

0.1 合同标准型的应用

引进标准型的目的是为了简化问题的讨论. 应用对称矩阵的合同标准型 (复相合标准型) 可以简化二次型和对称矩阵 (Hermite 型和 Hermite 矩阵) 有关问题的讨论. 其方法是先对标准型证明所需结论, 若结论在合同 (复相合) 变换下不变, 就可以过渡到一般的情形. 这种做法和相抵标准型、相似标准型是完全类似的.

命题 0.1 (对称矩阵的秩 1 分解)

秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

注 这里没说是在哪个数域上的对称矩阵, 因此我们应该考虑一般数域. 只能使用对称矩阵的合同标准型.

证明 设 C 是可逆矩阵, 使得

$$C'AC = \text{diag}\{a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0\},$$

其中 $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq r)$, 则

$$A = (C^{-1})'a_1E_{11}C^{-1} + \dots + (C^{-1})'a_rE_{rr}C^{-1},$$

其中 E_{ii} 是第 (i, i) 元素为 1, 其余元素全为 0 的基础矩阵, 从而每个 $(C^{-1})'a_iE_{ii}C^{-1}$ 都是秩等于 1 的对称矩阵. \square

命题 0.2

设 A 为 n 阶复对称矩阵且秩等于 r , 求证: A 可分解为 $A = T'T$, 其中 T 是秩等于 r 的 n 阶复矩阵.

证明 A 合同于对角矩阵, 即存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C'\text{diag}\{c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0\}C,$$

其中 $c_i \neq 0 (1 \leq i \leq r)$. 令 $d_i = \sqrt{c_i}$ (取定一个平方根即可),

$$D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0\},$$

则 $A = (DC)'(DC)$. 令 $T = DC$ 即得结论. \square

命题 0.3

求证: 任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称矩阵.

证明 由命题??可得 $A = BC$, 其中 B, C 都是复对称矩阵, 并且可以随意指定 B, C 中的一个为非异阵. 不妨设 C 是非异阵, 则由命题 0.2 可得 $C = T'T$, 其中 T 是非异复矩阵. 于是 $A = BC = BT'T$ 相似于 $T(BT'T)T^{-1} = TBT'$, 这是一个复对称矩阵. \square

命题 0.4

设实二次型 f 和 g 的系数矩阵分别是 A 和 A^{-1} , 求证: f 和 g 有相同的正负惯性指数.

证明 设 $C'AC = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则

$$C^{-1}A^{-1}(C^{-1})' = (C'AC)^{-1} = \text{diag}\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}.$$

因为 a_i 和 a_i^{-1} 有相同的正负性, 所以 A 和 A^{-1} 有相同的正负惯性指数. \square

命题 0.5

设 f 是 n 元实二次型, 其系数矩阵 A 满足 $|A| < 0$, 求证: 必存在一组实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) < 0.$$

证明 设 C 是可逆矩阵, 使得 $C'AC = B$ 为对角矩阵. 注意到 $|A||C|^2 = |B|$, 故 $|B| < 0$. 因为对调对角矩阵的主对角元后得到的矩阵和原矩阵合同, 故不失一般性, 可设 B 的主对角元前 r 个为负, 后 $n-r$ 个为正, 于是 r 必是

奇数. 作 n 维列向量 $\alpha = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)'$, 其中有 r 个 1. 又令 $(a_1, a_2, \dots, a_n)' = C\alpha$, 则 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (C\alpha)'A(C\alpha) = \alpha'B\alpha < 0$.

也可用反证法来证明, 若结论不成立, 则 f 是半正定型, 从而 A 是半正定阵, 于是 $|A| \geq 0$, 矛盾! \square

命题 0.6

如果实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 仅在 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 时为零, 证明: f 必是正定型或负定型.

证明 设 f 的正负惯性指数分别为 p, q , 秩为 r , 我们分情况来讨论.

若 f 是不定型, 即 $p > 0$ 且 $q > 0$, 则存在可逆线性变换 $x = Cy$, 使得 f 可化简为如下规范标准型:

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

取 $y = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$, 其中 $b_1 = b_{p+1} = 1$, 其他 b_i 全为零, 则 $x = Cy = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ 是一个非零列向量, 但 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, 这与假设矛盾, 所以 f 不是不定型.

若 f 是半正定型, 但非正定型, 即 $p = r < n$, 则存在可逆线性变换 $x = Cy$, 使得 f 可化简为如下规范标准型:

$$f = y_1^2 + \dots + y_r^2.$$

取 $y = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$, 其中 $b_n = 1$, 其他 b_i 全为零, 则 $x = Cy = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ 是一个非零列向量, 但 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, 这与假设矛盾, 所以 f 不是非正定型的半正定型. 同理可证 f 也不是非负定型的半负定型.

综上所述, f 必是正定型或负定型. \square

命题 0.7

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 A 半正定, 求证: A^* 也半正定.

证明 因为 A 半正定, 故存在非异阵 C , 使得

$$C'AC = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

若 $r = n$, 则 A 是正定阵, 上式两边同取伴随可得 $C^*A^*(C^*)' = I_n^* = I_n$, 故 A^* 也是正定阵. 若 $r = n - 1$, 则上式两边同取伴随可得

$$C^*A^*(C^*)' = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

因此 A^* 的正惯性指数为 1, 秩也为 1, 从而是半正定阵. 若 $r < n - 1$, 则由定理??可知 $A^* = O$, 结论自然成立. \square

命题 0.8 (正定和半正定阵的判定准则之一)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证:

(1) A 是正定阵的充要条件是存在 n 阶非异实矩阵 C , 使得 $A = C'C$.

(2) A 是半正定阵的充要条件是存在 n 阶实矩阵 C , 使得 $A = C'C$. 特别地, $|A| = |C|^2 \geq 0$.

