0.1 性态分析类

定理 0.1 (积分中值定理)

(1) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\zeta} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\zeta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $f(x) \in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\zeta} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\zeta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) $f(x) \in R[a,b]$ 且不变号,$g(x) \in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(5) $f(x) \in R[a,b]$ 且不变号,$g(x) \in C[a,b]$, 则存在 $\zeta \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\zeta)\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(6) 若 (1)(2)(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta \in (a,b)$.

定理 0.2 (Hadamard 不等式)

f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

笔记 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间 $[0,1]$.

注 左边的不等式证明中的线性换元构造思路: 我期望找到一个线性函数 $g(t)$, 使得令 $x = g(t)$ 换元后, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=g(t)} \int_0^1 f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

即 $g(0) = a,g(1) = b$. 因此 $g(t) = \frac{b-a}{1-0}t + a = a + (b-a)t$. 从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\mathrm{d}t = (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+bt)\mathrm{d}t.$$

证明 由 f 在 $[a,b]$ 上下凸, 一方面, 我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(a(1-t)+bt)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 [(1-t)f(a)+tf(b)]\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [f(a+b-x)+f(x)]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

故结论成立. □

例题 0.1 若 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0) = 0,f(1) = 1,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, 证明存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $f''(\eta) < -2$.

注 通过 $f''(x)+2 \geqslant 0, \forall x \in (0,1)$ 来推出 $f + x^2$ 在 $[0,1]$ 下凸: 实际上, 令 $g = f + x^2$, 则 $g'' \geqslant 0, \forall x \in (0,1)$, 从而 g

在 $(0,1)$ 下凸. 因为 $g=f+x^2\in C[0,1]$ 和 g 在 $(0,1)$ 下凸我们就有

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),\forall x,y\in(0,1),\lambda\in[0,1].$$

上式中令 x 趋于 0 或者 1 也成立, 再令 y 趋于 1 或者 0 也成立. 因此 g 在 $[0,1]$ 下凸.

证明 若不然, 对任何 $x\in(0,1)$ 都有 $f''(x)\geqslant -2$, 于是 $f(x)+x^2$ 是 $[0,1]$ 的下凸函数. 于是由Hadamard 不等式我们知道

$$\frac{4}{3}=\int_0^1[f(x)+x^2]\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(0)+0^2+f(1)+1^2}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

矛盾! 现在存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$. □

命题 0.1

设 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad \forall b\neq a.$$

证明:f 是下凸函数.

注 本题对一般情况 $f\in C(\mathbb{R})$ 也成立, 需要取磨光函数如**卷积磨光核**. 详细见清疏讲义.

笔记 这就是Hadamard 不等式的反向结果.

证明 当 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 时, 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to a^+}\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{6}(b-a)^3}\\
=&\lim_{b\to a^+}\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}(b-a)^2}\\
=&\lim_{b\to a^+}\frac{f'(b)-f'(\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{4}f''(\frac{a+b}{2})}{b-a}\\
=&\lim_{b\to a^+}\left(f''(b)-\frac{3}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{8}f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{4}f''(a)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此

$$f''(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

所以 f 是下凸函数. □

定理 0.3 (Darboux 中值定理/导数介值定理)

设 $f\in D[a,b]$, 对任何介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的 η, 存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\eta$.

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理. 即不妨设 $f'(a)<0<f'(b)$, 去找 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=0$. 事实上由极限保号性和

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

我们知道存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta],f(x)<f(b),\forall x\in[b-\delta,b).$$

因此 f 最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的导数为 0, 从而证毕! □

定理 0.4 (加强的 Rolle 中值定理)

(a): 设 $f\in D(a,b)$ 且在 $[a,b]$ 上 f 有介值性, 则若 $f(a)=f(b)$, 必然存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$.

(b): 设 $f\in C[a,+\infty)\cap D^1(a,+\infty)$ 满足 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$.

♡

笔记 一旦罗尔成立, 所有中值定理和插值定理都会有类似的结果, 可以具体情况具体分析.

证明 对于 (a): 不妨设 f 不恒为常数, 则可取 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$, 不妨设 $f(x_0)>f(a)$, 则由 f 的介值性, 我们知道存在 $x_1\in(a,x_0), x_2\in(x_0,b)$, 使得

$$f(x_1)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2}, f(x_2)=\frac{f(b)+f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a)=f(b)$, 我们知道 $f(x_1)=f(x_2)$, 由 Rolle 中值定理 $(f\in C[x_1,x_2]\cap D(x_1,x_2))$ 可知, 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$. 这就完成了 (a) 的证明.

对于 (b): 若对任何 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x)\neq 0$, 则由导数介值性可知,f' 恒大于 0 或恒小于 0(否则, 由导数介值性可得到一个零点). 从而 f 在 $[0,+\infty)$ 严格单调, 不妨设为递增. 现在

$$f(x)\geqslant f(a+1)>f(a), \forall x\geqslant a+1,$$

于是

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$. □

例题 0.2 设 f 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可微且不是线性函数, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

笔记 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 这个线性构造必须记忆!

