

0.1 唯一析因环 (唯一分解整环)

因本节讨论并未用到 R 中的加法, 因而可以认为 R^* 是满足消去律的么半群. 因此, 可定义唯一析因么半群 (或 Gauss 么半群). 引理 0.2, 引理 0.3 与定理 0.7 对 Gauss 么半群也成立.

定理 0.1

设 R 是交换整环, 由命题 0.1 知 $R^* = R \setminus \{0\}$ 对乘法构成交换么半群且消去律成立. 以 U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则 U 对乘法构成一个 Abel 群, 称为 R 的**单位群**. U 中元素称为 R 的**单位**.

证明

□

定义 0.1 (整数)

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, $a, b \in R^*$, 若 $\exists c \in R^*$, 使 $b = ac$, 则称 a 能**整除** b , 或 a 是 b 的**因子**, 或 b 是 a 的**倍式**. 记为 $a|b$. a 不能整除 b , 记为 $a \nmid b$. 在 R 中约定 $a|0, \forall a \in R$.

定义 0.2 (相伴)

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, $a, b \in R^*$, 且 $a|b, b|a$, 则称 a 与 b **相伴**, 记为 $a \sim b$.

定理 0.2

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, $a, b, c \in R^*$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则

- (1) $a|a, \forall a \in R^*$.
- (2) 若 $a|b, b|c$, 则 $a|c$.
- (3) $a \sim b$ 的充要条件是 $ac \sim bc$.
- (4) 若 $u \in U$, 则 $u|a, \forall a \in R^*$.
- (5) $u \in U \iff u|1$.
- (6) $a \sim b \iff \exists u \in U$, 使 $b = au \iff \langle a \rangle = \langle b \rangle$.
- (7) 相伴关系是乘法么半群 R^* 中的同余关系.
- (8) $u \in U \iff u \sim 1$.
- (9) 若 $a|b, a|c$, 则 $a|(xb + yc), \forall x, y \in R$.

证明

- (1) 这是因为 $a = 1 \cdot a$.
- (2) 由 $b = ad, c = be$ 得 $c = a(de)$.
- (3) **必要性:** 由 $a \sim b$ 知 $b = ad, a = be(d, e \in R)$, 于是 $bc = adc, ac = bec$, 故 $ac | bc, bc | ac$, 即 $ac \sim bc$.
充分性: 由 $ac \sim bc$ 知 $ac = dbc, bc = eac(d, e \in R)$. 由命题 0.1 知 R^* 对乘法满足消去律, 故 $a = db, b = ea$, 因此 $a \sim b$.
- (4) 这是因为 $a = u(u^{-1}a)$.
- (5) 由性质 (4) 知 $u \in U$ 时, $u|1$. 反之, 若 $u|1$, 即有 v , 使得 $1 = vu$, 故 $v = u^{-1}(u \in U)$. 再利用定理 0.1 可得

$$\langle b \rangle = bR = auR \xrightarrow{\text{定理 0.1}} aR = \langle a \rangle.$$

- (6) 事实上, 若 $b = au(u \in U)$, 则 $a = bu^{-1}$. 因而 $a|b, b|a$, 即 $a \sim b$.
反之, 若 $a|b, b|a$, 即有 $c, d \in R^*$, 使得 $b = ac, a = bd$. 于是 $b = b(dc)$. 由命题 0.1 知 R^* 对乘法满足消去律, 故 $dc = 1$, 因而 $d, c \in U$.
- (7) 相伴关系显然是等价关系. 设 $a \sim b, c \sim d$. 于是 $\exists u_1, u_2 \in U$, 使得 $b = au_1, d = cu_2$. 于是 $bd = ac(u_1u_2)$. 由 $u_1u_2 \in U$ 及性质 (6) 知 $ac \sim bd$, 即相伴关系是同余关系.
- (8) 注意到 $1 \in U$, 故由性质 (4) 知 $1|u$. 再由性质 (5) 知 $u \in U \iff u|1 \iff u \sim 1$.

(9)

□

定义 0.3

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则 $\forall u \in U, a \in R^*$, 由定理 0.2(1) 和定理 0.2(4) 知 u 是 a 的因子, 这种因子称为**平凡因子**.

♣

定义 0.4

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, $a, b \in R^*$. 若 $b|a$, 但 $a \nmid b$, 则称 b 为 a 的**真因子**. 换言之, b 为 a 的真因子当且仅当 b 是 a 的因子且 b 与 a 不相伴.

♣

定理 0.3

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则如果 $u \in U$, 则 u 无真因子.

♥

证明 事实上若 v 是 u 的因子, 即 $v|u$, 又由定理 0.2(5) 知 $u|1$, 故 $v|1$, 因而再由定理 0.2(5) 知 $v \in U \subseteq R^*$, 故由定理 0.2(4) 知 $u|v$. 因此 $v \sim u$, 由此知 u 无真因子.

□

定义 0.5

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, $a \in R^* \setminus U$. 若 a 无非平凡的真因子, 则称 a 为**不可约元素**. 若 a 有非平凡的真因子, 则称 a 为**可约元素**.

特别地, R 的一元多项式环 $R[x]$ 上的不可约元素称为 $R[x]$ 上的**不可约多项式**.

♣

注 由定义知若 a 是不可约元素, 则 $n|a \iff n \sim 1$ 或 $n \sim a$.

