

0.1 多项式环

定理 0.1

设 \tilde{R} 是一个交换幺环, R 是 \tilde{R} 的子环且 $1 \in R$. 又设 $u \in \tilde{R}$, \tilde{R} 中由 R 与 u 生成的子环, 即包含 R 与 u 的最小子环记为 $R[u]$. 则

$$R[u] = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

也称 $R[u]$ 为 R 上添加 u 生成的子环.



证明 记 $S = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. 首先证明 $S \subseteq R[u]$. 由于 $R[u]$ 是包含 R 和 u 的子环, 而 S 中的所有元素都可以通过有限次运算(加法、乘法、取逆)从 R 和 u 得到, 因此 $S \subseteq R[u]$.

接下来证明 $R[u] \subseteq S$. 设 $f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_m u^m \in S, g(u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n \in S$, 不妨设 $m \leq n$, 再令 $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$, 则

$$f(u) + g(u) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) u^i \in S.$$

令 $-f(u) \triangleq (-a_0) + (-a_1)u + \cdots + (-a_m)u^m \in S$, 则 $f(u) + (-f(u)) = 0$. 因此 S 对加法封闭且有加法逆元. 又 \tilde{R} 是交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 故 S 对加法满足结合律和交换律. 于是 S 对加法构成 \tilde{R} 的 Abel 群.

由于 \tilde{R} 是交换环, 故

$$f(u)g(u) = \left(\sum_{i=1}^n a_i u^i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i u^i \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) u^k \in S.$$

令 $a_0 = 1, n = 0$, 则有 $1 \in S$. 因此 S 对乘法封闭且含幺元 1. 又 \tilde{R} 是交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 故 S 对乘法满足结合律. 于是 S 对乘法构成 \tilde{R} 的幺半群. 由于 S 对加法和乘法封闭, \tilde{R} 为交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 故 S 的加法与乘法间自然满足分配律. 因此 S 是交换幺环 \tilde{R} 的子环.

对于任意 $r \in R$, 可取 $r = r + 0 \cdot u + 0 \cdot u^2 + \cdots \in S$, 故 $R \subseteq S$. 同时 $u = 0 + 1 \cdot u + 0 \cdot u^2 + \cdots \in S$. 再设 T 是 \tilde{R} 的任一包含 R 和 u 的子环, 则 T 必然包含所有的 $a_i u^i$ ($a_i \in R$) 以及它们的有限和, 即 $S \subseteq T$. 因此 S 是包含 R 和 u 的最小子环.

综上可知 $R[u] = S$.



定义 0.1

如果在 R 中存在有限多个元素 a_0, a_1, \dots, a_n 且 $a_n \neq 0$, 使得

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0,$$

那么称 u 为 R 上的代数元, 使上述关系成立的最小正整数 n 称为代数元 u 的次数, 记为 $\deg(u, R)$.



例题 0.1 令 $\tilde{R} = \mathbb{C}$, 则 $\sqrt{-1}$ 为 \mathbb{Z} 上的代数元,

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{m + n\sqrt{-1} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

称为 Gauss 的整数环, $\deg(\sqrt{-1}, \mathbb{Z}) = 2$. 同样 $\sqrt{-1}$ 为 \mathbb{Q} 上的代数元, $\deg(\sqrt{-1}, \mathbb{Q}) = 2$.

证明



例题 0.2 令 $\tilde{R} = \mathbb{Q}$, 则 $\frac{1}{2}$ 是 \mathbb{Z} 上代数元且 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset \mathbb{Q}, \deg \left(\frac{1}{2}, \mathbb{Z} \right) = 1$.

证明



定义 0.2

设 R 是交换幺环 \tilde{R} 的包含幺元 1 的子环, $u \in \tilde{R}$, $R[u]$ 为 R 添加 u 生成的 \tilde{R} 的子环, 若当 R 中有限个元素 a_0, a_1, \dots, a_n 不全为 0 时,

$$a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \neq 0,$$

则称 u 为 R 上的**超越元或不定元**. $R[u]$ 中的一个元素 $f(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n$ 称为 u 的(系数在 R 中的)一个多项式. 若 $a_n \neq 0$, 则称 n 为 $f(u)$ 的次数, 记为 $\deg f(u)$. $R[u]$ 称为 R 上的一个一元多项式环.



例题 0.3 设 \mathbb{P} 是一个数域, x 是一个文字, 则 $\mathbb{P}[x]$ 是 \mathbb{P} 上的一个一元多项式环, x 是 \mathbb{P} 上的超越元.

