0.1 集类. 环、σ 环、代数、σ 代数、单调类

定义 0.1

设 X 为取定的集合, 以 X 的某些子集为元素所成的集称为 X 上的**集类**. 而 X 称为**基本空间**. 集类用花体大写字母或希腊字母表示. 例如:$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E},\mathscr{F},\mathscr{R};\tau,\mu,\nu$ 等.

定义 0.2

设 X 为一个集合,$\mathscr{R}$ 为 X 上的一个非空集类, 如果对 $\forall E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 都有

$$E_1\cup E_2\in\mathscr{R},\quad E_1\setminus E_2\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个环. 特别地, 如果还有 $X\in\mathscr{R}$, 就称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个**代数**, 或称为**域**.

如果对任何 $E,F\in\mathscr{R}$, 有 $E\setminus F\in\mathscr{R}$; 且对任何一列 $E_i\in\mathscr{R}(i=1,2,\cdots)$, 都有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个 **σ 环**. 如果还有 $X\in\mathscr{R}$, 则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 **σ 代数**, 或称为 **σ 域**.

注 设 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 σ 代数, 对 $\forall E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 取 $E_i=E_2(i\geqslant 3)$, 则 $E_1\cup E_2=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$,$E_1\setminus E_2\in\mathscr{R}$. 所以,**$\sigma$ 环必为环,σ 代数必为代数.**

由定义可知, 环是对集的 “$\cup$” 及 “$\setminus$” 运算封闭的非空集类. 而代数是对 “余或补” 运算也封闭的环 (因为 $\mathscr{R}$ 为非空集类, 故有 $E\in\mathscr{R}$, 从而 $E^c=X\setminus E\in\mathscr{R}$).$\sigma$ 环是对集的 “$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$” 及 “$\setminus$” 运算封闭的非空集类. 而 σ 代数是对 “余或补” 运算也封闭的 σ 环.

定理 0.1

设 $\mathscr{R}$ 为环, 则

(1) 空集 $\varnothing\in\mathscr{R}$.

(2) $\mathscr{R}$ 对 “$\cap$” 运算封闭.

(3) 如果 $E_i\in\mathscr{R}(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\in\mathscr{R}$.

(4) 设 $\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 为环 (代数), 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$ 仍为环 (代数).

证明

(1) 因环 $\mathscr{R}$ 为非空集类, 故 $\exists E\in\mathscr{R}$, 根据环的定义有 $\varnothing=E\setminus E\in\mathscr{R}$.

(2) 设 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 则

$$E_1\cap E_2=(E_1\cup E_2)\setminus(E_1\setminus E_2)\setminus(E_2\setminus E_1)\in\mathscr{R}.$$

(3) 由环对 “$\cup$” 封闭和归纳法立即推得.

(4) 设 $E_1,E_2\in\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$, 由 $\mathscr{R}_\alpha$ 都为环, 故 $E_1\cup E_2\in\mathscr{R}_\alpha$, $E_1\setminus E_2\in\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$, 从而 $E_1\cup E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$, $E_1\setminus E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$, 即 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$ 为环. 进一步, 如果 $\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 为代数, 则 $X\in\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$, 即 $X\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$. 这说明了 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$ 为代数.

$\square$

定理 0.2

设 $\mathscr{R}$ 为 σ 环, 则:

(1) $\mathscr{R}$ 为环.

(2) $\mathscr{R}$ 对 "$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$" 运算封闭.

(3) $\mathscr{R}$ 对 "$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}$", "$\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}}$", "$\lim\limits_{k\to+\infty}$" 运算封闭.

(4) 设 $\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 为 σ 环 (σ 代数), 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$ 仍为 σ 环 (σ 代数).

证明

(1) 由 $\varnothing=E\setminus E\in\mathscr{R}$, 当 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$ 时, 有

$$E_1\cup E_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R},$$

其中 $E_i=\varnothing(i\geqslant 3)$. 从而,$\mathscr{R}$ 为环.

(2) 从

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\setminus E_i\right)\in\mathscr{R}$$

可看出 $\mathscr{R}$ 对 "$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$" 运算封闭.

(3) 设 $E_k\in\mathscr{R},k=1,2,\cdots$. 根据定理 0.2(2)和 $\mathscr{R}$ 为 σ 环知

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\in\mathscr{R},\quad \underline{\lim_{k\to+\infty}}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\in\mathscr{R}.$$

因此,$\mathscr{R}$ 对 "$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}$", "$\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}}$", "$\lim\limits_{k\to+\infty}$" 封闭.

