

## 0.1 其他

## 定理 0.1

设  $\mathbb{F}$  是一个域,  $m_i, a_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $\gcd(m_i, m_j) \mid (a_i - a_j), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 则存在  $f \in \mathbb{F}[x]$  使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \pmod{m_i(x)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

即存在  $k_i \in \mathbb{F}[x]$  使得

$$f(x) = k_i(x)m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \dots, n.$$



证明

□

**例题 0.1** 设  $A_1, A_2, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{K}), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使得  $g(A_1), g(A_2), \dots, g(A_m)$  都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在  $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使得  $g(A_i)^{-1} = h(A_i)$  对所有的  $1 \leq i \leq m$  都成立.

**证明** **证法一:** 由命题??可知, 对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 存在  $h_i \in \mathbb{K}[x]$ , 使得

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i). \quad (1)$$

记  $A_i$  的极小多项式为  $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ . 考虑  $\gcd(n_i, n_j)(i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$ , 设  $x_0 \in \mathbb{C}$  是  $\gcd(n_i, n_j)$  的根, 则  $(x - x_0) \mid n_i, n_j$ , 即  $x_0$  是  $A_i$  和  $A_j$  的公共特征值. 由命题??和命题??可知,  $h_i(x_0)$  是  $h_i(A_i)$  的特征值,  $\frac{1}{g(x_0)}$  是  $g^{-1}(A_i)$  的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i) \implies \frac{1}{g(x_0)} = h_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

于是

$$h_i(x_0) - h_j(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0)} = 0.$$

因此  $(x - x_0) \mid (h_i - h_j)$ . 故在  $\mathbb{C}$  上就有  $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i - h_j)$ . 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在  $\mathbb{K}$  上也有  $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i(x) - h_j(x))$ . 于是由**中国剩余定理的推广**可知, 方程

$$h(x) \equiv h_i(x) \pmod{n_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

在  $\mathbb{K}$  上有解. 故存在  $h \in \mathbb{K}[x]$ , 使得

$$h(A_i) = h_i(A_i) = g^{-1}(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

**证法二:** 记  $A_i$  的极小多项式为  $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ , 由命题??可知

$$(n_i, g) = 1, i = 1, 2, \dots, m.$$

从而  $(n_1 n_2 \cdots n_m, g) = 1$ . 因此存在  $h, k \in \mathbb{F}[x]$ , 使得

$$h(x)g(x) + n_1(x)n_2(x) \cdots n_m(x)k(x) = 1.$$

从而

$$h(A_i) = g^{-1}(A_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

□

## 命题 0.1

设  $n \in \mathbb{N}$  且  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 若  $A \sim \tilde{A}$ , 其中  $\tilde{A}$  是主对角元都为 0 的上三角阵, 则  $A$  是幂零矩阵.



**证明** 由条件可知存在可逆阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}\tilde{A}P$ . 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n = P^{-1}\tilde{A}^n P = O.$$

故  $A$  是幂零矩阵. □

**例题 0.2** 设  $n \in \mathbb{N}$  且  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足

$$AB + A = BA + B.$$

证明:

$$(A - B)^n = 0.$$

**证明** 注意到

$$AB - BA = B - A.$$

由命题??知  $A, B$  可同时相似上三角化. 不妨设  $A, B$  都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知  $AB - BA$  也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知  $A - B$  是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1 知  $A - B$  是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A - B)^n = 0.$$

□

**例题 0.3** 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对角矩阵. 考虑

$$S(A) \triangleq \{P^{-1}AP : P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ 是可逆矩阵}\}.$$

证明:  $S(A)$  在  $\mathbb{R}^{n \times n}$  中是闭集. 反过来, 如果  $S(A)$  是闭集, 证明  $A$  在  $\mathbb{C}$  上一定可对角化.

**证明** 设  $A$  的极小多项式为  $m$ , 特征多项式为  $p$ , 则由知  $m$  无重根. 设  $A_k \in S(A), k = 1, 2, \dots$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0,$$

$$|\lambda I - \tilde{A}| = \left| \lambda I - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A| = |\lambda I - A| = p(\lambda).$$

因此  $\tilde{A}$  的特征多项式也是  $p$ ,  $\tilde{A}$  极小多项式整除  $m$ , 从而  $\tilde{A}$  极小多项式也无重根. 因此  $\tilde{A}$  和  $A$  有相同的特征值且可对角化, 故  $\tilde{A} \in S(A)$ .

