

0.1 可测函数与连续函数的关系

0.1.1 Lusin 定理

引理 0.1

设 F_1, \dots, F_n 为 \mathbb{R}^n 中互不相交的闭集, 记 $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$, 则定义在 F 上的任意简单函数 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{F_k}(x)$ 都是 F 上的连续函数.



证明 设 $x_0 \in F$, 则存在 $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $x_0 \in F_{k_0}$. 由于 F_1, \dots, F_n 互不相交, 故 $x_0 \notin \bigcup_{k \neq k_0} F_k$. 又 $\bigcup_{k \neq k_0} F_k$ 闭, 则由命题??(3) 可知 $d(x_0, \bigcup_{k \neq k_0} F_k) > 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 记 $\delta = d(x_0, \bigcup_{k \neq k_0} F_k)$. 则当 $x \in F \cap B(x, \delta)$ 时, 有

$$d\left(x, \bigcup_{k \neq k_0} F_k\right) \geq d\left(x_0, \bigcup_{k \neq k_0} F_k\right) - d(x, x_0) = \delta - d(x, x_0) > 0.$$

于是由命题??(2) 可知 $x \notin F \setminus \bigcup_{k \neq k_0} F_k$, 故 $x \in F_{k_0}$. 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |c_{k_0} - c_{k_0}| = 0 < \varepsilon$$

因此, f 在点 x_0 连续, 由 x_0 的任意性, f 在 F 上连续. □

定理 0.1 (Lusin(卢津) 定理)

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.



注 上述Lusin 定理的结论不能改为: $f(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的连续函数, 其中 $m(Z) = 0$ (Lusin 定理也可不用 Egorov 定理来证明, 见美国数学月刊 (1988)). 粗略地讲, Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了.

注 1. 不妨假定 $f(x)$ 是实值函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 是实值函数的情形, 令

$$E_1 = \{x \in E : |f(x)| < +\infty\}, E_2 = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}.$$

则 $E_1 \cap E_2 = \emptyset, E = E_1 \cup E_2$. 由假设可知, 对 $\forall \delta > 0$, 存在闭集 $F \subset E_1 \subset E, m(E_1 \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数. 又由 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(E_2) = 0$. 进而

$$m(E \setminus F) = m((E_1 \cup E_2) \cap F^c) = m((E_1 \setminus F) \cup (E_2 \setminus F)) = m(E_1 \setminus F) + m(E_2 \setminus F) < \delta.$$

从而原结论成立.

2. 不妨设 $f(x)$ 是有界函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 有界的情形, 则当 $f(x)$ 无界时, 令 $g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}$, 则

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} = 1 - \frac{1}{1 + |f(x)|} \leq 1, \quad \forall x \in \{x \in E : f(x) \geq 0\};$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} = \frac{1}{1 - f(x)} - 1 \geq -1, \quad \forall x \in \{x \in E : f(x) < 0\}.$$

从而 $|g(x)| < 1, \forall x \in E$. 即 $g(x)$ 有界. 于是由假设可知, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $g(x)$ 是 F 上的连续函数.

又注意到

$$f(x) = g(x)(1 + |f(x)|) = \frac{g(x)}{1 + |f(x)|} = \frac{g(x)}{1 - \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}} = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|},$$

故由连续函数的性质可知, 此时 $f(x)$ 也是 F 上的连续函数. 从而原结论成立.

证明 不妨假定 $f(x)$ 是实值函数, 这是因为 $f(x)$ 几乎处处有限, 从而

$$m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

(1) 首先考虑 $f(x)$ 是可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{E_i}(x), x \in E = \bigcup_{i=1}^p E_i, E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j).$$

此时, 由定理??可知, 对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 E_i , 可作 E_i 中的闭集 F_i , 使得

$$m(E_i \setminus F_i) < \frac{\delta}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

显然 F_1, F_2, \dots, F_p 是互不相交的闭集, 于是由引理 0.1 可知 $f(x)$ 在 $F = \bigcup_{i=1}^p F_i$ 上连续. 由闭集的运算性质可知 F 也是闭集, 且由定理??(3) 有

$$m(E \setminus F) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus F_i)\right) = \sum_{i=1}^p m(E_i \setminus F_i) < \sum_{i=1}^p \frac{\delta}{p} = \delta.$$

(2) 其次, 考虑 $f(x)$ 是一般可测函数的情形. 由于可作变换

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \quad \left(f(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|} \right),$$

故不妨假定 $f(x)$ 是有界函数. 根据简单函数逼近定理可知, 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 现在对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$, 由 (1) 可知存在 E 中的闭集 $F_k: m(E \setminus F_k) < \frac{\delta}{2^k}$, 使得 $\varphi_k(x)$ 在 F_k 上连续. 令

$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $F \subset E$, 又由闭集的运算性质可知 F 为闭集. 且有

$$\begin{aligned} m(E \setminus F) &= m\left(E \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c\right) = m\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^c\right) \\ &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \delta. \end{aligned}$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 F 上都是连续的, 所以根据一致收敛性可知, $f(x)$ 在 F 上连续. □

