

## 0.1 开集、闭集和紧集

### 定义 0.1

设  $E$  是一平面点集,  $\mathbb{C}$  中的点对  $E$  而言可以分为三类:


- (i) 如果存在  $r > 0$ , 使得  $B(a, r) \subset E$ , 就称  $a$  为  $E$  的**内点**;
- (ii) 如果存在  $r > 0$ , 使得  $B(a, r) \subset E^c$ , 就称  $a$  为  $E$  的**外点**, 这里,  $E^c$  是由所有不属于  $E$  的点构成的集, 称为  $E$  的**余集或补集**;
- (iii) 如果对任意  $r > 0$ ,  $B(a, r)$  中既有  $E$  的点, 也有  $E^c$  的点, 就称  $a$  为  $E$  的**边界点**.

### 定义 0.2

$E$  的内点的全体称为  $E$  的**内部**, 记为  $E^\circ$ ;

$E$  的外点的全体称为  $E$  的**外部**, 它就是  $E$  的余集  $E^c$  的内部, 即  $(E^c)^\circ$ ;

$E$  的边界点的全体称为  $E$  的**边界**, 记为  $\partial E$ .

 **笔记** 由上面的定义可知, 集  $E$  把复平面分成三个互不相交的部分:  $\mathbb{C} = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$ , 即

$$(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ. \quad (1)$$

**例题 0.1 邻域的内部和边界**  $B(a, r)$  中的所有点都是它的内点, 即  $B(a, r) = (B(a, r))^\circ$ ,  $B(a, r)$  的边界  $\partial B = \{z : |z - a| = r\}$ , 即是圆周, 满足条件  $|z - a| > r$  的点  $z$  都是  $B(a, r)$  的外点.

### 定义 0.3

如果  $E$  的所有点都是它的内点, 即  $E = E^\circ$ , 就称  $E$  为**开集**.

如果  $E^c$  是开集, 就称  $E$  为**闭集**.

**例题 0.2**  $B(a, r)$  是开集, 闭圆盘  $\{z : |z - a| \leq r\}$  是闭集,  $B(a, r)$  和它的上半圆周的并集既不是开集也不是闭集.

### 定义 0.4

点  $a$  称为集  $E$  的**极限点或聚点**, 如果对任意  $r > 0$ ,  $B(a, r)$  中除  $a$  外总有  $E$  中的点.

集  $E$  的所有极限点构成的集称为  $E$  的**导集**, 记为  $E'$ .

$E$  中不属于  $E'$  的点称为  $E$  的**孤立点**.

$E$  和它的导集  $E'$  的并称为  $E$  的**闭包**, 记为  $\bar{E}$ , 即  $\bar{E} = E \cup E'$ .

### 命题 0.1

对于任意集  $E$ , 有

- (i)  $a \in \bar{E}$  的充要条件是对任意  $\varepsilon > 0$ , 有

$$B(a, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0. \quad (2)$$

这里,  $\emptyset$  表示空集;

- (ii)  $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ, \overline{E^c} = (E^\circ)^c$ .

**证明** (i) 若  $a \in \bar{E}$ , 则  $a \in E$  或  $a \in E'$ , 不论何者发生, 总有  $B(a, r) \cap E \neq \emptyset$ . 反之, 若等式(2)成立, 这说明  $a$  或是  $E$  的极限点, 或是  $E$  的孤立点, 因而  $a \in \bar{E}$ .

(ii) 由 (i) 知,  $a \in (\bar{E})^c$  当且仅当存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(a, \varepsilon) \cap E = \emptyset$ , 这说明  $a$  是  $E^c$  的内点, 即  $a \in (E^c)^\circ$ , 因而  $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$ . 再看第二个等式,  $a \in (E^\circ)^c$  意味着  $a$  不是  $E$  的内点, 即  $a$  是  $E$  的外点或边界点, 因而对任意  $\varepsilon > 0$ , 总有  $B(a, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$ , 由 (i) 知  $a \in \overline{E^c}$ . 因而  $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$ .  $\square$

## 命题 0.2

- (i)  $E^\circ$  是开集,  $\partial E$  和  $\bar{E}$  是闭集;  
 (ii)  $E$  是闭集的充要条件是  $E = \bar{E}$ ;  
 (iii)  $E$  是闭集的充要条件是  $E' \subset E$ .

