0.1 子空间、直和与商空间

定理 0.1 (基扩张定理)

设 V 是 n 维线性空间,$v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是 V 中 $m(m < n)$ 个线性无关的向量, 又假设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则必可在 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中选出 $n - m$ 个向量, 使之和 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 一起组成 V 的一组基.

基扩张定理还有几种等价形式:

(1)n 维线性空间 V 中任意 $m(m < n)$ 个线性无关的向量均可扩张为 V 的一组基.

(2)n 维线性空间 V 的任意一个子空间的基均可扩张为 V 的一组基.

证明 将 $e_i(i = 1, \cdots, n)$ 依次放入 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$, 则必有一个 $e_{i'}$, 使 $v_1, v_2, \cdots, v_m, e_{i'}$ 线性无关. 这是因为若任一 e_i 加入 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 后线性相关, 则每个 e_i 可用 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性表示, 将和定理**??**(1) 的结论矛盾. 现不妨设 $i' = m + 1$. 若 $m + 1 < n$, 又可从 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 中找到一个向量, 加入 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m, e_{m+1}\}$ 后仍线性无关. 不断这样做下去, 便可将 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 扩张成为 V 的一组基. □

定义 0.1 (直和)

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是线性空间 V 的子空间, 若对任意的 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$, 均有

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = 0,$$

则称和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 是直接和, 简称直和, 记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

定理 0.2 (直和的等价条件)

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是线性空间 V_0 的子空间,$V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$, 则下列命题等价:

(1) $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$;

(2) 对任意的 $2 \leqslant i \leqslant k$, 有 $V_i \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_{i-1}) = 0$;

(3) $\dim V_0 = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k$;

(4) $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的一组基可以拼成 V_0 的一组基;

(5) V_0 中的向量表示为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中的向量之和时其表示唯一.

(6) 在 $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 中零向量的表示唯一, 即如果

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 0, v_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, k.$$

则 $v_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k$.

证明

□

定理 0.3 (交和空间维数公式)

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

证明 设 $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$. 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, 由于 $V_1 \cap V_2$ 是 V_1 的子空间, 故可添上 V_1 中的向量 $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{n_1}$, 使 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ 是 V_1 的一组基. 同样道理, 可添上 $\beta_{m+1}, \cdots, \beta_{n_2}$, 使 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \cdots, \beta_{n_2}\}$ 成为 V_2 的一组基. 显然, $V_1 + V_2$ 中的向量均可由向量组

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_{m+1}, \cdots, \beta_{n_2}$$

的线性组合给出. 如能证明上式中的向量线性无关, 则它们构成 $V_1 + V_2$ 的一组基, 由此即可推出所要的结论. 现假设

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m + \lambda_{m+1}\alpha_{m+1} + \cdots + \lambda_{n_1}\alpha_{n_1} + \mu_{m+1}\beta_{m+1} + \cdots + \mu_{n_2}\beta_{n_2} = \mathbf{0},$$

则

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1}+\cdots+\lambda_{n_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_1}=-(\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}).$$

上式左端属于 V_1, 右端属于 V_2, 故

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}\in V_1\cap V_2,$$

即存在 $\xi_1,\cdots,\xi_m\in\mathbb{K}$, 使

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}=\xi_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\xi_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$ 是 V_2 的基, 因此 $\mu_{m+1}=\cdots=\mu_{n_2}=\xi_1=\cdots=\xi_m=0$. 再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1}$ 线性无关得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_{n_1}=0$. □

推论 0.1

设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间,$\dim V_1=n_1$, $\dim V_2=n_2$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$, 取 $V_1\cap V_2$ 的一组基

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\},$$

将其扩张为 V_1 的一组基

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1}\},$$

再将其扩张为 V_2 的一组基

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}\}.$$

则

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}\}$$

就是 V_1+V_2 的一组基.

♡

证明 显然, V_1+V_2 中的向量均可由向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$$

的线性组合给出. 现假设

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1}+\cdots+\lambda_{n_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_1}+\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}=\mathbf{0},$$

则

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1}+\cdots+\lambda_{n_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_1}=-(\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}).$$

上式左端属于 V_1, 右端属于 V_2, 故

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}\in V_1\cap V_2,$$

即存在 $\xi_1,\cdots,\xi_m\in\mathbb{K}$, 使

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1}+\cdots+\mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}=\xi_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\xi_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$ 是 V_2 的基, 因此 $\mu_{m+1}=\cdots=\mu_{n_2}=\xi_1=\cdots=\xi_m=0$. 再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1}$ 线性无关得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_{n_1}=0$. □

0.1.1 证明直和的方法

证明直和的方法大致有两种:

第一种: 先证和, 再证直和.

