0.1 其他

✍ **练习 0.1** 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(A)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 A 成立:$f(PAP^{-1})=f(A)$. 证明: 存在非零常数 c, 使得 $P'P=cI_n$.

证明 证法一: 由假设知 $f(A)=\mathrm{tr}(AA')$, 因此

$$f(PAP^{-1})=\mathrm{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P')=\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\mathrm{tr}(AA').$$

以下设 $P'P=(c_{ij})$,$(P'P)^{-1}=(d_{ij})$. 注意 $P'P$ 是对称矩阵, 后面要用到. 令 $A=E_{ij}$, 其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$. 并将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$$\begin{aligned}(P'P)A(P'P)^{-1}A' &= (P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji}\\ &= \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & c_{1i} & \\ & c_{2i} & \\ & \vdots & \\ & c_{ii} & \\ & \vdots & \\ & c_{ni} & \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & d_{1j} & \\ & d_{2j} & \\ & \vdots & \\ & d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & d_{nj} & \end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & c_{1i}d_{jj} & \\ & c_{2i}d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & c_{ii}d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & c_{ni}d_{jj} & \end{pmatrix}\end{array}\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}\left(\left(P'P\right)A\left(P'P\right)^{-1}A'\right)=c_{ii}d_{jj}$. 而 $\mathrm{tr}\left(AA'\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ij}E_{ji}\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ii}\right)=1$. 则由 $\mathrm{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\mathrm{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj}=1. \tag{1}$$

再令 $A=E_{ij}+E_{kl}$, 其中 $1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$. 不妨设 $k\geqslant i,l\geqslant j$, 将其代入 $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$ 可得

$(P'P)A(P'P)^{-1}A'=(P'P)(E_{ij}+E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji}+E_{lk})$

$$=\left[\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & c_{1i} & \\ & c_{2i} & \\ & \vdots & \\ & c_{ii} & \\ & \vdots & \\ & c_{ki} & \\ & \vdots & \\ & c_{ni} & \end{pmatrix}\end{array}+\begin{array}{c} l \\ \begin{pmatrix} & c_{1k} & \\ & c_{2k} & \\ & \vdots & \\ & c_{ik} & \\ & \vdots & \\ & c_{kk} & \\ & \vdots & \\ & c_{nk} & \end{pmatrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & d_{1j} & \\ & d_{2j} & \\ & \vdots & \\ & d_{jj} & \\ & \vdots & \\ & d_{lj} & \\ & \vdots & \\ & d_{nj} & \end{pmatrix}\end{array}+\begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} & d_{1l} & \\ & d_{2l} & \\ & \vdots & \\ & d_{jl} & \\ & \vdots & \\ & d_{ll} & \\ & \vdots & \\ & d_{nl} & \end{pmatrix}\end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & j & & l \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & i & & k \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & i & & k \end{array}\\
=\begin{pmatrix}
c_{1i} & \cdots & c_{1k}\\
c_{2i} & \cdots & c_{2k}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ii} & \cdots & c_{ik}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ki} & \cdots & c_{kk}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ni} & \cdots & c_{nk}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
d_{1j} & \cdots & d_{1l}\\
d_{2j} & \cdots & d_{2l}\\
\vdots & & \vdots\\
d_{jj} & \cdots & d_{jl}\\
\vdots & & \vdots\\
d_{lj} & \cdots & d_{ll}\\
\vdots & & \vdots\\
d_{nj} & \cdots & d_{nl}
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
c_{1i}d_{jj}+c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl}+c_{1k}d_{ll}\\
c_{2i}d_{jj}+c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl}+c_{2k}d_{ll}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ii}d_{jj}+c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl}+c_{ik}d_{ll}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ki}d_{jj}+c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl}+c_{kk}d_{ll}\\
\vdots & & \vdots\\
c_{ni}d_{jj}+c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl}+c_{nk}d_{ll}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

从而 $\operatorname{tr}\left(\left(P'P\right)A\left(P'P\right)^{-1}A'\right)=c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}$. 而

$$\operatorname{tr}\left(AA'\right)=\operatorname{tr}\left(\left(E_{ij}+E_{kl}\right)\left(E_{ji}+E_{lk}\right)\right)=\operatorname{tr}\left(E_{ij}E_{ji}+E_{ij}E_{lk}+E_{kl}E_{ji}+E_{kl}E_{lk}\right)=2+2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

