阶的估计

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 阶的概念及 O 与 o 的运算

1.1 关于 O 与 o 的基本定理及应用

定理 1.1 (O 与 o 的基本运算法则)

法则 1: 若 $f(x)$ 是无穷大量,$x \to x_0$, 并且 $\varphi(x) = O(1)$, 则 $\varphi(x) = o(f(x))$,$x \to x_0$.

法则 2: 若 $f(x) = O(\rho)$,$\rho = O(\psi)$, 则 $f(x) = O(\psi)$.

法则 3: 若 $f(x) = O(\rho)$,$\rho = o(\psi)$, 则 $f(x) = o(\psi)$.

法则 4:$O(f) + O(g) = O(f + g)$.

法则 5:$O(f)O(g) = O(fg)$.

法则 6:$o(1)O(f) = o(f)$.

法则 7:$O(1)o(f) = o(f)$.

法则 8:$O(f) + o(f) = O(f)$.

法则 9:$o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.

法则 10:$o(f) \cdot o(g) = o(fg)$.

法则 11:$\{O(f)\}^k = O(f^k)$,k 是自然数. 一般地,“大 O 常数”与 k 有关.

法则 12:$\{o(f)\}^k = o(f^k)$.

法则 13: 若 $f \sim g$,$g \sim \varphi$, 则 $f \sim \varphi$.

法则 14: 若 $f = o(g)$,$g \sim \varphi$, 则 $g \sim \varphi \pm f$.

法则 15: 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是正值函数,$f(x) = o(g(x))$,$x \to \infty$, 则

$$\int_A^B f(x)dx = o\left(\int_A^B g(x)dx\right), \quad B > A \to \infty.$$

特别地, 若存在 A_0 使得 $\displaystyle\int_{A_0}^{\infty} g(x)dx < \infty$, 则

$$\int_A^{\infty} f(x)dx = o\left(\int_A^{\infty} g(x)dx\right), \quad A \to \infty.$$

法则 16: 若 a_n 与 b_n 都取正值 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$,$a_n = o(b_n)$,$n \to \infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{M} b_n\right), \quad M > N \to \infty.$$

特别地, 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{\infty} b_n\right), \quad N \to \infty.$$

笔记 这些性质不需要死记硬背, 需要使用的时候直接利用 o, O 的定义验证即可.

证明 法则6的证明:设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, 且

$$|g(x)| \le Mf(x), \quad x \in (a, b).$$

则

$$0 \le \lim_{x \to x_0} \left|\frac{\varphi(x)g(x)}{f(x)}\right| \le M \lim_{x \to x_0} |\varphi(x)| = 0,$$

于是

$$\varphi(x)g(x) = o(f(x)).$$

法则11的证明:设 $|g(x)| \leq Mf(x), \quad x \in (a,b)$. 则

$$|g(x)|^k \leq M^k f^k(x), \quad x \in (a,b),$$

即

$$(g(x))^k = O_k(f^k(x)), \quad x \in (a,b).$$

□

命题 1.1 (极限的等价定义)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 等价于 $a_n = a + o(1), n \to \infty$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 等价于 $f(x) = A + o(1), x \to x_0$.

定理 1.2

设 $b_n > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, 且 $a_n = o(b_n), n \to \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = o\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right), N \to \infty.$$

证明 根据 $Stolz$ 定理, 再结合 $a_n = o(b_n)$ 可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

得证. □

定理 1.3

设 $g(x) > 0, f(x) = o(g(x)), x \to \infty$, 且 $\int_a^{\infty} g(x)dx$ 发散, 则

$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right), \quad x \to \infty.$$

证明 根据 $L'Hospital'rule$, 再结合 $f(x) = o(g(x))$ 可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

得证. □

定理 1.4 (Abel 极限定理)

设 $\{b_n\}$ 是正数列,$a_n = o(b_n)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

又设当 $0 \leq x < 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n < \infty,$$

并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \to \infty, \quad x \to 1^-,$$

则
$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to 1^-.$$

证明 根据 Stolz 定理, 再结合 $a_n=o(b_n)$ 可知
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_i x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_i x^n}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a_n x^n}{b_n x^n}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a_n}{b_n}=0.$$
得证. □

例题 1.1 设 $a_n=O(b_n)$,$n\geq 1$, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$, 则存在常数 C, 使得
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=C+o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$

证明 显然, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 因此存在常数 C 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=C$, 于是
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=C+o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$
得证. □