

0.1 Riemann 引理

定理 0.1 (Riemann 引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是区间且 f 在 E 上绝对可积, g 是定义在 \mathbb{R} 的周期 $T > 0$ 函数, 且在任意有界闭区间上 Riemann 可积, 则我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy. \quad (1)$$

注 f 在 E 上绝对可积包含 f 为反常积分的情况 (即反常积分绝对收敛).

考试中, Riemann 引理不能直接使用, 需要我们根据具体问题给出证明. 具体可见例题 0.1.

笔记

- (1) 不妨设 $E = \mathbb{R}$ 的原因: 若 (1.1) 式在 $E = \mathbb{R}$ 时已得证明, 则当 $E \subseteq \mathbb{R}$ 时, 令 $\tilde{f}(y) = f(y) \cdot \chi_E, y \in \mathbb{R}$, 则由 $f(y)$ 在 E 上绝对可积, 可得 $\tilde{f}(y)$ 在 \mathbb{R} 上也绝对可积. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$$

故可以不妨设 $E = \mathbb{R}$.

- (2) 不妨设 $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$ 的原因: 若 $\sup_{\mathbb{R}} |g| = 0$, 则 $g(x) \equiv 0$, 此时结论显然成立. 因此我们只需要考虑当 $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$ 时的情况.

- (3) 不妨设 $T = 1$ 的原因: 若 (1) 式在 $T = 1$ 时已得证明, 则当 $T \neq 1$ 时, 有

$$\frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy \stackrel{\text{令 } y=Tx}{=} \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Tx)dx = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (2)$$

由于 $g(y)$ 是 \mathbb{R} 上周期为 $T \neq 1$ 的函数, 因此 $g(Ty)$ 就是 \mathbb{R} 上周期为 1 的函数. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (3)$$

又由 (2) 式及 $T > 0$ 可得

$$\begin{aligned} \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy &= \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy &\stackrel{\text{令 } t=Tx}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(ty)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy \end{aligned}$$

再结合 (3) 式可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$. 故可以不妨设 $T = 1$.

- (4) 不妨设 $\int_0^1 g(y)dy = 0$ 的原因: 若 (1) 式在 $\int_0^1 g(y)dy = 0$ 时已得证明, 则当 $\int_0^1 g(y)dy \neq 0$ 时, 令 $G(y) = g(y) - \int_0^1 g(t)dt$, 则 $G(y)$ 是 \mathbb{R} 上周期为 1 的函数, 并且 $\int_0^1 G(y)dy = 0$. 于是由假设可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)G(xy)dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 G(y)dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y) \left[g(xy) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 \left[g(y) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_E f(y)g(xy)dy - \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \right) &= \int_E f(y)dy \int_0^1 g(y)dy - \int_E f(y)dy \int_0^1 g(t)dt = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy &= \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \end{aligned}$$

再结合(2)可知, 此时原结论成立. 故可以不妨设 $\int_0^1 g(y)dy = 0$.

证明 不妨设 $E = \mathbb{R}, \sup_{\mathbb{R}} |g| > 0, T = 1$, 再不妨设 $\int_0^1 g(y)dy = 0$. 因此只需证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$. 由 g 的周期为 1 及 $\int_0^1 g(y)dy = 0$ 可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} \int_{-n}^0 g(t)dt &\stackrel{\text{令 } x=t+n}{=} \int_0^n g(x-n)dx \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \int_0^n g(x)dx = \int_0^n g(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(t)dt \stackrel{\text{令 } y=t-k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y+k)dy \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y)dy \\ &= (n-1) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

从而对 $\forall \beta > \alpha > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \right| &= \left| \int_0^{\beta} g(t)dt - \int_0^{\alpha} g(t)dt \right| = \left| \int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t+[\beta])dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t+[\alpha])dt \right| \\ &= \left| \int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt \right| = \left| \int_0^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_0^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha-[\alpha]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g|. \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(xy)dy \right| \stackrel{\text{令 } t=xy}{=} \frac{1}{x} \left| \int_{x\alpha}^{x\beta} g(t)dt \right| \leq \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x}, \quad \forall x > 0, \forall \beta > \alpha > 0. \quad (4)$$

因为 f 在 \mathbb{R} 上绝对可积, 所以由 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \int_{|y|>N} f(y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (5)$$

由于 f 在 \mathbb{R} 上绝对可积, 从而 f 在 \mathbb{R} 上也 Riemann 可积, 因此由可积的充要条件可知, 存在划分

$$-N = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \left(\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \right) (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (6)$$

于是当 $x > \frac{3 \sum_{j=1}^n \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g|}{\varepsilon}$ 时, 结合(4)(5)(6)可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(xy)dy \right| &\leq \left| \int_{-N}^N f(y)g(xy)dy \right| + \left| \int_{|y|>N} f(y)g(xy)dy \right| \stackrel{(5)}{\leq} \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(y)g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f] g(xy)dy \right| + \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f] dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\sup_{[t_{j-1}, t_j]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) (t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\stackrel{(6)}{<} \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right| dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\stackrel{x \text{ 充分大}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$. 结论得证. \square

定理 0.2 (L^p 版本 Riemann 引理)

设 E 是有界勒贝格可测集, $f \in L^p(E)$, $x \in L^q[0, T]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ 且 x 周期为 $T > 0$. 则

