0.1 Stirling 公式

对于阶乘问题, 最好用的估计工具就是 Stirling 公式. 与组合数相关的极限问题, 都可以尝试将其全部转化为阶乘然后估计大小.

定理 0.1 (Stirling 公式)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty.$$

笔记 提示: 用欧拉麦克劳林公式估计 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k, n\to\infty$ 的渐近展开式, 以此结合 Wallis 公式:$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to\infty$ 证明.

证明 由 E-M 公式可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k=\frac{\ln n}{2}+\int_1^n \ln x\mathrm{d}x+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x. \quad (1)$$

由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 则可设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\triangleq C_0<\infty$. 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, 再令 $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12}$,$x\in\mathbb{R}$. 则不难发现$b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y,\quad |b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}.$$

从而对(**??**)式使用分部积分可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln k&=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^n\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_n^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+C_0-\int_n^{+\infty}\frac{1}{x}db_2(x)=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+C_0-\frac{b_2(x)}{x}\Big|_n^{+\infty}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1+C_0+\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x,\forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

又因为 $|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12}$,$\forall x\in\mathbb{R}$. 所以对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{6n}.$$

故 $\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n}\right)$,$\forall n\in\mathbb{N}$. 于是再记 $C=1+C_0$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}. \quad (2)$$

注意到

$$(2n)!!=2^n n!, n=0,1,2,\cdots. \quad (3)$$

于是由 Wallis 公式:$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}$,$n\to\infty$. 再结合(**??**)(**??**)可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!\cdot n!}{(2n)!\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!\prod\limits_{k=1}^{n}k}{\sqrt{n}\prod\limits_{k=n+1}^{2n}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}}{\sqrt{n}e^{\sum\limits_{k=1}^{2n}\ln k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{n}e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln 2n-2n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n! e^{(n+\frac{1}{2})\ln n - n + C + O(\frac{1}{n}) - [(2n+\frac{1}{2})\ln 2n - 2n + C + O(\frac{1}{n})]}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n! e^{-n\ln n + n - (2n+\frac{1}{2})\ln 2 + O(\frac{1}{n})}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n! 2^{-2n-\frac{1}{2}} e^n}{n^n \sqrt{n}} e^{O(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} e^{O(\frac{1}{n})}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lim\limits_{n\to\infty} e^{O(\frac{1}{n})}} = \sqrt{\pi}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$. 故 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$. □

例题 0.1 设 n, v 为正整数且 $1 < v < n$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = \lambda > 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2}$.

证明 根据条件, 显然在 $n \to \infty$ 时 v 也会趋于无穷, 设 $v = \frac{n}{2} + w\sqrt{n}$, 则 $w = \frac{v - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} w = \lambda > 0$, 则有

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{n!}{v!(n-v)!}, n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{n!}{v!\,(n-v)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi v}\left(\frac{v}{e}\right)^v \sqrt{2\pi(n-v)}\left(\frac{n-v}{e}\right)^{n-v}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n v^v (n-v)^{n-v}} \frac{n}{\sqrt{v(n-v)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^v \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{n-v}} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = e^{-2\lambda^2}.$$

又

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)\left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4w^2}{\sqrt{n}}}} = 1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^v \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{n-v}} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}} = e^{-2\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{2^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{(n + 2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}(n - 2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}\left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)\ln\left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)\ln\left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)\right] = 2\lambda^2. \tag{4}$$

又由 Taylor 公式可得

$$\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)\ln\left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)\ln\left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)\left(\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)\left(-\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \to \infty.$$

再结合 $\lim\limits_{n\to\infty} w = \lambda$ 可知(**??**)式成立, 因此结论得证. □