

0.1 正规子群

定义 0.1 (正规子群)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \subset G$. 我们称 N 是个**正规子群**, 记作 $N \triangleleft G$, 若

N 是个子群,

$$\forall a \in G, aN = Na.$$



注 注意 $aN = Na \not\Rightarrow an = na, \forall n \in N$. 虽然 $an = na, \forall n \in N \Rightarrow aN = Na$, 但是 $aN = Na \not\Rightarrow an = na, \forall n \in N$. 实际上, $aN = Na \Leftrightarrow \exists n, n' \in N$ s.t. $an = n'a$.

引理 0.1

设 G 是一个么半群, 若 $H < G$, 则 $HH = H$.



笔记 因为群也是么半群, 所以这个引理对群也成立.

证明 一方面, 对 $\forall h_1, h_2 \in H$, 根据乘法封闭性 (乘法是 H 上的代数运算), 都有 $h_1 h_2 \in H$. 故 $HH \subset H$.

另一方面, 设 $h \in H$, 则 $h = he \in HH$, 其中 e 是 G 的单位元. 故 $H \subset HH$. 因此 $HH = H$. □

命题 0.1

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G, a, b \in G$, 则

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N.$$

是良定义的.



注 因为陪集代表元的不唯一性可能导致上述乘积运算结果不唯一, 所以上述乘积运算不一定是良定义的, 需要给出证明.

结论 元素与群 (其实只要满足结合律的半群就足够了) 的乘积满足广义结合律. 例如: 设 G 是一个群, 若 $H, K < G, a, b \in G$, 则

$$aHbK = (aH)(bK) = a((Hb)K) = a(H(bK)) = (a(Hb))K = ((aH)b)K.$$

$$abHK = (ab)(HK) = a((bH)K) = a(b(HK)) = ((ab)H)K.$$

.....

即两个陪集相乘可以看作一个陪集或两个陪集的乘积的陪集等.

证明 证法一: 设 $aN = a'N, bN = b'N$, 则由引理??可知 $a^{-1}a', b^{-1}b' \in N$, 我们只须证明 $abN = a'b'N$, 即 $(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' \in N$. 首先中间这个部分, 即 $a^{-1}a'$, 是在 N 中的. 接着, 利用 N 是个正规子群, 再结合引理??, 我们可以得到 $b^{-1}Nb = N$, 因此, $b^{-1}a^{-1}a'b' \in b^{-1}Nb' = N$. 进一步地, 由引理??可得 $abN = a'b'N$. 这就证明了良定义性.

证法二: 事实上, 这个乘法可以简单地理解成子集乘法, 即 $(aN)(bN) = \{xy : x \in aN, y \in bN\}$. 我们只须说明, 这从集合意义上, 等于 abN . 而这几乎是显然的. 由于 $Nb = bN$ 及引理 0.1, 我们有 $aNbN = abNN = abN$. 这样, 既然从集合意义上相等, 那么自然就是良定义的 (因为我们不必选取单位元). □

命题 0.2 (商群)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G$, 则 $(G/N, \cdot)$ 构成一个群, 称为 (G 在 N 上的) **商群**, 其中的单位元是 $eN = N$, 每个陪集 aN 的逆元是 $a^{-1}N$.



证明 由命题 0.1 可知商群 $(G/N, \cdot)$ 的乘法是良定义的.

封闭性: 对 $\forall aN, bN \in (G/N, \cdot)$, 其中 $a, b \in G$, 根据 G 对乘法的封闭性可得 $ab \in G$, 从而 $(aN)(bN) = abN \in$

$(G/N, \cdot)$.

结合律: 令 $a, b, c \in G$, 则利用乘法的定义, $(aNbN)cN = (abN)(cN) = ((ab)c)N$. 利用 G 对乘法的结合律, 得到这是等于 $(a(bc))N$ 的. 类似地, 这最终等于 $aN(bNcN)$.

单位元: 令 $a \in G$, 则 $aNeN = (ae)N = aN$, 类似地 $eNaN = aN$.

