


## 0.1 级数基本结论

### 0.1.1 级数的敛散性

#### 定理 0.1 (交错级数不等式)

设  $\{a_n\}$  递减非负数列, 则对  $m, p \in \mathbb{N}_0$ , 必有

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} (-1)^n a_n \right| \leq a_m. \quad (1)$$

 **笔记** 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

**证明** 不妨设  $m = 0$ , 则

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为偶数} \\ a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{p-2} - a_{p-1}) - a_p & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \leq a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n a_n = \begin{cases} (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-2} - a_{p-1}) + a_p & , p \text{ 为偶数} \\ (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{p-1} - a_p) & , p \text{ 为奇数} \end{cases} \geq 0,$$

这就证明了不等式(1). □

#### 定理 0.2 (Leibniz(莱布尼兹) 判别法)

设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  为交错级数, 若满足:

(1) 数列  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递减;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛, 且其和不超过  $u_1$ . ♥

**证明** □

#### 定理 0.3 (A-D 判别法)

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  满足下列条件之一时收敛.

1.  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$  有界,  $b_n$  递减到 0;
  2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $b_n$  单调有界.
- ♥

**证明** 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \sum_{j=n}^k a_j + b_m \sum_{k=n}^m a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M = 2 \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|,$$

我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M|b_m| = Mb_n \rightarrow 0, \text{ 当 } n, m \rightarrow \infty.$$

对于第二种情况, 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故对任何  $\varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大, 对任何  $p \in \mathbb{N}_0$ , 必有

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

于是当  $n, m$  充分大, 我们有

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + \varepsilon |b_m| = \varepsilon |b_m - b_n| + \varepsilon |b_m| \leq 3\varepsilon \sup_{n \geq 1} |b_n|.$$


因此无论如何都有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

□

#### 定理 0.4 (积分判别法)

若  $f$  是  $[1, +\infty)$  的单调不变号函数, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  和  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  同敛散.

♡

 **笔记** 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

**证明** 不妨设  $f$  非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x) dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

由夹逼准则即证.

□

#### 定理 0.5 (比值判别法)

对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0, 1)$  使得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

♡

**注** 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.

#### 定理 0.6 (Cauchy 链)

设正值递增函数  $F \in C^1[a, +\infty), \frac{F'}{F}$  在  $[a, +\infty)$  递减. 若满足  $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$  发散, 则对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  有如下判别法:

极限版:

1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \quad (2)$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \quad (3)$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, \forall n \geq N,$$


则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (3) 为

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq 1$ , 则  $\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$  仍然可能在  $n$  充分大严格超过 1.

**注** 取  $F(x) = e^x$ , 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{n - \ln a_n}{n} = 1 - \ln \sqrt[n]{a_n},$$

这恰好是**根值判别法**.

取  $F(x) = x$ , 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{-\ln a_n}{\ln n},$$

这恰好是**对数判别法**.

**证明** Step 1 先证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty. \quad (4)$$

设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$ , 则**积分判别法**表明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_a^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln F(x) \Big|_a^{\infty},$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)}$  收敛. 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{A}$ , 这就和  $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$  发散矛盾! 故我们证明了 (4).

**Step 2** 当 (2) 成立, 再利用 (4) 式, 存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geq c, F(n) > 1, \forall n \geq N.$$

因此

$$\frac{F'(n)}{a_n} \geq e^{c \ln F(n)} \Rightarrow \frac{F'(n)}{F^c(n)} \geq a_n, \forall n \geq N.$$

结合  $\frac{F'(n)}{F^c(n)} = \frac{F'(n)}{F(n)} \cdot \frac{1}{F^{c-1}(n)}$  递减, 由 **积分判别法**, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F^c(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F^c(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y^c} dy < \infty,$$

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**Step 3** 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leq c, F(n) \geq 1, \forall n \geq N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有  $\frac{F'(n)}{F(n)} \leq \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leq a_n, \forall n \geq N$  以及由 **积分判别法** 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty,$$

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

□

### 定理 0.7 (对数判别法)

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 则有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \leq 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

♡

**定理 0.8 (根值判别法)**

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 则有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $c < 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq c, \forall n \geq N,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $c \geq 1$  和无穷多个  $n$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.



**注** 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , 而应该是  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ . 也不应是无穷多个  $n$ , 而是任何  $n \geq N$ . 所以我们需要一些加强的证明.

