实变函数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合之间的运算

定理 1.1

设有集合 A, B 与 C, 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

♡

定义 1.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 存在\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : 对一切\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

♣

定理 1.2

1. 交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.
2. 分配律:

(i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha);$

(ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$

♡

定义 1.2

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A - B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的 “大” 集合 X 的子集, 我们称 X 为全集. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

命题 1.1 (集合的差与补的基本性质)

1. $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, (A^c)^c = A, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.
2. $A - B = A \cap B^c$.
3. 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subset B^c$.

定理 1.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

证明 以 (i) 为例. 若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说, 对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$. 故得 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

反之, 若 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 则对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \in A_\alpha^c$, 即对一切 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$. 这就是说,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

□

定义 1.3 (集合的对称差)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

命题 1.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.
(ii) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$.
(iii) 结合律:$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(v) $A^c \triangle B^c = A \triangle B; A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.
(vi) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E \triangle A = B$(实际上 $E = B \triangle A$).

定义 1.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$.

定义 1.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

命题 1.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}\,(E \setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}}\,(E \setminus A_k).$$

定理 1.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{对任一自然数} j, \text{存在} k(k \geqslant j), x \in A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j \text{且} k \in \mathbb{N}\ s.t.\ x \in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{存在自然数} j_0, \text{当} k \geqslant j_0 \text{时}, x \in A_k\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 \text{且} k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k.$$

证明 以 (ii) 为例. 若 $x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 反之, 若存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k$.

由 (i)(ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k.$$

□

定义 1.6 (直积集)

设 X, Y 是两个集合, 称一切有序“元素对” (x, y)（其中 $x \in X, y \in Y$）形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

其中 $(x, y) = (x', y')$ 是指 $x = x', y = y'$.$X \times X$ 也记为 X^2. ♣

1.2 映射与基数

定义 1.7 (单射)

♣

定义 1.8 (映射的像集)

对于 $f : X \to Y$ 以及 $A \subset X$, 我们记

$$f(A) = \{y \in Y : x \in A, y = f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的 **(映) 像集**（$f(\varnothing) = \varnothing$）. ♣

命题 1.4 (映射的像集的基本性质)

对于 $f : X \to Y$, 我们有

(i) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)(A_\alpha \in X, \alpha \in I)$;

(ii) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)(A_\alpha \in X, \alpha \in I)$. ♠

定义 1.9 (映射的原像集)

对于 $f : X \to Y$ 以及 $B \subset Y$, 我们记

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**. ♣

命题 1.5 (映射的原像集的基本性质)

对于 $f : X \to Y$, 我们有

(i) 若 $B_1 \subset B_2$, 则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$（$A \subset Y$）;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha \subset Y, \alpha \in I$）;

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha \subset Y, \alpha \in I$）;

(iv) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$（$B \subset Y$）. ♠

定义 1.10 (示性函数)

一般地, 对于 X 中的子集 A, 我们作

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

且称 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**或**示性函数**.

命题 1.6 (示性函数的基本性质)

对于 X 中的子集 A, B, 我们有

(i) $A \neq B$ 等价于 $\chi_A \neq \chi_B$.

(ii) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

(iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(v) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$.

(vi) $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

定义 1.11 (幂集)

设 X 是一个非空集合, 由 X 的一切子集（包括 $\varnothing$,X 自身）为元素形成的集合称为 X 的**幂集**, 记为 $\mathcal{P}(X)$.

笔记 例如, 由 n 个元素形成的集合 E 之幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

例题 1.1 单调映射的不动点 设 X 是一个非空集合, 且有 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A \subset B$ 的任意 A, B, 必有 $f(A) \subset f(B)$, 则存在 $T \subset \mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T) = T$.

证明 作集合 S, T:

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且} A \subset f(A)\},$$
$$T = \bigcup_{A\in S} A (\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上, 因为由 $A \in S$ 可知 $A \subset f(A)$, 从而由 $A \subset T$ 可得 $f(A) \subset f(T)$. 根据 $A \in S$ 推出 $A \subset f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A\in S} A \subset f(T), \quad T \subset f(T).$$

另一方面, 又从 $T \subset f(T)$ 可知 $f(T) \subset f(f(T))$. 这说明 $f(T) \in S$, 我们又有 $f(T) \subset T$. □

定义 1.12 (集合之间的对等关系)

设有集合 A 与 B. 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射, 则称集合 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$.

