0.1 反常积分敛散性判别

定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $A>a$ 使得任意 $x_1,x_2>A$ 都有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$.

定理 0.2 (A-D 判别法)

设 $f(x),g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积,

1. Abel 判别法: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. Dirichlet 判别法: 若 $\int_a^{x} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 并且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 0.1 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中非负且递减, 证明: $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散性.

证明 (i) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, 则由条件可知

$$f(x)\sin^2 x\leqslant f(x),\quad \forall x\in[0,+\infty).$$

故由比较判别法可得 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x<\infty$.

(ii) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x<\infty$, 则由 f 非负递减, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\triangleq a>0$, 则存在 $M>0$, 使得

$$f(x)\sin^2 x>\frac{a}{2}\sin^2 x,\quad \forall x\in[M,+\infty).\tag{1}$$

又因为

$$\int_0^{\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(b-\frac{\sin 2b}{2}\right),$$

而上式右边极限不存在, 所以 $\int_0^{\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散. 从而结合 (1) 式, 由比较判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

注意到

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x<\infty.$$

即 $\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 考虑 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$\int_0^{C}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 2C}{2}<1,\quad \forall C>0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty$. 因此

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty.$$

(iii) 当 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散时, 实际上, $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证. □

例题 0.2 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负连续, 对任意正整数 k 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)dx\leq 1$, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\leq 1$.

注 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\left[\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由条件可得, 对 $\forall A>0$, 我们有

$$1\geqslant\int_{-A}^{A} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant e^{-\frac{1}{k}}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x.\Rightarrow\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x\leqslant e^{-\frac{1}{k}},\forall k\in\mathbb{N}.$$

令 $k\to\infty$, 则 $\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,\forall A>0$. 于是再令 $A\to+\infty$, 可得 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$.

实际上再由单调有界可知 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

例题 0.3 对实数 a, 讨论 $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 先讨论 $\int_0^1\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 注意到

$$\int_0^1\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x\,|_0^1=\tan 1<\infty,\quad\forall a\in\mathbb{R}.$$

故 $\forall a\in\mathbb{R}$, 都有 $\int_0^1\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛. 再讨论 $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 $a\leqslant 2$ 时,

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^2\sin^2 x}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)=+\infty.$$

(ii) 当 $a>2$ 时, 我们有（等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明）

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x+n\pi}{\cos^2 x+(x+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim n\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x+(n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}x,\quad n\to\infty.\tag{2}$$

注意到对 $\forall\lambda>0$, 我们都有

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x+\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x+\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\lambda\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(2)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim n\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x+(n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim n\pi\frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}}\sim\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}},\quad n\to\infty.$$

于是

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim\int_{\pi}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}},\quad n\to\infty.$$

从而当 $\frac{a}{2}-1\leqslant 1$ 时, 即 $2<a\leqslant 4$, $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $\frac{a}{2}-1>1$, 即 $a>4$ 时, $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 当 $a>4$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $a\leqslant 4$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 0.4 对正整数 n, 讨论 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}dx$ 的敛散性.

证明 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim(k\pi)^n\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,\quad k\to\infty.\tag{3}$$

又注意到

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\sim\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},\quad\lambda\to+\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\frac{4}{\pi^2}x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\sim\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}},\quad\lambda\to+\infty.$$

故 $\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}},\lambda \to +\infty$, 其中 C 为某一常数. 因此

$$\int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{(k\pi)^6},\quad k \to +\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6},\quad k \to +\infty.$$

又因为

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C_1}{k^6},k \to +\infty$, 其中 C_1 为某一常数. 于是结合(3)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim C_2 k^{n-6},\quad k \to \infty.$$

其中 C_2 为某一常数. 因此

$$\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_2 k^{n-6},\quad k \to \infty.$$

故当 $n<5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. 又因为

$$\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \pi^n,$$

所以 $\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都收敛. 从而由

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

可知当 $n<5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. □

引理 0.1

(1) $\cos^{2n+1} x$ 可以写成 $\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x$ 的线性组合, 即 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$, 也即 $\cos^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(2k+1)x$, 其中 $a_k \in \mathbb{R}$,$k=0,1,\cdots,n$.

