



泛函分析

作者: 实空

组织: 无

时间: December 14, 2025

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 度量空间	1
1.1 压缩映象原理	1
1.2 完备化	7
参考文献	8

第1章 度量空间

1.1 压缩映象原理

定义 1.1

设 \mathcal{X} 是一个非空集. \mathcal{X} 叫做**距离 (度量) 空间**, 是指在 \mathcal{X} 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x, y)$, 满足下列三个条件:

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$, 而且 $\rho(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) (\forall x, y, z \in \mathcal{X})$.

这里 ρ 叫做 \mathcal{X} 上的一个**距离**; 以 ρ 为距离的距离空间 \mathcal{X} 记做 (\mathcal{X}, ρ) .

注 距离概念是欧氏空间中两点间距离的抽象. 事实上, 如果对 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\rho(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

容易看到 (1), (2), (3) 都满足. 以后当说到欧氏空间时, 我们始终用这个 ρ 规定其上的距离.

笔记 引进距离的目的是刻划“收敛”.

例题 1.1 空间 $C[a, b]$

区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体记为 $C[a, b]$, 按距离

$$\rho(x, y) \triangleq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.1)$$

形成距离空间 $(C[a, b], \rho)$, 以后简记作 $C[a, b]$. 以后当说到**连续函数空间** $C[a, b]$ 时, 我们始终用 (1.1) 规定的 ρ 作为其上的距离, 除非另外说明.

证明 证明是显然的. □

定义 1.2

距离空间 (\mathcal{X}, ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做**收敛到 x_0** 的是指: $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 这时记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. 或简单地记作 $x_n \rightarrow x_0$.

注 在 $C[a, b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 是指: $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x_0(t)$.

笔记 与实数集合一样, 对于一般的度量空间可引进闭集和完备性等概念.

定义 1.3

度量空间 (\mathcal{X}, ρ) 中的一个子集 E 称为**闭集**, 是指: $\forall \{x_n\} \subset E$, 若 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $x_0 \in E$.

定义 1.4

距离空间 (\mathcal{X}, ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做**基本列**, 是指: $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0 (n, m \rightarrow \infty)$. 这也就是说: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, 使得 $m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. 如果空间中所有基本列都是收敛列, 那末就称该空间是**完备的**.

例题 1.2 (\mathbb{R}^n, ρ) 是完备的.

证明 □

例题 1.3 $(C[a, b], \rho)$ 是完备的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $(C[a, b], \rho)$ 中的一串基本列, 那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, 使得对 $\forall m, n \geq N(\varepsilon)$ 有

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon,$$

因此, 对 $\forall t \in [a, b]$,

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad (\forall m, n \geq N(\varepsilon)). \quad (1.2)$$

固定 $t \in [a, b]$, 我们看到数列 $\{x_n(t)\}$ 是基本的, 由于 (\mathbb{R}^n, ρ) 是完备的, 因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ 存在. 让我们用 $x_0(t)$ 表示此极限, 在 (1.2) 中令 $m \rightarrow \infty$ 得到 $|x_0(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon (\forall n \geq N(\varepsilon))$. 由此可见 $x_n(t)$ 一致收敛到 $x_0(t)$, 从而 $x_0(t)$ 连续并在 $C[a, b]$ 中 x_n 收敛到 x_0 . □

定义 1.5

设 $T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{Y}, r)$ 是一个映射, 称它是**连续的**, 如果对于 \mathcal{X} 中的任意点列 $\{x_n\}$ 和点 x_0 ,

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow r(Tx_n, Tx_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

命题 1.1 (连续映射充要条件)

$T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{Y}, r)$ 是连续的充要条件是对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathcal{X}, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使得

$$\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow r(Tx, Tx_0) < \varepsilon \quad (\forall x \in \mathcal{X}). \quad (1.3)$$

证明 必要性. 若 (1.3) 不成立, 必 $\exists x_0 \in \mathcal{X}, \exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n$ 使得 $\rho(x_n, x_0) < 1/n$, 但 $r(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} r(Tx_n, Tx_0) \neq 0$, 矛盾.

