实变函数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合之间的运算

定理 1.1

设有集合 A, B 与 C, 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

♡

定义 1.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 存在\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 对一切\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

♣

定理 1.2

1. 交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.
2. 分配律:

(i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;

(ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$.

♡

定义 1.2

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A - B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的 "大" 集合 X 的子集, 我们称 X 为全集. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

命题 1.1 (集合的差与补的基本性质)

1. $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, (A^c)^c = A, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.
2. $A - B = A \cap B^c$.
3. 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subset B^c$.

定理 1.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

证明 以 (i) 为例. 若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说, 对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$. 故得 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

反之, 若 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 则对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

□

定义 1.3 (集合的对称差)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

命题 1.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.
(ii) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$.
(iii) 结合律:$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(v) $A^c \triangle B^c = A \triangle B; A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.
(vi) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E \triangle A = B$（实际上 $E = B \triangle A$）.

定义 1.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$.

定义 1.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j=1,2,\cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 1.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}\,(E\setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}}\,(E\setminus A_k).$$

定理 1.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{对任一自然数} j, \text{存在} k(k \geqslant j), x \in A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j \text{且} k \in \mathbb{N}\ s.t.\ x \in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{存在自然数} j_0, \text{当} k \geqslant j_0 \text{ 时}, x \in A_k\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 \text{且} k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k.$$

证明 以 (ii) 为例. 若 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 反之, 若存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$.

由 (i) (ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k.$$

□

定义 1.6 (直积集)

设 X,Y 是两个集合, 称一切有序“元素对” (x,y)（其中 $x\in X, y\in Y$）形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X\times Y$, 即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

其中 $(x,y)=(x',y')$ 是指 $x=x', y=y'$.$X\times X$ 也记为 X^2.

1.2 映射与基数

定义 1.7 (映射的像集)

对于 $f:X\to Y$ 以及 $A\subset X$, 我们记

$$f(A)=\{y\in Y:x\in A,y=f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的 **(映) 像集**（$f(\varnothing)=\varnothing$）.

命题 1.4 (映射的像集的基本性质)

对于 $f:X\to Y$, 我们有

(i) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)\,(A_\alpha\in X,\alpha\in I)$;

(ii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)\,(A_\alpha\in X,\alpha\in I)$.

定义 1.8 (映射的原像集)

对于 $f:X\to Y$ 以及 $B\subset Y$, 我们记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**.

命题 1.5 (映射的原像集的基本性质)

对于 $f:X\to Y$, 我们有

(i) 若 $B_1\subset B_2$, 则 $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$（$A\subset Y$）;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha\subset Y,\alpha\in I$）;

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha\subset Y,\alpha\in I$）;

(iv) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$（$B\subset Y$）.

定义 1.9 (示性函数)

一般地, 对于 X 中的子集 A, 我们作

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

且称 $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**或**示性函数**.

命题 1.6 (示性函数的基本性质)

对于 X 中的子集 A,B, 我们有

(i) $A \neq B$ 等价于 $\chi_A \neq \chi_B$.

(ii) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

(iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$.

(v) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1-\chi_B(x))$.

(vi) $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

定义 1.10 (幂集)

设 X 是一个非空集合, 由 X 的一切子集（包括 $\varnothing, X$ 自身）为元素形成的集合称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathcal{P}(X)$.

笔记 例如, 由 n 个元素形成的集合 E 之幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

例题 1.1 单调映射的不动点 设 X 是一个非空集合, 且有 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A\subset B$ 的任意 A,B, 必有 $f(A)\subset f(B)$, 则存在 $T\subset\mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T)=T$.

证明 作集合 S,T:

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且} A \subset f(A)\},$$
$$T = \bigcup_{A\in S} A(\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T)=T$.

事实上, 因为由 $A\in S$ 可知 $A\subset f(A)$, 从而由 $A\subset T$ 可得 $f(A)\subset f(T)$. 根据 $A\in S$ 推出 $A\subset f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A\in S} A \subset f(T), \quad T\subset f(T).$$

另一方面, 又从 $T\subset f(T)$ 可知 $f(T)\subset f(f(T))$. 这说明 $f(T)\in S$, 我们又有 $f(T)\subset T$. □

定义 1.11 (集合之间的对等关系)

设有集合 A 与 B. 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射, 则称集合 A 与 B **对等**, 记为 $A\sim B$.

命题 1.7 (对等关系的基本性质)

设有集合 A 与 B, 则

(i) $A\sim A$;

(ii) 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$;

(iii) 若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$.

引理 1.1 (映射分解定理)

若有 $f:X\to Y, g:Y\to X$, 则存在分解

$$X = A\cup A^{\sim}, \quad Y = B\cup B^{\sim},$$

其中 $f(A)=B, g(B^{\sim})=A^{\sim}, A\cap A^{\sim}=\varnothing$ 以及 $B\cap B^{\sim}=\varnothing$.

证明 对于 X 中的子集 E（不妨假定 $Y\setminus f(E)\neq\varnothing$）, 若满足

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing,$$

则称 E 为 X 中的分离集. 现将 X 中的分离集的全体记为 Γ, 且作其并集

$$A=\bigcup_{E\in\Gamma} E.$$

我们有 $A\in\Gamma$. 事实上, 对于任意的 $E\in\Gamma$, 由于 $A\supset E$, 故从

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing$$

可知 $E\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$, 从而有 $A\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$. 这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元.

现在令 $f(A)=B, Y\setminus B=B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim})=A^{\sim}$. 首先知道

$$Y=B\cup B^{\sim}.$$

其次, 由于 $A\cap A^{\sim}=\varnothing$, 故又易得 $A\cup A^{\sim}=X$. 事实上, 若不然, 那么存在 $x_0\in X$, 使得 $x_0\notin A\cup A^{\sim}$. 现在作 $A_0=A\cup\{x_0\}$, 我们有

$$B=f(A)\subset f(A_0),\quad B^{\sim}\supset Y\setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim}\supset g(Y\setminus f(A_0))$. 这就是说,$A$ 与 $g(Y\setminus f(A_0))$ 不相交. 由此可得

$$A_0\cap g(Y\setminus f(A_0))=\varnothing.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾. □

定理 1.5 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等,Y 与 X 的某个真子集对等, 则 $X\sim Y$. ♡

笔记 特例: 设集合 A,B,C 满足下述关系:

$$C\subset A\subset B.$$

若 $B\sim C$, 则 $B\sim A$.

证明 由题设知存在单射 $f:X\to Y$ 与单射 $g:Y\to X$, 根据映射分解定理知

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},\quad f(A)=B,\quad g(B^{\sim})=A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f:A\to B$ 以及 $g^{-1}:A^{\sim}\to B^{\sim}$ 是一一映射, 因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A,\\ g^{-1}(x), & x\in A^{\sim}.\end{cases}$$

这说明 $X\sim Y$. □

定义 1.12 (集合的基数 (或势))

设 A,B 是两个集合, 如果 $A\sim B$, 那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的, 记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 可见, 凡是互相对等的集合均具有相同的基数.

