

0.1 正定型与正定阵

0.1.1 正定型与正定阵

命题 0.1 (正定阵的判定准则)

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 是正定阵的充要条件是以下条件之一:

- (1) A 合同于单位矩阵 I_n ;
- (2) 存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C'C$;
- (3) A 的 n 个顺序主子式全大于零;
- (4) A 的所有主子式全大于零;
- (5) A 的所有特征值全大于零.

注 (2) 实际上给出了一种利用非异实阵构造正定阵的方式, 即若 A 是非异实矩阵, 则 $A'A$ 必是正定阵.

证明

- (1) 参考定理??.
- (2) 参考命题??.
- (3) 参考定理??.
- (4) 参考命题??和定理??.
- (5) 参考推论??.

□

命题 0.2

设 A 是 n 阶正定实对称矩阵, S 是 n 阶实反对称矩阵, 求证:

- (1) $|A + S| \geq |A| + |S|$, 且等号成立当且仅当 $n \leq 2$ 或当 $n \geq 3$ 时, $S = O$.
- (2) $|A + S| \geq |A|$, 且等号成立当且仅当 $S = O$.

▲

证明 设 C 为非异实矩阵, 使得 $C'AC = I_n$. 注意到问题的条件和结论在同时合同变换 $A \mapsto C'AC, S \mapsto C'SC$ 下不改变 (不等式两边同乘 $|C|^2$), 故不妨从一开始就假设 $A = I_n$ 为合同标准型, 从而由命题??即得结论.

□

例题 0.1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都是反对称矩阵且 A 可逆. 证明:

$$|A^2 - B| \geq |A|^2.$$

证明 由 A 是实反称阵且 A 可逆知

$$A = -A^T \implies |A| = (-1)^n |A| \implies n \text{ 为偶数}.$$

由命题??知 A 的特征值都是纯虚数, 从而 A^2 的特征值都是负数, 故 A^2 负定. 因此存在可逆实阵 C , 使得 $A^2 = -C^T C$. 于是

$$\begin{aligned} |A^2 - B| &= |-C^T C - B| = (-1)^n |C^T C + B| \\ &= |C|^2 |I_n + (C^{-1})^T B C^{-1}| \\ &= |A|^2 |I_n + (C^{-1})^T B C^{-1}|. \end{aligned}$$

因为 B 是实反称阵, 所以由命题??知 B 的特征值只能是 0 或纯虚数. 又共轭复特征值成对出现, 故可不妨设 B 的全体特征值为 $0, \dots, 0, \pm a_1 i, \dots, \pm a_k i (a_i \in \mathbb{R})$, 则

$$|I_n + (C^{-1})^T B C^{-1}| = \prod_{i=1}^k (1 + a_i^2) \geq 1.$$

故

$$|A^2 - B| = |A|^2 |I_n + (C^{-1})^T B C^{-1}| \geq |A|^2.$$

□

例题 0.2 设 A 为实方阵, $A + A^T$ 为正定矩阵, 但 $A \neq A^T$, 证明:

$$|A + A^T| < |2A|.$$

证明 记 $R = A + A^T, S = A - A^T$, 则 R 是正定阵, S 是实反称阵. 注意到

$$2A = A + A^T + A - A^T = R + S,$$

故只需证

$$|R| < |R + S|.$$

由命题??知, 存在可逆阵 C , 使得 $R = C^T C$. 从而

$$|R + S| = |C^T C + S| = |C^T C| |I + (C^{-1})^T S C^{-1}| = |R| |I + (C^{-1})^T S C^{-1}|.$$

因为 S 为实反称阵, 所以 $(C^{-1})^T S C^{-1}$ 也为实反称阵. 由实反称阵的特征值全为 0 或纯虚数, 且共轭复特征值成对出现, 故可设 $I + (C^{-1})^T S C^{-1}$ 的全体特征值为

$$1, \dots, 1, 1 \pm a_1 i, \dots, 1 \pm a_k i,$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$. 从而

$$|R + S| = |R| |I + (C^{-1})^T S C^{-1}| = |R| \prod_{i=1}^k (1 + a_i^2) > |R|.$$

□

命题 0.3

设 A, B 都是 n 阶正定实对称矩阵, c 是正实数, 求证:

- (1) $A^{-1}, A^*, A + B, cA$ 都是正定阵;
- (2) 若 D 是非异实矩阵, 则 $D'AD$ 是正定阵;
- (3) 若 $A - B$ 是正定阵, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 也是正定阵.

