

0.1 其他

定理 0.1

设 \mathbb{F} 是一个域, $m_i, a_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\gcd(m_i, m_j) \mid (a_i - a_j), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \pmod{m_i(x)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

即存在 $k_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) = k_i(x)m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \dots, n.$$



证明

□

例题 0.1 设 $A_1, A_2, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{K}), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_1), g(A_2), \dots, g(A_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1} = h(A_i)$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 都成立.

证明 **证法一:** 由命题??可知, 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 存在 $h_i \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i). \quad (1)$$

记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$. 考虑 $\gcd(n_i, n_j)(i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$, 设 $x_0 \in \mathbb{C}$ 是 $\gcd(n_i, n_j)$ 的根, 则 $(x - x_0) \mid n_i, n_j$, 即 x_0 是 A_i 和 A_j 的公共特征值. 由命题??和命题??可知, $h_i(x_0)$ 是 $h_i(A_i)$ 的特征值, $\frac{1}{g(x_0)}$ 是 $g^{-1}(A_i)$ 的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i) \implies \frac{1}{g(x_0)} = h_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

于是

$$h_i(x_0) - h_j(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0)} = 0.$$

因此 $(x - x_0) \mid (h_i - h_j)$. 故在 \mathbb{C} 上就有 $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i - h_j)$. 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在 \mathbb{K} 上也有 $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i(x) - h_j(x))$. 于是由**中国剩余定理的推广**可知, 方程

$$h(x) \equiv h_i(x) \pmod{n_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

在 \mathbb{K} 上有解. 故存在 $h \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$h(A_i) = h_i(A_i) = g^{-1}(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

证法二: 记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, 由命题??可知

$$(n_i, g) = 1, i = 1, 2, \dots, m.$$

从而 $(n_1 n_2 \cdots n_m, g) = 1$. 因此存在 $h, k \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$h(x)g(x) + n_1(x)n_2(x) \cdots n_m(x)k(x) = 1.$$

从而

$$h(A_i) = g^{-1}(A_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

□

命题 0.1

设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 $A \sim \tilde{A}$, 其中 \tilde{A} 是主对角元都为 0 的上三角阵, 则 A 是幂零矩阵.



证明 由条件可知存在可逆阵 P , 使得 $A = P^{-1}\tilde{A}P$. 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n = P^{-1}\tilde{A}^n P = O.$$

故 A 是幂零矩阵. □

例题 0.2 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足

$$AB + A = BA + B.$$

证明:

$$(A - B)^n = 0.$$

证明 注意到

$$AB - BA = B - A.$$

由命题??知 A, B 可同时相似上三角化. 不妨设 A, B 都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知 $AB - BA$ 也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知 $A - B$ 是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1 知 $A - B$ 是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A - B)^n = 0.$$

□

例题 0.3 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A) \triangleq \{P^{-1}AP : P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ 是可逆矩阵}\}.$$

证明: $S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 A 在 \mathbb{C} 上一定可对角化.

证明 设 A 的极小多项式为 m , 特征多项式为 p , 则由知 m 无重根. 设 $A_k \in S(A), k = 1, 2, \dots$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0,$$

$$|\lambda I - \tilde{A}| = \left| \lambda I - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A| = |\lambda I - A| = p(\lambda).$$

因此 \tilde{A} 的特征多项式也是 p , \tilde{A} 极小多项式整除 m , 从而 \tilde{A} 极小多项式也无重根. 因此 \tilde{A} 和 A 有相同的特征值且可对角化, 故 $\tilde{A} \in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, A 在实数域 \mathbb{R} 上相似于下列分块对角矩阵:

$$\tilde{J} = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}(a_l, b_l)\},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$ 都是实数, b_1, \dots, b_l 都非零, 且 λ_j 都是 A 的实特征值, $a_j \pm ib_j$ 都是 A 的复特征值, $J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示以 λ_i 为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j = -2a_j, d_j = a_j^2 + b_j^2, \quad R_j = \begin{pmatrix} 0 & -d_j \\ 1 & -c_j \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} R_j & C_2 & & \\ & R_j & C_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R_j & C_2 \\ & & & & R_j \end{pmatrix}.$$

