

0.1 可测函数列的收敛

0.1.1 几乎处处收敛与一致收敛

定义 0.1 (几乎处处收敛)

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z , 有 $m(Z) = 0$ 及

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \setminus Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x) \rightarrow f(x), \text{ a. e. } x \in E.$$

或

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

再不引起歧义下, 也可简记为

$$f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f.$$

定理 0.1

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 $f_k(x) \rightarrow f(x), \text{ a. e. } x \in E$. 则 $f(x)$ 也是 E 上的可测函数.



证明 由条件可知 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 Z 为零测集也可测, 从而 $E \setminus Z$ 是可测集. 于是由定理??(2) 可知 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \setminus Z$ 上的可测函数列, 并且由条件可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) (x \in E \setminus Z)$, 因此由推论??可得 $f(x)$ 也是 $E \setminus Z$ 上的可测函数. 又注意到对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{x \in Z : f(x) > t\} \subset Z.$$

而 Z 是零测集, 由零测集的子集也是零测集可知, $\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也是零测集, 从而 $\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也可测. 于是 $f(x)$ 在 Z 上可测. 故由定理??(1) 可知 $f(x)$ 在 $E = (E \setminus Z) \cup Z$ 上可测. \square

定义 0.2 ((接) 近一致收敛)

设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上的可测函数列, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E, m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上(接)近一致收敛于 $f(x)$.



引理 0.1

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \rightarrow f(x), \text{ a. e. } x \in E$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

则 $E_k(\varepsilon) (k = 1, 2, \dots)$ 可测, 并且

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon) \right) = 0. \quad (1)$$



证明 注意到对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} E_k(\varepsilon) &= \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in E : -\varepsilon \leq f_k(x) - f(x) \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in E : f_k(x) - f(x) \geq -\varepsilon\} \cup \{x \in E : f_k(x) - f(x) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

因为 $f_k(x)$ 和 $f(x)$ 都在 E 上可测, 所以由可测函数的运算性质 (1) 可知 $f_k(x) - f(x)$ 也在 E 上可测. 从而再由定

理??及可测集的性质可得

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : f_k(x) - f(x) \geq -\varepsilon\} \cup \{x \in E : f_k(x) - f(x) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{M}.$$

由函数列收敛的否命题可知, 上限集 $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$ 中的点一定不是收敛点, 从而依题设可知

$$m\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

根据递减可测集列的测度运算, 可知(1)式成立. \square

定理 0.2 (Egorov(叶戈洛夫) 定理)

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f_k(x) \rightarrow f(x)$, a.e. $x \in E$ 的充要条件是对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 的可测子集 $E_\delta: m(E_\delta) \leq \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

这也等价于对 $\forall \delta > 0$, 存在 E 的可测子集 $F_\delta: m(E \setminus F_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 F_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 也即 $\{f_n(x)\}$ 接近一致收敛于 $f(x)$.

注 Egorov 定理中的条件 $m(E) < +\infty$ 不能去掉. 例如考虑可测函数列

$$f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in (0, +\infty).$$

它在 $(0, +\infty)$ 上处处收敛于 $f(x) \equiv 1$, 但在 $(0, +\infty)$ 中的任一个有限测度集外均不一致收敛于 $f(x) \equiv 1$.

但对 $m(E) = +\infty$ 的情形, 结论可陈述如下: 对任给 $M > 0$, 存在 $E_M: E_M \subset E, m(E_M) > M$, 使得 $f_n(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$. (见推论 0.1)

注 等价条件的证明: \Rightarrow : 对 $\forall \delta > 0$, 只需令 $F_\delta = E \setminus E_\delta$, 则显然 F_δ 为 E 的可测子集, 且 $E_\delta = E \setminus F_\delta$. 从而 $m(E \setminus F_\delta) = m(E_\delta) < \delta$ 且 $\{f_k(x)\}$ 也在 $E \setminus E_\delta = F_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. \Leftarrow : 对 $\forall \delta > 0$, 取 $E_\delta = E \setminus F_\delta$, 同理可证.

证明 必要性: 由引理 0.1 可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ 可测. 现在取正数列 $1/i$ ($i = 1, 2, \dots$), 则对任给的 $\delta > 0$ 以及每一个 i , 存在 j_i , 使得 $m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right) < \frac{\delta}{2^i}$. 令 $E_\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)$, 显然 E_δ 可测. 我们有

$$m(E_\delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

现在来证明在点集

$$E \setminus E_\delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=j_i}^{\infty} \left\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i}\right\}$$

上, $\{f_k(x)\}$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的.

