0.1 可测函数的定义及其性质

为了论述的简便和统一, 今后我们在谈到可测函数时允许函数取"值" $\pm\infty$.(称 $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 为广义实数集.) 现在先将有关 $\pm\infty$ 的运算规则约定如下 (注意, 这里的 $\pm\infty$ 不是指无穷大变量):

(i) $-\infty<+\infty$, 若 $x\in\mathbf{R}$, 则 $-\infty<x<+\infty$;

(ii) 若 $x\in\mathbf{R}$, 则

$$
\begin{aligned}
&x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,\\
&x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty,\\
&\pm(\pm\infty)=+\infty,\quad \pm(\mp\infty)=-\infty,\\
&|\pm\infty|=+\infty;
\end{aligned}
$$

(iii) $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$ 的符号函数为

$$
\operatorname{sign}x=\begin{cases}+1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}
$$

$$
x\cdot(\pm\infty)=\pm(\operatorname{sign}x)\infty,
$$

$$
(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,\quad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty,
$$

但是 $(\pm\infty)-(\pm\infty),(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 等是无意义的;

(iv) 特别约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$.

注意,$+\infty$ 经常简记为 ∞.

定义 0.1 (可测函数)

设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若对于任意的实数 t, 点集

$$
\{x\in E: f(x)>t\}(\text{或简写为}\{x: f(x)>t\}\text{或}f^{-1}((t,+\infty)))
$$

是可测集, 则称 $f(x)$ 是 E 上的**可测函数**, 或称 $f(x)$ 在 E 上**可测**. ♣

定理 0.1

设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数,D 是 $\mathbf{R}$ 中的一个稠密集. 若对任意的 $r\in D$, 点集 $\{x: f(x)>r\}$ 都是可测集, 则对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 点集 $\{x: f(x)>t\}$ 也是可测集. 进而 $f(x)$ 在 E 上可测. ♡

笔记 这定理说明, 今后, 我们只需对 $\mathbb{R}$ 中的一个稠密集中的元 r, 指出集合 $\{x: f(x)>r\}$ 是可测集就可以得到 $f(x)$ 是可测函数.

证明 对任一实数 t, 选取 D 中的点列 $\{r_k\}$, 使得

$$
r_k\geqslant t\ (k=1,2,\cdots);\quad \lim_{k\to\infty}r_k=t.
$$

一方面, 对 $\forall x_0\in\{x: f(x)>t\}$, 都有 $f(x_0)>t=\lim\limits_{k\to\infty}r_k$. 于是由极限的保号性可知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $f(x_0)>r_{k_0}$. 从而 $x_0\in\{x: f(x)>r_{k_0}\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x: f(x)>r_k\}$. 另一方面, 对 $\forall x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x: f(x)>r_k\}$, 都存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x_0\in\{x: f(x)>r_{k_0}\}$. 从而 $f(x_0)>r_{k_0}\geq t$, 于是 $x_0\in\{x: f(x)>t\}$. 故

$$
\{x: f(x)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x: f(x)>r_k\}. \tag{1}
$$

因为每个点集 $\{x: f(x)>r_k\}$ 都是可测集, 所以 $\{x: f(x)>t\}$ 是可测集. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明 事实上, 对于任意的 $t\in\mathbf{R}$, 点集 $\{x\in[a,b]:f(x)>t\}$ 定属于下述三种情况之一: 区间、单点集或空集. 从而可知

$$\{x\in[a,b]:f(x)>t\}$$

是可测集. 这说明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数. □

定理 0.2

若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 则下列等式皆成立并且其中左端的点集皆可测:

(i) $\{x:f(x)\leqslant t\}=E\setminus\{x:f(x)>t\}\ (t\in\mathbf{R})$;

(ii) $\{x:f(x)\geqslant t\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)>t-\dfrac{1}{k}\right\}\ (t\in\mathbf{R})$;

