

0.1 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

命题 0.1

数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵 A 一定适合数域 \mathbb{K} 上的一个非零多项式.

证明 我们已经知道, 数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵全体组成了 \mathbb{K} 上的线性空间, 其维数等于 n^2 . 因此对任一 n 阶矩阵 A , 下列 $n^2 + 1$ 个矩阵必线性相关: $A^{n^2}, A^{n^2-1}, \dots, A, I_n$.

也就是说, 存在 \mathbb{K} 中不全为零的数 $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, c_{n^2})$, 使

$$c_{n^2}A^{n^2} + c_{n^2-1}A^{n^2-1} + \dots + c_1A + c_0I_n = O.$$

这表明矩阵 A 适合数域 \mathbb{K} 上的一个非零多项式. □

定义 0.1 (矩阵的极小多项式)

若 n 阶矩阵 A (或 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ) 适合一个非零首一多项式 $m(x)$, 且 $m(x)$ 是 A (或 φ) 所适合的非零多项式中次数最小者, 则称 $m(x)$ 是 A (或 φ) 的一个**极小多项式**或**最小多项式**.

注 由命题 0.1 可知矩阵 A 的极小多项式 $m(x)$ 一定存在, 故极小多项式是良定义的.

定理 0.1 (Cayley-Hamilton 定理)

1. **代数形式:** 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵, $f(x)$ 是 A 的特征多项式, 则 $f(A) = O$.
2. **几何形式:** 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f(x)$ 是 φ 的特征多项式, 则 $f(\varphi) = O$.

证明

1. **代数形式:** 因为复数域是最大数域, 所以可将 A 看作一个复矩阵. 由复方阵必相似于上三角阵知 A 复相似于一个上三角阵, 也就是说存在的可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$ 是一个上三角阵, 其中 P 与 B 都是复矩阵, 由相似矩阵有相同特征多项式可知 A 与 B 有相同的特征多项式 $f(x)$. 记

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

则 $f(B) = O$. 而

$$\begin{aligned} f(A) &= A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI_n \\ &= (PBP^{-1})^n + a_1(PBP^{-1})^{n-1} + \dots + a_nI_n \\ &= PB^nP^{-1} + a_1PB^{n-1}P^{-1} + \dots + a_nI_n \\ &= P(B^n + a_1B^{n-1} + \dots + a_nI_n)P^{-1} \\ &= Pf(B)P^{-1} = O. \end{aligned}$$

2. **几何形式:** 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准基, φ 在这组基下的矩阵为 A , 则由 $f(x)$ 是 φ 的特征多项式可知, $f(x)$ 也是 A 的特征多项式. 从而由代数形式的结论可知 $f(A) = O$. 于是对 $\forall \alpha \in V$, 都存在 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

两边同时作用 φ 得到

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= k_1\varphi(e_1) + k_2\varphi(e_2) + \cdots + k_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A(e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A\alpha.\end{aligned}$$

因此 $f(\varphi)(\alpha) = f(A)(\alpha) = 0$. 故由 α 的任意性可知 $f(\varphi) = O$.

□


0.1.1 极小多项式的性质

命题 0.2 (极小多项式的性质)

- (1) 若 $f(x)$ 是 A 适合的一个多项式, 则 A 的极小多项式 $m(x)$ 整除 $f(x)$.
- (2) 任一 n 阶矩阵的极小多项式必唯一.
- (3) 相似的矩阵具有相同的极小多项式.
- (4) 矩阵及其转置有相同的极小多项式.
- (5) 设 $m(x)$ 是 n 阶矩阵 A 的极小多项式, λ_0 是 A 的特征值, 则 $(x - \lambda_0) \mid m(x)$.
- (6) 设 A 是一个分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

其中 A_i 都是方阵, 则 A 的极小多项式等于诸 A_i 的极小多项式之最小公倍式.

 **笔记** 性质 (5) 告诉我们: **矩阵的特征值一定是其极小多项式的根.**

证明

- (1) 由多项式的带余除法知道

$$f(x) = m(x)q(x) + r(x),$$

且 $\deg r(x) < \deg m(x)$. 将 $x = A$ 代入上式得 $r(A) = O$, 若 $r(x) \neq 0$, 则 A 适合一个比 $m(x)$ 次数更小的非零多项式, 矛盾. 故 $r(x) = 0$, 即 $m(x) \mid f(x)$.

