

## 0.1 向量的线性关系

### 定理 0.1

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  是线性空间  $V$  中的向量.

- (1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则任意一组包含这组向量的向量组必线性相关; 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则从这组向量中任意取出一组向量必线性无关.
- (2) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合.
- (3) 若  $\beta$  可表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m,$$


则表示唯一的充要条件是向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

证明

□

### 引理 0.1

- (1) 设  $A, B$  是两组向量,  $A$  含有  $r$  个向量,  $B$  含有  $s$  个向量, 且  $A$  中每个向量均可用  $B$  中向量线性表示. 若  $A$  中向量线性无关, 则  $r \leq s$ .
- (2) 设  $A, B$  是两组向量,  $A$  含有  $r$  个向量,  $B$  含有  $s$  个向量, 且  $A$  中每个向量均可用  $B$  中向量线性表示. 若  $r > s$ , 则  $A$  中向量线性相关.

 **笔记** 为了记住它, 我们用一句话来概括: “多”若可以用“少”来线性表示, 则“多”线性相关.

**证明** (2) 是 (1) 的逆否命题, 因此我们只证明 (1).

我们用反证法. 设

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, \quad B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\}.$$

假设  $r > s$ , 我们来推出矛盾.

由已知,  $A$  中向量  $\alpha_1$  可由  $B$  中向量的线性组合来表示, 即存在数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , 使

$$\alpha_1 = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \dots + \lambda_s\beta_s. \quad (1)$$

因为  $A$  中向量线性无关, 故  $\alpha_1 \neq 0$ , 从而  $\lambda_i$  中至少有一个不为零, 不妨假设  $\lambda_1 \neq 0$ . 由 (1) 式解出  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \frac{1}{\lambda_1}\alpha_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\beta_2 - \dots - \frac{\lambda_s}{\lambda_1}\beta_s. \quad (2)$$

但对任意的  $\alpha_i$  ( $i = 2, 3, \dots, r$ ), 已知  $\alpha_i$  可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的线性组合表示, 将 (2) 式代入  $\alpha_i$  的表示式, 则  $\alpha_i$  可由  $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的线性组合表示. 这样, 我们可将  $B$  中的向量  $\beta_1$  换成  $\alpha_1$ , 这时  $A$  中任一向量仍可用  $B$  中向量的线性组合来表示.

现在我们用归纳法, 设  $B$  中向量已经换成  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_s\}$ , 且  $A$  中任一向量都可以用  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_s\}$  的线性组合表示. 假设  $k < r$ , 则  $\alpha_{k+1}$  可表示为

$$\alpha_{k+1} = \mu_1\alpha_1 + \dots + \mu_k\alpha_k + \mu_{k+1}\beta_{k+1} + \dots + \mu_s\beta_s,$$

其中至少有一个  $\mu_i$  ( $i = k+1, \dots, s$ ) 不为零. 这是因为若  $\mu_{k+1} = \dots = \mu_s = 0$ , 则  $\alpha_{k+1}$  可用  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  线性表示, 这与  $A$  中向量线性无关矛盾. 不失一般性, 可设  $\mu_{k+1} \neq 0$ . 用与上述相同的论证, 又可将  $\beta_{k+1}$  换成  $\alpha_{k+1}$ , 得到向量组  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}; \beta_{k+2}, \dots, \beta_s\}$ , 且  $A$  中任一向量都可以用这组向量的线性组合表示. 这一事实表明, 我们可将  $A$  中向量依次换入  $B$ . 但  $r > s$ , 因此可将  $A$  中  $s$  个向量换入  $B$ . 不妨设  $B$  经调换以后的向量组为  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ , 则  $A$  中向量  $\alpha_r$  也可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合来表示, 从而向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_r\}$  线性相关, 引出矛盾. □

## 命题 0.1

设  $A$  是  $m \times n$  阶梯形矩阵, 证明:  $A$  的秩等于其非零行的个数, 且阶梯点所在的列向量是  $A$  的列向量的极大无关组.



**证明** 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rk_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

其中  $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$  是  $A$  的阶梯点. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是  $A$  的前  $r$  行, 我们先证明它们线性无关. 设

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r = \mathbf{0}$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_r$  是常数. 上式是关于  $n$  维行向量的等式, 先考察行向量的第  $k_1$  分量, 可得  $c_1a_{1k_1} = 0$ . 因为  $a_{1k_1} \neq 0$ , 故  $c_1 = 0$ ; 再依次考察行向量的第  $k_2, \dots, k_r$  分量, 最后可得  $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ . 因此  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 从而  $A$  的秩等于  $r$ , 即其非零行的个数.

