0.1 二次型的化简和矩阵的合同

定义 0.1 (二次型)

设 f 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次齐次多项式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \tag{1}$$

$$+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2, \tag{2}$$

称 f 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次型, 简称**二次型**.

定义 0.2 (二次型与矩阵的相伴)

用矩阵的乘法我们可以把(1) 式写成矩阵相乘的形式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,$a_{ij} = a_{ji}$ 对一切 i,j 成立, 也就是说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称阵. 由此可知, 给定数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 元二次型, 我们就得到了 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$, 称为该二次型的**相伴矩阵或系数矩阵**.

反过来, 若给定 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$, 则由 (3) 式, 我们可以得到 $\mathbb{K}$ 上的一个二次型, 称为对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的**相伴二次型**.

定理 0.1

证明: 二次型与其相伴矩阵一一对应. 此即

(1) (一个对称矩阵对应唯一一个二次型) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵, 则 $f = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$.

(2) (一个二次型对应唯一一个系数矩阵) 设 $f = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵, 则有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

注 事实上, 如果我们不限制矩阵是对称阵, 则系数矩阵将不唯一, 这样会给用矩阵方法研究二次型带来困难.

证明

(1) 由二次型的定义显然得证.

(2) 由 $f = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 可知 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$. 于是只需证 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ 即可. 又 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ 仍是对称阵. 这等价于证明下面的结论: 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶对称阵, 若 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 令 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_i$ 是 n 维标准单位列向量, 则 $a_{ii} = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = 0$. 再令 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j (i \neq j)$, 则

$$0 = (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ij} + a_{ji},$$

因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 故 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$, 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 这表明用对称阵来表示二次型时, 系数矩阵是唯一的.

□

定义 0.3 (矩阵的合同关系)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 若存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是**合同的**, 或称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有**合同关系**.

定理 0.2

矩阵的合同关系是一个等价关系.

证明

1. 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与自己合同, 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}$;
2. 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 这是因为若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$;
3. 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 事实上, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{H}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}$, 则 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{H}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{H})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{H})$.

□

引理 0.1 (初等合同变换)

1. 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的下列的**初等对称变换**都是合同变换:
   (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列;
   (2) 将非零常数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 再将 k 乘以第 i 列;
   (3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上, 再将第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.
2. 分块对称矩阵 A 的下列**对称分块初等变换**都是合同变换:
   (1) 对换 A 的第 i 分块行和第 j 分块行, 再对换第 i 分块列和第 j 分块列;
   (2) 将 A 的第 i 分块行左乘可逆矩阵 M, 再将第 i 分块列右乘 M';
   (3) 将 A 的第 i 分块行左乘矩阵 M 加到第 j 分块行上, 再将第 i 分块列右乘 M' 加到第 j 分块列上.

证明

1. 上述初等对称变换相当于将一个初等矩阵左乘以 $\boldsymbol{A}$ 后再将这个初等矩阵的转置右乘之, 因此是合同变换. 此即
   (1) 对换$\boldsymbol{A}$的第i行与第j行,再对换第i列与第j列 $\Longleftrightarrow A\to P_{ij}AP_{ij}'=P_{ij}AP_{ij}$;
   (2) 将非零常数k乘以$\boldsymbol{A}$的第i行,再将k乘以第i列 $\Longleftrightarrow A\to P_i(k)AP_i(k)=P_i(k)AP_i(k)'$;
   (3) 将$\boldsymbol{A}$的第i行乘以k加到第j行上,再将第i列乘以k加到第j列上 $\Longleftrightarrow A\to P_{ij}(k)AP_{ij}(k)'$.
2. 上述对称分块初等变换相当于将一个初等分块矩阵左乘以 $\boldsymbol{A}$ 后再将这个初等分块矩阵的转置右乘之, 因此是合同变换. 此即
   (1) 对换 A 的第 i 分块行和第 j 分块行, 再对换第 i 分块列和第 j 分块列 $\Longleftrightarrow A\to P_{ij}AP_{ij}'=P_{ij}AP_{ij}$;
   (2) 将 A 的第 i 分块行左乘可逆矩阵 M, 再将第 i 分块列右乘 $M'\Longleftrightarrow A\to P_i(M)AP_i(M)=P_i(M)AP_i(M)'$;
   (3) 将 A 的第 i 分块行左乘矩阵 M 加到第 j 分块行上, 再将第 i 分块列右乘 M' 加到第 j 分块列上 $\Longleftrightarrow A\to P_{ij}(M)AP_{ij}(M)'$.

□

引理 0.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非零对称阵, 则必存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 $(1,1)$ 元素不等于零.

证明 若 $a_{11}=0$, 而 $a_{ii}\neq 0$, 则将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第 i 行对换, 再将第一列与第 i 列对换, 得到的矩阵的第 $(1,1)$ 元素不为零. 根据上述引理, 这样得到的矩阵和原矩阵合同.

若所有的 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$, 设 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行加到第 i 行上, 再将第 j 列加到第 i 列上. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵,$a_{ij}=a_{ji}\neq 0$, 于是第 (i,i) 元素是 $2a_{ij}\neq 0$, 再用前面的办法使第 $(1,1)$ 元素不等于零. 根据上述引理, 这样得到的矩阵和原矩阵仍合同, 这就证明了结论. □

定理 0.3 (对称阵必合同于对角阵)

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵. 进而

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}.$$

其中 $r=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\right).,d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r$. 即秩 r 是矩阵合同关系下的一个不变量.

♡

证明 由引理 0.2, 不妨设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中 $a_{11}\neq 0$. 若 $a_{i1}\neq 0$, 则可将第一行乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上, 再将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 列上. 由于 $a_{i1}=a_{1i}$, 故得到的矩阵的第 $(1,i)$ 元素及第 $(i,1)$ 元素均等于零. 由初等合同变换可知, 新得到的矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 是合同的. 依次这样做下去, 可把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第一列除 a_{11} 外的元素都消去, 于是 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右下角是一个 $n-1$ 阶对称阵, 记为 $\boldsymbol{A}_1$. 因此由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶非异阵 $\boldsymbol{D}$, 使 $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D}$ 为对角阵, 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

是一个对角阵. 显然

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}',$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角阵. □