

0.1 函数性态分析综合

例题 0.1 设 $f: (a, b) \rightarrow (a, b)$ 满足对任意的 $x, y \in (a, b)$, 当 $x \neq y$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. 任取 $x_1 \in (a, b)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

注

- (1) 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi - A, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} = \xi + A$ 的原因: 记 $X = \xi - A, Y = \xi + A$, 假设存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 对 $\forall n > k_0$, 有

$$x_n \notin (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}) \text{ 或 } x_{n+1} \notin (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}). \quad (1)$$

因为 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 X 和 Y , 所以对上述 $\varepsilon, \{x_n\}$ 中都有无穷多项落在 $(X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}) \cup (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0})$ 内. 从而存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 有

$$x_n \in (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}) \cup (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}). \quad (2)$$

于是由(1)(2)式可得, 当 $n > \max\{N, k_0\}$ 时, 我们有

$$x_n \in (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}) \text{ 或 } x_{n+1} \in (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}).$$

因此若 $x_n \in (Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0}), \forall n > \max\{N, k_0\}$, 则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0})$ 内, 这与 X 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾. 若 $x_{n+1} \in (X - \frac{1}{k_0}, X + \frac{1}{k_0}), \forall n > \max\{N, k_0\}$, 则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(Y - \frac{1}{k_0}, Y + \frac{1}{k_0})$ 内, 这与 Y 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾. 故假设不成立, 从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > k$, 使得

$$x_{n_k} \in (X - \frac{1}{k}, X + \frac{1}{k}), x_{n_{k+1}} \in (Y - \frac{1}{k}, Y + \frac{1}{k}).$$

于是根据 k 的任意性可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = X = \xi - A, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} = Y = \xi + A$.

- (2) $\xi - A, \xi + A \in (a, b)$ 的原因: 一定存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_{k_1}} < \xi, x_{n_{k_2}} > \xi. \quad (3)$$

否则, 对 $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, 都有

$$x_{n_{k_1}} \geq \xi, \quad x_{n_{k_2}} \leq \xi.$$

令 $k_1, k_2 \rightarrow \infty$, 再结合 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi - A, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} = \xi + A$ 得到

$$\xi - A = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} x_{n_{k_1}} \geq \xi > \xi - A, \quad \xi + A = \lim_{k_2 \rightarrow \infty} x_{n_{k_2}} \leq \xi < \xi + A.$$

显然矛盾! 又因为 $\{x_n - \xi\}$ 单调递减趋于 A , 所以

$$|x_n - A| \geq A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而由 $x_n \in (a, b)$ 及(3)式可得

$$A \leq |x_{n_{k_1}} - \xi| = \xi - x_{n_{k_1}} < \xi - a \Rightarrow \xi - A > a,$$

$$A \leq |x_{n_{k_2}} - \xi| = x_{n_{k_2}} - \xi < b - \xi \Rightarrow \xi + A < b.$$

因此 $\xi - A, \xi + A \in (a, b)$.

证明 注意到 $x_1 \in (a, b)$, 假设 $x_k \in (a, b)$, 则 $x_{k+1} = f(x_k) \in (a, b)$, 故由数学归纳法可知 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$. 又由条件可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $x, y \in (a, b)$ 且 $0 < |x - y| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

故 f 在 (a, b) 上一致连续. 从而 $f \in C(a, b)$, 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F \in C(a, b)$. 下面我们对 F 进行分类讨论.

- (1) 若 F 在 (a, b) 上不变号, 则由 $F \in C(a, b)$ 可知, F 要么恒大于零, 要么恒小于零. 不妨设 F 在 (a, b) 上恒大于零, 即 $f(x) > x, \forall x \in (a, b)$. 从而

$$x_{n+1} = f(x_n) > x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增. 又因为 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$, 所以由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 若 F 在 (a, b) 上变号, 则由 $F \in C(a, b)$ 及介值定理可得, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$. 若存在 $\xi' \in (a, b)$ 且 $\xi' \neq \xi$, 使得 $f(\xi') = \xi'$, 则由条件可得到

$$|\xi - \xi'| = |f(\xi) - f(\xi')| < |\xi - \xi'|.$$

显然矛盾! 因此存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$. 从而

$$|x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| < |x_n - \xi|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是 $\{|x_n - \xi|\}$ 单调递减且有下界 0, 故由单调有界定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \xi| = A \geq 0$ 存在.