再将  $r$  个阶梯点所在的列向量取出, 拼成一个新的矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rk_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

采用相同的方法可证明矩阵  $B$  的前  $r$  行线性无关, 因此  $r(B) = r$ , 从而阶梯点所在的列向量组的秩也等于  $r$ . 又因为  $r(A) = r$ , 故它们是  $A$  的列向量的极大无关组.  $\square$

## 命题 0.2

设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是一个  $m \times n$  矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是列向量.  $P$  是一个  $m$  阶可逆矩阵,  $B = PA = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , 其中  $\beta_j = P\alpha_j (1 \leq j \leq n)$ . 证明: 若  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组, 则  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  是  $B$  的列向量的极大无关组.



**证明** 先证明向量组  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  线性无关. 设

$$c_1\beta_{i_1} + c_2\beta_{i_2} + \cdots + c_r\beta_{i_r} = \mathbf{0},$$

即

$$c_1P\alpha_{i_1} + c_2P\alpha_{i_2} + \cdots + c_rP\alpha_{i_r} = \mathbf{0}.$$

已知  $P$  是可逆矩阵, 因此

$$c_1\alpha_{i_1} + c_2\alpha_{i_2} + \cdots + c_r\alpha_{i_r} = \mathbf{0}.$$

而向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关, 故  $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ , 这证明了向量组  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  线性无关. 要证这是  $B$  的列向量的极大无关组, 只需证明  $B$  的任意一个列向量都是这些向量的线性组合即可. 设  $\beta_j$  是  $B$  的任意一个列向量, 则  $\beta_j = P\alpha_j$ . 因为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组, 故  $\alpha_j$  可用  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表示.

不妨设

$$\alpha_j = b_1\alpha_{i_1} + b_2\alpha_{i_2} + \cdots + b_r\alpha_{i_r},$$

则

$$P\alpha_j = b_1P\alpha_{i_1} + b_2P\alpha_{i_2} + \cdots + b_rP\alpha_{i_r},$$

即

$$\beta_j = b_1\beta_{i_1} + b_2\beta_{i_2} + \cdots + b_r\beta_{i_r}.$$

□

### 推论 0.1

设  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关,  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 求证:  $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_m$  线性无关.

♥

**证明** 由命题 0.2 即得.

□

### 命题 0.3

设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  是线性空间  $V$  中一组线性无关的向量,  $\beta$  是  $V$  中的向量. 求证: 或者  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关, 或者  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的线性组合.

♠

**证明** 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关, 则结论得证. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则存在不全为零的数  $c_1, c_2, \cdots, c_m, d$ , 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m + d\beta = \mathbf{0}.$$

若  $d = 0$ , 则  $c_1, c_2, \cdots, c_m$  不全为零且  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = \mathbf{0}$ , 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关矛盾. 因此  $d \neq 0$ , 从而

$$\beta = -\frac{c_1}{d}\alpha_1 - \frac{c_2}{d}\alpha_2 - \cdots - \frac{c_m}{d}\alpha_m,$$


即  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的线性组合.

□

### 推论 0.2

若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关且  $\beta \notin L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关.

♥

 **笔记** 这个推论与上一个命题 0.3 等价. 虽然这个等价命题很简单, 但后面经常会用到.

### 命题 0.4

设向量  $\beta$  可由向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性表示, 但不能由其中任何个数少于  $m$  的部分向量线性表示, 则这  $m$  个向量线性无关.

♠

**证明** 用反证法, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性相关, 则至少有一个向量是其余向量的线性组合. 不妨设  $\alpha_m$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$  的线性组合, 则由线性组合的传递性可知,  $\beta$  也是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$  的线性组合, 这与假设矛盾.

□

### 命题 0.5

设线性空间  $V$  中向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关, 已知有序向量组  $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$  线性相关, 求证: 最多只有一个  $\alpha_i$  可以表示为前面向量的线性组合.

♠

**证明** 用反证法, 设存在  $1 \leq i < j \leq r$ , 使得

$$\alpha_i = b\beta + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_{i-1}\alpha_{i-1},$$


$$\alpha_j = d\beta + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{j-1}\alpha_{j-1}.$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关, 故  $b \neq 0$ . 若  $b = 0$ , 则  $\alpha_i$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$  的线性组合, 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无

关矛盾. 将第一个等式乘以  $-\frac{d}{b}$  加到第二个等式上, 可得  $\alpha_j$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$  的线性组合, 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关矛盾.  $\square$

**命题 0.6**

设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 满足  $AB = I_n$ , 求证:  $B$  的  $n$  个列向量线性无关.