**证明** 若存在  $c \geq 1$  和无穷多个  $n$  使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geq c,$$

则存在  $n_k \rightarrow \infty$ , 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq c \geq 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

□

**定理 0.9 (Kummer 链)**

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \dots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:


极限版:

1. 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n < 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$  使得  $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $K_n \leq 0, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

 **笔记** 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$ .

**注** 当  $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$ . 我们有  $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ , 这恰好就是**比值判别法**.

当  $d_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , 我们有  $K_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$ , 这恰好是**拉比判别法**.

当  $d_n = \frac{1}{n \ln n}, n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) \\ &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln n - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

即得一个**较为广泛的判别法**. 要注意我们在阶的层面对  $K_n$  做了变形, 因此不再给出不等式版本的**较为广泛的判别法**.

**证明** 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$  使得  $K_n \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则

$$\frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \right) \geq a_{n+1}, \forall n \geq N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^m a_{k+1} \leq \sum_{k=N}^m \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_k}{d_k} - \frac{a_{k+1}}{d_{k+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{d_N} - \frac{a_{m+1}}{d_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a_N}{d_N},$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $K_n \leq 0, \forall n \geq N$ . 则  $\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \geq \frac{a_n}{d_n}, \forall n \geq N$ . 现在

$$a_{n+1} \geq \frac{a_N}{d_N} d_{n+1}, \forall n \geq N, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

这就完成了证明. □

### 定理 0.10 (拉比判别法)

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:

极限版:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

不等式版:

1. 若存在  $N \in \mathbb{N}, \delta > 1$  使得  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \delta, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \forall n \geq N$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证明

□

## 定理 0.11 (较为广泛的判别法)

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有如下判别法:


极限版 1:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

极限版 2:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
2. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

♡

 **笔记** 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是 **Kummer** 链的  $d_n = \frac{1}{n \ln n}$  的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设  $t > 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] > t, \forall n \geq N.$$

然后

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{n} + \frac{t}{n \ln n}, \forall n \geq N.$$

现在求和得

$$\ln \frac{a_N}{a_{n+1}} > \sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right), \forall n \geq N.$$

于是

$$a_{n+1} < a_N e^{-\sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)}, \forall n \geq N.$$

现在由例题??(2) 和例题??, 我们有

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1), \sum_{k=N}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

于是

$$e^{-\sum_{k=N}^n \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{k \ln k} \right)} = e^{-\ln n - \ln \ln n + O(1)} = \frac{e^{O(1)}}{n \ln^t n}.$$

结合积分判别法有

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy < \infty,$$

我们知道  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

2. 设  $0 < t < 1, N \in \mathbb{N}$  使得

$$\ln n \left[ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] < t, \forall n \geq N.$$

然后相似第 1 问的证明和

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^t x} dx = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{1}{y^t} dy = +\infty,$$

我们有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

□

### 定理 0.12 (Herschfeld 判别法)

设  $p > 1$  且  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$ . 定义

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}}, n \in \mathbb{N},$$

然后  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛的充要条件是  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界. 显然  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递增.

♥

**证明 必要性:** 若  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛, 则由

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \geq \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{p^n}}$$

和  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  有界知  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界.

**充分性:** 若  $a_n^{\frac{1}{p^n}}$  有界, 则设  $a_n^{\frac{1}{p^n}} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ , 于是我们有  $a_n \leq M^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . 因此

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \leq \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}} \\ &= M \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}}_{n \text{ 个根号}}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1 = \sqrt[p]{1}, x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}.$$


注意到  $x_2 = \sqrt[p]{2} > 1 = x_1$ , 不动点  $x_0 > 1$  满足  $x_0^p - x_0 - 1 = 0$ . 因此由命题??知  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  递增有上界, 从而极限存在.

□

### 命题 0.1

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = 0$ .

♠

 **笔记** 这个命题是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人卡住.

这个命题是命题??的离散版本.

**注** 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理就可以的. 笔记如果我们直接使用 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在, 而 Stolz 定理不可以逆用.

**证明** 记  $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , 则由 Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} [k - (k+1)] s_k + n s_n}{n}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s_n - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} s_k}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.
\end{aligned}$$

□

**命题 0.2**

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则

1. 若  $a_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .
2. 若  $na_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$ .
3. 若  $n \ln n \cdot a_n$  单调, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$ .