(i) 当 $A = 0$ 时, 则由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \xi| = A = 0$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

(ii) 当 $A > 0$ 时, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则结论已经成立. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则由 $x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$ 及聚点定理可知, $\{x_n\}$ 至少有一个聚点. 若 $\{x_n\}$ 只有一个聚点, 则 $\{x_n\}$ 收敛与假设矛盾! 因此 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点. 任取收敛子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = B$, 则

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \xi| = |B - \xi|.$$

从而 $B = \xi - A$ 或 $\xi + A$. 因此 $\{x_n\}$ 最多有两个聚点 $\xi - A$ 和 $\xi + A$. 又因为 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点, 所以 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 $\xi - A$ 和 $\xi + A$. 进而一定存在收敛子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi - A, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \xi + A \text{ 并且 } \xi - A, \xi + A \in (a, b).$$

从而由条件可知

$$x_{n_k+1} = f(x_{n_k}).$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由 $f \in C(a, b)$ 及归结原则可得

$$\xi + A = f(\xi - A).$$


再结合 $\xi = f(\xi), \xi - A, \xi + A \in (a, b)$ 及条件可得

$$A = |\xi - (\xi + A)| = |f(\xi) - f(\xi - A)| < |\xi - (\xi - A)| = A.$$

显然矛盾! 故 $A > 0$ 不成立, 于是 $A = 0$. 再由 (1) 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 即 $\{x_n\}$ 收敛, 与假设 $\{x_n\}$ 发散矛盾! \square

命题 0.1

设 f' 在 $[0, +\infty)$ 一致连续且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

 **笔记** 本题也有积分版本: 设 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续且 $\int_0^\infty f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. (令 $F = \int_0^x f(x) dx$ 就可以将这个积分版本转化为上述命题)

证明 反证, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$, 则可以不妨设存在 $\delta > 0, \{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$x_n \rightarrow +\infty \text{ 且 } f'(x_n) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由 f' 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\eta > 0$, 使得对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$f'(x) \geq f'(x_n) - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}, \forall x \in [x_n - \eta, x_n + \eta].$$

从而对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$f(x_n + \eta) - f(x_n) = \int_{x_n}^{x_n + \eta} f'(x) dx \geq \int_{x_n}^{x_n + \eta} \frac{\delta}{2} dx = \frac{\delta \eta}{2} > 0, \forall x \in [x_n - \eta, x_n + \eta].$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在可得 $0 \geq \frac{\delta \eta}{2} > 0$, 矛盾! 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. \square

例题 0.2 时滞方程 设 f 在 \mathbb{R} 上可微且满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1, \quad f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R}$.

证明 由 $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in D(\mathbb{R})$ 可知 $f' \in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, 固定 x_1 , 记

$$A = \{z > x_1 \mid f'(z) = f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 可知

$$\exists x_2 \in (x_1, x_1 + 1) \text{ s.t. } f'(x_1) = f(x_1 + 1) - f(x_1) = f'(x_2).$$

故 $x_2 \in A$, 从而 A 非空. 现在考虑 $y \triangleq \sup A \in (x_1, +\infty)$, 下证 $y = +\infty$. 若 $y < +\infty$, 则存在 $\{z'_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$z'_n \rightarrow y \text{ 且 } f'(z'_n) = f'(x_1).$$

两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 由 $f' \in C(\mathbb{R})$ 可得

$$f'(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(z'_n) = f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1) - f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 可得

$$\exists y' \in (y, y+1) \text{ s.t. } f'(y) = f(y+1) - f(y) = f'(y').$$

从而 $y' \in A$ 且 $y' > y$, 这与 $y = \sup A$ 矛盾! 故 $y = +\infty$. 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$z_n \rightarrow +\infty \text{ 且 } f'(z_n) = f'(x_1).$$

两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 由 $f' \in C(\mathbb{R})$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ 可得

$$f'(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(z_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1.$$

因此由 x_1 的任意性得, 存在 C 为常数, 使得 $f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R}$. □

例题 0.3 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1) \leq 0$ 以及

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - |x|] = 0. \quad (12.27)$$

证明: (1): 存在 $\xi \in (1, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) > 1$.