命题 0.1

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, $u \in U, a$ 为 R 的不可约元素, 则 au 也是不可约的. 进而, 若 $a \sim b$, 则 b 也不可约.

♣

证明 反证, 假设 au 可约, 则存在 $e \in R^*$ 为 au 的非平凡真因子. 从而存在 $x \in R^*$, 使 $au = ex$, 进而 $a = exu^{-1}$. 于是 e 也是 a 的非平凡真因子, 这与 a 不可约矛盾! 故 au 不可约. 由定理 0.2(6) 可知存在 $u' \in U$, 使 $b = au'$. 由之前证明知 $b = au'$ 也不可约.

□

定义 0.6

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 若 $p \in R^* \setminus U$ 且满足

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ 或 } p|b,$$

则称 p 为**素元素**.

♣

命题 0.2

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 若 p 是素元素, $u \in U, a_i \in R (i = 1, 2, \dots, l)$, 且 $p | u \prod_{i=1}^k a_i$, 则存在 $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使 $p | a_{i_0}$.

♣

证明 由素元素定义可得 $p | u$ 或 $p | \prod_{i=1}^k a_i$. 若 $p | u$, 则由定理 0.2(4) 知 $u | p$, 故 $p \sim u$. 再由定理 0.2(6) 知存在

$u' \in U$, 使 $p = uu' \in U$, 这与 p 不可约矛盾! 故下设 $p \mid \prod_{i=1}^k a_i$.

由素元素定义可得 $p \mid a_k$ 或 $p \mid \prod_{i=1}^{k-1} a_i$. 若 $p \mid a_k$ 则结论已经成立. 若 $p \mid \prod_{i=1}^{k-1} a_i$, 则再由素元素定义可得 $p \mid a_{k-1}$ 或 $p \mid \prod_{i=1}^{k-2} a_i$. 若 $p \mid a_{k-1}$ 则结论已经成立. 若 $p \mid \prod_{i=1}^{k-2} a_i$, 则再由素元素定义可得 $p \mid a_{k-2}$ 或 $p \mid \prod_{i=1}^{k-3} a_i$. 继续做下去, 因为 $\prod_{i=1}^k a_i$ 中只有 k 个元素, 所以必在有限步终止, 故必存在 $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使 $p \mid a_{i_0}$. □

例题 0.1 在整数环 \mathbb{Z} 中, $U = \{1, -1\}$, 于是 $a \sim b \iff a = \pm b$, 因而 a 为不可约元素当且仅当 a 为素数或负素数. 并且整数环 \mathbb{Z} 的不可约元素都是素元素.

证明

例题 0.2 设 \mathbb{P} 为数域, 则 \mathbb{P} 上一元多项式环 $\mathbb{P}[x]$ 为交换整环. 此时 $U = \mathbb{P}^* = \mathbb{P} \setminus \{0\}$. $f(x) \sim g(x) \iff \exists c \in \mathbb{P}^*$, 使得 $f(x) = cg(x)$, 因而 $f(x)$ 为不可约元素当且仅当 $f(x)$ 为不可约多项式. 并且一元多项式环 $\mathbb{P}[x]$ 的不可约元素都是素元素.

证明

引理 0.1

设 R 是整环, 则 R 中的素元素一定是不可约元素.

注 不可约元素不一定是素元素, 反例见 **例题 0.3**.

证明 记 $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合. 若 a 是素元素 p 的一个因子, 即有 $b \in R^*$, 使 $p = ab$, 因而 $p \mid a$ 或 $p \mid b$. 在 $p \mid a$ 的情况, 说明 a 不是 p 的真因子. 若 $p \mid b$, 即有 $c \in R^*$, 使 $b = pc$, 于是 $p = pac$, 由命题????知 R^* 对乘法满足消去律, 故 $ac = 1$, 从而 $a \in U$, 即 a 为平凡因子. 这说明 p 没有非平凡的真因子, 故 p 是不可约元素. □

定义 0.7

设 $d \neq 1, 0$ 且为无平方因子的整数, 对任意的 $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 称

$$N(a + b\sqrt{d}) = |a^2 - db^2|$$

为 $a + b\sqrt{d}$ 的范数 (norm).

定理 0.4

设 $d \neq 1, 0$ 且为无平方因子的整数, $D = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 则对任意的 $\alpha, \beta \in D$, 有

- (1) $N(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 且 $N(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.
- (2) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, 且 α 为单位当且仅当 $N(\alpha) = 1$.
- (3) 如果 $\alpha \mid \beta$ (在 D 中), 则 $N(\alpha) \mid N(\beta)$ (在 \mathbb{Z} 中).

证明

- (1) 若 $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, 则显然 $N(\alpha) = |a^2 - db^2| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 若存在不全为零的 $a, b \in \mathbb{Z}$, 使得 $a + b\sqrt{d} = 0$, 则 $a = -b\sqrt{d}$, 所以两边平方得

$$a^2 = b^2 d. \quad (1)$$

若 $b = 0$, 则由(1)式得 $a = 0$. 若 $a = 0$, 则由(1)式得 $b^2 d = 0$, 而 $d \neq 0$, 于是 $b = 0$. 从而 a, b 都不为 0, 所以

$d = \frac{a^2}{b^2} > 0$. 又 d 是不等于 1 的整数, 故 $d > 1$. 由于等式(1)的左边是一平方数, 因此 d 必定也是个平方数. 这与 d 无平方因子的假设相矛盾. 于是 $a + b\sqrt{d} = 0$ 当且仅当 a, b 全为 0, 即 $N(0) = 0$, 且由 $N(\alpha) = |a^2 - db^2| = 0$ 得 $a^2 = db^2$, 故 $a = b = 0$, 即 $\alpha = 0$.

