


## 0.1 基本的渐进估计与求极限方法

### 0.1.1 基本极限计算

#### 0.1.1.1 基本想法

裂项、作差、作商的想法是解决极限问题的基本想法.

**例题 0.1** 对正整数  $v$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v)}$ .


 **笔记** 直接裂项即可.

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+v-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+v)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{v!} - \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+v)} \right] = \frac{1}{v!v}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.2** 设  $p_0 = 0, 0 \leq p_j \leq 1, j = 1, 2, \dots$ . 求  $\sum_{j=1}^{\infty} \left( p_j \prod_{i=0}^{j-1} (1-p_i) \right) + \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j)$  的值.

 **笔记** 遇到求和问题, 可以先观察是否存在裂项的结构.


**解** 记  $q_i = 1 - p_i$ , 则有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} p_j \prod_{i=0}^{j-1} (1-p_i) + \prod_{j=1}^{\infty} (1-p_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} (1-q_j) \prod_{i=0}^{j-1} q_i + \prod_{i=0}^{\infty} q_i \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^{j-1} q_i - \prod_{i=0}^j q_i \right) + \prod_{i=0}^{\infty} q_i = q_0 - \prod_{i=0}^{\infty} q_i + \prod_{i=0}^{\infty} q_i = q_0. \end{aligned}$$

□

**例题 0.3** 设  $|x| < 1$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})$ .

**注** 如果把幂次  $1, 2, 2^2, \dots$  改成  $1, 2, 3, \dots$ , 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题.

 **笔记** 平方差公式即可

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.4** 对正整数  $n$ , 方程  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} = e$  的解记为  $t = t(n)$ , 证明  $t(n)$  关于  $n$  递增并求极限 ( $t \rightarrow +\infty$ ).

**解** 解方程得到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} = e \Leftrightarrow (n+t) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n.$$

设  $f(x) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, x > 0$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \frac{1}{x^2 + x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2 + x} \Leftrightarrow \ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{1+t}}, t = \frac{1}{x} \in (0, 1).$$

最后的不等式由关于  $\ln$  的常用不等式可知显然成立, 于是  $f(x)$  单调递增, 故  $t(n) = f(n)$  也单调递增. 再来求极限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} t(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(1 + \frac{1}{n})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

### 命题 0.1

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!} \sim \frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}.$$

♣

证明

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1+k}{k}\right)^k = \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} \sim \frac{(n+1)^n e^n}{\sqrt{2\pi n n^n}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n e^n}{\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}.\end{aligned}$$

□

**例题 0.5** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}$ .

解 因为

$$\sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k} = \sqrt{n} \frac{e^{n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{(\frac{2}{1})(\frac{3}{2})^2(\frac{4}{3})^3 \cdots (\frac{n+1}{n})^n} = \frac{\sqrt{nn!} e^n}{(n+1)^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

由 Stirling 公式  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) 及

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow +\infty$$

得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{(1+1/n)^n e^{\ln n + \gamma}} = \sqrt{2\pi} e^{-(1+\gamma)}$$

□

### 命题 0.2 (数列常见的转型方式)

数列常见的转型方式:

$$(1) \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k);$$

$$(2) \quad a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k};$$

$$(3) \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ 其中 } S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

从而我们可以得到

1. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  收敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^\infty (a_{n+1} - a_n)$  收敛.

2. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  ( $a_n \neq 0$ ) 收敛的充要条件是  $\prod_{n=1}^\infty \frac{a_{n+1}}{a_n}$  收敛.

♣

**注** 在关于数列的问题中, 将原数列的等式或不等式条件转化为相邻两项的差或商的等式或不等式条件的想法是

非常常用的.

**笔记** 这个命题给我们证明数列极限的存在性提供了一种想法: 我们可以将数列的收敛性转化为级数的收敛性, 或者将数列的收敛性转化为累乘的收敛性. 而累乘可以通过取对数的方式转化成级数的形式, 这样就可以利用级数的相关理论来证明数列的收敛性.

这种想法的**具体操作方式**:

(i) 先令数列相邻两项作差或作商, 将数列的极限写成其相邻两项的差的级数或其相邻两项的商的累乘形式.(如果是累乘的形式, 那么可以通过取对数的方式将其转化成级数的形式.)

(ii) 若能直接证明累乘或级数收敛, 就直接证明即可. 若不能, 则再利用级数的相关理论来证明上述构造的级数的收敛性, 从而得到数列的极限的存在性. 此时, 我们一般会考虑这个级数的通项, 然后去找一个通项能够控制住所求级数通项的收敛级数(几何级数等), 最后利用级数的比较判别法来证明级数收敛

**证明**

1. 必要性( $\Rightarrow$ )和充分性( $\Leftarrow$ )都可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$  直接得到.

2. 必要性( $\Rightarrow$ )和充分性( $\Leftarrow$ )都可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}$  直接得到.

