


0.1 极限问题综合

例题 0.1 设二阶可微函数 $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 满足

$$f''(x) \leq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

求极限

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)}.$$

 **笔记** 本例非常经典,深刻体现了“拉格朗日中值定理”保持阶不变和“和式和积分”转化的思想.

证明 由条件 $f''(x) \leq 0$ 可知, f 是上凸函数. 而上凸函数只能在递增、递减、先增后减中发生一个. 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 因此 f 一定在 $[1, +\infty)$ 上递增. 再结合 $f''(x) \leq 0$ 可知 $f' \geq 0$ 且单调递减. 下面来求极限.

由 Lagrange 中值定理可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n \in (2n-1, 2n)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{f^s(2n)} - \frac{1}{f^s(2n-1)} \right] \xrightarrow{\text{Lagrange 中值定理}} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}. \quad (1)$$

由于 $\theta_n \in (2n-1, 2n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ 且 $f \geq 0$ 单调递增, $f' \geq 0$ 单调递减, 因此

$$s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} \leq s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} \leq s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}. \quad (2)$$

又因为 $\left[\frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)} \right]' = \frac{f''(x)f(x) - (s+1)f'(x)}{f^{s+2}(x)} \leq 0$, 所以 $\frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}$ 单调递减. 从而一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} &\leq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n-1}^{2n} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} &\geq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_2^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_2^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(2)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

于是利用(3)(4)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} = -\frac{1}{2}. \quad (5)$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\leq -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{f'(2x-1)}{f^{s+1}(2x-1)} dx \right] = -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \int_{2n-3}^{2n-1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \right] \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \right] = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\geq -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx \\
&= -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)} dx = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{f^{s+1}(x)} df(x) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)} \Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(1)} \right] = -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \quad (7)$$

于是利用(6)(7)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} = -\frac{1}{2}. \quad (8)$$

故结合(1)(2)(5)(8)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} = -\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$.

证明 根据对称性, 不妨设 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 先尝试找到最大值点. 在 $x = 0, \frac{1}{2}$ 时代入, 很明显对应的极限是零, 考虑 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 根据等比数列求和公式有

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n)$$

如果 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 已经取定, 则在区间 $\left[\delta, \frac{1}{2}\right]$ 中

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

右端是指数级趋于零的并且上式不依赖于 x , 所以函数会一致趋于零. 因此最大值点应该在 $x = 0$ 附近, 近似的有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \approx nx(1-x)^n$$

取 $x = \frac{1}{n}$ 显然极限是 $\frac{1}{e}$, 我们猜测这就是答案, 下面开始证明. 首先取 $x = \frac{1}{n}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(\frac{1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{e}$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \geq \frac{1}{e}$, 下面估计上极限. 根据对称性, 不妨只考虑 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 对任意 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 取定, 当 $x \in \left[\delta, \frac{1}{2}\right]$ 时总有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

当 $x \in [0, \delta]$ 时, 结合均值不等式有


$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \approx \frac{nx(1-x)^n}{1-2\delta} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-2\delta} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

所以可以取 $n > N$ 充分大, 使得 $\frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}} < \frac{1}{e}$, 此时便有

$$n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

最后, 根据 δ 的任意性, 可知结论成立. \square

例题 0.3 设 $x_n > 0, k$ 为正整数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+k}}{x_n} \geq \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$ 且常数是最佳的.

 **笔记** 此类问题反证法将会带来一个恒成立的不等式, 有很强的效果, 所以一般都用反证法, 证明的灵感来源于 $k=1$ 时的情况.

证明 设 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 采用反证法, 则存在 N 使得 $n \geq N$ 时恒成立

$$S_{n+k} \leq \lambda(S_n - S_{n-1}), \lambda \in \left[1, \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right)$$

显然 S_n 是单调递增的, 如果 S_n 有界, 则在不等式两端取极限可知 S_n 收敛到零, 矛盾, 所以 S_n 严格单调递增趋于正无穷, 因此对任意 $n \geq N$ 有 $S_n > S_{n-1}$. 如果已经得到了 $S_n > cS_{n-1}$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立, 这里 c 是正数, 则对任意 $n \geq N$ 有

$$\begin{aligned} S_{n+k} &> cS_{n+k-1}, S_{n+k-1} > cS_{n+k-2}, \cdots, S_{n+1} > cS_n \Rightarrow S_{n+k} > c^k S_n \\ 0 < S_{n+k} - c^k S_n &\leq (\lambda - c^k)S_n - \lambda S_{n-1} \Rightarrow S_n > \frac{\lambda}{\lambda - c^k} S_{n-1} \end{aligned}$$