(4) 利用定义, 容易验证.

□

命题 0.1

(1) 设 X 为任意集合,X 的所有子集全体所成的集类 $\mathscr{A}=2^X$ 为 σ 代数 (当然也为代数).

(2) 设 X 为任意集合,X 的有限子集 (包括空集 $\varnothing$) 全体所成的集类 $\mathscr{A}$ 为一个环. 当且仅当 X 为有限集时,$\mathscr{A}$ 为代数.

(3) 设 X 为任意集合,X 的至多可数集的全体所成的集类 $\mathscr{A}$ 为一个 σ 环. 当且仅当 X 为至多可数集时,$\mathscr{A}$ 为 σ 代数.

证明

(1)

(2)

(3)

□

例题 0.1 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集,$\mathbb{N}$ 的有限子集全体所成的集类 $\mathscr{A}$ 为一个环. 显然,$\mathbb{N}\notin\mathscr{A}$, 故 $\mathscr{A}$ 不是一个代数. 又因 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{i\}=\mathbb{N}\notin\mathscr{A}$, 故 $\mathscr{A}$ 不是一个 σ 代数.

例题 0.2 设 $\mathbb{R}$ 为实数集 (它是不可数集, 即不是至多可数集),$\mathbb{R}$ 的至多可数的子集的全体所成的集类 $\mathscr{A}$ 为 σ 环. 显然,$\mathbb{R}\notin\mathscr{A}$, 故 $\mathscr{A}$ 不是一个 σ 代数.

例题 0.3 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集,$\mathbb{N}$ 的有限子集及其余集的全体所成的集类 $\mathscr{A}$ 为一个代数 ($\mathbb{N}=\varnothing^c\in\mathscr{A}$). 显然,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{2i\}=$

$\{2i \mid i \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{A}$, 故 $\mathscr{A}$ 不是一个 σ 环, 从而不是一个 σ 代数.

例题 0.4 设 $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ 为实数集, 则由 $\mathbb{R}^1$ 中的有限个左开右闭的有限区间的并集

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$$

的全体所成的集类 $\mathscr{R}_0$ 为一个环, 但不是代数, 也不是 σ 环.

注 $\mathscr{R}_0$ 中的元素都可表示成有限个两两不相交的左开右闭区间的并, 但表示法并不惟一. 如:$(0,1] = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right]$.

注 由有限个开区间 (或闭区间) 的并集的全体所组成的集类并不是一个环. 这是因为 $(0,2) \setminus (0,1) = [1,2)$(或 $[0,2] \setminus [0,1] = (1,2]$) 不是有限个开 (或闭) 区间的并, 故该集类不是一个环.

证明 显然,$\mathscr{R}_0$ 对运算 "$\cup$" 是封闭的. 再证 $\mathscr{R}_0$ 对运算 "$\setminus$" 也是封闭的. 首先,$\varnothing = (a,a] \in \mathscr{R}_0$. 而任何两个左开右闭区间 $(a,b], (c,d]$ 的差 $(a,b] \setminus (c,d]$ 只可能发生如下 3 种情况:①空集;②左开右闭的区间;③两个不相交的左开右闭区间的并. 任何情况都表明 $(a,b] \setminus (c,d] \in \mathscr{R}_0$. 于是, 对 $\mathscr{R}_0$ 中任何

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j],$$

有

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j] = \bigcup_{i=1}^{n} ((a_i, b_i] \setminus (c_m, d_m]) \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (c_j, d_j].$$

从 $\bigcup_{i=1}^{n} ((a_i, b_i] \setminus (c_m, d_m]) \in \mathscr{R}_0$ 和数学归纳法知,$A \setminus B \in \mathscr{R}_0$. 而

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j] \right) \in \mathscr{R}_0$$

是显然的. 因此,$\mathscr{R}_0$ 为一个环. 因为 $\mathbb{R}^1 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i+1] \notin \mathscr{R}_0$, 故 $\mathscr{R}_0$ 不是代数, 也不是 σ 环.

□

例题 0.5 当 $a \leqslant b, c \leqslant d$ 时, 称

$$\{(x,y) \mid a < x \leqslant b, c < y \leqslant d\} = (a,b] \times (c,d] \subset \mathbb{R}^2$$

为左下开右上闭的区间 (或矩形). 类似例题 0.4, 由有限个左下开右上闭的区间 (矩形) 的并集全体所成的集类 $\mathscr{R}_0$ 是一个环. 但不是代数, 也不是 σ 环.

