

## 0.1 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 · Borel 集 · Cantor 集

### 0.1.1 闭集

#### 定义 0.1 (闭集与闭包)

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ . 若  $E \supset E'$  (即  $E$  包含  $E$  的一切极限点), 则称  $E$  为 **闭集** (这里规定空集为闭集). 记  $\overline{E} = E \cup E'$ , 并称  $\overline{E}$  为  $E$  的 **闭包** ( $E$  为闭集就是  $E = \overline{E}$ ).

#### 定义 0.2 (稠密子集)

若  $A \subset B$  且  $\overline{A} = B$ , 则称  $A$  在  $B$  中 **稠密**, 或称  $A$  是  $B$  的 **稠密子集**.

#### 定理 0.1 (闭集的运算性质)

(i) 若  $F_1, F_2$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭集, 则其并集  $F_1 \cup F_2$  也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;

(ii) 若  $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个闭集族, 则其交集  $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  是闭集.

(iii) 设  $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n (\alpha \in I)$ , 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha}.$$

**注** 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则有  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = (0, 1]$ . 此例还说明

$$[0, 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0, 1].$$

**证明** (i) 从等式

$$\begin{aligned} \overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \end{aligned}$$

可知, 若  $F_1, F_2$  为闭集, 则  $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$ . 即  $F_1 \cup F_2$  是闭集.

(ii) 因为对一切  $\alpha \in I$ , 有  $F \subset F_\alpha$ , 所以对一切  $\alpha \in I$ , 有  $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$ , 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但  $F \subset \overline{F}$ , 故  $F = \overline{F}$ . 这说明  $F$  是闭集.

□

#### 定理 0.2 (Cantor 闭集套定理)

若  $\{F_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的非空有界闭集列, 且满足  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$ , 则  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$ .

**证明** 若在  $\{F_k\}$  中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数  $k_0$ , 当  $k \geq k_0$  时, 有  $F_k = F_{k_0}$ . 此时,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \emptyset$ . 现

在不妨假定对一切  $k, F_{k+1}$  是  $F_k$  的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \emptyset \quad (\text{一切 } k),$$

我们选取  $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \dots)$ , 则  $\{x_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在  $\{x_{k_i}\}$  以及  $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_{k_i} - x| = 0$ . 由于每个  $F_k$  都是闭集, 故知  $x \in F_k (k = 1, 2, \dots)$ , 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$


□

## 0.1.2 开集

### 定义 0.3 (开集)

设  $G \subset \mathbb{R}^n$ . 若  $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$  是闭集, 则称  $G$  为开集.

♣

 **笔记** 由此定义立即可知,  $\mathbb{R}^n$  本身与空集  $\emptyset$  是开集;  $\mathbb{R}^n$  中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

### 定理 0.3 (开集的运算性质)

- (i) 若  $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个开集族, 则其并集  $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$  是开集;
- (ii) 若  $G_k (k = 1, 2, \dots, m)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 则其交集  $G = \bigcap_{k=1}^m G_k$  是开集 (有限个开集的交集是开集);
- (iii) 若  $G$  是  $\mathbb{R}^n$  中的非空点集, 则  $G$  是开集的充分必要条件是, 对于  $G$  中任一点  $x$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset G$ .

♥

**证明** (i) 由定义知  $G_\alpha^c (\alpha \in I)$  是闭集, 且有  $G^c = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha^c$ . 根据闭集的性质可知  $G^c$  是闭集, 即  $G$  是开集.

(ii) 由定义知  $G_k^c (k = 1, 2, \dots, m)$  是闭集, 且有  $G^c = \bigcap_{k=1}^m G_k^c$ . 根据闭集的性质可知  $G^c$  是闭集, 即  $G$  是开集.

(iii) 若  $G$  是开集且  $x \in G$ , 则由于  $G^c$  是闭集以及  $x \notin G^c$ , 可知存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset G$ .

反之, 若对  $G$  中的任一点  $x$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset G$ , 则

$$B(x, \delta) \cap G^c = \emptyset,$$

从而  $x$  不是  $G^c$  的极限点, 即  $G^c$  的极限点含于  $G^c$ . 这说明  $G^c$  是闭集, 即  $G$  是开集.

□

### 定义 0.4 (内点与边界点)

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ . 对  $x \in E$ , 若存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset E$ , 则称  $x$  为  $E$  的**内点**.  $E$  的内点全体记为  $\overset{\circ}{E}$ , 称为  $E$  的**内核**. 若  $x \in \overline{E}$  但  $x \notin \overset{\circ}{E}$ , 则称  $x$  为  $E$  的**边界点**. 边界点全体记为  $\partial E$ .