(2) $\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$.

证明 (1) 利用数学归纳法, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\cos^{2n+1} x = \cos^2 x \cdot \cos^{2n-1} x = \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos 2x \cos(2k+1)x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k [\cos(2k+3)x + \cos(2k-1)x] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2}a_0[\cos 3x + \cos(-x)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2}a_0[\cos 3x + \cos x].
\end{aligned}$$

故 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1+t^2)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k t^{2k}$$

令 $t=e^{\mathrm{i}x}$, 则

$$(1+e^{2\mathrm{i}x})^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}\Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2e^{-\mathrm{i}x}}\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}\Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{2n}=e^{-2\mathrm{i}nx}\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x}=\sum_{k=0}^{n-1}[\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+\mathrm{C}_{2n}^{2n-k}e^{2\mathrm{i}((2n-k)-n)x}]+\mathrm{C}_{2n}^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k(e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x})+\mathrm{C}_{2n}^n$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\left(\frac{e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x}}{2}\right)+\mathrm{C}_{2n}^n=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\cos 2(n-k)x+\mathrm{C}_{2n}^n$$

$$\Rightarrow \cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\cos 2(n-k)x+\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$$

□

例题 0.5 设 p,q 为正整数, 求反常积分 $I(p,q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}dx$ 收敛的充要条件.

证明 因为当 $p=q$ 时, 积分显然收敛, 所以只需考虑 $p\neq q$ 的情形. 由 $I(q,p)=-I(p,q)$ 可知, 可以不妨设 $p>q$, 否则用 $I(q,p)=-I(p,q)$ 代替 $I(p,q)$ 即可

先讨论 $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\leqslant\cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2,\quad\forall x\in[0,\delta].$$

于是

$$\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\delta\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_0^\delta\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2)^p-(1-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2)^q}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)$$
$$\leqslant\int_0^\delta\frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2+(p+q)\mathrm{C}_p^2x^4}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)$$
$$=\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta).$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 得 $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{q-p}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta)$. 故对 $\forall p>q$ 且 $p,q\in\mathbb{N}$, 都有 $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

再讨论 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 p,q 都是奇数时, 由引理 0.1可知

$$\cos^p x=\sum_{k=1}^p p_k\cos kx,\quad 其中 p_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,p.$$
$$\cos^q x=\sum_{k=1}^q q_k\cos kx,\quad 其中 q_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,q.$$

从而此时

$$\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^\infty\frac{\sum\limits_{k=1}^p p_k\cos kx-\sum\limits_{k=1}^q q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{q}(p_k-q_k)\int_1^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\sum_{k=q+1}^{p}p_k\int_1^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x.$$

注意到对 $\forall k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\int_1^x\cos kt\mathrm{d}t=\frac{\sin kx-\sin k}{k}<2,\quad \forall x>1.$$

并且 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知,$\int_1^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x(k\in\mathbb{N})$ 都收敛. 因此再结合(??)式可知,$\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 当 p,q 中至少有一个是偶数时, 不妨设 p 是偶数 q 不是偶数, 则由引理 0.1可知

$$\cos^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}.$$

$$\cos^q x=\sum_{k=1}^{q}q_k\cos kx\quad 其中q_k\in\mathbb{R}\quad k=1,2,\cdots,q.$$

于是

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散, 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 也发散.

综上, 由

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x.$$

可知当 $p=q$ 或 p,q 均为奇数时, $\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其余情形均发散. □

例题 0.6 对实数 $p\neq 0$, 讨论 $I=\int_0^1\frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 对 I 进行积分换元可得

$$I=\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\frac{1}{1-x}}\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(1-\left(1-\frac{1}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$
$$=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}\mathrm{d}u=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u.\tag{4}$$

(i) 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 令 $f(u)=\left[\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}\right]^p=\left(2-\frac{1}{u}\right)u^{2p-1}$, 则显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$ 且 $f(u)$ 递增. 于是 $\frac{1}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}=\frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(4)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛.

