

0.1 群集合上的作用

定义 0.1 (群作用)

设 G 是一个群, X 是一个非空集合. 若 $G \times X$ 到 X 的映射 f 满足

- (1) $f(e, x) = x, \forall x \in X, e$ 为 G 的么元;
- (2) $f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)), \forall g_1, g_2 \in G, x \in X,$

则称 f 决定了群 G 在 X 上的一个作用.

群 G 可以多种方式作用在一个集合 X 上. 在不需要特别指出映射 f (即固定好一种作用方式) 时, 常记

$$f(g, x) = g(x), \quad \forall g \in G, x \in X.$$

此时 f 满足的条件 (1), (2) 相应地变为

- (1) $e(x) = x, \forall x \in X, e$ 为 G 的么元;
- (2) $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall x \in X, g_1, g_2 \in G.$



定义 0.2

1. 设 G 是一个群, 取 $X = G$,

- (a). 若定义 f 为

$$f(g, x) = L_g(x) = gx, \quad \forall g, x \in G.$$

则 f 定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为左平移作用.

- (b). 若定义 f_1 为

$$f_1(g, x) = R_{g^{-1}}(x) = xg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则 f_1 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为右平移作用.

- (c). 若定义 f_2 为

$$f_2(g, x) = \text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G,$$

则 f_2 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 称为伴随作用.

2. 设 H 为群 G 的子群, 取 $X = G/H$ (H 在 G 中全体左陪集的集合). 定义 f 为

$$f(g, xH) = gxH, \quad \forall g \in G, xH \in G/H,$$

则 f 定义了 G 在 G/H 上的作用 (左平移作用). 特别地, 当 $H = \{e\}$ 时, f 恰是 G 在 G 上的左平移作用.



证明



定义 0.3

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$, 使 $y = g(x)$, 则称 G 在 X 上的作用是可递的, X 称为 (对于 G 的) 齐性空间.



定义 0.4

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $g(x) = x (\forall g \in G, \forall x \in X)$, 则称 G 在 X 上的作用是平凡的.



注 显然, 对任意群 G , 任意非空集合 X , 总可定义 G 在 X 上的平凡作用. 由上述定义知 G 在 G 上的伴随作用为平凡作用当且仅当 G 为 Abel 群.

定义 0.5

设群 G 作用在集合 X 上, e 为 G 的幺元, 若当且仅当 $g = e$ 时, $g(x) = x (\forall x \in X)$ 成立, 则称 G 在 X 上的作用是有效的.

命题 0.1

群 G 在 G 上的左平移作用与右平移作用既是可递的又是有效的, 而 G 在 G/H 上的左平移作用是可递的.



注 G 在 G 上的伴随作用的可递性与有效性都不能肯定.

G 在 G/H 上的左平移作用不一定是有效的.

证明

定理 0.1

设群 G 作用在集合 X 上. $\forall g \in G$, 定义 X 到 X 的映射 σ 满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X \quad (1)$$

定义的 σ_g 是 X 的可逆变换, 即 $\sigma_g \in S_X$.

定义的 G 到 S_X 的映射 σ 满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \quad \forall g \in G.$$

则 σ 是一个同态映射, 并且 G 在 X 上的作用有效当且仅当 σ 是单同态.

反之, 若 σ 是群 G 到集合 X 的置换群 S_X 的同态, 则由

$$g(x) = \sigma(g)(x), \quad \forall g \in G, x \in X \quad (2)$$

定义了 G 在 X 的作用, 此时 $\sigma_g = \sigma(g)$.



证明 任取 $g \in G$, 由式(1)有

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

同样有

$$\sigma_g\sigma_{g^{-1}}(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

故

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g = \sigma_g\sigma_{g^{-1}} = \text{id}_X,$$

因而 $\sigma_g \in S_X$ 且 $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}$.

又取 $g_1, g_2 \in G$, 对 $\forall x \in X$ 有

$$\sigma(g_1g_2)(x) = \sigma_{g_1g_2}(x) = g_1g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) = \sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x),$$

即

$$\sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

因而 σ 是 G 到 S_X 的同态. 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \sigma_g = \text{id}_X,$$

即

$$g(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

故 G 在 X 上作用有效当且仅当 $\ker \sigma = \{e\}$, 即 σ 是单射.

反之, 因 σ 是 G 到 S_X 的同态, 由式(2)有

$$e(x) = \sigma(e)(x) = \text{id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

$$g_1(g_2(x)) = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)(x)) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)(x) = \sigma(g_1g_2)(x) = g_1g_2(x), \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G,$$

即 σ 定义了 G 在 X 上的作用. 显然 $\sigma(g) = \sigma_g$.