反之, 如果  $S(A)$  是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知,  $A$  在实数域  $\mathbb{R}$  上相似于下列分块对角矩阵:

$$\tilde{J} = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}(a_l, b_l)\},$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$  都是实数,  $b_1, \dots, b_l$  都非零, 且  $\lambda_j$  都是  $A$  的实特征值,  $a_j \pm ib_j$  都是  $A$  的复特征值,  $J_{r_i}(\lambda_i)$  表示以  $\lambda_i$  为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j = -2a_j, d_j = a_j^2 + b_j^2, \quad R_j = \begin{pmatrix} 0 & -d_j \\ 1 & -c_j \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} R_j & C_2 & & \\ & R_j & C_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R_j & C_2 \\ & & & & R_j \end{pmatrix}.$$

对于  $J_{r_j}(\lambda_j)$ , 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}(\lambda_j) \sim \begin{pmatrix} \lambda_j & \frac{1}{n} & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{n} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

对于  $\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j)$ , 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}(a_j, b_j) \sim \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & & \\ 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & \\ & & 0 & -d_j & & \\ & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} \\ & & & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} \triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A \sim \tilde{J} \sim \text{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\} \triangleq \tilde{J}^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故  $\tilde{J}^{(n)} \in S(A)$ . 因为  $S(A)$  是闭集, 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$ . 不难发现

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & \\ 1 & -c_j & & & \\ & & 0 & -d_j & \\ & & 1 & -c_j & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_j \end{pmatrix},$$

注意到  $R_j$  的极小多项式等于

$$x^2 + c_j x + d_j = (x - a_j)^2 + b_j^2 = (x - a_j - ib_j)(x - a_j + ib_j)$$

在复数域  $\mathbb{C}$  上无重根, 故  $R_j$  在复数域  $\mathbb{C}$  上可对角化, 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j)$  在复数域  $\mathbb{C}$  上也可对角化. 因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} = \text{diag}\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\right\}$$

在复数域  $\mathbb{C}$  上可对角化. 又  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$ , 故  $A$  在复数域  $\mathbb{C}$  上相似于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)}$ . 因此  $A$  在复数域  $\mathbb{C}$  上可对角化.  $\square$

**例题 0.4** 设  $n \geq 2, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是实对称矩阵,  $v \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$ . 证明:

$$\text{tr}(A^T A) \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} - \frac{1}{n-1} [\text{tr}(A)]^2.$$

**证明** 不妨设  $A$  为实对角矩阵, 即

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

现在再设  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ , 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} - \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

不妨设  $\lambda_1$  是  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$  的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2n-2} \lambda_1^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_1^2 + 2n \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

上述关于  $\lambda_i$  的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2n & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & \lambda-2n & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & \lambda-2n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}]{\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -\lambda-1 & \lambda-2n+2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda-1 & 0 & \cdots & \lambda-2n+2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{“爪”型行列式}} (\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1} - 2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2} \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} [(\lambda-1)(\lambda-2n+2) - 2(n-1)(\lambda+1)] \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} \lambda(\lambda-4n+3). \end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0, 4n-3, \underbrace{2n-2, 2n-2, \dots, 2n-2}_{n-2 \text{ 个}}. \quad (n \geq 2)$$

故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2).

□

### 命题 0.2

设  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^3$  且  $\alpha \neq 0$ . 若  $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  满足

$$A\alpha = \beta, A\beta = -\gamma, A\gamma = \alpha - \beta \iff A\alpha = \beta, A\beta = \gamma, A\gamma = \alpha + \beta.$$

证明:  $\alpha, \beta, \gamma$  在  $\mathbb{Q}$  上线性无关.

**证明** 若  $\alpha, \beta$  在  $\mathbb{Q}$  上线性相关, 则存在  $k \in \mathbb{Q}$ , 使得  $\beta = k\alpha$ . 从而由条件可得

$$A\alpha = \beta = k\alpha \implies A\beta = kA\alpha = k^2\alpha = -\gamma \implies A\gamma = \alpha - \beta = (1-k)\alpha = -k^2A\alpha = -k^3\alpha.$$

于是就有  $(k^3 - k + 1)\alpha = 0$ . 又  $\alpha \neq 0$ , 故  $k^3 - k + 1 = 0$ . 但这个方程没有有理根, 矛盾! 故  $\alpha, \beta$  在  $\mathbb{Q}$  上线性无关.

若  $\alpha, \beta, \gamma$  在  $\mathbb{Q}$  上线性相关, 则存在  $a, b \in \mathbb{Q}$ , 使得  $\gamma = a\alpha + b\beta$ . 由条件可得

$$A\gamma = \alpha - \beta = aA\alpha + bA\beta = a\beta - b\gamma = a\beta - b(a\alpha + b\beta) = -ab\alpha + (a + b^2)\beta.$$

因此

$$ab = 1, \quad a + b^2 = -1 \implies a + \frac{1}{a^2} = -1 \implies a^3 - a^2 + 1 = 0,$$

而上式无有理根, 矛盾! 故  $\alpha, \beta, \gamma$  在  $\mathbb{Q}$  上线性无关. □

**例 0.5** 设  $V$  是  $\mathbb{Q}$  上 4 维空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换. 若

$$\alpha_i \in V, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

且满足

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_4 \neq \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi\alpha_1 = \alpha_2, \quad \varphi\alpha_2 = \alpha_3,$$

$$\varphi\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi\alpha_4 = \alpha_5, \quad \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

求  $\det \varphi$ .

