

0.1 域的单扩张

定义 0.1 (环的特征)

设 R 为环. 如果存在最小的正整数 n , 使得对所有的 $a \in R$, 有 $na = 0$, 则称 n 为环 R 的特征. 如果这样的正整数不存在, 则称环 R 的特征为 0. 环 R 的特征记作 $\text{Char } R$ 或 $\text{ch } R$.



例题 0.1 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的特征都等于 0.

命题 0.1

设 \mathbb{Z}_m 是模 m 剩余类环, 则 $\text{Char } \mathbb{Z}_m = m, \text{Char } \mathbb{Z}_m[x] = m$.



证明 对每个 $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$, 有

$$m\bar{n} = \overline{mn} = \bar{0}.$$

而对于任何正整数 $k < m$, 有

$$k\bar{1} = \bar{k} \neq \bar{0},$$

所以 $\text{Char } \mathbb{Z}_m = m$. 类似地可以证明, 对于 \mathbb{Z}_m 上的一元多项式环 $\mathbb{Z}_m[x]$, 也有 $\text{Char } \mathbb{Z}_m[x] = m$.



定理 0.1

设 R 是有单位元 e 的环. 如果 e 关于加法的阶为无穷大, 那么 R 的特征等于 0. 如果 e 关于加法的阶等于 n , 那么 $\text{Char } R = n$.



证明 如果 e 关于加法的阶为无穷大, 那么不存在正整数 n , 使得 $ne = 0$. 所以由特征的定义知, R 的特征等于 0.

如果 e 关于加法的阶等于正整数 n , 则 $ne = 0$. 而且 n 是满足这一性质的最小正整数. 因此, 对于任意的 $a \in R$, 有

$$na = n(e \cdot a) = (ne) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

于是 R 的特征等于 n .



定理 0.2

整环的特征是 0 或者是一个素数.



证明 由定理 0.1, 只要证明, 如果整环 R 的单位元 e 关于加法的阶有限, 则它必为素数.

设 e 关于加法的阶为 n . 显然 $n > 1$. 假设 $n = p_1 p_2 \cdots p_s$, $1 \leq p_i \leq n$ 且 p_i 都是素数. 则

$$0 = ne = (p_1 p_2 \cdots p_s)e = (p_1 e) \cdot (p_2 e) \cdots (p_s e).$$

由 R 是整环和命题????可知存在 $i_0 \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 使 $p_{i_0}e = 0$. 因为 n 是使得 $ne = 0$ 成立的最小正整数, 所以 $p_{i_0} = n$. 因此 n 是素数.



定义 0.2 (素域/素体)

不包含任何平凡子体的体称为素体或素域, 即子体只有自身的体.



定理 0.3

设 K 是一个体, 则 K 的所有子体之交就是 K 包含的唯一素域(素体), 也是 K 的子体.



注 这个定理表明: 每个体可以看成是某个素域(素体)的扩张.

证明 记 K 的所有子体之交为 R , 则由命题????知 R 仍为 K 的子体. 设 R_1 是 R 的子体且 $R_1 \subseteq R$, 则 R_1 也是 K 的子体, 从而由 R 的定义知 $R \subseteq R_1$, 故 $R_1 = R$. 故 R 是 K 的素域.

若 K 还包含一个素域 R' , 则 R' 也是 K 的子体, 从而 $R' \supseteq R$. 又因为 R' 是素域, 所以 $R' = R$. 故唯一性得证. \square

定理 0.4

- (1) \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q} 都是素域(素体).
- (2) 设 Π 是一个素域(素体), 则 $\Pi \cong \mathbb{Z}_p$ (p 为素数) 或 $\Pi \cong \mathbb{Q}$.

进而素域(素体)一定是域.



证明

(1) \mathbb{Z}_p 对于加法是素数阶群. 由 Lagrange 定理知 \mathbb{Z}_p 无非平凡子群, 故 \mathbb{Z}_p 无非平凡子体, 因而 \mathbb{Z}_p 是素域(素体).

若 F 为域 \mathbb{Q} 的子体, 于是 $1 \in F$, 从而 $\mathbb{Z} \subset F$, 由命题??知 \mathbb{Z} 的分式域是 \mathbb{Q} . 因而由定理??知 $\mathbb{Q} \subseteq F$, 故 $F = \mathbb{Q}$, 所以 \mathbb{Q} 为素域(素体).

