

0.1 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

定理 0.1

线性变换 φ 的特征值 λ_1 的度数等于 φ 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的个数, λ_1 的重数等于所有属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的阶数之和.



证明 设 V 是 n 维复线性空间, φ 是 V 上的线性变换. 设 φ 的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \quad (1)$$

定理??告诉我们, 存在 V 的一组基 $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r_1}; e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2r_2}; \dots; e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kr_k}\}$, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

上式中每个 J_i 是相应于初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ 的 Jordan 块, 其阶正好为 r_i . 令 V_i 是由基向量 $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir_i}$ 生成的子空间, 则

$$\begin{aligned} \varphi(e_{i1}) &= \lambda_i e_{i1}, \\ \varphi(e_{i2}) &= e_{i1} + \lambda_i e_{i2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(e_{ir_i}) &= e_{i,r_i-1} + \lambda_i e_{ir_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

这表明 $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, 即 $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是 φ 的不变子空间. 显然我们有

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

线性变换 φ 限制在 V_1 上 (仍记为 φ) 便成为 V_1 上的线性变换. 这个线性变换在基 $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r_1}\}$ 下的表示矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

注意到 J_1 的特征值全为 λ_1 , 并且 $\lambda_1 I - J_1$ 的秩等于 $r_1 - 1$, 故 J_1 只有一个线性无关的特征向量, 不妨选为 e_{11} . 显然 e_{11} 也是 φ 作为 V 上线性变换关于特征值 λ_1 的特征向量. 不失一般性, 不妨设在 φ 的初等因子组即(1)式中

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s, \quad \lambda_i \neq \lambda_1 (i = s+1, \dots, k),$$

则 J_1, \dots, J_s 都以 λ_1 为特征值, 且相应于每一块有且只有一个线性无关的特征向量. 相应的特征向量可取为

$$e_{11}, e_{21}, \dots, e_{s1}, \quad (3)$$

显然这是 s 个线性无关的特征向量. 如果 $\lambda_i \neq \lambda_1$, 则容易看出 $r(\lambda_1 I - J_i) = r_i$, 于是

$$r(\lambda_1 I - J) = \sum_{i=1}^k r(\lambda_1 I - J_i) = (r_1 - 1) + \dots + (r_s - 1) + r_{s+1} + \dots + r_k = n - s.$$

因此 φ 关于特征值 λ_1 的特征子空间 V_{λ_1} 的维数等于 $n - r(\lambda_1 I - J) = s$, 从而特征子空间 V_{λ_1} 以(3)式中的向量为一组基. 又 λ_1 是 φ 的 $r_1 + r_2 + \dots + r_s$ 重特征值, 因此 λ_1 的重数与度数之差等于

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_s) - s.$$

□

推论 0.1

线性变化 (矩阵) 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_0 的每一个 Jordan 块都有且仅有一个线性无关的特征向量.

♡

证明 由上述定理 0.1 的证明立得.

□

定义 0.1 (根子空间)

设 λ_0 是 n 维复线性空间 V 上线性变换 φ 的特征值, 则

$$R(\lambda_0) = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_0 I)^n(v) = 0\}$$

构成了 V 的一个子空间, 称为属于特征值 λ_0 的根子空间.

♣

定理 0.2

设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换.

(1) 若 φ 的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

则 V 可分解为 k 个不变子空间的直和:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k, \quad (4)$$

其中 V_i 是维数等于 r_i 的关于 $\varphi - \lambda_i I$ 的循环子空间;

(2) 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是 φ 的全体不同特征值, 则 V 可分解为 s 个不变子空间的直和:

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \dots \oplus R(\lambda_s),$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间, $R(\lambda_i)$ 的维数等于 λ_i 的重数, 且每个 $R(\lambda_i)$ 又可分解为 (4) 式中若干个 V_j 的直和.

♡

证明 在定理 0.1 的证明的基础上, 现在再来看 J_1 所对应的子空间 V_1 , 由 (2) 式中诸等式可知

$$(\varphi - \lambda_1 I)(e_{1r_1}) = e_{1,r_1-1}, \dots, (\varphi - \lambda_1 I)(e_{12}) = e_{11}, (\varphi - \lambda_1 I)(e_{11}) = 0,$$

因此, 若记 $\alpha = e_{1r_1}, \psi = \varphi - \lambda_1 I$, 则

$$\psi(\alpha) = e_{1,r_1-1}, \psi^2(\alpha) = e_{1,r_1-2}, \dots, \psi^{r_1-1}(\alpha) = e_{11}, \psi^{r_1}(\alpha) = 0.$$

也就是说

$$\{\alpha, \psi(\alpha), \psi^2(\alpha), \dots, \psi^{r_1-1}(\alpha)\}$$

构成了 V_1 的一组基.

