

## 0.1 群集合上的作用

### 定义 0.1 (群作用)

设  $G$  是一个群,  $X$  是一个非空集合. 若  $G \times X$  到  $X$  的映射  $f$  满足

- (1)  $f(e, x) = x, \forall x \in X, e$  为  $G$  的幺元;
- (2)  $f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)), \forall g_1, g_2 \in G, x \in X,$

则称  $f$  决定了群  $G$  在  $X$  上的一个作用.

群  $G$  可以多种方式作用在一个集合  $X$  上. 在不需要特别指出映射  $f$  (即固定好一种作用方式) 时, 常记

$$f(g, x) = g(x), \quad \forall g \in G, x \in X.$$

此时  $f$  满足的条件 (1), (2) 相应地变为

- (1)  $e(x) = x, \forall x \in X, e$  为  $G$  的幺元;
- (2)  $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall x \in X, g_1, g_2 \in G.$



### 定义 0.2

1. 设  $G$  是一个群, 取  $X = G,$

- (a). 若定义  $f$  为

$$f(g, x) = L_g(x) = gx, \quad \forall g, x \in G.$$

则  $f$  定义了  $G$  在  $G$  上的一个作用, 这种作用称为**左平移作用**.

- (b). 若定义  $f_1$  为

$$f_1(g, x) = R_{g^{-1}}(x) = xg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则  $f_1$  也定义了  $G$  在  $G$  上的一个作用, 这种作用称为**右平移作用**.

- (c). 若定义  $f_2$  为

$$f_2(g, x) = \text{ad}_g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则  $f_2$  也定义了  $G$  在  $G$  上的一个作用, 称为**伴随作用**.

2. 设  $H$  为群  $G$  的子群, 取  $X = G/H$  ( $H$  在  $G$  中全体左陪集的集合). 定义  $f$  为

$$f(g, xH) = gxH, \quad \forall g \in G, xH \in G/H,$$

则  $f$  定义了  $G$  在  $G/H$  上的作用 (**左平移作用**). 特别地, 当  $H = \{e\}$  时,  $f$  恰是  $G$  在  $G$  上的左平移作用.



证明



### 定义 0.3

设群  $G$  作用在集合  $X$  上. 若  $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ , 使  $y = g(x)$ , 则称  $G$  在  $X$  上的作用是**可递的**,  $X$  称为 (对于  $G$  的) **齐性空间**.



### 定义 0.4

设群  $G$  作用在集合  $X$  上. 若  $g(x) = x (\forall g \in G, \forall x \in X)$ , 则称  $G$  在  $X$  上的作用是**平凡的**.



**注** 显然, 对任意群  $G$ , 任意非空集合  $X$ , 总可定义  $G$  在  $X$  上的平凡作用. 由上述定义知  $G$  在  $G$  上的伴随作用为平凡作用当且仅当  $G$  为 Abel 群.

**定义 0.5**

设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $e$  为  $G$  的么元, 若当且仅当  $g = e$  时,  $g(x) = x (\forall x \in X)$  成立, 则称  $G$  在  $X$  上的作用是有效的.

**命题 0.1**

群  $G$  在  $G$  上的左平移作用与右平移作用既是可递的又是有效的, 而  $G$  在  $G/H$  上的左平移作用是可递的.

**注**  $G$  在  $G$  上的伴随作用的可递性与有效性都不能肯定.

$G$  在  $G/H$  上的左平移作用不一定是有效的.

**证明**

□

**定理 0.1**

设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $\forall g \in G$ , 定义  $X$  到  $X$  的映射  $\sigma$  满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X \quad (1)$$

定义的  $\sigma_g$  是  $X$  的可逆变换, 即  $\sigma_g \in S_X$ .

定义的  $G$  到  $S_X$  的映射  $\sigma$  满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \quad \forall g \in G.$$

则  $\sigma$  是一个同态映射, 并且  $G$  在  $X$  上的作用有效当且仅当  $\sigma$  是单同态.