充分性. 设 (1.3) 成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, 那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\delta(x_0, \varepsilon))$, 使得当 $n > N$ 时, $\rho(x_n, x_0) < \delta$. 从而 $r(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r(Tx_n, Tx_0) = 0$. □

定义 1.6

设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个距离空间, 称映射 $T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{X}, \rho)$ 满足 **Lipschitz 条件**, L 是 **Lipschitz 常数**. 如果存在 $L > 0$, 使得

$$\rho(Tx, Ty) \leq L\rho(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X}).$$

定理 1.1

设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个距离空间, 映射 $T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{X}, \rho)$ 满足 Lipschitz 条件, L 是 Lipschitz 常数, 则的映射 T 是连续的. ♥

证明 对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathcal{X}$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 使得当 $\rho(x, x_0) < \delta$ 时, 有


$$\rho(Tx, Tx_0) \leq L\rho(x, x_0) < \varepsilon \quad (\forall x \in \mathcal{X}).$$

故由命题 1.1 知 T 是连续的. □

定义 1.7

设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个距离空间, 称 $T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{X}, \rho)$ 是一个**压缩映射**, 如果存在 $0 < \alpha < 1$, 使得

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X}).$$

 **笔记** 显然压缩映射满足 Lipschitz 条件. 进而由定理 1.1 可知**压缩映射一定是连续的**.

例题 1.4 设 $\mathcal{X} = [0, 1], T(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的一个可微函数, 满足条件:

$$T(x) \in [0, 1] \quad (\forall x \in [0, 1]), \quad (1.4)$$

以及

$$|T'(x)| \leq \alpha < 1 \quad (\forall x \in [0, 1]), \quad (1.5)$$

则映射 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是一个压缩映射.

证明 由 Lagrange 中值定理可知


$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= |T(x) - T(y)| = |T'(\theta x + (1 - \theta)y)(x - y)| \\ &\leq \alpha |x - y| = \alpha \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X}, 0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

□

定理 1.2 (Banach 不动点定理——压缩映射原理)

设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个完备的距离空间, T 是 (\mathcal{X}, ρ) 到其自身的一个压缩映射, 则 T 在 \mathcal{X} 上存在唯一的不动点.

♥

 **笔记** 压缩映射原理就是距离空间上的一个很简单而基本的不动点定理, 也是泛函分析中的一个最常用、最简单的存在性定理.

证明 任取初始点 $x_0 \in \mathcal{X}$. 考察迭代产生的序列

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

从而对 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=1}^p \rho(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) \rightarrow 0.$$

(当 $n \rightarrow \infty$, 对 $\forall p \in \mathbb{N}$ 一致). 由此可见 $\{x_n\}$ 是一个基本列. 因为 (\mathbb{R}^1, ρ) 是完备的, 所以 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. 又 T 是连续的, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx^*$. 于是对 $x_{n+1} = Tx_n$ 两边同时取极限得 $x^* = Tx^*$, 即 x^* 是 T 在 \mathcal{X} 上的一个不动点. 若 x^*, x^{**} 都是不动点, 则

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Tx^*, Tx^{**}) \leq \alpha \rho(x^*, x^{**}) \implies (1 - \alpha) \rho(x^*, x^{**}) \leq 0.$$

由此推出 $x^* = x^{**}$.

□

注 我们可以把一些问题转化为不动点问题. 比如下面的例子和定理 1.3.

设 φ 是 \mathbb{R}^1 上定义的实函数, 求方程

$$\varphi(x) = 0$$

的根的问题可以看成 $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 的映射

$$f(x) = x - \varphi(x)$$

的不动点问题. 即求 $x \in \mathbb{R}^1$ 满足:

$$f(x) = x.$$

命题 1.2

证明: 完备空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

♣

证明 (1) 设 X 是完备度量空间, $M \subset X$ 是闭的. 要证 M 是一个完备的子空间.

$$\forall x_m, x_n \in M, \|x_m - x_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty) \implies \forall x_m, x_n \in X, \|x_m - x_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty).$$

因为 X 是完备度量空间, 所以 $\exists x \in X$, 使得 $x_n \rightarrow x$. 于是

$$\begin{cases} x_n \in M, x_n \rightarrow x \\ M \subset X \text{ 是闭的} \end{cases} \implies x \in M.$$

$\forall x_m, x_n \in M, \|x_m - x_n\| \rightarrow 0, (m, n \rightarrow \infty)$ 因为 X 是完备度量空间, 所以 $\exists x \in M$, 使得 $x_n \rightarrow x$. 故 M 是一个完备的子空间.

(2) 设 X 是一度量空间, M 是 X 的一个完备子空间.

要证 M 是闭子集. 即, 若 $x_n \in M, x_n \rightarrow x$, 要证 $x \in M$.