(2): 存在 $\eta \in \mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

证明 (1) 如果对任何 $x \in (1, +\infty)$, 都有 $f'(x) \leq 1$, 那么 $[f(x) - x]' \leq 0$ 知 $f(x) - x$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1 \geq f(1) - 1 \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - |x|] = 0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何 $x \in \mathbb{R}$, 我们有 $f''(x) \neq 0$. 从而 $f''(x)$ 要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取 $\xi \in \mathbb{R}$.

当 $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 \mathbb{R} 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \forall x > \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi) - 1)x] = +\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 \mathbb{R} 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有


$$f(x) \leq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \forall x < \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi) + 1)x] = -\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). □

例题 0.4 设 f 在 $[a, b]$ 上每一个点极限都存在, 证明: f 在 $[a, b]$ 有界.

 **笔记** 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即局部的性质等价于在所有紧集上的性质. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对 $\forall c \in [a, b]$, 由 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 存在可知, 存在 c 的邻域 U_c 和 $M > 0$, 使得

$$\sup_{x \in U_c \cap [a, b]} |f(x)| \leq M_c.$$

注意 $[a, b] \subset \bigcup_{c \in [a, b]} U_c$, 由有限覆盖定理得, 存在 $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$, 使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n U_{c_k}.$$

故 $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} M_k$. □


例题 0.5 设 f 是 $(a, +\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T , 存在数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

注 因为 $|f(x+T) - f(x)| \geq 0$, 所以

$$0 \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)|.$$

原结论的反面只用考虑 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)|$ 即可. 若 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| = 0$, 则一定存在子列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得结论成立. 因此原结论等价于 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| = 0$. 故原结论的反面就是 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| > 0$.

 **笔记** 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画 $f(x)$ 的大致走势图), 就容易找到矛盾.

证明 当 $T = 0$ 时, 显然存在这样的数列. 不妨设 $T > 0$, 假设 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x+T) - f(x)| > 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, X > 0$, 使得

$$|f(x+T) - f(x)| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \forall x \geq X \quad (4)$$

令 $g(x) \triangleq f(x+T) - f(x)$, 则若存在 $x_1, x_2 \geq X$, 使得

$$g(x_1) = f(x_1+T) - f(x_1) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad g(x_2) = f(x_2+T) - f(x_2) \leq -\varepsilon_0 < 0.$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 由 g 连续及介值定理可知, 存在 $x_3 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$g(x_3) = f(x_3+T) - f(x_3) = 0$$

与(4)式矛盾! 故 $g(x) \triangleq f(x+T) - f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上要么恒大于 ε_0 , 要么恒小于 ε_0 . 于是不妨设

$$f(x+T) - f(x) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq X. \quad (5)$$

从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在 $X_k \geq X$, 使得当 $x \geq X_1$ 时, 有 $x + (k-1)T > X$. 于是由(5)式可得

$$f(x+kT) - f(x+(k-1)T) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq X_k. \quad (6)$$

因此对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $K_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, 则由(6)式可知

$$f(x+kT) - f(x+(k-1)T) \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \geq K_n, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

进而对上式求和可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^n [f(x+kT) - f(x+(k-1)T)] = f(x+nT) - f(x) \geq n\varepsilon_0, \quad \forall x \geq K_n$$

任取 $x_0 \geq K_n$, 则 $f(x_0+nT) - f(x_0) \geq n\varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 这与 f 在 $(a, +\infty)$ 上有界矛盾! □

命题 0.2

1. 设 $f_n \in C[a, b]$ 且关于 $[a, b]$ 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

证明: 对 $\{x_n\} \subset [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(c).$$

2. 设 $f_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0),$$

证明: $f \in C(\mathbb{R})$.

证明

1. 由 f_n 一致收敛到 $f(x)$ 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall N \geq N_0$, 当 $n \geq N$ 时, 对 $\forall x \in [a, b]$, 都有

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \varepsilon.$$

从而由上式可得

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(c)| &\leq |f_n(x_n) - f_N(x_n)| + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &\leq \varepsilon + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq \varepsilon + |f_N(c) - f(c)|.$$

再令 $N \rightarrow +\infty$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ 可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(c)| \leq 0$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(c)$.

