0.1 求和法

例题 0.1 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 Vieta 定理可知,$x_1+x_2+x_3=0$. 因此, 我们有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0.$$

□

例题 0.2 设 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{11} & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n} \\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{21} & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n1} & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix} (n-1)(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n} \\ (n-1)(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n} \\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)j_1+j_i}(n-1)\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

例题 0.3 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix}n-1&1&\cdots&1&1\\n-1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&1&\cdots&0&1\\n-1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\\0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

□

注 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题**??**的应用, 利用命题**??**的计算方法直接得到结果.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&-1&0\\1&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{“爪”型行列式}}-\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例题 0.4 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}.$$

笔记 既可以将 $|\boldsymbol{A}|$ 看作命题“爪”型行列式的应用, 利用命题“爪”型行列式的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.

也可以利用求和法将 $|\boldsymbol{A}|$ 化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -b & b & 0 & \cdots & 0\\ -b & 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{“爪”型行列式}}(a_1+b)\,b^{n-1}-\sum_{i=2}^{n}b^{n-2}a_i\,(-b)=b^{n-1}\left[(a_1+b)+\sum_{i=2}^{n}a_i\right]=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)b^{n-1}.$$

解法二:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-a_i\cdot j_1+j_i}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

□

例题 0.5 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}.$$

笔记 求和法的经典应用.

解 解法一 (求和法):

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\frac{n\,(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i}\frac{n\,(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\frac{n\,(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-j_1+j_i}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\n-2&-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&0&\cdots&-n&-n\\1&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}-\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&-n&-n\\0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{n(n+1)}{2}(-n)^{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

解法二:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\3&4&5&\cdots&1&2\\2&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\\-j_1+j_2}]{\substack{-j_{n-1}+j_n\\-j_{n-2}+j_{n-1}}}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\n&1-n&1&\cdots&1&1\\n-1&1&1-n&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\3&1&1&\cdots&1-n&1\\2&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3\cdots,n]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\n-1&-n&0&\cdots&0&0\\n-2&0&-n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&0&0&\cdots&-n&0\\1&0&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}\xlongequal[k=2,3\cdots,n]{\frac{k}{n}j_k+j_1}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}&1&1&\cdots&1&1\\0&-n&0&\cdots&0&0\\0&0&-n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-n&0\\0&0&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}$$

$$=(-n)^{n-1}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\right)=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

□