

0.1 凸函数与上半连续函数

0.1.1 凸函数

定义 0.1 (下凸函数的定义)

对集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 我们称

1. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

2. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个严格 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

3. 称 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in [0, 1].$$

4. 称 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个严格下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset S,$$

就有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in (0, 1).$$

注 同理可以定义上凸函数.

笔记

- 我们常用 $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$ 来表示连接 x, y 的线段.
- 显然 f 在 S 上各种凸的充要条件都是对任何含于 S 的线段 ℓ , 都有 $f|_{\ell}$ 上是对应的那种一元凸函数.
- 开集上的二阶可微函数为下凸函数等价于 Hess 矩阵半正定可以在任何一般数学分析教材上找到.
- 显然下凸蕴含 Jensen 下凸, 实际运用中我们更偏爱下凸而不是 Jensen 下凸, 推导二者的联系是重要的命题.

命题 0.1

闭区间上的连续函数如果在开区间内是下凸函数, 则必然在闭区间上也是下凸函数.

证明

□

命题 0.2 (下凸函数的基本性质)

1. 下凸函数恒在割线下方

(1) 设 I 为一区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对任何 $[s, t] \subset I$ 成立

$$f(x) \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - s) + f(s), \forall x \in [s, t].$$

(2) 设 I 为一区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上严格下凸的充要条件是对任何 $[s, t] \subset I$ 成立

$$f(x) < \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - s) + f(s), \forall x \in (s, t),$$

2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 设 I 为一区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对 $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(2) 设 I 为一区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则 f 在 I 上严格下凸的充要条件是对 $x_1 < x_2 < x_3, x_1, x_2, x_3 \in I$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

3. 可微的下凸函数恒在切线上方

(1) 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a, b) 下凸的充要条件是对任何 $x_0 \in (a, b)$, 我们都有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b).$$

(2) 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a, b) 严格下凸的充要条件是对任何 $x_0 \in (a, b)$, 我们都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}.$$

注 上述下凸函数的性质都可以通过几何作图直观地得到.

笔记 下凸函数割线斜率递增也表明: 下凸函数对 $\forall x_0 \in I$, 都有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 单调递增.(但是不能由这个结论推出 f 下凸)

证明

1. 函数恒在割线下方

(1) 首先证明充分性 (\Rightarrow): 对 $\forall [s, t] \subset I, \forall x \in [s, t]$, 可设 $x = \lambda s + (1 - \lambda)t$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$. 由 f 在 I 上下凸可知, 对 $\forall x \in [s, t]$, 有

$$f(x) = f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t) = (\lambda - 1)[f(s) - f(t)] + f(s).$$

再结合 $\lambda = \frac{x - t}{s - t}$ 可得

$$f(x) \leq \left(\frac{x - t}{s - t} - 1\right)[f(s) - f(t)] + f(s) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - s) + f(s), \quad \forall x \in [s, t].$$

接着证明必要性 (\Leftarrow): 对 $\forall s, t \in I$, 不妨设 $s < t$, 则 $[s, t] \subset I$. 对 $\forall x \in [s, t]$, 可设 $x = \lambda s + (1 - \lambda)t$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$. 则由条件可知, 对 $\forall x \in [s, t]$, 有

$$f(x) = f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t}(\lambda s + (1 - \lambda)t - s) + f(s) = \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t).$$

即 $\forall s, t \in I$, 都有 $f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t)$. 故 f 在 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 首先证明充分性 (\Rightarrow): 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 取 $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0, 1)$. 因为函数 f 在区间 I 上下凸, 所以有

$$f(x_2) = f(\lambda x_3 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_3) + (1 - \lambda)f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1).$$

即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

接下来证明必要性 (\Leftarrow): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

这等价于

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1). \quad (1)$$

进而, 对于任意的 $x_1, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_3$, 以及任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 令 $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 \in (x_1, x_3)$, 此时 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. 于是, 根据(1)式可以得到

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) = f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

所以, 函数 f 在区间 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

3. 可微的下凸函数恒在切线上方

(1) 首先证明充分性 (\Rightarrow): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 函数 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 (a, b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in (x_0, x)$, 根据 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

令 $x' \rightarrow x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in (x, x_0)$, 由 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}.$$

令 $x'' \rightarrow x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x'' \rightarrow x_0^-} \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

接下来证明必要性 (\Leftarrow): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$f(x_1) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) \geq f'(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸.

