



抽象代数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 群论 I——Group Theorey I	1
1.1 么半群	1
1.2 群	4
1.3 有限群	12
1.4 正规子群	21
1.5 群作用	26

第一章 群论 I—Group Theorey I

1.1 么半群

定义 1.1 (代数运算/二元运算)

设 A 是一个非空集合, 若对 A 中任意两个元素 a, b , 通过某个法则 “ \cdot ”, 有 A 中唯一确定的元素 c 与之对应, 则称法则 “ \cdot ” 为集合 A 上的一个**代数运算 (algebraic operation)** 或**二元运算**. 元素 c 是 a, b 通过运算 “ \cdot ” 作用的结果, 将此结果记为 $a \cdot b = c$.

定义 1.2 (半群和交换半群)

非空集合 S 和 S 上满足结合律的二元运算 \cdot 所形成的代数结构叫做**半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

这个半群记成 (S, \cdot) 或者简记成 S , 运算 $x \cdot y$ 也常常简写成 xy . 此外, 如果半群 (S, \cdot) 中的运算 “ \cdot ” 又满足交换律, 则 (S, \cdot) 叫做**交换半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\forall x, y \in S, x \cdot y = y \cdot x.$$

注 像通常那样令 $x^2 = x \cdot x, x^{n+1} = x^n \cdot x (= x \cdot x^n, n \geq 1)$.

定义 1.3 (么元素)

设 S 是半群, 元素 $e \in S$ 叫做半群 S 的**么元素 (也叫单位元 (unit element) 或恒等元 (identity))**, 是指对每个 $x \in S, xe = ex = x$.

命题 1.1 (么元素存在必唯一)

如果半群 (S, \cdot) 中有么元素, 则么元素一定唯一. 我们将半群 (S, \cdot) 中这个唯一的么元素 (如果存在的话) 通常记作 **1_S 或者 1** .

证明 因若 e' 也是么元素, 则 $e' = e'e = e$. □

定义 1.4 (含么半群和交换含么半群)

如果半群 (S, \cdot) 含有么元素, 则 (S, \cdot) 称为**(含) 么半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in S, \forall x \in S, e \cdot x = x \cdot e = x.$$

此外, 如果么半群 (S, \cdot) 中的运算 “ \cdot ” 又满足交换律, 则 (S, \cdot) 叫做**交换么半群**. 此即

$$\forall x, y, z \in S, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in S, \forall x \in S, e \cdot x = x \cdot e = x,$$

$$\forall x, y \in S, x \cdot y = y \cdot x.$$

例题 1.1 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是一个含么 (乘法) 半群.

证明 $\forall A, B, C \in (M_n(\mathbb{R}), \cdot)$, 则不妨设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}, C = (c_{ij})_{n \times n}$. 再设 $A \cdot B = (d_{ij})_{n \times n}, B \cdot C =$

$(e_{ij})_{n \times n}, (A \cdot B) \cdot C = (f_{ij})_{n \times n}, A \cdot (B \cdot C) = (g_{ij})_{n \times n}$. 于是

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, e_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kl}.$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$.

从而

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{l=1}^n d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}, \\ g_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}. \end{aligned}$$

由二重求和号的可交换性, 可知 $f_{ij} = g_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 故 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

记 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, 于是 $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, 则不妨设 $X = (x_{ij})_{n \times n}, I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$. 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$. 再设 $I_n \cdot X = (x'_{ij})_{n \times n}, X \cdot I_n = (x''_{ij})_{n \times n}$, 于是由矩阵乘法的定义可知

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= \sum_{k=1}^n x_{ik} \delta_{kj} = x_{ij} \delta_{jj} = x_{ij}, \\ x''_{ij} &= \sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_{kj} = \delta_{ii} x_{ij} = x_{ij}. \end{aligned}$$

故 $x'_{ij} = x''_{ij} = x_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 从而 $X = I_n \cdot X = X \cdot I_n$. 因此 I_n 是 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 的单位元. 综上所述, $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是一个含么 (乘法) 半群. \square

定义 1.5 (么半群中多个元素的乘积)

设 (S, \cdot) 是一个么半群, 令 $x_1, \dots, x_n \in S$, 我们递归地定义

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}) \cdot x_n$$

令 $x \in S, n \in \mathbb{N}$. 若 $n > 0$, 我们定义 $x^n = x \cdots x$, 而 $x^0 = e$.


定义 1.6 (广义结合律)

设 S 是一个非空集合, “ \cdot ” 是一个二元运算, 若对于任意有限多个元素 $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$, 乘积 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ 的任何一种 “有意义的加括号方式” (即给定的乘积的顺序) 都得出相同的值.

命题 1.2

设 S 是一个非空集合, “ \cdot ” 是一个满足结合律的二元运算, 令 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$, 则

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_m = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_m) \quad (1.6)$$

 **笔记** 根据这个命题, 我们就可以得到一个半群 (S, \cdot) 一定满足广义结合律, 只要 $x_1, \dots, x_n \in S$ 的 \cdot 运算顺序是固定的, 无论怎么添加括号, 我们都可以利用这个命题的结论, 将括号重排至从前往后依次乘的顺序而保持结果不变. 所以, 如果一个集合上的二元运算有结合律, 我们就可以在连续元素的乘积中不加括号, 也可以按照我们的需要随意加括号.

证明 对 m 做数学归纳. 当 $m = 1$ 时, 由定义 1.5 直接得到. 接下来, 假设

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_k = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_k)$$

则由“ \cdot ”满足结合律, 我们有

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_{k+1} \\ &= ((x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_k)) \cdot y_{k+1} \\ &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot ((y_1 \cdot y_2 \cdots y_k) \cdot y_{k+1}) \\ &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_{k+1}) \end{aligned}$$

□

推论 1.1

令 $x \in S, m, n \in \mathbb{N}$, 则

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$$

♥

证明 令命题 1.2 中的所有 x_i 和 y_j 都等于 x 即可得到.

□

定义 1.7 (子么半群)

令 (S, \cdot) 是一个么半群, 若 $T \subset S, e \in T$, 且 T 在乘法下封闭, 即

$$\begin{aligned} & e \in T, \\ & \forall x, y \in T, x \cdot y \in T. \end{aligned}$$

则我们称 (T, \cdot) 是 (S, \cdot) 的一个**子么半群**

♣

命题 1.3 (子么半群也是么半群)

若 (T, \cdot) 是 (S, \cdot) 的一个子么半群, 则 (T, \cdot) 是个么半群.

♠

证明 就二元运算的定义而言, 子群第一个条件 (封闭性) 就满足了, 这使得我们后面的讨论是有意义的. 首先, 结合律对于 S 中元素都满足, 当然对 T 中元素也满足 (T 是子集). 接下来, 类似地, e 对于所有 S 中元素都是单位元, 固然对于 T 中元素亦是单位元.

□

定义 1.8 (么半群同态)

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个么半群, 且 $f: S \rightarrow T$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**么半群同态**, 当 f 保持了乘法运算, 且把单位元映到了单位元. 此即

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in S, f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \\ & f(e) = e'. \end{aligned}$$

其中, e 和 e' 分别是 (S, \cdot) 和 $(T, *)$ 的单位元.

♣

定义 1.9 (由 A 生成的子么半群)

假设 (S, \cdot) 是一个么半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集. 我们称 S 中所有包含了 A 的子么半群的交集为**由 A 生成的子么半群**, 记作 $\langle A \rangle$. 此即

$$\langle A \rangle = \bigcap \{T \subset S : T \supset A, T \text{ 是子么半群}\}.$$

♣

命题 1.4 ($\langle A \rangle$ 包含了 A 的最小的子么半群)

假设 (S, \cdot) 是一个么半群, 而 $A \subset S$ 是一个子集. 则 $\langle A \rangle$ 也是一个子么半群. 因此, 这是包含了 A 的最小的子么半群.

♠

注 这里说的“最小”, 指的是在包含关系下最小的, 也就是, 它包含于所有包含 A 的子么半群.

证明 要证明 $\langle A \rangle$ 是子幺半群, 只需要证明它包含了 e , 并在乘法运算下封闭。首先, 因为集族中每一个 T , 作为子幺半群, 都会包含 e ; 因此 $\langle A \rangle$ 作为这些集合的交集也会包含 e , 这就证明了第一点。而对于第二点, 我们首先假设 $x, y \in \langle A \rangle$, 而想要证明 $x \cdot y \in \langle A \rangle$ 。注意到, 因为 $x, y \in \langle A \rangle$, 任取一个包含了 A 的子幺半群 T (集族中的集合), 我们都有 $x, y \in T$, 于是有 $x \cdot y \in T$ 。而 $x \cdot y \in T$ 对于所有这样的 T 都成立, 我们就有 $x \cdot y$ 属于它们的交集, 也就是 $\langle A \rangle$ 。这样, 我们就证明了第二点。综上, 由一个幺半群 S 的任意子集 A 生成的子幺半群都确实是一个子幺半群。 \square

定义 1.10 (幺半群同构)

假设 $(S, \cdot), (T, *)$ 是两个幺半群, 且 $f: S \rightarrow T$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**幺半群同构**, 当 f 是一个双射, 且是一个同态。

$$\begin{aligned} f \text{ 是双射,} \\ \forall x, y \in S, f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \\ f(e) = e'. \end{aligned}$$

其中, e 和 e' 分别是 (S, \cdot) 和 $(T, *)$ 的单位元。

注 容易验证同构是一个等价关系。

命题 1.5 (幺半群同构的逆映射一定是幺半群同态)

若 $f: (S, \cdot) \rightarrow (T, *)$ 是一个幺半群同构, 则 $f^{-1}: T \rightarrow S$ 是一个幺半群同态。因此, f^{-1} 也是个幺半群同构。

证明 令 $x', y' \in T$, 我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。为了方便起见, 根据 f 是一个双射, 从而存在 $x, y \in S$, 使得 $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 并且 $f(x) = x', f(y) = y'$ 。我们只需证明 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y$ 。而由于 f 是幺半群同态, 所以 $f(x \cdot y) = f(x) * f(y) = x' * y'$ 。反过来说, $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。这就证明了这个命题。 \square

1.2 群

定义 1.11

令 (S, \cdot) 是一个幺半群, $x \in S$ 。我们称 x 是**可逆的**, 当且仅当

$$\exists y \in S, x \cdot y = y \cdot x = e$$

其中 y 被称为 x 的**逆元**, 记作 x^{-1} 。

命题 1.6 (逆元存在必唯一)

令 (S, \cdot) 是一个幺半群。假设 $x \in S$ 是可逆的, 则其逆元唯一。也就是说, 如果 $y, y' \in S$ 都是它的逆元, 则 $y = y'$ 。

证明 假设 y, y' 都是 x 的逆元。则 $y \cdot x = e, x \cdot y' = e$ 。从而

$$y = y \cdot e = y \cdot x \cdot y' = e \cdot y' = y'.$$

\square

定义 1.12 (群)

令 (G, \cdot) 是一个么半群, 若 G 中所有元素都是可逆的, 则我们称 (G, \cdot) 是一个群. 换言之, 若 \cdot 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 (G, \cdot) 是个群, 或 G 对 \cdot 构成群, 当这个运算满足结合律, 存在单位元, 且每个元素具有逆元. 再进一步展开来说, 同样等价地, 若 \cdot 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 (G, \cdot) 是个群, 当

$$\forall x, y, z \in G, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \cdot e = e \cdot x = x,$$

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

命题 1.7

令 (G, \cdot) 是一个群, 令 $x \in G$, 则 $(x^{-1})^{-1} = x$.

证明 方便起见, 我们令 $y = x^{-1}$, 于是有 $x \cdot y = y \cdot x = e$. 我们要证明 $y^{-1} = x$, 而这就是 $y \cdot x = x \cdot y = e$, 显然成立. 这就证明了逆元的逆元是自身. \square

命题 1.8

令 (G, \cdot) 是一个群, 令 $x, y \in G$, 则 $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

证明 我们利用定义来证明. 一方面, 利用广义结合律, $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e$; 另一方面, 同理可以得到另一边的等式 $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = e$, 这就告诉我们 $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$. \square

定义 1.13

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$. 若 $n \in \mathbb{N}_1$, 我们定义 $x^{-n} = (x^{-1})^n$, 另外定义 $x^0 = e$.

命题 1.9

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$. 则满足

$$(1) \quad x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \quad x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) \quad x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

证明

(1) (i) 当 $n = 0$ 时, 结论显然成立.

