0.1 一些没分类的习题

引理 0.1

设 $u_1,...,u_m$ 和 $v_1,...,v_n$ 是两组给定的非零复数, 若对任意正整数 k 都有 $u_1^k+\cdots+u_m^k=v_1^k+\cdots+v_n^k$, 则 $u_1,...,u_m$ 是 $v_1,...,v_n$ 的一个排列, 进而 $m=n$.

证明 反证, 若 $u_1,\cdots,u_m$ 不是 $v_1,\cdots,v_n$ 的一个排列, 则若 $u_i=v_j(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$, 则将这样的 u_i^k,v_j^k 从上式中消去得到新式不妨设为

$$u_1^k+\cdots+u_{m'}^k=v_1^k+\cdots+v_{n'}^k,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

其中 $u_i\neq v_j(i=1,2,\cdots,m',j=1,2,\cdots,n')$.

(i) 当 $m=n$ 时, 就有 $m'=n'\geqslant 1$, 否则 $m'=n'=0$, 即 $u_1,\cdots,u_m$ 是 $v_1,\cdots,v_n$ 的一个排列, 矛盾! (ii) 当 $m\neq n$ 时, 就有 $m'\geqslant 1$ 或 $n'\geqslant 1$. 无论 (i) 还是 (ii), 都有 $m'+n'\geqslant 1$. 于是我们可以将 (1) 式中相同的项合并得到新的等式不妨设为

$$c_1u_1^k+\cdots+c_{m''}u_{m''}^k=d_1v_1^k+\cdots+d_{n''}v_{n''}^k,\forall k\in\mathbb{N}.$$

其中 u_i,v_j 两两互不相同,$c_i,d_j\in\mathbb{N}_1$. 取 $k=1,2,\cdots,m''+n''$, 就有

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_1 & \cdots & u_{m''} & v_1 & \cdots & v_{n''} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{m''+n''} & \cdots & u_{m''}^{m''+n''} & v_1^{m''+n''} & \cdots & v_{n''}^{m''+n''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m''} \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_{n''} \end{pmatrix}=0\Rightarrow c_1=\cdots=c_{m''}=d_1=\cdots=d_{n''}=0.$$

这与 $c_i,d_j\in\mathbb{N}_1$ 矛盾! 故 $u_1,\cdots,u_m$ 就是 $v_1,\cdots,v_n$ 的一个排列, 进而 $m=n$. □

命题 0.1

设 A,B 是 n 阶复方阵, 且对任意正整数 k 有

$$\mathrm{tr}((A+B)^k)=\mathrm{tr}(A^k)+\mathrm{tr}(B^k),$$

记 A 的全体特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,0,\cdots,0$,$B$ 全体特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0$, 这里 λ_i,μ_j 都非零 (可以相同), 则 $A+B$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0$. 换句话说,$A+B$ 的全体非零特征值, 就是把 A 的和 B 的全体非零特征值拼起来.

证明 设 $A+B$ 的特征值为 $x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0$, 则

$$\mathrm{tr}\left((A+B)^k\right)=\mathrm{tr}\left(A^k\right)+\mathrm{tr}\left(B^k\right),\forall k\in\mathbb{N}\Longleftrightarrow x_1^k+\cdots+x_m^k=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_s^k+\mu_1^k+\cdots+\mu_t^k,\forall k\in\mathbb{N}.$$

于是由引理 0.1可知,$x_1,\cdots,x_m$ 就是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_t$ 的一个排列. 这就完成了证明. □

例题 0.1 设 A,B 是实对称矩阵且对任意正整数 k 有 $\mathrm{tr}\left((A+B)^k\right)=\mathrm{tr}\left(A^k\right)+\mathrm{tr}\left(B^k\right)$, 证明:$AB=BA=0$.

