0.1 矩阵的 Kronecker 积

定义 0.1 (矩阵的 Kronecker 积)

设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 和 $k \times l$ 矩阵, 它们的 **Kronecker 积** $A \otimes B$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $mk \times nl$ 矩阵:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

♣

定理 0.1 (矩阵的 Kronecker 积的基本性质)

证明矩阵的 Kronecker 积满足下列性质 (假设以下的矩阵加法和乘法都有意义):

(1) $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$, $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$;

(2) $(kA)\otimes B = k(A\otimes B) = A\otimes(kB)$;

(3) $(A\otimes C)(B\otimes D) = (AB)\otimes(CD)$;

(4) $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$;

(5) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$;

(6) $(A\otimes B)' = A'\otimes B'$;

(7) 若 A, B 都是可逆矩阵, 则 $A\otimes B$ 也是可逆矩阵, 并且

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1};$$

(8) 若 A 是 m 阶矩阵,B 是 n 阶矩阵, 则 $|A\otimes B| = |A|^n|B|^m$;

(9) 若 A 是 m 阶矩阵,B 是 n 阶矩阵, 则 $\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}(A)\cdot\mathrm{tr}(B)$.

(10) 设 A, B 均为上三角阵, 且 A, B 的主对角元素分别依次为 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_m$, 则 $A\otimes B$ 仍是上三角阵, 且 $A\otimes B$ 的主对角元素依次为 $a_1b_1, \cdots, a_1b_m, a_2b_1, \cdots, a_2b_m, \cdots, a_nb_1, \cdots, a_nb_m$.

(11) 设 A, B 均为对角阵, 且 A, B 的主对角元素分别依次为 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_m$, 则 $A\otimes B$ 仍是对角阵, 且 $A\otimes B$ 的主对角元素依次为 $a_1b_1, \cdots, a_1b_m, a_2b_1, \cdots, a_2b_m, \cdots, a_nb_1, \cdots, a_nb_m$.

♡

证明

(1) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(2) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(3) 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m\times p$ 矩阵,$B = (b_{ij})$ 是 $p\times n$ 矩阵,$C = (c_{ij})$ 是 $k\times q$ 矩阵,$D = (d_{ij})$ 是 $q\times l$ 矩阵. 由 Kronecker 积的定义以及分块矩阵的乘法可得

$$(A\otimes C)(B\otimes D) = \begin{pmatrix} a_{11}C & a_{12}C & \cdots & a_{1p}C \\ a_{21}C & a_{22}C & \cdots & a_{2p}C \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}C & a_{m2}C & \cdots & a_{mp}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}D & b_{12}D & \cdots & b_{1n}D \\ b_{21}D & b_{22}D & \cdots & b_{2n}D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1}D & b_{p2}D & \cdots & b_{pn}D \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j1}CD & \sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j2}CD & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jn}CD \\
\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j1}CD & \sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j2}CD & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jn}CD \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j1}CD & \sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j2}CD & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jn}CD
\end{pmatrix}
$$

$$
= (AB) \otimes (CD).
$$

(4) 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 和 $C = (c_{ij})$ 分别是 $m \times n$, $k \times l$ 和 $p \times q$ 矩阵, 则经计算即可发现 $(A \otimes B) \otimes C$ 和 $A \otimes (B \otimes C)$ 都等于下面的 $mkp \times nlq$ 矩阵:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11}C & \cdots & a_{11}b_{1l}C & \cdots & a_{1n}b_{11}C & \cdots & a_{1n}b_{1l}C \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{11}b_{k1}C & \cdots & a_{11}b_{kl}C & \cdots & a_{1n}b_{k1}C & \cdots & a_{1n}b_{kl}C \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}b_{11}C & \cdots & a_{m1}b_{1l}C & \cdots & a_{mn}b_{11}C & \cdots & a_{mn}b_{1l}C \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}b_{k1}C & \cdots & a_{m1}b_{kl}C & \cdots & a_{mn}b_{k1}C & \cdots & a_{mn}b_{kl}C
\end{pmatrix}.
$$

(5) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(6) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(7) 由 (3) 和 (5) 可得

$$
(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_m \otimes I_n = I_{mn}.
$$

(8) 由 Laplace 定理容易证明:

$$
|A \otimes I_n| = |A|^n, \quad |I_m \otimes B| = |B|^m;
$$

再由 (3) 以及矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积可得

$$
|A \otimes B| = |(A \otimes I_n)(I_m \otimes B)| = |A \otimes I_n||I_m \otimes B| = |A|^n|B|^m.
$$

(9) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(10) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

(11) 由 Kronecker 积的定义经简单计算即可验证.

□

命题 0.1 (矩阵的 Kronecker 积的秩)

设 A, B 分别为 $m \times n$, $k \times l$ 矩阵, 求证: $\mathrm{r}(A \otimes B) = \mathrm{r}(A) \cdot \mathrm{r}(B)$.

