0.1 常用初等不等式

命题 0.1 (常用不等式)

(1) $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2) $\ln x < \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x > 0.$

(3) $e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$

证明

(1) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x \geqslant 0$, 则

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - x - 2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+x-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x > 0.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减, 又 $f \in C[0,+\infty)$, 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上也严格单调递减. 从而

$$f(x) \leqslant f(0) = 0, \forall x > 0.$$

即 $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2)

(3) 注意到

$$(e^x - 1)(x^y - 1) > 0, \forall x, y > 0,$$

故

$$e^x + e^y < e^{x+y} + 1 \Longrightarrow e^x + e^y - 2 < e^{x+y} - 1, \forall x, y > 0.$$

□