

## 0.1 反常积分敛散性判别

## 定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  收敛等价于对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A > a$  使得任意  $x_1, x_2 > A$  都有  $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$ .

## 定理 0.2 (A-D 判别法)

设  $f(x), g(x)$  在任何闭区间上黎曼可积, 其  $f, g$  在  $x = a$  处都有界.

1. Abel 判别法: 若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 并且  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界, 则  $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

2. Dirichlet 判别法: 若  $\int_a^x f(x)dx$  在  $[a, +\infty)$  上有界, 并且  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则  $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

**例题 0.1** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  中非负且递减, 证明:  $\int_0^{+\infty} f(x)dx, \int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  同敛散性.

**证明** (i) 若  $\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ , 则由条件可知

$$f(x) \sin^2 x \leq f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得  $\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$ .

(ii) 若  $\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx < \infty$ , 则由  $f$  非负递减, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq a > 0$ , 则存在  $M > 0$ , 使得

$$f(x) \sin^2 x > \frac{a}{2} \sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \quad (1)$$

又因为

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( b - \frac{\sin 2b}{2} \right),$$

而上式右边极限不存在, 所以  $\int_0^{\infty} \sin^2 x dx$  发散. 从而结合 (1) 式, 由比较判别法可知  $\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散, 矛盾! 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

注意到

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty.$$

即  $\int_0^{\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx < \infty$ . 考虑  $\int_0^{\infty} f(x) \cos 2x dx$ , 注意到

$$\int_0^C \cos 2x dx = \frac{\sin 2C}{2} < 1, \quad \forall C > 0.$$

又由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知  $\int_0^{\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty$ . 因此

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x)(1 - \cos 2x) dx + \int_0^{\infty} f(x) \cos 2x dx < \infty.$$

(iii) 当  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  或  $\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散时, 实际上,  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  或  $\int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx$  发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证.  $\square$

## 命题 0.1

设  $f(x), g(x)$  在任何闭区间上黎曼可积, 其  $f, g$  在  $x=a$  处都有界.

- (1) 若  $\int_a^\infty f(x) dx$  绝对收敛, 则  $\int_a^\infty f(x) dx$  一定条件收敛.
- (2) 若  $\int_a^\infty f(x) dx, \int_a^\infty g(x) dx$  都绝对收敛, 则  $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)] dx$  也绝对收敛.
- (3) 若  $\int_a^\infty f(x) dx$  绝对收敛,  $\int_a^\infty g(x) dx$  条件收敛, 则  $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)] dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.
- (4) 若  $\int_a^\infty f(x) dx, \int_a^\infty g(x) dx$  都条件收敛, 则  $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)] dx$  的收敛性无法直接判断.

## 证明

- (1) 由  $f(x) \leq |f(x)|$  立得.
- (2) 由  $|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  立得.
- (3) 由 (1) 可知  $\int_a^\infty f(x) dx, \int_a^\infty g(x) dx$  都条件收敛, 从而  $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)] dx$  也条件收敛. 若  $\int_a^\infty |f(x) \pm g(x)| dx < \infty$ , 注意到  $g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ , 从而由 (2) 可知  $\int_a^\infty g(x) dx = \int_a^\infty [(f(x) + g(x)) - f(x)] dx$  也绝对收敛, 矛盾!
- (4)

□

例题 0.2 判断如下积分的收敛性:

1.  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$ ;
2.  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx, m, n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\int_2^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} dx$ .

## 证明

1. 四个瑕点  $x=0, 1, 2, \infty$ , 分别估阶讨论即得收敛.
2. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{x^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}}}, x \rightarrow 0^+.$$

又  $\frac{1}{n} < 1 + \frac{2}{m}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ , 故  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \ln^{\frac{2}{m}}(1-x), x \rightarrow 1^-.$$

并且对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{2}{m}}(1-x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{2}{m}} x dx \stackrel{x=e^t}{=} \int_{-\infty}^{-\ln 2} t^{\frac{2}{m}} e^t dt \\ &\stackrel{t=-u}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} u^{\frac{2}{m}} e^{-u} du \leq \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{m}} e^{-u} du \\ &= \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) < +\infty. \end{aligned}$$

故  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛. 综上,  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx (\forall m, n \in \mathbb{N})$  收敛.

3. 由于  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} \sim \frac{1}{x^{1+\frac{p}{2}}}, x \rightarrow +\infty$ . 故  $\int_2^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} dx$  收敛当且仅当  $p > 0$ .