证明 记 A 的全体特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,0,\cdots,0$,$B$ 全体特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0$, 这里 λ_i,μ_j 都非零 (可以相同),$s,t\in[0,n]\cap\mathbb{N}$. 由实对称矩阵的正交相似标准型可知, 存在可逆矩阵 U, 使得

$$B=U^T\begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}U,D_0=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_t \end{pmatrix}.$$

显然条件与结论在正交相似变换 $B \to U^TBU$ 下不变, 故可以不妨设 $B = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}$,$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. 于是

$$AB = O \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} = O \Rightarrow XD_0 = ZD_0 = O \Rightarrow X = Z = O.$$

又因为 A 是对称阵, 所以 $A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & W \end{pmatrix}$. 从而

$$BA = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & W \end{pmatrix} = O = AB.$$

因此只需证明 $AB = O$. 由命题 0.1可知,$A + B$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s, \mu_1, \cdots, \mu_t, 0, \cdots, 0$. 显然 $s + t = \mathrm{r}(A + B) \leqslant n$.

(i) 若 $s + t = n$, 则利用正交相似标准型, 不妨设

$$A = U^T \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} U, B = \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_t \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

其中 U 是正交阵. 从而

$$A + B = \begin{pmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_3^T & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T D_1 U_1 & U_1^T D_1 U_2 \\ U_2^T D_1 U_1 & U_2^T D_1 U_2 + D_2 \end{pmatrix}.$$

注意到此时 $|A + B| = |D_1| |D_2|$, 于是

$$\begin{aligned} |A + B| &= \left| U_1^T D_1 U_1 \right| \left| U_2^T D_1 U_2 + D_2 - U_2^T D_1 U_1 U_1^{-1} D_1^{-1} U_1^{-T} U_1^T D_1 U_2 \right| \\ &= \left| U_1^T D_1 U_1 \right| |D_2| = \left| U_1^T U_1 \right| |D_1| |D_2| = |D_1| |D_2|. \end{aligned}$$

由此可知 $\left| U_1^T U_1 \right| = 1$. 由 U 是正交阵可知

$$\begin{pmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_3^T & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = I_n \Rightarrow U_1^T U_1 + U_3^T U_3 = I \Rightarrow \left| U_1^T U_1 \right| = \left| I - U_3^T U_3 \right| = 1. \tag{2}$$

由命题??(2) 可知 $U_3^T U_3$ 是半正定阵, 因此设 $U_3^T U_3$ 的全体特征值为 $t_1, \cdots, t_s \geqslant 0$, 则由 (2) 式可知

$$(1 - t_1) \cdots (1 - t_s) = 1 \Rightarrow t_1 = \cdots = t_s = 0.$$

于是由半正定矩阵的合同标准型知, 存在可逆阵 C, 使得

$$C^T U_3^T U_3 C = O \Rightarrow U_3^T U_3 = O \xRightarrow{\mathrm{r}(U_3)=\mathrm{r}(U_3^T U_3)=0} U_3 = O.$$

同理可得 $U_2 = O$. 因此

$$A = \begin{pmatrix} U_1^T & \\ & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & \\ & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T D_1 U_1 & \\ & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix}.$$

故 $AB = BA = O$.

(ii) 若 $s + t < n$, 则由实对称阵可相似对角化, 再结合特征值可知 $\mathrm{r}(A + B) = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$. 由命题??(6) 可知

$$\mathrm{r}(A + B) \leqslant \mathrm{r} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \Longrightarrow \mathrm{r} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) = s + t.$$

故 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = O$ 的解空间 V 的维数等于 $n - (s + t)$. 取 V 的一组标准正交基 $e_1, \cdots, e_{n-(s+t)}$, 并扩充为全空间的标准正交基 $e_1, \cdots, e_{n-(s+t)}, \cdots, e_n$. 于是可设

$$A(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}, B(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} O & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix}.$$

其中 A_2,B_2 都是 $s+t$ 阶方阵. 又因为 A,B 为对称阵, 所以

$$A\left(e_1,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}O&O\\O&A_2\end{pmatrix},$$

$$B\left(e_1,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}O&O\\O&B_2\end{pmatrix},$$

$$(A+B)\left(e_1,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}O&O\\O&A_2+B_2\end{pmatrix}.$$