- (2) 若 $m(x), g(x)$ 都是矩阵 A 的极小多项式, 则由 **矩阵极小多项式的性质 (1)** 知道 $m(x)$ 能够整除 $g(x)$, $g(x)$ 也能够整除 $m(x)$. 因此 $m(x)$ 与 $g(x)$ 只差一个常数因子, 又极小多项式必须首项系数为 1, 故 $g(x) = m(x)$.
- (3) 设矩阵 A 和 B 相似, 即存在可逆矩阵 P , 使 $B = P^{-1}AP$. 设 A, B 的极小多项式分别为 $m(x), g(x)$, 注意到

$$m(B) = m(P^{-1}AP) = P^{-1}m(A)P = O,$$

因此 $g(x) \mid m(x)$. 同理, $m(x) \mid g(x)$, 故 $m(x) = g(x)$.

- (4) 设 A 的极小多项式是 $m(x)$, 转置 A' 的极小多项式是 $n(x)$. 将 $m(A) = O$ 转置可得 $m(A') = O$, 因此 $n(x) \mid m(x)$. 同理可证 $m(x) \mid n(x)$, 故 $m(x) = n(x)$.
- (5) 由 $m(A) = O$ 及命题??可得 $m(\lambda_0) = 0$, 再由余数定理得 $(x - \lambda_0) \mid m(x)$.

(6) 设 A 的极小多项式为 $m(x)$, A_i 的极小多项式为 $m_i(x)$, 诸 $m_i(x)$ 的最小公倍式为 $g(x)$, 则 $g(A_i) = O$, 于是

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

从而 $m(x) \mid g(x)$. 又因为

$$m(A) = \begin{pmatrix} m(A_1) & & & \\ & m(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

所以对每个 i 有 $m(A_i) = O$, 从而 $m_i(x) \mid m(x)$, 即 $m(x)$ 是 $m_i(x)$ 的公倍式. 又 $g(x)$ 是诸 $m_i(x)$ 的最小公倍式, 故 $g(x) \mid m(x)$. 综上所述, $m(x) = g(x)$.

□

命题 0.3

设数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A 的极小多项式为 $m(x)$, 求证: $\mathbb{F}[A] = \{f(A) \mid f(x) \in \mathbb{F}[x]\}$ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的子空间, 且 $\dim \mathbb{F}[A] = \deg m(x)$.

▲

证明 容易验证 $\mathbb{F}[A]$ 在矩阵的加法和数乘下封闭, 从而是 $M_n(\mathbb{F})$ 的子空间. 对任一 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 由多项式的带余除法可知, 存在 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $f(x) = m(x)q(x) + r(x)$, 其中 $\deg r(x) < \deg m(x) = d$, 于是 $f(A) = m(A)q(A) + r(A) = r(A)$ 是 I_n, A, \dots, A^{d-1} 的线性组合. 另一方面, 若设 $c_0, c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{F}$, 使得

$$c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_{d-1} A^{d-1} = O,$$

则 A 适合多项式 $g(x) = c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1 x + c_0$, 由矩阵极小多项式的性质 (1) 可知 $m(x) \mid g(x)$, 又因为 $d-1 = \deg g(x) < \deg m(x) = d$, 所以 $g(x) = 0$, 即 $c_0 = c_1 = \dots = c_{d-1} = 0$, 于是 I_n, A, \dots, A^{d-1} 在 \mathbb{F} 上线性无关. 因此, $\{I_n, A, \dots, A^{d-1}\}$ 是 $\mathbb{F}[A]$ 的一组基, 特别地, $\dim \mathbb{F}[A] = d = \deg m(x)$.

□

命题 0.4

n 阶矩阵 A 的极小多项式是其特征多项式的因式. 特别, A 的极小多项式的次数不超过 n .

▲

证明 设 A 的极小多项式和特征多项式分别为 $m(x)$ 和 $f(x)$, 则由 Cayley-Hamilton 定理可知 $f(A) = O$, 于是再由矩阵极小多项式的基本性质 (1) 可知 $m(x) \mid f(x)$. 又因为特征多项式 $f(x)$ 一定不是零多项式, 所以 $\deg m(x) \leq \deg f(x) = n$.

□

推论 0.1

n 阶矩阵 A 的极小多项式和特征多项式有相同的根 (不计重数).