□

**例题 0.3** 设  $p, q > 0$ , 判断  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛性.

**笔记** 一个经验上的小结论. 在幂函数次数不为 1 时, 趋于无穷或者趋于 0 时  $\ln$  可忽略.

**证明** 先讨论  $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  的收敛性. 由于

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}, x \rightarrow 1^+.$$

因此  $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $q < 1$ .

再讨论  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  的收敛性.

① 当  $p > 1$  时, 我们有

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^p}} = \frac{1}{\ln^q x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

从而存在  $C > 0$ , 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{C}{x^p} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

而  $\int_2^{\infty} \frac{C}{x^p} dx$  收敛, 故  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  此时收敛.

② 当  $0 < p < 1$  时, 取  $\varepsilon > 0$ , 使得  $p + \varepsilon < 1$ , 从而

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}} = \frac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty.$$

于是存在  $M > 0$ , 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} > \frac{M}{x^{p+\varepsilon}}, x \rightarrow +\infty.$$

而  $\int_2^{\infty} \frac{M}{x^{p+\varepsilon}} dx$  发散, 故  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  此时发散.

③ 当  $p = 1$  时, 我们有

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln^q x} d \ln x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^q} dt.$$

于是此时  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $q > 1$ .

综上所述,  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  收敛当且仅当  $p > 1, q < 1$ .

□

**例题 0.4** 对  $a, b \in \mathbb{R}$ , 判断  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx$  的收敛性和绝对收敛性.

**证明** 收敛性:

1. 当  $b = 0$  时, 此时  $\int_0^{\infty} \frac{\sin 1}{x^a} dx$  必定发散.

2. 当  $b \neq 0$  时, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx \stackrel{y=x^b}{=} \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a}{b}}} y^{\frac{1}{b}-1} dy = \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy. \quad (2)$$

(a). 先考虑  $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 注意到

$$\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \rightarrow 0^+.$$

因此  $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛当且仅当  $\frac{a-1}{b} < 1$ .

(b). 再考虑  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ .

I. 当  $\frac{a-1}{b} + 1 \leq 0$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \right| &\geq \left( \frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \sin y dy \right| \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \right| = \left( \frac{\pi}{4} \right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知, 此时  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散.

II. 当  $\frac{a-1}{b} + 1 > 0$  时, 我们有

$$\left| \int_0^x \sin y dy \right| \leq 2 \quad (\forall x > 0), \quad \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \text{ 单调递减趋于 } 0 \quad (y \rightarrow +\infty).$$

于是由 Dirichlet 判别法可知, 此时  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛.

综上,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx$  收敛当且仅当  $b \neq 0$  且  $-1 < \frac{a-b}{b} < 1$ .

绝对收敛性: 在  $-1 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$  情况下, 先考虑  $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 我们有

$$\frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \rightarrow 0^+.$$

又因为  $\frac{a-1}{b} < 1$ , 所以  $\int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}} dy$  必收敛, 因此  $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  必绝对收敛.

再考虑  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ . 当  $\frac{a-1}{b} > 0$ , 注意到由 (2) 知道

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx = \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \leq \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy < \infty,$$

故此时  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  绝对收敛.


当  $\frac{a-1}{b} \leq 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy &\geq \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|^2}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy = \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \\ &= \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy - \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \end{aligned}$$

显然  $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  收敛, 由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散. 故此时  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$  发散.

综上, 这就证明了原积分在  $-1 < \frac{a-1}{b} \leq 0, b \neq 0$  情况下条件收敛,  $0 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$  情况下绝对收敛.  $\square$

**例题 0.5** 判断收敛性  $\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx$ .

 **笔记** 注意运用  $x^{\square} = e^{\square \ln x} = (e^{\square})^{\ln x}$ .


**证明** 注意到

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx &= \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln \ln x}} dx = \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln \ln x}} dx \\ &= \int_{e^2}^{+e^2} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx = \int_{e^2}^{e^{e^2}} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx + \int_{e^{e^2}}^{\infty} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx \\ &\leq \int_{e^2}^{e^{e^2}} \frac{1}{x^{\ln \ln x}} dx + \int_{e^{e^2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty. \end{aligned}$$

故原积分收敛. □

**例题 0.6** 判断收敛性和绝对收敛性:

1.  $\int_1^{\infty} \tan\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ ,
2.  $\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx, p > 0$ .

