0.1 Stolz 定理

0.1.1 数列 Stolz 定理

定理 0.1 (Stolz 定理)

(a): 设 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(b): 设 x_n 是严格递减数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(c): 分别在 (a),(b) 的条件基础上, 若还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{1}$$

注 注意 (c) 由 (a),(b) 是显然的, 且只有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞ 时才(1)式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即Stolz 定理是离散的洛必达法则.

证明 我们仅证明 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < \infty$ 时有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{2}$$

记 $A \triangleq \varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由上极限定义我们知道对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\leqslant A+\varepsilon, \forall n\geqslant N$. 利用 x_n 严格递增时, 成立 $y_{n+1}-y_n\leqslant(A+\varepsilon)(x_{n+1}-x_n), n\geqslant N$, 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1}(y_{j+1}-y_j)\leqslant(A+\varepsilon)\sum_{j=N}^{n-1}(x_{j+1}-x_j), \forall n\geqslant N+1.$$

即

$$y_n-y_N\leqslant(A+\varepsilon)(x_n-x_N), \forall n\geqslant N+1.$$

令 $n\to+\infty$, 取上极限就得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\frac{y_n}{x_n}-\frac{y_N}{x_n}}{1-\frac{x_N}{x_n}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{y_n-y_N}{x_n-x_N}\leqslant A+\varepsilon.$$

由 ε 任意性得到式(2). □

命题 0.1 (Cauchy 命题)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

笔记 这个命题说明Stolz 定理是一种有效的把求和消去的降阶方法.

证明 容易由Stolz 定理的 (a)直接得出. □

定理 0.2 (反向 Stolz 定理)

对某个 $C>0$, 如果有 $n(a_n-a_{n-1})\geqslant -C, \forall n\geqslant 2$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a\in\mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

♡

笔记 反向洛必达本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

笔记 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n - a_{n-1},\ \forall n \geqslant 2,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

证明的想法是用 S_n, S_m 来表示 a_n, m 是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m} = S_n + ma_n + mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_{n+m} - S_n}{m} - \frac{mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}}{m} \\
&\leqslant \frac{|S_{n+m}| + |S_n|}{m} + \frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n+1} + (m-1)\frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+m}\right].
\end{aligned}$$

然后想办法取合适的 m 即可.

证明 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n - a_{n-1},\ \forall n \geqslant 2,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

我们有 $b_n \geqslant -\dfrac{C}{n}$.

对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $|S_n| \leqslant n\varepsilon, \forall n \geqslant N$, 于是当 $n \geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} - S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]b_{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right) \\
&\leqslant \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right) \\
&\leqslant \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n}\right) \\
&= \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C \\
&\leqslant \frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C + \varepsilon,
\end{aligned} \tag{3}$$

于是我们得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

另外一方面, 当 $n \geqslant \dfrac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$, 有 $n - [n\sqrt{\varepsilon}] \geqslant n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geqslant N$, 因此

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)b_{n-1} + \cdots + b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{(n-[n\sqrt{\varepsilon}])[n\sqrt{\varepsilon}]}\left(([n\sqrt{\varepsilon}]-1) + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2) + \cdots + 1\right) \\
&\geqslant \frac{|S_n| + |S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} + \varepsilon,
\end{aligned} \tag{4}$$

于是我们得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant -2\sqrt{\varepsilon} - \frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon.$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

命题 0.2

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

证明 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1} - \ln a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

□

命题 0.3

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}, a_n > 0$, 并且对某个 $C > 0$, 如果有 $n(a_n - a_{n-1}) \geqslant -C, \forall n \geqslant 2,$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

证明 由反向 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1} - \ln a_n} \xlongequal{\text{反向 Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (\ln a_{k+1} - \ln a_k)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n - \ln a_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

□

0.1.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限

例题 0.1 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}.$$

笔记 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

证明 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}\right)}.$$

又由Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{2020} - (n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2020 \cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}} = 0.$$

于是再利用Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}{n \cdot (n+1)^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2020}}{n^{2021}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021} - n^{2021}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2020}}{2021 \cdot n^{2020}} = \frac{1}{2021}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\dfrac{1}{2021}$. □

例题 0.2

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$.

(2) 证明下述极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)$.

笔记 注意,$\gamma\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0.577\cdots$ 是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道 γ 会不会是一个分数.