如果用 α 表示这一相同的基数, 那么 $\overline{\overline{A}}=\alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B, 记 $\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β, 记为

$$\alpha\leqslant\beta.$$

若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则称 α 小于 β（或 β 大于 α）, 记为

$$\alpha<\beta\quad(\text{或}\beta>\alpha).$$

显然, 若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\beta\leqslant\alpha$, 则由Cantor - Bernstein 定理可知 $\alpha=\beta$. ♣

定义 1.13 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合. 如果存在自然数 n, 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 为**有限集**, 且用同一符号 n 记 A 的基数. 由此可见, 对于有限集来说, 其基数可以看作集合中元素的数目. 若一个集合不是有限集, 则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数. ♣

定义 1.14 (自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数 · 可列集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$（读作阿列夫（Aleph, 希伯来文）零）. 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$, 则 A 叫作**可列集**. 这是由于 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 而 $A \sim \mathbb{N}$, 故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来, 附以下标, 就有

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

♣

定理 1.6

任一无限集 E 必包含一个可列子集.

♡

笔记 这个定理说明, 在众多的无限集中, 最小的基数是 $\aleph_0$.

证明 任取 E 中一元, 记为 a_1; 再从 $E \setminus \{a_1\}$ 中取一元, 记为 $a_2, \cdots$. 设已选出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 因为 E 是无限集, 所以

$$E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing.$$

于是又从 $E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中可再选一元, 记为 a_{n+1}. 这样, 我们就得到一个集合

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集. □

定理 1.7

设 A 是无限集且其基数为 α. 若 B 是至多可列集, 则 $A \cup B$ 的基数仍为 α.

♡

证明 不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$,$A \cap B = \varnothing$, 且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

我们作映射 f 如下:

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad a_i \in A_1;$$
$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad b_i \in B;$$
$$f(x) = x, \quad x \in A_2.$$

显然,f 是 $A \cup B$ 到 A 上的一一映射. □

定理 1.8

集合 A 为无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等.

♡

证明 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取 A 中一个非空有限子集 B, 则由定理 1.7立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{((A \setminus B) \cup B)}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故 $A \sim (A \setminus B)$. □

定理 1.9

$[0, 1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 不是可数集.

♡

证明 只需讨论 $(0, 1]$. 为此, 采用二进位制小数表示法:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1. 显然,$(0, 1]$ 与全体二进位制小数一一对应.

若在上述表示式中把 $a_n=0$ 的项舍去, 则得到 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}$, 这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1=n_1,\quad k_i=n_i-n_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$, 则 $(0,1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应.

现在假定 $(0,1]$ 是可数的, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{aligned}&(k_1^{(1)},k_2^{(1)},\cdots,k_i^{(1)},\cdots),\\&(k_1^{(2)},k_2^{(2)},\cdots,k_i^{(2)},\cdots),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_i^{(i)},\cdots),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

但这是不可能的, 因为 $(k_1^{(1)}+1,k_2^{(2)}+1,\cdots,k_i^{(i)}+1,\cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$, 而它并没有被排列出来. 这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的, 也就是说 $(0,1]$ 是不可数集. □

定义 1.15 ($\mathbb{R}$ 的基数 · 不可数集)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$). ♣

笔记 易知 $\overline{\overline{\mathbb{R}}}=c=\aleph_1$.

定理 1.10

设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 A_k 的基数都是连续基数, 则其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 的基数是连续基数. ♡

证明 不妨假定 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$, 且 $A_k\sim[k,k+1)$, 我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\sim[1,+\infty)\sim\mathbb{R}.$$

□

定理 1.11 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合, 则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$(由 A 的一切子集所构成的集合族)不对等. ♡

笔记 易知集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等, 即存在一一映射 $f:A\to\mathcal{P}(A)$. 我们作集合

$$B=\{x\in A:x\notin f(x)\},$$

于是有 $y\in A$, 使得 $f(y)=B\in\mathcal{P}(A)$. 现在分析一下 y 与 B 的关系:

(i) 若 $y\in B$, 则由 B 的定义可知 $y\notin f(y)=B$;

(ii) 若 $y\notin B$, 则由 B 的定义可知 $y\in f(y)=B$.

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射, 即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的. □

1.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

1.3.1 点集的直径、点的 (球) 邻域、矩体

定义 1.16 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的运算)

记一切有序数组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的全体为 $\mathbb{R}^n$, 其中 $\xi_i\in\mathbb{R}$（$i=1,2,\cdots,n$）是实数, 称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标, 并定义运算如下:

(i) 加法: 对于 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 以及 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, 令

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n);$$

(ii) 数乘: 对于 $\lambda\in\mathbb{R}$, 令 $\lambda x=(\lambda\xi_1,\cdots,\lambda\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

在上述两种运算下构成一个向量空间. 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 记

$$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),$$

其中除第 i 个坐标为 1, 外其余皆为 0.$e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的基底, 从而 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的 n 维向量空间, 并称 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**向量**或**点**. 当每个 ξ_i 均为有理数时,$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 称为**有理点**. ♣

定义 1.17

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$|x|=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的**模**或**长度**. ♣

命题 1.8 (向量的模的性质)

设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

(i) $|x|\geqslant 0,|x|=0$ 当且仅当 $x=(0,\cdots,0)$;

(ii) 对任意的 $a\in\mathbb{R}$, 有 $|ax|=|a||x|$;

(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(iv) 设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, 则有

$$(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)^2\leqslant(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2).$$

♠

证明 (i),(ii) 的结论是明显的;(iii) 是 (iv) 的推论. 因此我们只证明 (iv).

只需注意到函数

$$f(\lambda)=(\xi_1+\lambda\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n+\lambda\eta_n)^2$$

是非负的（对一切 λ）, 由 λ 的二次方程 $f(\lambda)$ 的判别式小于或等于零即得.(iv) 就是著名的 Cauchy - Schwarz 不等式. □

定义 1.18 (距离空间)

一般地说, 设 X 是一个集合. 若对 X 中任意两个元素 x 与 y, 有一个确定的实数与之对应, 记为 $d(x,y)$, 它满足下述三条性质:

(i) $d(x,y)\geqslant 0$,$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则认为在 X 中定义了距离 d, 并称 (X,d) 为**距离空间**. ♣

笔记 因而 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 其中 $d(x,y)=|x-y|$. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为**n 维欧氏空间**.

定义 1.19 (点集的直径与有界集)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合, 令

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\},$$

称为点集 E 的**直径**. 若 $\operatorname{diam}(E) < +\infty$, 则称 E 为**有界集**.

命题 1.9 (有界集的充要条件)

E 是有界集的充要条件是, 存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in E$ 都满足 $|x| \leqslant M$.

证明 由有界集的定义易得. □

定义 1.20 (点的 (球) 邻域)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 称点集

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的**开球**, 也称为 x_0 的 **(球) 邻域**, 记为 $B(x_0, \delta)$, 从而称

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

为**闭球**, 记为 $C(x_0, \delta)$.$\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的球面是

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \delta\}.$$

定义 1.21 (矩体)

设 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆为实数, 且 $a_i < b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 称点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : a_i < \xi_i < b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开矩体**（$n = 2$ 时为矩形,$n = 1$ 时为区间）, 即直积集

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

类似地,$\mathbb{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],$$

称 $b_i - a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为**矩体的边长**. 若各边长都相等, 则称矩体为**方体**.
矩体也常用符号 I, J 等表示, 其**体积**用 $|I|,|J|$ 等表示.

