0.1 保积同构、正交变换和正交矩阵

0.1.1 保积同构和几何问题代数化

在欧氏空间（酉空间）V 中取定一组标准正交基, 容易验证将任一向量映射为它在这组基下的坐标向量的线性同构 $\varphi: V\to\mathbb{R}^n$（$\varphi: V\to\mathbb{C}^n$）实际上也是一个保积同构. 因此我们可以把抽象的欧氏空间（酉空间）V 上的问题转化为具体的取标准内积的列向量空间 $\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）上的问题来解决, 这就是内积空间版本的“几何问题代数化”技巧.

例题 0.1 设 V 是 n 维欧氏空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$. 证明: 若存在非零向量 $\alpha\in V$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha,\alpha_i)\beta_i=0$, 则必存在非零向量 $\beta\in V$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta,\beta_i)\alpha_i=0$.

证明 取 V 的一组标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 设 α,β 的坐标向量分别为 x,y;α_i 的坐标向量为 $x_i\ (1\le i\le n)$;β_i 的坐标向量为 $y_i\ (1\le i\le n)$;n 阶实矩阵 $A=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$B=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 则由抽象向量映射到坐标向量的保积同构 $\varphi: V\to\mathbb{R}^n$, 可把本题化为如下矩阵问题: 若存在非零列向量 x, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}(x'x_i)y_i=x'\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)=x'(AB')=0\Rightarrow BA'x=0 \tag{1}$$

则必存在非零列向量 y, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}(y'y_i)x_i=y'\sum_{i=1}^{n}(y_ix_i)=y'(B'A)=0\Rightarrow AB'y=0 \tag{2}$$

事实上, 由齐次线性方程组 (1) 有非零解可得 $\mathrm{r}(BA')<n$, 注意到 $AB'=(BA')'$, 故 $\mathrm{r}(AB')<n$, 于是齐次线性方程组 (2) 也有非零解, 结论得证. □

命题 0.1

设 V 是 n 维欧氏空间,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是一组向量,$G=G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 是其 Gram 矩阵, 求证:$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{r}(G)$.

证明 取 V 的一组标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 设 α_i 的坐标向量为 $x_i\ (1\le i\le m)$,$A=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为 $n\times m$ 实矩阵, 则由抽象向量映射到坐标向量的保积同构 $\varphi: V\to\mathbb{R}^n$ 可知 $G=A'A$, 于是只要证明 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A'A)$ 成立即可, 而这由命题**??**即得. □

0.1.2 保积同构的判定及其应用

例题 0.2 试构造下列内积空间之间的保积同构:

1. $M_n(\mathbb{R})$（取 Frobenius 内积）与 $\mathbb{R}^{n^2}$（取标准内积）;
2. $M_n(\mathbb{C})$（取 Frobenius 内积）与 $\mathbb{C}^{n^2}$（取标准内积）;
3. $V=\mathbb{R}[x]$（取 $[0,1]$ 区间的积分内积）与 $U=\mathbb{R}[x]$（取例题**??**(6) 中的内积）.

注 通过本例的 (3) 可以把命题**??**(2) 中的线性算子 φ 从 U 拉回到 V 上, 即有 V 上的线性算子 $\psi^{-1}\varphi\psi$, 它在 $[0,1]$ 区间的积分内积下不存在伴随算子.

解

1. 取 $M_n(\mathbb{R})$ 中基础矩阵 $\{E_{ij}\}$ 构成的标准正交基, 则将任一 $A=(a_{ij})$ 映射为在上述基下的坐标向量 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})'$ 的线性映射 $\psi: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n^2}$ 是线性同构. 对任意的 $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, 有

$$(\psi(A),\psi(B))=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=\mathrm{tr}\left(AB'\right)=(A,B).$$

故 $\psi: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n^2}$ 是保积同构.

2. 同理可证复矩阵的情形.