(2) 设 $\alpha = a + b\sqrt{d}, \beta = a' + b'\sqrt{d}$, 则 $\alpha\beta = aa' + bb'd + (ab' + ba')\sqrt{d}$. 因为

$$\begin{aligned}(a^2 - db^2)(a'^2 - db'^2) &= (aa')^2 + (bb'd)^2 - [(ab')^2 + (ba')^2]d \\ &= [(aa')^2 + (bb'd)^2 + 2aa'bb'd] - [(ab')^2 + (ba')^2 + 2aa'bb'd]d \\ &= (aa' + bb'd)^2 - d(ab' + ba')^2,\end{aligned}$$

所以 $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$.

(3) 如果 $\alpha \mid \beta$ (在 D 中), 则存在 $\gamma \in D$, 使得 $\beta = \alpha\gamma$. 因此由定理 0.4(2) 得 $N(\beta) = N(\alpha)N(\gamma)$. 而 $N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, 所以 $N(\alpha) \mid N(\beta)$. □

例题 0.3 令 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. 设 $\alpha = a + b\sqrt{-5}$, 则 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的单位群 $U = \{1, -1\}$, 且 3 是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的不可约元素, 但不是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的素元素.

证明 注意到 $\forall \alpha, \beta \in R$ 有 $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. 先求 R 的单位群 U . $\alpha \in U$, 则有 $\alpha\alpha^{-1} = 1$, 故 $N(\alpha)N(\alpha^{-1}) = N(1) = 1$, 故 $N(\alpha) = 1$. 由此即得 $U = \{1, -1\}$, 因而 $\alpha \sim \beta \iff \alpha = \pm\beta$.

再证明 3 是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的不可约元素, 但不是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的素元素. 设 $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ 是 3 的一个因子, 故有 β , 使 $3 = \alpha\beta$, 于是 $N(3) = N(\alpha)N(\beta)$. 由 $N(3) = 9$ 知 $N(\alpha)$ 有以下三种可能:

- (1) $N(\alpha) = 1$, 则 $\alpha = \pm 1$, 即 α 是 3 的平凡因子;
- (2) $N(\alpha) = 3$, 于是 $a^2 + 5b^2 = 3$, 但此方程无整数解, 故这种情况不存在;
- (3) $N(\alpha) = 9$, 于是 $N(\beta) = 1, \beta = \pm 1$, 即有 $\alpha = \pm 3, \alpha \sim 3$, 即 α 不是 3 的真因子.

由上知 3 是不可约元素. 另一方面, $3 \mid 9, 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$. 由于 $N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = N(3) = 9$, 而 3 与 $2 \pm \sqrt{-5}$ 不相伴, 因而 $3 \nmid 2 \pm \sqrt{-5}$, 即 3 不是素元素. □

定义 0.8

若一个交换整环 R 的不可约元素是素元素, 则称 R 满足**素性条件**. ♣

定义 0.9

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, $b, c \in R^*$. 若 $d \in R^*$ 满足 $d \mid b, d \mid c$, 则称 d 为 b, c 的**公因子**. 若对 b, c 的任一公因子 d_1 有 $d_1 \mid d$, 则称 d 是 b, c 的**最大公因子**. 也记为 (b, c) . 若 $(a, b) \sim 1$, 则称 a 与 b 为**互素**. 对 R^* 中任意有限个元素也可类似地定义它们的最大公因子. ♣

注 一般来说, R^* 中任意两个元素的**最大公因子**不一定存在.

定义 0.10

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, 如果 R^* 中任意两个元素的**最大公因子**存在, 则称 R 满足**最大公因子条件**. ♣

引理 0.2

设交换整环 R 满足**最大公因子条件**, $a, b, c, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in R$, 则有下列结论:

- (1) 设 d 是 a, b 的一个**最大公因子**, 则 d_1 为 a, b 的**最大公因子**当且仅当 $d_1 \sim d$, 即 a, b 的**最大公因子**在相伴意义下是唯一的;
- (2) $\forall a_1, a_2, \dots, a_r \in R$ 均有**最大公因子**;
- (3) 若 $b \sim c$, 则 $(a, b) \sim (a, c)$.
- (4) $((a, b), c) \sim (a, (b, c))$;
- (5) $c(a_1, a_2, \dots, a_r) \sim (ca_1, ca_2, \dots, ca_r)$;

