-1} + (a-b) D_{n-1} \\ &= b(a-b)^{n-1} + (a-b) [b(a-b)^{n-2} + (a-b) D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\ &= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\ &= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\ &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

当 $b = c$ 时, 也可以由练习0.15可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

□

 **练习 0.17** 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式, 求证: 对任意 n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n , 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明 证法一 (大拆分法): 因为 $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以它们都是单项式 $1, x, \dots, x^{n-2}$ 的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这 $n-1$ 个单项式进行拆分, 最后得到至多 $(n-1)!$ 个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有 n 列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

证法二 (多项式根的有限性): 令 $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 则将 $f(x)$ 按第一列展开得到

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x).$$

其中 k_i 为行列式 $f(x)$ 的第 $(i, 1)$ 元素的代数余子式, $i = 1, 2, \dots, n$.

注意 k_i 与 x 无关, 均为常数. 若 $f(x)$ 不恒为 0, 则又因为 $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以 $\deg f(x) \leq n-2$. 但是, 注意到 $f(a_2) = f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$, 即 $f(x)$ 有 $n-1$ 个根. 于是由余数定理可知, $(x-a_2) \cdots (x-a_n) | f(x)$. 从而 $n-1 = \deg(x-a_2) \cdots (x-a_n) \geq \deg f(x)$. 这与 $\deg f(x) \leq n-2$ 矛盾. 故 $f(x) \equiv 0$, 当然也有 $f(a_1) = 0$.

证法三:


设多项式

$$f_k(x) = c_{k,n-2}x^{n-2} + \cdots + c_{k1}x + c_{k0}, \quad 1 \leq k \leq n.$$


则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2} \end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是 $n \times (n-1)$ 和 $(n-1) \times n$ 矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零. \square

 **练习 0.18** 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

 **笔记** 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的 t 对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法. (并且因为难以找到合适的 t_i , 所以推广的大拆分也不行)

解 (小拆分法) 将 D_n 最后一列拆成两列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + D_{n-1}.$$

若 $a_n \neq 0$, 则由上式可得


$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \xrightarrow[i=1,2,\dots,n]{\text{对第一个行列式: } -a_i j_n + j_i} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} = a_n^2 + D_{n-1}. (n \geq 2)$$

若 $a_n = 0$, 则上面第一个行列式等于 0, 进而 $D_n = D_{n-1} (n \geq 0)$. 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n = a_n^2 + D_{n-1} = a_n^2 + (a_{n-1}^2 + D_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=2}^n a_i^2 + D_1 = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

□

 **练习 0.19** 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos (n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos (n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos (n-1)\theta_n \end{vmatrix}.$$

解 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\begin{aligned} \cos k\theta + i \sin k\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k \\ &= \cos^k \theta + i C_k^1 \cos^{k-1} \theta \sin \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta \sin^2 \theta + i C_k^3 \cos^{k-3} \theta \sin^3 \theta - \cdots \\ &= \cos^k \theta + i C_k^1 \cos^{k-1} \theta \sin \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta (1 - \cos^2 \theta) + i C_k^3 \cos^{k-3} \theta \sin^3 \theta - \cdots \end{aligned}$$

比较实部可得

$$\begin{aligned} \cos k\theta &= \cos^k \theta (1 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots) - C_k^2 \cos^{k-2} \theta + C_k^4 \cos^{k-4} \theta - \cdots \\ &= 2^{k-1} \cos^k \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta + C_k^4 \cos^{k-4} \theta - \cdots \end{aligned}$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成 $\cos \theta_j (j = 2, 3, \dots, n)$ 的多项式.

再利用行列式的性质, 可依次将第 3, 4, \dots , n 列消除最高次项外的其他项, 从而得到

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & 2 \cos^2 \theta_1 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & 2 \cos^2 \theta_2 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & 2 \cos^2 \theta_n & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos^2 \theta_2 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos^2 \theta_n & \cdots & \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} \\ &= 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \end{aligned}$$

□

结论 组合式计算常用公式:

$$(1) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$(2) C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

证明:(1)

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m+m)}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

(2)(i) 当 n 为奇数时, 由 $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, 可得

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n \end{aligned}$$

由于 $C_{n-1}^n = 0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

故 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$.