反之, 若  $\sigma$  是群  $G$  到集合  $X$  的置换群  $S_X$  的同态, 则由

$$g(x) = \sigma(g)(x), \quad \forall g \in G, x \in X \quad (2)$$

定义了  $G$  在  $X$  的作用, 此时  $\sigma_g = \sigma(g)$ .

♥

**证明** 任取  $g \in G$ , 由式(1)有

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

同样有

$$\sigma_g\sigma_{g^{-1}}(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

故

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g = \sigma_g\sigma_{g^{-1}} = \text{id}_X,$$

因而  $\sigma_g \in S_X$  且  $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$ .

又取  $g_1, g_2 \in G$ , 对  $\forall x \in X$  有

$$\sigma(g_1g_2)(x) = \sigma_{g_1g_2}(x) = g_1g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) = \sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x),$$

即

$$\sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

因而  $\sigma$  是  $G$  到  $S_X$  的同态. 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \sigma_g = \text{id}_X,$$

即

$$g(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

故  $G$  在  $X$  上作用有效当且仅当  $\ker \sigma = \{e\}$ , 即  $\sigma$  是单射.

反之, 因  $\sigma$  是  $G$  到  $S_X$  的同态, 由式(2)有

$$e(x) = \sigma(e)(x) = \text{id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

$$g_1(g_2(x)) = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)(x)) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x) = \sigma(g_1g_2)(x) = g_1g_2(x), \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G,$$

即  $\sigma$  定义了  $G$  在  $X$  上的作用. 显然  $\sigma(g) = \sigma_g$ .

□

### 定义 0.6

设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $x \in X$ . 称  $X$  中的子集

$$O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}$$

为  $x$  的轨道.

$G$  中子集

$$F_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

称为  $x$  的迷向子群.

♣

证明

□

**例题 0.1** 设  $X = \mathbb{R}^n$  为  $n$  维 Euclid 空间,  $G = SO(n)$  为  $X$  的特殊正交群,  $G$  以通常方式作用在  $X$  上. 又设  $X = (1, 0, \dots, 0)'$ , 则易得

$$O_x = \{y \mid y \in X, |y| = 1\} = S^{n-1}$$

是  $X$  中  $n-1$  维单位球面, 其中,  $|y|$  为向量  $y$  的长度,

$$F_x = \{\text{diag}(1, A) \mid A \in SO(n-1)\},$$

故  $F_x$  与  $n-1$  维特殊正交群  $SO(n-1)$  同构.

证明

□

### 命题 0.2

设群  $G$  在  $X$  上的作用可递,  $x \in X$ , 则  $X = O_x$ .

♣

**证明** 由  $G$  在  $X$  上的作用可递知, 对  $\forall y \in X$ , 存在  $g \in G$ , 使  $y = g(x) \in O_x$ . 又  $O_x \subseteq X$ , 故  $X = O_x$ .

□

### 定理 0.2

设群  $G$  作用在集合  $X$  上. 定义  $X$  上的可逆变换  $\sigma$  满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

定义的  $G$  到  $S_X$  的同态  $\sigma$  满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \quad \forall g \in G.$$

则有

- (1) 在  $X$  中定义关系  $R: xRy$  当且仅当  $\exists g \in G$ , 使  $y = g(x)$ , 则  $R$  为等价关系且  $x$  所在的等价类为  $x$  的轨道  $O_x$ , 进而  $X$  等价类 (所有轨道) 集合是  $X$  的一个分划, 即可将  $X$  分解为所有不同的轨道之并, 且不同的轨道必互不相交;
- (2)  $G$  在  $O_x$  上的作用是可递的,  $\ker \sigma \triangleleft G$ ,  $G$  在  $O_x$  上作用有效当且仅当  $F_x$  中所包含的  $G$  的正规子群仅为  $\{e\}$ ;