证明

□

定理 0.2

交换幺环 R 上的一元多项式环一定存在.



证明 令

$$\tilde{R} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in R \text{ 且仅有有限个 } a_i \neq 0\}.$$

自然 \tilde{R} 中元素 $(a_0, a_1, \dots) = (b_0, b_1, \dots)$ 当且仅当 $a_i = b_i (i = 0, 1, \dots)$. 在 \tilde{R} 中定义加法与乘法

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots), \quad (1)$$

$$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots). \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ &= \sum_{i+j=n} a_i b_j, \quad n = 0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $(a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots) \in \tilde{R}$, 故 $\exists m \in \mathbb{N}$, 使 $n > m$ 时, $a_n = b_n = 0$. 于是 $a_n + b_n = 0$, 故 $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \in \tilde{R}$. 而当 $n > 2m$ 时, $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = 0$, 故 $(c_0, c_1, \dots) \in \tilde{R}$. 由此知上面定义的加法与乘法是良定义的.

容易验证 \tilde{R} 对加法为 Abel 群, 它的零元素为 $0 = (0, 0, \dots)$ 且 $-(a_0, a_1, \dots) = (-a_0, -a_1, \dots)$. 同样容易验证 \tilde{R} 对乘法是可交换的且有幺元 $(1, 0, \dots)$. 下面验证乘法的结合律. 设

$$f = (a_0, a_1, \dots), \quad g = (b_0, b_1, \dots), \quad h = (c_0, c_1, \dots),$$

则 $(fg)h$ 的第 k 个元素为

$$\sum_{s+r=k} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) c_r = \sum_{i+j+r=k} a_i b_j c_r = \sum_{i+t=k} a_i \left(\sum_{j+r=t} b_j c_r \right),$$

这也是 $f(gh)$ 的第 k 个元素. 故 \tilde{R} 对乘法为交换幺半群. 又注意到 $(f+g)h$ 的 k 个元素为

$$\sum_{i+j=k} (a_i + b_i) c_j = \sum_{i+j=k} a_i c_j + \sum_{i+j=k} b_i c_j,$$

这也是 $fh + gh$ 的第 k 个元素. $h(f+g)$ 的 k 个元素为

$$\sum_{i+j=k} c_i (a_j + b_j) = \sum_{i+j=k} c_i a_j + \sum_{i+j=k} c_i b_j,$$

这也是 $hf + hg$ 的第 k 个元素. 因此 \tilde{R} 中加法与乘法间的分配律成立, 故 \tilde{R} 为交换幺环.

令 $R_0 = \{(a_0, 0, 0, \dots) : a_0 \in R\}$, 则 R_0 显然是 R 的子环. 由

$$(a_0, 0, \dots) + (b_0, 0, \dots) = (a_0 + b_0, 0, \dots),$$

$$(a_0, 0, \dots) \cdot (b_0, 0, \dots) = (a_0 b_0, 0, \dots)$$

知 $a_0 \rightarrow (a_0, 0, \dots)$ 是 R 到 R_0 上的同构映射. 为方便计, 将 R_0 中元素 $(a_0, 0, \dots)$ 记为 a_0 , 即可将 R 视为 \tilde{R} 的子环. R 的幺元 1 恰为 \tilde{R} 的幺元 $(1, 0, \dots)$.

最后证明 \tilde{R} 是 R 上的一元多项式环. 令

$$u = (0, 1, 0, \dots),$$

则不难验证

$$\begin{aligned} u^k &= (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots), \\ a_k u^k &= (\underbrace{0, \dots, 0}_k, a_k, 0, \dots), \quad a_k \in R = R_0. \end{aligned}$$

若 $f = (a_0, a_1, \dots) \in \tilde{R}$, 则有 n , 使 $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$. 于是

$$f = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n,$$

因而有 $\tilde{R} = R_0[u] = R[u]$. 又若

$$a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n = 0,$$

即

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) = (0, 0, \dots),$$

则 $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, 即 u 是 R 上的超越元, 因而 $\tilde{R} = R[u]$ 是 R 上的一元多项式环.

□

定理 0.3

设 R, S 都是交换幺环, 它们的幺元分别是 $1, 1'$. 又若 η 是 R 到 S 的同态且 $\eta(1) = 1'$, 则对 $\forall u \in S$, 存在唯一的在 R 上的开拓 $\eta_u : R[x] \rightarrow S$ 满足

$$\eta_u|_R = \eta, \quad \eta_u(x) = u. \tag{4}$$

且 η_u 是环同态.