证明 (1) 由定理??可知, A 是正定阵当且仅当 A 合同于 I_n , 即存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C'I_nC = C'C$.

(2) 由定理??可知, A 是半正定阵当且仅当 A 合同于 $\text{diag}\{I_r, O\}$, 即存在非异实矩阵 B , 使得 $A = B'\text{diag}\{I_r, O\}B$. 令 $C = \text{diag}\{I_r, O\}B$, 则 $A = C'C$. 反之, 若 $A = C'C$, 其中 C 是实矩阵, 则对任一 n 维实列向量 α , $\alpha'A\alpha = \alpha'C'C\alpha = (C\alpha)'(C\alpha) \geq 0$, 由定义可知 A 为半正定阵. \square

例 0.1 设 A 为 n 阶正定实对称矩阵, α, β 为 n 维实列向量, 证明: $\alpha'A\alpha + \beta'A^{-1}\beta \geq 2\alpha'\beta$, 且等号成立的充要条件是 $A\alpha = \beta$.

证明 由命题 0.8 可设 $A = C'C$, 其中 C 为非异实矩阵, 则 $A^{-1} = C^{-1}(C')^{-1}$. 再设 $C\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, $(C')^{-1}\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ 为 n 维实列向量, 则

$$\alpha'A\alpha + \beta'A^{-1}\beta = \alpha'C'C\alpha + \beta'C^{-1}(C')^{-1}\beta$$

$$\begin{aligned}
&= (C\alpha)'(C\alpha) + ((C')^{-1}\beta)'((C')^{-1}\beta) \\
&= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i = 2(C\alpha)'((C')^{-1}\beta) = 2\alpha'\beta,
\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 $a_i = b_i (1 \leq i \leq n)$, 即 $C\alpha = (C')^{-1}\beta$, 也即 $A\alpha = \beta$. \square

例题 0.2 设 A 为 n 阶正定实对称矩阵, α, β 为 n 维实列向量, 证明: $(\alpha'\beta)^2 \leq (\alpha'A\alpha)(\beta'A^{-1}\beta)$, 且等号成立的充要条件是 $A\alpha$ 与 β 成比例.

证明 由命题 0.8 可设 $A = C'C$, 其中 C 为非异实矩阵, 则 $A^{-1} = C^{-1}(C')^{-1}$. 再设 $C\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, $(C')^{-1}\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ 为 n 维实列向量, 则由 Cauchy - Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}
(\alpha'\beta)^2 &= ((C\alpha)'((C')^{-1}\beta))^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \\
&= ((C\alpha)'(C\alpha))((C')^{-1}\beta)'((C')^{-1}\beta) = (\alpha'A\alpha)(\beta'A^{-1}\beta),
\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 a_i 与 b_i 对应成比例, 即 $C\alpha$ 与 $(C')^{-1}\beta$ 成比例, 也即 $A\alpha$ 与 β 成比例. \square

命题 0.9

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明:

- (1) 若 A 可逆, 则 A 为正定阵的充要条件是对任意的 n 阶正定实对称矩阵 B , $\text{tr}(AB) > 0$;
- (2) A 为半正定阵的充要条件是对任意的 n 阶半正定实对称矩阵 B , $\text{tr}(AB) \geq 0$.

证明 证法一: (1) 先证必要性. 由命题 0.8 可设 $A = C'C$, 其中 C 为非异实矩阵, 则由迹的交换性可得 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(C'CB) = \text{tr}(CBC')$. 由 B 的正定性可知 CBC' 为正定阵, 又由于命题??(2), 故 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(CBC') > 0$.

再证充分性. 用反证法, 若可逆实对称矩阵 A 不正定, 则存在非异实矩阵 C , 使得 $A = C' \text{diag}\{I_p, -I_q\} C$, 其中负惯性指数 $q > 0$. 令 $B = C^{-1} \text{diag}\{I_p, cI_q\} (C^{-1})'$, 其中正数 $c > p/q$, 则 B 是正定实对称矩阵, 且

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(C' \text{diag}\{I_p, -cI_q\} (C')^{-1}) = \text{tr}(\text{diag}\{I_p, -cI_q\}) = p - cq < 0,$$

这与假设矛盾!

(2) 由 (1) 同理可证.

证法二: (2) 先证必要性. 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 为半正定阵, 则由命题??可知 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ 也为半正定阵, 于是

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} = \alpha'(A \circ B)\alpha \geq 0.$$

其中 $\alpha = (1, 1, \dots, 1)'$. 再证充分性. 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$, 则 $B = xx' = (x_i x_j)$ 为半正定阵, 于是

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = x'Ax \geq 0$$

由 x 的任意性即得 A 为半正定阵.

(1) 的必要性与 (2) 的必要性的证明完全类似, 下证充分性. 对任意的半正定阵 B 和任意的正实数 t , $B + tI_n$ 为正定阵, 从而 $\text{tr}(A(B + tI_n)) > 0$. 令 $t \rightarrow 0^+$, 可得 $\text{tr}(AB) \geq 0$, 于是由 (2) 的结论可知 A 为半正定阵, 又 A 可逆, 故由推论??可知 A 为正定阵. \square

命题 0.10

设 A, B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: $AB = O$ 的充要条件是 $\text{tr}(AB) = 0$.

证明 必要性显然, 下证充分性. 由命题 0.8 可设 $A = C'C, B = DD'$, 其中 C, D 是 n 阶实矩阵, 则由迹的交换性可得

$$0 = \text{tr}(AB) = \text{tr}(C'CDD') = \text{tr}(D'C'CD) = \text{tr}((CD)'(CD)),$$

再由迹的正定性可知 $CD = O$, 于是 $AB = C'(CD)D' = O$.

□