对于 $J_{r_j}(\lambda_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}(\lambda_j) \sim \begin{pmatrix} \lambda_j & \frac{1}{n} & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{n} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

对于 $\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}(a_j, b_j) \sim \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & & & \\ 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & \\ & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} \\ & & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} \triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A \sim \tilde{J} \sim \text{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\} \triangleq \tilde{J}^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故 $\tilde{J}^{(n)} \in S(A)$. 因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$. 不难发现

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & \\ 1 & -c_j & & & \\ & & 0 & -d_j & \\ & & 1 & -c_j & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_j \end{pmatrix},$$

注意到 R_j 的极小多项式等于

$$x^2 + c_j x + d_j = (x - a_j)^2 + b_j^2 = (x - a_j - ib_j)(x - a_j + ib_j)$$

在复数域 \mathbb{C} 上无重根, 故 R_j 在复数域 \mathbb{C} 上可对角化, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j)$ 在复数域 \mathbb{C} 上也可对角化. 因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} = \text{diag}\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\right\}$$

在复数域 \mathbb{C} 上可对角化. 又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$, 故 A 在复数域 \mathbb{C} 上相似于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)}$. 因此 A 在复数域 \mathbb{C} 上可对角化. \square

例题 0.4 设 $n \geq 2, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实对称矩阵, $v \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$. 证明:

$$\text{tr}(A^T A) \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} - \frac{1}{n-1} [\text{tr}(A)]^2.$$

证明 不妨设 A 为实对角矩阵, 即

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

现在再设 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

不妨设 λ_1 是 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \right) \geq 0 \\ \iff & \frac{1}{2n-2} \lambda_1^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0 \\ \iff & \lambda_1^2 + 2n \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

上述关于 λ_i 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2n & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & \lambda-2n & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & \lambda-2n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}]{\text{“爪”型行列式}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -\lambda-1 & \lambda-2n+2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda-1 & 0 & \cdots & \lambda-2n+2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{“爪”型行列式}} (\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1} - 2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2} \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} [(\lambda-1)(\lambda-2n+2) - 2(n-1)(\lambda+1)] \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} \lambda(\lambda-4n+3). \end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0, 4n-3, \underbrace{2n-2, 2n-2, \dots, 2n-2}_{n-2 \text{ 个}}. \quad (n \geq 2)$$

故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2).

□

命题 0.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^3$ 且 $\alpha \neq 0$. 若 $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ 满足

$$A\alpha = \beta, A\beta = -\gamma, A\gamma = \alpha - \beta \iff A\alpha = \beta, A\beta = \gamma, A\gamma = \alpha + \beta.$$

证明: α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性无关.

证明 若 α, β 在 \mathbb{Q} 上线性相关, 则存在 $k \in \mathbb{Q}$, 使得 $\beta = k\alpha$. 从而由条件可得

$$A\alpha = \beta = k\alpha \implies A\beta = kA\alpha = k^2\alpha = -\gamma \implies A\gamma = \alpha - \beta = (1-k)\alpha = -k^2A\alpha = -k^3\alpha.$$

于是就有 $(k^3 - k + 1)\alpha = 0$. 又 $\alpha \neq 0$, 故 $k^3 - k + 1 = 0$. 但这个方程没有有理根, 矛盾! 故 α, β 在 \mathbb{Q} 上线性无关.