♣

 **笔记** 显然, 内核一定为开集. **开集的运算性质 (iii)** 说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

### 命题 0.1 (振幅函数及其性质)

设函数  $f(x)$  在  $B(x_0, \delta_0)$  上有定义. 令

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B(x_0, \delta)\},$$

我们称  $\omega_f(x_0)$  为  $f$  在  $x_0$  处的**振幅**. 若  $G$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 且  $f(x)$  定义在  $G$  上, 则对任意的  $t \in \mathbb{R}$ , 点集

$$H = \{x \in G : \omega_f(x) < t\}$$

是开集, 进而  $\omega_f$  在  $G$  上可测.

♣

**证明** 不妨设  $H \neq \emptyset$ . 对于  $H$  中的任一点  $x_0$ , 因为  $\omega_f(x_0) < t$ , 所以存在  $\delta_0 > 0$ , 使得  $B(x_0, \delta_0) \subset G$ , 且有

$$\sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B(x_0, \delta_0)\} < t.$$

现在对于  $x \in B(x_0, \delta_0)$ , 可以选取  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$B(x, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0).$$

显然有

$$\sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B(x, \delta_1)\} < t,$$

从而可知  $\omega_f(x) < t$ , 即

$$B(x_0, \delta_0) \subset H.$$

这说明  $H$  中的点都是内点,  $H$  是开集. □

#### 定理 0.4 (开集构造定理)

- (i)  $\mathbb{R}$  中的非空开集是可数个互不相交的开区间 (这里也包括  $(-\infty, a), (b, +\infty)$  以及  $(-\infty, +\infty)$ ) 的并集;
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  中的非空开集  $G$  是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

**证明** (i) 设  $G$  是  $\mathbb{R}$  中的开集. 对于  $G$  中的任一点  $a$ , 由于  $a$  是  $G$  的内点, 故存在  $\delta > 0$ , 使得  $(a - \delta, a + \delta) \subset G$ . 现在令

$$a' = \inf\{x : (x, a) \subset G\}, \quad a'' = \sup\{x : (a, x) \subset G\}$$

(这里  $a'$  可以是  $-\infty$ ,  $a''$  可以是  $+\infty$ ), 显然  $a' < a < a''$  且  $(a', a'') \subset G$ . 这是因为对区间  $(a', a'')$  中的任一点  $z$ , 不妨设  $a' < z \leq a$ , 必存在  $x$ , 使得  $a' < x < z$  且  $(x, a) \subset G$ , 即  $z \in G$ . 我们称这样的开区间  $(a', a'')$  为  $G$  (关于点  $a$ ) 的构成区间  $I_a$ .

如果  $I_a = (a', a''), I_b = (b', b'')$  是  $G$  的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设  $a < b$ . 若

$$I_a \cap I_b \neq \emptyset,$$

则有  $b' < a''$ . 于是令  $\min\{a', b'\} = c, \max\{a'', b''\} = d$ , 则有  $(c, d) = (a', a'') \cup (b', b'')$ . 取  $x \in I_a \cap I_b$ , 则  $I_x = (c, d)$  是构成区间, 且

$$(c, d) = (a', a'') = (b', b'').$$

最后, 我们知道  $\mathbb{R}$  中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将  $\mathbb{R}^n$  用格点 (坐标皆为整数) 分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为  $\Gamma_0$ . 再将  $\Gamma_0$  中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为  $2^n$  个边长为  $\frac{1}{2}$  的半开闭方体, 记  $\Gamma_0$  中如此做成的子方体的全体为  $\Gamma_1$ . 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列  $\{\Gamma_k\}$ , 这里  $\Gamma_k$  中每个方体的边长是  $2^{-k}$ , 且此方体是  $\Gamma_{k+1}$  中相应的  $2^n$  个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把  $\Gamma_0$  中凡含于  $G$  内的方体取出来, 记其全体为  $H_0$ . 再把  $\Gamma_1$  中含于

$$G \setminus \bigcup_{J \in H_0} J$$

( $J$  表示半开闭二进方体) 内的方体取出来, 记其全体为  $H_1$ . 依此类推,  $H_k$  为  $\Gamma_k$  中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由  $H_k (k = 0, 1, 2, \dots)$  中的方体构成的集合为可列的. 因为  $G$  是开集, 所以对任意的  $x \in G$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset G$ . 而  $\Gamma_k$  中的方体的直径当  $k \rightarrow \infty$  时是趋于零的, 从而可知  $x$  最终必落入某个

