



# 数学分析和高等代数杂题

数学分析、高等代数习题

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

# 目录

第一章 数学分析习题	1
第二章 高等代数习题	14

## 第一章 数学分析习题

### 定理 1.1 (Riemann 定理)

若  $f \in R[a, b]$ ,  $g$  以  $T$  为周期且在  $[0, T]$  上可积, 则有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) g(px) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$



### 定理 1.2 (积分第一中值定理的推广)

若  $f, g \in R[a, b]$ , 其中  $f$  在  $[a, b]$  上有原函数,  $g$  在  $[a, b]$  上不变号, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (1.2)$$



### 命题 1.1

若  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续, 则存在非负常数  $a$  和  $b$ , 使得成立  $|f(x)| \leq a|x| + b$ .



### 命题 1.2


函数  $f$  在区间  $I$  上一致连续的充分必要条件是: 对任何满足条件  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$  的  $\{x_n\} \subset I$  和  $\{y_n\} \subset I$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0$ .



**例题 1.1** 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于  $x \geq 0$ , 定义  $F(x) = \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt$ .

(1) 若  $\alpha \in (-1, 0)$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 证明:  $F$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

(2) 若  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f$  以  $T > 0$  为周期,  $\int_0^3 f(t) dt = 2022$ . 证明:  $F$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

 **笔记** 本题 (1) 中的  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  可以削弱为  $\exists M > 0, |f(x)| \leq M, x \in [0, +\infty)$ .

**证明** (1) 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 所以  $\exists M > 0, |f(x)| \leq M, x \in [0, +\infty)$ .

取  $\delta = \left[ \frac{(\alpha+1)\varepsilon}{3M} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$ , 任取  $y > x \geq 0$ , 且  $|y-x| < \delta$  有

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_0^y t^\alpha f(t+y) dt - \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt \right| \\ &= \left| \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t) dt - \int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t) dt - \int_y^{2y} (t-x)^\alpha f(t) dt + \int_y^{2y} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t) dt - \int_y^{2y} (t-x)^\alpha f(t) dt \right| + \left| \int_y^{2y} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt \right| \\ &\leq M \int_y^{2y} |(t-y)^\alpha - (t-x)^\alpha| dt + \left| \int_{2x}^{2y} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_x^y (t-x)^\alpha f(t) dt \right| \\ &\leq M \int_y^{2y} [(t-y)^\alpha - (t-x)^\alpha] dt + M \left| \int_{2x}^{2y} (t-x)^\alpha dt \right| + M \left| \int_x^y (t-x)^\alpha dt \right| \\ &\leq M \int_y^{2y} [(t-y)^\alpha - (t-x)^\alpha] dt + M \int_x^{2y-x} t^\alpha dt + M \int_0^{y-x} t^\alpha dt \\ &= M \left[ \int_y^{2y} [(t-y)^\alpha - (t-x)^\alpha] dt + \int_x^{2y-x} t^\alpha dt + \int_0^{y-x} t^\alpha dt \right] \\ &= M \left[ \frac{y^{\alpha+1} - (2y-x)^{\alpha+1} + (y-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_x^{2y-x} t^\alpha dt + \int_0^{y-x} t^\alpha dt \right] \\ &= M \left[ \int_0^{y-x} t^\alpha dt - \int_y^{2y-x} t^\alpha dt + \int_x^{2y-x} t^\alpha dt + \int_0^{y-x} t^\alpha dt \right] \\ &= M \left[ 2 \int_0^{y-x} t^\alpha dt + \int_x^y t^\alpha dt \right] \\ &= M \left[ 2 \int_0^{y-x} t^\alpha dt + \int_0^{y-x} (t-x)^\alpha dt \right] \\ &= \frac{M}{\alpha+1} [2(y-x)^{\alpha+1} + (y-2x)^{\alpha+1}] \\ &\leq \frac{3M}{\alpha+1} (y-x)^{\alpha+1} < \frac{3M}{\alpha+1} \delta^{\alpha+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

因此,  $F$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

(2) 假设  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续. 那么存在  $a, b > 0$ , 使得  $F(x) < a|x| + b$ . (见命题 1.1)

从而  $\left| \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} \right| < \frac{a|x| + b}{|x|^{\alpha+1}}$ , 进而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$ .

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} &= \frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_1^2 x^{\alpha+1} (t-1)^\alpha f(tx) dt}{x^{\alpha+1}} \\ &\xrightarrow{\text{黎曼定理 1.1}} \int_1^2 (t-1)^\alpha f(tx) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dt \int_1^2 (t-1)^\alpha dt = 0 \end{aligned}$$

再结合  $\int_1^2 (t-1)^\alpha dt > 0$ , 知  $\int_0^T f(x) dt = 0$ .

