

## 0.1 矩阵的法式

### 引理 0.1

设  $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{m \times n}$  是任一非零  $\lambda$ -矩阵, 则  $A(\lambda)$  必相抵于这样的一个  $\lambda$ -矩阵  $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))_{m \times n}$ , 其中  $b_{11}(\lambda) \neq 0$  且  $b_{11}(\lambda)$  可整除  $B(\lambda)$  中的任一元素  $b_{ij}(\lambda)$ .



**证明** 设  $k = \min\{\deg a_{ij}(\lambda) \mid a_{ij}(\lambda) \neq 0, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ , 我们对  $k$  用数学归纳法. 首先, 经行对换及列对换可将  $A(\lambda)$  的第  $(1, 1)$  元素变成次数最低的非零多项式, 因此不妨设  $a_{11}(\lambda) \neq 0$  且  $\deg a_{11}(\lambda) = k$ . 若  $k = 0$ , 则  $a_{11}(\lambda)$  是一个非零常数, 结论显然成立. 假设对非零元素次数的最小值小于  $k$  的任一  $\lambda$ -矩阵, 引理的结论成立, 现考虑非零元素次数的最小值等于  $k$  的  $\lambda$ -矩阵  $A(\lambda)$ . 若  $a_{11}(\lambda)$  可整除所有的  $a_{ij}(\lambda)$ , 则结论已成立. 若否, 设在第一列中有元素  $a_{i1}(\lambda)$  不能被  $a_{11}(\lambda)$  整除, 作带余除法:

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda).$$

用  $-q(\lambda)$  乘以第一行加到第  $i$  行上, 第  $(i, 1)$  元素就变为  $r(\lambda)$ . 注意到  $r(\lambda) \neq 0$  且  $\deg r(\lambda) < \deg a_{11}(\lambda) = k$ , 由归纳假设即知结论成立.

同样的方法可施于第一行. 因此我们不妨设  $a_{11}(\lambda)$  可整除第一行及第一列. 这时, 设  $a_{21}(\lambda) = a_{11}(\lambda)g(\lambda)$ . 将第一行乘以  $-g(\lambda)$  加到第二行上, 则第  $(2, 1)$  元素变为零. 用同样的方法可消去第一行、第一列除  $a_{11}(\lambda)$  以外的所有元素, 于是  $A(\lambda)$  经初等变换后变成下列形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2}(\lambda) & \cdots & a'_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

这时, 若  $a_{11}(\lambda)$  可整除所有其他元素, 则结论已成立. 若否, 比如  $a_{11}(\lambda)$  不能整除  $a'_{ij}(\lambda)$ , 则将第  $i$  行加到第一行上去, 这时在第一行又出现了一元素  $a'_{ij}(\lambda)$ , 它不能被  $a_{11}(\lambda)$  整除. 重复上面的做法, 通过归纳假设即可得到结论.  $\square$

### 定理 0.1

设  $A(\lambda)$  是一个  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵, 则  $A(\lambda)$  相抵于对角阵

$$\text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda), 0, \dots, 0\}, \quad (1)$$

其中  $d_i(\lambda)$  是非零首一多项式且  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ). 我们称上式中的对角  $\lambda$ -矩阵为  $A(\lambda)$  的**法式或相抵标准型或 Smith 标准型**.



**证明** 对  $n$  用数学归纳法, 当  $n = 1$  时结论显然, 现设  $A(\lambda)$  是  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵. 由引理 0.1 可知  $A(\lambda)$  相抵于  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵  $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$ , 其中  $b_{11}(\lambda) \mid b_{ij}(\lambda)$  对一切  $i, j$  成立. 因此, 将  $B(\lambda)$  的第一行乘以  $\lambda$  的某个多项式加到第二行上去便可消去  $b_{21}(\lambda)$ . 同理可依次消去第一列除  $b_{11}(\lambda)$  以外的所有元素. 再用类似方法消去第一行其余元素. 这样便得到了一个矩阵:

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \cdots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \cdots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

