0.1 估计和式的常用方法

0.1.1 和式放缩成积分

命题 0.1

设 f 在 $(0,1)$ 单调且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 f 递减, 则一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

0.1.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分

例题 0.1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}.$$

笔记 证明的想法要么是凑定积分定义. 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

注 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

解 解法一:注意到

$$\frac{i}{n}<\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}<\frac{i+1}{n}, i=1,2,\cdots,n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

解法二:注意到

$$0\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\left(n+\frac{i^2+1}{n}\right)\left(n+\frac{i^2}{n}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}\to 0, n\to\infty,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

□

例题 0.2 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}.$$

笔记 长得神似定积分定义且很容易观察到 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}$ 和 $\frac{i}{n^2}$ 没有区别，懒得去寻求放缩方法，直接采用强行替换的方法，即做差 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}$ 强估证明不影响极限.

证明 注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|=\left|\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}\right)\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^2\left(n^2+\frac{1}{i}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^4}=\frac{2n(4n^2-1)}{n^4},\end{aligned}$$

于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{n^4}=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n}\sin^4\frac{\pi i}{n}\\&=\int_0^2x\sin^4\pi x\mathrm{d}x\xlongequal[\text{令}x=2-y]{\text{区间再现}}\int_0^2(2-y)\sin^4\pi(2-y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^2(2-y)\sin^4\pi y\mathrm{d}y=\int_0^2\sin^4\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

□

0.1.3 和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)

当和式内部对 n 可求极限时，极限号与求和号可以换序.(当和式内部对 n 求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 等都不能换序) 本质上就是**控制收敛定理**的应用.

注 不能按照极限号与求和号可换序的想法书写过程，应该利用不等式放缩、夹逼准则和上下极限进行严谨地书写证明.

例题 0.3 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

笔记 求这种前 n 项和关于 n 的极限 (n 既和求和号上限有关，又和通项有关) 的思路是：先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数，所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$, 使得对 $\forall n>N_0$, 都有

$$\varepsilon>\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}-\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|=\left|\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}-\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|>\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对 $\forall N > N_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=0$.

因此对 $\forall N > N_0$, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}.$$

再令 $N\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2$.

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2(如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不发散).

注意: 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2. (上述论证实际上就是一种" 猜测" 这种极限的值的方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的 "度"). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前 N 项的极限, 原和式除前 N 项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前 N 项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

注: 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

注 上述思路本质上就是**控制收敛定理**的应用, 也可以使用 Toplitz 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去书写证明过程 (夹逼定理和 Toplitz 定理).

解 解法一 (夹逼定理):

一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, 于是 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$.

另一方面, 注意到对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k},\forall n>N$. 从而

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k},\forall N\in\mathbb{N}_+.$$

于是令 $N\to+\infty$, 得到 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2$.

综上所述, 我们有 $2\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant 2$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=2$.

解法二 (Toplitz 定理):

□

例题 0.4 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

注 注意倒序求和与顺序求和相等.(看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下倒序求和)

笔记 解法一的思路: 我们利用上一题的想法计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}$. 先假设级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$ 收敛, 则由 *Cauchy*

收敛准则可知, 存在 $N'>0$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k},\forall N>N'.$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

解 解法一: 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用 $\ln(1+x)\leqslant x,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}e^{1-k},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$.

另一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall N\in\mathbb{N}_+$. 两边同时对 n 取下极限, 可得对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n&\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k}\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\geqslant\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\frac{e}{e-1}$.

解法二 (单调有界定理): 因为

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$
$$S_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

所以证明 $\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},1\leqslant k\leqslant n-1$ 即可, 这等价于 $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\leqslant\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$. 实际上 $a_k=\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n},1\leqslant k\leqslant n$ 是单调递减数列, 因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}}=\frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right),x=k+1\in[2,n].$$

又由于

$$n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leqslant-\frac{n}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-n}{x^2}\leqslant0,\forall x=k+1\in[2,n].$$

从而 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leqslant e^0=1,\forall x=k+1\in[2,n]$, 故 $a_{k+1}\leqslant a_k,\forall1\leqslant k\leqslant n$. 于是 $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}=a_k\geqslant a_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, 也即 S_n 单调递增. 注意

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n-1}e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为 S. 对任意正整数 $n>m$, 先固定 m, 对 n 取极限有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{m}e^{-k}$$

这对任意正整数 m 均成立, 再令 $m\to\infty$ 有 $S\geqslant\dfrac{1}{e-1}$, 从而所求极限为 $\dfrac{1}{e-1}$.