(iii) $\{x:f(x)<t\}=E\setminus\{x:f(x)\geqslant t\}\ (t\in\mathbf{R})$;

(iv) $\{x:f(x)=t\}=\{x:f(x)\geqslant t\}\cap\{x:f(x)\leqslant t\}\ (t\in\mathbf{R})$;

(v) $\{x:f(x)<+\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)<k\}$;

(vi) $\{x:f(x)=+\infty\}=E\setminus\{x:f(x)<+\infty\}$;

(vii) $\{x:f(x)>-\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>-k\}$;

(viii) $\{x:f(x)=-\infty\}=E\setminus\{x:f(x)>-\infty\}$.

注 由于对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned}\{x:f(x)>t\}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)>t+\frac{1}{k}\right\}\\&=E\setminus\{x:f(x)\leqslant t\}=E\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)<t+\frac{1}{k}\right\},\end{aligned}$$

故定理中 (i),(ii) 与 (iii) 的左端点集的可测性均可当作 $f(x)$ 可测性的定义.

证明 由极限的保号性和保不等式性易证上述等式皆成立. 至于左端点集的可测性可阐明如下:

从可测性定义易推 (i),(ii) 与 (vii). 从 (ii) 可推出 (iii). 从 (i) 与 (ii) 可推出 (iv). 从 (iii) 可推出 (v). 从 (v) 可推出 (vi). 从 (vii) 可推出 (viii). □

定理 0.3

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $E_1\cup E_2\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数, 若 $f(x)$ 在 E_1,E_2 上均可测, 则 $f(x)$ 也在 $E_1\cup E_2$ 上可测;

(2) 若 $f(x)$ 在 E 上可测,A 是 E 中可测集, 则 $f(x)$ 看做是定义在 A 上的函数在 A 上也是可测的.

证明 (1) 只需注意等式

$$\{x\in E_1\cup E_2:f(x)>t\}=\{x\in E_1:f(x)>t\}\cup\{x\in E_2:f(x)>t\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

(2) 只需注意等式

$$\{x\in A:f(x)>t\}=A\cap\{x\in E:f(x)>t\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

□

命题 0.2

若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $\chi_E(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 注意到对 $\forall x \in E$, 有 $\chi_E(x) = 1$. 于是当 $t \leqslant 1$ 时, 有 $\{x \in E : \chi_E(x) > t\} = E \in \mathscr{M}$; 当 $t > 1$ 时, 有 $\{x \in E : \chi_E(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故 $\chi_E(x)$ 在 E 上可测.

又注意到对 $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, 有 $\chi_E(x) = 0$. 于是当 $t \leqslant 0$ 时, 有 $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash E : \chi_E(x) > t\} = \mathbb{R}^n \backslash E \in \mathscr{M}$; 当 $t > 0$ 时, 有 $\{x \in \mathbb{R}^n \backslash E : \chi_E(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故 $\chi_E(x)$ 在 $\mathbb{R}^n \backslash E$ 上也可测.

因此由定理 0.3(1)可得 $\chi_E(x)$ 在 $E \cup (\mathbb{R}^n \backslash E) = \mathbb{R}^n$ 上可测. □

定理 0.4 (可测函数的运算性质)

(1) 若 $f(x)$,$g(x)$ 是 E 上的实值可测函数, 则下列函数

$$(\mathrm{i})\, cf(x)(c \in \mathbb{R}); \quad (\mathrm{ii})\, f(x) + g(x); \quad (\mathrm{iii})\, f(x) \cdot g(x)$$

都是 E 上的可测函数.

(2) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 则下列函数:

$$(\mathrm{i})\ \sup_{k \geqslant 1}\{f_k(x)\}; \quad (\mathrm{ii})\ \inf_{k \geqslant 1}\{f_k(x)\}; \quad (\mathrm{iii})\ \overline{\lim_{k \to \infty}}\ f_k(x); \quad (\mathrm{iv})\ \underline{\lim_{k \to \infty}}\ f_k(x)$$

都是 E 上的可测函数.

