0.1 隐函数

定义 0.1

设 $E \subset \mathbf{R}^2$, 函数 $F : E \to \mathbf{R}$. 对于方程

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

如果存在集合 $I, J \subset \mathbf{R}$, 对任何 $x \in I$, 有惟一确定的 $y \in J$, 使得 $(x, y) \in E$, 且满足方程(1), 则称方程(1)确定了一个定义在 I 上, 值域含于 J 的**隐函数**. 若把它记为

$$y = f(x) \quad , x \in I, y \in J,$$

则成立恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0,\ x \in I.$$

定理 0.1 (隐函数存在唯一性定理)

若函数 $F(x, y)$ 满足下列条件:

(i) F 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subseteq \mathbf{R}^2$ 上连续;

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$(通常称为初始条件);

(iii) F 在 D 上存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$;

(iv) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则

1° 存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subseteq D$, 在 $U(P_0)$ 上方程 $F(x, y) = 0$ 惟一地决定了一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上的 (隐) 函数 $y = f(x)$, 使得当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时,$(x, f(x)) \in U(P_0)$, 且 $F(x, f(x)) \equiv 0, f(x_0) = y_0$;

2° $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上连续.

证明 先证隐函数 f 的存在性与惟一性.

由条件 (iv), 不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$(若 $F_y(x_0, y_0) < 0$, 则可讨论 $-F(x, y) = 0$). 由条件 (iii)F_y 在 D 上连续, 由连续函数的局部保号性, 存在点 P_0 的某一闭的方邻域 $[x_0 - \beta, x_0 + \beta] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subseteq D$, 使得在其上每一点都有 $F_y(x, y) > 0$. 因而, 对每个固定的 $x \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$,$F(x, y)$ 作为 y 的一元函数, 必定在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上严格增且连续. 由初始条件 (ii) 可知

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0,\ F(x_0, y_0 + \beta) > 0.$$

再由 F 的连续性条件 (i), 又可知道 $F(x, y_0 - \beta)$ 与 $F(x, y_0 + \beta)$ 在 $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ 上也是连续的. 因此由保号性存在 $\alpha > 0(\alpha \leqslant \beta)$, 当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时恒有

$$F(x, y_0 - \beta) < 0,\ F(x, y_0 + \beta) > 0.$$

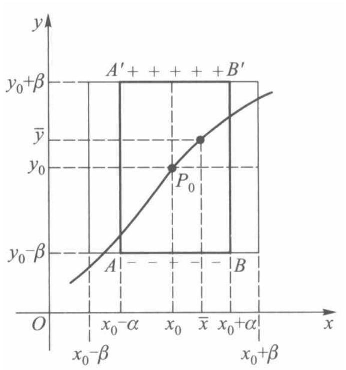

图 1

如图 1所示, 在矩形 $ABB'A'$ 的 AB 边上 F 取负值, 在 $A'B'$ 边上 F 取正值. 因此对 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上每个固定值 $\bar{x}$, 同样有 $F(\bar{x}, y_0-\beta)<0, F(\bar{x}, y_0+\beta)>0$. 根据前已指出的 $F(\bar{x}, y)$ 在 $[y_0-\beta, y_0+\beta]$ 上严格增且连续, 由介值性定理知存在惟一的 $\bar{y} \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$, 满足 $F(\bar{x}, \bar{y})=0$. 由 $\bar{x}$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 中的任意性, 这就证明了存在惟一的一个隐函数 $y=f(x)$, 它的定义域为 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, 值域含于 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$. 若记

$$U(P_0)=(x_0-\alpha, x_0+\alpha)\times(y_0-\beta, y_0+\beta),$$

则 $y=f(x)$ 在 $U(P_0)$ 上满足结论 1° 的各项要求.

再证明 f 的连续性.