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $g(a)=g(b)=0$ 且 g 不是常值函数. 因 $g'\leqslant 0$ 恒成立会导致 g 在 $[a,b]$ 递减, 从而 $0=g(b)<g(a)=0$, 这不可能! 现在存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)>0$, 即结论成立. □

例题 0.3

1. 设 $f\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$ 满足
$$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0.$$
证明存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.
2. 设 $f\in C[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 满足
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0. \tag{1}$$
证明:f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

笔记 此类给出积分等式的问题, 往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标. 即本题我们要寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$, 考虑积分

$$\int_0^{\pi}f(x)(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x=0.$$

一句话证明本题 1 问, 就是寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $a\cos x+b\sin x$ 和 f 的符号一致. 第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合 $a\cos x+b\sin x+c$ 使其与 f 符号一致.

证明

1. 我们只需断言 f 在 $[0,\pi]$ 至少有两个不相同的零点, 之后由罗尔定理就给出了存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

由积分中值定理可知, 存在 $x_0 \in (0,\pi)$, 使得

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = f(x_0)\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2f(x_0) = 0.$$

即 f 在 $(0,\pi)$ 上有一个零点 x_0. 若 f 在 $[0,\pi]$ 只有一个零点, 则 f 在 $[0,x_0),(x_0,\pi]$ 不同号 (否则 f 不变号, 则由积分中值定理知 $\sin\eta\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0, \eta \in (0,\pi)$, 从而 $f = 0$, 这与 f 只有一个零点矛盾!). 不妨设

$$f(x) < 0, \forall x \in [0,x_0), f(x) > 0, \forall x \in (x_0,\pi].$$

此时根据条件就有

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\left(\cos x_0\sin x - \sin x_0\cos x\right)\mathrm{d}x = \cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x - \sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0.$$

又注意到

$$f(x)\sin(x-x_0) > 0, \forall x \in [0,\pi]\setminus\{x_0\},$$

故 $0 = \int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x > 0$, 矛盾! 这就完成了证明.

2. 不妨设 f 不恒为 0, 由积分中值定理和(1)式知 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有一个零点且变号. 若 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 只变号一次, 设在 x_1 变号, 则 f 在 x_1 两侧符号相反. 由(1)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_1)\mathrm{d}x = 0.$$

但是 $f(x)\sin(x-x_1)$ 不变号, 这就推出 $f=0$ 而矛盾! 若 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 只变号两次, 设变号处为 x_1,x_2, 考虑

$$g(x) \triangleq \sin x - \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\cos x + \frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_2 - \cos x_1}, x \in [0,\frac{\pi}{2}].$$

注意到

$$g'(x) = \cos x + \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\sin x = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\cos x\left(\tan x - \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\sin x_2 - \sin x_1}\right),$$

我们知 g' 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 有且只有一个零点. 注意 $g(x_1) = g(x_2) = 0$, 我们由罗尔中值定理知道 g' 在 (x_1,x_2) 有零点, 因此 g 当且仅当在 x_1,x_2 变号. 现由(1)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

但是 fg 不变号, 故 $f=0$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

□

例题 0.4 设 $f \in C([0,\pi])$, 证明: 不能同时有

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{4} \quad 和 \quad \int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

又问何时上面的两个不等式成为等式?

证明 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x)-\cos x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

因此当式(2)中的两个不等式同时成立时, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi |\sin x - f(x) + f(x) - \cos x|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x)-\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&< \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi.
\end{aligned}$$

但是, 另一方面,

$$\int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

于是所证结论成立.

当式(2)中两个不等式都是等式时, 应有

$$\int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x)-\cos x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}.$$

此时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式等号成立充要条件知

$$a\sin x - af(x) = bf(x) - b\cos x \Longrightarrow f(x) = \frac{a\sin x + b\cos x}{a+b}, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\\
\Longleftrightarrow &\int_0^\pi \left|\frac{b(\cos x-\sin x)}{a+b}\right|^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left|\frac{a(\sin x-\cos x)}{a+b}\right|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\\
\Longleftrightarrow &\frac{b^2}{(a+b)^2}\int_0^\pi (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{(a+b)^2}\int_0^\pi (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\\
\Longleftrightarrow &\frac{b^2\pi}{(a+b)^2} = \frac{a^2\pi}{(a+b)^2} = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{2}\\
\Longleftrightarrow &a = b = 1.
\end{aligned}$$

故 $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$. 或者直接验证

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(f(x) - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\frac{\sin x - f(x)}{2} - \frac{f(x)-\cos x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi |\sin x - f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x - f(x))(f(x)-\cos x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{8} = 0.
\end{aligned}$$

又 f 为连续函数, 故 $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$. □

例题 0.5 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明:

(1) 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^\xi e^{f(t)}\mathrm{d}t = \int_\xi^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t$$

(2) 对任何大于 1 的正整数 n, 存在唯一的 $\xi_n\in(0,1)$, 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)}\mathrm{d}t = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t$$

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$.

