0.1 实正规矩阵的正交相似标准型

引理 0.1

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正规矩阵. 若 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 A 的特征值, 则 $\overline{\lambda}$ 是 A^T 的特征值, 且 A 和 A^T 有分别属于 $\lambda,\overline{\lambda}$ 的相同的特征向量.

证明 设 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, 注意到

$$\begin{aligned}&A\alpha=\lambda\alpha\iff(A-\lambda E)\alpha=0\overset{\text{注意内积的性质}}{\iff}\alpha^*(A^T-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)\alpha=0\\&\overset{\text{矩阵乘法之后利用正规定义}}{\iff}\alpha^*(A-\lambda E)(A^T-\overline{\lambda}E)\alpha=0\iff(A^T-\overline{\lambda}E)\alpha=0\\&\iff A^T\alpha=\overline{\lambda}\alpha,\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

定理 0.1 (实正规矩阵的正交相似标准型)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实正规矩阵. 设 A 的全部特征值是

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,a_1\pm ib_1,a_2\pm ib_2,\cdots,a_t\pm ib_t,$$

这里

$$\lambda_i,a_j\in\mathbb{R},b_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\},1\le i\le s,1\le j\le t,$$

且允许相同. 记

$$c_j=-2a_j,d_j=a_j^2+b_j^2,$$

$$R_j=\begin{pmatrix}a_j&-b_j\\b_j&a_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}a_j&b_j\\-b_j&a_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0&-d_j\\1&-c_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0&1\\-d_j&-c_j\end{pmatrix},$$

则存在实正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_s&&&\\&&&R_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&R_t\end{pmatrix}.\tag{1}$$

也存在实正交矩阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix}I_{r_1}&&&&&\\&-I_{r_2}&&&&\\&&O&&&\\&&&R_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&R_t\end{pmatrix},$$

其中 1 的个数与 A 的正实数特征值的个数相同,-1 的个数与 A 的负实数特征值的个数相同,0 的个数与 A 的零特征值个数相同.

笔记 读者应该仔细计算(1)中每个块对应的特征值. 本结果如果不是被直接考察, 可以直接使用.

证明 **Step1** 当 $n=1$ 时命题是显然的. 对 $n=2$ 时证明蕴含在下面证明中. 假定命题对于小于等于 $n-1$ 的所有实正规矩阵成立, 现在考虑 n 阶正规矩阵. 证明的想法就是降阶之后用归纳假设.

Step2 若 A 有实特征值 λ, 取 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 是 A 的单位特征向量, 并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 则在这组基下有

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

现在由 $A^T A = AA^T$ 知

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda C \\ \lambda C^T & C^T C + H^T H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + CC^T & CH^T \\ HC^T & HH^T \end{pmatrix}.$$

于是

$$CC^T = 0 \overset{\text{命题??}}{\Longrightarrow} C = 0 \Longrightarrow H^T H = HH^T,$$

故 H 是 $n-1$ 阶实正规矩阵, 此时用归纳假设即得存在 $n-1$ 阶实正交矩阵 T_1, 使得 $T_1^T H T_1$ 形如(1)右边矩阵的形状. 于是可取 $T = \mathrm{diag}\{1, T_1\}$, 即得(1).

Step3 若 A 有特征值 $a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 则存在不同时为 0 的 $\beta, \eta \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$A(\beta + i\eta) = (a + bi)(\beta + i\eta) \iff \begin{cases} A\beta = a\beta - b\eta \\ A\eta = a\eta + b\beta \end{cases} \iff A(\beta\ \eta) = (\beta\ \eta) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

于是式(2)暗示我们想到 β, η 是标准正交的.

Step4 由引理 0.1, 我们知道 $A^T(\beta + i\eta) = (a - bi)(\beta + i\eta)$, 于是类似(2)可得

$$\begin{cases} A\beta = a\beta - b\eta \\ A\eta = a\eta + b\beta \end{cases}, \begin{cases} A^T\beta = a\beta + b\eta \\ A^T\eta = a\eta - b\beta \end{cases}.$$

由此可得

$$\begin{cases} \beta^T A\beta = a\beta^T\beta - b\beta^T\eta \\ \beta^T A\beta = a\beta^T\beta + b\eta^T\beta \end{cases} \Longrightarrow \beta^T\eta + \eta^T\beta = 0 \overset{\text{都是数字}}{\Longrightarrow} \beta^T\eta = \eta^T\beta = 0,$$

以及

$$\begin{cases} \eta^T A^T\beta = a\eta^T\beta + b\eta^T\eta \\ \beta^T A\eta = a\beta^T\eta + b\beta^T\beta \end{cases} \Longrightarrow \eta^T\eta = \beta^T\beta.$$

因此 β, η 是想要的正交的. 不妨设为单位向量并将其扩充到全空间构成标准正交基. 则在这组基下, A 形如

$$\begin{pmatrix} a & -b & C_1 \\ b & a & C_2 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}.$$

类似实特征值的情况, 我们直接矩阵乘法可得 $C_1 = C_2 = 0, H$ 正规. 于是类似由归纳假设即可得(1). 我们完成了证明.

□

命题 0.1

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 求证: $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为奇数.

注 这个命题的直接推论是: 若正交矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$. 这一结论也可由第 2 章矩阵的技巧 (类似于例 2.19 的讨论) 来得到. 又因为正交矩阵行列式的值等于 1 或 -1, 故例 9.119 的等价命题为: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为偶数.

证明 因为正交矩阵的逆矩阵以及正交矩阵的乘积都是正交矩阵, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 还是正交矩阵. $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 等价于 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}| = -1$, 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{I}_n)$, 故只要证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$ 为奇数即可. 下面给出两种证法.

证法一:设 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_r & -\sin\theta_r\\ \sin\theta_r & \cos\theta_r\end{pmatrix},1,\cdots,1,-1,\cdots,-1\right\},$$

其中 $\sin\theta_i\neq 0(1\leqslant i\leqslant r)$, 且有 s 个 1, t 个 -1. 于是 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^t$, 并且

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}1+\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & 1+\cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1+\cos\theta_r & -\sin\theta_r\\ \sin\theta_r & 1+\cos\theta_r\end{pmatrix},2,\cdots,2,0,\cdots,0\right\},$$

从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=n-t$. 因此 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 当且仅当 t 为奇数, 即当且仅当 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)$ 为奇数.

证法二:由于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是复正规矩阵, 从而酉相似于对角矩阵, 特别地, $\boldsymbol{A}$ 可复对角化. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是模长等于 1 的复数, 故或者是模长等于 1 的共轭虚特征值, 或者是 ±1. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1 的几何重数 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=t$, 则其代数重数也为 t, 于是 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^t=-1$ 当且仅当 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=t$ 为奇数.

□