事实上, 对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在 i , 使得 $1/i < \varepsilon$, 从而对一切 $x \in E \setminus E_\delta$, 当 $k \geq j_i$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

充分性: 分别取 $\delta_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$, 则存在 $F_k \subset E, m(F_k) < 1/k$, 使得 $f_n(x)$ 在每个 $E \setminus F_k$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 记 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 则

$$m(F) \leq m(F_k) < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

令 $k \rightarrow \infty$ 得 $m(F) = 0$. 下面证明 $f_k(x)$ 在 $E \setminus F$ 上处处收敛于 $f(x)$.

由于

$$E \setminus F = E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^c \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap F_k^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k).$$

故对 $\forall x_0 \in E \setminus F$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x_0 \in E \setminus F_{k_0}$. 又 f_k 在 $E \setminus F_{k_0}$ 上一致收敛于 f , 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \forall x \in E \setminus F_{k_0}$, 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0) = f(x_0)$. 故由 x_0 的任意性可得 $f_k(x)$ 在 $E \setminus F$ 上处处收敛于 $f(x)$. 因此 $f_k(x) \rightarrow f(x), \text{a.e. } x \in E$. \square

推论 0.1

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) = +\infty$. 若 $f_k(x) \rightarrow f(x), \text{a.e. } x \in E$, 则对任给 $M > 0$, 存在 $E_M: E_M \subset E, m(E_M) > M$, 使得 $f_k(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$.



证明 令 $E_k = E \cap B(0, k)$, 显然 $\{E_k\}$ 为递增可测集列, 并且

$$m(E_k) \leq m(B(0, k)) = \pi k^2 < +\infty.$$

又 $m(E) = +\infty$, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) \xrightarrow{\text{递增可测集列的测度运算}} m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m(E) = +\infty. \quad (2)$$

因为 $f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 和 $f(x)$ 在 E 上可测, 所以由定理??(2) 可知 $f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 和 $f(x)$ 在 $E_k (k = 1, 2, \dots)$ 上也可测. 于是在 E_k 上应用 **Egorov 定理** 可得, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在可测子集 $F_k \subset E_k$, 且 $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在每个 F_k 上均一致收敛于 $f(x)$. 从而由 $m(E_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ 可得

$$m(F_k) > m(E_k) - \frac{1}{k}.$$

令 $k \rightarrow +\infty$, 再结合 (2) 式可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k) = +\infty$. 因此, 对 $\forall M > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $m(F_k) > M$. 故取 $E_M = F_k$ 即得结论. \square

推论 0.2

设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 均是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且有 $f_n(x) \rightarrow f(x), \text{a.e. } x \in E$, 则存在可测集列 $\{E_i\}: E_i \subset E (i \in \mathbb{N})$, 且

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0,$$

使得 $f_n(x)$ 在每个 E_i 上均一致收敛于 $f(x)$.



证明 (1) 当 $m(E) < +\infty$ 时, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 根据 **Egorov 定理**, 取 $\delta_i = \frac{1}{i} > 0$, 则存在可测子集 $E_i \subset E$, 使得 $m(E \setminus E_i) < \frac{1}{i}$, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 E_i 上一致收敛于 $f(x)$. 注意到对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset E \setminus E_i,$$

因此

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq m(E \setminus E_i) < \frac{1}{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

再令 $i \rightarrow +\infty$ 得

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0.$$

(2) 当 $m(E) = +\infty$ 时, 令

$$A_1 = E \cap B(0, 1), A_k = E \cap (B(0, k) \setminus B(0, k-1)) (k = 2, 3, \dots),$$

显然 $\{A_k\}$ 是一列互不相交的可测集, 满足 $A_k \subset E, m(A_k) < +\infty$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E$.

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 考虑 A_k , 则由 (1) 可知, 存在可测集列 $\{E_{k,i}\}: E_{k,i} \subset E (i \in \mathbb{N})$ 且

$$m\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) = 0, \quad (3)$$

使得 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i} (\forall i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 进而再由 k 的任意性可得, $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i} (\forall k, i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 考虑集族 $\mathcal{F} = \{E_{k,i} | k, i \in \mathbb{N}\}$. 由于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数, 故 \mathcal{F} 也可数. 因此可将 \mathcal{F} 枚举为序列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$. 故 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_i (\forall i \in \mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 由定理 ?? 可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i} \right). \quad (4)$$

又由 $\{A_k\}$ 互不相交可得

$$\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i} \right) \cap \left(A_l \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{l,i} \right) = \emptyset, k \neq l. \quad (5)$$

故利用 (3)(4)(5) 式可得

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i} \right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{k,i}\right) = 0.$$

□

例题 0.1 考查 $f_n(x) = x^n (0 \leq x \leq 1), f(x) = 0 (0 \leq x < 1)$ 以及 $f(1) = 1$, 则在 $[0, 1]$ 上 $f_n(x)$ 点收敛于 $f(x)$ 而非一致收敛于 $f(x)$. 但在舍去一个测度可任意小的正测集 (如 $(1 - \delta, 1]$) 后, $f_n(x)$ 在余下点集上一致收敛于 $f(x)$.