(ii) 当 n 为偶数时, 由 $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, 可得


$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n \\ C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^{n-1} &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} \end{aligned}$$

由于 $C_{n-1}^n = 0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.


而上面两式相加, 得 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

故 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$.

综上所述, $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$.

 **练习 0.20** 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论.


解 根据和差化积公式, 可得

$$\sin k\theta - \sin(k-2)\theta = 2\sin\theta \cos(k-1)\theta, k=2, 3, \cdots, n.$$


再结合上一题结论, 可得

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & 2\sin \theta_1 \cos \theta_1 & \cdots & 2\sin \theta_1 \cos(n-1)\theta_1 \\ \sin \theta_2 & 2\sin \theta_2 \cos \theta_2 & \cdots & 2\sin \theta_2 \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & 2\sin \theta_n \cos \theta_n & \cdots & 2\sin \theta_n \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\ &= 2^{n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i) \\ &= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \end{aligned}$$

□

 **练习 0.21** 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 本题也可以使用大拆分法进行求解, 但我们以本题为例介绍利用**升阶法**计算行列式.

解 解法一升阶法:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{小拆分法}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= 2x_1x_2\cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= 2x_1x_2\cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= [2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

解法二 (大拆分法): 设 $|B(t)| = \begin{vmatrix} x_1+t & x_1^2+t & \cdots & x_1^n+t \\ x_2+t & x_2^2+t & \cdots & x_2^n+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+t & x_n^2+t & \cdots & x_n^n+t \end{vmatrix}$, 且 B_{ij} 是 $|B(0)|$ 的第 (i, j) 元素的代数余子式.

根据行列式的性质将 $|A|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 t 所在的列展开得到

$$\begin{aligned}
 |A| &= |B(1)| = |B(0)| + \sum_{i,j=1}^n B_{ij}, \\
 |B(-1)| &= |B(0)| - \sum_{i,j=1}^n B_{ij}.
 \end{aligned}$$

于是 $|A| = 2|B(0)| - |B(-1)|$. 注意到

$$|B(0)| = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1x_2\cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1x_2\cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

又由行列式性质可得

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{B}(-1)| &= \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_1^2 - 1 & \cdots & x_1^n - 1 \\ x_2 - 1 & x_2^2 - 1 & \cdots & x_2^n - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - 1 & x_n^2 - 1 & \cdots & x_n^n - 1 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + 1 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdots + x_1 + 1 \\ 1 & x_2 + 1 & \cdots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \cdots + x_2 + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + 1 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \cdots + x_n + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

故可得

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= 2|\mathbf{B}(0)| - |\mathbf{B}(-1)| = 2x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= [2x_1 x_2 \cdots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$


□

结论 升阶法: 将原行列式加上一行和一列使得得到新行列式的阶数比原行列式要高一阶.

升阶法的应用:

(1) 当原行列式每一行具有相同的结构时, 我们可以在原行列式的基础上加上一行和一列, 新加上的一列和一行需要满足: 新的一列除了与新的一行交叉位置的元素为 1 外其余全为 0 (这样才能保证新的行列式按新的一行或一列展开后与原行列式相同), 并且新加上的一行除 1 以外其他位置的元素就取原行列式中每一行所具有的相同结构 (这样可以利用行列式的性质将每一行中的相同的结构减去, 进而达到简化原行列式的目的). 具体例子见练习 0.21.

(2) 当原行列式是我们由熟悉的行列式去掉某一行、或某一列、或某一行和一列得到的, 我们可以在原行列式的基础上补充上缺少的那一行和一列, 再进行计算得到新行列式的式子. 再将新行列式按照新添加的一行或一列展开得到的对应元素乘与其对应的代数余子式, 而新添加的一行和一列交叉位置的元素对应的余子式就是原行列式, 最后两边式子比较系数一般就能得到原行列式的值. 具体例子见练习 0.22.

