Abstract Algebra

空

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 群论 I——Group Theory I

1.1 幺半群

定义 1.1 (代数运算/二元运算定义)

设 A 是一个非空集合, 若对 A 中任意两个元素 a, b, 通过某个法则 "$\cdot$", 有 A 中唯一确定的元素 c 与之对应, 则称法则 "$\cdot$" 为集合 A 上的一个**代数运算 (algebraic operation) 或二元运算**. 元素 c 是 a, b 通过运算 "$\cdot$" 作用的结果, 将此结果记为 $a \cdot b = c$.

定义 1.2 ((交换) 半群定义)

非空集合 S 和 S 上满足结合律的二元运算 $\cdot$ 所形成的代数结构叫做**半群**. 这个半群记成 $(S, \cdot)$ 或者简记成 S, 运算 $x \cdot y$ 也常常简写成 xy. 此外, 如果半群 $(S, \cdot)$ 中的运算 "$\cdot$" 又满足交换律, 则 $(S, \cdot)$ 叫做**交换半群**.

注 像通常那样令 $x^2 = x \cdot x, x^{n+1} = x^n \cdot x (= x \cdot x^n, n \geq 1)$.

定义 1.3 (幺元素定义)

设 S 是半群, 元素 $e \in S$ 叫做半群 S 的**幺元素 (也叫单位元 (unit element) 或恒等元 (identity))**, 是指对每个 $x \in S, xe = ex = x$.

笔记 **如果半群 S 中有幺元素, 则幺元素一定唯一.** 因若 e' 也是幺元素, 则 $e' = e'e = e$. 我们将半群 S 中这个唯一的幺元素 (如果存在的话) 通常记作 $\mathbf{1}_S$ **或者 1**.

定义 1.4 ((交换) 含幺半群定义)

如果半群 $(S, \cdot)$ 含有幺元素, 则 $(S, \cdot)$ 叫做**含幺半群**. 此外, 如果幺半群 $(S, \cdot)$ 中的运算 "$\cdot$" 又满足交换律, 则 $(S, \cdot)$ 叫做**交换幺半群**.

定义 1.5

设 $(S, \cdot)$ 是含幺半群. 元素 $y \in S$ 叫做元素 $x \in S$ 的**逆元素**, 是指 $xy = yx = 1$.

笔记 **如果 x 有逆元素, 则它一定唯一.** 因为若 y' 也是 x 的逆元素, 则 $xy' = y'x = 1$. 于是 $y = y \cdot 1 = y(xy') = (yx)y' = 1 \cdot y' = y'$. 所以, 若 x 具有逆元素, 我们把这个唯一的逆元素记作 $\boldsymbol{x^{-1}}$, 则 $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

定义 1.6

如果含幺半群 $(G, \cdot)$ 的每个元素均可逆, 则 $(G, \cdot)$ 叫做**群**. 此外, 如果群 $(G, \cdot)$ 中的运算 "$\cdot$" 又满足交换律, 则 G 叫做**交换群**或叫**阿贝尔 (Abel) 群**.

笔记 容易验证 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是 (加法) 交换幺半群, 其中单位元是零矩阵.

例题 1.1 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ 是一个含幺 (乘法) 半群.

证明 $\forall A, B, C \in (M_n(\mathbb{R}), \cdot)$, 则不妨设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}, C = (c_{ij})_{n \times n}$. 再设 $A \cdot B = (d_{ij})_{n \times n}, B \cdot C = (e_{ij})_{n \times n}, (A \cdot B) \cdot C = (f_{ij})_{n \times n}, A \cdot (B \cdot C) = (g_{ij})_{n \times n}$. 于是

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}, e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kl}.$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

从而

$$f_{ij}=\sum_{l=1}^{n}d_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)\cdot c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot\left(\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}.$$

由二重求和号的可交换性, 可知 $f_{ij}=g_{ij},\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 故 $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

记 $I_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$, 于是 $\forall X\in M_n(\mathbb{R})$, 则不妨设 $X=(x_{ij})_{n\times n},I_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$. 其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, 当 i=j 时,\\0, 当 i\neq j 时\end{cases}$. 再设 $I_n\cdot X=(x'_{ij})_{n\times n},X\cdot I_n=(x''_{ij})_{n\times n}$, 于是由矩阵乘法的定义可知

$$x'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\delta_{kj}=x_{ij}\delta_{jj}=x_{ij}.$$

$$x''_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}x_{kj}=\delta_{ii}x_{ij}=x_{ij}.$$

故 $x'_{ij}=x''_{ij}=x_{ij},\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 从而 $X=I_n\cdot X=X\cdot I_n$. 因此 I_n 是 $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 的单位元. 综上所述,$(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ 是一个含幺 (乘法) 半群.

定义 1.7

♣

第二章 环