


## 0.1 Cauchy 积分公式的一些重要推论

### 定理 0.1 (Cauchy 不等式)

设  $f$  在  $B(a, R)$  中全纯, 且对任意  $z \in B(a, R)$ , 有  $|f(z)| \leq M$ , 那么

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1)$$

 **笔记** 这个不等式给出了圆盘上全纯函数的各阶导数在圆心处值的估计.

**证明** 取  $0 < r < R$ , 则  $f$  在闭圆盘  $\overline{B(a, r)}$  中全纯, 由定理??, 得

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

于是, 由长大小不等式得

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

让  $r \rightarrow R$ , 即得所要证的不等式 (1).

□

### 定理 0.2 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

**证明** 设  $f$  为一有界整函数, 其模的上界设为  $M$ , 即对任意  $z \in \mathbb{C}$ , 有  $|f(z)| \leq M$ . 任取  $a \in \mathbb{C}$ , 以  $a$  为中心、 $R$  为半径作圆, 因为  $f$  为整函数, 故由 **Cauchy 不等式** 可得

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{R}.$$

这个不等式对任意  $R > 0$  都成立, 让  $R \rightarrow \infty$ , 即得  $f'(a) = 0$ . 因为  $a$  是任意的, 所以在全平面上有  $f'(z) \equiv 0$ , 因而由命题??可知  $f$  是常数.


□

### 定理 0.3 (代数学基本定理)

任意复系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

在  $\mathbb{C}$  中必有零点.

 **笔记** 考虑到实系数多项式在实数域中未必有零点, 这个定理给出了复数域的又一重要性质.

**证明** 反证, 如果  $P(z)$  在  $\mathbb{C}$  中没有零点, 那么  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  是一个整函数. 由  $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$  知

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

故存在  $R > 0$ , 使当  $|z| > R$  时, 有

$$|f(z)| \leq 1.$$

又由  $f$  是整函数知  $f \in C(B(0, R))$ , 故由定理??知当  $|z| \leq R$  时,  $f$  是有界的. 因而  $f$  是有界整函数. 由 **Liouville 定理**,  $f$  应是一常数, 显然矛盾! 这就证明了  $P$  在  $\mathbb{C}$  中必有零点.

□

### 定理 0.4 (Morera 定理)

如果  $f$  是区域  $D$  上的连续函数, 且沿  $D$  内任一可求长闭曲线的积分为零, 那么  $f$  在  $D$  上全纯.

 **笔记** 这个定理是 Cauchy 积分定理的逆定理.

**证明** 由定理??, 存在  $F \in H(D)$ , 使得  $F'(z) = f(z)$  在  $D$  中成立. 由定理??,  $F'$  是  $D$  中的全纯函数, 所以  $F' = f$  也是全纯函数.

□