

0.1 反常积分收敛抽象问题

命题 0.1

设 f 为 $[a, +\infty)$ 上的非负可积函数, 若存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy.$$

进而可得

- (i) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy$ 存在.
- (ii) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy = +\infty$.

注 对于瑕积分也有类似的结论.

笔记 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

证明 令 $g(x) = \int_a^x f(y) dy$, 则 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负单调递增. 由单调收敛定理可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 从而由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

□

命题 0.2 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

- (1) 存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$.
- (2) 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, 则存在严格递增的 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n f(x_n) = 0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的 $x_n \ln x_n$ 可以换成任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足 $\int_a^{\infty} a_n dx = +\infty$ 即可

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x) dx = f(\theta(A)), A+1 > \theta(A) > A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{A+1} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} f(\theta(A)), \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta(A) = +\infty.$$

这就完成了证明.

- (2) 若 $|f(x)| > \frac{1}{x \ln x}, \forall x > e$, 则由 $\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = +\infty$ 可得 $\int_e^{\infty} |f(x)| dx = +\infty$ 矛盾! 故存在 $x_1 > e$ 使得 $|f(x_1)| \leq \frac{1}{x_1 \ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)| > \frac{1}{2x \ln x}, \forall x > x_1 + 1$, 同理可得矛盾! 因此必然存在 $x_2 > x_1 + 1$ 使得 $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2x_2 \ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{nx_n \ln x_n}, n = 1, 2, \dots,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n \cdot |f(x_n)| = 0.$$


□

命题 0.3

设 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\int_0^{+\infty} f(y)dy$ 收敛, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x y f(y) dy}{x} = 0.$$

▲

 **笔记** 本题不可直接洛必达. 这个命题是命题??的连续版本, 在那里我们先 abel 变换再 Stolz 定理, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

证明 记 $F(x) \triangleq \int_0^x f(y)dy$, 则

$$\int_0^x y f(y) dy \xrightarrow{\text{R-S 积分}} \int_0^x y dF(y) = xF(x) - \int_0^x F(y) dy.$$

由 $F \in C[0, +\infty)$, 利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x y f(y) dy}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(y) dy \xrightarrow{\text{L'Hospital 法则}} \int_0^{+\infty} f(y) dy - \int_0^{+\infty} f(y) dy = 0.$$

□

命题 0.4

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛且 $x f(x)$ 单调, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f(x) = 0$.

▲

证明

(1) 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f , 从而

$$A f(A) \geq \int_A^{2A} f(x) dx, \quad \frac{A}{2} f(A) \leq \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x) dx \leq A f(A) \leq 2 \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{2A} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故 $\lim_{A \rightarrow +\infty} A f(A) = 0$.

(2) 不妨设 $x f$ 递减, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A \ln A f(A) &= A f(A) \int_{\sqrt{A}}^A \frac{1}{x} dx \leq \int_{\sqrt{A}}^A \frac{x f(x)}{x} dx = \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx, \\ \int_A^{A^2} f(x) dx &= \int_A^{A^2} \frac{x f(x)}{x} dx \leq A f(A) \int_A^{A^2} \frac{1}{x} dx = A \ln A f(A). \end{aligned}$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x) dx \leq A \ln A f(A) \leq 2 \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx$$

又由 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{A^2} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim_{A \rightarrow +\infty} A \ln A f(A) = 0$.

□

命题 0.5

若 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

◆

证明

□

例题 0.1 设 $f \in D^1(0, +\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0, +\infty)$ 递减. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$.

证明 若存在 $a > 0$, 使得 $f'(a) = 0$, 则由 $|f'|$ 在 $(0, +\infty)$ 递减可得

$$f'(x) = 0, \quad \forall x > a.$$

此时结论显然成立.

若 $f' \neq 0, \forall x \in (0, +\infty)$, 则由导数介值性可知, f' 在 $(0, +\infty)$ 上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设 $f' > 0, \forall x \in (0, +\infty)$, 故此时 f 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f' = |f'|$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, 故此时 f' 在 $(0, +\infty)$ 内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y) dy = f(x) - f(1).$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(y) dy$ 收敛. 于是由命题 0.4(1) 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$.

□

例题 0.2 设 f 在 $(a, +\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 $x f'$ 为单调函数, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0.$$

证明 由 $x f'$ 单调可知, $g(x) \triangleq x f'$ 在 $(a, +\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f' = \frac{g(x)}{x}$ 在 $(a, +\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 $x f'$ 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) \leq 0$. 否则, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) > 0$, 则存在 $C > 0$, 使得

$$x f'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a, 0\}, +\infty). \quad (1)$$

对 (1) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{C}{t} dt = C \ln |x| - C \ln a.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 这与 f 有界矛盾! 于是由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) \leq 0$ 可知存在 $X > \max\{a, 0\}$, 使得

$$x f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0, \quad x \in (X, +\infty).$$

故 f 在 $(X, +\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 则由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在可得 $\int_a^{+\infty} f'(t) dt$ 收敛. 又 $x f'(x)$ 单调, 于是由命题 0.4(2) 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0$.

