0.1 定义、定理和命题

命题 0.1 (行列式计算常识)

(1) $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$; $\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$.

(2) 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转 (**行倒排**)、或左右翻转 (**列倒排**) 分别得到 D_1、D_2; 把 D **逆时针旋转** 90°、或**顺时针旋转** 90° 分别得到 D_3、D_4; 把 D **依副对角线翻转**、或**依主对角线翻转**分别得到 D_5、D_6. 易知

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D,$$
$$D_5 = D_6 = D.$$

(3) 设 $A = (a_{i,j})$ 为 n 阶复矩阵, 则一定有 $|A| = \overline{|A|}$.

(4) 若 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|B|$ 是 m 阶行列式, 它们的值都不为零, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

证明 (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

(2) $$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{r_i \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{j_i \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{j_i \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}a_{n1}&\cdots&a_{11}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{nn}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_5=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{逆时针旋转}90^\circ}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{11}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{nn}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

$$D_6=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{顺时针旋转}90^\circ}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法:$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$,$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, 故由行列式的组合定义可得

$$\begin{aligned}|A|&=\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}\\&=\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}\overline{a_{k_11}}\cdot\overline{a_{k_22}}\cdots\overline{a_{k_nn}}=|\overline{A}|.\end{aligned}$$

(4) 将 $|A|$ 的第一列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,⋯, 第一列对换, 共换了 m 次; 再将 $|A|$ 的第二列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,⋯, 第一列对换, 又换了 m 次;⋯. 依次类推, 经过 mn 次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此 $|D|=(-1)^{mn}|C|$, 于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}.$$

□

命题 0.2 (奇数阶反对称行列式的值等于零)

如果 n 阶行列式 $|A|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(1\le i,j\le n)$, 则称为反对称行列式. 求证: 奇数阶反对称行列式的值等于零.

笔记 证法二的想法是将行列式按组合的定义写成 (n-1)! 个单项的和. 然后将其两两分组再求和 (因为一共有 (n-1)! 个单项, 即和式中共有偶数个单项, 所以只要使用合适的分组方式就一定能够将其两两分组再求和), 最后发现每组的和均为 0.

构造的这个映射 φ 的目的是为了更加准确、严谨地说明分组的方式. 证明这个映射 φ 是一个双射是为了保证原来的和式中的每一个单项都能与和式中另一个单项一一对应. 然后利用反证法证明了这两个一一对应的单项一定互不相同 (**注: 我认为这步有些多余. 这里应该只需要说明这两个一一对应的单项是原和式中不同的单项即可, 即这两个单项的角标不完全相同就行, 其实, 这个在我们定义映射 φ 的时候就已经满足了. 满足这个条件就足以说明原和式可以按照这种方式进行分组. 并且利用反对称行列式的性质也能够证明这两个单项不仅互不相同, 还能进一步得到这两个单项互为相反数**). 于是我们就可以将原和式中的每一个单项与其在双射 φ 作用下的像看成一组, 按照这种方式就可以将原和式进行分组再求和.

证明 证法一 (行列式的性质): 由反对称行列式的定义可知,$|A|$ 的转置 $|A'|$ 与 $|A|$ 的每个元素都相差一个符号, 将 $|A'|$ 的每一行都提出公因子 -1 可得 $|A|=|A'|=(-1)^n|A|=-|A|$, 从而 $|A|=0$.

证法二 (行列式的组合定义): 由于 $|A|$ 的主对角元全为 0, 故由组合定义, 只需考虑下列单项:

$$T=\{a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}\mid k_i\ne i(1\le i\le n)\}$$

定义映射 $\varphi:T\to T$,$a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}\mapsto a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$. 显然 $\varphi^2=\mathrm{Id}_T$, 于是 φ 是一个双射. 我们断言:$a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$

和 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 作为 $|A|$ 的单项不相同, 否则 $\{1,2,\cdots,n\}$ 必可分成若干对 $(i_1,j_1),\cdots,(i_t,j_t)$, 使得 $a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = a_{i_1 j_1}a_{j_1 i_1}\cdots a_{i_t j_t}a_{j_t i_t}$, 这与 n 为奇数矛盾. 将上述两个单项看成一组, 则它们在 $|A|$ 中符号均为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$. 由于 $|A|$ 反对称, 故

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} = (-1)^n a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = -a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

从而每组和为 0, 于是 $|A| = 0$. □

命题 0.3 (" 爪" 型行列式)

证明 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n b_i c_i.$$

笔记 记忆" 爪" 型行列式的计算方法和结论.

证明 当 $a_i \neq 0\,(\forall i \in [2,n]\cap\mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{\left(-\frac{c_i}{a_i}\right)j_i+j_1} \begin{vmatrix} a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n} a_i = a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n b_i c_i.$$

当 $\exists i \in [2,n]\cap\mathbb{N}\ s.t.\ a_i = 0$ 时, 则 $a_1a_2\cdots a_n - \sum\limits_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i = -a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i$. 此时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ c_{i-1} & & & a_{i-1} & & & & \\ c_i & & & & 0 & & & \\ c_{i+1} & & & & & a_{i+1} & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ c_n & & & & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{(按}c_i\text{所在行展开)}]{\text{按第}i\text{行展开}} (-1)^{i+1}c_i \begin{vmatrix} b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ a_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & a_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{(按}b_i\text{所在列展开)}]{\text{按第}i-1\text{列展开}} (-1)^{i+1}(-1)^i b_ic_i \begin{vmatrix} a_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} = -a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

综上所述, 原命题得证. □

命题 0.4 (分块" 爪" 型行列式)

计算 n 阶行列式 $(a_{ii} \neq 0, i = k+1, k+2, \cdots, n)$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

笔记 记忆分块" 爪" 型行列式的计算方法即可, 计算方法和" 爪" 型行列式的计算方法类似.

