数值分析

作者: 邹文杰
组织: 无
时间:August 28, 2025
版本:ElegantBook-4.5
自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 数值分析与科学计算引论

1.1 数值计算的误差

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型, 它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的, 因而是近似的. 我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**. 只有实际问题提法正确, 建立数学模型时又抽象、简化得合理, 才能得到好的结果.

由于这种误差难于用数量表示, 通常都假定数学模型是合理的, 这种误差可忽略不计, 在"数值分析"中不予讨论. 在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量, 如温度、长度、电压等, 这些参量显然也包含误差. 这种由观测产生的误差称为**观测误差**, 在"数值分析"中也不讨论这种误差. 数值分析只研究用数值方法求解数学模型产生的误差.

当数学模型不能得到精确解时, 通常要用数值方法求它的近似解, 其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差或方法误差**.

定义 1.1 (误差和误差限)

设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值, 称 $e^* = x^* - x$ 为近似值的**绝对误差**, 简称**误差**.

误差 e^* 绝对值的一个上界.ε^* 叫做近似值的**绝对误差限**或**误差限**, 它总是正数.

对于一般情形,$|x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$, 即

$$x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*$$

这个不等式有时也表示为 $x = x^* \pm \varepsilon^*$.

♣

定义 1.2 (相对误差和相对误差限)

x 本身的大小. 我们把近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 x^* 的**相对误差**, 记作 e_r^*. 在实际计算中, 通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}.$$

相对误差也可正可负, 它的绝对值上界叫做**相对误差限**, 记作 ε_r^*, 即 $\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$.

♣

注 相对误差与相对误差限是无量纲的, 而绝对误差与误差限是有量纲的.

注 相对误差 e_r^* 取 $\dfrac{e^*}{x^*}$ 的原因: 在实际计算中, 由于真值 x 总是不知道的, 通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

作为 x^* 的相对误差, 条件是 $e_r^* = \dfrac{e^*}{x^*}$ 较小, 此时

$$\frac{e^*}{x} - \frac{e^*}{x^*} = \frac{e^*(x^* - x)}{x^* x} = \frac{(e^*)^2}{x^*(x^* - e^*)} = \frac{(e^*/x^*)^2}{1 - (e^*/x^*)}$$

是 e_r^* 的平方项级, 故可忽略不计.

例题 1.1 当准确值 x 有多位数时, 常常按四舍五入的原则得到 x 的前几位近似值 x^*, 例如

$$x = \pi = 3.14159265\cdots$$

取 3 位 $x_3^* = 3.14,\varepsilon_3^* \leqslant 0.002$,

取 5 位 $x_5^* = 3.1416,\varepsilon_5^* \leqslant 0.000008$,

定义 1.3 (有效数字)

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位, 该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位, 就说 x^* 有 n 位**有效数字**. 它可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}), \tag{1.1}$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,m 为整数, 且

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}. \tag{1.2}$$

♣

例题 1.2 按四舍五入原则写出下列各数的具有 5 位有效数字的近似数:187.9325,0.03785551,8.000033,2.7182818.

解 按定义, 上述各数的具有 5 位有效数字的近似数分别是

$$187.93, 0.037856, 8.0000, 2.7183$$

注意 $x = 8.000033$ 的 5 位有效数字近似数是 8.0000 而不是 8, 因为 8 只有 1 位有效数字. □

例题 1.3 如果以 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位, 重力常数 $g \approx 9.80\ \mathrm{m/s^2}$; 若以 $\mathrm{km/s^2}$ 为单位,$g \approx 0.00980\ \mathrm{km/s^2}$, 它们都具有 3 位有效数字, 因为按第一种写法

$$|g - 9.80| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

根据 (1.1) 式, 这里 $m = 0$,$n = 3$; 按第二种写法

$$|g - 0.00980| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

这里 $m = -3$,$n = 3$. 它们虽然写法不同, 但都具有 3 位有效数字. 至于绝对误差限, 由于单位不同结果也不同,$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$,$\varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}\ \mathrm{km/s^2}$. 而相对误差相同, 因为

$$\varepsilon_r^* = 0.005/9.80 = 0.000005/0.00980.$$

笔记 这个例题说明有效位数与小数点后有多少位数无关.