$\Gamma_k$  中的方体. 这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$  中的开集还有一个重要事实, 即  $\mathbb{R}^n$  中存在由可列个开集构成的开集族  $\Gamma$ , 使得  $\mathbb{R}^n$  中任一开集均是  $\Gamma$  中某些开集的并集. 事实上,  $\Gamma$  可取为

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

首先,  $\Gamma$  是可列集. 其次, 对于  $\mathbb{R}^n$  中开集  $G$  的任一点  $x$ , 必存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset G$ . 现在取有理点  $x'$ , 使得  $d(x, x') < 1/k$ , 其中  $k > 2/\delta$ , 从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

显然, 一切如此做成的  $B(x', 1/k)$  的并集就是  $G$ . □

### 定义 0.5 (开覆盖)

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个开集族. 若对任意的  $x \in E$ , 存在  $G \in \Gamma$ , 使得  $x \in G$ , 则称  $\Gamma$  为  $E$  的一个**开覆盖**. 设  $\Gamma$  是  $E$  的一个开覆盖. 若  $\Gamma' \subset \Gamma$  仍是  $E$  的一个开覆盖, 则称  $\Gamma'$  为  $\Gamma$  (关于  $E$ ) 的一个**子覆盖**. ♣

### 引理 0.1

$\mathbb{R}^n$  中点集  $E$  的任一开覆盖  $\Gamma$  都含有一个可数子覆盖. ♡

### 定理 0.5 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$  中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

**注** 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在  $\mathbb{R}^1$  中对自然数集作开覆盖  $\{(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\}$  就不存在有限子覆盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在  $\mathbb{R}$  中对点集  $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  作开覆盖

$$\left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

就不存在有限子覆盖.

**证明** 设  $F$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界闭集,  $\Gamma$  是  $F$  的一个开覆盖. 由引理 0.1, 可以假定  $\Gamma$  由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_i, \dots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^k G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k = 1, 2, \dots).$$

显然,  $H_k$  是开集,  $L_k$  是闭集且有  $L_k \supset L_{k+1} (k = 1, 2, \dots)$ . 分两种情况:

(i) 存在  $k_0$ , 使得  $L_{k_0}$  是空集, 即  $H_{k_0}$  中不含  $F$  的点, 从而知  $F \subset H_{k_0}$ , 定理得证;

(ii) 一切  $L_k$  皆非空集, 则由 Cantor 闭集套定理可知, 存在点  $x_0 \in L_k (k = 1, 2, \dots)$ , 即  $x_0 \in F$  且  $x_0 \in H_k^c (k = 1, 2, \dots)$ . 这就是说  $F$  中存在点  $x_0$  不属于一切  $H_k$ , 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

### 定理 0.6

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ . 若  $E$  的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则  $E$  是有界闭集. ♡

**证明** 设  $y \in E^c$ , 则对于每一个  $x \in E$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \emptyset.$$

显然,  $\{B(x, \delta_x) : x \in E\}$  是  $E$  的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \dots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知  $E$  是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_m}\},$$

则  $B(y, \delta_0) \cap E = \emptyset$ , 即  $y \notin E'$ . 这说明  $E' \subset E$ , 即  $E$  是闭集. 有界性显然. □

### 定义 0.6 (紧集)

如果  $E$  的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称  $E$  为**紧集**.

 **笔记** Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 0.6 表明,  $\mathbb{R}^n$  中的紧集就是有界闭集.

### 定义 0.7 (实值函数的连续)

设  $f(x)$  是定义在  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的实值函数,  $x_0 \in E$ . 如果对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in E \cap B(x_0, \delta)$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处**连续**, 称  $x_0$  为  $f(x)$  的一个**连续点** (在  $x_0 \notin E'$  的情形, 即  $x_0$  是  $E$  的孤立点时,  $f(x)$  自然在  $x = x_0$  处连续). 若  $E$  中的任一点皆为  $f(x)$  的连续点, 则称  $f(x)$  在  $E$  上**连续**. 记  $E$  上的连续函数之全体为  $C(E)$ . ♣

### 命题 0.2 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设  $F$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界闭集,  $f \in C(F)$ , 则

(i)  $f(x)$  是  $F$  上的有界函数, 即  $f(F)$  是  $\mathbb{R}$  中的有界集.