第二种: 对于给定的 V,V_1,V_2, 求证 $V=V_1\oplus V_2$ 的题目, 如果“和”不好证明的话, 可以记 $W=V_1+V_2$, 先证 $W=V_1\oplus V_2$, 再证 $V=W$(证明 $V=W$ 通常会利用命题**??**). 具体例子见例题 0.3

命题 0.1

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵组成的向量空间,V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{F}$ 上对称矩阵和反对称矩阵组成的子集. 求证:V_1 和 V_2 都是 V 的子空间且 $V=V_1\oplus V_2$.

笔记 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1,V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V=V_1+V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由于对称矩阵之和仍是对称矩阵, 一个数乘以对称矩阵仍是对称矩阵, 因此 V_1 是 V 的子空间. 同理 V_2 也是 V 的子空间. 又由命题??可知, 任一 n 阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 故 $V=V_1+V_2$. 若一个矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵, 则它一定是零矩阵. 这就是说 $V_1\cap V_2=\mathbf{0}$. 于是 $V=V_1\oplus V_2$. □

命题 0.2

设 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 个线性空间, 且 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$. 若

$$W_1\subseteq V_1,W_2\subseteq V_2,\cdots,W_n\subseteq V_n,$$

则

$$W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n.$$

证明 因为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$, 所以由直和的等价条件 (6)知, 如果

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=0,\ v_i\in V_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则 $v_i=0$,$i=1,2,\cdots,n$. 设

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=0,\ w_i\in W_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则 $w_i\in W_i\subseteq V_i$,$i=1,2,\cdots,n$. 从而 $w_i=0$,$i=1,2,\cdots,n$. 故 $W_1+W_2+\cdots+W_n$ 中零向量的表示唯一, 因此由直和的等价条件 (6)知

$$W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n.$$

□

例题 0.1 设 V_1,V_2 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的齐次线性方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 与 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间, 求证:$\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2$.

笔记 要证明向量空间 V 是其子空间 V_1,V_2 的直和, 只需证明两件事: 一是证明 V 中任一向量均可表示为 V_1 与 V_2 中向量之和, 即 $V=V_1+V_2$; 二是证明 V_1 与 V_2 的交等于零.

证明 由线性方程组解的定理知,V_1 的维数是 1,V_2 的维数是 $n-1$. 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出 $\boldsymbol{\alpha}$ 只能等于零向量, 因此 $V_1\cap V_2=0$. 又因为

$$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=1+(n-1)=n=\dim\mathbb{F}^n,$$

故 $\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2$. □

例题 0.2 设 U,V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间,$W=U\times V$ 是 U 和 V 的积集合, 即 $W=\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{v}\in V\}$. 现在 W 上定义加法和数乘:

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2),k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(k\boldsymbol{u},k\boldsymbol{v}).$$

验证:W 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 (这个线性空间称为 U 和 V 的外直和).

又若设 $U'=\{(\boldsymbol{u},\mathbf{0})|\boldsymbol{u}\in U\}$,$V'=\{(\mathbf{0},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}\in V\}$, 求证:$U',V'$ 是 W 的子空间,U' 和 U 同构,V' 和 V 同构, 并且 $W=U'\oplus V'$.

证明 易验证 W 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 从而是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 任取 $(\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0}),(\boldsymbol{u}_2,\mathbf{0})\in U'$,$k\in\mathbb{K}$, 则 $(\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0})+(\boldsymbol{u}_2,\mathbf{0})=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\mathbf{0})\in U'$,$k(\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0})=(k\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0})\in U'$, 因此 U' 是 W 的子空间. 同理可证 V' 是 W 的子空间. 构造映射 $\varphi:U\to U'$,$\varphi(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\mathbf{0})$, 容易验证 φ 是一一对应并且保持加法和数乘运算, 所以 $\varphi:U\to U'$ 是一个线性同构. 构造映射 $\psi:V\to V'$,$\psi(\boldsymbol{v})=(\mathbf{0},\boldsymbol{v})$, 同理可证 $\psi:V\to V'$ 是一个线性同构. 显然 $U'\cap V'=0$, 又

对 W 中任一向量 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 有 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{0})+(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v})\in U'+V'$, 因此 $W=U'\oplus V'$. □

例题 0.3 给定数域 P, 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的一个 n 级可逆方阵,$\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量组成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 后 $n-r$ 个行向量组成的矩阵为 $\boldsymbol{C}$,n 元线性方程组 $\boldsymbol{BX}=0$ 与 $\boldsymbol{CX}=0$ 的解空间分别为 V_1,V_2, 证 $P^n=V_1\oplus V_2$.