2. 反证, 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在 $y_m \in (x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m})$, 使得

$$|f(y_m) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0. \quad (7)$$

对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 令条件中的 $x_0 = y_m$, $x_n \equiv y_m$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 从而由条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(y_m) - f(y_m)| = 0$, $m = 1, 2, \dots$, 故对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在严格递增的数列 $n_m \rightarrow +\infty$, 使得

$$|f_{n_m}(y_m) - f(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (8)$$

从而由(7)(8)式可知, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f(y_{n_m}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0, \quad (9)$$

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (10)$$

因此由(9)(10)式可得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(x_0)| \geq |f(y_{n_m}) - f(x_0)| - |f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (11)$$

注意到 $y_m \rightarrow x_0$, 于是 $y_{n_m} \rightarrow x_0$. 从而由已知条件可知 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(y_{n_m}) = f(x_0)$. 这与(11)式矛盾! 故 $f \in C(\mathbb{R})$. \square

例题 0.6 设 $g \in C(\mathbb{R})$ 且以 $T > 0$ 为周期, 且有

$$f(f(x)) = -x^3 + g(x). \quad (12)$$

证明: 不存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得(12)式成立.

证明 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在 $M > 0$, 使得 $|g(x)| \leq M$. 反证, 假设存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得(12)式成立. 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + g(x)) = -\infty, \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + g(x)) = +\infty. \quad (14)$$

假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 则存在 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $f(x_n) \rightarrow A$. 从而由(12)式可得

$$f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n^3 + g(x_n)) = -\infty.$$

上式显然矛盾! 又因为 $f \in C(\mathbb{R})$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 或 $-\infty$. 否则, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 振荡, 则由零点存在定理可知, 存在 $y_n \rightarrow +\infty$, 使得 $f(y_n) = 0, n = 1, 2, \dots$. 从而由(13)式可知

$$-\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f(y_n)) = f(0).$$

显然矛盾!

(i) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty.$$

显然矛盾!

(ii) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 则

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty. \quad (15)$$

从而对上式两边同时作用 f 可得

$$f(-\infty) = f(f(-\infty)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x^3 + g(x)] = +\infty. \quad (16)$$

于是(15)式与(16)式显然矛盾! 综上, $f \in C(\mathbb{R})$ 的解不存在. \square

例题 0.7

1. 设 $f \in C[0, +\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = r$ 在 $[0, +\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.
2. 设 $f \in C(\mathbb{R}), n$ 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y \in \mathbb{R}$, 都有 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存在.

证明

1. 反证, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 由 f 有界, 可设 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > B = \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 任取 $C \in (B, A)$, 则由 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > C$ 可知, 存在 $x_1 \geq 0$, 使得 $f(x_1) > C$. 又由 $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B < C$ 可知, 存在 $x_2 > x_1 + 1$, 使得 $f(x_2) < C$. 于是再由 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > C$ 可知, 存在 $x_3 > x_2 + 1$, 使得 $f(x_3) > C$. 又由 $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B < C$ 可知, 存在 $x_4 > x_3 + 1$, 使得 $f(x_4) < C$. 依此类推, 可得递增数列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_{n+1} > x_n + 1, \quad f(x_{2n-1}) > C, \quad f(x_{2n}) < C, \quad n = 1, 2, \dots$$

从而由 $f \in C[0, +\infty)$ 及介值定理可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $y_n \in (x_{2n-1}, x_{2n})$, 使得 $f(y_n) = C$, 矛盾!

2. 设 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 是 f 的所有零点, 记 $x_0 = -\infty, x_{n+1} = +\infty$, 则由 f 的连续性及其介值定理可知, f 在 (x_{i-1}, x_i) 上不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 现在考虑 $(x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \dots, n$, 这 $n-1$ 个区间. 于是由抽屉原理可知, 这 $n-1$ 个区间中必存在 $\frac{n}{2}$ 个区间, 使 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内都同号. 不妨设 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内恒大于 0, 记 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值记为 $f(m_i) \triangleq M_i > 0$, 其中 $m_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \dots, n$. 由介值定理知, 至少存在 $c_i \in (x_{i-1}, m_i), c'_i \in (m_i, x_i)$, 使得

$$f(c_i) = f(c'_i) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0, i = 2, 3, \dots, n.$$

注意到在 $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$ 上 f 必不同号. 否则, 不妨设在 $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$ 上 f 恒大于 0, 则由 $f \in C(\mathbb{R})$ 可知, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in [x_1, x_{n+1}]$. 从而 $f(x) \geq -M, \forall x \in \mathbb{R}$. 这与对 $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ 都有根矛盾!

