

0.1 高等代数中两个重要结论和思想

定义 0.1 (函数组线性无关/相关)

设 $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ 是一组定义域为 D 的函数, 如果不存在不全为零的标量 c_1, c_2, \dots, c_n , 使得

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in D.$$

则称这组函数在 I 上是**线性无关的**.

反之, 如果存在不全为零的 c_i 使得上式成立, 则称这组函数是**线性相关的**.

定理 0.1

设 X 是域 \mathbb{F} 上的线性空间, $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$, 记 $N = \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$, 则下述条件等价

- (1) $f \in X^*$ 可被 f_1, f_2, \dots, f_n 线性表出;
- (2) $N \subset \ker f$.

其中 X^* 是线性空间 X 的对偶空间.

证明 (1) 推 (2) 是显然的, 我们来看 (2) 推 (1).

构造线性映射

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{F}^n, \mathbf{x} \mapsto (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})).$$

于是 $\ker \pi = N$. 定义

$$g : \pi(X) \rightarrow \mathbb{F}, \pi(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x}).$$

先证 g 的良定义. 若 $\pi(x) = \pi(y)$, 则 $\pi(x - y) = 0$, 从而 $x - y \in \ker \pi = N$, 于是 $f(x - y) = 0$, 即 $f(x) = f(y)$. 故 g 是良定义的.

现在 g 线性延拓到 \mathbb{F}^n 上 (补空间上定义为零映射), 取 \mathbb{F}^n 的标准基为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 其中 $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T, i = 1, 2, \dots, n$. 现在我们注意到对 $\forall x \in X$, 都有

$$f(x) = g(\pi(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = g\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^n g(e_i) f_i(x).$$

这就证明了 f 可被 f_1, f_2, \dots, f_n 线性表出. □

推论 0.1

n 维线性空间 X 的 n 个线性函数 f_1, f_2, \dots, f_n 线性无关的充要条件是它们可分点, 即对任何 $a \neq 0$, 存在某个 $k = 1, 2, \dots, n$, 使得 $f_k(a) \neq 0$. 也即 $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i = \{0\}$.

证明 注意到 n 个线性函数 f_1, f_2, \dots, f_n 线性无关等价于 f_1, f_2, \dots, f_n 是这个线性空间对偶空间 X^* 的一组基, 从而等价于任意的 $f \in X^*$ 都可被 f_1, f_2, \dots, f_n 线性表出. 又由**定理 0.1**知, 任意的 $f \in X^*$ 都可被 f_1, f_2, \dots, f_n 线性表出的充要条件是

$$\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subset \bigcap_{f \in X^*} \ker f, \quad (1)$$

下证 $\bigcap_{f \in X^*} \ker f = \{0\}$. 对 $\forall \alpha \in \bigcap_{f \in X^*} \ker f$, 若 $\alpha \neq 0$, 则 X^* 中存在线性函数

$$f_0 : X \rightarrow \mathbb{F}, x \mapsto 2x$$


从而 $f(\alpha) = 2\alpha \neq 0$. 这与 $\alpha \in \ker f_0$ 矛盾! 因此 $\alpha = 0$, 故 $\bigcap_{f \in X^*} \ker f = \{0\}$. 再由(1)式可知, f_1, f_2, \dots, f_n 线性无关

等价于 $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i = \{0\}$, 即使 f_i 的像全为 0 的向量只能是 0. 这就完成了证明. \square

例题 0.1 设 V 是有限维线性空间且 A 是 V 上的线性变换. 定义

$$B: V^* \rightarrow V^*, g \mapsto g \circ A.$$

证明 $f, Bf, B^2f, \dots, B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基的充要条件是 A 的任一非 0 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间.

 **笔记** 联想循环子空间的基本性质即 $\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}$ 是包含 x 的最小 A -不变子空间.

证明 由 **推论 0.1** 知 $f, Bf, B^2f, \dots, B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基等价于

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f = \{0\}. \quad (2)$$

于是由

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f &= \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker (f \circ A^k) \\ &\iff f(A^i x) = 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ &\iff A^i x \in \ker f, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ &\stackrel{\text{定理??}}{\iff} \text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\} = \text{span}\{x, Ax, \dots, A^{n-1}x\} \subset \ker f \\ &\stackrel{\text{循环子空间的基本性质}}{\iff} \text{包含 } x \text{ 的最小 } A\text{-不变子空间} \subset \ker f. \end{aligned}$$

知 (2) 成立等价于只有 $0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f$, 等价于只有包含 0 的最小 A -不变子空间 (即 $\{0\}$) 含于 $\ker f$, 也等价于含于 $\ker f$ 的 A -不变子空间只能是 $\{0\}$, 这就等价于 A 的任一非 $\{0\}$ 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间. \square

定理 0.2

函数 f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关的充要条件是: 存在 m 个数 $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

注 本题并未指出 f 定义域, 因此其定义域未必是数字.