若 α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性相关, 则存在 $a, b \in \mathbb{Q}$, 使得 $\gamma = a\alpha + b\beta$. 由条件可得

$$A\gamma = \alpha - \beta = aA\alpha + bA\beta = a\beta - b\gamma = a\beta - b(a\alpha + b\beta) = -ab\alpha + (a + b^2)\beta.$$

因此

$$ab = 1, \quad a + b^2 = -1 \implies a + \frac{1}{a^2} = -1 \implies a^3 - a^2 + 1 = 0,$$

而上式无有理根, 矛盾! 故 α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性无关. □

例题 0.5 设 V 是 \mathbb{Q} 上 4 维空间, φ 是 V 上的线性变换. 若

$$\alpha_i \in V, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

且满足

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_4 \neq \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi\alpha_1 = \alpha_2, \quad \varphi\alpha_2 = \alpha_3,$$

$$\varphi\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi\alpha_4 = \alpha_5, \quad \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

求 $\det \varphi$.

证明 由命题 0.2 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 若 $\alpha_4 \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 设 $\alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$. 由条件可得

$$\varphi\alpha_4 = \alpha_5 \implies \varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + (c+1)\alpha_3,$$

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi^2(a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3) = \varphi(ca_1 + (a+c)\alpha_2 + b\alpha_3) = b\alpha_1 + (b+c)\alpha_2 + (a+c)\alpha_3.$$

从而

$$a = b, \quad b = b + c, \quad c + 1 = a + c \implies a = b = 1, \quad c = 0.$$

故 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ 与条件矛盾! 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 又因为 V 是 \mathbb{Q} 上 4 维空间, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 就是 V 的一组基. 从而

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

其中 $x, y, z, m \in \mathbb{Q}$. 由条件可知

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

于是 $\varphi^2\alpha_4$ 的在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} z + xm \\ x + z + ym \\ y + zm \\ m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解得 $(x, y, z, m)^T = (-1, 0, 1, 1)^T$ 或 $(1, 2, 1, -1)^T$. 故

$$\det \varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ 或 } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

□

例题 0.6 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且满足对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $|A^k + I_n| = 1$. 证明 A 是幂零矩阵.



笔记 证明的想法类似于定理??.

注 实际上, 由知(6)式只需要对 $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ 成立, 就可以得到结论成立. 见例题 0.7.

证明 事实上设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

实际上有

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (4)$$

展开(3)得

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i^k \lambda_j^k + \dots + \lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_n^k. \quad (5)$$

将(4)中右边除 1 以外的每项看成 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$, 由(5)(3)得

$$y_1^k + y_2^k + \dots + y_{2^n-1}^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

由 Netwon 公式得 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$ 所有初等对称多项式为 0. 从而由 Vieta 定理知 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$ 是多项式 $y^{2^n-1} = 0$ 的全部根. 这就给出了


$$y_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

因此由命题??知 A 是幂零矩阵. □

例题 0.7 设 A 是 3 阶复矩阵, 对 $k = 1, 2, \dots, 7$, 我们有

$$|I + A^k| = 1,$$

证明 A 是幂零矩阵, 并问 k 是否可只取 $1, 2, \dots, 6$.

 **笔记** 反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

证明 事实上, 设 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 是 A 的特征值, 那么

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1, k = 1, 2, \dots, 7.$$

于是我们有

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k = 0, k = 1, 2, \dots, 7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由 Netwon 公式他们是 $\lambda^7 = 0$ 的七个根 (类似例题 0.6), 因此我们推出了

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$


这就说明了 A 幂零.

如果 k 只能取 $1, 2, 3, \dots, 6$, 反例可取

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{7}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{7}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{8\pi i}{7}} \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.8 设 f, g 是互素多项式且 A 是一个 n 阶矩阵, 证明 $f(A)g(A) = 0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n .

 **笔记** 这题也可以用 Jordan 标准型解决, 可以得到 $f(A), g(A)$ 的 0 特征值的个数即代数重数之和为 n , 从而 $n - r(f(A)) + n - r(g(A)) = n$, 故结论得证.

证明 由裴蜀等式, 存在多项式 a, b 使得 $af + bg = 1$. 于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & a(A)f(A) + b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即 $f(A)g(A) = 0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n . \square

例题 0.9 设 A 是 n 阶幂零矩阵, B 是 n 阶方阵满足 $AB = BA$ 且 $r(AB) = r(B)$, 证明 $B = 0$.