定理 1.1

设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)})$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,m 为整数. 若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其绝对误差限

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

反之, 若 x^* 的绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$, 则 x^* 具有 n 位有效数字.

♡

笔记 这个定理说明, 在 m 相同的情况下,n 越大则 10^{m-n+1} 越小, 故有效位数越多, 绝对误差限越小.

证明 从 (1.2) 式可得到具有 n 位有效数字的近似数 x^*, 其绝对误差限为

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

反之, 若 x^* 的绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$, 则

$$|x - x^*| = \varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

故 x^* 具有 n 位有效数字. □

定理 1.2

设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}), \tag{1.3}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1\neq 0$,m 为整数. 若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差限

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}.$$

反之, 若 x^* 的相对误差限 $\varepsilon_r^*\leqslant\dfrac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$, 则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

笔记 这个定理说明, 有效位数越多, 相对误差限越小.

证明 由 (1.3) 式可得

$$a_1\times 10^m\leqslant |x^*|<(a_1+1)\times 10^m$$

当 x^* 具有 n 位有效数字时

$$\varepsilon_r^*=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\leqslant\frac{0.5\times 10^{m-n+1}}{a_1\times 10^m}=\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$$

反之, 由

$$|x-x^*|=|x^*|\varepsilon_r^*<(a_1+1)\times 10^m\times\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}=0.5\times 10^{m-n+1}$$

故 x^* 至少具有 n 位有效数字. 证毕. □

定理 1.3

设两个近似数 x_1^* 与 x_2^* 的误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$, 则它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别满足不等式

$$\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)\leqslant\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*),$$

$$\varepsilon(x_1^*x_2^*)\leqslant|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*),$$

$$\varepsilon(x_1^*/x_2^*)\leqslant\frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2},\quad x_2^*\neq 0.$$

证明

□

定理 1.4

1. 设 $f(x)$ 是一元可微函数,x 的近似值为 x^*, 以 $f(x^*)$ 近似 $f(x)$, 其误差界记作 $\varepsilon(f(x^*))$, 则函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

2. 设 f 为多元函数时, 令 $A=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值为 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$, 记 A 的近似值为 $A^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, 则 A^* 的误差 $e(A^*)$ 为

$$e(A^*)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*e_k^*.$$

A^* 的误差限

$$\varepsilon(A^*)\approx\sum_{k=1}^n\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*).\tag{1.4}$$

而 A^* 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^*=\varepsilon_r(A^*)=\frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|}\approx\sum_{k=1}^n\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

证明

1. 由泰勒展开

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,\quad \xi\text{ 介于}x,x^*\text{ 之间},$$

取绝对值得

$$|f(x)-f(x^*)| \leqslant |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}\varepsilon^2(x^*).$$

假定 $f'(x^*)$ 与 $f''(x^*)$ 的比值不太大, 可忽略 $\varepsilon(x^*)$ 的高阶项, 于是可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

2. 由泰勒展开得函数值 A^* 的误差 $e(A^*)$ 为

$$\begin{aligned} e(A^*) &= A^*-A = f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &\approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)(x_k^*-x_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^* e_k^*, \end{aligned}$$

于是误差限

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*),$$

而 A^* 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

□

例题 1.4 已测得某场地长 l 的值为 $l^*=110$ m, 宽 d 的值为 $d^*=80$ m, 已知 $|l-l^*| \leqslant 0.2$ m,$|d-d^*| \leqslant 0.1$ m. 试求面积 $s=ld$ 的绝对误差限与相对误差限.