(2) 首先证明充分性 (\Rightarrow): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 函数 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 (a, b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in \left(x_0, \frac{x + x_0}{2}\right)$, 根据 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} > \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

令 $x' \rightarrow x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} \geq \lim_{x' \rightarrow x_0^+} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in \left(x_0, \frac{x + x_0}{2}\right)$, 由 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x + x_0}{2} - x_0} > \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}.$$

令 $x'' \rightarrow x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2} - x_0} \geq \lim_{x'' \rightarrow x_0^-} \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

接下来证明必要性 (\Leftarrow): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) > f'(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2) < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸. □

例题 0.1 导数递增则割线斜率也递增 函数 f 在 (a, b) 可导, 证明:

1. f' 递增的充要条件是对 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

2. f' 严格递增的充要条件是对 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

证明

- (1) 首先证明必要性 (\Rightarrow): 对于满足 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(y_1) \leq f'(y_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 (\Leftarrow): 由已知条件可知, 对于满足 $a < x_1 < x_2 < b$ 的情况, 取 $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} &\leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \forall s \in (a, x_1), \\ \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} &\leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}, \quad \forall t \in (x_2, b). \end{aligned}$$

令 $s \rightarrow x_1^-, t \rightarrow x_2^+$, 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s \rightarrow x_1^-} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq \lim_{t \rightarrow x_2^+} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'(x_2).$$

所以有 $f'(x_1) \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq f'(x_2)$. 再由 x_1, x_2 的任意性可知, f' 单调递增.

- (2) 首先证明必要性 (\Rightarrow): 对于满足 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(y_1) < f'(y_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

由此, 必要性得证.

接着证明充分性 (\Leftarrow): 由条件可知, 对于满足 $a < x_1 < x_2 < b$ 的情况, 取 $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} &< \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \forall s \in (a, x_1), \\ \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} &< \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}, \quad \forall t \in (x_2, b). \end{aligned}$$

令 $s \rightarrow x_1^-, t \rightarrow x_2^-$, 可得

$$f'(x_1) = \lim_{s \rightarrow x_1^-} \frac{f(s) - f(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2}, \quad \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq \lim_{t \rightarrow x_2^-} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'(x_2).$$

故 $f'(x_1) \leq \frac{f(c) - f(x_2)}{c - x_2} \leq f'(x_2)$. 若 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 则由命题??可知, f 在 $[x_1, x_2]$ 上为线性函数. 设 $f(x) = cx + d, x \in [x_1, x_2]$, 其中 $c, d \in \mathbb{R}$. 从而

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = c = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}.$$


这与已知条件矛盾! 故 $f'(x_1) < f'(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $a < x_1 < x_2 < b$, 即 f' 递增.

□

命题 0.3

设 f 在 (a, b) 上的下凸函数, 则 f 在 (a, b) 有上界的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在.

▲

 **笔记** 由这个命题及命题 0.1 可知: 如果下凸函数 f 在 (a, b) 上有上界, 则 f 可连续延拓到 $[a, b]$ (补充定义端点的函数值等于端点的左右极限即可), 使得 f 在 $[a, b]$ 上仍是下凸函数.

证明 (\Leftarrow): 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知, f 在 (a, b) 上连续. 又因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 所以由 Cantor 定理可知, f 可以连续延拓到 $[a, b]$ 上, 故 f 在 $[a, b]$ 上有界, 从而在 (a, b) 上有界.

(\Rightarrow): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上递增. 由 f 在 (a, b) 上有上界可知, 存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in (a, b). \quad (2)$$

由 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的递增性及(2)式可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{M - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in (x_0, b). \quad (3)$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{M - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{M - f(x_0)}{b - x_0}$, 所以 $\frac{M - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 (x_0, b) 上有界. 从而存在 $K > 0$, 使得

$$\frac{M - f(x_0)}{x - x_0} \leq K, \forall x \in (x_0, b). \quad (4)$$

于是结合(3)(4)式可知, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq K, \forall x \in (x_0, b)$. 进而由单调有界定理可知 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在. 于是

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \right] = (b - x_0) \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0).$$

故 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 也存在. 同理可得 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 也存在.