解

(1) 直接由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

(2) 记 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$, 则

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.\end{aligned}$$

从而存在常数 $C>0$, 使得 $|c_{n+1}-c_n|\le\dfrac{C}{n^2}$, 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C}{n^2}$ 收敛, 所以由比较原则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}-c_n|$ 也收敛. 由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_{n+1}-c_n)$ 也收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_1)$ 存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$ 也存在.

(3) 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)}\cdot n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=-\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.$$

□

例题 0.3 计算

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

证明

1. 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}-\ln n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n}{n}}$$
$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n}{1}}=e^{\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}}$$
$$=e^{\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=e^{-1}.$$

2. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}}-e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=e^{-1}.$$

故 $e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\sim\frac{n}{e},n\to\infty$. 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sum_{k=1}^{n}\ln k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2(n+1)}=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n+1}$$
$$\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln k-n\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\ln k\right]$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)-(n+1)\ln(n+1)\right]=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{e}.$$

□

例题 0.4 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}.$$

笔记 注意到, 分子求和时, 不是单纯的 $\sum_{k=0}^{n+1}\ln C_n^k-\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k$, 而是 $\sum_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k$.

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.

结论 $C_a^b=\frac{a}{b}C_{a-1}^{b-1}$.

解 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln C_n^{k-1}-\ln C_n^k\right)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\left(\ln C_n^0-\ln C_n^n\right)}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+2)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)}{1}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

例题 0.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

笔记 倒序求和与顺序求和相等!(看到 $n+1-k$, 就应该想到倒序求和)

解 解法一 (Stolz 公式):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^{n+1-k}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}}=1.$$

解法二 (和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)):一方面, 注意到对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)},\forall n>N.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限, 得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{N}\varliminf_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^N})}{1-\frac{1}{2}},\forall N\in\mathbb{N}_+.$$

令 $N\to\infty$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^N})}{1-\frac{1}{2}}=1.$

另一方面, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(n+1-n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限, 得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

故

$$1\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant 1.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=1.$

□

例题 0.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(H_n-\ln n-\gamma)$, 其中 γ 为欧拉常数,$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明

$$\lim_{n\to\infty} n(H_n-\ln n-\gamma)=\lim_{n\to\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

□

注 类似的, 你可以继续计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n(H_n-\ln n-\gamma)-\frac{1}{2}\right)$, 并且仅用 stolz 公式就能证明存在一列 $c_1,\cdots,c_k$ 使得

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_k}{n^k}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),n\to\infty.$$

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$.

笔记 这题也可以凑定积分定义是显然的.

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+2}-\sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

□

命题 0.4

设 $\alpha\in(0,1)$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+o\left(n^{1-\alpha}\right).$$

证明 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}(n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{1-\alpha}{n}}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

□

0.1.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限

例题 0.8 设 $x_1>0,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{4}}x_n$.

证明 归纳易证 x_n 单调递增, 如果 x_n 有界则设 $x_n\le A<\infty$, 代入条件可知 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n}x_n}\ge\frac{1}{A\sqrt{n}}$, 从而 $x_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{A\sqrt{n}}$. 而这个不等式右边发散, 故 x_n 也发散, 矛盾. 所以 x_n 单调递增趋于无穷, 下面用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\left(2x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=2\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right)=4.$$

因此所求的极限是 2.

□

注

1. 直接用 stolz 会做不出来:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac14}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\frac14 n^{-\frac34}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\frac{1}{x_n\sqrt{n}}}{n^{-\frac34}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac14}}{x_n}.$$
设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac14}}=A$, 则由上式可得 $A=\frac{4}{A}$, 解得 $A=2$.
但是注意我们事先并没有论证上式最后一个极限存在, 所以不满足 Stolz 定理的条件, 这导致前面的等号都不一定成立. 因此不可以“解方程”得到所求极限为 2.
2. **上述证明中最后一步求原式平方的极限而不求其他次方的极限的原因:** 我们也可以待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\left(\left(1+\frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right)^a-1\right)}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\frac{a}{x_n^2\sqrt{n}}}{bn^{b-1}}=\frac{a}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac12}}.$$
我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数, 因此令 $a=2,b=\frac12$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^a}{n^b}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}=\frac{a}{b}=4$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$ 即可.
类似题目的最后一步求的极限式都是通过这种待定系数的方式得到的, 并不是靠猜.

