0.1 不变因子

定义 0.1 (k 阶行列式因子)

设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵,k 是小于等于 n 的正整数. 如果 $A(\lambda)$ 有一个 k 阶子式不为零, 则定义 $A(\lambda)$ 的 k **阶行列式因子** $D_k(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式（首一多项式）. 如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式都等于零, 则定义 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为零.

引理 0.1

设 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子, 则

$$D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda), \quad i = 1, 2, \cdots, r-1.$$

证明 设 A_{i+1} 是 $A(\lambda)$ 的任一 $i+1$ 阶子式, 即在 $A(\lambda)$ 中任意取出 $i+1$ 行及 $i+1$ 列组成的行列式. 将这个行列式按某一行展开, 则它的每一个展开项都是一个多项式与一个 i 阶子式的乘积. 由于 $D_i(\lambda)$ 是所有 i 阶子式的公因子, 因此 $D_i(\lambda) \mid A_{i+1}$. 而 $D_{i+1}(\lambda)$ 是所有 $i+1$ 阶子式的最大公因子, 因此 $D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda)$ 对一切 $i = 1, 2, \cdots, r-1$ 成立. □

定义 0.2 (不变因子)

设 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$ 是 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子, 则

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= D_1(\lambda), \\ g_2(\lambda) &= D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \\ &\cdots \\ g_r(\lambda) &= D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda) \end{aligned}$$

称为 $A(\lambda)$ 的**不变因子**.

笔记 由不变因子和行列式因子的定义可知, 不变因子和行列式因子相互唯一确定.

注 以后特征矩阵 $\lambda I - A$ 的行列式因子和不变因子均简称为 A 的行列式因子和不变因子.

命题 0.1

求下列矩阵的行列式因子和不变因子:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, r-1)$.

解 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子为

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= d_1(\lambda), \\ D_2(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda), \\ &\cdots \\ D_r(\lambda) &= d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda). \end{aligned}$$

根据不变因子的定义可知 $A(\lambda)$ 的不变因子分别为:$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$. □

定理 0.1

相抵的 λ-矩阵有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子.

证明 我们只需证明行列式因子在三类初等变换下不改变就可以了. 对第一类初等变换, 交换 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的任意两行（列）, 显然 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式最多改变一个符号, 因此行列式因子不改变.

对第二类初等变换,$A(\lambda)$ 的 i 阶子式与变换后矩阵的 i 阶子式最多差一个非零常数, 因此行列式因子也不改变.

对第三类初等变换, 记变换后的矩阵为 $B(\lambda)$, 则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式可能出现以下 3 种情形: 子式完全相同;$B(\lambda)$ 子式中的某一行（列）等于 $A(\lambda)$ 中相应子式的同一行（列）加上该子式中某一行（列）与某个多项式之积;$B(\lambda)$ 子式中的某一行（列）等于 $A(\lambda)$ 中相应子式的同一行（列）加上不在该子式中的某一行（列）与某个多项式之积. 在前面两种情形, 行列式的值不改变, 因此不影响行列式因子. 现在来讨论第三种情形. 设 B_i 为 $B(\lambda)$ 的 i 阶子式, 相应的 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式记为 A_i, 则由行列式的性质得

$$B_i = A_i + f(\lambda)\widetilde{A}_i,$$

其中 $\widetilde{A}_i$ 由 $A(\lambda)$ 中的 i 行与 i 列组成, 因此它与 $A(\lambda)$ 的某个 i 阶子式最多差一个符号.$f(\lambda)$ 是乘以某一行（列）的那个多项式, 于是 $A(\lambda)$ 的行列式因子 $D_i(\lambda) \mid A_i$,$D_i(\lambda) \mid \widetilde{A}_i$, 故 $D_i(\lambda) \mid B_i$. 这说明,$D_i(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 的所有 i 阶子式, 因此 $D_i(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 的 i 阶行列式因子 $\widetilde{D}_i(\lambda)$. 但 $B(\lambda)$ 也可用第三类初等变换变成 $A(\lambda)$, 于是 $\widetilde{D}_i(\lambda) \mid D_i(\lambda)$. 由于 $D_i(\lambda)$ 及 $\widetilde{D}_i(\lambda)$ 都是首一多项式, 因此必有 $D_i(\lambda) = \widetilde{D}_i(\lambda)$. □

推论 0.1

设 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的法式为

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, r-1)$, 则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 特别地, **法式和不变因子之间相互唯一确定**.