**证明** 由 **命题 0.2** 可知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 若  $\alpha_4 \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , 设  $\alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . 由条件可得

$$\varphi\alpha_4 = \alpha_5 \implies \varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + (c+1)\alpha_3,$$

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi^2(a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3) = \varphi(ca_1 + (a+c)\alpha_2 + b\alpha_3) = b\alpha_1 + (b+c)\alpha_2 + (a+c)\alpha_3.$$

从而

$$a = b, \quad b = b + c, \quad c + 1 = a + c \implies a = b = 1, \quad c = 0.$$

故  $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$  与条件矛盾! 因此  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关. 又因为  $V$  是  $\mathbb{Q}$  上 4 维空间, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  就是  $V$  的一组基. 从而

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

其中  $x, y, z, m \in \mathbb{Q}$ . 由条件可知

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

于是  $\varphi^2\alpha_4$  的在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下的坐标就是


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} z + xm \\ x + z + ym \\ y + zm \\ m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解得  $(x, y, z, m)^T = (-1, 0, 1, 1)^T$  或  $(1, 2, 1, -1)^T$ . 故

$$\det \varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ 或 } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

□

**例 0.6**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  且满足对任何  $k \in \mathbb{N}$  都有  $|A^k + I_n| = 1$ . 证明  $A$  是幂零矩阵.

 **笔记** 证明的想法类似于定理??.

**注** 实际上, 由知(6)式只需要对  $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$  成立, 就可以得到结论成立. 见 **例 0.7**.

**证明** 事实上设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

实际上有

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (4)$$

展开(3)得

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i^k \lambda_j^k + \dots + \lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_n^k. \quad (5)$$

将(4)中右边除 1 以外的每项看成  $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$ , 由(5)(3)得

$$y_1^k + y_2^k + \dots + y_{2^n-1}^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

由 Netwon 公式得  $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$  所有初等对称多项式为 0. 从而由 Vieta 定理知  $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$  是多项式  $y^{2^n-1} = 0$  的全部根. 这就给出了


$$y_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

因此由命题??知  $A$  是幂零矩阵. □

**例题 0.7** 设  $A$  是 3 阶复矩阵, 对  $k = 1, 2, \dots, 7$ , 我们有

$$|I + A^k| = 1,$$

证明  $A$  是幂零矩阵, 并问  $k$  是否可只取  $1, 2, \dots, 6$ .

 **笔记** 反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

**证明** 事实上, 设  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  是  $A$  的特征值, 那么

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1, k = 1, 2, \dots, 7.$$

于是我们有

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k = 0, k = 1, 2, \dots, 7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由 Netwon 公式他们是  $\lambda^7 = 0$  的七个根 (类似例题 0.6), 因此我们推出了

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$


这就说明了  $A$  幂零.

如果  $k$  只能取  $1, 2, 3, \dots, 6$ , 反例可取

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{7}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{7}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{8\pi i}{7}} \end{pmatrix}.$$

□

**例题 0.8** 设  $f, g$  是互素多项式且  $A$  是一个  $n$  阶矩阵, 证明  $f(A)g(A) = 0$  的充要条件是  $f(A)$  的秩和  $g(A)$  的秩之和为  $n$ .

 **笔记** 这题也可以用 Jordan 标准型解决, 可以得到  $f(A), g(A)$  的 0 特征值的个数即代数重数之和为  $n$ , 从而  $n - r(f(A)) + n - r(g(A)) = n$ , 故结论得证.

**证明** 由裴蜀等式, 存在多项式  $a, b$  使得  $af + bg = 1$ . 于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & a(A)f(A) + b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即  $f(A)g(A) = 0$  的充要条件是  $f(A)$  的秩和  $g(A)$  的秩之和为  $n$ .  $\square$

**例题 0.9** 设  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵,  $B$  是  $n$  阶方阵满足  $AB = BA$  且  $r(AB) = r(B)$ , 证明  $B = 0$ .

**证明** 由命题??知  $AB = BA$  表明  $\text{Im } B$  是  $A$  不变子空间. 于是可以考虑  $A|_{\text{Im } B}$ , 显然  $\text{Im } A|_{\text{Im } B} = \text{Im } AB$ . 由维数公式有

$$\dim \text{Im } B = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } AB = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } B,$$

即  $\ker A|_{\text{Im } B} = 0$ . 现在  $A|_{\text{Im } B}$  也是  $\text{Im } B$  上的单射. 由推论??知  $A|_{\text{Im } B}$  是双射. 又因为双射的复合还是双射, 所以  $(A|_{\text{Im } B})^n = A^n|_{\text{Im } B} = 0$  也是双射. 从而可知  $\text{Im } B = 0$ , 这就完成了证明.  $\square$

**例题 0.10** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  且  $\text{rank}(AB - BA + I) = 1$ , 证明

$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (7)$$

**证明** 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  使得  $AB - BA + I = \alpha\beta^T$ , 于是我们有

$$n = \text{tr}(AB - BA + I) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = \text{tr}(\beta^T\alpha)$$

现在

$$\begin{aligned} \text{tr}((AB - BA)^2) &= \text{tr}(ABAB - AB^2A - BA^2B + BABA) \\ &= \text{tr}(ABAB - A^2B^2 - A^2B^2 + ABAB) \\ &= 2\text{tr}(ABAB - A^2B^2) = \text{tr}((\alpha\beta^T - I)^2) \end{aligned}$$

利用定理??, 我们有  $\alpha\beta^T$  特征值为  $\beta^T\alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}$ . 故  $(\alpha\beta^T - I)^2$  特征值为  $(\beta^T\alpha - 1)^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}$ . 于是


$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\square$

**例题 0.11** 设  $n$  为奇数, 证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

不为 0.