♡

证明 因 $R[x]$ 为 R 上的一元多项式环, 故 $R[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in R\}$. 定义 η_u ,

$$\eta_u(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \eta(a_0) + \eta(a_1)u + \dots + \eta(a_n)u^n \tag{5}$$

于是 η_u 是 $R[x]$ 到 S 的映射. 直接计算可知 η_u 为满足式(4)的扩充, 并为同态映射.

现设 η' 也是 η 的扩充且 $\eta'(x) = u$, 于是

$$\eta' \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n \eta'(a_i)u^i = \sum_{i=0}^n \eta(a_i)u^i = \eta_u \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right),$$

故 $\eta' = \eta_u$, 即 η_u 是满足条件的唯一扩充.

□

推论 0.1

- (1) 设 R 是交换幺环, $R[x]$ 与 $R[y]$ 都是 R 上的一元多项式环, 则 $R[x]$ 与 $R[y]$ 是同构的.
- (2) 设 R 是交换幺环 \tilde{R} 的包含幺元 1 的子环, $R[x]$ 为 R 上的一元多项式环, 则对 $\forall u \in \tilde{R}$, 存在 $R[x] \rightarrow R[u]$ 的满同态 η_u , 且满足

$$\eta_u((f(x))) = f(u), \quad \forall f(x) \in R[x].$$

♡



笔记 这个推论 (1) 说明: 任何交换幺环上的一元多项式环在同构意义上唯一.

证明

- (1) 事实上, 容易验证 R 到 $R[y]$ 的嵌入映射 $i(a) = a(\forall a \in R)$ 是 R 到 $R[y]$ 的环同态, 于是由定理 0.3 知有 $R[x]$

到 $R[y]$ 的同态 i_y 满足

$$i_y|_R = i, \quad i_y(x) = y.$$

从而任取 $a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n \in R[y]$, 都有

$$i_y(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n,$$

故 i_y 是满同态. 由 y 是 R 上超越元知 $\ker i_y = \{0\}$, 因此由命题?????知 i_y 是单同态. 故 i_y 是同构映射.

- (2) 考虑 R 到 $R[u]$ 的嵌入映射 η , 则不难验证 η 是 R 到 $R[u]$ 上的同态. 于是由定理 0.3 知可将 η 扩充为环同态 $\eta_u : R[x] \rightarrow R[u]$ 满足

$$\eta_u|_R = \eta, \quad \eta_u(x) = u. \quad (6)$$

注意到 $\eta_u(R[x]) = R[u]$, 故 η_u 是满同态. 再利用(6)式可得

$$\eta((f(x))) = f(u), \quad \forall f(x) \in R[x].$$

□

推论 0.2

设 R 是交换么环 \tilde{R} 的包含么元 1 的子环, $R[x]$ 为 R 上的一元多项式环, 又设 $u \in \tilde{R}$, 则有 $R[x]$ 中的理想 I 满足 $R \cap I = \{0\}$, $R[u] \cong R[x]/I$, 并且当且仅当 $I \neq \{0\}$ 时, u 为代数元.

♡

证明 由推论 0.1(2) 知存在 $R[x] \rightarrow R[u]$ 的满同态 i_u , 且满足

$$i_u(f(x)) = f(u), \quad \forall f(x) \in R[x].$$

取 $I = \ker i_u$, 则由命题????知 $I = \ker i_u$ 为 $R[x]$ 中理想, $R[u] \cong R[x]/I$. 又若 $a \in R \cap I$, 则 $0 = i_u(a) = i(a) = a$, 故 $R \cap I = \{0\}$. 由于 u 为 R 上代数元当且仅当存在 $a_n \neq 0$, 使得 $\sum_{i=0}^n a_i u^i = 0$. 这也当且仅当

$$i_u \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n a_i u^i = 0 \iff 0 \neq \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I \iff I \neq \{0\}.$$

□

推论 0.3

设 R 是交换么环, $R[x]$ 是 R 上一元多项式环. 又若 I 是 $R[x]$ 的理想且 $R \cap I = \{0\}$, $I \neq \{0\}$, 则 $R[x]/I$ 是 R 添加一个代数元所得的环.