现在有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t^\alpha f(t+x)dt = \int_0^x t^\alpha d\left[\int_0^{x+t} f(y)dy\right] \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} x^\alpha \int_0^{2x} f(y)dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left[\int_0^{x+t} f(y)dy\right]dt \\ &= x^\alpha \int_0^{2x} f(y)dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t)dt \end{aligned}$$

设  $G(x) = \int_0^x f(x)dt$ , 则由  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积知,  $G \in C[0, +\infty)$ . 又由  $\int_0^T f(x)dt = 0$ , 得

$$G(x+T) - G(x) = \int_0^x f(x+T)dt - \int_0^x f(x)dt = \int_x^{x+T} f(x)dt = \int_0^T f(x)dt = 0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以  $G(x)$  有界.

又  $\alpha - 1 \in (-1, 0)$ , 故由 (1) 可得,  $-\alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t)dt$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

下面证明  $x^\alpha \int_0^{2x} f(y)dy$  不一致连续.

由于  $G(2x)$  在  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记  $M = \max_{x \in [0, \frac{T}{2}]} G(2x)$ , 则存在  $x_2 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ , 使得  $M = G(2x_2) \geq G(2x), x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ .

又因为  $G(3) = \int_0^3 f(t)dt = 2022$ , 且  $G(2x)$  以  $\frac{T}{2}$  为周期, 所以存在  $x_1 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ , 使得  $G(2x_1) = G(3) > 0$ .

因此,  $M = G(2x_2) \geq G(2x_1) = G(3) = \int_0^3 f(t)dt > 0$ .

构造数集  $E = \left\{x' \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \mid G(2x') = M\right\}$ , 由  $x_2 \in E$  知,  $E \neq \emptyset$ . 又因为  $E$  有界, 所以由确界存在定理知,  $E$  必有上确界, 取  $x_0 = \sup E$ .

假设  $x_0 \notin E$ , 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} |G(2x_0) - M|$ , 则  $\varepsilon_0 > 0$ , 否则  $x_0 \in E$  矛盾.

从而  $\forall \delta' > 0, \exists x_{\delta'} \in E$ , 使得  $x_0 - \delta' < x_{\delta'} < x_0$ , 都有  $|G(2x_0) - G(2x_{\delta'})| \geq \varepsilon_0$ .

这与  $G(2x)$  在闭区间  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  上连续, 进而一致连续矛盾. 故  $x_0 \in E$ .

任取  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} - x_0\right)\right)$ , 则  $G(2x_0 + \delta) < M = G(2x_0)$ , 否则与  $x_0 = \sup E$  矛盾.

进而  $\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\delta} f(y)dy\right| = |G(2x_0 + \delta) - G(2x_0)| > 0$ .

从而当  $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$  时, 由积分中值定理, 得

存在  $\xi_n \in \left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ , 使得

$$\left|\int_{2x_0}^{2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y)dy\right| = \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} |f(\xi_n)| > 0 \quad (1.3)$$

又因为  $f$  在  $[0, +\infty)$  的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以  $f$  在  $\left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$  上有界.

于是存在  $K, L > 0$ , 使得

$$K \leq |f(\xi_n)| \leq L \quad (1.4)$$

取数列  $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ , 其中  $x_n = x_0 + n\frac{T}{2}$ ,  $y_n = x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ . 并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 0$ .

由拉格朗日中值定理, 得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ,

存在  $\xi_n \in \left(x_0 + n\frac{T}{2}, x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ , 使得  $\left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha = \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1}$

从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} = 0$ .

于是存在  $N > 0$ , 使得  $\forall n > N$ , 有

$$\left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0} f(y) dy} \quad (1.5)$$

现在, 当  $n > \max \left\{ N, \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\}$  时, 结合(1.3)(1.4)(1.5), 我们有

$$\begin{aligned} & \left| x_n^{\alpha} \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^{\alpha} \int_0^{2y_n} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy + \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right] \right| \\ &= \left| \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &\geq \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2(x_0+n\frac{T}{2})}^{2(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| - \left| \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2(x_0+n\frac{T}{2})} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y) dy \right| - \left| \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \cdot \left| \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} f(\xi_n) \right| - \left[ \left(x_0 + n\frac{T}{2}\right)^{\alpha} - \left(x_0 + n\frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha} \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\ &\geq 2 \left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha} |f(\xi_n)| \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon \\ &\geq 2 \left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha} K \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( x_n^{\alpha} \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^{\alpha} \int_0^{2y_n} f(y) dy \right) = +\infty$ . 故  $x^{\alpha} \int_0^{2x} f(y) dy$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