 **笔记** 行列式 mod  $p$  技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

**注** 行列式左上角元素不变的原因: (1) 对行列式整体做 mod 2 运算, 左上角元素无论变化还是不变都不影响行列式

的值, 因为此时行列式是个对角阵, 其值只与对角元有关.

(2) 我们在有限域  $\mathbb{Z}_w$  上考虑行列式  $D$ , 这样  $3 = 5 = \cdots = 1, 2 = 4 = \cdots = 0$ , 因此无论各个元素的形式如何, 最终的结果是一样的, 都等于 1. 故  $D$  的值不可能是 0!

**证明** 我们将行列式  $D$  的元素  $\bmod 2$ , 因为  $(n+1)^n$  是偶数, 所以

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

这个行列式当然就是对角线之积  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n$  还是奇数, 故  $D = 2k + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n (k \in \mathbb{Z})$ , 奇数加偶数当然还是奇数. 因此行列式  $D$  也是奇数, 所以  $D$  不为 0. 证毕!  $\square$

**例题 0.12** 设  $n \geq 3$  阶矩阵  $A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 3i, & i = j \\ 3i + 1, & i < j \\ 2 - 3j, & i > j \end{cases}$  证明  $\det A$  是 3 的倍数当且仅当  $n$  是奇数.

 **笔记**  $\bmod p$  技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

**证明** 我们在有限域  $\mathbb{Z}_3$  上考虑矩阵  $A$ , 即

$$A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i < j \\ 2, & i > j \end{cases}$$

故  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . (行列式  $A$  的计算可见命题??, 下面计算用的是大拆分法) 现在定义

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 & \cdots & x+1 \\ x+2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+1 \\ x+2 & \cdots & x+2 & x \end{vmatrix},$$

则显然  $f$  是关于  $x$  的一次函数且

$$f(-1) = (-1)^n, f(-2) = (-2)^n \Rightarrow f(x) = ((-1)^n - (-2)^n)(x+1) + (-1)^n.$$

现在

$$|A| = f(0) = 2(-1)^n - (-2)^n = \begin{cases} 2 - 4^m, & n = 2m \\ -2 + 2^{2m-1}, & n = 2m-1 \end{cases},$$

注意到

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^m \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2 - 4^m \equiv 1 \pmod{3},$$

以及

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2m-2} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2(2^{2m-2} - 1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow -2 + 2^{2m-1} \equiv 0 \pmod{3},$$



这就完成了证明. □

**例题 0.13** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2025 \times 2025}$  满足

$$a_{ii} = i^3 + 3i^2 + 2i, \quad a_{ij} = \begin{cases} 3(i-j) + 1, & i < j \\ 3(i+j) + 2, & i > j \end{cases}.$$

证明:  $3 \mid \det A$ .

**证明** 在有限域  $\mathbb{Z}_3$  上考虑. 注意到

$$i^3 + 3i^2 + 2i = i(i+1)(i+2) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

故

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

记  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $|A(t)| = |A + t\alpha\alpha^T|$ , 则

$$|A(t)| = |A| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

其中  $A_{ij}$  为  $A$  的  $(i, j)$  元的代数余子式. 从而

$$\begin{aligned} |A| - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} &= |A(-1)| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 = 2; \\ |A| - 2 \sum_{i,j=1}^n A_{ij} &= |A(-2)| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2^{2025} = 1^{2025} = 1. \end{aligned}$$

于是  $|A| = 2 \times 2 - 1 = 3 = 0$ . 故  $3 \mid \det A$ . □

**例题 0.14** 设  $A, B$  为正定矩阵, 证明关于  $X$  的矩阵方程  $AX + XA = B$  有唯一解, 且解也为正定矩阵.

**证明** 考虑映射  $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, X \mapsto AX + XA$ . 由推论??知  $A$  特征值为正,  $-A$  特征值为负. 于是由命题??, 我们知道  $AX = X(-A)$  只有 0 解, 即  $\ker T = \{0\}$ . 因此  $T$  为单射, 从而由推论??知  $T$  也是满射. 故矩阵方程  $AX + XA = B$  有唯一解  $X$ . 此外

$$A^T X^T + X^T A^T = B^T \implies AX^T + X^T A = B,$$

故解  $X$  是实对称的. 设  $X\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$ . 我们有

$$2\lambda\alpha^T A\alpha = \alpha^T AX\alpha + \alpha^T XA\alpha = \alpha^T B\alpha > 0 \implies \lambda = \frac{\alpha^T B\alpha}{2\alpha^T A\alpha} > 0,$$

从而由推论??知  $X$  是正定矩阵.  $\square$

**例题 0.15** 设  $\mathbb{F}$  是一数域且  $AB = BA$ . 设方程组  $ABX = 0, AX = 0, BX = 0$  的解空间分别是  $V, V_1, V_2$ . 证明  $V = V_1 \oplus V_2$  的充要条件是存在  $C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $CA + DB = I_n$ .