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=k+1,k+2,\cdots,n]{-\frac{a_{i1}}{a_{ii}} j_i + j_1, -\frac{a_{i2}}{a_{ii}} j_i + j_2, \cdots, -\frac{a_{in}}{a_{ii}} j_i + j_k} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C & B \\ O & \Lambda \end{vmatrix} = |C| \cdot |\Lambda| = |C| \prod_{i=k+1}^{n} a_{ii}.$$

其中 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} a_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$. 并且 $c_{pq} = a_{pq} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_{iq} a_{pi}}{a_{ii}}, p, q = 1, 2, \cdots, n.$ □

推论 0.1 (" 爪" 型行列式的推广)

计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 这是一个有用的模板 (即**行列式除了主对角元素外, 每行都一样**).

记忆该命题的计算方法即可. 即先化为" 爪" 型行列式, 再利用" 爪" 型行列式的计算结果.

解 当 $a_i \neq 0\,(\forall i \in [2,n] \cap \mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题0.3}} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 x_i}{a_i}\right] \prod_{i=2}^{n} (-a_i) = (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 x_i}{a_i}\right] \prod_{i=2}^{n} a_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right].$$

当 $\exists i \in [2,n] \cap \mathbb{N}\ s.t.\ a_i = 0$ 时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题0.3}} (x_1 - a_1)(-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n) - \sum_{i=2}^{n} (-a_2)\cdots\widehat{(-a_i)}\cdots(-a_n) a_1 x_i$$

$$= (-1)^{n-1} (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^{n-1} \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right].$$

综上所述,$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right]$. □

命题 0.5

设 $|A| = |a_i|$ 是一个 n 阶行列式,A_{ij} 是它的第 (i,j) 元素的代数余子式, 求证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z|\boldsymbol{A}| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.$$

笔记 根据这个命题可以得到一个**关于行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有代数余子式求和的构造**:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta_1} & 1 \\ \boldsymbol{\beta_2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta_n} & 1 \\ \mathbf{1}' & 0 \end{vmatrix}.$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$,$|\boldsymbol{A}|$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta_n}$. 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量,$\mathbf{1}'$ 表示 $\mathbf{1}$ 的转置. (令上述命题中的 $z = 0, x_i = y_i = 1, i = 1, 2, \cdots, n$ 即可得到.)

注 如果需要证明的是矩阵的代数余子式的相关命题, 我们可以考虑一下这种构造, 即令上述命题中的 $z=0$ 并且待定/任取 x_i, y_i.

证明 证法一: 将上述行列式先按最后一列展开, 展开式的第一项为

$$(-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

再将上式按最后一行展开得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+2} x_1 \left[(-1)^{n+1} (-1)^{1+1} y_1 A_{11} + (-1)^{n+2} (-1)^{1+2} y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{1+n} y_n A_{1n}\right] \\ &= (-1)^{n+2} x_1 (-1)^{n+1} \left[(-1)^2 y_1 A_{11} + (-1)^4 y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{2n} y_n A_{1n}\right] \\ &= -x_1 \left(y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \cdots + y_n A_{1n}\right) \\ &= -x_1 \sum_{j=1}^{n} y_j A_{1j}. \end{aligned}$$

同理可得原行列式展开式的第 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 项为

$$(-1)^{n+1+i} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

将上式按最后一行展开得到 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1+i} x_i \left[(-1)^{n+1} (-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{n+2} (-1)^{i+2} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{i+n} y_n A_{in}\right] \\ &= (-1)^{n+1+i} x_i (-1)^{n+1} \left[(-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{i+2+1} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n+n-1} y_n A_{in}\right] \\ &= (-1)^{2i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{2i+3} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{2i+2n-1} y_n A_{in} \\ &= -x_i \left(y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots + y_n A_{in}\right) \\ &= -x_i \sum_{j=1}^{n} y_j A_{ij}. \end{aligned}$$

而展开式的最后一项为 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

因此, 原行列式的值为

$$z|\boldsymbol{A}| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.$$

证法二:设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)', \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$. 若 A 是非异阵, 则由降阶公式可得

$$\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = |A|(z-\boldsymbol{y}'A^{-1}\boldsymbol{x}) = z|A| - \boldsymbol{y}'A^*\boldsymbol{x}.$$

对于一般的方阵 A, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_k I_n + A$ 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = z|t_k I_n + A| - \boldsymbol{y}'(t_k I_n + A)^*\boldsymbol{x}.$$

注意到上式两边都是关于 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有

$$\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = z|A| - \boldsymbol{y}'A^*\boldsymbol{x} = z|A| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

□

例题 0.1 设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$,$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 求证:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ a_{31}-a_{32} & a_{32}-a_{33} & \cdots & a_{3,n-1}-a_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

证明 证法一:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量. 则

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n}, 1| \xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{j_i+j_{i-1}} |\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n}, 1|.$$

将最后一列写成 $(\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}$, 进行拆分可得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\alpha_n, (\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}| \\ &= |\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}| - |\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\alpha_n}| \\ &= |\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}| - |\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}, \boldsymbol{\alpha_n}|. \end{aligned}$$

根据行列式的性质将 $|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 1 所在的列展开得到

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}| - |\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}, \boldsymbol{\alpha_n}| \\ &= |\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}, \boldsymbol{\alpha_n}| + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} - |\boldsymbol{\alpha_1}, \alpha_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}, \boldsymbol{\alpha_n}| = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}. \end{aligned}$$

证法二:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量.注意到

$$-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

依次将第 i 列乘以 -1 加到第 $i-1$ 列上去 $(i = 2, 3, \cdots, n)$, 再按第 $n+1$ 行展开可得

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n} & \boldsymbol{\alpha_n} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n}, 1| = -|\boldsymbol{B}|. \end{aligned}$$

结论得证. □

例题 0.2 设 n 阶矩阵 A 的每一行、每一列的元素之和都为零, 证明:A 的每个元素的代数余子式都相等.

