

0.1 基本组合学公式

定义 0.1 (组合数定义的扩充)

对 $\forall n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 定义

$$C_n^k = \binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} 0 & , k < 0, \\ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & , 0 < k \leq n, \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

特别地, $C_n^0 \triangleq 1$. 若 $n, k \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leq k \leq n$, 则还有

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

定理 0.1 (二项式定理的推广)

$$(a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} \left(\prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in \{1, 2, \dots, n\} - I} b_j \right).$$

证明 用数学归纳法证明即可.