0.1 基本组合学公式

定义 0.1 (组合数定义的扩充)

对 $\forall n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 定义

$$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} 0 & , k < 0, \\ \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & , 0 < k \leqslant n, \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

特别地,$\mathrm{C}_n^0 \triangleq 1$. 若 $n, k \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant k \leqslant n$, 则还有

$$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

♣

命题 0.1 (组合数基本公式)

1. 对 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 有 $\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^m + \mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$.
2.

♠

证明

□

定理 0.1 (二项式定理的推广)

$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n) = \sum_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}} \left(\prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in \{1,2,\cdots,n\}-I} b_j \right).$$

♡

证明 用数学归纳法证明即可.

□

命题 0.2

对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, 都有

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{x+k} = \frac{m!}{x(x+1)\cdots(x+m)}.$$

♠

证明 设

$$f(x) = \frac{m!}{x(x+1)\cdots(x+m)},$$

则由有理分式分解定理知, 存在 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{x+j},$$

两边同乘 $x+j(j=0,1,\cdots,m)$, 再取 $x=-j$ 得

$$\begin{aligned} c_j = \left[(x+j)f(x)\right]_{x=-j} &= \frac{m!}{-j(-j+1)\cdots(-j+j-1)(-j+j+1)\cdots(-j+m)} \\ &= (-1)^j \frac{m!}{j(j-1)\cdots1\cdot1\cdots(m-j)} = (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} \\ &= (-1)^j \binom{m}{j}, j = 0, 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

故结论得证.

□