0.1 实正规矩阵的正交相似标准型

命题 0.1

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 求证: $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为奇数.

注 这个命题的直接推论是: 若正交矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$. 这一结论也可由第 2 章矩阵的技巧 (类似于例 2.19 的讨论) 来得到. 又因为正交矩阵行列式的值等于 1 或 -1, 故例 9.119 的等价命题为: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为偶数.

证明 因为正交矩阵的逆矩阵以及正交矩阵的乘积都是正交矩阵, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 还是正交矩阵. $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 等价于 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}| = -1$, 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{I}_n)$, 故只要证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$ 为奇数即可. 下面给出两种证法.

证法一:设 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1 \right\},$$

其中 $\sin\theta_i \neq 0 (1 \leq i \leq r)$, 且有 s 个 1, t 个 -1. 于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^t$, 并且

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 1 + \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & 1 + \cos\theta_r \end{pmatrix}, 2, \cdots, 2, 0, \cdots, 0 \right\},$$

从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = n - t$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 当且仅当 t 为奇数, 即当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$ 为奇数.

证法二:由于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是复正规矩阵, 从而酉相似于对角矩阵, 特别地, $\boldsymbol{A}$ 可复对角化. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是模长等于 1 的复数, 故或者是模长等于 1 的共轭虚特征值, 或者是 ± 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1 的几何重数 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = t$, 则其代数重数也为 t, 于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^t = -1$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = t$ 为奇数.

□