0.1 子群与商群

定义 0.1

设 A, B 是群 G 的两个子集, 约定

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}, A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

特别地, 当 $A = \{a\}$ 为单点集时, 记 $AB = aB$, $BA = Ba$. 当然这些符号对半群与幺半群可同样使用.

命题 0.1

设有限群 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 满足

$$N_i \cap N_j = \{1\},\ i \neq j.$$

则

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1||N_2| \cdots |N_k|.$$

证明 因为 N_i 都是有限群, 所以设

$$N_i = \{n_1^i, n_2^i, \cdots, n_{|N_i|}^i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

其中 $n_1^i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 由 $N_i \cap N_j = \{1\}(i \neq j)$ 知当 $i \neq j$ 时, 有

$$n_s^i \neq n_t^j, \quad \forall s, t \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

于是

$$N_1 N_2 \cdots N_k = \{n_{j_1}^1 n_{j_2}^2 \cdots n_{j_k}^k \mid j_i \in \{1, 2, \cdots, |N_i|\}, i = 1, 2, \cdots, k\}.$$

因此直接计算 $N_1 N_2 \cdots N_k$ 的元素个数可得

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1||N_2| \cdots |N_k|.$$

若 $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$, 则当 $i \neq j$ 时, 有 $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod\limits_{j \neq i} N_j = \{1\}$, 故此时有

$$|G| = |N_1||N_2| \cdots |N_k|.$$

□

定义 0.2

群 G 的非空子集 H 若对 G 的运算也构成一个群, 则称为 G 的**子群**, 记作 $H < G$.

注 显然, $H = \{1\}$(1 为 G 的幺元) 与 $H = G$ 均为 G 的子群, 称为 G 的**平凡子群**, 其他的子群称为**非平凡子群**.

定理 0.1

设 H 是群 G 的非空子集, 则下列条件等价:

(1) H 是 G 的子群;

(2) $1 \in H$; 若 $a \in H$, 则 $a^{-1} \in H$; 若 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$;

(3) 若 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$, $a^{-1} \in H$;

(4) 若 $a, b \in H$, 则 $ab^{-1} \in H$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由 H 对 G 的乘法构成群知 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$. 又 H 有幺元 $1'$, 即有 $1' \cdot 1' = 1'$. 设 $1'$ 在 G 中的逆元为 $1'^{-1}$, 则有

$$1 = 1' \cdot 1'^{-1} = (1' \cdot 1') \cdot 1'^{-1} = 1',$$

故 $1 \in H$. 设 a 在 H 中的逆元为 a', 于是 $aa' = 1' = 1$, 即 $a' = a^{-1}$, 故 $a^{-1} \in H$. 由此知 (2) 成立, 而且 H 的幺元是

G 的幺元. $a\in H$, a 在 H 中的逆元与在 G 中的逆元一致.

(2) $\Rightarrow$ (3). 这是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4). 若 $a,b\in H$, 故 $a,b^{-1}\in H$, 故 $ab^{-1}\in H$.

(4) $\Rightarrow$ (1). 由 $H\neq\varnothing$ 知 $\exists a\in H$, 因而 $1=aa^{-1}\in H$. 又由 $1,a\in H$ 知 $a^{-1}=1\cdot a^{-1}\in H$. 又若 $a,b\in H$, 由 $b^{-1}\in H$ 得 $ab=a(b^{-1})^{-1}\in H$. 由此可知 G 的乘法也是 H 的乘法. 对 H 而言有幺元 1; 对 $a\in H$ 有逆元 a^{-1}; 结合律显然成立. 故 H 是 G 的子群.

□

推论 0.1

设 H 是群 G 的非空子集, 则下列条件等价:

(1) H 是 G 的子群;

(2) $HH=H, H^{-1}=H$;

(3) $H^{-1}H=H$.

♡

证明

□

命题 0.2

(1) 若 H_1,H_2 是群 G 的子群, 则 $H_1\cap H_2$ 也是 G 的子群.

(2) 若 G 是一个群, 则 G 的任意子群的交 $\bigcap\limits_{H<G} H$ 也是 G 的子群.

(3) 若 H_1,H_2 都是群 G 的子群且 $H_2\subseteq H_1$, 则 H_2 也是 H_1 的子群.