证明 充分性: 设存在 m 个数 $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使得 (3) 成立. 考虑关于 c_1, c_2, \dots, c_m 的齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^m c_i f_i(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

我们由 (3) 知其系数矩阵可逆, 因此线性方程组只有 0 解, 这就证明了 f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关.

必要性: 假定 f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关, 不妨设定义域 D 有不少于 m 个不同的点, 否则, 不妨设定义域 D 内有 $k \leq m$ 个点, 则考虑关于 c_1, c_2, \dots, c_m 的齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^m c_i f_i(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots, k.$$

因为 $k \leq m$, 所以上述方程有无穷多个解, 可从中任取一组非零解 $(c'_1, c'_2, \dots, c'_m)$, 于是

$$\sum_{i=1}^m c'_i f_i(x) = 0, \forall x \in D.$$

故 f_1, f_2, \dots, f_m 线性相关.

我们用归纳法, $m = 1$ 命题显然成立, 假设命题对不超过 $m - 1$ 时成立, 则考虑 m 时, 对 f_1, f_2, \dots, f_{m-1} 用归

假设存在 $x_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{m-1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{m-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \cdots & f_{m-1}(x_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4)$$

因为 f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关, 所以存在 x_m 使得关于 k_1, k_2, \dots, k_m 的方程

$$k_1 f_1(x_m) + k_2 f_2(x_m) + \cdots + k_m f_m(x_m) = 0. \quad (5)$$

只有零解. 将

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}$$

按最后一行展开得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} = a_1 f_1(x_m) + a_2 f_2(x_m) + \cdots + a_m f_m(x_m),$$

其中 a_i 为 (m, i) 元的代数余子式. 由(4)式可知

$$a_m = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \cdots & f_{m-1}(x_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

故由方程(5)只有零解知

$$a_1 f_1(x_m) + a_2 f_2(x_m) + \cdots + a_m f_m(x_m) \neq 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

这就证明了存在 x_m 使得 (3) 成立, 我们完成了证明. □

例题 0.2 设 $X \subset C[0, 1]$ 的有限维子空间, 证明 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛.



笔记 证明的想法是把函数列逐点收敛转化为系数的收敛, 从而一致收敛.

证明 设 f_1, f_2, \dots, f_m 是 X 的一组基, 我们知道存在 m 个数 $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

对函数列 $\{f^{(k)}\} \subset X, k = 1, 2, \dots$, 我们知道有表示

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^m c_j^{(k)} f_j(x), \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = f(x), \forall x \in [0, 1].$$

于是由 (6) 知

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix}$$

因此存在 c_j 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_j^{(k)} = c_j, j = 1, 2, \cdots, m.$$

现在就有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x), \forall x \in [0, 1].$$

又


$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(k)}(x) - f(x)| &\leq \sup_{x \in [0, 1]} \sum_{j=1}^n |c_j^{(k)} - c_j| \cdot |f_j(x)| \\ &\leq \sup_{\substack{1 \leq j \leq m, \\ x \in [0, 1]}} |f_j(x)| \cdot \sum_{j=1}^n |c_j^{(k)} - c_j| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

这就证明了 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛. □

定理 0.3

设 V 是域 \mathbb{F} 上的线性空间, A 是 V 上线性变换, $f, f_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, s$ 满足 $f = f_1 f_2 \cdots f_s$ 并有 f_1, f_2, \cdots, f_s 两两互素. 则

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

 **笔记** 这个定理最常见的情况是: 当 f 为 A 的零化多项式时, 就有 $\ker f(A) = V$, 此时利用这个定理就能得到一个全空间的直和分解.

证明 当 $s = 2$, 此时由裴蜀等式得 $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $p_1 f_1 + p_2 f_2 = 1$. 于是对 $\alpha \in \ker f(A)$, 我们有

$$\alpha = p_1(A) f_1(A) \alpha + p_2(A) f_2(A) \alpha.$$

定义

$$\alpha_1 \triangleq p_2(A) f_2(A) \alpha, \quad \alpha_2 \triangleq p_1(A) f_1(A) \alpha.$$

现在

$$f_1(A) \alpha_1 = p_2(A) f_1(A) f_2(A) \alpha = p_2(A) f(A) \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \ker f_1(A);$$

$$f_2(A) \alpha_2 = p_1(A) f_1(A) f_2(A) \alpha = p_1(A) f(A) \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_2 \in \ker f_2(A).$$