(3) 若  $y = g(x)(x, y \in X, g \in G)$ , 则

$$F_{g(x)} = F_y = gF_xg^{-1} = \text{adg}(F_x).$$

♡

**注** 这个定理说明, 若群  $G$  作用在集合  $X$  上, 则可将  $X$  分解为轨道之并. 不同的轨道互不相交.  $G$  在每个轨道上的作用是可递的, 是否有效则由迷向子群所含  $G$  的正规子群来决定.

**证明**

(1) 对  $\forall x, y, z \in X$ , 由  $e(x) = x$  知  $xRx (\forall x \in X)$ , 由  $g(x) = y$  得  $g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$ , 即  $xRy \Rightarrow yRx$ , 再由  $xRy, yRz$  知  $\exists g_1, g_2 \in G$ , 使得  $y = g_1(x), z = g_2(y)$ , 故  $z = g_2g_1(x)$ , 即  $xRz$ . 这就说明  $R$  是等价关系, 由  $R$  的定义知  $x$  的等价类为  $O_x$ .

(2) 由结论 (1) 知  $\forall z, y \in O_x$ , 即  $xRy, xRz$ , 从而  $zRy$ . 因而  $\exists g \in G$ , 使  $g(y) = z$ . 故  $G$  在  $O_x$  上的作用可递得证. 设  $\sigma$  为  $G$  到  $S_{O_x}$  的映射, 满足  $\sigma(g)y = g(y)(\forall y \in O_x)$ . 于是由定理 0.1 知  $\sigma$  是同态且  $G$  在  $O_x$  上作用有效当且仅当  $\ker \sigma = \{e\}$ . 由群的同态基本定理??知道  $\ker \sigma \triangleleft G$ . 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \text{id}_X \iff g(x) = x(\forall x \in X) \iff g \in F_x. \quad (3)$$

故  $\ker \sigma \subseteq F_x$ , 因而若  $F_x$  中所含  $G$  的正规子群仅为  $\{e\}$ , 则必有  $\ker \sigma = \{e\}$ . 从而  $G$  在  $O_x$  上作用有效.

设  $N \triangleleft G, N \subseteq F_x$ . 任取  $h \in N$ , 对  $\forall y \in O_x$ , 都存在  $g \in G$ , 使得  $y = g(x)$ . 由  $N \triangleleft G$  知  $g^{-1}hg \in N \subseteq F_x$ , 因而

$$h(y) = h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(g^{-1}hg(x)) = g(x) = y, \quad \forall y \in O_x.$$

由(3)式知  $h \in \ker \sigma$ , 即  $N \subseteq \ker \sigma$ . 所以若  $G$  在  $O_x$  上作用有效, 则  $\ker \sigma = \{e\}$ , 由此知  $N = \{e\}$ , 即  $\{e\}$  为  $F_x$  所包含的唯一的  $G$  的正规子群.

(3) 设  $g(x) = y$  且  $g_1 \in F_y$ , 即有  $y = g_1(y)$ , 则  $g_1g(x) = g(x)$ , 因而  $g_2 = g^{-1}g_1g \in F_x$ , 故  $g_1 = gg_2g^{-1} \in \text{adg}(F_x)$ . 反之, 若  $g_2 \in F_x$ , 则有

$$gg_2g^{-1}(y) = gg_2g^{-1}(g(x)) = g(x) = y,$$

故  $gg_2g^{-1} \in F_y$ . 这样就证明了  $F_y = \text{adg}(F_x)$ .

□

### 定义 0.7

设群  $G$  作用在集合  $X$  与  $X'$  上, 若有  $X$  到  $X'$  上的一一对应  $\phi$ , 使

$$g(\phi(x)) = \phi(g(x)), \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称  $G$  在  $X, X'$  上的作用等价.

♣

**注** 如果将  $g$  引起的  $X, X'$  上的置换仍以  $g$  来表示, 那么  $G$  在  $X, X'$  上的作用等价也就是对任何  $g \in G$ , 图 1 是交换图.

如果在  $G$  作用的集合之间规定关系  $R: XRX'$ , 若  $G$  在  $X, X'$  上作用等价. 这显然是一个等价关系, 因而从抽象的观点来看, 等价作用可以看成是一样的.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{\phi} & X' \end{array}$$

图 1

### 定理 0.3

设群  $G$  在  $X$  上的作用可递,  $x \in X$ , 则  $G$  在  $X$  上的作用与  $G$  在  $G/F_x$  上的作用 (左平移作用) 等价.