上面的事实说明, 每个 Jordan 块 J_i 对应的子空间 V_i 是一个循环子空间. 把属于同一个特征值, 比如属于 λ_1 的所有循环子空间加起来构成 V 的一个子空间:

$$R(\lambda_1) = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

若 $v \in R(\lambda_1)$, 则不难算出 $(\varphi - \lambda_1 I)^s(v) = 0$, 其中

$$s = \dim R(\lambda_1) = r_1 + \dots + r_s.$$

事实上, 我们可以证明

$$R(\lambda_1) = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_1 I)^n(v) = 0\}. \quad (5)$$

为证明 (5) 式成立, 设 $U = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_1 I)^n(v) = 0\}$, 则由上面的分析知道, $R(\lambda_1) \subseteq U$. 另一方面, 任取 $v \in U$, 设 $v = v_1 + v_2$, 其中 $v_1 \in R(\lambda_1), v_2 \in V_{s+1} \oplus \dots \oplus V_k$. 因为 $(\lambda - \lambda_1)^n$ 与 $(\lambda - \lambda_{s+1})^n \dots (\lambda - \lambda_k)^n$ 互素, 故存在多项式

$p(\lambda), q(\lambda)$, 使

$$(\lambda - \lambda_1)^n p(\lambda) + (\lambda - \lambda_{s+1})^n \cdots (\lambda - \lambda_k)^n q(\lambda) = 1.$$

将 $\lambda = \varphi$ 代入上式并作用在 \mathbf{v} 上可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= p(\varphi)(\varphi - \lambda_1 \mathbf{I})^n(\mathbf{v}) + q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}) \\ &= q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_1) + q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_2) \\ &= q(\varphi)(\varphi - \lambda_{s+1} \mathbf{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \mathbf{I})^n(\mathbf{v}_1) \in R(\lambda_1). \end{aligned}$$

这就证明了 (5) 式.

上面的结果表明: 特征值 λ_0 的根子空间可表示为若干个循环子空间的直和, 每个循环子空间对应于一个 Jordan 块. 虽然我们前面的讨论是对特征值 λ_1 进行的, 其实对任一特征值 λ_i 均适用. \square

命题 0.1

证明: 复数域上的方阵 A 必可分解为两个对称阵的乘积.

证明 设 P 是非异阵且使 $P^{-1}AP = J$ 为 A 的 Jordan 标准型, 于是 $A = PJP^{-1}$. 设 J_i 是 J 的第 i 个 Jordan 块, 则

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & & & \lambda_i \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

即 J_i 可分解为两个对称阵之积. 因此 J 也可以分解为两个对称阵之积, 记为 S_1, S_2 , 于是

$$A = PJP^{-1} = PS_1S_2P^{-1} = (PS_1P')(P^{-1})'S_2P^{-1}.$$

显然 PS_1P' 和 $(P^{-1})'S_2P^{-1}$ 都是对称矩阵, 故 A 必可分解为两个对称阵的乘积. \square

例题 0.1 已知

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算 A^k .

解 用初等变换把 $\lambda I - A$ 化为对角 λ -矩阵并求出它的初等因子组为

$$(\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2.$$

因此, A 的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = J^k,$$

故先计算 J^k . 注意 J 是分块对角阵, 它的 k 次方等于将各对角块 k 次方, 因此

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k+1 & k & 0 & 0 \\ -4k & -2k+1 & 0 & 0 \\ 6k & k & k+1 & k \\ -14k & -5k & -k & -k+1 \end{pmatrix}.$$

□

定理 0.3 (Jordan-Chevalley 分解)

设 A 是 n 阶复矩阵, 则 A 可分解为 $A = B + C$, 其中 B, C 适合下面条件:

(1) B 是一个可对角化矩阵;

(2) C 是一个幂零阵;

(3) $BC = CB$;

(4) B, C 均可表示为 A 的多项式.

不仅如此, 上述满足条件 (1)(3) 的分解是唯一的 (即只要满足条件 (1)(3) 的分解就是唯一的). 进而, 上述满足条件 (1)(2)(3)(4) 的分解也是唯一的.

♡

注 要证满足条件 (1)(3) 的分解是唯一的等价于: 设 B, C 满足 (1)(2)(3)(4), 再设 B', C' 满足 (1)(3), 只要证明 $B = B', C = C'$ 即可.