例题 0.9 设 $0<x_0<y_0<\frac{\pi}{2}$, $x_{n+1}=\sin x_n$, $y_{n+1}=\sin y_n\ (n\geq 0)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$.

证明 因为 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n\ (n\geq 0)$, 所以数列 $\{x_n\}$ 严格递减有下界. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $\sin a=a$, 于是 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

另外, 由 $0<x_0<y_0<\frac{\pi}{2}$ 可以推得 $0<x_n<y_n<\frac{\pi}{2}\ (n\geq 0)$. 取正整数 ℓ 使得 $y_\ell<x_0$, 则 $y_\ell<x_0<y_0$, 从而对任意的正整数 n 有
$$y_{n+\ell}<x_n<y_n$$
进而
$$\frac{y_{n+\ell}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<1$$
注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_{n+\ell}}{y_n}=1$, 由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$. □

注 事实上, 通过待定系数, 利用 Stolz 公式做形式计算可以得到 x_n 的阶. 待定 $\alpha,\beta>0$, 由 Stolz 公式可得
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^\beta x_n^\alpha&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{\frac{1}{x_n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta n^{\beta-1}}{\frac{1}{\sin^\alpha x_n}-\frac{1}{x_n^\alpha}}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^\alpha\sin^\alpha x_n}{x_n^\alpha-\sin^\alpha x_n}=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{x_n^\alpha-\left(x_n-\frac16x_n^3+o\left(x_n^3\right)\right)^\alpha}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{\mathrm{C}_\alpha^1x_n^{\alpha-1}\cdot\frac16x_n^3+o\left(x_n^{\alpha+2}\right)}=\frac{6\beta}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}}{x_n^{2-\alpha}+o\left(x_n^{2-\alpha}\right)}.\end{aligned}$$
于是取 $\alpha=2,\beta=1$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=\frac{6\cdot1}{2}=3$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}ny_n^2=3$.. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}y_n=\sqrt{3}$.

例题 0.10 设 $k\geq2, a_0>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

笔记 这题很容易能猜出要先对原极限开 k 次方再用 Stolz 定理求解.

实际上, 我们也可以同例题 0.8一样, 待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n+a_n^{-\frac1k}\right)^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\left[\left(1+a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{a(k+1)}-1\right]}{bkn^{bk-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\frac{\frac{1}{k}+1}{a_n^{\frac{1}{k}+1}}}{bkn^{bk-1}} = \frac{k+1}{bk^2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)-\frac{k+1}{k}}}{n^{bk-1}}.$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数值, 因此令 $a=b=\frac{1}{k}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{\frac{1}{k}k^2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}-\frac{k+1}{k}}}{n^{\frac{k}{k}-1}}=\frac{k+1}{k}$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}$ 即可.

证明 归纳易证 a_n 单调递增, 假设 a_n 有界, 则由单调有界定理可知,a_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A<\infty$. 则由递推条件可得,$A=A+\frac{1}{\sqrt[k]{A}}$, 无解, 矛盾. 于是 a_n 单调递增且无上界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 根据 Stolz 公式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-a_n^{1+\frac{1}{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(a_n+a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{1+\frac{1}{k}}-a_n^{1+\frac{1}{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(1+a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(1+x^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)x^{-(1+\frac{1}{k})}=1+\frac{1}{k}$$

因此所求极限是 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. □

注 如果题目没给出需要求的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$, 而是问求 a_n 的渐近展开式 (只展开一项), 那么我们就需要待定系数自己探索 a_n 的阶. 待定 $\alpha>0$, 由 Taylor 公式得到

$$a_{n+1}^{\alpha}=\left(a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^{\alpha}=a_n^{\alpha}+\alpha a_n^{\alpha-1}\frac{1}{\sqrt{a_n}}+o\left(a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right)$$
$$\Rightarrow a_{n+1}^{\alpha}\approx a_n^{\alpha}+\alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\Rightarrow a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\approx\alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}.$$

从而令 $\alpha=\frac{3}{2}$, 则

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}}=a_{n+1}^{\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}^{\alpha}-a_k^{\alpha}\right)\approx\sum_{k=1}^{n}\alpha a_k^{\alpha-\frac{3}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}a_k^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{3n}{2}.$$

这样就能写出 a_n 渐近展开式的第一项, 即 $a_n=\left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$.