证明 设 $\mathrm{r}(A) = r$, $\mathrm{r}(B) = s$, P, Q, R, S 为可逆矩阵, 使得

$$
PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad RBS = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix},
$$

则由性质 (7) 可知 $P \otimes R, Q \otimes S$ 均非异, 再由性质 (3)可得

$$
(P \otimes R)(A \otimes B)(Q \otimes S) = (PAQ) \otimes (RBS) \sim \begin{pmatrix} I_{rs} & O \\ O & O \end{pmatrix},
$$

于是 $\mathrm{r}(A \otimes B) = rs = \mathrm{r}(A) \cdot \mathrm{r}(B)$.

□

推论 0.1

设 A, B 分别为 $m \times n, k \times l$ 矩阵, 求证: $A \otimes B$ 是行满秩阵 (列满秩阵) 的充要条件是 A, B 均为行满秩阵 (列满秩阵).

证明 由矩阵的 Kronecker 积的秩可知

$$\mathrm{r}(A \otimes B) = \mathrm{r}(A) \cdot \mathrm{r}(B).$$

于是立得结论.

□

命题 0.2 (矩阵的 Kronecker 积的特征值)

设 A, B 分别是 m, n 阶矩阵,A 的特征值为 λ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$,$B$ 的特征值为 μ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, 求证: $A \otimes B$ 的特征值为 $\lambda_i \mu_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n)$.

证明 由命题??可知, 存在 m 阶可逆矩阵 P 以及 n 阶可逆矩阵 Q, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & * & * \\ & \mu_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

由性质 (10)可知 $(P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ)$ 仍是上三角矩阵且 $(P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ)$ 的主对角元素依次为

$$\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_1\mu_n, \lambda_2\mu_1, \cdots, \lambda_2\mu_n, \cdots, \lambda_m\mu_1 \cdots, \lambda_m\mu_n.$$

注意到 $(P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) = (P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q)$, 因此 $(P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ)$ 和 $A \otimes B$ 相似, 又相似矩阵特征值相同, 故结论得证.

□

命题 0.3

设 A, B 分别为 m, n 阶矩阵,V 为 $m \times n$ 矩阵全体构成的线性空间,V 上的线性变换 φ 定义为: $\varphi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AXB}$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$,$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 μ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. 求证: 线性变换 φ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n)$.

注 本题是例题??的推广.

证明 取 V 的一组基为 $m \times n$ 基础矩阵:

$$E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{m1}, \cdots, E_{mn},$$

我们首先证明 φ 在这组基下的表示矩阵为 $A \otimes B'$. 事实上,

$$\varphi(E_{ij}) = AE_{ij}B = Ae_i f_j' B = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ki} b_{jl} E_{kl},$$

其中 e_i, f_j 分别是 m, n 维标准单位列向量, 故 φ 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11}B' & a_{12}B' & \cdots & a_{1m}B' \\ a_{21}B' & a_{22}B' & \cdots & a_{2m}B' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B' & a_{m2}B' & \cdots & a_{mm}B' \end{pmatrix} = A \otimes B'.$$

注意到 B' 与 B 有相同的特征值, 故由矩阵的 Kronecker 积的特征值可知, φ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$.

□

例题 0.1 设 A,B 分别为 m,n 阶矩阵,V 为 $m\times n$ 矩阵全体构成的线性空间,V 上的线性变换 φ 定义为: $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$. 证明: φ 是线性自同构的充要条件是 A,B 都是可逆矩阵.

注 例 4.16 作为本题的特例, 我们已经给出了两种证法, 其中证法 1 仍然可以适用于本题, 证法 2 则需改用例 6.99 进行讨论, 当然也可用第 4 章解题 13 进行统一的处理, 请读者自行补充细节. 下面再给出两种证法.(这里的题目与题号都是指白皮书上的)

证明 证法三:由命题 0.3的证明过程可知,φ 在基础矩阵这组基下的表示矩阵为 $A\otimes B'$, 再由性质 (8) 可知 $|A\otimes B'|=|A|^n|B|^m$, 故 φ 是自同构当且仅当表示矩阵 $A\otimes B'$ 是可逆矩阵, 这也当且仅当 A,B 都是可逆矩阵.

证法四:由命题 0.3可知,φ 是自同构当且仅当 φ 所有的特征值 $\lambda_i\mu_j\neq 0$, 这当且仅当所有的 $\lambda_i\neq 0$ 以及所有的 $\mu_j\neq 0$, 这也当且仅当 A,B 都是可逆矩阵.

□

例题 0.2 设 A,B 分别为 m,n 阶矩阵,V 为 $m\times n$ 矩阵全体构成的线性空间,V 上的线性变换 φ 定义为: $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$. 证明: φ 是幂零线性变换的充要条件是 A,B 至少有一个是幂零矩阵.

