

0.1 点集间的距离

定义 0.1

设 $x \in \mathbb{R}^n$, E 是 \mathbb{R}^n 中的非空点集, 称

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**; 若 E_1, E_2 是 \mathbb{R}^n 中的非空点集, 称

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的**距离**. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} \quad \text{或} \quad \inf\{d(E_1, y) : y \in E_2\}.$$



例题 0.1 在 \mathbb{R}^2 中作点集

$$E_1 = \{x = (\xi, \eta) : -\infty < \xi < +\infty, \eta = 0\},$$

$$E_2 = \{y = (\xi, \eta) : \xi \cdot \eta = 1\},$$

则 $d(E_1, E_2) = 0$.

证明 事实上, 当我们取 $x = (\xi, 0) \in E_1$ 且 $y = (\xi, \eta) \in E_2$ 时, 由

$$d(E_1, E_2) \leq d(x, y) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1, E_2) < \varepsilon$. 由此得

$$d(E_1, E_2) = 0.$$

显然, 若 $x \in E$, 则 $d(x, E) = 0$. 但反之, 若 $d(x, E) = 0$, 则 x 不一定属于 E . 不过在 $x \notin E$ 时, 必有 $x \in E'$. \square

定理 0.1

若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0 \in F$, 有

$$|x_0 - y_0| = d(x_0, F).$$



证明 作闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x_0, \delta)$, 使得 $\overline{B} \cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0, F) = d(x_0, \overline{B} \cap F).$$

$\overline{B} \cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0 - y|$ 看作定义在 $\overline{B} \cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\overline{B} \cap F$ 上达到最小值, 即存在 $y_0 \in \overline{B} \cap F$, 使得

$$|x_0 - y_0| = \inf\{|x_0 - y| : y \in \overline{B} \cap F\},$$

从而有 $|x_0 - y_0| = d(x_0, F)$. \square

定理 0.2

若 E 是 \mathbb{R}^n 中非空点集, 则 $d(x, E)$ 作为 x 的函数在 \mathbb{R}^n 上是一致连续的.



证明 考虑 \mathbb{R}^n 中的两点 x, y . 根据 $d(y, E)$ 的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $z \in E$, 使得 $|y - z| < d(y, E) + \varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \\ &< |x - y| + d(y, E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$d(x, E) - d(y, E) \leq |x - y|.$$

同理可证 $d(y, E) - d(x, E) \leq |x - y|$. 这说明

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq |x - y|.$$

□

推论 0.1

若 F_1, F_2 是 \mathbb{R}^n 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$, 使得

$$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2).$$

♡

引理 0.1

若 F_1, F_2 是 \mathbb{R}^n 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $f(x)$, 使得

(i) $0 \leq f(x) \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}^n$);

(ii) $F_1 = \{x : f(x) = 1\}, F_2 = \{x : f(x) = 0\}$.

♡

证明 构造函数 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

它就是所求的函数.

□

定理 0.3 (连续延拓定理)

若 F 是 \mathbb{R}^n 中的闭集, $f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)| \leq M$ ($x \in F$), 则存在 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)| \leq M, \quad g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

♡

注 1. 上述定理在 $f(x)$ 无界时也成立 (研究 $\arctan f(x)$).

2. \mathbb{R}^2 中存在由某些有理点构成的稠密集, 其中任意两点的距离为无理数.

证明 把 F 分成三个点集:

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in F : \frac{M}{3} \leq f(x) \leq M\right\}, \\ B &= \left\{x \in F : -M \leq f(x) \leq \frac{-M}{3}\right\}, \\ C &= \left\{x \in F : \frac{-M}{3} < f(x) < \frac{M}{3}\right\}, \end{aligned}$$

并作函数

$$g_1(x) = \frac{M}{3} \cdot \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, B) + d(x, A)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集, 所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 \mathbb{R}^n 上处处连续. 此外, 还有

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq \frac{M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ |f(x) - g_1(x)| &\leq \frac{2}{3}M, \quad x \in F. \end{aligned}$$

再在 F 上来考查 $f(x) - g_1(x)$ (相当于上述之 $f(x)$), 并用类似的方法作 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $g_2(x)$. 此时由于 $f(x) - g_1(x)$ 的界是 $2M/3$, 故 $g_2(x)$ 应满足

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ |(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad x \in F. \end{aligned}$$

继续这一过程, 可得在 \mathbb{R}^n 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$|g_k(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^k g_i(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k M, \quad x \in F \quad (k = 1, 2, \dots).$$

上面的第一式表明 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 是一致收敛的. 若记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的连续函数. 上面的第二式表明

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in F.$$

最后, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 得到

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \frac{M}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right)$$

$$\leq \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = M.$$

□