解 因 $s=ld, \dfrac{\partial s}{\partial l}=d, \dfrac{\partial s}{\partial d}=l$, 由 (1.4) 式知

$$\varepsilon(s^*) \approx \left|\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^*\right|\varepsilon(l^*)+\left|\left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^*\right|\varepsilon(d^*),$$

其中

$$\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^* = d^* = 80 \text{ m}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^* = l^* = 110 \text{ m}.$$

而 $\varepsilon(l^*)=0.2$ m,$\varepsilon(d^*)=0.1$ m, 于是绝对误差限

$$\varepsilon(s^*) \approx 80\times(0.2)+110\times(0.1)=27 \ (\text{m}^2),$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(s^*)=\frac{\varepsilon(s^*)}{|s^*|}=\frac{\varepsilon(s^*)}{l^*d^*}\approx\frac{27}{8800}=0.31\%.$$

□

1.2 误差定性分析与避免误差危害

定义 1.4

一个算法如果输入数据有误差, 而在计算过程中舍入误差不增长, 则称此算法是**数值稳定**的; 否则称此算法为**不稳定的**.

♣

例题 1.5

解

□

第 2 章 插值法

2.1 多项式插值

定义 2.1

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，若存在一简单函数 $P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

成立，就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**，包含插值节点的区间 $[a,b]$ 称为**插值区间**，求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法**. 若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式，即

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

其中 a_i 为实数，就称 $P(x)$ 为**插值多项式**，相应的插值法称为**多项式插值**. 若 $P(x)$ 为分段的多项式，就称为**分段插值**. 若 $P(x)$ 为三角多项式，就称为**三角插值**.

♣

定理 2.1

设在区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个点

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$$

上的函数值 $y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$，求次数不超过 n 的多项式 $P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{2.1}$$

证明: 满足上述条件的插值多项式 $P(x)$ 是存在唯一的.

♡

注 显然直接求解方程组(2.2)就可以得到插值多项式 $P(x)$，但这是求插值多项式最繁杂的方法，一般是不用的.

证明 由(2.1)式可得到关于系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的 $n+1$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2.2}$$

此方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

称为范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵，由于 $x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 互异，故

$$\det \boldsymbol{A} = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \neq 0$$

因此，线性方程组 (2.2) 的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 存在且唯一，于是定理得证. □

2.2 Lagrange 插值定理

定义 2.2 (插值基函数)

若 n 次多项式 $l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j\end{cases}\quad j,k=0,1,\cdots,n.$$

就称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 ***n* 次插值基函数**.

定理 2.2

证明: 节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{2.3}$$

证明 下面先讨论 $n=1$ 的简单情形, 此时假定给定区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k=f(x_k),y_{k+1}=f(x_{k+1})$, 要求线性插值多项式 $L_1(x)$, 使它满足

$$L_1(x_k)=y_k,\quad L_1(x_{k+1})=y_{k+1}$$

$y=L_1(x)$ 的几何意义就是通过两点 (x_k,y_k) 与 (x_{k+1},y_{k+1}) 的直线, 如图 2.1所示,$L_1(x)$ 的表达式可由几何意义直接给出

$$\begin{cases}L_1(x)=y_k+\dfrac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k) & \text{(点斜式)},\\ L_1(x)=\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}y_k+\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1} & \text{(两点式)}\end{cases}$$

由两点式看出,$L_1(x)$ 是由两个线性函数

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\quad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}.$$

线性组合得到的, 其系数分别为 y_k 及 y_{k+1}, 即

$$L_1(x)=y_kl_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x).$$

显然,$l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 也是线性插值多项式, 在节点 x_k 及 x_{k+1} 上分别满足条件

$$l_k(x_k)=1,\quad l_k(x_{k+1})=0;$$

$$l_{k+1}(x_k)=0,\quad l_{k+1}(x_{k+1})=1$$

我们称函数 $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 为**线性插值基函数**, 它们的图形见图 2.1.

