0.1 复数的定义及其运算

定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a, b), 如果用 $\mathbb{R}$ 记实数的全体,$\mathbb{C}$ 记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;$(0, 0)$ 是零元素,$(-a, -b)$ 是 (a, b) 的负元素;$(1, 0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a, b) 有逆元素 $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$; 此外,$\mathbb{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此 $\mathbb{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 显然,$(a, 0) \to a$ 是 $\tilde{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的一个同构对应, 因此实数域 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a, 0) = a$. 在 $\mathbb{C}$ 中,$(0, 1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用 i 记 $(0, 1)$ 这个元素, 于是有 $\mathrm{i}^2 = -1$. 由于 $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b\mathrm{i}$, 于是每一个复数 (a, b) 都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\mathrm{i}.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a, b) 来记复数, 而直接用 $z = a + b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的**实部**,b 称为 z 的**虚部**, 分别记为 $a = \mathrm{Re}z$,$b = \mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = (a + b\mathrm{i})\left(\frac{c - d\mathrm{i}}{c^2 + d^2}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z = a + b\mathrm{i}$ 是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**,$\bar{z}$ 称为 z 的**共轭复数**. ♣

定义 0.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a < b$), 其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a, b, 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果 $a < b, b < c$, 那么 $a < c$;

(iii) 如果 $a < b$, 那么对任意 c, 有 $a + c < b + c$;

(iv) 如果 $a<b, c>0$, 那么 $ac<bc$.

笔记 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 0.1

复数域不是有序域.

证明 如果 $\mathbb{C}$ 是有序域, 那么因为 $\mathrm{i}\neq 0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i}>0$ 或 $\mathrm{i}<0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i}>0$, 则由有序域 (iv)得 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>\mathrm{i}\cdot 0$, 即 $-1>0$, 再由(iii), 两端都加 1, 即得 $0>1$. 另一方面, 从 $-1>0$ 还可得 $(-1)\cdot(-1)>0\cdot(-1)$, 即 $1>0$, 这和刚才得到的 $0>1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i}<0$, 两端都加 $-\mathrm{i}$, 得 $0<-\mathrm{i}$, 再由有序域 (iv), 两端乘 $-\mathrm{i}$, 得 $-1>0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0>1$ 和 $0<1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域.

□

命题 0.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(1) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$, $\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}\bar{z}$, $\mathrm{Im}z=-\mathrm{Im}\bar{z}$.

(2) $z\bar{z}=|z|^2$, $\bar{z}=\dfrac{|z|^2}{z}$.

(3) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$.

(4) $|z|=|\bar{z}|$, $|z|=|-z|$, $|zw|=|z||w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.

(5) $(z+w)^2=|z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

(6) 若 $|z|=\lambda|w|, \lambda>0$, 则 $|z-\lambda^2 w|=\lambda|z-w|$.

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5) 由命题 0.1(1)和命题 0.1(2)可得 $|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2$.

(6) 利用命题 0.1(5)和命题 0.1(4)可得

$$\begin{aligned}\left|z-\lambda^2 w\right|^2&=|z|^2+\lambda^4|w|^2-2\lambda^2\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)\\&=\lambda^2|w|^2+\lambda^4|w|^2-2\lambda^2\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)\\&=\lambda^2\left(\lambda^2|w|^2+|w|^2-2\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)\right)\\&=\lambda^2|\lambda w-w|^2=\lambda^2|z-w|^2.\end{aligned}$$

□

命题 0.2 (基本不等式)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(1) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$, 等号成立当且仅当 $z\in\mathbb{R}$.

$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$, 等号成立当且仅当 z 是纯虚数.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|)\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$.

(3) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t\geqslant 0$, 使得 $z=tw$.

一般的, 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+\cdots+|z_n|.$$

等号成立当且仅当 $z_i, i=1,2,\cdots,n$ 共线且同向.

(4) $|z-w| \geqslant \big||z|-|w|\big|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z-w=tw$, 即 $z=(t+1)w$.

证明

(1) 从 $\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(2) 设 $z=a+b\mathrm{i}$, 则由均值不等式可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|)=\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leqslant |z|=\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b=|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|.$$

(3) 利用命题 0.1(5)和命题 0.2(1), 即得

$$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2 \leqslant |z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,$$

由此即知结论成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\overline{w})=|z\overline{w}|$, 这等价于 $z\overline{w}\in\mathbb{R}$ 且 $z\overline{w}\geqslant 0$. 不妨设 $w\neq 0$($w=0$ 时, 等号显然成立), 则当 $z\overline{w}\in(0,+\infty)$ 时, 由于 $\overline{w}=\dfrac{|w|^2}{w}$, 故 $z\overline{w}=\dfrac{z}{w}|w|^2\in(0,+\infty)$. 令 $t=\left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$, 则 $t\in\mathbb{R}$ 且 $t\geqslant 0$, 而且 $z=tw$. 反之, 若存在 $t\in(0,+\infty)$, 使得 $z=tw$. 则 $\dfrac{z}{w}=t\in(0,+\infty)$, 从而 $z\overline{w}=\dfrac{z}{w}|w|^2\in(0,+\infty)$.