♥

证明 设 $m(x)$ 和 $f(x)$ 分别是 n 阶矩阵 A 的极小多项式和特征多项式, 由极小多项式的性质 (5) 可知, $f(x)$ 的根 (即特征值) 都是 $m(x)$ 的根. 又由推论 0.4 可知, $m(x) \mid f(x)$, 从而 $m(x)$ 的根也都是 $f(x)$ 的根. 因此若不计重数, $m(x)$ 和 $f(x)$ 有相同的根.

□

例题 0.1 设 $m(x)$ 和 $f(x)$ 分别是 n 阶矩阵 A 的极小多项式和特征多项式, 求证: $f(x) \mid m(x)^n$.

证明 由于 n 阶矩阵 A 的特征值最多是 n 重的, 因此设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $x_i (1 \leq i \leq n)$, 即 $f(x)$ 为 $x_i (1 \leq i \leq n)$, 并且

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

又由推论 0.1 可知 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 也都是 $m(x)$ 的根. 从而由余数定理可知 $(x - x_i) \mid m(x), i = 1, 2, \dots, n$. 于是由整除

的基本性质 (6) 归纳可得

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \mid m^n(x).$$

即 $f(x) \mid m^n(x)$. □

命题 0.5 (常见矩阵的极小多项式)

- (1) 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 则极小多项式等于特征多项式. 特别地, n 阶基础循环矩阵的极小多项式等于 $x^n - 1$.
- (2) 设 n 阶矩阵 A 可对角化, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 A 的全体不同的特征值, 则 A 的极小多项式为 $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$.
- (3) n 阶幂零 Jordan 块的极小多项式是 x^n .
- (4) 设 $n(n > 1)$ 阶矩阵 A 的秩为 1, 求证: A 的极小多项式为 $x^2 - \text{tr}(A)x$. ▲

证明

- (1) 设 A 的极小多项式和特征多项式分别为 $m(x)$ 和 $f(x)$, A 的 n 个不同的特征值为 $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$, 则 $f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$. 由推论 0.1 可知, $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ 也是 $m(x)$ 的根. 从而

$$(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \mid m(x).$$

即 $f(x) \mid m(x)$, 又由推论 0.4 可知 $m(x) \mid f(x)$, 故 $m(x) = f(x)$.

- (2) 设 A 的极小多项式为 $m(x)$. 由 A 可对角化知存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_k\},$$

其中 $B_i = \lambda_i I$ 为纯量矩阵. 显然 B_i 的极小多项式为 $x - \lambda_i$, 故由极小多项式的性质 (3) 和 (6) 可得

$$m(x) = m(B) = [x - \lambda_1, x - \lambda_2, \dots, x - \lambda_k] = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k).$$

- (3) 设 n 阶幂零 Jordan 块为 A , 则由命题 ?? 可知 $A^k \neq O (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 但 $A^n = O$. 故 n 阶幂零 Jordan 块 A 的极小多项式为 x^n .
- (4) 由命题 ?? 证法二可知, A 适合多项式 $x^2 - \text{tr}(A)x$. 显然 A 不可能适合多项式 x . 若 A 适合多项式 $x - \text{tr}(A)$, 则 $A = \text{tr}(A)I_n$ 为纯量矩阵, 其秩等于 0 或 n , 这与 $r(A) = 1$ 矛盾. 因此, A 的极小多项式为 $x^2 - \text{tr}(A)x$. □

命题 0.6

设 $f(x)$ 和 $m(x)$ 分别是 m 阶矩阵 A 的特征多项式和极小多项式, $g(x)$ 和 $n(x)$ 分别是 n 阶矩阵 B 的特征多项式和极小多项式, 证明以下结论等价:

- (1) A, B 没有公共的特征值;
- (2) $(f(x), g(x)) = 1$ 或 $(f(x), n(x)) = 1$ 或 $(m(x), g(x)) = 1$ 或 $(m(x), n(x)) = 1$;
- (3) $f(B)$ 或 $m(B)$ 或 $g(A)$ 或 $n(A)$ 是可逆矩阵. ▲

证明 (1) \Leftrightarrow (2): 由推论 0.1 可知, (2) 中所有的条件都等价. 显然 (1) 与 $(f(x), g(x)) = 1$ 等价, 故 (1) 与 (2) 等价.