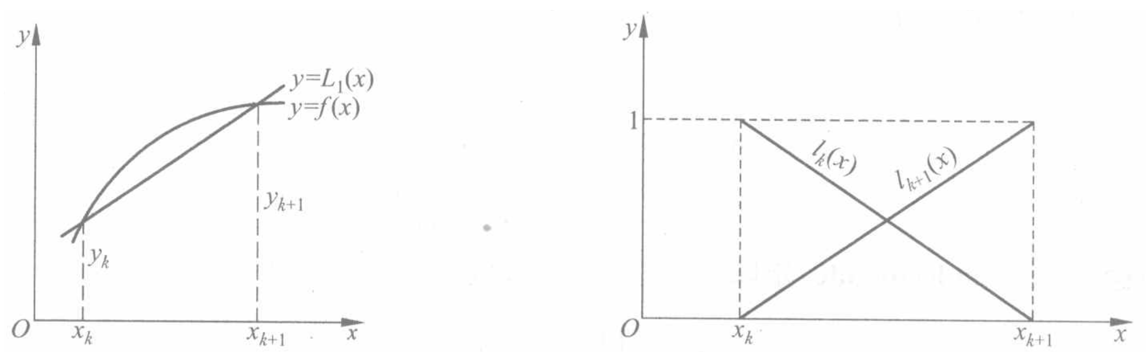

图 2.1

下面讨论 $n=2$ 的情况. 此时假定插值节点为 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, 要求二次插值多项式 $L_2(x)$, 使它满足

$$L_2(x_j) = y_j, \quad j = k-1, k, k+1$$

我们知道 $y = L_2(x)$ 在几何上就是通过三点 (x_{k-1}, y_{k-1}),(x_k, y_k),(x_{k+1}, y_{k+1}) 的抛物线. 为了求出 $L_2(x)$ 的表达式, 可采用基函数方法, 此时基函数 $l_{k-1}(x), l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 是二次函数, 且在节点上分别满足条件

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1}) = 1, l_{k-1}(x_j) = 0, & j = k, k+1; \\ l_k(x_k) = 1, l_k(x_j) = 0, & j = k-1, k+1; \\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, l_{k+1}(x_j) = 0, & j = k-1, k \end{cases}$$

满足上述条件的插值基函数是很容易求出的, 例如求 $l_{k-1}(x)$, 因它有两个零点 x_k 及 x_{k+1}, 故可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

其中 A 为待定系数, 可由条件 $l_{k-1}(x_{k-1}) = 1$ 定出

$$A = \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}.$$

于是

$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}.$$

同理可得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}.$$

二次插值基函数 $l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ 上的图形见图 2.2.

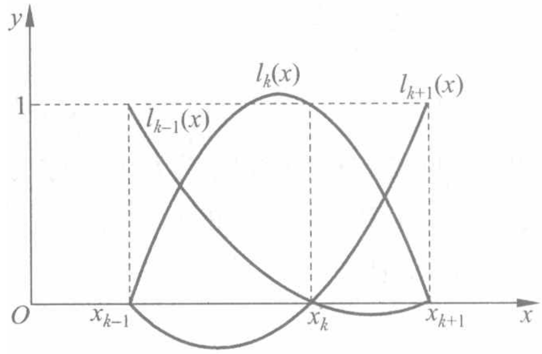

图 2.2

对 $n=1$ 及 $n=2$ 时的情况上述已经讨论. 用类似的推导方法, 可得到 n 次插值基函数为

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

□

定理 2.3

记通过 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x)$, 假定它满足条件

$$L_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{2.4}$$

则插值多项式 $L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x). \tag{2.5}$$

其中 $l_k(x), k=0,1,\cdots,n$ 是节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数. 由 $l_k(x)$ 的定义, 知

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j)=y_j,\quad j=0,1,\cdots,n. \tag{2.6}$$

形如 (2.5) 式的插值多项式 $L_n(x)$ 称为 **Lagrange(拉格朗日) 插值多项式**.
若引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{2.7}$$