**证明** (i) 任取  $a \in E^\circ$ , 则由定义知道, 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(a, \varepsilon) \subset E$ . 显然,  $B(a, \varepsilon)$  中的每一点都是  $E$  的内点, 因而  $B(a, \varepsilon) \subset E^\circ$ , 即  $a$  是  $E^\circ$  的内点. 由于  $a$  是任意取的, 所以  $E^\circ$  是开集. 由刚才所证,  $E^\circ$  和  $(E^c)^\circ$  都是开集, 两个开集的并当然也是开集, 由等式(1)知  $(\partial E)^c$  是开集, 因而  $\partial E$  是闭集. 由于  $(E^c)^\circ$  是开集, 由命题 0.1(ii) 知,  $(\bar{E})^c$  是开集, 所以  $\bar{E}$  是闭集.

(ii) 如果  $E = \bar{E}$ , 则由 (i) 知  $\bar{E}$  是闭集, 所以  $E$  是闭集. 反之, 如果  $E$  是闭集, 那么  $E^c$  是开集, 因而  $E^c = (E^c)^\circ$ . 另外, 由命题 0.1(ii) 得  $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$ , 因而  $E^c = (\bar{E})^c$ , 即  $E = \bar{E}$ .

(iii) 从 (ii) 立刻可得. □

## 定义 0.5

点集  $E$  的直径定义为  $E$  中任意两点间距离的上确界, 记为  $\text{diam}E$ , 即


$$\text{diam}E = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

## 定理 0.1 (Cantor 闭集套定理)

若非空闭集序列  $\{F_n\}$  满足

- (i)  $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ ;  
 (ii)  $\text{diam}F_n \rightarrow 0$  (当  $n \rightarrow \infty$  时),

那么  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  是一个独点集.

 **笔记** 这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

**证明** 在每一个  $F_n$  中任取一点  $z_n$ , 我们证明  $\{z_n\}$  是一个 Cauchy 点列. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}F_n = 0$ , 所以对任意  $\varepsilon > 0$ , 可取充分大的  $N$ , 使得  $\text{diam}F_N < \varepsilon$ . 今取  $m, n > N$ , 由条件 (i),  $z_m, z_n \in F_N$ , 所以  $|z_n - z_m| \leq \text{diam}F_N < \varepsilon$ . 因而  $\{z_n\}$  是一 Cauchy 序列, 设其收敛于  $z_0$ . 我们证明  $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ . 事实上, 任取  $F_k$ , 则当  $n > k$  时,  $z_n$  便全部落入  $F_k$  中, 因为  $F_k$  是闭的, 由命题 0.2(iii),  $\{z_n\}$  的极限  $z_0 \in F_k$ , 所以  $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ . 如果还有另一点  $z_1$  也属于  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ , 那么必有  $|z_0 - z_1| \leq \text{diam}F_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 因而  $z_1 = z_0$ . □

## 定义 0.6

设  $E$  是一个集,  $\mathcal{F} = \{G\}$  是一个开集族, 即  $\mathcal{F}$  中的每一个元素都是开集.

如果  $E$  中每一点至少属于  $\mathcal{F}$  中的一个开集, 就说  $\mathcal{F}$  是  $E$  的一个开覆盖.

**例题 0.3**  $E$  是任一点集,  $\varepsilon$  是一个给定的正数, 那么

$$\mathcal{F} = \{B(a, \varepsilon) : a \in E\}$$

便是  $E$  的一个开覆盖.

## 定义 0.7

我们说点集  $E$  具有有限覆盖性质, 是指从  $E$  的任一个开覆盖中必能选出有限个开集  $G_1, \dots, G_n$ , 使得这有限个开集的并就能覆盖  $E$ , 即

$$E \subset \bigcup_{j=1}^n G_j.$$

具有有限覆盖性质的集称为**紧集**.



**例题 0.4** 空集和有限集都是紧集,但单位圆盘  $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  却不是紧集,因为  $G_n = \left\{z : |z| < 1 - \frac{1}{n}\right\}, n = 2, 3, \dots$ , 这一串同心圆构成  $B(0, 1)$  的一个开覆盖,但从中找不出有限个集覆盖  $B(0, 1)$ .

### 定义 0.8

集  $E$  称为是**有界的**,如果存在  $R > 0$ ,使得  $E \subset B(0, R)$ .



### 定理 0.2 (Heine-Borel 定理)

在  $\mathbb{C}$  中, $E$  是紧集的充要条件为  $E$  是有界闭集;在  $\mathbb{C}_\infty$  中, $E$  是紧集的充要条件为  $E$  是闭集.



