

## 0.1 有限单群

### 定义 0.1 (有限单群)

若有限群  $G$  无非平凡的正规子群, 则称  $G$  为**有限单群**.

### 定理 0.1

设  $G$  为 Abel 群且  $G \neq \{e\}$ ,  $e$  为  $G$  的幺元, 则  $G$  为单群的充分必要条件是  $G$  的阶为素数. 这时  $G$  必为循环群.



**证明** 由命题???? Abel 群  $G$  的任何子群都是  $G$  的正规子群, 故 Abel 群  $G$  为单群当且仅当  $G$  无非平凡子群.

若  $G$  是有限阶的, 当  $G$  的阶为素数时, 由推论????知  $G$  只有平凡子群. 当  $G$  无非平凡子群时, 若  $G$  的阶不是素数, 又  $G \neq \{e\}$ , 故  $|G|$  是不为 1 的合数. 由因式分解定理知存在素数  $p$  以及正整数  $m, l$ , 使  $|G| = p^l m$  且  $(p, m) = 1$ . 从而  $m, l$  不同时为 1, 否则与  $|G|$  不为素数矛盾! 故  $|G| > p$ . 由 Sylow 第一定理知  $G$  中一定有  $p$  阶子群  $H$ , 而  $1 < p < |G|$ , 故  $H$  必是  $G$  的非平凡子群, 矛盾! 因此  $G$  无非平凡子群当且仅当  $G$  的阶为素数. 此时, 由命题??知  $\forall a \in G$  且  $a \neq e$  有  $G = \langle a \rangle$ .

若  $G$  是无限阶的, 则  $\langle a \rangle \triangleleft G (\forall a \in G, a \neq e)$ . 若  $\langle a \rangle$  是有限阶的, 则  $\langle a \rangle$  是非平凡的. 若  $\langle a \rangle$  是无限阶的, 则  $\langle a^2 \rangle$  是非平凡的, 因为  $a, -a \notin \langle a^2 \rangle$ . 即任何无限阶的 Abel 群都有非平凡的正规子群. 故此时  $G$  必不是单群.



### 定理 0.2

- (1) 当  $n \geq 3$  时,  $A_n$  由所有的 3 轮换生成, 即  $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$ ;
- (2) 当  $n \geq 5$  时, 任意 3 轮换  $(ijk)$  在  $A_n$  中的共轭类由所有的 3 轮换构成, 即  $C_{(ijk)} = \{(i'j'k')\}$ .



**证明**

(1) 由推论??知  $a \in A_n$  当且仅当  $a$  可表示为偶数个对换之积. 由推论??知

$$\langle \{(ijk)\} \rangle = \{(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \mid i_s, j_s, k_s \in \{1, 2, \dots, n\}, 1 \leq s \leq m, m \in \mathbb{N}\}.$$

设  $i, j, k, l$  且互不相等. 由

$$\begin{aligned} (ij)(ij) &= \text{id}, \quad (ij)(ik) = (ikj), \\ (ik)(jl) &= (ik)(ij)(ij)(jl) = (ijk)(jli) \end{aligned}$$

知  $A_n$  中元素都可写成 3 轮换之积, 因此  $A_n \subseteq \langle \{(ijk)\} \rangle$ .

设  $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in \langle \{(ijk)\} \rangle$ , 则由命题????知

$$(i_s j_s k_s) = (i_s k_s) (i_s j_s), \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

故  $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m)$  可写成偶数个对换之积, 故  $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in A_n$ . 因此  $\langle \{(ijk)\} \rangle \subseteq A_n$ . 故  $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$ .

(2)  $\forall \sigma \in S_n$ , 由命题????知

$$\sigma(ijk)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)). \tag{1}$$

于是  $C_{(ijk)} \subseteq \{(i'j'k')\}$ . 反之, 对任意 3 轮换  $(i'j'k')$ , 当  $n \geq 5$  时, 首先  $\exists \sigma \in S_n$ , 使  $\sigma(i) = i'$ ,  $\sigma(j) = j'$ ,  $\sigma(k) = k'$ . 若  $\sigma \in A_n$ , 则由(1)式可得

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = \sigma(ijk)\sigma^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

若  $\sigma \notin A_n$ , 由  $n \geq 5$  有  $i_1, i_2 \notin \{i, j, k\}$ . 故由推论??知  $\sigma(i_1 i_2) \in A_n$ . 再由命题????知

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = ((\sigma(i_1 i_2)(i))(\sigma(i_1 i_2)(j))(\sigma(i_1 i_2)(k))) = \sigma(i_1 i_2)(ijk)(\sigma(i_1 i_2))^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

即仍有  $(i'j'k') \in C_{(ijk)}$ . 综上知  $C_{(ijk)} = \{(i'j'k')\}$ .

□

**定理 0.3**

当  $n \geq 5$  时,  $A_n$  是非 Abel 有限单群.



**证明** 对  $\alpha \in S_n$ , 令  $\bar{F}_\alpha = \{j \mid \alpha(j) \neq j\}$ . 显然有

- (1)  $\bar{F}_\alpha = \{i, j\}$  当且仅当  $\alpha = (ij)$ ;
- (2)  $\bar{F}_\alpha = \{i, j, k\}$  当且仅当  $\alpha = (ijk)$  或  $(ijk)^{-1}$ ;
- (3) 对  $\forall \alpha \in A_n$  且  $\alpha \neq \text{id}$ , 又由推论??知  $\alpha$  可写成偶数个对换之积, 从而一定有  $|\bar{F}_\alpha| \geq 3$ .