证明 由命题??知 $AB = BA$ 表明 $\text{Im } B$ 是 A 不变子空间. 于是可以考虑 $A|_{\text{Im } B}$, 显然 $\text{Im } A|_{\text{Im } B} = \text{Im } AB$. 由维数公式有

$$\dim \text{Im } B = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } AB = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } B,$$

即 $\ker A|_{\text{Im } B} = 0$. 现在 $A|_{\text{Im } B}$ 也是 $\text{Im } B$ 上的单射. 由推论??知 $A|_{\text{Im } B}$ 是双射. 又因为双射的复合还是双射, 所以 $(A|_{\text{Im } B})^n = A^n|_{\text{Im } B} = 0$ 也是双射. 从而可知 $\text{Im } B = 0$, 这就完成了证明. \square

例题 0.10 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(AB - BA + I) = 1$, 证明

$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (7)$$

证明 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $AB - BA + I = \alpha\beta^T$, 于是我们有

$$n = \text{tr}(AB - BA + I) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = \text{tr}(\beta^T\alpha)$$

现在

$$\begin{aligned} \text{tr}((AB - BA)^2) &= \text{tr}(ABAB - AB^2A - BA^2B + BABA) \\ &= \text{tr}(ABAB - A^2B^2 - A^2B^2 + ABAB) \\ &= 2\text{tr}(ABAB - A^2B^2) = \text{tr}((\alpha\beta^T - I)^2) \end{aligned}$$

利用定理??, 我们有 $\alpha\beta^T$ 特征值为 $\beta^T\alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}$. 故 $(\alpha\beta^T - I)^2$ 特征值为 $(\beta^T\alpha - 1)^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}$. 于是


$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

\square

例题 0.11 设 n 为奇数, 证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

不为 0.

 **笔记** 行列式 mod p 技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

注 行列式左上角元素不变的原因: (1) 对行列式整体做 mod 2 运算, 左上角元素无论变化还是不变都不影响行列式

的值, 因为此时行列式是个对角阵, 其值只与对角元有关.

(2) 我们在有限域 \mathbb{Z}_w 上考虑行列式 D , 这样 $3 = 5 = \cdots = 1, 2 = 4 = \cdots = 0$, 因此无论各个元素的形式如何, 最终的结果是一样的, 都等于 1. 故 D 的值不可能是 0!

证明 我们将行列式 D 的元素 $\bmod 2$, 因为 $(n+1)^n$ 是偶数, 所以

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

这个行列式当然就是对角线之积 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n$ 还是奇数, 故 $D = 2k + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n (k \in \mathbb{Z})$, 奇数加偶数当然还是奇数. 因此行列式 D 也是奇数, 所以 D 不为 0. 证毕! \square

例题 0.12 设 $n \geq 3$ 阶矩阵 $A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 3i, & i = j \\ 3i + 1, & i < j \\ 2 - 3j, & i > j \end{cases}$ 证明 $\det A$ 是 3 的倍数当且仅当 n 是奇数.

 **笔记** $\bmod p$ 技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

证明 我们在有限域 \mathbb{Z}_3 上考虑矩阵 A , 即

$$A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i < j \\ 2, & i > j \end{cases}$$

故 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (行列式 A 的计算可见命题??, 下面计算用的是大拆分法) 现在定义

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 & \cdots & x+1 \\ x+2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+1 \\ x+2 & \cdots & x+2 & x \end{vmatrix},$$

则显然 f 是关于 x 的一次函数且

$$f(-1) = (-1)^n, f(-2) = (-2)^n \Rightarrow f(x) = ((-1)^n - (-2)^n)(x+1) + (-1)^n.$$

现在

$$|A| = f(0) = 2(-1)^n - (-2)^n = \begin{cases} 2 - 4^m, & n = 2m \\ -2 + 2^{2m-1}, & n = 2m-1 \end{cases},$$

注意到

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^m \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2 - 4^m \equiv 1 \pmod{3},$$

以及

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2m-2} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2(2^{2m-2} - 1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow -2 + 2^{2m-1} \equiv 0 \pmod{3},$$

这就完成了证明. \square

例题 0.13 设 A, B 为正定矩阵, 证明关于 X 的矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解, 且解也为正定矩阵.

