0.1 Lebesgue 积分和 Riemann 积分的关系

定义 0.1 (Riemann 积分相关定义)

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数,$\{\Delta^{(n)}\}$ 是对 $[a,b]$ 所做的分划序列:

$$\Delta^{(n)}: a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{k_n}^{(n)}=b \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$|\Delta^{(n)}|=\max\{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}: 1\leqslant i\leqslant k_n\}, \quad \lim_{n\to\infty}|\Delta^{(n)}|=0.$$

对每个 i 以及 n, 若令

$$M_i^{(n)}=\sup\{f(x): x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}\},$$

$$m_i^{(n)}=\inf\{f(x): x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}\},$$

则关于 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分, 下述等式成立:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}).$$

♣

引理 0.1

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数, 记 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅 (函数), 则有

$$\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中左端是 $\omega(x)$ 在 I 上的 Lebesgue 积分.

♡

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的, 所以 $\omega(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数. 由命题**??**可知,$\omega(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 因此 $\omega\in L([a,b])$.

对于定义**??**所说的分划序列 $\{\Delta^{(n)}\}$, 作函数列

$$\omega_{\Delta^{(n)}}(x)=\begin{cases}M_i^{(n)}-m_i^{(n)} & ,x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}),\\ 0 & ,x\text{ 是}\Delta^{(n)}\text{ 的分点},\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,k_n,\ n=1,2,\cdots).$$

$E=\{x\in[a,b]: x$ 是$\Delta^{(n)}\,(n=1,2,\cdots)$ 的分点$\}$.

显然 $m(E)=0$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{\Delta^{(n)}}(x)=\omega(x), \quad x\in[a,b]\setminus E.$$

现在记 A,B 各为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下确界, 由于对一切 n, 有 $\omega_{\Delta^{(n)}}(x)\le A-B$, 故根据控制收敛定理 (控制函数是常数函数) 可知,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 因为

$$\begin{aligned}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{k_n}(M_i^{(n)} - m_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) - \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),\end{aligned}$$

所以得到

$$\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.1

若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

♡

笔记 上述定理指出, 对于 $[a,b]$ 上的有界函数而言, 其 Riemann 可积性并非由该函数在不连续点处的性态所致, 而是取决于它的不连续点集的测度.

证明 必要性, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 则 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分相等, 从而由引理 0.1可知 $\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 因为 $\omega(x) \geq 0$, 所以由推论??可知 $\omega(x) = 0$,a. e. $x \in [a,b]$. 从而

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in B(x_0,\delta)} |f(x) - f(x_0)| \leqslant \lim_{\delta\to 0}\sup_{x',x''\in B(x_0,\delta)} \left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| = w(x_0) = 0, \text{a.e. } x_0 \in [a,b]\,.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处连续的.

充分性, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集, 则

$$\begin{aligned}w(x_0) &= \lim_{\delta\to 0}\sup_{x,x''\in B(x_0,\delta)} \left|f\left(x\right) - f\left(x''\right)\right| \\ &\leqslant \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in B(x_0,\delta)} |f(x) - f(x_0)| + \lim_{\delta\to 0}\sup_{x''\in B(x_0,\delta)} |f(x'') - f(x_0)| \\ &= 0, \text{a.e. } x_0 \in [a,b]\,.\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 的振幅函数 $\omega(x)$ 几乎处处等于零, 从而由引理 0.1可知

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

即 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分相等,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的. □

定理 0.2

若 $f(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的, 且其积分值相同.

♡

注 今后, 为整合起见, 对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分, 也记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 首先, 根据题设以及定理 0.1,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处连续的. 因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数,$f \in L(I)$.

其次, 对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

根据 Lebesgue 积分对积分区域的可加性, 我们有

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

记 M_i, m_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界, 则得

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$, 从而可知

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

于是, 在上式左、右两端对一切分划 Δ 各取上、下确界, 立即得到

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 积分与 Riemann 积分是相等的. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数, 且不恒为零. 若有

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

则 $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(x \in \mathbb{R})$.

证明 由题设知 $f(x) = f(x)f(0)$, 故 $f(0) = 1$. 注意到 $f(x) \neq 0 (x \in \mathbb{R})$, 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t (x \in \mathbb{R})$, 且选 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $F(a) \neq 0$, 则有

$$F(x+a) - F(x) = \int_x^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)F(a),$$

$$f(x) = \frac{F(x+a) - F(x)}{F(a)}.$$

这说明 $f(x)$ 是连续函数, 因此 $F \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, 从而可得 $f'(x+y) = f(x)f'(y)$. 取 $y = 0$, 即得 $f'(x) = f(x)f'(0)$. 记 $\alpha = f'(0)$, 可知 $(f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x})' \equiv 0$, 而 $f(0) = 1$, 故又有 $f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x} \equiv 1$, 即得所证. □

定理 0.3

设 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 其并集是 E, 又

$$f \in L(E_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

若极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $f \in L(E)$, 且有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 在上述定理中, 特别当 E_k 是矩体 I_k(如 $\mathbb{R}$ 中的 $E_k = [0, k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$,$E = [0, +\infty)$), 且 $f(x)$ 在每个 I_k 上都是 Riemann 可积函数, 以及条件

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$$

成立时, 我们就可以通过计算 Riemann 积分 $\int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ 而得到 Lebesgue 积分

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

的值.

