

## 0.1 复数的定义及其运算

### 定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数  $(a, b)$ , 如果用  $\mathbb{R}$  记实数的全体,  $\mathbb{C}$  记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;  $(0, 0)$  是零元素,  $(-a, -b)$  是  $(a, b)$  的负元素;  $(1, 0)$  是乘法的单位元素; 每个非零元素  $(a, b)$  有逆元素  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ ; 此外,  $\mathbb{C}$  中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此  $\mathbb{C}$  在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为复数域. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么  $\tilde{\mathbb{R}}$  是  $\mathbb{C}$  的一个子域. 显然,  $(a, 0) \rightarrow a$  是  $\tilde{\mathbb{R}}$  与  $\mathbb{R}$  之间的一个同构对应, 因此实数域  $\mathbb{R}$  是  $\mathbb{C}$  的一个子域. 我们直接记  $(a, 0) = a$ . 在  $\mathbb{C}$  中,  $(0, 1)$  这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用  $i$  记  $(0, 1)$  这个元素, 于是有  $i^2 = -1$ . 由于  $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$ , 于是每一个复数  $(a, b)$  都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

从现在开始, 我们不再用实数对  $(a, b)$  来记复数, 而直接用  $z = a + bi$  记复数,  $a$  称为  $z$  的实部,  $b$  称为  $z$  的虚部, 分别记为  $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ . 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \left( \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

设  $z = a + bi$  是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - bi,$$

$|z|$  称为  $z$  的模或绝对值,  $\bar{z}$  称为  $z$  的共轭复数.

### 定义 0.2 (有序域)

域  $F$  称为有序域, 如果在  $F$  的元素间能确定一种关系 (记为  $a < b$ ), 其满足下列要求:

(i) 对  $F$  中任意两个元素  $a, b$ , 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果  $a < b, b < c$ , 那么  $a < c$ ;

(iii) 如果  $a < b$ , 那么对任意  $c$ , 有  $a + c < b + c$ ;

(iv) 如果  $a < b, c > 0$ , 那么  $ac < bc$ .

**笔记** 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

### 定理 0.1

复数域不是有序域.



**证明** 如果  $\mathbb{C}$  是有序域, 那么因为  $i \neq 0, i$  和  $0$  之间必有  $i > 0$  或  $i < 0$  的关系. 如果  $i > 0$ , 则由**有序域(iv)**得  $i \cdot i > i \cdot 0$ , 即  $-1 > 0$ , 再由**(iii)**, 两端都加  $1$ , 即得  $0 > 1$ . 另一方面, 从  $-1 > 0$  还可得  $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$ , 即  $1 > 0$ , 这和刚才得到的  $0 > 1$  矛盾. 如果  $i < 0$ , 两端都加  $-i$ , 得  $0 < -i$ , 再由**有序域(iv)**, 两端乘  $-i$ , 得  $-1 > 0$ . 重复上面的讨论, 即可得  $0 > 1$  和  $0 < 1$  的矛盾. 所以, 复数域不是有序域.



### 命题 0.1(复数运算性质)

设  $z$  和  $w$  是两个复数, 那么

$$(1) \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}.$$

$$(2) \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}.$$

$$(3) \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

$$(4) \quad |z| = |\bar{z}|, \quad |z| = |-z|, \quad |zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$(5) \quad (z+w)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

$$(6) \quad \text{若 } |z| = \lambda|w|, \lambda > 0, \text{ 则 } |z - \lambda^2 w| = \lambda|z - w|.$$



### 证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5) 由**命题 0.1(1)**和**命题 0.1(2)**可得  $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ .

(6) 利用**命题 0.1(5)**和**命题 0.1(4)**可得

$$\begin{aligned} |z - \lambda^2 w|^2 &= |z|^2 + \lambda^4 |w|^2 - 2\lambda^2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= \lambda^2 |w|^2 + \lambda^4 |w|^2 - 2\lambda^2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= \lambda^2 (\lambda^2 |w|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})) \\ &= \lambda^2 |\lambda w - w|^2 = \lambda^2 |z - w|^2. \end{aligned}$$



### 命题 0.2(基本不等式)

设  $z$  和  $w$  是两个复数, 那么

(1)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ , 等号成立当且仅当  $z \in \mathbb{R}$ .