例题 0.11 设 k 为正整数, 正数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)=1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^{k+1}=\frac{1}{k+1}$.

证明 设 $S_n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$, 则 S_n 单调递增. 如果 S_n 有界, 则 x_n 趋于零,$x_nS_n\to0$, 这与已知条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件可知 x_n 趋于零. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}S_{n+1}S_n}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}}=1.$$

下面运用等价无穷小替换和 Stolz 公式来求极限:

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^{k+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^{k+1}S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}^{k+1}-S_n^{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(S_{n+1}-S_n)(S_{n+1}^k+S_{n+1}^{k-1}S_n+\cdots+S_{n+1}S_n^{k-1}+S_n^k)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}^k(S_{n+1}^k+S_{n+1}^{k-1}S_n+\cdots+S_{n+1}S_n^{k-1}+S_n^k)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x_{n+1}S_{n+1})^k+(x_{n+1}S_{n+1})^{k-1}(x_{n+1}S_n)+\cdots+(x_{n+1}S_{n+1})(x_{n+1}S_n)^{k-1}+(x_{n+1}S_n)^k}$$
$$=\frac{1}{k+1}.$$

□

例题 0.12 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=1$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}a_n$.

解 因为 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}$ 单调递增, 故由单调有界定理可知, $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}$ 的极限要么为有限数, 要么为 $+\infty$. 假设 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 或不存在, 则此时 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = +\infty$. 否则, 设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = c < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\right) = c - c = 0$ 矛盾. 又由 $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ 可得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} = 0$, 这与 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 或不存在矛盾. 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 并且由 $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ 可知 $a_n \sim \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}, n \to \infty$. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1\right]
\end{aligned}$$

又由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 a_n = 0$, 因此由 Taylor 公式可知 $\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1 \sim \frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}, n \to \infty$. 从而上式可化为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} = 3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \\
&= 3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2\right)^2 \\
&= 3\lim_{n\to\infty}\left[a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^2 - 2a_{n+1}^4\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6\right] = 3 + 0 + 0 = 3.
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. □

例题 0.13

1. 设 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \cdots, x_1 > 0$, 计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{n(nx_n - 2)}{\ln n}$.
2. 设 $x_{n+1} = \sin x_n, n = 1, 2, \cdots, x_1 \in (0, \pi)$, 计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(1 - \sqrt{\frac{n}{3}}x_n)$.
3. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n = 1, 2, \cdots$, 计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$.

解

1. 由 $\ln(1+x) \le x, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1} \le x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 并且 $x_1 > 0$, 假设 $x_n > 0$, 则 $x_{n+1} = \ln(1+x_n) > 0$. 从而由数学归

纳法, 可知 $x_n > 0,\forall n \in \mathbb{N}$. 于是由单调有界定理, 可知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$. 对 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ 两边同时令 $n \to \infty$, 可得

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+x_n) = \ln(1+a).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 进而, 由 *Stolz* 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+x_n)}-\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$. 即 $x_n \sim \dfrac{2}{n}, n\to\infty$.
因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n\left(n-\frac{2}{x_n}\right)}{\ln n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{x_n}}{\ln n}\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{x_{n+1}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}}\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{\ln(1+x)}}{x}\\ &= 4\lim_{x\to0}\frac{(x+2)\ln(1+x)-2x}{x^2\ln(1+x)} = 4\lim_{x\to0}\frac{(x+2)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-2x}{x^3}\\ &= 4\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到 x_n 在 $n\to\infty$ 时的渐进估计:

$$\begin{aligned}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n} = \frac{2}{3}+o(1) &\Rightarrow nx_n-2 = \frac{2\ln n}{3n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\\ &\Rightarrow x_n = \frac{2}{n}+\frac{2\ln n}{3n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n\to\infty.\end{aligned}$$

