0.1 微分学计算

0.1.1 单变量微分学计算

例题 0.1

(1) 设 $f(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(x-k)$. 对整数 $0\leqslant j\leqslant n$, 求导数 $f'(j)$.

(2) 设 $g(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(e^x-k)$, 求 $g'(\ln j), j=0,1,2,\cdots,n$.

解

(1) 解法一:注意到 $f'(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x-k)$, 故

$$\begin{aligned}f'(j)&=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(j-k)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(j-k)\\&=(-1)^{n-j}j!(n-j)!+\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(j-j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}(j-k)\\&=(-1)^{n-j}j!(n-j)!\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}f'(j)=\lim_{x\to j}\frac{f(x)-f(j)}{x-j}&=\lim_{x\to j}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x-k)-\prod\limits_{k=0}^{n}(j-k)}{x-j}\\&=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)+\lim_{x\to j}\frac{(j-j)\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)}{x-j}\\&=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)=(-1)^{n-j}j!(n-j)!\end{aligned}$$

(2) 记 $f(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-k)$, 则 $g(x)=f(e^x)$. 从而 $g'(x)=e^xf'(e^x)$, 于是由 (1) 可知

$$g'(\ln j)=jf'(j)=j\cdot(-1)^{n-j}j!(n-j)!$$

□

例题 0.2 对 $n\in\mathbb{N}$,

(1) 设 $f(x)=\sin(ax), a\in\mathbb{R}$, 求 $f^{(n)}$.

(2) 设 $f(x)=e^x\cos x$, 求 $f^{(n)}$.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 求 $f^{(n)}$.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}$.

(5) 设 $f(x)=\arctan x, x>0$, 求 $f^{(n)}$.

解

(1) 我们断言

$$f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right),\quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

当 $n=0$ 时, 上式显然成立. 假设当 $n=k$ 时上式成立, 则

$$f^{(k+1)}(x)=a^{k+1}\cos\left(ax+\frac{k}{2}\pi\right)=a^{k+1}\sin\left(ax+\frac{k+1}{2}\pi\right).$$

故由数学归纳法可知 (1) 式成立.

(2) 由 Euler 公式可知,$\cos x=\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})$, 从而 $f(x)=\mathrm{Re}[e^{(1+\mathrm{i})x}]$. 于是

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{Re}[(1+\mathrm{i})^n e^{(1+\mathrm{i})x}],\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

注意到

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},$$

进而 $(1+\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$. 故

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{Re}\left[2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})x}\right]=2^{\frac{n}{2}}e^x\mathrm{Re}\left[e^{\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{i}}\right]=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

(3) 令 $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $\ln x=xy$. 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 两边同时对 x 求 n 阶导, 得

$$(\ln x)^{(n)}=(xy)^{(n)}\iff\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^{(k)}y^{(n-k)}=xy^{(n)}+ny^{(n-1)}.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}xy^{(n)}+ny^{(n-1)}&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\\ \iff(-1)^n x^{n+1}y^{(n)}-(-1)^{n-1}nx^ny^{(n-1)}&=-(n-1)!\\ \iff\frac{(-1)^n x^{n+1}y^{(n)}}{n!}-\frac{(-1)^{n-1}x^ny^{(n-1)}}{(n-1)!}&=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{(-1)^nx^{n+1}y^{(n)}}{n!}-xy=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}\right).$$

故

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}\right)-\ln x\right).$$

(4) 注意到 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$, 则 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$.

(5) 注意到 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}}-\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$, 故

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n}-\frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right]=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^n}\left[(x+\mathrm{i})^n-(x-\mathrm{i})^n\right]\\ &=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^n}\left[\left(\sqrt{1+x^2}e^{\mathrm{i}\arctan\frac{1}{x}}\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}e^{-\mathrm{i}\arctan\frac{1}{x}}\right)^n\right]\\ &=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\left(e^{\mathrm{i}n\arctan\frac{1}{x}}-e^{-\mathrm{i}n\arctan\frac{1}{x}}\right)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\cdot 2\mathrm{i}\cdot\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)\\ &=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

□

例题 0.3 设 $f(x)=x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 计算 $f^{(n)}(0),n\in\mathbb{N}$.

笔记 此类问题都是通过背 Taylor 公式之后通过拼凑来得到 $f^{(n)}(0)$, 这是因为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

解 注意到

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' = (\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \xlongequal{\text{广义二项式定理}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n} x^{2n},$$

于是

$$\begin{aligned}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n}}{2n+1} x^{2n+1} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n}}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

从而 $f(x) = x^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+3}$, 因此

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 6, & n=3 \\ \dfrac{(-1)^m (2m-1)!!(2m+3)!}{m!\cdot 2^m (2m+1)}, & n = 2m+3,\ m=1,2,\cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

命题 0.1

$$\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n},\ x \in (-1,1).$$

例题 0.4 生成级数或者建立递推法求解高阶导数值 对 $n \in \mathbb{N}_0$,

(1) 设 $f(x) = \arcsin^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(2) 设 $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(3) 设 $f(x) = (x+\sqrt{x^2+1})^m, m \in \mathbb{N}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(4) 设 $f(x) = \arctan^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

笔记 此类问一般是先建立函数满足的微分方程, 然后用乘积求导法则或者形式幂级数对比系数来得到导数的递推, 从而完成了证明.