(2) \Rightarrow (3): 例如, 若 $(f(x), n(x)) = 1$, 则存在 $u(x), v(x)$, 使得 $f(x)u(x) + n(x)v(x) = 1$. 将 $x = B$ 代入上式并注意到 $n(B) = O$, 故可得 $f(B)u(B) = I_n$, 这表明 $f(B)$ 是可逆矩阵. 将 $x = A$ 代入上式并注意到 $f(A) = O$ (Cayley-Hamilton 定理), 故可得 $n(A)v(A) = I_n$, 这表明 $n(A)$ 是可逆矩阵. 同理可证其他的情形.

(3) \Rightarrow (1): 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 A 的特征值, 则 $n(\lambda_1), \dots, n(\lambda_m)$ 是 $n(A)$ 的特征值. 例如, 若 $n(A)$ 是可逆矩阵, 则 $n(\lambda_i) \neq 0$, 即 λ_i 都不是 $n(x)$ 的根. 由推论 0.1 可知, λ_i 都不是 $g(x)$ 的根, 即 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 都不是 B 的特征值, 从而 A, B 没有公共的特征值. 同理可证其他的情形. □

命题 0.7

设 $f(x)$ 和 $m(x)$ 分别是 n 阶矩阵 A 的特征多项式和极小多项式, $g(x)$ 是一个多项式, 求证: $g(A)$ 是可逆矩阵的充要条件是 $(f(x), g(x)) = 1$ 或 $(m(x), g(x)) = 1$.

证明 先证充分性, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

又由 Cayley-Hamilton 定理可知, $f(A) = O$ 。从而将 $x = A$ 代入上式得 $v(A)g(A) = I_n$, 故 $g(A)$ 可逆。

若 $(m(x), g(x)) = 1$, 则存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)m(x) + v(x)g(x) = 1.$$

又注意到 $m(A) = O$ 。从而将 $x = A$ 代入上式得 $v(A)g(A) = I_n$, 故 $g(A)$ 可逆。

再证必要性, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为 A 的所有特征值, 则 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_m)$ 为 $g(A)$ 的所有特征值。又因为 $g(A)$ 可逆, 所以其特征值 $g(\lambda_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 即 λ_i 都不是 $g(x)$ 的根。而由推论 0.1 可知, λ_i 是 $f(x), m(x)$ 的全部根。因此 $f(x), m(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根, 故 $(f(x), g(x)) = 1$, $(m(x), g(x)) = 1$ 。□

命题 0.8

证明: n 阶方阵 A 为可逆矩阵的充要条件是 A 的极小多项式的常数项不为零。

 **笔记** 也可利用推论 0.1 和 Vieta 定理来证明。

证明 设 $f(x)$ 和 $m(x)$ 分别是 A 的特征多项式和极小多项式, 则 $m(x) \mid f(x)$ 。若 A 可逆, 则 $f(x)$ 的常数项 $(-1)^n |A|$ 不等于零, 因此 $m(x)$ 的常数项也不为零。

反之, 设 $m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$, 其中 $b_0 \neq 0$, 则

$$m(A) = A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \dots + b_0I_n = O,$$

于是

$$A(A^{m-1} + b_{m-1}A^{m-2} + \dots + b_1I_n) = -b_0I_n.$$

由 $b_0 \neq 0$ 即知 A 可逆。□

0.1.2 Cayley-Hamilton 定理的应用: 逆矩阵和伴随矩阵的多项式表示**命题 0.9**

设 A 是 n 阶可逆矩阵, 求证: $A^{-1} = g(A)$, 其中 $g(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式。

证明 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ 是 A 的特征多项式, 因为 A 可逆, 故 $a_n = (-1)^n |A| \neq 0$ 。由 Cayley-Hamilton 定理可得 $f(A) = O$, 于是

$$A \left(-\frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I_n) \right) = I_n.$$

因此

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I_n).$$

□

命题 0.10

设 A 是 n 阶矩阵, 求证: 伴随矩阵 $A^* = h(A)$, 其中 $h(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式。

证明 我们用摄动法来证明结论。设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ 是 A 的特征多项式, 其中 $a_n = (-1)^n |A|$ 。

