0.1 重要不等式

定理 0.1 (Cauchy 不等式)

对任何 $n\in\mathbb{N}, (a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2. \tag{1}$$

且等号成立条件为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

证明 (i) 当 b_i 全为零时,(1)式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 注意到 $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+tb_i)\right)^2\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}$. 等价于

$$t^2\sum_{i=1}^n b_i^2+2t\sum_{i=1}^n a_ib_i+\sum_{i=1}^n a_i^2\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2\leqslant 0.$

从而 $\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$. 下证(1)式等号成立的充要条件.

若(1)式等号成立, 则

(i) 当 b_i 全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 此时我们有 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2=0$. 根据一元二次方程根的存在性定理, 可知存在 $t_0\in\mathbb{R}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum_{i=1}^n b_i^2+2t_0\sum_{i=1}^n a_ib_i+\sum_{i=1}^n a_i^2=0.$$

于是 $a_i+t_0b_i=0,i=1,2,\cdots,n$. 即 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

反之, 若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lambda a_i+\mu b_i=0,i=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $\lambda\neq 0$, 则 $a_i=-\frac{\mu}{\lambda}b_i,i=1,2,\cdots,n$. 从而当 $t=\frac{\mu}{\lambda}$ 时, $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+tb_i)\right)^2=0$.

即一元二次方程 $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum_{i=1}^n b_i^2+2t_0\sum_{i=1}^n a_ib_i+\sum_{i=1}^n a_i^2=0$ 有实根 $\frac{\mu}{\lambda}$.

因此 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2=0$. 即(1)式等号成立.

□

例题 0.1 证明:

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$$

证明 对 $\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 由Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2=n^2.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$

□

例题 0.2 求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 在定义域内的最大值和最小值.

笔记 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值，然后我们通过简单的放缩就能得到 $y(0)$ 就是最小值. 再利用Cauchy 不等式我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设 $A,B,C>0$, 则由 *Cauchy* 不等式可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax+27A}+\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{13B-Bx}+\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{Cx}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)[(A+C-B)x+27A+13B]$$

并且当且仅当 $\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}$ 时, 等号成立.

令 $A+C-B=0$(因为要求解 y 的最大值, 我们需要将 y 放大成一个不含 x 的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases}\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}\\ A+C-B=0\end{cases}$$

解得:$A=1,B=3,C=2,x=9$.

从而得到我们需要构造的 Cauchy 不等式为

$$\left(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}\right)^2\leqslant\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)(x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立.

解 由题可知, 函数 y 的定义域就是:$0\leqslant x\leqslant 13$. 而

$$\begin{aligned}y(x)&=\sqrt{x+27}+\sqrt{[\sqrt{13-x}+\sqrt{x}]^2}\\&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\\&\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}=y(0)\end{aligned}$$

于是 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$. 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}y^2(x)&=(\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2\\&=(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x})^2\\&\leqslant(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x)\\&=121=y^2(9)\end{aligned}$$

即 $y(x)\leqslant y(9)=11$. 并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立. 故 y 的最大值为 11.

□

定理 0.2 (均值不等式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad r = 0 \end{cases} . \tag{2}$$

其中若 $r_1 \neq r_2$, 则 $f(r_1) = f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

笔记 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

定理 0.3 (均值不等式常用形式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

例题 0.3 设 $f(x) = 4x(x-1)^2, x \in (0,1)$, 求 f 的最大值.

解 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2 \cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2 \cdot \left[\sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)}\right]^3 \\ &\leqslant 2 \cdot \left[\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right]^3 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当 $2x = 1 - x$, 即 $x = \dfrac{1}{3}$ 时等号成立.

□

定理 0.4 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant -1$ 且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

证明 当 $n = 1$ 时, 我们有 $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$, 结论显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 结论成立. 则当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} &(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \cdots + x_kx_{k+1} \\ &\geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立.

□

定理 0.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)

设 $x \geqslant -1, n \geqslant 0$, 则

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

定理 0.6 (Jesen 不等式)

设 $\lambda_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, 则对下凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

推论 0.1

对 $\forall a, b \geqslant 0, \alpha+\beta=1$, 则

$$a^{\alpha}b^{\beta} \leqslant \alpha a + \beta b.$$

证明 利用 $\ln x$ 的上凸性和 Jesen 不等式易得.

□

定理 0.7 (Young 不等式)

对任何 $a, b \geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$ 有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.

笔记 若 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则我们称 p 与 q **共轭**.

注 这个 Young 不等式不等式和加权均值不等式等价.

证明 (i) 当 a, b 至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a, b 均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} & ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \\ \Leftrightarrow & \ln a + \ln b \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \end{aligned}$$

由Jesen 不等式和 $f(x)=\ln x$ 函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由Jesen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立.

□

定理 0.8 (Hold 不等式)

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1, a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0, b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}.$$

证明 (i) 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零时，令

$$a_k'=\frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}},b_k'=\frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}},k=1,2,\cdots,n.$$

从而只需证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k'b_k'\leqslant 1$. 由Young 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k'b_k'\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(a_k')^p}{p}+\frac{(b_k')^q}{q}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}+\frac{b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}\right)$$
$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

故原结论成立.

□

定理 0.9 (排序和不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j,1\leqslant i<j\leqslant n$ 或者 $b_i=b_j,1\leqslant i<j\leqslant n$.

笔记 简单记为倒序和 $\leqslant$ 乱序和 $\leqslant$ 同序和.

定理 0.10 (Chebeshev 不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j,1\leqslant i<j\leqslant n$ 或者 $b_i=b_j,1\leqslant i<j\leqslant n$.