0.1 Fourier 级数基本性质

定理 0.1 (Fourier 级数的逐项积分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意 $c, x \in [-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t.$$

定理 0.2 (Fourier 级数的逐项微分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导. 进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 (注意:$f'(x)$ 在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx).$$

推论 0.1

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

定理 0.3 (Bessel 不等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

笔记 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

定理 0.4 (Parseval 恒等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足恒等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$