注 (1) 中所说的运算性质对于取广义实值的可测函数也是成立的.

已证 $f(x), g(x)$ 在 $\{x \in E : -\infty < f(x) < +\infty\}$ 上可测. 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 注意到

$$\{x \in \{x \in E : f(x) = +\infty\} : f(x) > t\} = \{x \in E : f(x) = +\infty\},$$
$$\{x \in \{x \in E : f(x) = -\infty\} : f(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}.$$

由定理 0.2知 $\{x \in E : f(x) = +\infty\} \in \mathscr{M}$. 因此 $f(x)$ 在 $\{x \in E : f(x) = -\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ 上可测. 故再由定理 0.3(1)可知 $f(x)$ 在 $\{x \in E : -\infty < f(x) < +\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = -\infty\} \cup \{x \in E : f(x) = +\infty\} = E$ 上可测.

证明

(1) (i) 对于 $t \in \mathbb{R}$, 若 $c > 0$, 则由

$$\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) > c^{-1}t\}$$

可知,$cf(x)$ 在 E 上可测; 若 $c < 0$, 则

$$\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) < c^{-1}t\}$$

再由定理 0.2可知,$cf(x)$ 在 E 上可测; 若 $c = 0$, 则 $cf(x) = 0$. 于是当 $t \leq 0$ 时, 有 $\{x : cf(x) > t\} = \mathbb{R} \in \mathscr{M}$; 当 $t > 0$ 时, 有 $\{x : cf(x) > t\} = \varnothing \in \mathscr{M}$. 故此时仍有 $cf(x)$ 在 E 上可测.

(ii) 因为有理数集至多可数, 所以可设 $\{r_i\}$ 是全体有理数. 对 $t \in \mathbb{R}$, 一方面, 任取 $x_0 \in \{x : f(x) + g(x) > t\}$, 则 $f(x_0) + g(x_0) > t$, 此即 $f(x_0) > t - g(x_0)$, 故由有理数集的稠密性可知, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$f(x_0) > r_{i_0} > t - g(x_0).$$

于是

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_{i_0}\} \cap \{x : g(x) > t - r_{i_0}\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\}).$$

因此 $\{x : f(x) + g(x) > t\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\})$.

另一方面, 任取 $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\})$, 则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_{i_0}\} \cap \{x : g(x) > t - r_{i_0}\}.$$

于是 $f(x_0) + g(x_0) > r_{i_0} + t - r_{i_0} = t$. 故 $x_0 \in \{x : f(x) + g(x) > t\}$. 因此 $\{x : f(x) + g(x) > t\} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > t - r_i\})$.

综上可知

$$\{x:f(x)+g(x)>t\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x:f(x)>r_i\}\cap\{x:g(x)>t-r_i\}),$$

从而由 $f(x),g(x)$ 在 E 上可测知 $f(x)+g(x)$ 是 E 上的可测函数.

(iii) 首先,$f^2(x)$ 在 E 上可测. 这是因为对于 $t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\{x:f^2(x)>t\}=\begin{cases}E, & t<0,\\ \{x:f(x)>\sqrt{t}\}\cup\{x:f(x)<-\sqrt{t}\}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

于是由定理 0.2可知,$f^2(x)$ 在 E 上可测. 又在 $f(x)g(x)=\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}/4$ 中, 由 (i)(ii) 可知 $f(x)+g(x)$ 以及 $f(x)+(-g(x))$ 都是 E 上可测函数, 所以 $f(x)\cdot g(x)$ 在 E 上可测.

(2) (i) 对 $\forall t\in\mathbf{R}$, 显然有 $\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}\supset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}$. 任取 $x_0\in\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}$, 则 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x_0)\}>t$ 于是由上确界的定义可知, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $f_{k_0}(x_0)>t$. 此即

$$x_0\in\{x:f_{k_0}(x)>t\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}.$$

故 $\left\{x:\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\}$. 因此

$$\left\{x:\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\},$$

从而由 $f(x)$ 在 E 上可测可知 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数.