不妨设 f 在 (x_0, x_1) 上恒小于 0, 在 (x_n, x_{n+1}) 上恒大于 0, 则 f 在 (x_n, x_{n+1}) 上无上界. 否则, 存在 $K > \max_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$, 使得 $f(x) < K, \forall x \in (x_n, x_{n+1})$. 又因为 $f(x) < 0 < K, \forall x \in (x_0, x_1)$, $f(x) \leq \max_{2 \leq i \leq n} M_i < K, \forall x \in (x_1, x_n)$. 所以 $f(x) < K, \forall x \in \mathbb{R}$. 这与对 $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ 都有根矛盾!

又 $f(x_n) = 0$, 故至少存在一个 $c \in (x_n, x_{n+1})$, 使得 $f(c) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$. 综上, 至少有 $n+1$ 个点使得


$f(x) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i > 0$. 这与 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} \min_{2 \leq i \leq n} M_i\}$ 是 n 元集矛盾!

□

例题 0.8 设 $f \in C^2[0, +\infty)$, $g \in C^1[0, +\infty)$ 且存在 $\lambda > 0$ 使得 $g(x) \geq \lambda, \forall x \geq 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x) + g(x)f(x) = 0, \quad \forall x \geq 0,$$

证明: f 在 $[0, +\infty)$ 有界.

 **笔记** 形式计算分析需要的构造函数: 由条件微分方程可得

$$\begin{aligned} y'y'' = -gyy' &\Rightarrow \frac{(y')^2}{2} = -\int gyy'dx = -\frac{1}{2} \int gdy^2 = -\frac{1}{2}gy^2 + \frac{1}{2} \int y^2dg \\ &\Rightarrow (y')^2 = -gy^2 + \int y^2dg \Rightarrow \frac{(y')^2}{g} + y^2 = \int y^2dg. \end{aligned}$$

于是考虑构造函数 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x)$, $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X > 0$, 使得 $g'(x) \neq 0, \forall x \geq X$. 从而由导数介值性可知, g' 在 $[X, +\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), x \geq X$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得

$$F_1'(x) = \frac{2f'f''g - g'(f')^2 + 2ff'g}{g^2} = \frac{-2f'fg^2 - g'(f')^2 + 2ff'g^2}{g^2} = -\frac{g'(f')^2}{g^2}. \quad (17)$$

(i) 若 $g'(x) > 0, \forall x \geq X$, 则由 (17) 式可知 $F_1'(x) \leq 0$, 即 $F_1(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可知, 存在 $C > 0$, 使得

$$f^2(x) \leq F_1(x) \leq C, \quad \forall x \geq X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上有界. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故 f 在 $[0, X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(ii) 若 $g'(x) < 0, \forall x \geq X$, 令 $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得

$$F_2'(x) = 2f'f'' + g'f^2 + 2gff' = -2f'fg + g'f^2 + 2gff' = g'f^2 \leq 0. \quad (18)$$

从而 $F_2(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减, 于是存在 $C' > 0$, 使得

$$g(x)f^2(x) \leq F_2(x) \leq C', \quad \forall x \geq X.$$

进而由 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可得

$$f^2(x) \leq \frac{C'}{g(x)} \leq \frac{C'}{\lambda}, \quad \forall x \geq X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上有界. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故 f 在 $[0, X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界. □

例题 0.9 设 $a, b > 1$ 且 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 邻域有界. 若

$$f(ax) = bf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

证明: f 在 $x = 0$ 连续.