 **笔记** 实际上, 由  $AB = I_n$  可知  $A, B$  互为逆矩阵, 从而  $A, B$  满秩, 结论得证.

**证明** 设  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为列分块, 则  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n)$ . 由  $AB = I_n$  可得  $A\beta_i = e_i (1 \leq i \leq n)$ , 其中  $e_i$  是  $n$  维标准单位列向量. 设

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n = 0,$$

上式两边同时左乘  $A$ , 可得

$$0 = c_1A\beta_1 + c_2A\beta_2 + \dots + c_nA\beta_n = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n = (c_1, c_2, \dots, c_n)',$$

因此  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , 即  $B$  的  $n$  个列向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性无关.  $\square$

**命题 0.7 (缩短向量与延伸向量)**


1. 设  $\{\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), 1 \leq i \leq m\}$  是一组  $n$  维行向量,  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$  是给定的  $t (t < n)$  个指标. 定义  $\tilde{\alpha}_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_t})$ , 称  $\tilde{\alpha}_i$  为  $\alpha_i$  的  $t$  维**缩短向量**. 则

(1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  也线性相关;

(2) 设  $n$  维行向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 则  $\tilde{\alpha}$  也是  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  的线性组合.

2. 设  $\{\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), 1 \leq i \leq m\}$  是一组  $n$  维行向量,  $j_1, j_2, \dots, j_t \geq 1$  是给定的  $t (t > n)$  个指标. 定义  $\bar{\alpha}_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_t})$ , 称  $\bar{\alpha}_i$  为  $\alpha_i$  的  $t$  维**延伸向量**. 则

(1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m$  也线性无关.

 **笔记** 这个命题告诉我们: 线性相关向量组的任意缩短组也是线性相关的, 线性无关向量组的任意延伸组也是线性无关的.

**证明** 1. (1) 由假设存在不全为零的数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , 使得

$$0 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{in} \right).$$

在等式两边同时取  $t$  维缩短向量, 可得

$$0 = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_t} \right) = c_1\tilde{\alpha}_1 + c_2\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m\tilde{\alpha}_m,$$

从而结论成立.

(2) 设  $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m$ , 则

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{in} \right).$$

在等式两边同时取  $t$  维缩短向量, 可得

$$\tilde{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_t} \right) = c_1\tilde{\alpha}_1 + c_2\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m\tilde{\alpha}_m,$$

从而结论成立.

2. 这个命题就是 1(1) 的逆否命题, 从而结论成立.  $\square$

**例题 0.1** 设  $V$  是实数域上连续函数全体构成的实线性空间, 求证下列函数线性无关:

(1)  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ ;

(2)  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ ;

(3)  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ .

**证明 证法一:**根据向量线性无关的基本性质,我们只要证明(3)即可.对 $n$ 进行归纳,当 $n=0$ 时,显然1作为一个函数线性无关.假设命题对小于 $n$ 的自然数成立,现证明等于 $n$ 的情形.设

$$a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cdots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0,$$

其中 $a, b_i, c_i$ 都是实数.对上式两次求导,可得

$$-b_1 \sin x - c_1 \cos x - 4b_2 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x - \cdots - n^2 b_n \sin nx - n^2 c_n \cos nx = 0,$$

再将第一个式子乘以 $n^2$ 加到第二个式子上,可得

$$an^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(n^2 - i^2) \sin ix + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(n^2 - i^2) \cos ix = 0,$$

由归纳假设即得 $a = b_1 = c_1 = \cdots = b_{n-1} = c_{n-1} = 0$ .将此结论代入第一个式子可得 $b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0$ .若 $b_n \neq 0$  ( $c_n \neq 0$ ),则 $\tan nx = -c_n/b_n$  ( $\cot nx = -b_n/c_n$ )为常数( $\tan nx, \cot nx$ 都不是常函数),矛盾.因此, $b_n = c_n = 0$ .

**证法二:** 设

$$f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cdots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0,$$

其中 $a, b_i, c_i$ 都是实数.依次设 $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$ ,并分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ ,可得 $a = b_1 = c_1 = \cdots = b_n = c_n = 0$ . □

### 命题 0.8

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,又

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1r}\alpha_r, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2r}\alpha_r, \\ \cdots \cdots \cdots \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r. \end{cases}$$

则: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性相关的充要条件是系数矩阵 $A = (a_{ij})_{r \times r}$ 的行列式为零.

