

0.1 有限单群

定义 0.1 (有限单群)

若有限群 G 无非平凡的正规子群, 则称 G 为**有限单群**.

定理 0.1

设 G 为 Abel 群且 $G \neq \{e\}$, e 为 G 的幺元, 则 G 为单群的充分必要条件是 G 的阶为素数. 这时 G 必为循环群.

证明 由命题???? Abel 群 G 的任何子群都是 G 的正规子群, 故 Abel 群 G 为单群当且仅当 G 无非平凡子群.

若 G 是有限阶的, 当 G 的阶为素数时, 由推论????知 G 只有平凡子群. 当 G 无非平凡子群时, 若 G 的阶不是素数, 又 $G \neq \{e\}$, 故 $|G|$ 是不为 1 的合数. 由因式分解定理知存在素数 p 以及正整数 m, l , 使 $|G| = p^l m$ 且 $(p, m) = 1$. 从而 m, l 不同时为 1, 否则与 $|G|$ 不为素数矛盾! 故 $|G| > p$. 由 Sylow 第一定理知 G 中一定有 p 阶子群 H , 而 $1 < p < |G|$, 故 H 必是 G 的非平凡子群, 矛盾! 因此 G 无非平凡子群当且仅当 G 的阶为素数. 此时, 由命题??知 $\forall a \in G$ 且 $a \neq e$ 有 $G = \langle a \rangle$.

若 G 是无限阶的, 则 $\langle a \rangle \triangleleft G (\forall a \in G, a \neq e)$. 若 $\langle a \rangle$ 是有限阶的, 则 $\langle a \rangle$ 是非平凡的. 若 $\langle a \rangle$ 是无限阶的, 则 $\langle a^2 \rangle$ 是非平凡的, 因为 $a, -a \notin \langle a^2 \rangle$. 即任何无限阶的 Abel 群都有非平凡的正规子群. 故此时 G 必不是单群. \square

定理 0.2

- (1) 当 $n \geq 3$ 时, A_n 由所有的 3 轮换生成, 即 $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$;
- (2) 当 $n \geq 5$ 时, 任意 3 轮换 (ijk) 在 A_n 中的共轭类由所有的 3 轮换构成, 即 $C_{(ijk)} = \{(i'j'k')\}$.

证明

- (1) 由推论??知 $a \in A_n$ 当且仅当 a 可表示为偶数个对换之积. 由推论??知

$$\langle \{(ijk)\} \rangle = \{(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \mid i_s, j_s, k_s \in \{1, 2, \cdots, n\}, 1 \leq s \leq m, m \in \mathbb{N}\}.$$

设 i, j, k, l 且互不相等. 由

$$\begin{aligned} (ij)(ij) &= \text{id}, & (ij)(ik) &= (ikj), \\ (ik)(jl) &= (ik)(ij)(ij)(jl) = (ijk)(jli) \end{aligned}$$

知 A_n 中元素都可写成 3 轮换之积, 因此 $A_n \subseteq \langle \{(ijk)\} \rangle$.

设 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in \langle \{(ijk)\} \rangle$, 则由命题????知

$$(i_s j_s k_s) = (i_s k_s)(i_s j_s), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

故 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m)$ 可写成偶数个对换之积, 故 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in A_n$. 因此 $\langle \{(ijk)\} \rangle \subseteq A_n$. 故 $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$.

- (2) $\forall \sigma \in S_n$, 由命题????知

$$\sigma(ijk)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)). \quad (1)$$

于是 $C_{(ijk)} \subseteq \{(i'j'k')\}$. 反之, 对任意 3 轮换 $(i'j'k')$, 当 $n \geq 5$ 时, 首先 $\exists \sigma \in S_n$, 使 $\sigma(i) = i', \sigma(j) = j', \sigma(k) = k'$. 若 $\sigma \in A_n$, 则由(1)式可得

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = \sigma(ijk)\sigma^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

若 $\sigma \notin A_n$, 由 $n \geq 5$ 有 $i_1, i_2 \notin \{i, j, k\}$. 故由推论??知 $\sigma(i_1 i_2) \in A_n$. 再由命题????知

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = ((\sigma(i_1 i_2)(i))(\sigma(i_1 i_2)(j))(\sigma(i_1 i_2)(k))) = \sigma(i_1 i_2)(ijk)(\sigma(i_1 i_2))^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

即仍有 $(i'j'k') \in C_{(ijk)}$. 综上知 $C_{(ijk)} = \{(i'j'k')\}$.



定理 0.3

当 $n \geq 5$ 时, A_n 是非 Abel 有限单群.



证明 对 $\alpha \in S_n$, 令 $\bar{F}_\alpha = \{j \mid \alpha(j) \neq j\}$. 显然有

- (1) $\bar{F}_\alpha = \{i, j\}$ 当且仅当 $\alpha = (ij)$;
- (2) $\bar{F}_\alpha = \{i, j, k\}$ 当且仅当 $\alpha = (ijk)$ 或 $(ijk)^{-1}$;
- (3) 对 $\forall \alpha \in A_n$ 且 $\alpha \neq \text{id}$, 又由推论??知 α 可写成偶数个对换之积, 从而一定有 $|\bar{F}_\alpha| \geq 3$.