3. 设线性无关向量组 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 在 $[0,1]$ 区间的积分内积下的 Gram 矩阵为 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ $(1 \le i, j \le n+1)$. 由命题??可知,A 是正定阵, 取其 Cholesky 分解 $A = C'C$, 其中 $C = (c_{ij})$ 是主对角元全大于零的上三角矩阵. 我们先构造一个线性同构 $\psi: V \to U$, 对任意的 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 定义

$$\psi(f(x)) = a_0c_{11} + a_1(c_{12} + c_{22}x) + \cdots + a_n(c_{1,n+1} + c_{2,n+1}x + \cdots + c_{n+1,n+1}x^n),$$

即 $(\psi(1), \psi(x), \cdots, \psi(x^n)) = (1, x, \cdots, x^n)C$. 容易证明 A 的第 r 个顺序主子阵的 Cholesky 分解恰由 C 的第 r 个顺序主子阵决定（这仍然是一个上三角矩阵）. 若取线性无关向量组 $\{1, x, \cdots, x^m\}$, 则按照上述方法定义出来的 $\psi(1), \psi(x), \cdots, \psi(x^m)$ 与已定义的 $\psi(1), \psi(x), \cdots, \psi(x^n)$ 的前面部分总是相同的. 因此 ψ 的定义不依赖于 n 的选取, 并且容易验证 ψ 是 $V \to U$ 的线性映射. 再由 C 的非异性容易证明 $\psi: V \to U$ 是线性同构. 任取 $f(x), g(x) \in V$, 若设某些系数为零, 则可将它们都写成统一的形式:$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$,$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. 记 $\alpha = (a_0, a_1, \cdots, a_n)'$,$\beta = (b_0, b_1, \cdots, b_n)'$, 则由内积的定义可得

$$(\psi(f(x)), \psi(g(x))) = (C\alpha)'(C\beta) = \alpha'(C'C)\beta = \alpha'A\beta = (f(x), g(x)),$$

因此 $\psi: V \to U$ 是保积同构.

□

命题 0.2

设 V, U 都是 n 维欧氏空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 分别是 V 和 U 的一组基（不一定是标准正交基）, 线性映射 $\varphi: V \to U$ 满足 $\varphi(e_i) = f_i$ $(1 \le i \le n)$. 求证:φ 是保积同构的充要条件是这两组基的 Gram 矩阵相等, 即

$$G(e_1, e_2, \cdots, e_n) = G(f_1, f_2, \cdots, f_n).$$

证明 φ 把 V 的一组基映为 U 的一组基保证了 φ 是线性同构. 若 φ 保持内积, 则 $(e_i, e_j) = (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (f_i, f_j)$, 从而它们的 Gram 矩阵相同. 反之, 若它们的 Gram 矩阵相同, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 设它们在基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下的坐标向量分别为 x, y, 则由 φ 是线性同构可知 $\varphi(\alpha), \varphi(\beta)$ 在基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 下的坐标向量也分别为 x, y, 于是

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = x'G(f_1, f_2, \cdots, f_n)y = x'G(e_1, e_2, \cdots, e_n)y = (\alpha, \beta),$$

故 $\varphi: V \to U$ 是保积同构. □

命题 0.3

设 V 是 n 维欧氏空间,$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 是一组向量,$G = G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 是其 Gram 矩阵.

(1) 求证:$\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$ 是极大无关组的充要条件是 G 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行和列构成的主子式非零, 且对任意的 $i \ne i_1, i_2, \cdots, i_r$,$G$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r, i$ 行和列构成的主子式等于零.

(2) $R = \{(c_1, c_2, \cdots, c_m)' \in \mathbb{R}^m \mid c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = 0\}$ 称为向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 的线性关系集合, 容易验证它是 $\mathbb{R}^m$ 的线性子空间. 求证:R 是线性方程组 $Gx = 0$ 的解空间.

(3) 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 线性无关,$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ 是由 Gram - Schmidt 方法得到的标准正交向量组. 设上述两组向量之间的线性关系由可逆矩阵 P 定义, 即 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)P$, 求证:$P$ 由 G 唯一确定.