若 A 是可逆矩阵, 则由命题 0.9 可得

$$A^* = |A|A^{-1} = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n).$$

令 $h(x) = (-1)^{n-1}(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$, 则 $A^* = h(A)$, 并且 $h(x)$ 的系数由特征多项式 $f(x)$ 的系数唯一确定。

对于一般的方阵 A , 可取到一列有理数 $t_k \rightarrow 0$, 使得 $t_kI_n + A$ 为可逆矩阵。设

$$f_{t_k}(x) = |xI_n - (t_kI_n + A)| = x^n + a_1(t_k)x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t_k)x + a_n(t_k)$$

为 $t_kI_n + A$ 的特征多项式, 则 $a_i(t_k)$ 都是 t_k 的多项式且 $a_i(0) = a_i$ ($1 \leq i \leq n$)。由可逆矩阵情形的证明可得

$$(t_kI_n + A)^* = (-1)^{n-1} \left((t_kI_n + A)^{n-1} + a_1(t_k)(t_kI_n + A)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(t_k)I_n \right).$$

注意到上式两边的矩阵中的元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续。上式两边同时取极限, 令 $t_k \rightarrow 0$, 即得

$$A^* = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n).$$

因此无论 A 是否可逆, 我们都有 $A^* = h(A)$ 成立。□

0.1.3 Cayley - Hamilton 定理的应用: $AX = XB$ 型矩阵方程的求解及其应用

命题 0.11

设 A 为 m 阶矩阵, B 为 n 阶矩阵, 求证: 若 A, B 没有公共的特征值, 则矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解 $X = O$ 。

证明 证法一: 设 $f(\lambda) = |\lambda I_m - A|$ 为 A 的特征多项式, 则由 Cayley-Hamilton 定理可知 $f(A) = O$, 再由 $AX = XB$ 可得

$$O = f(A)X = Xf(B).$$

因为 A, B 没有公共的特征值, 故由命题 0.6 可知, $f(B)$ 是可逆矩阵, 从而由上式即得 $X = O$ 。

证法二: 任取矩阵方程的一个解 $X = C$, 若 $C \neq O$, 则 $r(C) = r \geq 1$ 。由例题 ?? 可知, A, B 至少有 r 个相同的特征值, 这与 A, B 没有公共的特征值相矛盾。因此 $C = O$, 即矩阵方程只有零解。□

例题 0.2 设 n 阶方阵 A, B 的特征值全部大于零且满足 $A^2 = B^2$, 求证: $A = B$ 。

证明 由 $A^2 = B^2$ 可得 $A(A - B) = (A - B)(-B)$, 即 $A - B$ 是矩阵方程 $AX = X(-B)$ 的解。注意到 A 的特征值全部大于零, $-B$ 的特征值全部小于零, 故它们没有公共的特征值, 由命题 0.11 可得 $A - B = O$, 即 $A = B$ 。□

例题 0.3 设 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为 n 阶分块对角矩阵, 其中 A_i 是 n_i 阶矩阵且两两没有公共的特征值。设 B 是 n 阶矩阵, 满足 $AB = BA$, 求证: $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$, 其中 B_i 也是 n_i 阶矩阵。

证明 按照 A 的分块方式对 B 进行分块, 可设 $B = (B_{ij})$, 其中 B_{ij} 是 $n_i \times n_j$ 矩阵。由 $AB = BA$ 可知, 对任意的 i, j , 有 $A_i B_{ij} = B_{ij} A_j$ 。因为 A_i, A_j ($i \neq j$) 没有公共的特征值, 故由命题 0.11 可得 $B_{ij} = O$ ($i \neq j$), 从而 $B = \text{diag}\{B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{mm}\}$ 也是分块对角矩阵。□

命题 0.12

设 A, B 分别为 m, n 阶矩阵, V 为 $m \times n$ 矩阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为: $\varphi(X) = AX - XB$ 。求证: φ 是线性自同构的充要条件是 A, B 没有公共的特征值。此时, 对任一 $m \times n$ 矩阵 C , 矩阵方程 $AX - XB = C$ 存在唯一解。