证明 先记 $W=V_1+V_2$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$, 则 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{C\alpha}=0$, 所以

$$\boldsymbol{A}\alpha=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\alpha=0.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{\alpha}=0$, 所以 $V_1\cap V_1=\{0\}$, 即 $W=V_1\oplus V_2$.

最后说 $W=P^n$: 显然 $r(\boldsymbol{B})=r$,$r(\boldsymbol{C})=n-r$, 则 $\dim V_1=n-r$,$\dim V_2=n-(n-r)=r$. 所以

$$\dim W=\dim V_1+\dim V_2=n=\dim P^n.$$

又 $W=V_1\oplus V_2\subseteq P^n$, 从而 $W=P^n$, 即

$$P^n=V_1\oplus V_2.$$

□

命题 0.3 (任意子空间一定存在相应的补空间)

设 U 是 V 的子空间, 则一定存在 V 的子空间 W, 使得 $V=U\oplus W$. 这样的子空间 W 称为子空间 U 在 V 中的**补空间**.

注 在这个命题中 $U\cap W=\{\boldsymbol{0}\}$, 而不是 $U\cap W=\varnothing$; 同时 $V=U+W$ 是子空间的和, 而不是 $V=U\cup W$. 因此, 补空间绝不是补集, 请读者务必注意! 一般来说, 补空间并不唯一. 例如下面证明中, 取 U 中不同的基, 再将基扩张得到的补空间也不相同. 还例如, 若 $\dim V-\dim U\geqslant 1$ 且 $\dim U\geqslant 1$, 则 U 有无限个补空间.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$, 由基扩张定理可将其扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 令 $W=L(\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 则 $V=U+W$. 由于 $\{\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 W 的一组基, 故 $\dim V=\dim U+\dim W$, 从而 $V=U\oplus W$. □

命题 0.4

若 $V=U\oplus W$ 且 $U=U_1\oplus U_2$, 求证:$V=U_1\oplus U_2\oplus W$.

证明 由 $U=U_1\oplus U_2$ 可得 $U_1\cap U_2=0$; 由 $V=U\oplus W$ 可得 $(U_1+U_2)\cap W=U\cap W=0$, 因此由定理 0.2(2)可得 U_1+U_2+W 是直和, 从而 $V=U_1+U_2+W=U_1\oplus U_2\oplus W$. □

命题 0.5

每一个 n 维线性空间均可表示为 n 个一维子空间的直和.

证明 设 V 是 n 维线性空间, 取其一组基为 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 设 $V_i=L(\boldsymbol{e}_i)(1\leqslant i\leqslant n)$, 则 V_i 是 V 的一维子空间. 任取 $\alpha\in V$, 存在唯一一组常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得 $\alpha=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$, 而 $k_i\boldsymbol{e}_i\in V_i,i=1,2,\cdots,n$. 因此 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$. 注意到 $\dim V=n=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_n$, 故由定理 0.2(3)可知,$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.

(注意到 V_i 的基是 $\{\boldsymbol{e}_i\}$, 因此 $V_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的基能拼成 V 的基, 故由定理 0.2(4)也可得到结论. 再注意到 V 中任一向量写成基向量 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 的线性组合时, 其表示是唯一的. 这就是说,V 中任一向量写成 V_i 中的向量之和时, 其表示是唯一的, 故由定理 0.2(5)同样可得结论.) □

命题 0.6

设 V_0 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维向量空间 V 的真子空间, 则 V_0 至多包含 $n-1$ 个 V 中的基向量.