这样不等式就加强了, 记 $c' = \frac{\lambda}{\lambda - c^k}$, 我们得到 $S_n > c'S_{n-1}$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立. 定义数列 u_n 为 $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\lambda}{\lambda - u_n^k}$, 则重复以上过程可知 $S_n > u_m S_{n-1}$ 对任意 m 以及 $n \geq N$ 都恒成立, 所以 u_m 这个数列必须是有界的, 下面我们就由此导出矛盾. 因为 $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k)u_n < \lambda \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k)u_n^k < \lambda^k$, 由均值不等式有

$$kx^k(\lambda - x^k)^k \leq \left(\frac{k\lambda}{k+1}\right)^{k+1} < k\lambda^k \Leftrightarrow \lambda < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

显然成立, 所以 u_m 单调递增, 而如果极限存在, 则极限点满足方程 $x = \frac{\lambda}{\lambda - x^k} \Leftrightarrow x(\lambda - x^k) = \lambda$, 这与前面均值不等式导出的结果矛盾, 所以 u_m 单调递增趋于正无穷, 又与有界性矛盾. 综上所述得证. \square

例题 0.4 设 $x_n > 0, x_n \rightarrow 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = a < 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$.

证明 不妨设 $a = -1$, 否则将 x_n 换成 x_n^k 即可, 取 k 将 a 变成 -1 .

设 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 则 $S_n > 0$ 严格单调递增, 如果 S_n 收敛, 则 $\ln x_n \rightarrow -\infty$ 与条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷.

因为 $\frac{\ln x_n}{\ln n} = \frac{\ln x_n}{S_n} \frac{S_n}{\ln n}$, $\frac{\ln x_n}{S_n} \rightarrow -1$, 所以等价的只要证明 $\frac{S_n}{\ln n} \rightarrow 1$.

条件为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{S_n} = -1$, 设想作为等式, 对应着 $S_n - S_{n-1} = e^{-S_n}$ 是一个隐函数类型的递推式, 不方便使用, 所以考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_{n+1}} \frac{S_{n+1}}{S_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n+1}}{S_n}\right) = -1$$

现在等价的, 已知 S_n 单调递增趋于无穷且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(S_{n+1} - S_n)}{S_n} = -1$, 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$. 由极限定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $(-1 - \varepsilon)S_n < \ln(S_{n+1} - S_n) < (-1 + \varepsilon)S_n$ 也即

$$\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^{S_n} + S_n < S_{n+1} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{S_n} + S_n, \forall n \geq N$$

不妨要求 $S_N > 1$, 考虑

$$f(x) = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x + x, f'(x) = 1 + \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x \ln\left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right) > 1 - \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^x > 0$$

再定义 $u_N = S_N, u_{n+1} = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{u_n} + u_n$, 于是若有 $u_n \leq S_n$ 则结合单调性可知 $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(S_n) = S_{n+1}$, 这说

明 $S_n \leq u_n$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立. 同样考虑

$$g(x) = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x + x, g'(x) = 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) > 0$$

再定义 $v_N = S_N, v_{n+1} = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^{v_n} + v_n$, 同样道理 $S_n \geq v_n$ 恒成立, 于是 $\frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n}, n \geq N$.

注意 u_n, v_n 具备完全一样的形式, 所以统一的考虑 $a_1 > 1, a_{n+1} = a_n + e^{ca_n}$, 其中 c 在 $\frac{1}{e}$ 附近, 显然这个数列是单调递增趋于正无穷的, 我们用 stolz 公式来计算相应的极限, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-ca_n}}{c^{-a_n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-ca_n}(c^{-(a_{n+1}-a_n)} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{ca_n}}{c^{-e^{ca_n}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{e^{-x \ln c} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-x \ln c} - 1} = \frac{1}{-\ln c} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} + \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} - \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}$$

这意味着

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \geq \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}, \forall \varepsilon > 0$$

由此可知结论成立. □

例题 0.5 设 $n \in \mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos(2x)} \cdot \sqrt[3]{\cos(3x)} \cdots \sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}.$$

解 由 Taylor 公式知

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{x}{k} + o(x), x \rightarrow 0.$$

于是

$$\sqrt[k]{\cos x} = \sqrt[k]{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{k} + o(x^2) = 1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

从而

$$\prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2}\right)x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

□

例题 0.6 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}}\right).$$

 **笔记** 注意到

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}},$$

对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有

$$\frac{\sqrt{i}}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

故 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}}$ 中的每一项 $\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}}$ 都可以 Taylor 展开.