□

例题 0.3 设 $f \in D[a, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 且 f' 严格递增, 证明 $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$ 收敛.

证明 由命题??和命题??可知, $f' \in C[a, +\infty)$. 又由命题??可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 故存在 $X > 0$, 使得 f', f 在 $[X, +\infty)$

上恒正, 且 f 在 $[X, +\infty)$ 上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知, f 存在严格单调递增的反函数

$$g: [f(X), +\infty) \rightarrow [X, +\infty).$$

于是令 $x = g(y)$, 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin yg'(y) dy.$$

又由反函数求导定理可知 $g'(y)f'(g(y)) = 1$, 并且 $f(g(y)) = y$, 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin yg'(y) dy = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))} dy.$$

因为 f', g 都严格递增趋于 $+\infty$, 所以 $\frac{1}{f'(g(x))}$ 严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left| \int_{f(X)}^A \sin y dy \right| \leq 2, \forall A \geq f(X).$$

故由 Dirchlet 判别法可知 $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$ 收敛. □

例题 0.4

(1) 设 f 内闭可积且 $f(x) > 0, x_0 > 0$. 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛,} & \ell < 1 \\ \text{发散,} & \ell > 1 \end{cases}.$$

(2) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若有常数 $k > 1$ 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛,} & \ell < \frac{1}{k} \\ \text{发散,} & \ell > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{收敛,} & -\infty \leq p < -1 \\ \text{发散,} & -1 < p \leq +\infty \end{cases}.$$

注 第 (1) 题中当 $\ell = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题中当 $p = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

注 第 (3) 题的条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p$ 可改为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = p$. 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = p.$$

证明

(1) 注意到

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x) dx \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 由题设可知, 存在 $X > a$, 使得

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{f(x_0 + x)}{f(x)} \leq \ell + \varepsilon, \forall x \geq X.$$

从而当 $n > \frac{X-a}{x_0}$ 时, 就有 $a + nx_0 > X$, 进而

$$a_{n+1} = \int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x) dx = \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0) dx \in [(\ell - \varepsilon)a_n, (\ell + \varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon, \forall n > \frac{X-a}{x_0}.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令 $x = e^t$, 任取 $c > 0$, 则

$$\begin{aligned} \int_c^\infty f(x) dx &= \int_{\ln c}^\infty f(e^t) e^t dt. \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(e^{t+\ln k}) e^{t+\ln k}}{f(e^t) e^t} &= k \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(ke^t)}{f(e^t) e^t} = k\ell. \end{aligned}$$

于是由 (??) 可知结论成立.

(3) 只讨论 $p \in \mathbb{R}$ 的情况, 其余 $p = \pm\infty$ 情况类似. 由题意可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $X > e$, 使得当 $x > X$ 时, 有

$$p - \varepsilon \leq \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq p + \varepsilon \iff x^{p-\varepsilon} \leq f(x) \leq x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$


再由比较判别法即得结论. □

注 上述例题第 (3) 题的证明中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为 X 是与 ε 有关的. 因此只有固定 ε 时, 才有 $\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$ 成立. 故再利用比较判别法式, 不能令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

例题 0.5 若 $f \in C^1[0, +\infty)$ 且 $f(0) > 0, f'(x) > 0$. 若 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < \infty$, 证明 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$.

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 由条件可知 $f(x)$ 严格递增且恒正, 从而 $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是


$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{f(x) + f'(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| dx = \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f(x)[f(x) + f'(x)]} dx \leq \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{f^2(x)} df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x) + f'(x)} \right| + \frac{1}{f(x) + f'(x)}.$$

又 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < +\infty$, 故 $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$. □

例题 0.6 设非负函数 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M$, 证明 $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ 收敛且 $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \leq M$.

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 证法一: $\forall a < b$, 注意到 $1 - x \leq e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. 从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x) dx \leq \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

于是

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{k} \int_a^b |x| f(x) dx + M.$$

令 $k \rightarrow +\infty$ 得 $\int_a^b f(x) dx \leq M$. 再由 a, b 的任意性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq M$.

证法二: 由 Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

□

例题 0.7 设 $f \in C^1[0, +\infty)$ 满足

$$|f'(x)| \leq M, \forall x \geq 0, \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

证明 由条件可得

$$\int_0^{+\infty} |f^2(x)f'(x)| dx \leq M \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$

从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x)$ 存在. 由 $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ 及命题 0.2(1) 可知, 存在 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $f(x_n) \rightarrow 0$. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^3(x_n) = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. □

例题 0.8 设 $f \in D^2[0, +\infty)$ 且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2 dx < \infty.$$

证明 $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty$.

证明 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2 dx} < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx$ 收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^x |f'(y)|^2 dy = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(y)f''(y) dy \quad (2)$$

由命题 0.1 可知, 只须找一个 $x_n \rightarrow +\infty$, 使 $f(x_n)f'(x_n)$ 极限存在即可.

由于 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$, 故由命题 0.2(1) 可知存在 $a_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n)|^2 = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$. 于是再由命题 ?? 可知, 存在 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f^2(x_n)]' = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由命题 0.1 及 (2) 式可知结论成立. □

例题 0.9

证明

□