□

命题 0.4 (下凸函数的单调性刻画)

1. 闭区间凸函数的单调性刻画

设 f 是 $[a, b]$ 上的下凸函数, 则 f 只有下述三种情况:

- (1) f 在 $[a, b]$ 递减,
- (2) f 在 $[a, b]$ 递增,
- (3) 存在 $c \in (a, b)$, 使得 f 在 $[a, c]$ 递减, 在 $[c, b]$ 递增.

2. 开区间凸函数的单调性刻画

设 f 是 (a, b) 上的下凸函数, a 允许取 $-\infty, b$ 允许取 $+\infty$, 则 f 只有下述三种情况:

- (1) f 在 (a, b) 递减;
- (2) f 在 (a, b) 递增;
- (3) 存在 $c \in (a, b)$, 使得 f 在 (a, c) 递减, 在 $[c, b)$ 递增.

▲

证明

1. 闭区间凸函数的单调性刻画

由下凸函数恒在割线下方, 我们有

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a), \forall x \in [a, b].$$

因此 f 在 $[a, b]$ 上有上界. 于是由命题 0.3 可知, f 可以连续延拓到 $[a, b]$, 并且仍然在 $[a, b]$ 上下凸. 记这个连续延拓函数为 \bar{f} , 则 $\bar{f} \in C[a, b]$ 且 \bar{f} 在 $[a, b]$ 上也下凸.

下证

$$f(a) \geq \bar{f}(a), f(b) \geq \bar{f}(b). \quad (5)$$

事实上, 由下凸函数割线斜率递增可知 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(x_0, b]$ 递增, 从而

$$\begin{aligned} \bar{f}(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \left[(x-x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \right] \\ &\leq \lim_{x \rightarrow b^-} \left[(x-x_0) \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} + f(x_0) \right] = f(b), \end{aligned}$$

类似可得 $f(a) \geq \bar{f}(a)$, 这就证明了 (5). 下面证明 \bar{f} 的单调性.

由上述证明可知 $\bar{f} \in C[a, b]$ 且在 $[a, b]$ 上下凸. 不妨设 \bar{f} 最小值为 0. 现在设 $c \in [a, b]$ 是 f 的最小值点. 若 $c \in (a, b)$, 则对 $b \geq x_2 > x_1 > c$, 我们有

$$\frac{\bar{f}(x_2)-\bar{f}(c)}{x_2-c} \geq \frac{\bar{f}(x_1)-\bar{f}(c)}{x_1-c} \Rightarrow \bar{f}(x_2) \geq \frac{x_2-c}{x_1-c} \bar{f}(x_1) \geq \bar{f}(x_1). \quad (6)$$

故 \bar{f} 在 $[c, b]$ 递增. 类似可知 \bar{f} 在 $[a, c]$ 递减. 这就证明了第三种情况. 若 $c = a$, 则不等式 (6) 也成立, 故 \bar{f} 在 $[a, b]$ 递增. 同样的若 $c = b$ 则 \bar{f} 在 $[a, b]$ 递减.

于是再结合 (5) 可知

(i) 当 \bar{f} 的最小值 $c = b$ 时, 若 $f(b) > \bar{f}(b)$, 则 f 只在 $[a, b)$ 上单调递减; 若 $f(b) = \bar{f}(b)$, 则 f 在 $[a, b]$ 上单调递减. 故此时无论如何, f 一定在 $[a, b)$ 上单调递减.

(ii) 当 \bar{f} 的最小值 $c = a$ 时, 若 $f(a) > \bar{f}(a)$, 则 f 只在 $(a, b]$ 上单调递增; 若 $f(a) = \bar{f}(a)$, 则 f 在 $[a, b]$ 上单调递增. 故此时无论如何, f 一定在 $(a, b]$ 上单调递增.

(iii) 当 \bar{f} 的最小值 $c \in (a, b)$ 时, f 的单调性与 \bar{f} 相同, 即 f 在 $[c, b]$ 递增, 在 $[a, c]$ 递减.

因此结论得证.

