

## 0.1 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集及其性质

### 0.1.1 $n$ 维欧氏空间

我们用  $\mathbb{R}^n$  表示  $n$  维欧氏空间, 即

$$\mathbb{R}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

其中,  $\xi_i$  称为  $x$  的第  $i$  个坐标.

设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ , 按如下的加法、数乘

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$kx = (k\xi_1, k\xi_2, \dots, k\xi_n)$$

构成线性空间.

对于任意的  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 定义

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

表示点  $x$  到  $y$  的距离. 容易验证, 距离满足下列性质:

- (i) (非负性)  $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- (ii) (对称性)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii) (三角不等式) 对任意的  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , 都有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

通常记  $d(x, 0) = \|x\|$ , 表示  $x$  的范数, 若  $x \in \mathbb{R}^1$ , 则  $\|x\|$  即为  $x$  的绝对值.

#### 定义 0.1

设  $\{x_k\}$  为  $\mathbb{R}^n$  中的点列, 若存在  $x \in \mathbb{R}^n$  使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$$

则称  $\{x_k\}$  收敛于  $x$ , 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  或  $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ .

#### 命题 0.1

设  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ , 则  $\{x_k\}$  是收敛数列, 当且仅当

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} d(x_i, x_j) = 0$$

**证明** 设  $x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}), x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . 注意到

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i| \leq d(x_k, x) \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i^{(k)} - \xi_i|$$

易证  $x_k \rightarrow x$ , 当且仅当对每个坐标位置  $i$ , 都有  $\xi_i^{(k)} \rightarrow \xi_i (k \rightarrow \infty)$ . 再由柯西收敛准则即可得到证明.  $\square$

0.1.2  $\mathbb{R}^n$  中的开集及其性质

## 定义 0.2 (邻域、内点、内部和开集)


设  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ , 定义

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

为  $x_0$  的  $\varepsilon$ -邻域.

设  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in A$ , 若存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得  $U(x, \varepsilon_0) \subset A$ , 则称  $x$  为  $A$  的内点.  $A$  的全体内点, 记为  $A^\circ$ , 也称为  $A$  的内部.

若  $A$  中每个点都是  $A$  的内点, 则称  $A$  为开集.

 **笔记**  $(a, b)$ ,  $(-\infty, a)$ ,  $(a, +\infty)$  都是  $\mathbb{R}$  中的开集; 邻域  $U(x_0, r)$ , 又称以  $x_0$  为心、以  $r$  为半径的开球, 是  $\mathbb{R}^n$  中的开集;  $A^\circ$  也是开集.

## 命题 0.2 (开集的性质)

- (1)  $\emptyset$  和  $\mathbb{R}^n$  是开集;
- (2) 任意个开集的并集是开集;
- (3) 有限个开集的交集是开集.

**注** 无限个开集的交集不一定是开集. 例如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

**证明**

(1) 显然.

(2) 设  $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$  为一族开集. 任取  $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ , 则存在  $\alpha_0 \in \Gamma$  使得  $x \in G_{\alpha_0}$ . 由于  $G_{\alpha_0}$  是开集, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得

$$U(x, \varepsilon_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$$

故  $x$  是  $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$  的内点. 再由  $x$  的任意性知  $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$  是开集.

(3) 设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  为开集, 任取  $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$ , 则  $x \in G_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 由于  $G_i$  是开集, 故存在  $\varepsilon_i > 0$  使得

$$U(x, \varepsilon_i) \subset G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

令  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ , 则  $\varepsilon > 0$  且  $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$ , 故  $x$  是  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  的内点. 再由  $x$  的任意性知  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  是开集.

□

## 定理 0.1

设  $A$  为非空集合, 则  $A^\circ$  为开集.



**证明** 任取  $x \in A^\circ$ , 则存在  $r > 0$  使得  $U(x, r) \subset A$ . 对  $\forall y \in U(x, r)$ , 令  $\delta = r - d(x, y)$ , 则易知  $U(y, \delta) \subset A$ , 故  $y \in A^\circ$ . 从而  $U(x, r) \subset A^\circ$ , 因此,  $A^\circ$  是开集. □

0.1.3  $\mathbb{R}^n$  中的闭集及其性质

## 定义 0.3 (聚点、极限点和孤立点)

设  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ . 若对  $\forall \varepsilon > 0$ , 都有

$$U(x_0, \varepsilon) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$$

则称  $x_0$  为  $A$  的聚点或极限点.