(ii) 当 $n \in \mathbb{N}_1$ 时, 只需证明 $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$ 即可. 注意到

$$\begin{aligned} x^n \cdot (x^{-1})^n &= \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ 个}} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \text{ 个}} \right) = e, \\ (x^n)^{-1} \cdot x^n &= \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \text{ 个}} \right) \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ 个}} \right) = e. \end{aligned}$$

故根据逆元的定义可知结论成立.

(iii) 当 n 为负整数时, 令 $m = -n$, 则 $m \in \mathbb{N}_1$. 从而我们只需证 $x^m = (x^{-1})^{-m} = (x^{-m})^{-1}$ 即可. 根据定义 1.13 可得

$$\begin{aligned} x^{-m} \cdot x^m &= (x^{-1})^m \cdot x^m = \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m \text{ 个}} \right) \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{m \text{ 个}} \right) = e, \\ x^m \cdot x^{-m} &= x^m \cdot (x^{-1})^m = \left(\underbrace{x \cdots x}_{m \text{ 个}} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m \text{ 个}} \right) = e. \end{aligned}$$

故根据逆元的定义可知 $x^m = (x^{-m})^{-1}$. 又由定义 1.13 可知, $(x^{-1})^{-m} = ((x^{-1})^{-1})^m = x^m$. 故结论成立.

(2) 首先注意到,

(i) 如果 $m, n \in \mathbb{N}_1$, 则由推论 1.1 就立刻得到这个性质. 若 m 或 n 是 0, 利用单位元的性质也是显然的. 从而我们只需证明当 m, n 至少有一个小于 0 时, $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$. 故我们可以不失一般性, 假设 $m < 0$, 记 $m' = -m$, 则 $x^m = x^{-m'} = (x^{-1})^{m'}$.

(ii) 若 $n < 0$, 记 $n' = -n$, 则同理, $x^n = (x^{-1})^{n'}$, 故 $x^{m+n} = (x^{-1})^{m'+n'}$, 这里 $m', n' \in \mathbb{N}_1$, 于是就有

$$x^{m+n} = (x^{-1})^{m'+n'} = (x^{-1})^{m'} (x^{-1})^{n'} = x^m x^n,$$

因此得证了.

(iii) 若 $0 < n < m'$, 则 $x^{m+n} = x^{-(m'-n)} = (x^{-1})^{m'-n}$. 而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ \Leftrightarrow (x^{-1})^{m'-n} &= (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} &= \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \end{aligned}$$

对上式两边左乘 $x^{m'-n}$, 得到

$$\begin{aligned} x^{m+n} = x^m \cdot x^n &\Leftrightarrow \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} = \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow x^{m'-n} \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} \right) &= x^{m'-n} \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{m'-n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m'-n \uparrow} \right) &= \left(\underbrace{x \cdots x}_{m'-n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{m' \uparrow} \right) \cdot x^n \\ \Leftrightarrow e = \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \uparrow} \right) \cdot x^n &\Leftrightarrow e = (x^n)^{-1} \cdot x^n \end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(iv) 若 $n \geq m'$, 则 $x^{m+n} = x^{n-m'}$. 而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ \Leftrightarrow x^{n-m'} &= (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\ \Leftrightarrow \underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} &= (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \end{aligned}$$

对上式两边右乘 $(x^{-1})^{n-m'}$, 得到

$$\begin{aligned} x^{m+n} = x^m \cdot x^n &\Leftrightarrow \underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} \right) \cdot (x^{-1})^{n-m'} &= (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \cdot (x^{-1})^{n-m'} \\ \Leftrightarrow \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m' \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m' \uparrow} \right) &= (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n \uparrow} \right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m' \uparrow} \right) \\ \Leftrightarrow e = (x^{-1})^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{m' \uparrow} \right) &\Leftrightarrow e = (x^{-1})^{m'} \cdot x^{m'} \end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

- (3) 先证 $x^{mn} = (x^m)^n$. 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 固定 m , 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n = k$ 时, 结论成立, 即 $x^{mk} = (x^m)^k$. 则由 (2) 的结论可得

$$x^{m(k+1)} = (x^m)^{k+1} = (x^m)^k \cdot x^m = (x^m)^{k+1}.$$

故由数学归纳法可知 $x^{mn} = (x^m)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 再由 m 的任意性可知 $x^{mn} = (x^m)^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 同理可证 $x^{nm} = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 由于 $x^{nm} = x^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 因此 $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. □

定义 1.14 (Abel 群)

若 (G, \cdot) 是一个群, 我们称它是 **Abel 群**, 或 **交换群**, 当该运算满足交换律, 即

$$\forall x, y \in G, x \cdot y = y \cdot x$$



例题 1.2 常见的群

1. 我们称只有一个元素的群为**平凡群**, 记作 e . 其中的二元运算是 $e \cdot e = e$.
2. 常见的加法群有 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ 等. 这些加法群分别称为整数加群、有理数加群、实数加群、复数加群.
3. 常见的乘法群有 $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ 等, 其中 $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, 类似地定义其余两个集合. 这些乘法群分别称为有理数乘群、实数乘群、复数乘群.
4. 在向量空间中, n 维欧氏空间对加法构成群即 $(\mathbb{R}^n, +)$. 类似地 $(\mathbb{C}^n, +)$, $(\mathbb{Q}^n, +)$, $(\mathbb{Z}^n, +)$ 也是群. 对于这些群, 单位元都是零向量, 加法逆元则是对每个坐标取相反数, 如 (x_1, \dots, x_n) 的加法逆元是 $(-x_1, \dots, -x_n)$.
5. 所有的 $m \times n$ 矩阵也对加法构成群, 单位元都是零矩阵, 加法逆元则是对每一项取相反数. 对于 $n \times n$ 的实矩阵加法群, 我们记作 $(M(n, \mathbb{R}), +)$, 类似地我们将 $n \times n$ 的复矩阵加法群记作 $(M(n, \mathbb{C}), +)$.

证明 证明都是显然的. □

引理 1.1

令 (S, \cdot) 是一个么半群, 令 G 是其所有可逆元素构成的子集, 则 (G, \cdot) 是个群. ♥

注 我们称呼么半群中的可逆元素为“**单位**”, 因此 G 是由所有该运算下的单位构成的集合 (在这里甚至是群).

证明 首先结合律完全继承自 S , 不需要证明. 而单位元是可逆的, 因此 $e \in G$. 剩下要证明 G 中每个元素都有 (G 中的) 逆元, 而这几乎是显然的. 假设 $x \in G$, 则 x 是可逆元素, 我们取 $y \in S$, 使得 $x \cdot y = y \cdot x = e$ (这里要注意我们只能首先保证 y 在全集 S 中). 接下来我们要证明 $y \in G$, 即 y 可逆, 而这是显然的, 因为 x 正是它的逆. 所以 $y \in G$. 这样, 就证明了 (G, \cdot) 是个群. □

定义 1.15 (子群)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $H \subset G$. 我们称 H 是 G 的**子群**, 记作 $H < G$, 当其包含了单位元, 在乘法和逆运算下都封闭, 即

$$\begin{aligned} e &\in H, \\ \forall x, y \in H, x \cdot y &\in H, \\ \forall x \in H, x^{-1} &\in H. \end{aligned}$$



命题 1.10 (子群也是群)

令 (G, \cdot) 是一个群. 若 H 是 G 的子群, 则 (H, \cdot) 也是个群. ♥

证明 就二元运算的良好定义性而言, 子群第一个条件 (封闭性) 就满足了, 这使我们后面的讨论是有意义的. 首先, 结合律肯定满足, 因为它是子集. 其次, 根据子群的第二个条件, $e \in H$ 是显然的. 再次, 我们要证明

每个 H 中元素有 H 中的逆元, 而这是子群的第三个条件。□

推论 1.2 (子群的传递性)

若 (G, \cdot) 是一个群, 且 $H < G, K < H$, 则一定有 $K < G$. 因此我们可以将 $H < G, K < H$ 简记为 $K < H < G$. ♥

证明 证明是显然的。□

命题 1.11 (子群的等价条件)

(H, \cdot) 是子群等价于

$$\begin{aligned} e &\in H, \\ \forall x, y \in H, x \cdot y^{-1} &\in H. \end{aligned}$$

证明 设 (H, \cdot) 是子群. 令 $x, y \in H$, 利用逆元封闭性得到 $y^{-1} \in H$, 再利用乘法封闭性得到 $x \cdot y^{-1} \in H$.

反过来, 假设上述条件成立. 令 $x \in H$, 则 $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$, 这证明了逆元封闭性. 接下来, 令 $x, y \in H$, 则利用逆元封闭性, $y^{-1} \in H$, 故 $x \cdot (y^{-1})^{-1} = x \cdot y \in H$. 这就证明了乘法封闭性。

综上, 这的确是子群的等价条件。□

命题 1.12 (子群的任意交仍是子群)

设 G 是一个群, $(H_i)_{i \in I}$ 是一族 G 的子群, 则它们的交集仍然是 G 的子群, 即

$$\bigcap_{i \in I} N_i < G.$$

证明 首先, 设 e 是 G 的单位元, 则由子群对单位元封闭可知, $e \in N_i, \forall i \in I$. 从而 $e \in \bigcap_{i \in I} N_i$.

其次, 对 $\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i$, 都有 $x, y \in N_i, \forall i \in I$. 根据子群对逆元封闭可知, $y^{-1} \in N_i, \forall i \in I$. 于是再由子群对乘法封闭可知, $xy^{-1} \in N_i, \forall i \in I$. 故 $xy^{-1} \in \bigcap_{i \in I} N_i$.

综上, $\bigcap_{i \in I} N_i < G$. □

定义 1.16 (一般线性群)

我们对于那些 $n \times n$ 可逆实矩阵构成的乘法群, 称为 **(实数上的) n 阶一般线性群**, 记作 $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$. 由于一个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零, 因此

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}.$$

定义 1.17 (特殊线性群)

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n \times n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的) n 阶特殊线性群**, 记作 $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, 即

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

命题 1.13

$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 是个群。♥

证明 根据定义, $SL(n, \mathbb{R})$ 首先是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子集, 那么只要证明它是个子群即可. 首先, 乘法单位元单位矩阵的行列式恰好是 1 (这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因), 这就证明了 $I \in SL(n, \mathbb{R})$ ($I = I_n$ 指的是 n 阶单位矩阵). 另外, 我们要证明 $SL(n, \mathbb{R})$ 在乘法下封闭. 令 A, B 是两个行列式为 1 的 $n \times n$ 实矩阵. 由于行列式满足 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, 因此 AB 的行列式也是 1, 也就在特殊线性群中. 这就

证明了特殊线性群确实是个群。至于逆元封闭性, 我们利用 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ 。假设 $\det(A) = 1$, 则 $\det(A^{-1}) = 1$, 于是 $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$ 。综上, 特殊线性群确实是个群。 \square

定义 1.18 (群同态)

令 $(G, \cdot), (G', *)$ 是两个群, 且 $f: G \rightarrow G'$ 是一个映射。我们称 f 是一个**群同态**, 当其保持了乘法运算, 即

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

命题 1.14

若 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则 $f(e) = e', f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ 。

笔记 也就是说, f 不仅把乘积映到乘积, 而且把单位元映到单位元, 把逆元映到逆元。在这个意义下, 实际上 f 将所有群 G 的“信息”都保持到了 G' 上, 包括单位元, 乘法和逆元。至于结合律 (或者更基础的封闭性), 显然两边本来就有, 就不必再提。

证明 首先, 因为 $e \cdot e = e$, 所以利用同态的性质, $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) * f(e)$ 。这时, 两边同时左乘 $f(e)^{-1}$, 就可以各约掉一个 $f(e)$, 得到 $e' = f(e)$, 这就证明了 f 把单位元映到单位元。

另一方面, 令 $x \in G$, 则 $e' = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ 。同理 $e' = f(x^{-1}) * f(x)$ 。于是由定义, $f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元, 即 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ 。这就证明了这个命题。 \square

定义 1.19 (群同态的核与像)

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则我们定义 f 的**核**与**像**, 记作 $\ker(f)$ 与 $\text{im}(f)$, 分别为

$$\ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\} \subset G,$$

$$\text{im}(f) = \{y \in G' : \exists x \in G, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G\} \subset G'.$$

笔记 群同态的核与像示意图如下:

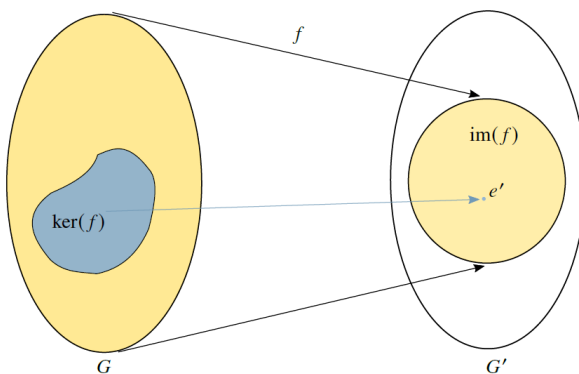


图 1.1: 群同态的核与像示意图

命题 1.15

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则核是定义域的子群, 像是陪域的子群, 即

$$\ker(f) < G, \quad \text{im}(f) < G'.$$

证明 先证明第一个子群关系。我们利用 $f(e) = e'$ 来说明 $e \in \ker(f)$ 。接着, 设 $x, y \in \ker(f)$, 只需证明 $xy^{-1} \in \ker(f)$ 。利用同态的性质, $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e'e'^{-1} = e'$, 这就证明了 $xy^{-1} \in \ker(f)$ 。第一个子群关系得证。

再证明第二个子群关系。同样由于 $f(e) = e'$, 我们有 $e' \in \text{im}(f)$ 。接着, 设 $y = f(x), y' = f(x') \in \text{im}(f)$, 只需证明 $yy'^{-1} \in \text{im}(f)$ 。同样利用同态的性质, $yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \text{im}(f)$ 。第二个子群关系也得证。

这样我们就证完了整个命题。 \square

例题 1.3 证明: $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$.