2. 开区间凸函数的单调性刻画 由 (1) 的证明类似, 只是不再额外需要考虑 f 的两个端点, 同理证明即可. □

定理 0.1 (Jensen 不等式)

对集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 设 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 则对完全含于 S 内的一条线段上的点 x_1, x_2, \dots, x_m 和


$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \lambda_k \in [0, 1] \cap \mathbb{Q},$$

我们有

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k). \quad (7)$$

特别的,

$$f\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} f(x_k). \quad (8)$$

 **笔记** 初等的, 如果 S 性质足够好且 f 二阶可微, 读者可以通过把 f 在 $\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k$ Taylor 展开, 然后丢掉二阶微分那

项来得到不等式 $f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k)$. 本部分的证明尽可能追求一般性.

证明 首先不等式(8)的建立是经典高中数学学习题, 一个参考可以见 **Jensen 不等式**. 我们归纳证明不等式(7), 当 $m = 2$, 设有理数 $\frac{p}{q} \in [0, 1], q > 0$, 运用不等式(8), 我们有

$$f\left(\frac{p}{q}x + \left(1 - \frac{p}{q}\right)y\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \frac{x}{q} + \cdots + \frac{x}{q}}_p + \underbrace{\frac{y}{q} + \frac{y}{q} + \cdots + \frac{y}{q}}_{q-p}\right) \leq \frac{p}{q}f(x) + \left(1 - \frac{p}{q}\right)f(y).$$

这就证明了(7)的 $m = 2$ 的情况. 假定 m 时不等式(7)成立, 当 $m + 1$ 时, 我们不妨设 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$, 否则不等式(7)是平凡的. 现在

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(x_j) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x_j) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f\left(\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_j\right) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\ &\geq f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_j + \lambda_{m+1} x_{m+1}\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j\right), \end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 $m = 2$ 时的不等式. 于是就对一般的 $m \in \mathbb{N}$, 我们证明了(7). □

引理 0.1

设 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域内是 Jensen 下凸函数, 若 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) < \infty$, 则 f 在 x_0 连续.

证明 要证 f 在 x_0 连续, 只须证 $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

由条件可知

$$-\infty < f(x_0) \leq \frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2}, \quad \forall x \in U(0).$$

令 $x \rightarrow 0$ 并取下极限, 得到

$$-\infty < f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2} \leq \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow 0} f(x_0 - x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x_0 + x) = \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (9)$$

根据条件可得

$$f(x) \leq \frac{f(x_0) + f(2x - x_0)}{2}, \quad \forall x \in U(x_0).$$

令 $x \rightarrow x_0$ 并取上极限, 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + f(2x - x_0)}{2} \leq \frac{f(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(2x - x_0) = \frac{f(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

于是 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. 将其代入(9)式得到

$$-\infty < f(x_0) \leq \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \frac{1}{2} f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

因此 $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. 即 f 在 x_0 处连续. □

定理 0.2 (开区间下凸函数左右导数处处存在)

(a, b) 上的下凸函数 f 在每一点左右导数都存在, 从而 f 在 (a, b) 连续.

♡

证明 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上递增. 从而

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq \frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2} - x_0}, \quad \forall x \in (a, x_0), \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq \frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2} - x_0}, \quad \forall x \in (x_0, b). \end{aligned}$$

于是 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 (a, x_0) 上有上界 $\frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2} - x_0}$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 (x_0, b) 上有下界 $\frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2} - x_0}$.

故由单调有界定理可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 都存在, 即 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在. 进而

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = f'_+(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x) - f(x_0)] = f'_-(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 即 f 在 $x = x_0$ 处连续, 再根据 x_0 的任意性可知, f 在 (a, b) 上连续. □

定理 0.3 (开区间上的下凸函数内闭 Lipschitz 连续)

(a, b) 上的下凸函数 f 一定内闭 Lipschitz 连续.

♡

证明 对 $\forall [A, B] \subset (a, b)$, 任取 $s \in (a, A), t \in (B, b)$, 固定 s, t . 则由下凸函数割线斜率递增可知

$$\frac{f(A) - f(s)}{A - s} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(t) - f(B)}{t - B}, \quad \forall x, y \in [A, B].$$

记 $L = \max \left\{ \left| \frac{f(A) - f(s)}{A - s} \right|, \left| \frac{f(t) - f(B)}{t - B} \right| \right\}$, 则

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [A, B].$$

故 f 在 (a, b) 上内闭 Lipschitz 连续. □

定理 0.4

设 f 在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域内是下凸函数, 则 f 在 \mathbf{x}_0 连续.

