0.1 全纯函数的 Taylor 展开

定理 0.1

若 $f \in H(B(z_0, R))$, 则 f 可以在 $B(z_0, R)$ 中展开成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R). \tag{1}$$

右端的级数称为 f 的 **Taylor 级数**, 并且 f 的 Taylor 级数展开式是唯一的.

证明 任意取定 $z \in B(z_0, R)$, 再取 $\rho < R$, 使得 $|z - z_0| < \rho$(见图 1). 记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho\}$, 根据 Cauchy 积分公式, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

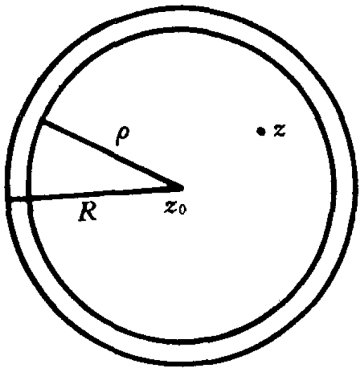

图 1

把 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 展开成级数, 为

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

最后一个等式成立是因为 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho} < 1$ 的缘故. 现在可得

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{2}$$

因为 f 在 γ_ρ 上连续, 记 $M = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_\rho\}$, 于是当 $\zeta \in \gamma_\rho$ 时, 有

$$\left|\frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M}{\rho}\left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n.$$

右端是一收敛级数, 故由 Weierstrass 判别法, 级数(2) 在 γ_ρ 上一致收敛, 故由定理**??**可知, 级数(2)可逐项积分. 又因为 $f \in \overline{H(B(z_0, \rho))}$, 所以再由定理**??**可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

由于 z 是 $B(z_0, R)$ 中的任意点, 所以上式在 $B(z_0, R)$ 中成立.

f 的展开式(1)是唯一的. 因为若有展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

那么由定理??可知

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

在上式中令 $z = z_0$, 即得 $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, 或者 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, 所以

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

这就是展开式 (1).

□

推论 0.1

(1) 若 f 在点 z_0 处全纯, 则 f 在 z_0 的邻域内可展开成 Taylor 级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, R).$$

(2) 若 f 在 z_0 的邻域内可展开成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, R).$$

则 f 在点 z_0 处全纯且 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

♡

证明 由定理 0.1和定理??立得.

□

定义 0.1

设 f 在 z_0 点全纯且不恒为零, 如果

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

则称 z_0 是 f 的 ***m* 阶零点**.

♣

命题 0.1

z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以表示为

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z), \tag{3}$$

这里,g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0) \neq 0$.

♠

证明 如果 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则从 f 的 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m \left\{ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \cdots \right\} \\ &= (z-z_0)^m g(z). \end{aligned}$$

这里,$g(z)$ 就是花括弧中的幂级数, 它当然在 z_0 处全纯, 而且

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

反之, 如果 (3) 式成立,f 当然在 z_0 处全纯, 通过直接计算即知 z_0 是 f 的 m 阶零点.

□

命题 0.2

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 试问: 下列函数在 z_0 处具有何种性质?

(1) $f(z)+g(z)$;

(2) $f(z)\cdot g(z)$;

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

证明 因为 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 所以由推论 0.1知

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots, \tag{4}$$

$$g(z)=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots, \tag{5}$$

其中 $a_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0, b_n=\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0.$

(1) 如果 $m>n$, 那么由(4)式可得

$$f(z)+g(z)=(z-z_0)^n\left[b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots+(a_m)(z-z_0)^{m-n}+\cdots\right],$$

从而 z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶零点.

如果 $n>m$, 那么同理可得 z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 m 阶零点.

如果 $m=n$, 当 $f^{(m)}(z_0)+g^{(m)}(z_0)\neq 0$ 时, 由(4)式可得

$$f(z)+g(z)=(z-z_0)^m\left[(a_m+b_m)+(a_{m+1}+b_{m+1})(z-z_0)+\cdots\right],$$

从而此时 z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 m 阶零点; 当 $f^{(m)}(z_0)+g^{(m)}(z_0)=0$ 时, 此时零点 z_0 的阶数大于 m.

(2) 由(4)式可得

$$f(z)\cdot g(z)=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+(a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n)(z-z_0)^{m+n+1}+\cdots,$$

故 z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

(3) 由(4)式可得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)}{(z-z_0)^n(b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}.$$

当 $m>n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点.

当 $m<n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

当 $m=n$ 时,z_0 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

□

命题 0.3

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,$f\in H(D)$, 如果 f 在 D 中的小圆盘 $B(z_0,\varepsilon)$ 上恒等于零, 那么 f 在 D 上恒等于零.