证明 首先, 由定理 0.1可知,$A(\lambda)$ 与 Λ 有相同的不变因子. 再由命题 0.1可知,Λ 的不变因子为 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, $\cdots$, $d_r(\lambda)$, 从而它们也是 $A(\lambda)$ 的不变因子. 故 $A(\lambda)$ 的法式可以唯一确定其不变因子.

接着, 设 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$, 由定理**??**, 可设 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$B(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_r'(\lambda); 0, \cdots, 0\}, \tag{1}$$

其中 $d_i'(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i'(\lambda) \mid d_{i+1}'(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, r-1)$. 再由命题 0.1可知,$B(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1'(\lambda)$, $d_2'(\lambda), \cdots, d_r'(\lambda)$. 由定理 0.1可知,$A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的不变因子相同, 故不失一般性, 我们就有

$$\begin{gathered} d_1(\lambda) = d_1'(\lambda), \\ d_2(\lambda) = d_2'(\lambda), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_r(\lambda) = d_r'(\lambda). \end{gathered}$$

因此 $A(\lambda)$ 的相抵于对角阵

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, r-1)$. 上式也就是 $A(\lambda)$ 的法式. 故 $A(\lambda)$ 的不变因子可以唯一确定其法式. □

推论 0.2

设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 为 n 阶 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵当且仅当它们有相同的法式.

证明 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的法式, 显然它们相抵. 若 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, 由定理 0.1 知 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子, 从而由推论 0.1可知, $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的法式. □

推论 0.3

n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的法式与初等变换的选取无关.

证明 设 Λ_1, Λ_2 是 $A(\lambda)$ 通过不同的初等变换得到的两个法式, 则 Λ_1 与 Λ_2 相抵, 由推论 0.2可得 $\Lambda_1 = \Lambda_2$. □

定理 0.2

数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 具有相同的行列式因子或不变因子.

证明 显然不变因子与行列式因子之间相互唯一确定. 再由定理**??**、推论 0.2 及推论 0.1即得结论. □

推论 0.4

设 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ 是两个数域,A, B 是 $\mathbb{F}$ 上的两个矩阵, 则 A 与 B 在 $\mathbb{F}$ 上相似的充分必要条件是它们在 $\mathbb{K}$ 上相似.

笔记 这个推论告诉我们: **矩阵的相似关系在基域扩张下不变**. 事实上, 这个推论的证明过程也说明: **矩阵的不变因子在基域扩张下也不变**.

证明 若 A 与 B 在 $\mathbb{F}$ 上相似, 由于 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, 它们当然在 $\mathbb{K}$ 上也相似. 反之, 若 A 与 B 在 $\mathbb{K}$ 上相似, 则 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $\mathbb{K}$ 上有相同的不变因子, 也就是说它们有相同的法式. 由推论 0.3可知, 求法式与初等变换的选取无关. 注意到 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 λ-矩阵, 故可用 $\mathbb{F}$ 上 λ-矩阵的初等变换就能将它们变成法式, 其中只涉及 $\mathbb{F}$ 中数的加、减、乘、除运算以及 $\mathbb{F}$ 上的多项式的加、减、乘、数乘运算, 最后得到法式中的不变因子 $d_i(\lambda)$ 仍是 $\mathbb{F}$ 上的多项式. 这就是说存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆 λ-矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda), M(\lambda), N(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = M(\lambda)(\lambda I - B)N(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\},$$

从而

$$M(\lambda)^{-1}P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda)N(\lambda)^{-1} = \lambda I - B,$$

即 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $\mathbb{F}$ 上相抵, 由定理**??** 可得 A 与 B 在 $\mathbb{F}$ 上相似. □