解 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{i}}{n} + \frac{i}{n^2} + O\left(\frac{i\sqrt{i}}{n^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left[n - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} + nO\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n^2} + \frac{n+1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$


于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.7 设 $f \in R[0, 1]$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

 笔记 注意 $\frac{2k}{2n-1}, \frac{2k-1}{2n-1} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

证明 注意到


$$\begin{aligned}\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 0, n \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n-1}\right) &= \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 0, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

故由子列极限命题 (b) 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

□

例题 0.8 设 $x_{n+1} = x_n - x_n^3, x_1 \in \mathbb{R}$, 判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 收敛性.

 笔记 因为递推函数 $g(x) = x(1-x^2)$ 关于原点对称, 而 $\{x_n\}$ 的敛散性只由 x_1 决定, 所以我们只需要考虑 $x_1 > 0$ 的情况即可, 由于 $g(x)$ 关于原点对称, 故 $x_1 < 0$ 的情况和 $x_1 > 0$ 的情况类似. 因此我们可以直接考虑数列 $\{|x_n|\}$. 这

样能避免很多分类讨论. 注意这个递推函数 $g(x)$ 只有一个不动点 $x=0$.

如果不加绝对值, 原递推函数的蛛网图会比较杂乱, 加上绝对值后讨论会比较清晰. 实际上, 通过蛛网图分析, 也能得到使得 $\{x_n\}$ 发散的 x_1 的临界点满足 $g(x_1)=x_2, g(x_2)=x_1$, 即 $g(g(x_1))=x_1$. 于是就有

$$-x_1^6 + 3x_1^4 - 3x_1^2 + 2 = 0. \quad (9)$$

但是当 $x_1 = \pm 1, \pm 2$ 上式不成立, 故上述方程没有有理根. 令 $t = x_1^2$, 则上式可化为

$$-t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = 0.$$

当 $t=2$ 时, 上式成立. 故上式可化为

$$(t-2)(-t^2+t-1)=0.$$

因此上式只有一个实根 $t=2$, 即(9)式只有当 $x_1^2=2$ 时才有实根. 故(9)式只有两个实根 $x_1 = \pm\sqrt{2}$.

考虑 $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$, 记 $f(x) = x|1 - x^2|$, 则 $f(x)$ 有两个不动点 $x = \pm\sqrt{2}$.

证明 考虑 $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$, 则

(1) 当 $|x_1| > \sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \geq |x_n| > \sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递增, 且有下界 $\sqrt{2}$. 而 f 没有大于 $\sqrt{2}$ 的不动点, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

(2) 当 $|x_1| \leq \sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \leq |x_n| \leq \sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递减, 且有下界 $\sqrt{2}$. 于是 $A \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在. 对 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1|$ 两边同时取极限得 $A = 0$ 或 $\sqrt{2}$.

(i) 若 $A = 0$, 则由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = A = 0$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(ii) 若 $A = \sqrt{2}$, 则由 $\{|x_n|\}$ 递减, 且 $|x_n| \leq \sqrt{2}$ 知 $\sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq |x_n| \leq \sqrt{2} \Rightarrow |x_n| = \sqrt{2}, n = 1, 2, \dots$. 此时 $x_1 = \pm\sqrt{2}$, 再代入 $x_{n+1} = x_n - x_n^3$ 得 $x_n = (-1)^n x_1, n = 2, 3, \dots$. 故此时 $\{x_n\}$ 发散.

综上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \text{发散} & , |x_1| \geq \sqrt{2} \\ 0 & , |x_1| < \sqrt{2} \end{cases}.$$

□

例题 0.9 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$$

设递推

$$x_1 \in [a, b], x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), n = 1, 2, \dots$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

证明 由于 $a \leq f(x) \leq b$, 因此归纳易得 $a \leq x_n \leq b$. 令 $g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$, 则

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(y) - f(x)]}{2} \geq 0, \forall y \geq x.$$

由命题可知递增递推数列 $\{x_n\}$ 一定单调, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. □

例题 0.10 设 $f(x) \in C[0, 1], f(x) > 0$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} = \max_{[0, 1]} f.$$



笔记 回顾例题??和命题??. 因此我们只需证明命题??的反向, 再结合例题??就能得证. 但是反向 Stolz 定理一般不会直接应用, 因此我们可以尝试利用单调有界定理证明比值极限存在, 再利用命题??就能直接得证.

实际上, 只要证明了单调性, 就能利用反向 Stolz 定理证明命题??的反向也成立, 再利用例题??就能得到结论.