证明 考虑映射 $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, X \mapsto AX + XA$. 由推论??知 A 特征值为正, $-A$ 特征值为负. 于是由命题??, 我们

知道 $AX = X(-A)$ 只有 0 解, 即 $\ker T = \{0\}$. 因此 T 为单射, 从而由推论??知 T 也是满射. 故矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 X . 此外

$$A^T X^T + X^T A^T = B^T \implies AX^T + X^T A = B,$$

故解 X 是实对称的. 设 $X\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$. 我们有

$$2\lambda\alpha^T A\alpha = \alpha^T AX\alpha + \alpha^T XA\alpha = \alpha^T B\alpha > 0 \implies \lambda = \frac{\alpha^T B\alpha}{2\alpha^T A\alpha} > 0,$$

从而由推论??知 X 是正定矩阵. □

例题 0.14 设 \mathbb{F} 是一数域且 $AB = BA$. 设方程组 $ABX = 0, AX = 0, BX = 0$ 的解空间分别是 V, V_1, V_2 . 证明 $V = V_1 \oplus V_2$ 的充要条件是存在 $C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $CA + DB = I_n$.

证明 初等变换得

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned} \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } CA + DB = I_n &\iff \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = I_n \\ &\iff \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} X = I_n \text{ 在 } \mathbb{F}^{2n \times n} \text{ 有解} \iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix}\right) \\ &\iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = n \iff r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = n \iff AX = 0, BX = 0 \text{ 公共解只有 } 0 \text{ 解} \\ &\iff V_1 \cap V_2 = \{0\}. \end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道 $V_1 + V_2$ 是直和. 由 $AB = BA$ 我们知道 $V_1 \oplus V_2 \subset V$, 于是

$$n - r(AB) \geq n - r(A) + n - r(B) \implies r(AB) \leq r(A) + r(B) - n.$$

由 Sylvester(西尔维斯特) 不等式我们得

$$n - r(AB) = n - r(A) + n - r(B),$$

即 $V = V_1 \oplus V_2$. □

例题 0.15 在 n 维欧式空间 V 中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 $n+1$ 个.

证明 先构造 $n+1$ 个两两夹角为钝角的单位向量. $n=1$ 是显然的, 假定对维数小于 n 为空间, 的确是存在的, 则对 n , 在 V 的一个 $n-1$ 维子空间中取 n 个两两夹角为钝角的向量, 记为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量 β . 待定 λ , 使得 $n+1$ 个不同向量

$$\alpha_1 - \lambda\beta, \alpha_2 - \lambda\beta, \dots, \alpha_n - \lambda\beta, \beta. \quad (8)$$

两两夹角为钝角. 从而现在我们有

$$\begin{aligned} (\alpha_i - \lambda\beta, \beta) &= -\lambda < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \iff \lambda > 0; \\ (\alpha_i - \lambda\beta, \alpha_j - \lambda\beta) &= (\alpha_i, \alpha_j) + \lambda^2 < 0, \forall 1 \leq i < j \leq n \iff \lambda^2 < \min_{1 \leq i < j \leq n} \{-(\alpha_i, \alpha_j)\}. \end{aligned}$$

于是这样的 λ 肯定存在. 又若 $\alpha_i - \lambda\beta = \beta$, 则 $\beta = \frac{\alpha_i}{1+\lambda} \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 矛盾! $\alpha_i - \lambda\beta = \alpha_j - \lambda\beta \iff \alpha_i = \alpha_j$, 这也是矛盾! 于是我们证明了 (8) 中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过 $n+1$ 个. $n=1$ 显然, 假定对维数小于 n 为空间, 的确成立, 在 n 时, 假定有 $n+2$ 个不同的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$ 两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i = \alpha_i - (\alpha_i, \alpha_{n+2})\alpha_{n+2}, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

