0.1 反常积分敛散性判别

定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$ 使得任意 $x_1, x_2 > A$ 都有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$.

定理 0.2 (A-D 判别法)

设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f, g 在 $x = a$ 处都有界.

1. Abel 判别法: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. Dirichlet 判别法: 若 $\int_a^{x} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

注 Dirichlet 判别法要强于 Abel 判别法. 因为可以由 Dirichlet 判别法直接推出 Abel 判别法. 证明如下:

设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f, g 在 $x = a$ 处都有界. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \triangleq A \in \mathbb{R}$, 令 $h(x) = g(x) - A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, 并且 $h(x)$ 与 $g(x)$ 有相同单调性. 由 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可知, $\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, +\infty)$ 上必有界. 从而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_a^{\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x + A\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

例题 0.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中非负且递减, 证明: $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散性.

证明 (i) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由条件可知

$$f(x)\sin^2 x \leqslant f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$.

(ii) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由 f 非负递减, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq a > 0$, 则存在 $M > 0$, 使得

$$f(x)\sin^2 x > \frac{a}{2}\sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \tag{1}$$

又因为

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(b - \frac{\sin 2b}{2}\right),$$

而上式右边极限不存在, 所以 $\int_0^{\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散. 从而结合 (1) 式, 由比较判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

注意到

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

即 $\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x < \infty$. 考虑 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$\int_0^{C} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2C}{2} < 1, \quad \forall C > 0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty$. 因此

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty.$$

(iii) 当 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散时, 实际上, $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证. □

命题 0.1

设 $f(x),g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f,g 在 $x=a$ 处都有界.

(1) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 一定条件收敛.

(2) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都绝对收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 也绝对收敛.

(3) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

(4) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都条件收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 的收敛性无法直接判断.

证明

(1) 由 $f(x)\le|f(x)|$ 立得.

(2) 由 $|f(x)\pm g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ 立得.

(3) 由 (1) 可知 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都条件收敛, 从而 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 也条件收敛. 若 $\int_a^{\infty}|f(x)\pm g(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, 注意到 $g(x)=\left[f(x)+g(x)\right]-f(x)$, 从而由 (2) 可知 $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\infty}\left[(f(x)+g(x))-f(x)\right]\mathrm{d}x$ 也绝对收敛, 矛盾!

(4)

□

例题 0.2 判断如下积分的收敛性:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x, m,n\in\mathbb{N}$;
3. $\displaystyle\int_2^{\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p\ln\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x$.

证明

1. 四个瑕点 $x=0,1,2,\infty$, 分别估阶讨论即得收敛.
2. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{x^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}, x\to0^+.$$

又 $\frac{1}{n}<1+\frac{2}{m},\forall m,n\in\mathbb{N}$, 故 $\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x\ (\forall m,n\in\mathbb{N})$ 收敛. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\ln^{\frac{2}{m}}(1-x), x\to1^-.$$

并且对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{\frac12}\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12}\ln^{\frac{2}{m}}x\mathrm{d}x\xlongequal{x=e^t}\int_{-\infty}^{-\ln 2}t^{\frac{2}{m}}e^t dt$$
$$\xlongequal{t=-u}\int_{\ln 2}^{\infty}u^{\frac{2}{m}}e^{-u}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{\infty}u^{\frac{2}{m}}e^{-u}\mathrm{d}u$$

$$= \Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right) < +\infty.$$

故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx\ (\forall m,n \in \mathbb{N})$ 收敛. 综上, $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx\ (\forall m,n \in \mathbb{N})$ 收敛.

3. 由于 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1} \sim \frac{1}{x^{1+\frac{p}{2}}}, x \to +\infty$. 故 $\int_2^{\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1} dx$ 收敛当且仅当 $p > 0$.

□

例题 0.3 设 $p, q > 0$, 判断 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛性.

笔记 一个经验上的小结论. 在幂函数次数不为 1 时, 趋于无穷或者趋于 0 时 ln 可忽略.

证明 先讨论 $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 的收敛性. 由于

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}, x \to 1^+.$$

因此 $\int_1^2 \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛当且仅当 $q < 1$.

再讨论 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 的收敛性.

