## 0.1 全纯函数的 Laurent 展开

**定义 0.1**

称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{1}$$

为 **Laurent 级数**, 它由两部分组成, 第一部分就是幂级数, 第二部分是负幂项的级数. 如果这两个级数都收敛, 就称级数 (1) 收敛.

**定理 0.1**

如果 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

的收敛域为圆环 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$, 那么它在 $D$ 中绝对收敛且内闭一致收敛, 它的和函数在 $D$ 中全纯.

上述级数的幂级数部分称为该级数的**全纯部分**, 负幂项级数部分称为该级数的**主要部分**.

注 下面我们将看到,Laurent 级数的一些重要性质取决于它的主要部分.

证明 设第一个级数的收敛半径为 $R$. 对第二个级数作变换 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 它对 $\zeta$ 而言就是幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

设其收敛半径为 $\rho$, 则当 $|\zeta|<\rho$, 或者 $|z-z_0|>\dfrac{1}{\rho}$ 时, 上述级数收敛. 记 $r=\dfrac{1}{\rho}$, 则当 $r<|z-z_0|<\infty$ 时, 级数 (1) 中的负幂项级数收敛.

如果 $R\leq r$, 则当 $|z-z_0|<R$ 时, 必有 $|z-z_0|<r$, 这时级数 (1) 的第一个级数是收敛的, 但第二个级数却发散了. 当 $|z-z_0|>r$ 时, 必有 $|z-z_0|>R$, 这时级数 (1) 的第二个级数收敛而第一个级数发散. 所以, 两者不能同时收敛.

如果 $r<R$, 则当 $r<|z-z_0|<R$ 时, 级数 (1) 的两个级数都收敛, 而且在这个圆环中内闭一致收敛, 即级数 (1) 在上述圆环中内闭一致收敛, 根据 Weierstrass 定理, 它的和是圆环中的全纯函数. □

**定理 0.2**

设 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$, 如果 $f\in H(D)$, 那么 $f$ 在 $D$ 上可以展开为 Laurent 级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z\in D, \tag{2}$$

其中,$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$, 而 $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$, 并且展开式 (2) 是唯一的.

证明 如图 1 所示, 任意取定 $z\in D$, 取 $r_1,r_2$, 使得

$$r<r_1<|z-z_0|<r_2<R.$$

记 $\gamma_j=\{\zeta:|\zeta-z_0|=r_j\}, j=1,2$. 由定理**??**, 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3}$$

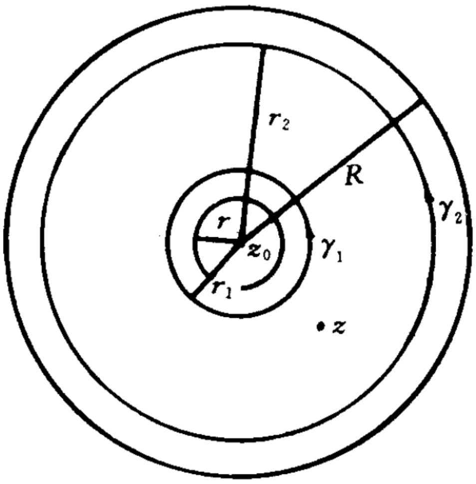


图 1

记 $M_j = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_j\}, j = 1, 2$. 当 $\zeta \in \gamma_1$ 时, $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{r_1}{|z - z_0|} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}, \ \zeta \in \gamma_1. \tag{4}$$

由于

$$\left|\frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\right| \le \frac{M_1}{|z - z_0|}\left(\frac{r_1}{|z - z_0|}\right)^{n-1},$$

并且右端是一收敛级数, 故知级数 (4) 在 $\gamma_1$ 上一致收敛, 因而可逐项积分:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\right)(z - z_0)^{-n}. \tag{5}$$

当 $\zeta \in \gamma_2$ 时, $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{r_2} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \ \zeta \in \gamma_2. \tag{6}$$

与上面的讨论一样, 级数 (6) 在 $\gamma_2$ 上一致收敛, 所以

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0)^n. \tag{7}$$

由多连通域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta = a_{-n},$$
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = a_n.$$

把它们分别代入 (5) 式和 (7) 式, 得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n},$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

再把它们代入 (3) 式, 即得展开式 (2).

现在证明展开式 (2) 是唯一的. 如果另有展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n'(z-z_0)^n,$$

因为级数在 $\gamma_\rho$ 上一致收敛, 逐项积分得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n' \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}(\zeta - z_0)^{n-m-1}\mathrm{d}\zeta \xlongequal{\text{例题??}} a_m',$$

所以这个展开式就是 (2) 式. □

**例题 0.1** 设 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 试分别给出这个函数在 $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2\}$ 和 $D_2 = \{z : 2 < |z| < \infty\}$ 上的 Laurent 展开式.

**解** 当 $z \in D_1$ 时, 由于 $1 < |z| < 2$, 所以

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

当 $z \in D_2$ 时, 由于 $2 < |z| < \infty$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

□