0.1 利用留数定理计算定积分

0.1.1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分

定理 0.1

设 f 在上半平面 $\{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ 中除去 $a_1, \cdots, a_n$ 外是全纯的, 在 $\{z : \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$ 中除去 $a_1, \cdots, a_n$ 外是连续的. 如果 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, a_k). \tag{1}$$

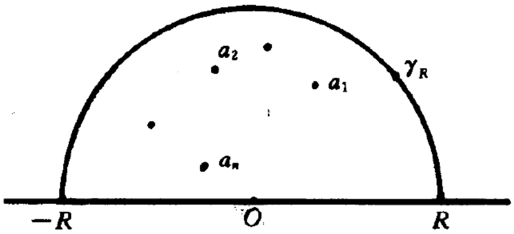

图 1

证明 图 1所示, 取充分大的 R, 使得 $a_1, \cdots, a_n$ 包含在半圆盘 $\{z : |z| < R, \mathrm{Im} z > 0\}$ 中, 记 $\gamma_R = \{z : z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, 由留数定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, a_k). \tag{2}$$

记 $M(R) = \max\{|f(z)| : z \in \gamma_R\}$, 由假定, $\lim\limits_{R\to\infty} RM(R) = 0$, 因而

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \pi RM(R) \to 0\,(R \to \infty).$$

在 (2) 式中令 $R \to \infty$, 即得公式 (1). □

推论 0.1

设 P 和 Q 是两个既约多项式,Q 没有实的零点, 且 $\deg Q - \deg P \geqslant 2$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_k\right),$$

这里,$a_k(k = 1, \cdots, n)$ 为 Q 在上半平面中的全部零点,$\deg P, \deg Q$ 分别为 P 和 Q 的次数.

证明 令 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 则 f 满足定理 0.1的条件, 由定理 0.1即得本推论. □

例题 0.1 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\mathrm{d}x.$$

解 令 $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$, 它满足推论 0.1的条件. 容易看出, 分母 $Q(z) = z^4 + 10z^2 + 9$ 有 4 个零点 $\pm\mathrm{i}$ 和 $\pm 3\mathrm{i}$, 但在上半平面中的零点只有 $a_1 = \mathrm{i}$ 和 $a_2 = 3\mathrm{i}$ 两个. 容易算得

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{-1 - \mathrm{i}}{16}, \quad \mathrm{Res}(f, 3\mathrm{i}) = \frac{3 - 7\mathrm{i}}{48},$$

故得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \mathrm{d}x = \frac{5}{12}\pi.$$

□

例题 0.2 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

解 令 $f(z) = \dfrac{1}{(1 + z^2)^{n+1}}$, 它显然满足推论 0.1的条件, 且在上半平面中只有一个 $n + 1$ 阶极点 $z = \mathrm{i}$. 应命题**??**, 通过直接计算得

$$\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

于是得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}.$$

□