①当 $p > 1$ 时, 我们有

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^p}} = \frac{1}{\ln^q x} \to 0, x \to +\infty.$$

从而存在 $C > 0$, 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{C}{x^p} \to 0, x \to +\infty.$$

而 $\int_2^{\infty} \frac{C}{x^p} dx$ 收敛, 故 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 此时收敛.

②当 $0 < p < 1$ 时, 取 $\varepsilon > 0$, 使得 $p + \varepsilon < 1$, 从而

$$\frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}} = \frac{x^{\varepsilon}}{\ln^q x} \to +\infty, x \to +\infty.$$

于是存在 $M > 0$, 使得

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} > \frac{M}{x^{p+\varepsilon}}, x \to +\infty.$$

而 $\int_2^{\infty} \frac{M}{x^{p+\varepsilon}} dx$ 发散, 故 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 此时发散.

③当 $p = 1$ 时, 我们有

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln^q x} d\ln x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^q} dt.$$

于是此时 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx$ 收敛当且仅当 $q > 1$.

综上所述, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛当且仅当 $p > 1, q < 1$.

□

例题 0.4 对 $a, b \in \mathbb{R}$, 判断 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx$ 的收敛性和绝对收敛性.

证明 **收敛性:**

1. 当 $b = 0$ 时, 此时 $\int_0^{\infty} \frac{\sin 1}{x^a} dx$ 必定发散.
2. 当 $b \neq 0$ 时, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx \xlongequal{y=x^b} \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a}{b}}} y^{\frac{1}{b}-1} dy = \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy. \tag{2}$$

(a). 先考虑 $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$. 注意到

$$\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \to 0^+.$$

因此 $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 收敛当且仅当 $\frac{a-1}{b} < 1$.

(b). 再考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$.

I. 当 $\frac{a-1}{b}+1 \leqslant 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y\right| &\geqslant \left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\left|\int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \sin y\mathrm{d}y\right| \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\mathrm{d}y\right| = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知, 此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 发散.

II. 当 $\frac{a-1}{b}+1 > 0$ 时, 我们有

$$\left|\int_0^x \sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant 2\ (\forall x > 0), \quad \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\text{单调递减趋于}0\ (y \to +\infty).$$

于是由 Dirichlet 判别法可知, 此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 收敛.

综上, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^b}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $b \neq 0$ 且 $-1 < \frac{a-b}{b} < 1$.

绝对收敛性: 在 $-1 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$ 情况下, 先考虑 $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$. 我们有

$$\frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \to 0^+.$$

又因为 $\frac{a-1}{b} < 1$, 所以 $\int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}\mathrm{d}y$ 必收敛, 因此 $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 必绝对收敛.

再考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$. 当 $\frac{a-1}{b} > 0$, 注意到由(2)知道

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a}\mathrm{d}x = \frac{1}{|b|}\int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{|b|}\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} < \infty,$$

故此时 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 绝对收敛.

当 $\frac{a-1}{b} \leqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|b|}\int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y &\geqslant \frac{1}{|b|}\int_1^{\infty} \frac{|\sin y|^2}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2|b|}\int_1^{\infty} \frac{1-\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2|b|}\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y - \frac{1}{2|b|}\int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

显然 $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 收敛, 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 发散. 故此时 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\mathrm{d}y$ 发散.

综上, 这就证明了原积分在 $-1 < \frac{a-1}{b} \leqslant 0, b \neq 0$ 情况下条件收敛,$0 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$ 情况下绝对收敛. □

例题 0.5 判断收敛性 $\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln x} x}\mathrm{d}x$.

笔记 注意运用 $x^{\square}=e^{\square\ln x}=(e^{\square})^{\ln x}$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln x}x}\mathrm{d}x&=\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln x\cdot\ln\ln x}}\mathrm{d}x=\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln x\cdot\ln\ln x}}\mathrm{d}x\\&=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x=\int_{e^2}^{e^{e^2}}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x+\int_{e^{e^2}}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{e^2}^{e^{e^2}}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x+\int_{e^{e^2}}^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x<+\infty.\end{aligned}$$

故原积分收敛. □

例题 0.6 判断收敛性和绝对收敛性:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x,p>0$.