 **笔记** 经验上, Taylor 公式应该展开到余项里面的函数绝对收敛为止.

**证明**

1. 由 Taylor 公式可知

$$\tan \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 显然有  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  条件收敛. 注意到

$$\left| O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right) \right| \leq M \left| \frac{\sin x}{x} \right|^3 \leq \frac{M}{x^3}, x \rightarrow +\infty.$$

故  $\int_1^{\infty} O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right) dx$  绝对收敛. 因此由(3)式可得  $\int_1^{\infty} \tan \frac{\sin x}{x} dx$  条件收敛.

2. 注意到

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx = \int_2^{+\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1 + \frac{\sin x}{x^p})} dx.$$

取  $m \in \mathbb{N}$ , 使  $m > \frac{1}{p} - 1$ . 由 Taylor 公式可知

$$\frac{t}{1+t} = t - t^2 + \cdots + (-1)^m t^{m-1} + O(t^m), t \rightarrow 0^+.$$

从而

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1 + \frac{\sin x}{x^p})} = \frac{\sin x}{x^{2p}} - \frac{\sin^2 x}{x^{3p}} + \cdots + (-1)^m \frac{\sin^{m-1} x}{x^{mp}} + O\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right), x \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

注意到

$$\frac{\sin^2 x}{x^{3p}} = \frac{1}{2x^{3p}} - \frac{\cos 2x}{x^{3p}}, \quad (5)$$

(i) 当  $p \leq \frac{1}{3}$  时, 有  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{3p}} dx$  发散, 从而此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$  发散.

(ii) 当  $p > \frac{1}{3}$  时, 有  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{3p}} dx$  收敛, 并且由 Dirichlet 判别法可知  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2p}} dx, \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{3p}} dx$  收敛. 从而

由(5)式可知, 此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{3p}} dx$  收敛. 又因为对  $\forall k \geq 2$ , 都有

$$\left| \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} \right| \leq \frac{1}{x^{(k+1)p}} \leq \frac{1}{x^{3p}}, \forall x > 2.$$

而  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$  收敛, 所以此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx$  都绝对收敛. 故由(4)式可知, 此时原积分收敛.

综上, 原积分在  $p \leq \frac{1}{3}$  时发散,  $p > \frac{1}{3}$  收敛. 再讨论绝对收敛性.

(a). 当  $p > \frac{1}{2}$  时, 由  $M$  判别法易知  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (1 \leq k \leq m)$  绝对收敛. 再由(4)式可知, 此时原积分绝对收敛.

(b). 当  $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{2}$  时, 我们有

$$\left| \frac{\sin x}{x^{2p}} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} = \frac{1}{2x^{2p}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2p}}.$$

显然  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{2p}} dx$  发散, 故此时  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2p}} dx$  条件收敛. 注意到对  $\forall k \geq 2$ , 都有

$$\left| \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} \right| \leq \frac{1}{x^{(k+1)p}} \leq \frac{1}{x^{3p}}, \forall x > 2.$$

而显然此时  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$  收敛, 故  $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (2 \leq k \leq m)$  绝对收敛. 因此再由(4)式及命题 0.1(3)可知原积分此时条件收敛. □

**例题 0.7** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上非负连续, 对任意正整数  $k$  有  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq 1$ , 证明:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq 1$ .

**注** 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**证明** 由条件可得, 对  $\forall A > 0$ , 我们有

$$1 \geq \int_{-A}^A e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \geq e^{-\frac{1}{k}} \int_{-A}^A f(x) dx. \Rightarrow \int_{-A}^A f(x) dx \leq e^{\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 则  $\int_{-A}^A f(x) dx \leq 1, \forall A > 0$ . 于是再令  $A \rightarrow +\infty$ , 可得  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq 1$ .

实际上再由单调有界可知  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  收敛. □

**例题 0.8** 对实数  $a$ , 讨论  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性.

**证明** 证法一: 先讨论  $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性. 注意到

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^1 = \tan 1 < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

故  $\forall a \in \mathbb{R}$ , 都有  $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛. 再讨论  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  的敛散性.

(i) 当  $a \leq 2$  时,

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = +\infty.$$

(ii) 当  $a > 2$  时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x + n\pi}{\cos^2 x + (x + n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

注意到对  $\forall \lambda > 0$ , 我们都有

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \lambda \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(6)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

由于被积函数非负, 因此再结合命题??可知

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \int_{\pi}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

从而当  $\frac{a}{2}-1 \leq 1$  时, 即  $2 < a \leq 4$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  发散; 当  $\frac{a}{2}-1 > 1$ , 即  $a > 4$  时,  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛.

