

## 0.1 矩阵的迹

### 命题 0.1 (矩阵迹的性质)

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 则有:

1. (线性)  $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$ ;
2. (对称性)  $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$ ;
3. (交换性)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**证明** 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证. □

### 命题 0.2 (矩阵迹的刻画)

设  $K$  为数域,  $f: M_n(K) \rightarrow K$  为一个映射, 且满足

- (1)  $\forall A, B \in M_n(K), f(A+B) = f(A) + f(B)$ ;
- (2)  $\forall k \in K, A \in M_n(K), f(kA) = kf(A)$ ;
- (3)  $\forall A, B \in M_n(K), f(AB) = f(BA)$ ;
- (4)  $f(I_n) = n$ .

求证:  $f$  就是迹映射, 即  $f(A) = \text{tr}(A)$  对一切  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵  $A$  成立. ◆

**笔记** 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

**证明** 设  $E_{ij}$  是  $n$  阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n = f(I_n) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj}),$$

所以  $f(E_{ii}) = 1 (1 \leq i \leq n)$ . 另一方面, 若  $i \neq j$ , 则

$$f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(O) = f(0 \cdot I_n) = 0 \cdot f(I_n) = 0.$$

设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ , 则

$$f(A) = f\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A).$$

**例题 0.1** 求证: 不存在  $n$  阶矩阵  $A, B$ , 使得  $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$ .

**证明** 用反证法证明. 若存在  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足条件  $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$ , 则

$$kn = \text{tr}(kI_n) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

矛盾. □

### 命题 0.3

设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $P$  是同阶可逆阵, 求证:  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ , 即相似矩阵具有相同的迹. ◆

**证明** 因为  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , 故  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$ . □

## 命题 0.4

1. 设  $n$  阶实矩阵  $A$  适合  $A' = -A$ , 如果存在同阶实矩阵  $B$ , 使得  $AB = B$ , 则  $B = O$ ;
2. 设  $n$  阶复矩阵  $A$  适合  $\overline{A}' = -A$ , 如果存在同阶复矩阵  $B$ , 使得  $AB = B$ , 则  $B = O$ .

证明

1. 在等式  $AB = B$  两边同时左乘  $B'$  可得

$$B'AB = B'B.$$

上式两边同时转置并注意到  $A' = -A$ , 可得

$$B'B = (B'B)' = (B'AB)' = B'A'B = -B'AB = -B'B,$$

从而有  $B'B = O$ . 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得  $B = O$ .

2. 证明与 1 类似.

□

## 命题 0.5

1. 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  实矩阵, 则  $\text{tr}(AA') \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $A = O$ .
2. 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  复矩阵, 则  $\text{tr}(A\overline{A}') \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $A = O$ .

**证明** 1. 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  实矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(AA') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当  $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ , 即  $A = O$ .

2. 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  复矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(A\overline{A}') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当  $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ , 即  $A = O$ .

□

**例题 0.2** 已知  $A, B$  均为  $n$  阶实矩阵, 且  $AB - BA = A^T + B^T$ , 求  $A + B$ .

**证明** 由条件可得

$$\text{tr}[(A+B)(A+B)^T] = \text{tr}(A^2B - ABA + BAB - B^2A) = 0,$$

故由命题 0.5 知  $A + B = O$ .

□

## 命题 0.6

设  $A$  为  $n$  阶实矩阵, 求证:  $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(AA')$ , 等号成立当且仅当  $A$  是对称阵.

**证明** 根据命题 0.5, 再由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{tr}((A - A')(A - A')') \\ &= \text{tr}((A - A')(A' - A)) = \text{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) \\ &= 2\text{tr}(AA') - 2\text{tr}(A^2), \end{aligned}$$

故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知  $A - A' = O$ , 即  $A$  为对称阵. 若已知  $A$  为对称阵, 则  $\text{tr}(AA') = \text{tr}(A^2)$  显然成立.

□

**例题 0.3** 设  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是实对称阵且  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2 = O$ , 证明: 每个  $A_i = O$ .

**证明** 对题设中的等式两边同时取迹, 可得

$$0 = \text{tr}(O) = \text{tr}(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2) = \text{tr}(A_1 A_1') + \text{tr}(A_2 A_2') + \cdots + \text{tr}(A_k A_k').$$

又由于  $\text{tr}(A_i A_i') \geq 0$ , 从而只可能是  $\text{tr}(A_i A_i') = 0 (1 \leq i \leq k)$ , 再次由零矩阵的充要条件可得  $A_i = O (1 \leq i \leq k)$ .

□

### 命题 0.7

设  $A, B$  是两个  $n$  阶矩阵, 使得  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA)$  对任意  $n$  阶矩阵  $C$  成立, 求证:  $AB = BA$ .

▲

**注** 根据矩阵迹的性质不能得到  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ , 只能得到  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$ .

**证明** 设  $AB = (d_{ij}), BA = (e_{ij})$ , 令  $C = E_{kl} (1 \leq k, l \leq n)$ , 则

$$\text{tr}(ABC) = d_{lk}, \text{tr}(CBA) = e_{lk},$$

因此  $d_{lk} = e_{lk} (1 \leq k, l \leq n)$ , 即有  $AB = BA$ .

□

**注** 若  $A, B$  是实 (复) 矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得  $\text{tr}((AB - BA)C) = 0$ , 令  $C$  为  $AB - BA$  的转置 (共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

**例题 0.4** 若  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $AA' = I_n$ , 则称为正交矩阵. 证明: 不存在  $n$  阶正交矩阵  $A, B$  满足  $A^2 = cAB + B^2$ , 其中  $c$  是非零常数.

**证明** 用反证法, 设存在  $n$  阶正交阵  $A, B$ , 使得  $A^2 = cAB + B^2 (c \neq 0)$ . 在等式两边同时左乘  $A'$ , 右乘  $B'$ , 可得  $AB' = cI_n + A'B$ , 从而  $cI_n = A'B - AB'$ . 两边同时取迹, 可得  $0 \neq nc = \text{tr}(cI_n) = \text{tr}(A'B) - \text{tr}(AB') = \text{tr}((A'B)') - \text{tr}(AB') = \text{tr}(B'A) - \text{tr}(AB') = 0$ , 矛盾.

□

**例题 0.5** 设  $A, B$  为  $n$  阶实对称阵, 证明:  $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2 B^2)$ , 并求等号成立的充要条件.

**证明** **证法一:** 由命题 0.6, 再结合  $A, B$  的对称性可得

$$\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}((AB)(AB)') = \text{tr}(ABBA) = \text{tr}(A^2 B^2).$$

等号成立当且仅当  $AB$  也为实对称矩阵, 即  $AB = B'A' = BA$ .

**证法二:** 设  $P$  为正交矩阵, 使得  $P'AP = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换  $A \mapsto P'AP, B \mapsto P'BP$  下不改变, 故不妨从一开始就假设  $A$  为正交相似标准型  $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . 设  $B = (b_{ij})$ , 则经计算可知

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2 B^2) - \text{tr}((AB)^2) &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^2 b_{ij}^2 - \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j b_{ij}^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i \lambda_j) b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 b_{ij}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

且等号成立当且仅当  $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ , 这也当且仅当  $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ , 即当且仅当  $AB = BA$  成立.

□