- (6) 若 $a \in U$, 则 $(a, b) \sim 1$.
 (7) 若 $(a, b_i) \sim 1, 1 \leq i \leq r$, 则 $(a, b_1 b_2 \cdots b_r) \sim 1$.
 (8) 若 p 是不可约元素, 则 $p \nmid a \iff (p, a) \sim 1$.
 (9) 若 p 是不可约元素, 则 $(p, (a_1, a_2, \cdots, a_r)) \sim 1$ 当且仅当存在 $s \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 使

$$p \mid a_i, 1 \leq i \leq s-1, \quad p \nmid a_s.$$



证明

- (1) 由于 d, d_1 是 a, b 的最大公因子, 故 $d \mid d_1, d_1 \mid d$. 于是 $d \sim d_1$. 反之, $d_1 \sim d$, 故 $d_1 \mid d$. 又 $d \mid a, b$, 于是 $d_1 \mid a, b$, 因而 d_1 是 a, b 的公因子. 又若 c 是 a, b 的公因子, 则 $c \mid d$, 而 $d \mid d_1$, 故有 $c \mid d_1$, 因而 d_1 是 a, b 的最大公因子.
- (2) 令 $d_1 = (a_1, a_2), d_2 = (d_1, a_3), d_3 = (d_2, a_4), \cdots, d = d_{r-1} = (d_{r-2}, a_r)$. 下面证明 d 是 a_1, a_2, \cdots, a_r 的最大公因子. 显然有 $d \mid d_k (1 \leq k \leq r-2), d \mid a_r$. 又 $d_k \mid a_{k+1}$, 故 $d \mid a_i (1 \leq i \leq r)$, 即 d 为公因子. 又若 $a \mid a_i (1 \leq i \leq r)$, 则 $a \mid d_1$ 且依次 $a \mid d_2, a \mid d_3, \cdots$, 最后有 $a \mid d_{r-1}$, 即 $a \mid d$, 因而 d 是最大公因子.
- (3) 设 $d = (a, b)$, 则 $d \mid a, b$. 由 $b \sim c$ 知 $b \mid c$, 故 $d \mid a, c$, 即 d 是 a, c 的公因子. 又设 d_1 也是 a, c 的公因子, 又 $b \sim c$, 故 $c \mid b$, 从而 $d_1 \mid a, b$, 即 d_1 是 a, b 的公因子. 故 $d_1 \mid d$. 因此 d 是 a, c 的最大公因子. 由结论 (1) 知 $d \sim (a, c)$.
- (4) 由结论 (2) 同理可知 $((a, b), c)$ 与 $(a, (b, c))$ 都是 a, b, c 的最大公因子. 由结论 (1) 知它们相伴.
- (5) 设 $d = (a, b), e = (ca, cb)$, 则 $cd \mid ca, cd \mid cb$. 于是 $cd \mid e$, 因而 $e = cdu (u \in R^*)$. 又由 $ca \mid e$ 知 $ca = ex (x \in R^*)$. 由此知 $ca = ex = xucd$. 由命题 0.2.2 知 R^* 对乘法满足消去律, 故 $a = xud$, 即 $ud \mid a$, 同样有 $ud \mid b$, 故 $ud \mid d$, 于是 $d = udk (k \in R^*)$, 同样由 R^* 对乘法满足消去律可得 $uk = 1$, 因而 $u \in U$. 于是由定理 0.2(6) 知 e 与 cd 相伴. 再利用数学归纳法易证.
- (6) 显然 $1 \mid a, b$. 设 $d \mid a, b$, 则存在 $a_1 \in R^*$, 使 $a = da_1$. 于是由 $a \in U$ 知 $1 = aa^{-1} = d(a_1 a^{-1})$, 故 $d \mid 1$. 因此 $(a, b) \sim 1$.
- (7) 因为 $(a, b) \sim 1, (1, c) \sim 1$, 由结论 (5) 知 $(ac, bc) \sim c, (a, ac) \sim a$, 故由结论 (4) 及结论 (3) 有 $1 \sim (a, c) \sim (a, (ac, bc)) \sim ((a, ac), bc) \sim (a, bc)$. 再利用数学归纳法易证.
- (8) \Leftarrow : 假设 $p \mid a$, 则存在 $a_1 \in R^*$, 使 $a = pa_1$. 于是由结论 (5) 和结论 (6) 知 $1 \sim (p, a) = (p, pa_1) = p(1, a_1) = p$. 但由 p 不可约知 $p \notin U$, 由定理 0.2(6) 知 $p \nmid 1$, 矛盾!
 \Rightarrow : 设 $d = (p, a)$, 则存在 $p_1, a_1 \in R^*$, 使 $p = dp_1, a = da_1$. 假设 $d \nmid 1$, 则由定理 0.2(6) 知 $d \notin U$, 从而 $d \in R^* \setminus U$. 若 $p \mid d$, 则由 $d \mid a$ 知 $p \mid a$, 这与 $p \nmid a$ 矛盾! 故 $p \nmid d$.
 若 $d \neq p$, 则由 $p = dp_1, p \nmid d$ 及 $d \in R^* \setminus U$ 知 d 是 p 的非平凡真因子, 这与 p 不可约矛盾!
 若 $d = p$, 则由 $a = da_1$ 知 $a = pa_1$, 即 $p \mid a$, 这与 $p \nmid a$ 矛盾!
 因此 $d \mid 1$, 故 $d \sim 1$.
- (9) \Rightarrow : 假设 $p \mid a_i, 1 \leq i \leq s$, 则 $p \mid (a_1, a_2, \cdots, a_r)$. 从而 $(p, (a_1, a_2, \cdots, a_r)) \sim p$ 矛盾! 故可设 $s_1, s_2, \cdots, s_k \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 使

$$p \mid a_i, i \notin \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}, \quad p \nmid a_s, i \in \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}.$$