♡

证明 设 π 是 $R[x]$ 到 $R[x]/I$ 的自然同态, 于是 $\pi(R)$ 是 $R[x]/I$ 中的子环. 由定理????知 I 也是 R 的理想, 从而再由定理????知

$$\pi(R) = R/I = (R+I)/I \cong R/(R \bigcap I) = R/\{0\} = R + 0 = R,$$

故可将 R 视为 $R[x]/I$ 的子环, 令 $u = \pi(x)$, 则 $u \in R[x]/I$, 于是 $R[u] \subseteq R[x]/I$. 注意到

$$\pi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \pi(a_0) + \pi(a_1)u + \cdots + \pi(a_n)u^n,$$

故再结合 π 是满同态可得

$$R[x]/I = \pi(R[x]) \subseteq R[u] \subseteq R[x]/I,$$

即 $R[x]/I = R[u]$. 又由 $I \neq \{0\}$, 故 I 中有非零元素 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 其中 $a_n \neq 0$, 又因为 $\pi(R) \cong R$, 所以 $\pi(a_n) \neq 0$. 而

$$\pi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \pi(a_0) + \pi(a_1)u + \cdots + \pi(a_n)u^n = 0,$$

故 u 为 R 上的代数元.

□

定理 0.4

设 R 是交换幺环 \tilde{R} 的包含幺元 1 的子环. 又设 $u_1, u_2, \dots, u_n \in \tilde{R}$, 则 \tilde{R} 中包含 R 与 u_1, u_2, \dots, u_n 的最小子环为

$$R[u_1, u_2, \dots, u_n] = \left\{ \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} \mid a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in R, a_{k_1 k_2 \dots k_n} \text{ 中仅有有限个不为 } 0 \right\}$$

称为 R 添加 u_1, u_2, \dots, u_n 所得的环.



证明 记

$$S = \left\{ \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} \mid a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in R, \text{ 仅有有限个 } a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0 \right\}.$$

首先, 证明 S 是 \tilde{R} 的子环. 设

$$x = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1 \dots k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}, \quad y = \sum_{k_1, \dots, k_n} b_{k_1 \dots k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \in S,$$

则

$$x + y = \sum_{k_1, \dots, k_n} (a_{k_1 \dots k_n} + b_{k_1 \dots k_n}) u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}.$$

由于 $a_{k_1 \dots k_n}$ 和 $b_{k_1 \dots k_n}$ 中仅有有限个非零, 故 $a_{k_1 \dots k_n} + b_{k_1 \dots k_n}$ 中也仅有有限个非零, 因此 $x + y \in S$. 并且有

$$-x \triangleq \sum_{k_1, \dots, k_n} (-a_{k_1 \dots k_n}) u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \in S,$$

使得 $x + (-x) = 0$. 因此 S 对加法封闭且有加法逆元. 又因为 \tilde{R} 是交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 所以 S 对加法也有结合律和交换律. 故 S 对加法构成 Abel 群.

由于 \tilde{R} 交换, 有

$$xy = \left(\sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1 \dots k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \right) \left(\sum_{l_1, \dots, l_n} b_{l_1 \dots l_n} u_1^{l_1} \dots u_n^{l_n} \right) = \sum_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} a_{k_1 \dots k_n} b_{l_1 \dots l_n} u_1^{k_1+l_1} \dots u_n^{k_n+l_n}.$$

令 $m_i = k_i + l_i$, 则

$$xy = \sum_{m_1, \dots, m_n} \left(\sum_{k_1+l_1=m_1, \dots, k_n+l_n=m_n} a_{k_1 \dots k_n} b_{l_1 \dots l_n} \right) u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}.$$

由于 $a_{k_1 \dots k_n}$ 和 $b_{l_1 \dots l_n}$ 中仅有有限个非零, 故 $xy \in S$. 取 $a_{0 \dots 0} = 1 \in R$, 其余系数为 0, 则 $1 = 1 \cdot u_1^0 \dots u_n^0 \in S$. 因此 S 对乘法封闭且含幺元. 又因为 \tilde{R} 是交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 所以 S 对乘法也有结合律和交换律. 故 S 对乘法构成交换幺半群. 由于 S 对加法和乘法封闭, \tilde{R} 为交换幺环且 $S \subseteq \tilde{R}$, 故 S 的加法与乘法间自然满足分配律. 因此 S 是交换幺环 \tilde{R} 的子环.

其次, 证明 S 包含 R 和 u_1, u_2, \dots, u_n . 对任意 $a \in R$, 取 $a_{0 \dots 0} = a$, 其余系数为 0, 则 $a = a \cdot u_1^0 \dots u_n^0 \in S$. 对每个 u_i , 取 $k_i = 1$, 其余指数为 0, 且 $a_{0 \dots k_i \dots 0} = 1$, 其余系数均为 0, 则 $u_i = 1 \cdot u_1^0 \dots u_i^1 \dots u_n^0 \in S$.