▲

证明

- (1) 利用正定阵的判定准则 (2), 由已知存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C'C$, 从而 $A^{-1} = (C'C)^{-1} = C^{-1}(C')^{-1} = C^{-1}(C^{-1})'$, 故 A^{-1} 是正定阵. 又 $A^* = (C'C)^* = C^*(C')^* = C^*(C^*)'$, 故 A^* 是正定阵. 对任一非零实列向量 α , $\alpha'(A + B)\alpha = \alpha'A\alpha + \alpha'B\alpha > 0$, 从而 $A + B$ 是正定阵. 注意到, 若 A 是正定阵, 即使 B 只是半正定阵, 通过上述方法也能推出 $A + B$ 是正定阵. 同理可证 cA 也是正定阵.
- (2) 由 (1) 相同的记号可得 $D'AD = D'C'CD = (CD)'(CD)$, 因为 CD 是可逆矩阵, 故 $D'AD$ 是正定阵.
- (3) 由命题??可知 $B^{-1} - A^{-1} = (B + B(A - B)^{-1}B)^{-1}$, 再由 (1) 和 (2) 即得 $B^{-1} - A^{-1}$ 是正定阵.

□

命题 0.4

设 A 是 m 阶正定实对称矩阵, B 是 $m \times n$ 实矩阵. 求证: $B'AB$ 是正定阵的充要条件是 $r(B) = n$.

▲

证明 由 A 的正定性可知, 存在可逆阵 C , 使得 $A = C'C$, 从而 $B'AB = B'C'CB = (CB)'(CB)$ 且 CB 是实矩阵, 故 $B'AB$ 至少是半正定的, 并且 $x'(B'AB)x = (Bx)'A(Bx) = 0$ 当且仅当 $Bx = 0$. 因此, $B'AB$ 是正定阵当且仅当 $Bx = 0$ 只有零解, 再由线性方程组的求解理论可知, 这也当且仅当 $r(B) = n$.

□

命题 0.5

设 A 为 n 阶正定实对称矩阵, n 维实列向量 α, β 满足 $\alpha' \beta > 0$, 求证: $H = A - \frac{A\beta\beta'A}{\beta'A\beta} + \frac{\alpha\alpha'}{\alpha'\beta}$ 是正定阵.

◆

证明 根据定义只要证明对任一实列向量 x , 均有 $x'Hx \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$ 即可. 一方面, 由 $\alpha' \beta > 0$ 可知, $\frac{x'(\alpha\alpha')x}{\alpha'\beta} = \frac{(\alpha'x)^2}{\alpha'\beta} \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha'x = 0$. 另一方面, 由 A 正定可知, 存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C'C$. 设 $C\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$, $Cx = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 则由 Cauchy - Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned} x'Ax - \frac{x'A\beta\beta'A x}{\beta'A\beta} &= (Cx)'(Cx) - \frac{(Cx)'(C\beta)(C\beta)'(Cx)}{(C\beta)'(C\beta)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i \right)^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 b_i 与 x_i 成比例, 即存在实数 k , 使得 $Cx = kC\beta$, 即 $x = k\beta$. 由上述计算可得 $x'Hx \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\alpha'x = 0$ 且 $x = k\beta$, 再由 $\alpha' \beta > 0$ 可得 $k = 0$, 从而 $x = 0$, 结论得证. □

例题 0.3 求证: 下列 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 都是正定阵, 其中

- (1) $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$;
- (2) $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$;
- (3) $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$.