(2) 设 e 为 Π 的幺元, 于是易知 $\mathbb{Z}e = \{ne | n \in \mathbb{Z}\}$ 为 Π 的可交换子环且有 \mathbb{Z} 到 $\mathbb{Z}e$ 的同态 $\pi : \pi(n) = ne (n \in \mathbb{Z})$. 于是由环的同态基本定理知

$$\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\ker \pi.$$

由于 \mathbb{Z} 为 Euclid 环, 进而也是主理想整环, 故有 $p \in \mathbb{Z}$, 使得 $\ker \pi = \langle p \rangle$. 因为 Π 为体, 故由命题????知 $\mathbb{Z}e$ 为交换整环, 即 $\mathbb{Z}/\ker \pi = \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ 也是交换整环. 因此由定理????知 $\langle p \rangle$ 为素理想, 再由定理??知 p 为 \mathbb{Z} 中的素元素, 进而 p 只能为素数或零.

当 p 为素数时, 由命题??知 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ 为域, 从而 $\mathbb{Z}e$ 是 Π 的子体. 又 Π 无非平凡子体, 故 $\Pi = \mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}_p$.

当 $p = 0$ 时, 有 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\langle 0 \rangle = \mathbb{Z}$. 由命题??知 \mathbb{Z} 的分式域是 \mathbb{Q} . 记 $\mathbb{Z}e$ 的分式域为 F , 则由推论??知 $F \cong \mathbb{Q}$. 又 $\mathbb{Z}e \subset \Pi$, 故由定理??知 $F \subseteq \Pi$. 再由 Π 是素域知 $\Pi = F \cong \mathbb{Q}$.

由命题??知 \mathbb{Z}_p 和 \mathbb{Q} 都是域, 而由定理 0.4(2) 知任意素域都同构于这两个域, 因此素域(素体)一定是域.



定理 0.5

设 K 是一个体, p 为素数, 则

- (1) K 中的素域都与 \mathbb{Z}_p 同构 $\iff \text{ch } K = p$.
- (2) K 中的素域都与 \mathbb{Q} 同构 $\iff \text{ch } K = 0$.

进而 $\text{ch } K$ 只能是 0 或素数.



证明 记 K 的幺元为 e . 由定理 0.3 知 K 只包含唯一的素域, 记为 Π . 显然 $\mathbb{Z}e = \{ne | n \in \mathbb{Z}\}$ 为 Π 的可交换子环且有 \mathbb{Z} 到 $\mathbb{Z}e$ 的同态 $\pi : \pi(n) = ne (n \in \mathbb{Z})$. 于是由环的同态基本定理知

$$\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\ker \pi. \tag{1}$$

由于 \mathbb{Z} 为 Euclid 环, 进而也是主理想整环, 故有 $p' \in \mathbb{Z}$, 使得 $\ker \pi = \langle p' \rangle$. 因为 Π 为体, 故由命题????知 $\mathbb{Z}e$ 为交换整环, 即 $\mathbb{Z}/\ker \pi = \mathbb{Z}/\langle p' \rangle$ 也是交换整环. 因此由定理????知 $\langle p' \rangle$ 为素理想, 再由定理??知 p' 为 \mathbb{Z} 中的素元素, 进而 p' 只能为素数或零.

(1) 若 $\Pi \cong \mathbb{Z}_p$, 因为在 \mathbb{Z}_p 中有 $p \cdot 1 = 0$, 所以在 Π 中有 $pe = 0$, 因而 $pa = pe \cdot a = 0, \forall a \in K$. 又对 $\forall k \in \mathbb{N} \cap (0, p)$, 在 \mathbb{Z}_p 中有 $k \cdot 1 \neq 0$, 故在 Π 中有 $ke \neq 0$. 因此 $\text{ch } K = p$.

反之, 若 $\text{ch } K = p$, 则 $pa = 0, \forall a \in K$, 则 $pe = 0$. 从而对 $\forall z \in \mathbb{Z}$, 有 $\pi(pz) = pze = z \cdot pe = 0$. 故 $\langle p \rangle = p\mathbb{Z} \subseteq \ker \pi$. 若 $p' \neq p$, 则 $\langle p \rangle \not\subseteq \langle p' \rangle = \ker \pi$ 矛盾! 因此 $p = p'$, 即

$$\ker \pi = \langle p \rangle.$$

又因为 p 为素数, 所以由(1)式及命题??知 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ 为域, 从而 $\mathbb{Z}e$ 是 Π 的子域, 也是子体. 又 Π 无非平凡子体, 故 $\Pi = \mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}_p$.