最后, 证明 S 是包含 R 和 u_1, u_2, \dots, u_n 的最小子环. 设 T 是 \tilde{R} 的任意子环, 且 T 包含 R 和 u_1, u_2, \dots, u_n . 由于 T 对乘法封闭, 对任意非负整数 k_1, \dots, k_n , 有 $u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \in T$. 又因 T 包含 R , 对任意 $a_{k_1 \dots k_n} \in R$, 有 $a_{k_1 \dots k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \in T$. 再由 T 对加法封闭, 任意有限和 $\sum a_{k_1 \dots k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \in T$. 又 S 中元素均为此类有限和 (因系数仅有有限个非零), 故 $S \subseteq T$. 因此 S 是包含 R 和 u_1, u_2, \dots, u_n 的最小子环.

综上, $S = R[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 即为所求.



定义 0.3

如果 R 中有有限多个 $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$, 使

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} = 0,$$

则称 u_1, u_2, \dots, u_n 在 R 上是代数相关的, 否则称 u_1, u_2, \dots, u_n 在 R 上是代数无关的.

若 u_1, u_2, \dots, u_n 在 R 上是代数无关的, 则称 $R[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 为 R 上的 n 元多项式环, 其元素称为 R 上的 n 元多项式.

交换么环 R 上的 n 元多项式环 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 中, 形如 $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ ($a \in R, a \neq 0$) 的元素称为一个单项式, a 称为此单项式的系数, $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 称为此单项式的次数.

n 元多项式 $\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \neq 0$ 的次数定义为所含单项式的最高次数, 即

$$\deg \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) = \max\{k_1 + k_2 + \dots + k_n \mid a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \neq 0\}.$$

**定理 0.5**

交换么环 R 上的 n 元多项式环一定存在. 并且

$$R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = (R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$



证明 对 n 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时, 由定理 0.2 知本定理成立. 现设 $n - 1$ 时本定理成立, 即有 R 上的 $n - 1$ 元多项式环 $R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$. 这也是交换么环且

$$1 \in R \subset R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}].$$

再由定理 0.2, 可构造 $R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ 上的一元多项式环

$$(R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n] \supset R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \supset R \ni 1.$$

显然有

$$R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] \subseteq (R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

若 $f \in (R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n]$, 于是有 $f_0, f_1, \dots, f_k \in R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$, 使得

$$f = f_0 + f_1 x_n + \dots + f_k x_n^k,$$

而

$$f_i = \sum_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} a_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

于是 $f \in R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$, 故知

$$R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = (R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

下面证明 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ 在 R 上是代数无关的. 假设 R 中有有限多个 $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$, 使

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} = 0.$$

记 $m \triangleq \max \{k_n : a_{k_1 \dots k_n} \neq 0\}$, 令

$$f_i = \sum_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} a_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}, \quad 0 \leq i \leq m,$$

则有 $f_i \in R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ 且满足 $\sum_{i=0}^m f_i x_n^i = 0$. 由于 x_n 是 $R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ 上的超越元, 故有 $f_i = 0$, 即

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} a_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} = 0, \quad 0 \leq i \leq m.$$

由于 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 在 R 上是代数无关的, 故 $a_{k_1 k_2 \dots k_{n-1} i} = 0$. 这样证明了 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是 R 上的 n 元多项式环.

□

定理 0.6

设 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是交换幺环 R 上的 n 元多项式环, S 是一个交换幺环, η 是 R 到 S 的环同态映射且 $\eta(1) = 1'$, 其中, $1, 1'$ 分别为 R, S 的幺元. 又设 $u_1, u_2, \dots, u_n \in S$, 则 η 可唯一地开拓为 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 到 S 的同态 η_n , 使得

$$\eta_n(x_i) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

即对 $\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in S, \eta$ 存在唯一的在 R 上的开拓 $\eta_u : R[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow S$ 满足

$$\eta_u|_R = \eta, \quad \eta_u(x_i) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

且 η_n 是环同态.