这与  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续矛盾. 因此,  $F$  在  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

**注** 最后一步证明非一致连续利用的是函数一致连续的充要条件1.2

**例题 1.2** 证明: Riemann 函数  $R(x)$  处处不可导.

**证明** 因为  $R(x)$  在有理点处均不连续, 所以  $R(x)$  在有理数点均不可导.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \forall q \in \mathbb{N}_+, \exists p_q \in \mathbb{Z}$ , 使得  $\frac{p_q}{q} < x_0 < \frac{p_q+1}{q}$ .

取有理数列  $r_q, s_q$ , 其中  $r_q = \frac{p_q}{q}, s_q = \frac{p_q+1}{q}$ , 则  $0 < x_0 - r_q < \frac{1}{q}, 0 < s_q - x_0 < \frac{1}{q}$ . 从而  $\lim_{q \rightarrow +\infty} r_q = \lim_{q \rightarrow +\infty} s_q = x_0$ .

假设  $R(x)$  在  $x_0$  处可导, 则由Heine归结原理及导数的定义知

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} \\ \text{即 } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} - \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} \right] &= 0 \end{aligned}$$



又由  $\forall q \in \mathbb{N}_+, r_q < x_0 < s_q$  得

$$\frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} = \frac{\frac{1}{q}}{s_q - x_0} > \frac{\frac{1}{q}}{s_q - r_q} = 1, \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} = \frac{\frac{1}{q}}{r_q - x_0} < \frac{\frac{1}{q}}{r_q - s_q} = -1$$

于是  $\forall q \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$\frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} - \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} > 1 - (-1) = 2$$

这与  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} - \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} \right] = 0$  矛盾. 故  $R(x)$  在任意无理点处均不可导. 综上, 函数  $R(x)$  处处不可导.

**例题 1.3**  $f$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减趋于 0,  $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx$  收敛.

证明:  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛且  $\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\left( \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx \right)^2}{2}$ .

**证明** 不妨设  $f(x) > 0, x \in [0, +\infty)$ . 否则存在  $x_0 \in [0, +\infty)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ . 由  $f$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减趋于 0 知,  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 有  $f(x) = 0$ . 从而  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{x_0} f(x) dx$ , 于是  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

由  $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx$  收敛及柯西收敛准则知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \geq 0, s.t. \forall A > 4M$ , 有  $\int_{\frac{A}{4}}^A \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx < \varepsilon$

结合  $f$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减趋于 0 知, 当  $\forall A > 4M$  时, 有

$$0 < \sqrt{A f(A)} = \sqrt{f(A)} \int_{\frac{A}{4}}^A \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_{\frac{A}{4}}^A \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx < \varepsilon$$

由迫敛性知,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x f(x)} = 0$ . 又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{\frac{f(x)}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x f(x)} = 0$ , 所以根据比较原则知,  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

利用  $f$  的单调性知:  $\forall x \geq 0$  有

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx \geq \int_0^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \geq \sqrt{\frac{f(x)}{x}} \int_0^x 1 dt = \sqrt{x f(x)}$$


从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \sqrt{x f(x)} \cdot \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx \leq \int_0^{+\infty} \left( \int_0^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \right) \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \right) d \left( \int_0^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \right) = \frac{\left( \int_0^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \right)^2}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\left( \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt \right)^2}{2} \end{aligned}$$

**例题 1.4** 设可导函数  $f(x)$  定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0$ , 并且当  $|f(x)| \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  时总是成立

$$|f'(x)| \leq |f(x)| |\ln f(x)|$$

证明:  $f(x)$  恒为零.

 **笔记** 一道不常规的函数性态分析题

**证明** (反证法) 假设存在一点  $x_0 \neq 0$ , 使得  $f(x_0) \neq 0$ . 不妨设  $x_0 > 0$ , 且  $f(x_0) > 0$ . 由  $f$  的连续性及  $f(0) = 0$  知, 存在  $t_0 \in (0, x_0)$ , 使得  $\forall x \in (t_0, x_0)$ , 有  $f(x) > 0$ .

构造数集  $E = \{t \in [0, x_0) \mid f(x) > 0, x \in (t, x_0)\}$ , 又因为  $t_0 \in E$ , 所以  $E \neq \emptyset$ .

从而由确界存在定理知,  $E$  存在下确界, 设  $t_1 = \inf E$ , 则  $\forall x \in (t_1, x_0)$ , 有  $f(x) > 0$  且  $f(t_1) = 0$ .