逆元: 令 $a \in G$, 则 $aNa^{-1}N = (aa^{-1})N = eN$, 类似地 $a^{-1}NaN = eN$.

综上, 若 $N \triangleleft G$, 则 G/N 在这个自然的乘法下构成群, 称为一个商群. \square

引理 0.2 (正规子群的等价条件)

令 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N < G$, 则下列命题等价

- (1) N 是 G 的正规子群, 即 $\forall a \in G, aN = Na$.
- (2) $\forall a \in G, aNa^{-1} = N$.
- (3) $\forall a \in G, aNa^{-1} \subset N$.
- (4) $\forall a \in G, \forall n \in N, ana^{-1} \in N$.

证明 显然 (3) 和 (4) 等价.

(1) \Leftrightarrow (2): 一方面, 设 N 是 G 的正规子群. 则由引理??可得 $\forall a \in G, aNa^{-1} = N$.

另一方面, 设 (2) 成立. 则由引理??可得 $\forall a \in G, aN = Na$.

(1) \Leftrightarrow (3): 一方面, 设 N 是 G 的正规子群. 令 $a \in G$, 则 $aN = Na$. 同时右乘 a^{-1} 并取一半的包含关系, 我们得到了 $aNa^{-1} \subset N$.

另一方面, 设 (3) 成立. 令 $a \in G$, 则由 $aNa^{-1} \subset N$ 及引理??得到 $aN \subset Na$, 由 $a^{-1}N(a^{-1})^{-1} \subset N$ 及引理??得到 $Na \subset aN$. 因此, $aN = Na$. \square

例题 0.1 证明: $SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$.

证明 显然 $SL(n, \mathbb{R}) < GL(n, \mathbb{R})$. 任取 $A \in GL(n, \mathbb{R}), N \in SL(n, \mathbb{R})$, 都有

$$\det(ANA^{-1}) = \frac{\det(A)\det(N)}{\det(A)} = \det(N) = 1.$$

从而 $ANA^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$. 故 $SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$. \square

命题 0.3 (正规子群的任意交还是正规子群)

令 $(N_i)_{i \in I}$ 是一族 G 的正规子群, 则它们的交集仍然是 G 的正规子群, 即

$$\bigcap_{i \in I} N_i \triangleleft G.$$

证明 首先, 由子群的任意交仍是子群可知 $\bigcap_{i \in I} N_i < G$. 因此我们只需证明正规性. 利用正规子群的等价条件 (3) 可知, 对 $\forall a \in G, \forall n \in \bigcap_{i \in I} N_i$, 我们只须证明 $ana^{-1} \in \bigcap_{i \in I} N_i$ 即可. 任取 $i \in I$, 则 $n \in N_i$. 由于 $N_i \triangleleft G$, 我们有 $ana^{-1} \in N_i$. 因此, 由 i 的任意性可知 $ana^{-1} \in \bigcap_{i \in I} N_i$. 这就证明了 $\bigcap_{i \in I} N_i \triangleleft G$. \square

命题 0.4

令 (G, \cdot) 是一个群, 则

$$\begin{aligned} \{e\} &\triangleleft G, \\ G &\triangleleft G. \end{aligned}$$

证明 平凡群: 怎么乘都是单位元, 所以对乘法封闭; 包含单位元; 唯一的元素的逆元还是单位元; 在这个群中, a 的左右陪集都是 $a\{e\} = \{e\}a = \{a\}$. 因此, $\{e\} \triangleleft G$.

整个群: 子群是显然的; 在整个群 G 中, 每个元素的左右陪集都是全集, 即 $aG = Ga = G$, 这是因为 $a \in G$. 因此, $G \triangleleft G$ (推论??). \square

推论 0.1

- (1) 若 G 是一个群, e 是其单位元, 则 $G/\{e\}$ 同构于 G , 即 $G/\{e\} \cong G$.
 (2) 若 G 是一个群, 则 G/G 是平凡群, 即 $G/G = \{e\}$.