证明

- (1) 注意到 A 的 n 个顺序主子式都是具有相同形状的 Cauchy 行列式, 故要证明它们全大于零, 只要证明 A 的行列式大于零即可. 对 A 的所有 m 阶顺序主子式, 在 Cauchy 行列式中, 令 $a_i = b_i = i (1 \leq i \leq m)$, 则由 Cauchy 行列式可得

$$|A| = \begin{vmatrix} (1+1)^{-1} & (1+2)^{-1} & \cdots & (1+m)^{-1} \\ (2+1)^{-1} & (2+2)^{-1} & \cdots & (2+m)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m+1)^{-1} & (m+2)^{-1} & \cdots & (m+m)^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (j-i)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (i+j)} > 0.$$

故 A 是正定矩阵.

- (2) 考虑 A 的所有 m 阶顺序主子式, 在 Cauchy 行列式中, 令 $a_i = b_i = i - \frac{1}{2} (1 \leq i \leq m)$, 则由 Cauchy 行列式可得

$$|A| = \begin{vmatrix} (1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})^{-1} & (1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (1 - \frac{1}{2} + m - \frac{1}{2})^{-1} \\ (2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})^{-1} & (2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (2 - \frac{1}{2} + m - \frac{1}{2})^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})^{-1} & (m - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (m - \frac{1}{2} + m - \frac{1}{2})^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (j-i)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (i+j-1)} > 0.$$

故 A 为正定阵.

- (3) 考虑 A 的所有 m 阶顺序主子式, 在 Cauchy 行列式中, 令 $a_i = b_i = i + \frac{1}{2} (1 \leq i \leq m)$, 则由 Cauchy 行列式可得

$$|A| = \begin{vmatrix} (1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})^{-1} & (1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (1 + \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2})^{-1} \\ (2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})^{-1} & (2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (2 + \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2})^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})^{-1} & (m + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2})^{-1} & \cdots & (m + \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2})^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (j-i)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (i+j+1)} > 0.$$

故 A 为正定阵.

□

命题 0.6

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 求证: 若 A 是主对角元全大于零的严格对角占优阵, 则 A 是正定阵.

▲

证明 注意到 A 的 n 个顺序主子阵仍然是主对角元全大于零的严格对角占优阵, 故要证明 A 的 n 个顺序主子式全大于零, 只要证明 A 的行列式大于零即可, 而这由命题??即得, 因此 A 是正定阵.

□

命题 0.7

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 求证: 必存在正实数 k , 使得对任一 n 维实列向量 α , 总有

$$-k\alpha'\alpha \leq \alpha' A \alpha \leq k\alpha'\alpha$$

▲

证明 设 $A = (a_{ij})$, 我们总可以取到充分大的正实数 k , 使得

$$k \pm a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

即 $kI_n \pm A$ 是主对角元全大于零的严格对角占优阵, 由命题 0.6 可得 $kI_n \pm A$ 为正定阵, 从而对任一 n 维实列向量 α , 总有 $\alpha'(kI_n \pm A)\alpha \geq 0$, 从而结论得证.

□

命题 0.8

设 α, β 为 n 维非零实列向量, 求证: $\alpha'\beta > 0$ 成立的充要条件是存在 n 阶正定实对称矩阵 A , 使得 $\alpha = A\beta$.

▲

证明 先证充分性. 若存在 n 阶正定实对称矩阵 A , 使得 $\alpha = A\beta$, 则 $\alpha'\beta = (A\beta)'\beta = \beta' A \beta > 0$. 下面用两种方法来证明必要性.

证法一: 注意到问题的条件和结论在矩阵变换 $A \mapsto C'AC, \alpha \mapsto C'\alpha, \beta \mapsto C^{-1}\beta$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\beta = e_n = (0, \dots, 0, 1)'$ (这等价于将原来的 β 放在非异阵 C 的最后一列), $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)'$, 则 $\alpha'\beta > 0$ 等价于 $a_n > 0$. 设 $A = \begin{pmatrix} tI_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1}' & a_n \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha_{n-1} = (a_1, \dots, a_{n-1})'$ 且 $t \gg 0$, 则由行列式的降阶公式可得

$$|A| = |tI_{n-1}|(a_n - \alpha_{n-1}'(tI_{n-1})^{-1}\alpha_{n-1}) = t^{n-2}(a_nt - a_1^2 - \dots - a_{n-1}^2) > 0$$

又 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式都大于零, 故 A 为正定阵且满足 $\alpha = Ae_n = A\beta$.