证明 先对 A 的 Jordan 标准型 J 证明结论. 设 A 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 且

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 J_i 是属于特征值 λ_i 的根子空间对应的块, 其阶设为 m_i . 显然对每个 i 均有 $J_i = M_i + N_i$, 其中 $M_i = \lambda_i I$ 是对角阵, N_i 是幂零阵且 $M_i N_i = N_i M_i$. 令

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{pmatrix},$$

则 $J = M + N, MN = NM, M$ 是对角阵, N 是幂零阵.

因为 $(J_i - \lambda_i I)^{m_i} = O$, 所以 J_i 适合多项式 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$. 而 λ_i 互不相同, 因此多项式 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ 两两互素. 由中国剩余定理, 存在多项式 $g(\lambda)$ 满足条件

$$g(\lambda) = h_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{m_i} + \lambda_i,$$

对所有 $i = 1, 2, \dots, s$ 成立 (这里 $h_i(\lambda)$ 也是多项式). 代入 J_i 得到

$$g(J_i) = h_i(J_i)(J_i - \lambda_i I)^{m_i} + \lambda_i I = \lambda_i I = M_i.$$

于是

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & g(J_2) & \\ & & \ddots \\ & & & g(J_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ & & & M_s \end{pmatrix} = M.$$

又因为 $N = J - M = J - g(J)$, 所以 N 也是 J 的多项式.

现考虑一般情形, 设 $P^{-1}AP = J$, 则 $A = PJP^{-1} = P(M + N)P^{-1}$. 令 $B = PMP^{-1}$, $C = PNP^{-1}$, 则 B 是可对角化矩阵, C 是幂零阵, $BC = CB$ 并且

$$g(A) = g(PJP^{-1}) = Pg(J)P^{-1} = PMP^{-1} = B,$$

从而 $C = A - g(A)$.

最后证明唯一性. 假设 A 有另一满足条件 (1) (3) 的分解 $A = B_1 + C_1$, 则 $B - B_1 = C_1 - C$. 由 $B_1 C_1 = C_1 B_1$ 不难验证 $AB_1 = B_1 A$, $AC_1 = C_1 A$. 因为 $B = g(A)$, 故 $BB_1 = B_1 B$. 同理 $CC_1 = C_1 C$. 设 $C^r = O$, $C_1^t = O$, 用二项式定理即知 $(C_1 - C)^{r+t} = O$. 于是

$$(B - B_1)^{r+t} = (C_1 - C)^{r+t} = O.$$

因为 $BB_1 = B_1 B$, 它们都是可对角化矩阵, 由命题??知它们可同时对角化, 即存在可逆阵 Q , 使 $Q^{-1}BQ$ 和 $Q^{-1}B_1Q$ 都是对角阵. 注意到

$$(Q^{-1}BQ - Q^{-1}B_1Q)^{r+t} = (Q^{-1}(B - B_1)Q)^{r+t} = Q^{-1}(B - B_1)^{r+t}Q = O,$$

两个对角阵之差仍是一个对角阵, 这个差的幂要等于零矩阵, 则这两个矩阵必相等, 由此即得 $B = B_1$, 从而 $C = C_1$.
□

定理 0.4 (AB 和 BA 的非 0 特征值的 Jordan 块完全一致)

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 则 AB 和 BA 的非 0 特征值的 Jordan 块完全一致.

证明 考虑 $PAQQ^{-1}BP^{-1}$, $Q^{-1}BP^{-1}PAQ$ 可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}, B_3 \in \mathbb{C}^{(n-r) \times r},$$

这里 B 的分块和 A 对应. 于是直接计算有

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

从 (0.1) 可以看到 AB, BA 非 0 特征值都集中在 B_1 上, 所以非 0 特征值完全一致. 设 $\lambda \neq 0$ 是 AB, BA 特征值. 则回忆命题??, 决定 C Jordan 块分布, 我们知道只需决定 $(\lambda E - C)^k, k \in \mathbb{N}_0$ 的秩即可. 于是对每个 $k \in \mathbb{N}_0$, 我们有

$$(\lambda E_m - AB)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, (\lambda E_n - BA)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

作初等变换

$$\begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\lambda E_n - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix},$$

于是我们证明了

$$r((\lambda E_m - AB)^k) + n = r((\lambda E_n - BA)^k) + m, \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

这就证明了 AB 和 BA 的非 0 特征值的 Jordan 块完全一致. □