0.1 覆盖定理

定理 0.1 (覆盖定理)

1. 数域上 n 维线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间之并.
2. 域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间之并.
3. 域 $\mathbb{F}$ 上无限维线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间之并.

注 全空间和空集称作平方子空间, 不是平凡子空间的线性空间称为非平凡子空间.

笔记 对于数域上的有限维线性空间, 我们给一个简单的方法, 比丘维声等更简单.

证明

1. 设 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$, 其中 $n\geqslant 2, V_i$ 都是非平凡子空间. 考虑 V 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和一组向量

$$\alpha_i=e_1+ie_2+i^2e_3+\cdots+i^{n-1}e_n,\ i=1,2,\cdots.$$

从而

$$(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n})=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ i_1^{n-1}&i_2^{n-1}&\cdots&i_n^{n-1}\end{pmatrix},i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{N}.$$

由 Vandermonde 行列式的性质, 上面这组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中任何 n 个都线性无关. 而其中必有无限个 α_i 落入某个题设 V 的某个非平凡子空间 V_i 中, 从而这个子空间至少是 n 维的, 这和其是非平凡子空间矛盾!

2. 设 $V=V_1\bigcup V_2, V_1,V_2$ 都是 V 的非平凡不变子空间. 则存在 $v_1\in V_1\setminus V_2, v_2\in V_2\setminus V_1$. 注意到

$$v_1+v_2\in V_1\Rightarrow v_2\in V_1,\ v_1+v_2\in V_2\Rightarrow v_1\in V_2,$$

从而

$$v_1+v_2\notin V_1\bigcup V_2,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间之并.

3. 若 $V_i\subset V, i=1,2,\cdots,n$ 是非平凡子空间. 我们归纳证明

$$V\neq\bigcup_{i=1}^{n}V_i. \tag{1}$$

当 $n=1$ 显然有 (1) 成立. 假设对 n 有 (1) 成立, 当 $n+1$ 时, 由归纳假设取 $\alpha\in V\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i\right)$.
如果 $\alpha\notin V_{n+1}$, 则 (1) 对 $n+1$ 已经成立. - 若 $\alpha\in V_{n+1}$, 由 V_{n+1} 非平凡, 存在 $\beta\in V\setminus V_{n+1}$. 注意到

$$S=\{t\alpha+\beta:t\in\mathbb{F}\}\subset V\setminus V_{n+1},$$

这是因为若某个 $t\alpha+\beta\in V_{n+1}$ 可推出 $\beta\in V_{n+1}$ 而矛盾!. 现在若有 $t_1\alpha+\beta, t_2\alpha+\beta$ 属于同一个 $V_j, j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 则

$$t_1\alpha+\beta-(t_2\alpha+\beta)=(t_1-t_2)\alpha\in V_j,$$

即 $t_1=t_2$. 现在 S 中向量有无穷多个, 所以必然有一个不落在 $\bigcup\limits_{j=1}^{n}V_j$, 自然也不落在 $\bigcup\limits_{j=1}^{n+1}V_j$, 这就证明了 (1) 对 $n+1$ 也成立!. 至此我们完成了证明.

□

例题 0.1 设 V 是有限维线性空间,$A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是 V 上两两不同线性变换, 则 $\exists\alpha\in V$, 使 $A_1\alpha,A_2\alpha,\cdots,A_s\alpha$ 两两不同.

证明 考虑 $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Ker}\left(A_j-A_i\right)$, 显然 $\operatorname{Ker}\left(A_j-A_i\right)\neq V,\varnothing$. 故由覆盖定理知, 我们有 $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Ker}\left(A_j-A_i\right)\neq V$. 因此 $\exists\alpha\in V\backslash \bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Ker}\left(A_j-A_i\right)$, 此时

$$\left(A_j-A_i\right)\alpha\neq 0 \Longleftrightarrow A_i\alpha\neq A_j\alpha, 1\leqslant i<j\leqslant n.$$

□

例题 0.2 设 T 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换且 $T(AB)=T(A)T(B)$,$T(AB)=T(B)T(A)$ 必有一个成立. 证明: 要么对所有 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $T(AB)=T(A)T(B)$, 要么对所有 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $T(AB)=T(B)T(A)$.

证明 对 $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 考虑

$$V_A=\left\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}:T(AB)=T(B)T(A)\right\};$$

$$V_A'=\left\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}:T(AB)=T(A)T(B)\right\},$$

则有 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A\bigcup V_A'$. 由覆盖定理, 我们有 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A$ 或者 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A'$. 再由 A 的任意性可知结论成立.

□

定义 0.1

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,$v\in V$,A 是 V 上线性变换. 记 $m_v\in\mathbb{F}[x]$ 是 $m_v(A)v=0$ 成立的最低次的首一多项式, 我们叫 m_v 为 **v 的极小多项式**.

♣

命题 0.1

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,$v\in V$,A 是 V 上线性变换,m_v 为 v 的极小多项式. 若 $m\in\mathbb{F}[x]$, 且 $m(A)v=0$, 则必有 $m_v\mid m$.

♠

证明 由带余除法可知, 存在 $q,r\in\mathbb{F}[x]$, 且 $\deg r<\deg m_v$, 使得 $m=qm_v+r$. 从而

$$0=m(A)v=q(A)m_v(A)v+r(A)v=r(A)v.$$

于是 $r\equiv 0$, 否则与 m_v 是 v 的极小多项式矛盾! 故 $m_v|m$.