证明 反证法,若 V_0 包含 n 个 V 中的基向量,则 V_i 就包含了 V 的一组基.不妨设 V_0 中的这组基向量为 $\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$, 则 $\forall\alpha\in V$, 有 $\alpha=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n\in V_0$, 其中 $k_i\in\mathbb{F}$,$i=1,2,\cdots,n$. 故 $V_0\supset V$, 又 $V_0\subset V$, 因此 $V_0=V$. 这与 V_0 是 V 的真子空间矛盾. □

命题 0.7

设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明: 在 V 中必存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 它不属于任何一个 V_i.

笔记 这个命题表明: **有限个真子空间不能覆盖全空间**.

证明 证法一: 对个数 m 进行归纳, 当 $m=1$ 时结论显然成立. 设 $m=k$ 时结论成立, 现要证明 $m=k+1$ 时结论也成立. 由归纳假设, 存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 它不属于任何一个 $V_i(1 \leqslant i \leqslant k)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 也不属于 V_{k+1}, 则结论已成立, 因此可设 $\boldsymbol{\alpha} \in V_{k+1}$. 在 V_{k+1} 外选一个向量 $\boldsymbol{\beta}$, 作集合

$$M=\{t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \mid t \in \mathbb{F}\}.$$

事实上, 我们可将 M 看成是通过 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点且平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一根 "直线", 现要证明它和每个 V_i 最多只有一个交点. 首先,M 和 V_{k+1} 无交点, 因为若 $t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_{k+1}$, 则从 $t\boldsymbol{\alpha} \in V_{k+1}$ 可推出 $\boldsymbol{\beta} \in V_{k+1}$, 与假设矛盾. 又若对某个 $V_i(i<k+1)$, 存在 $t_1 \neq t_2$, 使得 $t_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_i$,$t_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_i$, 则 $(t_1-t_2)\boldsymbol{\alpha} \in V_i$, 从而导致 $\boldsymbol{\alpha} \in V_i$, 与假设矛盾. 因此,$M$ 和每个 V_i 最多只有一个交点, 从而 M 中只有有限个向量属于 V_i 的并集, 而 t 有无穷多个选择, 由此即得结论.

证法二:任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 对任意的正整数 k, 构造 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2+\cdots+k^{n-1}\boldsymbol{e}_n$, 设向量族 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_k \mid k=1,2,\cdots\}$. 由例题**??**可知,$S$ 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不属于任何一个 V_i. □

注 上述证明要用到任意一个数域都有无穷个元素这一事实. 因此, 对于有限域 (读者以后可能会学到) 上的向量空间, 上例结论不一定成立.

命题 0.8

设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明:V 中必有一组基, 使得每个基向量都不在诸 V_i 的并中.

证明 证法一: 由命题 0.7可知, 存在非零向量 $\boldsymbol{e}_1 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_1 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$. 定义 $V_{m+1}=L(\boldsymbol{e}_1)$, 再由命题 0.7可知, 存在向量 $\boldsymbol{e}_2 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_2 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} V_i$. 由推论**??**可知,$\boldsymbol{e}_2 \notin L(\boldsymbol{e}_1)$ 意味着 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 线性无关. 重新定义 $V_{m+1}=L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, 再由命题 0.7可知, 存在向量 $\boldsymbol{e}_3 \in V$, 使得 $\boldsymbol{e}_3 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} V_i$. 再由推论**??**可知,$\boldsymbol{e}_3 \notin L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ 意味着 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 线性无关. 不断重复上述讨论, 即添加线性无关的向量重新定义 V_{m+1}, 并反复利用命题 0.7和推论**??**的结论, 最后可以得到 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 它们构成 V 的一组基, 且满足 $\boldsymbol{e}_j \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i(1 \leqslant j \leqslant n)$.

证法二:任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 对任意的正整数 k, 构造 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2+\cdots+k^{n-1}\boldsymbol{e}_n$, 设向量族 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_k \mid k=1,2,\cdots\}$. 由例题**??**可知,$S$ 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基. 因为 V_i 都是 V 的真子空间, 所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个向量. 又由于 S 是无限集合, 故存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不属于任何一个 V_i. 进一步, 在 S 中一定还存在 n 个不同的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}$, 使得每个 $\boldsymbol{\alpha}_{k_j}$ 都不属于任何一个 V_i, 此时 $\{\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}\}$ 就构成了 V 的一组基. □

定义 0.2 ($U-$ 陪集与商空间)

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,U 是 V 的子空间. 对任意的 $\boldsymbol{v} \in V$, 集合 $\boldsymbol{v}+U:=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$ 称为 $\boldsymbol{v}$ 的$U-$**陪集**. 在所有 $U-$ 陪集构成的集合 $S=\{\boldsymbol{v}+U \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ 中, 定义加法和数乘如下, 其中 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$,$k \in \mathbb{K}$:

$$(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U):=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+U,\ k \cdot(\boldsymbol{v}_1+U):=k \cdot \boldsymbol{v}_1+U.$$

S 在上述加法和数乘下成为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 称为 V 关于子空间 U 的**商空间**, 记为 V/U.