证法二: 设 $A = I_n - \frac{\beta\beta'}{\beta'\beta} + \frac{\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}$, 则由命题 0.5 可知 A 为正定阵. 不难验证 $A\beta = \alpha$ 成立, 故结论得证.

□

命题 0.9

设 A, B 是 n 阶实矩阵, 使得 $A'B' + BA$ 是正定阵, 求证: A, B 都是非异阵.

▲

证明 用反证法证明. 若 A 为奇异阵, 则存在非零实列向量 α , 使得 $A\alpha = 0$. 将正定阵 $A'B' + BA$ 左乘 α' , 右乘 α 可得

$$0 < \alpha'(A'B' + BA)\alpha = (A\alpha)'(B'\alpha) + (B'\alpha)'(A\alpha) = 0$$

这就导出了矛盾. 同理可证 B 也是非异阵.

□

例题 0.4 设 A, B, C 都是 n 阶正定实对称矩阵, $g(t) = |t^2A + tB + C|$ 是关于 t 的多项式, 求证: $g(t)$ 所有复根的实部都小于零.

注 若 A 是正定实对称矩阵, 则 A 合同于单位矩阵 I_n , 即存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C'I_nC$. 因为 C 是实矩阵, 故可把上式中的 C' 改写成 \bar{C}' , 从而 A 复相合于 I_n , 于是 A 也是正定 Hermite 矩阵. 因此在处理实矩阵问题的过程

中, 如果遇到了复特征值和复特征向量, 那么可以自然地把正定实对称矩阵看成是一种特殊的正定 Hermite 矩阵, 从而其正定性可延拓到复数域上.

证明 任取 $g(t)$ 的一个复根 t_0 , 则 $|t_0^2 A + t_0 B + C| = 0$, 故存在非零复列向量 α , 使得 $(t_0^2 A + t_0 B + C)\alpha = \mathbf{0}$. 将上述等式左乘 $\bar{\alpha}'$, 可得

$$(\bar{\alpha}' A \alpha) t_0^2 + (\bar{\alpha}' B \alpha) t_0 + (\bar{\alpha}' C \alpha) = 0$$

注意到 A, B, C 也是正定 Hermite 矩阵, 故 $a = \bar{\alpha}' A \alpha > 0$, $b = \bar{\alpha}' B \alpha > 0$, $c = \bar{\alpha}' C \alpha > 0$, 并且 t_0 是二次方程 $at^2 + bt + c = 0$ 的根. 若 t_0 是实根, 则 $t_0 < 0$, 否则将由 $t_0 \geq 0$ 得到 $at_0^2 + bt_0 + c \geq c > 0$, 这就推出了矛盾. 若 t_0 是虚根, 则 t_0 的实部为 $-\frac{b}{2a} < 0$, 结论得证. □

命题 0.10

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定实对称矩阵, P_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子式, 求证: $|A| \leq a_{nn} P_{n-1}$. ▲

证明 证法一: 设 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 用第三类分块初等变换求得

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \mathbf{O} & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{vmatrix} = (a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha) |A_{n-1}|$$

因为 A 正定, 所以 A_{n-1} 也正定, 从而 A_{n-1}^{-1} 也正定, 于是 $\alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \geq 0$. 因此

$$|A| = (a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha) |A_{n-1}| \leq a_{nn} |A_{n-1}| = a_{nn} P_{n-1}$$

证法二: 由行列式性质, 有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

令

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

则

$$|A| = g(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n}) + a_{nn} P_{n-1}$$

因为 A 的第 $n-1$ 个顺序主子阵是正定阵, 故由命题 0.17 可知 $g(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n}) \leq 0$, 从而 $|A| \leq a_{nn} P_{n-1}$. □

推论 0.1

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: $|A| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, 且等号成立当且仅当 A 是对角矩阵. ♥

证明 设 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 则由命题 0.10 可得 $|A| \leq a_{nn} P_{n-1}$, 且等号成立当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$. 又 A_{n-1} 也是正定阵, 故不断迭代下去, 可得

$$|A| \leq a_{nn} P_{n-1} \leq a_{n-1,n-1} a_{nn} P_{n-2} \leq \cdots \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

且等号成立当且仅当 A 是对角矩阵.