□

0.1.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 n,k 不同阶)

只有当和式内部 n,k 不同阶时, 我们才可以直接利用 Taylor 展开进行计算. 但是书写过程不能用 Taylor 展开书写 (关于 o 和 O 余项的求和估计不好说明), 这样书写不严谨 (见例题 0.5 证法一).

我们可以采用**拟合法** (见例题 0.6)、**夹逼准则** (见例题 0.7)、$\varepsilon-\delta$ **语言** (见例题 0.5 证法二) 严谨地书写过程

笔记 虽然这三种方法都比较通用, 但是更推荐**拟合法**和**夹逼准则**, 一般比较简便.

虽然 $\varepsilon-\delta$ **语言**书写起来比较繁琐, 但是当有些和式不容易放缩、拟合的时候, 用这个方法更简单.

这类和式内部 n,k 不同阶的问题的处理方式: 先利用 Taylor 展开计算极限 (可以先不算出极限), 并判断到底要展开多少项, 然后根据具体问题综合运用**拟合法、夹逼准则、$\varepsilon-\delta$ 语言**严谨地书写过程 (怎么书写简便就怎么写).

注 这类和式内部 n,k 不同阶的问题,Taylor 公式是本质, **拟合法、夹逼准则、$\varepsilon-\delta$ 语言**只是形式上的过程.

例题 0.5 设 f 在 0 处可微,$f(0)=0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

笔记 本题如果使用例题 0.3的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f(0)=\lim_{N\to\infty}(N\cdot 0)=+\infty\cdot 0.$$

而 $+\infty\cdot 0$ 我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述“$+\infty\cdot 0$”的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们使用 Taylor 展开并引入余项方法和 $\varepsilon-\delta$ 方法更加精细地估计原级数的阶.

注 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言进行证明.

证明 证法一 (不严谨的余项方法): 由 f 在 0 处可微且 $f(0)=0$ 和带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$f(x)=f'(0)x+o(x),x\to 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left[f'(0)\cdot\frac{i}{n^2}+o\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{i}{n^2}\right)\\&=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\to\frac{f'(0)}{2},n\to+\infty.\end{aligned}$$

证法二 ($\varepsilon-\delta$ 严谨的证明): 由 *Taylor* 定理, 可知对 $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists\delta>0$, 当 $|x|\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x)-f'(0)x|\leqslant\varepsilon|x|$.

只要 $n>\dfrac{1}{\delta}$, 有 $\left|\dfrac{i}{n^2}\right|\leqslant\delta,\forall i=1,2,\cdots,n$, 故 $\left|f\left(\dfrac{i}{n^2}\right)-f'(0)\dfrac{i}{n^2}\right|\leqslant\varepsilon\dfrac{i}{n^2},i=1,2,\cdots,n.$

从而

$$f'(0)(1-\varepsilon)\frac{i}{n^2}\leqslant f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leqslant f'(0)(1+\varepsilon)\frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1-\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}=f'(0)(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leqslant f'(0)(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{f'(0)}{2}(1+\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}.$$

于是

$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2} \leqslant \frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leqslant \frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left|\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2}\right| \leqslant \frac{|f'(0)|}{2}\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = \frac{f'(0)}{2}$.

□

例题 0.6 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$.

笔记 本题采用**拟合法**书写过程.

解 由于对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{\sqrt{k}}{n}\to+\infty, n\to\infty$, 故由 Taylor 定理可得, 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}+\cdots\right), n\to\infty.$$

于是考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right).$$

又由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \xlongequal{Stolz公式或定积分定义} \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

笔记 本题采用**夹逼准则**书写过程. 注意 n,k 不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉, 然后使用夹逼准则即可.