□

**例题 0.6** 设  $a_n = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$ , 证明: 数列  $a_n$  收敛到一个正数.

**证明** 由条件可得  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left( \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+3}}{\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 1.$$

从而  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right] = e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]}. \quad (1)$$

注意到

$$\ln \left[ 1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right] \sim \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, n \rightarrow \infty.$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$  收敛, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]$  存在. 于是由 (1) 式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left[ 1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right]}$$

也存在.

□

### 0.1.1.2 带 $\ln$ 的极限计算

通常, 带着一堆  $\ln$  的极限算起来都非常烦人, 并不是简单的一个泰勒就秒杀的, 比如这种题. 这种题不建议用泰勒, 很多时候等价无穷小替换、拆项和加一项减一项会方便不少.

**注** 另外, 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然.

**例题 0.7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right)$ .

**注** 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然, 比如下面的做法就是错的(过程和答案都不对)

$$\frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x+3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x+3) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi x = \frac{3\pi}{2}.$$

**解** 根据洛必达法则, 显然  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 1$ , 拆分一下有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (2x + 3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x \ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{2} \pi \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{\ln(1+x)} \left( \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{\ln(1+x)} - 1 \right) \right) + \frac{3}{2} \pi \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi - 2. \end{aligned}$$

□

### 0.1.1.3 幂指函数的极限问题

幂指函数的极限问题, 一律写成  $e^{\ln}$  形式, 并利用等价无穷小替换和加一项减一项去解决, 方便.


**注** 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看 Taylor 展开的第一项并且是严谨的, 泰勒则需要展开好几项, 计算量爆炸.

**例题 0.8** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x}$ .

**注** 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$\begin{aligned} x^{\sin x} &= e^{\sin x \ln x} = 1 + \sin x \ln x + \frac{1}{2} \sin^2 x \ln^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x \ln^3 x + O(x^4 \ln^4 x) \\ (\sin x)^x &= e^{x \ln \sin x} = 1 + x \ln \sin x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 \sin x + \frac{1}{6} x^3 \ln^3 \sin x + O(x^4 \ln^4 \sin x) \end{aligned}$$

然后你不仅需要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦.

 **笔记** 先说明写成  $e^{\ln}$  形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可.

**解** 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = 1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \frac{e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln x + x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2 \ln x} \left( \frac{\sin x}{x} \sim 1 - \frac{1}{6} x^2, x \rightarrow 0^+ \right) \\ &= -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3 \ln x} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.9** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \right)$ .

**解** 注意到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{ex \ln(1+\frac{1}{x})} = e^e.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \left( e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex \ln(1+\frac{1}{x})} - 1 \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex \ln(1+\frac{1}{x})} - 1 \right) = e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{x \ln(1+\frac{1}{x})-1} - x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &\stackrel{\text{Taylor 展开}}{=} e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{2} \left( x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{8} \end{aligned}$$

□

### 0.1.1.4 拟合法求极限

**例题 0.10** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}}$ .



**笔记** 核心想法是拟合法, 但是最后的极限估计用到了分段估计的想法.

**证明** 注意到  $\frac{\ln n}{\ln(2n)} \rightarrow 1$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{2} - 2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且  $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$ , 所以只需证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意对称性, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$  即可, 待定一个  $m$  来分段放缩. 首先容易看出数列  $\ln k \ln(n-k)$  在  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$  时是单调递增的, 这是因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \ln(n-x), \quad f'(x) = \frac{\ln(n-x)}{x} - \frac{\ln x}{n-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-x) \ln(n-x) > x \ln x, \quad \forall x \in \left(2, \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

显然成立, 所以待定  $m \in [2, \frac{n}{2}]$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left( \frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) = \frac{m}{n} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \right) \leq \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \end{aligned}$$

为了让第一个趋于零, 可以取  $m = \frac{n}{2 \ln^2 n}$ , 然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln \frac{n}{2 \ln^2 n} \ln \left( n - \frac{n}{2 \ln^2 n} \right)} - 1 = 0$$

所以结论得证 (过程中严格来讲应补上取整符号, 这里方便起见省略了). □


## 0.1.2 Taylor 公式

### 定理 0.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设  $f$  在  $x = a$  是  $n$  阶右可微的, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (3)$$

 **笔记** 用 Taylor 公式计算极限, 如果展开  $n$  项还是不方便计算, 那么就多展开一项或几项即可.

**证明** (1) 要证明(2)式等价于证明

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0.$$

对上式左边反复使用  $n-1$  次 L'Hospital's rules, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} &\stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!} (x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \dots \stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \stackrel{\text{n阶导数定义}}{=} 0 \end{aligned}$$

故(2)式成立.

(2) 要证明(3)式等价于证明: 存在  $C > 0$  和  $\delta > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} \right| \leq C, \forall x \in [a, a+\delta].$$

□

## 0.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限

**例题 0.11** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n.$$

**笔记** 由  $\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1), n \rightarrow +\infty$ , 可得  $f(n) = n + o(n), n \rightarrow +\infty$ . 这个等式的意思是:  $f(n) = n + o(n)$  对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$  都成立. 并且当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + o(n)}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 1$ . 其中  $o(n)$  表示一个 (类) 数列, 只不过这个 (类) 数列具有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 0$  的性质.