取 $s = \min_{j=1, 2, \cdots, k} s_j$, 则

$$p \mid a_i, 1 \leq i \leq s-1, \quad p \nmid a_s.$$

\Leftarrow : 由 $p \nmid a_s$ 知 $p \nmid (a_1, a_2, \cdots, a_r)$, 否则由 $p \mid (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 知 $p \mid a_s$ 矛盾! 于是由结论 (8) 知

$$(p, (a_1, a_2, \cdots, a_r)) \sim 1.$$

□

定义 0.11 (唯一析因环)

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 如果 R 满足下列条件:

- (1) **有限析因条件**: $\forall a \in R^* \setminus U$, 可分解为有限个不可约元素的乘积, 即有不可约元素 $p_i (1 \leq i \leq r)$ 及单位 $u \in U$, 使

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

- (2) 若 $a \in R^* \setminus U$ 有两种不可约元素乘积的分解:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

则有 $r = s$ 且 $\exists \pi \in S_n$, 使 $p_i \sim q_{\pi(i)} (1 \leq i \leq r)$.

那么称 R 为**唯一析因环** (简记为 **UFD**) 或**唯一分解整环**或 **Gauss 环**. 称 $|a| \triangleq r$ 为 a 的**长度**. 若 $u \in U$, 约定 $|u| \triangleq 0$.



注 所谓唯一析因环也就是使因式分解唯一性定理成立的交换整环, 因而前面**例题 0.1**与**例题 0.2**中的环 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{P}[x]$ 都是 UFD, 而**例题 0.3**中的环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 就不是. 因为 $9 = 3^2$ 与 $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ 是 9 的两种本质上不同的分解, 即 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不满足唯一析因环定义中的条件 (2).

定理 0.5

设 R 是唯一析因环 (UFD), $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则

- (1) 对 $\forall a \in R^* \setminus U$, 都存在 $r \in \mathbb{N}$, 单位 $u \in U$ 以及互不相伴的不可约元素 p_1, p_2, \dots, p_r , 使

$$a = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

若 c 是 a 的一个非平凡因子, 则存在 $u_1 \in U$ 以及 $n'_i \leq n_i$ 且 $n'_i \in \mathbb{N} (i = 1, 2, \dots, r)$, 使

$$c = u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

- (2) 若 $a, b \in R^* \setminus U$, 则存在 $r \in \mathbb{N}$, 单位 $u, v \in U$ 以及互不相伴的不可约元素 p_1, p_2, \dots, p_r , 使

$$a = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$b = v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

若还有 d 是 a, b 的公因子, 则存在 $w \in U$ 以及 $n'_i \leq \min \{n_i, m_i\}$ 且 $n'_i \in \mathbb{N} (i = 1, 2, \dots, r)$, 使

$$d = w p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

**证明**

- (1) 由 a 满足有限析因条件知, 存在不可约元素 q_1, q_2, \dots, q_s , 使得

$$a = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

将 q_1, q_2, \dots, q_s 按相伴关系分类, 不妨设存在 $r \in \mathbb{N}$ 和

$$0 = i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r = s,$$

使 $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}$ 互不相伴且

$$q_{i_0+1} = q_1 \sim q_2 \sim \cdots \sim q_{i_1};$$

$$q_{i_1+1} \sim q_{i_1+2} \sim \cdots \sim q_{i_2};$$

.....

$$q_{i_{r-1}+1} \sim q_{i_{r-1}+2} \sim \cdots \sim q_{i_r} = q_s.$$

由**定理 0.2(6)**知存在

$$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, i_1-1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2, i_2-1}, \dots, u_{r1}, u_{r2}, \dots, u_{r, i_r-1} \in U,$$

使得

$$\begin{aligned} q_1 &= u_{11}q_{i_1}, & q_2 &= u_{12}q_{i_1}, \dots, q_{i_1-1} = u_{1,i_1-1}q_{i_1}; \\ q_{i_1+1} &= u_{21}q_{i_2}, & q_{i_1+2} &= u_{22}q_{i_2}, \dots, q_{i_2-1} = u_{2,i_2-1}q_{i_2}; \\ &\dots\dots\dots \\ q_{i_{r-1}+1} &= u_{r1}q_{i_r}, & q_{i_{r-1}+2} &= u_{r2}q_{i_r}, \dots, q_{i_r-1} = u_{r,i_r-1}q_{i_r}. \end{aligned}$$

记 $p_j = q_{i_j}$, $n_j = i_j - i_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, r$), $u = \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{i_j-1} u_{ji} \in U$, 则 p_1, p_2, \dots, p_r 互不相伴且

$$\begin{aligned} a &= q_1 q_2 \cdots q_s = q_{i_1}^{i_1-1} \prod_{i=1}^{i_1-1} u_{1i} \cdot q_{i_2}^{i_2-1} \prod_{i=1}^{i_2-1} u_{2i} \cdots q_{i_r}^{i_r-1} \prod_{i=1}^{i_r-1} u_{ri} \\ &= \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{i_j-1} u_{ji} \cdot q_{i_1}^{i_1-1} q_{i_2}^{i_2-1} \cdots q_{i_r}^{i_r-1} = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}. \end{aligned}$$

