0.1 矩阵的迹

命题 0.1 (矩阵迹的性质)

设 A, B 是 n 阶矩阵, 则有:

1. (线性)$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$,$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)$;
2. (对称性)$\mathrm{tr}(A')=\mathrm{tr}(A)$;
3. (交换性)$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

证明 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证. □

命题 0.2 (矩阵迹的刻画)

设 K 为数域, $f: M_n(K)\to K$ 为一个映射, 且满足

(1) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in M_n(K), f(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=f(\boldsymbol{A})+f(\boldsymbol{B})$;

(2) $\forall k\in K, \boldsymbol{A}\in M_n(K), f(k\boldsymbol{A})=kf(\boldsymbol{A})$;

(3) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in M_n(K), f(\boldsymbol{AB})=f(\boldsymbol{BA})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n)=n$.

求证:f 就是迹映射, 即 $f(A)=\mathrm{tr}(A)$ 对一切 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵 A 成立.

笔记 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

证明 设 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n=f(I_n)=f(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{nn})=f(E_{11})+f(E_{22})+\cdots+f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj}),$$

所以 $f(E_{ii})=1(1\leqslant i\leqslant n)$. 另一方面, 若 $i\neq j$, 则

$$f(E_{ij})=f(E_{i1}E_{1j})=f(E_{1j}E_{i1})=f(O)=f(0\cdot I_n)=0\cdot f(I_n)=0.$$

设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 则

$$f(A)=f\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^n a_{ii}=\mathrm{tr}(A).$$

□

例题 0.1 求证: 不存在 n 阶矩阵 A, B, 使得 $AB-BA=kI_n(k\neq 0)$.

证明 用反证法证明. 若存在 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $AB-BA=kI_n(k\neq 0)$, 则

$$kn=\mathrm{tr}(kI_n)=\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$$

矛盾. □

命题 0.3

设 A 是 n 阶矩阵,P 是同阶可逆阵, 求证:$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$, 即相似矩阵具有相同的迹.

证明 因为 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, 故 $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})=\mathrm{tr}(A)$. □

命题 0.4

1. 设 n 阶实矩阵 A 适合 $A'=-A$, 如果存在同阶实矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$;
2. 设 n 阶复矩阵 A 适合 $\overline{A}'=-A$, 如果存在同阶复矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$.

证明

1. 在等式 $AB = B$ 两边同时左乘 B' 可得
$$B'AB = B'B.$$
上式两边同时转置并注意到 $A' = -A$, 可得
$$B'B = (B'B)' = (B'AB)' = B'A'B = -B'AB = -B'B,$$
从而有 $B'B = O$. 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得 $B = O$.

2. 证明与 1 类似.

□

命题 0.5

1. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AA') \geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $A = O$.
2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则 $\mathrm{tr}(A\overline{A}') \geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $A = O$.

证明 1. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则通过计算可得
$$\mathrm{tr}(AA') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0,$$
等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$, 即 $A = O$.

2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则通过计算可得
$$\mathrm{tr}(A\overline{A}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geqslant 0,$$
等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$, 即 $A = O$. □

命题 0.6

设 A 为 n 阶实矩阵, 求证:$\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(AA')$, 等号成立当且仅当 A 是对称阵.

证明 根据命题 0.5, 再由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得
$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \mathrm{tr}((A - A')(A - A')') \\
&=\mathrm{tr}((A - A')(A' - A)) = \mathrm{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) \\
&=2\mathrm{tr}(AA') - 2\mathrm{tr}(A^2),
\end{aligned}$$
故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知 $A - A' = O$, 即 A 为对称阵. 若已知 A 为对称阵, 则 $\mathrm{tr}(AA') = \mathrm{tr}(A^2)$ 显然成立. □

例题 0.2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是实对称阵且 $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2 = O$, 证明: 每个 $A_i = O$.

证明 对题设中的等式两边同时取迹, 可得
$$0 = \mathrm{tr}(O) = \mathrm{tr}(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2) = \mathrm{tr}(A_1A_1') + \mathrm{tr}(A_2A_2') + \cdots + \mathrm{tr}(A_kA_k').$$
又由于 $\mathrm{tr}(A_iA_i') \geqslant 0$, 从而只可能是 $\mathrm{tr}(A_iA_i') = 0(1 \leqslant i \leqslant k)$, 再次由零矩阵的充要条件可得 $A_i = O(1 \leqslant i \leqslant k)$. □

命题 0.7

设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 使得 $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CBA)$ 对任意 n 阶矩阵 C 成立, 求证:$AB = BA$.

证明 设 $AB = (d_{ij}), BA = (e_{ij})$, 令 $C = E_{kl}(1 \leqslant k, l \leqslant n)$, 则
$$\mathrm{tr}(ABC) = d_{lk}, \mathrm{tr}(CBA) = e_{lk},$$
因此 $d_{lk} = e_{lk}(1 \leqslant k, l \leqslant n)$, 即有 $AB = BA$. □

注 注若 A, B 是实 (复) 矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得 $\mathrm{tr}((AB -$

$BA)C) = 0$, 令 C 为 $AB - BA$ 的转置 (共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

例题 0.3 若 n 阶实方阵 A 满足 $AA' = I_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 A, B 满足 $A^2 = cAB + B^2$, 其中 c 是非零常数.

证明 用反证法, 设存在 n 阶正交阵 A, B, 使得 $A^2 = cAB + B^2(c \neq 0)$. 在等式两边同时左乘 A', 右乘 B', 可得 $AB' = cI_n + A'B$, 从而 $cI_n = A'B - AB'$. 两边同时取迹, 可得 $0 \neq nc = \mathrm{tr}(cI_n) = \mathrm{tr}(A'B) - \mathrm{tr}(AB') = \mathrm{tr}((A'B)') - \mathrm{tr}(AB') = \mathrm{tr}(B'A) - \mathrm{tr}(AB') = 0$, 矛盾. □

例题 0.4 设 A, B 为 n 阶实对称阵, 证明:$\mathrm{tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$, 并求等号成立的充要条件.

证明 证法一: 由命题 0.6, 再结合 A, B 的对称性可得

$$\mathrm{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \mathrm{tr}\left((AB)(AB)'\right) = \mathrm{tr}\left(ABBA\right) = \mathrm{tr}\left(A^2B^2\right).$$

等号成立当且仅当 AB 也为实对称矩阵, 即 $AB = B'A' = BA$.

证法二:证法 2 设 P 为正交矩阵, 使得 $P'AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A \mapsto P'AP$,$B \mapsto P'BP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 A 为正交相似标准型 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 设 $B = (b_{ij})$, 则经计算可知

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2B^2) - \mathrm{tr}((AB)^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 b_{ij}^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j b_{ij}^2 \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j) b_{ij}^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 b_{ij}^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leqslant i < j \leqslant n)$, 这也当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 即当且仅当 $AB = BA$ 成立. □