0.1 可测函数列的收敛

0.1.1 几乎处处收敛与一致收敛

定义 0.1 (几乎处处收敛)

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z, 有 $m(Z) = 0$ 及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \setminus Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**几乎处处收敛**于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x) \to f(x), \text{ a. e. } x \in E.$$

或

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e.} x \in E.$$

再不引起歧义下, 也可简记为

$$f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f.$$

♣

定理 0.1

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 $f_k(x) \to f(x)$, a. e.$x \in E$. 则 $f(x)$ 也是 E 上的可测函数.

♡

证明 由条件可知 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 Z 为零测集也可测, 从而 $E \backslash Z$ 是可测集. 于是由定理**??**(2) 可知 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \backslash Z$ 上的可测函数列, 并且由条件可知 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ $(x \in E \backslash Z)$, 因此由推论**??**可得 $f(x)$ 也是 $E \backslash Z$ 上的可测函数. 又注意到对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{x \in Z : f(x) > t\} \subset Z.$$

而 Z 是零测集, 由零测集的子集也是零测集可知,$\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也是零测集, 从而 $\{x \in Z : f(x) > t\}$ 也可测. 于是 $f(x)$ 在 Z 上可测. 故由定理**??**(1) 可知 $f(x)$ 在 $E = (E \backslash Z) \cup Z$ 上可测. □

定义 0.2 ((接) 近一致收敛)

设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上的可测函数列, 对 $\forall \delta > 0$, 存在可测子集 $E_\delta \subset E$:$m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上 **(接) 近一致收敛**于 $f(x)$.

这也等价于, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 E 的可测子集 $F_\delta \subset E$:$m(E \backslash F_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 F_δ 上一致收敛于 $f(x)$.

♣

注 上述两个等价定义的证明:$\Rightarrow$: 对 $\forall \delta > 0$, 只需令 $F_\delta = E \backslash E_\delta$, 则显然 F_δ 为 E 的可测子集, 且 $E_\delta = E \backslash F_\delta$. 从而 $m(E \backslash F_\delta) = m(E_\delta) < \delta$ 且 $\{f_k(x)\}$ 也在 $E \backslash E_\delta = F_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. $\Leftarrow$: 对 $\forall \delta > 0$, 取 $E_\delta = E \backslash F_\delta$, 同理可证.

引理 0.1

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$, a. e. $x \in E$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

则 $E_k(\varepsilon)(k = 1, 2, \cdots)$ 可测, 并且

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0. \tag{1}$$

♡

证明 注意到对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=\{x\in E:-\varepsilon\leqslant f_k(x)-f(x)\leqslant\varepsilon\}$$
$$=\{x\in E:f_k(x)-f(x)\geqslant-\varepsilon\}\cup\{x\in E:f_k(x)-f(x)\leqslant\varepsilon\}.$$

因为 $f_k(x)$ 和 $f(x)$ 都在 E 上可测, 所以由可测函数的运算性质 (1) 可知 $f_k(x)-f(x)$ 也在 E 上可测. 从而再由定理**??**及可测集的性质可得

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E:f_k(x)-f(x)\geqslant-\varepsilon\}\cup\{x\in E:f_k(x)-f(x)\leqslant\varepsilon\}\in\mathscr{M}.$$

由函数列收敛的否命题可知, 上限集 $\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)$ 中的点一定不是收敛点, 从而依题设可知

$$m\left(\lim_{j\to\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0.$$

根据递减可测集列的测度运算, 可知(1)式成立. □

定理 0.2 (Egorov(叶戈洛夫) 定理)

设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E)<+\infty$, 若 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上接近一致收敛于 $f(x)$.

注 Egorov 定理中的条件 $m(E)<+\infty$ 不能去掉. 例如考虑可测函数列

$$f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in(0,+\infty).$$

它在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛于 $f(x)\equiv1$, 但在 $(0,+\infty)$ 中的任一个有限测度集外均不一致收敛于 $f(x)\equiv1$.