♡



笔记 下述证明表明: n 元下凸函数一定也关于单变量下凸.

证明 仅证明 $n = 2$ 的情形, 一般情况是类似的.

由条件可知, 当 $n = 2$ 时, 设 $\delta > 0$, f 在 $(x_0 - \delta, y_0 - \delta) \times (x_0 + \delta, y_0 + \delta)$ 上下凸, 则对 $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [x_0 - \delta, y_0 - \delta] \times [x_0 + \delta, y_0 + \delta], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x_1, y_1) + (1 - \lambda)f(x_2, y_2). \quad (10)$$

$\forall x' \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, 固定 x' , 在 (10) 式中令 $x_1 = x_2 = x'$, 则对 $\forall y_1, y_2 \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, 都有

$$f(x', \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = f(\lambda x' + (1 - \lambda)x', \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x', y_1) + (1 - \lambda)f(x', y_2).$$

故 f 关于单变量 y 在 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 上下凸. 同理可得 f 关于单变量 x 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上下凸. 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知 f 关于单变量 x 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上连续, 关于单变量 y 在 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 上连续. 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得当 $|x - x_0| \leq \delta_1$ 时, 有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

任取 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, 固定 x , 从而此时 $f(x, y)$ 是在 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 上关于 y 的一元连续下凸函数. 于是由开区间上的下凸函数一定内闭 Lipschitz 连续可知, $f(x, y)$ 在 $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 上内闭 Lipschitz 连续. 进而存在 $\delta_2 \in (0, \delta)$, 使得对 $\forall y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$, 有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \max \left\{ \frac{f(x, y_0 - \delta_2) - f(x, y_0 - \delta_2)}{\delta_2}, \frac{f(x, y_0 + \delta_2) - f(x, y_0 + \delta_2)}{\delta_2} \right\} \cdot |y - y_0|. \quad (12)$$

由 f 关于单变量 x 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上连续可知, $f(x, y_0 - \delta_2), f(x, y_0 - \delta_2), f(x, y_0 + \delta_2), f(x, y_0 + \delta_2)$ 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上都有界, 从而我们记

$$L = \max \left\{ \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x, y_0 - \delta_2) - f(x, y_0 - \delta_2)}{\delta_2}, \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x, y_0 + \delta_2) - f(x, y_0 + \delta_2)}{\delta_2} \right\}.$$

令 $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{2L}\}$, 于是由 (12) 式可知, 对 $\forall (x, y) \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta']$, 都有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L|y - y_0|. \quad (13)$$

利用 (11) (13) 式可得, 对上述 ε, δ' , 当 $(x, y) \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ 时, 我们都有

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< L|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 f 在 (x_0, y_0) 连续. □

推论 0.1 (开集上的下凸函数必连续)

开集上的下凸函数是连续函数.

0.1.2 上半连续函数

定义 0.2 (半连续函数定义)

拓扑空间 X 上的一个函数 $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ 被称为**上半连续的**, 如果对每个 $c \in \mathbb{R}$ 都有

$$\{x \in X : f(x) < c\}$$

是 X 的开集.

注 下半连续函数同理定义.



笔记

- (1) 显然 f 连续等价于 f 上半连续且下半连续.
- (2) 上半连续等价于对 $\forall x_0 \in X$, 都有 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

命题 0.5 (上半连续函数基本性质)

设 X 是拓扑空间,

- (1) 若 f_α 是一族 X 上的上半连续函数, 则 $f = \inf_{\alpha} f_\alpha$ 也是上半连续函数.
- (2) 若 f 是 X 上的上半连续函数, 则对每一个紧集 $K \subset X$ 有 $a \in K$ 使得 $f(x) \leq f(a), \forall x \in K$.
- (3) 设 $I \subset [-\infty, +\infty)$ 是开区间, 如果 $f: X \rightarrow I$ 和 $g: I \rightarrow [-\infty, +\infty)$ 是上半连续函数且 g 递增, 则 $g \circ f$ 是上半连续函数.

注 下半连续函数同理也有相应的性质.