容易求得

$$\omega_{n+1}'(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

于是再结合定理 2.2可将公式 (2.5)改写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}.$$

♡

注 当 $n=1$ 时,$L_1(x)$ 也称为**线性插值多项式**. 假定给定区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k=f(x_k)$,$y_{k+1}=f(x_{k+1})$,$L_1(x)$ 的表达式可由几何意义直接给出

$$\begin{cases} L_1(x)=y_k+\dfrac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k) & \text{(点斜式)},\\ L_1(x)=\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}y_k+\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1} & \text{(两点式)}\end{cases} \tag{2.8}$$

当 $n=2$ 时,$L_1(x)$ 也称为**抛物线插值多项式**. 假定插值节点为 x_{k-1},x_k,x_{k+1}, 及端点函数值 $y_{k-1}=f(x_{k-1})$,$y_k=f(x_k)$,$y_{k+1}=f(x_{k+1})$,$L_2(x)$ 的表达式可由(2.6)直接给出

$$L_2(x)=y_{k-1}l_{k-1}(x)+y_kl_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x), \tag{2.9}$$

其中 $l_i(x), i=k-1,k,k+1$ 是节点 x_{k-1},x_k,x_{k+1} 上的插值基函数.
注 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式,特殊情况下次数可能小于 n. 例如, 对于通过三点 (x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2) 的二次插值多项式 $L_2(x)$, 如果三点共线, 则 $y=L_2(x)$ 就是一直线, 而不是抛物线, 这时 $L_2(x)$ 是一次多项式.

证明 由插值基函数的定义易知 $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$ 满足条件(2.4). □

定义 2.3

若在 $[a,b]$ 上用 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$, 则其截断误差为 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$, 也称为**插值多项式的余项**. ♣

定理 2.4

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, 节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$,$L_n(x)$ 是满足条件

$$L_n(x_j)=y_j,\quad j=0,1,\cdots,n.$$

的插值多项式, 则对任何 $x\in[a,b]$, 插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{2.10}$$

这里 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x, $\omega_{n+1}(x)$ 由 (2.7) 式所定义.

♡

注 应当指出, 余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用.ξ 在 (a,b) 内的具体位置通常不可能给出, 如果我们可以求出 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$, 那么插值多项式 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差限是

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|. \tag{2.11}$$

当 $n=1$ 时, 线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\quad \xi\in[x_0,x_1]. \tag{2.12}$$

当 $n=2$ 时, 抛物线插值的余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\quad \xi\in[x_0,x_2]. \tag{2.13}$$

证明 由给定条件知 $R_n(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上为零, 即 $R_n(x_k)=0(k=0,1,\cdots,n)$, 于是

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x), \tag{2.14}$$

其中 $K(x)$ 是与 x 有关的待定函数.

现把 x 看成 $[a,b]$ 上的一个固定点, 作函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

根据 f 的假设可知 $\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内存在. 根据插值条件及余项定义, 可知 $\varphi(t)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 及 x 处均为零, 故 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个零点, 根据 Rolle(罗尔) 定理,$\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的两个零点间至少有一个零点, 故 $\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 $n+1$ 个零点. 对 $\varphi'(t)$ 再应用 Rolle 定理, 可知 $\varphi''(t)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 n 个零点. 依此类推,$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点, 记为 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0.$$

于是

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad \xi\in(a,b), \text{且依赖于} x.$$

将它代入 (2.14) 式, 就得到余项表达式 (2.10). 证毕. □

命题 2.1

(1) 设 $l_k(x),k=0,1,\cdots,n$ 是节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数, 则

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\ k=0,1,\cdots,n.$$

特别当 $k=0$ 时, 有 $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)=1$.

(2) 若被插值函数 $f(x)\in H_n(H_n$ 代表次数小于等于 n 的多项式集合), 记 $L_n(x)$ 是 $L_n(x)$ 的 Lagrange 插值多项式,$R_n(x)$ 为其插值余项, 则 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0$, 即它的插值多项式 $L_n(x)=f(x)$.