(ii) 存在  $x_0 \in F, y_0 \in F$ , 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii)  $f(x)$  在  $F$  上是一致连续的, 即对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $x', x'' \in F$  且  $|x' - x''| < \delta$  时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的连续函数列  $\{f_k(x)\}$  一致收敛于  $f(x)$ , 则  $f(x)$  是  $E$  上的连续函数. ♣

## 0.1.3 Borel 集

### 定义 0.8 ( $F_\sigma, G_\delta$ 集)

若  $E \subset \mathbb{R}^n$  是可数个闭集的并集, 则称  $E$  为  $F_\sigma$  (型) 集;

若  $E \subset \mathbb{R}^n$  是可数个开集的交集, 则称  $E$  为  $G_\delta$  (型) 集. ♣

**注** 由定义可直接推知,  $F_\sigma$  集的补集是  $G_\delta$  集;  $G_\delta$  集的补集是  $F_\sigma$  集.

**例题 0.1** 记  $\mathbb{R}^n$  中全体有理点为  $\{r_k\}$ , 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$$

为  $F_\sigma$  集.

**例题 0.2 函数连续点的结构** 若  $f(x)$  是定义在开集  $G \subset \mathbb{R}^n$  上的实值函数, 则  $f(x)$  的连续点集是  $G_\delta$  集.

**证明** 令  $\omega_f(x)$  为  $f(x)$  在  $x$  点的振幅, 易知  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续的充分必要条件是  $\omega_f(x_0) = 0$ . 由此可知  $f(x)$  的

连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

因为  $\{x \in G : \omega_f(x) < 1/k\}$  是开集, 所以  $f(x)$  的连续点集是  $G_\delta$  集.

□

### 定义 0.9 ( $\sigma$ -代数)

设  $\Gamma$  是由集合  $X$  的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

- (i)  $\emptyset \in \Gamma$ ;
- (ii) 若  $A \in \Gamma$ , 则  $A^c \in \Gamma$ ;
- (iii) 若  $A_n \in \Gamma$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$ ,

这时称  $\Gamma$  是 ( $X$  上的) 一个  $\sigma$ -代数.

♣

### 命题 0.3 ( $\sigma$ -代数的基本性质)

若  $\Gamma$  是  $X$  上的一个  $\sigma$ -代数, 则

- (i) 若  $A_n \in \Gamma$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ), 则  $\bigcup_{n=1}^m A_n \in \Gamma$ ,  $\bigcap_{n=1}^m A_n \in \Gamma$ ;

- (ii) 若  $A_n \in \Gamma$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \in \Gamma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \Gamma;$$

- (iii) 若  $A, B \in \Gamma$ , 则  $A \setminus B \in \Gamma$ ;

- (iv)  $X \in \Gamma$ .

♣

**证明** 由  $\sigma$ -代数的定义立得.

□

### 定义 0.10 (生成 $\sigma$ -代数)

设  $\Sigma$  是集合  $X$  的一些子集所构成的集合族, 考虑包含  $\Sigma$  的  $\sigma$ -代数  $\Gamma$  (即若  $A \in \Sigma$ , 必有  $A \in \Gamma$ , 这样的  $\Gamma$  是存在的, 如  $\mathcal{P}(X)$ ). 记包含  $\Sigma$  的最小  $\sigma$ -代数  $\Gamma(\Sigma)$ . 也就是说, 对任一包含  $\Sigma$  的  $\sigma$ -代数  $\Gamma'$ , 若  $A \in \Gamma(\Sigma)$ , 则  $A \in \Gamma'$ , 称  $\Gamma(\Sigma)$  为由  $\Sigma$  生成的  $\sigma$ -代数.

♣

### 定义 0.11 (Borel 集)

由  $\mathbb{R}^n$  中一切开集构成的开集族所生成的  $\sigma$ -代数称为 **Borel  $\sigma$ -代数**, 记为  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  中的元称为 **Borel 集**.


♣

### 命题 0.4 (Borel 集的基本性质)

$\mathbb{R}^n$  中的闭集、开集、 $F_\sigma$  集与  $G_\delta$  集皆为 Borel 集;

任一 Borel 集的补集是 Borel 集; Borel 集列的并、交、上(下)限集皆为 Borel 集.

♣

 **笔记** 例如,  $F_{\sigma\delta}$  集 (可数个  $F_\sigma$  集的交集) 是 Borel 集.

**证明** 证明是显然的.

□

**例题 0.3** 设  $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则  $f(x)$  的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$$

是  $G_\delta$  型集, 其中  $E_k(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$ .

