

## 0.1 分式线性变换

**例题 0.1** 求一分式线性变换, 把单位圆的内部变成单位圆的内部, 而且把圆内指定的点  $a$  变为圆心.

**注** 这个变换十分重要, 它是把单位圆盘一一地变为自己的变换, 称为单位圆盘的全纯自同构. 以后我们将证明 (定理??), 把单位圆盘一一地变为自己的全纯映射只能是这种样子, 再没有其他的变换.

**证明** 因为  $a$  关于单位圆的对称点是  $\frac{1}{\bar{a}}$ , 所以这个变换把  $a$  和  $\frac{1}{\bar{a}}$  分别变为 0 和  $\infty$ , 故这个变换可写成

$$w = \lambda \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = -\lambda \bar{a} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \mu \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

为了把单位圆周变成单位圆周, 即将满足  $|z|=1$  的  $z$  变为满足  $|w|=1$  的  $w$ ,  $\mu$  必须满足

$$1 = |w| = |\mu| \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = |\mu| \frac{|z-a|}{|z||\bar{z}-\bar{a}|} = |\mu|,$$

即  $\mu = e^{i\theta}$ . 故所求的变换为

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

□