若  $f(t_1) \neq 0$ , 则当  $f(t_1) > 0$  时, 由  $f$  的连续性可得, 存在  $t_{\varepsilon_1} < t_1$ , 使得  $f(t_{\varepsilon_1}) > 0$ . 与  $t_1 = \inf E$  矛盾. 当  $f(t_1) < 0$  时, 由  $f$  的连续性可知, 存在  $t_{\varepsilon_2} > t_1$ , 使得  $\forall t \in (t_1, t_{\varepsilon_2}), f(t) < 0$ . 由  $t_1 = \inf E$  可得, 存在  $t'_1 \in (t_1, t_{\varepsilon_2})$ , 使得  $f(t'_1) > 0$ . 这与  $\forall t \in (t_1, t_{\varepsilon_2}), f(t) < 0$  矛盾. 故  $f(t_1) = 0$ .

根据  $f$  的连续性, 一定存在  $t_2 \in (t_1, x_0)$  且  $|t_1 - t_2| < 1$ , 使得  $\forall x \in (t_1, t_2), f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

现在我们在开区间  $(t_1, t_2)$  中考虑问题.

设  $g(x) = \ln f(x)$ , 则有

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow t_1^+} g(x) = -\infty, g(x) \in (-\infty, -\ln 2)$$

根据已知条件, 有

$$|g'(x)| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < |\ln f(x)| = |g(x)| \quad (1.6)$$

再设  $h(x) = \ln g^2(x)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow t_1^+} h(x) = +\infty, h'(x) = 2 \frac{g'(x)}{g(x)}$$

再结合(1.6), 对  $\forall x \in (t_1, t_2)$ , 有

$$|h'(x)| = 2 \left| \frac{g'(x)}{g(x)} \right| < 2$$

任取  $x_1 \in (t_1, t_2)$ , 又由  $\lim_{x \rightarrow t_1^+} h(x) = +\infty$  知, 存在  $x_2 \in (t_1, t_2)$ , 使得  $h(x_2) - h(x_1) > 3$ .


但是根据拉格朗日中值定理可知, 存在  $\xi \in (\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\})$ , 使得

$$|h(x_2) - h(x_1)| = |h'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq |h'(\xi)| \leq 2$$

这与  $h(x_2) - h(x_1) > 3$  矛盾. 故  $f(x)$  恒为零.

**例题 1.5** 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $f(0) = 1, f(1) = 1 + e, f''(0) = 1$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi) = 1.$$

 **笔记** 考虑微分方程  $y'' - 2y' + y = 1$ , 利用欧拉待定指数函数法求解得:  $y = (C_1 + C_2x)e^x + 1$ . 从而  $[(y-1)e^{-x}]'' = (C_1 + C_2x)'' = 0$ . 于是我们构造辅助函数  $g(x) = (f(x) - 1)e^{-x}$ . 再结合中值定理并利用题目条件就能得到证明.

**证明** 令  $g(x) = (f(x) - 1)e^{-x}$ , 则  $g(0) = 0, g(1) = 1$ . 从而由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\eta) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 1.$$

又因为  $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x) + 1}{e^x}$ , 所以  $g'(0) = 1$ . 因此, 根据 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g''(\xi) = \frac{f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi) - 1}{e^\xi} = 0.$$

故原结论得到证.

**结论** 设  $f(x) \in D^n[a, b]$ , 且已知  $f(x)$  在某些特殊点处的函数值及导数值. 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\varphi(C, \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)) = 0, \text{ 其中 } C \text{ 为常数.}$$

解决这类问题的常用方法是: 先通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数, 再结合中值定理并利用题目已知  $f(x)$  在某些特殊点处的函数值及导数值就能得到证明.

**通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数的步骤:**

**Step1:** 考虑微分方程  $\varphi(C, x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , 利用求解常微分方程的方法求解  $\varphi(C, x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  的通解. 解得:  $y = f(x, C_1, \dots, C_k)$ , 其中  $C_1, \dots, C_k$  均为任意常数.

**Step2:** 从上述通解  $y = f(x, C_1, \dots, C_k)$  中, 通过移项化简找出  $g(x)$  使得  $g(x) = h(x, C_1, \dots, C_k)$ , 并且  $g^{(n)}(x) = h^{(n)}(x, C_1, \dots, C_k) = 0$ . (一般题目中都可以得到  $h(x, C_1, \dots, C_k) \in P_{n-1}[x]$ , 从而  $h$  自然满足  $h''(x, C_1, \dots, C_k) = 0$ ).