于是由 $\operatorname{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A')=\operatorname{tr}(AA')$ 可知

$$c_{ii}d_{jj}+c_{kk}d_{ll}+c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}=2+2\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{2}$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号. 由上述(1)(2)两式可得

$$c_{ki}d_{jl}+c_{ik}d_{lj}=2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

在上式中令 $j=l,i\neq k$, 注意到 $d_{jj}\neq 0$, 故有 $c_{ik}+c_{ki}=0$, 又因为 $P'P$ 是对称矩阵, 所以 $c_{ik}=c_{ki}$. 故 $c_{ik}=0,\forall i\neq k$. 于是 $P'P$ 是一个对角矩阵, 从而由(1)式可得 $d_{jj}=c_{jj}^{-1}$, 由此可得 $c_{ii}=c_{jj},\forall i,j$. 因此 $P'P=cI_n$, 其中 $c=c_{11}\neq 0$.

证法二: 我们把数域限定在实数域上, 并取 $V=M_n(\mathbb{R})$ 上的 Frobenius 内积, 则 $f(A)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2=\|A\|^2$. 设 $\varphi(A)=PAP^{-1}$ 为 V 上的线性变换, 则题目条件可改写为 $\|\varphi(A)\|=\|A\|$ 对任意的 $A\in V$ 成立, 于是由定理**??**-2 可知 φ 是正交算子, 从而由命题**??**(2) 即得结论. □

0.1.1 矩阵方幂的计算

计算方阵的方幂一般有三种方法:

(1) 基于相似变换的计算法, 更常见的情形是利用相似标准形 (比如 Jordan 标准形) 来进行计算.

(2) 利用递推公式法或者说数学归纳法.

(3) 基于方阵分解. 然后利用二项式定理来进行计算.

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 求 $\boldsymbol{AB}$.

解 由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 得到

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, 所以

$$\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA},$$

从而

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BA},$$

即

$$\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{ABA};$$

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{A},$$

即

$$ABA = -BA \quad 或 \quad BA = -ABA,$$

因此

$$AB = BA.$$

由此得到 $2AB = O$, 故有 $AB = O$. □

例题 0.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$B = Q^{-1}AQ$, 其中 Q 为任意 3 阶可逆矩阵 (或者说 B 与 A 相似). 求 $B^{2024} - 2A^2$.

解 计算得到

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^4 = E$. 故 $B^{2024} = Q^{-1}A^{2024}Q = E$. 所以

$$B^{2024} - 2A^2 = E - 2\begin{pmatrix} -E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

k 为正整数, 求 A^k.

解 注意到 $A^2 = 4E = 2^2E$, 所以

$$A^3 = A^2 \cdot A = 4A = 2^2A, \quad A^4 = 2^4E.$$

故由归纳法可知

$$A^k = \begin{cases} 2^{k-1}A, & k \text{ 为奇数}, \\ 2^kE, & k \text{ 为偶数}. \end{cases}.$$

□

例题 0.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{100}.

解 设

$$A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&2&0\\0&3&2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

则 A 可写为如下分块形式:

$$A=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix},$$

于是

$$A^{100}=\begin{pmatrix}A_1^{100}&\\&A_2^{100}\end{pmatrix}.$$

将 A_1,A_2 分解为

$$A_1=2E+3S,\quad 其中\quad S=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};$$

$$A_2=E+2H,\quad 其中\quad H=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

注意到 S 与 E, H 与 E 均可交换且

$$S^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad S^i=O\ (i\geqslant 3),\quad H^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H^i=O\ (i\geqslant 3).$$