**证明** 我们先证明,如果  $E$  是  $\mathbb{C}_\infty$  中的闭集或  $\mathbb{C}$  中的有界闭集,那么  $E$  是紧集,即从  $E$  的任一开覆盖  $\mathcal{F}$  中,可以选出有限个开集覆盖  $E$ . 先设  $E$  是  $\mathbb{C}_\infty$  中的闭集,如果  $z = \infty \notin E$ ,则因  $E$  是闭集,有  $E = \bar{E}$ ,即  $\infty \notin \bar{E}$ ,由**命题 0.1(i)**,存在  $R > 0$ ,使得  $B(\infty, R) \cap E = \emptyset$ ,即  $E \subset \overline{B(0, R)}$ ,因而  $E$  是有界闭集. 如果  $z = \infty \in E$ ,由开覆盖的定义, $\infty$  属于  $\mathcal{F}$  中的某一个开集,而  $E$  在这个开集之外的部分是一有界闭集,只要再证明这个有界闭集的部分被有限个开集覆盖即可. 总之,不论何种情况发生,只要考虑  $E$  是有界闭集的情形就够了.

现设  $E$  是有界闭集,如果它不是紧集,那么从  $E$  的开覆盖  $\mathcal{F}$  中不能取出有限个开集来覆盖  $E$ . 因为  $E$  是有界的,它一定包含在一个充分大的闭正方形  $Q$  中:

$$Q = \{(x, y) : |x| \leq M, |y| \leq M\}.$$

把这个正方形分成相等的四个小正方形,则其中必有一个小正方形  $Q_1$ ,使得  $Q_1 \cap E$  是有界闭集且不具有有限覆盖性质. 再把  $Q_1$  分成四个相等的小正方形,其中必有一个小正方形  $Q_2$  具有上述同样的性质. 这个过程可以无限地进行下去,得到一列闭正方形  $\{Q_n\}$ . 如果记  $F_n = Q_n \cap E$ ,那么  $F_n$  满足下列条件:

- (i)  $F_n$  是有界闭集;
- (ii)  $F_n \supset F_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ ;
- (iii) 不能从  $\mathcal{F}$  中取出有限个开集来覆盖  $F_n$ ;
- (iv) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\text{diam} F_n \leq \frac{M}{2^n} \sqrt{2} \rightarrow 0$ .

由 (i),(ii),(iv) 知道  $\{F_n\}$  满足**Cantor 闭集套定理**的条件,因而存在复数  $z_0$ ,使得  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{z_0\}$ . 由于  $z_0 \in F_n \subset E$ ,故在  $\mathcal{F}$  中必有一个开集  $G_0$ ,使得  $z_0 \in G_0$ . 由于  $z_0$  是  $G_0$  的内点,故有  $z_0$  的邻域  $B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$ . 由于  $\text{diam} F_n \rightarrow 0$ ,故当  $n$  充分大时  $F_n \subset B(z_0, \varepsilon) \subset G_0$ ,这就是说  $G_0$  覆盖了  $F_n$ ,这与 (iii) 矛盾. 因而  $E$  是紧集.

现在证明必要性. 只要对扩充平面的情形来证明就够了,因为如果一个集对扩充平面是闭的,它又不包含无穷远点,那么它必然是有界的. 设  $E$  是一个紧集,我们要证明它是闭集,只要证明  $E^c$  是开集即可. 为此,任取  $a \in E^c$ ,只要证明  $a$  是  $E^c$  的内点就行了. 取这样的开集族  $\mathcal{F}$ : 凡是闭包不包含  $a$  点的开集都属于  $\mathcal{F}$ . 因为  $a \in E^c$ ,因此对  $E$  中每一点  $z$ ,都能找到它的邻域  $B(z, \varepsilon)$ ,使得  $a \notin \overline{B(z, \varepsilon)}$ ,所以  $B(z, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ . 这就是说, $\mathcal{F}$  是  $E$  的一个开覆盖. 由于  $E$  是紧集,故能从  $\mathcal{F}$  中取出有限个开集  $G_1, \dots, G_n$ ,使得  $E \subset \bigcup_{j=1}^n G_j$ . 但  $a \notin \overline{G_j}, j = 1, \dots, n$ ,所以  $a \in \bigcap_{j=1}^n (\overline{G_j})^c$ . 显然,  $\bigcap_{j=1}^n (\overline{G_j})^c$  是一个开集,于是由开集和内点的定义可知,存在  $r > 0$ ,使得  $B(a, r) \subset \bigcap_{j=1}^n (\overline{G_j})^c$ . 而且从**命题 0.1(ii)**得

$$B(a, r) \subset \bigcap_{j=1}^n (\overline{G_j})^c = \bigcap_{j=1}^n (G_j^c)^\circ \subset \bigcap_{j=1}^n G_j^c = \left( \bigcup_{j=1}^n G_j \right)^c \subset E^c,$$