一般的情形, 利用数学归纳法易证.

(4) 当 $|z|=|w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z|>|w|$ 时, 由命题 0.2(3)可得

$$|z|=|(z-w)+w|\leqslant|z-w|+|w|,$$

移项可得 $|z-w|\geqslant|z|-|w|=\big||z|-|w|\big|$. 由命题 0.2(3)可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t\geqslant 0$, 使得 $z-w=tw$, 即 $z=(t+1)w$.

当 $|z|<|w|$ 时, 由命题 0.2(3)可得

$$|w|=|(w-z)+z|\leqslant|w-z|+|z|,$$

移项可得 $|z-w|=|w-z|\geqslant|w|-|z|=\big||z|-|w|\big|$. 由命题 0.2(3)可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t\geqslant 0$, 使得 $w-z=tz$, 即 $w=(t+1)z$.

□

命题 0.3

设 $z,a\in\mathbb{C}$, 且 $|a|<1$, 则

(1) $$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=\begin{cases}1, & |z|=1,\\ <1, & |z|<1,\\ >1, & |z|>1.\end{cases}$$

(2) $$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

(3) 若还有 $|z|<1$, 则

$$\frac{\big||z|-|a|\big|}{1-|a|\,|z|}\leqslant\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leqslant\frac{|z|+|a|}{1+|a|\,|z|}.$$

证明

(1) 当 $|z|=1$ 时, 由命题 0.1(5)可得

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1\Longleftrightarrow|z-a|^2=|1-\overline{a}z|^2\Longleftrightarrow|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)=1+|\overline{a}z|^2-2\mathrm{Re}\,(a\overline{z}).$$

由 $|z|=1$ 和 $\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)=\mathrm{Re}\,(a\overline{z})$ 知上面最后一个式子成立, 故此时 $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1$.

当 $|z| \neq 1$ 时, 由命题 0.1(5)可得

$$\begin{aligned}|z-a|^2-|1-\overline{a}z|^2 &= \left[|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right]-\left[1+|\overline{a}z|^2-2\mathrm{Re}\,(a\overline{z})\right]\\ &= |z|^2+|a|^2-1-|a|^2|z|^2=\left(|z|^2-1\right)\left(1-|a|^2\right)\\ &= \begin{cases}<0, & |z|<1,\\ >0, & |z|>1.\end{cases}\end{aligned}$$

从而

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}=\begin{cases}<1, & |z|<1,\\ >1, & |z|>1.\end{cases}$$

故

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=\begin{cases}<1, & |z|<1,\\ >1, & |z|>1.\end{cases}$$

(2) 由命题 0.1(5)可得

$$\begin{aligned}1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 &= \frac{|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}=\frac{\left[1+|a|^2\,|z|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right]-\left[|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right]}{|1-\overline{a}z|^2}\\ &= \frac{1+|a|^2\,|z|^2-|z|^2-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2}.\end{aligned}$$

(3) 由命题 0.1(4)和命题 0.1(5)可得

$$\begin{aligned}&\frac{||z|-|a||}{1-|a|\,|z|}\leqslant\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}\iff ||z|-|a||\cdot|1-\overline{a}z|\leqslant(1-|a|\,|z|)\,|z-a|\\ &\iff ||z|-|a||^2\cdot|1-\overline{a}z|^2\leqslant(1-|a|\,|z|)^2\,|z-a|^2\\ &\iff \left(|z|^2+|a|^2-2\,|a|\,|z|\right)\left(1+|a|^2\,|z|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right)\leqslant\left(1+|a|^2\,|z|^2-2\,|a|\,|z|\right)\left(|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right)\\ &\iff |a|\,|z|\left(|z|^2+|a|^2-1-|a|^2\,|z|^2\right)-\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\left(|z|^2+|a|^2-1-|a|^2\,|z|^2\right)\leqslant 0\\ &\iff (|a|\,|z|-\mathrm{Re}\,(\overline{a}z))\left(1-|a|^2\right)\left(|z|^2-1\right)\leqslant 0\iff |a|\,|z|\geqslant\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}=\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leqslant\frac{|z|+|a|}{1+|a|\,|z|}\iff |z-a|\,(1+|a|\,|z|)\leqslant|1-\overline{a}z|\,(|z|+|a|)\\ &\iff |z-a|^2\,(1+|a|\,|z|)^2\leqslant|1-\overline{a}z|^2\,(|z|+|a|)^2\\ &\iff \left(|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right)\left(1+|a|^2\,|z|^2+2\,|a|\,|z|\right)\leqslant\left(1+|a|^2\,|z|^2-2\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\right)\left(|z|^2+|a|^2+2\,|a|\,|z|\right)\\ &\iff |a|\,|z|\left(|z|^2+|a|^2-1-|a|^2\,|z|^2\right)+\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\left(|z|^2+|a|^2-1-|a|^2\,|z|^2\right)\leqslant 0\\ &\iff (|a|\,|z|+\mathrm{Re}\,(\overline{a}z))\left(1-|a|^2\right)\left(|z|^2-1\right)\leqslant 0\iff |a|\,|z|\geqslant-\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\,.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{||z|-|a||}{1-|a|\,|z|}\leqslant\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leqslant\frac{|z|+|a|}{1+|a|\,|z|}\iff -\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\leqslant|a|\,|z|\leqslant\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)\iff|\mathrm{Re}\,(\overline{a}z)|\leqslant|a|\,|z|\,.$$

