0.1 Cauchy 积分公式的一些重要推论

定理 0.1 (Cauchy 不等式)

设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯, 且对任意 $z\in B(a,R)$, 有 $|f(z)|\leqslant M$, 那么

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant \frac{n!M}{R^n},\quad n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

笔记 这个不等式给出了圆盘上全纯函数的各阶导数在圆心处值的估计.

证明 取 $0<r<R$, 则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯, 由定理??, 得

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

于是, 由长大不等式得

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{n!M}{r^n}.$$

让 $r\to R$, 即得所要证的不等式 (1). □

定理 0.2 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

证明 设 f 为一有界整函数, 其模的上界设为 M, 即对任意 $z\in\mathbb{C}$, 有 $|f(z)|\leqslant M$. 任取 $a\in\mathbb{C}$, 以 a 为中心、R 为半径作圆, 因为 f 为整函数, 故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

这个不等式对任意 $R>0$ 都成立, 让 $R\to\infty$, 即得 $f'(a)=0$. 因为 a 是任意的, 所以在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$, 因而由命题??可知 f 是常数. □

定理 0.3 (代数学基本定理)

任意复系数多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0\neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

笔记 考虑到实系数多项式在实数域中未必有零点, 这个定理给出了复数域的又一重要性质.

证明 如果 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中没有零点, 那么 $f(z)=\dfrac{1}{P(z)}$ 是一个整函数. 由于 $\lim\limits_{z\to\infty}P(z)=\infty$, 故当 $|z|>R$ 时,$|f(z)|\leqslant 1$; 而当 $|z|\leqslant R$ 时,f 是有界的, 因而 f 是一有界整函数. 由Liouville 定理,f 应是一常数. 这个矛盾证明了 P 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点. □

定理 0.4 (Morera 定理)

如果 f 是域 D 上的连续函数, 且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零, 那么 f 在 D 上全纯.

笔记 这个定理是 Cauchy 积分定理的逆定理.

证明 由定理??, 存在 $F\in H(D)$, 使得 $F'(z)=f(z)$ 在 D 中成立. 由定理??,F' 是 D 中的全纯函数, 所以 $F'=f$ 也是全纯函数. □