证明 (1) $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$ 是极大无关组当且仅当 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$ 线性无关, 且对任意的 $i \ne i_1, i_2, \cdots, i_r$,$\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_i\}$ 线性相关, 故由命题??(2) 即知结论成立.

(2) 由内积的正定性可知,$\beta = (c_1, c_2, \cdots, c_m)' \in R$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^m c_i\alpha_i = 0$ 当且仅当 $(\sum\limits_{i=1}^m c_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^m c_i\alpha_i) = 0$, 即 $\beta'G\beta = 0$, 再由命题?? 可知, 这也当且仅当 $G\beta = 0$, 即 $\beta = (c_1, c_2, \cdots, c_m)'$ 是线性方程组 $Gx = 0$ 的解.

(3) 由推论??可得

$$I_m = G(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m) = P'G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)P = P'GP$$

从而 $G=(P^{-1})'P^{-1}$ 为 Cholesky 分解. 由 Cholesky 分解的唯一性可知,P 由 G 唯一确定. □

例题 0.3 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是欧氏空间 V 中的向量, 其 Gram 矩阵为 $G=A'A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5&3\\1&1&-1&3\\1&7&11&9\\1&0&-3&1\end{pmatrix}$$

试求 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的一组极大无关组, 以及由这一极大无关组通过 Gram - Schmidt 方法得到的标准正交向量组.

解 解法一: 设 $A=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ 为列分块, 利用初等行变换容易验证 $\{u_1,u_2,u_4\}$ 是 A 的列向量的极大无关组, 再利用 Cauchy - Binet 公式可得 $G\begin{pmatrix}1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}>0$, 但 $|G|=|A|^2=0$, 故由命题 0.3(1)可知 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 是一组极大无关组, 其 Gram 矩阵为

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&1&7&0\\3&3&9&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&3\\1&1&3\\1&7&9\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12&16\\12&66&78\\16&78&100\end{pmatrix}$$

经计算可得 G 的 Cholesky 分解为

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\begin{pmatrix}4&12&16\\12&66&78\\16&78&100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\6&\sqrt{30}&0\\8&\sqrt{30}&\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&8\\0&\sqrt{30}&\sqrt{30}\\0&0&\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

故由命题 0.3(3) 的证明过程可知, 经 Gram - Schmidt 正交化方法从 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 得到的正交标准向量组 $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4\}$ 之间的线性关系为

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)P,\quad P=\begin{pmatrix}2&6&8\\0&\sqrt{30}&\sqrt{30}\\0&0&\sqrt{6}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

解法二: 设 $A=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ 为列分块, 容易验证 $\{u_1,u_2,u_4\}$ 是 A 的列向量的极大无关组. 设 $U=\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3,u_4)$, 则 U 是 $\mathbb{R}^4$(取标准内积)的三维子空间, 并且 $A'A$ 就是列向量组 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 的 Gram 矩阵. 由假设 $G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=G(u_1,u_2,u_3,u_4)$, 故由命题 0.4可知, 存在一个从 V 的三维子空间 W 到 U 上的保积同构 φ, 使得 $\varphi(\alpha_i)=u_i\ (1\leq i\leq 4)$. 由于保积同构保持极大无关组的下指标, 并且保持对应向量在 Gram - Schmidt 正交化和标准化过程中出现的所有系数（参考命题 0.3(3)）, 故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 就是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的极大无关组, 并且 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 与 Gram - Schmidt 正交化方法得到的标准正交向量组 $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4\}$ 之间的线性关系等价于求 $\{u_1,u_2,u_4\}$ 与 Gram - Schmidt 正交化方法得到的标准正交向量组 $\{w_1,w_2,w_4\}$ 之间的线性关系. 经计算可得

$$(w_1,w_2,w_4)=(u_1,u_2,u_4)P,\quad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

因此 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)P$. □

命题 0.4

设 V,U 都是 n 维欧氏空间,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 分别是 V 和 U 中的向量组. 证明: 存在保积同构 $\varphi:V\to U$, 使得

$$\varphi(\alpha_i)=\beta_i \quad (1\le i\le m)$$

成立的充要条件是这两组向量的 Gram 矩阵相等.