推论 0.1

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 \mathbb{R}^n 上的一个连续函数 $g(x)$, 使得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \delta;$$

若 E 还是有界集, 则可使上述 $g(x)$ 具有紧支集. ♥

证明 由Lusin定理可知, 对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E \setminus F) < \delta$ 且 $f(x)$ 是 F 上的连续函数, 从而根据连续函数延拓定理 (2), 存在 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$f(x) = g(x), \quad x \in F.$$

因为 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E \setminus F$, 所以得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leq m(E \setminus F) < \delta.$$

若 E 是有界集, 不妨设 $E \subset B(0, k)$, 则作 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $\varphi(x), 0 \leq \varphi(x) \leq 1$, 且满足 (φ 在 $B(0, k) \setminus F$ 中连续且端点连续连接)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \notin B(0, k). \end{cases}$$

从而将上述 $g(x)$ 换成 $g(x) \cdot \varphi(x)$. 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$, 则 $g(x)$ 的支集为 $\overline{A} \subset B(0, k)$. 于是 \overline{A} 为有界闭集, 进而 $g(x)$ 具有紧支集. □

推论 0.2

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则存在 \mathbb{R}^n 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

♡

证明 由推论 0.1 可知, 对于任意的趋于零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$, 存在 \mathbb{R}^n 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g_k(x)| \geq \varepsilon_k\}) < \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

这说明 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 从而根据 Riesz 定理, 可选子列 $\{g_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

□

注 我们知道, \mathbb{R} 上的 Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

可以表示为 (双重指标) 连续函数列的累次极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} [\cos(n!2\pi x)]^{2k} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

然而, 并不存在 \mathbb{R} 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

例题 0.1 若 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的实值可测函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

证明 因为 $f(x+h) - f(x) = f(h)$ 以及 $f(0) = 0$, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续即可. 根据 Lusin 定理, 可作有界闭集 $F: m(F) > 0$, 使得 $f(x)$ 在 F 上 (一致) 连续, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x - y| < \delta_1, \quad x, y \in F.$$

现在研究 $F - F$. 由 Steinhaus 定理知道, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$F - F \supset [-\delta_2, \delta_2].$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $z \in [-\delta, \delta]$ 时, 由于存在 $x, y \in F$, 使得 $z = x - y$, 故可得

$$|f(z)| = |f(x - y)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的. □

例题 0.2 设 $f(x)$ 是 $I = (a, b)$ 上的实值可测函数. 若 $f(x)$ 具有中值 (下) 凸性质:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in I,$$

则 $f \in C(I)$.

证明 根据数学分析的理论易知, 若 $f(x)$ 是 I 上的有界函数, 则 $f \in C(I)$.

对此, 假定 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in I$ 处不连续, 且考查区间 $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subset I$, 其中存在 $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad f(\xi_k) \geq k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

对于任意的 $x \in (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta)$, 显然有

$$x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta, \quad x_0 - 2\delta \leq x' \stackrel{\text{def}}{=} 2\xi_k - x \leq x_0 + 2\delta.$$

由 $2\xi_k = x' + x$ 可知 $2f(\xi_k) \leq f(x) + f(x')$, 从而必有 $f(x) \geq k$ 或者 $f(x') \geq k$. 这说明

$$m(\{x \in (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta) : f(x) \geq k\}) \geq \delta.$$

也就是说, 对于任意大的自然数 k , 均有

$$m(\{x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta : f(x) \geq k\}) \geq \delta.$$

从而导致 $f(x_0) = +\infty$, 矛盾, 即得所证. \square

0.1.2 复合函数的可测性

引理 0.2

若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R}^n 上的实值函数, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上可测的充分必要条件是, 对于 \mathbb{R} 中的任一开集 $G, f^{-1}(G)$ 是可测集. \heartsuit

证明 充分性: 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 显然 $(t, +\infty)$ 可测, 故由充分性的假设可知 $f^{-1}((t, +\infty))$ 也可测, 因此 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上可测.

必要性: 由假设知 $f^{-1}((t, +\infty))$ 是可测集, 故知对任意的区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$, 点集

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty)) \setminus f^{-1}([b, +\infty))$$

是可测的. 若 $G \subset \mathbb{R}$ 是开集, 则由开集构造定理 (1) 可设 $G = \bigcup_{k \geq 1} (a_k, b_k)$, 从而根据

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k \geq 1} f^{-1}(a_k, b_k)$$

可知 $f^{-1}(G)$ 是可测集. \square

定理 0.2

设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数, $g(x)$ 是 \mathbb{R} 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x) = f(g(x))$ 是 \mathbb{R} 上的可测函数. \heartsuit

注 当 $f(x)$ 是可测函数而 $g(x)$ 是连续函数时, $f(g(x))$ 就不一定是可测函数 (见例题 0.3).