**证明** 初等变换得

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned} \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } CA + DB = I_n &\iff \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = I_n \\ &\iff \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} X = I_n \text{ 在 } \mathbb{F}^{2n \times n} \text{ 有解} \iff r \left( \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} \right) = r \left( \begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix} \right) \\ &\iff r \left( \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} \right) = n \iff r \left( \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = n \iff AX = 0, BX = 0 \text{ 公共解只有 } 0 \text{ 解} \\ &\iff V_1 \cap V_2 = \{0\}. \end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道  $V_1 + V_2$  是直和. 由  $AB = BA$  我们知道  $V_1 \oplus V_2 \subset V \Rightarrow$ , 于是

$$n - r(AB) \geq n - r(A) + n - r(B) \Rightarrow r(AB) \leq r(A) + r(B) - n.$$

由 Sylvester(西尔维斯特) 不等式我们得

$$n - r(AB) = n - r(A) + n - r(B),$$

即  $V = V_1 \oplus V_2$ .  $\square$

**例题 0.16** 在  $n$  维欧式空间  $V$  中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有  $n + 1$  个.

**证明** 先构造  $n + 1$  个两两夹角为钝角的单位向量.  $n = 1$  是显然的, 假定对维数小于  $n$  为空间, 的确是存在的, 则对  $n$ , 在  $V$  的一个  $n - 1$  维子空间中取  $n$  个两两夹角为钝角的向量, 记为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量  $\beta$ . 待定  $\lambda$ , 使得  $n + 1$  个不同向量

$$\alpha_1 - \lambda\beta, \alpha_2 - \lambda\beta, \dots, \alpha_n - \lambda\beta, \beta. \quad (8)$$

两两夹角为钝角. 从而现在我们有

$$\begin{aligned} (\alpha_i - \lambda\beta, \beta) &= -\lambda < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \iff \lambda > 0; \\ (\alpha_i - \lambda\beta, \alpha_j - \lambda\beta) &= (\alpha_i, \alpha_j) + \lambda^2 < 0, \forall 1 \leq i < j \leq n \iff \lambda^2 < \min_{1 \leq i < j \leq n} \{-(\alpha_i, \alpha_j)\}. \end{aligned}$$

于是这样的  $\lambda$  肯定存在. 又若  $\alpha_i - \lambda\beta = \beta$ , 则  $\beta = \frac{\alpha_i}{1 + \lambda} \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , 矛盾!  $\alpha_i - \lambda\beta = \alpha_j - \lambda\beta \iff \alpha_i = \alpha_j$ , 这也是矛盾! 于是我们证明了 (8) 中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过  $n + 1$  个.  $n = 1$  显然, 假定对维数小于  $n$  为空间, 的确成立, 在  $n$  时, 假定有  $n + 2$  个不同的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$  两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i = \alpha_i - (\alpha_i, \alpha_{n+2})\alpha_{n+2}, i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

注意到

$$\begin{aligned} (\beta_i, \alpha_{n+2}) &= 0, i = 1, 2, \dots, n + 1; \\ (\beta_i, \beta_j) &= (\alpha_i, \alpha_j) - (\alpha_i, \alpha_{n+2})(\alpha_j, \alpha_{n+2}) < 0, 1 \leq i < j \leq n + 1, \end{aligned}$$

我们两两夹角为钝角的向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$  张成的空间至多是  $n - 1$  维, 由归纳假设, 他应该至多只有  $n$  个向量两两夹角为钝角, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.17** 设  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  且存在  $n + 1$  个不同实数  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  使得

$$A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n + 1$$

是幂零矩阵, 证明  $A, B$  都是幂零矩阵.

**证明** 定义  $p(\lambda, \mu) \triangleq |\lambda I - A - \mu B|$ . 由  $A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n+1$  都是幂零矩阵及命题??得

$$p(\lambda, t_i) = \lambda^n, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

对固定的  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 注意到不超过  $n$  次的多项式  $p(\lambda, \mu) - \lambda^n$  有  $n+1$  个不同实根  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ , 于是  $p(\lambda, \mu) - \lambda^n \equiv 0$ , 即

$$|\lambda I - A - \mu B| = \lambda^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

让  $\mu = 0$  得  $|\lambda I - A| = \lambda^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ , 即  $A$  是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n \left| \frac{\lambda}{\mu} I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n, \forall \mu > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

把  $\lambda$  用  $\mu\lambda$  替换得

$$\left| \lambda I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n.$$

让  $\mu \rightarrow +\infty$  得  $|\lambda I - B| = \lambda^n$ , 即  $B$  也是幂零矩阵. □

**例题 0.18** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足  $A - E$  幂零且对某个  $k \in \mathbb{N}$  有  $A^k B = B A^k$ , 证明:  $AB = BA$ .

**证明** 由  $A - E$  幂零可知  $A$  的特征值为 1, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(1) & & & \\ & J_{n_2}(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

其中  $B_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, i = 1, 2, \dots, s$ . 由命题??(1) 可知

$$f(J_{n_i}^k(1)) = J_{n_i}(1), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

这里  $J_{n_i}(1)$  是  $n_i$  阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 于是由  $A^k B = B A^k$  及(9)式得, 对  $\forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}$ , 都有

$$J_{n_i}^k(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}^k(1) \implies f(J_{n_i}^k(1)) B_{ij} = B_{ij} f(J_{n_j}^k(1)) \implies J_{n_i}(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}(1),$$

故  $AB = BA$ . □

**例题 0.19** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足  $A$  的不同特征值模长互不相同且  $r(A) = r(A^2)$ . 若对某个  $k \in \mathbb{N}$  有  $A^k B = B A^k$ , 证明  $AB = BA$ .

