0.1 幂等变换

定义 0.1 (幂等变换)

线性变换 φ 若满足 $\varphi^2=\varphi$, 则称为**幂等变换**.

定义 0.2 (投影变换)

设 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 为线性空间 V 关于子空间 $V_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的直和分解, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{v}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_m$, 其中 $\boldsymbol{v}_i\in V_i$. 定义 $\varphi_i:V\to V,\varphi_i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_i(1\leqslant i\leqslant m)$, 容易验证 φ_i 是 V 上的线性变换, 称为 V 到 V_i 上的**投影变换**.

命题 0.1 (投影变换的性质)

设 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$ 为线性空间 V 关于子空间 $V_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的直和分解,φ_i 为 V 到 V_i 上的投影变换. 投影变换 φ_i 满足如下性质:

(1) $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=\boldsymbol{0}(i\neq j),\boldsymbol{I}_V=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$;

(2) $\mathrm{Im}\varphi_i=V_i,\mathrm{Ker}\varphi_i=\bigoplus\limits_{j\neq i}V_j,V=\mathrm{Im}\varphi_i\oplus\mathrm{Ker}\varphi_i$.

(3) 投影变换 φ_i 都是幂等变换;

(4) 若取 V_i 的一组基拼成 V 的一组基, 则 φ_i 在这组基下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$, 其中有 $\dim V_i$ 个 1;

(5) $V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus\mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\varphi_m$;

(6) $\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\mathrm{Ker}\varphi_2\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=0$.

笔记 提示: 两个集合相等等价于这两个集合相互包含.

证明

(1) 证明是显然的.

(2) 证明是显然的.

(3) 由 (1) 易得.

(4) 由 (2) 易得.

(5) 由 (2) 易知 $V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus\mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\varphi_m$.

(6) 任取 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\mathrm{Ker}\varphi_2\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m$. 由投影变换性质 (2), 可知 $\mathrm{Ker}\varphi_i=\bigoplus\limits_{j\neq i}V_j$. 于是对任意整数 $i,j\in[1,m]$ 且 $i\neq j$, 有 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi_i\cap\mathrm{Ker}\varphi_j=\bigoplus\limits_{k\neq i}V_k\cap\bigoplus\limits_{k\neq j}V_k$. 从而

$$\alpha=v_1+\cdots+v_{i-1}+v_{i+1}+\cdots+v_m=u_1+\cdots+u_{j-1}+u_{j+1}+\cdots+u_m,$$

其中 $v_k,u_k\in V_k$. 上式经整理可得 $v_j-u_i=\sum\limits_{k\neq i,j}(u_k-v_k)\in\bigoplus\limits_{k\neq i,j}V_k$. 又 $v_j-u_i\in V_i\oplus V_j$. 故 $v_j-u_i\in(V_i\oplus V_j)\cap\bigoplus\limits_{k\neq i,j}V_k$. 而由于 $V=\bigoplus\limits_{k=1}^{m}V_k$, 因此 $(V_i\oplus V_j)\cap\bigoplus\limits_{k\neq i,j}V_k=\boldsymbol{0}$. 故 $v_j-u_i=\boldsymbol{0}$, 从而 $v_j=u_i\in V_i\cap V_j$. 又因为 $V_i\oplus V_j$, 所以 $V_i\cap V_j=\boldsymbol{0}$. 故 $v_j=u_i=\boldsymbol{0}$. 再由 i,j 的任意性可知,$v_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,m$. 因此 $\alpha=\sum\limits_{k\neq i}v_k=\boldsymbol{0}$. 故 $\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\mathrm{Ker}\varphi_2\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=\boldsymbol{0}$.

□

命题 0.2

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的幂等变换, 证明:$V=U\oplus W$, 其中 $U=\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}_V-\varphi),W=\mathrm{Im}(\boldsymbol{I}_V-\varphi)=\mathrm{Ker}\varphi$, 且 φ 就是 V 到 U 上的投影变换.

笔记 注意到 φ 适合 $x^2-x=x(x-1)$, 从而由互素多项式诱导直和分解也可得到证明.

笔记 由上述命题可知n **维线性空间 V 上的幂等变换 φ 也是 V 到 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换**. 于是由命题??和命题??可知, 投影变换可以看作幂等变换, 幂等变换也可以看作投影变换.(即幂等变换和投影变换等价)

证明 因为 $\varphi^2=\varphi$, 故 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$,$\mathrm{Im}(\boldsymbol{I}-\varphi)\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$,$(\boldsymbol{I}-\varphi)(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\varphi$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{I}-\varphi)(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$, 从而 $V=\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$. 任取 $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$, 则 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{I}-\varphi)(\boldsymbol{\beta})+\varphi(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0}$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)=0$. 因此,$V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$. 特别地, 由维数公式可得 $\dim\mathrm{Im}\varphi=\dim\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$,$\dim\mathrm{Im}(\boldsymbol{I}-\varphi)=\dim\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$,$\mathrm{Im}(\boldsymbol{I}-\varphi)=\mathrm{Ker}\varphi$.