对于 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 由有限个形如

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, n\} = \bigotimes_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$$

的区间的并集全体所成的集类 $\mathscr{R}_0$ 是一个环. 但不是代数, 也不是 σ 环.

证明

□

环、σ 环、代数、σ 代数之间的关系如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
\sigma\text{ 代数} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \sigma\text{ 环} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/"{marking}, "\text{例题 0.2}"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\
\text{代数} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[u, Rightarrow, shift left, "/"{marking}, "\text{例题 0.3}"] & \text{环} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/"{marking}, "\text{例题 0.1例题 0.4}"'] \arrow[u, Rightarrow, shift left, "/"{marking}, "\text{例题 0.1例题 0.4}"']
\end{tikzcd}$$

图 1

定理 0.3

设 $\mathscr{E}$ 为由集合 X 的某些子集组成的集类, 则存在惟一的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数)$\mathscr{R}$, 使得

(1) $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}$;

(2) 任何包含 $\mathscr{E}$ 的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数)$\mathscr{R}'$ 必有 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}'$. 换言之,$\mathscr{R}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数).

这样的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数)$\mathscr{R}$ 称为**由集类 $\mathscr{E}$ 所生成 (或张成) 的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数)**, 并用 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$(或 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$, 或 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$, 或 $\mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$) 表示.

注 设 $\mathscr{E}$ 为非空集类. 易见,$\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 就是由 $\mathscr{E}$ 中任取有限个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 经过有限次 “$\cup$” , “$\setminus$” 运算后所得的集的全体.

显然,$\mathscr{A}(\mathscr{E}) = \mathscr{R}(\mathscr{E} \cup \{X\})$. 也就是说,$\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 是由 $\mathscr{E} \cup \{X\}$ 中任取有限个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 经过有限次 “$\cup$” , “$\setminus$” 运算后所得的集的全体.

类似地,$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 就是由 $\mathscr{E}$ 中任取至多可数个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 经过至多可数次 “$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$” , “$\setminus$” 运算后所得的集的全体.

显然,$\mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E} \cup \{X\})$. 也就是说,$\mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$ 是由 $\mathscr{E} \cup \{X\}$ 中任取至多可数个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 经过至多可数次 “$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$” , “$\setminus$” 运算后所得的集的全体.

证明 首先,X 的子集全体 2^X 是一个环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数). 当然,$\mathscr{E} \subseteq 2^X$. 因此, 包含 $\mathscr{E}$ 的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数) 确实是存在的. 取环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数) 族

$$\mu = \{\mathscr{R}' \mid \mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}' \subseteq 2^X, \mathscr{R}' \text{ 为环 (或代数、或 } \sigma \text{ 环、或 } \sigma \text{ 代数)}\}.$$

根据定理 0.1(4)(或定理 0.2(4)),

$$\mathscr{R} = \bigcap_{\mathscr{R}' \in \mu} \mathscr{R}'$$

为环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数). 显然, 还有 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}$. 由 $\mathscr{R}$ 的定义知, 性质 (2) 成立.

如果环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数)$\widetilde{\mathscr{R}}$ 也满足 (1),(2), 则 $\widetilde{\mathscr{R}} \subseteq \mathscr{R}$. 因为 $\mathscr{R}$ 满足 (1),(2), 故 $\mathscr{R} \subseteq \widetilde{\mathscr{R}}$. 因此,$\widetilde{\mathscr{R}} = \mathscr{R}$. 这就证明了满足 (1),(2) 的环 (或代数、或 σ 环、或 σ 代数) 是惟一的. □

定理 0.4

$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$.

证明 因为 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \supseteq \mathscr{E}$, 所以 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \supseteq \mathscr{R}(\mathscr{E})$. 由此推得 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \supseteq \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$.

反之, 由于 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}(\mathscr{E})$, 所以 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$. 这就证明了 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$.

□

例题 0.6 设 X 为一个非空集合,$\mathscr{E}$ 为 X 的单元素 (独点) 子集全体所成的集类. 则 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 就是 X 的有限子集 (包括空集) 全体所成的集类 (见命题 0.1(2)), 它是一个环. $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 就是 X 的至多可数子集全体所成的集类 (见命题 0.1(3)), 它是一个 σ 环.

如果 X 为有限集, 则 $\mathscr{R}(\mathscr{E}) = \mathscr{A}(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$, 它是 X 的有限子集全体所成的集类, 它是 σ 代数.