♡

证明 事实上, η_n 可定义为

$$\eta_n \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \eta(a_{k_1 k_2 \dots k_n}) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}.$$

不难验证 η_n 是 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 到 S 的同态映射且 $\eta_n(x_i) = u_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

又若 η' 也满足此性质, 则

$$\begin{aligned} \eta' \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \eta'(a_{k_1 k_2 \dots k_n}) \eta'(x_1)^{k_1} \eta'(x_2)^{k_2} \dots \eta'(x_n)^{k_n} \\ &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \eta(a_{k_1 k_2 \dots k_n}) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} \\ &= \eta_n \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right). \end{aligned}$$

由此可知定理成立.

□

推论 0.4

交换幺环 R 上的任意两个 n 元多项式环是同构的.

♡



笔记 这个推论说明: 任何交换幺环上的 n 元多项式环在同构意义下唯一.

证明 设 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 与 $R[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 为 R 上的两个 n 元多项式环. 令 i 为 R 到 $R[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 的嵌入映射, 满足 $i(a) = a (\forall a \in R)$. 容易验证 i 是 R 到 $R[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 的环同态映射. 由定理 0.6 知, 可将 i 开拓为 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 到 $R[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 上的同态 i_n , 使

$$i_n|_{R[x_1, x_2, \dots, x_n]} = i, \quad i_n(x_k) = y_k (k = 1, 2, \dots, n).$$

任取 $\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n} \in R[y_1, y_2, \dots, y_n]$, 则

$$i_n \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n},$$

故 i_n 是满同态. 由 y_1, y_2, \dots, y_n 是 R 上代数无关的知 $\ker i_n = \{0\}$, 故由命题????? 知 i_n 也是单同态, 即 i_n 为同构映射.

□

推论 0.5

设 R 是交换幺环 \tilde{R} 的包含幺元 1 的子环, R 上的 n 元多项式环 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 又 $u_1, u_2, \dots, u_n \in \tilde{R}$, 则有

(1) 存在 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 中理想 I , 满足

$$R \cap I = \{0\}, \quad R[u_1, u_2, \dots, u_n] \cong R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I;$$

(2) u_1, u_2, \dots, u_n 代数相关当且仅当 $I \neq \{0\}$.

**证明**

(1) 考虑 R 到 $R[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 的嵌入映射 i , 则不难验证 i 是 R 到 $R[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 上的环同态. 于是由定理 0.6 知可将 i 开拓为环同态 $i_u : R[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow R[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 满足

$$i_u|_R = i, \quad i_u(x_k) = u_k (k = 1, 2, \dots, n).$$

注意到 $i_u(R[x_1, x_2, \dots, x_n]) = R[u_1, u_2, \dots, u_n]$, 故 i_u 是满同态. 于是由命题????知 $I = \ker i_u$ 为 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的理想, $R[u_1, u_2, \dots, u_n] \cong R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

(2) 若 $a \in R \cap I$, 则 $0 = i_u(a) = i(a) = a$, 故 $R \cap I = \{0\}$. 由于 u_1, u_2, \dots, u_n 代数相关当且仅当存在有限多个 $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$, 使

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} = 0.$$

这也当且仅当

$$\begin{aligned} i_u \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n} = 0 \\ \iff 0 \neq \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \in I &\iff I \neq \{0\}. \end{aligned}$$

**推论 0.6**

设 R 是交换幺环, $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是 R 上 n 元多项式环, I 为 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的理想且 $R \cap I = \{0\}, I \neq \{0\}$, 则 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 是 R 添加 n 个代数相关元所得的环.



证明 设 π 是 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 到 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 的自然同态, 于是 $\pi(R)$ 是 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 中的子环. 由定理????知 I 也是 R 的理想, 从而再由定理????知

$$\pi(R) = R/I = (R + I)/I \cong R/(R \bigcap I) = R/\{0\} = R + 0 = R,$$

故可将 R 视为 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 的子环, 令 $u_i = \pi(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $u_i \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$, 于是

$$R[u_1, u_2, \dots, u_n] \subseteq R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I,$$

. 注意到

$$\pi \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \pi(a_{k_1 k_2 \dots k_n}) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n},$$

故再结合 π 是满同态可得

$$R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I = \pi(R[x_1, x_2, \dots, x_n]) \subseteq R[u_1, u_2, \dots, u_n] \subseteq R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I,$$

即 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I = R[u_1, u_2, \dots, u_n]$. 又由 $I \neq \{0\}$, 故 I 中有非零元素

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

其中有有限多个 $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$. 而

$$\pi \left(\sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n} = 0.$$

又因为 $\pi(R) \cong R$, 所以上式有有限个 $\pi(a_{k_1 k_2 \dots k_n}) \neq 0$. 故 u_1, u_2, \dots, u_n 是代数相关的.

□