综上, 当  $a > 4$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $a \leq 4$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$  发散.

证法二: 由于被积函数非负, 因此由命题??可知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy.\end{aligned}$$

一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\pi}{\cos^2 y + [(n-1)\pi]^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2n\pi}{\cos^2 y + [(n-1)\pi]^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2n\pi}{\cos^2 y}}{1 + [(n-1)\pi]^a \tan^2 y} dy \\ &\stackrel{t=\tan y}{=} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + [(n-1)\pi]^a t^2} \\ &= \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{[(n-1)\pi]^a}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

故当  $a < 4$  时, 有  $\frac{a}{2} - 1 < 1$ , 此时原积分收敛. 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi + y}{\cos^2 y + [(n-1)\pi + y]^a \sin^2 y} dy &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi}{\cos^2 y + (n\pi)^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y + (n\pi)^a \sin^2 y} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y}}{1 + (n\pi)^a \tan^2 y} dy \\ &\stackrel{t=\tan y}{=} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (n\pi)^a t^2} \\ &= \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{(n\pi)^a}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_2}{n^{\frac{a}{2}-1}}, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

故当  $a \geq 4$  时, 有  $\frac{a}{2} - 1 \geq 1$ , 此时原积分发散. □

**例题 0.9** 对  $x > 0$ , 判断积分  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$  收敛性.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + a}{t + x} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a + k + x) \ln \left( 1 + \frac{1}{k + x} \right) - 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a - \frac{1}{2}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right].\end{aligned}\quad (7)$$

故当  $a \neq \frac{1}{2}$  时, 有  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - \frac{1}{2}}{k}$  发散, 从而结合(7)式可知, 此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt$  不存在. 因此由子列极限命题 (a)

可知, 此时  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$  发散.

当  $a = \frac{1}{2}$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \quad (8)$$

对  $\forall y > 0$ , 存在唯一  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq y < n+1$ . 于是

$$\int_0^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt = \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt + \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt. \quad (9)$$

注意到

$$\left| \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt \right| \leq \int_n^y \frac{1 + \frac{1}{2}}{t+x} dt \leq \frac{3}{2} \int_n^{n+1} \frac{1}{t+x} dt = \frac{3}{2} \ln \frac{n+1+x}{n+x}.$$

当  $y \rightarrow +\infty$  时, 有  $n \rightarrow +\infty$ , 故  $\int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty$ . 再结合(8)(9)式可知

$$\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt < \infty.$$

故当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+x} dt$  收敛. □

**例题 0.10** 对正整数  $n$ , 讨论  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  的敛散性.

**证明** 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx, \quad k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

又注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \geq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \\ \int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \frac{4}{\pi^2} x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} dx \sim \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

故  $\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} dx \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda \rightarrow +\infty$ , 其中  $C$  为某一常数. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx &\sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k \rightarrow +\infty, \\ \int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx &\sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

又因为

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} dx,$$

所以  $\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim \frac{C_1}{k^6}, k \rightarrow +\infty$ , 其中  $C_1$  为某一常数. 于是结合(10)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} dx \sim C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

其中  $C_2$  为某一常数. 因此

$$\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_2 k^{n-6}, \quad k \rightarrow \infty.$$

故当  $n < 5$  时,  $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $n \geq 5$  时,  $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  发散. 又因为

$$\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx \leq \pi^n,$$



所以  $\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都收敛. 从而由

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx + \int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx,$$

可知当  $n < 5$  时,  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  收敛; 当  $n \geq 5$  时,  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$  发散.  $\square$

### 引理 0.1

(1)  $\cos^{2n+1} x$  可以写成  $\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x$  的线性组合, 即  $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x)$ , 也即  $\cos^{2n+1} x = \sum_{k=0}^n a_k \cos(2k+1)x$ , 其中  $a_k \in \mathbb{R}, k=0, 1, \dots, n$ .

$$(2) \cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

**证明** (1) 利用数学归纳法, 当  $n=1$  时, 结论显然成立. 假设结论对  $n-1$  成立, 则

$$\begin{aligned} \cos^{2n+1} x &= \cos^2 x \cdot \cos^{2n-1} x = \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos 2x \cos(2k+1)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k [\cos(2k+3)x + \cos(2k-1)x] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2} a_0 [\cos 3x + \cos(-x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2} a_0 [\cos 3x + \cos x]. \end{aligned}$$

故  $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \dots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1+t^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k t^{2k}$$