□

定义 0.6

设群 G 作用在集合 X 上, $x \in X$. 称 X 中的子集

$$O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}$$

为 x 的轨道.

G 中子集

$$F_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

称为 x 的迷向子群.

◆

证明

□

例题 0.1 设 $X = \mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, $G = SO(n)$ 为 X 的特殊正交群, G 以通常方式作用在 X 上. 又设 $X = (1, 0, \dots, 0)'$, 则易得

$$O_x = \{y \mid y \in X, |y| = 1\} = S^{n-1}$$

是 X 中 $n-1$ 维单位球面, 其中, $|y|$ 为向量 y 的长度,

$$F_x = \{\text{diag}(1, A) \mid A \in SO(n-1)\},$$

故 F_x 与 $n-1$ 维特殊正交群 $SO(n-1)$ 同构.

证明

□

命题 0.2

设群 G 在 X 上的作用可递, $x \in X$, 则 $X = O_x$.

◆

证明 由 G 在 X 上的作用可递知, 对 $\forall y \in X$, 存在 $g \in G$, 使 $y = g(x) \in O_x$. 又 $O_x \subseteq X$, 故 $X = O_x$.

□

定理 0.2

设群 G 作用在集合 X 上, 定义 X 上的可逆变换 σ 满足

$$\sigma_g(x) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

定义的 G 到 S_X 的同态 σ 满足

$$\sigma(g) = \sigma_g, \quad \forall g \in G.$$

则有

- (1) 在 X 中定义关系 R : xRy 当且仅当 $\exists g \in G$, 使 $y = g(x)$, 则 R 为等价关系且 x 所在的等价类为 x 的轨道 O_x , 进而 X 等价类(所有轨道)集合是 X 的一个分划, 即可将 X 分解为所有不同的轨道之并, 且不同的轨道必互不相交;
- (2) G 在 O_x 上的作用是可递的, $\ker \sigma \triangleleft G$, G 在 O_x 上作用有效当且仅当 F_x 中所包含的 G 的正规子群仅为 $\{e\}$;

(3) 若 $y = g(x)$ ($x, y \in X, g \in G$), 则

$$F_{g(x)} = F_y = gF_xg^{-1} = \text{ad}g(F_x).$$



注 这个定理说明, 若群 G 作用在集合 X 上, 则可将 X 分解为轨道之并. 不同的轨道互不相交. G 在每个轨道上的作用是可递的, 是否有效则由迷向子群所含 G 的正规子群来决定.

证明

- (1) 对 $\forall x, y, z \in X$, 由 $e(x) = x$ 知 xRx ($\forall x \in X$), 由 $g(x) = y$ 得 $g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$, 即 $xRy \Rightarrow yRx$. 再由 xRy, yRz 知 $\exists g_1, g_2 \in G$, 使得 $y = g_1(x), z = g_2(y)$, 故 $z = g_2g_1(x)$, 即 xRz . 这就说明 R 是等价关系, 由 R 的定义知 x 的等价类为 O_x .
- (2) 由结论(1)知 $\forall z, y \in O_x$, 即 xRy, xRz , 从而 zRy . 因而 $\exists g \in G$, 使 $g(y) = z$. 故 G 在 O_x 上的作用可递得证. 设 σ 为 G 到 S_{O_x} 的映射, 满足 $\sigma(g)y = g(y)$ ($\forall y \in O_x$). 于是由定理 0.1 知 σ 是同态且 G 在 O_x 上作用有效当且仅当 $\ker \sigma = \{e\}$. 由群的同态基本定理??知道 $\ker \sigma \triangleleft G$. 注意到

$$g \in \ker \sigma \iff \sigma(g) = \text{id}_{O_x} \iff g(x) = x (\forall x \in X) \iff g \in F_x. \quad (3)$$

故 $\ker \sigma \subseteq F_x$, 因而若 F_x 中所含 G 的正规子群仅为 $\{e\}$, 则必有 $\ker \sigma = \{e\}$. 从而 G 在 O_x 上作用有效.