但对 $m(E)=+\infty$ 的情形, 结论可陈述如下: 对任给 $M>0$, 存在 E_M:$E_M\subset E$,$m(E_M)>M$, 使得 $f_n(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$.(见推论 0.1)

证明 由引理 0.1可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{j\to\infty}m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0.$$

其中 $E_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$ 可测. 现在取正数列 $1/i\ (i=1,2,\cdots)$, 则对任给的 $\delta>0$ 以及每一个 i, 存在 j_i, 使得 $m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty}E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)<\frac{\delta}{2^i}$. 令 $E_\delta=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=j_i}^{\infty}E_k\left(\frac{1}{i}\right)$, 显然 E_δ 可测. 我们有

$$m(E_\delta)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty}E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta.$$

现在来证明在点集

$$E\backslash E_\delta=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=j_i}^{\infty}\left\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}\right\}$$

上,$\{f_k(x)\}$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的.

事实上, 对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 i, 使得 $1/i<\varepsilon$, 从而对一切 $x\in E\backslash E_\delta$, 当 $k\geqslant j_i$ 时, 有

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}<\varepsilon.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. □

定理 0.3 (Egorov(叶戈洛夫) 定理的逆定理)

设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数, 若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上接近一致收敛于 $f(x)$, 则 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$.

证明 分别取 $\delta_k=1/k$,$k=1,2,\cdots$, 则存在 $F_k\subset E$,$m(F_k)<1/k$, 使得 $f_n(x)$ 在每个 $E\backslash F_k$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 记

$F=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 则

$$m(F)\leqslant m(F_k)<\frac{1}{k},\quad k=1,2,\cdots$$

令 $k\to\infty$ 得 $m(F)=0$. 下面证明 $f_k(x)$ 在 $E\backslash F$ 上处处收敛于 $f(x)$.

由于

$$E\backslash F=E\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^c\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\cap F_k^c)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\backslash F_k).$$

故对 $\forall x_0\in E\backslash F$, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x_0\in E\backslash F_{k_0}$. 又 f_k 在 $E\backslash F_{k_0}$ 上一致收敛于 f, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\forall x\in E\backslash F_{k_0}$, 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x_0)=f(x_0)$. 故由 x_0 的任意性可得 $f_k(x)$ 在 $E\backslash F$ 上处处收敛于 $f(x)$. 综上可知,$f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$.
□

推论 0.1

设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E)=+\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$,a.e. $x\in E$, 则对任给 $M>0$, 存在 E_M:$E_M\subset E$,$m(E_M)>M$, 使得 $f_k(x)$ 在 E_M 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 令 $E_k=E\cap B(0,k)$, 显然 $\{E_k\}$ 为递增可测集列, 并且

$$m(E_k)\leqslant m(B(0,k))=\pi k^2<+\infty.$$

又 $m(E)=+\infty$, 故

$$\lim_{k\to\infty}m(E_k)\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}}m(\lim_{k\to\infty}E_k)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m(E)=+\infty. \tag{2}$$

因为 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 和 $f(x)$ 在 E 上可测, 所以由定理**??**(2) 可知 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 和 $f(x)$ 在 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 上也可测. 于是在 E_k 上应用 Egorov 定理可得, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在可测子集 $F_k\subset E_k$, 且 $m(E_k\backslash F_k)<\frac{1}{k}$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在每个 F_k 上均一致收敛于 $f(x)$. 从而由 $m(E_k\backslash F_k)<\frac{1}{k}$ 可得

$$m(F_k)>m(E_k)-\frac{1}{k}.$$

令 $k\to+\infty$, 再结合 (2) 式可得 $\lim\limits_{k\to\infty}m(F_k)=+\infty$. 因此, 对 $\forall M>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $m(F_k)>M$. 故取 $E_M=F_k$ 即得结论. □

推论 0.2

设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 均是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且有 $f_n(x)\to f(x)$,a.e. $x\in E$, 则存在可测集列 $\{E_i\}$:$E_i\subset E$ $(i\in\mathbb{N})$, 且

$$m\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0,$$

使得 $f_n(x)$ 在每个 E_i 上均一致收敛于 $f(x)$.