命题 1.10 (矩体的直径与体积)

若 $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, 则

$$\operatorname{diam}(I) = [(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

定义 1.22

设 $x_k \in \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - x| = 0,$$

则称 $x_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**收敛（于 x 的）点列**, 称 x 为它的**极限**, 并简记为

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

定义 1.23 (Cauchy 列)

称 $\{x_k\}$ 为 **Cauchy 列**或**基本列**, 若 $\lim\limits_{l,m\to\infty}|x_l - x_m| = 0$. 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $k, l > N$ 时, 有

$$|x_k - x_l| < \varepsilon.$$

定理 1.12

$x_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是收敛列的充分必要条件是 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 即

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l - x_m| = 0.$$

证明 若令 $x_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}\}, x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i| \leqslant |x_k - x| \leqslant |\xi_1^{(k)} - \xi_1| + \cdots + |\xi_n^{(k)} - \xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立. 故可知 $x_k(k = 1, 2, \cdots)$ 收敛于 x 的充分必要条件是, 对每个 i, 实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i. 由此根据实数列收敛的 Cauchy 收敛准则可知结论成立. □

1.3.2 点集的极限点

定义 1.24 (极限点、导集与完全集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$. 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k - x| = 0,$$

则称 x 为 E 的**极限点**或**聚点**.E 的极限点全体记为 E', 称为 E 的**导集**.

若 $E = E'$, 则 E 称为**完全集**.

笔记 显然, 有限集是不存在极限点的.

定理 1.13 (一个点是极限点的充要条件)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $x \in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 有

$$(B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing.$$

证明 若 $x \in E'$, 则存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$|x_k - x| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

从而对任意的 $\delta > 0$, 存在 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $|x_k - x| < \delta$, 即

$$x_k \in B(x, \delta) \quad (k \geqslant k_0).$$

反之, 若对任意的 $\delta > 0$, 有 $(B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$, 则令 $\delta_1 = 1$, 可取 $x_1 \in E, x_1 \neq x$ 且 $|x - x_1| < 1$. 令

$$\delta_2 = \min\left(|x - x_1|, \frac{1}{2}\right),$$

可取 $x_2 \in E, x_2 \neq x$ 且 $|x - x_2| < \delta_2$. 继续这一过程, 就可得到 E 中互异点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x - x_k| < \delta_k$, 即

$$\lim_{k\to\infty}|x - x_k| = 0.$$

这说明 $x \in E'$. □

定义 1.25 (孤立点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 中的点 x 不是 E 的极限点, 即存在 $\delta > 0$, 使得

$$(B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap E = \varnothing,$$

则称 x 为 E 的**孤立点**, 即 $x \in E \setminus E'$.

定理 1.14 (导集的性质)

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$.

证明 因为 $E_1 \subset E_1 \cup E_2$,$E_2 \subset E_1 \cup E_2$, 所以

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)',$$

从而有 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$. 反之, 若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$, 则存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

显然, 在 $\{x_k\}$ 中必有互异点列 $\{x_{k_i}\}$ 属于 E_1 或属于 E_2, 而且

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x.$$

在 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 时, 有 $x \in E_1'$, 否则 $x \in E_2'$. 这说明

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'.$$

□

定理 1.15 (Bolzano - Weierstrass 定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

证明 首先从 E 中取出互异点列 $\{x_k\}$. 显然,$\{x_k\}$ 仍是有界的, 而且 $\{x_k\}$ 的第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个坐标所形成的实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是有界数列. 其次, 根据 $\mathbb{R}^1$ 的 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 从 $\{x_k\}$ 中可选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$, 使得 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第一个坐标形成的数列是收敛列; 再考查 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第二个坐标形成的数列, 同理可从中选出 $\{x_k^{(2)}\}$, 使其第二个坐标形成的数列成为收敛列, 此时其第一坐标数列仍为收敛列（注意, 收敛数列的任一子列必收敛于同一极限）, ……至第 n 步, 可得到 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_k^{(n)}\}$, 其一切坐标数列皆收敛, 从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是收敛点列, 设其极限为 x. 由于 $\{x_k^{(n)}\}$ 是互异点列, 故 x 为 E 的极限点. □

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

1.4.1 闭集

定义 1.26 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \supset E'$（即 E 包含 E 的一切极限点）, 则称 E 为**闭集**（这里规定空集为闭集）. 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**（E 为闭集就是 $E = \overline{E}$）.

定义 1.27 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 1.16 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;
(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F = \bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集.
(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n(\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = (0, 1]$. 此例还说明

$$[0,1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0,1]\,.$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}\end{aligned}$$

可知, 若 F_1, F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$. 即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 1.17 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k,F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切}\, k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

1.4.2 开集

定义 1.28 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 1.18 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G=\bigcap_{k=1}^{m} G_k$ 是开集（有限个开集的交集是开集）;

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c(\alpha\in I)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcup_{k=1}^{m} G_k^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x\in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x\notin G^c$, 可知存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.

反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$, 则

$$B(x,\delta)\cap G^c=\varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 1.29 (内点与边界点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 对 $x\in E$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x\in\overline{E}$ 但 $x\notin\mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E.

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 1.19 (开集构造定理)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间（这里也包括 $(-\infty,a)$,$(b,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$）的并集;

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta>0$, 使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset G$. 现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

（这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$）, 显然 $a'<a<a''$ 且 $(a',a'')\subset G$. 这是因为对区间 (a',a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a'<z\leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a'<x<z$ 且 $(x,a)\subset G$, 即 $z\in G$. 我们称这样的开区间 (a',a'') 为 G（关于点 a）的**构成区间**I_a.

如果 $I_a=(a',a'')$,$I_b=(b',b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a<b$. 若

$$I_a\cap I_b\neq\varnothing,$$

则有 $b'<a''$. 于是令 $\min\{a',b'\}=c$,$\max\{a'',b''\}=d$, 则有 $(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$. 取 $x\in I_a\cap I_b$, 则 $I_x=(c,d)$ 是构成区间, 且

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\dfrac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G\setminus\bigcup_{J\in H_0} J$$

（J 表示半开闭二进方体）内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体. 这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x\mathbb{R}^n, k \right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x, x') < 1/k$, 其中 $k > 2/\delta$, 从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x', 1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 1.30 (开覆盖)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x \in E$, 存在 $G \in \Gamma$, 使得 $x \in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ（关于 E）的一个**子覆盖**. ♣

引理 1.2

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖. ♡

定理 1.20 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 1.2, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F \subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0 \in L_k(k = 1, 2, \cdots)$, 即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c(k = 1, 2, \cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 1.21

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集.

证明 设 $y \in E^c$, 则对于每一个 $x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing.$$

显然,$\{B(x, \delta_x) : x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 1.31 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**.

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 1.21表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 1.32 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续）. 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$.

命题 1.11 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

1.4.3 Borel 集

定义 1.33 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集.

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 1.2 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$$

为 F_σ 集.

例题 1.3 函数连续点的结构 若 $f(x)$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集.

证明 令 $\omega_f(x)$ 为 $f(x)$ 在 x 点的振幅, 易知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0) = 0$. 由此可知 $f(x)$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

因为 $\{x \in G : \omega_f(x) < 1/k\}$ 是开集, 所以 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集. □

定义 1.34 (σ-代数)

设 Γ 是由集合 X 的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

(i) $\varnothing \in \Gamma$;

(ii) 若 $A \in \Gamma$, 则 $A^c \in \Gamma$;

(iii) 若 $A_n \in \Gamma$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$,

这时称 Γ 是 (X 上的) 一个 **σ-代数**.