设 $H \triangleleft A_n$ 且 $H \neq \{\text{id}\}$. 取 $\tau \in H$, 使

$$|\bar{F}_\tau| = \min\{|\bar{F}_\alpha| \mid \alpha \in H, \alpha \neq \text{id}\}. \quad (2)$$

显然 $|\bar{F}_\tau| \geq 3$. 若 $|\bar{F}_\tau| = 3$, 则 τ 是 3 轮换. 显然 $\tau \in H$, 由正规子群定义和定理????知

$$\alpha\tau\alpha^{-1} \in H, \forall \alpha \in A_n \implies C_\tau = \{\alpha\tau\alpha^{-1} \mid \alpha \in A_n\} \subseteq H.$$

再由定理 0.2 知

$$A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle = C_\tau \subseteq H,$$

故 $H = A_n$. 这就证明了 A_n 为有限单群, A_n 的阶不是素数, 由定理 0.1 知 A_n 不是 Abel 群.

若 $|\bar{F}_\tau| > 3$. 由定理????, 可将 τ 分解为不相交轮换之积, 分两种情况讨论. 一种在分解中只出现对换, 另一种在分解中有长度大于 2 的轮换.

1. 若 τ 可分解为互不相交的对换之积, 又由最开始得到的情况 (1) 知 τ 不可能是对换, 故可设 $\tau = (i_1 i_2)(i_3 i_4) \cdots$ 且 $i_1, i_2, i_3, i_4, \cdots$ 互不相同. 由 $n \geq 5$ 有 $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$, 令 $\phi = (i_3 i_4 j)$, 则由推论??知 $\phi \in A_n$. 由 $H \triangleleft A_n$ 有 $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$. 于是由命题????可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(i_4)\tau^{-1}(j))(i_4 i_3 j) = (i_4 i_3 \tau^{-1}(j))(i_4 i_3 j).$$

若 $j \notin \bar{F}_\tau$, 即 $\tau(j) = j$. 则有

$$\tau_1 = (i_4 i_3 j)(i_4 i_3 j) = (i_3 i_4 j),$$

这时 $|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j\}| = 3 < |\bar{F}_\tau|$, 这与 (2) 式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾!

若 $j \in \bar{F}_\tau$, 则 $\tau = (i_1 i_2)(i_3 i_4) \cdots (j\tau^{-1}(j)) \cdots$ 且 $i_1, i_2, i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)$ 互不相同. 由 $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$ 知 $|\bar{F}_\tau| \geq 5$, 又 τ 可写成对换之积, 故 $|\bar{F}_\tau|$ 必为偶数, 因此 $|\bar{F}_\tau| \geq 6$. 此时由命题????可得

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (i_4 i_3 \tau^{-1}(j))(i_4 i_3 j) = (i_3 j)(i_4 \tau^{-1}(j)) \\ &= (i_4 \tau^{-1}(j))(i_4 i_3)(i_4 j)(i_4 i_3) \\ &= (i_4 \tau^{-1}(j))((i_4 i_3)(i_4 i_3)^{-1}) \\ &= (i_4 \tau^{-1}(j))(((i_4 i_3)(i_4))((i_4 i_3)(j))) \\ &= (i_4 \tau^{-1}(j))(i_3 j). \end{aligned}$$

于是

$$|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)\}| = 4 < |\bar{F}_\tau|.$$

这也 (2) 式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾! 因而 $\tau = (i_1 i_2)(i_3 i_4) \cdots$ 是不可能的.

2. 设 τ 的分解中有长度大于 2 的轮换, 即

$$\tau = (i_1 i_2 i_3 \cdots) \cdots$$

因为 $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ 为奇置换, 故 $\tau \neq (i_1 i_2 i_3 i_4)$, 由此知 $|\bar{F}_\tau| > 4$, 即 $|\bar{F}_\tau| \geq 5$. 因而有 $j, k \in \bar{F}_\tau$. 令 $\phi = (i_3 j k)$, $\tau_1 = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}$, 由 $H \triangleleft A_n$ 有 $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$. 于是由命题????可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(j i_3 k) = (i_2 \tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(j i_3 k).$$

由 $j, k \in \bar{F}_\tau$ 知

$$\bar{F}_{\tau_1} = \{i_2, i_3, j, k, \tau^{-1}(j), \tau^{-1}(k)\} \subseteq \bar{F}_\tau.$$

注意到

$$\tau_1(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau(i_1) = \tau^{-1}\phi(i_2) = \tau^{-1}(i_2) = i_1,$$

即 $i_1 \notin \bar{F}_{\tau_1}$, 则有 $\bar{F}_{\tau_1} \subset \bar{F}_\tau$, 亦即 $|\bar{F}_{\tau_1}| < |\bar{F}_\tau|$. 这也(2)式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾! 故 $|\bar{F}_\tau| = 3$. 因而 $H = A_n$, 即 A_n 为单群.

□

命题 0.1

对于 $n \leq 4, A_n$ 的结构为

- (1) $A_1 = A_2 = \{\text{id}\}$;
- (2) $A_3 = \langle (123) \rangle$ 为三阶循环群;
- (3) A_4 的阶为 12, A_4 含有一个非平凡的正规子群

$$\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

此群与 **Klein 四元数群** 同构, 也记为 K_4 , 而且 K_4 也是 S_4 的正规子群.

♠

证明

□