♠

证明

(1)

(2)

(3) 由 H_2 是 G 的子群知 $ab^{-1}\in H_2, \forall a,b\in H_2$. 又 $H_2\subseteq H_1$, 故 H_2 也是 H_1 的子群.

□

定义 0.3

1. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间.S_V 为 V 上的全变换群, $GL(V)$ 表示 V 上所有可逆线性变换的集合, 则 $GL(V)$ 为 S_V 的子群, 称为线性空间 V 的**一般线性群**.
   又设 $SL(V)$ 为 V 上所有行列式等于 1 的线性变换的集合, 则 $SL(V)$ 是 $GL(V)$(同时也是 S_V) 的子群, 称为**特殊线性群**.
2. 设 V 是 n 维 Euclid 空间. 以 $O(V)$ 表示 V 上所有正交变换的集合, $SO(V)$ 表示所有行列式等于 1 的正交变换的集合, 则 $O(V)$ 是 $GL(V)$ 的子群, $SO(V)$ 是 $O(V)$ 的子群. $O(V)$ 称为 V 的**正交变换群**, 简称**正交群**, $SO(V)$ 称为**转动群** (或**特殊正交变换群**、**特殊正交群**).

♣

注 将上述 S_V 换成数域 $\mathbb{P}$ 上的全体方阵构成的乘法群, 线性变换换成方阵, 结论也成立.

证明

□

定义 0.4 (全变换群/置换群)

设 X 是非空集合. 以 S_X 表示 X 的所有可逆变换 (即 X 到 X 的一一对应) 的集合, 则 S_X 对变换的乘法构成一个群, id_X 为左幺元, f^{-1} 为 f 的左逆元. S_X 称 X 的**全变换群**.S_X 的子群称为 X 上的**变换群**.

如果集合 X 所含元素的个数 $|X|=n<+\infty$. 此时 S_X 记为 S_n, 称为 n 个文字的**对称群**或 n 个文字的**置换群**, 其元素称为**置换**.

♣

注 往后, 如果我们不加说明的话,S_n 就表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的对称群.

定义 0.5

假定集合 $X=\{1,2,\cdots,n\}$, 记 S_n 为 X 的对称群, 设 $\sigma\in S_n$, 则 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 常用下面记法:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

更一般地, 若 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 则可记

$$\sigma=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n)\end{pmatrix}$$

易知 S_n 中有 $n!$ 个元素, S_n 中一个元素可以有 $n!$ 种表示法.

例如, $\sigma\in S_3$, 满足 $\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,\sigma(3)=1$, 则可记

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\cdots$$

♣

定理 0.2

设 n 个不定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式

$$A=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n].$$

记 S_n 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的对称群, 对于 $\sigma\in S_n$, 令

$$A_\sigma=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}),$$

则 $A_\sigma=\pm A$. 若 $A_\sigma=A$, 则称 σ 为**偶置换**, 并记 $\mathrm{sgn}\sigma=1$; 若 $A_\sigma=-A$, 则称 σ 为**奇置换**, 并记 $\mathrm{sgn}\sigma=-1$, $\mathrm{sgn}\sigma$ 称为 σ 的**符号**. 故有 sgn 是 S_n 到 $\{-1,1\}$ 的同态且

$$A_\sigma=\mathrm{sgn}\sigma A.$$

令 A_n 为 S_n 中偶置换集合, 即

$$A_n\triangleq\{\sigma\in S_n|\mathrm{sgn}\sigma=1\},$$

则 A_n 为 S_n 的子群.A_n 称为 n 个文字的**交错群**.

♡

证明 先证明 $A_\sigma=\pm A$. 注意到 A 中没有 x_i-x_j 的重因式, 因而只需说明 A_σ 中没有重因式即可. 设有 $\{\sigma(i),\sigma(j)\}=\{\sigma(k),\sigma(l)\}$, 则有如下两种可能:

(1) $\sigma(i)=\sigma(k),\sigma(j)=\sigma(l)$, 则有 $i=k,j=l$;

(2) $\sigma(i)=\sigma(l),\sigma(j)=\sigma(k)$, 则有 $i=l,j=k$,

因而都有 $\{i,j\}=\{k,l\}$, 由此知 $A_\sigma=\pm A$.