证明 若 A, B 没有公共的特征值, 则由命题 0.11 可知, $\varphi(X) = AX - XB = 0$ 只有零解, 即 $\text{Ker} \varphi = 0$ 。从而 φ 是 V 上的单映射, 从而是线性自同构。若 A, B 有公共的特征值 λ_0 , 则 λ_0 也是 B' 的特征值。设 α, β 为对应的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda_0\alpha, B'\beta = \lambda_0\beta$, 则 $\alpha\beta' \neq O$ 且

$$\varphi(\alpha\beta') = (A\alpha)\beta' - \alpha(B'\beta)' = \lambda_0\alpha\beta' - \lambda_0\alpha\beta' = O,$$

于是 $\text{Ker } \varphi \neq 0$, 从而 φ 不是线性自同构。 \square

例题 0.4 设 n 阶实矩阵 A 的所有特征值都是正实数, 证明: 对任一实对称矩阵 C , 存在唯一的实对称矩阵 B , 满足 $A'B + BA = C$ 。

证明 考虑矩阵方程 $A'X - X(-A) = C$, 注意到 A' 的特征值全部大于零, $-A$ 的特征值全部小于零, 它们没有公共的特征值, 故由命题 0.12 可得上述矩阵方程存在唯一解 $X = B$ 。容易验证 $X = \overline{B}$, B' 也都是上述矩阵方程的解, 故由解的唯一性可知 $B = \overline{B}$ 且 $B = B'$, 即 B 为实对称矩阵, 结论得证。 \square

0.1.4 Cayley-Hamilton 定理的应用: 特征多项式诱导的直和分解


例题 0.5 设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, 又有两个复系数多项式:

$$f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad g(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

设 $\sigma = f(\varphi)$, $\tau = g(\varphi)$, 矩阵 C 是 $f(x)$ 的友阵, 即

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

若 $g(C)$ 是可逆矩阵, 求证: $\text{Ker } \sigma\tau = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$ 。

 **笔记** $(f(x), g(x)) = 1$ 之后的证明类似命题??。

证明 由命题??可知 C 的特征多项式就是 $f(x)$ 。由命题 0.7 可知 $(f(x), g(x)) = 1$ 。由 $(f(x), g(x)) = 1$ 可知, 存在多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

从而

$$u(\varphi)f(\varphi) + v(\varphi)g(\varphi) = I_V. \quad (1)$$

于是对 $\forall \alpha \in \text{Ker } \sigma\tau$, 由 (1) 式可得

$$\alpha = u(\varphi)f(\varphi)(\alpha) + v(\varphi)g(\varphi)(\alpha).$$

又因为 $\alpha \in \text{Ker } \sigma\tau$, 所以 $f(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = g(\varphi)f(\varphi)(\alpha) = 0$ 。因此 $u(\varphi)f(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker } g(\varphi)$, $v(\varphi)g(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker } f(\varphi)$ 。故有 $\text{Ker } \sigma\tau = \text{Ker } \sigma + \text{Ker } \tau$ 。任取 $\beta \in \text{Ker } \sigma \cap \text{Ker } \tau$, 则 $\sigma(\beta) = f(\varphi)(\beta) = 0, \tau(\beta) = g(\varphi)(\beta) = 0$ 。由 (1) 式可得


$$\beta = u(\varphi)f(\varphi)(\beta) + v(\varphi)g(\varphi)(\beta) = 0.$$

故 $\text{Ker } \sigma \cap \text{Ker } \tau = 0$, 因此 $\text{Ker } \sigma\tau = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$ 。 \square

命题 0.13

设 φ 是数域 \mathbb{K} 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 其特征多项式是 $f(\lambda)$ 且 $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, 其中 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 是互素的首一多项式。令 $V_1 = \text{Ker } f_1(\varphi)$, $V_2 = \text{Ker } f_2(\varphi)$, 求证:

- (1) V_1, V_2 是 φ -不变子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$;
- (2) $V_1 = \text{Im } f_2(\varphi)$, $V_2 = \text{Im } f_1(\varphi)$;
- (3) $\varphi|_{V_1}$ 的特征多项式是 $f_1(\lambda)$, $\varphi|_{V_2}$ 的特征多项式是 $f_2(\lambda)$ 。

 **笔记** 这个命题是命题??的推广。

这个命题的结论还可以进一步推广, 例如有不限定 $f(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式, 而只要求 φ 适合它 (比如 φ 的极小多项式 $m(\lambda)$), 则由完全相同的讨论可以证明此时对这个命题的 (1) 和 (2) 都成立。特别地, 如果考虑极小多项式的首一互素因式分解

$$m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda), V_1 = \text{Ker } m_1(\varphi), V_2 = \text{Ker } m_2(\varphi),$$

则由完全类似的讨论可以证明: $\varphi|_{V_i}$ 的极小多项式就是 $m_i(\lambda)$.