证明 由命题??可知, $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ 是一个乘法群同态. 注意到 $\ker(\det) = (SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, 因此由命题 1.15 可知, $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) = \ker(\det) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$. \square

定义 1.20 (满同态与单同态)

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 我们称 f 是一个**满同态**当 f 是满射, 称 f 是一个**单同态**当 f 是单射.

命题 1.16

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同态, 则

1. f 是一个单同态当且仅当 $\ker(f) = \{e\}$. 也就是说, 一个群同态是单的当且仅当核是平凡的.
2. f 是一个满同态当且仅当 $\text{im}(f) = G'$. 也就是说, 一个群同态是满的当且仅当值域等于陪域.

证明

1. 假设 f 是单的, 那么因为 $f(e) = e'$, 因此若 $f(x) = e'$, 则利用单射的性质我们一定有 $x = e$, 这就证明了核是平凡的。(这个方向是显然的)
另一个方向不那么显然. 我们假设 $\ker(f) = \{e'\}$. 假设 $x, x' \in G$, 使得 $f(x) = f(x')$, 我们只须证明 $x = x'$. 在这里, 我们同时右乘 $f(x')^{-1}$, 得到 $f(x)f(x'^{-1}) = f(xx'^{-1}) = e'$. 而因为核是平凡的, 所以必须有 $xx'^{-1} = e$. 接下来同时右乘 x' , 我们就得到 $x = x'$. 这就证明了这个命题.
2. 因为 f 是满同态, 所以对 $\forall a' \in G'$, 都存在 $a \in G$, 使得 $f(a) = a'$. 故 $a' \in \text{im}(f)$. 因此 $G' \subset \text{im}(f)$. 又显然有 $\text{im}(f) \subset G'$. 故 $\text{im}(f) = G'$.

\square

 **笔记** 平凡群, 满同态和单同态示意图如下:

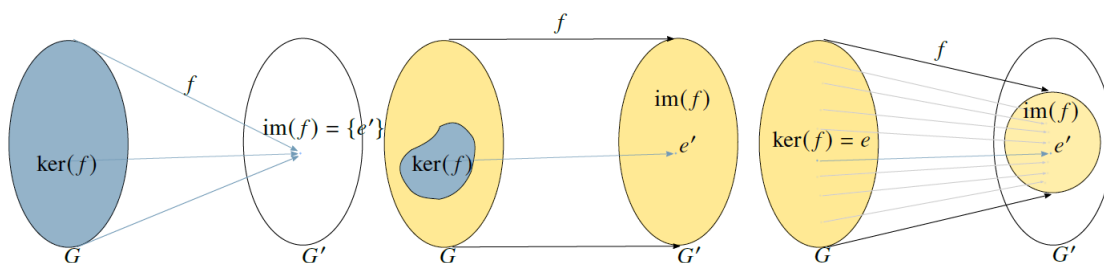


图 1.2: 平凡群, 满同态和单同态示意图

例题 1.4 证明: $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ 是一个乘法群同态, 并且是满同态, $\ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$.

证明 设 $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, 则由行列式的 Laplace 定理可知 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. 故 \det 是群同态.

任取 $a \in \mathbb{R}^\times$, 令 $C = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $C \in GL(n, \mathbb{R})$ 并且 $\det(C) = a$. 故 \det 是满同态.

一方面, 任取 $N \in SL(n, \mathbb{R})$, 则 $\det(N) = 1$, 从而 $N \in \ker(\det)$. 于是 $SL(n, \mathbb{R}) \subset \ker(\det)$. 另一方面, 任取 $M \in \ker(\det)$, 则 $\det(M) = 1$, 从而 $M \in SL(n, \mathbb{R})$. 于是 $\ker(\det) \subset SL(n, \mathbb{R})$. 故 $\ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$. \square

定义 1.21 (群同构)

令 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**群同构**, 当 f 既是一个双射, 又是一个群同态. 简单来说, 同构就是双射的同态.

\clubsuit

命题 1.17 (群同构的逆也是群同构)

若 $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ 是一个群同构, 则 f^{-1} 也是群同构。

▲

证明 因为 f^{-1} 也是双射, 所以我们只须证明 f^{-1} 是群同态。令 $x', y' \in G'$, 设 $x' = f(x), y' = f(y)$ 。则 $x' * y' = f(x \cdot y)$, $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 故 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$ 。这就完成了证明。□

定义 1.22 (两个群的直积)

令 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 我们记 $(G \times G', *)$ 为 (G, \cdot_1) 和 (G', \cdot_2) 的**直积**。满足对于 $(x, y), (x', y') \in G \times G'$, 有

$$(x, y) * (x', y') = (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y').$$

♣

命题 1.18 (两个群的直积仍是群)

若 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 则它们的直积 $(G \times G', *)$ 还是一个群。

▲

证明 封闭性: 因为 G 在 \cdot_1 下封闭, G' 在 \cdot_2 下封闭, 而 $G \times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的, 则 $G \times G'$ 在 $*$ 下也是封闭的。

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律。

单位元: 设 e, e' 分别是 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 的单位元, 则不难想象, (e, e') 是直积的单位元。对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 我们有 $(x, y) * (e, e') = (x \cdot_1 e, y \cdot_2 e') = (x, y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 (e, e') 是直积的单位元。

逆元: 对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 设 x^{-1}, y^{-1} 分别是 x, y 的逆元, 则同样不难想象, (x^{-1}, y^{-1}) 是 (x, y) 的逆元。

□

定义 1.23 (一族群的直积)

令 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, 其中 I 是一个指标集。我们记它们的**直积**为 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 。满足对于 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 有

$$\prod_{i \in I} G_i, \text{ 有}$$


$$(x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i \in I}.$$

♣

命题 1.19 (一族群的直积仍是群)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, 则它们的直积 $(\prod_{i \in I} G_i, *)$ 还是一个群。

▲

 **笔记** 最经典的例子就是通过 n 个实数加群 $(\mathbb{R}, +)$ 直积得到的 $(\mathbb{R}^n, +)$ 。

证明 证明与命题 1.18 同理。故我们只列出一些重点。封闭性与结合律是显然的。单位元是 $(e_i)_{i \in I}$, 而 $(x_i)_{i \in I}$ 的逆元是 $(x_i^{-1})_{i \in I}$ 。□

定义 1.24 (投影映射)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, $j \in I$ 是任意指标, 我们定义映射到指标 j 的**投影映射**为

$$p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j.$$

对于 $(x_i)_{i \in I}$, 我们称 $p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ 为 $(x_i)_{i \in I}$ 的**投影**。

♣

命题 1.20 (投影映射是群同态)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i \in I}$ 是一族群, $j \in I$ 是任意指标, 则投影映射 $p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j$ 是个群同态。

▲

证明 令 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, 则

$$\begin{aligned} p_j((x_i)_{i \in I}) &= x_j, \quad p_j((y_i)_{i \in I}) = y_j \\ p_j((x_i)_{i \in I} * (y_i)_{i \in I}) &= p_j((x_i \cdot y_i)_{i \in I}) = x_j \cdot y_j = p_j((x_i)_{i \in I}) \cdot p_j((y_i)_{i \in I}). \end{aligned}$$

□

1.3 有限群

定义 1.25 (有限群)

设 (G, \cdot) 是一个群. 我们称 G 是一个**有限群**, 若 G 是有限的.

♣

定义 1.26 (元素的阶)

设 (G, \cdot) 是一个群, 若 $x \in G$, 则 x (在 G 中) 的**阶**, 记作 $|x|$, 定义为那个最小的正整数 $n \in \mathbb{N}_1$, 使得 $x^n = e$. 若这样的 n 不存在, 则记 $|x| = \infty$.

♣

命题 1.21 (有限群的每个元素的阶必有限)

若 (G, \cdot) 是有限群, 且 $x \in G$, 则 $|x| < \infty$. 换言之, 有限群的每一个元素通过自乘有限多次, 都可以得到单位元.

♣

证明 我们用反证法, 假设 $|x| = \infty$, 那么根据定义, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}_1$, 我们都有 $x^n \neq e$. 我们要说明的是, 这会导致一个事实, 就是所有的 $x^n (n \in \mathbb{N}_1)$ 都是不同的. 假设但凡有一对 $n \neq m \in \mathbb{N}_1$ 使得 $x^n = x^m$, 不失一般性我们假设 $n > m$. 则通过反复的消元 (两边反复右乘 x^{-1}), 我们可以得到 $x^{n-m} = e$, 其中 $n-m \in \mathbb{N}_1$, 而这与假设是矛盾的, 因为我们假设 x 的阶是无穷的. 因此, 这个事实是对的——所有的 $x^n (n \in \mathbb{N}_1)$ 都是不同的, 从而 G 中有无穷多个元素, 这与 G 是有限群矛盾. 这就证明了这个命题.

□

命题 1.22

令 (G, \cdot) 是一个群, 任取 $x \in G$. 则

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (G, \cdot) \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

是一个群同态.

♣

证明 取定 $x \in G$. 令 $m, n \in \mathbb{Z}$, 我们只须证明 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, 也即 $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$. 于是根据命题 1.9(1) 就能立即得到结论.

□

定义 1.27 (由 x 生成的群)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$, 则 $\langle x \rangle$, 被称为**由 x 生成的群**, 定义为

$$\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

♣

命题 1.23

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $x \in G$, 则 $\langle x \rangle < G$.

♣

证明 记

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (G, \cdot) \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

由命题 1.22 可知 f 是一个群同态. 注意到 $\text{im } f = \langle x \rangle$, 即 $\langle x \rangle$ 是 f 的同态像. 从而由命题 1.15 可知, $\langle x \rangle = \text{im } f < G$.
□

定义 1.28 (由 S 生成的群)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $S \subset G$. 则由 S 生成的群, 记作 $\langle S \rangle$, 定义为

$$\langle S \rangle = \bigcap \{H \subset G : H \supset S, H < G\}$$

命题 1.24

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $S \subset G$, 则 $\langle S \rangle < G$.

笔记 这个命题表明: G 中由 S 生成的子群, 确实是包含了 S 的最小子群.

证明 在这里, 我们只要证明其包含单位元, 在乘法和逆元下封闭.

根据定义, $\langle S \rangle$ 是由所有包含了 S 的 G 中子群全部取交集得到的.

单位元: 每个这样的子群 H 都包含单位元, 故它们的交集也包含单位元.

乘法封闭性: 设 $x, y \in \langle S \rangle$, 任取一个包含了 S 的子群 H , 则 $x, y \in H$. 因为 H 是子群, 故 $xy \in H$, 所以由 H 的任意性可知 $xy \in \langle S \rangle$.

逆元封闭性: 设 $x \in \langle S \rangle$, 任取一个包含了 S 的子群 H , 则 $x \in H$. 因为 H 是子群, 故 $x^{-1} \in H$, 所以由 H 的任意性可知 $x^{-1} \in \langle S \rangle$.
□

定义 1.29 (循环群)

令 (G, \cdot) 是一个群. 若存在 $x \in G$, 使得 $G = \langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$, 则 G 被称为一个循环群, 而 x 被称为 G 的一个生成元.

