0.1 最大模原理和 Schwarz 引理

定理 0.1 (最大模原理)

设 f 是区域 D 中非常数的全纯函数, 那么 $|f(z)|$ 不可能在 D 中取到最大值.

证明 因为 f 是 D 上非常数的全纯函数, 由定理**??**,$G = f(D)$ 是一个区域. 如果 $|f(z)|$ 在 D 中某点 z_0 处取到最大值, 记 $w_0 = f(z_0) \in G$, 则由 G 是区域知 w_0 是 G 的一个内点, 即有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(w_0, \varepsilon) \subseteq G$. 故必有 $w_1 \in G$, 使得 $|w_1| > |w_0|$. 于是存在 $z_1 \in D$, 使得 $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$. 这与 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 D 中的最大值相矛盾.

□

定理 0.2

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的有界区域, 如果非常数的函数 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 在 D 内全纯, 那么 f 的最大模在 D 的边界上而且只在 D 的边界上达到.

注 定理 0.2中 D 的有界性条件不能去掉, 否则定理可能不成立. 例如, 设

$$D = \left\{ z : |\mathrm{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}.$$

当然 f 在 D 中全纯, 在 $\overline{D}$ 上连续, 但它的最大模并不能在 ∂D 上达到. 事实上, 当 $z \in \partial D$ 时,$z = x \pm \frac{\pi}{2} i$, 这时,$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i \mathrm{e}^x$, 所以 $|\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}| = |\mathrm{e}^{\pm i \mathrm{e}^x}| = 1$. 而当 $z \in D$ 时, 取 $z = x$, 即有 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \to \infty (x \to \infty)$. 故定理 0.2不成立.

证明 因为 $\overline{D}$ 是紧集, 其上的连续函数 $|f|$ 一定有最大值, 即存在 $z_0 \in \overline{D}$, 使得 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值. 由定理 0.1 知道,z_0 不能属于 D, 因此只能有 $z_0 \in \partial D$.

□

定理 0.3 (Schwarz 引理)

设 f 是单位圆盘 $B(0,1)$ 中的全纯函数, 且满足条件

(i) 当 $z \in B(0,1)$ 时,$|f(z)| \leqslant 1$;

(ii) $f(0) = 0$,

那么下列结论成立:

(i) 对于任意 $z \in B(0,1)$, 均有 $|f(z)| \leqslant |z|$;

(ii) $|f'(0)| \leqslant 1$;

(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0,1)$,$z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$ 成立, 那么存在实数 θ, 使得对 $B(0,1)$ 中所有的 z, 都有 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

证明 因为 $f \in H(B(0,1))$, 且 $f(0) = 0$, 故 f 在 $B(0,1)$ 中可展开为

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z(a_1 + a_2 z + \cdots) = z g(z),$$

这里,$g(0) = a_1 = f'(0)$. 取 $0 < r < 1$, 当 $|z| = r$ 时, 有

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r},$$

故由最大模原理, 在圆盘 $B(0,r)$ 中也有

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r} (\text{当 } |z| < r \text{ 时}).$$

让 $r \to 1$, 即得 $|g(z)| \leqslant 1 (z \in B(0,1))$, 即 $|f(z)| \leqslant |z|$, 结论 (i) 成立.

从 $|g(0)| \leqslant 1$ 即得 $|f'(0)| \leqslant 1$, 结论 (ii) 成立.

现若有 $z_0 \in B(0,1)$,$z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 即 $|g(z_0)| = 1$. 这说明全纯函数 g 在内点 z_0 处取到了最大模 1, 根据最大模原理,g 必须是常数. 设 $g(z) \equiv c$, 由 $|g(z_0)| = 1$, 得 $|c| = 1$, 所以 $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 因而 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. 如果 $|f'(0)| = 1$, 即 $|g(0)| = 1$, 与上面一样讨论, 即得 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. 结论 (iii) 成立.

□

定义 0.1

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果 f 是 D 上的单叶全纯函数, 且 $f(D)=D$, 就称 f 是 D 上的一个**全纯自同构**.D 上全纯自同构的全体记为 $\mathrm{Aut}(D)$.

命题 0.1

$\mathrm{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群, 称为 D 的**全纯自同构群**.

证明 设 $f,g\in\mathrm{Aut}(D)$, 那么 $f\circ g\in\mathrm{Aut}(D)$, 且复合运算满足结合律. 对于每个 $f\in\mathrm{Aut}(D)$, 由定理**??**,$f^{-1}\in\mathrm{Aut}(D)$.$f(z)=z$ 在复合运算下起着单位元素的作用. 因而 $\mathrm{Aut}(D)$ 在复合运算下构成一个群.