证明 在 D 中任取一点 a, 我们证明 $f(a)=0$. 用 D 中的曲线 γ 连接 z_0 和 a, 由定理**??**,$\rho=d(\gamma,\partial D)>0$. 在 γ 上依次取点 $z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=a$, 使得 $z_1\in B(z_0,\varepsilon)$, 其他各点之间的距离都小于 ρ, 作圆盘 $B(z_j,\rho),j=1,\cdots,n$(图 2). 由于 f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中恒为零, 所以 $f^{(n)}(z_1)=0,n=0,1,\cdots$. 于是,$f$ 在 $B(z_1,\rho)$ 中的 Taylor 展开式的系数全为零, 所以 f 在 $B(z_1,\rho)$ 中恒为零. 由于 $z_2\in B(z_1,\rho)$, 所以 $f^{(n)}(z_2)=0,n=0,1,\cdots$, 用同样的方法推理,$f$ 在 $B(z_2,\rho)$ 中恒为零. 再往下推, 即知 f 在 $B(a,\rho)$ 中恒为零, 所以 $f(a)=0$.

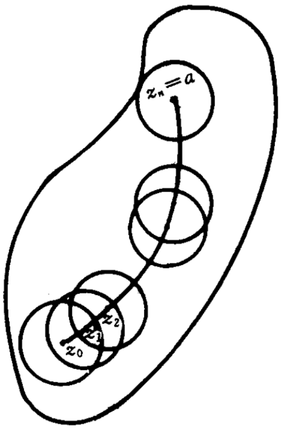

图 2

□

命题 0.4

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,$f \in H(D)$,$f(z) \not\equiv 0$, 那么 f 在 D 中的零点是孤立的. 即若 z_0 为 f 的零点, 则必存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$, 使得 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点.

证明 由命题 0.3 知,f 在 z_0 的邻域中不能恒等于零, 故不妨设 z_0 为 f 的 m 阶零点. 由命题 0.1知,f 在 z_0 的邻域中可表示为 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, 因 g 在 z_0 处连续, 且 $g(z_0) \neq 0$, 故存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$, 使得 g 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中处处不为零, 因而 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再有其他的零点.

□

定理 0.2 (唯一性定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,$f_1, f_2 \in H(D)$. 如果存在 D 中的点列 $\{z_n\}$, 使得 $f_1(z_n) = f_2(z_n)$,$n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in D$, 那么在 D 中有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

注 这个定理说明, 全纯函数由极限在域中的一列点上的值所完全确定, 这是一个非常深刻的结果.

注 必须注意, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,$a \in D$ 这个条件是不能去掉的, 否则结果不成立. 例如,$f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$ 在单位圆盘中全纯, 令 $z_n = 1 - \dfrac{1}{n\pi}$, 则 $f(z_n) = 0$,$n = 1, 2, \cdots$, 但 $f(z) \not\equiv 0$, 原因是 $z_n \to 1$, 而 1 不在单位圆盘中.

证明 令 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 则 $g(z_n) = 0$,$n = 1, 2, \cdots$. 由于 $g \in H(D)$, 所以 $g(a) = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = 0$, 即 a 是 g 的一个零点. 由于 $\{z_n\}$ 也是 g 的零点, 而且 $z_n \to a$, 因而零点 a 不是孤立的. 由命题 0.3, 得 $g(z) \equiv 0$, 即 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

□

命题 0.5 (常用的初等函数的 Taylor 展开式)

(1) $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

(2) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

(3) $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

(4) $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$

(5) $e^{\alpha \log(1+z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, |z| < 1.$

证明

(1) 指数函数 $f(z)=e^z$, 它是一个整函数, 所以可以在圆盘 $B(0,R)$ 中展开成幂级数, 其中,R 是任意正数. 由于 $f^{(n)}(z)=e^z$,$f^{(n)}(0)=1$, 所以

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{6}$$

公式(6) 也可以由全纯函数的唯一性定理得到. 由直接计算知道, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径 $R=\infty$, 所以 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 是一个整函数. 已知 e^z 是一个整函数, 这两个整函数在实轴上相等, 即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R},$$

故由唯一性定理知道这两个整函数在 $\mathbb{C}$ 上处处相等, 这就是公式 (6).

(2) 由 (1) 同理可得.

(3) 由 (1) 同理可得.

(4) 由例题**??**我们已经得到

$$-\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1,$$

在上式中用 $-z$ 代替 z, 立刻可得

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1.$$

(5) 函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$,α 不是整数, 我们考虑它的主支 $f(z)=e^{\alpha\log(1+z)}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式. 这个分支在 $z=0$ 处的值为 1, 它的各阶导数在 $z=0$ 处的值为

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\quad n=1,2,\cdots.$$

如果记

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\binom{\alpha}{0}=1,$$

那么

$$e^{\alpha\log(1+z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n,\quad |z|<1.$$

也可通过直接计算得到右端级数的收敛半径为 1. 上式对整数 α 当然也成立, 特别当 α 为正整数时, 右端为一多项式.

□