从而由 $A,B,A+B$ 的特征值可知,A_2 的 B_2 的全体特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t,0,\cdots,0$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0.A_2+B_2$ 一定含有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t,\mu_1,\cdots,\mu_t$. 而 A_2+B_2 就是 $s+t$ 阶方阵, 故 A_2+B_2 的全体特征值就是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t,\mu_1,\cdots,\mu_t$. 此时, 由 (i) 同理可证 $A_2B_2=B_2A_2=O$. 于是

$$AB\left(e_1,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}O&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&O\\O&B_2\end{pmatrix}=\left(e_1,\cdots,e_n\right)\begin{pmatrix}O&O\\O&A_2B_2\end{pmatrix}=O\Rightarrow AB=O.$$

这就完成了证明. □

推论 0.1

设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 则 $\begin{pmatrix}A+B&\\&O\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$ 相似当且仅当 $AB=BA=0$.

证明 **必要性**: 设 A 和 B 的全部特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,0,\cdots,0$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0(s,t\in[0,n],\lambda_i,\mu_j\neq 0)$, 则由 $\begin{pmatrix}A+B&\\&O\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$ 相似可知,$A+B$ 的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0$. 从而存在可逆矩阵 P, 使得

$$\begin{pmatrix}A+B&\\&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&\lambda_s&&&&&&\\&&&\mu_1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&\mu_t&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}P.$$

进而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{pmatrix}(A+B)^k&\\&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^k&\\&B^k\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&\lambda_s^k&&&&&&\\&&&\mu_1^k&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&\mu_t^k&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}P.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right)=\operatorname{tr}\left(A^k\right)+\operatorname{tr}\left(B^k\right)=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_s^k+\mu_1^k+\cdots+\mu_t^k.$$

因此, 再由例题 0.1可知 $AB=BA=O$.

充分性: 设 A 和 B 的全部特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,0,\cdots,0$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_t,0,\cdots,0(s,t\in[0,n],\lambda_i,\mu_j\neq 0)$, 因

为 A,B 为实对称阵且 $AB=BA$, 所以由命题??可知, 存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=A_1,\quad P^{-1}BP=B_1,$$

其中 A_1 和 B_1 都是对角阵, 且主对角元分别是 A 和 B 的特征值. 不妨设

$$A_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \lambda_s &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix},$$

由 $AB=BA=O$ 可知 $A_1B_1=O$. 因此

$$B_1=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} & & s & & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 0 &&&&&& \\ &&& \mu_1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \mu_t &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

于是

$$P^{-1}\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & \\ & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_s &&&&&& \\ &&& \mu_1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \mu_t &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & B_1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_s &&&&&& \\ &&& \mu_1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \mu_t &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 相似. □

例题 0.2 设 A,B 是 n 阶复方阵, 若 $AB=O$, 则对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right)=\operatorname{tr}\left(A^k\right)+\operatorname{tr}\left(B^k\right).$$

证明 不妨设 B 既不是零矩阵也不是可逆矩阵, 否则结论显然成立. 取 $\mathrm{Ker}A$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, 并扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的

一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 从而可设

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix},\quad B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix},$$

其中 A_1,A_2 是列满秩矩阵. 于是

$$\begin{aligned}
&AB(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=O\\
\Longleftrightarrow\ &(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}=O\\
\Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}=O\\
\Longrightarrow\ &A_1B_3=O,A_1B_4=O,A_2B_3=O,A_2B_4=O\\
\Longrightarrow\ &\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}B_3=O,\ \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}B_4=O.
\end{aligned}$$

又因为 $\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$ 列满秩, 所以上述方程只有零解, 即 $B_3=B_4=O$. 故

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix},\quad B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}.$$

因此 A 与 $\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}$ 相似,B 与 $\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}$ 相似. 从而 $A+B$ 与 $\begin{pmatrix}B_1 & A_1+B_2\\ O & A_2\end{pmatrix}$ 相似. 进而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$A^k\sim\begin{pmatrix}O & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}O & *\\ O & A_2^k\end{pmatrix},\quad B^k\sim\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}B_1^k & *\\ O & O\end{pmatrix},$$

$$(A+B)^k\sim\begin{pmatrix}B_1 & A_1+B_2\\ O & A_2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}B_1^k & *\\ O & A_2^k\end{pmatrix}.$$

故对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right)=\operatorname{tr}\left(A_2^k\right)+\operatorname{tr}\left(B_1^k\right)=\operatorname{tr}\left(A^k\right)+\operatorname{tr}\left(B^k\right).$$

□

例题 0.3 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} & & & 1 & 1\\ & & \iddots & 1 & \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$, 计算 A 的特征值, 并求出其相似标准型与对应的过渡矩阵.