□

对于一般的区域 D, 要确定 $\mathrm{Aut}(D)$ 是很困难的. 但对于单位圆盘 $B(0,1)$, 应用 Schwarz 引理不难定出其上的全纯自同构群.

对于 $|a|<1$, 记

$$\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z},$$

由例题**??** 知道, 它把 $B(0,1)$ 一一地映为 $B(0,1)$, 因而 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$. 如果记 $\rho_\theta(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 它是一个旋转变换, 当然有 $\rho_\theta\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$. 下面我们将证明,$\mathrm{Aut}(B(0,1))$ 中除了 φ_a,ρ_θ 以及它们的复合外, 不再有其他的变换.

定理 0.4

设 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 且 $f^{-1}(0)=a$, 则必存在 $\theta\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

证明 记 $w=\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, 直接计算可得

$$z=\varphi_a^{-1}(w)=\frac{a-w}{1-\overline{a}w}=\varphi_a(w). \tag{1}$$

令 $g(w)=f\circ\varphi_a(w)$, 则由例题**??** 知道 $g\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 而且

$$g(0)=f(\varphi_a(0))=f(a)=0,$$

故由 Schwarz 引理得

$$|g'(0)|\leqslant 1. \tag{2}$$

由于 $g^{-1}\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, 且 $g^{-1}(0)=0$, 故对 g^{-1} 用Schwarz 引理, 得 $|(g^{-1})'(0)|\leqslant 1$. 但由定理**??**, 有

$$|(g^{-1})'(0)|=\frac{1}{|g'(0)|},$$

由此即得

$$|g'(0)|\geqslant 1.$$

与 (2) 式比较, 即得 $|g'(0)|=1$. 根据 Schwarz 引理的结论 (iii), 存在实数 θ, 使得 $g(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w$, 即 $f\circ\varphi_a(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}w$. 令 $w=\varphi_a(z)$, 再结合(1)式即得

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

□

定理 0.5 (Schwarz-Pick 定理)

设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 是全纯函数, 对于 $a\in B(0,1),f(a)=b$. 那么

(i) 对任意 $z\in B(0,1)$, 有 $|\varphi_b(f(z))|\leqslant|\varphi_a(z)|$ 其中 $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z},\varphi_b(z)=\dfrac{b-z}{1-\overline{b}z}$;

(ii) $|f'(a)| \leqslant \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$;

(iii) 如果存在某点 $z_0 \in B(0,1), z_0 \neq a$, 使得 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$, 或者 $|f'(a)| = \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$ 成立, 那么 $f \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$. 其中 $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}, \varphi_b(z) = \dfrac{b-z}{1-\overline{b}z}$.

证明 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, 则 $g \in H(B(0,1))$, 且 $g(B(0,1)) \subset B(0,1), g(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a(0) = 0$. 对 g 用Schwarz 引理, 有

$$|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(\zeta)| \leqslant |\zeta|, \ \zeta \in B(0,1) \tag{3}$$

和

$$|(\varphi_b \circ f \circ \varphi_a)'(0)| \leqslant 1. \tag{4}$$

令 $z = \varphi_a(\zeta)$, 则 $\zeta = \varphi_a(z)$, 于是 (3) 式变成

$$|\varphi_b(f(z))| \leqslant |\varphi_a(z)|. \tag{5}$$

这就是 (i).

由于

$$\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2), \quad \varphi_b'(b) = -\frac{1}{1-|b|^2},$$

由 (4) 式即得

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}. \tag{6}$$

这就是 (ii).

如果存在 $z_0 \in B(0,1), z_0 \neq a$, 使得 (5) 式中的等号成立, 令 $\zeta_0 = \varphi_a(z_0)$, 则 $\zeta_0 \neq 0$, 且 ζ_0 使 (3) 式中的等号成立. 于是由 Schwarz 引理, $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 即 $g \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$.

注意到当 (6) 式中的等号成立时, 有

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi_b'\left[f\left(\varphi_a(0)\right)\right] \cdot f'\left(\varphi_a(0)\right) \cdot \varphi_a'(0) = \varphi_b'\left[f(a)\right] \cdot f'(a) \cdot \varphi_a'(0) \\ &= \varphi_b'[b] \cdot f'(a) \cdot \varphi_a'(0) = -\frac{1}{1-|b|^2} \cdot \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2} \cdot \left[-\left(1-|a|^2\right)\right] = 1, \end{aligned}$$

由 Schwarz 引理, $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 即 $g \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$.

□