笔记 经验上,Taylor 公式应该展开到余项里面的函数绝对收敛为止.

证明

1. 由 Taylor 公式可知

$$\tan\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right),x\to+\infty.\tag{3}$$

由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 显然有 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛. 注意到

$$\left|O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\right|\leqslant M\left|\frac{\sin x}{x}\right|^3\leqslant\frac{M}{x^3},x\to+\infty.$$

故 $\displaystyle\int_1^{\infty}O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 因此由(3)式可得 $\displaystyle\int_1^{\infty}\tan\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

2. 注意到

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1+\frac{\sin x}{x^p})}\mathrm{d}x.$$

取 $m\in\mathbb{N}$, 使 $m>\dfrac{1}{p}-1$. 由 Taylor 公式可知

$$\frac{t}{1+t}=t-t^2+\cdots+(-1)^m t^{m-1}+O(t^m),t\to0^+.$$

从而

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1+\frac{\sin x}{x^p})}=\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+\cdots+(-1)^m\frac{\sin^{m-1}x}{x^{mp}}+O\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right),x\to+\infty.\tag{4}$$

注意到

$$\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}=\frac{1}{2x^{3p}}-\frac{\cos 2x}{x^{3p}},\tag{5}$$

(i) 当 $p\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时, 有 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{3p}}\mathrm{d}x$ 发散, 从而此时 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$ 发散.

(ii) 当 $p>\dfrac{1}{3}$ 时, 有 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛, 并且由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{2p}}\mathrm{d}x,\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而由(5)式可知, 此时 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛. 又因为对 $\forall k\geqslant2$, 都有

$$\left|\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}\right|\leqslant\frac{1}{x^{(k+1)p}}\leqslant\frac{1}{x^{3p}},\forall x>2.$$

而 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以此时 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}\mathrm{d}x$ 都绝对收敛. 故由(4)式可知, 此时原积分收敛.

综上, 原积分在 $p \leqslant \frac{1}{3}$ 时发散,$p > \frac{1}{3}$ 收敛. 再讨论绝对收敛性.

(a). 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由 M 判别法易知 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (1 \le k \le m)$ 绝对收敛. 再由(4)式可知, 此时原积分绝对收敛.

(b). 当 $\frac{1}{3} < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$\left|\frac{\sin x}{x^{2p}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} = \frac{1}{2x^{2p}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2p}}.$$

显然 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{2p}} dx$ 发散, 故此时 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2p}} dx$ 条件收敛. 注意到对 $\forall k \geqslant 2$, 都有

$$\left|\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{(k+1)p}} \leqslant \frac{1}{x^{3p}}, \forall x > 2.$$

而显然此时 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$ 收敛, 故 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}} dx (2 \le k \le m)$ 绝对收敛. 因此再由(4)式及命题 0.1(3)可知原积分此时条件收敛.

□

例题 0.7 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负连续, 对任意正整数 k 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \le 1$, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \le 1$.

注 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

证明 由条件可得, 对 $\forall A > 0$, 我们有

$$1 \geqslant \int_{-A}^{A} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \geqslant e^{-\frac{1}{k}} \int_{-A}^{A} f(x) dx. \Rightarrow \int_{-A}^{A} f(x) dx \leqslant e^{-\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

令 $k \to \infty$, 则 $\int_{-A}^{A} f(x) dx \leqslant 1, \forall A > 0$. 于是再令 $A \to +\infty$, 可得 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leqslant 1$.

实际上再由单调有界可知 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ 收敛. □

例题 0.8 对实数 a, 讨论 $\int_0^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

证明 证法一: 先讨论 $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性. 注意到

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x\Big|_0^1 = \tan 1 < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

故 $\forall a \in \mathbb{R}$, 都有 $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 收敛. 再讨论 $\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

(i) 当 $a \leqslant 2$ 时,

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \geqslant \int_1^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x} dx \geqslant \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = +\infty.$$

(ii) 当 $a > 2$ 时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x + n\pi}{\cos^2 x + (x+n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

注意到对 $\forall \lambda > 0$, 我们都有

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \lambda \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(6)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} dx \sim n\pi \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}, \quad n \to \infty.$$

由于被积函数非负, 因此再结合命题??可知

$$\int_{1}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim\int_{\pi}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}},\quad n\to\infty.$$

从而当 $\frac{a}{2}-1\leqslant 1$ 时, 即 $2<a\leqslant 4$, $\int_{1}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $\frac{a}{2}-1>1$, 即 $a>4$ 时, $\int_{1}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 当 $a>4$ 时, $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $a\leqslant 4$ 时, $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散.