$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ , 等号成立当且仅当  $z$  是纯虚数.

(2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ .

(3)  $|z+w| \leq |z| + |w|$ , 等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $z = tw$ .

一般的, 设  $z_1, \dots, z_n$  是任意  $n$  个复数, 则

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

等号成立当且仅当  $z_i, i = 1, 2, \dots, n$  共线且同向.

- (4)  $|z - w| \geq |z| - |w|$ , 等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $z - w = tw$ , 即  $z = (t + 1)w$ .

### 证明

(1) 从  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$  和  $|z|$  的定义马上知道不等式成立.

(2) 设  $z = a + bi$ , 则由均值不等式可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq a+b = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

(3) 利用命题 0.1(5) 和 命题 0.2(1), 即得

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

由此即知结论成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是  $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$ , 这等价于  $z\bar{w} \in \mathbb{R}$  且  $z\bar{w} \geq 0$ . 不妨设  $w \neq 0$  ( $w = 0$  时, 等号显然成立), 则当  $z\bar{w} \in (0, +\infty)$  时, 由于  $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$ , 故  $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \in (0, +\infty)$ . 令  $t = \left(\frac{z}{w}|w|^2\right) \frac{1}{|w|^2}$ , 则  $t \in \mathbb{R}$  且  $t \geq 0$ , 而且  $z = tw$ . 反之, 若存在  $t \in (0, +\infty)$ , 使得  $z = tw$ . 则  $\frac{z}{w} = t \in (0, +\infty)$ , 从而  $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \in (0, +\infty)$ .

一般的情形, 利用数学归纳法易证.

(4) 当  $|z| = |w|$  时, 结论显然成立.

当  $|z| > |w|$  时, 由 命题 0.2(3) 可得

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|,$$

移项可得  $|z - w| \geq |z| - |w| = ||z| - |w||$ . 由 命题 0.2(3) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $z - w = tw$ , 即  $z = (t + 1)w$ .

当  $|z| < |w|$  时, 由 命题 0.2(3) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|,$$

移项可得  $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z| = ||z| - |w||$ . 由 命题 0.2(3) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $w - z = tz$ , 即  $w = (t + 1)z$ .

□

### 命题 0.3

设  $z, a \in \mathbb{C}$ , 且  $|a| < 1$ , 则

$$(1) \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \begin{cases} 1, & |z|=1, \\ < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

$$(2) 1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

(3) 若还有  $|z| < 1$ , 则

$$\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}.$$

### 证明

(1) 当  $|z| = 1$  时, 由 命题 0.1(5) 可得

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1 \iff |z-a|^2 = |1-\bar{a}z|^2 \iff |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) = 1 + |\bar{a}z|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z}).$$

由  $|z| = 1$  和  $\operatorname{Re}(\bar{a}z) = \operatorname{Re}(a\bar{z})$  知上面最后一个式子成立, 故此时  $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1$ .

当  $|z| \neq 1$  时, 由命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} |z - a|^2 - |1 - \bar{a}z|^2 &= [|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)] - [1 + |\bar{a}z|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z})] \\ &= |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) \\ &= \begin{cases} < 0, & |z| < 1, \\ > 0, & |z| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \begin{cases} < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

故

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \begin{cases} < 1, & |z| < 1, \\ > 1, & |z| > 1. \end{cases}$$

(2) 由命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 &= \frac{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{[1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)] - [|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)]}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

