

0.1 复数的几何表示

定义 0.1

一个复数 $z = x + iy$ 本质上由一对有序实数 (x, y) 唯一地确定, (x, y) 就称为复数 z 的实数对形式. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以借助于横坐标为 x 、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z = x + iy$. z 的极坐标设为 (r, θ) , 那么 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴; y 轴上的非原点的点对应着纯虚数, 故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 \mathbb{C} 表示.

在复平面上, 从原点到点 $z = x + iy$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 这种对应关系使复数的加 (减) 法与向量的加 (减) 法之间保持一致.



注 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2 , 那么这个向量所表示的复数便是 $z_2 - z_1$, 因而 $|z_2 - z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 $z_1 + z_2$; 以 z_2 为起点, z_1 为终点的向量就表示 $z_1 - z_2$ (图 1). 现在再来看命题 ??(ii) 的不等式 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

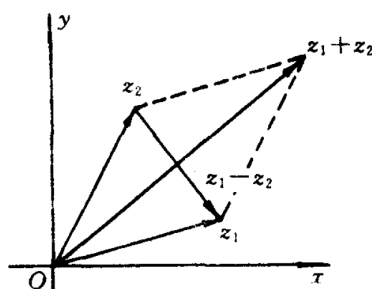


图 1

定义 0.2 (辐角)

设 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $z = x + iy$ 也可写成极坐标形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ 其中 } r = |z|, \theta = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

称 θ 为复数 z 的**辐角**, 记为 $\theta = \operatorname{Arg} z$. 显然

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

因此 z 的辐角有无穷多个, 但只有一个辐角在 $(-\pi, \pi]$ 中, 称这个辐角为 z 的**辐角主值**, 记为 $\arg z$. 因而

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

注意 0 的辐角没有意义.



注 设 $z = x + iy \in \mathbb{C}/\{0\}$, 注意到 $-\pi < \arg z \leq \pi, -\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$, 故 z 的主辐角与反正切 $\arctan \frac{y}{x}$ 的关系如下:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (z \neq 0)$$

定理 0.1

设 z_1, z_2 是两个复数, 则

- (1) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.
- (2) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.
- (3) $\operatorname{Arg}(\alpha z) = \operatorname{Arg} z \ (\alpha > 0)$, $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z \ (n \in \mathbb{N})$.



笔记 在 (1) 中, 第一个等式在命题 0.1(iv) 中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z , 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\frac{\pi}{2}$, 因此 iz 就是把 z 按反时针方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)$ 来表示, 这一简单的事实讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

(2) 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

所以

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

(3)



命题 0.1

- (1) 向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.
- (2) 向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.



证明

(1) 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\frac{\pi}{2}$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个纯虚数, 因而

$$z_1 \bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2 \text{ 也是一个纯虚数, 即 } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0.$$

(2) 这是因为 z_1 与 z_2 平行就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\pi$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\pi$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个实数, 因而

$$z_1 \bar{z}_2 = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2 \text{ 也是一个实数, 即 } \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0.$$

□

例题 0.1 在图 2 的三角形中, $AB = AC$, $PQ = RS$, M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明: $MN \perp BC$.

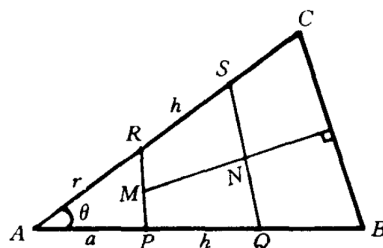


图 2

证明 把 A 取作坐标原点, AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P, Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $e^{i\theta}$ 记 $\cos\theta + i\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $re^{i\theta}$ 和 $(r+h)e^{i\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M: \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}),$$

$$N: \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}].$$

若记 $z_1 = \overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1 = \frac{1}{2}[(a+h) + (r+h)e^{i\theta}] - \frac{1}{2}(a + re^{i\theta}) = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b , 因为 $AB = AC$, 所以 C 的坐标为 $be^{i\theta}$. 若记 $z_2 = \overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2 = be^{i\theta} - b = b(e^{i\theta} - 1).$$

现在

$$z_1 \bar{z}_2 = \frac{h}{2}(1 + e^{i\theta})b(e^{-i\theta} - 1) = \frac{bh}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -ibh \sin\theta,$$

因而 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$. 所以由命题 0.1(1) 可知 z_1 垂直 z_2 , 即 $MN \perp BC$.

□

例题 0.2 证明: 平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\right) = 0. \quad (1)$$

证明 从图 3 可以看出, z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件是向量 $z_1 - z_3$ 和 $z_1 - z_4$ 的夹角等于向量 $z_2 - z_3$ 和 $z_2 - z_4$ 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 0.1(2) 立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$ 在实轴上, 因而等式 (1) 成立.

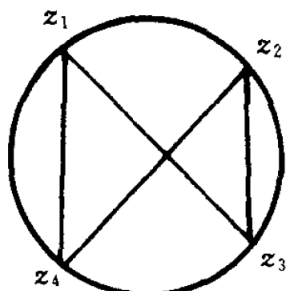


图 3

□

定理 0.2 (De Moivre 公式)

对任意整数 n , 都有 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

♡

证明 设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \dots, z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)].$$

特别当 $z_1 = \cdots = z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta = \cos(-n)\theta + i \sin(-n)\theta.$$

□

命题 0.2

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n = w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

♣

注 这 n 个复数恰好是以原点为中心、 $\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w = 1$ 时, 若记 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w}, \sqrt[n]{w}\omega, \dots, \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

证明 现在设 $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 是给定的, 要求的 $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. 由 **De Moivre 公式**, $z^n = w$ 等价于

$$\begin{aligned} \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \iff \begin{cases} \rho^n \cos n\varphi = r \cos \theta \\ \rho^n \sin n\varphi = r \sin \theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho^n = r \\ \cos n\varphi = \cos \theta \\ \sin n\varphi = \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

故方程 $z^n = w$ 的根为

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对 $\forall k \geq n$, 都存在 $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$, 使 $k = p_k n + q_k$. 于是

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2q_k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2q_k\pi}{n} \right).$$

又注意到 $\sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$ 互不相同, 故方程 $z^n = w$ 的根只有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

□