

0.1 其他

例题 0.1 (1) 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = \max\{i, j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

(2) 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = |i - j|$, 试求 $|A|$ 的值.

解 (1) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

依次将第 i 行乘以 -1 加到第 $i-1$ 行上去 ($i=2, \dots, n$), 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}n$. 此即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n.$$

(2) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$


从最后一列起每一列减去前一列, 再将得到的行列式的最后一行加到前面的每一行上去, 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. 此即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n+2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

□

例题 0.2 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的“爪”型行列式.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x-x^2 & x^2-2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x-x^2 & 0 & \cdots & x^2-2a_nx \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{"爪"型行列式}} (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_i x) - \sum_{i=2}^n a_i^2 (2a_1 x - x^2) (x^2 - 2a_2 x) \cdots \widehat{(x^2 - 2a_i x)} \cdots (x^2 - 2a_n x) \\
&= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_i x) + \sum_{i=2}^n a_i^2 (x^2 - 2a_1 x) (x^2 - 2a_2 x) \cdots \widehat{(x^2 - 2a_i x)} \cdots (x^2 - 2a_n x) \\
&= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_i x) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1 x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1} x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1} x) \cdots (x^2 - 2a_n x) \\
&= [(x^2 - 2a_1 x) + a_1^2] \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_i x) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1 x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1} x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1} x) \cdots (x^2 - 2a_n x) \\
&= \prod_{i=1}^n (x^2 - 2a_i x) + \sum_{i=1}^n (x^2 - 2a_1 x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1} x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1} x) \cdots (x^2 - 2a_n x).
\end{aligned}$$

□

例题 0.3 求下列行列式式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-i=1,2]{-j_1+j_i} \begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & c^2 & 0 \\ a^2 - (b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2 - (b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2 - b^2 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \xrightarrow[-i=1,2]{-r_i+r_2} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix} \\
&= 2abc(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

解法二 (求根法):

□

例题 0.4 证明: 若一个 $n(n > 1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数.

□

例题 0.5 n 阶行列式 $|A|$ 的值为 c , 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|A|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|B|$ 的值.

解 利用大拆分法, 直接按列拆分成 2^n 项, 并且只有 2 项不为 0, 其他项都有两列相同从而为 0. 即

$$\begin{aligned}
|B| &= |\alpha_1 + \alpha_n, \alpha_2 + \alpha_1, \cdots, \alpha_n + \alpha_{n-1}| = |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}| \\
&= c + (-1)^{n-1} |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| = c + (-1)^{n-1} c = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数} \\ 2c, n \text{ 为奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

例题 0.6 令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)}{(a_2 a_3 \cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n \leq k-1, k \in \mathbb{N}$ 都成立. 则当 $n=k$ 时, 将行列式 $(a_1 a_2, \cdots, a_k)$ 按第一列展开得

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \cdots a_k) &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & \\ -1 & a_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & & \\ -1 & a_4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} \\ &= a_1 (a_2 a_3 \cdots a_k) + (a_3 a_4 \cdots a_k). \end{aligned}$$

从而

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3 a_4 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立. □


例题 0.7 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = \max\{i, j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-r_i + r_{i-1}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

□

例题 0.8 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = |i - j|$, 试求 $|A|$ 的值.

 **笔记** 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解


$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-j_{i-1} + j_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_{i=n-1,n-2,\dots,1}]{r_n+r_i} \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)^{n-2}(n-1).$$

□

例题 0.9 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 当行列式的行或列有一定的规律性时,但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整.此时我们可以尝试**升阶法**补全这个行列式行或列的规律,再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式,而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式.后续求解很繁琐,因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \\ 1 & y-a & y(y-a) & y^2(y-a) & \cdots & y^{n-1}(y-a) \end{vmatrix}$, 则

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (y-x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i).$$

由上式可知, $|B|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|B|$ 按最后一行展开得到

$$|B| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} B_{n+1,i} y^{i-1}, \text{ 其中 } B_{ni} \text{ 是 } |B| \text{ 的第 } (n+1, i) \text{ 元的余子式, } i=1, 2, \dots, n+1.$$