♣

命题 1.12 (σ-代数的基本性质)

若 Γ 是 X 上的一个 σ-代数, 则

(i) 若 $A_n \in \Gamma (n = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,$\bigcap\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$,;

(ii) 若 $A_n \in \Gamma (n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma;$$

(iii) 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \setminus B \in \Gamma$;

(iv) $X \in \Gamma$.

♠

证明 由 σ-代数的定义立得. □

定义 1.35 (生成 σ-代数)

设 Σ 是集合 X 的一些子集所构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ-代数 Γ（即若 $A \in \Sigma$, 必有 $A \in \Gamma$, 这样的 Γ 是存在的, 如 $\mathcal{P}(X)$）. 记包含 Σ 的最小 σ-代数为 $\Gamma(\Sigma)$. 也就是说, 对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ', 若 $A \in \Gamma(\Sigma)$, 则 $A \in \Gamma'$, 称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 Σ **生成的 σ-代数**.

♣

定义 1.36

由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 **Borel 集**.

♣

笔记 显然,$\mathbb{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集皆为 Borel 集; 任一 Borel 集的补集是 Borel 集;Borel 集列的并、交、上（下）限集皆为 Borel 集. 例如,$F_{\sigma\delta}$ 集（可数个 F_σ 集的交集）是 Borel 集.

例题 1.4 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $f(x)$ 的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$$

是 G_δ 型集, 其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$.

证明 (i) 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 $f(x)$ 的连续点. 由题设知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0, 使得 $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$, 且存在 $\delta > 0$,

使得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/3,\quad |f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)|<\varepsilon/3,\quad x\in U(x_0,\delta),$$

从而对 $x\in U(x_0,\delta)$, 有

$$|f_{k_0}(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad U(x_0,\delta)\subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k(\varepsilon)$. 又由 ε 的任意性, 可推知

$$x_0\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设 $x_0\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$. 对 $\varepsilon>0$, 取 $m>3/\varepsilon$. 由于 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$, 故存在 k_0, 使得 $x_0\in\mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 从而可得 $U(x_0,\delta_0)\subset E_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 即

$$|f_{k_0}(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{3},\quad x\in U(x_0,\delta_0).$$

注意到 $f_{k_0}(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 又有 $\delta_1>0$, 使得

$$|f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad x\in U(x_0,\delta_1).$$

记 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, 则当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 这说明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. □

定义 1.37 (Baire 第一函数类)

称区间 I 上连续函数列的极限函数 $f(x)$ 的全体为 **Baire 第一函数类**, 记为 $f\in B_1(I)$. ♣

定理 1.22

若 $f_n\in B_1(\mathbb{R})$, 且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f\in B_1(\mathbb{R})$. ♡

证明 事实上, 由题设知, 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$, 使得

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<1/2^{k+1}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

这里不妨认定 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 考查 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]$, 因为我们有

$$\begin{aligned}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|&\leqslant|f_{n_{k+1}}(x)-f(x)|+|f_{n_k}(x)-f(x)|\\&<\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2^k}\quad (x\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

所以 $g(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)]\in B_1(\mathbb{R})$. 显然有 $g(x)=f(x)-f_{n_1}(x)$, 即 $f(x)=g(x)+f_{n_1}(x)$. 证毕. □

命题 1.13

$\mathbb{R}$ 中存在非 $F_{\sigma\delta}$ 集、非 $F_{\delta\delta\sigma}$ 集等等. ♠

定理 1.23 (Baire 定理)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 即 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, F_k $(k=1,2,\cdots)$ 是闭集. 若每个 F_k 皆无内点, 则 E 也无内点. ♡

证明 若 E 有内点, 设为 x_0, 则存在 $\delta_0>0$, 使 $\overline{B}(x_0,\delta_0)\subset E$. 因为 F_1 是无内点的, 所以必存在 $x_1\in B(x_0,\delta_0)$, 且有 $x_1\notin F_1$. 又因为 F_1 是闭集, 所以可以取到 $\delta_1(0<\delta_1<1)$, 使得

$$\overline{B}(x_1,\delta_1)\cap F_1=\varnothing,$$

同时有 $\overline{B}(x_1,\delta_1) \subset B(x_0,\delta_0)$. 再从 $\overline{B}(x_1,\delta_1)$ 出发以类似的推理使用于 F_2, 则可得 $\overline{B}(x_2,\delta_2) \cap F_2 = \varnothing$, 同时有 $\overline{B}(x_2,\delta_2) \subset B(x_1,\delta_1)$, 这里可以要求 $0 < \delta_2 < 1/2$. 继续这一过程, 可得点列 $\{x_k\}$ 与正数列 $\{\delta_k\}$, 使得对每个自然数 k, 有

$$\overline{B}(x_k,\delta_k) \subset B(x_{k-1},\delta_{k-1}), \quad \overline{B}(x_k,\delta_k) \cap F_k = \varnothing,$$

其中 $0 < \delta_k < 1/k$. 由于当 $l > k$ 时, 有 $x_l \in B(x_k,\delta_k)$, 故

$$|x_l - x_k| < \delta_k < \frac{1}{k}.$$

这说明 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列（Cauchy 列）, 从而是收敛列, 即存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - x| = 0$.

此外, 从不等式

$$|x - x_k| \leqslant |x - x_l| + |x_l - x_k| < |x - x_l| + \delta_k, \quad l > k$$

立即可知（令 $l \to \infty$）$|x - x_k| \leqslant \delta_k$. 这说明 $x \in \overline{B}(x_k,\delta_k)$, 即对一切 k,$x \notin F_k$. 这与 $x \in E$ 发生矛盾. □

例题 1.5 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

证明 事实上, 令 $\mathbb{Q} = \{r_k : k = 1,2,\cdots\}$, 假定 $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 式中 $G_i\ (i = 1,2,\cdots)$ 是开集, 则有表示式

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}\right),$$

这里的每个单点集 $\{r_k\}$ 与 G_i^c 皆为闭集, 而且从 $\overline{G}_i = \mathbb{R}^1$ 可知每个 G_i^c 是无内点的. 这说明 $\mathbb{R}$ 是可列个无内点之闭集的并集. 从而由 Baire 定理可知 $\mathbb{R}$ 也无内点, 这一矛盾说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集. □

定义 1.38

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**稠密集**; 若 $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**无处稠密集**; 可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**. ♣

例题 1.6 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列, 则 $G_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明 只需指出对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x,\delta)$, 均有 $G_0 \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 即可. 采用反证法: 假定存在闭球 $\overline{B}_0 = \overline{B}(x_0,\delta_0)$, 使得 $G_0 \cap \overline{B}_0 = \varnothing$, 则易知

$$\mathbb{R}^n = (G_0 \cap \overline{B}_0)^c = G_0^c \cup (\overline{B}_0)^c,$$

$$\overline{B}_0 = \mathbb{R}^n \cap \overline{B}_0 = G_0^c \cap \overline{B}_0 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right)^c \cap \overline{B}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k^c \cap \overline{B}_0).$$

注意到 G_k^c 是无内点的闭集, 故由Baire 定理可知,$\overline{B}_0$ 也无内点, 矛盾. □

例题 1.7 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)\ (k = 1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ (x \in \mathbb{R}^n)$, 则 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集.