证明 (1) 当 $m(E)<+\infty$ 时, 对 $\forall i\in\mathbb{N}$, 根据Egorov 定理, 取 $\delta_i=\frac{1}{i}>0$, 则存在可测子集 $E_i\subset E$, 使得 $m\left(E\backslash E_i\right)<\frac{1}{i}$, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 E_i 上一致收敛于 $f(x)$. 注意到对 $\forall i\in\mathbb{N}$, 都有

$$E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\subset E\backslash E_i,$$

因此

$$m\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant m\left(E\backslash E_i\right)<\frac{1}{i},\quad\forall i\in\mathbb{N}.$$

再令 $i \to +\infty$ 得

$$m\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0.$$

(2) 当 $m(E)=+\infty$ 时, 令

$$A_1=E\cap B(0,1), A_k=E\cap(B(0,k)\backslash B(0,k-1))(k=2,3,\cdots),$$

显然 $\{A_k\}$ 是一列互不相交的可测集, 满足 $A_k\subset E,m(A_k)<+\infty$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=E$.

对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 考虑 A_k, 则由 (1) 可知, 存在可测集列 $\{E_{k,i}\}$:$E_{k,i}\subset E(i\in\mathbb{N})$ 且

$$m\left(A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right)=0, \tag{3}$$

使得 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i}(\forall i\in\mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 进而再由 k 的任意性可得,$\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_{k,i}(\forall k,i\in\mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 考虑集族 $\mathcal{F}=\{E_{k,i}|k,i\in\mathbb{N}\}$. 由于 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可数, 故 $\mathcal{F}$ 也可数. 因此可将 $\mathcal{F}$ 枚举为序列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$. 故 $\{f_n(x)\}$ 在每个 $E_i(\forall i\in\mathbb{N})$ 上均一致收敛于 $f(x)$. 由定理**??**可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right). \tag{4}$$

又由 $\{A_k\}$ 互不相交可得

$$\left(A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right)\cap\left(A_l\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{l,i}\right)=\varnothing, k\neq l. \tag{5}$$

故利用 (3)(4)(5) 式可得

$$m\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right)\leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m\left(A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{k,i}\right)=0.$$

□

例题 0.1 考查 $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1),f(x)=0(0\leqslant x<1)$ 以及 $f(1)=1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f_n(x)$ 点收敛于 $f(x)$ 而非一致收敛于 $f(x)$. 但在舍去一个测度可任意小的正测集 (如 $(1-\delta,1]$) 后,$f_n(x)$ 在余下点集上一致收敛于 $f(x)$.

证明

□

0.1.2 几乎处处收敛与依测度收敛

定义 0.3

设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0, \tag{6}$$

或等价地, 若对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$, 存在 $N_{\varepsilon,\delta}\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N_{\varepsilon,\delta}$ 时, 有 $m(E_n(\varepsilon))<\delta$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**依测度收敛于** $f(x)$, 简记为 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

注 注意, 由 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(\{x\in E:|f_k(x)|=+\infty\})=0\quad(k=1,2,\cdots)$.

定理 0.4

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是对等的.

笔记 这个定理告诉我们: 在函数对等的意义下, 依测度收敛的极限函数是唯一的.

证明 因为对 $\forall x\in E$, 有

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|g(x)-f_k(x)|,$$

所以对任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} &\subset \{x \in E : |f(x) - f_k(x)| + |g(x) - f_k(x)| > \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in E : |g(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

但当 $k \to \infty$ 时, 上式右端点集的测度趋于零, 从而得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

由 ε 的任意性可知 $f(x) = g(x)$,a.e. $x \in E$. □

定理 0.5

设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处有限, 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 几乎处处有限.

证明 设 $A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$, 则只需证 $m(A) = 0$. 由于每个 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 因此对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令 $B_k = \{x \in E : |f_k(x)| = +\infty\}$, 则 $m(B_k) = 0$. 再令 $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, 则 B 是可数个零测集的并, 而零测集必可测, 故 B 也可测. 并且

$$m(B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = 0.$$

因此 $m(B) = 0$. 对 $\forall x_0 \in A \setminus B$, 都有

$$|f(x_0)| = +\infty, \quad |f_k(x_0)| < +\infty.$$

于是对 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

这表明对 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, 都有 $x_0 \in \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. 再由 x_0 的任意性可得

$$A \setminus B \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad \forall \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