**证明** (i) 设  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  是  $f(x)$  的连续点. 由题设知, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $k_0$ , 使得  $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$ , 且存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3, \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3, \quad x \in U(x_0, \delta),$$

从而对  $x \in U(x_0, \delta)$ , 有

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad U(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明  $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\varepsilon)$ . 又由  $\varepsilon$  的任意性, 可推知

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设  $x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$ . 对  $\varepsilon > 0$ , 取  $m > 3/\varepsilon$ . 由于  $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$ , 故存在  $k_0$ , 使得  $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$ , 从而可得  $U(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$ , 即

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_0).$$

注意到  $f_{k_0}(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 又有  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_1).$$

记  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ , 则当  $x \in U(x_0, \delta)$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 这说明  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续. □

### 定义 0.12 (Baire 第一函数类)

称区间  $I$  上连续函数列的极限函数  $f(x)$  的全体为 **Baire 第一函数类**, 记为  $B_1(I)$ . ♣

### 定理 0.7

若  $f_n \in B_1(\mathbb{R})$ , 且  $f_n(x)$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则  $f \in B_1(\mathbb{R})$ . ♡

**证明** 事实上, 由题设知, 对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $n_k \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^{k+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

这里不妨认定  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ . 考查  $\sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$ , 因为我们有

$$\begin{aligned} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

所以  $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \in B_1(\mathbb{R})$ . 显然有  $g(x) = f(x) - f_{n_1}(x)$ , 即  $f(x) = g(x) + f_{n_1}(x)$ . 证毕. □

### 命题 0.5

$\mathbb{R}$  中存在非  $F_{\sigma\delta}$  集、非  $F_{\delta\delta\sigma}$  集等等. ♠

**定理 0.8 (Baire 定理)**

设  $E \subset \mathbb{R}^n$  是  $F_\sigma$  集, 即  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ ,  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 是闭集. 若每个  $F_k$  皆无内点, 则  $E$  也无内点.



**证明** 若  $E$  有内点, 设为  $x_0$ , 则存在  $\delta_0 > 0$ , 使  $\overline{B}(x_0, \delta_0) \subset E$ . 因为  $F_1$  是无内点的, 所以必存在  $x_1 \in B(x_0, \delta_0)$ , 且有  $x_1 \notin F_1$ . 又因为  $F_1$  是闭集, 所以可以取到  $\delta_1$  ( $0 < \delta_1 < 1$ ), 使得

$$\overline{B}(x_1, \delta_1) \cap F_1 = \emptyset,$$

同时有  $\overline{B}(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$ . 再从  $\overline{B}(x_1, \delta_1)$  出发以类似的推理使用于  $F_2$ , 则可得  $\overline{B}(x_2, \delta_2) \cap F_2 = \emptyset$ , 同时有  $\overline{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, \delta_1)$ , 这里可以要求  $0 < \delta_2 < 1/2$ . 继续这一过程, 可得点列  $\{x_k\}$  与正数列  $\{\delta_k\}$ , 使得对每个自然数  $k$ , 有

$$\overline{B}(x_k, \delta_k) \subset B(x_{k-1}, \delta_{k-1}), \quad \overline{B}(x_k, \delta_k) \cap F_k = \emptyset,$$

其中  $0 < \delta_k < 1/k$ . 由于当  $l > k$  时, 有  $x_l \in B(x_k, \delta_k)$ , 故

$$|x_l - x_k| < \delta_k < \frac{1}{k}.$$

这说明  $\{x_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的基本列 (Cauchy 列), 从而是收敛列, 即存在  $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0$ .

此外, 从不等式

$$|x - x_k| \leq |x - x_l| + |x_l - x_k| < |x - x_l| + \delta_k, \quad l > k$$

立即可知 (令  $l \rightarrow \infty$ )  $|x - x_k| \leq \delta_k$ . 这说明  $x \in \overline{B}(x_k, \delta_k)$ , 即对一切  $k$ ,  $x \notin F_k$ . 这与  $x \in E$  发生矛盾.

□

**例题 0.4** 有理数集  $\mathbb{Q}$  不是  $G_\delta$  集.

**证明** 事实上, 令  $\mathbb{Q} = \{r_k : k = 1, 2, \dots\}$ , 假定  $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ , 式中  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 是开集, 则有表示式

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\} \right),$$

这里的每个单点集  $\{r_k\}$  与  $G_i^c$  皆为闭集, 而且从  $\overline{G_i} = \mathbb{R}^1$  可知每个  $G_i^c$  是无内点的. 这说明  $\mathbb{R}$  是可列个无内点之闭集的并集. 从而由 Baire 定理可知  $\mathbb{R}$  也无内点, 这一矛盾说明  $\mathbb{Q}$  不是  $G_\delta$  集.