证明 由 f 的连续性可知, 对任一开集 $G \subset \mathbb{R}$, 都有 $f^{-1}(G)$ 是开集. 再根据 $g(x)$ 的可测性, 由推论 0.2 可知 $g^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $h(x) = f(g(x))$ 是 \mathbb{R} 上的可测函数. \square

例题 0.3 设 $\Phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\Psi(x) = \frac{x + \Phi(x)}{2},$$

则 $\Psi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 C 是 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集, W 是 $\Psi(C)$ 中的不可测子集.

现在令 $f(x)$ 是点集 $\Psi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 作

$$g(x) = \Psi^{-1}(x), \quad x \in [0, 1].$$

显然, $f(x) = 0, a.e. x \in [0, 1]$, $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的严格递增的连续函数. 易知 $f(g(x))$ 在 $[0, 1]$ 上不是可测函数.

注 该例说明, 存在可测函数 $f(x)$, 它有反函数 $f^{-1}(x)$, 但 $f^{-1}(x)$ 不可测.

定理 0.3

设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续变换, 当 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m(Z) = 0$ 时, $T^{-1}(Z)$ 是零测集. 若 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的实值可测函数, 则 $f(T(x))$ 是 \mathbb{R}^n 上的可测函数. \heartsuit

证明 设 G 是 \mathbb{R} 中的任一开集, 由假设知道 $f^{-1}(G)$ 是可测集. 不妨设 $f^{-1}(G) = H \setminus Z$, 其中 $m(Z) = 0$, 且 H 是 G_δ 型集. 由假设可知 $T^{-1}(Z)$ 是零测集以及 $T^{-1}(H)$ 是 G_δ 型集, 故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G)) = T^{-1}(H) \setminus T^{-1}(Z)$$

立即得出 $T^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $f(T(x))$ 是 \mathbb{R}^n 上的可测函数. \square

推论 0.3

设 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 的实值可测函数, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $f(T(x))$ 是 \mathbb{R}^n 上的可测函数. \heartsuit

证明

□

例题 0.4 若 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的可测函数, 则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 (i) 记 $F(x, y) = f(x), (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 则因对 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{(x, y) : F(x, y) > t\} = \{(x, y) : f(x) > t, y \in \mathbb{R}^n\},$$

所以 $F(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

(ii) 作 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的非奇异线性变换 T :

$$\begin{cases} x = \xi - \eta, \\ y = \xi + \eta, \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

易知在变换 T 下, $F(x, y)$ 变为 $F(\xi - \eta, \xi + \eta) = f(\xi - \eta)$, 从而 $f(\xi - \eta)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

例题 0.5 设 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的实值可测函数, 令 $F(x, y) = f(y/x) (0 < x, y < +\infty)$, 则 $F(x, y)$ 是 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上的二元可测函数.

证明 令 $g(\theta) = f(\tan \theta), 0 < \theta < \pi/2$. 因为 $y = \tan x$ 的反函数是绝对连续的, 它把零测集变为零测集 (见第五章), 所以 $g(\theta)$ 在 $(0, \pi/2)$ 上可测. 从而对 $t \in \mathbb{R}$, 点集

$$E = \{\theta : 0 < \theta < \pi/2, g(\theta) > t\}$$

是可测集. 又由于我们有

$$\begin{aligned} & \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty, F(x, y) > t\} \\ &= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 0 < r < +\infty, \theta \in E\} = S_E(0, +\infty), \end{aligned}$$

故根据例题??所述, 即得所证. □

定理 0.4

设定义在 \mathbb{R}^2 上的函数 $f(x, y)$ 满足:

(i) $f(x, y)$ 是单变量 $y \in \mathbb{R}$ 的可测函数;

(ii) $f(x, y)$ 是单变量 $x \in \mathbb{R}$ 的连续函数,

则对定义在 \mathbb{R} 上任一实值可测函数 $g(y), f[g(y), y]$ 是 \mathbb{R} 上的可测函数. ♥

证明 对 \mathbb{R} 作如下的区间分割: $\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right] (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, 并对 $(x, y) \in [(m-1)/n, m/n] \times \mathbb{R}$, 作函数列 (凸线性组合)

$$f_n(x, y) = n \left(\frac{m}{n} - x \right) f \left(\frac{m-1}{n}, y \right) + n \left(x - \frac{m-1}{n} \right) f \left(\frac{m}{n}, y \right),$$

易知 $f_n(x, y)$ 位于 $f((m-1)/n, y)$ 与 $f(m/n, y)$ 之间.

因为对每点 (x, y) , 均存在区间列

$$I_k = \left[\frac{m_k - 1}{n_k}, \frac{m_k}{n_k} \right] (k \in \mathbb{N}), \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = x.$$

由 (ii) 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$, 从而我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(g(y), y) = f(g(y), y),$$

即可得证. □