从而再结合 $m(B) = 0$ 可得

$$m(A) = m(A \setminus B) \leqslant m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}), \quad \forall \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

令 $k \to \infty$ 可得

$$m(A) \leqslant \lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}).$$

又因为 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

故 $m(A) = 0$, 结论得证. □

例题 0.2 收敛但不一致收敛的函数

$f_n(x) = x^n, n = 1, 2, \cdots$

证明 显然 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

但不一致收敛于 $f(x)$, 因为连续函数列的一致收敛极限必连续, 而 $f(x)$ 不连续. 然而, 去掉任意小的一段之后一致收敛, 即: 对 $\forall \delta > 0, f_n(x)$ 在 $[0, 1 - \delta]$ 上一致收敛于 0. □

例题 0.3 依测度收敛但不几乎处处收敛的函数

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都存在唯一的 $k, i \in \mathbb{N}$, 使得

$$n = 2^k + i, \quad 0 \leqslant i < 2^k$$

定义 $[0,1]$ 上的函数

$$f_n(x)=\chi_{[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k})}(x),\quad n=1,2,\cdots$$

证明 任取 $x_0\in[0,1]$, 对每个 $k\in\mathbb{N}$,$\exists 0\leqslant i_k<2^k$ 使得

$$x_0\in\left[\frac{i_k}{2^k},\frac{i_k+1}{2^k}\right)$$

记 $n_k=2^k+i_k$, 则

$$f_{n_k}(x_0)=1,\quad k=1,2,\cdots$$

可见,$\{f_n(x_0)\}$ 有无穷多项为 1, 无穷多项为 0. 故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上每个点都不收敛 (从而不是几乎处处收敛). 但对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$m\{x\in[0,1]:|f_n(x)-0|\geqslant\varepsilon\}=\frac{1}{2^k}\to 0,\quad n\to\infty$$

其中,$n=2^k+i$,$0\leqslant i<2^k$. 故 $f_n\xrightarrow{\mu}0$. (这表明 n 越大, 出现 “1” 的频率越趋于 0.) □

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义可以看出, 前者强调的是在点上函数值的收敛 (尽管除一个零测集外), 后者并非指在哪个点上的收敛, 其要点在于点集

$$\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于零, 而不论此点集的位置状态如何. 这是两者的区别. 下面我们讨论它们之间的联系.

定理 0.6 (Lebesgue 定理)

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E)<+\infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$(反之不然).

♡

注

1. 上述定理中的条件 $m(E)<+\infty$ 不能去掉. 例如, 取 $E=(0,+\infty)$, 令 $f_n(x)=\chi_{(0,n]}(x)$, 则

$$f_n(x)\to f(x)\equiv 1,\quad x\in E$$

但当取 $\delta=1/2>0$ 时, 有

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\delta\})=m((n,+\infty))=+\infty$$

故 f_n 不依测度收敛到 f.

2. 上述定理中的条件 $f(x)$ 几乎处处有限也不能去掉.

例如, 考虑 $E=[0,1]$, 定义函数列 $f_k(x)=k$, 则 $m(E)=1<+\infty$, 且每个 $f_k(x)$ 在 E 上处处有限.

令 $f(x)=+\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=+\infty=f(x)$,a.e. $x\in E$. 但对 $\forall\varepsilon>0$, 都有

$$|f_k(x)-f(x)|=+\infty\geqslant\varepsilon,\quad\forall x\in E.$$

于是

$$\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=E.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=m(E)=1\neq 0.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$.

证明 因为题设满足引理 0.1的条件, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 可知

$$\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0.$$

于是

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x\in E:\left|f_j(x)-f(x)\right|\geqslant\varepsilon\}\right).$$

令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. □

定理 0.7

设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta>0$, 存在 $E_\delta\subset E$ 且 $m(E_\delta)<\delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.
(即 $\{f_k(x)\}$ 接近一致收敛于 $f(x)$), 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明 对任给的 $\varepsilon,\delta>0$, 依假设存在 $E_\delta\subset E$ 且 $m(E_\delta)<\delta$, 以及自然数 k_0, 使得当 $k\geqslant k_0$ 时, 有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in E\backslash E_\delta.$$

由此可知, 当 $k\geqslant k_0$ 时, 有

$$\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset E_\delta.$$

这说明, 当 $k\geqslant k_0$ 时, 有

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m(E_\delta)<\delta.$$

故 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. □

定义 0.4 (依测度 Cauchy(基本) 列)

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}}m(\{x\in E:|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的**依测度 Cauchy(基本) 列**.