**解 解法一 (一般解法):**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(n)}} = e.$$

**解法二 (渐进估计):**

由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 可知

$$\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1), n \rightarrow +\infty.$$

从而

$$\left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + o(1)}\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} (1 + o(1))\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e^{n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}, n \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1 + o(1)} = e.$$

□

**例题 0.12** 计算:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sin x - \cos x}{x^4}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1 + x^6} \right].$

**解**

- 
- 

□

**例题 0.13** 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} (\alpha > 0).$

**笔记** 利用 Taylor 公式即可得到结果. 类似  $\ln(xe^{-x} - 1) \sim \ln(xe^{-x} + o(xe^{-x})) \sim \ln(xe^{-x})$  的等价关系可以直接凭直觉写出, 要严谨证明的话, 只需要利用 L'Hospital 法则即可.

**解** 由

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} = e^{\frac{\ln(\sqrt[n]{n} - 1)}{(\ln n)^\alpha}}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt[n]{n} - 1)}{(\ln n)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{xe^{-x}} - 1)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(xe^{-x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \\ &= \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ -1, & \alpha = 1, \\ -\infty, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}} = \begin{cases} 1, & \alpha > 1, \\ e^{-1}, & \alpha = 1, \\ 0, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

□

**例题 0.14** 计算  $(1 + \frac{1}{x})^x, x \rightarrow +\infty$  的渐进估计.

**解** 由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{x \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]} = e^{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 + o\left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \right] \\ &= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \frac{e}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ x \left( e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) - \frac{e}{2} \right] = -\frac{11e}{24}. \quad (4)$$

□

**注** 反复利用上述(4)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到  $e$  的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

**例题 0.15** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}.$$

**解** 记  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}$ , 则由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\begin{aligned} \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx) &= \left[ 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right] \left[ 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \right] \cdots \left[ 1 - \frac{(nx)^2}{2} + o(x^2) \right] \\ &= 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 6}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

故  $I = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ .

□

**例题 0.16** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 次复合}}}{x^3}.$$

**解** 先证明  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))) \cdots)}_{n \text{ 次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ .

当  $k=1$  时, 由 Taylor 公式结论显然成立. 假设  $k=n$  时, 结论成立. 则当  $k=n+1$  时, 我们有

$$\begin{aligned} &\sin \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 + o \left( \left( x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 \right) \\ &= x - \frac{n+1}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$



由数学归纳法得  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots)))}_{n\text{次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3} = \frac{n}{6}$ .  $\square$

**例题 0.17** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!).$$

**解** 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式可知

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta x^{n+2}}{(n+2)!}, \theta \in (0, x).$$

从而

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}, \theta \in (0, 1).$$

于是

$$2\pi en! = 2\pi n! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!}, \theta \in (0, 1).$$

而  $n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$ , 因此

$$\begin{aligned} n \sin(2\pi en!) &= n \sin \left( 2\pi n! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!} \right) = n \sin \left( \frac{2\pi n!}{(n+1)!} + \frac{2\pi n! e^\theta}{(n+2)!} \right) \\ &= n \sin \left( \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right) \sim n \left[ \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^\theta}{(n+1)(n+2)} \right] \rightarrow 2\pi, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$\square$

### 0.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

**例题 0.18** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})].$$

**解** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $\theta_n \in (\sqrt{n+1}, \sqrt{n})$ , 使得

$$\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n.$$

从而当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\theta_n \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n \right] = 0.$$

$\square$

**例题 0.19** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right).$$

**证明** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $\theta_n \in (\frac{2024}{n}, \frac{2024}{n+1})$ , 使得

$$\arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} = \frac{1}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right).$$

并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$ . 故


$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right) = 2024 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 2024.$$

□

### 例题 0.20

1. 对  $\alpha \neq 0$ , 求  $(n+1)^\alpha - n^\alpha, n \rightarrow \infty$  的等价量;

2. 求  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1), n \rightarrow \infty$  的等价量.

 **笔记** 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

**注** 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

**解** 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设  $\alpha > 1$ , 则有  $\alpha n^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha (n+1)^{\alpha-1}$  (若  $\alpha \leq 1$ , 则有  $\alpha (n+1)^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha n^{\alpha-1}$ ). 故

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \theta_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha (n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = \alpha.$$

因此  $(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \rightarrow \infty$ .

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - (n-1)) \cdot (1 + \ln \theta_n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又  $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} < \frac{\ln \theta_n}{\ln n} < \frac{\ln n}{\ln n} = 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1) \sim \ln n, n \rightarrow +\infty$ .