证明

(1) 令 $F(x) = \int_0^x e^{f(t)}\mathrm{d}t - \int_x^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t$, 则 $F(0) = -\int_0^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t < 0, F(1) = \int_0^1 e^{f(t)}\mathrm{d}t > 0$. 又 $F'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_0^\xi e^{f(t)}\mathrm{d}t = \int_\xi^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t$.

(2) 令 $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x e^{f(t)}\mathrm{d}t - \int_x^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t$, 则 $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t < 0, F_n(1) = \int_x^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t > 0$. 又 $F_n'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi_n\in\left(\frac{1}{n},1\right)$, 使得 $F(\xi_n) = 0$, 即

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)}\mathrm{d}t = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

因为 $\xi_n\in(0,1), \forall n\in\mathbb{N}$, 所以由聚点定理可知,$\{\xi_n\}$ 存在收敛子列. 任取 $\{\xi_n\}$ 的一个收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$, 设

$\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{n_k}=a$, 则由(3)式可知

$$\int_{\frac{1}{n_k}}^{\xi_{n_k}} e^{f(t)}\mathrm{d}t=\int_{\xi_{n_k}}^{1} e^{-f(t)}\mathrm{d}t.$$

令 $k\to\infty$, 由归结原则得到

$$\int_0^a e^{f(t)}\mathrm{d}t=\int_a^1 e^{-f(t)}\mathrm{d}t.$$

由 (1) 可知 $a=\xi$. 故由命题??(a) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$.

□

例题 0.6 $f\in C(0,1)$ 且存在互不相同的 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$ 满足

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=b.$$

证明对任何 $\lambda\in(a,b)$, 存在互不相同的 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得 $\lambda=\dfrac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5}$.

证明 要证原结论, 等价于对 $\forall\lambda\in(a,b)$, 存在 $x_5\neq x_6$ 且 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得

$$f(x_6)-f(x_5)=\lambda(x_6-x_5)\Leftrightarrow f(x_6)-\lambda x_6=f(x_5)-\lambda x_5.$$

即证 $f(x)-\lambda x$ 在 $(0,1)$ 上不是单射. 又由命题??及 $f\in C(0,1)$, 故只须证 $f(x)-\lambda x$ 不是严格单调的. 对 $\forall\lambda\in(a,b)$, 令 $g(x)=f(x)-\lambda x$, 不妨设 $x_2>x_1,x_4>x_3$, 则

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=a-\lambda<0,\quad \frac{g(x_4)-g(x_3)}{x_4-x_3}=b-\lambda>0.$$

从而 $g(x_2)<g(x_1)$, $g(x_4)>g(x_3)$, 故 g 在 $(0,1)$ 上非严格单调, 结论得证. □

例题 0.7 $f\in D[a,b]$, 且在 (a,b) 上 f' 有零点. 证明: 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得

$$f'(\theta)=\frac{f(\theta)-f(a)}{b-a}.$$

注 先考虑微分方程:$y'=\dfrac{y-f(a)}{b-a}$, 解出微分方程的解, 再常数变易得到构造函数:$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$.

证明 令 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}$. 由条件可设 $f'(c)=0,c\in(a,b)$. 从而 $g'(c)=\dfrac{-\frac{f(c)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}}$.

(i) 若 $g'(c)=0$, 则取 $\theta=c$ 即可.

(ii) 若 $g'(c)>0$, 则 $f(c)<f(a)$. 从而 $g(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}}<0$. 于是存在 $\delta>0$, 使得

$$g(x)\leqslant g(c)<0,\forall x\in(c-\delta,c+\delta).$$

又因为 $g(a)=0$, 所以

$$g(x)\leqslant g(c)<g(a),\forall x\in(c-\delta,c+\delta).\tag{4}$$

由于 $g\in C[a,c]$, 因此 g 在 $[a,c]$ 上存在最小值. 由(4)式可知,g 在 $[a,c]$ 上的最小值一定在 (a,c) 上取到. 故存在 $\theta\in(a,c)$, 使得

$$g(\theta)=\min_{x\in(a,c)}g(x).$$

由 Fermat 引理可知,$g'(\theta)=0$, 即 $f'(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(a)}{b-a}$.

(iii) 若 $g'(c)<0$, 则由 (ii) 同理可证, 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(a)}{b-a}$. □

例题 0.8 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$, 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $|f(\xi)|=4$.

笔记 考虑题目条件的线性组合, 待定 $a\in\mathbb{R}$ 考虑

$$1=\left|\int_0^1(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|x-a|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_0^1|x-a|\,\mathrm{d}x.$$

为了使放缩最精确, 我们希望右边积分 $\displaystyle\int_0^1|x-a|\,\mathrm{d}x$ 达到最小, 容易知道是 $a=\dfrac{1}{2}$.

证明 注意到

$$1 = \left| \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |x - \frac{1}{2}| \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 |x - \frac{1}{2}|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

故 $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \geqslant 4$. 又因为 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 所以由积分中值定理可知, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $f(\theta) = |f(\theta)| = 0$. 从而由介值定理可知, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $|f(\xi)| = 4$. □