证明 证法一:设 $A = (a_{ij})$,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 不妨设 x_iy_j 均不相同,$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 考虑如下 $n+1$ 阶矩阵的行列式求值:

$$B = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & 0 \end{pmatrix}$$

一方面, 由命题 0.5可得 $|B| = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j$. 另一方面, 先把行列式 $|B|$ 的第二行,$\cdots$, 第 n 行全部加到第一行

上;再将第二列,⋯,第 n 列全部加到第一列上,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

依次按照第一行和第一列进行展开,可得 $|B| = -A_{11}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j$. 比较上述两个结果,又由于 $x_i y_j$ 均不相同,因此可得 A 的所有代数余子式都相等.

证法二:由假设可知 $|\boldsymbol{A}| = 0$(每行元素全部加到第一行即得),从而 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n-1$,则 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于零,结论显然成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和都等于零,所以由命题**??**可知,我们可以选取 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)'$ 作为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由命题**??**的证明可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列与 $\boldsymbol{\alpha}$ 成比例,特别地,$\boldsymbol{A}^*$ 的每一行都相等. 对 $\boldsymbol{A}'$ 重复上面的讨论,可得 $(\boldsymbol{A}')^*$ 的每一行都相等. 注意到 $(\boldsymbol{A}')^* = (\boldsymbol{A}^*)'$,从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都相等,于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij} 都相等. □

命题 0.6 (三对角行列式)

求下列行列式的递推关系式 (空白处均为 0):

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 记忆三对角行列式的计算方法和结果: $\boldsymbol{D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}(n \geq 2)}$,即按最后一列 (或行) 展开得到递推公式.

解 显然 $D_0 = 1, D_1 = a_1$. 当 $n \geq 2$ 时,我们有

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按最后一列展开}} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & 0 & c_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二项按最后展开}} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1}c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$= a_nD_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}.$

□

推论 0.2

计算 n 阶行列式 $(bc \neq 0)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

♡

笔记 解递推式:$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}(n \geq 2)$ 对应的特征方程:$x^2 - ax + bc = 0$ 得到两根 $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$, 由 Vieta 定理可知 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$.

若 a, b, c 均为复数, 则上述特征方程

解 由命题 0.6可知, 递推式为 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}(n \geq 2)$. 又易知 $D_0 = 1, D_1 = a$. 令 $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$, 则 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$, 于是 $D_n = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}(n \geq 2)$. 从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}).$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-1} (D_1 - \alpha D_0) = \beta^{n-1} (a - \alpha) = \beta^n,$$
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-1} (D_1 - \beta D_0) = \alpha^{n-1} (a - \beta) = \alpha^n.$$

因此, 若 $a^2 \neq 4bc$(即$\alpha \neq \beta$), 则联立上面两式, 解得

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若 $a^2=4bc$(即$\alpha=\beta$), 则由 $a=\alpha+\beta$ 可知,$\alpha=\beta=\dfrac{a}{2}$. 又由 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n$ 可得

$$D_n=\left(\frac{a}{2}\right)^n+\frac{a}{2}D_{n-1}=\left(\frac{a}{2}\right)^n+\frac{a}{2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}+\frac{a}{2}D_{n-2}\right)=2\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^2D_{n-2}=\cdots=n\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^nD_0=(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

综上, 我们有

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, a^2\neq 4bc,\\ (n+1)\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n, a^2=4bc.\end{cases}$$

□

命题 0.7 (大拆分法)

设 t 是一个参数,

$$|A(t)|=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)|=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A(0)|$ 中的代数余子式.

笔记 大拆分法的想法: **将行列式的每一行/列拆分成两行/列**, 得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=|\boldsymbol{A}(0)|+t\sum_{j=1}^{n}|A_j|.\text{其中}A_j=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & \cdots & i & \cdots & n\end{array}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}, j=1,2,\cdots,n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成 2^n 个行列式.(不一定需要公共的 t). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1 加到后面每一列上, 得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开, 不断这样做下去就可得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}(0)|+\sum_{j=1}^{n}|A_j|.$$

其中 $A_j=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$, $j=1,2,\cdots,n$. 将 A_j 按第 j 列展开可得

$$A_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=t\left(A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}\right)=t\sum_{i=1}^{n}A_{ij}.$$

从而

$$|\boldsymbol{A}(t)|=|\boldsymbol{A}(0)|+\sum_{i=1}^{n}A_i=|\boldsymbol{A}(0)|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=|\boldsymbol{A}(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

□

推论 0.3 (推广的大拆分法)

设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1,t_2,\cdots,t_n)|=\begin{vmatrix} a_{11}+t_1 & a_{12}+t_2 & \cdots & a_{1n}+t_n \\ a_{21}+t_1 & a_{22}+t_2 & \cdots & a_{2n}+t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t_1 & a_{n2}+t_2 & \cdots & a_{nn}+t_n \end{vmatrix}=|A|+\sum_{j=1}^{n}\left(t_j\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\right).$$

笔记 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即**将行列式的每一行/列拆分成两行/列**).

这里推广的大拆分法的关键也是**要找到合适的** $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 运用大拆分法的证明方法不难得到. □

命题 0.8 (小拆分法)

设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且 a_{in} 可以拆分成 $b_{in}+c_{in}$, $i=1,2,\cdots,n$.
则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_{1n}+c_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_{2n}+c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_{nn}+c_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&c_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}.$$

笔记 记忆小拆分法的想法 (即**拆边列/行, 再展开得到递推式**).