□

### 例题 0.21 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x}.$$

**证明** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall x \in U(0)$ , 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x) \sin \theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \sin \theta}{\frac{1}{2} x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} x^3 \cdot \sin \theta}{\frac{1}{2} x^4} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x}.$$

又由  $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$  可知

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

故  $\sin \theta \sim \theta \sim x, x \rightarrow 0$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}.$

□

## 0.1.4 L'Hospital's rules

### 定理 0.2 (上下极限 L'Hospital 法则)

1. 设  $f, g$  在  $(a, b)$  内可微, 满足 (i)  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ . (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (5)$$

且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right|. \quad (6)$$


2. 设  $f, g$  在  $(a, b)$  内可微, 满足 (i)  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ . (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7)$$

且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right|. \quad (8)$$



 **笔记** 此定理第一部分(5)和(7)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况. 但(6)和(8)一般是不能直接用的, 需要给证明.

**证明** 以第一问为例, 事实上, 固定  $x$ , 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x < \xi < y.$$

我们断言对  $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , 必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = A. \quad (9)$$

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A$ . 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y_n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{g(x)}{g(y_n)}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right|.$$

利用

$$\left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| - \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \infty,$$

我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| = A.$$

反之设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| = A$ , 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| = A.$$

于是由

$$\left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| - \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| \leq \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{g(y_n) - g(x)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y_n)} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} |g(y_n)| = \infty,$$

我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \right| = A.$$

现在就证明了(9).

于是结合  $x \rightarrow +\infty$ , 我们容易得到

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y)}{g(y)} \right| &= \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| = \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y)}{g(y)} \right| &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \geq \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| \end{aligned}$$

这就完成了证明. □

**例题 0.22** 若  $f \in D^1[0, +\infty)$ .

(1) 设


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = s$ .

(2) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x) \right] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{s}{2}$ .

 **笔记** (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:  $y' + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} y = 0$ , 整理可得  $\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ , 再对其两边同时积分得到  $\ln y = -\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx + C_0$ . 从而  $y = C e^{-\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ , 于是  $C = y e^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ . 故我们要构造的函数就是  $C(x) = f(x) e^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx}$ . 并且此时  $C(x)$  满足  $C'(x) = f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x)$ .

**证明**

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + f'(x)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f + f'] = s.$$

(2) 由  $\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} \geq \frac{2t}{\sqrt[3]{2t^3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \forall t > 1$  可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt} = +\infty$ , 从而由 L'Hospital'rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}}{e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital'rules}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x) \right] e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}} dt}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x} \left[ f(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f'(x) \right] = \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.23** 设可微函数  $a, b, f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$f(x) \geq 0, g(x) > 0, g'(x) > 0, \frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x) \frac{f(x)}{g(x)} = b(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = A > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = B > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}.$$

**注** 如果直接使用 L'Hospital 法则, 再结合条件会得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ b(x) - a(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right].$$

但是注意这里并不能直接使用极限运算的四则运算法则得到结果, 这是因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不一定存在.

**证明** 令  $p(x) = e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}$ , 则

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}}{e^{\int_0^x a(t) \frac{g'(t)}{g(t)} dt}} = a(x) \frac{g'(x)}{g(x)}. \quad (10)$$

于是由条件可得

$$f'(x) + a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} f(x) = b(x) g'(x) \iff f'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} f(x) = b(x) g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

又由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = A > 0$  可知, 存在  $M > 0$ , 使得

$$a(x) \geq \frac{A}{2}, \quad \forall x > M.$$

从而对  $\forall x > M$ , 我们有

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{\int_0^x a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} dx} \geq e^{\int_M^x a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} dx} \\ &\geq e^{\frac{A}{2} \int_M^x \frac{g'(x)}{g(x)} dx} = e^{\frac{A}{2} \ln \frac{g(x)}{g(M)}} = \left[ \frac{g(x)}{g(M)} \right]^{\frac{A}{2}}. \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ . 因此, 利用 L'Hospital 法则, 再结合 (10) 和 (11) 式, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)p(x)}{g(x)p(x)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)p(x) + f(x)p'(x)}{g'(x)p(x) + g(x)p'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} f(x)}{g'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)g'(x)}{g'(x) + a(x) \frac{g'(x)}{g(x)} g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{1 + a(x)} = \frac{B}{A+1}. \end{aligned}$$

□

### 命题 0.3 (L'Hospital 法则 (复变函数版本))


设  $f(x) = u(x) + iv(x)$ ,  $g(x)$  为实值函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = z_0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = z_0$ .