注 若设 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$ 是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 的极大无关组, 则由命题 0.3(1)可以直接得到 $\{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}\}$ 也是向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 的极大无关组.

证明 必要性类似于命题 0.2的必要性的证明, 下证充分性. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 有相同的 Gram 矩阵,$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,$U_1=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$. 设 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$ 是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 的极大无关组, 若设 $c_1\beta_{i_1}+c_2\beta_{i_2}+\cdots+c_r\beta_{i_r}=\mathbf{0}$, 则令

$$R_1=\{(c_1,c_2,\cdots,c_r)'\in\mathbb{R}^m \mid c_1\beta_{i_1}+c_2\beta_{i_2}+\cdots+c_r\beta_{i_r}=0\},$$
$$R_2=\{(c_1,c_2,\cdots,c_r)'\in\mathbb{R}^m \mid c_1\alpha_{i_1}+c_2\alpha_{i_2}+\cdots+c_r\alpha_{i_r}=0\},$$

由命题 0.3(2)可得 R_1 是 $G\left(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的解空间, R_2 是 $G\left(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的解空间, 又因为 $G\left(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\right)=G\left(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}\right)$, 所以 $R_1=R_2$. 故 $c_1\alpha_{i_1}+c_2\alpha_{i_2}+\cdots+c_r\alpha_{i_r}=\mathbf{0}$, 从而 $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$, 即 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关; 又对任意的 $i\neq i_1,i_2,\cdots,i_r$, 若设 $\alpha_i=a_1\alpha_{i_1}+a_2\alpha_{i_2}+\cdots+a_r\alpha_{i_r}$, 则由命题 0.3(2)同理可得 $\beta_i=a_1\beta_{i_1}+a_2\beta_{i_2}+\cdots+a_r\beta_{i_r}$, 于是 $\{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}\}$ 也是向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 的极大无关组, 从而 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$ 和 $\{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}\}$ 分别是 V_1,U_1 的一组基. 定义线性映射 $\varphi_1:V_1\to U_1$ 为 $\varphi_1(\alpha_{i_k})=\beta_{i_k}$ $(1\le k\le r)$, 则由命题 0.2的充分性可知,$\varphi_1:V_1\to U_1$ 是保积同构. 对任意的 $i\neq i_1,i_2,\cdots,i_r$,

$$\varphi_1(\alpha_i)=\varphi_1\left(\sum_{k=1}^{r}a_k\alpha_{i_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}a_k\varphi_1(\alpha_{i_k})=\sum_{k=1}^{r}a_k\beta_{i_k}=\beta_i$$

从而 $\varphi_1(\alpha_i)=\beta_i$ $(1\le i\le m)$. 注意到 $V=V_1\perp V_1^{\perp}$,$U=U_1\perp U_1^{\perp}$, 故可取 $V_1^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$,$U_1^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\delta_{r+1},\cdots,\delta_n$, 定义线性映射 $\varphi_2:V_1^{\perp}\to U_1^{\perp}$ 为 $\varphi_2(\gamma_j)=\delta_j$ $(r+1\le j\le n)$, 则 $\varphi_2:V_1^{\perp}\to U_1^{\perp}$ 也是保积同构. 下面定义线性映射 $\varphi:V\to U$, 对任一 $v=\alpha+\gamma\in V$, 其中 $\alpha\in V_1$,$\gamma\in V_1^{\perp}$, 定义 $\varphi(v)=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\gamma)$, 容易验证 $\varphi:V\to U$ 是线性同构. 我们还有

$$\begin{aligned}(\varphi(v),\varphi(v))&=(\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\gamma),\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\gamma))=(\varphi_1(\alpha),\varphi_1(\alpha))+(\varphi_2(\gamma),\varphi_2(\gamma))\\&=(\alpha,\alpha)+(\gamma,\gamma)=(\alpha+\gamma,\alpha+\gamma)=(v,v)\end{aligned}$$

故 $\varphi:V\to U$ 保持范数, 从而由定理**??**可知 φ 是满足题目条件的保积同构. □

0.1.3 正交变换与镜像变换

回顾正交变换相关性质.