注 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列, 则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方法将这一行或一列变成最后一列, 再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 由行列式的性质可直接得到结论. □

命题 0.9

计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1&y&y&\cdots&y&y\\z&x_2&y&\cdots&y&y\\z&z&x_3&\cdots&y&y\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&z&\cdots&x_{n-1}&y\\z&z&z&\cdots&z&x_n\end{vmatrix}.$$

笔记 解法二: $f(x)\triangleq\begin{vmatrix}x_1+x&y+x&\cdots&y+x\\z+x&x_2+x&\cdots&y+x\\\vdots&\vdots&&\vdots\\z+x&z+x&\cdots&x_n+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+x&y+x&\cdots&y+x\\z-x_1&x_2-y&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\z-x_1&z-y&\cdots&x_n-y\end{vmatrix}$, 再按第一行展开可得 $f(x)$ 一定为关于 x 的线性函数.

解 解法一(小拆分法): 对第 n 列进行拆分即可得到递推式: (对第 1 或 n 行 (或列) 拆分都可以得到相同结果)

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1&y&y&\cdots&y&y+0\\z&x_2&y&\cdots&y&y+0\\z&z&x_3&\cdots&y&y+0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&z&\cdots&x_{n-1}&y+0\\z&z&z&\cdots&z&y+x_n-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y&y&\cdots&y&y\\z&x_2&y&\cdots&y&y\\z&z&x_3&\cdots&y&y\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&z&\cdots&x_{n-1}&y\\z&z&z&\cdots&z&y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&y&y&\cdots&y&0\\z&x_2&y&\cdots&y&0\\z&z&x_3&\cdots&y&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&z&\cdots&x_{n-1}&0\\z&z&z&\cdots&z&x_n-y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1-z&0&0&\cdots&0&0\\0&x_2-z&0&\cdots&0&0\\0&0&x_3-z&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x_{n-1}-z&0\\z&z&z&\cdots&z&y\end{vmatrix}+(x_n-y)\,D_{n-1}=y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-z)+(x_n-y)\,D_{n-1}. \tag{1}$$

将原行列式转置后，同理可得

$$D_n=D_n^T=\begin{vmatrix}x_1&z&z&\cdots&z&z+0\\y&x_2&z&\cdots&z&z+0\\y&y&x_3&\cdots&z&z+0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\y&y&y&\cdots&x_{n-1}&z+0\\y&y&y&\cdots&y&z+x_n-z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&z&z&\cdots&z&z\\y&x_2&z&\cdots&z&z\\y&y&x_3&\cdots&z&z\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\y&y&y&\cdots&x_{n-1}&z\\y&y&y&\cdots&y&z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&z&z&\cdots&z&0\\y&x_2&z&\cdots&z&0\\y&y&x_3&\cdots&z&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\y&y&y&\cdots&x_{n-1}&0\\y&y&y&\cdots&y&x_n-z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1-y&0&0&\cdots&0&0\\0&x_2-y&0&\cdots&0&0\\0&0&x_3-y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x_{n-1}-y&0\\y&y&y&\cdots&y&z\end{vmatrix}+(x_n-z)\,D_{n-1}^T=z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-z)\,D_{n-1}. \tag{2}$$

若 $z\neq y$，则联立(1)(2)式，解得

$$D_n=\frac{1}{z-y}\left[z\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)-y\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)\right];$$

若 $z=y$，则由(1)式递推可得

$$\begin{aligned}D_n&=y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\,D_{n-1}\\&=y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\left(y\prod_{i=1}^{n-2}(x_i-y)+(x_{n-1}-y)\,D_{n-2}\right)\\&=y\prod_{j\neq n}(x_i-y)+y\prod_{j\neq n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\,(x_{n-1}-y)\,D_{n-2}\\&=\cdots=y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)D_0\\&=y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).\end{aligned}$$

解法二(大拆分法):令 $f(x)\triangleq\begin{vmatrix}x_1+x&y+x&\cdots&y+x\\z+x&x_2+x&\cdots&y+x\\\vdots&\vdots&&\vdots\\z+x&z+x&\cdots&x_n+x\end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 一定是线性函数，从而设 $f(x)=ax+b$. 注意到

$$f(-z)=\begin{vmatrix}x_1-z&y-z&\cdots&y-z\\0&x_2-z&\cdots&y-z\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x_n-z\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-z),\quad f(-y)=\begin{vmatrix}x_1-y&0&\cdots&0\\z-y&x_2-y&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\z-y&z-y&\cdots&x_n-y\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).$$

当 $y\neq z$ 时，将上式代入 $f(x)=ax+b$(即线性函数 $f(x)$ 过两点 $(-y,f(-y))$,$(-z,f(-z))$，再利用两点式) 解得

$$f(x)=\frac{f(-z)-f(-y)}{-z-(-y)}(x+y)+f(-y)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-z)-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-y)}{y-z}(x+y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).$$

从而此时就有

$$D_n = f(0) = \frac{y\prod_{i=1}^{n}(x_i - z) - z\prod_{i=1}^{n}(x_i - y)}{y - z}. \tag{3}$$

当 $y=z$ 时，将 D_n 看作关于 y 的连续函数，记为 $g(y)=D_n$，则此时由 g 的连续性及(3)式和 L'Hospital 法则可得

$$D_n = g(z) = \lim_{y\to z} g(y) = \lim_{y\to z}\frac{y\prod_{i=1}^{n}(x_i - z) - z\prod_{i=1}^{n}(x_i - y)}{y - z}$$

$$= \lim_{y\to z}\frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i - z) + y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j - y)}{1} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - z) + z\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j - z).$$

□

例题 0.3

(1) 计算

$$|B| = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{vmatrix}.$$

(2) 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

笔记 (2)解法一中不仅使用了升阶法还使用了分块"爪"型行列式的计算方法. 观察到各行各列有不同的公共项, 因此可以利用升阶法将各行各列的公共项消去.