 **练习 0.22** 求下列 n 阶行列式的值 ($1 \leq i \leq n-1$):

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解 令

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix} = (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (2)$$

而上式右边是关于 y 的 n 次多项式, 并且其 y^i 前的系数是

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-i} \leq n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

将 $|\mathbf{B}|$ 按最后一行展开, 得

$$|\mathbf{B}| = A_{n1} + A_{n2}y + \cdots + A_{ni}y^i + \cdots + A_{nn}y^n,$$

其中 A_{nk} 为 $|B|$ 的 (n, k) 位置元素的代数余子式, $k = 1, 2, \dots, n$.

注意到 A_{nk} 均与 y 无关. 因此 $|B|$ 作为关于 y 的 n 次多项式, 其 y^i 前的系数是

$$A_{ni} = (-1)^{n+1+i+1} |A| = (-1)^{n+i} |A|.$$

再结合(2)式, 可知

$$(-1)^{n+i} |A| = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n-i} \leq n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

$$\text{故 } |A| = x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□

练习 0.23 若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 证明: $|A| = 0$.

证明 由行列式的组合定义可得

$$|A| = \sum_{1 \leq k_1 k_2 \dots k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \dots a_{k_{nn}}$$

由于 $|A|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 故 $a_{k_{11}}, a_{k_{22}}, \dots, a_{k_{nn}}$ 中至少有一个为零, 从而 $a_{k_{11}} a_{k_{22}} \dots a_{k_{nn}} = 0$, 因此 $|A| = 0$. 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为 $|A|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个, 由抽屉原理可知, $|A|$ 至少有一列其零元素的个数大于等于 $\left\lfloor \frac{n^2 - n}{n} \right\rfloor + 1 = n$, 即 $|A|$ 至少有一列其元素全为零, 因此 $|A| = 0$. □

练习 0.24 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n(n \geq 2)$ 阶非异整数方阵, 满足对任意的 $i, j, |A|$ 均可整除 a_{ij} , 证明: $|A| = \pm 1$.

解 $|A|$ 可整除每个元素 $a_{i,j}$, 故由行列式的组合定义

$$\sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \dots a_{k_{nn}}$$

可知 $|A|^n$ 可整除 $|A|$ 中每个单项 $a_{k_{11}} a_{k_{22}} \dots a_{k_{nn}}$, 从而 $|A|^n$ 可整除 $|A|$, 即有 $|A|^{n-1}$ 可整除 1, 于是 $|A|^{n-1} = \pm 1$. 又由行列式的组合定义可知 $|A|$ 是整数, 从而只能是 $|A| = \pm 1$. □

练习 0.25 利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式:

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

解 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 Laplace 定理按第一、二列展开得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$


上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

□

 **练习 0.26** 求 $2n$ 阶行列式的值 (空缺处都是零):

$$\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix}.$$


解 设原行列式为 D_{2n} , 其中 $2n$ 为行列式的阶数. 不断用 Laplace 定理按第一行及最后一行展开, 可得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行及最后一行展开}} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2n-2} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)}.$$


进而, 由上述递推式可得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 \\ &= (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n. \end{aligned}$$

□

 **练习 0.27** 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的“爪”型行列式.

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x - x^2 & x^2 - 2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x - x^2 & 0 & \cdots & x^2 - 2a_nx \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{“爪”型行列式}} (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) - \sum_{i=2}^n a_i^2 (2a_1x - x^2) (x^2 - 2a_2x) \cdots \widehat{(x^2 - 2a_ix)} \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n a_i^2 (x^2 - 2a_1x) (x^2 - 2a_2x) \cdots \widehat{(x^2 - 2a_ix)} \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x^2 - 2a_1x) + a_1^2] \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \\
&= \prod_{i=1}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=1}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx).
\end{aligned}$$

□

练习 0.28 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-j_1+j_i \\ i=1,2}} \begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & c^2 & 0 \\ a^2 - (b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2 - (b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2 - b^2 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ i=1,2}} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{\frac{c}{2}j_1+j_2 \\ \frac{b}{2}j_3+j_2}} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix} \\
&= 2abc(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

解法二 (求根法):

□

练习 0.29 证明: 若一个 $n(n > 1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数. □

练习 0.30 n 阶行列式 $|A|$ 的值为 c , 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|A|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|B|$ 的值.