证法二:由于被积函数非负, 因此由命题??可知

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2 y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2 y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2 y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2 y}\mathrm{d}y&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{n\pi}{\cos^2 y+[(n-1)\pi]^a\sin^2 y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2n\pi}{\cos^2 y+[(n-1)\pi]^a\sin^2 y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2n\pi}{\cos^2 y}}{1+[(n-1)\pi]^a\tan^2 y}\mathrm{d}y\\&\xlongequal{t=\tan y}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+[(n-1)\pi]^a t^2}\\&=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{[(n-1)\pi]^a}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1}{n^{\frac{a}{2}-1}},n\to\infty.\end{aligned}$$

故当 $a<4$ 时, 有 $\frac{a}{2}-1<1$, 此时原积分收敛. 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2 y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2 y}\mathrm{d}y&\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{(n-1)\pi}{\cos^2 y+(n\pi)^a\sin^2 y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y+(n\pi)^a\sin^2 y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2 y}}{1+(n\pi)^a\tan^2 y}\mathrm{d}y\\&\xlongequal{t=\tan y}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+(n\pi)^a t^2}\\&=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{(n\pi)^a}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_2}{n^{\frac{a}{2}-1}},n\to\infty.\end{aligned}$$

故当 $a\geqslant 4$ 时, 有 $\frac{a}{2}-1\geqslant 1$, 此时原积分发散. □

例题 0.9 对 $x>0$, 判断积分 $\int_{0}^{\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt$ 收敛性.

证明 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{k-t+a}{t+x}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\frac{k-t+a}{t+x}dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a+k+x)\ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right)-1\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a-\frac{1}{2}}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]. \tag{7}$$

故当 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a-\frac{1}{2}}{k}$ 发散, 从而结合(7)式可知, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt$ 不存在. 因此由子列极限命题 (a) 可知, 此时 $\int_0^{\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt$ 发散.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt = \sum_{k=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty. \tag{8}$$

对 $\forall y>0$, 存在唯一 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant y<n+1$. 于是

$$\int_0^y \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt = \int_0^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt + \int_n^y \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt. \tag{9}$$

注意到

$$\left|\int_n^y \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt\right| \leqslant \int_n^y \frac{1+\frac{1}{2}}{t+x}dt \leqslant \frac{3}{2}\int_n^{n+1}\frac{1}{t+x}dt = \frac{3}{2}\ln\frac{n+1+x}{n+x}.$$

当 $y\to+\infty$ 时, 有 $n\to+\infty$, 故 $\int_n^y \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt \to 0, y\to+\infty$. 再结合(8)(9)式可知

$$\int_0^{\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt < \infty.$$

故当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt$ 收敛. □

例题 0.10 对正整数 n, 讨论 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim (k\pi)^n\int_0^{\pi}e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x, \quad k\to\infty. \tag{10}$$

又注意到

$$\int_0^{\pi}e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}}e^{-x^2}\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda\to+\infty,$$

$$\int_0^{\pi}e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda\frac{4}{\pi^2}x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\sqrt{\lambda}}e^{-x^2}\mathrm{d}x \sim \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda\to+\infty.$$

故 $\int_0^{\pi}e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\to+\infty$, 其中 C 为某一常数. 因此

$$\int_0^{\pi}e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k\to+\infty,$$

$$\int_0^{\pi}e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k\to+\infty.$$

又因为

$$\int_0^{\pi}e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi}e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi}e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_0^{\pi}e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C_1}{k^6}, k\to+\infty$, 其中 C_1 为某一常数. 于是结合(10)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim (k\pi)^n\int_0^{\pi}e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim C_2k^{n-6}, \quad k\to\infty.$$