证明

□

0.1.2 几乎处处收敛与依测度收敛

定义 0.3

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0, \quad (6)$$

或等价地, 若对 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 存在 $N_{\varepsilon, \delta} \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N_{\varepsilon, \delta}$ 时, 有 $m(E_n(\varepsilon)) < \delta$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 简记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.


♣

注 注意, 由 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(\{x \in E : |f_k(x)| = +\infty\}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$.

定理 0.3

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是对等的.

♥

 **笔记** 这个定理告诉我们: 在函数对等的意义下, 依测度收敛的极限函数是唯一的.

证明 因为对 $\forall x \in E$, 有

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |g(x) - f_k(x)|,$$

所以对任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} \{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} &\subset \{x \in E : |f(x) - f_k(x)| + |g(x) - f_k(x)| > \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : |g(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

但当 $k \rightarrow \infty$ 时, 上式右端点集的测度趋于零, 从而得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

由 ε 的任意性可知 $f(x) = g(x), \text{a.e. } x \in E$. □

定理 0.4

设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处有限, 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 几乎处处有限. ♡

证明 设 $A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$, 则只需证 $m(A) = 0$. 由于每个 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 因此对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令 $B_k = \{x \in E : |f_k(x)| = +\infty\}$, 则 $m(B_k) = 0$. 再令 $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 则 B 是可数个零测集的并, 而零测集必可测, 故 B 也可测. 并且

$$m(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = 0.$$

因此 $m(B) = 0$. 对 $\forall x_0 \in A \setminus B$, 都有

$$|f(x_0)| = +\infty, \quad |f_k(x_0)| < +\infty.$$

于是对 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

这表明对 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, 都有 $x_0 \in \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. 再由 x_0 的任意性可得

$$A \setminus B \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad \forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}.$$

从而再结合 $m(B) = 0$ 可得

$$m(A) = m(A \setminus B) \leq m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}), \quad \forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}.$$

令 $k \rightarrow \infty$ 可得

$$m(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}).$$

又因为 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

故 $m(A) = 0$, 结论得证. □

例题 0.2 收敛但不一致收敛的函数

$$f_n(x) = x^n, n = 1, 2, \dots$$

证明 显然 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

但不一致收敛于 $f(x)$, 因为连续函数列的一致收敛极限必连续, 而 $f(x)$ 不连续. 然而, 去掉任意小的一段之后一致收敛, 即: 对 $\forall \delta > 0, f_n(x)$ 在 $[0, 1 - \delta]$ 上一致收敛于 0. □

例题 0.3 依测度收敛但不几乎处处收敛的函数

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都存在唯一的 $k, i \in \mathbb{N}$, 使得

$$n = 2^k + i, \quad 0 \leq i < 2^k$$

定义 $[0, 1]$ 上的函数

$$f_n(x) = \chi_{[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

证明 任取 $x_0 \in [0, 1]$, 对每个 $k \in \mathbb{N}, \exists 0 \leq i_k < 2^k$ 使得

$$x_0 \in \left[\frac{i_k}{2^k}, \frac{i_k+1}{2^k}\right)$$

记 $n_k = 2^k + i_k$, 则

$$f_{n_k}(x_0) = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

可见, $\{f_n(x_0)\}$ 有无穷多项为 1, 无穷多项为 0. 故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上每个点都不收敛 (从而不是几乎处处收敛). 但对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$m\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

其中, $n = 2^k + i, 0 \leq i < 2^k$. 故 $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. (这表明 n 越大, 出现 “1” 的频率越趋于 0.) \square

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义可以看出, 前者强调的是在点上函数值的收敛 (尽管除一个零测集外), 后者并非指在哪个点上的收敛, 其要点在于点集

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于零, 而不论此点集的位置状态如何. 这是两者的区别. 下面我们讨论它们之间的联系.

定理 0.5

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ (反之不然).

注

1. 上述定理中的条件 $m(E) < +\infty$ 不能去掉. 例如, 取 $E = (0, +\infty)$, 令 $f_n(x) = \chi_{(0, n]}(x)$, 则

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 1, \quad x \in E$$

但当取 $\delta = 1/2 > 0$ 时, 有

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = m((n, +\infty)) = +\infty$$

故 f_n 不依测度收敛到 f .