注 (2) 不妨设的原因: 若只有 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m} = 0, i_1, i_2, \cdots, i_m \in 1, 2, \cdots, n$, 则可将 $|A|$ 看作关于 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ 连续的多元多项式函数 $g(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$, 于是由 g 的连续性可得 $g(0,0,\cdots,0) = \lim\limits_{(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m})\to(0,0,\cdots,0)} g(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$. 因此就可以由 $a_i \neq 0 (1 \le i \le n)$ 时的行列式 $|A|$ 的值, 推出只有 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m} = 0, i_1, i_2, \cdots, i_m \in 1, 2, \cdots, n$ 时的行列式 $|A|$ 的值. 故可以这样不妨设.

解

(1) 注意到 $B = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. 由 Cauchy-Binet 公式可知, $|B| = \begin{cases} 0, & n \ge 3, \\ -(a_1-a_2)^2, & n = 2, \\ 2a_1, & n = 1. \end{cases}$.

(2) 不妨设 $a_i \neq 0 (1 \le i \le n)$.

解法一 (升阶法):

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n+1]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ -a_2 & 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,3,4\cdots,n+2]{j_1+j_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4\cdots,n+2]{\substack{-\frac{1}{2}j_i+j_1 \\ \frac{1}{2a_{i-2}}j_i+j_2}} \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{S}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{T}{2} & 1-\frac{n}{2} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$. 注意到上述行列式是分块上三角行列式, 从而可得

$$|\boldsymbol{A}| = (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{(n-2)^2 - ST}{4} = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})].$$

解法二 (直接计算两个矩阵和的行列式)(不推荐使用!):

设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|$.

从而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right) \tag{4}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式.

我们先来计算 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$,$k=1,2,\cdots,n$. 拆分 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的第一列得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{i_1}+a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2}+a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k}+a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1} & \cdots & a_{i_1}\\ a_{j_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k} & \cdots & a_{i_k}\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

因此当 $k\geqslant 3$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=0$; 当 $k=2$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{j_2}\\ a_{i_2} & a_{j_2}\end{vmatrix}+$ $\begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1}\\ a_{j_1} & a_{i_2}\end{vmatrix}=(a_{i_1}a_{j_2}-a_{i_2}a_{j_2})(a_{i_2}a_{j_1}-a_{i_1}a_{j_1})$; 当 $k=1$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1\\ j_1\end{pmatrix}=a_{i_1}+a_{j_1}$.

又注意到 $|\boldsymbol{C}|$ 只有主子式非零, 而其主子式 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=(-2)^k a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$. 于是当 $\exists m\in\{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $i_m\neq j_m$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=0$; 当 $i_m\neq j_m$,$m=1,2,\cdots,k$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=$ $(-2)^{n-k}a_1\cdots\hat{a}_{i_1}\cdots\hat{a}_{i_2}\cdots\hat{a}_{i_k}\cdots a_n$.

故当 $n\geqslant 3$ 时,(4)式可化为

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right)\\
&= |\boldsymbol{C}| + \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant j_1\leqslant n}} \boldsymbol{B}\binom{i_1}{j_1}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1\\ j_1\end{pmatrix} + \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\\
&= |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1\\ i_1\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1\\ i_1\end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} = |\boldsymbol{C}| + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i\\ i\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i\\ i\end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i & j\\ i & j\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\Big(\\
&= (-2)^n a_1a_2\cdots a_n + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} 2a_i(-2)^{n-1}a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} [(a_ia_j-a_j^2)(a_ia_j-a_i^2)(-2)^{n-2}a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_n]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_1 a_2 \cdots\cdots a_n + (-2)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [-(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n] \\
&= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n n a_1 a_2 \cdots\cdots a_n - (-2)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i (1-n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i (1-n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_j}{a_i} + \frac{a_i}{a_j} - 2 \right) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2 \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} - n \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n + n + n(n-1) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i}{a_j} \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[n^2 - 4n + 4 - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})].
\end{aligned}
$$

解法三 (降价公式)(推荐使用!): 令 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}$, 则

$$
A = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = B + \Lambda I_2^{-1} \Lambda'.
$$

于是由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$
|A| = |I| \left| B + \Lambda I_2^{-1} \Lambda' \right| = \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & B \end{vmatrix} = |B| \left| I_2 - \Lambda' B^{-1} \Lambda \right|
$$

$$
= \begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix} \cdot \left| I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2a_1} & & & \\ & -\dfrac{1}{2a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\dfrac{1}{2a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right|
$$

$$
= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2a_1} & -\dfrac{1}{2a_2} & \cdots & -\dfrac{1}{2a_n} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \cdots & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right|
$$

$$
= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{2} & -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{a_i} \\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n a_i & -\dfrac{n}{2} \end{pmatrix} \right| = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} \dfrac{n+2}{2} & \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{a_i} \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n a_i & \dfrac{n+2}{2} \end{vmatrix}
$$

$$
= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[(n+2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \right].
$$

□

结论 **对角矩阵行列式的子式和余子式:**

设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, 则其 k 阶子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 k 阶主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外都为零, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

记 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式 $(n-k$ 阶). 于是 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外也都为零, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

并且

$$
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k},
$$

$$
\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_1 \cdots \hat{a}_{i_1} \cdots \hat{a}_{i_2} \cdots \hat{a}_{i_k} \cdots a_n
$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

命题 0.10 (行列式的求导运算)

设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数,

$$
F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}
$$

求证:$\frac{d}{dt}F\left(t\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}F_j\left(t\right)$, 其中

$$F_j(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证明 证法一 (数学归纳法):对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n-1$ 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形.