其中 C_2 为某一常数. 因此

$$\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_2 k^{n-6}, \quad k\to\infty.$$

故当 $n<5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n\geqslant 5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. 又因为

$$\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \pi^n,$$

所以 $\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都收敛. 从而由

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

可知当 $n<5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n\geqslant 5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. □

引理 0.1

(1) $\cos^{2n+1}x$ 可以写成 $\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x$ 的线性组合, 即 $\cos^{2n+1}x \in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$, 也即 $\cos^{2n+1}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(2k+1)x$, 其中 $a_k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\cdots,n$.

(2) $\cos^{2n}x = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\cos 2(n-k)x + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$.

证明 (1) 利用数学归纳法, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\cos^{2n+1}x = \cos^2 x\cdot\cos^{2n-1}x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos(2k+1)x\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos 2x\cos(2k+1)x\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[\cos(2k+3)x+\cos(2k-1)x\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left[\cos(2k+5)x+\cos(2k+1)x\right] + \frac{1}{2}a_0\left[\cos 3x+\cos(-x)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left[\cos(2k+5)x+\cos(2k+1)x\right] + \frac{1}{2}a_0\left[\cos 3x+\cos x\right].
\end{aligned}$$

故 $\cos^{2n+1}x\in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1+t^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k t^{2k}$$

令 $t=e^{\mathrm{i}x}$, 则

$$\begin{aligned}
(1+e^{2\mathrm{i}x})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} &\Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2e^{-\mathrm{i}x}}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{2n} = e^{-2\mathrm{i}nx}\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}\\
&\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x = \sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x} + \mathrm{C}_{2n}^{2n-k}e^{2\mathrm{i}((2n-k)-n)x}\right] + \mathrm{C}_{2n}^n\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\left(e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x}\right) + \mathrm{C}_{2n}^n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\left(\frac{e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x}}{2}\right)+\mathrm{C}_{2n}^{n}=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\cos 2(n-k)x+\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

$$\Rightarrow \cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\cos 2(n-k)x+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}$$

□

例题 0.11 设 p,q 为正整数, 求反常积分 $I(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件.

证明 因为当 $p=q$ 时, 积分显然收敛, 所以只需考虑 $p\neq q$ 的情形. 由 $I(q,p)=-I(p,q)$ 可知, 可以不妨设 $p>q$, 否则用 $I(q,p)=-I(p,q)$ 代替 $I(p,q)$ 即可

先讨论 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\leqslant\cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2,\quad \forall x\in[0,\delta].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^\delta\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2)^p-(1-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2)^q}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2+(p+q)\mathrm{C}_p^2x^4}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)\\&=\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 得 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{q-p}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta)$. 故对 $\forall p>q$ 且 $p,q\in\mathbb{N}$, 都有 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

再讨论 $\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 p,q 都是奇数时, 由引理 0.1 可知

$$\cos^p x=\sum_{k=1}^{p}p_k\cos kx,\quad 其中 p_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,p.$$

$$\cos^q x=\sum_{k=1}^{q}q_k\cos kx,\quad 其中 q_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,q.$$

从而此时

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x&=\int_1^\infty\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}p_k\cos kx-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{q}(p_k-q_k)\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\sum_{k=q+1}^{p}p_k\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到对 $\forall k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\int_1^x\cos kt\,dt=\frac{\sin kx-\sin k}{k}<2,\quad\forall x>1.$$

并且 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x(k\in\mathbb{N})$ 都收敛. 因此再结合(**??**)式可知, $\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 当 p,q 中至少有一个是偶数时, 不妨设 p 是偶数 q 不是偶数, 则由引理 0.1可知

$$\cos^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}.$$

$$\cos^q x=\sum_{k=1}^{q} q_k\cos kx\quad \text{其中} q_k\in\mathbb{R}\quad k=1,2,\cdots,q.$$

于是

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{C}_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散, 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 也发散.