笔记 容易验证 S 在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 因此商空间是良定义的. 故任意 V 的子空间 U 都存在相应的商空间.

注 商空间的向量是 $U-$ 陪集. 商空间的零向量就是 $\mathbf{0}+U=U$.

命题 0.9 ($U-$ 陪集的性质)

(1) $U-$ 陪集之间的关系是: 作为集合或者相等, 或者不相交;

(2) $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$(作为集合相等) 当且仅当 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in U$. 特别地,$\boldsymbol{v}+U$ 是 V 的子空间当且仅当 $\boldsymbol{v}\in U$;

(3) S 中的加法以及 $\mathbb{K}$ 关于 S 的数乘不依赖于代表元的选取, 即若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则 $(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U)=(\boldsymbol{v}_1'+U)+(\boldsymbol{v}_2'+U)$, 以及 $k\cdot(\boldsymbol{v}_1+U)=k\cdot(\boldsymbol{v}_1'+U)$;

证明

(1) 设 $(\boldsymbol{v}_1+U)\cap(\boldsymbol{v}_2+U)\neq\varnothing$, 即存在 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}_2$, 从而 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\in U$, 于是

$$\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)+U\subseteq\boldsymbol{v}_2+U,\ \boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)+U\subseteq\boldsymbol{v}_1+U,$$

因此 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$.

(2) 由 (1) 的证明过程即得. 特别地,$\boldsymbol{v}+U$ 是 V 的子空间 $\Rightarrow\mathbf{0}\in\boldsymbol{v}+U\Rightarrow$ 存在$\boldsymbol{u}\in U$, 使得$\mathbf{0}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\Rightarrow\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}\in U$. 若 $\boldsymbol{v}\in U$, 则一方面,$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{v}+U$, 存在 $\boldsymbol{u}'\in U$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'$. 又 $\boldsymbol{v}\in U$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'\in U$. 故 $\boldsymbol{v}+U\subset U$. 另一方面,$\forall\boldsymbol{\beta}\in U$, 有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}$. 又由 $\boldsymbol{v}\in U$ 可知 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}\in U$, 于是 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{v}+U$. 故 $\boldsymbol{v}+U\supset U$. 因此 $\boldsymbol{v}+U=U$ 是 V 的子空间.

(实际上, 若 $\boldsymbol{v}\in U$, 则因为 $\boldsymbol{v}\in U$并且$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{v}+U$, 所以 $\boldsymbol{v}+U\cap U\neq\varnothing$. 故由 (1) 可知 $\boldsymbol{v}+U=U$ 是 V 的子空间. 这样也能得到证明.)

(3) 若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则存在 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{u}_2$, 从而 $(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_2')=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\in U$,$k\cdot\boldsymbol{v}_1-k\cdot\boldsymbol{v}_1'=k\cdot\boldsymbol{u}_1\in U$, 于是由 (2) 可得

$$(\boldsymbol{v}_1+U)+(\boldsymbol{v}_2+U)=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+U=(\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_2')+U=(\boldsymbol{v}_1'+U)+(\boldsymbol{v}_2'+U),$$

$$k\cdot(\boldsymbol{v}_1+U)=k\cdot\boldsymbol{v}_1+U=k\cdot\boldsymbol{v}_1'+U=k\cdot(\boldsymbol{v}_1'+U).$$

□

注 若 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$ 以及 $\boldsymbol{v}_2+U=\boldsymbol{v}_2'+U$, 则 $\forall\boldsymbol{u}_1'\in U$, 有 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1'\in\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_1'+U$. 从而存在 $\boldsymbol{u}_1''\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1'=\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{u}_1''$. 于是 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1''-\boldsymbol{u}_1'$. 再令 $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_1''-\boldsymbol{u}_1'$, 则 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{u}_1\in U$. 同理可得, 存在 $u_2\in U$, 使得 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{u}_2\in U$.

