## 0.1 可对角化的判断 (二)

**命题 0.1**

设 $\varphi$ 是 $n$ 维复线性空间 $V$ 上的线性变换, 求证: $\varphi$ 可对角化的充要条件是对 $\varphi$ 的任一特征值 $\lambda_0$, 下列条件之一成立:

(1) $V = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) + \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)$;

(2) $V = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)$;

(3) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = 0$;

(4) $\dim\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \dim\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2$;

(5) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2 = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^3 = \cdots$;

(6) $\mathrm{r}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \mathrm{r}((\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2)$;

(7) $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2 = \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^3 = \cdots$;

(8) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)$ 存在 $\varphi$-不变补空间, 即存在 $\varphi$-不变子空间 $U$, 使得 $V = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) \oplus U$;

(9) $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)$ 存在 $\varphi$-不变补空间, 即存在 $\varphi$-不变子空间 $W$, 使得 $V = \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) \oplus W$.

**笔记** 由例 4.36 可知条件 (1) (9) 是相互等价的, 因此本题的结论由例 7.40 (与条件 (3) 对应) 或例 7.41 (与条件 (6) 对应) 即得 (这里的题号对应白皮书上的题号). 事实上, 对充分性而言, 我们还可以从其他条件出发来证明 $\varphi$ 可对角化, 下面是 3 种证法.

**证明** 证法一:对任一特征值 $\lambda_0$, 由 $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2 = \cdots = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^n$, 取维数之后可得特征值 $\lambda_0$ 的几何重数等于代数重数, 从而 $\varphi$ 有完全的特征向量系, 于是 $\varphi$ 可对角化.

证法二: 对任一特征值 $\lambda_0$, 由 $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^2 = \cdots = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I}_V)^n$ 可知, 特征子空间等于根子空间, 再由根子空间的直和分解可知, 全空间等于特征子空间的直和, 从而 $\varphi$ 可对角化.

证法三: 设 $\varphi$ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^{m_1}(\varphi - \lambda_2 \boldsymbol{I}_V)^{m_2} \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I}_V)^{m_k}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0},$$

即有 $(\varphi - \lambda_2 \boldsymbol{I}_V)^{m_2} \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I}_V)^{m_k}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^{m_1} = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)$, 从而

$$(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)(\varphi - \lambda_2 \boldsymbol{I}_V)^{m_2} \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I}_V)^{m_k}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}.$$

不断这样做下去, 最终可得对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 总有

$$(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)(\varphi - \lambda_2 \boldsymbol{I}_V) \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0},$$

即 $\varphi$ 适合多项式 $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$, 从而 $\varphi$ 可对角化. □