◆

**证明**

1. 不妨设  $a_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道  $a_n$  递减到 0. 注意到由  $a_n$  递减知

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \quad 0 \leq (2n-1)a_{2n-1} \leq 2na_{2n-1} \leq 2 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0.$$

由命题??知  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

2. 不妨设  $na_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = c \neq 0$  会导致  $a_n \sim \frac{c}{n}$ , 进而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 所以我们知道  $na_n$  递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{ka_k}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k} \geq na_n \sum_{\sqrt{n}-1 \leq k \leq n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \\
&= na_n \int_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}^n \frac{1}{x} dx = na_n \ln \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \geq na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} na_n \ln n \geq 0,
\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot a_n = 0$ .

3. 不妨设  $n \ln n \cdot a_n$  递减, 否则考虑  $-a_n$  即可. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = c \neq 0$ . 注意到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散,  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n \cdot a_n) = 0$ , 从而  $a_n \geq 0$ .

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{[\ln n] \leq k \leq n} a_k &= \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{k \ln k \cdot a_k}{k \ln k} \geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \frac{1}{k \ln k} \\
&\geq n \ln n \cdot a_n \sum_{[\ln n] \leq k \leq n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = n \ln n \cdot a_n \int_{[\ln n]}^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\
&= n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]} \geq n \ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln n}{\ln \ln n} \sim n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n,
\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \cdot \ln \ln n \cdot a_n = 0$ .

□

**例题 0.1** 设  $a_n \downarrow 0$ , 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛的充要条件是  $\{a_n \ln n\}$  有界且  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \ln n$  收敛.

**证明** 利用 Abel 变换得

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = 1,$$

故

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \sim \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \ln k, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

$$a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim a_n \ln n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

充分性: 因为  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \ln k < +\infty$ , 所以由(6)(7)式知  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} < +\infty$ . 又由  $\{a_n \ln n\}$  有界知  $\{a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\}$  有界. 因此由(5)式知  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty$ .

必要性: 若  $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} < +\infty$ , 则由(5)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty.$$

于是再由(6)(7)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \ln k < +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n < +\infty \implies \{a_n \ln n\} \text{ 有界}.$$

□

### 定理 0.13 (级数的控制收敛定理)

设  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$  满足

$$|a_n(s)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及  $\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$ .

则

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里  $\lim_s$  表示  $s$  趋于某个  $s_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

♡

**证明** 事实上由极限保号性, 我们知道  $|b_n| \leq c_n, n = 1, 2, \dots$ , 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 从而

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n(s) - b_n|$$

$$\leq \left| \sum_{n=1}^m (a_n(s) - b_n) \right| + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

对  $s$  取极限得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

由  $m$  任意性及  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_s \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| = 0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

**例题 0.2** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ .

**解** 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left| \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) \right| \leq e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq e^{n \cdot (-\frac{k}{n})} = e^{-k}.$$

又  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} < \infty$ , 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{1,2,\dots,n-1\}}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \\ &= \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}. \end{aligned}$$

□

#### 定理 0.14 (级数的 Levi 定理)


若非负  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$  满足  $a_n(s)$  是  $s$  的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是  $s \rightarrow s_0^+$ , 那么应该是关于  $s$  的递减函数) 且

$$\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

♡

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

**证明** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 那么由于  $0 \leq a_n(s) \leq b_n$ , 取控制级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$  也单调递增, 故  $\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$  广义存在. 假设

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

此时对任何  $N \in \mathbb{N}$ , 都有


$$\sum_{n=1}^N b_n = \lim_s \sum_{n=1}^N a_n(s) \leq \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

### 引理 0.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列  $a_n(s), n = 1, 2, \dots$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_s a_n(s) \leq \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s).$$

 **笔记** 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

**证明** 不妨设  $s \rightarrow +\infty$ , 考虑  $g_n(s) \triangleq \inf_{t \geq s} a_n(t)$ , 则  $g_n$  关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_s a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_s g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geq s} a_n(t) \leq \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s),$$

这就完成了证明. □


### 定理 0.15 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \quad (8)$$

1.  $a_{m,n} \geq 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ ;
- 2.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

 **笔记** 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

**证明**

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到  $\{\sum_{n=1}^N a_{m,n}\}$  关于  $N$  非负递增, 于是有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N a_{m,n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad (9)$$

这就是 (8).