笔记 (2) 是说紧集上的上半连续函数一定有上界且取得最大值. 一个经典的技巧是, 很多时候如果一个命题对所有紧集成立, 则等价于这个命题局部上成立, 即对每个点, 都存在一个邻域使得在这个邻域上成立. 现在我们注意到对每个点 x , 如果其所有邻域上, 上半连续函数 f 无上界, 那么取 $x_n \rightarrow x$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$, 则 f 在紧集 $\{x_n\} \cup \{x\}$ 上无上界, 这就是一个矛盾!

证明

1. 对任何 $x_0 \in X, \beta$, 由 f_α 下半连续和下确界的定义, 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \inf_{\alpha} f_\alpha(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f_\beta(x) \leq f_\beta(x_0).$$

两边对 β 取下确界即得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \inf_{\alpha} f_\alpha(x) \leq \inf_{\beta} f_\beta(x_0).$$

故 $f = \inf_{\alpha} f_\alpha$ 也是上半连续函数.

2. 注意到开覆盖 $K = \bigcup_c \{x \in K : f(x) < c\}$, 由 K 是紧集可知, 必有有限子覆盖

$$K = \bigcup_{i=1}^n \{x \in K : f(x) < c_i\}.$$

不妨设 c_1 是 $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的最大值, 则 $f(x) < c_1, \forall x \in K$. 即上半连续函数 f 在 K 上有上界. 取 $c = \sup_K f$, 如果 f 达不到最大值, 注意到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{c - f(x)} \leq \frac{1}{c - \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)} \leq \frac{1}{c - f(x_0)}.$$

故 $\frac{1}{c - f(x)}$ 在 K 上半连续. 因此同理可得 $\frac{1}{c - f(x)}$ 在 K 上也有上界. 于是存在 $M > 0$, 使得

$$\frac{1}{c - f(x)} \leq M \Rightarrow f(x) \leq c - \frac{1}{M} < c.$$

这与 $c = \sup_K f$ 矛盾! 从而 f 能取到最大值, 于是一定存在 $a \in K$, 使得 $c = f(a)$, 故 $f(x) < c = f(a), \forall x \in K$.

3. 注意到 $\{x \in X : g(x) < c\} = [-\infty, \alpha_c)$, 因此

$$\{x \in X : g \circ f(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < \alpha_c\},$$

这就证明了 $g \circ f$ 是上半连续函数.

□

定理 0.5 (半连续函数逼近定理)

设 X 是一个度量空间, f 是 X 上的上半连续函数, 则存在递减函数列 $f_n \in C(X)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$$

♡

证明 如果 $f \equiv -\infty$, 取 $f_n = -n, n = 1, 2, \dots$. 现在假定 $f \not\equiv -\infty$, 然后考虑 $g = e^{-f} : X \rightarrow (0, +\infty]$ 并定义

$$g_n(x) = \inf_{z \in X} \{g(z) + nd(x, z)\}, n = 1, 2, \dots$$

显然

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq g(x), \forall x \in X, n = 1, 2, \dots$$

因为 $g \not\equiv +\infty$, 我们知道 $g_n, n \in \mathbb{N}$ 都是有限函数. 若对某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X$, 有 $g_n(x) = 0$. 则存在 $z_m \in X, m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [g(z_m) + nd(z_m, x)] = 0,$$

即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(z_m, x) = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} f(z_m) = +\infty.$$

又由上半连续函数基本性质 (2) 和笔记知 f 局部有上界, 这就是矛盾! 因此我们证明了

$$g_n(x) > 0, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

为了说明 $f_n = -\ln g_n, n \in \mathbb{N}$ 是我们需要的函数, 我们只需证明

$$g_n \in C(X), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g.$$

事实上, 对任何 $x, y, z \in X$, 我们有

$$g_n(x) \leq g(z) + nd(z, x) \leq g(z) + nd(y, z) + nd(x, y).$$

对 z 取下确界得

$$g_n(x) \leq g_n(y) + nd(x, y),$$

对称得

$$g_n(y) \leq g_n(x) + nd(x, y),$$

即

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leq nd(x, y).$$

故 $g_n \in C(X), \forall n \in \mathbb{N}$.