由 c 是 a 的非平凡因子知, 存在 $d \in R^*$, 使 $a = cd$. 由 R 是唯一析因环 (UFD) 知 c, d 都满足有限析因条件, 故存在不可约元素 c_1, c_2, \dots, c_t 和 d_1, d_2, \dots, d_m 使

$$c = c_1 c_2 \cdots c_t, \quad d = d_1 d_2 \cdots d_m.$$

从而

$$q_1 q_2 \cdots q_s = a = cd = c_1 c_2 \cdots c_t \cdot d_1 d_2 \cdots d_m.$$

由 R 是唯一析因环 (UFD) 知 a 的不可约分解在相伴意义下唯一, 再记 $f_i = \begin{cases} c_i, & i = 1, 2, \dots, t \\ d_{i-t}, & i = t+1, \dots, t+m \end{cases}$, 故 $s = t + m$ 且存在 $\pi \in S_s$, 使 $q_i \sim f_{\pi(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$), 即 $q_{\pi^{-1}(i)} \sim f_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). 于是 $c_i \sim q_{\pi^{-1}(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, t$). 不妨设存在

$$0 = i'_0 \leq i'_1 \leq \cdots \leq i'_r = t,$$

使

$$\pi^{-1}(i'_{j-1} + 1), \dots, \pi^{-1}(i'_j) \in \{i_{j-1} + 1, \dots, i_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

记 $n'_j = i'_j - i'_{j-1}$, 则由 $n_j = i_j - i_{j-1}$ 知 $n'_j \leq n_j$. 又因为

$$q_k \sim q_{i_j} = p_j, \quad k = i_{j-1} + 1, \dots, i_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

所以

$$q_{\pi^{-1}(i'_{j-1}+1)} \sim \cdots \sim q_{\pi^{-1}(i'_j)} \sim p_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

因此

$$c_{i'_{j-1}+1} \sim \cdots \sim c_{i'_j} = c_{i'_{j-1}+n'_j} \sim p_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

由定理 0.2(6) 知存在

$$u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn'_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

使得

$$c_{i'_{j-1}+k} = u_{jk} p_j, \quad k = 1, 2, \dots, n'_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

再记 $u_1 = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk}$, 于是

$$c = c_1 c_2 \cdots c_t = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} c_{i'_{j-1}+k}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^r \left(\prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} p_j \right) = \prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \left(\prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) \\
&= \prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \left(\prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) = \left(\prod_{j=1}^r p_j^{n'_j} \right) \left(\prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{n'_j} u_{jk} \right) \\
&= u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.
\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 知存在 $t, s \in \mathbb{N}$, 单位 $u_1, v_1 \in U$, 互不相伴的不可约元素 p_1, p_2, \dots, p_s 和互不相伴的不可约元素 q_1, q_2, \dots, q_t , 使

$$a = u_1 p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}, \quad n_i \in \mathbb{N};$$

$$b = v_1 q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_t^{m_t}, \quad m_i \in \mathbb{N}.$$

不妨设存在 $k \leq \min\{s, t\}$, 使

$$p_j \sim q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

由定理 0.2(6) 知存在 $w_j \in U (j = 1, 2, \dots, k)$, 使

$$q_j = w_j p_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

于是

$$\begin{aligned}
b &= v_1 (w_1 p_1)^{m_1} (w_2 p_2)^{m_2} \cdots (w_k p_k)^{m_k} \cdot q_{k+1}^{m_{k+1}} \cdots q_t^{m_t} \\
&= (v_1 w_1 w_2 \cdots w_k) (p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} \cdot q_{k+1}^{m_{k+1}} \cdots q_t^{m_t}).
\end{aligned}$$

再记 $p_{s+j} = q_j (j = k+1, \dots, t)$, $u = u_1, v = v_1 w_1 w_2 \cdots w_k$, 则

$$\begin{aligned}
a &= u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s} p_{s+1}^0 \cdots p_{s+t}^0, \\
b &= v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} p_{k+1}^0 \cdots p_s^0 p_{s+1}^{m_{k+1}} \cdots p_{s+t}^{m_t}.
\end{aligned}$$

再取 $r = s + t, n_j = m_l = 0 (j = s+1, \dots, s+t; l = k+1, \dots, s)$ 即得

$$a = u p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = v p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

若 $d \in U$, 则取 $n'_i = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 即可.

若 $d \in R^* \setminus U$, 则由 d 是 a, b 的公因子和 (1) 的结论可知, 存在单位 $u', u'' \in U$, 互不相伴的不可约元素 p_1, p_2, \dots, p_r 以及 $n'_i \leq n_i, n''_i \leq m_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 使

$$d = u' p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r} = u'' p_1^{n''_1} p_2^{n''_2} \cdots p_r^{n''_r}.$$

若存在 $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, r\}$, 使 $n'_{j_l} \neq n''_{j_l} (l = 1, 2, \dots, k)$. 由命题 0.2.2 知 R^* 对乘法满足消去律, 故

$$u' (u'')^{-1} p_{j_1}^{n'_{j_1} - n''_{j_1}} p_{j_2}^{n'_{j_2} - n''_{j_2}} \cdots p_{j_k}^{n'_{j_k} - n''_{j_k}} = 1.$$

由此可知 $p_{j_l} \in U (l = 1, 2, \dots, k)$, 这与 p_{j_l} 不可约矛盾! 故 $n'_i = n''_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 从而 $n'_i = n''_i \leq \min\{n_i, m_i\} (i = 1, 2, \dots, r)$, 取 $w = u'$, 则

$$d = w p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

□

定理 0.6

设 R 是唯一析因环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, $a, b, c \in R^*$, 则

- (1) $|ab| = |a| + |b|$;
- (2) $a \mid b \implies |a| \geq |b|$;
- (3) $a \in U \iff |a| = 0$;
- (4) $b \sim c \iff |b| = |c|, b \mid c$.