命题 0.5

设 A,B 是 $m\times n$ 实矩阵, 求证:$A'A=B'B$ 的充要条件是存在 m 阶正交矩阵 Q, 使得 $A=QB$.

证明 充分性显然成立, 下证必要性. 取 $V=\mathbb{R}^m$ 上的标准内积, 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为列分块, 则由 $A'A=B'B$ 可得 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=G(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 再由命题 0.4可知, 存在 V 上的正交变换 φ, 使得 $\varphi(\beta_i)=\alpha_i$ $(1\le i\le n)$. 设 φ 在 V 的标准单位列向量构成的标准正交基下的表示矩阵为 Q, 则 Q 为正交矩阵且 $Q\beta_i=\alpha_i$ $(1\le i\le n)$, 因此

$$QB=(Q\beta_1,Q\beta_2,\cdots,Q\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=A.$$

□

定义 0.1 (镜像变换)

设 v 是 n 维欧氏空间 V 中长度为 1 的向量, 定义线性变换:

$$\varphi(x) = x - 2(v, x)v,$$

我们称线性变换 φ 为**镜像变换**.

♣

注 镜像变换的几何意义是: 它将某个向量（如命题 0.6的向量 v）变为其反向向量, 而和该向量正交的向量保持不动. 更加直观的描述是: 镜像变换就是关于某个 $n-1$ 维超平面（如命题 0.6的 $L(v)^{\perp}$）的镜像对称.

命题 0.6 (镜像变换的基本性质)

(1) 设 v 是 n 维欧氏空间 V 中长度为 1 的向量, 定义线性变换:

$$\varphi(x) = x - 2(v, x)v$$

证明:φ 是正交变换且 $\det\varphi = -1$;

(2) 设 ψ 是 n 维欧氏空间 V 中的正交变换,1 是 ψ 的特征值且几何重数等于 $n-1$, 证明: 必存在 V 中长度为 1 的向量 v, 使得

$$\psi(x) = x - 2(v, x)v$$

♠

证明 (1) 取 $e_1 = v$, 并将它扩张为 V 的一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 则 $\varphi(e_1) = -e_1, \varphi(e_i) = e_i\ (i > 1)$, 于是 φ 在这组标准正交基下的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{-1, 1, \cdots, 1\}$. 这是一个正交矩阵, 因此 φ 是正交变换且行列式值为 -1.

(2) 设 ψ 的属于特征值 1 的特征子空间为 V_1, 由假设 $\dim V_1 = n-1$, 取 V_1 的一组标准正交基 $e_2, \cdots, e_n$, 则 $\psi(e_i) = e_i\ (2 \le i \le n)$. 设 $V_1^{\perp} = L(e_1)$, 其中 e_1 是单位向量, 则 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的一组标准正交基. 注意到 V_1 是 ψ 的不变子空间, 故由命题**??**(1) 可知,$V_1^{\perp} = L(e_1)$ 是 $\psi^* = \psi^{-1}$ 的不变子空间, 从而也是 ψ 的不变子空间, 于是 e_1 是 ψ 的特征向量. 设 $\psi(e_1) = \lambda_1 e_1$, 其中特征值 λ_1 为实数. 由于 ψ 是正交变换, 故 λ_1 等于 1 或 -1. 若 $\lambda_1 = 1$, 则 $\psi(e_1) = e_1$, 从而 ψ 的属于特征值 1 的特征子空间将是 V, 这与假设矛盾. 因此 $\lambda_1 = -1$, 即有 $\psi(e_1) = -e_1$. 令 $v = e_1$, 作线性变换

$$\varphi(x) = x - 2(v, x)v$$

不难验证 $\psi(e_i) = \varphi(e_i)\ (1 \le i \le n)$ 成立, 故 $\psi = \varphi$. □

定义 0.2 (镜像矩阵)

设 n 阶矩阵 $M = I_n - 2\alpha\alpha'$, 其中 α 是 n 维实列向量且 $\alpha'\alpha = 1$, 这样的 M 称为**镜像矩阵**.

