0.1 函数方程

定义 0.1

我们称 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足的方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

为 **Cauchy 方程**.

笔记 显然 $f(x)=cx, c\in\mathbb{R}$ 为 Cauchy 方程的解, 一个自然的问题是, 满足 Cauchy 方程的函数 f 是否一定是 cx?

命题 0.1 (Cauchy 方程基本性质)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的解, 则

$$f(rx)=rf(x),\forall r\in\mathbb{Q}.$$

证明 $\forall x\in\mathbb{R}$, 由条件可知 $f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$, 然后就有

$$f(3x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x).$$

依次下去可得

$$f(nx)=nf(x),\forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{1}$$

现在对 $\forall r=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}, p\neq 0, q,p\in\mathbb{Z}$. 我们由条件可得

$$rf(x)=f(rx)\Leftrightarrow qf(x)=pf\left(\frac{q}{p}x\right). \tag{2}$$

利用 (1)式可得

$$pf\left(\frac{q}{p}x\right)=f(qx)=qf(x).$$

故由 (2)式可知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $rf(x)=f(rx),\forall r\in\mathbb{Q}$ 成立.

□

定理 0.1

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则

$$f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 由命题 0.1可知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$rf(x)=f(rx),\forall r\in\mathbb{Q}. \tag{3}$$

成立. 现在对每个无理数 a, 由有理数的稠密性可知, 存在有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=a$. 于是由 f 的连续性及 (3) 式可得

$$f(ax)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=af(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

故 $f(ax)=af(x),\forall a,x\in\mathbb{R}$. 取 $x=1$, 则 $f(a)=f(1)a,\forall a\in\mathbb{R}$.

□

定理 0.2 (Cauchy 方程基本定理)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的解, 则满足下述条件之一:

1. f 在某点连续.
2. f 在某个区间有上界或者下界.
3. f 在某个区间上单调.

4. f 在一个正测集上有界.
5. f 可测.
6. $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不稠密.

我们就有 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.

注 不妨设 f 在包含原点的对称区间 I 上有上界原因: 假设已证 f 在 $(-a, a)$ 上有上界时, 结论成立.

如果 f 在 (c, d) 上有上界, 那么记 $x_0 = \dfrac{c+d}{2}, a = \dfrac{d-c}{2}$($x_0$ 可根据我们的期望, 待定系数得到, 具体见豌豆讲义), 则 $(c, d) = (x_0 - a, x_0 + a)$, 即 f 在 $(x_0 - a, x_0 + a)$ 上有上界. 从而令 $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$, 则由条件可得

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y+x_0) - f(x_0) = f(x+y+2x_0-x_0) - f(x_0) \\ &= f(x+x_0) + f(y+x_0-x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(y+x_0) - 2f(x_0) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

故 $g(x)$ 满足 Cauchy 方程且在 $(-a, a)$ 上有上界, 于是由假设可知,$g(x) = g(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$. 又注意到

$$g(x) = f(x+x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(-x_0) = f(x).$$

故 $f(x) = g(x) = g(1)x = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$. 因此不妨设合理.

证明

1. 如果 f 在 x_0 连续, 则对任何 $x' \in \mathbb{R}$, 有
$$\lim_{x \to x'} f(x) = \lim_{x \to x'} f(x - x' + x_0) + \lim_{x \to x'} f(x' - x_0) = f(x_0) + f(x' - x_0) = f(x').$$
于是我们证明了 f 在 x' 连续. 于是由定理 0.1我们知道 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. 不妨设 f 在包含原点的对称区间 I 上有上界. 下证 f 在原点连续. 注意到由命题 0.1我们知道
$$f(x) = \frac{f(rx)}{r}, \forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$
现在对任何 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 取 $r_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 使得
$$\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} r_n x_n = 0. \tag{5}$$
注意到在(4)中令 $r = -1$ 知 f 是奇函数, 从而 f 在 I 上有下界. 现在由于有界和无穷小之积也为无穷小, 我们由(4)和(5)得
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(r_n x_n)}{r_n} = 0.$$
由 Heine 归结原理即得 f 在 $x = 0$ 连续. 故由第一点知 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. 在区间单调自然在子区间上有界, 用第二点即得 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. 其依托于经典结论

   结论 设勒贝格可测集 A, B 的勒贝格测度都非 0, 则 $A + B$ 包含一个区间.

