0.1 反常积分敛散性判别

> **定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)**
>
> 广义积分 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$ 使得任意 $x_1, x_2 > A$ 都有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

> **定理 0.2 (A-D 判别法)**
>
> 设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积,
>
> 1. Abel 判别法: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
>
> 2. Dirichlet 判别法: 若 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 则 $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 0.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中非负且递减, 证明: $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散性.

证明 (i) 若 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由条件可知

$$f(x)\sin^2 x \leqslant f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得 $\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$.

(ii) 若 $\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由 f 非负递减, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq a > 0$, 则存在 $M > 0$, 使得

$$f(x)\sin^2 x > \frac{a}{2}\sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \tag{1}$$

又因为

$$\int_0^\infty \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1 - \cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(b - \frac{\sin 2b}{2}\right),$$

而上式右边极限不存在, 所以 $\int_0^\infty \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散. 从而结合 (1) 式, 由比较判别法可知 $\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

注意到

$$\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

即 $\int_0^\infty f(x)(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x < \infty$. 考虑 $\int_0^\infty f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$\int_0^C \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2C}{2} < 1, \quad \forall C > 0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知 $\int_0^\infty f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x < \infty$. 因此

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x < \infty.$$

(iii) 当 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散时, 实际上, $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^\infty f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证. $\qquad\square$

例题 0.2 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负连续, 对任意正整数 k 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)dx \leq 1$, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \leq 1$.

注 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{k \to \infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x.$$

证明 由条件可得, 对 $\forall A > 0$, 我们有

$$1 \geqslant \int_{-A}^{A} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) \mathrm{d}x \geqslant e^{-\frac{1}{k}} \int_{-A}^{A} f(x) \mathrm{d}x. \Rightarrow \int_{-A}^{A} f(x) \mathrm{d}x \leqslant e^{-\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

令 $k \to \infty$, 则 $\int_{-A}^{A} f(x) \mathrm{d}x \leqslant 1, \forall A > 0.$ 于是再令 $A \to +\infty$, 可得 $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x \leqslant 1.$

实际上再由单调有界可知 $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛. $\qquad\qquad \square$

例题 0.3 对实数 a, 讨论 $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 先讨论 $\int_{0}^{1} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 的敛散性. 注意到

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{1} \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x \mid_{0}^{1} = \tan 1 < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

故 $\forall a \in \mathbb{R}$, 都有 $\int_{0}^{1} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 收敛. 再讨论 $\int_{1}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 $a \leqslant 2$ 时,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \geqslant \int_{1}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x} \mathrm{d}x \geqslant \int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \mathrm{d}(x^2 + 1) = +\infty.$$

(ii) 当 $a > 2$ 时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \frac{x + n\pi}{\cos^2 x + (x + n\pi)^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim n\pi \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} \mathrm{d}x, \quad n \to \infty. \quad (2)$$

注意到对 $\forall \lambda > 0$, 我们都有

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x + \lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \lambda \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(2)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim n\pi \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x + (n\pi)^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim n\pi \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a}{2} - 1}}, \quad n \to \infty.$$

于是

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \int_{\pi}^{\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a}{2} - 1}}, \quad n \to \infty.$$

从而当 $\dfrac{a}{2} - 1 \leqslant 1$ 时, 即 $2 < a \leqslant 4$, $\int_{1}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 发散; 当 $\dfrac{a}{2} - 1 > 1$ 时, 即 $a > 4$ 时, $\int_{1}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 当 $a > 4$ 时, $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 收敛; 当 $a \leqslant 4$ 时, $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x}{\cos^2 x + x^a \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 发散. $\quad \square$

例题 0.4 对正整数 n, 讨论 $\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

证明 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} (x + k\pi)^n e^{-(x + k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim (k\pi)^n \int_{0}^{\pi} e^{-(x + k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x, \quad k \to \infty. \quad (3)$$

又注意到

$$\int_{0}^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x \geqslant 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty,$$

$$\int_{0}^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \frac{4}{\pi^2} x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_{0}^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \sim \frac{\pi \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty.$$