命题 1.7 (对等关系的基本性质)

设有集合 A 与 B, 则

(i) $A \sim A$;

(ii) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(iii) 若 $A \sim B$,$B \sim C$, 则 $A \sim C$.

引理 1.1 (映射分解定理)

若有 $f : X \to Y$,$g : Y \to X$, 则存在分解

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim},$$

其中 $f(A) = B$,$g(B^{\sim}) = A^{\sim}$,$A \cap A^{\sim} = \varnothing$ 以及 $B \cap B^{\sim} = \varnothing$.

证明 对于 X 中的子集 E（不妨假定 $Y \setminus f(E) \neq \varnothing$）, 若满足

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing,$$

则称 E 为 X 中的分离集. 现将 X 中的分离集的全体记为 Γ, 且作其并集

$$A=\bigcup_{E\in\Gamma}E.$$

我们有 $A\in\Gamma$. 事实上, 对于任意的 $E\in\Gamma$, 由于 $A\supset E$, 故从

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing$$

可知 $E\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$, 从而有 $A\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$. 这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元.

现在令 $f(A)=B, Y\setminus B=B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim})=A^{\sim}$. 首先知道

$$Y=B\cup B^{\sim}.$$

其次, 由于 $A\cap A^{\sim}=\varnothing$, 故又易得 $A\cup A^{\sim}=X$. 事实上, 若不然, 那么存在 $x_0\in X$, 使得 $x_0\notin A\cup A^{\sim}$. 现在作 $A_0=A\cup\{x_0\}$, 我们有

$$B=f(A)\subset f(A_0),\quad B^{\sim}\supset Y\setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim}\supset g(Y\setminus f(A_0))$. 这就是说,$A$ 与 $g(Y\setminus f(A_0))$ 不相交. 由此可得

$$A_0\cap g(Y\setminus f(A_0))=\varnothing.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾. □

定理 1.5 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等,Y 与 X 的某个真子集对等, 则 $X\sim Y$. ♡

笔记 特例: 设集合 A,B,C 满足下述关系:

$$C\subset A\subset B.$$

若 $B\sim C$, 则 $B\sim A$.

证明 由题设知存在单射 $f:X\to Y$ 与单射 $g:Y\to X$, 根据映射分解定理知

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},\quad f(A)=B,\quad g(B^{\sim})=A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f:A\to B$ 以及 $g^{-1}:A^{\sim}\to B^{\sim}$ 是一一映射, 因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F:

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A,\\ g^{-1}(x), & x\in A^{\sim}.\end{cases}$$

这说明 $X\sim Y$. □

定义 1.13 (集合的基数 (或势))

设 A,B 是两个集合, 如果 $A\sim B$, 那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的, 记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 可见, 凡是互相对等的集合均具有相同的基数.

如果用 α 表示这一相同的基数, 那么 $\overline{\overline{A}}=\alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B, 记 $\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β, 记为

$$\alpha\leqslant\beta.$$

若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则称 α 小于 β（或 β 大于 α）, 记为

$$\alpha<\beta\quad(\text{或}\beta>\alpha).$$

显然, 若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\beta\leqslant\alpha$, 则由Cantor - Bernstein 定理可知 $\alpha=\beta$. ♣

定义 1.14 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合. 如果存在自然数 n, 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 且用同一符号 n 记 A 的基数. 由此可见, 对于有限集来说, 其基数可以看作集合中元素的数目. 若一个集合不是有限集, 则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数.

定义 1.15 (自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数 · 可列集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$（读作阿列夫（Aleph, 希伯来文）零）. 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$, 则 A 叫作**可列集**. 这是由于 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 而 $A \sim \mathbb{N}$, 故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来, 附以下标, 就有

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

定理 1.6

任一无限集 E 必包含一个可列子集.

笔记 这个定理说明, 在众多的无限集中, 最小的基数是 $\aleph_0$.

证明 任取 E 中一元, 记为 a_1; 再从 $E \setminus \{a_1\}$ 中取一元, 记为 $a_2, \cdots$. 设已选出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 因为 E 是无限集, 所以

$$E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing.$$

于是又从 $E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中可再选一元, 记为 a_{n+1}. 这样, 我们就得到一个集合

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集. □

定理 1.7

设 A 是无限集且其基数为 α. 若 B 是至多可列集, 则 $A \cup B$ 的基数仍为 α.