事实上, 若 $\tau,\sigma\in S_n$, 则有

$$A_{\sigma\tau}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}).$$

将 $A_{\sigma\tau}$ 与 A_σ 进行比较. 若 $\tau(i)<\tau(j)$, 则 $x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}$ 仍是 A_σ 中一个因子; 若 $\tau(i)>\tau(j)$, 则 $x_{\sigma\tau(j)}-x_{\sigma\tau(i)}=-(x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)})$ 为 A_σ 中一因子, 因而将 A_σ 变成 $A_{\sigma\tau}$ 时改变因子符号的次数与将 A 变成 A_τ 时改变因子符号的次数相同, 因而有

$$A_{\sigma\tau}=\mathrm{sgn}\tau\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau A.$$

于是

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau,\quad\forall\sigma,\tau\in S_n.$$

故 sgn 是 S_n 到 $\{-1,1\}$ 的同态. 又注意到 $\mathrm{sgn}\tau^{-1}=\mathrm{sgn}\tau,\forall\tau\in S_n$, 故

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1})=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau^{-1}=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau=1\Longrightarrow\sigma\tau^{-1}\in A_n,\quad\forall\sigma,\tau\in A_n.$$

由此知 A_n 为 S_n 的子群.

□

定义 0.6

设 H 是群 G 的子群, 又 $a\in G$. 集合 aH 与 Ha 分别称为以 a 为代表的 H 的**左陪集**与**右陪集**.

命题 0.3

设 H 是群 G 的子群, 又 $a,b\in G$, 则 aH,Ha,H,aHb 的阶都相同.

证明 设 $H=\{h_1,h_2,\cdots\}$, 则

$$aH=\{ah_1,ah_2,\cdots\},\quad Ha=\{h_1a,h_2a,\cdots\},\quad aHb=\{ah_1b,ah_2b,\cdots\},$$

故 aH,Ha,H 中所含元素的个数都相同, 即阶相同.

□

定理 0.3

设 H 是群 G 的子群, 则由

$$aRb,\ 若\ a^{-1}b\in H$$

所确定的 G 中的关系 R 是一个等价关系, 并且 a 所在的等价类为 $\{aH:a\in G\}$, 故 H 的左陪集族 $\{aH:a\in G\}$(集合无相同元素) 是 G 的一个分划.

证明 由 $a^{-1}a\in H$ 知 $aRa(\forall a\in G)$. 又设 aRb, 即 $a^{-1}b\in H$, 故 $(a^{-1}b)^{-1}=b^{-1}a\in H$, 即 bRa. 再设 aRb,cRb, 即 $a^{-1}b,b^{-1}c\in H$, 故 $a^{-1}c=(a^{-1}b)(b^{-1}c)\in H$, 即 aRc. 这样知 R 是等价关系. 又由 $b=a(a^{-1}b)$ 知

$$aRb\iff a^{-1}b\in H\iff b\in aH,$$

故 a 所在的等价类为 aH. 由定理 1.18知 $\{aH:a\in G\}$ 为 G 的一个分划.

□

推论 0.2

设 H 是群 G 的子群, 则下列条件等价:

(1) $aH\cap bH\neq\varnothing$;

(2) $aH=bH$;

(3) $a^{-1}b\in H$,

而且 $G=\bigcup\limits_{a\in G}aH$ 为不相交的并.

证明

□

定义 0.7

设 H 是群 G 的子群, 由定理 0.3定义 G 中的等价关系 R 为

$$aRb,\ 若\ a^{-1}b\in H.$$

将 G 对等价关系 R 的商集合, 即以左陪集 aH, $a\in G$ 为元素的集合记为 $G/H=\{aH:a\in G\}$, 称为 G 对 H 的**左陪集空间**. G/H 中元素个数 $|G/H|$ 称为 H 在 G 中的**指数**, 记为 $[G:H]$. 相应可定义**右陪集空间**.

注 $\{1\}$ 作为 G 的子群, 在 G 中指数显然为 $|G|$. 故也记 $|G|=[G:1]$.