   上述结论可以在任何一本实变函数习题集中找到, 例如徐森林. 运用此结论假设 f 在 E 上有界,E 的勒贝格测度非 0. 则 $E + E$ 包含一个区间 I, 于是对 $z \in I$, 存在 $x, y \in E$ 使得 $z = x + y$, 然后
$$|f(z)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant 2 \sup_E |f|.$$
由第二点即得 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
5. 由 Lusin 定理, 存在有正测度的紧集 K 和 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 g 使得 $f(x) = g(x), \forall x \in K$, 故 f 在 K 上有界. 现在我们就可以运用上一条知 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
6. 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) \neq f(1)x_0$, 显然 $x_0 \neq 0, 1$. 于是
$$\begin{aligned} &(1, f(1)), (x_0, f(x_0)) \text{ 线性无关} \\ \Rightarrow &\mathbb{R}^2 = \{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow &\mathbb{R}^2 = \overline{\{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \overline{\{(c_1 + c_2 x_0, f(c_1 + c_2 x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}}$$
$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}},$$

这就证明了 $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 稠密. 这是一个矛盾!

□

例题 0.1 求函数方程 $2f(2x) = f(x) + x$ 的所有 $\mathbb{R}$ 上在 $x = 0$ 的连续解.

笔记 这里也能利用强求通项和强行裂项的想法. 具体操作如下:

$\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x, 则由条件可知

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}.$$

从而由上式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是令 $x_n = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right), n = 0, 1, 2, \cdots$, 则

$$x_n = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

对上式进行强行裂项并强求通项得到

$$\frac{x_n}{2^{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$2x_0 - \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x_k}{2^{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{2k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这就完成了对 x_n 的强行裂项并强求通项.

注 只有除以 2 的迭代才能与 f 在 $x = 0$ 处连续联系起来, 如果是乘 2 的迭代则不行.

证明 设 f 在 $x = 0$ 处连续,$\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x, 则由条件可知

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}, \tag{6}$$
$$2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

从而由 f 在 $x = 0$ 处连续可知,$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. 由 (6)式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

注意到

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{2^{2k+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}x}{1-\frac{1}{4}}=\frac{x}{3}.$$

根据 x 的任意性, 可知 $f(x)=\frac{x}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ 就是原方程符合条件的一个解.

再将 $f(x)=\frac{x}{3}$ 代入原方程, 仍然成立. 故 $f(x)=\frac{x}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ 就是原方程符合条件的所有解.

□

命题 0.2 ($\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线)

$\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线.

笔记 容易由证明知道任何开区间 (a,b) 上的既凸又凹的连续函数也是直线.

证明 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上既凸又凹, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y).$$

考虑 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则运用 $f(x+y)+f(0)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 知 g 满足 Cauchy 方程, 于是由定理 0.1可得

$$f(x)=f(0)+[f(1)-f(0)]x.$$

□

例题 0.2 求方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 的全部连续解.

证明 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 则由条件可得

$$f(0)=xf(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=0.$$

$$f(x)=xf(1)+f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow xf(1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0.$$

$$f(1)=-f(-1)-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0.$$

$$f(-x)=xf(-1)-f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)+f(-x)=xf(-1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\text{是}\mathbb{R}\text{上的奇函数}.$$

于是对 $\forall x,y>0$, 我们取 $x=e^s,y=e^t,\forall s,t\in\mathbb{R}$. 则由条件可得

$$\frac{f(e^{s+t})}{e^{s+t}}=\frac{f(e^s)}{e^s}+\frac{f(e^t)}{e^t}.$$

从而 $\frac{f(e^x)}{e^x}$ 满足 Cauchy 方程, 且 $f\in C(\mathbb{R})$, 因此由定理 0.1可得

$$\frac{f(e^x)}{e^x}=\frac{f(e)}{e}x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\frac{f(e)}{e}x\ln x,\forall x>0.$$

又因为 f 是奇函数, 所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{f(e)}{e}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{f(e)}{e}x\ln(-x), & x<0\end{cases}.$$

最后, 将上述 $f(x)$ 代入原方程, 等式仍成立. 故上述 $f(x)$ 就是原方程的全部连续解.

□