因为收敛列是基本列, 所以 $x_n \in M, \|x_m - x_n\| \rightarrow 0, (m, n \rightarrow \infty)$, 又 M 是完备度量空间, 所以 $\exists x' \in M$, 使得 $x_n \rightarrow x'$. 于是

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ x_n \rightarrow x' \end{cases} \implies x = x' \in M.$$

□

定理 1.3 (常微分方程初值问题解的局部存在唯一性)

设 $\xi \in \mathbb{R}$, 考虑常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t, x), \\ x(t_0) = \xi \end{cases} \quad (1.6)$$

其中 $F(t, x)$ 是在矩形域

$$D: |t - t_0| \leq h_0, |x - \xi| \leq \delta$$

上的二元连续函数, 并且对变元 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件: $\exists L > 0$, 使得当 $|t - t_0| \leq h_0, |x_1(t) - \xi| \leq \delta, |x_2(t) - \xi| \leq \delta$ 时, 有

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L|x_1(t) - x_2(t)|, \quad (1.7)$$

则当 $h \leq \min\{\frac{\delta}{M}, h_0\}$, $M = \max_{(t, x) \in D} |F(t, x)|$ 时, 微分方程(1.6)的初值问题在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在唯一连续解.

♡

注

1. 在这里我们把常数 ξ 看成是 $[-h_0, h_0]$ 上恒等于 ξ 的常值函数.

2. 本题中我们不能直接取 $C[-h_0, h_0]$ 为 Banach 不动点定理——压缩映象原理中的距离空间 \mathcal{X} , 因为当 $Lh_0 < 1$ 时, T 只是在 $C[-h_0, h_0]$ 的子集 $\bar{B}(\xi, \delta)$ 上才是压缩的.

证明 不妨设 $t_0 = 0$, 否则用 $x(t + t_0)$ 代替 $x(t)$ 即可. 注意到 (1.6) 式或它的等价形式, 即求连续函数 $x(t)$ 满足下列积分方程的问题:

$$x(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (1.8)$$

可以看成是一个不动点问题. 为此, 在以 $t = 0$ 为中心的某区间 $[-h_0, h_0]$ 上考察距离空间 $C[-h_0, h_0]$, 并引入映射

$$(Tx)(t) = \xi + \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (1.9)$$

则(1.8)等价于求 $C[-h_0, h_0]$ 上的一个点 x , 使得 $x = Tx$, 即求 T 的不动点.

现在我们已经把这个问题化归为一个求不动点的问题了. 先在 $C[-h_0, h_0]$ 上考察由(1.9)定义的映射 T , 注意到

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= \max_{|t| \leq h_0} \left| \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau - \int_0^t F(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^{h_0} |F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau))| d\tau \end{aligned}$$

$$\leq h_0 \max_{|t| \leq h_0} |F(t, x(t)) - F(t, y(t))|,$$

再结合(1.7)式就有

$$\rho(Tx, Ty) \leq h_0 \max_{|t| \leq h_0} |F(t, x(t)) - F(t, y(t))| \leq Lh_0 \max_{|t| \leq h_0} |x(t) - y(t)| = Lh_0 \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in \bar{B}(\xi, \delta)), \quad (1.10)$$

其中 $\bar{B}(\xi, \delta) \triangleq \{x(t) \in C[-h_0, h_0] \mid \max_{|t| \leq h_0} |x(t) - \xi| \leq \delta\}$. 我们取 $\mathcal{X} = \bar{B}(\xi, \delta)$, 令 $T_1 = \begin{cases} T & , x \in \bar{B}(\xi, \delta) \\ 0 & , x \notin \bar{B}(\xi, \delta) \end{cases}$, 再设

$$M \triangleq \max\{|F(t, x)| \mid (t, x) \in [-h_0, h_0] \times [\xi - \delta, \xi + \delta]\},$$

则当 $h \leq \min\{\frac{\delta}{M}, h_0\}$ 时, 对 $\forall x \in \bar{B}(\xi, \delta)$ 有

$$\max |(Tx)(t) - \xi| = \max \left| \int_0^t F(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq Mh \leq \delta \implies Tx \in \bar{B}(\xi, \delta),$$

故 $T_1: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. 再结合(1.10)式知 T_1 是 (\mathcal{X}, ρ) 上的压缩映射. 由于 $(C[-h, h], \rho)$ 是一个完备的距离空间, 而 \mathcal{X} 又是它的一个闭子集, 因此 (\mathcal{X}, ρ) 还是一个完备的距离空间 (命题 1.2). 于是由压缩映射原理可知, T_1 在 (\mathcal{X}, ρ) 存在唯一不动点, 故结论得证. □

定理 1.4 (隐函数存在定理)

设 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的一个邻域. 设 f 在 $U \times V$ 内连续并且 $\forall x \in U$, 关于 $y \in V$ 连续可微. 又设

$$f(x_0, y_0) = 0; \quad \left[\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] (x_0, y_0) \neq 0,$$

则 $\exists x_0$ 的一个邻域 $U_0 \subset U$ 以及唯一的连续函数 $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$, 满足

$$\begin{cases} f(x, \varphi(x)) = 0 & (\text{当 } x \in U_0), \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

注 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 表示 f 关于 y 的 Jacobian(雅可比)矩阵, $\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ 表示 f 关于 y 的 Jacobian(雅可比)行列式. 我们有

$$\left[\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] (x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