这就证明了  $a$  是  $E^c$  的内点,即  $E^c$  是开集. □

**定义 0.9**

设  $E, F$  是任意两个集,  $E, F$  间的距离定义为

$$d(E, F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\}.$$

如果  $E = \{a\}$  是由一个点所构成的集, 那么  $a$  和  $F$  间的距离为

$$d(a, F) = \inf\{|a - z| : z \in F\}.$$

**命题 0.3**

- (1) 如果  $F$  是闭集,  $a \notin F$ , 那么  $d(a, F) > 0$ .
- (2) 如果  $E$  是有限点集, 且  $E \cap F = \emptyset$ , 当然也有  $d(E, F) > 0$ .

**证明**

- (1) 此时必有  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(a, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ , 因而  $d(a, F) \geq \varepsilon > 0$ .
- (2)

□

**定理 0.3**

设  $E$  是紧集,  $F$  是闭集, 且  $E \cap F = \emptyset$ , 则  $d(E, F) > 0$ .

♥

**注** 若  $E$  是无穷闭集,  $F$  也是闭集, 但  $E$  不是紧集, 且  $E \cap F = \emptyset$ , 这时  $d(E, F) > 0$  未必成立.

例如,  $E$  是整个实轴,  $F = \{z = x + ie^x : -\infty < x < \infty\}$ , 则  $E$  和  $F$  都是  $\mathbf{C}$  中的闭集, 而且  $E \cap F = \emptyset$ , 但  $d(E, F) = 0$ .

**笔记** 从这个定理可以看出, 紧集之所以重要, 在于它保留了大部分有限集的性质.

**证明** 任取  $a \in E$ , 则  $a \notin F$ , 所以  $d(a, F) > 0$ . 今以  $a$  为中心,  $\frac{1}{2}d(a, F)$  为半径作一圆盘, 当  $a$  跑遍集  $E$  时, 这些圆盘所组成的开集族就是  $E$  的一个开覆盖. 因为  $E$  是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集  $G_1, \dots, G_n$  来覆盖  $E$ , 其中,  $G_j = B\left(a_j, \frac{1}{2}d(a_j, F)\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . 记

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}d(a_1, F), \dots, \frac{1}{2}d(a_n, F)\right\}.$$

今任取  $z_1 \in E$ , 则必有某个  $G_j$ , 使得  $z_1 \in G_j$ , 因而

$$|z_1 - a_j| < \frac{1}{2}d(a_j, F).$$

任取  $z_2 \in F$ , 当然  $|z_2 - a_j| \geq d(a_j, F)$ , 于是

$$|z_1 - z_2| \geq |z_2 - a_j| - |z_1 - a_j| \geq d(a_j, F) - \frac{1}{2}d(a_j, F) = \frac{1}{2}d(a_j, F) \geq \delta.$$

所以

$$d(E, F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\} \geq \delta > 0.$$

□

**定理 0.4 (Bolzano-Weierstrass 定理)**

任一无穷点集至少有一个极限点.

♥

**注** 这个定理也可以用证明 **Cantor 闭集套定理** 的方法给出另一个证明.

**证明** 设  $E$  是一个无穷点集, 如果  $E$  是无界集, 那么无穷远点便是它的极限点. 今设  $E$  是有界集, 如果它没有极限点, 那么它是一个闭集. 任取  $z \in E$ , 由于它不是  $E$  的极限点, 故必存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(z, \varepsilon)$  中除  $z$  外不再有  $E$  中的点.  $z$  取遍整个  $E$ , 由这种  $B(z, \varepsilon)$  构成的开集族便是  $E$  的一个开覆盖, 由 **Heine-Borel 定理**, 能从中选出有限个来覆盖  $E$ . 因为每个开集只包含  $E$  的一个点, 这说明  $E$  是一个有限集, 与  $E$  是无穷点集的假定矛盾, 因而  $E$  必有极限

点.

□