定理 0.8

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_k(x)\}$ 必是 E 上依测度 Cauchy 列.

证明 由条件可知

$$\lim_{k\to\infty}m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)=0.$$

即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall k\geqslant k_0$, 都有

$$m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到对 $\forall x\in E$, 都有

$$\left|f_i(x)-f_j(x)\right|\leqslant|f_i(x)-f(x)|+\left|f_j(x)-f(x)\right|,\quad \forall i,j\in\mathbb{N}.$$

从而对 $\forall i,j\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}&\left\{x\in E:\left|f_i(x)-f_j(x)\right|>\varepsilon\right\}\subset\left\{x\in E:|f_i(x)-f(x)|+\left|f_j(x)-f(x)\right|>\varepsilon\right\}\\&=\left\{x\in E:|f_i(x)-f(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x\in E:\left|f_j(x)-f(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

于是对 $\forall i,j\geqslant k_0$, 就有

$$m\left(\left\{x\in E:\left|f_i(x)-f_j(x)\right|>\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leqslant m\left(\left\{x\in E:|f_i(x)-f(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+m\left(\left\{x\in E:\left|f_j(x)-f(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} m\left(\left\{x\in E:\left|f_i(x)-f_j(x)\right|>\varepsilon\right\}\right)=0.$$

即 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度 Cauchy 列. □

定理 0.9

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度 Cauchy 列, 则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. ♡

证明 对每个自然数 i, 可取 k_i, 使得当 $l,j\geqslant k_i$ 时, 有

$$m\left(\left\{x\in E:|f_l(x)-f_j(x)|\geqslant\frac{1}{2^i}\right\}\right)<\frac{1}{2^i}.$$

从而我们可以假定 $k_i<k_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots)$, 令

$$E_i=\left\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|\geqslant\frac{1}{2^i}\right\},\quad i=1,2,\cdots,$$

则 $m(E_i)<2^{-i}$. 现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集 $S=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=j}^{\infty}E_i$, 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(E_i)=1<+\infty$, 故由定理**??**(1) 可知 $m(S)=0$.

注意到

$$x_0\in E\backslash S=E\cap\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i\right)^c=E\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E_i^c\right)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}(E\cap E_i^c)$$
$$=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\left\{x\in E:\left|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)\right|<\frac{1}{2^i}\right\}.$$

于是对 $\forall x_0\in E\backslash S$, 都存在 $j_0\in\mathbb{N}$, 当 $i\geqslant j_0$ 时, 有 $|f_{k_{i+1}}(x_0)-f_{k_i}(x_0)|<2^{-i}$. 由此可知当 $l\geqslant j_0$ 时, 有

$$\sum_{i=l}^{\infty}|f_{k_{i+1}}(x_0)-f_{k_i}(x_0)|\leqslant\sum_{i=l}^{\infty}2^{-i}=\frac{1}{2^{l-1}}.$$

令 $l\to+\infty$, 则由 Cauchy 收敛准则可知, 级数 $f_{k_1}(x_0)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{k_{i+1}}(x_0)-f_{k_i}(x_0)]$ 绝对收敛, 再由 x_0 的任意性可知级数 $f_{k_1}(x)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)]$ 在 $E\backslash S$ 上是绝对收敛的, 即 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E\backslash S$ 上处处收敛. 因此 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上是几乎处处收敛的, 设其极限函数为 $f(x)$,$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

此外, 对 $\forall j\in\mathbb{N}$, 注意到

$$E\backslash\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i=E\cap\left(\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i\right)^c=E\cap\left(\bigcap_{i=j}^{\infty}E_i^c\right)=\bigcap_{i=j}^{\infty}(E\cap E_i^c)$$
$$=\bigcap_{i=j}^{\infty}\left\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|<\frac{1}{2^i}\right\}.$$