解

$$\begin{aligned}
|B| &= |\alpha_1 + \alpha_n, \alpha_2 + \alpha_1, \cdots, \alpha_n + \alpha_{n-1}| \\
&= |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}| + \sum_{1 \leq k \leq n-2} \sum_{2 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n \\ \alpha_n, \cdots, \alpha_{j_1+1}, \cdots, \alpha_{j_2+1}, \cdots, \alpha_{j_k+1}, \cdots, \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\
&\quad + \sum_{1 \leq k \leq n-2} \sum_{2 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n \\ \alpha_1, \cdots, \alpha_{j_1+1}, \cdots, \alpha_{j_2+1}, \cdots, \alpha_{j_k+1}, \cdots, \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}| \\
&= c + (-1)^{n-1} |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| \\
&= c + (-1)^{n-1} c \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2c, & n \text{ 为奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

练习 0.31 令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)}{(a_2 a_3 \cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n \leq k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n=k$ 时, 将行列式 $(a_1 a_2, \cdots, a_k)$ 按第一列展开得

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \cdots a_k) &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & \\ -1 & a_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & & \\ -1 & a_4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} \\ &= a_1 (a_2 a_3 \cdots a_k) + (a_3 a_4 \cdots a_k). \end{aligned}$$

从而

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3 a_4 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

练习 0.32 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = \max\{i, j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-r_i + r_{i-1}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

□

练习 0.33 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = |i - j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-j_{i-1} + j_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, 1]{r_n + r_i} \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)^{n-2} (n-1).$$

□

练习 0.34 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时,但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整.此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律,再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式,而且每个行列式并不是完整的 Vandermode 行列式.后续求解很繁琐,因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \\ 1 & y - a & y(y - a) & y^2(y - a) & \cdots & y^{n-1}(y - a) \end{vmatrix}$, 则

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

由上式可知, $|B|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|B|$ 按最后一行展开得到

$$|B| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} B_{n+1,i} y^{i-1}, \text{ 其中 } B_{ni} \text{ 是 } |B| \text{ 的第 } (n+1, i) \text{ 元的余子式, } i = 1, 2, \dots, n+1.$$

从而

$$|B| = (-1)^{n+2} B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} B_{n+1,i} y^{i-2} (y - a) = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (3)$$

又易知 $B_{n+1,2} = |A|$, 而当 $a = 0$ 时, 由等式(3)可知, $|B|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(3)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3} |A| = (-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n (-x_1) \cdots (-x_{i-1}) (-x_{i+1}) \cdots (-x_n) \right).$$

$$\text{于是 } |A| = (-1)^{n+3} (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right).$$

当 $a \neq 0$ 时, 由等式(3)可知, $|B|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(3)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2} B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k). \quad (4)$$


又因为

$$\begin{aligned}
 B_{n+1,1} &= \begin{vmatrix} x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$


所以再结合等式(4)可得

$$\begin{aligned}
 -a(-1)^{n+3}|A| &= -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k) - (-1)^{n+2}B_{n+1,1} \\
 &= (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left[\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right].
 \end{aligned}$$

故此时 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right)$. □

 **练习 0.35** 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}$, 则 $I = \frac{G(n)}{n}$ 且 $G(0) = 0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$G'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = n! x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \prod_{k=0}^n (x - k).$$

因此

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{G(n)}{n} = \frac{\int_0^n G'(x) dx}{n} = (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x - k) dx \\
 &\stackrel{\text{区间再现}}{=} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (n - k - x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n+1}(n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k) dx \\ &= (-1)^{n+1} I. \end{aligned}$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1} = -1$. 于是 $I = -I$. 故 $I = 0$. □