将 $F(t)$ 按第一列展开得

$$F\left(t\right)=f_{11}\left(t\right)A_{11}\left(t\right)+f_{21}\left(t\right)A_{21}\left(t\right)+\cdots+f_{n1}\left(t\right)A_{n1}\left(t\right).$$

其中 $A_{i1}(t)$ 是元素 $f_{i1}(t)$ 的代数余子式.$(i=1,2,\cdots,n)$

从而由归纳假设可得

$$A_{i1}'\left(t\right)=\frac{d}{dt}A_{i1}\left(t\right)=\sum_{k=2}^{n}A_{i1}^{k}(t), i=1,2,\cdots,n.$$

$$\text{其中}A_{i1}^{k}(t)=\begin{vmatrix} f_{12}\left(t\right) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1k}\left(t\right) & \cdots & f_{1n}\left(t\right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{i-1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i-1,k}\left(t\right) & \cdots & f_{i-1,n}\left(t\right) \\ f_{i+1,2}\left(t\right) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i+1,k}(t) & \cdots & f_{i+1,n}\left(t\right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n2}\left(t\right) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nk}\left(t\right) & \cdots & f_{nn}\left(t\right) \end{vmatrix}, k=2,3,\cdots,n.$$

于是, 我们就有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F\left(t\right)&=\frac{d}{dt}\left[f_{11}\left(t\right)A_{11}\left(t\right)+f_{21}\left(t\right)A_{21}\left(t\right)+\cdots+f_{n1}\left(t\right)A_{n1}\left(t\right)\right]\\
&=f_{11}'\left(t\right)A_{11}\left(t\right)+f_{21}'\left(t\right)A_{21}\left(t\right)+\cdots+f_{n1}'\left(t\right)A_{n1}\left(t\right)+f_{11}\left(t\right)A_{11}'\left(t\right)+f_{21}\left(t\right)A_{21}'\left(t\right)+\cdots+f_{n1}\left(t\right)A_{n1}'\left(t\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f_{i1}'\left(t\right)A_{i1}\left(t\right)+f_{11}\left(t\right)\sum_{k=2}^{n}A_{11}^{k}(t)+f_{21}\left(t\right)\sum_{k=2}^{n}A_{21}^{k}(t)+\cdots+f_{n1}\left(t\right)\sum_{k=2}^{n}A_{n1}^{k}(t)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f_{i1}'\left(t\right)A_{i1}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i1}\left(t\right)\sum_{k=2}^{n}A_{i1}^{k}\left(t\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f_{i1}'\left(t\right)A_{i1}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\left(t\right)\left(A_{i1}^{2}+A_{i1}^{3}+\cdots+A_{i1}^{n}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f_{i1}'\left(t\right)A_{i1}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\left(t\right)A_{i1}^{2}+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\left(t\right)A_{i1}^{3}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}\left(t\right)A_{i1}^{n}\\
&=F_1\left(t\right)+F_2\left(t\right)+F_3\left(t\right)+\cdots+F_n\left(t\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(t\right).\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

证法二 (行列式的组合定义):由行列式的组合定义可得

$$F(t)=\sum_{1\leq k_1,k_2,\cdots,k_n\leq n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_1 1}(t)f_{k_2 2}(t)\cdots f_{k_n n}(t).$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t)&=\sum_{1\leq k_1,k_2,\cdots,k_n\leq n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f_{k_{22}}(t)\cdots f_{k_{nn}}(t)\\&+\sum_{1\leq k_1,k_2,\cdots,k_n\leq n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f\prime_{k_{22}}(t)\cdots f_{k_{nn}}(t)\\&+\cdots+\sum_{1\leq k_1,k_2,\cdots,k_n\leq n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f_{k_{22}}(t)\cdots f\prime_{k_{nn}}(t)\\&=F_1(t)+F_2(t)+\cdots+F_n(t).\end{aligned}$$

□

命题 0.11 (直接计算两个矩阵和的行列式)

设 A,B 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leq k\leq n-1}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\right).$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$ 是 $|\boldsymbol{B}|$ 的 k 阶子式 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式.

笔记 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之一是比较简单的矩阵 (例如对角矩阵或秩较小的矩阵) 时, 可利用这个命题计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

解 设 $|\boldsymbol{A}|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|,|\boldsymbol{B}|=|\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n|$, 其中 $\alpha_j,\beta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量. 注意到

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n|.$$

对 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$, 按列用行列式的性质展开, 使每个行列式的每一列或者只含有 α_j, 或者只含有 β_j(即利用大拆分法按列向量将行列式完全拆分开), 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 可以表示为 2^n 个这样的行列式之和. 即 (并且单独把 $k=0,n$ 的项分离出来, 即将 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 分离出来)

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n|\\&=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c}\ \ 1\ \ \cdots\ \ j_1\ \ \cdots\ \ j_2\ \ \cdots\ \ j_k\ \ \cdots\ \ n\\|\beta_1,\cdots,\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k},\cdots,\beta_n|\end{array}.\end{aligned}$$

再对上式右边除 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 外的每个行列式用 $Laplace$ 定理按含有 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的那些列展开得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c}\ \ 1\ \ \cdots\ \ j_1\ \ \cdots\ \ j_2\ \ \cdots\ \ j_k\ \ \cdots\ \ n\\|\beta_1,\cdots,\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k},\cdots,\beta_n|\end{array}\\&=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant n}\sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\\&=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leq k\leq n-1}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

□

例题 0.4 设

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&x-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&x-a_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 x 是未定元,a_{ij} 是常数. 证明:$f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$.

笔记 注意 $f(x)$ 的每行每列除主对角元素外, 其他元素均不相同. 因此 $f(x)$ 并不是推广的" 爪" 型行列式.