证明 注意到

$$\frac{\int_0^1 f^{n+2}(x) dx}{\int_0^1 f^{n+1}(x) dx} \geq \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} \iff \int_0^1 f^{n+2}(x) dx \int_0^1 f^n(x) dx \geq \left(\int_0^1 f^{n+1}(x) dx \right)^2. \quad (10)$$

由 Cauchy 不等式知

$$\int_0^1 f^{n+2}(x)dx \int_0^1 f^n(x)dx \geq \left(\int_0^1 f^{\frac{n+2}{2}}(x) f^{\frac{n}{2}}(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)dx \right)^2.$$

故(10)式成立, 即 $\left\{ \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} \right\}_{n=0}^{\infty}$ 单调递增. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 由例题??可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = \max_{[0,1]} f.$$

再根据命题??可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = \max_{[0,1]} f.$$

□

例题 0.11

1. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限.

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$a_{n+1} + \frac{4}{a_n} < 4, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求极限.

3. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足


$$x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限.

4. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限.

 **笔记** 此类问题其实就是把 x_{n+1}, x_n 部分全部换成 x , 数字部分往往是 x 部分的一个最值, 从把这个数字用不等式放缩为数列来得到估计.

证明

1. 由均值不等式可知

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2 \leq x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n.$$

并且 $x_n < 2 - \frac{1}{x_{n+1}} < 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \triangleq x$ 存在. 于是

$$2 \leq x + \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) \leq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

2.

3.

4.

□

例题 0.12 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $|f(x)| \leq 1$, $f'(x) > 0$, 证明: 对任意 $b > a > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

证明 证法一:

$$\begin{aligned} \int_a^b f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx &= \int_a^b \frac{1}{n + \frac{1}{x^2}} \left(n + \frac{1}{x^2} \right) f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx = \int_a^b \frac{1}{n + \frac{1}{x^2}} df \left(nx - \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{f \left(nb - \frac{1}{b} \right)}{n + \frac{1}{b^2}} - \frac{f \left(na - \frac{1}{a} \right)}{n + \frac{1}{a^2}} + \int_a^b f \left(nx - \frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3 \left(n + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{a^2}} + \frac{2}{a^3 \left(n + \frac{1}{b^2} \right)^2} \int_a^b f \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{n + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{a^2}} + \frac{2(b-a)}{a^3 \left(n + \frac{1}{b^2} \right)^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

证法二: 令 $y = nx - \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4n}}{2n} > a > 0$. 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f' \left(nx - \frac{1}{x} \right) dx &= \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} f'(y) \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{2n} dy = \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{2n} df(y) \\ &= \frac{1 + \frac{nb - \frac{1}{b}}{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n}}}{2n} f \left(nb - \frac{1}{b} \right) - \frac{1 + \frac{na - \frac{1}{a}}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{2n} f \left(na - \frac{1}{a} \right) - \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} f(y) \frac{\sqrt{y^2 + 4n} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4n}}}{4n^2(y^2 + 4n)} dy \\ &\leq \frac{1 + \frac{nb - \frac{1}{b}}{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n}}}{2n} + \frac{1 + \frac{na - \frac{1}{a}}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{2n} + \int_{na - \frac{1}{a}}^{nb - \frac{1}{b}} \frac{\sqrt{(nb - \frac{1}{b})^2 + 4n} + \frac{(nb - \frac{1}{b})^2}{\sqrt{(na - \frac{1}{a})^2 + 4n}}}{4n^2 \left((na - \frac{1}{a})^2 + 4n \right)} dy \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

例题 0.13 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx.$$

证明 证法一: 对 $\forall \delta > 0$, 我们有

$$\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx < \frac{1}{\delta} \int_\delta^\infty \frac{1}{e^x} dx < +\infty.$$

于是由 Riemman 引理可知

$$\int_\delta^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx \int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx &\sim \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} dx, \delta \rightarrow 0^+, \\ \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} dx &= \int_0^{n\delta} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{命题??(2)}}{=} \frac{\pi}{2}, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \int_0^\delta \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx + \int_\delta^\infty \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

证法二: 记 $p(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$, $p(0) = -1$, 则 $p(x)$ 可导, 并且

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} \sin nx dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx \stackrel{\text{命题??(2)}}{=} \int_0^{\infty} p(x) \sin nx dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} p(x) d \frac{\cos nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \left(1 - \int_0^{\infty} p'(x) \cos nx dx \right).\end{aligned}$$

求导有 $p'(x) = \frac{1 - xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$, $p'(0) = \frac{1}{2}$, 所以 $\left| \int_0^{\infty} p'(x) \cos nx dx \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{1 - xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} dx < \infty$. 由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2}$. \square

例题 0.14 设 $f(x), g(x) \in C[0, 1]$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$ 为有限数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