证明 注意到

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \leqslant \sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \leqslant \frac{k}{2n^2}, \forall k\in\mathbb{N}.$$

所以

$$\frac{n+1}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是 $\frac{1}{4}$.

□

例题 0.8 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n$.

笔记 证法二综合运用了拟合法和夹逼准则书写过程 (只用其中一种方法的话, 书写起来很麻烦).

解 证法一(不严谨的余项方法):注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}.$$

由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{k}{2n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]=\frac{1}{n}\left[n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2n^2}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=1-\frac{n+1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

证法二(严谨地书写过程): 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}.\tag{1}$$

因为对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 有 $\frac{k}{n^2}\to 0,n\to\infty$, 所以利用 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=1-\frac{k}{2n^2}+\cdots,n\to\infty.$$

从而考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)\right].$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}+\frac{k}{2n^3}\right)-1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^3}\right)-1=\frac{n+1}{4n^2}\to 0,n\to\infty.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^3}=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-\sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}.\end{aligned}\tag{2}$$

注意到

$$-\frac{n+1}{2\left(n+1+\sqrt{n^2+n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{2n^2}=-\frac{n+1}{4n},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$, 则由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}=-\frac{1}{4}$. 再结合(1)(2)式可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

□

0.1.5 分段估计 (Toeplitz 定理)

对于估计级数或积分的极限或阶的问题, 当问题难以直接处理时, 我们可以尝试分段估计, 分段点的选取可以直接根据级数或积分的性质选取, 也可以根据我们的需要待定分段点 m, 然后再选取满足我们需要的 m 作为分段点.

定理 0.1 (Toeplitz 定理)

(a): 设 $\{t_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a. \tag{3}$$

(b): 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=a. \tag{4}$$

♡

笔记 无需记忆 *Toeplitz* 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 *Toeplitz* 定理, 即当 n 比较小的时候, 用 t_{nk} 趋于 0 来控制, 当 n 比较大的时候, 用 a_n 趋于 a 来控制.

我们需要熟悉蕴含在 *Toeplitz* 定理当中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

Toeplitz 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项), 另一部分是余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项) 和余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项).

注 注意区分 (a),(b) 两者的条件: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}t_{nk}\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}$.

证明 (a): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

故(3)式成立.

(b): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\sum_{k=N+1}^{\infty}|t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=N+1}^{\infty}|t_{nk}a_k|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

故(4)式成立.

□

例题 0.9 设 $p_k>0,k=1,2,\cdots,n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

笔记 理解到本质之后不需要记忆Toeplitz 定理, 但是这里可以直接套用 Toeplitz 定理我们就引用了. 今后我们不再直接套用 Toeplitz 定理, 而是利用 Toeplitz 定理的证明方法解决问题.

证明 记 $t_{nk}=\dfrac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geqslant 0,k=1,2,\cdots,n$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=1$. 又因为

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}t_{nk}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n+k+1}}=0.$$

所以由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 故由Toeplitz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a.$$

□

命题 0.2

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $b_n\geqslant 0$. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS.$$

证明 (i) 若 $S=0$, 则 $b_n\equiv 0$. 此时结论显然成立.

(ii) 若 $S>0$, 则令 $t_{nk}=\dfrac{1}{S}b_{n-k+1},k=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}S_n=1.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 存在, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=S\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}.$$

不妨设 $a=0$, 则对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$0\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=N+1}^{n}t_{nk}\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}.$$

令 $n\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}\right)=\sup_{k\geq N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kt_{nk}\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geq N+1}|a_k|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_k|=\lim_{n\to+\infty}|a_k|=\lim_{n\to+\infty}a_k=0.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kt_{nk}=a$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=S\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kt_{nk}=aS$.

□

例题 0.10 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 且存在常数 $K>0$, 使得 $\sum\limits_{j=0}^{n}|y_i|\leqslant K,\forall n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}=0.$$

证明 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+\left|\sum_{i=N+1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+\sup_{i\geqslant N+1}|x_i|\cdot\sum_{i=N+1}^{n}|y_{n-i}|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+K\cdot\sup_{i\geqslant N+1}|x_i|.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leqslant K\cdot\sup\limits_{i\geqslant N+1}|x_i|$.