证明

(1) 令

$$f: G \rightarrow G/\{e\}, a \mapsto a\{e\} = \{a\}.$$

显然 f 是双射. 对 $\forall a, b \in G$, 我们都有

$$f(ab) = \{ab\} = ab\{e\} = (a\{e\})(b\{e\}) = \{a\}\{b\} = f(a)f(b).$$

因此 f 也是同态映射. 于是 f 是同构映射. 故 $G/\{e\} \cong G$.

- (2) 由命题 0.2 及命题 0.4 可知 G/G 是一个群. 注意到 $\forall a \in G$, 都有 $aG = G$. 因此 $G/G = G$. 于是 $|G/G| = 1$. 故 $G/G = \{e\}$.

□

命题 0.5

令 (G, \cdot) 是个阿贝尔群, 则子群就是正规子群, 正规子群也就是子群, 即

$$H < G \iff H \triangleleft G$$

证明 \Leftarrow : 由于正规子群都是子群, 故显然成立.

\Rightarrow : 根据阿贝尔群满足交换律可知 $aH = \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} = Ha$.

□

定理 0.1 (群同构第一定理)

设 $f: G \rightarrow G'$ 是一个群同态, 则 $\ker(f) \triangleleft G$, 且 G 在 $\ker(f)$ 上的商群同构于 $\text{im}(f)$, 即

$$G/\ker(f) \cong \text{im}(f).$$

特别地, 若 f 是满同态, 则

$$G/\ker(f) \cong G'.$$

若 f 是单同态, 则

$$G/\{e\} \cong G \cong \text{im}(f).$$

若 G 是有限群, 则

$$\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{im}(f)|, \text{ 也即 } |G| = |\ker(f)||\text{im}(f)|.$$

□

注 要注意, 同态的像 $\text{im}(f)$ 未必是 G' 的正规子群, 往往只是普通的子群.

证明 根据命题 ?? 和 Lagrange 定理, 这三条推论都是显然的, 唯一要说明的是 $G/\{e\}$ 为什么同构于 G , 这由推论 0.1(1) 可直接得到. 这就意味着我们只须证明原命题即可.

首先要说明每个同态的核都是定义域的正规子群. 我们只须证明, 若 $a \in G, n \in \ker(f)$, 则 $ana^{-1} \in \ker(f)$. 注意到

$$f(ana^{-1}) = f(a)f(n)f(a)^{-1} = e'.$$

因此 $ana^{-1} \in \ker(f)$. 这就证明了 $\ker(f) \triangleleft G$.

接下来, 我们要找到一个从商群 $G/\ker(f)$ 到像集 $\text{im}(f)$ 的同构映射. 我们称这个映射叫 $\tilde{f}: G/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$, 对于 $a \in G$, 定义为

$$\tilde{f}(a\ker(f)) = f(a).$$

为了方便起见, 在不会引起歧义的情况下, 我们令 $N = \ker(f)$, 也即

$$\tilde{f}(aN) = f(a).$$

考虑到陪集代表元的不唯一性, 我们要证明良定义性. 假设 $aN = a'N$, 或 $a^{-1}a' \in N$, 只须证明 $f(a) = f(a')$, 而这是因为

$$f(a') = f(aa^{-1}a') = f(a)f(a^{-1}a') = f(a)f(eN) = f(a)e' = f(a).$$

其中 e 是 G 的单位元, e' 是 G' 的单位元. 这就证明了良定义性.

接下来, 我们要证明 \tilde{f} 既是同态, 也是双射 (单射 + 满射).

同态: 令 $a, b \in G$, 则 $\tilde{f}(aN) = f(a), \tilde{f}(bN) = f(b)$, 而由 $N = \ker f \triangleleft G$ 及 f 是一个群同态可得

$$\tilde{f}((aN)(bN)) = \tilde{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \tilde{f}(aN)\tilde{f}(bN).$$

这就证明了 \tilde{f} 是一个同态.