如果 $X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ 为可数集, 则 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 为 X 的有限子集全体所成的集类, 这是一个环, 不是代数, 也不是 σ 环, 更不是 σ 代数. 而 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$ 是 X 的至多可数子集的全体所成的集类, 它是 σ 环, 是代数, 是 σ 代数. 易见,X 的有限子集及其余集的全体所成的集类就是 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$, 它是一个代数. 但不是 σ 环 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{a_{2n}\} = \{a_{2n} | n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{A}(\mathscr{E})\right)$, 更不是 σ 代数.

如果 X 为不可数集, 则 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 是 X 的有限子集的全体所成的集类, 它是一个环, 不是代数, 不是 σ 环, 更不是 σ 代数.$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 是 X 的至多可数子集的全体所成的集类, 它是 σ 环, 但不是 σ 代数.$\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 是 X 的有限子集

及其余集的全体所成的集类. 它是代数, 但不是 σ 环 (因为 X 的可数子集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{a_n\} = \{a_n|n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{A}(\mathscr{E})$), 更不是 σ 代数.$\mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$ 是 X 的至多可数子集及其余集的全体 (未必是 X 的所有子集形成的集类! 例如:$X = \mathbb{R}$, 则 $(-\infty, 0) \notin \mathscr{A}_\sigma(\mathscr{E})$) 所成的集类. 它是 σ 代数.

例题 0.7 设 $\mathscr{P}$ 为 $\mathbb{R}^1$ 上左开右闭区间 $(a,b](-\infty < a < b < +\infty)$ 全体所成的集类, 则 $\mathscr{R}(\mathscr{P}) = \mathscr{R}_0$(例题 0.4). $\mathscr{A}(\mathscr{P}) = \mathscr{R}(\mathscr{P} \cup \{\mathbb{R}^1\})$(有限个左开右闭区间的并及其余集所形成的集类).

显然,$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{P}) = \mathscr{A}_\sigma(\mathscr{P}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{R}_0) = \mathscr{A}_\sigma(\mathscr{R}_0)$(因为 $\mathbb{R}^1 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(i, i+1]$). 注意:$(-\infty, 0] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n, -n+1] \in \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{P}) \setminus \mathscr{R}(\mathscr{P})$, 所以 $\mathscr{R}(\mathscr{P}) \subsetneq \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{P})$.

定理 0.5

设 X 为非空集合,$\mathscr{R}$ 为 X 上的一个集类, 则 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数的充要条件是同时满足以下条件

(1) $\varnothing \in \mathscr{R}$;

(2) 若 $E \in \mathscr{R}$, 则 $E^c \in \mathscr{R}$;

(3) 若 $E_i \in \mathscr{R}, i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{R}$.

♡

证明 $(\Rightarrow)$ 因为 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数, 故 $\mathscr{R}$ 为非空集类, 从而 $\exists E \in \mathscr{R}$. 由此得到 $\varnothing = E \setminus E \in \mathscr{R}$. 这就证明了 (1).

因为 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数, 故 $X \in \mathscr{R}$. 如果 $E \in \mathscr{R}$, 根据 $\mathscr{R}$ 为环, 所以 $E^c = X \setminus E \in \mathscr{R}$. 这就证明了 (2).

(3) 就是 σ 代数定义的第 1 条.

$(\Leftarrow)$ 从右边条件 (1),(2) 立知,$X = \varnothing^c \in \mathscr{R}$. 右边条件 (3) 就是 σ 代数定义中的第 1 个条件.

如果 $E_1, E_2 \in \mathscr{R}$, 由右边条件 (2) 知,$E_1^c, E_2^c \in \mathscr{R}$. 于是, 由 (1),(2),(3) 得到

$$\begin{aligned}E_1 \setminus E_2 &= E_1 \cap E_2^c = \left((E_1 \cap E_2^c)^c\right)^c = \left(E_1^c \cup E_2\right)^c \\ &= \left(E_1^c \cup E_2 \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots\right)^c \in \mathscr{R}.\end{aligned}$$

综上所述,$\mathscr{R}$ 为 σ 代数.

□

定义 0.3 (单调类)

设 $\mathscr{M}$ 为由 X 的某些子集所成的集类、如果对 $\mathscr{M}$ 中任何单调集列 $\{E_n\}$, 都必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n \in \mathscr{M}$, 则称 $\mathscr{M}$ 为**单调类**. 因此, 单调类就是对单调集列的极限运算封闭的集类.