**证明** 由实数 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{u'(x)}{g'(x)} + i \frac{v'(x)}{g'(x)} \right) = z_0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x)}{g(x)} = \operatorname{Re} z_0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{v(x)}{g(x)} = \operatorname{Im} z_0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x) + iv(x)}{g(x)} = z_0. \end{aligned}$$

□

**例题 0.24** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可微且  $a, b \in \mathbb{R}$ , 满足  $a > 0, a^2 - 4b < 0$  或者  $a > 0, b > 0, a^2 - 4b > 0$  且有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f''(x) + af'(x) + bf(x)) = \ell \in \mathbb{R}$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ell}{b}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

 **笔记** 对于二阶微分方程而言, 一般考虑降阶. 本题利用 L'Hospital 法则实现降阶.

**证明** 不妨设  $\ell = 0$ , 否则用  $f(x) - \frac{\ell}{b}$  代替  $f(x)$  即可.

①当  $a > 0, b > 0, a^2 - 4b > 0$  时, 考虑二次方程  $x^2 + ax + b = 0$ , 则此时该方程必有两负根. 设这两个负根分别为  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , 则  $x^2 + ax + b = x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ . 注意到

$$[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))] = e^{\lambda_2 x} [f''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)f'(x) + \lambda_1\lambda_2 f(x)] = e^{\lambda_2 x} [f''(x) + af'(x) + bf(x)],$$

因此由条件可得

$$\frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{-\lambda_2 x})'} = \frac{f''(x) + af'(x) + bf(x)}{-\lambda_2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

从而利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))}{e^{-\lambda_2 x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]'}{(e^{-\lambda_2 x})'} = 0.$$

又注意到

$$[e^{-\lambda_1 x} f(x)]' = e^{-\lambda_1 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)],$$

因此

$$\frac{[e^{-\lambda_1 x} f(x)]'}{(e^{-\lambda_1 x})'} = \frac{f'(x) - \lambda_1 f(x)}{-\lambda_1} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

于是再利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_1 x} f(x)}{e^{-\lambda_1 x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_1 x} f(x)]'}{(e^{-\lambda_1 x})'} = 0.$$

故由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0$  和极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] + \lambda_1 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

进而再由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] = 0$  可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] - a \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) - b \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

②当  $a > 0$ 、 $a^2 - 4b < 0$  时, 考虑二次方程  $x^2 + ax + b = 0$ , 则此时该方程必有两复根, 并且  $\lambda_1 + \lambda_2 = a < 0$ .

于是设这两个复根分别为  $\lambda_1 = -u + vi$ 、 $\lambda_2 = -u - vi (u > 0, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ , 则  $x^2 + ax + b = x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2$ .

从而由 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ivx} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(u+iv)x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)]}{e^{ux}} \stackrel{\text{L' Hospital 法则 (复变函数版本)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{(u+iv)x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]' }{(e^{ux})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{-\lambda_2 x} (f'(x) - \lambda_1 f(x))]' }{(e^{ux})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda_2 x} [f''(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)f'(x) + \lambda_1 \lambda_2 f(x)]}{ue^{ux}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(u+iv)x} [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{ue^{ux}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ivx} [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{u} = 0, \end{aligned}$$

因此

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + uf(x) + ivf(x)].$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + uf(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} vf(x) = 0.$$

又因为  $u > 0$ 、 $v \neq 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 进而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . 再由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + af'(x) + bf(x)] = 0$  可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0.$$

综上, 结论得证.  $\square$

**注** 第②中情况中不使用 L' Hospital 法则 (复变函数版本) 的方法: 考虑

$$e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = e^{(u+iv)x} [f'(x) - (-u + iv)f(x)] = e^{ux} (\cos vx + i \sin vx) [f'(x) + uf(x) - ivf(x)].$$

则上述复变函数实部和虚部分别为

$$\text{实部: } e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx];$$

$$\text{虚部: } e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \sin vx - vf(x) \cos vx].$$

于是利用 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ux} [(f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx]}{e^{ux}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^{ux} ((f'(x) + uf(x)) \cos vx + vf(x) \sin vx))]' }{(e^{ux})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ux} \cos vx [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{ue^{ux}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos vx [f''(x) + af'(x) + bf(x)]}{u} = 0. \end{aligned}$$

同理利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f'(x) + uf(x)) \sin vx - vf(x) \cos vx] = 0.$$

因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)]$  的实部和虚部都趋于 0, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_2 x} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = 0$ , 后续同理可证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

**例题 0.25** 给定正整数  $n$ , 设  $f(x) \in C^n[-1, 1]$ ,  $|f(x)| \leq 1$ , 证明: 存在与  $f(x)$  无关的常数  $C$ , 使得只要  $|f'(0)| \geq$

$C, f^{(n)}(x)$  在  $(-1, 1)$  中就会有至少  $n-1$  个不同的根.

**证明** 证明见豌豆 (2024-2025 竞赛班下数学类讲义洛必达法则部分), 本题证明直观上定性分析比较容易, 但是要严谨地书写过程比较繁琐 (证明太麻烦没看).  $\square$

**例题 0.26** 设  $f(x)$  在  $(0, 1)$  中任意阶可导且各阶导数均非负, 证明:  $f(x)$  是实解析函数. (伯恩斯坦定理) 类似的, 如果  $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$  恒成立, 则  $f(x)$  也是实解析的.

