0.1 复变函数的极限和连续性

定义 0.1

设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z \in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个**单值复变函数**, 记为 $w = f(z)$ 或 $f : E \to \mathbb{C}$.E 称为 f 的定义域, 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 称为 f 的值域.

如果对于 $z \in E$, 对应的 w 有几个或无穷多个, 则称在 E 上确定了一个**多值函数**.

♣

笔记 例如,$w = |z|^2$,$w = z^3 + 1$ 都是确定在整个平面上的单值函数; 而 $w = \sqrt[n]{z}$,$w = \mathrm{Arg}z$ 则是多值函数. 今后若非特别说明, 我们所讲的函数都是指单值函数.

注 复变函数是定义在平面点集上的, 它的值域也是一个平面点集, 因此复变函数也称为**映射**, 它把一个平面点集映成另一个平面点集. 与 $z \in E$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 在映射 f 下的像点,z 就称为 w 的原像. 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 也称为 E 在映射 f 下的像, 记为 $f(E)$. 如果 $f(E) \subset F$, 就说 f 把 E 映入 F, 或者说 f 是 E 到 F 中的映射. 如果 $f(E) = F$, 就说 f 把 E 映为 F, 或者说 f 是 E 到 F 上的映射.

定理 0.1

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 用 u 和 v 记 $w = f(z)$ 的实部和虚部, 则有

$$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

这就是说, 一个复变函数等价于两个二元的实变函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$.

♡

笔记 例如 $w = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, 它等价于 $u = x^2 - y^2$ 和 $v = 2xy$ 两个二元函数;
再如 $w = |z|$, 它等价于 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $v = 0$ 这两个二元函数.

定义 0.2

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得当 $z \in E$ 且 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - a| < \varepsilon$, 就说当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 有极限 a, 记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的正数 δ, 使得当 $z \in B(z_0, \delta) \cap E$ 且 $z \neq z_0$ 时有 $f(z) \in B(a, \varepsilon)$, 这后一种说法也适用于 $z = \infty$ 的情形.

♣

定理 0.2

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

♡

笔记 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

证明 设 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$,$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$,$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 由下面的不等式

$$|u(x, y) - \alpha| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|,$$

$$|v(x, y) - \beta| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|$$

知道, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

□

定义 0.3

我们说 f 在点 $z_0 \in E$ 连续，如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

如果 f 在集 E 中每点都连续，就说 f 在集 E 上连续.

定理 0.3

复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0) 处连续.

证明 由定理 0.2易得. □

定义 0.4

f 在 E 上**一致连续**，是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$，对 E 上任意的 z_1, z_2，只要 $|z_1 - z_2| < \delta$，就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

定理 0.4

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集,$f: E \to \mathbb{C}$ 在 E 上连续，那么

(i) f 在 E 上有界;

(ii) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值，即存在 $a, b \in E$，使得对每个 $z \in E$，都有

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(b)|;$$

(iii) f 在 E 上一致连续.

证明 (i)

(ii) 记 $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$，于是对每一自然数 n，必有 $z_n \in E$，使得

$$M - \frac{1}{n} \leqslant |f(z_n)| \leqslant M. \tag{1}$$

因为 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集，由 Heine-Borel 定理,E 为有界闭集. 再由 Bolzano-Weierstrass 定理,$\{z_n\}$ 必有极限点，即有一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$，设其极限为 a，则 $a \in E$. 把(1)式写成

$$M - \frac{1}{n_k} \leqslant |f(z_{n_k})| \leqslant M,$$

让 $k \to \infty$，并注意到 f 在 a 处的连续性，即得 $|f(a)| = M$.

同理可证，存在 $b \in E$，使得 $|f(b)| = \inf\{|f(z)| : z \in E\}$.

(iii) □