证明 注意到 $f(x)$ 的连续点集的表示, 只需指出 (例题 1.4)

$$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c \quad \left(G\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

是第一纲集. 对 $\varepsilon > 0$, 令

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leqslant \varepsilon\},$$

易知 $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$,$F_k(\varepsilon) \subset E_k(\varepsilon)$, 从而有

$$\mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \mathring{E}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$\begin{aligned}[G(\varepsilon)]^c &= \mathbb{R}^n \setminus G(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \setminus \mathring{F}_k(\varepsilon)] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon).\end{aligned}$$

因为 $F_k(\varepsilon)$ 是闭集, 所以 $\partial F_k(\varepsilon)$ 是无处稠密集. 这说明 $(G(\varepsilon))^c$ 是第一纲集. □

例题 1.8 设 $f \in C([0,1])$, 且令

$$f_1'(x) = f(x), f_2'(x) = f_1(x), \cdots, f_n'(x) = f_{n-1}(x), \cdots.$$

若对每一个 $x \in [0,1]$, 都存在自然数 k, 使得 $f_k(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 只需指出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中的一个稠密集上为 0 即可. 对此, 我们在 $[0,1]$ 中任取一个闭子区间 I, 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然, 每个 F_k 都是闭集, 且 $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. 根据Baire 定理可知, 存在 F_{k_0}, 它包含一个区间 (α,β). 因为在 (α,β) 上 $f_{k_0}(x) = 0$, 所以 $f(x) = 0$,$x \in (\alpha,\beta)$. 注意到 $(\alpha,\beta) \subset I$, 即得所证. □

1.4.4 Cantor(三分) 集

定义 1.39

设 $[0,1] \subset \mathbb{R}$, 将 $[0,1]$ 三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为 F_1, 即

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2};$$

再将 F_1 中的区间 $[0,1/3]$ 及 $[2/3,1]$ 各三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad 及 \quad I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

记 F_1 中留存的部分为 F_2, 即

$$\begin{aligned}F_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &= F_{2,1} \cup F_{2,2} \cup F_{2,3} \cup F_{2,4}.\end{aligned}$$

一般地说 (归纳定义), 设所得剩余部分为 F_n, 则将 F_n 中每个（互不相交）区间三等分, 并移去中央三分开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而我们得到集合列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

作点集 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 我们称 C 为 **Cantor(三分) 集**. ♣

定理 1.24 (Cantor 集的基本性质)

(1) C 是非空有界闭集, 因此是紧集.

(2) $C = C'$, 即 C 为完全集.

(3) C 无内点.

(4) Cantor 集的基数是 c.

(5) $[0,1] \setminus C$ 的长度的总和为 1. ♡

证明

(1) 因为每个 F_n 都是非空有界闭集, 而且 $F_n \supset F_{n+1}$, 所以根据 Cantor 闭集套定理, 可知 C 不是空集（实际上,F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 中每个闭区间的端点都是没有被移去的, 即都是 C 中的点）. 显然,C 是闭集.

(2) 设 $x \in C$, 则 $x \in F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即对每个 n,x 属于长度为 $1/3^n$ 的 2^n 个闭区间中的一个. 于是, 对任一 $\delta > 0$, 存在 n, 满足 $1/3^n < \delta$, 使得 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x - \delta, x + \delta)$. 此闭区间有两个端点, 它们是 C 中的点且总有一个不是 x. 这就说明 x 是 C 的极限点, 故得 $C' \supset C$. 由 (i) 知 $C = C'$.

(3) 设 $x \in C$, 给定任一区间 $(x - \delta, x + \delta)$, 取 $2/3^n < \delta$. 因为 $x \in F_n$, 所以 F_n 中必有某个长度为 $1/3^n$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 然而, 在构造 C 集的第 $n+1$ 步时, 将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间. 这说明 $(x-\delta, x+\delta)$ 不含于 C.

(4) 事实上, 将 $[0, 1]$ 中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0, 2$$

一一对应. 从而知 C 为连续基数集（与 $(0, 1]$ 的二进位小数比较）.

(5) 由 C 的定义可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

□

定义 1.40 (类 Cantor 集)

设 δ 是 $(0, 1)$ 内任意给定的数, 考虑在 $[0, 1]$ 区间, 取 $p = (1 + 2\delta)/\delta$, 采用类似于 Cantor 集的构造过程:
第一步, 移去长度为 $1/p$ 的同心开区间;
第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间;
第三步, 在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间. 继续此过程, 可得一列移去的开区间, 记其并集为 G（开集）, 我们称 $C_p = [0, 1] \setminus G$ 为**类 Cantor 集**（当 $p = 3$ 时,C_p 就是 Cantor（三分）集）. 类 Cantor 集也称为 **Harnack 集**.

♣

注 若要在 $\mathbb{R}^n$ 的单位方体 $[0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ 中构造具有类似性质的集合, 则只需取 $C \times C \times \cdots \times C$（$C$ 是 $[0, 1]$ 中的类 Cantor 集）即可.

定理 1.25 (类 Cantor 集的基本性质)

(1) G 的总长度为 δ（$0 < \delta < 1$ 是任意给定的数）的稠密开集.
(2) C_p 是非空完全集, 且没有内点.

♡

证明

(1) 由 G 的定义可知 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

(2)

□

定义 1.41 (Cantor 函数)

设 C 是 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集, 其中的点我们用三进位小数

$$x = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

来表示.

(i) 作定义在 C 上的函数 $\varphi(x)$. 对于 $x \in C$, 定义

$$\varphi(x) = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

(ii) 作定义在 $[0, 1]$ 上的 $\Phi(x)$. 对于 $x \in [0, 1]$, 定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}.$$

我们称 $\Phi(x)$ 为 **Cantor 函数**.

定理 1.26 (Cantor 函数的性质)

设 $\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}$ 为 Cantor 函数, 则有下列性质:

(1) $\varphi(C) = [0, 1]$, 即 φ 是满射. 并且 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数.

(2) $\Phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增连续函数. 此外, 在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上, $\Phi(x)$ 都是常数.

证明

(1) 因为 $[0, 1]$ 中的点可用二进位小数表示, 所以由 φ 的定义有 $\varphi(C) = [0, 1]$..

下面证明 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots$ 是取 0 或 1 的数, 而且它们所表示的 C 中的数有下述关系:

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i} < 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记 $k = \min\{i : \alpha_i \neq \beta_i\}$, 则我们有

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} &= \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k}\frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} \\ &\leqslant \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k}\frac{2}{3^i} = \frac{\beta_k - \alpha_k + 1}{3^k}. \end{aligned}$$

由此可知 $(\alpha_k < \beta_k)\alpha_k = 0, \beta_k = 1$, 从而得到

$$\begin{aligned} \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i} = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}\right). \end{aligned}$$

(2) 由 (2) 的结论及 Φ 的定义即得 Φ 的递增性. 因为 $\Phi([0, 1]) = [0, 1]$, 所以由命题 6.7可知 $\Phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数.