**Step3:** 上述得到的  $g(x)$  就是我们需要的辅助函数.

**注** 这种通过解微分方程来找到需要构造的辅助函数的方法基本上都能解决这类问题. 在这类问题中, 难题的难点一般就在于如何解出微分方程.

**例题 1.6**  $f$  是  $[0, 1]$  上非负递增连续函数对  $0 < \alpha < \beta < 1$ , 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$



**证明** 令  $\chi_{[\alpha,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \in (\beta, 1] \end{cases}$ , 则  $\chi_{[\alpha,1]}(x)$  在  $[\alpha, 1]$  单调递减. 由 Chebeshev 不等式积分形式可得

$$(\beta - \alpha) \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 f(x) dx \int_{\alpha}^1 \chi_{[\alpha,1]}(x) dx \geq (1 - \alpha) \int_{\alpha}^1 f(x) \chi_{[\alpha,1]}(x) dx = (1 - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

从而

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx \geq \frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

于是

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_{\alpha}^1 f(x) dx \geq \frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

**注** 实际上,  $\frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}$  已经是本题不等式的最佳系数. 证明如下:

$$\text{令 } f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[a + \frac{1}{n}, 1\right] \\ n(x - a), & x \in \left(a, a + \frac{1}{n}\right) \\ 0, & x \in [0, a] \end{cases}, \text{ 则显然 } f_n(x) \in C[0, 1].$$


从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \frac{1}{2n} + \left(1 - \alpha - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 - \alpha \quad (n \rightarrow +\infty), \\ \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx &= \frac{1}{2n} + \left(\beta - \alpha - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \beta - \alpha \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

于是当  $n$  充分大时, 取  $f(x) = f_n(x)$ , 则此时不等式的等号成立.

故不等式系数  $\frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}$  不可改进.

**例题 1.7** 证明:  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

 **笔记 证法一思路分析:** 我们首先想到利用 Weierstrass 判别进行放缩证明, 运用常规的放缩想法, 得到初步放缩的结果

$$\left| \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt \right| = \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt \leq \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

对  $\forall t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ , 固定  $t, n$ . 有  $\int_0^x t^n \sin(\pi t) dt$  关于  $x$  单调递增, 故  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  是  $\int_0^x t^n \sin(\pi t) dt$  的上确界, 因此第一个不等式已经放缩到最精细的程度. 根据 Weierstrass 判别法可知, 我们只需要证明第一个不等号右边式子作为通项的级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  收敛即可. 而我们知道级数的敛散性是由其通项的阶决定的, 于是原命题可转化为估计  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶. 由上述初步放缩得到的不等式可知  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  一定大于等于一阶, 但这样的初步放缩并不能直接由比较判别法得到原级数收敛. 因此我们需要更加精确的估计  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶.

现在我们来估计  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶. (注意这里并不是严谨的证明! 只是 laplace 估阶的大致思路框架.)

对这类积分估阶我们想到 **Laplace 估阶方法**. 取充分小的  $\delta_1, \delta_2$  (注意: 在严谨的证明中, 这里的  $\delta_1, \delta_2$  是待定的, 需要我们根据后续的放缩、Taylor 公式以及其他处理去确定其存在性), 然后对  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的积分区间进行分段估阶得到

$$\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right). \quad (1.7)$$

其中第二个等号是因为:从直觉上来说,我们可以认为

$$\int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt \approx \int_0^{\delta_1} 0^n \cdot 0 dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} c^n \cdot k dt + \int_{1-\delta_2}^1 1^n \cdot 0 dt.$$

其中  $c, k \in (0, 1)$ . 而  $0^n \cdot 0 < c^n \cdot k < 1^n \cdot 0$ .

$$\text{于是我们根据直觉断言 } \int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t) dt = O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right).$$

从而问题转化为估计  $\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶. 因为被积函数只有  $\sin(\pi t)$  不是幂函数, 所以我们只需要处理  $\sin(\pi t)$  即可 (即用幂函数估计  $\sin(\pi t)$  的阶, 自然联想到 *Taylor* 公式). 又因为  $\sin(\pi t)$  可以在  $t = 1$  附近 *Taylor* 展开 (根据题意可知展开一项即可), 所以得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt &= \int_0^{\delta_1} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} t^n \sin(\pi t) dt + \int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt \\ &= \int_{\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right) \\ &= \int_{\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right) \\ &= \int_{1-\delta_2}^1 t^n [\pi(1-t) + o(1-t)] dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right) \\ &= \int_{1-\delta_2}^1 t^n \pi(1-t) dt + \int_{1-\delta_2}^1 o(t^n(1-t)) dt + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right) \\ &= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) + O\left(\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt\right) \\ &= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) + O\left(\frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{4\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right)\right) \\ &= \frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)} + O\left(\frac{4\pi\delta_2}{(n+1)(n+2)}\right) \sim \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

虽然通过上述 *Laplace* 估阶方法能够准确的得到  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶. 但是具体过程较为繁琐. 于是我们思考能不能通过一种简单的方式, 直接估计出  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶. 接下来我们尝试找到一种更加简便的方式去估计  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶.