□

命题 0.11 (Fischer 不等式)

1. 设 A, D 是方阵, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 是正定实对称矩阵, 则:

$$|M| \leq |A||D|,$$

且等号成立当且仅当 $B = O$.

2. 设 $A \in \mathbb{R}^{p \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times q}$, 考虑半正定矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, 则

$$|M| \leq |A||C|.$$

且等号成立当且仅当 $B = O$.

证明

1. 证法一: 由 M 是正定阵可知, A, D 都是正定阵, 从而存在非异实矩阵 C_1, C_2 , 使得 $C_1'AC_1 = I_r, C_2'DC_2 = I_{n-r}$. 令 $C = \text{diag}\{C_1, C_2\}$, 则

$$C'MC = \begin{pmatrix} C_1'AC_1 & C_1'BC_2 \\ C_2'B'C_1 & C_2'DC_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & C_1'BC_2 \\ C_2'B'C_1 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

仍是正定阵. 由推论 0.1 可得 $|C'MC| \leq 1$, 且等号成立当且仅当 $C_1'BC_2 = O$, 即 $|M| \leq |C|^{-2} = |C_1|^{-2}|C_2|^{-2} = |A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B = O$.

证法二: 注意到 A 正定, 故可对题中矩阵进行下列对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - B'A^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - B'A^{-1}B \end{pmatrix},$$

得到的矩阵仍正定, 从而 $D - B'A^{-1}B$ 是正定阵. 因为第三类分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & D \end{vmatrix} = |A||D - B'A^{-1}B|.$$

注意到 $D = (D - B'A^{-1}B) + B'A^{-1}B$, 其中 $B'A^{-1}B$ 是半正定阵, 故由命题 ?? 可得

$$|D| \geq |D - B'A^{-1}B| + |B'A^{-1}B| \geq |D - B'A^{-1}B|,$$

上述不等式的两个等号都成立当且仅当 $B'A^{-1}B = O$. 由 $O = B'A^{-1}B = (A^{-1/2}B)'(A^{-1/2}B)$ 取迹后可得 $A^{-1/2}B = O$, 从而 $B = O$, 于是上述不等式的两个等号都成立当且仅当 $B = O$. 综上所述, 我们有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & D \end{vmatrix} = |A||D - B'A^{-1}B| \leq |A||D|,$$

等号成立当且仅当 $B = O$.

2. 因为 M 半正定, 所以所有主子式非负, 因此 A, C 半正定. 考虑 $M + tI_{p+q}, A + tI_p, B + tI_q, t > 0$ 并让 $t \rightarrow 0^+$ 可以不妨设 A, C 都是正定的. 利用正定矩阵存在正定平方根, 注意到

$$W = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & A^{-1/2}BC^{-1/2} \\ C^{-1/2}B^TA^{-1/2} & I_q \end{pmatrix},$$

我们有

$$\frac{\det M}{\det A \cdot \det C} = \det W \stackrel{\substack{\text{均值不等式} \\ \text{特征值}}}{\leq} \left(\frac{\text{tr}(W)}{p+q} \right)^{p+q} = 1,$$

现在就有

$$\det M \leq \det A \cdot \det C.$$

且等号成立当且仅当 $B = O$.

□

注 在命题 0.11 的证明中, 若考虑 M 的如下对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - B'A^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - B'A^{-1}B \end{pmatrix}$$

则可得 $D - B'A^{-1}B$ 是正定阵. 因为第三类分块初等变换不改变行列式的值, 故可得 $|M| = |A||D - B'A^{-1}B| \leq |A||D|$, 即有 $|D - B'A^{-1}B| \leq |D|$. 利用这一不等式不难证明: 若 A 是 n 阶正定实对称矩阵, B 是 n 阶半正定实对称矩阵, 则 $|A + B| \geq |A|$. 不过这并非是最好的结果, 更精确的结论应该是 $|A + B| \geq |A| + |B|$, 等号成立当且仅当 $n = 1$ 或当 $n \geq 2$ 时, $B = O$. 要证明这一结论, 我们需要实对称矩阵的正交相似标准型理论.