2. 由 $\sin x \leqslant x, \forall x\in\mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1}\leqslant x_n, \forall n\in\mathbb{N}$. 又由于 $0<x_1<\pi$ 及 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1, \forall n\in\mathbb{N}_+$, 故归纳可得 $0\leqslant x_n\leqslant 1, \forall n\geqslant 2$. 因此 $\{x_n\}$ 极限存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a<\infty$. 从而对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时令 $n\to\infty$ 可得

$$a = \lim_{n\to\infty}x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sin x_n = \sin a.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 于是由 *Stolz* 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{nx_n^2} &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\right) = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}\right)\\ &= 3\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = 3\lim_{x\to0}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}{x^4}\\ &= 3\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4} = 1.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 3$. 即 $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}, n\to\infty$. 进而, 再结合 *Stolz* 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right) \xlongequal{\text{平方差公式}} \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{n}{3}x_n^2\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^2\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}}{\ln n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}}\\
&=\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}}{x^2}=\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x-\frac{1}{3}x^2\sin^2 x}{x^4\sin^2 x}\\
&=\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2-\frac{1}{3}x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2}{x^6}\\
&=\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^6}{36}-\frac{x^6}{60}+\frac{x^6}{9}+o\left(x^6\right)}{x^6}=\frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

(最几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出 $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+o\left(x^2\right)$, 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}\geqslant x_n,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又 $x_1=1>0$, 故归纳可得 $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 由单调有界定理可知数列 $\{x_n\}$ 的极限要么是 $+\infty$, 要么是有限数. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<\infty$, 则对 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$ 两边同时令 $n\to\infty$, 可得 $a=a+\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}=0$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 于是由 *Stolz* 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{n+1-n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2\right)}\\
&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n^2}\right)}=\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

因此 $x_n\sim\sqrt{2n},n\to\infty$. 从而 $x_n+\sqrt{2n}\sim2\sqrt{2n},n\to\infty$. 再结合 *Stolz* 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}&\xlongequal{\text{平方差公式}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{(x_n+\sqrt{2n})\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{2\sqrt{2n}\ln n}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-2n}{\ln n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2-2}{\ln(n+1)-\ln n}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{2}{x_n^2}}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.14 设 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n},S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$.

解 由于 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n},\forall n\in\mathbb{N}_+$, 并且 $a_1>0$, 故由数学归纳法可知 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又 $a_2=a_1+a_1>a_1$, 再根据递推式, 可以归纳得到数列 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此, 数列 $\{a_n\}$ 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<\infty$, 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由条件可知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{1}{na_1}=\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}_+$. 从而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$
a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1\geqslant\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.
$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=+\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 于是由 *Stolz* 定理, 可知

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}n(a_{n+1}^2-a_n^2)
$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(a_n+\frac{1}{S_n}\right)^2 - a_n^2\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right).$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^2} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right].$$

由递推公式, 可得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$1 = n+1-n \leqslant n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}} = n+1-\frac{na_n}{a_n+\frac{1}{S_n}} = 1+\frac{\frac{n}{a_nS_n}}{1+\frac{1}{a_nS_n}}$$

$$= 1+\frac{n}{1+a_nS_n} \leqslant 1+\frac{n}{1+a_1S_n} = 1+\frac{n}{1+S_n}.$$

又由 Stolz 定理, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+S_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}} = 0$. 故由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right] = 1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2} = 2+0 = 2.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$. □

0.1.2 函数 Stolz 定理

定理 0.3 (函数 Stolz 定理)

设 $T>0$, $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是内闭有界函数.

(1) 设 $g(x+T)>g(x)$, 若有 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

(2) 设 $0<g(x+T)<g(x)$, 若有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

♡

注 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 利用夹逼准则和数列 Stolz 定理进行证明. 具体可见例题 0.15.

笔记

(1) 不妨设 $A=0$ 的原因:

(2) 不妨设 $T=1$ 的原因:

证明 我们仅考虑 $A\in\mathbb{R}$, 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可.

(1) 不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可. 对任何 $\varepsilon>0$, 由条件知

存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x+1)-g(x)],g(x)>0. \tag{5}$$

于是对 $\forall x>X$, 利用(5)式, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}+\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\overset{(5)\text{式}}{\leqslant} \varepsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[g(x-k+1)-g(x-k)]}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&= \varepsilon\frac{g(x)-g(x-[x]+X)}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\overset{(5)\text{式}g>0}{\leqslant} \varepsilon+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|.
\end{aligned}$$

于是利用 f 在 $[X,X+1]$ 有界及 $X\leqslant x-[x]+X<X+1$, 我们有

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon,$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

这就完成了证明.