由 N 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}=\lim_{N\to\infty}\sup_{i\geq N+1}|x_i|=\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n|=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

□

命题 0.3

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

笔记 可以不妨设 $a=b=0$ 的原因: 假设当 $a=b=0$ 时, 结论成立. 则当 a,b 至少有一个不为零时, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b)=0$. 从而由假设可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_{n-k+1}-b)}{n}=0.$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}+ab-a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}-b\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}=0$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}+b\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}-ab=ab.$

证明 不妨设 $a=b=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n, 用 b_n-b 代替 b_n. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}\right| &\leqslant \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|}{n}+\frac{\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right|}{n}\\ &\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|+\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|b_{n-k+1}|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|+\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k|.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right|\leqslant\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|}{n}\leqslant\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=0.$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=0$.

□

例题 0.11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$.

例题 0.12 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx_k=x.$$

笔记 可以不妨设 $x=0$ 的原因: 假设当 $x=0$ 时, 结论成立, 则当 $x\neq0$ 时, 令 $y_n=x_n-x$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$. 从而由假设可知

$$0=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ky_k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(x_k-x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx_k-x\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx_k-x.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx_k=x$.

证明 不妨设 $x=0$, 则对 $\forall N>0$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|&=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^kx_k\right|+\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^kx_k\right|\\ &\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^kx_k\right|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^kx_k\right|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\\ &=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^kx_k\right|+\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to+\infty$, 则结合 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}C_n^kx_k\right|\xlongequal{\text{因为分子是关于}n\text{的多项式}}0$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|,\forall N>0.$$

由 N 的任意性, 上式两边令 $N\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|\leqslant\overline{\lim_{N\to+\infty}}\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|.$$

又根据上极限的定义, 可知 $\lim\limits_{N\to+\infty}\sup\limits_{k\geqslant N+1}|x_k|=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}|x_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

从而

$$0\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|\leqslant 0.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx_k\right|=0$. 原命题得证.

□

注 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$ 的原因: 我们希望找到一个合适的分段点 m, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 由 $\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}=\frac{(m-1)}{\sqrt{n}}$ 可知, 我们可以希望 $\frac{(m-1)}{\sqrt{n}}\to 0$, 即 $m=o(\sqrt{n})$. 又由上述证明的积分放缩可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}$, 从而我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{m}}=1$, 也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{m}=0$.

综上, 我们希望当 $n\to\infty$ 时,m 的阶比 $\sqrt{n}$ 低但比 $\ln n$ 高, 于是我们考虑 $\ln n$ 和 $\sqrt{n}$ 的几何平均, 即令 $m=\sqrt{\sqrt{n}\ln n}$, 恰好满足需要. 又由于 m 表示求和项数, 因此取整保证严谨性.

笔记 本题核心想法是: **分段估计**. 分段后的估计方式和分段点的选取方法较多.(清疏讲义上有另一种分段估计的做法)

注意: 本题使用 Stolz 定理解决不了, 直接放缩也不行.

证明 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$, 考虑 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1+\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}+\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$. 不难发现

$$\frac{m}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{n}\to 0,n\to\infty.$$

$$\sum_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\to 0,n\to\infty.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 并且一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{m-1}^{n}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{n^x}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{m}^{n+1}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{n^x}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1).\end{aligned}$$

又注意到

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m-1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}}=1.$$

故

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1)=1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}+\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\right)=1+0+1=2.$ □

例题 0.13 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2}=a,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=a,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=b$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 有

$$(a-\varepsilon)n^2\leqslant a_n\leqslant(a+\varepsilon)n^2,\quad(b-\varepsilon)n^2\leqslant b_n\leqslant(b+\varepsilon)n^2.$$

于是当 $n>3N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}&=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}a_kb_{n-k}+\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}\leqslant\frac{(b+\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2a_k+(a+\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}k^2b_{n-k}}{n^5}\\&=\frac{(b+\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2a_k+(a+\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{n-N-1}(n-k)^2b_k}{n^5}.\end{aligned}$$