- (2) 若 $\Pi \cong \mathbb{Q}$. 记 $\mathbb{Z}e$ 的分式域为 F , 又 $\mathbb{Z}e \subset \Pi$, 故由定理??知 $F \subseteq \Pi$. 再由 Π 是素域知 $\Pi = F \cong \mathbb{Q}$. 于是由推论??知 $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}e$. 因此由 $n \cdot 1 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 知 $ne \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 又由命题????知 K 是整环, 故 $\forall a \in K^*, na = ne \cdot a \neq 0$. 因此 $\text{ch } K = 0$.

反之, 若 $\text{ch } K = 0$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, a \in K^*$ 有 $na \neq 0$. 特别地, $\pi(n) = ne \neq 0, \pi(-n) = -ne \neq 0$. 于是 $\ker \pi = \{0\} = \langle 0 \rangle$. 故由(1)式知 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\langle 0 \rangle = \mathbb{Z}$.

由定理 0.4 知 K 的素域 Π 只可能同构于 \mathbb{Q} 或 \mathbb{Z}_p (p 为素数), 因此 $\text{ch } K$ 只能是 0 或素数.

□

推论 0.1

数域的特征都是零.

♡

证明

□

定义 0.3

设 K 为域 F 的扩域, S 为 K 的子集. K 中所有包含 $F \cup S$ 的子域之交, 称为由 F 与 S 生成的子域, 也称为 F 上添加 S 所得的域, 亦称为 S 在 F 上生成的域, 记为 $F(S)$.

♣

注 显然有 $K = F(K)$.

定理 0.6

设 K 为域 F 的扩域, $S \subseteq K$. 定义 $F[S]$ 为

$$F[S] \triangleq \left\{ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \mid a_j \in S, j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} \in F \right\}.$$

则 $F[S]$ 是 K 的子环, $F[S]$ 的分式域恰为 $F(S)$.

特别当 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为有限集时, 分别记

$$F[S] = F[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], \quad F(S) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

♡

证明

□

定理 0.7

设 K 为域 F 的扩域, $S \subseteq K$, 则

$$(1) \quad F(S) = \bigcup_{S' \subseteq S} F(S'), \text{ 此处 } S' \text{ 取遍 } S \text{ 的所有有限子集.}$$

$$(2) \quad \text{若 } S = S_1 \cup S_2, \text{ 则 } F(S) = F(S_1)(S_2). \text{ 特别地, 若 } a\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K, \text{ 则 } F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1)(\alpha_2) \dots (\alpha_n).$$

♡

证明

- (1) 显然对 $\forall S' \subseteq S$, 有 $F(S') \subseteq F(S)$, 因而

$$\bigcup_{S' \subseteq S} F(S') \subseteq F(S).$$

反之, 对 $\forall a \in F(S)$, 由定理 0.6 有 $a = \frac{f}{g}, f, g \in F[S]$, 由于 f, g 的表达式均为有限和的形式, 因而存在 S 的有限子集 S'_0 , 使 $f, g \in F[S'_0]$. 于是 $a = \frac{f}{g} \in F(S'_0) \subseteq \bigcup_{S' \subseteq S} F(S')$, 故结论成立.

(2) 由于 $F(S_1 \cup S_2)$ 是 K 中包含 $F, S_1 \cup S_2$ 的最小子域, 而 $F, S_1, S_2 \subseteq F(S_1)(S_2)$, 故有

$$F(S_1 \cup S_2) \subseteq F(S_1)(S_2).$$

反之, $F(S_1)(S_2)$ 是包含 $F(S_1), S_2$ 的最小子域, 而

$$F(S_1) \subseteq F(S_1 \cup S_2), \quad S_2 \subseteq F(S_1 \cup S_2),$$

故 $F(S_1)(S_2) \subseteq F(S_1 \cup S_2)$, 因而结论成立. □

定义 0.4

设 K 是 F 的扩域. 若 $\exists \alpha \in K$, 使得

$$K = F(\alpha),$$

称 K 是 F 的单扩域.