综上, 由

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x.$$

可知当 $p=q$ 或 p,q 均为奇数时, $\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其余情形均发散. □

例题 0.12 对实数 $p\neq 0$, 讨论 $I=\int_0^1\frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 对 I 进行积分换元可得

$$I=\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\frac{1}{1-x}}\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(1-\left(1-\frac{1}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}\mathrm{d}u=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u. \tag{11}$$

(i) 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 令 $f(u)=\left[\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}\right]^p=\left(2-\frac{1}{u}\right)u^{2p-1}$, 则显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$ 且 $f(u)$ 递增. 于是 $\frac{1}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}=\frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(11)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛.

(ii) 当 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 若 $p=\frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=2$; 若 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=+\infty$. 因此对 $\forall p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 都存在 $K>0$, 使得

$$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\geqslant 1,\forall u>K.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}\cap(K,+\infty)$, 都有

$$\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u\right|\geqslant\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u\right|=1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知,$I=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u$ 发散.

(iii) 当 $p<0$ 时, 显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=0$. 令 $g(u)=\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}$, 则

$$g'(u)=\frac{2}{p}u^{-\frac{1}{p}}\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1}+\left(2-\frac{1}{p}\right)\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{1-\frac{1}{p}}>0,\forall u\in[1,+\infty).$$

因此 $g(u)$ 单调递增, 于是 $\dfrac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=\dfrac{1}{g(u)}$ 单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A \cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(11)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛. □

例题 0.13 对实数 p, 讨论反常积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

注 令 $u=x+\dfrac{1}{x}$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_u^{\infty}\frac{\sin u}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}\right)\mathrm{d}u.$$

显然 $\int_0^A \sin u\mathrm{d}u$ 关于 A 有界. 再证明 $\dfrac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}$ 单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 再同理讨论 $\int_0^1\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

证明 显然 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 有两个奇点 $x=0,+\infty$.

(1) 当 $p\leqslant 0$ 时, 考虑区间 $\left[2n\pi+\dfrac{\pi}{4},2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right]$, 则

$$x+\frac{1}{x}\in\left[2n\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}},2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当 $n>10$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)>0.\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 当 $p>0$ 时, 先考虑 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p>1$, 则

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

因此 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\in(0,1]$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\sin x\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\cos x\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x.\tag{12}$$

显然 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 并且 $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 令 $f(u)=u^p\cos u$, 则当 $u\in\left(0,\dfrac{4p}{\pi}\right)$ 时, 有

$$f'(u)=pu^{p-1}\cos u-u^p\sin u=u^{p-1}\cos u\,(p-u\tan u)>0.$$

于是 $f(u)$ 在 $\left(0,\dfrac{4p}{\pi}\right)$ 上单调递增, 从而 $\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4}p,+\infty\right)$ 上单调递减趋于 0. 又显然 $\int_{\frac{\pi}{4}p}^A\sin x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_{\frac{\pi}{4}p}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 又 $\dfrac{\pi}{4}p<1$, 故此时 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因此再

由(12)式可知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

注意到

$$\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x.$$

显然 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑 $\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p\in(0,1)$, 则

$$\int_0^{1}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

故此时 $\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\geqslant 1$, 则

$$\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-p}}dt.$$

此时 $2-p\leqslant 1$. 于是当 $2-p\leqslant 0$ 即 $p\geqslant 2$ 时, 由 (1) 可知 $\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 当 $2-p\in(0,1]$ 即 $p\in[1,2)$ 时, 由 (i) 可知 $\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当 $p\leqslant 0$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $p\in(0,2)$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛; 当 $p\geqslant 2$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 0.14 判断广义积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 (1) 由于 $e^{\cos x}\sin(2\sin x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}e\mathrm{d}x=2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{A}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{A}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant 0+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{A}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{2\pi\left(\left[\frac{A}{2\pi}\right]+1\right)}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 2\pi e,\forall A>2\pi.\end{aligned}$$

又显然有 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{\infty}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{C}{n},$$

其中 C 为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计,C 需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n}=\infty.$$

故 $\int_1^\infty \frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 0.15 设 $f(x)\in C^1[1,+\infty)$,$0\le f(x)\le x^2\ln x$,$f'(x)>0$, 证明: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

笔记 首先形式计算一下, 假如 $f(x)=x^2\ln x$, 则 $f'(x)=2x\ln x+x$, 量级是 $x\ln x$, 代入进去刚刚好积分是发散的, 可以把这个视为取等条件, 然后对着这个取等, 使用柯西不等式 (目标是去掉难以处理的分母).