故 $\displaystyle\int_0^\pi e^{-\lambda\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda \to +\infty$, 其中 C 为某一常数. 因此

$$\int_0^\pi e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k \to +\infty,$$

$$\int_0^\pi e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k \to +\infty.$$

又因为

$$\int_0^\pi e^{-[(k+1)\pi]^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi e^{-(k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

所以 $\displaystyle\int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C_1}{k^6}, k \to \infty$, 其中 C_1 为某一常数. 于是结合(3)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim (k\pi)^n \int_0^\pi e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim C_2 k^{n-6}, \quad k \to \infty.$$

其中 C_2 为某一常数. 因此

$$\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \sum_{k=1}^\infty C_2 k^{n-6}, \quad k \to \infty.$$

故当 $n < 5$ 时,$\displaystyle\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时,$\displaystyle\int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. 又因为

$$\int_0^\pi x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \pi^n,$$

所以 $\displaystyle\int_0^\pi x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都收敛. 从而由

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int_\pi^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

可知当 $n < 5$ 时,$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时,$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. $\square$

引理 0.1

(1) $\cos^{2n+1} x$ 可以写成 $\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(2n+1)x$ 的线性组合, 即 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(2n+1)x)$, 也即 $\displaystyle\cos^{2n+1} x = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k \cos kx$, 其中 $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \cdots, 2n+1$.

(2) $\displaystyle\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

证明 (1) 利用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$\cos^{2n+1} x = \cos^2 x \cdot \cos^{2n-1} x = \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2n-1} a_k \cos kx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} a_k \cos kx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} a_k \cos 2x \cos kx = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{a_k}{2} \cos kx + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{a_k}{4}[\cos(k+2)x + \cos(k-2)x]$$

$$= \frac{a_1}{4}(\cos 2x + \cos x) + \frac{a_2}{4}(\cos 4x + 1) + \sum_{k=3}^{2n-1} \frac{a_k}{4}[\cos(k+2)x + \cos(k-2)x] + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{a_k}{2} \cos kx$$

$$= \frac{a_1}{4}(\cos 2x + \cos x) + \frac{a_2}{2}\cos 2x + \sum_{k=3}^{2n-1} \frac{a_k}{4}[\cos(k+2)x + \cos(k-2)x] + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{a_k}{2} \cos kx$$

故 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1 + t^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k t^{2k}$$

令 $t = e^{\mathrm{i}x}$, 则

$$(1 + e^{2\mathrm{i}x})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}x}}{2e^{-\mathrm{i}x}}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{2n} = e^{-2\mathrm{i}nx}\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x} = \sum_{k=0}^{n-1}[\mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}(k-n)x} + \mathrm{C}_{2n}^{2n-k} e^{2\mathrm{i}((2n-k)-n)x}] + \mathrm{C}_{2n}^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k (e^{2\mathrm{i}(k-n)x} + e^{2\mathrm{i}(n-k)x}) + \mathrm{C}_{2n}^n$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x = 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k \left(\frac{e^{2\mathrm{i}(k-n)x} + e^{2\mathrm{i}(n-k)x}}{2}\right) + \mathrm{C}_{2n}^n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \mathrm{C}_{2n}^n$$

$$\Rightarrow \cos^{2n}x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$$

$\square$

例题 0.5 设 p, q 为正整数, 求反常积分 $I(p, q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件.

证明 因为当 $p = q$ 时, 积分显然收敛, 所以只需考虑 $p \neq q$ 的情形. 由 $I(q, p) = -I(p, q)$ 可知, 可以不妨设 $p > q$, 否则用 $I(q, p) = -I(p, q)$ 代替 $I(p, q)$ 即可

先讨论 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$-\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2, \quad \forall x \in [0, \delta].$$

于是

$$\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\delta \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^\delta \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2)^p - (1 - \frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2)^q}{x}\mathrm{d}x + \frac{2}{\delta}(1 - \delta)$$

$$\leqslant \int_0^\delta \frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2 + (p+q)\mathrm{C}_p^2 x^4}{x}\mathrm{d}x + \frac{2}{\delta}(1 - \delta)$$

$$= \frac{q - p + (p-q)\varepsilon}{4}\delta + \frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1 - \delta).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{q-p}{4}\delta + \frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta + \frac{2}{\delta}(1-\delta)$. 故对 $\forall p > q$ 且 $p, q \in \mathbb{N}$, 都有 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