2. 上述定理中的条件 $f(x)$ 几乎处处有限也不能去掉.

例如, 考虑 $E = [0, 1]$, 定义函数列 $f_k(x) = k$, 则 $m(E) = 1 < +\infty$, 且每个 $f_k(x)$ 在 E 上处处有限.

令 $f(x) = +\infty$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = +\infty = f(x), \text{a.e. } x \in E$. 但对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有

$$|f_k(x) - f(x)| = +\infty \geq \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

于是

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = E.$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = m(E) = 1 \neq 0.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$.

证明 因为题设满足引理 0.1 的条件, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

于是

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right).$$

令 $k \rightarrow \infty$ 即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. \square

定理 0.6

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$ (即 $\{f_k(x)\}$ 接近一致收敛于 $f(x)$), 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.



证明 对任给的 $\varepsilon, \delta > 0$, 依假设存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta) < \delta$, 以及自然数 k_0 , 使得当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E \setminus E_\delta.$$

由此可知, 当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E_\delta.$$

这说明, 当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m(E_\delta) < \delta.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. □

定义 0.4 (依测度 Cauchy(基本) 列)

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} m(\{x \in E : |f_k(x) - f_j(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的依测度 Cauchy(基本) 列. ♣

定理 0.7

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_k(x)\}$ 必是 E 上依测度 Cauchy 列. ♥

证明 由条件可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall k \geq k_0$, 都有

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到对 $\forall x \in E$, 都有

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq |f_i(x) - f(x)| + |f_j(x) - f(x)|, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

从而对 $\forall i, j \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} \{x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| > \varepsilon\} &\subset \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| + |f_j(x) - f(x)| > \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in E : |f_i(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

于是对 $\forall i, j \geq k_0$, 就有

$$\begin{aligned} &m(\{x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| > \varepsilon\}) \\ &\leq m\left(\left\{x \in E : |f_i(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} m(\{x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

即 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度 Cauchy 列. □

定理 0.8

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度 Cauchy 列, 则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明 对每个自然数 i , 可取 k_i , 使得当 $l, j \geq k_i$ 时, 有

$$m\left(\left\{x \in E : |f_l(x) - f_j(x)| \geq \frac{1}{2^i}\right\}\right) < \frac{1}{2^i}.$$

从而我们可以假定 $k_i < k_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$), 令

$$E_i = \left\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^i}\right\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

则 $m(E_i) < 2^{-i}$. 现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集 $S = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$, 注意到 $\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = 1 < +\infty$, 故由定理 ??(1) 可知 $m(S) = 0$. 注意到

$$\begin{aligned} x_0 \in E \setminus S &= E \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right)^c = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} E_i^c\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} (E \cap E_i^c) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \left\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}\right\}. \end{aligned}$$

于是对 $\forall x_0 \in E \setminus S$, 都存在 $j_0 \in \mathbb{N}$, 当 $i \geq j_0$ 时, 有 $|f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)| < 2^{-i}$. 由此可知当 $l \geq j_0$ 时, 有

$$\sum_{i=l}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)| \leq \sum_{i=l}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2^{l-1}}.$$

令 $l \rightarrow +\infty$, 则由 Cauchy 收敛准则可知, 级数 $f_{k_1}(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} [f_{k_{i+1}}(x_0) - f_{k_i}(x_0)]$ 绝对收敛, 再由 x_0 的任意性可知级数 $f_{k_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} [f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)]$ 在 $E \setminus S$ 上是绝对收敛的, 即 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E \setminus S$ 上处处收敛. 因此 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上是几乎处处收敛的, 设其极限函数为 $f(x)$, $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

此外, 对 $\forall j \in \mathbb{N}$, 注意到

$$\begin{aligned} E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i &= E \cap \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right)^c = E \cap \left(\bigcap_{i=j}^{\infty} E_i^c\right) = \bigcap_{i=j}^{\infty} (E \cap E_i^c) \\ &= \bigcap_{i=j}^{\infty} \left\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}\right\}. \end{aligned}$$

因此当 $i \geq j$ 时, 有

$$|f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \frac{1}{2^i}, \quad \forall x \in E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i.$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > j$, 使得当 $n \geq N$ 时, 有 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. 于是对 $\forall n \geq N, p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+p}}(x)| &< \sum_{i=n}^{n+p} |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| < \sum_{i=n}^{n+p} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad \forall x \in E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i. \end{aligned}$$