解 由行列式的组合定义可知,$f(x)$ 的最高次项出现在组合定义展开式中的单项 $(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ 中, 且展开式中的其他单项作为 x 的多项式其次数小于等于 $n-2$. 因此 $f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$. □

注 将这个例题进行推广再结合直接计算两个矩阵和的行列式的结论可以得到下述推论.

推论 0.4

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵,x 为未定元,

$$f(x)=|xI_n-A|=\begin{vmatrix}x-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&x-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&x-a_{nn}\end{vmatrix}$$

证明:$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 其中

$$a_k=(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix},1\le k\le n.$$

笔记 需要注意上述推论中 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}),a_n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$.

证明 注意到 xI_n 非零的 $n-k$ 阶子式只有 $n-k$ 阶主子式, 并且其值为 x^{n-k}, 其余 $n-k$ 阶子式均为零. 记 $\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$ 是 $x\boldsymbol{I}_n\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式, 则 $\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$ 是 xI_n 非零的 $n-k$ 阶子式. 于是我们有

$$\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}=x^{n-k}.$$

再利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论就可以得到

$$f(x)=|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}x-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&x-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&x-a_{nn}\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&-a_{nn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0&\cdots&0\\0&x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&-a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&\cdots&0\\0&x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x\end{vmatrix}+\sum_{1\le k\le n-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n\\1\le j_1,j_2,\cdots,j_k\le n}}(-\boldsymbol{A})\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$$

$$=(-1)^n|\boldsymbol{A}|+x^n+\sum_{1\le k\le n-1}\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}(-1)^k\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^n + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^k \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \cdot x^{n-k} + (-1)^n |\boldsymbol{A}| \\
&= x^n + \sum_{1\le k\le n-1} x^{n-k} (-1)^k \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} + (-1)^n |\boldsymbol{A}|.
\end{aligned}
$$

因此 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, 其中

$$
a_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.
$$

□

命题 0.12

设 $f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk}$, 求下列行列式的值:

$$
\begin{vmatrix}
1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\
1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n)
\end{vmatrix}.
$$

笔记 知道这类行列式化简的操作即可. 以后这种行列式化简操作不再作额外说明.

解 利用行列式的性质可得

$$
\begin{vmatrix}
1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\
1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n)
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & x_1 + a_{11} & x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{22} & \cdots & x_1^{n-1} + a_{n-1,1}x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_1 + a_{n-1,n-1} \\
1 & x_2 + a_{11} & x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{22} & \cdots & x_2^{n-1} + a_{n-1,1}x_2^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_2 + a_{n-1,n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n + a_{11} & x_n^2 + a_{21}x_n + a_{22} & \cdots & x_n^{n-1} + a_{n-1,1}x_n^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_n + a_{n-1,n-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{\cdots \\ -a_{i,i-(n-3)}j_{n-2} + j_{i+1},\, i = n-2, n-1 \\ -a_{n-1,1}j_{n-1} + j_n}]{\substack{-a_{ii}j_1 + j_{i+1},\, i = 1,2,\cdots n-1 \\ -a_{i,i-1}j_2 + j_{i+1},\, i = 2,3,\cdots,n-1}}
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix}
= \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).
$$

□

命题 0.13 (多项式根的有限性)

设多项式

$$
f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0
$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 即 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 求证:$f(x)$ 是零多项式, 即 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.

证明 由 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 可知 $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$ 是下列线性方程组的解:

$$
\begin{cases}
x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_1^{n-1}x_{n-1} + b_1^nx_n = 0, \\
x_0 + b_2x_1 + \cdots + b_2^{n-1}x_{n-1} + b_2^nx_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_0 + b_{n+1}x_1 + \cdots + b_{n+1}^{n-1}x_{n-1} + b_{n+1}^nx_n = 0.
\end{cases}
$$

上述线性方程组的系数行列式是一个 Vandermode 行列式, 由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 互不相同, 所以系数行列式不等于零. 由 Crammer 法则可知上述方程组只有零解. 即有 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. □

命题 0.14 (Cauchy 行列式)

证明:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a_1+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1}\\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1}\end{vmatrix}=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(a_i+b_j\right)}.$$

笔记 需要记忆 Cauchy 行列式的计算方法.

1. 分式分母有公共部分可以作差, 得到的分子会变得相对简便.

2. 行列式内行列做加减一般都是加减同一行 (或列). 但是在循环行列式中, 我们一般采取相邻两行 (或列) 相加减的方法.

证明

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{-j_n+j_i}\begin{vmatrix}\frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_n+b_2)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{-r_n+r_i}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}\begin{vmatrix}\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按最后一列展开}} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot D_{n-1}.$$

不断递推下去即得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot D_{n-1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdot D_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdots\cdots\frac{\prod_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod_{j=1}^{3}(a_j+b_3)\prod_{k=1}^{2}(a_3+b_k)}\cdot D_2$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdots\frac{\prod_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod_{j=1}^{3}(a_j+b_3)\prod_{k=1}^{2}(a_3+b_k)}\cdot\frac{(b_2-b_1)(a_2-a_1)}{\prod_{j=1}^{2}(a_j+b_2)(a_2+b_1)}\cdot D_1$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdots\frac{\prod_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod_{j=1}^{3}(a_j+b_3)\prod_{k=1}^{2}(a_3+b_k)}\cdot\frac{(b_2-b_1)(a_2-a_1)}{\prod_{j=1}^{2}(a_j+b_2)(a_2+b_1)}\cdot\frac{1}{a_1+b_1}$$

$$= \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\le i\le j\le n}(a_i+b_j)\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i+b_j)} = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(a_i+b_j)}.$$

□

例题 0.5 证明:

$$A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

是正定矩阵.