若 G 还是一个有限群, 则我们称 G 为有限循环群. 若 G 不是有限群, 则我们称 G 为无限循环群.

注 我们一般用 C_n 表示 n 阶循环群.

笔记 有限循环群与无限循环群示意图如下:

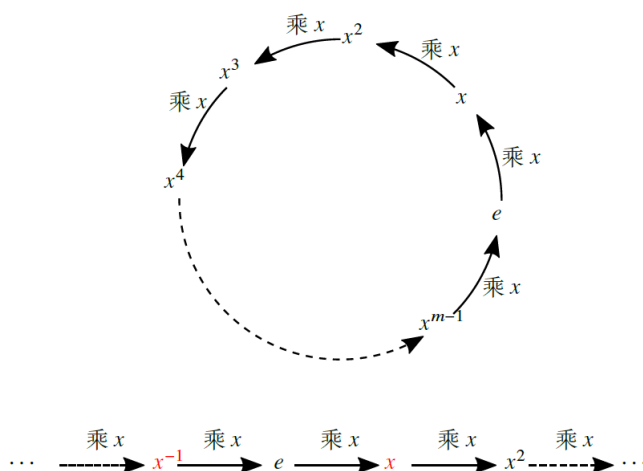


图 1.3: 有限循环群和无限循环群

命题 1.25

设 (G, \cdot) 是一个群, 对 $\forall x \in G$, 都有 $\langle x \rangle = \langle \{x\} \rangle$.

笔记 这个命题表明: 由 x 生成的群就是由子集 $\{x\}$ 生成的子群.

证明 根据定义和性质, $\langle \{x\} \rangle$ 是包含了 $\{x\}$ 的最小的子群. 因此要证明这个最小的子群就是 $\langle x \rangle$, 我们只须证明

两点。一, $\langle x \rangle$ 是个子群; 二, 如果一个子群 H 包含了 $\{x\}$, 那么它一定要包含整个 $\langle x \rangle$ 。

首先, 由命题 1.23 可知 $\langle x \rangle$ 是个子群。这就证明了第一点。

第二点几乎也是显然的。我们设 H 是个子群, 且 $x \in H$ 。那么根据子群包含单位元, 且有乘法和逆元的封闭性, 我们有 $e \in H$, 并且递归地, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}_1$, 都有 $x^n = x \cdots x \in H$, $x^{-n} = x^{-1} \cdots x^{-1} \in H$ 。这就证明了 $H \supset \langle x \rangle$ 。

□

命题 1.26

设 $G = \langle x \rangle$ 是有限循环群, 并且 $|x| = n$, 则 $G = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, 并且 $\{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ 中的这些元素是两两不同的。我们称这样的有限循环群的阶是 n 。

▲

证明 我们来证明两件事。第一, 每一个 G 中元素都可以写成从 0 开始的前 n 项幂的形式; 第二, 从 0 开始的前 n 项幂是两两不同的。

我们来证明第一点。任取 G 中元素 x^m , 其中 $m \in \mathbb{Z}$ 。根据带余除法, 存在 $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n-1$, 使得 $m = qn + r$ 。那么因为 $x^n = e$, 所以 $x^m = x^{qn+r} = (x^n)^q \cdot x^r = x^r$, 而这就属于从 0 开始的前 n 项幂。

我们来证明第二点。用反证法, 假设 $0 \leq m' < m \leq n-1$, 使得 $x^m = x^{m'}$, 则 $x^{m-m'} = e$ 。其中 $1 \leq m-m' \leq n-1 < n$, 可是 $n = |x|$ 是最小的正整数 k 使 $x^k = e$, 这就导致了矛盾。

综上所述, $G = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, 其中枚举法中的这些元素是两两不同的。

□

命题 1.27

对于任意的 $n \in \mathbb{N}_1$, 所有 n 阶的循环群都是互相同构的。

▲

证明 设 $G = \langle x \rangle, G' = \langle y \rangle$ 都是 n 阶循环群。令

$$f: G \rightarrow G', x^m \mapsto y^m$$

则对 $\forall x^{m_1}, x^{m_2} \in G$, 其中 $1 \leq m_1, m_2 \leq n-1$ 。我们都有

$$f(x^{m_1}x^{m_2}) = f(x^{m_1+m_2}) = y^{m_1+m_2} = y^{m_1}y^{m_2} = f(x^{m_1})f(x^{m_2}).$$

因此 f 是个同态映射。此外, 它是个双射, 因为我们可以明确地找到其逆映射

$$f^{-1}(y^m) = x^m$$


这样, f 既是双射, 也是同态, 这就证明了 f 是个同构。

□

命题 1.28

令 $G = \langle x \rangle$ 是无限循环群, 则 $x^n (n \in \mathbb{Z})$ 是两两不同的, 且 G 只有两个生成元, 分别是 x 与 x^{-1} 。

▲

 **笔记** 显然, $(\mathbb{Z}, +)$ 就是一个无限循环群, 生成元是 1 或 -1。

证明 首先证明 $x^n (n \in \mathbb{Z})$ 是两两不同的。假设有两个相同, 不失一般性假设 $m > n \in \mathbb{Z}, x^m = x^n$, 则 $x^{m-n} = e$, 故 x 是有有限阶的。这就矛盾了。


接着, 如果 $x^n (n \in \mathbb{Z})$ 可以生成这个群, 那么 $x \in \langle x^n \rangle$, 于是存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $x = (x^n)^m$, 于是 $x^{nm-1} = e$ 。由于 x 是无限阶的, 所以 $nm = 1$, 那么这样的 n 只能是 ± 1 。另外, 显然 x^{-1} 也可以生成这个群。这就证明了恰好是这两个生成元。

□

命题 1.29

所有的无限循环群是彼此同构的。

▲

 **笔记** 这个命题告诉我们: 要研究无限循环群, 只要研究整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 就可以了。

证明 设 $G = \langle x \rangle, G' = \langle y \rangle$ 都是无限循环群。令

$$f: G \rightarrow G', x^m \mapsto y^m$$

则对 $\forall x^{m_1}, x^{m_2} \in G$, 其中 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. 我们都有

$$f(x^{m_1}x^{m_2}) = f(x^{m_1+m_2}) = y^{m_1+m_2} = y^{m_1}y^{m_2} = f(x^{m_1})f(x^{m_2}).$$

因此 f 是个同态映射. 此外, 它是个双射, 因为我们可以明确地找到其逆映射

$$f^{-1}(y^m) = x^m$$

这样, f 既是双射, 也是同态, 这就证明了 f 是个同构。 □

命题 1.30

令 $G = \langle x \rangle$ 是一个 n 阶循环群. 假设 $1 \leq m \leq n$, 则 x^m 的阶为

$$|x^m| = \frac{n}{\gcd(n, m)}.$$

证明 设 $1 \leq m \leq n-1$, 我们希望找到最小的正整数 k 使得 $(x^m)^k = x^{mk} = e$. 由于 $|x| = n$, 故这等价于 $n \mid mk$. 接下来我们要利用简单的初等数论. 通过同时除以 n 和 m 的最大公因数, 我们得到

$$\frac{n}{\gcd(n, m)} \mid \frac{m}{\gcd(n, m)} \cdot k$$

而因为 $\frac{n}{\gcd(n, m)}$ 和 $\frac{m}{\gcd(n, m)}$ 是互素的, 所以这个条件进一步等价于

$$\frac{n}{\gcd(n, m)} \mid k$$

也就是说, 最小的这个正整数 k 正是 $\frac{n}{\gcd(n, m)}$. 这就完成了证明。 □

命题 1.31

令 $G = \langle x \rangle$ 是一个 n 阶循环群, 则 $x^m (1 \leq m \leq n)$ 是个生成元, 当且仅当

$$\gcd(m, n) = 1.$$

根据欧拉 ϕ 函数的定义, 这些生成元的个数正是 $\phi(n)$. ♣

证明 若 x^m 是一个生成元, 则由 G 是一个 n 阶循环群可知, $|x^m| = n$. 从而由命题 1.30 可知, $\gcd(m, n) = \frac{n}{|x^m|} = 1$.

若 $\gcd(m, n) = 1$, 则由命题 1.30 可知, $|x^m| = \frac{n}{\gcd(n, m)} = n$. 从而

$$(x^m)^n = e, (x^m)^{n+1} = (x^m)^n x = x, \dots, (x^m)^{2n-1} = (x^m)^n x^{n-1} = x^{n-1}.$$

又由命题 1.26 可知 $G = \{e, x, \dots, x^{n-1}\}$. 于是

$$G = \{e, x, \dots, x^{n-1}\} = \{(x^m)^n, (x^m)^{n+1}, \dots, (x^m)^{2n-1}\} = \{(x^m)^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

因此 $G = \langle x^m \rangle$, 故 x^m 是 G 的生成元。 □

定义 1.30 (群的阶)

设 (G, \cdot) 是一个群, 则 G 的阶, 记作 $|G|$, 定义为 G 的集合大小 (元素的个数). ♣

定义 1.31 (子群的阶)

设 (G, \cdot) 是一个群, H 是 G 的子群, 则 H 的阶, 记作 $|H|$, 定义为 H 的集合大小 (元素的个数). 若 H 是无限群则记 $|H| = \infty$. ♣

定义 1.32 (左陪集)

设 G 是一个群, $H < G$ 是一个子群, $a \in G$. 则称 aH 是 H 的一个 (由 a 引出的) **左陪集**, 定义为

$$aH = \{ax : x \in H\}.$$

称 aH 是 H 的一个 (由 a 引出的) **右陪集**, 定义为

$$Ha = \{xa : x \in H\}.$$

注 aH, Ha 一般来说不是 G 的子群.

我们只讨论左陪集的性质和结论, 右陪集的性质与左陪集类似.

引理 1.2

令 G 是一个有限群, $H < G$ 是一个子群, $a \in G$. 令

$$f : H \rightarrow aH, x \mapsto ax.$$

则 f 是一个双射. 特别地, $|H| = |aH|$.



笔记 这个引理表明: 陪集的大小都是一样的.

证明 证法一: 根据 f 的定义易知 f 是满射. 若 $f(h_1) = f(h_2)$, 则

$$ah_1 = ah_2 \Rightarrow a^{-1}ah_1 = a^{-1}ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

故 f 也是单射. 因此 f 是双射.

证法二: 令

$$g : aH \rightarrow H, k \mapsto a^{-1}k.$$

设 $k \in aH$, 则存在 $h \in H$, 使得 $k = ah$. 则 $g(k) = g(ah) = a^{-1}ah = h \in H$. 故 g 是良定义的. 注意到

$$g \circ f = \text{id}_H, \quad f \circ g = \text{id}_{aH}.$$

故 g 是 f 的逆映射. 因此 f 是双射. □

命题 1.32

设 G 是一个有限群, $H < G$ 是一个子群, $a, b \in G$. 则左陪集 aH 和 bH 要么相等, 要么无交. 也就是说, 我们有 $aH = bH$, 或 $aH \cap bH = \emptyset$.