♣

注 由命题 0.6可知镜像变换都是正交变换, 故**镜像矩阵也都是正交矩阵**. 实际上, 不难发现 $M'M = I_n$.

命题 0.7

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 求证:φ 是镜像变换的充要条件是 φ 在 V 的某一组（任一组）标准正交基下的表示矩阵为镜像矩阵.

♠

证明 先证必要性. 设 φ 是镜像变换, 则由命题 0.6可知,φ 在 V 的某一组标准正交基下的表示矩阵为 $A = \mathrm{diag}\{-1, 1, \cdots, 1\} = I_n - 2\beta\beta'$, 其中 $\beta = (1, 0, \cdots, 0)'$. 设 φ 在 V 的任一组标准正交基下的表示矩阵为 M, 则 M 和 A 正交相似, 即存在正交矩阵 P, 使得 $M = PAP'$, 于是

$$M = P(I_n - 2\beta\beta')P' = I_n - 2(P\beta)(P\beta)'$$

令 $\alpha = P\beta$, 则 α 的长度为 1 且 $M = I_n - 2\alpha\alpha'$.

再证充分性. 设 φ 在 V 的某一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的表示矩阵为 $M = I_n - 2\alpha\alpha'$, 其中 $\alpha'\alpha = 1$. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 令 $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. 对 V 中任一向量 $x = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$, 记 $\beta =$

$(b_1, b_2, \cdots, b_n)'$, 则

$$M\beta = \beta - 2\alpha\alpha'\beta = \beta - 2(\alpha, \beta)\alpha$$

由线性变换和表示矩阵的一一对应可得

$$\varphi(x) = Mx = M\beta \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = x - 2(v, x)v.$$

注意到 v 的长度为 1, 故 φ 是镜像变换. □

命题 0.8

设 u, v 是欧氏空间中两个长度相等的不同向量, 求证: 必存在镜像变换 φ, 使得 $\varphi(u) = v$.

证明 令

$$e = \frac{u - v}{\|u - v\|}$$

定义 φ 如下:

$$\varphi(x) = x - 2(e, x)e$$

则 φ 是镜像变换, 注意 $(u, u) = (v, v)$, 我们有

$$\|u - v\|^2 = (u - v, u - v) = (u, u) + (v, v) - 2(u, v) = 2(u, u) - 2(u, v) = 2(u, u - v)$$

$$\varphi(u) = u - 2(e, u)e = u - 2\left(\frac{u - v}{\|u - v\|}, u\right)\frac{u - v}{\|u - v\|} = u - 2\frac{(u, u - v)}{\|u - v\|^2}(u - v) = v$$

□

命题 0.9

n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为不超过 n 个镜像变换之积.

证明 对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, 正交变换 φ 或是恒等变换, 或是 $\varphi(x) = -x$, 后者已是镜像变换, 而恒等变换可看成是零个镜像变换之积, 故结论成立. 假设结论对 $n - 1$ 成立, 现设 V 是 n 维欧氏空间,φ 是 V 上的正交变换. 若 φ 是恒等变换, 则可看成是零个镜像变换之积, 故结论成立. 下设 φ 不是恒等变换, 取 V 的一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 则存在某个 i, 使得 $\varphi(e_i) \neq e_i$. 不失一般性, 可设 $\varphi(e_1) \neq e_1$, 因为 $\|\varphi(e_1)\| = \|e_1\| = 1$, 故由命题 0.8可知, 存在镜像变换 ψ, 使得 $\psi\varphi(e_1) = e_1$. 注意到 $\psi\varphi$ 也是正交变换, 故 $(\psi\varphi)^*(e_1) = (\psi\varphi)^{-1}(e_1) = e_1$, 于是 $V_1 = L(e_1)^{\perp}$ 是 $\psi\varphi$ 的不变子空间. 由归纳假设,$\psi\varphi|_{V_1} = \psi_1\psi_2\cdots\psi_k$, 其中 $k \leq n - 1$, 且每个 ψ_i 都是 V_1 上的镜像变换. 我们可将 ψ_i 扩张到全空间 V 上, 满足 $\psi_i(e_1) = e_1$, 不难验证得到的线性变换都是 V 上的镜像变换（仍记为 ψ_i）. 注意到 $\psi^{-1} = \psi^* = \psi$, 故