因此当 $i\geqslant j$ 时, 有

$$|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|<\frac{1}{2^i},\quad\forall x\in E\backslash\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ 可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>j$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 于是对 $\forall n\geqslant N,p\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}|f_{k_n}(x)-f_{k_{n+p}}(x)|&<\sum_{i=n}^{n+p}|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|<\sum_{i=n}^{n+p}\frac{1}{2^i}\\&=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\forall x\in E\backslash\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i.\end{aligned}$$

故由一致收敛的 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall j\in\mathbb{N}$, 有 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E\backslash\bigcup\limits_{i=j}^{\infty}E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的. 又由于

$$m\left(\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i\right)<\frac{1}{2^{j-1}},$$

故 $f(x)$ 及 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上满足定理 0.7的条件, 于是 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

最后, 注意到

$$\begin{aligned}&\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f_{k_n}(x)\right|+\left|f_{k_n}(x)-f(x)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\&=\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f_{k_n}(x)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

从而

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m\left(\left\{x\in E:|f_n(x)-f_{k_n}(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+m\left(\left\{x\in E:|f_{k_n}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

于是当 $n\to\infty$ 时, 也有 $k_n\to\infty$. 故

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

□

定理 0.10 (Riesz(里斯) 定理)

若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x),\ \text{a.e. } x\in E.$$

♡

证明 因为 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 所以 $\{f_k(x)\}$ 是依测度 Cauchy 列. 从而由定理 0.9的证明可知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 以及可测函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=g(x),\ \text{a.e. } x\in E,$$

而且 $\{f_{k_i}(x)\}$ 也是依测度收敛于 $g(x)$ 的. 但按假设,$\{f_{k_i}(x)\}$ 应依测度收敛于 $f(x)$, 从而由定理 0.4知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等. □

例题 0.4 设 $f(x),f_k(x)(k\in\mathbb{N})$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数,$m(E)<+\infty$.

(i) 若在任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

(ii) 若 $f_k(x)>0(k\in\mathbb{N})$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则对 $p>0,f_k^p(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f^p(x)$.

证明 (i) 反证法. 假定结论不真, 则存在 $\varepsilon_0>0,\sigma_0>0$ 以及 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\geqslant\sigma_0. \tag{7}$$

但依题设知, 存在 $\{k_{i_j}\}$, 使得 $f_{k_{i_j}}(x)\to f(x)(j\to\infty)$. 由此又知 $f_{k_{i_j}}(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 这与式 (7) 矛盾.

(ii) 由题设知, 任何子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中必有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$. 即 $\{f_{k_i}^p(x)\}$ 必有子列 $\{f_{k_{i_j}}^p(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f^p(x)$. 因此, 根据 (i) 即得所证. □

推论 0.3

设 $m(E)<+\infty$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 当且仅当对 $\{f_n\}$ 的任意子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_{k_i}}(x)=f(x)$, a.e.$x\in E$.

♡

注 若 $m(E)=+\infty$, 上述推论 0.3的结论不一定成立. 例如, 设 $E=\mathbb{R}$

$$f_n(x)=e^{-(x-n)^2},\quad n\in\mathbb{N}$$

则易知对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有 $f_n(x)\to 0,n\to\infty$, 从而 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$. 但对 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$, 都有

$$\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}:e^{-(x-n)^2}\geqslant\varepsilon\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}:n-\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\leqslant x\leqslant n+\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\}$$

于是

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=2\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\nrightarrow 0,\quad n\to\infty$$

因此,$f_n(x)$ 不依测度收敛于 0, 从而 $f_n(x)$ 的任何子列也不依测度收敛于 0.

证明 $(\Rightarrow)$: 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上也依测度收敛于 $f(x)$. 由Riesz 定理, 存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}\subset\{f_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_{k_i}}(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$.

