0.1 伴随相关应用

命题 0.1

设 V 是由 n 阶实矩阵全体构成的欧氏空间（取 Frobenius 内积）,V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(A)=PAQ$, 其中 $P,Q\in V$.

(1) 求 φ 的伴随 $\varphi^*(\varphi^*(A)=P'AQ')$;

(2) 若 P,Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是正交算子的充要条件是 $P'P=cI_n,QQ'=c^{-1}I_n$, 其中 c 是正实数;

(3) 若 P,Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是自伴随算子的充要条件是 $P'=\pm P,Q'=\pm Q$;

(4) 若 P,Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是正规算子的充要条件是 P,Q 都是正规矩阵.

解

(1) 对任意的 $A,B\in V$, 由迹的交换性可得

$$(\varphi(A),B)=\mathrm{tr}(PAQB')=\mathrm{tr}(AQB'P)=\mathrm{tr}(A(P'BQ')')=(A,P'BQ').$$

定义 V 上的线性变换 ψ 为 $\psi(B)=P'BQ'$, 则上式即为 $(\varphi(A),B)=(A,\psi(B))$. 由伴随的唯一性即得 $\varphi^*=\psi$.

(2) 若 φ 是正交算子, 即 $\varphi^*\varphi=I_V$, 则由 (1) 可知,$P'PAQQ'=A$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 由 Q 的非异性可得 $P'PA=A(QQ')^{-1}$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 令 $A=I_n$ 可得 $P'P=(QQ')^{-1}$, 因此上式即言 $P'P$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $P'P=cI_n$. 又 P 可逆, 故 $P'P$ 正定, 从而 $c>0$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

(3) 若 φ 是自伴随算子, 即 $\varphi^*=\varphi$, 则由 (1) 可知,$P'AQ'=PAQ$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 由 P,Q 的非异性可得 $P^{-1}P'A=AQ(Q')^{-1}$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 令 $A=I_n$ 可得 $P^{-1}P'=Q(Q')^{-1}$, 因此上式即言 $P^{-1}P'$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $P^{-1}P'=cI_n$, 即 $P'=cP$. 此式转置后可得 $P=cP'=c^2P$, 又 P 可逆, 故 $c^2=1$, 从而 $c=\pm1$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

(4) 若 φ 是正规算子, 即 $\varphi^*\varphi=\varphi\varphi^*$, 则由 (1) 可知,$P'PAQQ'=PP'AQ'Q$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 由 P,Q 的非异性可得 $(PP')^{-1}P'PA=AQ'Q(QQ')^{-1}$ 对任意的 $A\in V$ 成立. 令 $A=I_n$ 可得 $(PP')^{-1}P'P=Q'Q(QQ')^{-1}$, 因此上式即言 $(PP')^{-1}P'P$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $(PP')^{-1}P'P=cI_n$, 即 $P'P=cPP'$. 上式两边同时取迹, 由于 P 可逆, 故由命题**??**可知 $\mathrm{tr}(P'P)=\mathrm{tr}(PP')>0$, 从而 $c=1$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

□

命题 0.2

设 V 是 n 阶实对称矩阵构成的欧氏空间（取 Frobenius 内积）.

(1) 求出 V 的一组标准正交基;

(2) 设 T 是一个 n 阶实矩阵,V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(A)=T'AT$, 求证:φ 是自伴随算子的充要条件是 T 为对称矩阵或反对称矩阵.

证明

(1) 记 E_{ij} 为 n 阶基础矩阵, 则容易验证下列矩阵构成了 V 的一组标准正交基:

$$E_{ii}\ (1\le i\le n);\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji})\ (1\le i<j\le n). \tag{1}$$

显然(1)是 V 的一组基, 对 $\forall i,j,k\in 1,2,\cdots,n$ 且 $i<j,k\neq i,j$, 我们有

$$\mathrm{tr}\left(E_{ii}'E_{jj}\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ii}E_{jj}\right)=\mathrm{tr}\left(O\right)=0;$$

$$\mathrm{tr}\left(E_{kk}'\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\left(E_{kk}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\left(O\right)=0;$$

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ik}+E_{ki}\right)'\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\left(E_{ik}+E_{ki}\right)\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(E_{kj}\right)=0;$$

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{kj}+E_{jk}\right)'\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(E_{kj}+E_{jk}\right)\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(E_{ki}\right)=0;$$

$$\operatorname{tr}\left(E_{ii}\right)=1,\ \operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)'\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(E_{ii}+E_{jj}\right)=1.$$

故(1)是 V 的一组标准正交基.