♣

例题 0.8 设 $X = \mathbb{R}^1$, 则 $\mathscr{M} = \{[0,1], [2,3]\}$ 为单调类 ($\mathscr{M}$ 中任何单调类 $\{E_n\}$, 必有 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $E_n = [0,1]$. 因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = [0,1] \in \mathscr{M}$; 或者, 必有 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $E_n = [2,3]$. 因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = [2,3] \in \mathscr{M}$). 但 $\mathscr{M}$ 对 "$\cup$" 不封闭 ($[0,1] \cup [2,3] \notin \mathscr{M}$), 故 $\mathscr{M}$ 不为环.

定理 0.6

设 $\mathscr{M}_\alpha$ 为单调类,$\alpha \in \Gamma$, 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} \mathscr{M}_\alpha$ 也为单调类.

♡

证明 设 $\{E_n\}$ 为 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} \mathscr{M}_\alpha$ 中的单调集列, 则它也是 $\mathscr{M}_\alpha$ 中的单调集列. 根据单调类的定义, $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n \in \mathscr{M}_\alpha (\alpha \in \Gamma)$. 所以, $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} \mathscr{M}_\alpha$. 这就证明了 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} \mathscr{M}_\alpha$ 也为单调类.

□

定理 0.7

设 $\mathscr{E}$ 是由集合 X 的某些子集所成的集类, 则存在惟一的单调类 $\mathscr{M}$, 使得

(1) $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}$;

(2) 任何包含 $\mathscr{E}$ 的单调类 $\mathscr{M}'$, 必有 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}'$.
换言之,$\mathscr{M}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小单调类. 这样的单调类 $\mathscr{M}$ 称为**由集类 $\mathscr{E}$ 所张成的单调类**, 记作 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$.

证明 首先,X 的子集的全体 2^X 是一个单调类, 当然,$\mathscr{E} \subseteq 2^X$. 因此, 包含 $\mathscr{E}$ 的单调类确实是存在的. 取单调类族

$$\Gamma = \{\mathscr{M}' \mid \mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}' \subseteq 2^X, \mathscr{M}' \text{为单调类}\}.$$

根据定理 0.6,$\mathscr{M} = \bigcap\limits_{\mathscr{M}' \in \Gamma} \mathscr{M}'$ 为单调类. 显然, 还有 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}$, 故 $\mathscr{M}$ 满足 (1). 由 $\mathscr{M}$ 的定义知, 性质 (2) 成立.

如果单调类 $\widetilde{\mathscr{M}}$ 也满足 (1),(2), 则 $\widetilde{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$. 因为 $\mathscr{M}$ 满足 (1),(2), 故 $\mathscr{M} \subseteq \widetilde{\mathscr{M}}$. 所以,$\widetilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M}$. 这就证明了满足 (1),(2) 的单调类是惟一的.

□

定理 0.8

设 $\mathscr{M}$ 为集合 X 的集类. 则 $\mathscr{M}$ 为 σ 环 $\iff$ $\mathscr{M}$ 为单调环 (既是单调类又是环).

证明 ($\Rightarrow$) 由 σ 环定义知,σ 环 $\mathscr{M}$ 对 "$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$" 运算封闭. 再由定理 0.2(2),$\sigma$ 环 $\mathscr{M}$ 对 "$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$" 运算也封闭. 再根据 $\mathscr{M}$ 的单调增 (减) 集列 $\{E_n\}$ 的极限的定义知 $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$(或 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$) $\in \mathscr{M}$. 故 $\mathscr{M}$ 为单调类, 又因为 $\mathscr{M}$ 为 σ 环, 所以 $\mathscr{M}$ 为单调环.

($\Leftarrow$) 设 $\mathscr{M}$ 为单调环, 即 $\mathscr{M}$ 既是单调类又是环. 要证 $\mathscr{M}$ 为 σ 环, 只须证 $\mathscr{M}$ 对 "$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$" 运算封闭. 事实上, 对 $\forall E_n \in \mathscr{M} (n = 1, 2, \cdots)$, 由于 $\mathscr{M}$ 为一个环, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}$. 而 $\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为单调增集列, 因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to+\infty}\bigcup_{i=1}^{n} E_i \overset{\text{单调类定义}}{\in} \mathscr{M}.$$

□

定理 0.9

设 $\mathscr{E}$ 为集合 X 的某些子集所成的环, 则 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{M}(\mathscr{E})$.