给定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 因为 g 下半连续, 所以存在 x 的半径为 $\delta > 0$ 的开球邻域 U , 使得

$$g(z) > g(x) - \varepsilon, \forall z \in U.$$

于是由 g_n 定义知

$$g_n(x) \geq \min\{g(x) - \varepsilon, n\delta\}.$$

当 n 充分大, 我们知道 $g(x) \geq g_n(x) \geq g(x) - \varepsilon$, 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$. 我们完成了证明. \square

定理 0.6 (下凸函数的局部定义)

设开集 $V \subset \mathbb{R}^n$, f 在 V 上半连续, 如果对任何 $x \in V, y \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 都存在 $h \in (0, \delta)$, 使得

$$f(x) \leq \frac{f(x + hy) + f(x - hy)}{2}. \quad (14)$$

证明 f 是 V 上的下凸函数.



笔记 本定理表明下凸函数是个局部的概念, 只要局部是下凸函数, 整体也是下凸函数. 从证明可以看到, 若对 $y \neq 0$, 不等式(14)改为严格不等号, 则 f 也是严格下凸的.

证明 对 $x \in V, y \in \mathbb{R}^n$, 满足 $x + wy \in V, \forall w \in [-1, 1]$, 考虑上半连续函数

$$g(w) = f(x + wy) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2},$$

现在有

$$g(1) = g(-1) = 0.$$

如果存在 $s \in (-1, 1)$, 使得 $g(s) > 0$, 那么记

$$M \triangleq \sup_{[-1, 1]} g > 0, A \triangleq \{x \in [-1, 1] : g(x) = M\}.$$

显然 A 是 $(-1, 1)$ 中的紧集, 设 A 的最大值点 w_0 , 则 $1 - w_0 > 0$, 现在运用条件不等式(14), 我们知道存在充分小的 $h > 0$, 使得

$$f(x + w_0 y) \leq \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2}.$$

于是对这个 h , 我们有

$$\begin{aligned} g(w_0) &= f(x + w_0 y) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\ &\leq \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2} - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2}w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\ &= \frac{g(w_0 + h) + g(w_0 - h)}{2} < M, \end{aligned}$$

这是一个矛盾! 因此

$$g(w) \leq 0, \forall w \in [-1, 1],$$

因此

$$g(0) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2},$$

故 f 是 Jensen 下凸函数, 因为 f 上半连续, 所以 f 局部有上界, 所以由引理 0.1 知 f 在 V 上连续, 因此我们证明了 f 是下凸函数. \square

例题 0.2 设有限函数

$$S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m u_n(x), u_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N}.$$

若 $u_n, n \in \mathbb{N}$ 非负, 证明 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最小值.

证明 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由 $u_n \in C[a, b]$ 且非负可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m u_n(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^m u_n(x) \\ &\geq \sum_{n=1}^m \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^m u_n(x_0). \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) \geq S(x_0)$, 故 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上下半连续. 由半连续函数的基本性质 (2) 可知, $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上达到最小值. \square

例题 0.3 设 $\{g_n\}_{n=1}^\infty, \{h_n\}_{n=1}^\infty \subset C[a, b]$, 若

$$h_n \geq h_{n+1}, g_{n+1} \geq g_n, n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \text{ 存在.}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ 是连续函数.

证明 记 $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$, 则一方面, 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$h_n(x) \leq h_{n-1}(x) \leq \dots \leq h_N(x), \forall n > N.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$h(x) \leq h_N(x), \forall n > N.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$, 令 $x \rightarrow x_0$, 并取上极限, 结合 $h_N \in C[a, b]$ 可得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h_N(x) = h_N(x_0), \forall n > N.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 得到 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq h(x_0)$. 故 h 在 $[a, b]$ 上上半连续.

另一方面, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$g_n(x) \geq g_{n-1}(x) \geq \dots \geq g_m(x), \forall n > m.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$g(x) \geq g_m(x), \forall n > m.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$, 令 $x \rightarrow x_0$, 并取上极限, 结合 $g_m \in C[a, b]$ 可得

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g_m(x) = g_m(x_0), \forall n > m.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 得到 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$. 故 g 在 $[a, b]$ 上下半连续. 因此 $h = g$ 在 $[a, b]$ 上既上半连续又下半连续, 从而 $h = g$ 在 $[a, b]$ 上连续. \square