证明 答案见豌豆讲义. □

例题 0.4 设 A 是 n 阶复方阵, 证明:$A\overline{A}$ 的特征值中, 虚数和负实数 (如果存在) 都是成对出现的, 进而成立:$|\lambda I+A\overline{A}|\geq 0,\forall\lambda\geq 0$.

证明 对 $A\overline{A}$ 的任一特征值 λ, 存在特征向量 α, 使得 $A\overline{A}\alpha=\lambda\alpha$. 令 $W=\operatorname{span}(\alpha,A\overline{\alpha})$, 则 $\dim W=1$ 或 2.

若 $\dim W=1$, 则 $A\overline{\alpha}=\mu\alpha,\mu\in\mathbb{C}$. 将 α 扩充为全空间的基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 这组基都取共轭后仍是全空间的基, 则

$$A(\overline{\alpha},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_n})=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

这里 A_1 是 $n-1$ 阶方阵. 记 $P=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是可逆阵, 则 $A=P\begin{pmatrix}\mu & *\\ O & A_1\end{pmatrix}\overline{P}^{-1}$, 并且

$$A\overline{A}=P\begin{pmatrix}\mu & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}\mu & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}}P^{-1}=P\begin{pmatrix}|\mu|^2 & *\\ 0 & A_1\overline{A_1}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

若 $\dim W=2$, 则 $\alpha,A\overline{\alpha}$ 线性无关, 将 $\alpha,A\overline{\alpha}$ 扩充为全空间的基 $\alpha,A\overline{\alpha},\alpha_3,\cdots,\alpha_n$, 这组基都取共轭后仍是全空间的基. 又注意到 $A\overline{A}\alpha=\lambda\alpha$, 故

$$A\left(\overline{\alpha},\overline{A}\alpha,\alpha_3,\cdots,\overline{\alpha_n}\right)=(\alpha,A\overline{\alpha},\alpha_3,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}0 & \lambda & *\\ 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

这里 A_1 是 $n-2$ 阶方阵. 记 $P=(\alpha,A\overline{\alpha},\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$, 则 $A=P\begin{pmatrix}0 & \lambda & *\\ 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & A_1\end{pmatrix}P^{-1}$, 并且

$$A\overline{A}=P\begin{pmatrix}0 & \lambda & *\\ 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & A_1\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}0 & \lambda & *\\ 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & A_1\end{pmatrix}}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda & 0 & *\\ 0 & \overline{\lambda} & *\\ 0 & 0 & A_1\overline{A_1}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

因此由数学归纳法可知, 存在可逆复方阵 P, 使得 $A=PD\overline{P}^{-1}$, 这里 D 是分块上三角阵, 对角矩块为 1 阶非负实数或形如 $\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的二阶块. 进而,$A\overline{A}$ 可相似上三角化, 其中主对角元素即全体特征值满足: 或者是非负实数, 或者是成对出现的共轭虚数, 或者是成对出现的负数.

设 $A\overline{A}$ 的全体特征值为 $x_1,\cdots,x_n$, 则 $x_1,\cdots,x_n$ 中的虚数和负实数 (如果存在) 都是成对出现的. 于是由命题可知 $\lambda I+A\overline{A}$ 的全体特征值为 $\lambda+x_1,\cdots,\lambda+x_n$, 则

$$\left|\lambda I+A\overline{A}\right|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda+x_i)\geqslant 0,\forall\lambda\geqslant 0.$$

□

例题 0.5 设实数 a,b,c,d,e 满足 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2=1$, 设 A 是 5×3 矩阵, 每行都是 a,b,c 的排列,B 是 5×2 矩阵, 每行都是 d,e 的排列, 记矩阵 $M=(A,B)$, 证明:$(\mathrm{tr}(M))^2\leqslant\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M)$, 并且 M 有实特征值 λ 满足 $|\lambda|\le\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