令 $U=\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}-\varphi)$,$W=\mathrm{Im}(\boldsymbol{I}-\varphi)=\mathrm{Ker}\varphi$, 则 $V=U\oplus W$. 注意到对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\boldsymbol{\alpha}=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{I}-\varphi)(\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in U$,$(\boldsymbol{I}-\varphi)(\boldsymbol{\alpha})\in W$, 故 φ 就是 V 到 U 上的投影变换.

□

推论 0.1

对线性空间 V 上的幂等变换 φ, 总存在 V 的一组基 (它由 $\mathrm{Im}\varphi$ 的基和 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基拼成), 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为下列对角矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 r 阶单位矩阵,r 等于 $\dim\mathrm{Im}\varphi$, 即 φ 的像空间的维数.

证明 由这个命题??和投影变换的性质容易证明.

□

命题 0.3

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶幂等矩阵, 求证:

(1) 存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 看成是 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上 (由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导) 的线性变换, 则它是幂等变换, 因此由推论??即得 (1).

注意到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 故 (2) 也成立.

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶幂等矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同, 求证: 必存在 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

证明 由命题??可知,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均相似于矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

□

命题 0.4

设 φ,ψ 是 n 维线性空间 V 上的幂等线性变换, 求证:

(1) $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$ 的充要条件是 $\varphi\psi=\psi,\psi\varphi=\varphi$;

(2) $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$ 的充要条件是 $\varphi\psi=\varphi,\psi\varphi=\psi$.

笔记 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

证明 (1) 由 $\psi=\varphi\psi$ 可得 $\mathrm{Im}\psi\subseteq\mathrm{Im}\varphi$. 同理由 $\varphi=\psi\varphi$ 可得 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Im}\psi$. 因此 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$.

反之, 若 $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi$, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\psi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Im}\psi=\mathrm{Im}\varphi$, 故存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 使得 $\psi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi(\boldsymbol{\beta})$. 注意到 $\varphi^2=\varphi$, 故 $\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^2(\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\beta})=\psi(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $\varphi\psi=\psi$. 同理可证 $\psi\varphi=\varphi$.

(2) 设 $\varphi\psi=\varphi,\psi\varphi=\psi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 有 $\psi(\boldsymbol{\alpha})=\psi\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\psi$, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\psi$. 同理可证 $\mathrm{Ker}\psi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$, 因此 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$.

反之, 设 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\psi(\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha}))=\psi(\boldsymbol{\alpha})-\psi^2(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}-\psi(\boldsymbol{\alpha}))=\mathbf{0}$, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $\varphi=\varphi\psi$. 同理可证 $\psi\varphi=\psi$.

□

命题 0.5

设 φ,ψ 是 n 维线性空间 V 上的幂等线性变换, 求证:
(1) $\varphi+\psi$ 是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$;
(2) $\varphi-\psi$ 是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$.

笔记 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

证明 充分性容易验证, 下面证明必要性.

(1) 若 $(\varphi+\psi)^2=\varphi+\psi$, 则 $\varphi\psi+\psi\varphi=0$, 即 $\varphi\psi=-\psi\varphi$. 将上式两边分别左乘及右乘 φ, 可得 $\varphi\psi\varphi=-\varphi\psi=-\psi\varphi$. 因此 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$.

(2) 若 $(\varphi-\psi)^2=\varphi-\psi$, 则 $\varphi\psi+\psi\varphi=2\psi$. 将上式两边分别左乘及右乘 φ, 可得 $\varphi\psi\varphi=\varphi\psi=\psi\varphi$. 因此 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$.

□

命题 0.6

设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2=\varphi_i,\ \varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j),\ \mathrm{Ker}\varphi_1\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=0.$$

求证:$V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus\mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\varphi_m$.

证明 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\varphi_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}\mathrm{Im}\varphi_j)$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi_i(\boldsymbol{\beta})$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 则 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha})=\varphi_i^2(\boldsymbol{\beta})=\varphi_i(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$. 又可设

$$\boldsymbol{\alpha}=\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\varphi_{i-1}(\boldsymbol{\alpha}_{i-1})+\varphi_{i+1}(\boldsymbol{\alpha}_{i+1})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha}_m),$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\varphi_i(\boldsymbol{\alpha})=\varphi_i(\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\varphi_{i-1}(\boldsymbol{\alpha}_{i-1})+\varphi_{i+1}(\boldsymbol{\alpha}_{i+1})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha}_m))=0.$$

因此 $\mathrm{Im}\varphi_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}\mathrm{Im}\varphi_j)=0$.

对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 以及任意的 i, 有

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}-(\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha})))=\varphi_i(\boldsymbol{\alpha})-\varphi_i^2(\boldsymbol{\alpha})=0,$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}-(\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha}))\in\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_m=0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}-(\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha}))=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\varphi_m(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $V=\mathrm{Im}\varphi_1+\cdots+\mathrm{Im}\varphi_m$. 这就证明了 V 是 $\mathrm{Im}\varphi_1,\cdots,\mathrm{Im}\varphi_m$ 的直和.