证明 假设 $aH \cap bH \neq \emptyset$, 则可设 $ah_1 = bh_2 \in aH \cap bH$, 其中 $h_1, h_2 \in H$. 我们只须证明 $aH = bH$, 而根据对称性, 我们只须证明 $aH \subset bH$ 即可. 任取 aH 中的元素 $ah(h \in H)$, 则由 $ah_1 = bh_2$ 可知, $a = bh_2h_1^{-1}$. 从而

$$ah = (bh_2h_1^{-1})h = b(h_2h_1^{-1}h) \in bH$$

这就完成了证明. □

定义 1.33 (商集)

设 G 是一个非空集合, $H \subset G$ 是一个子集合. 则**商集** G/H 定义为

$$G/H = \{aH : a \in G\}.$$

商集 $H \backslash G$ 定义为

$$H \backslash G = \{Ha : a \in G\}.$$

我们把商集 G/H 的大小 (所含元素的个数) 称为 H 在 G 中的**指数**, 记为 $[G : H]$, 即

$$[G : H] = |G/H|.$$

定理 1.1

设 G 是一个有限群, $H < G$ 是一个子群, 则商集 $G/H = \{aH : a \in G\}$ 就是 G 的一个分拆, 即

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} a_i H = \bigsqcup_{a \in G} aH.$$

♡

证明 一方面, 设 $x \in G$, 取 $a = x$, 则 $x = xe = ae \in xH$. 另一方面, 由命题 1.32 可知, 对 $\forall aH, bH \in G/H$, 都有 aH 和 bH 要么相等, 要么无交. 故商集 $G/H = \{aH : a \in G\}$ 就是 G 的一个分拆. \square

笔记

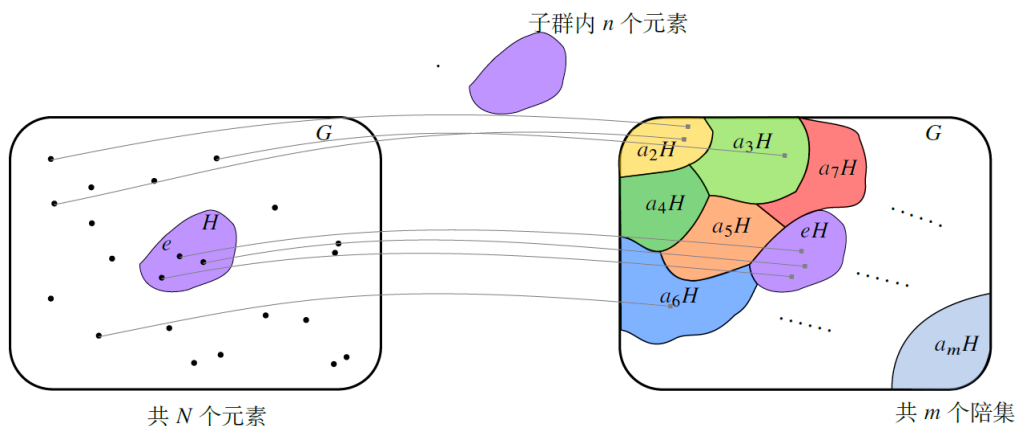


图 1.4: 左陪集示意图

定理 1.2 (Lagrange 定理)

设 G 是一个有限群, $H < G$ 是一个子群, 则

$$|G| = [G : H]|H|.$$

进而 $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$. 特别地,

$$|H| \mid |G|.$$

♡

证明 由定理 1.1 可知 $G = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} a_i H$, 从而

$$|G| = \sum_{i=1}^{[G:H]} |a_i H_i|.$$

又由引理 1.2 可知 $|a_i H_i| = |H|$. 故

$$|G| = [G : H]|H|.$$

 \square

例题 1.5 设 (G, \cdot) 是一个群, 若 $|G| = p$ 是素数, 则不存在任何非平凡子群.

证明 设 $H < G$, 则由 Lagrange 定理可知 $|H| \mid |G|$, 即 $|H| \mid p$. 从而 $|H| = 1$ 或 p , 于是 $H = \{e\}$ 或 G . \square

引理 1.3

设 G 是一个群, $H < G$ 是一个子群, $x, y, a, b \in G$, 则

$$(1) xH \subset yH \Leftrightarrow axHb \subset ayHb.$$

$$(2) Hx \subset Hy \Leftrightarrow aHxb \subset aHyb.$$

$$(3) xH \subset Hy \Leftrightarrow axHb \subset aHyb.$$

进一步, 我们有

$$(4) \quad xH = yH \Leftrightarrow axHb = ayHb.$$

$$(5) \quad Hx = Hy \Leftrightarrow aHxb = aHyb.$$

$$(6) \quad xH = Hy \Leftrightarrow axHb = aHyb.$$



证明

(4) \Rightarrow : 若 $xH = yH$, 则要证 $axHb = ayHb$, 根据对称性, 只须证 $axHb \subset ayHb$. 任取 $axhb \in axHb$, 其中 $h \in H$, 则由 $xH = yH$ 及 $xh \in xH$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $xh = yh'$. 从而 $axhb = ayh'b \in ayHb$. 故 $axHb \subset ayHb$.

\Leftarrow : 若 $axHb = ayHb$, 则要证 $xH = yH$, 根据对称性, 只须证 $xH \subset yH$. 任取 $xh \in xH$, 其中 $h \in H$, 则由 $axHb = ayHb$ 及 $axhb \in axHb$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $axhb = ayh'b$. 从而 $xh = a^{-1}axhbb^{-1} = a^{-1}ayh'bb^{-1} = yh' \in yH$. 故 $xH \subset yH$.

(5) \Rightarrow : 若 $Hx = Hy$, 则要证 $aHxb = aHyb$, 根据对称性, 只须证 $aHxb \subset aHyb$. 任取 $ahxb \in aHxb$, 其中 $h \in H$, 则由 $Hx = Hy$ 及 $hx \in Hx$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $hx = h'y$. 从而 $ahxb = ah'yb \in aHyb$. 故 $aHxb \subset aHyb$.

\Leftarrow : 若 $aHxb = aHyb$, 则要证 $Hx = Hy$, 根据对称性, 只须证 $Hx \subset Hy$. 任取 $hx \in Hx$, 其中 $h \in H$, 则由 $aHxb = aHyb$ 及 $ahxb \in aHxb$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $ahxb = ah'yb$. 从而 $hx = a^{-1}ahxb^{-1} = a^{-1}ah'ybb^{-1} = h'y \in Hy$. 故 $Hx \subset Hy$.

(6) \Rightarrow : 若 $xH = Hy$, 则要证 $axHb = aHyb$, 根据对称性, 只须证 $axHb \subset aHyb$. 任取 $axhb \in axHb$, 其中 $h \in H$, 则由 $xH = Hy$ 及 $xh \in xH$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $xh = h'y$. 从而 $axhb = ah'yb \in aHyb$. 故 $axHb \subset aHyb$.

\Leftarrow : 若 $axHb = aHyb$, 则要证 $xH = Hy$, 根据对称性, 只须证 $xH \subset Hy$. 任取 $xh \in xH$, 其中 $h \in H$, 则由 $axHb = aHyb$ 及 $axhb \in axHb$ 可知, 存在 $h' \in H$, 使得 $axhb = ah'yb$. 从而 $xh = a^{-1}axhbb^{-1} = a^{-1}ah'ybb^{-1} = h'y \in Hy$. 故 $xH \subset Hy$.

根据上述 (4)(5)(6) 的证明过程就能直接得到 (1)(2)(3) 的证明. \square

引理 1.4

设 G 是一个群, $H < G$ 是一个子群, $x \in G$, 则我们有充要条件

$$xH = H \iff x \in H.$$

一般地, 对于 $x, y \in G$, 我们有充要条件

$$xH = yH \iff y^{-1}x \in H \iff x^{-1}y \in H \iff x \in yH \iff y \in xH.$$



笔记 同理可知对右陪集也有相同的结论.

证明 对于 $x \in G$, 一方面, 设 $xH = H$, 则 $x = xe \in xH = H$, 因此 $x \in H$.

另一方面, **证法一**: 设 $x \in H$, 任取 $xh \in xH$, 则根据乘法封闭性可知 $xh \in H$. 故 $xH \subset H$. 任取 $h \in H$, 则根据乘法封闭性和逆元封闭性可知 $x^{-1}h \in H$, 从而 $h = xx^{-1}h \in xH$. 故 $H \subset xH$. 因此 $xH = H$.

证法二: 设 $x \in H$, 则 $x = xe \in xH$. 从而 $xH \cap H \neq \emptyset$. 于是由 **命题 1.32** 可知 $xH = H$.

综上, 我们就有 $xH = H \iff x \in H$.

一般地, 对于 $x, y \in G$, 由 **引理 1.3** 可知 $xH = yH \iff y^{-1}xH = H \iff H = x^{-1}yH$, 又由上述证明可知

$$y^{-1}xH = H \iff y^{-1}x \in H, x^{-1}yH = H \iff x^{-1}y \in H.$$

故 $xH = yH \iff y^{-1}x \in H \iff x^{-1}y \in H$. 下证 $xH = yH \iff x \in yH \iff y \in xH$.

一方面, 设 $xH = yH$, 则 $x = xe \in xH = yH$, 因此 $x \in yH$. 另一方面, 设 $x \in yH$, 则 $x = ye \in xH$. 从而 $xH \cap yH \neq \emptyset$. 于是由 **命题 1.32** 可知 $xH = yH$. 故 $xH = yH \iff x \in yH$. 同理可证 $xH = yH \iff y \in xH$. \square

推论 1.3

(1) 设 G 是一个群, $H < G$ 是一个子群, $a \in G$, 则

$$axH = aH \iff x \in H.$$

(2) 设 G 是一个群, $K < H < G, a_1, a_2 \in G, b_1, b_2 \in H$. 若 $a_1 b_1 K = a_2 b_2 K$, 则 $a_1 H = a_2 H$.



笔记 同理可知对右陪集也有相同的结论.

证明

(1) 由引理 1.3 可知

$$axH = aH \iff xH = H.$$

又由引理 1.4 可知

$$xH = H \iff x \in H.$$

故

$$axH = aH \iff x \in H.$$

(2) 由引理 1.4 可知 $b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 b_1 \in K$, 从而存在 $k \in K$, 使得 $b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 b_1 = k$, 于是 $a_2^{-1} a_1 = b_2 k b_1^{-1} \in H$. 再根据引理 1.4 可知 $a_1 H = a_2 H$.

□

命题 1.33

令 $K < H < G$ 是三个有限群, 则

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$



证明 证法一: 由 Lagrange 定理可得

$$[G : K] = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = [G : H][H : K].$$

证法二: 设 $G/H = \{a_i H\}_{i \in I}$, $H/K = \{b_j K\}_{j \in J}$, 其中 $I = \{1, 2, \dots, [G : H]\}$, $J = \{1, 2, \dots, [H : K]\}$. 则 $|I| = [G : H]$, $|J| = [H : K]$.

先证明 $G/K = \{a_i b_j K\}_{i \in I, j \in J}$. 因为 $G/K = \{xK : x \in G\}$, 所以任取 $xK \in G/K$, 都有 $x \in G$. 由定理 1.1 可知 $G = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} a_i H$, 从而存在 $i \in I$, 使得 $x \in a_i H$. 于是存在 $h \in H$, 使得 $x = a_i h$. 再由定理 1.1 可知 $H = \bigsqcup_{j=1}^{[H:K]} b_j K$, 因此存在 $j \in J$, 使得 $h \in b_j K$. 进而存在 $k \in K$, 使得 $h = b_j k$. 于是 $x = a_i h = a_i b_j k$. 故由推论可得

$$xK = a_i b_j k K = a_i b_j K.$$

再由 xK 的任意性可知 $G/K = \{a_i b_j K\}_{i \in I, j \in J}$.

再证明 $\{a_i b_j K\}_{i \in I, j \in J}$ 两两互异 (集合中不含重复元素). 设 $a_i b_j K = a_{i'} b_{j'} K$, 则由推论 1.3(2) 可知, $a_i H = a_{i'} H$. 又因为 $G/H = \{a_i H\}_{i \in I}$, 所以 $\{a_i H\}_{i \in I}$ 两两互异, 从而 $a_i = a_{i'}$. 于是由引理 1.3 可得

$$a_i b_j K = a_i b_{j'} K \iff a_i b_j K = a_i b_{j'} K \iff a_i^{-1} a_i b_j K = a_i^{-1} a_i b_{j'} K \iff b_j K = b_{j'} K.$$

又因为 $H/K = \{b_j K\}_{j \in J}$, 所以 $\{b_j K\}_{j \in J}$ 两两互异, 因此 $b_j = b_{j'}$. 故 $\{a_i b_j K\}_{i \in I, j \in J}$ 两两互异 (集合中不含重复元素).

综上, $G/K = \bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} a_i b_j K$. 因此根据定义 1.33 可知

$$[G : K] = |I| \cdot |J| = [G : H][H : K].$$

□

定义 1.34 (两个子群的乘积)

设 G 是一个群, 且 $H, K < G$, 定义 H 和 K 的乘积为

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}.$$



注 两个子群的乘积不一定是子群.

命题 1.34

令 (G, \cdot) 是一个群. 若 $H, K < G$ 是两个有限子群, 则

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}, \text{ 也即 } |HK||H \cap K| = |H||K|.$$

其中 HK 未必是 G 的子群, 也不一定是群.



证明 证法一: 不考虑重复性, HK 产生 $|H||K|$ 个元素, 其中存在 $hk = h'k'$, $h \neq h'$, $k \neq k'$ 的情况.