$$\varphi = \psi^{-1}\psi_1\cdots\psi_k = \psi\psi_1\cdots\psi_k$$

可表示为不超过 n 个镜像变换之积, 结论得证. □

命题 0.10

设 Q 为 n 阶正交矩阵,1 不是 Q 的特征值. 设 $P = I_n - 2\alpha\alpha'$, 其中 α 是 n 维实列向量且 $\alpha'\alpha = 1$. 求证:1 是 PQ 的特征值.

证明 由于 1 不是 Q 的特征值, 故 $Q - I_n$ 为可逆矩阵, 令 $x = (Q - I_n)^{-1}\alpha$, 则非零实列向量 x 满足 $Qx - x = \alpha$. 取 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积, 由 Q 为正交矩阵可知 $\|Qx\| = \|x\|$, 并且 P 是关于 $n - 1$ 维超平面 $L(\alpha)^{\perp}$ 的镜像对称, 故由 $Qx - x = \alpha$ 以及命题 0.8可知 $P(Qx) = x$, 即 x 是 PQ 关于特征值 1 的特征向量, 结论得证. □

0.1.4 正交矩阵的性质

回顾正交矩阵的性质.

命题 0.11

设 Q 为 n 阶正交矩阵,1 不是 Q 的特征值. 设 P 为 n 阶正交矩阵,$|P| = -1$. 求证:1 是 PQ 的特征值.

注 这个命题 0.11是命题 0.10的推广.

证明 若 A 为正交矩阵, 则可设 A 的全体特征值为 $1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,\cos\theta_i \pm \mathrm{i}\sin\theta_i\ (1 \le i \le r)$, 其中 $\sin\theta_i \neq 0$. 若 1 不是 A 的特征值, 则特征值 -1 有 $n-2r$ 个, 从而 $|A| = (-1)^{n-2r} = (-1)^n$. 回到本题, 由条件可知 $|P| = -1$,$|Q| = (-1)^n$, 从而 $|PQ| = (-1)^{n+1} \neq (-1)^n$. 注意到 PQ 仍为正交阵, 从而 1 必为 PQ 的特征值. □

命题 0.12

设正交矩阵 $A = (a_{ij})$, 则 $a_{ij} = |A|^{-1}A_{ij} = \pm A_{ij}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

证明 由 A 是正交矩阵可知 $A' = A^{-1} = |A|^{-1}A^*$, 于是 $a_{ij} = |A|^{-1}A_{ij} = \pm A_{ij}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式. □

命题 0.13

设 A 是 n 阶正交矩阵, 求证:A 的任一 k 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的值等于 $|A|^{-1}$ 乘以其代数余子式的值.

注 这个命题 0.13是命题 0.12的推广.

证明 先对特殊情形 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ 进行证明. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $|A_{11}| = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$,$|A_{22}|$ 就是 $|A_{11}|$ 的代数余子式. 注意到 $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}$, 故由 $AA' = I_n$ 可得

$$\begin{pmatrix} A_{11}A'_{11} + A_{12}A'_{12} & A_{11}A'_{21} + A_{12}A'_{22} \\ A_{21}A'_{11} + A_{22}A'_{12} & A_{21}A'_{21} + A_{22}A'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

于是 $A_{11}A'_{11}+A_{12}A'_{12} = I_k$,$A_{21}A'_{21}+A_{22}A'_{22} = I_{n-k}$,$A_{21}A'_{11}+A_{22}A'_{12} = O$. 令 $C = \begin{pmatrix} A'_{11} & O \\ A'_{12} & I_{n-k} \end{pmatrix}$, 则 $|C| = |A'_{11}| = |A_{11}|$. 又

$$AC = \begin{pmatrix} A_{11}A'_{11} + A_{12}A'_{12} & A_{12} \\ A_{21}A'_{11} + A_{22}A'_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

故 $|AC| = |A||C| = |A_{22}|$, 即 $|A||A_{11}| = |A_{22}|$, 从而 $|A_{11}| = |A|^{-1}|A_{22}|$.