证明 对任意充分大的 $b>a$, 令 $A=e^a, B=e^b$, 则由 Cauchy 不等式有

$$\int_A^B \frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_A^B\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\right)^2=(\ln\ln B-\ln\ln A)^2=\left(\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right)^2.$$

注意到

$$\int_A^B\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_A^B\frac{1}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}f(x)=\frac{f(B)}{B^2\ln^2 B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2 A}+2\int_A^B\frac{f(x)(\ln x+1)}{x^3\ln^3 x}\mathrm{d}x,$$

故

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right)^2&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left[\frac{f(B)}{B^2\ln^2 B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2 A}+2\int_A^B\frac{f(x)(\ln x+1)}{x^3\ln^3 x}\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left[\frac{f(B)}{B^2\ln^2 B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2 A}+4\int_A^B\frac{f(x)}{x^3\ln^2 x}\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{\ln B}+4\int_A^B\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\right)\\&=\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{\ln B}+4\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right).\end{aligned}$$

从而

$$\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2\leqslant\int_{e^a}^{e^b}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{b}+4\ln\frac{b}{a}\right)\Rightarrow\int_{e^a}^{e^b}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{(\ln\frac{b}{a})^2}{(\frac{1}{b}+4\ln\frac{b}{a})}.$$

于是对任意充分大的 a, 取 $b=2a$, 则

$$\int_{e^a}^{e^{2a}}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{(\ln 2)^2}{(\frac{1}{2a}+4\ln 2)}\to\frac{\ln 2}{4}, a\to+\infty.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 0.16 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减趋于零,$p>1$, 若 $\int_1^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\int_1^\infty f^p(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

笔记 首先要搞清楚一个误区: 一定不存在 $C>0$, 使得

$$\int_1^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_1^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x \tag{13}$$

成立. 因为如果上式成立, 则对 $\forall k>0$, 用 $kf(x)$ 代替 $f(x)$ 就有

$$\begin{aligned}k^p\int_1^\infty f^p(x)\mathrm{d}x&\leqslant Ck^{p-1}\int_1^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\\\Rightarrow\frac{k}{C}\int_1^\infty f^p(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_1^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 得 $\int_1^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x>+\infty$, 矛盾! 因此, 只有(13)式左右 f 的次数相同 (齐次不等式), 才可能存在上述的 C. 由此得到启发, 我们可以尝试建立如下不等式

$$\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_0^\infty\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

因为 $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以

$$\int_0^1 \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $\int_0^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而可以不妨将积分下限改成 0, 方便后续计算. 定义 $F(x) \triangleq \begin{cases} f(1), x \in [0,1] \\ f(x), x > 1 \end{cases}$, 则 $F(x)$ 递减, $F(x) = f(x), \forall x \geqslant 1$, 并且

$$\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x < +\infty.$$

待定 $C > 0$, 令 $g(x) = \int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t - C\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则 $g(0) = 0$, 形式计算 (f 不一定连续, g 不一定可导) 可得

$$\begin{aligned} g'(x) &= F^p(x) - \frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\left[F(x)x^{\frac{1}{p}} - \frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]. \end{aligned}$$

由 F 递减可得

$$\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} \geqslant \frac{Cp}{p-1}\left(F^{p-1}(x)\int_0^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} = C\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取 $C = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则上式可化为

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}} = F(x)x^{\frac{1}{p}}, \forall x \geqslant 1. \tag{14}$$

于是 $g'(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant 1$ 再结合 $g(0) = 0$ 就有

$$\int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}} = g(x) \leqslant g(0) = 0, \forall x \geqslant 1.$$

令 $x \to \infty$ 得

$$\int_0^{\infty} F^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p-1}} < +\infty.$$

但是注意上述 g 不一定可导, 所以还是需要通过定性地放缩得到严谨的证明, 只需注意到(14)式始终成立.