□

**定义 0.13**

设  $E \subset \mathbb{R}^n$ . 若  $\overline{E} = \mathbb{R}^n$ , 则称  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  中的**稠密集**; 若  $\overline{E} = \emptyset$ , 则称  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  中的**无处稠密集**; 可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**.



**例题 0.5** 设  $\{G_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的稠密开集列, 则  $G_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$  在  $\mathbb{R}^n$  中稠密.

**证明** 只需指出对  $\mathbb{R}^n$  中任一闭球  $\overline{B} = \overline{B}(x, \delta)$ , 均有  $G_0 \cap \overline{B} \neq \emptyset$  即可. 采用反证法: 假定存在闭球  $\overline{B}_0 = \overline{B}(x_0, \delta_0)$ , 使得  $G_0 \cap \overline{B}_0 = \emptyset$ , 则易知

$$\mathbb{R}^n = (G_0 \cap \overline{B}_0)^c = G_0^c \cup (\overline{B}_0)^c,$$

$$\overline{B}_0 = \mathbb{R}^n \cap \overline{B}_0 = G_0^c \cap \overline{B}_0 = \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right)^c \cap \overline{B}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k^c \cap \overline{B}_0).$$

注意到  $G_k^c$  是无内点的闭集, 故由 Baire 定理可知  $\overline{B}_0$  也无内点, 矛盾.

□

**例题 0.6** 设  $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), 则  $f(x)$  的不连续点集为第一纲集.



**证明** 注意到  $f(x)$  的连续点集的表示, 只需指出 (例题 0.3)

$$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c = \left(G\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \dot{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c$$

是第一纲集. 对  $\varepsilon > 0$ , 令

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leq \varepsilon\},$$

易知  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$ ,  $F_k(\varepsilon) \subset E_k(\varepsilon)$ , 从而有

$$\dot{F}_k(\varepsilon) \subset \dot{E}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \dot{F}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$\begin{aligned} [G(\varepsilon)]^c &= \mathbb{R}^n \setminus G(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \dot{F}_k(\varepsilon) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \dot{F}_k(\varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \setminus \dot{F}_k(\varepsilon)] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon). \end{aligned}$$

因为  $F_k(\varepsilon)$  是闭集, 所以  $\partial F_k(\varepsilon)$  是无处稠密集. 这说明  $(G(\varepsilon))^c$  是第一纲集.

□

**例题 0.7** 设  $f \in C([0, 1])$ , 且令

$$f'_1(x) = f(x), f'_2(x) = f_1(x), \dots, f'_n(x) = f_{n-1}(x), \dots.$$

若对每一个  $x \in [0, 1]$ , 都存在自然数  $k$ , 使得  $f_k(x) = 0$ , 则  $f(x) \equiv 0$ .

**证明** 只需指出  $f(x)$  在  $[0, 1]$  中的一个稠密集上为 0 即可. 对此, 我们在  $[0, 1]$  中任取一个闭子区间  $I$ , 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

显然, 每个  $F_k$  都是闭集, 且  $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ . 根据 **Baire 定理** 可知, 存在  $F_{k_0}$ , 它包含一个区间  $(\alpha, \beta)$ . 因为在  $(\alpha, \beta)$  上  $f_{k_0}(x) = 0$ , 所以  $f(x) = 0, x \in (\alpha, \beta)$ . 注意到  $(\alpha, \beta) \subset I$ , 即得所证.

□

## 0.1.4 Cantor(三分)集

### 定义 0.14

设  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , 将  $[0, 1]$  三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为  $F_1$ , 即

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2};$$

再将  $F_1$  中的区间  $[0, 1/3]$  及  $[2/3, 1]$  各三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad \text{及} \quad I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

记  $F_1$  中留存的部分为  $F_2$ , 即

$$\begin{aligned} F_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &= F_{2,1} \cup F_{2,2} \cup F_{2,3} \cup F_{2,4}. \end{aligned}$$

一般地说 (归纳定义), 设所得剩余部分为  $F_n$ , 则将  $F_n$  中每个 (互不相交) 区间三等分, 并移去中央三分开区

间, 记其留存部分为  $F_{n+1}$ , 如此等等. 从而我们得到集合列  $\{F_n\}$ , 其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

作点集  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ , 我们称  $C$  为 **Cantor(三分)集**.