□

例题 0.3 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,$v\in V$,A 是 V 上线性变换. 记 $m_v\in\mathbb{F}[x]$ 是 $m_v(A)v=0$ 成立的最低次的首一多项式, 我们叫 m_v 为 v 的极小多项式. 证明: 存在 $v\in V$ 使得 v 的极小多项式恰好是 A 的极小多项式.

证明 设 $m\in\mathbb{F}[x]$ 是 A 的极小多项式, 那么

$$m(A)v=0,\forall v\in V$$

证法一: 反证, 假设对 $\forall v\in V$, 都有 $m_v(x)\neq m(x)$. 又由命题 0.1知 $m_v|m$. 因此 $m_v(x)(v\in V)$ 都是 $m(x)$ 的首一真因式. 考虑 m 的所有首一真因式

$$m_1,m_2,\cdots,m_N\in\mathbb{F}[x],N\in\mathbb{N},$$

则对 $\forall v\in V$, 都有 $m_v\in\{m_1,m_2,\cdots,m_N\}$. 考虑

$$V_i\triangleq\{v\in V:m_i(A)v=0\},i=1,2,\cdots,N.$$

对 $\forall v_0\in V$, 由于 $m_v(x)(v\in V)$ 都是 $m(x)$ 的首一真因式, 故存在 $i_0\in[1,N]\cap\mathbb{N}$, 使得 $m_{v_0}=m_{i_0}$. 从而 $m_{i_0}(A)v_0=0$, 于是 $v_0\in V_{i_0}$. 因此 $V\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}V_i$. 故 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{N}V_i$, 于是由覆盖定理, 我们有某个 i 使得 $V_i=V$, 故

$$m_i(A)v=0,\forall v\in V.$$

因此 $m_i(A)=0$. 这意味着 $m|m_i$, 故 $m=m_i$. 这与 m_i 是 m 的真因式矛盾!

□

命题 0.2

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 V 的子空间. 证明存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

证明 若 $|\Lambda|<\infty$, 则已经得证明. 若 $|\Lambda|=\infty$, 取 V_{α_1}, 若

$$\dim V_{\alpha_1}=\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

这已经得证.

若

$$\dim V_{\alpha_1}>\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

先证存在 $\alpha_2\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}$, 使得

$$V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\subset V_{\alpha_1}.$$

假设对任何 $\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}$, 我们有

$$V_{\alpha_1}\bigcap V_\alpha=V_{\alpha_1}\Longrightarrow\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha=V_{\alpha_1}\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}} V_\alpha\right)=V_{\alpha_1}.$$

则

$$\dim V_{\alpha_1}=\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

矛盾! 故存在 $\alpha_2\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}$, 使得

$$V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\subset V_{\alpha_1}.$$

从而

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)<\dim\left(V_{\alpha_1}\right)$$

此时要么

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)>\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

要么

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)=\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$

因此我们可以继续讨论 $\alpha_3\in\Lambda\setminus\{\alpha_1,\alpha_2\}$, 依次下去. 可以得到一个严格递减正整数列 $\left\{\dim\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}\right\}$, 满足

$$\dim\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_{\alpha_i}\leqslant\dim\bigcap_{i=1}^{m} V_{\alpha_i}\leqslant\dim V_{\alpha_1},\dim\bigcap_{i=1}^{m} V_{\alpha_i}\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}.$$

因此严格递减正整数列 $\left\{\dim\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}\right\}$ 只能有限项, 因此这样的操作会经过有限次而停止. 于是我们知道存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha.$$

□

例题 0.4 设 P 为数域,τ 为 $P^{n\times n}$ 上的线性变换, 满足条件: 对任意固定的 $A,B\in P^{n\times n}$,$\tau(AB)=\tau(A)\tau(B)$ 或 $\tau(AB)=\tau(B)\tau(A)$ 至少有一个成立, 证明: 要么对所有的 $A,B\in P^{n\times n}$,$\tau(AB)=\tau(A)\tau(B)$, 要么对所有的 $A,B\in P^{n\times n}$,$\tau(AB)=$

$\tau(B)\tau(A)$.

证明 对 $\forall A \in P^{n\times n}$, 记

$$U_A \triangleq \{X : \tau(AX) = \tau(A)\tau(X)\}, \quad U'_A \triangleq \{X : \tau(AX) = \tau(X)\tau(A)\},$$

则由条件知

$$P^{n\times n} = U_A \cup U'_A.$$

从而 U_A, U'_A 都不是非平凡子空间, 否则与覆盖定理矛盾! 因此对 $\forall A \in P^{n\times n}$, 要么 $U_A = P^{n\times n}$, 要么 $U'_A = P^{n\times n}$. 再记

$$W_1 = \left\{A : U_A = P^{n\times n}\right\}, \quad W_2 = \left\{A : U'_A = P^{n\times n}\right\},$$

则

$$P^{n\times n} = W_1 \cup W_2.$$

于是 W_1, W_2 都不是非平凡子空间, 否则与覆盖定理矛盾! 故要么 $W_1 = P^{n\times n}$, 要么 $W_2 = P^{n\times n}$. 即

$$\text{要么对}\forall A \in P^{n\times n}, \text{都有} U_A = P^{n\times n};$$
$$\text{要么对}\forall A \in P^{n\times n}, \text{都有} U'_A = P^{n\times n}.$$

也即

$$\text{要么对}\forall A, B \in P^{n\times n}, \text{都有} \tau(AB) = \tau(A)\tau(B);$$
$$\text{要么对}\forall A, B \in P^{n\times n}, \text{都有} \tau(AB) = \tau(B)\tau(A).$$

□