不是聚点, 即存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \emptyset$$

则称  $x_0$  为  $A$  的孤立点.



注 (i)  $\mathbb{R}^n$  空间, 聚点 = 内点 + 边界点, 故聚点不一定属于  $A$ , 比如边界点. 例如,  $A = (0, 1)$ , 则  $[0, 1]$  都是  $A$  的聚点.  
(ii) 若  $x_0$  是  $A$  的聚点, 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $U(x, \varepsilon)$  中含有无穷多  $A$  中的点.

证明 假设存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

令

$$\delta = \min\{|x_0 - x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

则  $U(x_0, \delta)$  中不含  $A$  中异于  $x_0$  的点, 这与  $x_0$  是  $A$  的聚点矛盾. □

## 定义 0.4 (导集、完全集、闭包和闭集)

设  $A \subset \mathbb{R}^n$ , 则  $A$  的聚点的全体, 称为  $A$  的导集, 记为  $A'$ . 若  $A' = A$ , 则称  $A$  为完全集 (无孤立点).  $A - A'$  中的点, 即为所有孤立点.

$A \cup A'$  称为  $A$  的闭包, 记为  $\bar{A}$ . 开集的余集, 称为闭集.



笔记 例如,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $[a, +\infty)$  都是  $\mathbb{R}$  中的闭集; 以  $x_0$  为心, 以  $r$  为半径的闭球  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭集;  $A'$ ,  $\bar{A}$  也是闭集.

## 命题 0.3

- (1) 若  $A \subset B$ , 则  $A' \subset B'$ ;
- (2)  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .



证明 利用导集的定义容易验证. □

## 命题 0.4 (闭集的性质)

- (1)  $\emptyset$  和  $\mathbb{R}^n$  是闭集;
- (2) 任意个闭集的交集是闭集;
- (3) 有限个闭集的并集是闭集.



注 无限个闭集的并集不一定是闭集. 例如,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1] = (0, 1]$ .

证明 由命题 0.2, 闭集的定义以及定理 ??, 容易验证. □

## 命题 0.5

设  $A \subset \mathbb{R}^n$ , 则

- (1)  $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset (A - \{x\})$  使得  $x_n \rightarrow x$ ;
- (2)  $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A$  使得  $x_n \rightarrow x$ .



**证明** (1) “ $\Rightarrow$ ”. 若  $x \in A'$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0$ , 都有  $U(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . 特别地, 依次令  $\varepsilon_n = 1/n, n = 1, 2, \dots$ , 取  $x_n \in U(x, 1/n) \cap (A - \{x_0\})$ , 则  $x_n \rightarrow x$ .

“ $\Leftarrow$ ”. 设  $\{x_n\} \subset (A - \{x\})$  满足  $x_n \rightarrow x$ . 由于  $x_n \rightarrow x$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n \geq N$  时有  $d(x_n, x) < \varepsilon$ , 即  $x_n \in U(x, \varepsilon)$ .  $\forall n \geq N$ . 又  $x_n \neq x$ , 故  $U(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . 因此,  $x \in A'$ .

(2) “ $\Rightarrow$ ”.  $\bar{A} = A \cup A'$ . 若  $x \in A$ , 令  $x_n = x, n \in \mathbb{N}$ , 则  $x_n \rightarrow x$ . 若  $x \in A'$ , 由 (i) 知, 结论仍然成立.

“ $\Leftarrow$ ”. 设  $\{x_n\} \subset A$  满足  $x_n \rightarrow x$ . 若  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $x_{n_0} = x$ , 则  $x \in A \subset \bar{A}$ . 否则  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有  $x_n \neq x$ , 则由 (i) 知,  $x \in A' \subset \bar{A}$ .  $\square$

### 定理 0.2

$A$  为闭集  $\Leftrightarrow A' \subset A$ .



**证明** “ $\Rightarrow$ ”. 设  $A$  为闭集, 则  $A^c$  为开集. 任取  $x \in A'$ , 往证  $x \in A$ , 即  $x \notin A^c$ . 若  $x \in A^c$ , 由于  $A^c$  是开集, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得  $U(x, \varepsilon_0) \subset A^c$ . 故  $U(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ , 从而  $U(x, \varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ . 这与  $x \in A'$  矛盾.