#### 定理 0.9 (Cantor 集的基本性质)

- (1)  $C$  是非空有界闭集, 因此是紧集.
- (2)  $C = C'$ , 即  $C$  为完全集.
- (3)  $C$  无内点.
- (4) Cantor 集的基数是  $c$ .
- (5)  $[0, 1] \setminus C$  的长度的总和为 1.

#### 证明

- (1) 因为每个  $F_n$  都是非空有界闭集, 而且  $F_n \supset F_{n+1}$ , 所以根据 Cantor 闭集套定理, 可知  $C$  不是空集 (实际上,  $F_n$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ) 中每个闭区间的端点都是没有被移去的, 即都是  $C$  中的点). 显然,  $C$  是闭集.
- (2) 设  $x \in C$ , 则  $x \in F_n$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ), 即对每个  $n, x$  属于长度为  $1/3^n$  的  $2^n$  个闭区间中的一个. 于是, 对任一  $\delta > 0$ , 存在  $n$ , 满足  $1/3^n < \delta$ , 使得  $F_n$  中包含  $x$  的闭区间含于  $(x - \delta, x + \delta)$ . 此闭区间有两个端点, 它们是  $C$  中的点且总有一个不是  $x$ . 这就说明  $x$  是  $C$  的极限点, 故得  $C' \supset C$ . 由 (i) 知  $C = C'$ .
- (3) 设  $x \in C$ , 给定任一区间  $(x - \delta, x + \delta)$ , 取  $2/3^n < \delta$ . 因为  $x \in F_n$ , 所以  $F_n$  中必有某个长度为  $1/3^n$  的闭区间  $F_{n,k}$  含于  $(x - \delta, x + \delta)$ . 然而, 在构造  $C$  集的第  $n+1$  步时, 将移去  $F_{n,k}$  的中央三分开区间. 这说明  $(x - \delta, x + \delta)$  不含于  $C$ .
- (4) 事实上, 将  $[0, 1]$  中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点  $x$  与下述三进位小数集的元

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0, 2$$

一一对应. 从而知  $C$  为连续基数集 (与  $(0, 1]$  的二进位小数比较).

- (5) 由  $C$  的定义可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

□

#### 定义 0.15 (类 Cantor 集)

设  $\delta$  是  $(0, 1)$  内任意给定的数, 考虑在  $[0, 1]$  区间, 取  $p = (1 + 2\delta)/\delta$ , 采用类似于 Cantor 集的构造过程:

第一步, 移去长度为  $1/p$  的同心开区间;

第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 又移去长度为  $1/p^2$  的同心开区间;

第三步, 在留存的四个闭区间中再移去长度为  $1/p^3$  的同心开区间. 继续此过程, 可得一系列移去的开区间, 记其并集为  $G$  (开集), 我们称  $C_p = [0, 1] \setminus G$  为**类 Cantor 集** (当  $p = 3$  时,  $C_p$  就是 Cantor(三分)集). 类 Cantor 集也称为 **Harnack 集**.

♣

**注** 若要在  $\mathbb{R}^n$  的单位方体  $[0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$  中构造具有类似性质的集合, 则只需取  $C \times C \times \cdots \times C$  ( $C$  是  $[0, 1]$  中的类 Cantor 集) 即可.

#### 定理 0.10 (类 Cantor 集的基本性质)

- (1)  $G$  的总长度为  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$  是任意给定的数) 的稠密开集.
- (2)  $C_p$  是非空完全集, 且没有内点.

♥

## 证明

(1) 由  $G$  的定义可知  $G$  的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

(2)

□

## 定义 0.16 (Cantor 函数)

设  $C$  是  $[0, 1]$  中的 Cantor 集, 其中的点我们用三进位小数

$$x = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

来表示.

(i) 作定义在  $C$  上的函数  $\varphi(x)$ . 对于  $x \in C$ , 定义

$$\varphi(x) = \varphi\left(2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

(ii) 作定义在  $[0, 1]$  上的  $\Phi(x)$ . 对于  $x \in [0, 1]$ , 定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leq x\}.$$

我们称  $\Phi(x)$  为 **Cantor 函数**.



## 定理 0.11 (Cantor 函数的性质)

设  $\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leq x\}$  为 Cantor 函数, 则有下列性质:

- (1)  $\varphi(C) = [0, 1]$ , 即  $\varphi$  是满射. 并且  $\varphi(x)$  是  $C$  上的递增函数.
- (2)  $\Phi(x)$  是  $[0, 1]$  上的递增连续函数. 此外, 在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间  $I_{n,k}$  上,  $\Phi(x)$  都是常数.