证明 考察映射 $T: \varphi \mapsto T\varphi$,

$$(T\varphi)(x) \triangleq \varphi(x) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, \varphi(x)),$$

其中 $\varphi \in C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$, 这里 $r > 0, C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$ 表示定义在闭球 $\bar{B}(x_0, r)$ 上取值在 \mathbb{R}^m 上的向量值连续函数空间, 其距离规定为

$$\rho(\varphi, \psi) \triangleq \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|,$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m); \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)$. 对 $x \in \mathbb{R}^n$ 与 $y_i \in \mathbb{R}^m (i = 1, 2, \dots, m)$, 记

$$D_y f(x, y_1, \dots, y_m) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y_m) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y_m) \end{pmatrix}.$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $U \times V$ 上连续, 所以 $\exists \delta > 0$, 使得

$$\left| \delta_{ij} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} D_y f(x, y_1, \dots, y_m) \right]_{ij} \right| < \frac{1}{2m}. \quad (1.11)$$

($i, j = 1, 2, \dots, m, x \in \bar{B}(x_0, \delta), y_1, \dots, y_m \in \bar{B}(y_0, \delta)$), 其中 $[\cdot]_{ij}$ 表示括号内的矩阵的第 i 行、第 j 列元素, 而

$$\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

记 $d_i(x) \triangleq \varphi_i(x) - \psi_i(x) (i = 1, 2, \dots, m)$. 根据多元函数微分中值定理和(1.11)式就有

$$\begin{aligned} \rho(T\varphi, T\psi) &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| \left[(T\varphi)(x) - (T\psi)(x) \right]_i \right| \\ &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| \varphi_i(x) - \psi_i(x) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))) \right]_i \right| \\ &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| d_i(x) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} D_y f(x, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m) (\varphi(x) - \psi(x)) \right]_i \right| \\ &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| d_i(x) - \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} D_y f(x, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m) \right]_{ij} d_j(x) \right| \\ &< \frac{1}{2} \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} |d_i(x)| = \frac{1}{2} \rho(\varphi, \psi), \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中 $r < \delta$, 使得 $\varphi(x), \psi(x) \in \bar{B}(y_0, \delta) (\forall x \in \bar{B}(x_0, r)), 0 < \theta_i = \theta_i(x) < 1, \hat{y}_i(x) = \theta_i \varphi(x) + (1 - \theta_i) \psi(x) (i = 1, 2, \dots, m)$. 今取

$$\mathcal{X} \triangleq \{\varphi \in C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m) | \varphi(x_0) = y_0, \varphi(x) \in \bar{B}(y_0, \delta)\},$$

则 \mathcal{X} 在 $C(\bar{B}(x_0, r), \mathbb{R}^m)$ 中是闭的, 从而是一个完备的度量空间.(1.12)式表明 T 在 \mathcal{X} 上是压缩的. 剩下来只要再证 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 就够了. 因为根据压缩映象原理, T 存在唯一的不动点, 这就是我们所要证的. 注意到

$$\begin{aligned} \rho(T\varphi, y_0) &\leq \rho(T\varphi, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0) \\ &\leq \frac{1}{2} \rho(\varphi, y_0) + \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, y_0) \right]_i \right|, \end{aligned}$$

又由 f 的连续性,

$$\begin{aligned} &\max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, y_0) \right]_i \right| \\ &= \max_{\substack{x \in \bar{B}(x_0, r) \\ 1 \leq i \leq m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \right]_i \right| \\ &< \frac{\delta}{2} \quad (\text{当 } r < \eta \text{ 足够小}). \end{aligned}$$

因此, 当 $0 < r < \min(\eta, \delta)$ 时, $\rho(T\varphi, y_0) < \delta$. 此外还有

$$(T\varphi)(x_0) = y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x_0, \varphi(x_0)) = y_0,$$

所以 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

□

1.2 完备化

定义 1.8



参考文献

- [1] LI Q, CHEN L, ZENG Y. The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com[J]. China Finance Review International, 2018, 8(3): 256-274.
- [2] CARLSTROM C T, FUERST T S. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis[J]. The American Economic Review, 1997: 893-910.
- [3] QUADRINI V. Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations[J]. FRB Richmond Economic Quarterly, 2011, 97(3): 209-254.
- [4] 方军雄. 所有制、制度环境与信贷资金配置[J]. 经济研究, 2007(12): 82-92.
- [5] 刘凤良, 章潇萌, 于泽. 高投资、结构失衡与价格指数二元分化[J]. 金融研究, 2017(02): 54-69.
- [6] 吕捷, 王高望. CPI 与 PPI “背离” 的结构性解释[J]. 经济研究, 2015, 50(04): 136-149.