(ii) 由于 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}=-\sup\limits_{k\geqslant 1}\{-f_k(x)\}$, 故可知 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 在 E 上可测.

(iii) 只需注意到 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=\inf\limits_{i\geqslant 1}\left(\sup\limits_{k\geqslant i}[f_k(x)]\right)$ 即可.

(iv) 根据等式 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=-\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(-f_k(x))$ 可知, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$ 是 E 上的可测函数.

□

推论 0.1

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)(x\in E),$$

则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 只需注意到 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$, 再由可测函数的运算性质 (2)立得. □

定义 0.2 (函数的正部和负部)

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的广义实值函数, 令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

并分别称它们为 $f(x)$ 的**正部**与**负部**.

引理 0.1

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的广义实值函数, 则

(1) $f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad\forall x\in E.$

(2) $f^+(x),f^-(x)\geqslant 0,\quad\forall x\in E.$

(3) $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x),\quad\forall x\in E.$

(4) 若 $f(x) \leqslant g(x), x \in E$, 则 $f^+(x) \leqslant g^+(x), f^-(x) \geqslant g^-(x), \forall x \in E$.

证明 证明都是显然的. □

定理 0.5

(1)$f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是 $f^+(x), f^-(x)$ 都是 E 上的可测函数.

(2) 若 $f(x)$ 在 E 上可测时, 则 $|f(x)|$ 也在 E 上可测.

注 注意,(2) 反之不然.

证明 (1) 只需注意到 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ 即可.

(2) 因为我们有

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x),$$

所以当 $f(x)$ 在 E 上可测时, 由 (1) 可知 $|f(x)|$ 也在 E 上可测. □

命题 0.3

若 $f(x, y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数, 且对固定的 $x \in \mathbf{R}$,$f(x, y)$ 是 $y \in \mathbf{R}$ 上的连续函数; 对固定的 $y \in \mathbf{R}$,$f(x, y)$ 是 $x \in \mathbf{R}$ 上的可测函数, 则 $f(x, y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数.

证明 对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 作函数

$$f_n(x, y) = f\left(x, \frac{k}{n}\right), \frac{k-1}{n} < y \leqslant \frac{k}{n} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

因为对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 显然有 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f_n(x, y) < t\} \supset \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R} : f\left(x, \frac{k}{n}\right) < t\right\} \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. 任取 $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f_n(x, y) < t\}$, 则 $f_n(x_0, y_0) < t$. 从而存在 $k_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $\frac{k_0 - 1}{n} < y_0 \leq \frac{k}{n}$, 并且 $f(x_0, \frac{k_0}{n}) = f_n(x_0, y_0) < t$. 于是

$$(x_0, y_0) \in \left\{x \in \mathbf{R} : f\left(x, \frac{k_0}{n}\right) < t\right\} \times \left(\frac{k_0 - 1}{n}, \frac{k_0}{n}\right] \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R} : f\left(x, \frac{k}{n}\right) < t\right\} \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

因此 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f_n(x, y) < t\} \subset \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R} : f\left(x, \frac{k}{n}\right) < t\right\} \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. 故

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f_n(x, y) < t\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R} : f\left(x, \frac{k}{n}\right) < t\right\} \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

所以由条件及可测集的性质 (6) 可知 $f_n(x, y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数. 而由题设易知

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

再由推论 0.1即得所证. □

命题 0.4 (连续函数必可测)

设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是可测集. 若 $f \in C(E)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 注意到

$$\{x \in E : f(x) > t\} = f^{-1}(t, +\infty),$$

显然 $(t, +\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 又 $f \in C(E)$, 故 $f^{-1}(t, +\infty)$ 是 E 上的开集. 又因为 Borel 集都可测, 所以 $f^{-1}(t, +\infty)$ 也可测. 因此 $f(x)$ 在 E 上可测. □

例题 0.1 证明 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (0, 1] \\ +\infty, x = 0 \end{cases}$ 是可测函数, 并且对 $[0, 1]$ 上任意连续函数 $g(x)$, 都有 $m(\{x \in [0, 1] : f(x) \neq$

$g(x)\}) > 0$.