注意到

$$\begin{aligned}(\beta_i, \alpha_{n+2}) &= 0, i = 1, 2, \dots, n+1; \\ (\beta_i, \beta_j) &= (\alpha_i, \alpha_j) - (\alpha_i, \alpha_{n+2})(\alpha_j, \alpha_{n+2}) < 0, 1 \leq i < j \leq n+1,\end{aligned}$$

我们有两两夹角为钝角的向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ 张成的空间至多是 $n-1$ 维, 由归纳假设, 他应该至多只有 n 个向量两两夹角为钝角, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明. \square

例题 0.16 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 t_1, t_2, \dots, t_{n+1} 使得

$$A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A, B 都是幂零矩阵.

证明 定义 $p(\lambda, \mu) \triangleq |\lambda I - A - \mu B|$. 由 $A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n+1$ 都是幂零矩阵及命题??得

$$p(\lambda, t_i) = \lambda^n, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

对固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 注意到不超过 n 次的多项式 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n$ 有 $n+1$ 个不同实根 t_1, t_2, \dots, t_{n+1} , 于是 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n \equiv 0$, 即

$$|\lambda I - A - \mu B| = \lambda^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

让 $\mu = 0$ 得 $|\lambda I - A| = \lambda^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, 即 A 是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n \left| \frac{\lambda}{\mu} I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n, \forall \mu > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

把 λ 用 $\mu\lambda$ 替换得

$$\left| \lambda I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n.$$

让 $\mu \rightarrow +\infty$ 得 $|\lambda I - B| = \lambda^n$, 即 B 也是幂零矩阵. \square

例题 0.17 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $A - E$ 幂零且对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = B A^k$, 证明: $AB = BA$.

证明 由 $A - E$ 幂零可知 A 的特征值为 1, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(1) & & & \\ & J_{n_2}(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, i = 1, 2, \dots, s$. 由命题??(1) 可知

$$f(J_{n_i}^k(1)) = J_{n_i}(1), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

这里 $J_{n_i}(1)$ 是 n_i 阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 于是由 $A^k B = B A^k$ 及(9)式得, 对 $\forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$J_{n_i}^k(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}^k(1) \implies f(J_{n_i}^k(1)) B_{ij} = B_{ij} f(J_{n_j}^k(1)) \implies J_{n_i}(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}(1),$$

故 $AB = BA$. \square

例题 0.18 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 A 的不同特征值模长互不相同且 $r(A) = r(A^2)$. 若对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = B A^k$, 证明 $AB = BA$.

证明 由 $r(A) = r(A^2)$ 及定理??知, A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 1 阶 Jordan 块的个数有

$$r(A^2) + r(A^0) - 2r(A) = n - r(A).$$

因为 $n - r(A)$ 就是 0 特征值的几何重数, 即 A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 Jordan 块只有 $n - r(A)$ 个, 所以 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的. 因此可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

其中 C 是 A 的所有非零特征值对应的 Jordan 块组成的分块对角阵. 由条件可得

$$A^k B = B A^k \iff \begin{pmatrix} C^k B_1 & C^k B_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C^k & O \\ B_3 C^k & O \end{pmatrix}.$$

从而 $B_2 = B_3 = O, C^k B_1 = B_1 C^k$, 即

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}, \quad C^k B_1 = B_1 C^k.$$

于是

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} CB_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff CB_1 = B_1 C.$$

因此只需证 $CB_1 = B_1 C$. 现设

$$C = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \quad B_1 = (B_{ij}),$$

这里 J_{λ_i} 是属于 A 的特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵, λ_i 互不相同. 从而我们有

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ij} = B_{ij} J_{\lambda_j}^k, \quad \forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}. \quad (10)$$