通过式 1.7 的讨论我们知道,  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶是由  $\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶决定的. 因此无论我们怎么估阶都不能避开估计  $\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶, 故要想简化估阶只能不对原有积分进行分段估计. 而我们知道估计这个积分阶的关键就是估计  $\int_{1-\delta_2}^1 t^n \sin(\pi t) dt$  的阶, 原积分的其他部分忽略后并不影响积分的阶. 又因为估计这个积分的阶我们只需要处理被积函数中的  $\sin(\pi t)$ , 于是我们就想到 *Taylor* 公式用幂函数去逼近  $\sin(\pi t)$ , 从而将  $\sin(\pi t)$  在  $t = 1$  处 *Taylor* 展开得到  $\sin(\pi t) = \pi(1-t) + o(1-t) (t \rightarrow 1)$ . 但这个式子只在  $(1-\delta_2, 1)$  上满足, 不能保证在  $(0, 1)$  上都满足, 而在不同点处 *Taylor* 展开后再积分得到的函数的阶是不同的, 但是我们知道我们只需要估计原积分在  $t = 1$  附近的阶即可 (因为只有在  $(1-\delta_2, 1)$  上的积分才是原积分的主体部分, 在其他积分区间上的积分全都是余项部分). 因此我们只需要考虑  $\sin(\pi t)$  在  $t = 1$  处的 *Taylor* 展开就可以了. 只要再找到一个合理的放缩、构造等方法将余项部分合并进主体部分当中或直接变成常数就能实现简化解答步骤的目的.

对于本题我们有如下方式简化估阶过程: 首先我们根据这个 *Taylor* 展开式, 构造函数  $g(x) = t^n(1-t) \frac{\sin(\pi t)}{1-t} = (t^n - t^{n+1}) \cdot \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$ . 这样就可以将  $\sin(\pi t)$  的主体部分给暴露出来, 然后将  $\frac{\sin(\pi t)}{1-t}$  放缩成一个常数. 又由于  $g(x)$  只去掉原被积函数在  $t = 1$  处的函数值, 所以  $\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) \cdot \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$ . 自然原积分的阶也与

$g(x)$  相同. 于是问题转化为了估计  $g(x)$  的阶. 而  $g(x)$  的阶通过放缩很容易得到, 具体证明见下述证法一.

**注**  $\sin(\pi t)$  在  $t = 1$  处的  $Taylor$  展开式系数可通过求极限 (直接用  $Taylor$  公式求导比较麻烦) 得到, 设  $\sin(\pi t) = a(1-t) + o(1-t)$ , 则由

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \stackrel{L'Hopital's rule}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \cos(\pi t)}{-1} = \pi.$$

可得  $a = \pi$ . 于是  $\sin(\pi t) = \pi(1-t) + o(1-t)$ .

**证明 证法一:** 注意到

$$\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) \cdot \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt \leq M \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt = M \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{M}{(n+1)(n+2)}$$

其中  $M = \sup_{t \in [0,1]} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$ .

从而对  $\forall x \in [0, 1]$ , 有

$$\left| \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt \right| = \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt \leq \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt \leq \frac{M}{(n+1)(n+2)}.$$

又因为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)(n+2)}$  收敛, 所以由 *Weierstrass* 判别可知,  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \sin(\pi t) dt$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

**注** 能取  $M = \sup_{t \in [0,1]} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$  是因为:  $\frac{\sin(\pi t)}{1-t} \in C[0, 1]$ , 并且

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \stackrel{L'Hopital's rule}{=} \lim_{t \rightarrow 1} [-\pi \cos(\pi t)] = \pi.$$

于是由推广的连续函数最大、最小值定理可知,  $\frac{\sin(\pi t)}{1-t}$  在  $[0, 1]$  上有界. 从而存在上界  $M = \sup_{t \in [0,1]} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$ .