命题 0.12

设 A 是 n 阶实矩阵, $A = (B, C)$ 是 A 的一个分块, 其中 B 是 A 的前 k 列组成的矩阵, C 是 A 的后 $n - k$ 列组成的矩阵. 求证:

$$|A|^2 \leq |B'B||C'C|$$

▲

证明 若 A 不是可逆矩阵, 则 $|A| = 0$, 从而由命题 ??(2) 可知 $B'B, C'C$ 都是半正定阵, 故由命题 ??(2) 可得 $|B'B| \geq 0, |C'C| \geq 0$, 从而上式显然成立. 现设 A 是可逆矩阵, 则由命题 ??(1) 可知

$$A'A = \begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix} (B \ C) = \begin{pmatrix} B'B & B'C \\ C'B & C'C \end{pmatrix}.$$

是正定阵, 再由 Fischer 不等式即得结论.

□

定义 0.1 (亚正定阵)

设 M 为 n 阶实矩阵, 若对任意的非零实列向量 α , 总有 $\alpha'M\alpha > 0$, 则称 M 是亚正定阵.

♣

命题 0.13

亚正定矩阵 A 的所有特征值的实部都大于零.

▲

证明 设 $\lambda_0 = a + bi$ 是 A 的特征值, η 是属于 λ_0 的特征向量. 将 η 的实部和虚部分开, 记为 $\eta = \alpha + i\beta$, 则 $A(\alpha + i\beta) = (a + bi)(\alpha + i\beta)$. 分开实部和虚部可得 $A\alpha = a\alpha - b\beta, A\beta = b\alpha + a\beta$, 于是 $\alpha'A\alpha = a\alpha'\alpha - b\alpha'\beta, \beta'A\beta = b\beta'\alpha + a\beta'\beta$. 因此再由 A 为亚正定矩阵可得

$$\alpha'A\alpha + \beta'A\beta = a(\alpha'\alpha + \beta'\beta) > 0.$$

又 $\alpha'\alpha + \beta'\beta \geq 0$, 故 $a > 0$.

□

定理 0.1

证明下列结论等价:

- (1) M 是亚正定阵;
- (2) $M + M'$ 是正定阵;
- (3) $M = A + S$, 其中 A 是正定实对称矩阵, S 是实反对称矩阵.

♥

注 命题 0.13 告诉我们: 亚正定阵 M 的特征值的实部都大于零, 由此可得 M 的行列式值大于零. 事实上, 这一结论还可以由命题 0.2 得到, 即 $|M| = |A + S| \geq |A| > 0$. 另外, 这一结论还能给出命题 0.9 的证法 2, 即由 $BA + (BA)'$ 正定可知 BA 亚正定, 从而 $|BA| > 0$, 于是 A, B 都是非异阵.

证明

1. (1) \Rightarrow (2): 将 $\alpha'M\alpha > 0$ 转置后可得 $\alpha'M'\alpha > 0$, 再将两式相加后可得 $\alpha'(M + M')\alpha > 0$ 对任意的非零实列

向量 α 都成立, 因此 $M + M'$ 是正定阵.

2. (2) \Rightarrow (3): 令 $A = \frac{1}{2}(M + M')$ 为 M 的对称化, $S = \frac{1}{2}(M - M')$ 为 M 的反对称化, 则结论成立.

3. (3) \Rightarrow (1): 由命题??可知, 对任意的非零实列向量 α , 总有 $\alpha' M \alpha = \alpha' A \alpha + \alpha' S \alpha = \alpha' A \alpha > 0$, 即 M 为亚正定阵.

□

0.1.2 负定型与负定阵

定理 0.2

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是实二次型, A 是相伴的实对称矩阵, 则

(1) f 是负定型或半负定型当且仅当 $-f$ 是正定型或半正定型;

(2) A 是负定阵或半负定阵当且仅当 $-A$ 是正定阵或半正定阵.