另一方面, 同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}&=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}a_kb_{n-k}+\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}\geqslant\frac{(b-\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2a_k+(a-\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}k^2b_{n-k}}{n^5}\\&=\frac{(b-\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2a_k+(a-\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{n-N-1}(n-k)^2b_k}{n^5}.\end{aligned}$$

又因为对 $\forall n>3N$, 有

$$\frac{(a+\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{n-N-1}(n-k)^2b_k}{n^5}=\frac{(a+\varepsilon)\left(\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2b_k+\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2b_k\right)}{n^5},$$

$$\frac{(a-\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{n-N-1}(n-k)^2b_k}{n^5}=\frac{(a-\varepsilon)\left(\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2b_k+\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2b_k\right)}{n^5}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2a_k}{n^5}=0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}(n-k)^2b_k}{n^5}=0.$$

所以存在 $N_1>3N$, 使得 $\forall n>N_1$, 有

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}\leqslant\varepsilon+\frac{(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2k^2}{n^5},$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}\geqslant-\varepsilon+\frac{(a-\varepsilon)(b-\varepsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2k^2}{n^5}.$$

令 $\varepsilon\to0$ 得

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}=\frac{ab\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2k^2}{n^5},\quad\forall n>N_1.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n-N-1}(n-k)^2k^2}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2N-2}{n}\cdot\frac{1}{n-2N-2}\sum_{k=N+1}^{n-N-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1-x)^2x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{30},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n^5}=\frac{ab}{30}.$$

□

0.1.6 Euler-Maclaurin 公式 (E-M 公式)

定理 0.2 (0 阶 Euler-Maclaurin 公式)

设 $a,b\in\mathbb{Z}$, $f\in D[a,b]$, $f'\in L^1[a,b]$, 让我们有

$$\sum_{k=a}^{b}f(k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即可), 再使用.

E-M 公式求和通项与求和号上限无关.

笔记 在 $[0,1)$ 上 $x-[x]-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}$, 它也是 $x-\frac{1}{2}$ 做周期 1 延拓得到的函数. 故 $-\frac{1}{2}\leqslant x-[x]-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=a}^{b-1}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x+k)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{1}{2}f(1+k)+\frac{1}{2}f(k)-\int_0^1 f(x+k)\mathrm{d}x\right]\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=a}^{b-1}[f(k)+f(k+1)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=a}^{b}f(k)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

注 假设已知 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于 $-\frac{1}{2}\leqslant x-[x]-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$, 因此直接将 $b_1(x)$ 放大成 $\frac{1}{2}$ 就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见例题 0.14.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对 $b_1(x)$ 使用分部积分. 但是由于 b_1 并非连续函数, 为了把 $\int_a^b(x-[x]-\frac{1}{2})f'(x)\mathrm{d}x$ 继续分部积分, 我们需要寻求 b_1 的原函数 b_2 使得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)db_2(x),$$

即期望 $b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 的一个原函数并且仍然有周期 1(因为求导不改变周期性, 又由于 $b_1(x)$ 周期为 1, 故原函数

$b_2(x)$ 的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y, b_2(x+1)=b_2(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

(构造 $b_2(x)$ 的想法: 先找到 $x\in[0,1)$ 这个特殊情况下的 $b_2(x)$, 再由此构造出 $x\in\mathbb{R}$ 这个一般情况下的 $b_2(x)$, 即**由特殊推广到一般**)

先考虑 $x\in[0,1)$ 的情况 (因为此时 $[x]\equiv 0$, 方便后续计算得到原函数 $b_2(x)$), 于是就需要 $\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=b_2(1)=b_2(0)=0$. 显然

$$b_2(1)=\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=0=b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要 $b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$(其中$c$为任意常数), $x\in[0,1)$. 又因为我们需要 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1, 所以再将 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ 做周期 1 延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 得到在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1 的 $b_2(x)$(易知此时 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式为

$$b_2(x)=b_2(x-[x])=\int_0^{x-[x]} b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x-[x]}\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c, \forall x\in\mathbb{R}.$$