**注** 解决这类问题虽然实际上我们的想法是估阶, 但是为了使解答过程简便, 我们不需要用思路分析里这种从头到尾把那些余项都写出来的方式去估阶.

在解答过程中, 我们只需要在保证不改变阶的前提下, 将那些余项全部放缩成常数、或通过放缩将其合并到主体部分中、或通过构造一个与原函数同阶但更易估阶的函数再将原函数放缩成这个函数 (本题采取的就是这个方式) 等其他技巧. 即我们可以将不影响阶的部分 (就是那些比主体部分还要高阶的部分和常数项) 全部放缩掉, 最终放缩得到的式子中只含有主体部分. 然后我们只需要估计放缩得到的式子的阶就可以通过迫敛性得到原函数的阶. (这里估计放缩得到的式子的阶的方式与我们在思路分析中估计主体部分的阶的方法一致).

这种操作常见于一些估阶问题的证明中. 这种用放缩简化估阶步骤的技巧, 虽然过程简便, 但是会掩盖具体的估阶想法, 让不懂如何估阶的人不明所以, 不知道其中具体的放缩或构造是如何想到的. 这种防御性证明不利于初学者对这类问题的学习. 因此在解答类似问题的时候, 我们应该先将估阶的思路分析清楚, 再书写证明过程的时候采用这种技巧简化证明过程.

**结论** 简化估阶过程的核心想法就是: 先确定原函数的主体部分 (若原函数的主体部分并不明显就需要利用  $Taylor$  公式将其主体部分彻底暴露出来再进行估阶), 然后通过放缩、构造等方式将余项部分合并进主体部分中或者放缩成常数, 最后估计主体部分的阶即可.

**例题 1.8** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

**笔记** 求这种前  $n$  项和关于  $n$  的极限 ( $n$  既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_0 \in \mathbb{N}_+$ , 使得对  $\forall n > N_0$ , 都有

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} - \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| = \left| \sum_{k > N_0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}} - \cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| > \sum_{k > N_0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对  $\forall N > N_0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 0$ .

因此对  $\forall N > N_0$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2$ .

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2 (如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不发散).

**注意:** 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2.

(上述论证实际上就是一种“猜测”这种极限的值得方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的“度”). 并且我们根据上述论证可知, 原和式的极限等于其前  $N$  项的极限, 原和式除前  $N$  项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前  $N$  项的极限即可.

**注** 上述思路只是我的一点个人拙见, 也可以使用 *Toplitz* 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去证明这个极限 (夹逼定理和 *Toplitz* 定理).

**解 解法一 (夹逼定理):**

$$\text{一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$\text{另一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+. \text{ 从而}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{于是令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2.$$

$$\text{综上所述, 我们有 } 2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq 2. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 2.$$

**解法二 (Toplitz 定理):**

**例题 1.9** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}.$$

的敛散性.

**解**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时, 有  $\left| \frac{\cos(\ln n)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$ , 而此时  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  是绝对收敛的. 故此时  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}$  也绝对收敛.

当  $p \leq 0$  时, 注意到原级数的通项并不趋于零, 于是此时  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}$  一定发散.

以下设  $p \in (0, 1]$ , 我们来证明此时级数都是发散的.


对  $\forall N > 0$ , 任取  $k > \max\{N, 10\}$ , 则  $[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}] > N$ , 从而我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \frac{\cos(\ln n)}{n^p} &\geq \sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \frac{\cos(\ln n)}{n^p} \geq \sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \frac{\cos(\ln n)}{n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \frac{1}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}] - [e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{[e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}]}{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}]} \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}}{e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}-1} \right) > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是由 *Cauchy* 收敛准则, 可知此时级数发散.

综上,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}$  在  $p > 1$  时绝对收敛, 在  $p \leq 0$  以及  $p \in (0, 1]$  时均发散.

**例题 1.10** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin[\pi(3+\sqrt{7})^n]$  的敛散性.

 **笔记** 这类问题的核心想法就是考虑共轭式.

**证明** 注意到对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都存在  $A_n, B_n \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$(3+\sqrt{7})^n = A_n + B_n\sqrt{7}, \quad (3-\sqrt{7})^n = A_n - B_n\sqrt{7}.$$

从而

$$\begin{aligned} \sin[\pi(3+\sqrt{7})^n] &= \sin(\pi A_n + \pi B_n\sqrt{7}) = \sin(\pi A_n + \pi B_n\sqrt{7} - 2\pi A_n) \\ &= -\sin(\pi A_n - \pi B_n\sqrt{7}) = -\sin[\pi(3-\sqrt{7})^n]. \end{aligned}$$