□

例题 1.9 $E \subset \mathbb{R}$ 是完全集当且仅当 $E = \left(\bigcup_{n\geqslant 1}(a_n, b_n)\right)^c$, 其中 (a_i, b_i) 与 (a_j, b_j) $(i \neq j)$ 无公共端点.

证明 **必要性**: 若 E 是完全集, 则 E 是闭集. 从而 E^c 是开集, 它是 E^c 内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的, 否则 E 中就会有孤立点了, 这是不可能的.

充分性: 首先, 由题设知 E 是闭集. 其次, 对任意的 $x \in E$, 如果 $x \notin E'$, 那么存在 $\delta > 0$, 使得 $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \{x\}$. 这说明 x 是某两个开区间的端点, 与假设矛盾. □

例题 1.10 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是完全集, 则 E 是不可数集.

证明 用反证法. 假定 $E = \{x_n \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \cdots\}$.

(i) 选取 $y_1 \in E \setminus \{x_1\}$, 则点 x_1 到 y_1 的距离大于 0. 存在以 y_1 为中心的闭正方形 Q_1,$Q_1 \cap E$ 是紧集.

(ii) 看 $E \setminus \{x_2\}$. 因为 y_1 是 $E \setminus \{x_2\}$ 的极限点, 所以 $\mathring{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\}) \neq \varnothing$. 又取 $y_2 \in \mathring{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\})$, 并作以 y_2 为中心的闭正方形 Q_2:$Q_2 \subset Q_1$,$x_1 \notin Q_2$,$x_2 \notin Q_2$, 可知 $(Q_1 \cap E) \supset (Q_2 \cap E)$ 是紧集. 如此继续做下去, 可得有界闭集套列 $\{Q_n \cap E\}$:$(Q_{n-1} \cap E) \supset (Q_n \cap E)$ $(n \in \mathbb{N})$, 而且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不在其内. 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap E) = \varnothing,$$

导致矛盾. □

命题 1.14

任一非空完全集的基数均为 c.

证明 证明见那汤松著《实变函数论》的上册, 有高等教育出版社出版的中译本,1955 年. □

例题 1.11 设 $E = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n, a_n = 2 \text{ 或} 7 \right\}$, 我们有

(i) E 是闭集;

(ii) $\overline{E} = c$;

(iii) E 在 $[0,1]$ 中不稠密.

证明 (i) 若有 $\{x_m\} \subset E$:$x_m \to x (m \to \infty)$, 则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/10^n \quad (b_n = 0, 1, 2, \cdots, 9).$$

如果 $|x_m - x| < 10^{-p}$, 那么在 $x \in E$ 时,$b_n = 2$ 或$7 (n = 1, 2, \cdots, p-1)$. 这说明 E 是闭集.

(ii) 与 0 和 1 组成的数列类似,$\overline{E} = c$.

(iii) 注意到 $E \cap (0.28, 0.7) = \varnothing$, 故 E 不是稠密集. □

1.5 点集间的距离

定义 1.42

设 $x \in \mathbb{R}^n$,E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(x,E) = \inf\{|x-y| : y \in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**; 若 E_1,E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(E_1,E_2) = \inf\{|x-y| : x \in E_1, y \in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的**距离**. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x,E_2) : x \in E_1\} \quad \text{或} \quad \inf\{d(E_1,y) : y \in E_2\}.$$

例题 1.12 在 $\mathbb{R}^2$ 中作点集

$$E_1 = \{x = (\xi,\eta) : -\infty < \xi < +\infty, \eta = 0\},$$
$$E_2 = \{y = (\xi,\eta) : \xi \cdot \eta = 1\},$$

则 $d(E_1,E_2) = 0$.

证明 事实上, 当我们取 $x = (\xi, 0) \in E_1$ 且 $y = (\xi,\eta) \in E_2$ 时, 由

$$d(E_1,E_2) \leqslant d(x,y) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1,E_2) < \varepsilon$. 由此得

$$d(E_1,E_2) = 0.$$

显然, 若 $x \in E$, 则 $d(x, E) = 0$. 但反之, 若 $d(x, E) = 0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x \notin E$ 时, 必有 $x \in E'$. □

定理 1.27

若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0 \in F$, 有

$$|x_0 - y_0| = d(x_0, F).$$

证明 作闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x_0, \delta)$, 使得 $\overline{B} \cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0, F) = d(x_0, \overline{B} \cap F).$$

$\overline{B} \cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0 - y|$ 看作定义在 $\overline{B} \cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\overline{B} \cap F$ 上达到最小值, 即存在 $y_0 \in \overline{B} \cap F$, 使得

$$|x_0 - y_0| = \inf\{|x_0 - y| : y \in \overline{B} \cap F\},$$

从而有 $|x_0 - y_0| = d(x_0, F)$. □

定理 1.28

若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空点集, 则 $d(x, E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 x, y. 根据 $d(y, E)$ 的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $z \in E$, 使得 $|y - z| < d(y, E) + \varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leqslant |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \\ &< |x - y| + d(y, E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$d(x, E) - d(y, E) \leqslant |x - y|.$$

同理可证 $d(y, E) - d(x, E) \leqslant |x - y|$. 这说明

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leqslant |x - y|.$$

□

推论 1.1

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1 \in F_1$,$x_2 \in F_2$, 使得

$$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2).$$

引理 1.3

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得

(i) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$;

(ii) $F_1 = \{x : f(x) = 1\}$,$F_2 = \{x : f(x) = 0\}$.

证明 构造函数 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

它就是所求的函数. □

定理 1.29 (连续延拓定理)

若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)| \leqslant M, \quad g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

注 1. 上述定理在 $f(x)$ 无界时也成立（研究 $\arctan f(x)$）.

2. $\mathbb{R}^2$ 中存在由某些有理点构成的稠密集, 其中任意两点的距离为无理数.

证明 把 F 分成三个点集:

$$A=\left\{x\in F:\frac{M}{3}\leqslant f(x)\leqslant M\right\},$$

$$B=\left\{x\in F:-M\leqslant f(x)\leqslant\frac{-M}{3}\right\},$$

$$C=\left\{x\in F:\frac{-M}{3}<f(x)<\frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x)=\frac{M}{3}\cdot\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集, 所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 此外, 还有

$$|g_1(x)|\leqslant\frac{M}{3},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}M,\quad x\in F.$$

再在 F 上来考查 $f(x)-g_1(x)$(相当于上述之 $f(x)$), 并用类似的方法作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$. 此时由于 $f(x)-g_1(x)$ 的界是 $2M/3$, 故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2M}{3},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|(f(x)-g_1(x))-g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{2M}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2M,\quad x\in F.$$

继续这一过程, 可得在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$|g_k(x)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}M,\quad x\in\mathbb{R}^n\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^kM,\quad x\in F\quad(k=1,2,\cdots).$$

上面的第一式表明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(x)$ 是一致收敛的. 若记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 上面的第二式表明

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)=f(x),\quad x\in F.$$

最后, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 得到

$$\begin{aligned}|g(x)|&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(x)|\leqslant\frac{M}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right)\\&\leqslant\frac{M}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=M.\end{aligned}$$

□

第 2 章 Lebesgue 测度

2.1 点集的 Lebesgue 外测度

定义 2.1 (Lebesgue 外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体, 且有

$$E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 **L-覆盖** (显然, 这样的覆盖有很多, 且每一个 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum\limits_{k \geq 1} |I_k|$ (可以是 $+\infty$, $|I_k|$ 表示 I_k 的体积)). 称

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为} E \text{ 的} L-\text{覆盖} \right\}$$

为点集 E 的 **Lebesgue 外测度**, 简称**外测度**.