不难看出, 这时  $b_{11}(\lambda)$  仍可整除所有的  $b'_{ij}(\lambda)$ . 设  $c$  为  $b_{11}(\lambda)$  的首项系数, 记  $d_1(\lambda) = c^{-1}b_{11}(\lambda)$ , 设  $\bar{B}(\lambda)$  为上面的矩阵中右下方的  $n-1$  阶  $\lambda$ -矩阵, 则由归纳假设可知存在  $P(\lambda)$  及  $Q(\lambda)$ , 使

$$P(\lambda)\bar{B}(\lambda)Q(\lambda) = \text{diag}\{d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda); 0, \dots, 0\},$$

且  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 2, \dots, r-1$ ), 其中  $P(\lambda)$  与  $Q(\lambda)$  可写成为有限个  $n-1$  阶初等  $\lambda$ -矩阵之积. 因此

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & O \\ O & \bar{B}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix} = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda); 0, \dots, 0\},$$

且

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

可写成有限个  $n$  阶初等  $\lambda$ -矩阵之积. 于是只需证明  $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$  即可. 但这点很容易看出, 事实上由于  $\bar{B}(\lambda)$  中的任一元素均可被  $d_1(\lambda)$  整除, 因此  $P(\lambda)\bar{B}(\lambda)Q(\lambda)$  中的任一元素也可被  $d_1(\lambda)$  整除, 这就证明了定理.  $\square$

**注** 我们上面对  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵证明了它必相抵于一个对角阵. 事实上, 对长方  $\lambda$ -矩阵, 结论也同样成立, 证明也类似. (1) 式中的  $r$  通常称为  $A(\lambda)$  的秩. 但要注意即使某个  $n$  阶  $\lambda$ -矩阵的秩等于  $n$ , 它也未必是可逆  $\lambda$ -矩阵.

### 推论 0.1

任一  $n$  阶可逆  $\lambda$ -矩阵都可表示为有限个初等  $\lambda$ -矩阵之积.

**证明** 由定理 0.1, 存在  $P(\lambda), Q(\lambda)$ , 使可逆阵  $A(\lambda)$  适合

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda); 0, \dots, 0\},$$

其中  $P(\lambda), Q(\lambda)$  为有限个初等  $\lambda$ -矩阵之积. 因为上式左边是个可逆阵, 故右边的矩阵也可逆, 从而  $r = n$ . 注意一个对角  $\lambda$ -矩阵要可逆必须  $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$  皆为非零常数, 又它们都是首一多项式, 故只能是  $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \dots = d_n(\lambda) = 1$ , 于是

$$A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}Q(\lambda)^{-1}.$$

因为初等  $\lambda$ -矩阵的逆仍是初等  $\lambda$ -矩阵, 故  $P(\lambda)^{-1}$  与  $Q(\lambda)^{-1}$  都是有限个初等  $\lambda$ -矩阵之积, 从而  $A(\lambda)$  也是有限个初等  $\lambda$ -矩阵之积.  $\square$

### 推论 0.2

设  $A$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵, 则  $A$  的特征矩阵  $\lambda I_n - A$  必相抵于

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_m(\lambda)\},$$

其中  $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ). 我们称上式中的对角  $\lambda$ -矩阵为  $A$  的特征矩阵  $\lambda I_n - A$  的**法式**或**相抵标准型**或**Smith 标准型**.

**证明** 由定理 0.1, 存在  $P(\lambda), Q(\lambda)$ , 使

$$P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda); 0, \dots, 0\},$$

其中  $P(\lambda), Q(\lambda)$  为有限个初等  $\lambda$ -矩阵之积. 根据  $\lambda$ -矩阵初等变换的定义以及行列式的性质可得, 上式左边的行列式等于  $c|\lambda I_n - A|$ , 其中  $c$  是一个非零常数, 从而上式右边的行列式不为零, 故  $r = n$ . 把  $d_i(\lambda)$  中的常数多项式写出来 (因是首一多项式, 故为常数 1), 即得结论.  $\square$

**例题 0.1** 求  $\lambda I - A$  的**法式**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**注** 求  $\lambda$ -矩阵的**法式**都可以参考这个步骤.

**解**

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{3r_1+r_2, -\lambda r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1+j_2, -(\lambda+1)j_1+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{-3j_2+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 6 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-4\lambda+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{j_2 \leftrightarrow j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \lambda-1 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{6j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6(\lambda-1) \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & 6(\lambda-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\lambda-1)j_2+j_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\frac{1}{6}j_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \xrightarrow{-(-\lambda^2-4\lambda+4)r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□