♡

证明

- (1)
- (2) 根据定义显然成立.
- (3)

□

定义 0.12

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, R^* 中的一个序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ 满足

$$a_{n+1} \mid a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则称为 R 的一个因子链.

若对 R^* 中任一因子链, 存在自然数 m , 使

$$a_m \sim a_n, \quad \forall n \geq m,$$

则称 R 满足因子链条件.

♣

引理 0.3

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 若 R 满足因子链条件, 则必满足有限析因条件.

♡

证明 设 $a \in R^* \setminus U$. 先证 a 有不可约因子. 不妨设 a 是可约的, 则 a 有非平凡的真因子 a_1 , 即有 $a = a_1 b_1$. 这时 b_1 也是 a 的非平凡真因子, 否则, $b_1 \in U$, 由定理 0.2(6) 知 $a \sim a_1$, 这与 a_1 为 a 真因子矛盾! 若有 a_1, b_1 都可约, 则 $a_1 = a_2 b_2$, 其中 a_2, b_2 为 a_1 的真因子. 如此继续, 可得因子链

$$a, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

且 $a_{n+1} \mid a_n, a_n \mid a$. 这个因子链是在假设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 都可约且对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 a_{n+1} 是 a_n 的真因子的条件下得到的. 而由因子链条件有 m , 使得 $a_m \sim a_{m+1}$, 这与 a_{m+1} 是 a_m 的真因子矛盾! 因而 a_m 是不可约的, 即 a_m 是 a 的不可约因子.

再证 a 可分解为有限多个不可约因子的乘积. 设 p_1 是 a 的一个不可约因子, 于是 $a = p_1 a^{(1)}$. 若 $a^{(1)} \in U$, 则由命题 0.1 知 a 不可约. 此时 a 满足有限析因条件.

若 $a^{(1)} \in R^* \setminus U$, 则 $a^{(1)}$ 有不可约因子 p_2 , 使 $a^{(1)} = p_2 a^{(2)}$, 即 $a = p_1 p_2 a^{(2)}$. 继续此过程, 即得因子链

$$a, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, a^{(n+1)}, \dots$$

且 $a^{(n+1)} \mid a^{(n)}, a^{(n)} \mid a, p_{n+1}$ 都是 $a^{(n)}$ 的不可约因子, $a^{(n)} = p_{n+1} a^{(n+1)}$. 这个因子链是在假设 $a^{(n)} \in R^* \setminus U (\forall n \in \mathbb{N})$ 的条件下得到的. 而由因子链条件有 s , 使 $a^{(s-1)} \sim a^{(s)}$. 于是存在 $b \in R^*$, 使 $a^{(s)} = b a^{(s-1)}$, 从而 $a^{(s-1)} = p_s a^{(s)} = p_s b a^{(s-1)}$. 由命题 0.1 知 R^* 对乘法满足消去律, 故 $p_s b = 1$, 即 $p_s \in U$, 这与 p_s 不可约矛盾! 故存在 m , 使得 $a^{(m)} \in U$. 于是记 $q_m = p_m a^{(m)}$, 则由命题 0.1 知 q_m 不可约. 故此时

$$a = p_1 p_2 \cdots p_m a^{(m)} = p_1 p_2 \cdots q_m.$$

满足有限析因条件. 这就证明了 R 满足有限析因条件.

□

定理 0.7

设 R 是交换整环, $R^* = R \setminus \{0\}$, U 表示 R^* 中乘法可逆元素的集合, 则下列条件等价:

- (1) R 是唯一析因环 (UFD);
- (2) R 满足因子链条件与素性条件;
- (3) R 满足因子链条件与最大公因子条件.

♡

注 由这个定理的结论 (2) 和引理 0.1 知唯一析因环 (UFD) 中的素元素等价于不可约元素.

证明 (1) \Rightarrow (3). 设 R 为唯一析因环. 先证 R 满足因子链条件. $\forall a \in R^* \setminus U, a$ 有不可约元素乘积分解 $a = up_1p_2 \cdots p_r$. 现设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$ 是 R^* 的一个因子链. 于是由定理 0.6(2) 知必有 $|a_i| \geq 0$ 且

$$|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_n| \geq |a_{n+1}| \geq \cdots,$$

由于 $|a_1|$ 是一个有限数, 因而有 m , 使得当 $n \geq m$ 时, $|a_n| = |a_m|$, 由定理 0.6(4) 知 $a_n \sim a_m$, 故 R 满足因子链条件.

