0.1 群作用

定义 0.1 (置换群 (对称群))

令 S 是一个集合，则 S 上的**置换群**（或**对称群**），记作 $(\mathrm{Perm}(S), \circ)$，由所有 S 到自身的双射构成，而这里的运算是映射的复合运算。此即

$$\mathrm{Perm}(S) = \{f : S \to S \text{ 双射}\}.$$

证明 首先，映射的复合是满足结合律的。这是根据定义立刻可知的。

单位元是恒等映射，记作 id，对所有 $s \in S$，定义为

$$\mathrm{id}(x) = x.$$

故显然有，对所有 $f \in \mathrm{Perm}(S)$，$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$。

逆元是根据双射可知的。假如 f 是一个从 S 到自身的双射，则存在其逆映射 f^{-1}，使得 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$。

综上所述，$(\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是个群，称为 S 上的置换群（或对称群）。 □

例题 0.1 设 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$，记 $S_n = \mathrm{Perm}(S) = \{f : S \to S \text{ 双射}\}$。证明：$|S_n| = n!$。

证明 设 $f : S \to S$ 是双射，我们逐个定义 f 的像。首先，$f(1)$ 有 n 种不同的取法，取定 $f(1)$ 以后，$f(2)$ 就只有 $n-1$ 种不同的取法，否则 $f(1) = f(2)$ 与双射矛盾。依此类推，可知 $f(i)$ 就只有 $n+1-i$ 种不同的取法，$i = 1, 2, \cdots, n$。故 f 就有 $n!$ 种不同的取法，即 $|S_n| = n!$。 □

命题 0.1

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，我们定义

$$\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(G), \circ), x \mapsto \phi_x.$$

其中 $\phi_x : G \to G, y \mapsto xy$. 则 ϕ 是个群同态。

证明 证明是很简单的。令 $x, y \in G$，对于 $z \in G$，我们有

$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = x(yz) = (xy)z = \phi_{xy}(z)$$

由于这对于所有 $z \in G$ 都成立，故

$$\phi_x \circ \phi_y = \phi_{xy}$$

即

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

这就证明了 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$ 是个群同态。 □

定义 0.2 (群作用)

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，S 是一个非空集合，而 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(S)$。若 ϕ 是一个群同态，则我们说 ϕ 是 G 在（集合）S 上的**群作用**。

命题 0.2 (群作用的等价条件)

设 G 是一个群,S 是一个非空集合.

(1) 若 ϕ 是 G 在 S 的群作用, 记 $\mathrm{Perm}\,(S) = \{\phi_x : x \in G\}$, 则一定满足

$$\forall s \in S, e \cdot s = s, \text{即} \forall s \in S, \phi_e\,(s) = s.$$

$$\forall x, y \in G, \forall s \in S, x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s, \text{即} \forall x, y \in G, \forall s \in S, \phi_x\left(\phi_y\,(s)\right) = (\phi_x \circ \phi_y)\,(s) = \phi_{xy}\,(s)\,.$$

(2) 若 $\phi : G \times S \to S$ 是满足

$$\forall s \in S, e \cdot s = s, \text{即} \forall s \in S, \phi(e, s) = s.$$

$$\forall x, y \in G, \forall s \in S, x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s, \text{即} \forall x, y \in G, \forall s \in S, \phi(x, \phi(y, s)) = \phi(xy, s).$$

的映射, 则一定存在一个 G 在 S 上的群作用 $\widetilde{\phi}$.

注 在不引起歧义的情况下,我们用 $x \cdot s$，甚至 xs，来代表 $\phi_x(s)$，或 $\phi(x, s)$（其中 $x \in G$，$s \in S$）.