若 α 是 F 上的代数元, 称 $K = F(\alpha)$ 为 F 的单代数扩域或单代数扩张.

若 α 是 F 上的超越元, 称 $K = F(\alpha)$ 为 F 的单超越扩域或单超越扩张.

定理 0.8

(1) 设 F 是一个域, α 是 F 上的超越元, 则

(i) F 的单超越扩域 $F(\alpha)$ 就是域 F 上的一元多项式环 $F[\alpha]$ 的分式域, 并且在同构意义下唯一.

(ii) 若 $F[x]$ 是域 F 上的一元多项式环, 则 $F(\alpha)$ 与 $F[x]$ 的分式域同构.

(2) 设 F 是一个域, α 是 F 上的代数元, $F[x]$ 是域 F 上的一元多项式环, 则存在唯一的次数大于等于 1 的首一不可约多项式 $p(x) \in F[x]$ 使得 $p(\alpha) = 0$ 且

$$F(\alpha) \cong F[x]/\langle p(x) \rangle.$$

此时环 $F[\alpha]$ 是一个域, 并且 $F[\alpha] = F(\alpha)$. ♡

证明

- (1) (i) 当 α 是 F 上的超越元时, 由定理 0.6 知, F 上的一元多项式环 $F[\alpha]$ 的分式域就是 $F(\alpha)$. 若 $F(y)$ 也是 F 的单超越扩域, 则由定理 0.6 知, $F[y]$ 的分式域就是 $F(y)$. 由定理????可知 $F[\alpha] \cong F[y]$, 进而由推论??知它们的分式域也同构, 即 $F(\alpha) \cong F(y)$.
- (ii) 此时 x 也是 F 上的超越元, 记 $F(x)$ 也是 F 的单超越扩域, 则定理 0.6 知, $F(x)$ 也是 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 的分式域. 由定理????可知 $F[\alpha] \cong F[x]$, 进而由推论??知它们的分式域也同构, 即 $F(\alpha) \cong F(x)$.
- (2) 从定理????可知当 α 为代数元时, 存在唯一的首一不可约多项式 $p(x) \in F[x]$ 使得 $p(\alpha) = 0$ 且

$$F[\alpha] \cong F[x]/\langle p(x) \rangle.$$

此时环 $F[\alpha]$ 是一个域. 再由定理??知 $F[\alpha]$ 的分式域就是其本身, 故 $F[\alpha] = F(\alpha)$. 因此

$$F(\alpha) \cong F[x]/\langle p(x) \rangle.$$

□

定义 0.5

设 K 是 F 的扩域, $\alpha \in K$, α 是 F 上的代数元. $F[x]$ 中以 α 为根的首一不可约多项式称为 α 在 F 上的不可约多项式, 记为 $\text{Irr}(\alpha, F)$. 它的次数称为 α 在 F 上的次数, 记为 $\deg(\alpha, F)$, 即 $\deg(\alpha, F) = \deg(\text{Irr}(\alpha, F))$. ♣

注 由定理????和定理????知若 α 是 F 上的代数元, 则

$$\langle \text{Irr}(\alpha, F) \rangle = \{f(x) \in F[x] | f(\alpha) = 0\} = \text{Irr}(\alpha, F)F[x] = \{f(x) \in F[x] | \text{Irr}(\alpha, F) | f(x)\}.$$

定理 0.9

设 $F(\alpha)$ 是 F 的单代数扩张, 又 $\deg(\alpha, F) = n$, 则 $F(\alpha)$ 是 F 上的 n 维线性空间且 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 是一组基.