现在分析产生相同乘积的 (h, k) 组合个数, 对 $\forall t \in H \cap K$, 都有 $hk = (ht)(t^{-1}k)$. 从而一方面, 对 $\forall t_1, t_2 \in H \cap K$ 且 $t_1 \neq t_2$, 都有 $ht_i \in H$, $t_i^{-1}k \in K (i = 1, 2)$, $(ht_1, t_1^{-1}k) \neq (ht_2, t_2^{-1}k)$, 但 $(ht_1)(t_1^{-1}k) = hk = (ht_2)(t_2^{-1}k)$. 于是 HK 中产生相同乘积的不同 (h, k) 组合至少有 $|H \cap K|$ 个.

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} hk = h'k' &\iff t = h^{-1}h' = k(k')^{-1} \in H \cap K \\ &\iff \exists t \in H \cap K \text{ s.t. } h' = ht, k' = t^{-1}k. \end{aligned}$$

因此 HK 中产生相同乘积的不同 (h, k) 组合最多有 $|H \cap K|$ 个. 综上, HK 中产生相同乘积的不同 (h, k) 组合恰好有 $|H \cap K|$ 个. 故 $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

证法二 (有待考察): 原命题等价于证明

$$\frac{|HK|}{|K|} = \frac{|H|}{|H \cap K|}.$$

因为 $H \cap K < H$, 我们可以假设 $H/(H \cap K) = \{a_i(H \cap K)\}_{i \in I}$, 其中 $a_i \in H (i \in I)$ 是两两不同的. 我们只须证明 $HK/K = \{a_i K\}_{i \in I}$, 并且 HK/K 中的重复元对应的指标与 $H/(H \cap K)$ 相同. 再根据 $H/(H \cap K)$ 和 HK/K 的指标集相同都是 I 就能得到两个商集 $H/(H \cap K)$ 和 HK/K 所含元素的个数相等.

任取 $hkK = hK \in HK/K$, 其中 $h \in H$, 故存在 $i \in I$ 使得 $h \in a_i(H \cap K)$. 假设 $h = a_i x$, 其中 x 既在 H , 也在 K . 这样, $hkK = hK = a_i x K = a_i K$, 因为 $x \in K$. 这就证明了第一点.

接着, 假设 $a_i K = a_j K$, 其中 $i, j \in I$. 我们只须证明 $a_i(H \cap K) = a_j(H \cap K)$. 根据引理 1.4 可知 $a_j^{-1}a_i \in K$, 可是 $a_i = a_j \in H$, 于是 $a_j^{-1}a_i \in H \cap K$. 同样根据引理 1.4, 我们知道 $a_i(H \cap K) = a_j(H \cap K)$. 这就证明了第二点.

综上所述, 两个商集 $H/(H \cap K)$ 和 HK/K 所含元素的个数相等. 显然 H 是一个群, 于是由 Lagrange 定理及商集的性质可得

$$\frac{|HK|}{|K|} \stackrel{?}{=} [HK : K] = [H : H \cap K] = \frac{|H|}{|H \cap K|}.$$

□

注 尽管 HK 不需要成为一个群, 但是 HK/K 完全可以通过 $H/(H \cap K)$ 来明确地构造出来, 它们的大小相等, 这就完成了这个命题的证明.

1.4 正规子群

定义 1.35 (正规子群)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \subset G$. 我们称 N 是个**正规子群**, 记作 $N \triangleleft G$, 若

$$\begin{aligned} N &\text{ 是个子群,} \\ \forall a \in G, aN &= Na. \end{aligned}$$



注 注意 $aN = Na \not\Rightarrow an = na, \forall n \in N$. 虽然 $an = na, \forall n \in N \Rightarrow aN = Na$, 但是 $aN = Na \not\Rightarrow an = na, \forall n \in N$. 实际上, $aN = Na \Leftrightarrow \exists n, n' \in N \text{ s.t. } an = n'a$.

引理 1.5

设 G 是一个群或么半群, 若 $H < G$, 则 $HH = H$.



证明 一方面, 对 $\forall h_1, h_2 \in H$, 根据乘法封闭性, 都有 $h_1 h_2 \in H$. 故 $HH \subset H$. 另一方面, 设 $h \in H$, 则 $h = he \in HH$. 故 $H \subset HH$. 因此 $HH = H$. \square

命题 1.35

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, $a, b \in G$, 则

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N.$$

是良定义的.



注 因为陪集代表元的不唯一性可能导致上述乘积运算结果不唯一, 所以上述乘积运算不一定是良定义的, 需要给出证明.

结论 元素与群 (其实只要满足结合律的半群就足够了) 的乘积满足广义结合律. 例如: 设 G 是一个群, 若 $H, K < G, a, b \in G$, 则

$$aHbK = (aH)(bK) = a((Hb)K) = a(H(bK)) = (a(Hb))K = ((aH)b)K.$$

$$abHK = (ab)(HK) = a((bH)K) = a(b(HK)) = ((ab)H)K.$$

.....

即两个陪集相乘可以看作一个陪集或两个陪集的乘积的陪集等.

证明 证法一: 设 $aN = a'N, bN = b'N$, 则由引理 1.4 可知 $a^{-1}a', b^{-1}b' \in N$, 我们只须证明 $abN = a'b'N$, 即 $(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' \in N$. 首先中间这个部分, 即 $a^{-1}a'$, 是在 N 中的. 接着, 利用 N 是个正规子群, 再结合引理 1.3, 我们可以得到 $b^{-1}Nb = N$, 因此, $b^{-1}a^{-1}a'b' \in b^{-1}Nb' = N$. 进一步地, 由引理 1.4 可得 $abN = a'b'N$. 这就证明了良定义性.

证法二: 事实上, 这个乘法可以简单地理解成子集乘法, 即 $(aN)(bN) = \{xy : x \in aN, y \in bN\}$. 我们只须说明, 这从集合意义上, 等于 abN . 而这几乎是显然的. 由于 $Nb = bN$ 及引理 1.5, 我们有 $aNbN = abNN = abN$. 这样, 既然从集合意义上相等, 那么自然就是良定义的 (因为我们不必选取单位元). \square

命题 1.36 (商群)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, 则 $(G/N, \cdot)$ 构成一个群, 称为 $(G \text{ 在 } N \text{ 上的})$ **商群**, 其中的单位元是 $eN = N$, 每个陪集 aN 的逆元是 $a^{-1}N$.



证明 由命题 1.35 可知商群 $(G/N, \cdot)$ 的乘法是良定义的.

封闭性: 对 $\forall aN, bN \in (G/N, \cdot)$, 其中 $a, b \in G$, 根据 G 对乘法的封闭性可得 $ab \in G$, 从而 $(aN)(bN) = abN \in (G/N, \cdot)$.

结合律：令 $a, b, c \in G$ ，则利用乘法的定义， $(aNbN)cN = (abN)(cN) = ((ab)c)N$ 。利用 G 对乘法的结合律，得到这是等于 $(a(bc))N$ 的。类似地，这最终等于 $aN(bNcN)$ 。

单位元：令 $a \in G$ ，则 $aNeN = (ae)N = aN$ ，类似地 $eNaN = aN$ 。

逆元：令 $a \in G$ ，则 $aNa^{-1}N = (aa^{-1})N = eN$ ，类似地 $a^{-1}NaN = eN$ 。

综上，若 $N \triangleleft G$ ，则 G/N 在这个自然的乘法下构成群，称为一个商群。 \square

引理 1.6 (正规子群的等价条件)

令 (G, \cdot) 是一个群，且 $N < G$ ，则下列命题等价

- (1) N 是 G 的正规子群，即 $\forall a \in G, aN = Na$ 。
- (2) $\forall a \in G, aNa^{-1} = N$ 。
- (3) $\forall a \in G, aNa^{-1} \subset N$ 。
- (4) $\forall a \in G, \forall n \in N, ana^{-1} \in N$ 。

证明 显然 (3) 和 (4) 等价。

(1) \Leftrightarrow (2): 一方面，设 N 是 G 的正规子群。则由引理 1.3 可得 $\forall a \in G, aNa^{-1} = N$ 。

另一方面，设 (2) 成立。则由引理 1.3 可得 $\forall a \in G, aN = Na$ 。

(1) \Leftrightarrow (3): 一方面，设 N 是 G 的正规子群。令 $a \in G$ ，则 $aN = Na$ 。同时右乘 a^{-1} 并取一半的包含关系，我们得到了 $aNa^{-1} \subset N$ 。

另一方面，设 (3) 成立。令 $a \in G$ ，则由 $aNa^{-1} \subset N$ 及引理 1.3 得到 $aN \subset Na$ ，由 $a^{-1}N(a^{-1})^{-1} \subset N$ 及引理 1.3 得到 $Na \subset aN$ 。因此， $aN = Na$ 。 \square

例题 1.6 证明: $SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$ 。

证明 显然 $SL(n, \mathbb{R}) < GL(n, \mathbb{R})$ 。任取 $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ， $N \in SL(n, \mathbb{R})$ ，都有

$$\det(ANA^{-1}) = \frac{\det(A)\det(N)}{\det(A)} = \det(N) = 1.$$

从而 $ANA^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$ 。故 $SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$ 。 \square

命题 1.37 (正规子群的任意交还是正规子群)

令 $(N_i)_{i \in I}$ 是一族 G 的正规子群，则它们的交集仍然是 G 的正规子群，即

$$\bigcap_{i \in I} N_i \triangleleft G.$$

证明 首先，由子群的任意交仍是子群可知 $\bigcap_{i \in I} N_i < G$ 。因此我们只需证明正规性。利用正规子群的等价条件

(3) 可知，对 $\forall a \in G, \forall n \in \bigcap_{i \in I} N_i$ ，我们只须证明 $ana^{-1} \in \bigcap_{i \in I} N_i$ 即可。任取 $i \in I$ ，则 $n \in N_i$ 。由于 $N_i \triangleleft G$ ，我们有 $ana^{-1} \in N_i$ 。因此，由 i 的任意性可知 $ana^{-1} \in \bigcap_{i \in I} N_i$ 。这就证明了 $\bigcap_{i \in I} N_i \triangleleft G$ 。 \square

命题 1.38

令 (G, \cdot) 是一个群，则

$$\begin{aligned} \{e\} &\triangleleft G, \\ G &\triangleleft G. \end{aligned}$$

证明 平凡群：怎么乘都是单位元，所以对乘法封闭；包含单位元；唯一的元素的逆元还是单位元；在这个群中， a 的左右陪集都是 $a\{e\} = \{e\}a = \{a\}$ 。因此， $\{e\} \triangleleft G$ 。

整个群：子群是显然的；在整个群 G 中，每个元素的左右陪集都是全集，即 $aG = Ga = G$ ，这是因为 $a \in G$ 。因此， $G \triangleleft G$ (推论 1.3)。 \square

推论 1.4

- (1) 若 G 是一个群, e 是其单位元, 则 $G/\{e\}$ 同构于 G , 即 $G/\{e\} \cong G$.
 (2) 若 G 是一个群, 则 G/G 是平凡群, 即 $G/G = \{e\}$.



证明

(1) 令

$$f: G \rightarrow G/\{e\}, a \mapsto a\{e\} = \{a\}.$$

显然 f 是双射。对 $\forall a, b \in G$, 我们都有

$$f(ab) = \{ab\} = ab\{e\} = (a\{e\})(b\{e\}) = \{a\}\{b\} = f(a)f(b).$$

因此 f 也是同态映射。于是 f 是同构映射。故 $G/\{e\} \cong G$ 。

- (2) 由命题 1.36 及命题 1.38 可知 G/G 是一个群。注意到 $\forall a \in G$, 都有 $aG = G$ 。因此 $G/G = G$ 。于是 $|G/G| = 1$ 。故 $G/G = \{e\}$ 。

□

命题 1.39

令 (G, \cdot) 是个阿贝尔群, 则子群就是正规子群, 正规子群也就是子群, 即

$$H < G \iff H \triangleleft G$$



证明 \Leftarrow : 由于正规子群都是子群, 故显然成立。

\Rightarrow : 根据阿贝尔群满足交换律可知 $aH = \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} = Ha$ 。

□

定理 1.3 (群同构第一定理)

设 $f: G \rightarrow G'$ 是一个群同态, 则 $\ker(f) \triangleleft G$, 且 G 在 $\ker(f)$ 上的商群同构于 $\text{im}(f)$, 即

$$G/\ker(f) \cong \text{im}(f).$$

特别地, 若 f 是满同态, 则

$$G/\ker(f) \cong G'.$$

若 f 是单同态, 则

$$G/\{e\} \cong G \cong \text{im}(f).$$

若 G 是有限群, 则

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{im}(f)|, \text{ 也即 } |G| = |\ker(f)||\text{im}(f)|.$$



证明 根据命题 1.16 和 Lagrange 定理, 这三条推论都是显然的, 唯一要说明的是 $G/\{e\}$ 为什么同构于 G , 这由推论 1.4(1) 可直接得到。这就意味着我们只须证明原命题即可。

首先要说明每个同态的核都是定义域的正规子群。要注意, 同态的像未必是正规子群, 往往只是普通的子群。我们只须证明, 若 $a \in G, n \in \ker(f)$, 则 $ana^{-1} \in \ker(f)$ 。注意到

$$f(ana^{-1}) = f(a)e'f(a)^{-1} = e'.$$

因此 $ana^{-1} \in \ker(f)$ 。这就证明了 $\ker(f) \triangleleft G$ 。

接下来, 我们要找到一个从商群 $G/\ker(f)$ 到像集 $\text{im}(f)$ 的同构映射。我们称这个映射叫 $\tilde{f}: G/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$, 对于 $a \in G$, 定义为

$$\tilde{f}(a\ker(f)) = f(a).$$

为了方便起见, 在不会引起歧义的情况下, 我们令 $N = \ker(f)$, 也即

$$\tilde{f}(aN) = f(a).$$

考虑到陪集代表元的不唯一性, 我们要证明良定义性. 假设 $aN = a'N$, 或 $a^{-1}a' \in N$, 只须证明 $f(a) = f(a')$, 而这是因为

$$f(a') = f(aa^{-1}a') = f(a)f(a^{-1}a') = f(a)f(eN) = f(a)e' = f(a).$$

其中 e 是 G 的单位元, e' 是 G' 的单位元. 这就证明了良定义性.