故由一致收敛的 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall j \in \mathbb{N}$, 有 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的. 又由于

$$m\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right) < \frac{1}{2^{j-1}},$$

故 $f(x)$ 及 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上满足定理 0.6 的条件, 于是 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

最后, 注意到

$$\begin{aligned} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} &\subset \left\{x \in E : |f_n(x) - f_{k_n}(x)| + |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in E : |f_n(x) - f_{k_n}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

从而

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m\left(\left\{x \in E : |f_n(x) - f_{k_n}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in E : |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 也有 $k_n \rightarrow \infty$. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

□

定理 0.9 (Riesz(里斯) 定理)

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

♡

证明 因为 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 所以 $\{f_k(x)\}$ 是依测度 Cauchy 列. 从而由定理 0.8 的证明可知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 以及可测函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in E,$$

而且 $\{f_{k_i}(x)\}$ 也是依测度收敛于 $g(x)$ 的. 但按假设, $\{f_{k_i}(x)\}$ 应依测度收敛于 $f(x)$, 从而由定理 0.3 知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等. □

例题 0.4 设 $f(x), f_k(x) (k \in \mathbb{N})$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, $m(E) < +\infty$.

(i) 若在一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{ij}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

(ii) 若 $f_k(x) > 0 (k \in \mathbb{N})$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则对 $p > 0, f_k^p(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f^p(x)$.

证明 (i) 反证法. 假定结论不真, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, \sigma_0 > 0$ 以及 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}) \geq \sigma_0. \quad (7)$$

但依题设知, 存在 $\{k_{ij}\}$, 使得 $f_{k_{ij}}(x) \rightarrow f(x) (j \rightarrow \infty)$. 由此又知 $f_{k_{ij}}(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 这与式 (7) 矛盾.

(ii) 由题设知, 任何子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中必有子列 $\{f_{k_{ij}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$. 即 $\{f_{k_i}^p(x)\}$ 必有子列 $\{f_{k_{ij}}^p(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f^p(x)$. 因此, 根据 (i) 即得所证. □

推论 0.3

设 $m(E) < +\infty$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 当且仅当对 $\{f_n\}$ 的任意子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_{k_i}}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E$.

♡

注 若 $m(E) = +\infty$, 上述推论 0.3 的结论不一定成立. 例如, 设 $E = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

则易知对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $f_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 从而 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. 但对 $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1)$, 都有

$$\begin{aligned} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} &= \{x \in \mathbb{R} : e^{-(x-n)^2} \geq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : n - \left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2} \leq x \leq n + \left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\} \end{aligned}$$

于是

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 2 \left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

因此, $f_n(x)$ 不依测度收敛于 0, 从而 $f_n(x)$ 的任何子列也不依测度收敛于 0.

证明 (\Rightarrow): 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上也依测度收敛于 $f(x)$. 由 **Riesz 定理**, 存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\} \subset \{f_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_{k_i}}(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$.

(\Leftarrow): 假设 $f_n(x)$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}) > 0.$$

并且存在 $\delta_0 > 0$, 以及子列 $\{f_{n_{k_i}}\} \subset \{f_{n_k}\}$ 使得

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}) \geq \delta_0.$$

因此对 $\{f_{n_k}\}$ 的任何子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 都有

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}) \geq \delta_0. \quad (8)$$

又 $m(E) < +\infty$, 故由 Egorov 定理可知, 存在闭集 $F \subset E: m(F \setminus E) < \delta$, 使得 $f_{n_{k_i}}(x)$ 在 F 上一致收敛于 $f(x)$. 于是存在 $I \in \mathbb{N}$, 当 $i \geq I$ 时, 对 $\forall x \in F$, 都有

$$|f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0.$$

从而当 $i \geq I$ 时, 就有

$$\begin{aligned} F &\subset \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0\} \iff \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon_0\}^c \subset F^c \\ &\iff \{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\} \subset E \setminus F. \end{aligned}$$

进而当 $i \geq I$ 时, 我们有

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}) \leq m(E \setminus F) < \delta.$$

而由(8)式可知

$$m(\{x \in E : |f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}) \geq \delta_0$$

矛盾! □

定理 0.10

设 $f(x), \{f_n(x)\}$ 是 \mathbb{R} 上的可测函数列.

- (1) 若 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上近一致收敛于 $f(x)$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a, b]$ 上近一致收敛于 $\varphi[f(x)]$;
- (2) 若 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^1)$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $\varphi[f(x)]$.
- (3) 若 $f_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛于 $f(x)$ (近一致收敛或依测度收敛于 $f(x)$), $\varphi(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛 (近一致收敛或依测度收敛) 于 $\varphi[f(x)]$.



证明 □