证明 不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}, A \cap B = \varnothing$, 且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

我们作映射 f 如下:

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad a_i \in A_1;$$
$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad b_i \in B;$$
$$f(x) = x, \quad x \in A_2.$$

显然,f 是 $A \cup B$ 到 A 上的一一映射. □

定理 1.8

集合 A 为无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等.

证明 因为有限集是不与其真子集对等的, 所以充分性是成立的. 现在取 A 中一个非空有限子集 B, 则由定理 1.7立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{((A \setminus B) \cup B)}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故 $A \sim (A \setminus B)$. □

定理 1.9

$[0, 1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 不是可数集.

证明 只需讨论 $(0,1]$. 为此, 采用二进位制小数表示法:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1, 且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1. 显然,$(0,1]$ 与全体二进位制小数一一对应.

若在上述表示式中把 $a_n=0$ 的项舍去, 则得到 $x=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}$, 这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1=n_1,\quad k_i=n_i-n_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$, 则 $(0,1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应.

现在假定 $(0,1]$ 是可数的, 则 $\mathscr{H}$ 是可数的, 不妨将其全体排列如下:

$$\begin{array}{l}(k_1^{(1)},k_2^{(1)},\cdots,k_i^{(1)},\cdots),\\(k_1^{(2)},k_2^{(2)},\cdots,k_i^{(2)},\cdots),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_i^{(i)},\cdots),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

但这是不可能的, 因为 $(k_1^{(1)}+1,k_2^{(2)}+1,\cdots,k_i^{(i)}+1,\cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$, 而它并没有被排列出来. 这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的, 也就是说 $(0,1]$ 是不可数集. □

定义 1.16 ($\mathbb{R}$ 的基数 · 不可数集)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$).

笔记 易知 $\overline{\overline{\mathbb{R}}}=c=\aleph_1$.

定理 1.10

设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 A_k 的基数都是连续基数, 则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 的基数是连续基数.

证明 不妨假定 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$, 且 $A_k\sim[k,k+1)$, 我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\sim[1,+\infty)\sim\mathbb{R}.$$

□

定理 1.11 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合, 则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$（由 A 的一切子集所构成的集合族）不对等.

笔记 易知集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等, 即存在一一映射 $f:A\to\mathcal{P}(A)$. 我们作集合

$$B=\{x\in A:x\notin f(x)\},$$

于是有 $y\in A$, 使得 $f(y)=B\in\mathcal{P}(A)$. 现在分析一下 y 与 B 的关系:

(i) 若 $y\in B$, 则由 B 的定义可知 $y\notin f(y)=B$;

(ii) 若 $y\notin B$, 则由 B 的定义可知 $y\in f(y)=B$.

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射, 即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的. □

1.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

1.3.1 点集的直径、点的 (球) 邻域、矩体

定义 1.17 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的运算)

记一切有序数组 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体为 $\mathbb{R}^n$, 其中 $\xi_i \in \mathbb{R}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）是实数, 称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标, 并定义运算如下:

(i) 加法: 对于 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 以及 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 令

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_n);$$

(ii) 数乘: 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令 $\lambda x = (\lambda\xi_1, \cdots, \lambda\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

在上述两种运算下构成一个向量空间. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 记

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),$$

其中除第 i 个坐标为 1, 外其余皆为 0.$e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的基底, 从而 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的 n 维向量空间, 并称 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**向量**或**点**. 当每个 ξ_i 均为有理数时,$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 称为**有理点**.

定义 1.18

设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$|x| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的**模**或**长度**.

命题 1.8 (向量的模的性质)

设 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则

(i) $|x| \geqslant 0, |x| = 0$ 当且仅当 $x = (0, \cdots, 0)$;

(ii) 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有 $|ax| = |a||x|$;

(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;

(iv) 设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 则有

$$(\xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n)^2 \leqslant (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)(\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2).$$

证明 (i),(ii) 的结论是明显的;(iii) 是 (iv) 的推论. 因此我们只证明 (iv).

只需注意到函数

$$f(\lambda) = (\xi_1 + \lambda\eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n + \lambda\eta_n)^2$$

是非负的（对一切 λ）, 由 λ 的二次方程 $f(\lambda)$ 的判别式小于或等于零即得.(iv) 就是著名的 Cauchy - Schwarz 不等式. □

定义 1.19 (距离空间)

一般地说, 设 X 是一个集合. 若对 X 中任意两个元素 x 与 y, 有一个确定的实数与之对应, 记为 $d(x, y)$, 它满足下述三条性质:

(i) $d(x, y) \geqslant 0, d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$,

则认为在 X 中定义了距离 d, 并称 (X, d) 为**距离空间**.