♥

注 由这个定理 0.2 可知, 负定型或半负定型 (负定阵或半负定阵) 的问题通常都可以转化成正定型或半正定型 (正定阵或半正定阵) 的问题来研究.

证明 由 (半) 正定、负定型 (阵) 的定义易得.

□

引理 0.1

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是实二次型, A 是相伴的实对称矩阵, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 则

(1) f 是正定型的充要条件是若 $f(x) \leq 0$, 则 $x = 0$.

(2) f 是半正定型的充要条件是若 $f(x) < 0$, 则 $x = 0$.

(3) f 是负定型的充要条件是若 $f(x) \geq 0$, 则 $x = 0$.

(4) f 是半负定型的充要条件是若 $f(x) > 0$, 则 $x = 0$.

♥

证明 证明是显然的.

□

命题 0.14

设 A 是 n 阶实对称矩阵, P_1, P_2, \dots, P_n 是 A 的 n 个顺序主子式, 求证 A 负定的充要条件是:

$$P_1 < 0, P_2 > 0, \dots, (-1)^n P_n > 0$$

♣

证明 A 负定当且仅当 $-A$ 正定, 由正定阵的顺序主子式判定法即得结论.

□

命题 0.15

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证:

(1) A 是负定阵的充要条件是存在 n 阶非异实矩阵 C , 使得 $A = -C'C$.

(2) A 是半负定阵的充要条件是存在 n 阶实矩阵 C , 使得 $A = -C'C$. 特别地, $|A| = (-1)^n |C|^2$.

♣

证明 由命题??和定理 0.2 立得.

□

命题 0.16

设 A 是 n 阶负定实对称矩阵, 求证: A^{-1} 也是负定阵; 当 n 为偶数时, A^* 是负定阵, 当 n 为奇数时, A^* 是正定阵.

♣

证明 因为 A 负定, 故存在非异实矩阵 C , 使得 $A = -C'C$. 于是 $A^{-1} = -C^{-1}(C')^{-1} = -C^{-1}(C^{-1})'$ 也是负定阵; 由

伴随矩阵的性质 2 可得 $A^* = (-1)^{n-1} C^* (C')^* = (-1)^{n-1} C^* (C^*)'$, 故当 n 为偶数时, $A^* = -C^* (C^*)'$ 是负定阵; 当 n 为奇数时, $A^* = C^* (C^*)'$ 是正定阵.

□

命题 0.17

设有实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶正定实对称矩阵, 求证下列实二次型是负定型:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' & 0 \end{vmatrix}.$$

◆

证明 证法一: 由命题??可得

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j = -\mathbf{x}' \mathbf{A}^* \mathbf{x}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, \mathbf{A}^* 是 \mathbf{A} 的伴随矩阵. 因为 \mathbf{A} 正定, 故由命题 0.3 可知 \mathbf{A}^* 也正定, 从而 g 为负定型.

证法二: 因为 \mathbf{A} 正定, 所以 $|\mathbf{A}| > 0$, 故由降阶公式可得

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = |\mathbf{A}|(0 - \mathbf{x}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}) = -|\mathbf{A}|(\mathbf{x}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x})$$

再由命题 0.3 可知 \mathbf{A}^{-1} 也正定, 即 $\mathbf{x}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$ 是正定型, 从而 g 为负定型.

证法三: 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ 为实列向量, 要证 g 是负定型, 等价地只要证明: 若 $g(\alpha) \geq 0$, 则 $\alpha = \mathbf{0}$ 即可. 作 $n+1$ 变元二次型 $h(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' \mathbf{B} \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|\mathbf{B}| = g(\alpha) \geq 0$. 又已知 \mathbf{A} 正定, 因此 \mathbf{B} 的前 n 个顺序主子式为正数. 由命题??可知, h 是半正定型, 从而 \mathbf{B} 是半正定阵. 注意到 \mathbf{B} 的第 $(n+1, n+1)$ 元素为零, 故由命题??可知 $\alpha = \mathbf{0}$.

□