□

命题 0.7

设 $\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足:$\varphi^2=\varphi$ 且 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$. 求证:$\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$ 成立的充要条件是 $\varphi_i^2=\varphi_i,\varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j)$.

笔记 $\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi_1)+\mathrm{r}(\varphi_2)+\cdots+\mathrm{r}(\varphi_m)$ 等价于 $\dim\mathrm{Im}\varphi=\dim\mathrm{Im}\varphi_1+\dim\mathrm{Im}\varphi_2+\cdots+\dim\mathrm{Im}\varphi_m$.

证明 证法一 (几何方法): 令 $V_0=\mathrm{Im}\varphi,V_i=\mathrm{Im}\varphi_i$, 则由 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$ 可得 $V_0\subseteq V_1+V_2+\cdots+V_m$.

先证充分性. 由 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0\ (i \neq j)$ 可得 $\varphi_i = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i = \varphi\varphi_i$, 故 $V_i \subseteq V_0$, 从而 $V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m$. 要证上述和为直和, 只要证明零向量表示唯一即可. 设

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_i = \varphi_i(\boldsymbol{v}_i) \in V_i (1 \leqslant i \leqslant m),$$

则 $\mathbf{0} = \varphi_i(\varphi_1(\boldsymbol{v}_1)) + \varphi_i(\varphi_2(\boldsymbol{v}_2)) + \cdots + \varphi_i(\varphi_m(\boldsymbol{v}_m)) = \varphi_i^2(\boldsymbol{v}_i) = \varphi_i(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i$. 因此 $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$. 两边同取维数即得 $\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(\varphi_1) + \mathrm{r}(\varphi_2) + \cdots + \mathrm{r}(\varphi_m)$.

再证必要性. 由于 $V_0 \subseteq V_1 + V_2 + \cdots + V_m$, 于是

$$\dim V_0 \leqslant \dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_m) \leqslant \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m,$$

故由 $\mathrm{r}(\varphi) = \mathrm{r}(\varphi_1) + \mathrm{r}(\varphi_2) + \cdots + \mathrm{r}(\varphi_m)$ 可得 $\dim V_0 = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m$, 从而上式中的不等号只能取等号. 由命题**??**及直和的充要条件可知,$V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ 是直和, 并且

$$V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

因为 $\mathrm{Im}\varphi_i = V_i \subseteq V_0 = \mathrm{Im}\varphi$, 故对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi(\boldsymbol{\beta})$, 从而

$$\begin{aligned}\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^2(\boldsymbol{\beta}) &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi(\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \varphi_1\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi_2\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) + \cdots + \varphi_m\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

由直和表示的唯一性可知

$$\varphi_i^2(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}), \varphi_j\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0\ (j \neq i),$$

于是 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0\ (i \neq j)$.

证法二 (代数方法):把问题转换成代数的语言: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 是 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_m$, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)$ 成立的充要条件是 $\boldsymbol{A}_i^2 = \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{O}\ (i \neq j)$.

先证充分性. 若 $\boldsymbol{A}_i^2 = \boldsymbol{A}_i$, 则由命题**??**可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_i) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_i)$, 从而

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_m) \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m).\end{aligned}$$

再证必要性. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵, 故由命题**??**可得 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 从而 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)$. 构造如下分块对角矩阵并对其实施分块初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} & & & & \\ & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & & & & \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ \boldsymbol{A}_2 & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_m & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & & \\ \boldsymbol{A}_2 & & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_m & & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1^2 & -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 & \cdots & -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2^2 & \cdots & -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_m - \boldsymbol{A}_m^2 \end{pmatrix}.$$

由 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_m)$ 可得最后一个矩阵的右下角部分必为零矩阵, 从而 $\boldsymbol{A}_i^2 = \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{O}\ (i \neq j)$.

□

推论 0.2

若取 $\boldsymbol{I}_V$ 为 n 维线性空间 V 上的恒等变换, 并且此时线性变换 φ_i 满足 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m=\boldsymbol{I}_n$. 如果下列条件之一成立:

(1) $\dim V=\dim \mathrm{Im}\varphi_1+\dim \mathrm{Im}\varphi_2+\cdots+\dim \mathrm{Im}\varphi_m$;

(2) $\varphi_i^2=\varphi_i, \varphi_i\varphi_j=0\ (i\neq j)$,

则 $V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus \mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus \mathrm{Im}\varphi_m$, 并且 φ_i 就是 V 到 $\mathrm{Im}\varphi_i$ 上的投影变换.

证明 由命题**??**可知条件 (1)(2) 等价, 并且由命题**??**证法一的必要性证明过程可直接由条件 (1) 推出 $V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus \mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus \mathrm{Im}\varphi_m$(直和的证明也可由条件 (2) 及投影变换的性质直接得到). 又因为幂等变换和投影变换等价, 故由条件 (2) 可直接得到 φ_i 就是 V 到 $\mathrm{Im}\varphi_i$ 上的投影变换. 因此结论得证.

□