0.1 相抵标准型及其应用

定理 0.1 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

♡

证明

□

命题 0.1 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

♠

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr}\right)\boldsymbol{Q}\\ &=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q}+\cdots+\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}.\end{aligned}$$

于是记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q},\cdots,\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}$, 则每个 $\boldsymbol{A}_i$ 的秩都等于 1. 故 $\boldsymbol{A}$ 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_k, k<r$, 且每个 $\boldsymbol{B}_i$ 的秩都等于 1, 则由命题**????**可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_2)+\cdots+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_k)=k$, 这与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾, 故不可能. □

命题 0.2 (对称矩阵的秩 1 分解)

秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

♠

证明 设 A 是一个秩为 r 的对称矩阵, 则存在一个可逆矩阵 C, 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix}I_r & \\ & O\end{pmatrix}=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr}.$$

从而

$$\begin{aligned}A&=(C^T)^{-1}(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})C^{-1}\\ &=(C^T)^{-1}E_{11}C^{-1}+(C^T)^{-1}E_{22}C^{-1}+\cdots+(C^T)^{-1}E_{nn}C^{-1}.\end{aligned}$$

因为 E_{ii} 的秩为 1, 且 $(C^T)^{-1}$,C^{-1} 均可逆, 所以 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 的秩也为 1. 又由于

$$((C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1})^T=(C^{-1})^TE_{ii}^TC^{-1}=(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}.$$

因此 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 也是对称矩阵. 故 A 可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和. □

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n,p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵,$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立的充要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵.

笔记 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $\boldsymbol{A}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{CQ}_2$,$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1).$$

从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1).$$

于是由假设可知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1$ 有解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1$. 记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2$, 则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}+\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

故可以不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_0$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 的解, 则将 $\boldsymbol{M}$ 的第一分块列右乘 $-\boldsymbol{X}_0$ 加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-\boldsymbol{Y}_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

再证必要性. 设 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$ 为非异阵,$r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),s=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{C}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Y}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}_2\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{Y}_4\end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 $\boldsymbol{M}$ 的如下分块初等变换:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_4\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r+s$, 故 $\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{O}$. 于是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

有解, 例如 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{O},\boldsymbol{Y}_3=\boldsymbol{C}_3$, 其余分块取法任意. □

命题 0.3 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$(行满秩), 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$(这样的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的左逆);

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$(列满秩), 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_m$(这样的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的右逆).

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_n\\O\end{pmatrix},$$

因此 $(I_n,O)PAQ=I_n$, 即 $(I_n,O)PA=Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n,O)PA=I_n$. 令 $B=Q(I_n,O)P$ 即可.

(2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论.

□

推论 0.1

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD=AE$, 则 $D=E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA=EA$, 则 $D=E$.

命题 0.4 (满秩分解)

设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 证明:

(1) $A=BC$, 其中 B 是 $m\times r$(列满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(B)=r$,C 是 $r\times n$(行满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(C)=r$, 这种分解称为 A 的满秩分解;

(2) 若 A 有两个满秩分解 $A=B_1C_1=B_2C_2$, 则存在 r 阶非异阵 P, 使得 $B_2=B_1P,C_2=P^{-1}C_1$.

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}(I_r,O)Q.$$

令 $B=P\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}$,$C=(I_r,O)Q$, 即得结论.

(2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在 $r\times m$ 行满秩阵 S_2,$n\times r$ 列满秩阵 T_2, 使得 $S_2B_2=I_r$,$C_2T_2=I_r$, 于是

$$B_2=B_2(C_2T_2)=(B_2C_2)T_2=(B_1C_1)T_2=B_1(C_1T_2),$$

$$C_2=(S_2B_2)C_2=S_2(B_2C_2)=S_2(B_1C_1)=(S_2B_1)C_1,$$

$$(S_2B_1)(C_1T_2)=S_2(B_1C_1)T_2=S_2(B_2C_2)T_2=(S_2B_2)(C_2T_2)=I_r.$$

令 $P=C_1T_2$, 即得结论.