证明 证法一: 注意到

$$n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = \int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) g(x) x^{\frac{1}{n}-1} dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{x} \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx.$$

令 $h(x) \triangleq \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}, & x = 0 \end{cases}$, 则 $h \in C[0, 1]$. 从而

$$n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 对 $\forall x \in [\delta, 1]$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ 及 $f \in C[0, 1]$ 可知, 存在 $N > 0$, 使得

$$\left| x^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

设 $|h(x)|, |f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}& \left| \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx - f(1) \int_0^1 h(x) dx \right| = \left| \int_0^1 h(x) \left[x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right] dx \right| \\ & \leq \int_0^{\delta} |h(x)| \left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| dx + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| dx \\ & \leq 2M^2\delta + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left[\left| x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - x^{\frac{1}{n}} f(1) \right| + \left| x^{\frac{1}{n}} f(1) - f(1) \right| \right] dx \\ & = 2M^2\delta + \int_{\delta}^1 |h(x)| \left[x^{\frac{1}{n}} \left| f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - f(1) \right| + f(1) \left| x^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \right] dx \\ & < 2M^2\varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 M [1 + f(1)] \varepsilon dx = (2M^2 + M [1 + f(1)] (1 - \varepsilon)) \varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h(x) \cdot x^{\frac{1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) dx = f(1) \int_0^1 h(x) dx.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

证法二: 因为可以用在两个端点, 插值于 f 的多项式 (f 的 Bernstein 多项式也可以) 在 $[0, 1]$ 上一致逼近 f , 所以只需对连续可导的函数 f 证明.

对 $x \in (0, 1]$ 定义 $G(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{t} dt$, 则 G 可导, 且 $G'(x) = \frac{g(x)}{x}$. 因而 $\left(\frac{1}{n}G(x^n)\right)' = \frac{g(x^n)}{x}$. 用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} n \int_0^1 f(x)g(x^n) dx &= n \int_0^1 x f(x) \cdot \frac{g(x^n)}{x} dx \\ &= n \left[x f(x) \cdot \frac{1}{n} G(x^n) \Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) \frac{1}{n} G(x^n) dx \right] \\ &= f(1)G(1) - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx \\ &= f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx - \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$ 收敛, 所以存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x) + x f'(x)| \leq M, \quad G'(x) = \frac{|g(x)|}{x} \leq M \quad (x \in [0, 1]).$$

因此 $|G(x)| \leq Mx$.

故


$$\left| \int_0^1 (f(x) + x f'(x)) G(x^n) dx \right| \leq M^2 \int_0^1 x^n dx = \frac{M^2}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(x)g(x^n) dx = f(1) \int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx.$$

□

例题 0.15 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 且 $f(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} \cos \frac{3}{t} \cos \frac{5}{t} \cos \frac{7}{t} dt$, 求证: f 是可导的, 并求 $f'(0)$.

 **笔记** 此类问题一般都是利用 Riemman 引理解决.

证明 由 Riemman 引理可知

$$\int_1^\infty \frac{\cos nx}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$


于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \cos \frac{1}{t} \cos \frac{3}{t} \cos \frac{5}{t} \cos \frac{7}{t} dt \\ &\stackrel{t=\frac{1}{u}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\cos u \cos 3u \cos 5u \cos 7u}{u^2} du = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_\lambda^\infty \frac{\cos u \cos 3u \cos 5u \cos 7u}{u^2} du \\ &\stackrel{u=\lambda x}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\cos(\lambda x) \cos(3\lambda x) \cos(5\lambda x) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2} (\cos(2\lambda x) + \cos(4\lambda x)) \cos(5\lambda x) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{4} (\cos(3\lambda x) + \cos(7\lambda x) + \cos(9\lambda x) + \cos(\lambda x)) \cos(7\lambda x)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\frac{1}{8} [\cos(16\lambda x) + \cos(14\lambda x) + \cos(10\lambda x) + \cos(6\lambda x) + \cos(4\lambda x) + \cos(2\lambda x) + 1]}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

□

例题 0.16 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0.$$

 **笔记** 如果需要估计得更精确, 就需要利用 E-M 公式对 $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2}$ 进行更精确的估计和计算.

证明 注意到

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{k\pi} \frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{(x+(n+k-1)\pi)^2} dx = \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+(n+k-1)\pi)^2} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx. \end{aligned}$$

对 $\forall x \in [0, \pi]$, 我们有

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{[(k+1)\pi]^2} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

又因为

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

所以一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k\pi)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(x+k\pi)^2} dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi} \sin x \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{[(k+1)\pi]^2} dx \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

故由夹逼准则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^2} dx - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0.$$

□