$(\Leftarrow)$: 假设 $f_n(x)$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\})>0.$$

并且存在 $\delta_0>0$, 以及子列 $\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$ 使得

$$m(\{x\in E:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\})\geqslant\delta_0.$$

因此对 $\{f_{n_k}\}$ 的任何子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 都有

$$m(\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\})\geqslant\delta_0.\tag{8}$$

又 $m(E)<+\infty$, 故由 Egorov 定理可知, 存在闭集 $F\subset E$:$m(F\setminus E)<\delta$, 使得 $f_{n_{k_i}}(x)$ 在 F 上一致收敛于 $f(x)$. 于是存在 $I\in\mathbb{N}$, 当 $i\geqslant I$ 时, 对 $\forall x\in F$, 都有

$$|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|<\varepsilon_0.$$

从而当 $i\geqslant I$ 时, 就有

$$F\subset\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|<\varepsilon_0\}\Longleftrightarrow\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|<\varepsilon_0\}^c\subset F^c$$

$$\Longleftrightarrow\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\}\subset E\setminus F.$$

进而当 $i\geqslant I$ 时, 我们有

$$m(\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\})\leqslant m(E\setminus F)<\delta.$$

而由(8)式可知

$$m(\{x\in E:|f_{n_{k_i}}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\})\geqslant\delta$$

矛盾! □

定理 0.11

设 $f(x),\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数列.

(1) 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛于 $f(x)$,$\varphi\in C(\mathbb{R})$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛于 $\varphi[f(x)]$;

(2) 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$,$\varphi\in C(\mathbb{R}^1)$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $\varphi[f(x)]$.

(3) 若 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$(近一致收敛或依测度收敛于 $f(x)$),$\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 (近一致收敛或依测度收敛) 于 $\varphi[f(x)]$.

♡

证明

□

最后, 总结几种收敛性之间的关系, 如图 1所示.

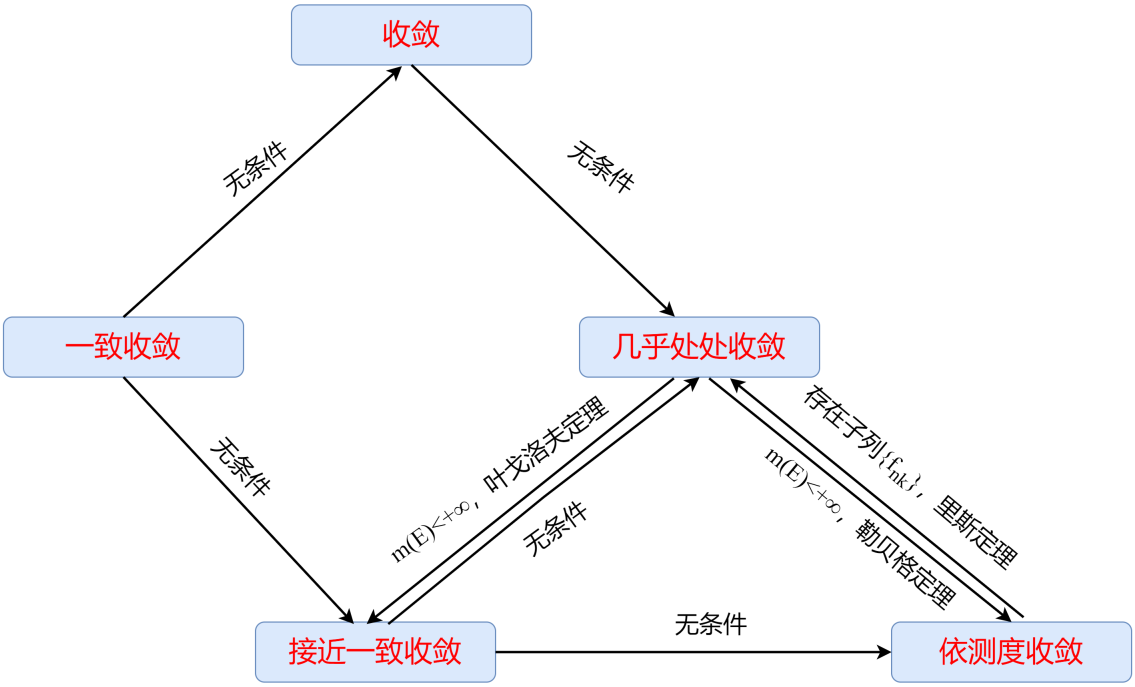

图 1: 几种收敛性之间的关系