此时又由 $\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y=0$ 可得

$$\begin{aligned}b_2(x)=b_2(x-[x])&=\int_0^{x-[x]} b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^x b_1(y-[x])\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y+k)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{[x]} b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^x b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的 $b_2(x)$ 恰好就是 $b_1(x)$ 的一个原函数. 即 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续且周期为 1 的原函数 $b_2(x)$,$f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 因此我们可以对 $b_1(x)$ 进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)db_2(x)$$

成立. 并且此时 $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c, \forall x\in\mathbb{R}$. 其中 c 为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要 $b_3(x)$ 是 $b_2(x)$ 的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望 $b_3(1)=b_3(0)$ 和 $b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0,$$

$$b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_3(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_3(x)$, 并且 $b_3(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 进而可以利用这个 $b_3(x)$ 继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由 $\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0$ 可知

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow c=\frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时 $b_1(x)$ 的原函数 $b_2(x)$ 就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么 c 可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的 $c=\frac{1}{12}$). 此时这个唯一

确定的 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1,并且

$$b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},x\in[0,1);$$
$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y,|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}.$$

依次下去我们给出计算 $b_n,n\in\mathbb{N}$ 的算法.

定义 0.1 ($b_n(x)$ 定义和算法)

我们令 $b_1(x)$ 为 $x-\frac{1}{2},x\in[0,1)$ 的周期 1 延拓. 对所有 $n=2,3,\cdots,b_n(x)$ 是 $b_{n-1}(x)$ 的一个原函数.

笔记 **$b_n(x)$ 的算法:**

根据上述构造 $b_2(x),b_3(x)$ 的想法可知, 我们只需期望 $b_n(1)=b_n(0)$ 和 $b_n(x)=\int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x=b_n(1)=b_n(0)=0,$$
$$b_n(x)=\int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_n(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_n(x)$, 并且 $b_n(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 并且根据 $\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x=b_n(1)=b_n(0)=0$ 我们可唯一确定 $b_{n-1}(x)$ 在 $[0,1)$ 上的表达式. 从而可以唯一确定 $b_n(x)$ 之前的所有 $b_{n-1}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一确定所有的 $b_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述 $b_n(x)$ 的定义和算法, 可知 $b_n(x)$ 是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在 $M_n>0$, 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $|b_n(x)|\leqslant M_n$.

注 我们可以利用这些 $b_n(x)$ 不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见例题**??**,例题 0.14.

结论 我们计算一些 $b_n(x)$ 以备用:

$$b_1(x)=x-\frac{1}{2},x\in[0,1).$$
$$b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2},|b_1(x)|\leqslant\frac{1}{2},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},x\in[0,1).$$
$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12},x\in[0,1).$$
$$b_3(x)=\frac{(x-[x])^3}{6}-\frac{(x-[x])^2}{4}+\frac{(x-[x])}{12},|b_3(x)|\leqslant\frac{2\sqrt{3}-3}{36},x\in\mathbb{R}.$$

$$b_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}-\frac{1}{720},x\in[0,1).$$
$$b_4(x)=\frac{(x-[x])^4}{24}-\frac{(x-[x])^3}{12}+\frac{(x-[x])^2}{24}-\frac{1}{720},|b_4(x)|\leqslant\frac{1}{720},x\in\mathbb{R}.$$

命题 0.4 ($b_n(x)$ 的傅立叶级数表达式)

对 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

$$b_1(x) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n},$$

$$b_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}},$$

$$b_{2k+1}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}}.$$

注 $b_1(x)$ 的傅立叶级数并不总是收敛到 $b_1(x)$. 事实上, 由狄利克雷收敛定理, 我们知道

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n} = \begin{cases} b_1(x), & x\text{不是整数} \\ 0, & x\text{是整数} \end{cases}.$$

证明

□

命题 0.5 ($b_n(x)$ 基本性质)

对每个 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

1.
$$b_{2k+1}(0) = 0, \quad b_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}.$$

   其中 B_{2k} 是 Bernoulli 数.