**证明** 由  $r(A) = r(A^2)$  及定理??知,  $A$  的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 1 阶 Jordan 块的个数有

$$r(A^2) + r(A^0) - 2r(A) = n - r(A).$$

因为  $n - r(A)$  就是 0 特征值的几何重数, 即  $A$  的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 Jordan 块只有  $n - r(A)$  个, 所以  $A$  的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的. 因此可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

其中  $C$  是  $A$  的所有非零特征值对应的 Jordan 块组成的分块对角阵. 由条件可得

$$A^k B = B A^k \iff \begin{pmatrix} C^k B_1 & C^k B_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C^k & O \\ B_3 C^k & O \end{pmatrix}.$$

从而  $B_2 = B_3 = O, C^k B_1 = B_1 C^k$ , 即

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}, \quad C^k B_1 = B_1 C^k.$$

于是

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} C B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff C B_1 = B_1 C.$$

因此只需证  $CB_1 = B_1C$ . 现设

$$C = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \quad B_1 = (B_{ij}),$$

这里  $J_{\lambda_i}$  是属于  $A$  的特征值  $\lambda_i$  的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵,  $\lambda_i$  互不相同. 从而我们有

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ij} = B_{ij} J_{\lambda_j}^k, \quad \forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}. \quad (10)$$

由条件知  $\lambda_i$  的模长互不相同, 从而  $\lambda_i^k \neq \lambda_j^k, \forall i \neq j$ . 于是由命题??可知  $J_{\lambda_i}^k X = X J_{\lambda_j}^k, \forall i \neq j$  只有零解. 因此再结合(10)式知  $B_{ij} = O, \forall i \neq j$ . 故

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

由命题??(2) 知, 对  $\forall i \in [1, s] \cap \mathbb{N}$ , 都存在次数不超过  $n-1$  次的实系数多项式  $f$ , 使得

$$f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) = \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}.$$

进而

$$\begin{aligned} C^k B_1 = B_1 C^k &\iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k \iff \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \\ &\iff f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \iff \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} \iff J_{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

因此  $CB_1 = B_1C$ , 从而结论得证.  $\square$

**例题 0.20** 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$  且  $Au = v, Av = u$ . 证明:  $u = v$ .

**证明** 记  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T, t^* \triangleq \min \left\{ \frac{u_i}{v_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}, \tau \triangleq u - t^*v = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$ , 则  $\tau$  元素非负.

设  $u_{i'} = t^*v_{i'}$ , 则  $\tau_{i'} = 0$ . 于是

$$A\tau = Au - t^*Av = v - t^*v,$$

$$A^2\tau = Av - t^*Av = u - t^*v = \tau.$$

设  $A^2 = (a_{ij})$ , 则由  $A^2\tau = \tau$  可得

$$\sum_{j=1}^n a_{i'j} \tau_j = \tau_{i'} = 0.$$

再结合  $A^2$  是正数,  $\tau$  元素都非负可知

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0 \implies u = t^*v.$$

从而由条件可得

$$v = Au = t^*Av = t^*u = (t^*)^2v \implies t^{*2} = 1 \implies u = v. \quad \square$$

**例题 0.21** 设  $n, m \in \mathbb{N}$ , 设  $n \geq 1$  次不可约多项式  $f \in \mathbb{Q}[x]$  的  $n$  个根是实数且成等差数列, 证明:  $n \leq 2$ .

**证明** 设  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ , 等差数列  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$  且  $d$  为公差. 反证, 设  $n \geq 3$ , 则只需证此时  $f$  在  $\mathbb{Q}$  上可约, 即上述部分一次因式乘积为有理多项式. 下证  $(x-x_1)(x-x_n) \in \mathbb{Q}[x]$ , 即证  $x_1 + x_n, x_1x_n \in \mathbb{Q}$ . 由  $f \in \mathbb{Q}[x]$  知  $f(x)$  的常数项为有理数, 即

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2} \in \mathbb{Q} \implies x_1 + x_n \in \mathbb{Q}.$$

注意到

$$x_1 x_n = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (x_n - x_1)^2}{4} = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (n-1)^2 d^2}{4},$$

故只须证的  $d^2 \in \mathbb{Q}$ . 由  $f \in \mathbb{Q}[x]$  和 Vieta 定理知

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \in \mathbb{Q}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_{n-k+1}^2 \right] = \sum_{k=1}^n \frac{[(x_k + x_{n-k+1})^2 + (x_k - x_{n-k+1})^2]}{4} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[(x_1 + x_n)^2 + (n-2k+1)^2 d^2]}{4} \triangleq q \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

从而

$$d^2 = \frac{4q - \sum_{k=1}^n (x_1 + x_n)^2}{\sum_{k=1}^n (n-2k+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

故  $x_1 x_n \in \mathbb{Q}$ , 进而  $(x - x_1)(x - x_n) \in \mathbb{Q}[x]$ , 此时  $(x - x_1)(x - x_n) \mid f(x)$ , 故此时  $f$  在  $\mathbb{Q}$  上可约, 矛盾!  $\square$

**例题 0.22** 设  $n \geq 2$  为一个正整数,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为两个  $n$  阶实矩阵, 已知  $A^2 = -I_n$  ( $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵), 且  $AB = BA$ , 证明:  $B$  的行列式  $\det(B) \geq 0$ .