当然也可以通过逼近方法, 构造一个折线函数 $h(x)$ 逼近 $F(x)$, 此时 $h(x)$ 连续, 从而用 $h(x)$ 代替 $g(x)$ 中的 $F(x)$ 得到的新的 $G(x)$ 是可导的. 就能按照上述方法进行严谨证明.(逼近得到的不等式系数往往更加精确)

证明 定义 $F(x) \triangleq \begin{cases} f(1), x \in [0,1] \\ f(x), x > 1 \end{cases}$, 则 $F(x)$ 递减, $F(x) = f(x), \forall x \geqslant 1$, 并且

$$\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x < +\infty.$$

待定 $C > 0$, 令 $g(x) = \int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t - C\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则由 F 递减可得

$$\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} \geqslant \frac{Cp}{p-1}\left(F^{p-1}(x)\int_0^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} = C\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取 $C=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则上式可化为

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}} \geqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}=F(x)x^{\frac{1}{p}}, \forall x\geqslant 1.$$

由 $\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t$ 收敛可知, 存在 $C>0$, 使得

$$F(x)x^{\frac{1}{p}}\leqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\leqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}<C, \forall x\geqslant 1.$$

于是

$$\int_0^{\infty}F^p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

□

命题 0.2

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中连续, 证明: 广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件有

1. 存在 $u(x),v(x)$ 使得 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调趋于零, $\int_0^A v(x)\,\mathrm{d}x$ 有界.
2. 存在 $u(x),v(x)$ 使得 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调有界, $\int_0^{+\infty}v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

笔记 这个命题说明:A-D 判别法“几乎”是充要条件 (只有确定 f 的分解逆命题才成立), 并且“逆命题”当中, 依然是 Dirichlet 判别法强于 Abel 判别法. 级数版本见命题??.

证明 充分性由 A-D 判别法立得. 下证明必要性.

1. 由 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛及 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall B>A>M$, 有
$$\left|\int_A^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$
对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{n^3}$, 则存在 $M_n>0$, 对 $\forall B>M_n$, 有
$$\left|\int_{M_n}^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n^3}. \tag{15}$$
取 $\varepsilon=\frac{1}{(n+1)^3}$, 则存在 $M_{n+1}>M_n+1$, 对 $\forall B>M_{n+1}$, 有
$$\left|\int_{M_{n+1}}^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{(n+1)^3}.$$
由 $M_{n+1}>M_n+1$ 及(15)式可知
$$\left|\int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n^3}.$$
令 $u(x)\triangleq\begin{cases}\frac{1}{n}, & x\in[M_n,M_{n+1})\\ 1, & x\in[0,M_1)\end{cases}$, $v(x)\triangleq\frac{f(x)}{u(x)}$, 则 $u(x)$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$. 对 $\forall A>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $A\in[M_n,M_{n+1})$. 从而
$$\begin{aligned}\left|\int_0^A\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^{M_1}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\int_{M_1}^{M_2}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{M_{n-1}}^{M_n}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\int_{M_n}^{A}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_0^{M_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{M_1}^{M_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\cdots+\left|\int_{M_{n-1}}^{M_n}(n-1)f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{M_n}^{A}nf(x)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \left|\int_0^{M_1} f(x)\mathrm{d}x\right| + 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$$
$$< \left|\int_0^{M_1} f(x)\mathrm{d}x\right| + \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

这就完成了证明.

2. 由第 1 问可知, 存在 $u(x), v(x)$, 使得 $f(x) = u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调趋于 0, $\int_0^A v(x)\,\mathrm{d}x$ 有界. 令 $u_1(x) = \sqrt{u(x)}$, $v_1(x) = \sqrt{u(x)}v(x)$, 则 $f(x) = u_1(x)v_1(x)$. 由 $u(x)$ 单调趋于 0 可知, $u_1(x)$ 单调有界. 因为 $\sqrt{u(x)}$ 单调趋于 0, $\int_0^A v(x)\mathrm{d}x$ 有界, 所以由第 1 问可知
$$\int_0^\infty v_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sqrt{u(x)}v(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$
故 $u_1(x), v_1(x)$ 就是第 2 问中我们要找的分解.

□