笔记 命题中的第一条性质，是说明 ϕ 是良定义的（ϕ_x 是双射），而第二条性质是说明 ϕ 是同态。二者缺一不可。这两条性质加起来，就是群作用的定义。

证明

(1) 若 ϕ 是一个群作用,则显然利用同态的性质我们有第二条。而根据同态把单位元映到单位元,我们有 $\phi_e = \mathrm{id}$，即对所有 $s \in S$，$es = s$。这就证明了 (1)。

(2) 对 $\forall x \in G$，令

$$\phi_x : S \to S, s \mapsto \phi(x, s) = xs,$$

$$\phi_{x^{-1}} : S \to S, s \mapsto \phi(x^{-1}, s) = x^{-1}s.$$

从而由假设可知，对 $\forall s \in S$，都有

$$\phi_x \circ \phi_{x^{-1}}(s) = xx^{-1}s = es = s,$$

$$\phi_{x^{-1}}(s) \circ \phi_x = x^{-1}xs = es = s.$$

因此 $\phi_{x^{-1}}$ 是 ϕ_x 的逆映射，故对 $\forall x \in G$，ϕ_x 都是双射。于是 $\{\phi_x : x \in G\} \subset \mathrm{Perm}(S)$。令

$$\widetilde{\phi} : G \to \mathrm{Perm}(S), x \mapsto \phi_x.$$

由假设可知，对 $\forall x, y \in G$，$\forall s \in S$，都有

$$x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s \Leftrightarrow (\phi_x \circ \phi_y)(s) = \phi_{xy}(s).$$

因此 $\phi_{xy} = \phi_x \phi_y$，$\forall x, y \in G$。故 $\widetilde{\phi}(xy) = \widetilde{\phi}(x)\widetilde{\phi}(y)$，$\forall x, y \in G$。即 $\widetilde{\phi}$ 是群同态。进而 $\widetilde{\phi}$ 就是 G 在 S 上的一个群作用。

□

定义 0.3 (左乘作用)

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，我们对 $x \in G$，定义 $\phi_x \in \mathrm{Perm}(G)$，对 $y \in G$，定义为

$$\phi_x(y) = xy.$$

则 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$，对 $x \in G$，定义为 $\phi(x) = \phi_x$，被称为 G 的**左乘作用**。

命题 0.3

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，则 G 的左乘作用是 G 在自身的一个群作用。

证明 首先，我们要说明 ϕ_x 是双射，而这是显然的，因为其逆是 $\phi_{x^{-1}}$。而这是因为，对于 $y \in G$,

$$(\phi_x \circ \phi_{x^{-1}})(y) = \phi_x(x^{-1}y) = x(x^{-1}y) = y$$

$$(\phi_{x^{-1}} \circ \phi_x)(y) = \phi_{x^{-1}}(xy) = x^{-1}(xy) = y$$

这样，$\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$ 就是良定义的。接下来，我们证明 ϕ 是个同态。令 $x, y \in G$，$z \in G$，则

$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = \phi_x(yz) = x(yz) = (xy)z = \phi_{xy}(z)$$

这对所有 $z \in G$ 都成立，故

$$\phi_{xy} = \phi_x \circ \phi_y$$

即
$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$
这就证明了左乘作用确实是一个群在自身的群作用。 □

定义 0.4 (共轭作用)

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，我们对 $x \in G$，定义 $\phi_x \in \mathrm{Perm}(G)$，对 $y \in G$，定义为
$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$
则 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$，对 $x \in G$，定义为 $\phi(x) = \phi_x$，被称为 G 的**共轭作用**。 ♣

命题 0.4

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，则 G 的共轭作用是 G 在自身的一个群作用。 ♠

证明 首先，我们要说明 ϕ_x 是双射，而这是显然的，因为其逆是 $\phi_{x^{-1}}$。而这是因为，对于 $y \in G$，
$$(\phi_x \circ \phi_{x^{-1}})(y) = \phi_x(x^{-1}yx) = x(x^{-1}yx)x^{-1} = y$$
$$(\phi_{x^{-1}} \circ \phi_x)(y) = \phi_{x^{-1}}(xyx^{-1}) = x^{-1}(xyx^{-1})x = y$$
这样，$\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$ 就是良定义的。接下来，我们证明 ϕ 是个同态。令 $x, y \in G$，$z \in G$，则
$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = \phi_x(yzy^{-1}) = x(yzy^{-1})x^{-1} = (xy)z(xy)^{-1} = \phi_{xy}(z)$$
这对所有 $z \in G$ 都成立，故
$$\phi_{xy} = \phi_x \circ \phi_y$$
即
$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$
这就证明了共轭作用确实是一个群在自身的群作用。 □

命题 0.5

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，$x \in G$，则 $\phi_x : G \to G$，对 $y \in G$，定义为
$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$
是一个群 G 的自同构（即到自身的同构）. ♠