由二项式定理

$$\begin{aligned}A_1^{100}&=(2E+3S)^{100}=\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}(2E)^{100-i}(3S)^i\\&=\binom{100}{0}(2E)^{100}+\binom{100}{1}(2E)^{99}\cdot 3S+\binom{100}{2}(2E)^{98}(3S)^2\\&=2^{100}E+300S\cdot 2^{99}E+\frac{100\times 99}{2}\cdot 9S^2\cdot 2^{98}E\\&=2^{100}E+300\cdot 2^{99}\cdot S+50\cdot 99\cdot 9\cdot 2^{98}\cdot S^2\\&=\begin{pmatrix}2^{100}&0&0\\3\cdot 5^2\cdot 2^{101}&2^{100}&0\\11\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 2^{99}&3\cdot 5^2\cdot 2^{101}&2^{100}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2^{100}&=(E+2H)^{100}=E^{100}+100\cdot E^{99}\cdot(2H)+\frac{100\times 99}{2}\cdot E^{98}\cdot(2H)^2\\&=E+200H+19800H^2\\&=\begin{pmatrix}1&200&19800\\0&1&200\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\cdot 5^2\cdot 2^{101} & 2^{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 2^{99} & 3\cdot 5^2\cdot 2^{101} & 2^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 200 & 19800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

0.1.2 矩阵可逆的判定及计算

求逆矩阵的方法通常有下面三种.

(1) 公式法, 利用公式 $A\cdot A^*=|A|E$, 即 $A\cdot\dfrac{1}{|A|}A^*=E$, 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

(2) 初等行变换法, 即

$$(A|E)\longrightarrow(E|P),$$

则 $A^{-1}=P$.

(3) 定义法, 由 $AX=E$ 求出 X.

若矩阵 A 没有具体给出, 是抽象的, 则首先想到的是用定义来求 A^{-1}.

命题 0.1

设 A 为 n 阶矩阵. 则有

$$\begin{aligned} A\text{ 可逆} &\Leftrightarrow \exists B\text{ 使得}BA=E \\ &\Leftrightarrow \exists C\text{ 使得}AC=E \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n \\ &\Leftrightarrow A\sim E \\ &\Leftrightarrow A\text{ 的最简行阶梯形为}E \\ &\Leftrightarrow |A|\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}Ax=\mathbf{0}\text{ 只有零解} \\ &\Leftrightarrow \text{线性方程组}Ax=b\text{ 有唯一解} \\ &\Leftrightarrow A\text{ 的特征值均不为}0 \\ &\Leftrightarrow A\text{ 的伴随矩阵}A^*\text{ 可逆} \\ &\Leftrightarrow A\text{ 是一些初等矩阵之积.} \end{aligned}$$

例题 0.5 设 A,B 均为 n 阶方阵. 若 $E-BA$ 可逆, 证明 $E-AB$ 可逆, 并求其逆.

解 解法一: 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E-AB & O \\ B & E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ B & E-BA \end{pmatrix}.$$

因此

$$\left|\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix}\right| = |E - AB| = |E - BA|.$$

由于 $E - BA$ 可逆, 即 $|E - BA| \neq 0$, 所以 $|E - AB| \neq 0$, 因此 $E - AB$ 可逆. 下面进一步求 $(E - AB)^{-1}$. 由于

$$\begin{aligned} AB &= A(E - BA)(E - BA)^{-1}B \\ &= (A - ABA)(E - BA)^{-1}B \\ &= (E - AB)A(E - BA)^{-1}B, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &(E - AB)(E + A(E - BA)^{-1}B) \\ =&(E - AB) + (E - AB)A(E - BA)^{-1}B \\ =&E - AB + AB = E. \end{aligned}$$

进而

$$(E - AB)^{-1} = E + A(E - BA)^{-1}B.$$

解法二 (打洞原理):证明对 $\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}$ 作分块初等变换

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_m - BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - AB & O \\ O & E_m \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = |E_m - BA| = |E_n - AB|.$$

由 $E_m - BA$ 可逆得 $|E_m - BA| \neq 0$. 故 $|E_n - AB| \neq 0$. 所以 $E_n - AB$ 可逆.