对于 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上的任意点 $\bar{x}, \bar{y}=f(\bar{x})$. 由上述结论可知 $y_0-\beta<\bar{y}<y_0+\beta$. 任给 $\varepsilon>0$, 且 ε 足够小, 使得

$$y_0-\beta \leqslant \bar{y}-\varepsilon<\bar{y}<\bar{y}+\varepsilon \leqslant y_0+\beta.$$

由 $F(\bar{x}, \bar{y})=0$ 及 $F(x, y)$ 关于 y 严格递增, 可得 $F(\bar{x}, \bar{y}-\varepsilon)<0, F(\bar{x}, \bar{y}+\varepsilon)>0$. 根据保号性, 知存在 $\bar{x}$ 的某邻域 $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \subset(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, 使得当 $x \in(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ 时同样有

$$F(x, \bar{y}-\varepsilon)<0,\ F(x, \bar{y}+\varepsilon)>0.$$

因此存在惟一的 y, 使得 $F(x, y)=0$, 即 $y=f(x), |y-\bar{y}|<\varepsilon$. 这就证明了当 $|x-\bar{x}|<\delta$ 时, $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$, 即 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 连续. 由 $\bar{x}$ 的任意性, 可得 $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上连续.

□

定理 0.2 (隐函数可微性定理)

设函数 $F(x, y)$ 满足下列条件:

(i) F 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subseteq \mathbf{R}^2$ 上连续;

(ii) $F(x_0, y_0)=0$(通常称为初始条件);

(iii) F 在 D 上存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$;

(iv) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

又设在 D 上还存在连续的偏导数 $F_x(x, y)$, 则由方程 (1) 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上有连续导函数, 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

♡

证明 设 x 与 $x+\Delta x$ 都属于 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, 它们所对应的函数值 $y=f(x)$ 与 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ 都含于 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ 内. 由于

$$F(x, y)=0,\ F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0,$$

因此由 F_x, F_y 的连续性以及二元函数中值定理, 有

$$0=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=F_x(x+\theta \Delta x, y+\theta \Delta y) \Delta x+F_y(x+\theta \Delta x, y+\theta \Delta y) \Delta y,$$

其中 $0<\theta<1$. 因而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x+\theta \Delta x, y+\theta \Delta y)}{F_y(x+\theta \Delta x, y+\theta \Delta y)}.$$

注意到上式右端是连续函数 $F_x(x, y), F_y(x, y)$ 与 $f(x)$ 的复合函数, 而且 $F_y(x, y)$ 在 $U(P_0)$ 上不等于零, 故有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

且 $f'(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上连续.

□

定理 0.3

若

(i) 函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 在以点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 为内点的区域 $D\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$ 上连续;

(ii) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$;

(iii) 偏导数 $F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n},F_y$ 在 D 上存在且连续;

(iv) $F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$.

则

1° 存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subseteq D$, 在 $U(P_0)$ 上方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 惟一地确定了一个定义在 $Q_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域 $U(Q_0)\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的 n 元连续函数 (隐函数)$y=f(x_1,\cdots,x_n)$, 使得当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(Q_0)$ 时,

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in U(P_0),$$

且

$$F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0,$$

$$y^0=f(x_1^0,\cdots,x_n^0);$$

2° $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $U(Q_0)$ 上有连续偏导数 $f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n}$, 而且

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\ f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\ \cdots,\ f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

♡

定理 0.4 (反函数的存在性及其导数)

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域上有连续的导函数 $f'(x)$, 且 $f(x_0)=y_0$, 则在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$ 上的连续可微隐函数 $x=g(y)$, 并称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的导数是

$$g'(y)=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}.$$

♡

证明 考虑方程

$$F(x,y)=y-f(x)=0. \tag{2}$$

由于

$$F(x_0,y_0)=0,\ F_y=1,\ F_x(x_0,y_0)=-f'(x_0),$$

所以只要 $f'(x_0)\neq 0$, 就能满足隐函数存在唯一性定理的所有条件, 这时方程(2)能确定出在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$ 上的连续可微隐函数 $x=g(y)$. 再由隐函数可微性定理可得

$$g'(y)=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}.$$

□

0.1.1 隐函数组

定义 0.2

设有方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

其中 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 为定义在 $V\subseteq\mathbf{R}^4$ 上的 4 元函数. 若存在平面区域 $D,E\subseteq\mathbf{R}^2$, 对于 D 中每一

点 (x,y), 有惟一的 $(u,v)\in E$, 使得 $(x,y,u,v)\in V$, 且满足方程组(??), 则称由方程组(??)确定了**隐函数组**

$$\begin{cases} u=f(x,y), \\ v=g(x,y), \end{cases} \quad (x,y)\in D, \quad (u,v)\in E,$$

并在 D 上成立恒等式

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0, \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0, \end{cases} \quad (x,y)\in D.$$

