

0.1 内积空间的基本概念

定义 0.1 (Euclid 空间)

设 V 是实数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\alpha, \beta\}$, 都唯一地对应一个实数, 记为 (α, β) , 且适合如下规则:

- (1) $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$;
- (2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
- (3) $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$, c 为任一实数;
- (4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,

则称在 V 上定义了一个内积. 实数 (α, β) 称为 α 与 β 的内积. 线性空间 V 称为**实内积空间**. 有限维实内积空间称为 **Euclid 空间**, 简称为**欧氏空间**.

定义 0.2 (酉空间)

设 V 是复数域上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{\alpha, \beta\}$, 都唯一地对应一个复数, 记为 (α, β) , 且适合如下规则:

- (1) $(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)}$;
- (2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
- (3) $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$, c 为任一复数;
- (4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,

则称在 V 上定义了一个内积. 复数 (α, β) 称为 α 与 β 的内积. 线性空间 V 称为**复内积空间**. 有限维复内积空间称为**酉空间**.

注 实内积空间的定义与复内积空间的定义是相容的. 事实上, 对一个实数 $a, \bar{a} = a$, 故定义 0.1 中的 (1) 与定义 0.2 中的 (1) 是一致的. 因此, 我们经常将这两种空间统称为内积空间, 在某些定理的叙述及证明中也不区分它们, 而统一作为复内积空间来处理. 但是, 需要注意的是对复内积空间, 定义 0.2 中的 (1), (3) 意味着:

$$(\alpha, c\beta) = \bar{c}(\alpha, \beta).$$

定义 0.3 (标准内积)

1. 设 \mathbb{R}^n 是 n 维实列向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

则在此定义下 \mathbb{R}^n 成为一个欧氏空间, 上述内积称为 \mathbb{R}^n 的标准内积.

2. 设 \mathbb{C}^n 是 n 维复列向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

则在此定义下 \mathbb{C}^n 成为一个酉空间, 上述内积称为 \mathbb{C}^n 的标准内积.

注 对 n 维实或复行向量空间, 我们也可同样定义标准内积.

例题 0.1

1. 设 V 是由 $[a, b]$ 区间上连续函数全体构成的实线性空间, 设 $f(t), g(t) \in V$, 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

则不难验证这是一个内积, 于是 V 成为内积空间. 这是一个无限维实内积空间.

2. (1) 设 V 是 n 维实列向量空间, G 是 n 阶正定实对称阵, 对 $\alpha, \beta \in V$, 定义

$$(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta,$$

则这是一个内积, 并且 V 在上式的定义下成为欧氏空间.

(2) 设 U 是 n 维复列向量空间, 若有正定 Hermite 矩阵 H , 对 $\alpha, \beta \in U$, 定义:

$$(\alpha, \beta) = \alpha' H \bar{\beta}.$$

则这个 U 上的一个内积, 并且 U 在上式的定义下成为酉空间.

证明

1. 由内积空间的定义不难验证.

2. (1) 定义 0.1 中的 (2), (3) 显然成立. 对 (1), 注意到 $\alpha' G \beta$ 是实数, 其转置仍是它自己, 而 G 是对称阵, 故

$$(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta = (\alpha' G \beta)' = \beta' G' \alpha = \beta' G \alpha = (\beta, \alpha).$$

又从 G 是正定阵即可知道 (4) 成立.

(2) 根据内积和酉空间的定义不难验证.

□

注 当 $G = I_n$ 为单位阵时, V 上内积就是标准内积. 对实列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha' \beta.$$

对实行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha \beta'.$$

当 $H = I_n$ 为单位阵时, U 上内积就是标准内积. 对复列向量空间, 标准内积可用矩阵乘法表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha' \bar{\beta}.$$

对复行向量空间, 标准内积也可表示为

$$(\alpha, \beta) = \alpha \bar{\beta}'.$$

定义 0.4 (范数)

设 V 是实或复的内积空间, α 是 V 中的向量, 定义 α 的**长度** (或**范数**) 为

$$\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

即实数 (α, α) 的算术平方根.

♣

注 注意由定义 0.1 和定义 0.2 中的规则 (4) 可知, (α, α) 总是非负实数. 从长度的定义知, $\|\alpha\| = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$. 当 $V = \mathbb{R}^n$ 且内积为标准内积时, 若 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

定义 0.5 (两个向量的距离)

定义内积空间中两个向量的距离. 设 $\alpha, \beta \in V$, 定义 α 与 β 的**距离**为

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|.$$

显然 $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.

♣

定理 0.1 (范数的基本性质)

设 V 是实或复的内积空间, $\alpha, \beta \in V, c$ 是任一常数 (实数或复数), 则

$$(1) \|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|;$$

$$(2) (\text{Cauchy - Schwarz 不等式}) |(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|;$$

(3)(三角不等式) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.



证明

(1) $\|c\alpha\|^2 = (c\alpha, c\alpha) = c\bar{c}(\alpha, \alpha) = |c|^2\|\alpha\|^2$, 故 $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$.

(2) 若 $\alpha = 0$, 则 $(0, \beta) = (0 + 0, \beta) = 2(0, \beta)$, 故 $(0, \beta) = 0$, 因此 (2) 成立. 若 $\alpha \neq 0$, 令

$$v = \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha,$$

则 $(v, \alpha) = 0$, 且

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v\|^2 &= \left(\beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha, \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha \right) \\ &= (\beta, \beta) - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} (\alpha, \beta) \\ &= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha, \beta)|^2}{\|\alpha\|^2}, \end{aligned}$$

由此即可得 (2).

(3) 我们有

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= \|\alpha\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + \|\beta\|^2 \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + \overline{(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

由 (2) 得 $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$, $\overline{(\alpha, \beta)} \leq \|\alpha\|\|\beta\|$, 故 $\|\alpha + \beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\| = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$.

□

定义 0.6 (向量的夹角)

当 V 是实内积空间时, 定义非零向量 α, β 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos \theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}. \quad (1)$$

当 V 是复内积空间时, 定义非零向量 α, β 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos \theta = \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|}.$$

内积空间中两个向量 α, β 若适合 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 垂直或正交, 我们用记号 $\alpha \perp \beta$ 来表示. 显然, 我们有以下结论:

1. 零向量和任何向量都正交;
2. 若 α 与 β 正交, 则 β 也与 α 正交;
3. 两个非零向量 α, β 正交时夹角为 90° .



注 (1) 式中要使 θ 有意义, 必须保证 $|\cos \theta| \leq 1$, 而这就是范数的基本性质中的 (2). 因此上述定义的 θ 都是良定义的.

推论 0.1

1. (勾股定理) 在范数的基本性质 (3) 的证明中我们可看出: 若 α 与 β 正交, 则 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0$, 因此

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

上式通常称为勾股定理, 它是平面几何中勾股定理的推广.

2. (Cauchy 不等式) 设 V 是 n 维实内积空间, 内积取标准内积, 从范数的基本性质 (2) 立即可得到下列

Cauchy 不等式:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

3. (Schwarz 不等式) 设 V 是由 $[a, b]$ 区间上连续函数全体构成的实线性空间, 内积如例题 0.1(1), 则从范数的基本性质 (2) 可得下列 Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt.$$