□

命题 0.5

$A=BC$ 是满秩分解当且仅当 B 的 r 个列向量是 A 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当 C 的 r 个行向量是 A 的 m 个行向量张成线性空间的一组基.

证明

□

例题 0.2 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n\times m$ 矩阵 B, 使得 $ABA=A$.

笔记 证法一的不妨设原因与例题 0.1 类似.

证明 证法一: 设 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$, 其中 P 是 m 阶非异阵,Q 是 n 阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵变换:$A\mapsto PAQ,B\mapsto Q^{-1}BP^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$ 是相抵标准型. 设 $B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$ 为对应的分块, 由 $ABA=A$ 可得 $B_1=I_r$, 其余分块取法任意.

证法二:设 $A=CD$ 为 A 的满秩分解,E 为列满秩阵 C 的左逆,F 是行满秩阵 D 的右逆. 令 $B=FE$, 则

$$ABA=(CD)(FE)(CD)=C(DF)(EC)D=CD=A.$$

□

例题 0.3 设 A,B 分别是 $3\times 2, 2\times 3$ 矩阵且满足

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

试求 BA.

证明 解法一: 通过简单的计算可得 $\mathrm{r}(AB)=2$, 从而 $\mathrm{r}(A)\geq 2,\mathrm{r}(B)\geq 2$. 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=2$, 即 A 是列满秩阵,B 是行满秩阵. 又注意到 $(AB)^2=9AB$, 经整理可得 $A(BA-9I_2)B=O$. 根据推论 0.1, 可以在上式的左边消去 A, 右边消去 B, 从而可得 $BA=9I_2$.

解法二:由解法一中矩阵秩的计算可知,AB 是题中 3 阶矩阵 C 的满秩分解. 注意到 C 的后两列线性无关, 因此可取另一种满秩分解为

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -2\\ 5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_1B_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2)可知, 存在可逆矩阵 P, 使得 $A_1=AP,B_1=P^{-1}B$. 于是 $B_1A_1=P^{-1}BAP$, 故 BA 相似于 $B_1A_1=9I_2$, 从而 $BA=P^{-1}(9I_2)P=9I_2$.

解法三: 经简单的计算可得 $|\lambda I_3-AB|=\lambda(\lambda-9)^2$, 且特征值 9 的几何重数也等于 2, 因此 AB 可对角化. 由特征值的降价公式可得 $|\lambda I_2-BA|=(\lambda-9)^2$, 从而 BA 的两个特征值都是 9, 于是 BA 是可逆矩阵 (特征值都非零). 因此由命题??可知 BA 也可对角化, 于是 BA 相似于 $9I_2$, 即存在可逆矩阵 P, 使得 $BA=P^{-1}(9I_2)P=9I_2$. □

命题 0.6 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)

设 A 是 n 阶方阵且 $\mathrm{r}(A)=r$, 求证:$A^2=A$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n\times r$ 矩阵 S 和秩等于 r 的 $r\times n$ 矩阵 T, 使得 $A=ST,TS=I_r$.

证明 充分性显然, 现证必要性. 设 P,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q.$$

代入 $A^2=A$ 消去两侧的非异阵 P 和 Q, 可得

$$\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

只需令

$$S=P\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r\\ O\end{pmatrix},T=(I_r,O)\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,$$

则 S 列满秩,I 行满秩, 经简单计算即得结论. □

推论 0.2 (幂等矩阵的迹和秩相等)

设 A 为 n 阶幂等矩阵, 则 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{r}(A)$.

证明 证法一:由命题 0.6可知,$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(ST)=\mathrm{tr}(TS)=\mathrm{tr}(I_r)=r=\mathrm{r}(A)$.

证法二 (相似标准型):事实上, 由 $A^2=A$ 可知, 存在可逆矩阵 P, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} I_r\\ O\end{pmatrix}(I_r,O)P^{-1},$$

令 $S=P\begin{pmatrix} I_r\\ O\end{pmatrix},T=(I_r,O)P^{-1}$, 可得 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(ST)=\mathrm{tr}(TS)=\mathrm{tr}(I_r)=r=\mathrm{r}(A)$. □