0.1 行列式基本性质

命题 0.1 (行列式计算常识)

(1) $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$; $\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$.

(2) 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转 (**行倒排**)、或左右翻转 (**列倒排**) 分别得到 D_1、D_2; 把 D **逆时针旋转** 90°、或**顺时针旋转** 90° 分别得到 D_3、D_4; 把 D **依副对角线翻转**、或**依主对角线翻转**分别得到 D_5、D_6. 易知

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_5=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_6=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1=D_2=D_3=D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D,$$
$$D_5=D_6=D.$$

(3) 设 $A=(a_{i,j})$ 为 n 阶复矩阵, 则一定有 $|A|=\overline{|A|}$.

(4) 若 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|B|$ 是 m 阶行列式, 它们的值都不为零, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

注 实际上, 令 $e_i,i=1,2,\cdots,n$ 分别为第 i 行元素为 1, 其余元素为零的列向量. 则由基本矩阵乘法, 不难发现

$$D_1=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)D,\quad D_2=D(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1).$$

证明 (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

(2) $$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{逆时针旋转}90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{顺时针旋转}90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法:$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, 故由行列式的组合定义可得

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{1 \le k_1, k_2, \cdots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\ &= \sum_{1 \le k_1, k_2, \cdots, k_n \le n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} \overline{a_{k_1 1}} \cdot \overline{a_{k_2 2}} \cdots \overline{a_{k_n n}} = |\overline{A}|. \end{aligned}$$

(4) 将 $|A|$ 的第一列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 共换了 m 次; 再将 $|A|$ 的第二列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 又换了 m 次;$\cdots$. 依次类推, 经过 mn 次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此 $|D| = (-1)^{mn}|C|$, 于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

□

命题 0.2 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 任意的指标 $1 \le i \le n$, 以及任意的常数 c, 满足下列条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列是方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列之和, 且 $\boldsymbol{A}$ 的其余列与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对应列完全相同, 则 $f(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{B}) + f(\boldsymbol{C})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = cf(\boldsymbol{A})$;

(3) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = -f(\boldsymbol{A})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n) = 1$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位阵.

求证:$f(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$.

笔记 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

证明 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为标准单位列向量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k, \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{A}) &= f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) \\
&= a_{11} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) + a_{21} f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) + \cdots + a_{n1} f(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2}\boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\left[a_{12} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) + a_{22} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) + \cdots + a_{n2} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_n, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)\right] \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) = \cdots = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k 1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} a_{k 1} a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right).
\end{aligned}
$$

若 $k_i = k_j$, 则 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$ 的第 i 列和第 j 列对换后仍然是 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$. 由条件 (3) 可知,$f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = -f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$, 于是 $f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = 0$. 因此在 $f(\boldsymbol{A})$ 的表示式中, 只剩下 $k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$ 变成 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{I}_n$, 故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$
f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} f(\boldsymbol{I}_n) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.
$$

于是由行列式的组合定义可知

$$
f(\boldsymbol{A}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = |\boldsymbol{A}|.
$$

□