2. 注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^N a_{m,n} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

于是由级数的控制收敛定理知 (9) 仍然成立, 这就是 (8). □

### 定理 0.16 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致.

**证明**

1. 设加括号后新的级数是  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$ , 其中  $n_k$  递增趋于  $+\infty$ . 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$

这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, n_1 = 0$ , 如果  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$  收敛且对任何  $k \in \mathbb{N}$  都有  $a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots, a_{n_{k+1}}$

将符号相同, 则  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (10)$$

事实上, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在唯一的  $m \in \mathbb{N}$ , 使得  $n_m < n \leq n_{m+1}$ , 此时

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j + \sum_{j=n_m+1}^n a_j.$$

则当  $a_j \geq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$ , 我们有

$$\sum_{j=1}^n a_j \geq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j, \quad \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j - \sum_{j=n_m+1}^{n_{m+1}} a_j \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (11)$$

若  $a_j \leq 0, n_m < j \leq n_{m+1}$ , 可得 (11) 的类似式

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \leq \sum_{j=1}^n a_j \leq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j. \quad (12)$$

让  $n \rightarrow +\infty$ , 我们由 (11), (12) 和夹逼准则得 (10). 这就完成了证明.

□

### 命题 0.3

若  $a_n \downarrow 0$  且  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_n)$  有界, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

◆

**证明** 由  $\{a_n\}$  递减可得, 对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=1}^m a_k - ma_n \leq \sum_{k=1}^m a_k - ma_n + \sum_{k=m+1}^n (a_k - a_n) = \sum_{k=1}^n a_k - na_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_n).$$

令  $n \rightarrow \infty$  得, 由  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_n)$  有界知, 存在  $C > 0$ , 使得

$$\sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_n) < C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

令  $m \rightarrow \infty$  得  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < C$ .

□


## 命题 0.4

1. 设  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 若  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  不恒为 0, 不妨设  $a_1 \neq 0$ , 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} \begin{cases} \text{收敛,} & p > 1, \\ \text{和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 同敛散,} & 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

2. 对  $p > 0$  和收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$ , 定义  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} = \begin{cases} \text{收敛,} & 0 < p < 1, \\ \text{发散,} & p \geq 1. \end{cases}$$

 **笔记** 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right), \sum \left(\frac{\ln \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

**证明**

1. 当  $p > 1$ , 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^p} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} dx = \int_{S_1}^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \frac{1}{x^p} dx,$$

可以看到无论  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛性如何都有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  收敛.

当  $0 < p \leq 1$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则有  $\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{a_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p} = ca_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , 其中  $c$  是某个常数, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  收敛. 当

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 我们对任何充分大的  $m, k \in \mathbb{N}$  都有

$$1 - \frac{S_k}{S_{k+m}} = \frac{S_{k+m} - S_k}{S_{k+m}} = \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_{k+m}} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n} \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{a_n}{S_n^p}.$$

让  $m \rightarrow +\infty$ , 利用  $S_{k+m} \rightarrow +\infty$ , 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  发散. 这就完成了证明.

2. 一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{x^p} dx = \int_0^{R_0} \frac{1}{x^p} dx.$$

故当  $0 < p < 1$  有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$  收敛.

另外一方面, 当  $p \geq 1$ , 对  $m, t \in \mathbb{N}^*$ , 有

$$\sum_{n=m}^{m+t} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} = \sum_{n=m}^{m+t} \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^p} \geq \sum_{n=m}^{m+t} \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{m-1}^p} = \frac{R_{m-1} - R_{m+t}}{R_{m-1}^p}.$$

注意  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_{m+t} = 0$ , 故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=m}^{m+t} \frac{a_n}{R_{n-1}^p} \geq \begin{cases} 1, & p = 1, \\ \frac{1}{R_{m-1}^{p-1}} \geq \frac{1}{R_0^{p-1}} > 0, & p > 1. \end{cases}$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^p}$  发散.