例题 0.1 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $GL(V)$ 有子群 $SL(V)$. 在 V 中取定一组基, 任何一个线性变换由它在这组基下的矩阵完全确定, 可把它们等同起来.$\forall\lambda\in\mathbb{P},\lambda\neq 0$, 令 $D(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda,1,\cdots,1)$, 于是 $D(\lambda)\in GL(V)$, 对于 $A\in GL(V)$ 有

$$ASL(V)=D(\lambda)SL(V)\iff\det A=\lambda.$$

于是

$$GL(V)=\bigcup_{\lambda\neq 0}D(\lambda)SL(V),$$

因而

$$[GL(V):SL(V)]=+\infty.$$

证明

□

例题 0.2 设 V 是 n 维 Euclid 空间. 由 $A\in O(V)$ 有 $\det A=\pm 1$, 令 $D(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda,1,\cdots,1)$, 于是

$$O(V)=SO(V)\bigcup D(-1)SO(V),\quad [O(V):SO(V)]=2.$$

证明

□

例题 0.3 设 σ 是 S_n 中任一奇置换, 则有 $S_n=A_n\cup\sigma A_n$, 故 $[S_n:A_n]=2$.

证明

□

定理 0.4 (Lagrange 定理)

设 H 是有限群 G 的子群, 记 1 为 G,H 的幺元, 则有

$$[G:1]=[G:H][H:1]\tag{1}$$

因而子群 H 的阶是群 G 的阶的因子.

注 这个结论对无限群 G 也正确, 此时等式两边都是 $+\infty$.

证明 设 $a\in G$. 显然, 映射 $h\to ah$ 是 H 到 aH 上的一一对应, 因而 $|aH|=|H|=[H:1]$. 又由推论 0.2知 $G=\bigcup\limits_{a\in G}aH$ 为不相交的并, $\{aH:a\in G\}$ 的不同左陪集个数为 $[G:H]$, 故式 (1) 成立.

□

定理 0.5

设 H 是群 G 的子群, 则 G 中由

$$aRb,\ 若\ a^{-1}b\in H$$

所定义的关系 R 为同余关系的充分必要条件是

$$ghg^{-1}\in H,\quad\forall g\in G,h\in H.$$

此时称 H 为 G 的**正规子群**, 记为 $H\lhd G$. 同时, 商集合 G/H 对同余关系 R 导出的运算

$$aH\cdot bH=abH,\quad\forall a,b\in G$$

也构成一个群, 称为 G 对 H 的**商群**. 商群 G/H 的幺元为 $1\cdot H=H$. 为方便计, 常将商群 G/H 中元素记为 $\overline{g}=gH$. 有时也将商群 G/H 记作 $\dfrac{G}{H}$.

证明 设 R 为同余关系. 又 $g\in G,h\in H$, 于是有

$$gRgh,\quad g^{-1}Rg^{-1},$$

因而 $gg^{-1}R(ghg^{-1})$, 即 $1Rghg^{-1}$, 亦即 $ghg^{-1}\in H$.

反之, 设 $\forall g \in G, h \in H$ 有 $ghg^{-1} \in H$. 设 aRb, cRd, 则 $a^{-1}b, c^{-1}d \in H$, 即 $\exists h_1, h_2 \in H$, 使 $b = ah_1, d = ch_2$, 从而 $c^{-1} = h_2 d^{-1}$. 因而 $(ac)^{-1}(bd) = c^{-1}a^{-1}ah_1 d = h_2\left(d^{-1}h_1 d\right) \in H$, 则有 $(ac)R(bd)$, 即 R 为同余关系.

设 R 为同余关系. 因 a 所在等价类为 aH, 由定理 1.20 知 G/H 中的乘法为

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G. \tag{2}$$

显然有 $(aH \cdot bH)cH = abcH = aH(bH \cdot cH), 1H \cdot aH = aH, a^{-1}H \cdot aH = 1 \cdot H$, 故 G/H 为群.

□

推论 0.3

(1) 若 G 为有限群, $H \lhd G$, 商群 G/H 的阶 $[G/H : H] = [G : H] = \dfrac{[G:1]}{[H:1]}$.

(2) 若 G 为无限群, $H \lhd G$, 商群 G/H 的阶 $[G/H : H] = [G : H]$.

♡

证明 这是Lagrange 定理的直接推论.

□

定理 0.6

设 H 是群 G 的子群, 则下列条件等价:

(1) $H \lhd G$;

(2) $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$;

(3) $gH = Hg, \forall g \in G$;

(4) $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \forall g_1, g_2 \in G$.