证明 因为 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的 σ 环, 根据定理 0.8, 它是单调类. 但 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小单调类, 所以 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.

下面可以证明 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为环. 于是,$\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为一个单调环. 根据定理 0.8,$\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为 σ 环. 但 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 环, 因此 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 这就证明了 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{M}(\mathscr{E})$.

现在来证明 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为一个环. 对 $\forall E \subseteq X$, 作集类

$$\mathscr{K}(E) = \{F \mid F \in \mathscr{M}(\mathscr{E}), \text{且 } F \setminus E, E \setminus F, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{E})\}.$$

先证 $\mathscr{K}(E)$ 为单调类. 事实上, 设 $\{F_n\}$ 为 $\mathscr{K}(E)$ 中的任一单调集列. 因为 $F_n \setminus E, E \setminus F_n, E \cup F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$, 且 $\{F_n \setminus E\}, \{E \setminus F_n\}, \{E \cup F_n\}$ 都仍为单调集列. 于是

$$\lim_{n\to+\infty} F_n \setminus E = \lim_{n\to+\infty} (F_n \setminus E) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}),$$

$$E \setminus \lim_{n\to+\infty} F_n = \lim_{n\to+\infty} (E \setminus F_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}),$$

$$E \cup \lim_{n\to+\infty} F_n = \lim_{n\to+\infty} (E \cup F_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{E}).$$

由此与 $\{F_n\}$ 为 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 中的单调集列知, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n \in \mathscr{K}(E)$. 这就证明了 $\mathscr{K}(E)$ 为单调类.

特别, 当 $E \in \mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}(\mathscr{E})$ 时, 由于 $\mathscr{E}$ 为环, 故 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{K}(E) \subseteq \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 又因为 $\mathscr{K}(E)$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, 从而 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{K}(E)$. 因此,$\mathscr{K}(E) = \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 这就表明: 当 $E \in \mathscr{E}$ 时, 对 $\forall F \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$, 总有 $F \setminus E, E \setminus F, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$.

对 $\forall E \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$, 根据上述证明, 当 $F \in \mathscr{E}$ 时,$E \setminus F, F \setminus E, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$, 从而 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{K}(E) \subseteq \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 但 $\mathscr{K}(E)$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, 所以, 包含 $\mathscr{E}$ 的最小单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{K}(E)$. 由此得到 $\mathscr{K}(E) = \mathscr{M}(\mathscr{E})$.

对 $\forall E, F \in \mathscr{M}(\mathscr{E}) = \mathscr{K}(E)$, 由 $F \in \mathscr{K}(E)$ 知,$F \setminus E, E \setminus F, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 这就证明了 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为环.

□

推论 0.1

设 $\mathscr{M}, \mathscr{E}$ 为集合 X 上的两个集类. 如果 $\mathscr{M}$ 为单调类,$\mathscr{E}$ 为环, 且 $\mathscr{M} \supseteq \mathscr{E}$, 则 $\mathscr{M} \supseteq \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.

♡

证明 因为 $\mathscr{E}$ 为环, 根据定理 0.9,$\mathscr{M}(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$. 再由 $\mathscr{M}$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, 而 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的最小单调类. 从定理 0.3知,$\mathscr{M} \supseteq \mathscr{M}(\mathscr{E}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.

□

例题 0.9 设 $\mathscr{E}$ 为集合 X 上的一个非空集类. 证明: 对 $\forall F \in \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$, 必 $\exists E_i \in \mathscr{E}(i = 1, 2, \cdots)$,s.t. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

证明 设 X 上的集类

$$\mathscr{R} = \{F \mid F \subseteq X, \exists E_i \in \mathscr{E},\ i = 1, 2, \cdots, \text{s.t. } F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\},$$

则 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个 σ 环. 事实上, 对 $\forall F_i \in \mathscr{R}, i = 1, 2, \cdots$, 必有 $E_{ij} \in \mathscr{R}, j = 1, 2, \cdots$,s.t. $F_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$. 于是

$$F_1 \setminus F_2 \subseteq F_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{1j}, \quad F_1 \setminus F_2 \in \mathscr{R},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \right), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathscr{R}.$$

因此,$\mathscr{R}$ 为 X 上包含 $\mathscr{E}$ 的一个 σ 环. 又因为 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 环, 故 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{R}$. 从而, 对 $\forall F \in \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$, 必 $\exists E_i \in \mathscr{E}, i = 1, 2, \cdots$,s.t. $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

□