接下来, 我们要证明 \tilde{f} 既是同态, 也是双射 (单射 + 满射).

同态: 令 $a, b \in G$, 则 $\tilde{f}(aN) = f(a)$, $\tilde{f}(bN) = f(b)$, 而由 $N = \ker f \triangleleft G$ 及 f 是一个群同态可得

$$\tilde{f}((aN)(bN)) = \tilde{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \tilde{f}(aN)\tilde{f}(bN).$$

这就证明了 \tilde{f} 是一个同态.

单射: 只须证明 $\ker(\tilde{f}) = \{N\}$. 设 $\tilde{f}(aN) = e'$, 则根据定义, $f(a) = e'$, 故 $a \in \ker(f) = N$, 所以 $aN = N$, 这就证明了 \tilde{f} 是一个单射.

满射: 令 $a' \in \text{im}(f)$, 取 $a \in G$ 使得 $a' = f(a)$. 因此, $\tilde{f}(aN) = f(a) = a'$, 这就证明了 \tilde{f} 是一个满射.

综上所述, \tilde{f} 是一个从商群 $G/\ker(f)$ 到像集 $\text{im}(f)$ 的同构. 作为结论,

$$G/\ker(f) \cong \text{im}(f).$$

这就完成了整个命题的证明. □

 笔记

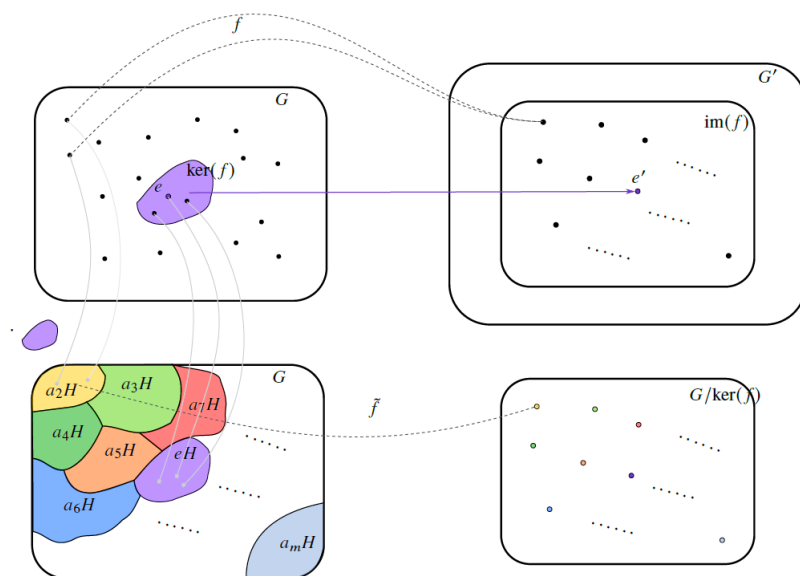


图 1.5: 群同构第一定理示意图

例题 1.7 证明: $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$.

证明 由命题 1.4 可知

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times.$$

是个满同态, 且 $\ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$, 故由群同构第一定理, 我们有

$$SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R}) \text{ 且 } GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times.$$

□

推论 1.5

设 G 是有限群, $f: G \rightarrow G'$ 是一个群同态, 则

$$|\operatorname{im} f| \mid \gcd(|G|, |G'|).$$

♡

证明 由群同构第一定理可知, $|\operatorname{im} f| \mid |G|$. 由 Lagrange 定理可知, $|\operatorname{im} f| \mid |G'|$. 故

$$|\operatorname{im} f| \mid \gcd(|G|, |G'|).$$

□

例题 1.8 设 $f: C_{12} \rightarrow C_{35}$ 是一个群同态, 求证: f 是平凡同态, 即对 $\forall x \in C_{12}$, 都有 $f(x) = e$, 也即 $\operatorname{im} f = \{e\}$, 其中 e 是 C_{35} 的单位元.

证明 由推论 1.5 可知, $|\operatorname{im} f| \mid \gcd(12, 35) = 1$. 又因为 $\operatorname{im} f < G'$, 所以 $\operatorname{im} f = \{e\}$. □

引理 1.7

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, $H < G$. 则 $HN < G$.

♡

证明 设 e 是 G 的单位元, 则由 $N \triangleleft G$, $H < G$ 可知, $e \in N \cap H$. 从而 $e = ee \in HN$.

对 $\forall h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN$, 其中 $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$. 由 $N \triangleleft G$, $H < G$ 可得

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 n_1 h_2^{-1} n_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} n_1 n_2^{-1} \in HN.$$

故 $HN < G$. □

定理 1.4 (群同构第二定理)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, $H < G$. 则 $H \cap N \triangleleft H$, $N \triangleleft HN$, 且

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

这和之前两个子群乘积的阶的公式是类似的.

♡

注 由引理 1.7 可知 $HN < G$. 故此时 $N \triangleleft HN$ 是有意义的.

证明 第一, 要证明 $H \cap N \triangleleft H$. 令 $h \in H$, 而 $x \in H \cap N$, 则 $h x h^{-1} \in H$, 而且因为 $N \triangleleft G$, $h x h^{-1} \in N$, 因此 $h x h^{-1} \in H \cap N$.

第二, 要证明 $N \triangleleft HN$. 令 $hn \in HN$, 而 $n' \in N$. 则由引理 1.6(2) 可得 $h n n' (hn)^{-1} = h (n n' n^{-1}) h^{-1} \in h N h^{-1} = N$.

第三, 要证明 $H/(H \cap N) \cong HN/N$. 令 $f: H \rightarrow HN/N$, 定义为

$$f(h) = hN.$$

这显然是良定义的. 又由 $N \triangleleft G$ 及引理 1.5 可知, 对 $\forall h_1, h_2 \in H$, 都有

$$f(h_1 h_2) = h_1 h_2 N = h_1 h_2 N N = h_1 N h_2 N = f(h_1) f(h_2).$$

故 f 是同态的. 根据 $HN/N = \{hnN : h \in H, n \in N\} = \{hN : h \in H\}$ 可知, f 还是个满同态.

接下来, 根据引理 1.4 可知, f 的核是 $\ker(f) = \{h \in H : hN = eN\} = \{h \in H : h \in N\} = H \cap N$. 因此, 根据群同构第一定理,

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

这就证明了群同构第二定理. □

定理 1.5 (群同构第三定理)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, $M \triangleleft G$, $M < N$. 则 $N/M \triangleleft G/M$, 且

$$(G/M)/(N/M) \cong G/N.$$

♡

证明 首先显然有 $N/M \subset G/M$ 。我们要注意 N/M 是个群，是要证明的。我们只须证明 $M \triangleleft N$ 。这几乎是显然的。由 $M \triangleleft G$ 可知，令 $n \in N \subset G$, $m \in M$, 则 $nmn^{-1} \in M$ 。因此 N/M 是个群。

因为这两个都是群，所以当然有 $N/M < G/M$ 。接下来我们可以先证明正规性，这也几乎是显然的。令 $nM \in N/M (n \in N)$, $gM \in G/M (g \in G)$, 则由 $M \triangleleft N, N \triangleleft G$ 可得

$$(gM)(nM)(gM)^{-1} = (gng^{-1})M \in \{nM : n \in N\} = N/M.$$

因此 $N/M \triangleleft G/M$ 。

那么，我们要定义 $f: G/M \rightarrow G/N$, 定义为

$$f(gM) = gN.$$

要证明良定义性。假设 $gM = g'M$, 则 $g^{-1}g' \in M$, 故 $g^{-1}g' \in N$, 所以 $gN = g'N$ 。

同态是显然的：对 $\forall gM, g'M \in G/M$, 都有

$$f(gMg'M) = f(gg'M) = gg'N = gNg'N = f(gM)f(g'M).$$

满同态几乎也是显然的。任取 $gN \in G/N (g \in G)$, 则 $f(gM) = gN$ 。

最后，注意到

$$\ker(f) = \{gM : f(gM) = gN = eN\} = \{gM : g \in N\} = N/M.$$

于是根据群同构第一定理，这就告诉我们

$$(G/M)/(N/M) \cong G/N.$$

综上所述，我们就证明了群同构第三定理。 □

1.5 群作用

定义 1.36 (置换群 (对称群))

令 S 是一个集合，则 S 上的**置换群** (或**对称群**)，记作 $(\text{Perm}(S), \circ)$ ，由所有 S 到自身的双射构成，而这里的运算是映射的复合运算。此即

$$\text{Perm}(S) = \{f : S \rightarrow S \text{ 双射}\}.$$

证明 首先，映射的复合是满足结合律的。这是根据定义立刻可知的。

单位元是恒等映射，记作 id ，对所有 $s \in S$ ，定义为

$$\text{id}(x) = x.$$

故显然有，对所有 $f \in \text{Perm}(S)$, $f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f$ 。

逆元是根据双射可知的。假如 f 是一个从 S 到自身的双射，则存在其逆映射 f^{-1} ，使得 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ 。

综上所述， $(\text{Perm}(S), \circ)$ 是个群，称为 S 上的置换群 (或对称群)。 □

例题 1.9 设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ，记 $S_n = \text{Perm}(S) = \{f : S \rightarrow S \text{ 双射}\}$ 。证明： $|S_n| = n!$ 。

证明 设 $f : S \rightarrow S$ 是双射，我们逐个定义 f 的像。首先， $f(1)$ 有 n 种不同的取法，取定 $f(1)$ 以后， $f(2)$ 就只有 $n-1$ 种不同的取法，否则 $f(1) = f(2)$ 与双射矛盾。依此类推，可知 $f(i)$ 就只有 $n+1-i$ 种不同的取法， $i = 1, 2, \dots, n$ 。故 f 就有 $n!$ 种不同的取法，即 $|S_n| = n!$ 。 □

命题 1.40

令 (G, \cdot) 是一个群，我们定义

$$\phi : (G, \cdot) \rightarrow (\text{Perm}(G), \circ), x \mapsto \phi_x.$$

其中 $\phi_x : G \rightarrow G, y \mapsto xy$ 。则 ϕ 是个群同态。 ♣

证明 证明是很简单的。令 $x, y \in G$, 对于 $z \in G$, 我们有

$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = x(yz) = (xy)z = \phi_{xy}(z)$$

由于这对于所有 $z \in G$ 都成立, 故

$$\phi_x \circ \phi_y = \phi_{xy}$$

即

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

这就证明了 $\phi: G \rightarrow \text{Perm}(G)$ 是个群同态。 □

定义 1.37 (群作用)

令 (G, \cdot) 是一个群, S 是一个非空集合, 而 $\phi: G \rightarrow \text{Perm}(S)$ 。若 ϕ 是一个群同态, 则我们说 ϕ 是 G 在 (集合) S 上的群作用。

命题 1.41 (群作用的等价条件)