设 $N \triangleleft G, N \subseteq F_x$. 任取 $h \in N$, 对 $\forall y \in O_x$, 都存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 由 $N \triangleleft G$ 知 $g^{-1}hg \in N \subseteq F_x$, 因而

$$h(y) = h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(g^{-1}hg(x)) = g(x) = y, \quad \forall y \in O_x.$$

由(3)式知 $h \in \ker \sigma$, 即 $N \subseteq \ker \sigma$. 所以若 G 在 O_x 上作用有效, 则 $\ker \sigma = \{e\}$, 由此知 $N = \{e\}$, 即 $\{e\}$ 为 F_x 所包含的唯一的 G 的正规子群.

- (3) 设 $g(x) = y$ 且 $g_1 \in F_y$, 即有 $y = g_1(x)$, 则 $g_1g(x) = g(x)$, 因而 $g_2 = g^{-1}g_1g \in F_x$, 故 $g_1 = gg_2g^{-1} \in \text{ad}g(F_x)$. 反之, 若 $g_2 \in F_x$, 则有

$$gg_2g^{-1}(y) = gg_2g^{-1}(g(x)) = g(x) = y,$$

故 $gg_2g^{-1} \in F_y$. 这样就证明了 $F_y = \text{ad}g(F_x)$.



定义 0.7

设群 G 作用在集合 X 与 X' 上, 若有 X 到 X' 上的一一对应 ϕ , 使

$$g(\phi(x)) = \phi(g(x)), \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称 G 在 X, X' 上的作用等价.



注 如果将 g 引起的 X, X' 上的置换仍以 g 来表示, 那么 G 在 X, X' 上的作用等价也就是对任何 $g \in G$, 图 1 是交换图.

如果在 G 作用的集合之间规定关系 $R : XRX'$, 若 G 在 X, X' 上作用等价. 这显然是一个等价关系, 因而从抽象的观点来看, 等价作用可以看成是一样的.

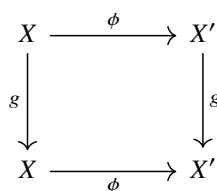


图 1

定理 0.3

设群 G 在 X 上的作用可递, $x \in X$, 则 G 在 X 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用(左平移作用)等价.



注 这个定理表明 G 在每个轨道上的作用相当于 G 在某个左陪集空间上的作用.

证明 因 G 在 X 上的作用可递, 于是由命题 0.2 有

$$X = O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

作 G/F_x 到 X 的映射 ϕ 如下:

$$\phi(gF_x) = g(x), \quad \forall g \in G.$$

显然 ϕ 是满射. 由于 $g_1F_x = g_2F_x$ 当且仅当 $g_1^{-1}g_2 \in F_x$, 当且仅当 $g_1^{-1}g_2(x) = x$, 当且仅当 $g_1(x) = g_2(x)$, 因而 ϕ 是单射. 故 ϕ 是 G/F_x 到 X 上的一一对应. 又对 $\forall h \in G$ 有

$$\phi(h(gF_x)) = \phi(hgF_x) = hg(x) = h(\phi(gF_x)),$$

故 G 在 G/F_x 与 X 上的作用等价.

□

推论 0.1

设有限群 G 作用在集合 X 上, O_x 为 $x \in X$ 的轨道, 则 O_x 中元素个数 $|O_x| = [G : F_x]$, 因而 $|O_x| \mid |G|$.

♡

证明 由定理 0.2(1) 知 G 在 O_x 上作用可递, 故由定理 0.3 知, G 在 X 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用等价, 即存在 X 到 G/F_x 的双射. 因此 $|O_x| = [G : F_x]$. 再由 Lagrange 定理知

$$|G| = [G : F_x] |F_x| = |O_x| |F_x|,$$

故 $|O_x| \mid |G|$.

□

命题 0.3

设 G 是一个群, 在伴随作用下, 对 $\forall g \in G$, 定义 G 上的变换 $\text{ad}g$ 满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义 G 到 S_G 的映射 ad 满足

$$\text{ad} : g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

则 ad 是 G 到 S_G 的同态.

◆

证明 由定义 0.2 与定理 0.1 知映射 $\text{ad}g$ 是 G 的可逆变换, 即 $\text{ad} \in S_G$, 并且映射 ad 是 G 到 S_G 的同态.

□

定义 0.8

设 G 是一个群, $g \in G$, g 在伴随作用下的轨道称为以 g 为代表的共轭类, 记为 C_g . 若 $h \in C_g$, 则称 h 与 g 共轭.

g 在伴随作用下的逆像子群, 称为 g 在 G 中的中心化子, 记作 $C_G(g)$. 在不混淆时, 简称为 g 的中心化子, 记作 $C(g)$.