证明 由命题 0.4 的证明可知 ϕ_x 一定是双射，因为它的逆是 $\phi_{x^{-1}}$。因此我们只须证明 ϕ_x 本身还是个同态（不是说 ϕ 是同态，而是说每个 ϕ_x 是同态）。因此我们令 $y, z \in G$，只须证明 $\phi_x(yz) = \phi_x(y)\phi_x(z)$。而这是因为
$$\phi_x(y)\phi_x(z) = (xyx^{-1})(xzx^{-1}) = x(yz)x^{-1} = \phi_x(yz).$$
恰好约掉。这就证明了共轭作用下的每一个 ϕ_x 都是群 G 的自同构。 □

定义 0.5 (内自同构与外自同构)

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，则一个 G 的（由 $x \in G$ 引出的）**内自同构**，指的是 $\phi_x : G \to G$，对 $y \in G$，定义为
$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$
而其他所有 G 上的自同构，则称为 G 上的**外自同构**。 ♣

定义 0.6 (轨道与稳定化子)

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用。若 $s \in S$。则我们定义 s 的**轨道**，记作 $\mathrm{Orb}(s)$，定义为
$$\mathrm{Orb}(s) = \{s' \in S : \exists x \in G, s' = xs\} = \{xs : x \in G\}.$$

我们定义 s 的**稳定化子**，记作 $\mathrm{Stab}(s)$，定义为

$$\mathrm{Stab}(s) = \{x \in G : xs = s\}.$$

命题 0.6

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用，而 $s, s' \in S$，则 $\mathrm{Orb}(s)$ 与 $\mathrm{Orb}(s')$ 要么相等，要么无交。因此，S 可以写成轨道的无交并,$S = \bigsqcup_{s\in S} \mathrm{Orb}\,(s) = \bigsqcup_{s\in S} \{xs : x \in G\}$.

证明 假设它们有交集，即假设 $s'' \in \mathrm{Orb}(s) \cap \mathrm{Orb}(s')$。进一步，我们找到 $x, x' \in G$，使得 $s'' = xs = x's'$。根据对称性，我们只须证明 $\mathrm{Orb}(s) \subset \mathrm{Orb}(s')$。

任取 $ys \in \mathrm{Orb}(s)(y \in G)$，则

$$ys = (yx^{-1})xs = (yx^{-1})x's' = (yx^{-1}x')s' \in \mathrm{Orb}(s')$$

根据对称性，我们就知道 $\mathrm{Orb}(s) = \mathrm{Orb}(s')$.

又因为对 $\forall s \in S$, 都有 $s = es$, 其中 e 是 $\mathrm{Perm}S$ 的单位元, 即恒等映射. 故 $s \in \mathrm{Orb}(s) \subset \{\mathrm{Orb}(s) : s \in S\}$. □

命题 0.7

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用，而 $s \in S$，则 s 的稳定化子是 G 的子群，即

$$\mathrm{Stab}(s) < G$$

证明 一，$es = s$。二，若 $x, y \in \mathrm{Stab}(s)$，则 $(xy)s = x(ys) = xs = s$。三，若 $xs = s$，则左乘 x^{-1}(两边同时作用 x^{-1})，得到 $x^{-1}s = s$。 □

引理 0.1

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用，$s \in S, x, y \in G$，则 $xs = ys$ 当且仅当 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$。

证明 对 $xs = ys$ 两边同时左乘 x^{-1}(两边同时作用 x^{-1})，就显然了。 □

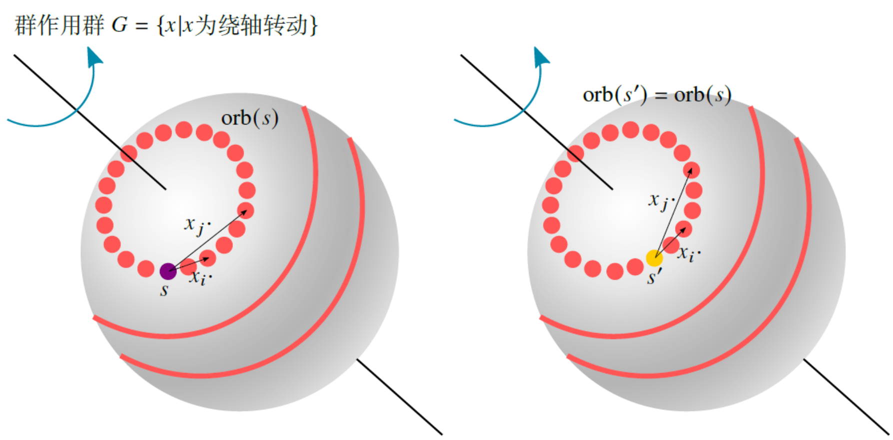

图 1: 群作用与轨道

定理 0.1 (轨道 - 稳定化子定理)