笔记 因而 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间, 其中 $d(x, y) = |x - y|$. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 为 **n 维欧氏空间**.

定义 1.20 (点集的直径与有界集)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合, 令

$$\mathrm{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\},$$

称为点集 E 的**直径**. 若 $\mathrm{diam}(E) < +\infty$, 则称 E 为**有界集**.

命题 1.9 (有界集的充要条件)

E 是有界集的充要条件是, 存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \in E$ 都满足 $|x| \leqslant M$.

证明 由有界集的定义易得. □

定义 1.21 (点的 (球) 邻域)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,$\delta > 0$, 称点集

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的**开球**, 也称为 x_0 的 **(球) 邻域**, 记为 $B(x_0, \delta)$, 从而称

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

为**闭球**, 记为 $C(x_0, \delta)$.$\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的球面是

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \delta\}.$$

定义 1.22 (矩体)

设 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆为实数, 且 $a_i < b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 称点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : a_i < \xi_i < b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开矩体**（$n = 2$ 时为矩形,$n = 1$ 时为区间）, 即直积集

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

类似地,$\mathbb{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],$$

称 $b_i - a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为**矩体的边长**. 若各边长都相等, 则称矩体为**方体**.
矩体也常用符号 I, J 等表示, 其**体积**用 $|I|,|J|$ 等表示.

命题 1.10 (矩体的直径与体积)

若 $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, 则

$$\mathrm{diam}(I) = [(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

定义 1.23

设 $x_k \in \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - x| = 0,$$

则称 $x_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**收敛（于 x 的）点列**, 称 x 为它的**极限**, 并简记为

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

定义 1.24 (Cauchy 列)

称 $\{x_k\}$ 为 **Cauchy 列**或**基本列**, 若 $\lim\limits_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0$. 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $k,l>N$ 时, 有

$$|x_k-x_l|<\varepsilon.$$

定理 1.12

$x_k(k=1,2,\cdots)$ 是收敛列的充分必要条件是 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 即

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0.$$

证明 若令 $x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\}$,$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i|\leqslant|x_k-x|\leqslant|\xi_1^{(k)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(k)}-\xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立. 故可知 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 收敛于 x 的充分必要条件是, 对每个 i, 实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i. 由此根据实数列收敛的 Cauchy 收敛准则可知结论成立. □

1.3.2 点集的极限点

定义 1.25 (极限点与导集)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,$x\in\mathbb{R}^n$. 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称 x 为 E 的**极限点**或**聚点**.E 的极限点全体记为 E', 称为 E 的**导集**.

笔记 显然, 有限集是不存在极限点的.

定理 1.13 (一个点是极限点的充要条件)

若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 $x\in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta>0$, 有

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing.$$

证明 若 $x\in E'$, 则存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$|x_k-x|\to0\quad(k\to\infty),$$

从而对任意的 $\delta>0$, 存在 k_0, 当 $k\geqslant k_0$ 时, 有 $|x_k-x|<\delta$, 即

$$x_k\in B(x,\delta)\quad(k\geqslant k_0).$$

反之, 若对任意的 $\delta>0$, 有 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$, 则令 $\delta_1=1$, 可取 $x_1\in E$,$x_1\neq x$ 且 $|x-x_1|<1$. 令

$$\delta_2=\min\left(|x-x_1|,\frac{1}{2}\right),$$

可取 $x_2\in E$,$x_2\neq x$ 且 $|x-x_2|<\delta_2$. 继续这一过程, 就可得到 E 中互异点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x-x_k|<\delta_k$, 即

$$\lim_{k\to\infty}|x-x_k|=0.$$

这说明 $x\in E'$. □

定义 1.26 (孤立点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 E 中的点 x 不是 E 的极限点, 即存在 $\delta>0$, 使得

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing,$$

则称 x 为 E 的**孤立点**, 即 $x\in E\setminus E'$.

定理 1.14 (导集的性质)

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$.