若还有(??)中的函数 F 与 G 是可微的, 而且由(??)所确定的两个隐函数 u 与 v 也是可微的, 则称

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

为函数 F,G 关于变量 u,v 的**函数行列式** (或**雅可比 (Jacobi) 行列式**), 亦可记作 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

注 若(??)中的函数 F 与 G 是可微的, 而且由(??)所确定的两个隐函数 u 与 v 也是可微的. 那么通过对方程组(??)关于 x,y 分别求偏导数, 得到

$$\begin{cases} F_x+F_u u_x+F_v v_x=0, \\ G_x+G_u u_x+G_v v_x=0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} F_y+F_u u_y+F_v v_y=0, \\ G_y+G_u u_y+G_v v_y=0. \end{cases} \tag{4}$$

要想从(3)解出 u_x 与 v_x, 从(4)解出 u_y 与 v_y, 其充分条件是它们的系数行列式不为零, 即

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\neq 0.$$

定理 0.5

若

(i) $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subseteq \mathbf{R}^4$ 上连续;

(ii) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$(初始条件);

(iii) 在 V 上 F,G 具有一阶连续偏导数;

(iv) $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 不等于零.

则

1° 存在点 P_0 的某一 (四维空间) 邻域 $U(P_0)\subseteq V$, 在 $U(P_0)$ 上方程组(??)惟一地确定了定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某一 (二维空间) 邻域 $U(Q_0)$ 上的两个二元隐函数

$$u=f(x,y),\ v=g(x,y),$$

使得 $u_0=f(x_0,y_0), v_0=g(x_0,y_0)$, 且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时,

$$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),$$

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$

$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0;$$

2° $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续;

3° $f(x,y), g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}. \tag{5}$$

定义 0.3

设函数组

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y) \tag{6}$$

是定义在 xy 平面点集 $B\subset\mathbf{R}^2$ 上的两个函数, 对每一点 $P(x,y)\in B$, 由方程组(6)有 uv 平面上惟一的一点 $Q(u,v)\in\mathbf{R}^2$ 与之对应. 我们称方程组(6)确定了 B 到 $\mathbf{R}^2$ 的一个**映射 (变换)**, 记作 T. 这时映射(6)可写成如下函数形式:

$$T:B\to\mathbf{R}^2,$$

$$P(x,y)\mapsto Q(u,v)$$

或写成点函数形式 $Q=T(P), P\in B$, 并称 $Q(u,v)$ 为映射 T 下 $P(x,y)$ 的**象**, 而 P 则是 Q 的**原象**. 记 B 在映射 T 下的象集为 $B'=T(B)$.

反过来, 若 T 为一一映射 (即不仅每一原象只对应一个象, 而且不同的原象对应不同的象). 这时每一点 $Q\in B'$, 由方程组(6)都有惟一的一点 $P\in B$ 与之相对应. 由此所产生的新映射称为映射 T 的**逆映射 (逆变换)**, 记作 T^{-1}, 即

$$T^{-1}:B'\to B,$$

$$Q\mapsto P$$

或

$$P=T^{-1}(Q), Q\in B'.$$

亦即存在定义在 B' 上的一个函数组

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v), \tag{7}$$

把它代入(6)而成为恒等式:

$$u\equiv u(x(u,v),y(u,v)),\ v\equiv v(x(u,v),y(u,v)), \tag{8}$$

这时我们又称函数组(7)是函数组(6)的**反函数组**.

定理 0.6

设函数组

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y) \tag{9}$$

及其一阶偏导数在某区域 $D\subseteq\mathbf{R}^2$ 上连续, 点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点, 且

$$u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0,$$

则在点 $P_0'(u_0,v_0)$ 的某一邻域 $U(P_0')$ 上存在惟一的一组反函数

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v), \tag{10}$$

使得 $x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0)$, 且当 $(u,v)\in U(P_0')$ 时, 有

$$(x(u,v),y(u,v))\in U(P_0)$$

以及恒等式

$$u \equiv u(x(u,v), y(u,v)),\ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)).$$

此外, 反函数组(10)在 $U(P_0')$ 上存在连续的一阶偏导数, 且

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

由上式看到: 互为反函数组的(9)与(10), 它们的雅可比行列式互为倒数, 即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

♡