对一般情形, 将矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行经过 $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k) = i_1+i_2+\cdots+i_k-\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 次相邻对换移至第 $1,2,\cdots,k$ 行; 再将 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列经过 $(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k) = j_1+j_2+\cdots+j_k-\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 次相邻对换移至第 $1,2,\cdots,k$ 列; 得到的矩阵记为 B. 因为第一类初等矩阵 P_{ij} 也是正交矩阵, 故矩阵 B 仍是正交矩阵. 记 $p = i_1+i_2+\cdots+i_k$,$q = j_1+j_2+\cdots+j_k$, 则 $|B| = (-1)^{p+q}|A|$. 注意到

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q}\widehat{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

并由特殊情形可得 $B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix} = |B|^{-1}\widehat{B}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$, 因此

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix} = |A|^{-1}\widehat{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$$

□

命题 0.14

证明: 正交矩阵任一 k 阶子阵的特征值的模长都不超过 1.

注 这个命题 0.14是定理**??**(2) 的推广.

证明 设 A 为 n 阶正交矩阵, 先对特殊情形 $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$ 进行证明. 设 $A = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $A_{11} = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$. 由 $A'A = I_n$ 可得 $A_{11}'A_{11} + A_{21}'A_{21} = I_k$. 任取 A_{11} 的一个特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及对应的特征向量 $\alpha \in \mathbb{C}^k$, 则将上式左乘 $\overline{\alpha}'$, 右乘 α 可得

$$\overline{(A_{11}\alpha)}'(A_{11}\alpha) + \overline{(A_{21}\alpha)}'(A_{21}\alpha) = \overline{\alpha}'\alpha$$

即有 $|\lambda|^2\overline{\alpha}'\alpha + \overline{(A_{21}\alpha)}'(A_{21}\alpha) = \overline{\alpha}'\alpha$, 从而 $(1-|\lambda|^2)\overline{\alpha}'\alpha = \overline{(A_{21}\alpha)}'(A_{21}\alpha) \geq 0$. 由 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 可得 $\overline{\alpha}'\alpha > 0$, 于是 $1-|\lambda|^2 \geq 0$, 即有 $|\lambda| \leq 1$.

对一般情形, 经过行对换与列对换, 总可将正交矩阵 A 的 k 阶子阵换到左上角. 因为第一类初等矩阵 P_{ij} 也是正交矩阵, 故变换后的矩阵 B 仍是正交矩阵, 从而由特殊情形即得结论成立. □

命题 0.15

设 P 是 n 阶正交矩阵,$D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是实对角矩阵, 记 m 和 M 分别是诸 $|d_i|$ 中的最小者和最大者. 求证: 若 λ 是矩阵 PD 的特征值, 则 $m \leq |\lambda| \leq M$.

注 这个命题 0.15是定理**??**(2) 的推广.

证明 设特征值 λ 对应的特征向量为 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$, 即有 $PD\alpha = \lambda\alpha$, 上式共轭转置后可得 $\overline{\alpha}'DP' = \overline{\lambda}\overline{\alpha}'$. 将这两个等式相乘后可得 $\overline{\alpha}'DP'PD\alpha = \overline{\lambda}\lambda\overline{\alpha}'\alpha$, 即有 $\overline{\alpha}'D^2\alpha = |\lambda|^2\overline{\alpha}'\alpha$. 由假设可得

$$m^2\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n d_i^2|a_i|^2 = |\lambda|^2\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq M^2\sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

由此即得 $m \leq |\lambda| \leq M$. □

命题 0.16

证明

□