注 (3) 中 $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$ 的原因: 由于 $f_i(\lambda)$ 与 $g_i(\lambda)$ 的根相同, 且 $f_1(\lambda)$ 与 $f_2(\lambda)$ 没有公共根, 因此不妨设

$$f_1(\lambda) = (\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}, \quad (2)$$

$$g_1(\lambda) = (\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}, \quad g_2(\lambda) = (\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}. \quad (3)$$

其中 $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_l$ 互不相同. 则

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = [(\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}][(\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}],$$

$$g_1(\lambda)g_2(\lambda) = [(\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}][(\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}].$$

又由 $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda)$ 可得

$$[(\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}][(\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}] = [(\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}][(\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}].$$

比较上式两边的常数项可得

$$x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} y_1^{j_1} \cdots y_l^{j_l} = x_1^{i'_1} \cdots x_s^{i'_s} y_1^{j'_1} \cdots y_l^{j'_l}.$$

又因为 $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_l$ 互不相同, 所以

$$i_1 = i'_1, \dots, i_s = i'_s, j_1 = j'_1, \dots, j_l = j'_l.$$

再由(2)和(3)式可知 $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$.

证明

(1) 对 $\forall \alpha \in V_1$, 都有 $f_1(\varphi)(\alpha) = 0$. 从而

$$f_1(\varphi)(\varphi(\alpha)) = (f_1(\varphi)\varphi)(\alpha) = (\varphi f_1(\varphi))(\alpha) = \varphi(f_1(\varphi)(\alpha)) = \varphi(0) = 0.$$

故 V_1 是 φ -不变子空间, 同理可得 V_2 也是 φ -不变子空间. 由 **Cayley - Hamilton 定理** 可得 $f(\varphi) = f_1(\varphi)f_2(\varphi) = \mathbf{0}$, 故由命题??可知 $V = V_1 \oplus V_2$.

(2) 由 $f_1(\varphi)f_2(\varphi) = \mathbf{0}$ 可得 $\text{Im } f_2(\varphi) \subseteq \text{Ker } f_1(\varphi) = V_1$, $\text{Im } f_1(\varphi) \subseteq \text{Ker } f_2(\varphi) = V_2$. 因为 $V = V_1 \oplus V_2$, 故由维数公式可得

$$\dim \text{Im } f_2(\varphi) = \dim V - \dim \text{Ker } f_2(\varphi) = \dim V - \dim V_2 = \dim V_1,$$

$$\dim \text{Im } f_1(\varphi) = \dim V - \dim \text{Ker } f_1(\varphi) = \dim V - \dim V_1 = \dim V_2,$$

从而 $V_1 = \text{Im } f_2(\varphi), V_2 = \text{Im } f_1(\varphi)$.

(3) 设 $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $g_i(\lambda)(i = 1, 2)$, 则由命题??可得

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda). \quad (4)$$

注意到 $f_i(\varphi|_{V_i}) = f_i(\varphi)|_{V_i} = \mathbf{0}$, 即 $\varphi|_{V_i}$ 适合多项式 $f_i(\lambda)$, 因此 $\varphi|_{V_i}$ 的特征值也适合 $f_i(\lambda)$, 即 $g_i(\lambda)$ 的根都是 $f_i(\lambda)$ 的根. 因为 $(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = 1$, 故 $f_1(\lambda)$ 与 $f_2(\lambda)$ 没有公共根, 从而由 $f_i(\lambda)$ 的首一性和(4)式即得 $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$.