因此我们的确有

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) + \ker f_2(A).$$

现在设 $\alpha \in \ker f_1(A) \cap \ker f_2(A)$, 于是 $\alpha = p_1(A) f_1(A) \alpha + p_2(A) f_2(A) \alpha = 0$, 即

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A).$$

对 $s > 2$, 我们考虑归纳法. 假设命题对 $s - 1$ 已经成立, 设 $g(x) \triangleq f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$, 则由命题??知 f_1, g 互素. 由 $s = 2$ 的结论知

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker g(A).$$

对 g 用归纳假设得

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

□

例题 0.3 设 $B_i \in \mathbb{C}^{n \times n}, i = 1, 2, \dots, k$ 是幂等矩阵, $A = B_1 B_2 \cdots B_k$, 证明:

$$r(I - A) \leq k(n - r(A)).$$

证明 将 A, B_i 都看作在 \mathbb{C}^n 上左乘诱导的线性变换. 由 B_i 是幂等矩阵知

$$B^2 = B \iff \ker(B_i^2 - B_i) = \mathbb{C}^n, i = 1, 2, \dots, k.$$

由定理 0.3 知

$$\mathbb{C}^n = \ker(B_i^2 - B_i) = \ker B_i \oplus \ker(I - B_i), i = 1, 2, \dots, k.$$

再结合维数公式可得

$$\begin{aligned} n &= \dim \ker B_i + \dim \ker(I - B_i) = n - \dim \operatorname{Im} B_i + n - \dim \operatorname{Im}(I - B_i) \\ &= n - r(B_i) + n - r(I - B_i), i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

因此

$$r(I - B_i) + r(B_i) = n, i = 1, 2, \dots, k.$$

注意到

$$I - A = I - B_1 B_2 \cdots B_k = (I - B_1)B_2 \cdots B_k + (I - B_2)B_3 \cdots B_k + \cdots + (I - B_{k-1})B_k + I - B_k,$$

故由矩阵秩的基本公式 (2) 知

$$r(A) = r(B_1 B_2 \cdots B_k) \leq r(B_i), i = 1, 2, \dots, k.$$

从而再由矩阵秩的基本公式 (2) 和 (5) 知

$$\begin{aligned} r(I - A) &\leq r(I - B_1) + r(I - B_2) + \cdots + r(I - B_k) \\ &= kn - r(B_1) - r(B_2) - \cdots - r(B_k) \\ &\leq kn - kr(A) = k(n - r(A)). \end{aligned}$$

□

例题 0.4 设 V 是域 \mathbb{F} 上的线性空间, A 是 V 上线性变换. 设 $f, f_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \dots, s$ 满足 $f = f_1 f_2 \cdots f_s$ 并有 f_1, f_2, \dots, f_s 两两互素, f 是 A 的零化多项式. 证明:

$$V = \operatorname{Im} \frac{f(A)}{f_1(A)} \oplus \operatorname{Im} \frac{f(A)}{f_2(A)} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} \frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

注 题目中出现了 $\frac{f}{f_i}$, 就是默认了 $f_i \mid f$, 也即 $\frac{f}{f_i} \in \mathbb{F}[x]$.

证明 由定理 0.3, 我们有

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

设

$$\alpha = \frac{f(A)}{f_i(A)} \beta \in \operatorname{Im} \frac{f(A)}{f_i(A)},$$

我们有

$$f_i(A)\alpha = f(A)\beta = 0 \implies \alpha \in \ker f_i(A),$$

故 $\text{Im} \frac{f(A)}{f_i(A)} \subseteq \ker f_i(A), i = 1, 2, \dots, s$. 于是由命题??知

$$\text{Im} \frac{f(A)}{f_1(A)} + \text{Im} \frac{f(A)}{f_2(A)} + \dots + \text{Im} \frac{f(A)}{f_s(A)}$$

是直和.

由命题??知 $\frac{f}{f_i}, i = 1, 2, \dots, s$ 互素, 由裴蜀等式我们知道存在 $u_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \dots, s$ 使得

$$\sum_{i=1}^s u_i \frac{f}{f_i} = 1.$$

于是对 $\alpha \in V$, 我们有

$$\alpha = \sum_{i=1}^s \frac{f(A)}{f_i(A)} (u_i(A)\alpha) \in \text{Im} \frac{f(A)}{f_1(A)} \oplus \text{Im} \frac{f(A)}{f_2(A)} \oplus \dots \oplus \text{Im} \frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

现在我们知道

$$V = \text{Im} \frac{f(A)}{f_1(A)} \oplus \text{Im} \frac{f(A)}{f_2(A)} \oplus \dots \oplus \text{Im} \frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

□