下面求 $E_n - AB$ 的逆. 上面两式两边分别取逆, 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & (E_m - BA)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E_n - AB)^{-1} & O \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对右边直接计算得

$$\begin{pmatrix} E_n + A(E_m - BA)^{-1}B & A(E_m - BA)^{-1} \\ -(E_m - BA)^{-1}B & (E_m - BA)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_n - AB)^{-1} & -(E_n - AB)^{-1}A \\ -B(E_n - AB)^{-1} & E_m + B(E_n - AB)^{-1}A \end{pmatrix},$$

所以

$$(E_n - AB)^{-1} = E_n + A(E_m - BA)^{-1}B.$$

□

例题 0.6 设 A_1 为 m 阶可逆矩阵, A_4 为 n 阶可逆矩阵, A_2 为 $m \times n$ 矩阵, A_3 为 $n \times m$ 矩阵. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

判断何时矩阵 A 可逆. 并在 A 可逆时求 A^{-1}.

解 解法一: 若 A 可逆, 则存在矩阵 X 使得 $AX=E_{m+n}$. 令

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix},$$

则有

$$AX=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1X_1+A_2X_3 & A_1X_2+A_2X_4\\ A_3X_1+A_4X_3 & A_3X_2+A_4X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m & O\\ O & E_n\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}A_1X_1+A_2X_3=E_m,\\ A_1X_2+A_2X_4=O,\\ A_3X_1+A_4X_3=O,\\ A_3X_2+A_4X_4=E_n,\end{cases}$$

由于 A_4 可逆, 所以 $X_3=-A_4^{-1}A_3X_1$. 进而

$$A_1X_1+A_2(-A_4^{-1}A_3)X_1=E_m,$$

即

$$(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)X_1=E_m.$$

所以 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 可逆, 且 $X_1=(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}$. 由此得到

$$X_3=-A_4^{-1}A_3(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}.$$

同理, 由 A_1 可逆得到 $X_2=-A_1^{-1}A_2X_4$, 从而

$$(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)X_4=E_n.$$

故 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 可逆且 $X_4=(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}$. 由此可得

$$X_2=-A_1^{-1}A_2(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}.$$

这样, 若 A 可逆, 则 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆.

反之, 若 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆, 令

$$X=\begin{pmatrix}(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\\ -A_4^{-1}A_3(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & (A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{pmatrix},$$

则有 $AX=E_{m+n}$. 这便得到 A 可逆当且仅当 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆且

$$A^{-1}=X=\begin{pmatrix}(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\\ -A_4^{-1}A_3(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & (A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{pmatrix}.$$

解法二:由打洞原理可知

$$|A|=|A_1|\,|A_4-A_3A_1^{-1}A_2|=|A_4|\,|A_1-A_2A_4^{-1}A_3|.$$

故当且仅当 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 和 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 均可逆时 A 可逆. 注意到

$$\begin{pmatrix}E & O\\ -A_3A_1^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A_1^{-1}A_2\\ O & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & (A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{pmatrix}=E.$$

故

$$\begin{aligned}A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}^{-1}&=\left[\begin{pmatrix}E & O\\ -A_3A_1^{-1} & E\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & (A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E & -A_1^{-1}A_2\\ O & E\end{pmatrix}^{-1}\right]^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}E & -A_1^{-1}A_2\\ O & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & (A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & O\\ -A_3A_1^{-1} & E\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ O & \left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -A_3A_1^{-1} & E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ -\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & \left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

实际上, 到这一步已经完成了这题. 接下来的证明是为了与解法一相互验证 (也可以类似例题 0.5 的解法二进行验证). 注意到

$$
\begin{aligned}
&\left(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3\right)\left(A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1}\right) \\
&= E + A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} - A_2A_4^{-1}A_3A_1^{-1} - A_2A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} \\
&= E + A_2\left[\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} - A_4^{-1} - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}\right]A_3A_1^{-1} \\
&= E + A_2\left(E - A_4^{-1}\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right) - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\right)\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} \\
&= E + A_2\left(E - E + A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2 - A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\right)\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} \\
&= E,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} = A_4^{-1}A_3\left(A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1}\right) \\
&= A_4^{-1}A_3A_1^{-1} + A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} \\
&= \left(A_4^{-1}\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right) + A_4^{-1}A_3A_1^{-1}A_2\right)\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} \\
&= \left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\left(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3\right)^{-1} = A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1}.
$$

$$
A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} = \left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ -\left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & \left(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & -A_1^{-1}A_2(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \\ -A_4^{-1}A_3(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1} & (A_4 - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

例题 0.7

证明

□

□