**证明** 记 $A$ 的行向量为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ .若 $|A| = 0$ ,则 $A$ 的行向量线性相关,即存在不全为零的 $r$ 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ ,使得

$$c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \cdots + c_r \gamma_r = \mathbf{0}.$$

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)'$ ,则经简单计算可得

$$c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \cdots + c_r \beta_r = c_1 \gamma_1 \alpha + c_1 \gamma_2 \alpha + \cdots + c_1 \gamma_r \alpha = (c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \cdots + c_r \gamma_r) \alpha = \mathbf{0} \alpha = \mathbf{0},$$

从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性相关.

反之,若 $A$ 可逆,如有 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ ,使得

$$k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + \cdots + k_r \beta_r = \mathbf{0},$$

将 $\beta_i$ 代入,并利用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性无关性,可得以 $k_i$ 为未知数的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{1r}k_1 + a_{2r}k_2 + \cdots + a_{rr}k_r = 0. \end{cases}$$

因为 $A$ 可逆,所以该方程组只有零解,从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关,矛盾! □

## 命题 0.9

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是一组线性无关的向量, 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示如下:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_k = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{km}\alpha_m. \end{cases}$$

记表示矩阵  $A = (a_{ij})_{k \times m}$ , 求证: 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的秩等于  $r(A)$ .



**证明 证法一:** 设  $r(A) = r$ , 记  $A$  的  $k$  个行向量为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . 不失一般性, 可假设  $A$  的前  $r$  个行向量线性无关, 其余向量均可用前  $r$  个行向量线性表示. 若

$$\gamma_i = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r,$$

设  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)'$ , 则经过简单计算可得

$$\begin{aligned} \beta_i &= \gamma_i \alpha = (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r) \alpha \\ &= c_1\gamma_1 \alpha + c_2\gamma_2 \alpha + \dots + c_r\gamma_r \alpha \\ &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r. \end{aligned}$$

另一方面, 若

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r = \mathbf{0},$$

则

$$c_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1m}\alpha_m) + \dots + c_r(a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rm}\alpha_m) = \mathbf{0},$$

即

$$(c_1a_{11} + \dots + c_ra_{r1})\alpha_1 + \dots + (c_1a_{1m} + \dots + c_ra_{rm})\alpha_m = \mathbf{0}.$$

因为  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关, 故可得

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \dots + a_{rm}c_r = 0. \end{cases}$$

将上述方程组看成是未知数  $c_i$  的齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩为  $r$ , 未知数个数也是  $r$ , 因此只有唯一一组解, 即零解. 这表明  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的极大无关组, 因此向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的秩等于  $r$ .

**证法二:** 令  $V$  是由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  生成的向量空间. 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 故它们组成  $V$  的一组基,  $V$  的维数等于  $m$ . 注意到  $\beta_i$  在这组基下的坐标向量为  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})'$ , 故由这些列向量组成的矩阵就是  $A'$ , 从而

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = r(A') = r(A).$$

□

## 命题 0.10

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是向量空间  $V$  中一组向量, 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 求证: 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的秩小于等于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的秩.



**注** 如果将向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  称为原向量组, 将向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  称为表出向量组, 则这个命题可简述为: “表出向量组的秩不超过原向量组的秩.” 从几何上看, 这是一个自然的结果. 因为每个  $\beta_i$  都属于由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  生成的子空间, 故它们的秩不会超过该子空间的维数.

**证明** 不失一般性, 可设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的极大无关组,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的极大无关组. 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出, 所以  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  也可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出, 从而由定理 2.1(1) 可知  $s \leq r$ , 结论成立.  $\square$

**命题 0.11**

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是向量空间  $V$  中一组向量且其秩等于  $r$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是其中  $r$  个向量. 若下列条件之一成立:

- (1)  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关;
- (2) 任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表示.

则  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组的极大无关组.

**证明** (1) 设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关, 又设  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  是向量组的极大无关组. 对任意的  $1 \leq i \leq m$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$  均可由  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  线性表示, 由定理 2.2(2) 可知  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$  必线性相关. 再由命题 0.3 可知  $\alpha_i$  可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表示, 从而  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  也是向量组的极大无关组.

(2) 设任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表示. 不失一般性, 可设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  是向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  的极大无关组. 因此,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性无关. 再由线性组合的传递性可知, 任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性表示, 故  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  是原向量组的极大无关组, 从而  $s = r$ , 即  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是原向量组的极大无关组.  $\square$

**命题 0.12**

若  $A$  是对称矩阵或反称矩阵, 并且  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行是  $A$  的行向量的极大无关组, 则它的第  $i_1, \dots, i_r$  列也是  $A$  的列向量的极大无关组.