**证明** 对  $\forall x \in (0, 1)$ , 固定  $x$ , 则任取  $h > 0$ , 使得  $x+2h \in (0, 1)$ . 于是由 Taylor 定理可知

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x) \cdot 2h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (2h)^n + \frac{1}{n!} \int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(t)(x+2h-t)^n dt.$$

又由于  $f$  任意阶导数均非负, 故  $f$  的任意阶导数都是单调递增函数. 从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} f^{(n+1)}(t)(x+h-t)^n dt &\leq \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} f^{(n+1)}(2t-x)(x+h-t)^n dt \\ &\stackrel{u=2t-x}{=} \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(u)(x+2h-u)^n du \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left[ f(x+2h) - \left( f(x) + f'(x) \cdot 2h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (2h)^n \right) \right] \\ &\leq \frac{f(x+2h) - f(x)}{2^{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此  $f$  可以在  $x$  的任意右邻域展开成幂级数 (因为余项趋于 0), 即

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n, \quad \forall y \in U_+(x).$$

但是同样的方法对于  $x < 0$  时似乎难以处理, 因为单调性对不上, 所以换个方法 (可以一次解决问题, 直接对高阶导数进行估计, 由此说明余项趋于零, 也无需讨论正负)

设  $|f(x)|$  在  $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$  中的最大值为  $M$ , 对任意  $|x| < \frac{1}{4}$  有

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{1}{2^k} + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \frac{1}{2^n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} \geq f(x) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \frac{1}{2^n}$$

由此得到

$$0 \leq \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq 2^n \left( f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \right) \leq 2^{n+1} M, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

进而

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq 2^{n+2} M |x|^{n+1} \leq 2^{n+2} M \frac{1}{4^{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

所以  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ , 这就证明了实解析

对于第二问, 考虑函数  $f(-x)$  即可.  $\square$

**例题 0.27** 设  $g(x)$  是  $(0, +\infty)$  中恒正的连续函数,  $a > 0$  使得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$ , 若  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  中恒正且二阶可导, 满足  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  恒成立, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**证明** 由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x)) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$  可得

$$(e^x f'(x))' = e^x (f''(x) + f'(x)) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

从而  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增.

(i) 若  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无零点, 则

$$e^x f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

(ii) 若  $e^x f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有零点, 则由其严格递增性可知, 存在唯一的  $a > 0$ , 使得  $e^a f'(a) = 0$ . 于是

$$e^x f'(x) > e^a f'(a) = 0, \quad \forall x \in (a, +\infty).$$

故一定存在  $X > 0$ , 使得  $f'(x) > 0, \forall x \in (X, +\infty)$ . 从而  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上严格递增.

由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x)) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$  还可以得到

$$[f'(x) + f(x)]' = f''(x) + f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

于是  $f'(x) + f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增. 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = L$  为有限数或  $+\infty$  (广义存在).

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f'(x) + f(x)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = L.$$

又由  $f$  恒正可知  $L \geq 0$ . 反证, 假设  $L \neq 0$ , 则

① 当  $L \in (0, +\infty)$  时, 此时, 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

再对  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f''(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right).$$

即  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \geq g(L)$ . 于是由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $c > X + 1$ , 使得

$$f'(x) = f'(X + 1) + f''(c)(x - X - 1) \geq f'(X + 1) + g(L)(x - X - 1), \forall x > X + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  矛盾!

② 当  $L = +\infty$  时, 此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 由  $f''(x) + f'(x) > g(f(x))$  可得

$$\frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} > \frac{g(f(x))}{(f(x))^{1+a}} = \frac{g(x)}{x^{1+a}}.$$

从而由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = +\infty$ .

由  $f(x) > 0, \forall x > X$  可得, 对  $\forall x > X$ , 我们有

$$\frac{f''(x) + f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a}(f'(x) + f(x))} < \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a} f'(x)}.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(f(x))^{1+a} f'(x)} = +\infty$ .

又由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f'(x) + f(x))^2}{(f(x))^{2+a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(f'(x) + f(x))^2]'}{[(f(x))^{2+a}]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))}{(2+a)(f(x))^{1+a} f'(x)} = +\infty.$$

于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$ . 又由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = 0$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$ . 故存在  $M > X + 1$ , 使得

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} > 1, \forall x > M.$$

两边同时积分可得

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}} dx = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} df(x) = \int_M^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} dx \geq \int_M^{+\infty} dx = +\infty.$$

而  $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}} dx$  收敛, 矛盾! □

**例题 0.28** 设  $f(x)$  非负且二阶可导,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt = 0.$$

**证明** 由条件可知存在  $X > 0$  使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} > 0, \forall x > X \implies f''(x) > 0, \forall x > X.$$

从而  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上下凸  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增于是由下凸函数的单调性可知  $f$  在  $(X, +\infty)$  上的单调性只有