□

## 0.1.2 Riemann 重排定理

### 定理 0.17 (Riemann 重排定理)


设实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛. 则对  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  且  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ , 都存在级数的重排  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S'_n = \beta, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S'_n = \alpha, \quad (13)$$

这里  $S'_n$  是重排级数的部分和. 特别地, 对  $\forall L \in \mathbb{R}$ , 都存在级数的重排  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = L.$$

♡

 **笔记** 定理叙述和证明思想都同等重要. 本结果比通常的黎曼重排定理要强. 证明的核心想法就是如果比  $\beta$  大, 则下一项加入负部来调小. 如果比  $\alpha$  小了, 则下一项加入正部来调大.

**注** 重排的严格叙述是: 存在一个双射  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 使得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  满足(13)式. 因此排列  $1, 3, 5, \dots, 2, 4, \dots$  是无意义的.

**证明** 考虑

$$p_n \triangleq \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad q_n \triangleq \frac{a_n - |a_n|}{2}, \quad (14)$$

则

$$p_n + q_n = |a_n|, \quad p_n - q_n = a_n. \quad (15)$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛知正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n$  都发散. 现在把  $a_n$  中非负的项依此记作  $P_1, P_2, \dots$ , 负的项的绝对值依此记作  $Q_1, Q_2, \dots$ .

当  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 选取最小的  $m_1, k_1 \in \mathbb{N}$  使得

$$\sum_{i=1}^{m_1} P_i > \beta, \quad \sum_{i=1}^{m_1} P_i - \sum_{j=1}^{k_1} Q_j < \alpha.$$

选取最小的  $m_2, k_2 \in \mathbb{N}$  使得

$$\sum_{i=1}^{m_1} P_i - \sum_{j=1}^{k_1} Q_j + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} P_i > \beta, \quad \sum_{i=1}^{m_1} P_i - \sum_{j=1}^{k_1} Q_j + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} P_i - \sum_{j=k_1+1}^{k_2} Q_j < \alpha.$$

现在依此下去得到一个重排级数:

$$\sum_{i=1}^{m_1} P_i - \sum_{j=1}^{k_1} Q_j + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} P_i - \sum_{j=k_1+1}^{k_2} Q_j + \dots$$

设部分和的子列刚好是加到  $P_{m_{n-1}}$  这种形式, 也就是说

$$\begin{cases} \text{第一项: } P_1 + \cdots + P_{m_1-1}; \\ \text{第二项: } P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2-1}; \\ \text{第三项: } \cdots + P_{m_2+1} + \cdots + P_{m_3-1}; \\ \vdots \end{cases}$$

现在

$$(\cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n-1}) + P_{m_n} > \beta, (\cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n-1}) \leq \beta,$$

因此

$$0 \leq \beta - (\cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n-1}) < P_{m_n}.$$

注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m_n} = 0$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cdots + P_{m_{n-1}+1} + \cdots + P_{m_n-1}) = \beta.$$

类似的, 设部分和子列刚好是加到  $Q_{k_{n-1}}$  这种形式并有

$$0 \leq (\cdots - Q_{k_{n-1}+1} - \cdots - Q_{k_n-1}) - \alpha < Q_{k_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n} = 0.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cdots - Q_{k_{n-1}+1} - \cdots - Q_{k_n-1}) = \alpha.$$

此外显然有上极限不超过  $\beta$ , 下极限不小于  $\alpha$ , 这就证明了(13).

当  $\alpha, \beta$  可以取  $\infty$  时, 可取  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  使得  $\alpha_n < \beta_n, \alpha_n \rightarrow \alpha, \beta_n \rightarrow \beta$ . 考虑

$$\left( \cdots + \sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} P_j \right) > \beta_n, \left( \cdots - \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} Q_j \right) < \alpha_n,$$

即可完成构造并类似得到(13).

□

**例题 0.3** 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛, 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  也收敛.

**证明** 从条件可见正数数列  $\{a_n\}$  为正无穷大量. 以下分两步来做.

(1) 若数列  $\{a_n\}$  单调增加, 则有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} \geq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \geq na_n,$$

因此有不等式:

$$\frac{2n-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}} \leq \frac{2n-1}{na_n} + \frac{2n}{na_n} < \frac{4}{a_n},$$

从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  的部分和数列有上界, 因此收敛. 同时还得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(2) 对于一般情况, 将数列  $\{a_n\}$  按照从小到大重排, 并将重排后的数列记为  $\{b_n\}$ . 根据收敛的正项级数在重排后仍收敛, 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  收敛. 利用 (1) 知道级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$  收敛. 同时容易看出对每个  $n$  成立不等式

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

因此就有

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$



于是从比较判别法就知道级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  收敛.