单射: 只须证明 $\ker(\tilde{f}) = \{N\}$. 设 $\tilde{f}(aN) = e'$, 则根据定义, $f(a) = e'$, 故 $a \in \ker(f) = N$, 所以 $aN = N$, 这就证明了 \tilde{f} 是一个单射.

满射: 令 $a' \in \text{im}(f)$, 取 $a \in G$ 使得 $a' = f(a)$. 因此, $\tilde{f}(aN) = f(a) = a'$, 这就证明了 \tilde{f} 是一个满射.

综上所述, \tilde{f} 是一个从商群 $G/\ker(f)$ 到像集 $\text{im}(f)$ 的同构. 作为结论,

$$G/\ker(f) \cong \text{im}(f).$$

这就完成了整个命题的证明. □

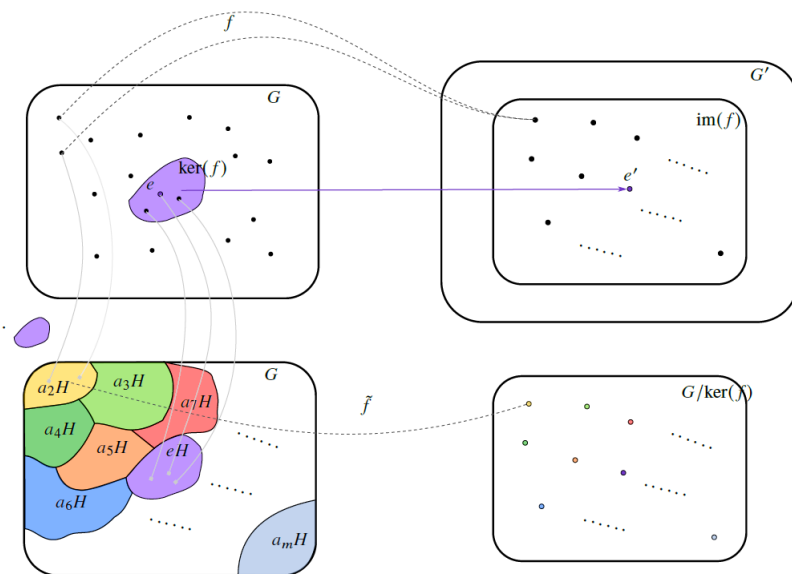


图 1: 群同构第一定理示意图

例题 0.2 证明: $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$.

证明 由命题??可知

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times.$$

是个满同态, 且 $\ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$, 故由群同构第一定理, 我们有

$$SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R}) \text{ 且 } GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times.$$

□

推论 0.2

设 G 是有限群, $f: G \rightarrow G'$ 是一个群同态, 则

$$|\operatorname{im} f| \mid \gcd(|G|, |G'|).$$

♡

证明 由群同构第一定理可知, $|\operatorname{im} f| \mid |G|$. 由 Lagrange 定理可知, $|\operatorname{im} f| \mid |G'|$. 故

$$|\operatorname{im} f| \mid \gcd(|G|, |G'|).$$

□

例题 0.3 设 $f: C_{12} \rightarrow C_{35}$ 是一个群同态, 求证: f 是平凡同态, 即对 $\forall x \in C_{12}$, 都有 $f(x) = e$, 也即 $\operatorname{im} f = \{e\}$, 其中 e 是 C_{35} 的单位元.

证明 由推论 0.2 可知, $|\operatorname{im} f| \mid \gcd(12, 35) = 1$. 又因为 $\operatorname{im} f < G'$, 所以 $\operatorname{im} f = \{e\}$. □

引理 0.3

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G, H < G$. 则 $HN < G$.

♡

证明 设 e 是 G 的单位元, 则由 $N \triangleleft G, H < G$ 可知, $e \in N \cap H$. 从而 $e = ee \in HN$.

对 $\forall h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN$, 其中 $h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N$. 由 $N \triangleleft G, H < G$ 可得

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 n_1 h_2^{-1} n_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} n_1 n_2^{-1} \in HN.$$

故 $HN < G$. □

定理 0.2 (群同构第二定理)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G, H < G$. 则 $H \cap N \triangleleft H, N \triangleleft HN$, 且

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

这和之前两个子群乘积的阶的公式是类似的.