♡

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). $g \in G, h \in H$, 则由 $H \lhd G$ 有 $ghg^{-1} \in H$, 又 $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, 故有 $gHg^{-1} = H$.

(2) $\Rightarrow$ (3). $\forall g \in G, h \in H$ 有 $gh = ghg^{-1}g \in Hg, hg = gg^{-1}hg \in gH$, 故 $gH = Hg$.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2, h \in H$. 由条件 (3) 成立知 $\exists h_1', h' \in H$, 使 $h_1g_2 = g_2h_1'$, $g_2h = h'g_2$. 于是 $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_1'h_2 \in g_1g_2H, g_1g_2h = g_1h'g_2 \cdot 1 \in g_1H \cdot g_2H$, 故 $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 $g \in G, h \in H$, 故有 $ghg^{-1} \in gHg^{-1}H = gg^{-1}H = H$, 则 $H \lhd G$.

□

命题 0.4

(1) Abel 群 G 的任一子群 H 都是正规子群, 商群 G/H 也是 Abel 群.

(2) 若 H 是群 G 的子群且 $H \supseteq N, N \lhd G$, 则 $N \lhd H$.

(3) 若 H 是群 G 的子群, 且 $N \lhd G, H$, 则 H/N 是 G/N 的子群.

(4) 若 G 是一个群, 则 G 的任意正规子群的交 $\bigcap\limits_{H \lhd G} H$ 也是 G 的子群.

(5) 设 G 是一个群, 且 $N_1, N_2, \cdots, N_k \lhd G$, 则

$$N_1N_2\cdots N_k \lhd G.$$

♠

证明

(1)

(2) 由命题 0.2(3)知 N 是 H 的子群. 又由 $N \lhd G$ 知

$$gng^{-1} \in H, \forall n \in N, \ g \in H \subseteq G.$$

故 $N \lhd H$.

(3) 显然 $H/N, G/N$ 都是商群, 且 H/N 中元素也都在 G/N 中, 故 H/N 是 G/N 的子群.

(4)

(5) 由 $N_i \lhd G, i = 1, 2, \cdots, k$ 知

$$gn_ig^{-1} \in N_i, \quad \forall n_i \in N_i, g \in G.$$

于是对 $\forall n_1n_2\cdots n_k \in N_1N_2\cdots N_k, g \in G$, 有

$$g\left(n_1n_2\cdots n_k\right)g^{-1} = \left(gn_1g^{-1}\right)\left(gn_2g^{-1}\right)\cdots\left(gn_kg^{-1}\right) \in N_1N_2\cdots N_k.$$

故 $N_1N_2\cdots N_k \lhd G$.

□

例题 0.4 将商群 G/H 中元素记为 $\overline{g} = gH$, 则

(1) $SL(V) \lhd GL(V), GL(V)/SL(V) = \{\overline{D(\lambda)}|\lambda \neq 0\}$ 且 $\overline{D(\lambda)D(\mu)} = \overline{D(\lambda\mu)}$;

(2) $SO(V) \lhd O(V), O(V)/SO(V) = \{\overline{D(1)}, \overline{D(-1)}\}$;

(3) $A_n \lhd S_n, S_n/A_n = \{\overline{1}, \overline{\sigma}|\sigma$ 奇置换$\}$ 且

$$\overline{1}\cdot\overline{\sigma} = \overline{\sigma}\cdot\overline{1} = \overline{\sigma}, \quad \overline{\sigma}\cdot\overline{\sigma} = \overline{1}\cdot\overline{1} = \overline{1}.$$

证明

□

定义 0.8

若半群 S 的非空子集 S_1 对 S 的运算也是半群, 则称 S_1 为 S 的**子半群**.

若幺半群 M 的子集 Q 对 M 的运算也是幺半群且 M 的幺元 $1 \in Q$, 则称 Q 为 M 的**子幺半群**.

♣

定理 0.7

如果关系 $\sim$ 是幺半群 (或半群)G 中的同余关系, 那么商集合 $G/\sim$ 对导出的运算 (见定理 1.20) 也是幺半群 (或半群), 称之为**商幺半群** (或**商半群**).

若 G 是交换幺半群 (或交换半群), 则商集合 $G/\sim$ 对导出的运算也是交换幺半群 (或交换半群).

♡

证明

□