0.1 其他

例题 0.1 设 A, B, C 都是 n 阶复方阵, 记 $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$, 证明:$M$ 的特征值是 $A+B+C$, $A+wB+w^2C$, $A+w^2B+wC$ 的特征值构成的集合的并, 这里 w 是三次单位根, 并集记重复.

笔记 观察到 M 矩阵与循环矩阵由类似结构, 回忆命题??的证明过程, 利用与命题??相同的方法构造相似矩阵与对应的过渡矩阵.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix}$ 相似. 因此结论得证. □

例题 0.2 设 A 是 n 阶方阵,$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是 A 的 k 个互不相同的特征值,v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量, 若 W 是 A 的一个不变子空间, 且 $w = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \in W$, 这里 $c_1, \cdots, c_k$ 全都非零, 证明: 所有 v_i 均在 W 中.

证明 $\forall w \in W$, 都有 $w = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k$, 从而由 W 是 A 的不变子空间及 v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量可知

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Aw = \lambda_1c_1v_1 + \cdots + \lambda_kc_kv_k \in W, \\ \alpha_2 &= A^2w = \lambda_1^2c_1v_1 + \cdots + \lambda_k^2c_kv_k \in W, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k &= A^{k-1}w = \lambda_1^{k-1}c_1v_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1}c_kv_k \in W. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1v_1 \\ c_2v_2 \\ \vdots \\ c_kv_k \end{pmatrix}.$$

利用 Vandermonde 行列式可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \text{可逆,}$$

因此

$$\begin{pmatrix} c_1v_1 \\ c_2v_2 \\ \vdots \\ c_kv_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

进而对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 都有 $c_iv_i\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$, 又 $c_i\neq 0$, 故 $v_i\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$. 又因为 $\alpha_i\in W\ (1\le i\le k)$, 所以 $v_i\in W$. □

例题 0.3 设 A 是 $d\times d$ 整数矩阵且满足 $I+A+A^2+\cdots+A^{100}=0$, 对任意正整数 $n\le 100$, 证明:$A^n+A^{n+1}+\cdots+A^{100}$ 的行列式为 1.

证明 设 $m(x)=x^{100}+\cdots+x+1$, 则 $m(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $m(x)$ 不可约. 再设 A 的极小多项式为 $g(x)$, 则由条件可知 $g(x)\mid m(x)$, 再由 $m(x)$ 不可约可得 $g(x)=m(x)$. 记 A 的不变因子分别为 $d_1,\cdots,d_k$, 其中 $d_i\mid d_{i+1}\ (1\leqslant i\leqslant k)$, 并且 $d_k=m(x)$. 于是 $d_i\mid m(x)$, 而 $m(x)$ 不可约, 故 A 的不变因子为 $m(x),\cdots,m(x)$（共有 k 个）. 从而

$$|\lambda I-A|=(m(\lambda))^k.$$

又因为 A 是 d 阶矩阵, 所以 $d=100k$. 再根据矩阵的有理标准型可知, 存在可逆矩阵 P, 使得

$$PAP^{-1}=F=\begin{pmatrix}F(m(x))&&\\&\ddots&\\&&F(m(x))\end{pmatrix}_{100s\times 100s},$$

其中 $F(m(x))=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\\-1&-1&\cdots&-1\end{pmatrix}_{100\times 100}$. 又因为条件和结论在线性变换 $A\to PAP^{-1}=F$ 下不改变, 故不妨设 $A=F$. 设 $F(m(x))$ 的特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{100}$, 则

$$|\lambda_iI-F(m(x))|=1+\lambda_i+\cdots+\lambda_i^{100}=0,$$

从而 λ_i 都是 $1+x+\cdots+x^{100}=0$ 的根, 故

$$\lambda_k=e^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{101}}\ (1\leqslant k\leqslant 100).\tag{1}$$

再根据 Vieta 定理可得

$$|F(m(x))|=\lambda_1\cdots\lambda_{100}=1.$$

从而 $|F|=|F(m(x))|^s=1$, 并且 F 的特征值就是 $\lambda_k=e^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{101}}\ (1\leqslant k\leqslant 100)$ 且每个特征值都是 100 重的.

注意到对 $\forall n\in[1,100]\cap\mathbb{N}$, 有

$$|F^n+F^{n+1}+\cdots+F^{100}|=|F|^n|I+F+\cdots+F^{100-n}|=|I+F+\cdots+F^{100-n}|.$$

记 $k=100-n$, 则 $k\in[0,99]\cap\mathbb{N}$. 因此只需证

$$|I+F+\cdots+F^k|=1,\forall k\in[0,99]\cap\mathbb{N}.$$

当 $k=0$ 时, 结论显然成立. 当 $k\in[1,99]\cap\mathbb{N}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}|I+F+\cdots+F^k|=1&\iff|(I+F+\cdots+F^k)(I-F)|=|I-F|\iff|I-F^{k+1}|=|I-F|\\&\iff(1-\lambda_1^{k+1})(1-\lambda_2^{k+1})\cdots(1-\lambda_k^{k+1})=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_k).\end{aligned}\tag{2}$$

记 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{101}}$, 则由(1)式可知上式最后一个等式等价于

$$(1-\varepsilon^{k+1})(1-\varepsilon^{2(k+1)})\cdots(1-\varepsilon^{100(k+1)})=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{100}).$$

由 $(k+1,100)=1\ (1\leqslant k\leqslant 99)$ 及命题??可知,ε^{k+1} 是 101 阶循环群 $\{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{100}\}=\langle\varepsilon\rangle$ 的一个生成元, 因此

$$\{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{100}\}=\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon^{k+1}\rangle=\{1,\varepsilon^{k+1},\cdots,\varepsilon^{100(k+1)}\}.$$

从而

$$(1-\varepsilon^{k+1})(1-\varepsilon^{2(k+1)})\cdots(1-\varepsilon^{100(k+1)})=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{100}).$$

故再由(2)式, 结论得证. □

例题 0.4 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $(A^T)^m=A^k$, 其中 m,k 是不同的正整数, 证明:A 的特征值是零或者单位根.

证明 由条件可知

$$(A^T)^{m^2} = A^{mk},$$
$$(A^T)^{mk} = A^{k^2}.$$

进而

$$A^{m^2} = (A^T)^{mk} = A^{k^2}.$$

于是 A 的特征值 λ 都满足

$$\lambda^{m^2} = \lambda^{k^2}.$$

故 λ 为 0 或单位根. □

例题 0.5 设 A, B 是 n 阶方阵, 满足 $A^2B + BA^2 = 2ABA$, 证明:$AB - BA$ 是幂零矩阵.

证明 记 $C = AB - BA$, 则显然 $\mathrm{tr}(C) = 0$. 由条件可知

$$A^2B + BA^2 = 2ABA \Longleftrightarrow A^2B - ABA = ABA - BA^2 \Longleftrightarrow A(AB - BA) = (AB - BA)A \Longleftrightarrow AC = CA.$$

从而由上式及矩阵迹的交换性可得, 对 $\forall k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$\mathrm{tr}(C^k) = \mathrm{tr}(C^{k-1}(AB - BA)) = \mathrm{tr}(C^{k-1}AB) - \mathrm{tr}(C^{k-1}BA) = \mathrm{tr}(AC^{k-1}B) - \mathrm{tr}(AC^{k-1}B) = 0.$$

故由命题**??**可知 $C = AB - BA$ 是幂零矩阵. □