□

0.1.5 Cayley-Hamilton 定理的其他应用

例题 0.6 设 A 为 n 阶矩阵, C 为 $k \times n$ 矩阵, 且对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{pmatrix}$ 均为列满秩阵. 证明: 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} C \\ C(A - \lambda I_n) \\ C(A - \lambda I_n)^2 \\ \vdots \\ C(A - \lambda I_n)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ 均为列满秩阵.}$$

证明 由推论??可知, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 下列线性方程组只有零解:

$$\begin{cases} (A - \lambda I_n)x = 0, \\ Cx = 0. \end{cases} \quad (5)$$

而要证明结论, 根据推论??可知, 只要证明对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 下列线性方程组只有零解即可:

$$\begin{cases} Cx = 0, \\ C(A - \lambda I_n)x = 0, \\ C(A - \lambda I_n)^2x = 0, \\ \dots\dots\dots \\ C(A - \lambda I_n)^{n-1}x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

任取 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 以及对应线性方程组 (6) 的任一解 x_0 , 则由线性方程组 (6) 可得 $Cx_0 = 0$, $C(A - \lambda_0 I_n)x_0 = 0$, \dots , $C(A - \lambda_0 I_n)^{n-1}x_0 = 0$, 因此对任意次数小于 n 的多项式 $g(x)$, 均有 $Cg(A)x_0 = 0$. 设

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

为 A 的特征多项式, 则由 Cayley-Hamilton 定理可得

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = O.$$

因此 $y = (A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)x_0$ 既满足 $(A - \lambda_1 I_n)y = 0$, 又满足 $Cy = 0$, 故由线性方程组 (5) 只有零解可得 $y = (A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)x_0 = 0$. 不断重复上述论证, 最后可得 $x_0 = 0$, 结论得证. \square

例题 0.7 设 A 是 n 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 分块矩阵 $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$ 的秩为 r . 证明: 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 是 r 阶矩阵, B_1 是 $r \times m$ 矩阵.

注 $A\alpha_i (1 \leq i \leq r)$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性组合的原因: 因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$ 列向量的极大无关组, 所以对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, 都存在 $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 使得 α_i 是 $A^k B$ 的某一列向量.

当 α_i 是 $A^k B (0 \leq k \leq n-2)$ 的某一列向量时, 则 $A\alpha_i$ 一定是 $A^{k+1}B$ 的某一列向量, 又由于 $1 \leq k+1 \leq n-1$, 因此 $A\alpha_i$ 仍是 $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$ 的某一列向量, 从而 $A\alpha_i$ 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

当 α_i 是 $A^{n-1}B$ 的某一列向量时, 则 $A\alpha_i$ 一定是 $A^n B$ 的某一列向量. 由 (7) 式可知

$$A^n B = -a_1 A^{n-1} B - \dots - a_{n-1} AB - a_n B.$$

而上式右边的每一个列向量都可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 于是 $A^n B$ 的每一个列向量都可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出. 故 $A\alpha_i$ 也可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

证明 设 $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$ 列向量的极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 由基扩张定理可将其扩张为 \mathbb{F}^n 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 P 为可逆矩阵. 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} +$

$\cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, 则由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I_n = O,$$

从而

$$A^n B = -a_1 A^{n-1} B - \cdots - a_{n-1} A B - a_n B. \quad (7)$$

由上式容易验证 $A\alpha_i (1 \leq i \leq r)$ 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合, 于是 $AP = P \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$, 即有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$. 又 B 的列向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合, 于是 $B = P \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$, 即有 $P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$. \square

例题 0.8 设 A 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵, 递归地定义矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$:

$$A_1 = A, \quad p_k = -\frac{1}{k} \operatorname{tr}(A_k), \quad A_{k+1} = A(A_k + p_k I_n), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

求证: $A_{n+1} = O$.

证明 设 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 它们的幂和记为 $s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \operatorname{tr}(A^k)$, 它们的初等对称多项式记为 σ_k , 则 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \lambda + (-1)^n \sigma_n.$$

下面用归纳法证明: $p_k = (-1)^k \sigma_k (1 \leq k \leq n)$. $p_1 = -\operatorname{tr}(A) = -\sigma_1$, 结论成立. 假设小于等于 k 时结论成立, 则 $A_{k+1} = A^{k+1} - \sigma_1 A^k + \cdots + (-1)^k \sigma_k A$. 由 Newton 公式可得

$$p_{k+1} = -\frac{1}{k+1} \operatorname{tr}(A_{k+1}) = -\frac{1}{k+1} (s_{k+1} - s_k \sigma_1 + \cdots + (-1)^k s_1 \sigma_k) = (-1)^{k+1} \sigma_{k+1},$$

结论得证. 最后, 由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$A_{n+1} = A^{n+1} - \sigma_1 A^n + \cdots + (-1)^n \sigma_n A = f(A)A = O.$$

\square