笔记 上述命题中的 (1) 也是插值基函数的性质, 利用它们还可求一些和式的值.

证明

(1) 利用余项表达式(2.10), 当 $f(x)=x^k(k\leqslant n)$ 时, 由于 $f^{(n+1)}(x)=0$, 于是有

$$R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0$$

由此得

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

特别当 $k=0$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1.$$

(2) 利用余项表达式(2.10), 由于 $f^{(n+1)}(x)=0$, 故 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0$, 即它的插值多项式 $L_n(x)=f(x)$.

□

例题 2.1 证明 $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=0$, 其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_5$ 的插值基函数.

解 利用公式命题 2.1(1)可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)&=\sum_{i=0}^{5}(x_i^2-2x_ix+x^2)l_i(x)\\&=\sum_{i=0}^{5}x_i^2 l_i(x)-2x\sum_{i=0}^{5}x_il_i(x)+x^2\sum_{i=0}^{5}l_i(x)\\&=x^2-2x^2+x^2=0.\end{aligned}$$

□

例题 2.2 已给 $\sin 0.32=0.314567$,$\sin 0.34=0.333487$,$\sin 0.36=0.352274$, 用线性插值及抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 的值并估计截断误差.

解 由题意取 $x_0=0.32$,$y_0=0.314567$,$x_1=0.34$,$y_1=0.333487$,$x_2=0.36$,$y_2=0.352274$.

用线性插值计算, 由于 0.3367 介于 x_0,x_1 之间, 故取 x_0,x_1 进行计算, 由公式(2.8)得

$$\begin{aligned}\sin 0.3367\approx L_1(0.3367)&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(0.3367-x_0)\\&=0.314567+\frac{0.01892}{0.02}\times 0.0167=0.330365.\end{aligned}$$

由 (2.12) 式得其截断误差

$$|R_1(x)|\leqslant\frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$

其中 $M_2=\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|f''(x)|$. 因 $f(x)=\sin x,f''(x)=-\sin x$, 可取 $M_2=\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|\sin x|=\sin x_1\leqslant 0.3335$, 于是

$$\begin{aligned}|R_1(0.3367)|&=|\sin 0.3367-L_1(0.3367)|\\&\leqslant\frac{1}{2}\times 0.3335\times 0.0167\times 0.0033\leqslant 0.92\times 10^{-5}.\end{aligned}$$

用抛物线插值计算 $\sin 0.3367$ 时, 由公式 (2.9) 得

$$\begin{aligned}\sin 0.3367&\approx y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\&=L_2(0.3367)=0.314567\times\frac{0.7689\times 10^{-4}}{0.0008}+0.333487\\&\times\frac{3.89\times 10^{-4}}{0.0004}+0.352274\times\frac{-0.5511\times 10^{-4}}{0.0008}=0.330374.\end{aligned}$$

这个结果与 6 位有效数字的正弦函数表完全一样, 这说明查表时用二次插值精度已相当高了. 由 (2.11) 式得其截断误差限

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,$$

其中

$$M_3=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|=\cos x_0<0.9493.$$

于是

$$\begin{aligned}|R_2(0.3367)|&=|\sin 0.3367-L_2(0.3367)|\\&\leqslant\frac{1}{6}\times 0.9493\times 0.0167\times 0.033\times 0.0233<2.0132\times 10^{-6}.\end{aligned}$$

□

例题 2.3 设 $f\in C^2[a,b]$, 试证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M_2,$$

其中 $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$. 记号 $C^2[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上二阶导数连续的函数空间.

解 通过两点 $(a, f(a))$ 及 $(b, f(b))$ 的线性插值为

$$L_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

于是由(2.12)式可得

$$\begin{aligned}
&\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \\
&= \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - L_1(x)| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right| \\
&\leqslant \frac{M_2}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-a)(x-b)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2.
\end{aligned}$$

□

2.3