证明 先证充分性. 不妨设 A 是幂零矩阵, 即存在正整数 k, 使得 $A^k=O$, 则 $\varphi^k(X)=A^kXB^k=O$, 即 $\varphi^k=0$, 于是 φ 是幂零线性变换.

再证必要性. 我们考虑必要性的逆否命题. 设 A,B 都不是幂零矩阵, 即对任意给定的正整数 k,$A^k\neq O$,$B^k\neq O$, 只要证明 $\varphi^k\neq 0$ 即可. 我们给出以下 4 种证法.

证法一: 不妨设 A^k 的第 i 列非零,B^k 的第 j 行非零, 即有列向量 $A^ke_i\neq\mathbf{0}$, 行向量 $f_j'B^k\neq\mathbf{0}$, 其中 e_i,f_j 分别是 m,n 维标准单位列向量, 于是

$$\varphi^k(E_{ij})=A^kE_{ij}B^k=A^ke_if_j'B^k=(A^ke_i)(f_j'B^k)\neq O.$$

证法二:设 P_i,Q_i 为可逆矩阵, 使得 $P_1A^kQ_1=\mathrm{diag}\{I_r,O\}$,$P_2B^kQ_2=\mathrm{diag}\{I_s,O\}$, 不妨设 $r\geqslant s\geqslant 1$, 于是

$$\varphi^k(Q_1P_2)=P_1^{-1}\mathrm{diag}\{I_r,O\}\mathrm{diag}\{I_s,O\}Q_2^{-1}=P_1^{-1}\mathrm{diag}\{I_s,O\}Q_2^{-1}\neq O.$$

证法三: 由命题 0.3的证明过程可知,φ^k 在基础矩阵这组基下的表示矩阵为 $A^k\otimes(B^k)'$, 再由 Kronecker 积的定义可知 $A^k\otimes(B^k)'\neq O$, 于是 $\varphi^k\neq 0$.

证法四:由命题**??**可知,φ 是幂零线性变换当且仅当 φ 的所有特征值都等于零. 由于 A,B 都不是幂零矩阵, 故 A 的特征值 λ_i 不全为零,B 的特征值 μ_j 不全为零. 再由命题 0.3可知,φ 的特征值 $\lambda_i\mu_j$ 也不全为零, 从而 φ 不是幂零线性变换.

□

命题 0.4

设 A,B 分别为 m,n 阶矩阵,V 为 $m\times n$ 矩阵全体构成的线性空间,V 上的线性变换 φ 定义为:$\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}$. 设 A 的特征值为 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant m)$,$B$ 的特征值为 $\mu_j(1\leqslant j\leqslant n)$. 求证: 线性变换 φ 的特征值为 $\lambda_i-\mu_j(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$.

证明 取 V 的一组基为 $m\times n$ 基础矩阵: $E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$, 类似命题**??**的讨论可得,$\varphi$ 在上述基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}'$. 由命题**??**可知, 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * & *\\ & \lambda_2 & * & *\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\mu_1 & * & * & *\\ & \mu_2 & * & *\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mu_n\end{pmatrix}.$$

注意到

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_m\otimes(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{Q})$$

是一个上三角矩阵, 其主对角元素依次为 $\lambda_1-\mu_1,\cdots,\lambda_1-\mu_n,\lambda_2-\mu_1,\cdots,\lambda_2-\mu_n,\cdots,\lambda_m-\mu_1,\cdots,\lambda_m-\mu_n$, 由此即得结论.

□

例题 0.3 设 A, B 分别为 m, n 阶矩阵,V 为 $m \times n$ 矩阵全体构成的线性空间,V 上的线性变换 φ 定义为:$\varphi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XB}$. 证明: 若 A, B 都是幂零矩阵, 则 φ 是幂零线性变换.

证明 因为 A, B 都是幂零矩阵, 所以它们的特征值都为零. 由命题 0.4可知,φ 的特征值也都为零, 于是 φ 是幂零线性变换.(也可由矩阵的运算直接证明本题.)

□

例题 0.4 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵,$g(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}|$. 求证:$n^2$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} & a_{12}\boldsymbol{I}_n & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{I}_n \\ a_{21}\boldsymbol{I}_n & a_{22}\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{I}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{I}_n & a_{n2}\boldsymbol{I}_n & \cdots & a_{nn}\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵的充要条件是 $g(\boldsymbol{A})$ 是可逆矩阵.

证明 显然 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{A}$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $g(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)\cdots(\lambda + \lambda_n)$. 由命题**??**可知, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

注意到

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) \otimes \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$$

是一个上三角矩阵, 其主对角元素为 $\lambda_i + \lambda_j (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 故

$$|\boldsymbol{B}| = \prod_{i,j=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_j) = \prod_{i=1}^{n} g(\lambda_i).$$

因为 $g(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$, 所以 $|\boldsymbol{B}| = |g(\boldsymbol{A})|$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 是可逆阵等价于 $g(\boldsymbol{A})$ 是可逆矩阵.

□