

0.1 多变元二次型的计算

例题 0.1 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

解 解法一:

解法二: 为了方便起见, 不妨考虑 $2f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $S_n = A(n \geq 2)$, S_1 为一阶零矩阵, C 为 $2 \times (n-2)$ 矩阵, 其中第 $(2, 1)$ 元素为 1, 其他元素为 0. 对 S_n 进行如下分块, 并利用非异阵 S_2 对称地消去同行同列的矩阵 C, C' , 经计算可知 $C'S_2^{-1}C = C'S_2C = O$, 故 S_n 合同于下列分块对角矩阵:

$$S_n = \begin{pmatrix} S_2 & C \\ C' & S_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} S_2 & O \\ O & S_{n-2} - C'S_2^{-1}C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} S_2 & O \\ O & S_{n-2} \end{pmatrix}$$

因此, 由数学归纳法可知, 当 $n = 2k$ 时, A 合同于 $\text{diag}\{S_2, \cdots, S_2\}$, 其中有 k 个 S_2 ; 当 $n = 2k+1$ 时, A 合同于 $\text{diag}\{S_2, \cdots, S_2, S_1\}$, 其中有 k 个 S_2 . 注意到 S_2 合同于 $\text{diag}\{1, -1\}$, 故当 $n = 2k$ 时, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$; 当 $n = 2k+1$ 时, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$. \square

例题 0.2 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

解 解法一:

解法二:

解法三: 为了方便起见, 不妨考虑 $2f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

注意到 A 的第 k 个顺序主子式 $|A_k|$ 的每行元素之和都为 $k+1$, 故用求和法可求出 $|A_k| = k+1 (1 \leq k \leq n)$, 于是 A 为正定阵. 因此 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定型, 其规范标准型为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. \square

例题 0.3 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - s)^2, \quad s = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

证明 解法一:

解法二: 令 $y_i = x_i - s (1 \leq i \leq n)$, 用矩阵表示就是 $y = Ax$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

注意到 \mathbf{A} 的第 k 个顺序主子式 $|\mathbf{A}_k|$ 的每行元素之和都为 $(n-k)/n$, 故用求和法可求出 $|\mathbf{A}_k| = (n-k)/n (1 \leq k \leq n)$, 因此 \mathbf{A} 的秩等于 $n-1$. 由命题??可知 $r(f) = r(\mathbf{A}) = n-1$, 于是半正定型 f 的正惯性指数等于 $n-1$, 其规范标准型为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2$. \square

例题 0.4 化下列实二次型为标准型, 其中 a_i 都是实数:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - a_1 x_2)^2 + (x_2 - a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - a_{n-1} x_n)^2 + (x_n - a_n x_1)^2$$

证明 解法一:

解法二: 令 $y_i = x_i - a_i x_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$, $y_n = x_n - a_n x_1$, 用矩阵表示就是 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & & & \\ & 1 & -a_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -a_{n-1} \\ -a_n & & & & 1 \end{pmatrix}$$

经计算可知 $|\mathbf{A}| = 1 - a_1 a_2 \cdots a_n$ 并且 \mathbf{A} 的左上角的 $n-1$ 阶子式等于 1, 于是由命题??可知, 当 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ 时, $r(f) = r(\mathbf{A}) = n-1$, f 的规范标准型为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2$; 当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 1$ 时, $r(f) = r(\mathbf{A}) = n$, f 的规范标准型为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$. \square