## 0.1 多变元二次型的计算

**例题 0.1** 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$$

**解** 解法一:

解法二:为了方便起见, 不妨考虑 $2f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&&&\\1&0&1&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&1&0\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{A}(n\geq 2)$, $\boldsymbol{S}_1$ 为一阶零矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $2\times(n-2)$ 矩阵, 其中第 $(2,1)$ 元素为 1, 其他元素为 0. 对 $\boldsymbol{S}_n$ 进行如下分块, 并利用非异阵 $\boldsymbol{S}_2$ 对称地消去同行同列的矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}'$, 经计算可知 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, 故 $\boldsymbol{S}_n$ 合同于下列分块对角矩阵:

$$\boldsymbol{S}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}'&\boldsymbol{S}_{n-2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{S}_{n-2}-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{S}_{n-2}\end{pmatrix}$$

因此, 由数学归纳法可知, 当 $n=2k$ 时, $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_2\}$, 其中有 $k$ 个 $\boldsymbol{S}_2$; 当 $n=2k+1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_1\}$, 其中有 $k$ 个 $\boldsymbol{S}_2$. 注意到 $\boldsymbol{S}_2$ 合同于 $\mathrm{diag}\{1,-1\}$, 故当 $n=2k$ 时, $f$ 的规范标准型为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2$; 当 $n=2k+1$ 时, $f$ 的规范标准型为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$. □

**例题 0.2** 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$$

**解** 解法一:

解法二:

解法三:为了方便起见, 不妨考虑 $2f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{pmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k$ 个顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|$ 的每行元素之和都为 $k+1$, 故用求和法可求出 $|\boldsymbol{A}_k|=k+1(1\leq k\leq n)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵. 因此 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定型, 其规范标准型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$. □

**例题 0.3** 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n(x_i-s)^2,\quad s=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

**证明** 解法一:

解法二:令 $y_i=x_i-s(1\leq i\leq n)$, 用矩阵表示就是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{n-1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&\frac{n-1}{n}&\cdots&-\frac{1}{n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&\cdots&\frac{n-1}{n}\end{pmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k$ 个顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|$ 的每行元素之和都为 $(n-k)/n$, 故用求和法可求出 $|\boldsymbol{A}_k|=(n-k)/n(1\le k\le n)$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$. 由命题**??**可知 $\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 于是半正定型 $f$ 的正惯性指数等于 $n-1$, 其规范标准型为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-1}^2$.

解法三: 显然 $f(\boldsymbol{x})$ 是半正定型, 并且由线性方程组 $Ax=O$ 可以解得 $\mathrm{Ker}f(\boldsymbol{x})=\{(c,c,\cdots,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$ 的维数等于 1(实际上,$\dim\mathrm{Ker}f(\boldsymbol{x})=\mathrm{r}(A)=1$), 故由命题**??**可知 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范标准型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$. □

**例题 0.4** 化下列实二次型为标准型, 其中 $a_i$ 都是实数:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1-a_1x_2)^2+(x_2-a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-a_{n-1}x_n)^2+(x_n-a_nx_1)^2$$

证明 解法一:

解法二:令 $y_i=x_i-a_ix_{i+1}(1\le i\le n-1)$, $y_n=x_n-a_nx_1$, 用矩阵表示就是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & & & \\ & 1 & -a_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -a_{n-1} \\ -a_n & & & & 1 \end{pmatrix}$$

经计算可知 $|\boldsymbol{A}|=1-a_1a_2\cdots a_n$ 并且 $\boldsymbol{A}$ 的左上角的 $n-1$ 阶子式等于 1, 于是由命题**??**可知, 当 $a_1a_2\cdots a_n=1$ 时, $\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, $f$ 的规范标准型为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-1}^2$; 当 $a_1a_2\cdots a_n\ne1$ 时, $\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, $f$ 的规范标准型为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$.

解法三: 显然 $f(\boldsymbol{x})$ 是半正定型. 解线性方程组 $Ax=O$ 可得, 当 $a_1a_2\cdots a_n\ne1$ 时,$\mathrm{Ker}f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{0}\}$, 故 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范标准型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$; 当 $a_1a_2\cdots a_n=1$ 时,$\mathrm{Ker}f(\boldsymbol{x})=\{(c,a_2\cdots a_nc,\cdots,a_nc)\mid c\in\mathbb{R}\}$ 的维数等于 1(实际上,$\dim\mathrm{Ker}f(\boldsymbol{x})=\mathrm{r}(A)=1$), 故由命题**??**可知 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范标准型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$. □