三种情况递减、递增、先递减再递增若  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增或者先递减再递增则一定存在  $X_2 > X$  使得  $f(x)$  在  $(X_2, +\infty)$  上递增现在只在  $(X_2, +\infty)$  上进行考虑由  $f$  递增且非负可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A_1$  为正数或  $+\infty$  假设  $A_1$  为某个正数则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A_1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^2}.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$  于是由 Lagrange 中值定理可知存在  $\eta > X_2 + 1$  使得

$$f'(x) = f'(X_2 + 1) + f''(\eta)(x - X_2 - 1), \quad \forall x > X_2 + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  再利用 Lagrange 中值定理同理可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A_1$  为某个正数矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  再利用 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[-\frac{1}{1+(f'(x))^2}\right]'}{[f^2(x)]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2f''(x)f'(x)}{(1+f'^2(x))^2}}{2f(x)f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty. \end{aligned}$$

而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} \leq 0$  矛盾故  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上必然单调递减则  $f'(x) < 0 \quad \forall x > X$  又  $f(x) > 0$  故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A \geq 0$  由  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \leq 0$  假设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \triangleq A' < 0$  则存在  $X_1 > X$  使得

$$f'(x) < \frac{A'}{2} < 0 \quad \forall x > X_1.$$

于是由 Lagrange 中值定理可知存在  $\xi > X_1 + 1$  使得

$$f(x) = f(X_1 + 1) + f'(\xi)(x - X_1 - 1) < f(X_1 + 1) + \frac{A'}{2}(x - X_1 - 1) \quad \forall x > X_1 + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$  矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  从而再由条件可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

再考虑  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \triangleq A \geq 0$  假设  $A > 0$  则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  及条件可得

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A} \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty.$$

于是存在  $M > X_1 + 1$  使得

$$f''(x) > 1 \quad \forall x > M.$$

从而由 Lagrange 中值定理可知存在  $\xi_1 > M + 1$  使得

$$f'(x) = f'(M + 1) + f''(\xi_1)(x - M - 1) > f'(M + 1) + (x - M - 1) \quad \forall x > M + 1.$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  再利用 Lagrange 中值定理同理可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$  矛盾故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  综上可知  $f(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递减进而  $f'(x) \leq 0$  并且  $f'(x)$  在  $(X, +\infty)$  上递增还有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

于是显然  $f(x) \geq 0$  从而存在  $X' > X$  使得

$$f'(x) \leq 1 \quad \forall x > X'. \quad (12)$$

又因为  $f \in D^2(\mathbb{R})$  所以  $f, f'$  都连续从而在  $[0, X']$  上都有界即存在  $L > 0$  使得

$$|f(x)|, |f'(x)| < L \quad \forall x \in [0, X']. \quad (13)$$

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty$  可知存在  $X'' > X'$  使得

$$f''(x) > f(x) \quad \forall x > X''.$$

从而结合  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt < \int_x^{+\infty} f''(t) dt = f'(+\infty) - f'(x) = -f'(x) \quad \forall x > X''. \quad (14)$$

于是由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0. \quad (15)$$

利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(f'(x))^2]'}{[(f(x))^2]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)f'(x)}{f(x)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

又因为  $f'(x) \leq 0$   $f(x) \geq 0$  所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f'(x)}{f(x)} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

再结合 (15) 式及  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t) dt}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0. \quad (16)$$

令  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  并且

$$0 = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

由 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x g(t) dt}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{g'(x)} = 0. \quad (17)$$

于是由 (12) (13) (14) 式可得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt &\leq \left( \int_0^{X''} \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt + \int_{X''}^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \sqrt{2} \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq \sqrt{2} \left( \int_0^{X''} \frac{\sqrt{1+L^2}}{-L} dt + \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq -\sqrt{2} \left( \frac{X''\sqrt{1+L^2}}{-L} + \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \right) \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L} \int_x^{+\infty} f(t) dt - \sqrt{2} \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L} f'(x) - \sqrt{2}f(x) \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \frac{\int_x^{+\infty} f(t) dt}{f(x)}, \quad \forall x > X''. \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow +\infty$  则由 (17) (16) 式和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  可得

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)} dt \int_x^{+\infty} f(t) \sqrt{1+f'^2(t)} dt \leq 0.$$

故结论得证. □

## 0.1.5 与方程的根有关的渐进估计

### 0.1.5.1 可以解出 $n$ 的类型

**例题 0.29** 设  $x^{2n+1} + e^x = 0$  的根记为  $x_n$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n).$$

**解** 注意到  $0^{2n+1} + e^0 > 0$ ,  $(-1)^{2n+1} + e^{-1} < 0$  且  $x^{2n+1} + e^x$  严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ ,

存在唯一的  $x_n \in (-1, 0)$ , 使得

$$x_n^{2n+1} + e^{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = 2n+1 \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

任取  $\{x_n\}$  的一个收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 又  $x_n \in (-1, 0)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [-1, 0]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)}$ . 又

因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)} = +\infty,$$

故  $c = -1$ . 于是由子列极限命题 (a) 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ . 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(1+x)}{\ln(-x)} = \frac{1}{2}.$$

□

**例题 0.30** 设  $a_n \in (0, 1)$  是  $x^n + x = 1$  的根, 证明

$$a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**证明** 注意到  $0^n + 0 - 1 < 0, 1^n + 1 - 1 > 0$ , 且  $x^n + x - 1$  在  $(0, 1)$  上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在唯一的  $a_n \in (0, 1)$ , 使得

$$a_n^n + a_n = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

任取  $\{a_n\}$  的一个收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 又  $a_n \in (0, 1)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = c \in [0, 1]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c}$ .