“ $\Leftarrow$ ”. 设  $A' \subset A$ , 往证  $A$  是闭集, 即  $A^c$  是开集. 任取  $x \in A^c$ , 由于  $A' \subset A$ , 则  $x \notin A'$ . 故  $\exists \varepsilon_0 > 0$  使得  $U(x, \varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ , 从而

$$U(x, \varepsilon_0) \subset (A - \{x\})^c = (A \cap \{x\})^c = A^c \cup \{x\} = A^c$$

因此,  $A^c$  是开集.  $\square$

### 定理 0.3

$A$  为闭集  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ .



**注** 闭集  $A = \bar{A}$ , 再由命题 0.5(2) 知, 闭集中任一点都能找到闭集中的一个点列收敛到该点. 这也是闭集才具有的好的性质.

**证明** “ $\Rightarrow$ ”.  $A$  为闭集, 则  $A' \subset A$ . 故  $\bar{A} = A \cup A' \subset A \subset \bar{A}$ . 因此,  $A = \bar{A}$ .

“ $\Leftarrow$ ”. 若  $A = \bar{A}$ , 则  $A' \subset \bar{A} = A$ , 故  $A$  是闭集.  $\square$

### 定理 0.4

设  $A$  为一个非空集合, 则  $A'$  为闭集.



**证明** 只需证明  $(A')' \subset A'$ . 设  $x \in (A')'$ , 由命题 0.5(1), 存在  $\{x_n\} \subset A' - \{x\}$  使得  $x_n \rightarrow x$ . 往证  $x \in A'$ , 即存在  $\{y_n\} \subset A - \{x\}$  使得  $y_n \rightarrow x$ .

对于固定的  $n \in \mathbb{N}$ , 由于  $x_n \in A'$ , 则存在  $y_n \in A - \{x, x_n\}$  使得  $d(y_n, x_n) < 1/n$ . 于是

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

故  $y_n \rightarrow x$ .  $\square$

### 定义 0.5 (连续映射)

设  $X, Y$  为距离空间, 称映射  $f: X \rightarrow Y$  在点  $x_0 \in X$  处连续, 是指对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $d(x, x_0) < \delta$  时, 有  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

若  $f$  在任意点  $x \in X$  都连续, 则称  $f$  为  $X$  上的连续映射.  $\clubsuit$

**注**  $f$  在  $x_0$  点连续可等价地用集合语言描述如下:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得 } f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$$

### 定理 0.5 (连续映射的充要条件)

设  $f: X \rightarrow Y$  是映射, 则下列条件等价:

(1)  $f$  连续;

(2)  $Y$  的任一开集在  $f$  下的原象是  $X$  中的开集;

(3)  $Y$  的任一闭集在  $f$  下的原象是  $X$  中的闭集.



**注** 若上述定理的 (2) 换成 “ $X$  的任一开集在  $f$  下的象是  $Y$  中的开集”, 结论不一定成立. 因为连续映射在开集上的象未必是开集. 例如,  $f(x) = |x|$ , 则  $f$  在开区间  $(-1, 1/2)$  上连续, 但  $f$  的象是  $[0, 1)$ , 不是开集.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2). 设  $f$  连续,  $G \subset Y$  为开集. 不妨设  $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ , 任取  $x_0 \in f^{-1}(G)$ , 则  $f(x_0) \in G$ . 由于  $G$  是开集, 则  $\exists \varepsilon > 0$  使得  $U(f(x_0), \varepsilon) \subset G$ . 又  $f$  连续, 则对上述  $\varepsilon$ ,  $\exists \delta > 0$  使得

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon) \subset G$$

从而  $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$ . 这就证明了  $x_0$  是  $f^{-1}(G)$  的内点. 因此,  $f^{-1}(G)$  是开集.

(2)  $\Rightarrow$  (1). 设  $x_0 \in X$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 都有  $U(f(x_0), \varepsilon)$  是  $Y$  中的开集, 从而由 (2) 知  $f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$  是  $X$  中的开集. 又  $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ , 则存在  $\delta > 0$  使得

$$U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$

故  $f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$ , 从而  $f$  在点  $x_0$  连续, 再由  $x_0$  的任意性知  $f$  连续.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 设  $F \subset Y$  为闭集, 则  $F^c$  是开集, 故由 (2) 知  $f^{-1}(F^c)$  是  $X$  中的开集. 于是,  $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F^c))^c$  是  $X$  中的闭集.

(3)  $\Rightarrow$  (2) 类似.

□