证明 根据定理??中域 F 上的线性空间的定义, 可直接验证 $F(\alpha)$ 是 F 上的线性空间. 由定理 0.8(2) 知 $F[\alpha] = F(\alpha)$. 设 $F[x]$ 是 F 上的一元多项式环, 则由推论????知 $F[x]$ 与 $F[\alpha] = F(\alpha)$ 之间有满同态 η 满足

$$\eta(f(x)) = f(\alpha), \quad \forall f(x) \in F[x],$$

而

$$\ker \eta = \langle \text{Irr}(\alpha, F) \rangle.$$

对 $\forall f(\alpha) \in R[\alpha]$, 都存在 $f(x) \in R[x]$, 使得 $\eta(f(x)) = f(\alpha)$. 又由 $\deg(\alpha, F) = n$, 故 $\exists q(x), r(x) \in F[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)\text{Irr}(\alpha, F) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg(\alpha, F) = n.$$

(注意 $\deg 0 = -\infty$) 因而对上式两边同时作用 η 得 $f(\alpha) = r(\alpha) \in L(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$. 于是 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 生成 $F(\alpha)$. 又若 $\deg s(x) < \deg(\alpha, F)$, 而 $s(\alpha) = 0$, 则 $\eta(s(x)) = 0$. 故 $\text{Irr}(\alpha, F)|s(x)$, 因而 $s(x) = 0$, 即 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 线性无关, 故 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 是 $F(\alpha)$ 的一组基, 故 $F(\alpha)$ 的维数为 n .

**定义 0.6**

设 K_1, K_2 都是域 F 的扩域. 若有 K_1 到 K_2 上的同构 η , 使 $\eta|_F = \text{id}_F$, 则称 K_1 与 K_2 是 F 的等价扩张, η 称为 F 同构. 特别地, 若 $K_1 = K_2$, 则称 η 为 F 自同构.

**命题 0.2**

- (1) 若 $F(\alpha), F(\beta)$ 都是 F 的单超越扩张, 则 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 是 F 的等价扩张. 这时它们与一元多项式环 $F[x]$ 的分式域都是 F 的等价扩张.
- (2) 若 $F(\alpha), F(\beta)$ 都是 F 的单代数扩张且 $\text{Irr}(\alpha, F) = \text{Irr}(\beta, F)$, 则 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 是 F 的等价扩张. 此即, 对 $F[x]$ 中的任一不可约多项式 $p(x)$ 在等价定义下存在唯一单代数扩张. 事实上, $F[x]/\langle p(x) \rangle = F(x + \langle p(x) \rangle)$. 令 $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$, 则 $\text{Irr}(\alpha, F)$ 与 $p(x)$ 相伴.



注 注意对 F 的两个等价的单代数扩张 $F(\alpha), F(\beta)$, 不一定有 $\text{Irr}(\alpha, F) = \text{Irr}(\beta, F)$.

证明

- (1)
- (2) 事实上, 记 $p(x) = \text{Irr}(\alpha, F) = \text{Irr}(\beta, F)$, 则 $F(\alpha), F(\beta)$ 与 $F[x]/\langle p(x) \rangle$ 都是 F 的等价扩张, 故 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 是 F 的等价扩张.



例题 0.2 设 $F = \mathbb{R}, \alpha = \sqrt{-1}, \beta = 1 + \sqrt{-1}$. 显然 $F(\alpha) = \mathbb{C}, F(\beta) = \mathbb{C}$, 故 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 是 F 的等价扩张, 但 $\text{Irr}(\alpha, F) = x^2 + 1, \text{Irr}(\beta, F) = x^2 - 2x + 2$, 故 $\text{Irr}(\alpha, F) \neq \text{Irr}(\beta, F)$.

证明



例题 0.3 定义 \mathbb{C} 到 \mathbb{C} 的映射 τ :

$$\tau(a + b\sqrt{-1}) = a - b\sqrt{-1}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

则容易验证 τ 是 \mathbb{C} 的 \mathbb{R} 自同构.

证明



定义 0.7

设 K, K_1, K_2 都是域 F 的扩域且

$$K \supseteq K_i \supseteq F, \quad i = 1, 2.$$

若 K_1 与 K_2 是 F 等价扩张, 则称 K_1, K_2 是 K (对 F) 共轭的子域.

又若 $\alpha, \beta \in K$ 且 $\text{Irr}(\alpha, F) = \text{Irr}(\beta, F)$, 则称 α 与 β 是(对 F) 的共轭元素.

**命题 0.3**

设 $F(\alpha), F(\beta)$ 都是 F 的单代数扩张, 若 α, β 是共轭元素, 则 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 共轭.



注 从例题 0.2 知这个结论反之不成立.

证明 从命题 0.2(2) 知 α, β 是共轭元素, 则 $F(\alpha)$ 与 $F(\beta)$ 共轭.