**证明 证法一:** 由  $A^2 = -I_n$  和  $x^2 + 1$  不可约知  $A$  的极小多项式为  $x^2 + 1$ , 从而  $A$  的特征值只有  $\pm i$ , 于是  $|A| = 1$ , 且  $n$  为偶数. 进而  $A$  的特征多项式为  $(x^2 + 1)^{\frac{n}{2}}$ . 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & & \\ & R & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设  $A = J, B = (B_{ij})$  为相应分块矩阵,  $B_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . 由  $AB = BA$  可得

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} RB_{11} + B_{21} & * & \cdots & * & * \\ RB_{21} + B_{31} & RB_{22} + B_{32} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ RB_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2}-1,2} + B_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & * \\ RB_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11}R & * & \cdots & * & * \\ B_{21}R & B_{21} + B_{22}R & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{\frac{n}{2}-1,1}R & B_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2}-1,2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}R & * \\ B_{\frac{n}{2},1}R & B_{\frac{n}{2},1} + B_{\frac{n}{2},2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}R & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

比较第一列和最后一行元素得

$$RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R,$$

$$RB_{i1} + B_{i+1,1} = B_{i1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

$$RB_{\frac{n}{2},i+1} = B_{\frac{n}{2},i} + B_{\frac{n}{2},i+1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

于是

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1}R - RB_{\frac{n}{2}-1,1} = RB_{\frac{n}{2},2} - B_{\frac{n}{2},2}R.$$

又因为  $R^2 = -I_2$  且  $R$  可逆, 所以

$$\begin{aligned} RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R &\iff RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = -B_{\frac{n}{2}-1,1} - RB_{\frac{n}{2}-1,1}R \\ &\implies RB_{\frac{n}{2},1} = RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = O \implies B_{\frac{n}{2},1} = O. \end{aligned}$$

因此  $B_{\frac{n}{2}-1,1}R = RB_{\frac{n}{2}-1,1}$ ,  $RB_{\frac{n}{2},2} = B_{\frac{n}{2},2}R$ , 同理可得  $B_{\frac{n}{2}-1,1} = B_{\frac{n}{2},2} = O$ . 依此类推可得

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1} = \dots = B_{21} = O, \quad B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},2} = \dots = B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} = O, \quad RB_{11} = B_{11}R.$$

再比较(11)式第 2 列和倒数第 2 行主对角线以下元素, 同理可得

$$B_{\frac{n}{2}-1,i} = O, \quad i = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 2,$$

$$B_{i,2} = O, \quad i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$RB_{22} = B_{22}R.$$

依此类推最终可得  $B_{ij} = O, i > j$ , 即  $B$  为分块上三角阵, 并且

$$RB_{ii} = B_{ii}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}. \quad (12)$$

对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ , 设  $B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , 则由(12)式得

$$RB_{ii} = B_{ii}R \iff \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \implies a = d, c = -b.$$

从而

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \implies |B_{ii}| = a^2 + b^2 \geq 0.$$

因此  $|B| = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} |B_{ii}| \geq 0$ .

**证法二:** 由  $A^2 = -I_n$  和  $x^2 + 1$  不可约知  $A$  的极小多项式为  $x^2 + 1$ , 从而  $A$  的特征值只有  $\pm i$ , 于是  $|A| = 1$ , 且  $n$  为偶数. 进而  $A$  的特征多项式为  $(x^2 + 1)^r$ , 其中  $r = \frac{n}{2}$ . 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & R & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又注意到实矩阵  $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$  的特征多项式也为  $(x^2 + 1)^r$ , 进而由实数域上的广义 Jordan 标准型知,  $C$  在实数域上也相似于  $J$ . 因此  $A$  在实数域上相似于实矩阵  $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$ , 从而存在可逆矩阵  $P$ , 满足  $A = P^{-1}CP$ . 由于

命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设  $A = C, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $B_1$  为  $r$  阶矩阵, 由  $AB = BA$

可得

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ -B_1 & -B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 & B_4 \\ -B_4 & B_3 \end{pmatrix},$$

此时  $B_3 = -B_2, B_1 = B_4$ , 从而

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & B_2 + iB_1 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & O \\ -B_2 & B_1 + iB_2 \end{vmatrix} \\ &= |B_1 - iB_2| |B_1 + iB_2| = |B_1 - iB_2| \overline{|B_1 - iB_2|} \geq 0. \end{aligned}$$

□

**例题 0.23** 设  $\sigma$  为  $n$  维复向量空间  $\mathbb{C}^n$  的一个线性变换,  $\mathbf{1}$  表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1)  $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$ ;

(2) 存在  $\sigma$  的  $n+1$  个特征向量:  $v_1, \dots, v_{n+1}$ , 这  $n+1$  个向量中任何  $n$  个向量均线性无关.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2): 记