证明 注意到

$$f(0) = bf(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

由条件可得

$$f(ax) = bf(x) \Rightarrow f(x) = \frac{f(ax)}{b} = \frac{f(a^2x)}{b^2} = \dots = \frac{f(a^nx)}{b^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

因为 f 在 $x = 0$ 邻域有界, 所以存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in (-\delta, \delta). \quad (20)$$

从而对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{M}{b^N} < \varepsilon. \quad (21)$$

于是当 $x \in \left(-\frac{\delta}{a^N}, \frac{\delta}{a^N}\right)$ 时, 结合(19)(20)(21)式, 我们有

$$|f(x)| = \left| \frac{f(a^N x)}{b^N} \right| \leq \frac{M}{b^N} < \varepsilon.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. □

例题 0.10 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x), f(x^2)$ 都是周期函数, 证明: f 为常值函数.

证明 由连续周期函数必一致连续可知, $f(x), f(x^2)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续. 于是对任意满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ 的数列 $\{x'_n\}, \{x''_n\}$, 都有

$$|f(x'_n) - f(x''_n)|, |f((x'_n)^2) - f((x''_n)^2)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

设 $f(x)$ 的周期为 $T > 0$, 则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, 取 $x'_n = \sqrt{nT} + c, x''_n = \sqrt{nT}$, 显然 $x'_n - x''_n = \frac{c}{\sqrt{nT} + c + \sqrt{nT}} \rightarrow 0$. 从而由 (22) 式可得

$$|f((x'_n)^2) - f((x''_n)^2)| = f(nT + c) - f(nT) = f(c) - f(0) \rightarrow 0.$$

故 $f(c) = f(0), \forall c \in \mathbb{R}$. 故 f 为常值函数. □

例题 0.11 计算函数方程 $f(\log_2 x) = f(\log_3 x) + \log_5 x$ 所有 \mathbb{R} 上的连续解.

 **笔记** 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5}, \quad x > 0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3}, \quad \frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\frac{\ln 3}{\ln 2} > 1$, 后者公比 $\frac{\ln 2}{\ln 3} < 1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 取 $a_1 = x, \ln a_n = \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1} \cdot \ln x, n \in \mathbb{N}$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = 0$. 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) &= f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln a_n}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}}. \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) \right] &= f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0). \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}} = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0) \xrightarrow{y = \frac{\ln x}{\ln 2}} f(y) = f(0) + \frac{y \ln 2 \ln 3}{\ln 5 \ln \frac{3}{2}}.$$

□

例题 0.12 设 $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 满足对任何 $x, h \in \mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 对 $\forall x, h \in \mathbb{R}$, 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x + \theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!} h^n \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2}{n!} h^n, \end{aligned} \quad (23)$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} h^{n+2}. \quad (24)$$

比较(23)式和(24)式得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!} \right] f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} - \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \right] h. \quad (25)$$

当 $\theta = \frac{1}{n+1}$ 时, 我们有

$$\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令 $h \rightarrow 0$, 则 $\xi, \eta \rightarrow x$, 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2} = \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} \Rightarrow f^{(n+2)}(x) = 0.$$

当 $\theta \neq \frac{1}{n+1}$ 时, 对(25)式令 $h \rightarrow 0$, 则 $\xi, \eta \rightarrow x$, 故此时就有

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!} \right] f^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0.$$

因此, 无论如何都有 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式. □


例题 0.13

1. 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1, 1)$.

2. 设 $g(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$, 证明 g 是只有实根的多项式.

 **笔记** 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式, 且 ± 1 是 $\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n$ 的 $n-k$ 重根 ($0 \leq k \leq n$). 由 Rolle 定理可知, $\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知, $\frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得, $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有 n 个不同实根. 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 故 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1, 1)$ 上.

2. 设 $\frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) = P_k(x) e^{-x^2}$, P_k 是 k 次多项式, $k \in \mathbb{N}$, 显然 $P_0(x) = 1$, 于是

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (e^{-x^2}) = [P'_k(x) - 2xP_k(x)] e^{-x^2}.$$

令 $P_{k+1}(x) = P'_k(x) - 2xP_k(x)$, 则由 P_k 是 k 次多项式可知 $P_{k+1}(x)$ 是 $k+1$ 次多项式. 故由数学归纳法可知

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = P_n(x)e^{-x^2}, \quad P_n \in \mathbb{R}[x], \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此 $g(x) = e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = P_n(x)$ 是 n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$). 设 P_k 是有 k 个不同实根的多项式, 这 k 个根为