♡

**注** 这个定理表明  $G$  在每个轨道上的作用相当于  $G$  在某个左陪集空间上的作用.

**证明** 因  $G$  在  $X$  上的作用可递, 于是由命题 0.2 有

$$X = O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

作  $G/F_x$  到  $X$  的映射  $\phi$  如下:

$$\phi(gF_x) = g(x), \quad \forall g \in G.$$

显然  $\phi$  是满射. 由于  $g_1F_x = g_2F_x$  当且仅当  $g_1^{-1}g_2 \in F_x$ , 当且仅当  $g_1^{-1}g_2(x) = x$ , 当且仅当  $g_1(x) = g_2(x)$ , 因而  $\phi$  是单射. 故  $\phi$  是  $G/F_x$  到  $X$  上的一一对应. 又对  $\forall h \in G$  有

$$\phi(h(gF_x)) = \phi(hgF_x) = hg(x) = h(\phi(gF_x)),$$

故  $G$  在  $G/F_x$  与  $X$  上的作用等价. □

### 推论 0.1

设有限群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $O_x$  为  $x \in X$  的轨道, 则  $O_x$  中元素个数  $|O_x| = [G : F_x]$ , 因而  $|O_x| \mid |G|$ . ♥

**证明** 由定理 0.2(1) 知  $G$  在  $O_x$  上作用可递, 故由定理 0.3 知,  $G$  在  $X$  上的作用与  $G$  在  $G/F_x$  上的作用等价, 即存在  $X$  到  $G/F_x$  的双射. 因此  $|O_x| = [G : F_x]$ . 再由 Lagrange 定理知

$$|G| = [G : F_x] |F_x| = |O_x| |F_x|,$$

故  $|O_x| \mid |G|$ . □

### 命题 0.3

设  $G$  是一个群, 在伴随作用下, 对  $\forall g \in G$ , 定义  $G$  上的变换  $\text{ad}g$  满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义  $G$  到  $S_G$  的映射  $\text{ad}$  满足

$$\text{ad} : g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

则  $\text{ad}$  是  $G$  到  $S_G$  的同态. ♣

**证明** 由定义 0.2 与定理 0.1 知映射  $\text{ad}g$  是  $G$  的可逆变换, 即  $\text{ad}g \in S_G$ , 并且映射  $\text{ad}$  是  $G$  到  $S_G$  的同态. □

### 定义 0.8

设  $G$  是一个群,  $g \in G$ ,  $g$  在伴随作用下的轨道称为以  $g$  为代表的**共轭类**, 记为  $C_g$ . 若  $h \in C_g$ , 则称  $h$  与  $g$  **共轭**.

$g$  在伴随作用下的迷向子群, 称为  $g$  在  $G$  中的**中心化子**, 记作  $C_G(g)$ . 在不混淆时, 简称为  $g$  的**中心化子**, 记作  $C(g)$ .

在伴随作用下, 对  $\forall g \in G$ , 定义  $G$  上的**可逆变换**  $\text{ad}g$  满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义  $G$  到  $S_G$  的**同态**  $\text{ad}$  满足

$$\text{ad} : g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

称  $\ker \text{ad}$  为  $G$  的**中心**, 记作  $C(G)$ . ♣

**定理 0.4**

设  $G$  是一个群, 在伴随作用下,  $g \in G$ , 则有

- (1)  $C_g = \{kgk^{-1} \mid k \in G\}$ ;
- (2)  $g, h \in G$  共轭  $\iff \exists k \in G$ , 使  $h = kgk^{-1}$ ;
- (3)  $C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}$ ;
- (4)  $C(G) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}$ .