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = -\frac{5}{66}, \cdots$$

$$B_{2k+1} = 0, k = 1, 2, \cdots$$

2.
$$|b_k(x)| \leqslant \frac{2\zeta(k)}{(2\pi)^k}.$$

   其中 $\zeta(x)$ 是 Riemann Zeta 函数, 定义为

$$\zeta(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}, \ x > 1 \quad \text{或} \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\mathrm{d}x, \ s > 1.$$

证明

□

定理 0.3 (Euler-Maclaurin 公式)

设 $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, f \in D^{2m}[a,b], f^{(2m)} \in L^1[a,b]$. 则有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] b_{2k}(0) - \int_a^b b_{2m}(x) f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理 0.2, 我们有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b b_1(x) f'(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

现在利用 b_2 周期性和分部积分得

$$\int_a^b b_1(x) f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}b_2(x) = [f'(b) - f'(a)]b_2(0) - \int_a^b b_2(x) f''(x)\mathrm{d}x.$$

代入等式 (5), 就证明了定理中 $m=2$ 的情况, 类似的反复分部积分即可对一般 m 得到等式

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(b)+f(a)}{2}+\sum_{k=2}^{m}\left[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right]b_k(0)+(-1)^{m+1}\int_a^b b_m(x)f^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$$

又因为命题 0.5中的 $b_{2k+1}(0)=0, k\in\mathbb{N}$, 代入上式, 这就完成了定理的证明.

□

例题 0.14 估计 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, n\to\infty$.

解 解法一: 一方面, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1).$$

另一方面, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 我们也有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n.$$

于是对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\ln(n+1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln n.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln n}+1.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$. 即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n, n\to\infty$.

解法二 (E-M 公式): 由E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}-\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x. \tag{6}$$

因为 $\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^n\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$ 存在, 所以可设

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq C<\infty.$$

于是 $\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=C-\int_n^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\left[C-\int_n^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_n^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_n^{+\infty}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\ln n+\frac{1}{2}-C++O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}$. 此时令 $\frac{1}{2}-C=\frac{1}{2}-\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq$ γ(欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

由$b_n(x)$ 的构造和分部积分可知, 上述结果只是对 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12}$. 则不难发现$b_2(x)$ 是连续且周期为 1 的函数,$b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, 并且 $|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12}, x\in\mathbb{R}$. 而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 于是设 $\int_1^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq C$. 从而再对(6)分部积分得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_1^n\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\left(\int_1^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x-\int_n^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_n^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}b_2(x)\\
&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\frac{b_2(x)}{x^2}\Big|_n^{+\infty}+2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\\
&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}.
\end{aligned}\tag{8}$$

又由 $|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}$ 可知

$$\left|2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}\right|\leqslant 2\left|\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\right|+\frac{|b_2(n)|}{n^2}\leqslant\frac{1}{6}\left|\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\right|+\frac{1}{12n^2}=\frac{1}{6n^2},\forall n\in\mathbb{N}.$$

即

$$2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\forall n\in\mathbb{N}.\tag{9}$$

再结合(8)和(9)式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\forall n\in\mathbb{N}.$$

记 $\gamma\triangleq\frac{1}{2}-C$($\gamma$ 为欧拉常数), 则我们就得到了比(7)式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\forall n\in\mathbb{N}.$$

□

例题 0.15 计算

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}.$$

笔记 **估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.**

解 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+(-1)^{2m-2}\frac{\ln(2m-1)}{2m-1}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2m-1)}{2m-1},\forall m\in\mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+o(1),m\to+\infty.\tag{10}$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列 $\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 即可. 又注意到

$$\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{m}\left[(-1)^{2n-2}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}+(-1)^{2n-1}\frac{\ln 2n}{2n}\right]=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln 2n}{2n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2 + \ln n}{n}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

由例题 0.14可知

$$
\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2}{n} = \ln 2(\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1), m \to +\infty. \tag{12}
$$

又由E-M 公式可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{13}
$$

因为

$$
\left| \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| \int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \right|, \forall m \in \mathbb{N}.
$$