(ii) 当 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 若 $p=\frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=2$; 若 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=+\infty$. 因此对 $\forall p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 都存在 $K>0$, 使得

$$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\geqslant 1,\forall u>K.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}\cap(K,+\infty)$, 都有

$$\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u\right|\geqslant\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u\right|=1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知,$I=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u$ 发散.

(iii) 当 $p<0$ 时, 显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=0$. 令 $g(u)=\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}$, 则

$$g'(u)=\frac{2}{p}u^{-\frac{1}{p}}\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1}+\left(2-\frac{1}{p}\right)\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{1-\frac{1}{p}}>0,\forall u\in[1,+\infty).$$

因此 $g(u)$ 单调递增, 于是 $\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=\frac{1}{g(u)}$ 单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(**??**)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛. □

例题 0.7 对实数 p, 讨论反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

注 令 $u=x+\frac{1}{x}$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_u^{\infty}\frac{\sin u}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}\right)\mathrm{d}u.$$

显然 $\int_0^A\sin u\mathrm{d}u$ 关于 A 有界. 再证明 $\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}$ 单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 再同理讨论 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

证明 显然 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 有两个奇点 $x=0,+\infty$.

(1) 当 $p\leqslant 0$ 时, 考虑区间 $\left[2n\pi+\frac{\pi}{4},2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$, 则

$$x+\frac{1}{x}\in\left[2n\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}},2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当 $n>10$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)>0.\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 当 $p>0$ 时, 先考虑 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p>1$, 则

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

因此 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\in(0,1]$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\sin x\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\cos x\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

显然 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 并且 $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 令 $f(u)=u^p\cos u$, 则当 $u\in\left(0,\frac{4p}{\pi}\right)$ 时, 有

$$f'(u)=pu^{p-1}\cos u-u^p\sin u=u^{p-1}\cos u\left(p-u\tan u\right)>0.$$

于是 $f(u)$ 在 $\left(0,\frac{4p}{\pi}\right)$ 上单调递增, 从而 $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}p,+\infty\right)$ 上单调递减趋于 0. 又显然 $\int_{\frac{\pi}{4}p}^A\sin x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_{\frac{\pi}{4}p}^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 又 $\frac{\pi}{4}p<1$, 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因此再由(5)式可知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

注意到

$$\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x.$$

显然 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p\in(0,1)$, 则

$$\int_0^1\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

故此时 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\geqslant1$, 则

$$\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-p}}\mathrm{d}t.$$

此时 $2-p\leqslant1$. 于是当 $2-p\leqslant0$ 即 $p\geqslant2$ 时, 由 (1) 可知 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 当 $2-p\in(0,1]$ 即 $p\in[1,2)$ 时, 由 (i) 可知 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当 $p\leqslant0$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $p\in(0,2)$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛; 当 $p\geqslant2$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 0.8 判断广义积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x,\int_0^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 (1) 由于 $e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)$ 是周期为 2π 的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\mathrm{d}x=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\left|e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}e\mathrm{d}x=2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\mathrm{d}x+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^A e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant0+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^A\left|e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{2\pi\left(\left[\frac{A}{2\pi}\right]+1\right)}\left|e^{\cos x}\sin\left(2\sin x\right)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| e^{\cos x} \sin(2\sin x) \right| \mathrm{d}x \leqslant 2\pi e, \forall A > 2\pi.$$

又显然有 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{\infty} e^{\cos x} \sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{C}{n},$$

其中 C 为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计,C 需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2\sin x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} = \infty.$$

故 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2\sin x)\mathrm{d}x$ 发散. □