证明 因为 $E_1 \subset E_1 \cup E_2$,$E_2 \subset E_1 \cup E_2$, 所以

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)',$$

从而有 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$. 反之, 若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$, 则存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

显然, 在 $\{x_k\}$ 中必有互异点列 $\{x_{k_i}\}$ 属于 E_1 或属于 E_2, 而且

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x.$$

在 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 时, 有 $x \in E_1'$, 否则 $x \in E_2'$. 这说明

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'.$$

□

定理 1.15 (Bolzano - Weierstrass 定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

证明 首先从 E 中取出互异点列 $\{x_k\}$. 显然,$\{x_k\}$ 仍是有界的, 而且 $\{x_k\}$ 的第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个坐标所形成的实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是有界数列. 其次, 根据 $\mathbb{R}^1$ 的 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 从 $\{x_k\}$ 中可选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$, 使得 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第一个坐标形成的数列是收敛列; 再考查 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第二个坐标形成的数列, 同理可从中选出 $\{x_k^{(2)}\}$, 使其第二个坐标形成的数列成为收敛列, 此时其第一坐标数列仍为收敛列（注意, 收敛数列的任一子列必收敛于同一极限）, ……至第 n 步, 可得到 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_k^{(n)}\}$, 其一切坐标数列皆收敛, 从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是收敛点列, 设其极限为 x. 由于 $\{x_k^{(n)}\}$ 是互异点列, 故 x 为 E 的极限点. □

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

1.4.1 闭集

定义 1.27 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \supset E'$（即 E 包含 E 的一切极限点）, 则称 E 为**闭集**（这里规定空集为闭集）. 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**（E 为闭集就是 $E = \overline{E}$）.

定义 1.28 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 1.16 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;
(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F = \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集.
(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n(\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = (0, 1]$. 此例还说明

$$[0,1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0,1]\,.$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}\end{aligned}$$

可知, 若 F_1, F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$. 即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 1.17 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k,F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切} k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

1.4.2 开集

定义 1.29 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 1.18 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G=\bigcap_{k=1}^{m}G_k$ 是开集（有限个开集的交集是开集）;

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c(\alpha\in I)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcap_{\alpha\in I}G_\alpha^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcup_{k=1}^{m}G_k^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x\in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x\notin G^c$, 可知存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.

反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$, 则

$$B(x,\delta)\cap G^c=\varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 1.30 (内点与边界点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 对 $x\in E$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x\in\overline{E}$ 但 $x\notin\mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E.

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 1.19 ($\mathbb{R}^n$ 中的非空开集的性质)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间（这里也包括 $(-\infty,a)$,$(b,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$）的并集;

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta>0$, 使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset G$. 现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

（这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$）, 显然 $a'<a<a''$ 且 $(a',a'')\subset G$. 这是因为对区间 (a',a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a'<z\leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a'<x<z$ 且 $(x,a)\subset G$, 即 $z\in G$. 我们称这样的开区间 (a',a'') 为 G（关于点 a）的构成区间 I_a.

如果 $I_a=(a',a'')$,$I_b=(b',b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a<b$. 若

$$I_a\cap I_b\neq\varnothing,$$

则有 $b'<a''$. 于是令 $\min\{a',b'\}=c$,$\max\{a'',b''\}=d$, 则有 $(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$. 取 $x\in I_a\cap I_b$, 则 $I_x=(c,d)$ 是构成区间, 且

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G\setminus\bigcup_{J\in H_0}J$$

（J 表示半开闭二进方体）内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k(k=0,1,2,\cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体. 这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x\mathbb{R}^n, k \right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x,x') < 1/k$, 其中 $k > 2/\delta$, 从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x,\delta) \subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x', 1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 1.31 (开覆盖)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x \in E$, 存在 $G \in \Gamma$, 使得 $x \in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ（关于 E）的一个**子覆盖**. ♣

引理 1.2

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖. ♡

定理 1.20 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 1.2, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1}(k=1,2,\cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F \subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0 \in L_k(k=1,2,\cdots)$, 即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c(k = 1,2,\cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 1.21

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集.

证明 设 $y \in E^c$, 则对于每一个 $x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing.$$

显然,$\{B(x, \delta_x) : x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 1.32 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**.

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 1.21表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 1.33 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续）. 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$.

命题 1.11 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

1.4.3 Borel 集

定义 1.34 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集.

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 1.2 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$$

为 F_σ 集.