(3) 由命题 0.1(4) 和命题 0.1(5) 可得

$$\begin{aligned} \frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} &\leqslant \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} \iff ||z| - |a|| \cdot |1 - \bar{a}z| \leqslant (1 - |a||z|)|z - a| \\ &\iff ||z| - |a||^2 \cdot |1 - \bar{a}z|^2 \leqslant (1 - |a||z|)^2 |z - a|^2 \\ &\iff (|z|^2 + |a|^2 - 2|a||z|)(1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)) \leqslant (1 + |a|^2|z|^2 - 2|a||z|)(|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)) \\ &\iff |a||z|(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) - \operatorname{Re}(\bar{a}z)(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) \leqslant 0 \\ &\iff (|a||z| - \operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) \leqslant 0 \iff |a||z| \geqslant \operatorname{Re}(\bar{a}z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leqslant \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} \iff |z - a|(1 + |a||z|) \leqslant |1 - \bar{a}z|(|z| + |a|) \\ &\iff |z - a|^2(1 + |a||z|)^2 \leqslant |1 - \bar{a}z|^2(|z| + |a|)^2 \\ &\iff (|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 + |a|^2|z|^2 + 2|a||z|) \leqslant (1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z))(|z|^2 + |a|^2 + 2|a||z|) \\ &\iff |a||z|(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) + \operatorname{Re}(\bar{a}z)(|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2) \leqslant 0 \\ &\iff (|a||z| + \operatorname{Re}(\bar{a}z))(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) \leqslant 0 \iff |a||z| \geqslant -\operatorname{Re}(\bar{a}z). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leqslant \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leqslant \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} \iff -\operatorname{Re}(\bar{a}z) \leqslant |a||z| \leqslant \operatorname{Re}(\bar{a}z) \iff |\operatorname{Re}(\bar{a}z)| \leqslant |a||z|. \quad \square$$

由命题 0.2(1) 知最后一个不等式成立, 故结论成立.

## 定理 0.2

设  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  是任意  $2n$  个复数, 证明复数形式的 Lagrange 恒等式:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i|^2.$$

并由此推出 **Cauchy 不等式**

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

等号成立当且仅当  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  与  $(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n})$  线性相关, 也当且仅当存在  $k \in \mathbb{C}$ , 使得  $z_i = k\overline{w_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 或  $\overline{w_i} = kz_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). ♡

**证明** 记

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix},$$

则

$$\left| A \overline{A}^T \right| = \left| \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} & w_1 \\ \overline{z_2} & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{z_n} & w_n \end{pmatrix} \right| = \left| \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n z_i w_i \sum_{i=1}^n \overline{z_i w_i} \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) \right|. \quad (1)$$

由**Cauchy-Binet 公式**可得(1)式左边等于

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left| \begin{pmatrix} z_i & z_j \\ \overline{w_i} & \overline{w_j} \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \overline{z_i} & w_i \\ \overline{z_j} & w_j \end{pmatrix} \right| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}) (\overline{z_i} w_j - \overline{z_j} w_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2.$$

而(1)式右边显然等于

$$\left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n z_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \overline{z_i w_i} \right) = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2.$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2 &= \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \\ \iff \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 &= \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2. \end{aligned}$$

由此立得

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

等号成立当且仅当

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2 = \left| A \overline{A}^T \right| \iff 1 \geq r(A \overline{A}^T) = r(A).$$

再记  $\alpha = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T, \beta = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n})^T$ , 则由上式可知  $A$  不可逆, 从而  $A$  的行向量  $\alpha^T, \beta^T$  线性相关, 即存在  $k \in \mathbb{C}$ , 使得

$$\alpha = k\beta \text{ 或 } \beta = k\alpha \iff z_i = k\overline{w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 或 } \overline{w_i} = kz_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

□

### 引理 0.1

设  $z_1, \dots, z_n$  是任意  $n$  个复数, 证明必有  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $S$ , 使得

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|.$$

♡

**证明** 记  $z_k = |z_k|e^{i\alpha_k}$ . 当  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  时, 设  $S(\theta)$  是所有使得  $\cos(\alpha_k - \theta) > 0$  的  $k$  组成的集, 则

$$\left| \sum_{S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k = \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta),$$

其中

$$\cos^+(\alpha_k - \theta) = \begin{cases} \cos(\alpha_k - \theta), & \cos(\alpha_k - \theta) > 0, \\ 0, & \cos(\alpha_k - \theta) \leq 0. \end{cases}.$$

选取  $\theta_0$ , 使得最后一个和式最大 (连续函数在闭区间必有最值), 并令  $S = S(\theta_0)$ . 这个最大值至少是  $[-\pi, \pi]$  上和的平均值, 由于对每个  $\alpha$ , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\alpha - \theta) d\theta = \frac{1}{\pi},$$

所以这个平均值就是  $\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|$ . 故

$$\left| \sum_S z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta_0)} z_k \right| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

□