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_k.$$

从而这 k 个根也是 $P_k(x)e^{-x^2}$ 的根. 由 Rolle 定理可知

$$P_{k+1}(x) = e^{-x^2} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) = e^{-x^2} \frac{d}{dx} (P_k(x)e^{-x^2})$$

在 $(x_{j-1}, x_j), j = 2, 3, \cdots, k$ 有实根. 而 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_k(x)e^{-x^2} = 0$, 故由 Rolle 定理可知 $P_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty, x_1), (x_k, +\infty)$ 上各有一个实根. 因此 $P_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个根. 故由数学归纳法可知 $P_n(x)$ 有 n 个实根 ($n \in \mathbb{N}$). 又因为 $g(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式, 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 所以 $g(x) = P_n(x)$ 是只有实根的多项式. □

例题 0.14 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 f, f', f'' 都是正值函数. 若存在 $a, b > 0$ 使得

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

求 $f'(x) \leq cf(x)$ 恒成立的最小的 c .

证明 考虑微分方程 $y'' = ay + by'$, 其特征方程为

$$x^2 - bx - a = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} < 0.$$

于是

$$f''(x) \leq af(x) + bf'(x) \iff f''(x) - x_1 f'(x) \leq x_2 [f'(x) - x_1 f(x)].$$

令 $g(x) \triangleq f'(x) - x_1 f(x)$, 则 $g'(x) \leq x_2 g(x)$. 再令 $c(x) \triangleq \frac{g(x)}{e^{x_2 x}}$, 则

$$c'(x) = \frac{g'(x) - x_2 g(x)}{e^{x_2 x}} \leq 0 \Rightarrow c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由 $f'', f', f > 0$ 可知 f, f' 递增有下界. 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ 都存在. 因此

$$c(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x) - x_1 f(x)}{e^{x_2 x}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

即

$$f'(x) \leq x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

取 $f(x) = e^{x_1 x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min} = x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$. □

注 若存在 $c < x_1$, 使得 $f'(x) \leq cf(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 则

$$f'(x) \leq cf(x) < x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x) = e^{x_1 x}$ 时, $f'(x) = x_1 f(x)$ 矛盾! 故 $c_{\min} = x_1$.

例题 0.15 设 $f \in C^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 若对某个 $M > 0$ 和 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2} \geq 0, \lambda_{n-1} \geq 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \prod_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明 $f(x) \equiv 0$.

笔记 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)} = f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = \int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{\int_{x_0}^x g(y) dy}.$$

$$f^{(n)} = -f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = -g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = -\int_{x_0}^x g(y) dy + C \Rightarrow f^{(n-1)} = C e^{-\int_{x_0}^x g(y) dy}.$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x) \triangleq \frac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y)dy}}$, $c_2(x) \triangleq f^{(n-1)}(x)e^{\int_{x_0}^x g(y)dy}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x) \triangleq c_1^2(x) = \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}}$, $C_2(x) \triangleq c_2^2(x) = [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)| \cdot g(x),$$

其中 $g(x) = M \prod_{k=1}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{l_k-1}$. 从而 $f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x) \leq |f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)| \leq |f^{(n-1)}(x)|^2 \cdot g(x)$.

(27)

令 $C_1(x) \triangleq \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}}$, 则由 (27) 式可知

$$C_1'(x) = \frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) - 2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}} \leq 0.$$

故 $C_1(x) \leq C_1(x_0) = 0, \forall x \geq x_0$. 因此 $C_1(x) = 0, \forall x \geq x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \geq x_0$. 令 $C_2(x) \triangleq [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy}$, 则由 (27) 式可知

$$C_2'(x) = [2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) + 2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2] e^{2\int_{x_0}^x g(y)dy} \geq 0.$$

故 $C_2(x) \leq C_2(x_0) = 0, \forall x \leq x_0$. 因此 $C_2(x) = 0, \forall x \leq x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \leq x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 又 $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$, 故 $f(x) \equiv 0$. \square

例题 0.16 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g \in C(\mathbb{R})$ 且 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|g(x)|}{x} = +\infty$, 证明: $f \circ g$ 不是周期函数.