证明 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{x \in [0,1] : f(x) > t\} = \left\{x \in [0,1] : \frac{1}{x} > t\right\} = \left(0, \frac{1}{t}\right) \in \mathscr{M}.$$

故 f 是可测函数. 设 $g \in C[0,1]$, 则不妨设 $g(x) < M, \forall x \in [0,1]$, 其中 $M > 0$. 从而

$$\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\} \supset \left\{x \in [0,1] : \frac{1}{x} > M\right\}.$$

于是由测度的单调性可得

$$m(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) \geqslant m\left(\left\{x \in [0,1] : \frac{1}{x} > M\right\}\right) = m\left(\left(0, \frac{1}{M}\right)\right) = \frac{1}{M} > 0.$$

□

定义 0.3

设有一个与集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的点 x 有关的命题 $P(x)$. 若除了 E 中的一个零测集以外,$P(x)$ 皆为真, 则称 $P(x)$ 在 E 上**几乎处处**是真的, 并简记为 $P(x)$,a. e.$x \in E$.

♣

定义 0.4

设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上**几乎处处相等**, 也称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**对等的**, 记为

$$f(x) = g(x), \text{ a.e.} x \in E.$$

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上是**几乎处处有限的**, 并记为

$$|f(x)| < \infty, \text{ a.e.} x \in E.$$

♣

注 可测函数有界与有限的区别:$|f(x)| < +\infty$,a. e. $x \in E$ 与 $|f(x)| < M$(M 是某个实数),a. e. $x \in E$ 是不同的. 后者蕴含前者, 但反之不然. 此即**可测函数有界必有限, 但有限不一定有界**, 例如 $E = (0,1], f(x) = 1/x$ 在 E 上每一点都有限, 但 $f(x)$ 在 E 上无界. 如果 $E = [0,1]$, 则 $f(x) = 1/x$ 在 $x = 0$ 处无限, 即 $f(0) = +\infty$, 也即 $\{x \in E : f(x) = +\infty\} = 0$.

定理 0.6

设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数,$f(x)$ 是 E 上的可测函数. 若 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$, 则 $g(x)$ 在 E 上可测.

♡

注 由这个定理可知, 对一个可测函数来说, 当改变它在零测集上的值时不会改变函数的可测性.

证明 令 $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$, 则 $m(A) = 0$ 且 $E \setminus A$ 是可测集. 对于 $t \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\{x \in E : g(x) > t\} &= \{x \in E \setminus A : g(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\} \\ &= \{x \in E \setminus A : f(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\}.\end{aligned}$$

根据 $f(x)$ 在 E 上的可测性可知, 上式右端第一个点集是可测的, 而第二个点集是零测集的子集仍是零测集, 也是可测集. 从而可知左端点集是可测的. □

命题 0.5 (局部有界化)

设 $0 < m(A) < +\infty, f(x)$ 是 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 且有 $0 < f(x) < +\infty$,a. e. $x \in A$, 则对任给的

δ:$0<\delta<m(A)$, 存在 $B\subset A$ 以及自然数 k_0, 使得

$$m(A\setminus B)<\delta,\quad \frac{1}{k_0}\leqslant f(x)\leqslant k_0,\quad x\in B.$$

证明 记 $A_k=\{x\in A:1/k\leqslant f(x)\leqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,$Z_1=\{x\in A:f(x)=0\}$,$Z_2=\{x\in A:f(x)=+\infty\}$, 易知 $m(Z_1)=m(Z_2)=0$, 且有

$$A=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup Z_1\cup Z_2, A_k\subset A_{k+1}\quad (k=1,2,\cdots).$$

于是

$$m(A)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)+m(Z_1)+m(Z_2)=m\left(\lim_{k\to\infty}A_k\right)\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}}\lim_{k\to\infty}m(A_k).$$

从而存在 k_0, 使得 $m(A\setminus A_{k_0})<\delta$. 取 $B=A_{k_0}$, 即得所证. □

定义 0.5 (简单函数)

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的实值函数. 若

$$\{y:y=f(x),x\in E\}$$

是有限集, 则称 $f(x)$ 为 E 上的**简单函数**.