设  $H \triangleleft A_n$  且  $H \neq \{\text{id}\}$ . 取  $\tau \in H$ , 使

$$|\bar{F}_\tau| = \min\{|\bar{F}_\alpha| \mid \alpha \in H, \alpha \neq \text{id}\}. \quad (2)$$

显然  $|\bar{F}_\tau| \geq 3$ . 若  $|\bar{F}_\tau| = 3$ , 则  $\tau$  是 3 轮换. 显然  $\tau \in H$ , 由正规子群定义和定理????知

$$\alpha\tau\alpha^{-1} \in H, \forall \alpha \in A_n \implies C_\tau = \{\alpha\tau\alpha^{-1} \mid \alpha \in A_n\} \subseteq H.$$

再由定理 0.2 知

$$A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle = C_\tau \subseteq H,$$

故  $H = A_n$ . 这就证明了  $A_n$  为有限单群,  $A_n$  的阶不是素数, 由定理 0.1 知  $A_n$  不是 Abel 群.

若  $|\bar{F}_\tau| > 3$ . 由定理????, 可将  $\tau$  分解为不相交轮换之积, 分两种情况讨论. 一种在分解中只出现对换, 另一种在分解中有长度大于 2 的轮换.

1. 若  $\tau$  可分解为互不相交的对换之积, 又由最开始得到的情况(1)知  $\tau$  不可能是对换, 故可设  $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots$  且  $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots$  互不相同. 由  $n \geq 5$  有  $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$ , 令  $\phi = (i_3i_4j)$ , 则由推论??知  $\phi \in A_n$ . 由  $H \triangleleft A_n$  有  $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$ . 于是由命题????可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(i_4)\tau^{-1}(j))(i_4i_3j) = (i_4i_3\tau^{-1}(j))(i_4i_3j).$$

若  $j \notin \bar{F}_\tau$ , 即  $\tau(j) = \tau^{-1}(j) = j$ . 则有

$$\tau_1 = (i_4i_3j)(i_4i_3j) = (i_3i_4j),$$

这时  $|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j\}| = 3 < |\bar{F}_\tau|$ , 这与(2)式中  $|\bar{F}_\tau|$  的最小值定义矛盾!

若  $j \in \bar{F}_\tau$ , 则  $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots(j\tau^{-1}(j))\cdots$  且  $i_1, i_2, i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)$  互不相同. 由  $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$  知  $|\bar{F}_\tau| \geq 5$ , 又  $\tau$  可写成对换之积, 故  $|\bar{F}_\tau|$  必为偶数, 因此  $|\bar{F}_\tau| \geq 6$ . 此时由命题????可得

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (i_4i_3\tau^{-1}(j))(i_4i_3j) = (i_3j)(i_4\tau^{-1}(j)) \\ &= (i_4\tau^{-1}(j))(i_4i_3)(i_4j)(i_4i_3) \\ &= (i_4\tau^{-1}(j))((i_4i_3)(i_4i_3)^{-1}) \\ &= (i_4\tau^{-1}(j))(((i_4i_3)(i_4))((i_4i_3)(j))) \\ &= (i_4\tau^{-1}(j))(i_3j). \end{aligned}$$

于是

$$|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)\}| = 4 < |\bar{F}_\tau|.$$

这也(2)式中  $|\bar{F}_\tau|$  的最小值定义矛盾! 因而  $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots$  是不可能的.

2. 设  $\tau$  的分解中有长度大于 2 的轮换, 即

$$\tau = (i_1i_2i_3\cdots)\cdots.$$

因为  $(i_1i_2i_3i_4)$  为奇置换, 故  $\tau \neq (i_1i_2i_3i_4)$ , 由此知  $|\bar{F}_\tau| > 4$ , 即  $|\bar{F}_\tau| \geq 5$ . 因而有  $j, k \in \bar{F}_\tau$ . 令  $\phi = (i_3j k)$ ,  $\tau_1 = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}$ , 由  $H \triangleleft A_n$  有  $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$ . 于是由命题????可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(ji_3k) = (i_2\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(ji_3k).$$

由  $j, k \in \bar{F}_\tau$  知

$$\bar{F}_{\tau_1} = \{i_2, i_3, j, k, \tau^{-1}(j), \tau^{-1}(k)\} \subseteq \bar{F}_\tau.$$

注意到

$$\tau_1(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau(i_1) = \tau^{-1}\phi(i_2) = \tau^{-1}(i_2) = i_1,$$

即  $i_1 \notin \bar{F}_{\tau_1}$ , 则有  $\bar{F}_{\tau_1} \subset \bar{F}_\tau$ , 亦即  $|\bar{F}_{\tau_1}| < |\bar{F}_\tau|$ . 这也(2)式中  $|\bar{F}_\tau|$  的最小值定义矛盾! 故  $|\bar{F}_\tau| = 3$ . 因而  $H = A_n$ , 即  $A_n$  为单群.

□

### 命题 0.1

对于  $n \leq 4, A_n$  的结构为

- (1)  $A_1 = A_2 = \{\text{id}\}$ ;
- (2)  $A_3 = \langle (123) \rangle$  为三阶循环群;
- (3)  $A_4$  的阶为 12,  $A_4$  含有一个非平凡的正规子群

$$\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

此群与 Klein 四元数群同构, 也记为  $K_4$ , 而且  $K_4$  也是  $S_4$  的正规子群.

◆

证明

□