0.1 中值极限问题

此类问题有一个固定操作, 即对中值点再套一次中值定理, 使得中值参数可以暴露出来, 从而解出参数求极限得到证明.

例题 0.1 设 $f\in C^2[0,1]$, $f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$, 证明对任何 $x\in(0,1)$, 存在 $\xi(x)\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x,$$

且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

证明 对 $\forall x\in(0,1)$, 由积分中值定理可知, 存在 $\xi(x)\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x.$$

从而对 $\forall x\in(0,1)$, 由 Taylor 定理可知, 存在 $\theta(x)\in(0,\xi(x))$, 使得

$$f(\xi(x))=f(0)+f'(0)\xi(x)+\frac{1}{2}f''(\theta(x))\xi^2(x)=f(0)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x).$$

从而将 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x$ 代入上式可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(0)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x)\right].$$

故 $f''(\theta(x))\xi^2(x)=2\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}-f(0)\right)$. 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f''(\theta(x))=f''(0).$$

因此由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}f''(0)\lim_{x\to 0^+}\frac{\xi^2(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(\theta(x))\xi^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(0)\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(f(x)-f(0)\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{3x}=\frac{f''(0)}{3}.\end{aligned}$$

又 $f''(0)\neq 0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi^2(x)}{x^2}=\frac{1}{3}$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

例题 0.2 设 f 在 $x=a$ 的邻域 $n+p$ 阶可导且 $p\geqslant 1$, 于是有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

如果对于 $j=1,2,\cdots,p-1$ 都有 $f^{(n+j)}(a)=0, f^{(n+p)}(a)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}$.

证明 由 Taylor 中值定理及条件可知, 存在 $\theta\in U(a)$, 使得

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^p. \tag{2}$$

从而结合上式, 再利用带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\lim_{x\to a^+}f^{(n+p)}(\theta)=\lim_{x\to a^+}p!\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(c-a)^p}=\lim_{x\to a^+}p!\frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{p!}(c-a)^p+o((c-a)^p)}{(c-a)^p}=f^{(n+p)}(a).$$

于是利用(1)(2)式, 再结合带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^p\overset{(2)}{=}\lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right]\overset{(1)}{=}\lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{\frac{n![f(x)-\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j]}{(x-a)^n}-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to a^+}\left[n!p!\cdot\frac{f(x)-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}{(x-a)^{n+p}f^{(n+p)}(\theta)}\right] = \frac{n!p!}{f^{(n+p)}(a)}\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p}+o[(x-a)^{n+p}]}{(x-a)^{n+p}} \\
&= \frac{n!p!}{(n+p)!}.
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{c-a}{x-a} = \sqrt[p]{\dfrac{n!p!}{(n+p)!}}$. □