由命题 0.2(1)知最后一个不等式成立, 故结论成立.

□

定理 0.2

设 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$ 是任意 $2n$ 个复数, 证明复数形式的 **Lagrange 恒等式**:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}z_iw_i\right|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|z_i\overline{w_j}-z_j\overline{w_i}\right|^2.$$

并由此推出 **Cauchy 不等式**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right).$$

等号成立当且仅当 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 与 $(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \cdots, \overline{w_n})$ 线性相关, 也当且仅当存在 $k \in \mathbb{C}$, 使得 $z_i = k\overline{w_i}\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 或 $\overline{w_i} = kz_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$.

证明 记

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix},$$

则

$$\left|A\overline{A}^T\right| = \left|\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & w_1 \\ \overline{z_2} & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{z_n} & w_n \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 & \sum_{i=1}^{n} z_i w_i \\ \sum_{i=1}^{n}\overline{z_i w_i} & \sum_{i=1}^{n}|w_i|^2 \end{pmatrix}\right|. \tag{1}$$

由Cauchy-Binet 公式可得(1)式左边等于

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|\begin{pmatrix} z_i & z_j \\ \overline{w_i} & \overline{w_j} \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} \overline{z_i} & w_i \\ \overline{z_j} & w_j \end{pmatrix}\right| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}\right)\left(\overline{z_i}w_j - \overline{z_j}w_i\right) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}\right|^2.$$

而(1)式右边显然等于

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i w_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2.$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2 \\ \Longleftrightarrow &\left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}\right|^2. \end{aligned}$$

由此立得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right).$$

等号成立当且仅当

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}\right|^2 = \left|A\overline{A}^T\right| \\ \Longleftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{r}\left(A\overline{A}^T\right) = \mathrm{r}(A). \end{aligned}$$

再记 $\alpha = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T, \beta = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \cdots, \overline{w_n})^T$, 则由上式可知 A 不可逆, 从而 A 的行向量 α^T, β^T 线性相关, 即存在 $k \in \mathbb{C}$, 使得

$$\alpha = k\beta \quad 或 \quad \beta = k\alpha \Longleftrightarrow z_i = k\overline{w_i}\,(i = 1, 2, \cdots, n) \quad 或 \quad \overline{w_i} = kz_i\,(i = 1, 2, \cdots, n).$$

□

引理 0.1

设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 证明必有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 E, 使得

$$\left|\sum_{j\in E} z_j\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

证明 记 $z_k=|z_k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}$. 当 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时, 设 $S(\theta)$ 是所有使得 $\cos(\alpha_k-\theta)>0$ 的 k 组成的集, 则

$$\left|\sum_{S(\theta)} z_k\right| = \left|\sum_{S(\theta)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} z_k\right| \geqslant \mathrm{Re}\sum_{S(\theta)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} z_k = \sum_{k=1}^{n}|z_k|\cos^{+}(\alpha_k-\theta),$$

其中

$$\cos^{+}(\alpha_k-\theta)=\begin{cases}\cos(\alpha_k-\theta), & \cos(\alpha_k-\theta)>0,\\ 0, & \cos(\alpha_k-\theta)\leqslant 0.\end{cases}.$$

选取 θ_0, 使得最后一个和式最大 (连续函数在闭区间必有最值), 并令 $S=S(\theta_0)$. 这个最大值至少是 $[-\pi,\pi]$ 上和的平均值, 由于对每个 α, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{+}(\alpha-\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi},$$

所以这个平均值就是 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|z_j|$.

□