笔记 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

证明 若 $f \circ g$ 是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知 $f \circ g$ 在 \mathbb{R} 上一致连续. 设 f 的周期为 $T > 0$, 记 $a \triangleq \max f - \min f > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使

$$|f(g(x)) - f(g(y))| < a, \forall |x - y| \leq \delta. \quad (28)$$

先证 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 若 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| \neq +\infty$, 则存在 $A > 0$, 使 $|g(x+\delta) - g(x)| \leq A, \forall x \geq 0$. 对 $x \in [n\delta, (n+1)\delta], n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{|g(x-n\delta)|}{n\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{g(x-k\delta) - g(x-(k+1)\delta)}{n\delta} \right| \leq \frac{1}{n\delta} \sup_{x \in [0, \delta]} |g(x)| + \frac{A}{\delta}.$$

故 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{A}{\delta}$ 矛盾! 因此 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 于是存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $|g(x_0+\delta) - g(x_0)| \geq T$. 由介值定理可知, 存在 $s, t \in [x_0, x_0+\delta]$, 使得 $f(g(s)) = \max f, f(g(t)) = \min f$. 从而由 (28) 式可知

$$a = |f(g(s)) - f(g(t))| < a$$

矛盾! 故 $f \circ g$ 不是周期函数 ($f \circ g$ 甚至不是一致连续函数). \square

例题 0.17 已知 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 在 (a, b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F_1(a) = F_1(b) = 0$. 再设 $F_2(x) = \int_a^x F_1(t)dt = \int_a^x \left[\int_a^t f(s)ds \right] dt$, 则 $F_2(a) = 0, F_2'(x) = F_1(x), F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$. 由条件可知

$$0 = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F_1'(x) dx = \int_a^b x dF_1(x) = x F_1(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_1(x) dx = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$. 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\eta_1 \in$

$(a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$, 使得 $F'_1(\eta_1) = F'_1(\eta_2) = 0$. 即 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$. □

例题 0.18 已知 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

证明: $f(x)$ 在 (a, b) 上至少 $n+1$ 个零点.



笔记 利用分部积分转换导数的技巧.

证明 令 $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1) dx_1 \dots dx_{n-1}$. 则 $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1 \leq k \leq n$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F^{(n+1)}(x) dx = F^{(n)}(x) \Big|_a^b = F^{(n)}(b), \\ 0 &= \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = x F^{(n)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x) dx = -F^{(n-1)}(b), \\ &\dots\dots \\ 0 &= \int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x) \Big|_a^b - n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx \\ &= -n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx = \dots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x) dx = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而 $F(b) = F'(b) = \dots = F^{(n)}(b) = 0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 Rolle 中值定理可知存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a, b)$, 使得 $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a, b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \dots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. 即 $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \dots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. □

例题 0.19 已知 $f(x) \in D^2[0, 1]$, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}, \int_0^1 x f(x) dx = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 16$.



笔记 构造 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x) = f(x) - p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = \int_0^1 x^k [f(x) - p(x)] dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k p(x) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定 $p(x) = ax^2 + bx + c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c, \\ 0 &= \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}, \\ \frac{1}{60} &= \int_0^1 x^2 p(x) dx = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}. \end{aligned}$$

解得: $a = 8, b = -9, c = 2$. 于是就得到 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$.

证明 令 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令 $G(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left(\int_0^s g(y) dy \right) ds \right] dt$, 则 $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$. 利用分部积分可得

$$0 = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'''(x) dx = G''(1),$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 xg(x) \, dx = \int_0^1 xG'''(x) \, dx = \int_0^1 x dG''(x) = xG''(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x) \, dx = -G'(1), \\
0 &= \int_0^1 x^2 g(x) \, dx = \int_0^1 x^2 G'''(x) \, dx = \int_0^1 x^2 dG''(x) = x^2 G''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xG''(x) \, dx \\
&= -2 \int_0^1 x dG'(x) = 2 \int_0^1 G'(x) \, dx - 2xG'(x) \Big|_0^1 = 2G(1).
\end{aligned}$$

从而 $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (0, 1)$, 使得 $G'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0, 1)$, 使得 $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0, 1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$. 即 $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$. 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g''(\xi) = 0$. 即 $f''(\xi) = 16$. \square