证明 由Cauchy 行列式可知, 对 A 的所有 m 阶顺序主子式, 我们都有

$$\begin{vmatrix} (1+1)^{-1} & (1+2)^{-1} & \cdots & (1+m)^{-1} \\ (2+1)^{-1} & (2+2)^{-1} & \cdots & (2+m)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m+1)^{-1} & (m+2)^{-1} & \cdots & (m+m)^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(j-i)^2}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(i+j)} > 0.$$

故 A 是正定矩阵. □

命题 0.15

计算下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

解 若所有的 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不为 0, 则有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \cdots & \dfrac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}} & \dfrac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}}\\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \cdots & \dfrac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}} & \dfrac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \dfrac{b_n}{a_n} & \cdots & \dfrac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}} & \dfrac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{a_ib_j-a_jb_i}{a_ja_i}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i).$$

若只有一个 a_i 为 0, 则将原行列式按第 i 行展开得到具有相同类型的 $n-1$ 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_i^{n-1} & a_i^{n-2}b_i & \cdots & a_ib_i^{n-2} & b_i^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}i\text{行展开}}(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1}^{n-1} & a_{i-1}^{n-2}b_{i-1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\ a_{i+!}^{n-1} & a_{i+1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

此时同理可得

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1}^{n-1} & a_{i-1}^{n-2}b_{i-1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\ a_{i+1}^{n-1} & a_{i+1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \cdots & \dfrac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}}\\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \cdots & \dfrac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \dfrac{b_{i-1}}{a_{i-1}} & \cdots & \dfrac{b_{i-1}^{n-2}}{a_{i-1}^{n-2}}\\ 1 & \dfrac{b_{i+1}}{a_{i+1}} & \cdots & \dfrac{b_{i+1}^{n-2}}{a_{i+1}^{n-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \dfrac{b_n}{a_n} & \cdots & \dfrac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}} \left(\frac{b_l}{a_l}-\frac{b_k}{a_k}\right) = (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}} \frac{a_kb_l-a_lb_k}{a_ka_l} \\
&= (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}} a_k \cdot \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}} (a_kb_l-a_lb_k) = (-1)^{n-i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}} a_k \cdot \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}} (a_kb_l-a_lb_k) \\
&= \prod_{1\le k<i} a_kb_i \prod_{i<l\le n} (-a_lb_i) \cdot \prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}} (a_kb_l-a_lb_k) \\
&= \prod_{1\le k<l\le n} (a_kb_l-a_lb_k). (a_i=0).
\end{aligned}
$$

若至少有两个 $a_i=a_j=0$, 则第 i 行与第 j 行成比例, 因此行列式的值等于 0. 经过计算发现, 后面两种情形的答案都可以统一到第一种情形的答案.

综上所述, $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (a_ib_j-a_jb_i)$.

□

结论 连乘号计算小结论:

(1) $\prod\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_j = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$.

证明:

$$
\begin{aligned}
\prod_{1\le i<j\le n} a_ia_j &= \underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdot a_4a_3a_4a_2a_4a_1\cdots\cdots \overbrace{a_ka_{k-1}a_ka_{k-2}\cdots a_ka_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots \overbrace{a_na_{n-1}a_na_{n-2}\cdots a_na_1}^{n-1\text{对}}}_{n-1\text{组}} \\
&\xlongequal{\text{从左往右按组计数}} a_1^{n-1}a_2^{1+n-2}a_3^{2+n-3}a_4^{3+n-4}\cdots a_k^{k-1+n-k}\cdots a_n^{n-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(2) $\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} a_ia_j = \prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}} a_i^{n-2}$, 其中 $k\in[1,n]\cap\mathbb{N}_+$.

证明:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} a_ia_j &= \underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdots\cdots \overbrace{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_{k-1}a_1}^{k-2\text{对}}\cdot \overbrace{a_{k+1}a_{k-1}\cdots a_{k+1}a_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots \overbrace{a_na_{n-1}\cdots a_na_{k+1}a_na_{k-1}\cdots a_na_1}^{n-2\text{对}}}_{n-2\text{组}} \\
&\xlongequal{\text{从左往右按组计数}} a_1^{n-2}a_2^{1+n-3}a_3^{2+n-4}a_4^{3+n-4}\cdots a_{k-1}^{k-2+n-k}a_{k+1}^{k-1+n-k-1}\cdots a_n^{n-2} = \prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}} a_i^{n-2}.
\end{aligned}
$$

注意: 从第 $k-1$ 组开始, 后面每组都比原来少一对 (后面每组均缺少原本含 a_k 的那一对).

命题 0.16 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 任意的指标 $1\le i\le n$, 以及任意的常数 c, 满足下列条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列是方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列之和, 且 $\boldsymbol{A}$ 的其余列与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对应列完全相同, 则 $f(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{B})+f(\boldsymbol{C})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = cf(\boldsymbol{A})$;

(3) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = -f(\boldsymbol{A})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n)=1$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位阵.

求证: $f(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$.

笔记 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标准单位列向量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\boldsymbol{e}_k,\ j=1,2,\cdots,n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=f\left(\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&=a_{11}f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+a_{21}f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+a_{n1}f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_2 2}\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}\left[a_{12}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+a_{22}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+\cdots+a_{n2}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\right]\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_2 2}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=\cdots=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_2 2}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right)=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right).
\end{aligned}$$

若 $k_i=k_j$, 则 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 的第 i 列和第 j 列对换后仍然是 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$. 由条件 (3) 可知,$f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=-f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$, 于是 $f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=0$. 因此在 $f(\boldsymbol{A})$ 的表示式中, 只剩下 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 变成 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{I}_n$, 故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f(\boldsymbol{I}_n)=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

于是由行列式的组合定义可知

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}=|\boldsymbol{A}|.$$

□