设 G 是一个群, S 是一个非空集合。

(1) 若 ϕ 是 G 在 S 的群作用, 记 $\text{Perm}(S) = \{\phi_x : x \in G\}$, 则一定满足

$$\forall s \in S, e \cdot s = s, \text{ 即 } \forall s \in S, \phi_e(s) = s.$$

$$\forall x, y \in G, \forall s \in S, x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s, \text{ 即 } \forall x, y \in G, \forall s \in S, \phi_x(\phi_y(s)) = (\phi_x \circ \phi_y)(s) = \phi_{xy}(s).$$

(2) 若 $\phi: G \times S \rightarrow S$ 是满足

$$\forall s \in S, e \cdot s = s, \text{ 即 } \forall s \in S, \phi(e, s) = s.$$

$$\forall x, y \in G, \forall s \in S, x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s, \text{ 即 } \forall x, y \in G, \forall s \in S, \phi(x, \phi(y, s)) = \phi(xy, s).$$

的映射, 则一定存在一个 G 在 S 上的群作用 $\tilde{\phi}$ 。

注 这里我们用 $x \cdot s$, 甚至 xs , 来代表 $\phi_x(s)$, 或 $\phi(x, s)$ (其中 $x \in G, s \in S$)。

笔记 命题中的第一条性质, 是说明 ϕ 是良定义的 (ϕ_x 是双射), 而第二条性质是说明 ϕ 是同态。二者缺一不可。这两条性质加起来, 就是群作用的定义。

证明

(1) 若 ϕ 是一个群作用, 则显然利用同态的性质我们有第二条。而根据同态把单位元映到单位元, 我们有 $\phi_e = \text{id}$, 即对所有 $s \in S, es = s$ 。这就证明了 (1)。

(2) 对 $\forall x \in G$, 令

$$\phi_x: S \rightarrow S, s \mapsto \phi(x, s) = xs,$$

$$\phi_{x^{-1}}: S \rightarrow S, s \mapsto \phi(x^{-1}, s) = x^{-1}s.$$

从而由假设可知, 对 $\forall s \in S$, 都有

$$\phi_x \circ \phi_{x^{-1}}(s) = xx^{-1}s = es = s,$$

$$\phi_{x^{-1}}(s) \circ \phi_x = x^{-1}xs = es = s.$$

因此 $\phi_{x^{-1}}$ 是 ϕ_x 的逆映射, 故对 $\forall x \in G, \phi_x$ 都是双射。于是 $\{\phi_x : x \in G\} \subset \text{Perm}(S)$ 。令

$$\tilde{\phi}: G \rightarrow \text{Perm}(S), x \mapsto \phi_x.$$

由假设可知, 对 $\forall x, y \in G, \forall s \in S$, 都有

$$x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s \Leftrightarrow (\phi_x \circ \phi_y)(s) = \phi_{xy}(s).$$

因此 $\phi_{xy} = \phi_x \phi_y, \forall x, y \in G$ 。故 $\tilde{\phi}(xy) = \tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y), \forall x, y \in G$ 。即 $\tilde{\phi}$ 是群同态。进而 $\tilde{\phi}$ 就是 G 在 S 上的一个群作用。

□

定义 1.38 (共轭作用)

令 (G, \cdot) 是一个群，我们对 $x \in G$ ，定义 $\phi_x \in \text{Perm}(G)$ ，对 $y \in G$ ，定义为

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

则 $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ ，对 $x \in G$ ，定义为 $\phi(x) = \phi_x$ ，被称为 G 的**共轭作用**。

♣

命题 1.42

令 (G, \cdot) 是一个群，则 G 的共轭作用是 G 在自身的一个群作用。

♣

证明 首先，我们要说明 ϕ_x 是双射，而这是显然的，因为其逆是 $\phi_{x^{-1}}$ 。而这是因为，对于 $y \in G$ ，

$$(\phi_x \circ \phi_{x^{-1}})(y) = \phi_x(x^{-1}yx) = x(x^{-1}yx)x^{-1} = y$$

$$(\phi_{x^{-1}} \circ \phi_x)(y) = \phi_{x^{-1}}(xyx^{-1}) = x^{-1}(xyx^{-1})x = y$$

这样， $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ 就是良定义的。接下来，我们证明 ϕ 是个同态。令 $x, y \in G$ ， $z \in G$ ，则

$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = \phi_x(yzy^{-1}) = x(yzy^{-1})x^{-1} = (xy)z(xy)^{-1} = \phi_{xy}(z)$$

这对所有 $z \in G$ 都成立，故

$$\phi_{xy} = \phi_x \circ \phi_y$$

即

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

这就证明了共轭作用确实是一个群在自身的群作用。

□

命题 1.43

令 (G, \cdot) 是一个群， $x \in G$ ，则 $\phi_x : G \rightarrow G$ ，对 $y \in G$ ，定义为

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

是一个群 G 的自同构（即到自身的同构）。

♣

证明 由命题 1.42 的证明可知 ϕ_x 一定是双射，因为它的逆是 $\phi_{x^{-1}}$ 。因此我们只须证明 ϕ_x 本身还是个同态（不是说 ϕ 是同态，而是说每个 ϕ_x 是同态）。因此我们令 $y, z \in G$ ，只须证明 $\phi_x(yz) = \phi_x(y)\phi_x(z)$ 。而这是因为

$$\phi_x(y)\phi_x(z) = (xyx^{-1})(xzx^{-1}) = x(yz)x^{-1} = \phi_x(yz).$$

恰好约掉。这就证明了共轭作用下的每一个 ϕ_x 都是群 G 的自同构。

□

定义 1.39 (内自同构与外自同构)

令 (G, \cdot) 是一个群，则一个 G 的（由 $x \in G$ 引出的）**内自同构**，指的是 $\phi_x : G \rightarrow G$ ，对 $y \in G$ ，定义为

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

而其他所有 G 上的自同构，则称为 G 上的**外自同构**。

♣

定义 1.40 (轨道与稳定化子)

令 $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (\text{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用。若 $s \in S$ 。则我们定义 s 的**轨道**，记作 $\text{Orb}(s)$ ，定义为

$$\text{Orb}(s) = \{s' \in S : \exists x \in G, s' = xs\} = \{xs : x \in G\}.$$

我们定义 s 的**稳定化子**，记作 $\text{Stab}(s)$ ，定义为

$$\text{Stab}(s) = \{x \in G : xs = s\}.$$

♣

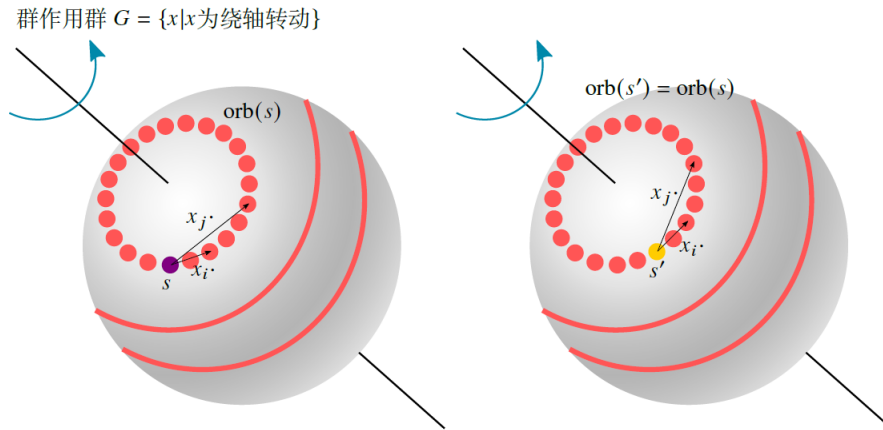


图 1.6: 群作用与轨道

命题 1.44

令 $\phi: (G, \cdot) \rightarrow (\text{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用, 而 $s, s' \in S$, 则 $\text{Orb}(s)$ 与 $\text{Orb}(s')$ 要么相等, 要么无交。因此, S 可以写成轨道的无交并。

证明 假设它们有交集, 即假设 $s'' \in \text{Orb}(s) \cap \text{Orb}(s')$ 。进一步, 我们找到 $x, x' \in G$, 使得 $s'' = xs = x's'$ 。根据对称性, 我们只须证明 $\text{Orb}(s) \subset \text{Orb}(s')$ 。

任取 $ys \in \text{Orb}(s) (y \in G)$, 则

$$ys = (yx^{-1})xs = (yx^{-1})x's' = (yx^{-1}x')s' \in \text{Orb}(s')$$

根据对称性, 我们就知道 $\text{Orb}(s) = \text{Orb}(s')$ 。 □

引理 1.8

令 $\phi: (G, \cdot) \rightarrow (\text{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用, $s \in S$, $x, y \in G$, 则 $xs = ys$ 当且仅当 $x^{-1}y \in \text{Stab}(s)$ 。 ♥

证明 对 $xs = ys$ 两边同时左乘 x^{-1} , 就显然了。 □

定理 1.6 (轨道 - 稳定化子定理)

令 $\phi: (G, \cdot) \rightarrow (\text{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用, $s \in S$, 则存在 $G/\text{Stab}(s)$ 到 $\text{Orb}(s)$ 的双射。特别地, 若 G 是有限群, 则

$$|G| = |\text{Stab}(s)| \cdot |\text{Orb}(s)|.$$

证明 令 $f: G/\text{Stab}(s) \rightarrow \text{Orb}(s)$, 定义为 $f(x \text{Stab}(s)) = xs$ 。

首先证明 f 是良定义的。根据上面的引理, 若 $x \text{Stab}(s) = y \text{Stab}(s)$, 则 $x^{-1}y \in \text{Stab}(s)$, 故 $xs = ys$ 。

根据 $\text{Orb}(s)$ 的定义, f 显然是一个满射。

单射则是再次利用上面的引理。若 $xs = ys$, 则 $x^{-1}y \in \text{Stab}(s)$, 故 $x \text{Stab}(s) = y \text{Stab}(s)$ 。

假如 G 是有限群, 则同时取集合大小, 就得到了

$$|G| = |\text{Stab}(s)| \cdot |\text{Orb}(s)|$$

综上, 我们就证明了轨道 - 稳定化子定理。 □

定义 1.41

二面体群 D_{2n} , 它是由所有正 n 边形到自身的对称变换所构成的。

对称变换就是把自身映到自身, 而且是保距的。

保距指的是, 原先距离相同的点, 变换后距离仍然相同。 ♣

 **笔记** 如图 1.7 中的例子.

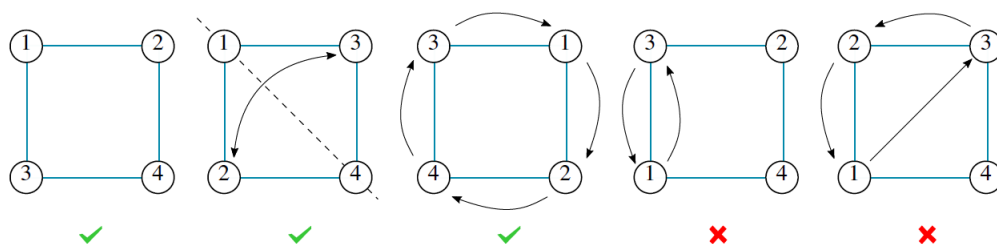



图 1.7: 置换群中的对称变换

例题 1.10 $|D_{2n}| = 2n$.

 **笔记** 事实上, 每一个对称变换由其 n 个顶点的像唯一确定, 因为其余的点都可以通过顶点来找到位置。很明显, D_{2n} 中的元素都是个轴对称图形, 有 n 个翻折变换; 这还是个中心对称图形, 有 n 个旋转变换。由此可知, 二面体群 D_{2n} 就是恰好由 n 个翻折变换和 n 个旋转变换所组成的群。

证明 任取正多边形的一个顶点 s , 考虑其轨道 $\text{Orb}(s)$ 。最多只有 n 个顶点可以去, 而 n 个旋转变换恰好带 s 去了这些顶点, 因此 $|\text{Orb}(s)| = n$ 。

接下来, 考虑其稳定化子 $\text{Stab}(s)$ 。如果 $x \in D_{2n}$ 把 s 映射到 s , 但又有保证是一个等距变换, 则 s 相邻的两个顶点一定要被映射到这两个顶点。其中一个为恒等变换, 而另一个是沿 s 所在的对称轴的翻折变换。不难看出, 这两个是唯一的 s 的稳定化子。因此 $|\text{Stab}(s)| = 2$ 。

根据定理 1.6, $|D_{2n}| = |\text{Orb}(s)| \cdot |\text{Stab}(s)| = 2n$ 。这就证明了这个命题。

□