♣

注 显然, 若 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k \geq 1} |I_k| = +\infty,$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

定理 2.1 ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)

(1) 非负性: $m^*(E) \geq 0$, $m^*(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$;

(3) 次可加性: $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

♡

证明

(1) 这可从定义直接得出.

(2) 这是因为 E_2 的任一个 $L-$ 覆盖都是 E_1 的 $L-$ 覆盖.

(3) 不妨设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及每个自然数 k, 存在 E_k 的 $L-$ 覆盖 $\{I_{k,l}\}$, 使得

$$E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |I_{k,l}| < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

由此可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} I_{k,l}, \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} |I_{k,l}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

显然, $\{I_{k,l} : k, l = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 $L-$ 覆盖, 从而有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论成立.

□

命题 2.1

$\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_0\}) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$. 同理, $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t_0, \xi_i, \cdots, \xi_n) : a_j \le \xi_j \le b_j, j \ne i\}$$

$(n-1$ 维超平面块) 的外测度也为零.

证明 这是因为可作一开矩体 I, 使得 $x_0 \in I$ 且 $|I|$ 可任意地小. □

推论 2.1

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数点集, 则 $m^*(E) = 0$.

注 由此可知有理点集的外测度 $m^*(\mathbb{Q}^n) = 0$. 这里我们看到了一个虽然处处稠密但外测度为零的可列点集.

证明 由外测度的次可加性不难证明. □

命题 2.2

$[0, 1]$ 中的 Cantor 集 C 的外测度是零.

注 这个命题 2.2说明外测度为零的点集不一定是可列集.

证明 事实上, 因为 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中的 F_n (在构造 C 的过程中第 n 步所留存下来的) 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并集, 所以我们有

$$m^*(C) \le m^*(F_n) \le 2^n \cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C) = 0$. □

命题 2.3

设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(I) = m^*(\bar{I}) = |I|$.

证明 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作一开矩体 J, 使得 $J \supset \bar{I}$ 且 $|J| < |I| + \varepsilon$, 从而由外测度的单调性有

$$m^*(\bar{I}) \le |J| < |I| + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $m^*(\bar{I}) \le |I|$. 现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意的 $L-$ 覆盖, 则因为 $\bar{I}$ 是有界闭集, 所以存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖

$$\{I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_l}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{l} I_{i_j} \supset \bar{I}.$$

由外测度的单调性和次可加性可得

$$|I| \le \sum_{j=1}^{l} |I_{i_j}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

再由下确界是最大的下界可得 $|I| \le m^*(\bar{I})$, 从而我们有 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

又因为 $I \subset \bar{I}$, 所以由外测度的单调性可得 $m^*(I) \le m^*(\bar{I}) = |I|$. 同理可证 $|I| \le m^*(I)$, 故 $m^*(I) = |I| = m^*(\bar{I})$.
□

引理 2.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\delta > 0$. 令

$$m_\delta^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E, \text{每个开矩体} I_k \text{ 的边长} < \delta\right\},$$

则 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.

证明 显然有 $m_\delta^*(E) \ge m^*(E)$. 为证明其反向不等式也成立, 不妨设 $m^*(E) < +\infty$. 由外测度的定义可知, 对于任给

的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m^*(E) + \varepsilon.$$

对于每个 k, 我们把 I_k 分割成 $l(k)$ 个开矩体:

$$I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,l(k)},$$

它们互不相交且每个开矩体的边长都小于 $\delta/2$. 现在保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动, 边长扩大 $\lambda(1 < \lambda < 2)$ 倍做出开矩体, 并记为 $\lambda I_{k,i}$, 显然, 对每个 k, 有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|.$$

易知 $\{\lambda I_{k,i} : i = 1, 2, \cdots, l(k); k = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 的边长小于 δ 的 $L-$ 覆盖, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon),$$

从而可知 $m^*_\delta(E) \le \lambda^n (m^*(E)+\varepsilon)$. 令 $\lambda \to 1$ 并注意到 ε 的任意性, 我们得到 $m^*_\delta(E) \le m^*(E)$. 这说明 $m^*_\delta(E) = m^*(E)$.
□

定理 2.2

设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集. 若 $d(E_1, E_2) > 0$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

♡

证明 只需证明 $m^*(E_1 \cup E_2) \ge m^*(E_1) + m^*(E_2)$ 即可. 为此, 不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < +\infty$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 作 $E_1 \cup E_2$ 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon,$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}$. 现在将 $\{I_k\}$ 分为如下两组:

$$\text{(i)} J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \ge 1} J_{i_k} \supset E_1; \quad \text{(ii)} J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k \ge 1} J_{l_k} \supset E_2.$$

且其中任一矩体皆不能同时含有 E_1 与 E_2 中的点, 从而得

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon > \sum_{k \ge 1} |I_k| &= \sum_{k \ge 1} |J_{i_k}| + \sum_{k \ge 1} |J_{l_k}| \\ &\ge m^*(E_1) + m^*(E_2). \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可知 $m^*(E_1 \cup E_2) \ge m^*(E_1) + m^*(E_2)$. □

命题 2.4

设 $E \subset [a, b]$, $m^*(E) > 0$, $0 < c < m^*(E)$, 则存在 E 的子集 A, 使得 $m^*(A) = c$.

♠

证明 记 $f(x) = m^*([a, x) \cap E)$, $a \le x \le b$, 则 $f(a) = 0$, $f(b) = m^*(E)$. 考查 x 与 $x + \Delta x$. 不妨设 $a \le x < x + \Delta x \le b$, 则由

$$[a, x + \Delta x) \cap E = ([a, x) \cap E) \cup ([x, x + \Delta x) \cap E)$$

可知 $f(x + \Delta x) \le f(x) + \Delta x$, 即

$$f(x + \Delta x) - f(x) \le \Delta x.$$

对 $\Delta x < 0$ 也可证得类似不等式. 总之, 我们有

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \le |\Delta x|, \quad a \le x \le b.$$

这说明 $f \in C([a,b])$. 根据连续函数中值定理, 对 $f(a) < c < f(b)$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = c$. 取 $A = [a,\xi) \cap E$, 即得证. □

定理 2.3 (外测度的平移不变性)

设 $E \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$. 记 $E + \{x_0\} = \{x + x_0, x \in E\}$, 则

$$m^*(E + \{x_0\}) = m^*(E). \tag{2.1}$$

证明 首先, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体 I, 易知 $I + \{x_0\}$ 仍是一个开矩体且其相应边长均相等, $|I| = |I + \{x_0\}|$. 其次, 对 E 的任意的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k + \{x_0\}\}$ 仍是 $E + \{x_0\}$ 的 $L-$ 覆盖. 从而由

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k + \{x_0\}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

可知 (对一切 $L-$ 覆盖取下确界)

$$m^*(E + \{x_0\}) \leq m^*(E).$$

反之, 考虑对 $E + x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移, 可得原点集 E. 同理又有

$$m^*(E) \leq m^*(E + \{x_0\}).$$

□

定理 2.4 (外测度的数乘)

设 $E \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

证明 因为 $E \subset \bigcup\limits_{n\geq 1}(a_n, b_n)$ 等价于 $\lambda E \subset \bigcup\limits_{n\geq 1}\lambda(a_n, b_n)$, $m^*([a_n, b_n]) = m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间 (α, β), 有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda| m^*((\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$. □

定义 2.2 (集合上的外测度)

设 X 是一个非空集合, μ^* 是定义在幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个取广义实值的集合函数, 且满足:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(E) \geq 0$ $(E \subset X)$;

(ii) 若 $E_1, E_2 \subset X$, $E_1 \subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;

(iii) 若 $\{E_n\}$ 是 X 的子集列, 则有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**外测度**.