□

#### 例题 0.4

证明

□

### 0.1.3 幂级数阶与系数阶的关系

定理 0.18 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

(1) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1) \quad (16)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (17)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (18)$$

(2) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty, \quad (19)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (20)$$

(3) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (21)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \quad (22)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (23)$$

(4) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \quad (24)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \quad (25)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (26)$$

♥

注 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

**证明**

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b_n x^n}{g(x)} = 0.$$

由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (17) 即得 (18).

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$  和 (1) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (20).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leq \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \leq \frac{b_n x^n}{b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + b_{n+1} x},$$

即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = 0$ . 由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (22) 我们就得到 (23).

(4) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$  和 (3) 问知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (26).

□

**例题 0.5** 设  $p$  是  $\mathbb{R}$  上实解析函数且  $0 < \prod_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(0) < \infty$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)}$ .

**证明** 注意到

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\prod_{n=0}^{m+1} p^{(n)}(0)}{m \prod_{n=0}^m p^{(n)}(0)} = \lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)}(0),$$

所以  $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$  是有界数列, 故

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

在  $\mathbb{R}$  上有定义且收敛. 于是

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n+1)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

由定理 0.18(3), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 1.$$

□

**例题 0.6** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

**解** 注意到

$$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty.$$

由定理 0.18 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \stackrel{\text{例题??}}{=} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$

□

**例题 0.7** 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(1-y)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}} = -\frac{1}{2}.$$

**证明** 注意到

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &= \int_0^1 \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} y^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] y^{2k} \\ &\stackrel{x=\cos \theta}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta d\theta \right] y^{2k} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 y^{2k}. \end{aligned}$$

又由 Wallis 公式知

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \sqrt{\pi k}, k \rightarrow \infty.$$

故由定理 0.18 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}} &\sim \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{\pi k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y^2)^k}{k} = -\frac{1}{2} \ln(1-y^2) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-y) - \frac{1}{2} \ln(1+y) \sim -\frac{1}{2} \ln(1-y), y \rightarrow 1^-. \end{aligned}$$

□

**例题 0.8** 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

**证明** 注意到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$  在  $(-1, 1)$  上绝对收敛, 由 Cauchy 积收敛定理及推论 0.1 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \stackrel{\text{推论 0.1}}{=} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n.$$

下证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$ . 一方面, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln(n-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}}{\ln(n-1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

另一方面, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} &\leq \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{(n-k) \ln k} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \\ &\leq \frac{1}{n(1-\varepsilon)} \sum_{2 \leq k \leq \varepsilon n} \frac{1}{\ln 2} + \sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{(n-k) \ln \varepsilon n} \\ &\leq \frac{\varepsilon n}{n(1-\varepsilon) \ln 2} + \frac{\sum_{\varepsilon n \leq k \leq n-1} \frac{1}{k}}{\ln \varepsilon + \ln n}. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \ln 2} + 1.$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} \leq 1.$$

故由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k} = 1$ . 于是由定理 0.18 可知

$$-\ln(1-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln k (n-k)} \right) x^n \sim \sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \rightarrow 1^-.$$


$$\text{即 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x) \ln \frac{1}{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

□

**例题 0.9** 设

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{5}{4}, a_n = \frac{(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}}{4n}, n = 2, 3, \dots$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

 **笔记** 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的  $f$  的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的  $f$ , 对这个  $f$  来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了  $a_n$  的通项. 此外考虑  $\frac{1}{1-x} f(x)$  的幂级数并用 Cauchy 积可以导出  $\sum_{k=0}^n a_k$  的信息.

如果要严谨地证明, 就是用数学归纳法证明下述求出来的  $a_n$  通项表达式 (其实就是下面解出来的  $f$  的 Taylor 展开式中的通项) 就是满足题目条件的  $a_n$ , 再直接计算其极限即可.