第 2 章 Lebesgue 测度

2.1 Lebesgue 外测度

定义 2.1 (区间的长度)

设 I 为实数的非空区间, 若 I 是无界的, 则定义它的长度 $\ell(I)$ 为 ∞, 否则定义它的长度为端点的差.

笔记 设 I 为实数的非空区间, 显然 I 的长度满足

(1) $\ell(I) \geqslant 0$.

(2) $\ell(I)$ 满足平移不变性, 即 $\ell(I) = \ell(I+y), \forall y \in \mathbb{R}$.

定义 2.2 (Lebesgue 外测度)

设覆盖 A 的非空开有界区间的可数集族 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, 即使得 $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. 定义 A 的 **Lebesgue 外测度** $m^*(A)$ 为这些区间长度之和的下确界, 即

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

命题 2.1 (常见集合的 Lebesgue 外测度)

(1) 外测度是非负的.

(2) 空集的外测度为 0.

(3) 由可数个点构成的集合的外测度等于 0.

(4) 区间的外测度等于区间的长度.

证明

(1) 由区间长度的非负性立得.

(2) 注意到 $(0, \frac{1}{n}) \supset \varnothing$, 则

$$0 \leq m^*(\varnothing) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$$

因此 $m^*(\varnothing) = 0$.

(3) 设 $a_1, \cdots, a_m, \cdots \in \mathbb{R}, A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$. 任取 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\bigcup_{1 \leq m \leq n} \left(a_i - \frac{1}{2n2^m}, a_i + \frac{1}{2n2^m} \right) \supset A$$

于是

$$m^*(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n2^m} = \frac{1}{n}$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$0 \leq m^*(A) \leq 0.$$

因此 $m^*(A) = 0$.

(4) 我们从闭有界区间 $[a,b]$ 的情形开始. 令 $\varepsilon > 0$. 由于开区间 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 包含 $[a,b]$, 我们有 $m^*([a,b]) \leqslant \ell((a-\varepsilon, b+\varepsilon)) = b-a+2\varepsilon$. 这对任何 $\varepsilon > 0$ 成立. 因此 $m^*([a,b]) \leqslant b-a$. 接下来要证明 $m^*([a,b]) \geqslant b-a$.

而这等价于证明: 若 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任何覆盖 $[a,b]$ 的可数开有界区间族, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \geqslant b-a \tag{2.1}$$

根据 Heine - Borel 定理, 任何覆盖 $[a,b]$ 的开区间族有一个覆盖 $[a,b]$ 的有限子族. 选取自然数 n 使得 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 覆盖 $[a,b]$. 我们将证明

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant b-a \tag{2.2}$$

从而(2.1)成立. 由于 a 属于 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$, 这些 I_k 中必有一个包含 a. 选取这样的一个区间且记为 (a_1,b_1). 我们有 $a_1 < a < b_1$. 若 $b_1 \geqslant b$, 不等式(2.2)得证, 这是因为

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant b_1 - a_1 > b-a$$

否则,$b_1 \in [a,b]$, 且由于 $b_1 \notin (a_1,b_1)$, 族 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 中存在一个区间, 记为 (a_2,b_2) 以区分于 (a_1,b_1), 使得 $b_1 \in (a_2,b_2)$, 即 $a_2 < b_1 < b_2$. 若 $b_2 \geqslant b$, 不等式(2.2)得证, 这是因为

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant (b_1-a_1)+(b_2-a_2) = b_2-(a_2-b_1)-a_1 > b_2-a_1 > b-a$$

我们继续这一选取程序直至它终止, 而它必须终止, 因为族 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 中仅有 n 个区间. 因此我们得到 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 的一个子族 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{N}$ 使得

$$a_1 < a$$

而对 $1 \leqslant k \leqslant N-1$,

$$a_{k+1} < b_k$$

且由于选取过程终止,

$$b_N > b$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) &\geqslant (b_N-a_N)+(b_{N-1}-a_{N-1})+\cdots+(b_1-a_1)\\ &= b_N-(a_N-b_{N-1})-\cdots-(a_2-b_1)-a_1\\ &> b_N-a_1 > b-a\end{aligned}$$

因而不等式(2.2)成立.