定理 0.7

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数, 则可设

$$\{y:y=f(x),x\in E\}=\{c_1,c_2,\cdots,c_p\}.$$

再令

$$E_i=\{x\in E:f(x)=c_i\},i=1,2,\cdots,p.$$

于是

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,\quad i,j=1,2,\cdots,p.$$
$$f(x)=c_i,\quad x\in E_i,\quad i=1,2,\cdots,p.$$

故可将 f 记为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x),x\in E.$$

从而**简单函数是有限个特征函数的线性组合**. 特别地, 当每个 E_i 是矩体 (这里允许取无限大的矩体) 时, 称 $f(x)$ 是**阶梯函数**.

命题 0.6

1. 若 $f(x),g(x)$ 是 E 上的简单函数, 则
$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x)$$
也是 E 上的简单函数.
2.

证明

1. 由定理 0.7易证.
2.

□

定义 0.6 (可测简单函数)

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数, 则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x),x\in E.$$

其中 $E=\bigcup_{i=1}^{p}E_i,E_i\cap E_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,p$. 若上式中的每个 E_i 都是可测集, 则称 $f(x)$ 是 E 上的**可测简单函数**.

定理 0.8 (简单函数逼近定理)

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 则存在非负可测的简单函数渐升列: $\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x),k=1,2,\cdots$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E;\tag{2}$$

(2) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),x\in E$. 若 $f(x)$ 还是有界的, 则上述的收敛是一致的.

注 注意 $\bigcup\limits_{j=1}^{k2^k}E_{k,j}=\bigcup\limits_{j=1}^{k2^k}\left\{x\in E:\dfrac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{j}{2^k}\right\}=\{x\in E:0\leqslant f(x)<k\}$.

笔记 $\varphi_k(x)$ 随着 k 增大, 对 $[0,k]$ 区间的分割就越细.

证明 (1) 对任意的自然数 k, 将 $[0,k]$ 划分为 $k2^k$ 等分, 并记

$$E_{k,j}=\left\{x\in E:\frac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\frac{j}{2^k}\right\},$$
$$E_k=\{x\in E:f(x)\geqslant k\},$$
$$j=1,2,\cdots,k2^k,\quad k=1,2,\cdots.$$

作函数列

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{2^k}, & x\in E_{k,j},\\ k, & x\in E_k,\end{cases}$$
$$j=1,2,\cdots,k2^k,\quad k=1,2,\cdots,$$

且写成

$$\varphi_k(x)=k\chi_{E_k}(x)+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\chi_{E_{k,j}}(x),\quad x\in E.$$

由定理 0.2可知, 每个 $\varphi_k(x)$ 都是非负可测简单函数. 现在考虑其单调性. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 固定 k. 对 $\forall x_0\in E$, ①当 $0\leqslant f(x_0)<k+1$ 时, 即 $x_0\in\{x\in E:0\leqslant f(x)<k+1\}=\bigcup\limits_{j=1}^{(k+1)2^{k+1}}E_{k+1,j}$, 则存在 $j_0\in\left\{1,2,\cdots,(k+1)2^{k+1}\right\}$, 使得 $x_0\in E_{k+1,j_0}=\left\{x\in E:\dfrac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x)<\dfrac{j_0}{2^{k+1}}\right\}$, 即

$$\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f(x_0)<\frac{j_0}{2^{k+1}},\quad \varphi_{k+1}(x_0)=\frac{j_0-1}{2^{k+1}}.\tag{3}$$

