

0.1 复变函数的导数

定义 0.1

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数, $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1)$$

存在, 就说 f 在 z_0 处复可微或可微, 这个极限称为 f 在 z_0 处的导数或微商, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在 D 中每点都可微, 就称 f 是域 D 中的全纯函数或解析函数. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处全纯.

命题 0.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续.

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (2)$$

由此即得 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. \square

例题 0.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 \mathbb{C} 中处处不可微.

笔记 但容易看出这个函数在 \mathbb{C} 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z) = \operatorname{Re} z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时上述极限不存在, 因而在 \mathbb{C} 中处处不可导. \square

命题 0.2

(1) 若 f 和 g 在域 D 中全纯, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z \in D, g(z) \neq 0$, 那么 $\frac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) 设 D_1, D_2 是 \mathbb{C} 中的两个域, 且

$$f: D_1 \rightarrow D_2,$$

$$g: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h = g \circ f$ 是 $D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ 的全纯函数, 而且 $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$. 这里, $g \circ f$ 记 f 和 g 的复合函数: $g \circ f(z) = g(f(z))$.

证明

(1)

(2)

□