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_E f(t)x(yt)dt = \frac{1}{T} \int_E f(t)dt \int_0^T x(t)dt.$$

证明 见清疏讲义. \square

定理 0.3

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集且 $f \in L^1(E)$, g 是定义在 \mathbb{R} 的有界可测函数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt = A \in \mathbb{R}.$$

则我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = A \cdot \int_E f(y)dy.$$

证明 见清疏讲义. \square

例题 0.1 设 $f \in R[0, 2\pi]$, 不直接使用 Riemann 引理计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx.$$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 固定 n . 将 $[0, 2\pi]$ 等分成 $2n$ 段, 记这个划分为

$$T: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 2\pi,$$

其中 $t_i = \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$. 此时我们有

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sin(nx)| dx = \int_{\frac{(i-1)\pi}{n}}^{\frac{i\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \frac{1}{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{n}. \quad (7)$$

由 $f \in R[0, 2\pi]$ 可知, f 在 $[0, 2\pi]$ 上有界也内闭有界. 从而利用(7)式可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \leq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(7) \text{式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (8)
\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \geq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(7) \text{式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (9)
\end{aligned}$$

由 $f \in R[0, 2\pi]$ 和 Riemann 可积的充要条件可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

于是对(8)(9)式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

□

例题 0.2 设 f 是 \mathbb{R} 上周期 2π 函数且在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积, 设

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt, n = 1, 2, \dots$$

若 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 是 f 在 $[-\pi, \pi]$ 唯一间断点且存在下述极限

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - A}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - B}{x - x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2}.$$

笔记

(1) 计算 $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$ 的思路: 由于 $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上只可能有奇点 $t = 0$, 因此

$\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上不一定绝对可积, 从而不能直接利用 Riemann 引理. 于是我们需要将 $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 转化为在 $[0, \pi]$ 上无奇点的函数 (排除 $t = 0$ 这个奇点, 即证明 $t = 0$ 不再是奇点), 只要被积函数在积分区间上无奇点且 Riemann 可积, 就一定绝对可积. 进而满足 Riemann 引理的条件, 再利用 Riemann 引理就能求解出 I_1 . 具体处理方式见下述证明.

计算 $I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$ 的思路同理, 也是要排除 $t = 0$ 这个可能的奇点, 再利用 Riemann 引理进行求解. 具体计算方式见下述证明.

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$ 的思路: 注意由于 $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上有一个奇点 $t = 0$, 并且对 $\forall t \in (0, \pi]$, 都有

$$\left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \geq \left| \frac{1}{2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2}} \right| = \frac{\pi}{2t} > 0.$$

而 $\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2t} dt$ 是发散的, 故 $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt$ 也发散. 因此 $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上一定不是绝对可积的, 从而不能利用 Riemann 引理计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$. 真正能计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$ 的方法

有多种, 下述证明利用的是强行替换/拟合法.

证明 注意到

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &\stackrel{\text{令 } y=-t}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \end{aligned} \quad (10)$$

记 $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt, I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$, 则由(10)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2). \quad (11)$$

于是

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt, \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt. \quad (13)$$

由条件可知 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-A}{x-x_0}$ 存在, $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-B}{x-x_0}$ 存在, 因此 $\frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}}, \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 都没有奇点且 Riemann 可积, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$$

都满足 Riemann 引理的条件. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0. \quad (14)$$

下面计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt$.

$$\left| \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt - \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \right| = \left| \int_0^\pi \frac{t-2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \right|. \quad (15)$$

而 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-2 \sin \frac{t}{2}}{t^2} \stackrel{\text{L'Hospital'rules}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos \frac{t}{2}}{2t} = 0$, 因此 $\frac{t-2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上无奇点且 Riemann 可

积, 从而由 Riemann 引理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{t-2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0$. 于是再结合 (15) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{2n+1}{2} \pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

因此, 由 (12)(13)(14)(16) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{A}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{B}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{B}{2}.$$

再结合 (11) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \frac{A+B}{2}.$$

□

例题 0.3 设 $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(0) = 0$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} f(x) dx.$$

注 由于 $x=0$ 可能是 $\frac{f(x)}{\sin^2 x}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的奇点, 因此我们需要将其转化为在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上不含奇点的函数, 才能利用 Riemann 引理进行计算.

证明 注意到

$$\frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx. \quad (17)$$

先计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$. 由 $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ 可知, $f \in D^2[0, \frac{\pi}{2}]$. 从而由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

于是 $\frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 故由 Riemann 引理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx < \infty.\end{aligned}\quad (18)$$

利用(18)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = 0. \quad (19)$$

下面计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$. 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 我们有

$$\left| \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx - \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \right| = \left| \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx \right|. \quad (20)$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}$, 故 $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx < \infty. \quad (21)$$

利用(21)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = 0. \quad (22)$$

因此, 对(20)式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 利用(22)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\quad (23)$$

而由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = f'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt. \quad (24)$$

由积分中值定理可知, 对 $\forall x > 0$, 存在 $\theta_x \in [x, x+\pi]$, 使得

$$\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{\theta_x} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2\theta_x}.$$

又由 $\theta_x \in [x, x+\pi]$ 可知, $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$. 从而(24)式可化为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi x}{2\theta_x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

于是由 Heine 归结原则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{2}. \quad (25)$$

利用(19)(25)式, 对(17)式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{f'(0)}{2}.$$

□