(I) 当 $j_0\in\left[1,k2^{k+1}\right]$ 时, (i) 当 j_0-1 为偶数时, 则此时 j_0+1 也是偶数, 从而 $j_0+1\in\left[2,k2^{k+1}\right]$. 于是 $\dfrac{j_0+1}{2}\in\left[1,k2^k\right]\cap\mathbb{N}$. 又注意到

$$\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k},\quad \frac{\frac{j_0-1}{2}+1}{2^k}=\frac{j_0+1}{2^{k+1}}>\frac{j_0}{2^{k+1}},$$

从而

$$\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f\left(x_0\right)<\frac{j_0}{2^{k+1}}<\frac{\frac{j_0+1}{2}}{2^k}.$$

故此时就有 $x_0\in\left\{x\in E:\frac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k}\leqslant f\left(x\right)<\frac{\frac{j_0+1}{2}}{2^k}\right\}=E_{k,\frac{j_0+1}{2}}$. 因此再结合(3)式可得

$$\varphi_k\left(x_0\right)=\frac{\frac{j_0-1}{2}}{2^k}=\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\varphi_{k+1}\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_0\right).$$

(ii) 当 j_0-1 为奇数时, 则此时 j_0-2, j_0 都是偶数. 再结合 $j_0\in\left[1,k2^{k+1}\right]$ 可知 $j_0\in\left[2,k2^{k+1}\right]$. 于是 $\frac{j_0}{2}\in\left[1,k2^k\right]\cap\mathbb{N}$. 又注意到

$$\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}=\frac{j_0-2}{2^{k+1}}<\frac{j_0-1}{2^{k+1}},\quad \frac{j_0}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0}{2}}{2^k}.$$

从而

$$\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}<\frac{j_0-1}{2^{k+1}}\leqslant f\left(x_0\right)<\frac{j_0}{2^{k+1}}=\frac{\frac{j_0}{2}}{2^k}.$$

故此时就有 $x_0\in\left\{x\in E:\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}\leqslant f\left(x\right)<\frac{\frac{j_0}{2}}{2^k}\right\}=E_{k,\frac{j_0}{2}}$. 因此再结合(3)式可得

$$\varphi_k\left(x_0\right)=\frac{\frac{j_0-2}{2}}{2^k}=\frac{j_0-2}{2^{k+1}}<\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\varphi_{k+1}\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_0\right).$$

(II) 当 $j_0\in\left[k2^{k+1}+1,(k+1)2^{k+1}\right]$ 时, 则由(3)式可知, 此时有

$$k\leqslant\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\varphi_{k+1}\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_0\right)<\frac{j_0}{2^{k+1}}\leqslant k+1.$$

于是此时 $x_0\in\{x\in E:f\left(x\right)\geqslant k\}=E_k$, 从而此时 $\varphi_k\left(x_0\right)=k$. 故此时就有

$$\varphi_k\left(x_0\right)=k\leqslant\frac{j_0-1}{2^{k+1}}=\varphi_{k+1}\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_0\right)<\frac{j_0}{2^{k+1}}\leqslant k+1.$$

②当 $f\left(x_0\right)\geqslant k+1$ 时, 则此时 $x_0\in E_{k+1}\subset E_k$. 从而此时就有

$$\varphi_k\left(x_0\right)=k<k+1=\varphi_{k+1}\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_0\right).$$

综上所述, 我们有

$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x)\leqslant f(x),\quad \varphi_k(x)\leqslant k,$$
$$x\in E,\quad k=1,2,\cdots.$$

现在, 对任意的 $x_0\in E$,①若 $f(x_0)\leqslant M$, 则对 $\forall k>M$, 都有 $x_0\in\{x\in E:0\leqslant f(x)<k\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{k,j}$. 从而存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,k2^k\}$, 使得 $x_0\in E_{k,j_0}$, 即

$$\frac{j_0-1}{2^k}\leqslant f(x_0)<\frac{j_0}{2^k},\quad \varphi_k(x_0)=\frac{j_0-1}{2^k}.$$

于是

$$0\leqslant f(x_0)-\varphi_k(x_0)\leqslant\frac{1}{2^k},$$

令 $k\to\infty$ 得 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x_0)=f(x_0)$.