解

(1) 解法一:注意到

$$f'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} f' = 2\arcsin x,$$

令 $y = f(x)$, 则对上式两边同时求导得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f' + \sqrt{1-x^2} f'' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow -xy' + (1-x^2)y'' = 2.$$

再对上式两边同时对 x 求 n $(n \geqslant 2)$ 阶导, 得

$$\begin{gathered}\left[-xy' + (1-x^2)y''\right]^{(n)} = 2^{(n)} \\ \Longleftrightarrow -\left[ny^{(n)} + xy^{(n+1)}\right] + \left[\binom{n}{2}\cdot(-2)y^{(n)} + \binom{n}{1}(-2x)y^{(n+1)} + (1-x^2)y^{(n+2)}\right] = 0\end{gathered}$$

将 $x=0$ 代入上式得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0), \forall n \geqslant 2. \tag{2}$$

显然上式对 $n=1$ 也成立. 又注意到 $f''(0)=2$, 因此对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 由(2) 式可得

$$\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)}=4n^2\Rightarrow\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)}=\prod_{i=1}^{n}4i^2\Rightarrow f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2.$$

显然上式对 $n=0$ 也成立. 故

$$f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2,\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

又 $f'''(0)=0$, 故由(2)式可得

$$f^{(2n-1)}(0)=(2n-1)^2f^{(2n-3)}(0)=\cdots=[(2n-1)!!]^2f^{(3)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}_1.$$

解法二:注意到

$$f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\iff\sqrt{1-x^2}f'=2\arcsin x,$$

令 $y=f(x)$, 则对上式两边同时求导得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'+\sqrt{1-x^2}f''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\iff -xy'+(1-x^2)y''=2. \tag{3}$$

因为 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 所以由 Taylor 公式可知

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

其中 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!},n\in\mathbb{N}_0$. 再将上式代入(3) 式可得

$$\begin{aligned}2&=-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-n(n-1)a_n]x^n.\end{aligned}$$

比较上式两边系数, 得对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 都有

$$\begin{aligned}&(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-n(n-1)a_n=0\\\iff&(n+2)(n+1)\cdot\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}-n\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}-n(n-1)\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0\\\iff&f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).\end{aligned}\tag{4}$$

又 $f''(0)=2$, 因此对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 由 (5)式可得

$$\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)}=4n^2\Rightarrow\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)}=\prod_{i=1}^{n}4i^2\Rightarrow f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2.$$

显然上式对 $n=0$ 也成立. 故

$$f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2,\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

又 $f'''(0)=0$, 故由(5)式可得

$$f^{(2n-1)}(0)=(2n-1)^2f^{(2n-3)}(0)=\cdots=[(2n-1)!!]^2f^{(3)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}_1.$$

(2)

(3)

(4)

□

命题 0.2

设 f 在 a 处 $n+1$ 阶连续可导的, 证明:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

注 不妨设 $a=0, f(a)=0$ 的原因: 先证不妨设 $f(a)=0$ 成立. 假设 $f(a)=0$ 时结论成立, 则当 $f(a)\neq 0$ 时, 令 $g(x)=f(x)-f(a)$, 则 $g(a)=0$, 从而由假设可知

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x-a}\right]=\frac{g^{(n+1)}(a)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

故可以不妨设 $f(a)=0$.

再证不妨设 $a=0$ 成立. 假设 $a=0$ 时结论成立, 则当 $a\neq 0$ 时, 令 $g(x)=f(x+a)$, 则由假设可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x}\right]=\frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x+a)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x}\right]\\&=\frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.\end{aligned}$$

故可以不妨设 $a=0$.

证明 不妨设 $a=0, f(a)=0$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}=\frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(-x)^k.$$

于是由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x}\right]&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(-x)^k}{x^{n+1}}\\&\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}}n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(x)(-x)^{k-1}}{(n+1)x^n}\\&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k)!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k}{(n+1)x^n}\\&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(-x)^n}{(n+1)x^n}\\&=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.\end{aligned}$$

□

例题 0.5 设 $f\in C^\infty(\mathbb{R}), n\in\mathbb{N}$ 满足

$$f^{(j)}(0)=0, j=0,1,2,\cdots,n-1, f^{(n)}(0)\neq 0.$$

证明: $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x^n}, & x\neq 0\\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, & x=0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微.

笔记 本题不能对 Taylor 公式的 peano 余项求导来说明 g 可微分性, 这是不严格的.

证明 当 $n=0$ 时,$g=f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 显然成立. 假设命题对 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 考虑 $n+1$ 的情形. 令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$, 则

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{\frac{f(x)}{x}}{x^n}=\frac{h(x)}{x^n}. \tag{5}$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 由命题 0.2可知

$$\lim_{x\to 0} h^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(k)} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}.$$

于是由导数极限定理可知 $h^{(k)}(0) = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, 故 h 在 $x = 0$ 处无穷次可微. 又由 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 从而 $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, 故 $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. 于是

$$\begin{aligned} h^{(j)}(0) &= \lim_{x\to 0} h^{(j)}(x) = \frac{f^{(j+1)}(0)}{j+1} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1, \\ h^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \neq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

因此 $h(x)$ 满足归纳假设条件, 进而由归纳假设及(5)(6)式可知

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}} & ,x \neq 0 \\ \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} & ,x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{x^{n}} & ,x \neq 0 \\ \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!} & ,x = 0 \end{cases} \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

因此由数学归纳法可知, 结论成立.

□