(2) 先证充分性. 若 T 为对称矩阵或反对称矩阵, 则由命题 0.1可知,$\varphi^*(A)=(T')'AT'=TAT'=T'AT=\varphi(A)$ 对任一 $A\in V$ 成立, 故 $\varphi=\varphi^*$ 是自伴随算子. 再证必要性. 若 φ 是自伴随算子, 则同上理由可得 $TAT'=T'AT$ 对任一 $A\in V$ 成立. 设 $T=(t_{ij})$, 令 $A=E_{ij}+E_{ji}$ 代入上述等式可得

$$TAT'=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}(E_{ij}+E_{ji})\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots & t_{1j} & \cdots & t_{1i} & \cdots \\ \cdots & t_{2j} & \cdots & t_{2i} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & t_{nj} & \cdots & t_{ni} & \cdots \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t_{1j}t_{1i}+t_{1i}t_{1j} & t_{1j}t_{2i}+t_{1i}t_{2j} & \cdots & t_{1j}t_{ni}+t_{1i}t_{nj} \\ t_{2j}t_{1i}+t_{2i}t_{1j} & t_{2j}t_{2i}+t_{2i}t_{2j} & \cdots & t_{2j}t_{ni}+t_{2i}t_{nj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{nj}t_{1i}+t_{ni}t_{1j} & t_{nj}t_{2i}+t_{ni}t_{2j} & \cdots & t_{nj}t_{ni}+t_{ni}t_{nj} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$T'AT=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}(E_{ij}+E_{ji})\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots & t_{j1} & \cdots & t_{i1} & \cdots \\ \cdots & t_{j2} & \cdots & t_{i2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & t_{jn} & \cdots & t_{in} & \cdots \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t_{j1}t_{i1}+t_{i1}t_{j1} & t_{j1}t_{i2}+t_{i1}t_{j2} & \cdots & t_{j1}t_{in}+t_{i1}t_{jn} \\ t_{j2}t_{i1}+t_{i2}t_{j1} & t_{j2}t_{i2}+t_{i2}t_{j2} & \cdots & t_{j2}t_{in}+t_{i2}t_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{jn}t_{i1}+t_{in}t_{j1} & t_{jn}t_{i2}+t_{in}t_{j2} & \cdots & t_{jn}t_{in}+t_{in}t_{jn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

比较(2)和(3)可得

$$t_{ik}t_{jl}+t_{il}t_{jk}=t_{ki}t_{lj}+t_{li}t_{kj} \tag{4}$$

对一切 i,j,k,l 都成立. 令 $k=l$, 则可得

$$t_{ik}t_{jk}=t_{ki}t_{kj} \tag{5}$$

对一切 i,j,k 都成立. 进一步令 $i=j$, 则可得 $t_{ik}^2=t_{ki}^2$ 对一切 i,k 都成立, 因此 $t_{ik}=t_{ki}$ 或 $t_{ik}=-t_{ki}$. 假设有

某个 $i \neq k, t_{ik} = t_{ki} \neq 0$; 又有某个 $t_{uv} = -t_{vu} \neq 0$, 则利用(5)式可得 $t_{ik}t_{uk} = t_{ki}t_{ku}$ 可推出 $t_{uk} = t_{ku}$. 这时若 $t_{uk} \neq 0$, 则再利用(5)式可得 $t_{uk}t_{uv} = t_{ku}t_{vu}$ 可推出 $t_{uv} = t_{vu}$, 矛盾. 若 $t_{uk} = 0$, 则在 (4) 式中令 $j = u, l = v$, 可得 $t_{ik}t_{uv} = t_{ki}t_{vu}$, 而 $t_{ik} = t_{ki} \neq 0$, 故仍可推出 $t_{uv} = t_{vu}$, 依然矛盾. 于是或者 $t_{ik} = t_{ki}$ 对一切 i, k 成立, 或者 $t_{ik} = -t_{ki}$ 对一切 i, k 成立, 即 T 或者是对称矩阵, 或者是反对称矩阵.

□

命题 0.3

设 $U = \mathbb{R}[x]$, 取例题**??**(6) 中的内积. 任取 $f(x), g(x) \in U$, 若设某些系数为零, 则可将它们都写成统一的形式:$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$.

(1) 线性变换 φ 定义为 $\varphi(f(x)) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, 试求 φ 的伴随;

(2) 线性变换 φ 定义为 $\varphi(f(x)) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) + \cdots + a_n(\sum\limits_{i=0}^{n} x^i)$, 求证:$\varphi$ 的伴随不存在.

证明

(1) 经简单的计算可知,$\varphi^*(g(x)) = b_0x + b_1x^2 + \cdots + b_{n-1}x^n + b_nx^{n+1}$.

(2) 注意到 $(f(x), x^i) = a_i$, 也就是说 $f(x)$ 和 x^i 的内积就是 $f(x)$ 的 x^i 项系数. 用反证法来证明, 设 φ 的伴随算子 φ^* 存在, 我们来推出矛盾. 对任意的 $n \geq m$, 我们有 $(\varphi(x^n), x^m) = (1 + x + \cdots + x^n, x^m) = 1$, 故 $(x^n, \varphi^*(x^m)) = 1$ 对任意给定的 m 以及所有的 $n \geq m$ 都成立, 这说明 $\varphi^*(x^m)$ 有无穷多个单项的系数不为零, 这与 $\varphi^*(x^m)$ 是多项式相矛盾. 因此 φ 的伴随不存在.

□