(2) 不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可. 任何 $\varepsilon>0$, 由条件可知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x)-g(x+1)]. \tag{6}$$

于是对 $\forall x>X,\forall n\in\mathbb{N}$, 利用(6)可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+k-1)-f(x+k)]+f(x+n)}{g(x)}\right| \\
&\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x+k-1)-f(x+k)|}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leqslant \varepsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[g(x+k-1)-g(x+k)]}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&= \varepsilon\frac{g(x)-g(x+n)}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leqslant \varepsilon+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}.
\end{aligned}$$

再利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x+n)|}{g(x)}=0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon,\forall x>X.$$

从而结论得证.

□

例题 0.15

(1) 设 $\alpha > -1$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}$.

(3) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (t-[t])dt$, 这里 $[\cdot]$ 表示向下取整函数.

笔记 虽然这个几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见下述证明.

注 第 (1) 题如果直接洛必达得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|\sin x|}{\alpha+1}\text{不存在},$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

证明

(1) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt-\int_0^x t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{(x+\pi)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}\\&\xlongequal{Lagrange\text{中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{\pi\,(\alpha+1)\,x^\alpha}\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt}{\pi\,(\alpha+1)\,x^\alpha},\end{aligned}$$

其中 $x\leqslant\theta_x\leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x\sim x, x\to+\infty$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt}{\pi\,(\alpha+1)\,x^\alpha}=\frac{1}{\pi\,(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt=\frac{1}{\pi\,(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=\frac{2}{\pi\,(\alpha+1)}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha|\sin t|dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}}\le\frac{\int_0^{x} t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}\le\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|dt}{(n\pi)^{\alpha+1}},\forall x\in[0,+\infty).\tag{7}$$

又由数列 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{(n\pi)^{\alpha+1}}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}\\&\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(n\pi)^\alpha\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt}{(\alpha+1)\,n^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi\,(\alpha+1)},\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{[(n+1)\,\pi]^{\alpha+1}}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t^\alpha\,|\sin t|\,dt}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}\\&\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(n\pi)^\alpha\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt}{(\alpha+1)\,n^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi\,(\alpha+1)}.\end{aligned}\tag{9}$$

又因为 $n\pi\le x\le(n+1)\pi,\forall x\in(0,+\infty)$, 所以 $n\to+\infty$ 等价于 $x\to+\infty$. 于是利用(7)(8)(9)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt-\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(x+\pi)-\ln x}\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\frac{\pi}{x}}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}.\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $x\leqslant\theta_x\leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x\sim x, x\to+\infty$. 再结合(10)式可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}=\frac{2}{\pi}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x \in (0,+\infty)$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \leq \frac{\int_0^{x} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)}, \forall x > 0. \tag{11}$$

又由数列 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi) - \ln((n-1)\pi)} \\
&\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+2)\pi) - \ln((n+1)\pi)} \\
&\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1+\frac{1}{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned} \tag{13}$$

又因为 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi, \forall x \in (0,+\infty)$, 所以 $n \to +\infty$ 等价于 $x \to +\infty$. 于是利用(11)(12)(13)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{x} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 直接使用函数 Stolz 定理:注意到 $t-[t]$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的非负函数, 故由函数 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])dt &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x+1}(t-[t])dt - \int_0^x (t-[t])dt}{x+1-x} = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} (t-[t])dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} (t-[t])dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 (t-[t])dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x \in (0,+\infty)$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leq x \leq n+1$. 故

$$\frac{\int_0^n (t-[t])dt}{n+1} \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])dt \leqslant \frac{\int_0^{n+1}(t-[t])dt}{n}, \forall x > 0. \tag{14}$$

又由数列 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n+1}(t-[t])dt}{n} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} (t-[t])dt = \int_0^1 (t-[t])dt = \int_0^1 t dt = 1, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n}(t-[t])dt}{n+1} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \int_{n-1}^{n} (t-[t])dt = \int_0^1 (t-[t])dt = \int_0^1 t dt = 1. \tag{16}$$

又因为 $n \leq x \leq n+1, \forall x \in (0,+\infty)$, 所以 $n \to +\infty$ 等价于 $x \to +\infty$. 于是利用(14)(15)(16)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])dt = 1.$$

□