**证明** 设  $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为矩阵  $A$  的行分块和列分块, 则由条件可知,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关. 从而存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , 使得

$$k_1 \alpha_{i_1} + k_2 \alpha_{i_2} + \dots + k_r \alpha_{i_r} = 0.$$

又因为  $A$  为对称或反称矩阵, 所以  $\alpha_i = \pm \beta'_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 代入上式可得

$$k_1 \beta'_{i_1} + k_2 \beta'_{i_2} + \dots + k_r \beta'_{i_r} = 0.$$

再对上式两边同时取转置可得

$$k_1 \beta_{i_1} + k_2 \beta_{i_2} + \dots + k_r \beta_{i_r} = 0.$$

故  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  线性无关.  $\square$

**命题 0.13 (向量组等价的充要条件)**

设有两个向量组  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  和  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ . 求证: 它们等价的充要条件是它们的秩相等且其中一组向量可以用另外一组向量线性表示.



**笔记** 遇到向量组相关的问题, 一般都会先设出各个向量组的极大无关组.

**证明** 必要性由向量组等价的定义和命题 0.10 即得, 下证充分性. 假设向量组  $A$  可用向量组  $B$  线性表示, 且它们的秩都等于  $r$ . 不失一般性, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A$  的极大无关组,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  是向量组  $B$  的极大无关组. 考虑向量组  $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ . 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可用  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表示, 故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  是向量组  $C$  的极大无关组, 从而向量组  $C$  的秩等于  $r$ . 又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 故由命题 0.10(1) 可知,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  也是向量组  $C$  的极大无关组, 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 于是向量组  $B$  也可用向量组  $A$  线性表示. 因此, 向量组  $A$  与向量组  $B$  等价.  $\square$

## 命题 0.14

设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\} \subseteq \mathbb{K}^m$  是  $p$  个线性无关的  $m$  维列向量,  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\} \subseteq \mathbb{K}^n$  是  $q$  个线性无关的  $n$  维列向量. 求证:  $\{\alpha_i \cdot \beta'_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$  是  $pq$  个线性无关的  $m \times n$  矩阵.



**证明 证法一:** 设  $c_{ij} \in \mathbb{K}$ , 使得  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} \alpha_i \cdot \beta'_j = \mathbf{0}$ , 则有

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \left( \sum_{j=1}^q c_{ij} \beta'_j \right) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

设  $\sum_{j=1}^q c_{ij} \beta'_j = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) (1 \leq i \leq p)$ , 则(3)式可化为

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \sum_{i=1}^p (a_{i1} \alpha_i, a_{i2} \alpha_i, \dots, a_{in} \alpha_i) = \left( \sum_{i=1}^p a_{i1} \alpha_i, \sum_{i=1}^p a_{i2} \alpha_i, \dots, \sum_{i=1}^p a_{in} \alpha_i \right) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

从而比较(4)式两边矩阵的第  $k$  列有  $\sum_{i=1}^p a_{ik} \alpha_i = \mathbf{0}$ . 由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  线性无关可得  $a_{ik} = 0 (1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n)$ ,

于是  $\sum_{j=1}^q c_{ij} \beta'_j = \mathbf{0} (1 \leq i \leq p)$ . 再由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  线性无关可得  $c_{ij} = 0 (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)$ , 因此  $\{\alpha_i \cdot \beta'_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$  线性无关.

**证法二:** 设  $c_{ij} \in \mathbb{K}$ , 使得  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} \alpha_i \cdot \beta'_j = \mathbf{0}$ , 记  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{p \times q}$ ,  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ ,  $B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_q^T \end{pmatrix}$ , 则

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} \alpha_i \beta'_j = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) C \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_q^T \end{pmatrix} = ACB = \mathbf{0}.$$

于是由 Sylvester 不等式得

$$r(AC) = r(AC) + r(B) - q \leq r(ACB) = 0 \leq r(AC).$$

故  $r(AC) = 0$ , 因此  $AC = \mathbf{0}$ . 从而由  $A$  可逆知  $C = \mathbf{0}$ . 或者再由 Sylvester 不等式得

$$r(C) = r(A) + r(C) - p \leq r(AC) = 0 \leq r(C).$$

故  $r(C) = 0$ , 因此  $C = \mathbf{0}$ , 即  $\{\alpha_i \cdot \beta'_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$  线性无关. □