从而

$$|B| = (-1)^{n+2} B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} B_{n+1,i} y^{i-2} (y-a) = \prod_{k=1}^n (y-x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i). \quad (1)$$

又易知 $B_{n+1,2} = |A|$, 而当 $a=0$ 时, 由等式(??)可知, $|B|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(??)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3} |A| = (-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i) \left(\sum_{i=1}^n (-x_1) \cdots (-x_{i-1}) (-x_{i+1}) \cdots (-x_n) \right).$$

$$\text{于是 } |A| = (-1)^{n+3} (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i) \left(\sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right).$$

当 $a \neq 0$ 时, 由等式(??)可知, $|B|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(??)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2} B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j-x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k). \quad (2)$$

又因为

$$\begin{aligned}
 B_{n+1,1} &= \begin{vmatrix} x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

所以再结合等式(??)可得


$$\begin{aligned}
 -a(-1)^{n+3}|A| &= -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k) - (-1)^{n+2}B_{n+1,1} \\
 &= (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left[\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right].
 \end{aligned}$$

$$\text{故此时 } |A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right).$$

□

例题 0.10 求下列行列式的值 (n 为偶数)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 应用行列式函数求导求行列式的值.

$$\text{解 令 } G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}, \text{ 则 } I = \frac{G(n)}{n} \text{ 且 } G(0) = 0. \text{ 利用行列式求导公式, 可得}$$

$$G'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = n!x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \prod_{k=0}^n (x - k).$$

因此

$$I = \frac{G(n)}{n} = \frac{\int_0^n G'(x) dx}{n} = (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x - k) dx$$

$$\begin{aligned}
& \text{区间再现} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (n-k-x) dx \\
&= (-1)^{n+1} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k) dx \\
&= (-1)^{n+1} I.
\end{aligned}$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1} = -1$. 于是 $I = -I$. 故 $I = 0$.

□

例题 0.11 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解 由行列式的性质

$$\text{方程左边} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}.$$

这是一 Vandermonde(范德蒙德)行列式, 它为关于 x 的次数 ≤ 3 的多项式. 所以上述方程最多有 3 个不同的根. 由行列式性质直接观察可知 $x = 1, 3, 4$ 是方程的根. 故方程的根为 $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$.

□

例题 0.12 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \sin(\alpha_1 - \beta_1) & \sin(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_1 - \beta_n) \\ \sin(\alpha_2 - \beta_1) & \sin(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\alpha_n - \beta_1) & \sin(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}.$$

解 $D_1 = \sin(\alpha_1 - \beta_1)$. 当 $n \geq 2$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cdots & \cos \beta_n \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & \cdots & -\sin \beta_n \end{pmatrix} \end{vmatrix}.$$

所以当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 \end{vmatrix} \\
&= (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)(-\sin \beta_2 \cos \beta_1 + \cos \beta_2 \sin \beta_1) \\
&= \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \beta_2).
\end{aligned}$$

当 $n \geq 3$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $D_n = 0$. 也即

$$D_n = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cdots & \cos \beta_n \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & \cdots & -\sin \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cdots & \cos \beta_n \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & \cdots & -\sin \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

□

例题 0.13 计算 $D =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} + \frac{x}{a_1^2} & a_2^{n-1} + \frac{x}{a_2^2} & \cdots & a_n^{n-1} + \frac{x}{a_n^2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 2.$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \frac{x}{a_1^2} & \frac{x}{a_2^2} & \cdots & \frac{x}{a_n^2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) + \frac{x}{a_1^2} A_{n1} + \frac{x}{a_2^2} A_{n2} + \cdots + \frac{x}{a_n^2} A_{nn},$$

其中

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j),$$

$$A_{nt} = (-1)^{n+t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{t-1} & a_{t+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{t-1}^{n-2} & a_{t+1}^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+t} \prod_{\substack{1 \leq j < i \leq n, \\ i \neq t, j \neq t}} (a_i - a_j),$$

$$A_{nn} = (-1)^{n+n} \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j),$$

所以

$$D = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) + \sum_{t=1}^n (-1)^{n+t} \frac{x}{a_t^2} \prod_{\substack{j < i \\ i, j \in [n] \setminus \{t\}}} (a_i - a_j),$$

其中 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

□