♡

注 由引理 0.3 可知 $HN < G$. 故此时 $N \triangleleft HN$ 是有意义的.

证明 第一, 要证明 $H \cap N \triangleleft H$. 令 $h \in H$, 而 $x \in H \cap N$, 则 $h x h^{-1} \in H$, 而且因为 $N \triangleleft G, h x h^{-1} \in N$, 因此 $h x h^{-1} \in H \cap N$.

第二, 要证明 $N \triangleleft HN$. 令 $hn \in HN$, 而 $n' \in N$. 则由引理 0.2(2) 可得 $h n n' (hn)^{-1} = h (n n' n^{-1}) h^{-1} \in h N h^{-1} = N$.

第三, 要证明 $H/(H \cap N) \cong HN/N$. 令 $f: H \rightarrow HN/N$, 定义为

$$f(h) = hN.$$

这显然是良定义的 (若 $h = h' \in H$, 则 $h^{-1} h' = e \in N$, 从而 $f(h) = hN = h'N = f(h')$). 又由 $N \triangleleft G$ 及引理 0.1 可知, 对 $\forall h_1, h_2 \in H$, 都有

$$f(h_1 h_2) = h_1 h_2 N = h_1 h_2 N N = h_1 N h_2 N = f(h_1) f(h_2).$$

故 f 是同态的. 根据 $HN/N = \{hnN : h \in H, n \in N\} = \{hN : h \in H\}$ 可知, f 还是个满同态.

接下来, 根据引理 ?? 可知, f 的核是 $\ker(f) = \{h \in H : hN = eN\} = \{h \in H : h \in N\} = H \cap N$. 因此, 根据群同构第一定理,

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

这就证明了群同构第二定理. □

引理 0.4

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N < G, M \triangleleft G, M < N$, 则 $M \triangleleft N$.

♡

证明 令 $n \in N \subset G, m \in M$, 则由 $M \triangleleft G$ 可知, $n m n^{-1} \in M$. 因此由引理 0.2 可知 $M \triangleleft N$. □

定理 0.3 (群同构第三定理)

设 (G, \cdot) 是一个群, 且 $N \triangleleft G, M \triangleleft G, M < N$. 则 $N/M \triangleleft G/M$, 且

$$(G/M)/(N/M) \cong G/N.$$



证明 首先显然有 $N/M \subset G/M$. 由引理 0.4 可知 $M \triangleleft N$. 因此 N/M 是个商群. 因为这两个都是群, 所以对单位元、乘法和逆元都有封闭性. 因此就有 $N/M < G/M$. 接下来我们可以先证明正规性, 这也几乎是显然的. 令 $nM \in N/M (n \in N), gM \in G/M (g \in G)$, 则由 $M \triangleleft N, N \triangleleft G$ 可得

$$(gM)(nM)(gM)^{-1} = (gng^{-1})M \in \{nM : n \in N\} = N/M.$$

因此 $N/M \triangleleft G/M$.

那么, 我们要定义 $f : G/M \rightarrow G/N$, 定义为

$$f(gM) = gN.$$

要证明良定义性. 假设 $gM = g'M$, 则 $g^{-1}g' \in M$, 故 $g^{-1}g' \in N$, 所以 $gN = g'N$.

同态是显然的: 对 $\forall gM, g'M \in G/M$, 都有

$$f(gMg'M) = f(gg'M) = gg'N = gNg'N = f(gM)f(g'M).$$

满同态几乎也是显然的. 任取 $gN \in G/N (g \in G)$, 则 $f(gM) = gN$.

最后, 注意到

$$\ker(f) = \{gM : f(gM) = gN = eN\} = \{gM : g \in N\} = N/M.$$

于是根据群同构第一定理, 这就告诉我们

$$(G/M)/(N/M) \cong G/N.$$

综上所述, 我们就证明了群同构第三定理. □