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 G 在 S 的群作用，$s \in S$，则存在 $G/\mathrm{Stab}(s)$ 到 $\mathrm{Orb}(s)$ 的双射。特别地，若 G 是有限群，则

$$|G| = |\mathrm{Stab}(s)| \cdot |\mathrm{Orb}(s)|.$$

证明 令 $f : G/\mathrm{Stab}(s) \to \mathrm{Orb}(s)$，定义为 $f(x\,\mathrm{Stab}(s)) = xs$。

首先证明 f 是良定义的。根据引理 0.1，若 $x\,\mathrm{Stab}(s) = y\,\mathrm{Stab}(s)$，则由引理??可知 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$，故 $xs = ys$。

根据 $\mathrm{Orb}(s)$ 的定义，f 显然是一个满射。

单射则是再次利用引理 0.1。若 $xs = ys$，则 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$，故 $x\,\mathrm{Stab}(s) = y\,\mathrm{Stab}(s)$。

假如 G 是有限群，则同时取集合大小，由定理??就得到了

$$|G| = |\mathrm{Stab}(s)| \cdot |\mathrm{Orb}(s)|$$

综上，我们就证明了轨道 - 稳定化子定理。 □

定义 0.7

二面体群 D_{2n}，它是由所有正 n 边形到自身的对称变换所构成的。

对称变换就是把自身映到自身，而且是保距的。

保距指的是，原先距离相同的点，变换后距离仍然相同。 ♣

笔记 如图 2中的例子.

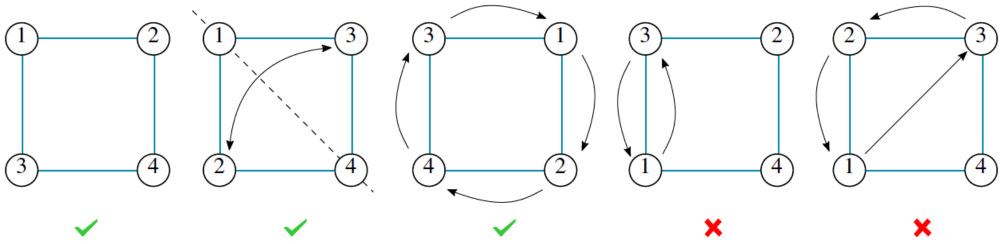

图 2: 置换群中的对称变换

例题 0.2 $|D_{2n}| = 2n$.

笔记 事实上，每一个对称变换由其 n 个顶点的像唯一确定，因为其余的点都可以通过顶点来找到位置。很明显,D_{2n} 中的元素都是个轴对称图形，有 n 个翻折变换；这还是个中心对称图形，有 n 个旋转变换. 由此可知, 二面体群 D_{2n} 就是恰好由 n 个翻折变换和 n 个旋转变换所组成的群.

证明 任取正多边形的一个顶点 s，考虑其轨道 $\mathrm{Orb}(s)$。最多只有 n 个顶点可以去，而 n 个旋转变换恰好带 s 去了这些顶点，因此 $|\mathrm{Orb}(s)| = n$。

接下来，考虑其稳定化子 $\mathrm{Stab}(s)$。如果 $x \in D_{2n}$ 把 s 映射到 s，但又有保证是一个等距变换，则 s 相邻的两个顶点一定要被映射到这两个顶点。其中一个是恒等变换，而另一个是沿 s 所在的对称轴的翻折变换。不难看出，这两个是唯二的 s 的稳定化子。因此 $|\mathrm{Stab}(s)| = 2$。

根据定理 0.1,$|D_{2n}| = |\mathrm{Orb}(s)| \cdot |\mathrm{Stab}(s)| = 2n$。这就证明了这个命题。 □