0.1 矩阵乘法与行列式计算

命题 0.1 (可以写成两个矩阵 (向量) 乘积的矩阵)

若已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{1n} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{1n} & \cdots & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12}+\cdots+a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{2n} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{2n} & \cdots & a_{n1}b_{21}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2}+\cdots+a_{1n}b_{nn} & a_{21}b_{n1}+a_{22}b_{n2}+\cdots+a_{2n}b_{nn} & \cdots & a_{n1}b_{n1}+a_{n2}b_{n2}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

则矩阵 A 可以写成 BC, 其中

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

即

$$A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=BC.$$

特别地, 若矩阵 A 的行/列向量成比例, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

则令 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 就有 $A=\beta'\alpha=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

注 若矩阵的列向量成比例, 则行向量也一定成比例. 反之也成立.

笔记 观察原矩阵 A 不难发现: **矩阵 A 的每一行沿行方向只有 a_{ij}(的角标) 改变, 而 b_{kl}(的角标) 并不改变; 而矩阵 A 的每一列沿列方向只有 b_{kl}(的角标) 改变,a_{ij}(的角标) 并不改变.** 因此具有这种性质的矩阵, 都可以按照这个命题将其写成两个矩阵的乘积. 特别地, **若矩阵的行/列向量成比例, 则一定可以将其写成两个向量的乘积.**

记忆小技巧: 只需要记住矩阵 B 的形式 (沿行方向不变的项写在前面作为矩阵 B 的元素), 然后结合原矩阵, 利用矩阵乘法就能写出矩阵 C. 即**按行变化的项写左边 (作为矩阵 B 的元素), 按列变化的项写右边 (作为矩阵 C 的元素).**

注 拆分后的矩阵 B 的行数与原矩阵 A 相同, 矩阵 C 的列数与原矩阵 A 相同. 但是矩阵 B 的列数与矩阵 C 的行数可以任意选取, 只要满足 $BC=A$ 即可.

证明 利用矩阵乘法容易得到证明.

命题 0.2 (一些能写成两个向量乘积的矩阵)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \alpha\alpha'$, 其中 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$.

2. 若矩阵 A 的行/列向量成比例, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

则有 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$.

笔记 这里的 a_i 可以是行向量,b_i 可以是列向量. 此时矩阵 A 的元素就是 a_ib_i 仍然是一个数. 并且此时矩阵 A 能够分解的条件应该改为**矩阵 A 的每一行都有公共的行向量 a_i, 每一列都有公共的列向量 b_i.**

注 若 a_i, b_i 是上述向量, 则根据矩阵乘法, 可知 a_i 的列数可以任意选取,b_i 的行数可以任意选取. 此时只要确定每个向量 a_i, b_i 就可以确定矩阵 A 的分解式.

例题 0.1 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$,

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

求 $|S|$ 的值并证明若 x_i 是实数, 则 $|S| \geq 0$.

解 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

则 $S = VV'$, 因此

$$|S| = |V|^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \geq 0.$$

例题 0.2 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$, 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}.$$

解 将矩阵 A 分解为两个矩阵的乘积:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&x\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&x^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^{n-1}&0\\1&x_2&\cdots&x_2^{n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

因此 $|A|=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2$.

例题 0.3 计算下列矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}x&-y&-z&-w\\y&x&-w&z\\z&w&x&-y\\w&-z&y&x\end{pmatrix}.$$

解 *解法一:* 注意到

$$AA'=\begin{pmatrix}x&-y&-z&-w\\y&x&-w&z\\z&w&x&-y\\w&-z&y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z&w\\-y&x&w&-z\\-z&-w&x&y\\-w&z&-y&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&u&0&0\\0&0&u&0\\0&0&0&u\end{pmatrix}$$

其中 $u=x^2+y^2+z^2+w^2$, 因此

$$|A|^2=(x^2+y^2+z^2+w^2)^4.$$

故

$$|A|=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2.$$

在矩阵 A 中令 $x=1,y=z=w=0$, 显然 $|A|=1$.

解法二: 令

$$B=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}z&w\\w&-z\end{pmatrix},$$

则 $|A|=\begin{vmatrix}B&-C\\C&B\end{vmatrix}$. 由命题**??**可得

$$|A|=|B+\mathrm{i}C||B-\mathrm{i}C|=\begin{vmatrix}x+\mathrm{i}z&-y+\mathrm{i}w\\y+\mathrm{i}w&x-\mathrm{i}z\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-\mathrm{i}z&-y-\mathrm{i}w\\y-\mathrm{i}w&x+\mathrm{i}z\end{vmatrix}=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2.$$

例题 0.4 计算下列矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&\cos 2\theta&\cos 3\theta&\cdots&\cos n\theta\\\cos n\theta&\cos\theta&\cos 2\theta&\cdots&\cos(n-1)\theta\\\cos(n-1)\theta&\cos n\theta&\cos\theta&\cdots&\cos(n-2)\theta\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos 2\theta&\cos 3\theta&\cos 4\theta&\cdots&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

解 解由上面的结论可知

$$|A|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根,$f(x)=\cos\theta+x\cos 2\theta+\cdots+x^{n-1}\cos n\theta$. 令

$$g(x)=\sin\theta+x\sin 2\theta+\cdots+x^{n-1}\sin n\theta,$$

则由 De Moivre 公式可得

$$
\begin{aligned}
&f(x)+\mathrm{i}g(x)=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+x(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2+\cdots+x^{n-1}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\\
&=\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\left[1-x^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\right]}{1-x(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{1-x^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}{\cos\theta-x-\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{[(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)-x][(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-x]}\\
&=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta}=\frac{(1-x^n\cos n\theta+\mathrm{i}x^n\sin n\theta)(\cos\theta-x+\mathrm{i}\sin\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}\\
&=\frac{\left[x^{n+1}\cos n\theta-x^n\cos(n+1)\theta-x+\cos\theta\right]+\mathrm{i}\left[x^{n+1}\sin n\theta+x^n\sin(n-1)\theta+\sin\theta\right]}{x^2-2x\cos\theta+1}.
\end{aligned}
$$

再比较实部, 可得

$$
f(x)=\frac{\cos n\theta\cdot x^{n+1}-\cos(n+1)\theta\cdot x^n-x+\cos\theta}{x^2-2\cos\theta\cdot x+1}.
$$

对任意的 ε_i, 经计算并化简, 可得

$$
f(\varepsilon_i)=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)-\varepsilon_i(1-\cos n\theta)}{[(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-\varepsilon_i][(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)-\varepsilon_i]}.
$$

注意到对任意的 a,b, 有 $a^n-b^n=(a-\varepsilon_1 b)(a-\varepsilon_2 b)\cdots(a-\varepsilon_n b)$, 因此

$$
\begin{aligned}
|A|=\prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i)&=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)^n-(1-\cos n\theta)^n}{(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta-1)(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta-1)}\\
&=\frac{(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)^n-(1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos n\theta)}\\
&=\frac{2^n\sin^n\frac{n\theta}{2}\sin^n\frac{(n-2)\theta}{2}-2^n\sin^{2n}\frac{n\theta}{2}}{4\sin^2\frac{n\theta}{2}}\\
&=2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left(\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2}-\sin^n\frac{n\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$