若 I 是任意有界区间, 则给定 $\varepsilon>0$, 存在两个闭有界区间 J_1 和 J_2 使得

$$J_1 \subseteq I \subseteq J_2$$

而

$$\ell(I)-\varepsilon < \ell(J_1) \text{ 且} \ell(J_2) < \ell(I)+\varepsilon$$

根据对闭有界区间的外测度与长度的相等性, 以及外测度的单调性, 有

$$\ell(I)-\varepsilon < \ell(J_1) = m^*(J_1) \leqslant m^*(I) \leqslant m^*(J_2) = \ell(J_2) < \ell(I)+\varepsilon$$

这对每个 $\varepsilon>0$ 成立. 因此 $\ell(I)=m^*(I)$.

若 I 是无界区间, 则对每个自然数 n, 存在区间 $J \subseteq I$ 满足 $\ell(J)=n$. 因此 $m^*(I) \geqslant m^*(J) = \ell(J) = n$. 这对每个自然数 n 成立, 因此 $m^*(I)=\infty$.

□

命题 2.2 (Lebesgue 外测度的平移不变性)

外测度是平移不变的, 即对任意集合 A 与数 y,

$$m^*(A+y)=m^*(A)$$

证明 观察到若 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任意可数集族, 则 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 A 当且仅当 $\{I_k+y\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 $A+y$. 此外, 若每个 I_k 是一个开区间, 则每个 I_k+y 是一个相同长度的开区间, 因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k+y)$$

结论从这两个观察可以得到. □

命题 2.3 (Lebesgue 外测度的可数次可加性)

外测度是可数次可加的, 即若 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任意可数集族, 互不相交或相交, 则

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$$

注 外测度不是可数可加的, 它甚至不是有限可加的.

证明 若这些 E_k 中的一个有无穷的外测度, 则不等式平凡地成立. 我们因此假定每个 E_k 有有限的外测度. 令 $\varepsilon>0$. 对每个自然数 k, 存在开有界区间的可数族 $\{I_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$E_k\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{k,i}\text{ 且 }\sum_{i=1}^{\infty}l(I_{k,i})<m^*(E_k)+\varepsilon/2^k$$

现在 $\{I_{k,i}\}_{1\leqslant k,i\leqslant\infty}$ 是一个覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 的开有界区间的可数族: 由于该族是可数族组成的可数族, 它是可数的. 因此, 根据外测度的定义,

$$\begin{aligned}m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)&\leqslant\sum_{1\leqslant k,i<\infty}\ell(I_{k,i})=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\ell(I_{k,i})\right]\\&<\sum_{k=1}^{\infty}\left[m^*(E_k)+\varepsilon/2^k\right]=\left[\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)\right]+\varepsilon\end{aligned}$$

由于这对每个 $\varepsilon>0$ 成立, 它对 $\varepsilon=0$ 也成立. 证明完毕.

若 $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ 是任何有限集族, 互不相交或相交, 则

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}m^*(E_k)$$

通过对 $k>n$ 设 $E_k=\varnothing$, 有限次可加性从可数次可加性得到. □

2.2 Lebesgue 可测集的 σ 代数

定义 2.3 (可测)

集合 E 称为在 $\mathbb{R}$ 中是**可测的**或是 $\mathbb{R}$ 中的一个**可测集**, 或称 E 满足卡拉西奥多里 (Carathéodory) 条件, 若对任意集合 A,

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)=m^*(A\cap E)+m^*(A-E).$$

命题 2.4 (可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}$, 则 E 是可测集当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}$ 有

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E).$$

证明 由可测的定义可知, 我们只须证明小于等于号的关系恒成立. 注意到 $A = (A \cap E) \cup (A - E)$, 由于Lebesgue 外测度的可数次可加性, 我们有

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A - E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

此即得证. □

命题 2.5 (可测集的性质)

(1) 空集与 $\mathbb{R}$ 是可测的.
(2) 可测集的补是可测的.
(3) 任何外测度为零的集合是可测的. 特别地, 任何可数集是可测的.
(4) 可数个可测集的并是可测的.

证明

(1) 由可测的定义易得.
(2) 由可测的定义易得.
(3) 令集合 E 的外测度为零. 令 A 为任意集合. 由于

$$A \cap E \subseteq E \text{ 且} A \cap E^C \subseteq A$$

根据外测度的单调性,

$$m^*(A \cap E) \leqslant m^*(E) = 0 \text{ 且} m^*(A \cap E^C) \leqslant m^*(A)$$

因此

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geqslant m^*(A \cap E^C) = 0 + m^*(A \cap E^C) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) \end{aligned}$$

从而由可测的充要条件可知,E 是可测的.
(4)

□