

0.1 Euler 积分

定理 0.1 (余元公式)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, 0 < x < 1.$$



证明



命题 0.1

对 $\forall s > 0$, 都有

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$



证明 已知 Γ 函数:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

令 $x = ty$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, 得

$$\Gamma(s) = t^s \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy.$$

故

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} dy.$$