还应指出的是, 上述计算方法与 $\{I_k\}$ 的选择无关, 只要保证它递增到并集 E.

证明 因为 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 是非负渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} |f(x)|\chi_{E_k}(x) = |f(x)|, \quad x \in E,$$

所以由 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)|\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

即 $f \in L(E)$. 又由于在 E 上有 $(k=1,2,\cdots)$,

$$\lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x) = f(x), \quad |f(x)\chi_{E_k}(x)| \leqslant |f(x)|,$$

故根据控制收敛定理可得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.1 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 则它在 $[0,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

但我们有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = +\infty.$$

这说明 $f \notin L([0,+\infty))$.

证明

□

例题 0.2 设 $f(x)=x^\alpha\sin(1/x)\ (x\in[0,1])$,

(i) 若 $\alpha \geq 0$, 则 $f \in R([0,1])$;

(ii) 若 $\alpha \geq -2$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的反常积分存在;

(iii) 若 $\alpha > -1$, 则 $f \in L([0,1])$.

证明

□

例题 0.3 求 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,dx$.

解 由于当 $0<x<1$ 时, 有 $-\dfrac{\ln x}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}-x^n\ln x$, 且

$$\int_0^1 x^n\ln x\,dx = -\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\,dt = -\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

故得

$$\int_0^1\left(-\frac{\ln x}{1-x}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 -x^n\ln x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

由此可知 $I=-\dfrac{\pi^2}{6}$. □

注 1. 设 $f\in L(E)$, 且 $E=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,$E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$, 其中每个 E_n 均为可测集, 则

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx.$$

但此结论对反常积分不一定真. 例如: 对收敛级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$(非绝对收敛) 以及 $\alpha\neq-\ln 2$, 将 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的项作重新排列使新级数收敛到 α, 并令

$$E_n=[n-1,n), \quad f(x)=\frac{(-1)^n}{n} \quad (n-1\leq x<n, n\in\mathbb{N}),$$

我们有

$$-\ln 2=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx=\alpha.$$

这说明在一种积分理论中, 如果反常积分存在的函数总是可积的, 那么此种积分理论就不具备对区域的可数可加性. 因此, 我们不能期望有这样一种积分理论, 它同时是反常积分和 Lebesgue 积分的推广. 如果放弃对积分区域可数可加性的要求, 那么这种积分理论是存在的.

2. 对于定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$,$g(x)$, 令 $F(x)=\max\limits_{[a,b]}\{f(x),g(x)\}$. 若 $f,g\in L([a,b])$, 则 $F\in L([a,b])$; 若 $f,g\in R([a,b])$, 则 $F\in R([a,b])$. 但若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上反常可积, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定反常可积.

3. 设 $f\in R([a,b])$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且有

$$m(\{x\in[a,b]:f(x)\neq g(x)\})=0,$$

但 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定 Riemann 可积, 例如

$$f(x)=1,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\quad (x\in[0,1]).$$

4. 设 $f\in L([0,1])$ 且有界, 不一定存在 $g\in R([0,1])$, 使得 $g(x)=f(x)$,a.e. $x\in[0,1]$. 例如, 取 $[0,1]$ 中一个无处稠密的正测集 E, 且令 $f(x)=\chi_E(x)\ (0\le x\le 1)$, 则

$$\int_0^1 f(x)\,dx=m(E)>0.$$

此时, 如果存在 $g\in R([0,1])$, 且有 $g(x)=f(x)$,a.e. $x\in[0,1]$, 那么点集 $\{x\in[0,1]:g(x)=0\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 而使 $\int_0^1 g(x)\,dx=0$.

5. $[a,b]$ 中存在零测集 E, 对于任意的 $f\in R([a,b])$,E 中必有 $f(x)$ 的连续点.

证明记 $[a,b]\cap\mathbb{Q}=\{r_n\}$, 且作点集

$$E_m=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n-2^{-(n+m)},r_n+2^{-(n+m)}\right)\quad (m\in\mathbb{N}),\quad E=\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m,$$

则 $m(E_m)\le 2^{-(n+1)}$, 且 $m(E)=0$. 注意到 $f(x)$ 的连续点集 $\mathrm{cont}(f)$ 是稠密 G_δ 集, 且 $m([a,b]\setminus\mathrm{cont}(f))=0$. 根据 Baire 纲定理, 可知 $\mathrm{cont}(f)$ 是第二纲集.

$[a,b]\setminus E_m\ (m\in\mathbb{N})$ 是无处稠密集,E 是 G_δ 集,$[a,b]\setminus E=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}([a,b]\setminus E_m)$ 是第一纲集. 从而得到 $\mathrm{cont}(f)\not\subset[a,b]\setminus E$, 即 $\mathrm{cont}(f)\cap E\neq\varnothing$.