0.1 理想

定义 0.1 (由子集生成的理想)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $A\subset R$. 则 (A), 称为**由 A 生成的理想**, 定义为所有 R 中包含 A 的理想的交集, 即

$$(A)=\bigcap\{I\subset R: I\supset A, I\lhd R\}.$$

笔记 因为 $R\lhd R$ 且 $A\subset R$, 所以 $R\subset(A)$. 故 $(A)\neq\varnothing$.

命题 0.1 (生成的理想还是理想)

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $A\subset R$, 则 $(A)\lhd R$.

证明 首先, 取交集的集族非空, 因为整个环 R 是包含了 A 的一个理想（对加法构成子群, 且“吸收”了乘法）.

由于集族中每一个理想都是加法子群. 因此根据命题**??**可知, 它们的交还是加法子群. 我们只须检验乘法的“吸收”性, 即 $R(A)\subset(A)$, 及 $(A)R\subset(A)$. 根据对称性, 我们证明第一个包含关系. 假设 $r\in R,a\in(A)$, 则对于任意集族中的理想 I, 我们都有 $a\in I$. 故 $ra\in I$. 这对于任意这样的理想 I 都是成立的, 因此 $ra\in(A)$. 这就证明了 (A) 是 R 的子环. □

定义 0.2

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 而 $a\in R$, 则我们定义

$$(a)=(\{a\}).$$

称为**由 a 生成的主理想**. 一般地, 若一个理想能被一个元素生成, 我们就称其为**主理想**.

对于 $a_1,\cdots,a_n\in R$, 我们定义

$$(a_1,\cdots,a_n)=(\{a_1,\cdots,a_n\}).$$

一般地, 若一个理想能被有限个元素生成, 我们就称其为**有限生成的理想**.

命题 0.2

设 $(R,+,\cdot)$ 是一个交换环, 而 $a\in R$, 则

$$(a)=Ra=\{ra: r\in R\}.$$

一般地, 若 $a_1,\cdots,a_n\in R$, 则

$$(a_1,\cdots,a_n)=Ra_1+\cdots+Ra_n=\{r_1a_1+\cdots+r_na_n: r_1,\cdots,r_n\in R\}.$$

证明 显然有限生成的理想是主理想的特例, 故我们只须证明第二个等式.

要证明 $(A)=I$, 我们只须证明两点. 一,I 是包含 A 的理想; 二, 每一个包含 A 的理想都会包含 A.

首先, 要证明 $Ra_1+\cdots+Ra_n$ 是个理想. 对加法而言,$0=0a_1+\cdots+0a_n\in Ra_1+\cdots+Ra_n$, 而且对 $r_1a_1+\cdots+r_na_n, s_1a_1+\cdots+s_na_n(r_i,s_i\in R)$, 我们有

$$(r_1a_1+\cdots+r_na_n)-(s_1a_1+\cdots+s_na_n)=(r_1-s_1)a_1+\cdots+(r_n-s_n)a_n\in Ra_1+\cdots+Ra_n.$$

因此 $Ra_1+\cdots+Ra_n$ 对加法构成子群.

接下来, 因为 R 是交换环, 我们只须证明 $R(Ra_1+\cdots+Ra_n)\subset(Ra_1+\cdots+Ra_n)$. 而这是因为

$$R(Ra_1+\cdots+Ra_n)=RRa_1+\cdots+RRa_n=Ra_1+\cdots+Ra_n.$$

这样, 我们就证明了 $Ra_1+\cdots+Ra_n$ 是个理想, 而且显然包含 $\{a_1,\cdots,a_n\}$.

另一方面, 若 I 是一个包含了 $a_1,\cdots,a_n$ 的理想, 那么根据加法的封闭性及乘法的“吸收”性,

$$I\supset Ra_1+\cdots+Ra_n.$$

综上所述, 这就证明了这个命题. □