②若 $f(x_0)=+\infty$, 则对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有 $x_0\in E_k$. 从而此时就有 $\varphi_k(x_0)=k(k=1,2,\cdots)$. 令 $k\to\infty$ 得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x_0)=+\infty=f(x_0).$$

综上, 再由 x_0 的任意性可得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E.$$

(2) 记 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$. 由 (1) 知存在可测简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$ 及 $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$, 满足

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k^{(1)}(x)=f^+(x),\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k^{(2)}(x)=f^-(x),\quad x\in E.$$

显然,$\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)$ 是可测简单函数, 且有

$$\lim_{k\to\infty}[\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)]=f^+(x)-f^-(x)=f(x),\quad x\in E.$$

若在 E 上有 $|f(x)|\leqslant M$, 则当 $k>M$ 时, 由 (1) 同理可知

$$\sup_{x\in E}|f^+(x)-\varphi_k^{(1)}(x)|\leqslant\frac{1}{2^k},$$
$$\sup_{x\in E}|f^-(x)-\varphi_k^{(2)}(x)|\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E}\left|f(x)-\left[\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)\right]\right|&=\sup_{x\in E}\left|\left[f^+(x)-\varphi_k^{(1)}(x)\right]-\left[f^-(x)-\varphi_k^{(2)}(x)\right]\right|\\&\leqslant\sup_{x\in E}\left(\left|f^+(x)-\varphi_k^{(1)}(x)\right|+\left|f^-(x)-\varphi_k^{(2)}(x)\right|\right)\\&\leqslant\sup_{x\in E}\left|f^+(x)-\varphi_k^{(1)}(x)\right|+\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in E}\left|f^-(x)-\varphi_k^{(2)}(x)\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\to0,k\to\infty.\end{aligned}$$

从而知 $\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的. □

定义 0.7

对于定义在 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 称点集

$$\{x:f(x)\neq0\}$$

的闭包为 $f(x)$ 的**支 (撑) 集**, 记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $f(x)$ 的支集是有界 (即支 (撑) 集是紧集) 的, 则称 $f(x)$ 是**具有紧支集的函数**. ♣

推论 0.2

简单函数逼近定理中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数. ♡

证明 对每个 k, 令 $g_k(x)=\varphi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x)(x\in E)$, 则 $g_k(x)$ 仍是可测简单函数且具有紧支集.

对 $\forall x_0\in E$, 则存在 k_0, 使得当 $k\geqslant k_0$ 时有 $x_0\in B(0,k)$. 此时可得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x_0)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x_0)=f(x_0).$$

故再由 x_0 的任意性可得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad\forall x\in E.$$

并且若 $\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x),\forall x\in E$, 则当 $x\in E\cap B(0,k)\subset E\cap B(0,k+1)$ 时, 则此时我们有

$$g_k(x)=\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x)=g_{k+1}(x).$$

当 $x\notin E\cap B(0,k)$ 时, 显然有

$$g_k(x)=0\leqslant g_{k+1}(x).$$

综上可得

$$g_k(x)\leqslant g_{k+1}(x),\forall x\in E.$$

□

定理 0.9

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则存在函数值都是有理数的函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛且递增于 $f(x)$.

证明 作 $E_{k,n} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, 且令

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k2^{-n}\chi_{E_{k,n}}(x),$$

则由定理 0.8同理可证 $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 2^{-n}$ 以及 $f_n(x)$ 关于 n 递增. 从而可得 $f_n(x) \nearrow f(x)(n \to \infty)$ 即得所证.

□