又由(18)式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c} = +\infty.$$

故  $c = 1$ , 于是由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c = 1. \quad (19)$$

而要证  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ , 等价于证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - 1 + \frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = 0$ . 利用(18)(19)式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} \cdot a_n - \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}{\ln \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}} + 1 \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(a_n - 1) \ln(1-a_n)}{\ln a_n \left( \ln \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} \right)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{(x-1) \ln(1-x)}{\ln x \left( \ln \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \right)} + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{\ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}} \stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} \cdot \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} \ln(-x)}{\ln^2(1+x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) \cdot \ln(1+x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln(-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} - \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-\frac{x}{1+x}} = -1. \end{aligned} \quad (21)$$

于是结合(20)(21)式可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} + 1 \right] = -1 + 1 = 0.$$

故  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ . □

**例题 0.31** 设  $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 1$  在  $[0, 1]$  的根为  $x_n$ . 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解** 注意到  $f_n(x) - 1$  严格单调递增, 且  $f_n(0) - 1 = -1 < 0, f_n(1) - 1 = n - 1 > 0, \forall n \geq 2$ . 故由零点存在定理可知, 当  $n \geq 2$  时, 存在唯一的  $x_n \in (0, 1)$ , 使得  $f_n(x_n) = 1$ . 从而

$$f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1 \Rightarrow x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n \Rightarrow x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \Rightarrow n + 1 = \frac{\ln(2x_n - 1)}{\ln x_n}. \quad (22)$$

由上式(22)可知  $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$  且  $x_n \in (0, 1)$ , 因此

$$0 \leq x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \leq 1 \Rightarrow x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

任取  $\{x_n\}$  的收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 则由(22)式和 Heine 归结原则可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x_{n_k} - 1)}{\ln x_{n_k}} = \frac{\ln(2a - 1)}{\ln a} = +\infty.$$


故  $a = \frac{1}{2}$ , 再由子列极限命题 (a) 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \frac{1}{2}$ . □

### 0.1.5.2 迭代方法

**例题 0.32** 设  $x_n$  是  $x = \tan x$  从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - An - B) = C,$$

求  $A, B, C$ .

 **笔记** 主要想法是结合  $\arctan x$  的性质:  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$ , 再利用迭代法计算渐近展开.

**解** 令  $f(x) = \tan x - x, x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 则  $f'(x) = \tan^2 x > 0, \forall x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ . 因此  $f(x)$  在  $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$  上严格单调递增, 其中  $n = 1, 2, \dots$ . 又注意到  $\lim_{x \rightarrow (n\pi)^+} (\tan x - x) = -n\pi < 0, \lim_{x \rightarrow (n\pi + \frac{\pi}{2})^-} (\tan x - x) = +\infty > 0$ .

故由零点存在定理可知, 存在唯一的  $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 使得

$$\tan x_n = x_n.$$

从而  $x_n - n\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 于是

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - n\pi) \Rightarrow x_n = \arctan x_n + n\pi. \quad (23)$$

又因为  $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \dots$ , 所以当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $x_n \rightarrow +\infty$ . 再结合(23)式可得

$$x_n = \arctan x_n + n\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1), n \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

注意到  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$ , 从而  $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ . 于是利用(24)式可得

$$\begin{aligned} x_n &= \arctan x_n + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left( \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \right) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left[ \frac{1}{n\pi} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan \left[ \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( x_n - \frac{\pi}{2} - n\pi \right) = -\frac{1}{\pi}$ . □

**命题 0.4 (Lampert W 的渐进估计)**

设  $x_n > 0$  满足  $x_n e^{x_n} = n, n = 1, 2, \dots$ , 证明

$$x_n = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right), n \rightarrow \infty.$$



**证明** 注意到

$$1 \leq x_n = \ln n - \ln x_n \leq \ln n \Rightarrow x_n = O(\ln n), n = 3, 4, \dots,$$

于是

$$\begin{aligned} \ln x_n &= \ln \ln n + \ln \left(1 - \frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln \ln n - \frac{\ln x_n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln \ln n - \frac{\ln O(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}\right) \\ &= \ln \ln n - \frac{\ln \ln n + \ln O(1)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n + \ln O(1)}{\ln n}\right) \\ &= \ln \ln n - \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right), \end{aligned}$$

即

$$x_n = \ln n - \ln \ln n + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right).$$

□