证明 显然有 $|a|,|b|,|c|,|d|,|e|\leqslant 1$, 则

$$(\mathrm{tr}(M))^2\leqslant 5^2=25.$$

注意到 $1\leqslant\mathrm{r}(M)\leqslant 5$, 故当 $\mathrm{r}(M)\geqslant 3$ 时, 恒有

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{tr}(M)\geqslant 25\geqslant(\mathrm{tr}(M))^2.$$

因此我们只需考虑 $\mathrm{r}(M)=1,2$ 的情形.

(1) 当 $\mathrm{r}(M)=1$ 时, 我们有

$$M=\begin{pmatrix}a & b & c & d & e\\ k_1a & k_1b & k_1c & k_1d & k_1e\\ k_2a & k_2b & k_2c & k_2d & k_2e\\ k_3a & k_3b & k_3c & k_3d & k_3e\\ k_4a & k_4b & k_4c & k_4d & k_4e\end{pmatrix},$$

因为 k_ia,k_ib,k_ic 是 a,b,c 的排列, 所以

$$k_i^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2+b^2+c^2\Rightarrow k_i=\pm1,i=1,2,3,4.$$

再利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(M) \leqslant |a|+|b|+|c|+|d|+|e||a|+|b|+|c|+\sqrt{2}.$$

因此

$$(\operatorname{tr}(M))^2 = 5+2\sqrt{6} = \left(5+2\sqrt{6}\right)\operatorname{tr}(M).$$

(2) 当 $\mathrm{r}(M)=2$ 时, 设 $M=\begin{pmatrix} U & P \\ Q & N \end{pmatrix}$, 其中 U 为 3 阶方阵,N 为 2 阶方阵. 由 $d^2+e^2=1$ 可得 $\operatorname{tr}(N)\leqslant 2$. 现在讨论 $\operatorname{tr}(U)$.

(i) 若 U 的主对角元互不相同, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a,b,c. 此时利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(U) \leqslant |a|+|b|+|c| \leqslant \sqrt{3} < \sqrt{6}.$$

(ii) 若 U 的主对角只出现 a,b,c 中两个, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a,a,b. 此时利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(U) \leqslant 2|a|+|b| \leqslant \sqrt{5} < \sqrt{6}.$$

(iii) 若 U 的主对角只出现 a,b,c 中 1 个, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a,a,a. 此时 M 只可能有 4 种不同的形式:

$$M_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix},\quad M_4=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

由 $\mathrm{r}(M)=2$ 可知这 4 个矩阵行列式全为 0, 即

$$|M_1|=|M_2|=|M_3|=a^3+b^2c+bc^2-ac^2-ab^2-abc=(a-b)(a-c)(a+b+c),$$
$$|M_4|=a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

再结合 $a^2+b^2+c^2=1$, 经计算可得无论 M 是上述哪个矩阵, 要么 $a=b$, 要么 $a=c$, 要么 $a+b+c=0$.

若 $a=b$ 或 $a=c$, 则由 $a^2+b^2+c^2=1$ 可知

$$2a^2+b^2=1\text{或}2a^2+c^2=1 \Rightarrow 2a^2\leqslant 1 \Rightarrow |a|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

若 $a+b+c=0$, 则由 $a^2+b^2+c^2=1$ 可知

$$a^2+b^2+(a+b)^2=1 \Rightarrow a^2+ab+b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}+b\right)^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4}a^2\leqslant\frac{1}{2} \Rightarrow |a|\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

从而此时

$$\operatorname{tr}(M)=3a\leqslant 3|a|=\sqrt{6}.$$

于是

$$\operatorname{tr}(M)=\operatorname{tr}(U)+\operatorname{tr}(N)\leqslant 2+\sqrt{6}.$$

故

$$(\operatorname{tr}(M))^2 \leqslant \left(2+\sqrt{6}\right)^2 = 10+4\sqrt{6} = \left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M).$$

□