现证 R 满足最大公因子条件. 设 $a, b \in R^*$, 若 a, b 中有一个是单位, 则由引理 0.2(6) 知 $(a, b) = 1$, 故假定 $a, b \in R^* \setminus U$. 这时由定理 0.5(1), 不妨设

$$a = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = vp_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r},$$

其中 $u, v \in U, p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是互不相伴的不可约元素, $n_i \geq 0, m_j \geq 0, 1 \leq i, j \leq r$. 令 $k_i = \min\{n_i, m_i\}$, 记

$$d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \quad (2)$$

显然 d 是 a, b 的公因子. 又设 d_1 也是 a, b 的公因子, 则由定理 0.5(2) 知存在 $u_1 \in U$ 以及 $n'_i \leq k_i$ 且 $n'_i \in \mathbb{N} (i = 1, 2, \cdots, r)$, 使

$$d_1 = u_1 p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_r^{n'_r}.$$

故 $d_1 \mid d$. 因此 d 是 a, b 的最大公因子.

(3) \Rightarrow (2). 为此只需证明素性条件成立. 设 p 是一个不可约元素且 $p \nmid a, p \nmid b$, 由定理 0.2(8) 有 $(p, a) \sim 1, (p, b) \sim 1$. 由引理 0.2(7) 知 $(p, ab) \sim 1$, 因而再由定理 0.2(8) 知 $p \nmid ab$. 换言之, 若 $p \mid ab$, 则有 $p \mid a$ 或 $p \mid b$, 故 p 为素元素.

(2) \Rightarrow (1). 由引理 0.3 知 R 满足有限析因环条件, 故只需证因式分解的唯一性. 不妨设 $a \in R^* \setminus U$ 且 a 有两个不可约元素乘积的分解

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \quad (3)$$

现对 s 用数学归纳法证. 若 $s = 1$, 则 a 为不可约元素, 由素性条件知 a 为素元素. 根据素元素的定义, 可不妨设 $a \mid q_1$, 则 $a \sim q_1$. 从而由定理 0.2(6) 知存在 $u \in U$, 使 $a = q_1 u = q_1 q_2 \cdots q_t$, 故 $t = 1$. 设 $s - 1$ 时已成立, 现证 s 时成立. 因 $p_s \mid a$, 故 $p_s \mid q_1 q_2 \cdots q_t$, 由素性条件知 p_s 也是素元素, 于是不妨设 $p_s \mid q_t$, 于是 $q_t = u_s p_s (u_s \in U)$. 由命题 0.1 知 R^* 对乘法满足消去律, 因而结合(3)式有

$$p_1 p_2 \cdots p_{s-1} p_s = q_1 q_2 \cdots q_{t-1} q_t = u_s q_1 q_2 \cdots q_{t-1} p_s \implies p_1 p_2 \cdots p_{s-1} = u_s \prod_{i=1}^{t-1} q_i.$$

记 $q'_1 = u_s q_1, q'_i = q_i (2 \leq i \leq t - 1)$, 由命题 0.1 知 q'_1 也不可约, 并且由定理 0.2(6) 知 $q'_i \sim q_i (1 \leq i \leq t - 1)$, 则

$$p_1 p_2 \cdots p_{s-1} = q'_1 q'_2 \cdots q'_{t-1}.$$

由归纳假设可知, $s - 1 = t - 1$ 且存在 $\pi \in S_{t-1}$, 使 $p_i \sim q'_{\pi(i)} \sim q_{\pi(i)} (1 \leq i \leq t - 1)$. 由命题 0.1 知 R^* 对乘法满足消去律, 再结合(3)式及定理 0.2(6) 知

$$u_s p_s \prod_{i=1}^{t-1} q_i = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t \implies u_s p_s = q_t \implies p_s \sim q_t.$$

故 $s = t$ 且有 $\pi' \in S_t$, 使得 $p_i \sim q_{\pi'(i)} (1 \leq i \leq t)$, 即 R 是一个 UFD. □

命题 0.3

设 R 是唯一析因环, 若一组两两互素的素元素 p_1, p_2, \cdots, p_k 都整除 a , 则 $\prod_{i=1}^k p_i \mid a$.

证明 由定理 0.5 知存在 $u \in U$ 和互不相伴的不可约元素 q_1, q_2, \cdots, q_r , 使

$$a = u q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_r^{n_r}, \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 由条件知 $p_i \mid a$, 故由命题 0.2 知存在 $r_i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 使 $p_i \mid q_{r_i}$. 若 $q_{r_i} \nmid p_i$, 则 p_i 是 q_{r_i} 的

真因子. 由 q_{r_i} 不可约知 $p_i \in U$, 这与 p_i 是素元素矛盾! 故 $p_i \sim q_{r_i}$, 由定理 0.2(6) 知存在 $u_i \in U$, 使

$$q_{r_i} = u_i p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

因此

$$\begin{aligned} a &= u \prod_{i=1}^r q_i^{n_i} = u \prod_{i \notin \{r_1, \dots, r_k\}} q_i^{n_i} \prod_{i=1}^k q_{r_i}^{n_{r_i}} \\ &= u \prod_{i \notin \{r_1, \dots, r_k\}} q_i^{n_i} \prod_{i=1}^k u_i p_i^{n_i} \\ &= \left(u \prod_{i \notin \{r_1, \dots, r_k\}} q_i^{n_i} \prod_{i=1}^k u_i \right) \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}. \end{aligned}$$

故 $\prod_{i=1}^k p_i^{n_i} \mid a$.

□