**证明** 记  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ . 由条件可得

$$\begin{aligned} 4n a_n &= (2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} [(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}] x^n \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4a_1 x &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n x^{n+2} \\ \Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5x &= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 4x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - 5x = 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 5x \\
&\Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x) \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + (x^2 + 5x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow (2x^3 + 2x^2 - 4x)f'(x) + (x^2 + 5x)f(x) = 0.
\end{aligned}$$

又注意到  $f(0) = a_0 = 1, f'(0) = a_1 = \frac{5}{4}$ , 故分离变量解上述微分方程得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x+2}}{1-x}.$$

因为  $\sqrt{x+2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 所以可记  $\sqrt{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , 则  $\sqrt{3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . 由Cauchy 积收敛定理及推论 0.1 知

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n b_k \right) x^n.$$

因此  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n b_k$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

□

## 0.1.4 Cauchy 积

### 定义 0.1 (Cauchy 积)

设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  的 **Cauchy(乘) 积**. 我们记

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, B_n = \sum_{k=0}^n b_k, S_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

♣

**注** 我们暂时并不清楚  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

**结论** 延续定义 0.1, 我们有

$$\begin{cases}
a_0 b_0 = c_0 \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1 \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2 \\
\vdots \\
a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = c_n
\end{cases}$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则当  $a_0 \neq 0$ , 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

**例题 0.10** 设  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n = 0, 1, \dots$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

**注** 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

**证明** 事实上, 我们有

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}+1)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \rightarrow 2,$$

上式的放缩实际上利用了二次函数  $(n-k+1)(k+1) = -k^2 + nk + n + 1$  的最值大值点  $k = \frac{n}{2}$ . 这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

□

### 命题 0.5

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (27)$$

**证明** 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^n S_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^n A_{n-i} B_i$$

由命题??可得(27).

□

## 推论 0.1

设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都收敛, 则它们的 Cauchy 积  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

**证明** 延续定义 0.1, 充分性显然成立, 下证必要性. 由命题 0.5 及 Stolz 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n S_j}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

□

## 定理 0.19 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义 0.1, 我们有

1. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  有一个绝对收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛.
2. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都绝对收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  绝对收敛.

□

**证明** 1. 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

因此我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设 (否则, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ , 则用  $B_n - B$  代替  $B_n$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

于是运用命题??就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot |B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot 0 = 0$$

这就证明了  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛.

2. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^n \left( |a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right)$$

于是由命题??就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left( |a_i| \sum_{k=i}^n |b_{k-i}| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

这就证明了  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  绝对收敛.

□

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

**命题 0.6**

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛}. \quad (28)$$

**证明** 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} B_i,$$

即  $\sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n c_k$ . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} &= \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{j=0}^n b_{n-j} - \sum_{j=k}^n b_{n-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \left( \sum_{k=0}^n a_k - a_0 \right) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n c_k \end{aligned}$$

由于 Cauchy 积收敛, 则由推论 0.1, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ 收敛}$$

□

**例题 0.11** 设递减数列  $a_n, b_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ , 且  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$  收敛, 记  $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ , 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ 收敛} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (29)$$

**证明** 左推右显然, 现在假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 由命题 0.6, 我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} = 0$$

现在

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| &\leq \sum_{k=1}^n a_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} = c_{n+1} \end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于交错级数不等式, 于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} \right| = 0$$

我们证明了 (29).



□

**命题 0.7**

设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1, 1).$$

记  $S_n \triangleq \sum_{k=0}^n a_k$ , 则

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, x \in (-1, 1).$$

◆

**证明** 由 Taylor 级数可知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1).$$

显然  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $(-1, 1)$  上绝对收敛, 故由 **Cauchy 积收敛定理** 可知  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的 Cauchy 积也收敛, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_k x^k) x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n < +\infty.$$

故由 **推论 0.1** 可知

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

□

**例题 0.12** 设

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k = +\infty.$$

假设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x \in (-1, 1)$  收敛, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty.$$

**证明** 由 **命题 0.7** 知

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n,$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n.$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k = +\infty$  知, 对  $\forall M > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\sum_{k=0}^n S_k \geq M(n+1), \quad \forall n > N.$$

于是对  $\forall M > 0$ , 都有

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n + (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n \\
 &\geq (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n + M(1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &\geq (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n + M(1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n x^n \\
 &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n - M(1-x)^2 \sum_{n=0}^N n x^n + M(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
 &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n - M(1-x)^2 \sum_{n=0}^N n x^n + M(1-x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
 &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n S_k \right) x^n - M(1-x)^2 \sum_{n=0}^N n x^n + M.
 \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow 1^-$  得

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq M, \quad \forall M > 0.$$

再令  $M \rightarrow +\infty$  得

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty.$$

□