在伴随作用下, 对 $\forall g \in G$, 定义 G 上的可逆变换 $\text{ad}g$ 满足

$$\text{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义 G 到 S_G 的同态 ad 满足

$$\text{ad} : g \rightarrow \text{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

称 $\ker \text{ad}$ 为 G 的中心, 记作 $C(G)$.

♣

定理 0.4

设 G 是一个群, 在伴随作用下, $g \in G$, 则有

- (1) $C_g = \{kgk^{-1} \mid k \in G\}$;
- (2) $g, h \in G$ 共轭 $\iff \exists k \in G$, 使 $h = kgk^{-1}$;
- (3) $C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}$;
- (4) $C(G) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}$.

**证明**

(1) 由定义知

$$C_g = \{\text{ad}k(g) \in G \mid k \in G\} = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\}.$$

(2) 由结论(1)知

$$C_g = \{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\},$$

则

$$g, h \in G \text{ 共轭} \iff h \in C_g \iff \exists k \in G, \text{ 使 } h = kgk^{-1}.$$

(3) 由定义知

$$C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid \text{ad}k(g) = g\} = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\} = \{k \in G \mid kg = gk\}.$$

(4) 由定义知

$$\begin{aligned} C(G) &= \ker \text{ad} = \{k \in G \mid \text{ad}(k) = \text{id}_G\} = \{k \in G \mid \text{ad}k = \text{id}_G\} \\ &= \{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}. \end{aligned}$$

□

定理 0.5

设 G 是一个群, 则有

- (1) $C(G)$ 是 G 的正规子群且 $\text{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构;
- (2) G 中共轭关系为等价关系, 因而 G 的共轭类的集合是 G 的一个分划;
- (3) 若 G 是有限群, $g \in G$, 则 g 的共轭类 C_g 中所含元素个数 $|C_g| = [G : C(g)]$, 故是 $|G|$ 的因数;
- (4) $h \in C(G) \iff |C_h| = 1 \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g)$.

**证明**

(1) 由定理 0.2(2) 知 $C(G) \triangleleft G$. 再由群的同态基本定理 ?? 知 $\text{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构.

(2) 由定理 0.2(1) 即得.

(3) 由推论 0.1 即得.

(4) 由定理 0.4 可得

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff ghg^{-1} = h, \forall g \in G \iff C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} = \{h\} \iff |C_h| = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \iff hg = gh, \forall g \in G \\ &\iff h \in \{k \in G \mid kg = gk\}, \forall g \in G \iff h \in C(g), \forall g \in G \iff h \in \bigcap_{g \in G} C(g). \end{aligned}$$

□

定理 0.6

设 H 是群 G 的子群, 则

- (1) $\forall g \in G, H_1 = gHg^{-1}$ 也是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群;
- (2) 群 G 的子集 $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ 也是 G 的子群, 而且 $H \triangleleft N_G(H)$, $N_G(H)$ 称为 H 在 G 中的正规化子, 也简称为 H 的正规化子.

**证明**

- (1) 以 e 表示 G 的幺元. 因为 $e = geg^{-1} \in H_1$, 故 $H_1 \neq \emptyset$. 设 $h_1, h_2 \in H$, 于是

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1}, (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in H_1.$$

由此知 H_1 是 G 的子群.

- (2) G 在 G 的伴随作用下, H 的逆像子群恰为 $N_G(H)$, 故 $N_G(H)$ 是 G 的子群. 因 H 是 G 的子群且 $H \subseteq N_G(H)$, 故 H 是 $N_G(H)$ 的子群. 又 $\forall g \in N_G(H), gHg^{-1} = H$, 因此 $H \triangleleft N_G(H)$.

**定理 0.7**

设 H 是群 G 的子群, 则

- (1) G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$;
- (2) $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$.

**证明**

- (1) 设 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的映射 f , 满足

$$f(gHg^{-1}) = gN_G(H), \quad \forall g \in G.$$

显然 f 是满射. 因为 $gHg^{-1} = g_1Hg_1^{-1}$ 当且仅当 $H = g^{-1}g_1H(g^{-1}g_1)^{-1}$ 当且仅当 $g^{-1}g_1 \in N_G(H)$ 当且仅当 $gN_G(H) = g_1N_G(H)$, 所以 f 是单射. 因此 f 是 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的双射. 从而 G 中与 H 共轭的子群的个数与 $|G/N|$ 相等, 即 G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$.

- (2) 因为 $H \triangleleft G$ 当且仅当 $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$, 所以由 $N_G(H)$ 的定义知 $N_G(H) = G$.