并且 $\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{m \to +\infty} \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = C < \infty$. 即

$$
\int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x = C + o(1), m \to +\infty. \tag{14}
$$

于是结合(13)(14)式可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \ln x}{x^2} \mathrm{d}x \\
&= o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \\
&= \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \to +\infty.
\end{aligned} \tag{15}
$$

因此由(11)(12)(15)式可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln 2 + \ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 2m + C + o(1) - \left[\ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1)\right] \\
&= \frac{1}{2} \ln^2 2m - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) \\
&= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1), m \to +\infty.
\end{aligned}
$$

即 $\lim\limits_{m \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. 再结合(10)式可得

$$
\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.
$$

故 $\lim\limits_{m \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$.

□

例题 0.16 设 $f \in C^1[1, +\infty)$ 且 $\int_1^{\infty} |f'(x)| \mathrm{d}x < \infty$, 证明 $\int_1^{\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛等价于 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 存在.

笔记 关键想法参考:E-M 公式和命题??.

证明 由E-M 公式可知

$$
\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(x) \mathrm{d}x + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) \mathrm{d}x. \tag{16}
$$

注意到 $0 \leqslant \left|\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}|f'(x)|$, 并且 $\int_1^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\int_1^{\infty} \left|\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\right| \mathrm{d}x$ 也收敛. 从而 $\int_1^{\infty} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 故由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(1) 若 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 又由 $\int_1^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ 可知 $\int_1^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-f(1)] = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} f'(y)\mathrm{d}y = \int_1^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 从而由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ 也存在. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结合(16)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 存在.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结合(16)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. 于是对 $\forall x \geqslant 1$, 一定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leqslant x < n+1$. 从而可得

$$\int_1^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x + \int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

并且

$$\int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{x} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{y\geqslant n} |f(y)|\,. \tag{18}$$

对(18)式两边同时令 $x \to +\infty$, 则 $n \to +\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty} \int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\geqslant n} |f(y)| = \overline{\lim_{x\to+\infty}} |f(x)|\,.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty} \int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} |f(x)| = 0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 于是再对(17)式两边同时令 $x \to +\infty$, 则 $n \to +\infty$. 从而可得

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{x\to+\infty} \int_n^{x} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也存在.

□

例题 0.17

1. 先证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n \right)$$

存在.

2. 再用积分放缩法求 $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}, n \to \infty$ 的等价无穷大.

笔记 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

证明

1. 设

$$a_n \triangleq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n, n = 2, 3, \cdots.$$

我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln(n+1)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln n-\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right|<\infty,\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}\right]=-\frac{1}{2\ln 2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_2\right]$$

存在.

2. 注意到对 $\forall n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k\ln k}dx\geqslant\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2.\tag{19}$$

同时, 也有

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k\ln k}dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^{n}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln n.\tag{20}$$

从而对 $\forall n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 由(19)(20)式可得

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\leqslant\ln\ln n.$$

于是对 $\forall n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\frac{\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2}{\ln\ln n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n}\leqslant 1.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n}=1$. 即 $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}\sim\ln\ln n,n\to\infty$.

□

例题 0.18 用积分放缩法得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2},x\to 1^-$ 的等价无穷大.

证明 注意到对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{n^2}dt\geqslant-1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{t^2}dt=-1+\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}dt.\tag{21}$$

同时也有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}dt\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{t^2}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}dt.\tag{22}$$

又由于 $x\in(0,1)$, 因此 $\ln x\in(-\infty,0)$. 从而

$$\int_0^{\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{\infty}e^{t^2\ln x}dt\xlongequal{令y=t\sqrt{-\ln x}}\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

故 $\int_0^{\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$ 收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \tag{23}$$

从而对 $\forall x \in (0,1)$, 结合(21)(22)(23)式可得

$$-1+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = -1+\lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x}+\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \sqrt{-\ln x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x \in (0,1).$$

令 $x \to 1^-$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{-\ln x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}, x \to 1^-$.

又由 $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$ 可知 $-\ln x = -\ln(1+x-1) \sim 1-x, x \to 1^-$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x \to 1^-.$$

□