命题 0.10 (商空间的维数公式和商空间与补空间同构)

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,U 是 V 的子空间,W 是 U 的补空间, 证明:$\dim V/U=\dim V-\dim U$, 并且存在线性同构 $\varphi:W\to V/U$.

证明 取子空间 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$, 补空间 W 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 则 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基. 我们断言 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 是商空间 V/U 的一组基. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, 设 $\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i$, 则

$$\boldsymbol{v}+U=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=\left(\sum_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=\sum_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U).$$

另一方面, 设 $a_{m+1},\cdots,a_n\in\mathbb{K}$, 使得 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U)=\mathbf{0}+U$, 即 $\left(\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\right)+U=U$, 从而 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i\in U$. 于是存

在 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{K}$, 使得 $\sum_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i=-\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{e}_i$, 即 $\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$, 从而 $a_i=0(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}+U,\cdots,\boldsymbol{e}_n+U\}$ 线性无关. 因此,$\dim V/U=n-m=\dim V-\dim U$.

对任意的 $\boldsymbol{w}\in W$, 设 $\boldsymbol{w}=\sum_{i=m+1}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i$, 定义映射 $\varphi:W\to V/U$ 为

$$\varphi(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}+U=\sum_{i=m+1}^{n}a_i(\boldsymbol{e}_i+U).$$

容易验证 φ 保持加法和数乘, 并且是一一对应 (W 的基 e_i 映射过去得到 $\varphi(e_i)$ 仍是 V/U 的基,$i=m+1,\cdots,n$.), 从而是线性同构. □

0.1.2 练习

练习 0.1 设 $V=M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵全体组成的线性空间,$\boldsymbol{A}\in V$, 求证: 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵全体 $C(\boldsymbol{A})$ 组成 V 的子空间且其维数不为零. 又若 T 是 V 的非空子集, 求证: 与 T 中任一矩阵乘法可交换的矩阵全体 $C(T)$ 也构成 V 的子空间且其维数不为零.

证明 由于纯量阵 $c\boldsymbol{I}_n$ 与任一 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换, 故 $L(\boldsymbol{I}_n)\subseteq C(\boldsymbol{A})$. 任取 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in C(\boldsymbol{A}),k\in\mathbb{K}$, 容易验证 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\in C(\boldsymbol{A}),k\boldsymbol{B}\in C(\boldsymbol{A})$, 故 $C(\boldsymbol{A})$ 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间且其维数不为零. $C(T)$ 的结论同理可证. □

练习 0.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,0,1)$ 是四维实行向量空间 V 中的向量, 它们生成的子空间为 V_1, 又向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,1,1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,-3,-1),\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,-1,1)$ 生成的子空间为 V_2, 求子空间 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的基.

解 解法一:V_1+V_2 是由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的, 因此只要求出这 6 个向量的极大无关组即可. 将这 6 个向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\-1&2&0&1&-3&-1\\0&1&1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\0&2&2&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\0&0&0&-2&0&-4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为 V_1+V_2 的基 (不唯一).

再来求 $V_1\cap V_2$ 的基. 首先注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基 (从上面的矩阵即可看出), 又不难验证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_2 的基,V_2 中的向量可以表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性组合. 假设 $t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 属于 V_1, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩相等 (因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基). 因此, 我们可以用矩阵方法来求出参数 t_1,t_2. 注意到

$$\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\-1&2&t_1-3t_2\\0&1&t_1-t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\0&2&-2t_2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-t_1+t_2\\0&1&t_1-t_2\\0&0&-2t_1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故可得 $t_1=0$, 所以 $V_1\cap V_2$ 的基可取为 $\boldsymbol{\beta}_2$.

解法二: 求 V_1+V_2 的基同解法 1, 现用解线性方程组的方法来求 $V_1\cap V_2$ 的基. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_2 的基, 故对任一向量 $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_2,\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=(-x_3)\boldsymbol{\beta}_1+(-x_4)\boldsymbol{\beta}_2$. 因此, 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 等价于求解线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}.$$

通过初等行变换将其系数矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 进行化简:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故上述线性方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=k(-1,1,0,1)$, 从而 $\boldsymbol{\gamma}=-k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=-k\boldsymbol{\beta}_2(k\in\mathbb{R})$, 于是 $\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $V_1\cap V_2$

的基. □