## 证明

(1) 因为  $[0, 1]$  中的点可用二进位小数表示, 所以由  $\varphi$  的定义有  $\varphi(C) = [0, 1]$ .

下面证明  $\varphi(x)$  是  $C$  上的递增函数. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$  是取 0 或 1 的数, 而且它们所表示的  $C$  中的数有下述关系:

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} < 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记  $k = \min\{i : \alpha_i \neq \beta_i\}$ , 则我们有

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} = \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k} \frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} \\ &\leq \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k} \frac{2}{3^i} = \frac{\beta_k - \alpha_k + 1}{3^k}. \end{aligned}$$

由此可知  $(\alpha_k < \beta_k) \alpha_k = 0, \beta_k = 1$ , 从而得到

$$\begin{aligned} \varphi\left(2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} = \varphi\left(2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}\right). \end{aligned}$$

(2) 由 (2) 的结论及  $\Phi$  的定义即得  $\Phi$  的递增性. 因为  $\Phi([0, 1]) = [0, 1]$ , 所以由命题 5.8 可知  $\Phi(x)$  是  $[0, 1]$  上的连续函数.

□

**例题 0.8**  $E \subset \mathbb{R}$  是完全集当且仅当  $E = \left( \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n) \right)^c$ , 其中  $(a_i, b_i)$  与  $(a_j, b_j)$  ( $i \neq j$ ) 无公共端点.

**证明 必要性:** 若  $E$  是完全集, 则  $E$  是闭集. 从而  $E^c$  是开集, 它是  $E^c$  内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的, 否则  $E$  中就会有孤立点了, 这是不可能的.

**充分性:** 首先, 由题设知  $E$  是闭集. 其次, 对任意的  $x \in E$ , 如果  $x \notin E'$ , 那么存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \{x\}$ . 这说明  $x$  是某两个开区间的端点, 与假设矛盾.

□

**例题 0.9** 设  $E \subset \mathbb{R}^2$  是完全集, 则  $E$  是不可数集.

**证明** 用反证法. 假定  $E = \{x_n \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \dots\}$ .

(i) 选取  $y_1 \in E \setminus \{x_1\}$ , 则点  $x_1$  到  $y_1$  的距离大于 0. 存在以  $y_1$  为中心的闭正方形  $Q_1$ ,  $Q_1 \cap E$  是紧集.

(ii) 看  $E \setminus \{x_2\}$ . 因为  $y_1$  是  $E \setminus \{x_2\}$  的极限点, 所以  $\bar{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\}) \neq \emptyset$ . 又取  $y_2 \in \bar{Q}_1 \cap (E \setminus \{x_2\})$ , 并作以  $y_2$  为中心的闭正方形  $Q_2$ :  $Q_2 \subset Q_1$ ,  $x_1 \notin Q_2$ ,  $x_2 \notin Q_2$ . 可知  $(Q_1 \cap E) \supset (Q_2 \cap E)$  是紧集. 如此继续做下去, 可得有界闭集套列  $\{Q_n \cap E\}$ :  $(Q_{n-1} \cap E) \supset (Q_n \cap E)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 而且  $x_1, x_2, \dots, x_n$  不在其内. 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap E) = \emptyset,$$

导致矛盾.

□

#### 命题 0.6

任一非空完全集的基数均为  $c$ .

▲

**证明** 证明见那汤松著《实变函数论》的上册, 有高等教育出版社出版的中译本, 1955 年.

□

**例题 0.10** 设  $E = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n, a_n = 2 \text{ 或 } 7 \right\}$ , 我们有

(i)  $E$  是闭集;

(ii)  $\bar{E} = c$ ;

(iii)  $E$  在  $[0, 1]$  中不稠密.

**证明** (i) 若有  $\{x_m\} \subset E : x_m \rightarrow x (m \rightarrow \infty)$ , 则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/10^n \quad (b_n = 0, 1, 2, \dots, 9).$$

如果  $|x_m - x| < 10^{-p}$ , 那么在  $x \in E$  时,  $b_n = 2$  或  $7$  ( $n = 1, 2, \dots, p-1$ ). 这说明  $E$  是闭集.

(ii) 与 0 和 1 组成的数列类似,  $\bar{E} = c$ .

(iii) 注意到  $E \cap (0.28, 0.7) = \emptyset$ , 故  $E$  不是稠密集.

□