0.1 Cauchy 积分公式的一些重要推论

定理 0.1 (Cauchy 不等式)

设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯, 且对任意 $z \in B(a,R)$, 有 $|f(z)| \leqslant M$, 那么

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

笔记 这个不等式给出了圆盘上全纯函数的各阶导数在圆心处值的估计.

证明 取 $0 < r < R$, 则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯, 由定理??, 得

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

于是, 由长大不等式得

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

让 $r \to R$, 即得所要证的不等式 (1).

□

定理 0.2 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

证明 设 f 为一有界整函数, 其模的上界设为 M, 即对任意 $z \in \mathbb{C}$, 有 $|f(z)| \leqslant M$. 任取 $a \in \mathbb{C}$, 以 a 为中心、R 为半径作圆, 因为 f 为整函数, 故由 Cauchy 不等式可得

$$|f'(a)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

这个不等式对任意 $R > 0$ 都成立, 让 $R \to \infty$, 即得 $f'(a) = 0$. 因为 a 是任意的, 所以在全平面上有 $f'(z) \equiv 0$, 因而由命题??可知 f 是常数.

□

定理 0.3 (代数学基本定理)

任意复系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

笔记 考虑到实系数多项式在实数域中未必有零点, 这个定理给出了复数域的又一重要性质.

证明 反证, 如果 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中没有零点, 那么 $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ 是一个整函数. 由 $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$ 知

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

故存在 $R > 0$, 使当 $|z| > R$ 时, 有

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

又由 f 是整函数知 $f \in C(B(0,R))$, 故由定理??知当 $|z| \leqslant R$ 时,f 是有界的. 因而 f 是有界整函数. 由Liouville 定理,f 应是一常数, 显然矛盾! 这就证明了 P 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

□

定理 0.4 (Morera 定理)

如果 f 是区域 D 上的连续函数, 且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零, 那么 f 在 D 上全纯.

笔记 这个定理是 Cauchy 积分定理的逆定理.

证明 由定理**??**, 存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 中成立. 由定理**??**,F' 是 D 中的全纯函数, 所以 $F' = f$ 也是全纯函数.

□