因此结合  $0 < 3-\sqrt{7} < 1$ , 可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin[\pi(3+\sqrt{7})^n] = -\sum_{n=1}^{+\infty} \sin[\pi(3-\sqrt{7})^n] \sim -\sum_{n=1}^{+\infty} \pi(3-\sqrt{7})^n \text{ 收敛}.$$

**例题 1.11** 若数列  $na_n$  单调, 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \ln n = 0.$$

**证明** 若数列  $\{na_n\}$  单调递增, 则对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $na_n \geq a_1$ . 从而  $a_n \geq \frac{a_1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ . 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{n}$  发散, 于是由

比较判别法, 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散. 这与题设矛盾. 故数列  $\{na_n\}$  单调递减. 又由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛和 *Cauchy* 收敛准

则, 可知  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 使得当  $n > m > N$  时, 都有  $\sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon$ .


因此对  $\forall n > N+3$  (充分大的  $n$ ), 取  $m = [\sqrt{n}] - 1$ , 我们都有

$$\begin{aligned} 0 &\leq na_n \ln n < na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}} < na_n \int_m^n \frac{1}{x} dx < na_n \ln \frac{n}{m} \\ &= na_n \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq na_n \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ &= na_n \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=m}^n ka_k \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \ln n = 0$ .

**例题 1.12** 证明:

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \pi \arcsin a, |a| < 1.$$

 **笔记** 这题显然用含参积分求导即可, 但多想一想, 如果题目没告诉你参数  $a$ , 直接让你计算具体对应的定积分,

你该如何思考, 如何引入参数?

证明

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{d}{da} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left( \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}} dx \\ &\stackrel{\substack{\text{令 } t=\tan x \\ \text{万能公式换元}}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-a^2 \cdot \frac{1+t^2}{2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+1-a^2} dt = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{1-a^2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

又因为  $I(0) = 0$ , 所以  $I(a) = \int_0^a I'(a) da = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} da = \pi \arcsin a$ .

**例题 1.13** 设  $f \in C^1[0, 1]$ , 使得  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  且有

$$f'(x) + f(x) \tan x = \int_0^x f(y) dy, \forall x \in [0, 1].$$

证明:  $f$  在  $[0, 1]$  上恒为 0.

 **笔记** 核心想法是: 利用在有界闭区间上连续的函数恒为 0 的充要条件: 在有界闭区间上没有正的最大值和负的最小值. 然后假设函数的最值在区间内部取到, 再比较等式两边符号给出矛盾.

**证明** 记  $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ , 则  $F \in D^1[0, 1]$ ,  $F(0) = F(1) = 0$  并且

$$F''(x) + F'(x) \tan x = F(x), \forall x \in [0, 1].$$

因为  $F \in D^1[0, 1]$ , 所以  $F \in C^1[0, 1]$ . 从而由连续函数最大、最小值定理, 可知  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上存在最大值和最小值. 若  $F$  在  $[0, 1]$  取得正的最大值, 最大值点为  $a$ , 则由  $F(0) = F(1) = 0$ , 可知  $a \in (0, 1)$ . 并且  $F'(a) = 0$ ,  $F''(a) \leq 0$ . 于是

$$0 < F(a) = F''(a) + F'(a) \tan a = F''(a) \leq 0.$$

这就是矛盾! 从而  $F$  在  $[0, 1]$  没有正的最大值. 类似的可以讨论最小值, 得到  $F$  在  $[0, 1]$  没有负的最小值. 因此  $0 \leq F(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$ . 即  $F(x) \equiv 0, \forall x \in [0, 1]$ . 故  $f$  在  $[0, 1]$  上恒为 0.

**结论** 若  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上恒为 0 的充要条件是:  $f$  在  $[a, b]$  上没有正的最大值和负的最小值 (只有非正的最大值和非负的最小值).

**证明** 必要性是显然的. 我们只证明充分性.

已知  $f \in C[a, b]$ , 则根据连续函数的最大、最小值定理, 可知  $f$  在  $[a, b]$  上存在最大值和最小值. 不妨设最大值点为  $M$ , 最小值点为  $m$ , 则  $M, m \in [a, b]$ . 又因为  $f$  在  $[a, b]$  上没有正的最大值和负的最小值, 所以

$$0 \leq f(m) \leq f(x) \leq f(M) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

故  $f$  在  $[a, b]$  上恒为 0.

**例题 1.14**

证明

**例题 1.15**

证明

**例题 1.16**

证明

**例题 1.17**



---

证明

例题 1.18

证明

例题 1.19

证明

例题 1.20

证明

例题 1.21

证明

例题 1.22

证明

例题 1.23

证明

例题 1.24

证明

例题 1.25

证明

例题 1.26

证明

## 第二章 高等代数习题