再讨论 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 p, q 都是奇数时, 由引理 0.1 可知

$$\cos^p x = \sum_{k=1}^p p_k \cos kx, \quad \text{其中 } p_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \cdots, p.$$

$$\cos^q x = \sum_{k=1}^q q_k \cos kx, \quad \text{其中 } q_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \cdots, q.$$

从而此时

$$\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sum_{k=1}^p p_k \cos kx - \sum_{k=1}^q q_k \cos kx}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{q} (p_k - q_k) \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} \mathrm{d}x + \sum_{k=q+1}^{p} p_k \int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} \mathrm{d}x.$$

注意到对 $\forall k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\int_1^x \cos kt \mathrm{d}t = \frac{\sin kx - \sin k}{k} < 2, \quad \forall x > 1.$$

并且 $\frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^\infty \frac{\cos kx}{x} \mathrm{d}x (k \in \mathbb{N})$ 都收敛. 因此再结合(**??**)式可知, $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 当 p, q 中至少有一个是偶数时, 不妨设 p 是偶数 q 不是偶数, 则由 引理 0.1可知

$$\cos^p x = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \mathrm{C}_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right) x + \frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}.$$

$$\cos^q x = \sum_{k=1}^{q} q_k \cos kx \quad \text{其中} q_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \cdots, q.$$

于是

$$\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \mathrm{C}_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right) x - \sum_{k=1}^{q} q_k \cos kx + \frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \mathrm{C}_p^k \cos 2\left(\frac{p}{2} - k\right) x - \sum_{k=1}^{q} q_k \cos kx}{x} \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{C}_p^{\frac{p}{2}}}{2^p} \int_1^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

由于 $\int_1^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 发散, 故此时 $\int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x$ 也发散.

综上, 由

$$\int_0^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x.$$

可知当 $p = q$ 或 p, q 均为奇数时, $\int_0^\infty \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} \mathrm{d}x$ 收敛, 其余情形均发散. $\qquad \square$

例题 0.6 对实数 $p \neq 0$, 讨论 $I = \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 对 I 进行积分换元可得

$$I = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt[p]{1-x^2}} \mathrm{d}x \xrightarrow{u = \frac{1}{1-x}} \int_1^\infty \frac{\cos u}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{u^2} \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^\infty \frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} \mathrm{d}u = \int_1^\infty \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} \mathrm{d}u. \tag{4}$$

(i) 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f(u) = \left[\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}\right]^p = \left(2 - \frac{1}{u}\right) u^{2p-1}$, 则显然有 $\lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = +\infty$ 且 $f(u)$ 递增. 于是 $\frac{1}{\left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}} u^2} = \frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A \cos x \mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(4)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛.

(ii) 当 $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时, 若 $p = \frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} = 2$; 若 $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} = +\infty$. 因此对 $\forall p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 都存在 $K > 0$, 使得

$$\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} \geqslant 1, \forall u > K.$$

于是对 $\forall k \in \mathbb{N} \cap (K, +\infty)$, 都有

$$\left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} \mathrm{d}u \right| \geqslant \left| \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \cos u \mathrm{d}u \right| = 1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知, $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos u}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} \mathrm{d}u$ 发散.

(iii) 当 $p < 0$ 时, 显然有 $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} = 0$. 令 $g(u) = \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}$, 则

$$g'(u) = \frac{2}{p} u^{-\frac{1}{p}} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p} - 1} + \left(2 - \frac{1}{p}\right) \left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{1 - \frac{1}{p}} > 0, \forall u \in [1, +\infty).$$

因此 $g(u)$ 单调递增, 于是 $\dfrac{1}{\left(2 - \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} u^{2 - \frac{1}{p}}} = \dfrac{1}{g(u)}$ 单调递减趋于 0. 又显然有 $\displaystyle\int_1^A \cos x \mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(??)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛. $\square$

例题 0.7

证明

$\square$