若 (X, d) 是一个距离空间, 且其上的外测度 μ^* 还满足**距离外测度性质**: 当 $d(E_1, E_2) > 0$ 时, 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

那么称 μ^* 是 X 上的一个**距离外测度** (利用距离外测度性质可以证明开集的可测性).

2.2 可测集与测度

定义 2.3 (可测集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为 **Lebesgue 可测集** (或 **m^*-可测集**) 或 E **可测**, 简称为**可测集**, 其中 T 称为**试验集** (这一定义可测集的等式也称为 **Carathéodory 条件**). 可测集的全体称为**可测集类**, 简记为 $\mathscr{M}$.

定理 2.5 (集合可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E \in \mathscr{M}$ 的充要条件是对任一点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(T) < +\infty$, 都有

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{2.2}$$

成立.

注 往后经常利用这个定理的充分性来证明一个集合可测. 但这个定理的必要性要弱于可测集的定义.

证明 必要性由可测集的定义立得. 下证充分性. 由外测度的次可加性可得

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \mathbb{R}^n\right) = m^*\left(T \cap (E \cup E^c)\right) = m^*\left((T \cap E) \cap (T \cup E^c)\right) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

总是成立的. 又因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (2.2) 式总成立, 故对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

即 $E \in \mathscr{M}$. □

定义 2.4 (零测集)

外测度为零的点集称为**零测集**.

注 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集. 从而根据外测度的次可加性知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集.

命题 2.5

1. 零测集的任一子集是零测集.
2. 零测集一定可测, 即若 $m^*(E) = 0$, 则 $E \in \mathscr{M}$.

证明

1. 由外测度的单调性立得.
2. 事实上, 此时我们有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T).$$

□

命题 2.6

若 $E_1 \subset S$, $E_2 \subset S^c$, $S \in \mathscr{M}$, 则有

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

注 这个命题表明: 当两个集合由一个可测集分离开时, 其外测度就有可加性.

证明 事实上, 此时取试验集 $T = E_1 \cup E_2$, 从 S 是可测集的定义得

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap S) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap S^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

□

推论 2.2

当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

证明 注意到 $T\cap E_1\in E_1,T\cap E_2\in E_1^c$, 而 $E_1\in\mathscr{M}$, 故由命题 2.6可知

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*((T\cap E_1)\cup(T\cap E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

□

定理 2.6 (可测集的性质)

(1) $\varnothing\in\mathscr{M}$.

(2) 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $E^c\in\mathscr{M}$.

(3) 若 $E_1\in\mathscr{M},E_2\in\mathscr{M}$, 则 $E_1\cup E_2,E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$. (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(4) 若 $E_i\in\mathscr{M}\ (i=1,2,\cdots)$, 则其并集也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性 (或称为 $\sigma-$ 可加性).

证明

(1) 显然成立.

(2) 注意到 $(E^c)^c=E$, 从定义可立即得出结论.

(3) 对于任一集 $T\subset\mathbb{R}^n$, 根据集合分解 (参阅图 2.1) 与外测度的次可加性, 我们有

$$\begin{aligned}m^*(T)&\leq m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c)\\&=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c)\\&\leq m^*((T\cap E_1)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1)\cap E_2^c)\\&\quad+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c).\end{aligned}$$

又由 E_1,E_2 的可测性知, 上式右端就是

$$m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c)=m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T)=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c).$$

也就是说 $E_1\cup E_2$ 是可测集.

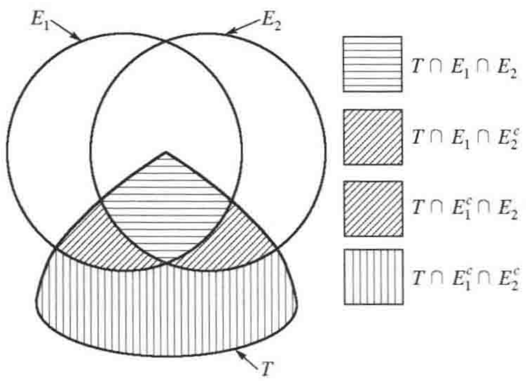

图 2.1

为证 $E_1 \cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ 即可. 又由 $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ 可知, $E_1 \setminus E_2$ 是可测集.

(4) 首先, 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交, 并令

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由 (3) 知每个 S_k 都是可测集, 从而对任一集 T, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(T \cap S_k) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T \cap E_i)\right) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S_k^c). \end{aligned}$$

由于 $T \cap S_k^c \supset T \cap S^c$, 可知

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

令 $k \to \infty$, 就有

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

由此可得

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c).$$

这说明 $S \in \mathscr{M}$.

此外, 在公式

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c)$$

中以 $T \cap S$ 替换 T, 则又可得

$$m^*(T \cap S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

但反向不等式总是成立的, 因而实际上有

$$m^*(T \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

在这里再取 T 为全空间 $\mathbb{R}^n$, 就可证明可数可加性质:

$$m^*(S) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

其次, 对于一般的可测集列 $\{E_i\}$, 我们令

$$S_1 = E_1, \quad S_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right), \quad k \geq 2,$$

则 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 而由 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ 可知, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集.

□

推论 2.3

$\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数.

证明 由可测集的性质 (1)(2)(4)立得. □

命题 2.7

证明:Cantor 集 C 是可测的, 并且 $m(C) = 0$.

证明 开区间是可测的. 由开集构造定理, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中的开集是开区间的可数并, 因此也可测. 因此, 闭集也是可测的. 显然, 每个 C_n 都是闭集. 并且

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

于是 C 也是闭集. 因此 C 是可测的.

下面, 我们用两种方法计算康托集的测度.

法一:根据我们的构造, C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 1/3 的 C_n 的测度. 换言之,

$$m(C_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) m(C_n) = \frac{2}{3} m(C_n)$$

递归地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0) = 1 < \infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理,

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

此即得证.

法二:设 $n \geq 2$. C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间, 每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$. 因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

因此

$$m(C) = 1 - 1 = 0.$$

□

命题 2.8

$\mathscr{M}$ 的基数是 2^c.

证明 由命题 2.7可知 Cantor 集是零测集, 不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 2^c, 但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 2^c, 于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 2^c. □

定义 2.5

由推论 2.3可知, $\mathbb{R}^n$ 中可测集类构成一个 $\sigma-$ 代数. 对于可测集 E, 其外测度称为测度, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

定义 2.6

设 X 是非空集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数, 且满足:

(i) $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$ $(E \in \mathscr{A})$;

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$;

(iii) μ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的,

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) 测度. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) 可测集, 有序组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 称为测度空间. 本节所建立的测度空间就是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{M}, m)$.