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T,$$

$e = e_1 + \dots + e_n$ . 由  $\sigma$  是纯量变换知上述  $n+1$  个向量都是其特征向量. 任取其中  $n$  个向量, 因为  $e_1, \dots, e_n$  显然是线性无关的, 所以可不妨设这  $n$  个向量为  $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e, e_{i+1}, \dots, e_n\}$ , 于是

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + \dots + a_{i-1} e_{i-1} + a_i e + a_{i+1} e_{i+1} + \dots + a_n e_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_i \\ \vdots \\ a_{i-1} + a_i \\ a_i \\ a_{i+1} + a_i \\ \vdots \\ a_n + a_i \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_{i-1} = a_i = a_{i+1} = \dots = a_n = 0. \end{aligned}$$

故  $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e, e_{i+1}, \dots, e_n\}$  线性无关.

(2)  $\Rightarrow$  (1): 假设这  $n+1$  个向量分别属于  $k(k \leq n+1)$  个不同特征值的特征子空间  $V_1, \dots, V_k$  中. 不妨设

$$1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = k, \quad t_i \in \mathbb{N};$$

$$v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i} \in V_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

显然  $V_i$  中至多含有  $n$  个  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  中向量. 任取  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \setminus \{v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}\}$  中  $n - (t_i - t_{i-1} + 1)$  个向量, 则由假设可知  $v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}$  和这  $n - (t_i - t_{i-1} + 1)$  个向量组成的向量组线性无关, 进而  $v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}$  也线性无关. 又因为属于不同特征值的特征向量必线性无关, 所以由  $\{v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}\}, i = 1, 2, \dots, k$  组成的向量组  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  也线性无关, 这与  $\mathbb{C}^n$  中至多只有  $n$  个线性无关向量矛盾! 因此这个  $n+1$  个向量都属于同一个特征子空间, 由于其中任意  $n$  个向量线性无关, 故这个特征子空间就是全空间, 即  $\sigma$  是纯量变换. □

**例题 0.24** 设  $A, B$  为  $n$  阶实方阵, 证明:  $r \left( \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} \right) = 2r(A)$ .

**证明** 由矩阵秩的基本公式和命题 ?? 可知  $r(A) = r(A^T A) \leq r(A^T A BA) = r((A^T B) A) \leq r(A)$ . 从而  $r(A^T A) = r(A^T A BA)$ , 于是  $A^T A X = BA$  存在非零解  $X_0$ . 故

$$\begin{pmatrix} E & -X_0 \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BA - A^T A X_0 \\ O & A^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \left( \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} \right) = 2r(A).$$

□

**例题 0.25** 设  $\mathbb{F}$  是一个数域,  $A, B, M \in \mathbb{F}^{n \times n}$  满足  $AM = MB$  且  $A, B$  有相同的特征多项式, 证明: 对任何  $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$  都有

$$\det(A - MX) = \det(B - XM).$$

**证明** 设有理数列  $t_n \rightarrow 0$ , 使得  $A_n = t_n E + A, B_n = t_n E + B$  可逆. 因为  $A, B$  有相同特征多项式, 所以  $A_n, B_n$  也有相同的特征多项式. 从而  $|A_n| = |B_n| \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是由降价公式可得

$$\begin{aligned} |A_n - MX| &= |A_n| |E - XA_n^{-1}M| = |A_n| |E - XMB_n^{-1}| \\ &= |E - MXB_n^{-1}| |B_n| = |B_n - XM|. \end{aligned}$$

因为上式两边都是关于  $t_n$  的连续函数, 所以令  $n \rightarrow \infty$  得  $|A - MX| = |B - XM|$ .

□

**例题 0.26** 设  $\mathbb{F}$  为数域且  $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 证明同构

$$\text{Ker}(A + B - ACB) \cong \text{Ker}(A + B - BCA). \quad (13)$$

**证明** 证法一: 注意到初等变换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A + B - BCA \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & A + B - BCA \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -E & A \\ -E + BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E - AC & A \\ -E & B \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} AC - E & A \\ E & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & B \\ AC - E & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & B + A - ACB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B + A - ACB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是我们证明了  $\text{rank}(A + B - ACB) = \text{rank}(A + B - BCA)$ , 这恰好由维数公式是(13).

证法二: 不妨设  $A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 否则用可逆矩阵  $P, Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ , 然后用  $PAQ$  代替  $A, PBQ$  代替  $B, Q^{-1}CP^{-1}$  代替  $C$ . 我们对应分块

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} (A + B - ACB) &= E_n + \begin{pmatrix} E_r - C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 - E_{n-r} \end{pmatrix}, \\ (A + B - BCA) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ C_3 & E_{n-r} \end{pmatrix} &= E_n + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 - E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r - C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用可逆矩阵乘矩阵不改变矩阵的秩和推论??知  $\text{rank}(A + B - ACB) = \text{rank}(A + B - BCA)$ , 这恰好由维数公式是(13).

□

**例题 0.27**

**证明**

□

**例题 0.28**

**证明**

□

**例题 0.29**

**证明**

□

**例题 0.30**

**证明**



☐

例题 0.31

证明

☐