令  $t = e^{ix}$ , 则

$$\begin{aligned} (1+e^{2ix})^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \Rightarrow 2^{2n} \left( \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2e^{-ix}} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \Rightarrow 2^{2n} \left( \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \right)^{2n} = e^{-2inx} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2ikx} \\ &\Rightarrow 2^{2n} \cos^{2n} x = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2i(k-n)x} = \sum_{k=0}^{n-1} [C_{2n}^k e^{2i(k-n)x} + C_{2n}^{2n-k} e^{2i((2n-k)-n)x}] + C_{2n}^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k (e^{2i(k-n)x} + e^{2i(n-k)x}) + C_{2n}^n \\ &\Rightarrow 2^{2n} \cos^{2n} x = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \left( \frac{e^{2i(k-n)x} + e^{2i(n-k)x}}{2} \right) + C_{2n}^n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + C_{2n}^n \\ &\Rightarrow \cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \end{aligned}$$

$\square$

**例题 0.11** 设  $p, q$  为正整数, 求反常积分  $I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛的充要条件.

**证明** 因为当  $p=q$  时, 积分显然收敛, 所以只需考虑  $p \neq q$  的情形. 由  $I(q, p) = -I(p, q)$  可知, 可以不妨设  $p > q$ ,

否则用  $I(q, p) = -I(p, q)$  代替  $I(p, q)$  即可

先讨论  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$-\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2, \quad \forall x \in [0, \delta].$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_0^\delta \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_\delta^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx \\ &\leq \int_0^\delta \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2)^p - (1 - \frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2)^q}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\ &\leq \int_0^\delta \frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2 + (p+q)C_p^2 x^4}{x} dx + \frac{2}{\delta}(1 - \delta) \\ &= \frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4}\delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1 - \delta). \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 得  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx \leq \frac{q-p}{4}\delta + \frac{(p+q)C_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1-\delta)$ . 故对  $\forall p > q$  且  $p, q \in \mathbb{N}$ , 都有  $\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛.

再讨论  $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  的敛散性.

(i) 当  $p, q$  都是奇数时, 由引理 0.1 可知

$$\begin{aligned} \cos^p x &= \sum_{k=1}^p p_k \cos kx, \quad \text{其中 } p_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p. \\ \cos^q x &= \sum_{k=1}^q q_k \cos kx, \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

从而此时

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx &= \int_1^\infty \frac{\sum_{k=1}^p p_k \cos kx - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^q (p_k - q_k) \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx + \sum_{k=q+1}^p p_k \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx. \end{aligned}$$

注意到对  $\forall k \in \mathbb{N}$  都有

$$\int_1^x \cos kt dt = \frac{\sin kx - \sin k}{k} < 2, \quad \forall x > 1.$$

并且  $\frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知,  $\int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} dx (k \in \mathbb{N})$  都收敛. 因此再结合(??)式可知,  $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛.

(ii) 当  $p, q$  中至少有一个是偶数时, 不妨设  $p$  是偶数  $q$  不是偶数, 则由引理 0.1 可知

$$\begin{aligned} \cos^p x &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}. \\ \cos^q x &= \sum_{k=1}^q q_k \cos kx \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

于是

$$\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x} dx + \frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$

由于  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  发散, 故此时  $\int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  也发散.

综上, 由

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx.$$

可知当  $p = q$  或  $p, q$  均为奇数时,  $\int_0^{\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$  收敛, 其余情形均发散.  $\square$

**例题 0.12** 对实数  $p \neq 0$ , 讨论  $I = \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx$  的敛散性.

**证明** 对  $I$  进行积分换元可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} dx \stackrel{u=\frac{1}{1-x}}{=} \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(1 - (1-\frac{1}{u})^2\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{u^2} du \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} du = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du. \end{aligned} \quad (11)$$

(i) 当  $p > \frac{1}{2}$  时, 令  $f(u) = \left[ \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}} \right]^p = \left(2 - \frac{1}{u}\right) u^{2p-1}$ , 则显然有  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$  且  $f(u)$  递增. 于是  $\frac{1}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} = \frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0. 又显然有  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 所以结合(11)式, 再由 Dirichlet 判别法可知  $I$  收敛.

(ii) 当  $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  时, 若  $p = \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 2$ ; 若  $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = +\infty$ . 因此对  $\forall p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 都存在  $K > 0$ , 使得

$$\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} \geq 1, \forall u > K.$$

于是对  $\forall k \in \mathbb{N} \cap (K, +\infty)$ , 都有

$$\left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du \right| \geq \left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \cos u du \right| = 1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知,  $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} du$  发散.

