0.1 Laplace 定理

例题 0.1 利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式:

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

解 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 Laplace 定理按第一、二列展开得

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$\begin{split} & + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\ & = 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0. \end{split}$$

上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

例题 0.2 求 2n 阶行列式的值 (空缺处都是零):

$$\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & b & a & \\ & \ddots & & \ddots \\ b & & & a \end{vmatrix}.$$

解 设原行列式为 D_{2n} , 其中 2n 为行列式的阶数. 不断用 Laplace 定理按第一行及最后一行展开, 可得

进而,由上述递推式可得

$$D_{2n} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \dots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2$$
$$= (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$