由条件知 λ_i 的模长互不相同, 从而 $\lambda_i^k \neq \lambda_j^k, \forall i \neq j$. 于是由命题??可知 $J_{\lambda_i}^k X = X J_{\lambda_j}^k, \forall i \neq j$ 只有零解. 因此再结合(10)式知 $B_{ij} = O, \forall i \neq j$. 故

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

由命题??(2) 知, 对 $\forall i \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都存在次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式 f , 使得

$$f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) = \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}.$$

进而

$$\begin{aligned} C^k B_1 = B_1 C^k &\iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k \iff \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \\ &\iff f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \iff \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} \iff J_{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

因此 $CB_1 = B_1 C$, 从而结论得证. \square

例题 0.19 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$ 且 A, u, v 元素都是正数并满足 $Au = v, Av = u$. 证明: $u = v$.

证明 记 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T, t^* \triangleq \min \left\{ \frac{u_i}{v_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}, \tau \triangleq u - t^* v = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$, 则 τ 元素非负.

设 $u_{i'} = t^* v_{i'}$, 则 $\tau_{i'} = 0$. 于是

$$A\tau = Au - t^* Av = v - t^* v,$$

$$A^2 \tau = Av - t^* Av = u - t^* v = \tau.$$

设 $A^2 = (a_{ij})$, 则由 $A^2 \tau = \tau$ 可得

$$\sum_{j=1}^n a_{i'j} \tau_j = \tau_{i'} = 0.$$

再结合 A^2 是正数, τ 元素都非负可知

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0 \implies u = t^* v.$$

从而由条件可得

$$v = Au = t^*Av = t^*u = (t^*)^2v \implies t^{*2} = 1 \implies u = v.$$

□

例题 0.20 设 $n, m \in \mathbb{N}$, 设 $n \geq 1$ 次不可约多项式 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 的 n 个根是实数且成等差数列, 证明: $n \leq 2$.

证明 设 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 等差数列 $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 且 d 为公差. 反证, 设 $n \geq 3$, 则只需证此时 f 在 \mathbb{Q} 上可约, 即上述部分一次因式乘积为有理多项式. 下证 $(x-x_1)(x-x_n) \in \mathbb{Q}[x]$, 即证 $x_1+x_n, x_1x_n \in \mathbb{Q}$. 由 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 知 $f(x)$ 的常数项为有理数, 即

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2} \in \mathbb{Q} \implies x_1 + x_n \in \mathbb{Q}.$$

注意到

$$x_1x_n = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (x_n - x_1)^2}{4} = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (n-1)^2d^2}{4},$$

故只须证的 $d^2 \in \mathbb{Q}$. 由 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 和 Vieta 定理知

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \in \mathbb{Q}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_{n-k+1}^2 \right] = \sum_{k=1}^n \frac{[(x_k + x_{n-k+1})^2 + (x_k - x_{n-k+1})^2]}{4} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[(x_1 + x_n)^2 + (n-2k+1)^2d^2]}{4} \triangleq q \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

从而

$$d^2 = \frac{4q - \sum_{k=1}^n (x_1 + x_n)^2}{\sum_{k=1}^n (n-2k+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

故 $x_1x_n \in \mathbb{Q}$, 进而 $(x-x_1)(x-x_n) \in \mathbb{Q}[x]$, 此时 $(x-x_1)(x-x_n) \mid f(x)$, 故此时 f 在 \mathbb{Q} 上可约, 矛盾! □

例题 0.21 设 $n \geq 2$ 为一个正整数, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为两个 n 阶实矩阵, 已知 $A^2 = -I_n$ (I_n 为 n 阶单位矩阵), 且 $AB = BA$, 证明: B 的行列式 $\det(B) \geq 0$.