(iii) 当  $p < 0$  时, 显然有  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = 0$ . 令  $g(u) = \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}$ , 则

$$g'(u) = \frac{2}{p} u^{-\frac{1}{p}} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1} + \left(2 - \frac{1}{p}\right) \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{1-\frac{1}{p}} > 0, \forall u \in [1, +\infty).$$

因此  $g(u)$  单调递增, 于是  $\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{g(u)}$  单调递减趋于 0. 又显然有  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 所以结合(??)式, 再由 Dirichlet 判别法可知  $I$  收敛.  $\square$

**例题 0.13** 对实数  $p$ , 讨论反常积分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  的敛散性.

注 令  $u = x + \frac{1}{x}$ , 则

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \int_u^\infty \frac{\sin u}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right) du.$$

显然  $\int_0^A \sin u du$  关于  $A$  有界. 再证明  $\frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}}{(u + \sqrt{u^2 - 4})^p}$  单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到  $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$

收敛. 再同理讨论  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

证明 显然  $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  有两个奇点  $x = 0, +\infty$ .

(1) 当  $p \leq 0$  时, 考虑区间  $\left[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ , 则

$$x + \frac{1}{x} \in \left[2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当  $n > 10$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &\geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}\right) > 0. \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散. 故此时  $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散.

(2) 当  $p > 0$  时, 先考虑  $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ .

(i) 若  $p > 1$ , 则

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

因此  $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  绝对收敛.

(ii) 若  $p \in (0, 1]$ , 则

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \int_1^\infty \sin x \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} dx + \int_1^\infty \cos x \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx. \quad (12)$$

显然  $\int_1^A \cos x dx$  关于  $A$  有界, 并且  $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx$  收敛. 令  $f(u) = u^p \cos u$ , 则当  $u \in \left(0, \frac{4p}{\pi}\right)$  时, 有

$$f'(u) = pu^{p-1} \cos u - u^p \sin u = u^{p-1} \cos u (p - u \tan u) > 0.$$

于是  $f(u)$  在  $\left(0, \frac{4p}{\pi}\right)$  上单调递增, 从而  $\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^p} = f\left(\frac{1}{x}\right)$  在  $\left(\frac{\pi}{4p}, +\infty\right)$  上单调递减趋于 0. 又显然  $\int_{\frac{\pi}{4p}}^A \sin x dx$  关于  $A$  有界, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_{\frac{\pi}{4p}}^\infty \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$  收敛, 又  $\frac{\pi}{4p} < 1$ , 故此时  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} \cos \frac{1}{x} dx$  收敛. 因此再

由(12)式可知  $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  收敛.

注意到

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} \right| dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\cos(2x + \frac{2}{x})}{x^p} dx.$$

显然  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  发散. 故此时  $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ .

(i) 若  $p \in (0, 1)$ , 则

$$\int_0^1 \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^p} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx < \infty.$$

故此时  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  绝对收敛.

(ii) 若  $p \geq 1$ , 则

$$\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{\infty} \frac{\sin(t + \frac{1}{t})}{t^{2-p}} dt.$$

此时  $2-p \leq 1$ . 于是当  $2-p \leq 0$  即  $p \geq 2$  时, 由 (1) 可知  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散. 当  $2-p \in (0, 1]$  即  $p \in [1, 2)$  时,

由 (i) 可知  $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当  $p \leq 0$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散; 当  $p \in (0, 2)$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  条件收敛; 当  $p \geq 2$  时,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$  发散.  $\square$

**例题 0.14** 判断广义积分  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx$  的敛散性.

**证明** (1) 由于  $e^{\cos x} \sin(2 \sin x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_0^{2\pi} e dx = 2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx &= \int_0^{2\pi[\frac{A}{2\pi}]} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx \\ &\leq 0 + \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^A |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq \int_{2\pi[\frac{A}{2\pi}]}^{2\pi([\frac{A}{2\pi}] + 1)} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |e^{\cos x} \sin(2 \sin x)| dx \leq 2\pi e, \forall A > 2\pi. \end{aligned}$$

又显然有  $\frac{1}{x}$  单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_0^{\infty} e^{\cos x} \sin(2 \sin x) dx$  收敛.

(2) 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \frac{C}{n},$$

其中  $C$  为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计,  $C$  需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} = \infty.$$

故  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$  发散.  $\square$