

0.1 Schur 定理

回顾 Schur 定理.

命题 0.1

设 A 是 n 阶实矩阵, 虚数 $a+bi$ 是 A 的一个特征值, $u+vi$ 是对应的特征向量, 其中 u, v 是实列向量. 求证: u, v 必线性无关. 若 A 是正规矩阵, 则 u, v 相互正交且长度相同 (取实列向量空间的标准内积).

证明 由假设

$$A(u+vi) = (a+bi)(u+vi) = (au-bv) + (av+bu)i. \quad (1)$$

假设 u, v 线性相关, 不妨设 $u \neq 0, v = ku$, 则 $(1+ki)Au = (1+ki)(a+bi)u$, 于是 $Au = (a+bi)u$, 由此可得 $Au = au, bu = 0$, 这与 $b \neq 0$ 且 $u \neq 0$ 相矛盾.

若 A 是正规矩阵, 在(1)式中比较实部和虚部得到

$$Au = au - bv, \quad Av = av + bu.$$

因为 A 正规, 故由命题??可知, $u+vi$ 也是 A' 的属于特征值 $a-bi$ 的特征向量, 即

$$A'(u+vi) = (a-bi)(u+vi) = (au+bv) + (av-bu)i.$$

比较实部和虚部得到

$$A'u = au + bv, \quad A'v = av - bu.$$

又 $(Au, u) = (u, A'u), (Au, v) = (u, A'v)$, 将 $Au, A'u$ 及 $A'v$ 代入得到

$$(au-bv, u) = (u, au+bv), \quad (au-bv, v) = (u, av-bu).$$

由此可得 $(u, v) = 0, (u, u) = (v, v)$.

□

命题 0.2

证明: n 阶实方阵 A 必正交相似于下列分块上三角矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_r \\ & & & c_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & c_k \end{pmatrix}$$

其中 $A_i (1 \leq i \leq r)$ 是二阶实矩阵且 A_i 的特征值具有 $a_i \pm b_i i (b_i \neq 0)$ 的形状, $c_j (1 \leq j \leq k)$ 是实数.

◆

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=0$ 时表示归纳过程已结束, 当 $n=1$ 时结论显然成立. 现设对阶小于 n 的矩阵结论成立, 下分两种情况对 n 阶矩阵 A 进行讨论.

首先, 假设 A 有实特征值 λ . 因为 A 和 A' 有相同的特征值, 故 λ 也是 A' 的特征值. 将 A 看成是 n 维实列向量空间 \mathbb{R}^n (取标准内积) 上的线性变换, 显然 A' 是 A 的伴随. 设 e_n 是 A' 的属于特征值 λ 的单位特征向量, 则 $L(e_n)^\perp$ 是 A 的不变子空间. 将 A 限制在 $L(e_n)^\perp$ 上, 由归纳假设, 存在 $L(e_n)^\perp$ 的标准正交基 e_1, \dots, e_{n-1} , 使得线性变换 A 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵. 于是在标准正交基 e_1, e_2, \dots, e_n 下, 线性变换 A 的表示矩阵就是要求的矩阵 C . 因为线性变换 A' 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 C' , 故由 $A'e_n = \lambda e_n$ 可知 $\lambda = c_k$.

其次, 假设 A 没有实特征值, 并设 $a+bi$ 是 A 的虚特征值. 因为 A 和 A' 有相同的特征值, 故 $a+bi$ 也是 A' 的特征值. 假设 A' 的属于特征值 $a+bi$ 的特征向量为 $\alpha + \beta i$, 其中 α, β 是实列向量, 则有

$$A'(\alpha + \beta i) = (a+bi)(\alpha + \beta i).$$

比较实部和虚部得到

$$A'\alpha = a\alpha - b\beta, \quad A'\beta = b\alpha + a\beta.$$

由例 9.86 可知, α, β 必线性无关. 设 $U = L(\alpha, \beta)$ 为 \mathbb{R}^n 的子空间, 则上式表明 U 是线性变换 A' 的不变子空间, 于是 U^\perp 是 A' 的伴随 A 的不变子空间. 注意到 $\dim U^\perp = n - 2$, 故由归纳假设, 存在 U^\perp 的标准正交基 e_1, \dots, e_{n-2} , 使得线性变换 A 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_{r-1} \end{pmatrix}.$$

在 U 中选取一组标准正交基 e_{n-1}, e_n , 则在标准正交基 e_1, e_2, \dots, e_n 下, 线性变换 A 的表示矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_{r-1} \\ & & & A_r \end{pmatrix}.$$

由于线性变换 A' 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 D' , 故 A_r 是 A' 在 U 的标准正交基 e_{n-1}, e_n 下的表示矩阵. 又 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 是 A' 在 U 的基 α, β 下的表示矩阵, 于是 A_r 相似于 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 从而它的特征值也为 $a \pm bi$.

□

命题 0.3

设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是实数, 求证: A 正交相似于上三角矩阵.

◆

证明 这是命题 0.2 的直接推论. 另外, 也可由命题 ?? 和矩阵 QR 分解的实版本进行证明.

□

命题 0.4

设 A, B 是实方阵且分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 是实正规矩阵, 求证: $C = O$ 且 A, B 也是正规矩阵.

◆

证明 由已知

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

从而 $AA' + CC' = A'A$. 由于 $\text{tr}(AA' + CC') = \text{tr}(A'A) = \text{tr}(AA')$, 故可得 $\text{tr}(CC') = 0$, 再由 C 是实矩阵可推出 $C = O$, 于是 $AA' = A'A, BB' = B'B$.

□

命题 0.5

设 A 是 n 阶实正规矩阵, 求证: 存在正交矩阵 P , 使得

$$P'AP = \text{diag}\{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\},$$

其中 $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ ($1 \leq i \leq r$) 是二阶实矩阵, c_j ($2r+1 \leq j \leq n$) 是实数.

◆

证明 由命题 0.2, A 正交相似于命题 0.2 中的分块上三角矩阵, 再反复用命题 0.4 的结论可知这是个分块对角矩阵. 又因为每一块都是正规矩阵, 故或是二阶正规矩阵 A_i , 或是实数 c_j (一阶矩阵). 对于二阶正规矩阵的情形, 由命题 0.1 的证明过程可知, 若设 A_i 的特征值为 $a_i + b_i i$, 对应的特征向量为 $u + vi$, 令 $P_i = (\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$, 则 P_i 为二阶正交

矩阵, 且 $P_i' A_i P_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$.

□