证明 证法一: 由 $A^2 = -I_n$ 和 $x^2 + 1$ 不可约知 A 的极小多项式为 $x^2 + 1$, 从而 A 的特征值只有 $\pm i$, 于是 $|A| = 1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2 + 1)^{\frac{n}{2}}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & & \\ & R & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A = J, B = (B_{ij})$ 为相应分块矩阵, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. 由 $AB = BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} RB_{11} + B_{21} & * & \cdots & * & * \\ RB_{21} + B_{31} & RB_{22} + B_{32} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ RB_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2}-1,2} + B_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & * \\ RB_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}R & * & \cdots & * & * \\ B_{21}R & B_{21} + B_{22}R & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{\frac{n}{2}-1,1}R & B_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2}-1,2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}R & * \\ B_{\frac{n}{2},1}R & B_{\frac{n}{2},1} + B_{\frac{n}{2},2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}R & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}R \end{pmatrix} \quad (11)$$

比较第一列和最后一行元素得

$$RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R,$$

$$RB_{i1} + B_{i+1,1} = B_{i1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

$$RB_{\frac{n}{2},i+1} = B_{\frac{n}{2},i} + B_{\frac{n}{2},i+1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

于是

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1}R - RB_{\frac{n}{2}-1,1} = RB_{\frac{n}{2},2} - B_{\frac{n}{2},2}R.$$

又因为 $R^2 = -I_2$ 且 R 可逆, 所以

$$\begin{aligned} RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R &\iff RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = -B_{\frac{n}{2}-1,1} - RB_{\frac{n}{2}-1,1}R \\ &\implies RB_{\frac{n}{2},1} = RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = O \implies B_{\frac{n}{2},1} = O. \end{aligned}$$

因此 $B_{\frac{n}{2}-1,1}R = RB_{\frac{n}{2}-1,1}$, $RB_{\frac{n}{2},2} = B_{\frac{n}{2},2}R$, 同理可得 $B_{\frac{n}{2}-1,1} = B_{\frac{n}{2},2} = O$. 依此类推可得

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1} = \cdots = B_{21} = O, \quad B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},2} = \cdots = B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} = O, \quad RB_{11} = B_{11}R.$$

再比较(11)式第2列和倒数第2行主对角线以下元素, 同理可得

$$B_{\frac{n}{2}-1,i} = O, \quad i = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 2,$$

$$B_{i,2} = O, \quad i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$RB_{22} = B_{22}R.$$

依此类推最终可得 $B_{ij} = O, i > j$, 即 B 为分块上三角阵, 并且

$$RB_{ii} = B_{ii}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}. \quad (12)$$

对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, 设 $B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 则由(12)式得

$$RB_{ii} = B_{ii}R \iff \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \implies a = d, c = -b.$$

从而

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \implies |B_{ii}| = a^2 + b^2 \geq 0.$$

因此 $|B| = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} |B_{ii}| \geq 0$.

证法二: 由 $A^2 = -I_n$ 和 $x^2 + 1$ 不可约知 A 的极小多项式为 $x^2 + 1$, 从而 A 的特征值只有 $\pm i$, 于是 $|A| = 1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2 + 1)^r$, 其中 $r = \frac{n}{2}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & R & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又注意到实矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$ 的特征多项式也为 $(x^2 + 1)^r$, 进而由实数域上的广义 Jordan 标准型知, C 在实数域上也相似于 J . 因此 A 在实数域上相似于实矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$, 从而存在可逆矩阵 P , 满足 $A = P^{-1}CP$. 由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A = C, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 其中 B_1 为 r 阶矩阵, 由 $AB = BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ -B_1 & -B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 & B_4 \\ -B_4 & B_3 \end{pmatrix},$$

此时 $B_3 = -B_2, B_1 = B_4$, 从而

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & B_2 + iB_1 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & O \\ -B_2 & B_1 + iB_2 \end{vmatrix} \\ &= |B_1 - iB_2| |B_1 + iB_2| = |B_1 - iB_2| \overline{|B_1 - iB_2|} \geq 0. \end{aligned}$$

□

例题 0.22

证明

□

例题 0.23

证明

□

例题 0.24

证明

□

例题 0.25

证明

□

例题 0.26

证明

□

例题 0.27

证明

□

例题 0.28

证明

□

例题 0.29

证明



例题 0.30

证明