**证明**

(1) 由定义知

$$C_g = \{\text{ad}_k(g) \in G \mid k \in G\} = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\}.$$

(2) 由结论 (1) 知

$$C_g = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\},$$

则

$$g, h \in G \text{ 共轭 } \iff h \in C_g \iff \exists k \in G, \text{ 使 } h = kgk^{-1}.$$

(3) 由定义知

$$C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid \text{ad}_k(g) = g\} = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}.$$

(4) 由定义知

$$\begin{aligned} C(G) &= \ker \text{ad} = \{k \in G \mid \text{ad}(k) = \text{id}_G\} = \{k \in G \mid \text{ad}_k = \text{id}_G\} \\ &= \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}. \end{aligned}$$

□

**定理 0.5**

设  $G$  是一个群, 则有

- (1)  $C(G)$  是  $G$  的正规子群且  $\text{ad}G$  与  $G/C(G)$  同构;
- (2)  $G$  中共轭关系为等价关系, 因而  $G$  的共轭类的集合是  $G$  的一个分划;
- (3) 若  $G$  是有限群,  $g \in G$ , 则  $g$  的共轭类  $C_g$  中所含元素个数  $|C_g| = [G : C(g)]$ , 故是  $|G|$  的因数;
- (4)  $h \in C(G) \iff |C_h| = 1 \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g)$ .

**证明**

(1) 由定理 0.2(2) 知  $C(G) \triangleleft G$ . 再由群的同态基本定理??知  $\text{ad}G$  与  $G/C(G)$  同构.

(2) 由定理 0.2(1) 即得.

(3) 由推论 0.1 即得.

(4) 由定理 0.4 可得

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff ghg^{-1} = h, \forall g \in G \iff C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} = \{h\} \iff |C_h| = 1; \\ h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk\}, \forall g \in G \iff h \in C(g), \forall g \in G \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g). \end{aligned}$$

□

**定理 0.6**

设  $H$  是群  $G$  的子群, 则

- (1)  $\forall g \in G, H_1 = gHg^{-1}$  也是  $G$  的子群, 称为  $H$  的**共轭子群**;
- (2) 群  $G$  的子集  $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$  也是  $G$  的子群, 而且  $H \triangleleft N_G(H)$ ,  $N_G(H)$  称为  $H$  在  $G$  中的**正规化子**, 也简称为  $H$  的**正规化子**.

**证明**

- (1) 以  $e$  表示  $G$  的幺元. 因为  $e = geg^{-1} \in H_1$ , 故  $H_1 \neq \emptyset$ . 设  $h_1, h_2 \in H$ , 于是

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1}, (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in H_1.$$

由此知  $H_1$  是  $G$  的子群.

- (2)  $G$  在  $G$  的伴随作用下,  $H$  的迷向子群恰为  $N_G(H)$ , 故  $N_G(H)$  是  $G$  的子群. 因  $H$  是  $G$  的子群且  $H \subseteq N_G(H)$ , 故  $H$  是  $N_G(H)$  的子群. 又  $\forall g \in N_G(H), gHg^{-1} = H$ , 因此  $H \triangleleft N_G(H)$ .

**定理 0.7**

设  $H$  是群  $G$  的子群, 则

- (1)  $G$  中与  $H$  共轭的子群的个数为  $[G : N_G(H)]$ ;
- (2)  $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$ .

**证明**

- (1) 设  $H$  的共轭子群到  $G/N_G(H)$  的映射  $f$ , 满足

$$f(gHg^{-1}) = gN_G(H), \quad \forall g \in G.$$

显然  $f$  是满射. 因为  $gHg^{-1} = g_1Hg_1^{-1}$  当且仅当  $H = g^{-1}g_1H(g^{-1}g_1)^{-1}$  当且仅当  $g^{-1}g_1 \in N_G(H)$  当且仅当  $gN_G(H) = g_1N_G(H)$ , 所以  $f$  是单射. 因此  $f$  是  $H$  的共轭子群到  $G/N_G(H)$  的双射. 从而  $G$  中与  $H$  共轭的子群的个数与  $|G/N_G(H)|$  相等, 即  $G$  中与  $H$  共轭的子群的个数为  $[G : N_G(H)]$ .

- (2) 因为  $H \triangleleft G$  当且仅当  $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$ , 所以由  $N_G(H)$  的定义知  $N_G(H) = G$ .

