0.1 全纯函数的原函数

定义 0.1

设 $f : D \to C$ 是定义在域 D 上的一个函数, 如果存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 上成立, 就称 F 是 f 的一个**原函数**.

如果 $f \in H(D)$, 是否一定存在原函数呢? 答案是否定的. 例如, 若 D 是除去原点的单位圆盘,$f(z) = \dfrac{1}{z}$,f 当然是 D 上的全纯函数. 如果它在 D 上存在原函数 F, 则有 $F'(z) = \dfrac{1}{z}$ 在 D 上成立, 但这是不可能的. 因为若上式成立, 在 D 中取光滑闭曲线 $\gamma : [a, b] \to D$, 则有 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 于是

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

但由例题**??**知道 $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$. 这一矛盾说明 $\dfrac{1}{z}$ 在 D 上不存在原函数. 问题出在 D 不是单连通域. 实际上, 对于单连通域上的全纯函数, 一定存在原函数.

定理 0.1

设 f 在域 D 中连续, 且对 D 中任意可求长闭曲线 γ, 均有 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$, 那么

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是 D 中的全纯函数, 且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$, 这里,z_0 是 D 中一固定点.

证明 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零,f 的积分与路径无关, 因而 F 是一单值函数. 任取 $a \in D$, 我们证明 $F'(a) = f(a)$. 因为 f 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|z - a| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. 今取 $z \in B(a, \delta)$(图 1), 显然

$$F(z) - F(a) = \int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^a f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

这里, 积分在线段 $[a, z]$ 上进行, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a)\right| &= \frac{1}{|z-a|}|F(z) - F(a) - f(a)(z-a)| \\ &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_a^z f(a)\mathrm{d}\zeta\right| \\ &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z (f(\zeta) - f(a))\mathrm{d}\zeta\right|.\end{aligned}$$

由长大不等式, 即知上式右端小于 ε, 这就证明了 $F'(a) = f(a)$.

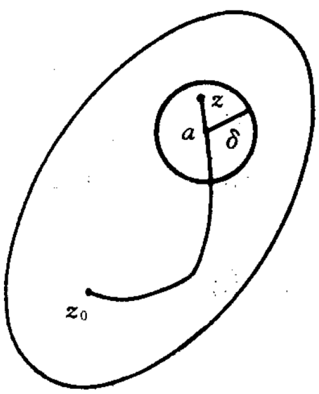

图 1

□

定理 0.2

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$, 那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

证明 在定理的假定下, 由 Cauchy 积分定理知道,f 沿 D 中任意可求长闭曲线的积分为零, 由定理 0.1 即得本定理.
□

定理 0.3

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域,$f \in H(D)$,Φ 是 f 的任一原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

证明 证明方法也与微积分中一样. 由定理 0.2知, 由变上限积分确定的函数 F 是 f 的一个原函数, 因而

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0.$$

故由命题**??**知道 $\Phi(z) - F(z)$ 是一个常数, 因而

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0) = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

□

多连通域相关内容现在设 D 是多连通域,$f \in H(D)$, 一般来说

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是一个多值函数, 它在 z 点的值将随着连接 z_0 和 z 的曲线变化而变动. 下面看一个具体的例子:

设 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 D 是一个二连通域,$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 是 D 中的全纯函数, 我们来研究积分

$$\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 不围绕原点 (图 2 左), 那么 $\dfrac{1}{\zeta}$ 沿 γ 的积分等于在实轴上从 1 到 $|z|$ 的积分与圆弧 γ' 上的积分之和, 即

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{1}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{\arg z} \frac{\mathrm{i}|z|e^{i\theta}}{|z|e^{i\theta}} d\theta = \log|z| + \mathrm{i}\arg z = \log z.$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 绕原点沿反时针方向转了 2 圈 (图 2 右), 这时沿 γ 的积分可以分解为沿 $\widehat{az}$,$\widehat{abea}$ 和 $\widehat{bcdb}$ 的积分, 即

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_{\widehat{az}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{abea}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\widehat{bcdb}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}. \tag{1}$$

由于 $\widehat{abea}$ 和 $\widehat{bcdb}$ 是两条围绕原点的简单闭曲线, 故由例题**??**,(1) 式右端的后两个积分都等于 $2\pi\mathrm{i}$. 根据上面的计算,(1)式右端的第一个积分为 $\log z$, 因而得

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log z + 4\pi\mathrm{i}.$$

由此可见, 随着 γ 绕原点圈数的不同, 一般可得

$$\int_{1}^{z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log z + 2k\pi\mathrm{i},\ k = 0, \pm1, \cdots,$$

这恰好是对数函数 Log$z$. 所以, 对数函数也可用变上限的积分来定义.

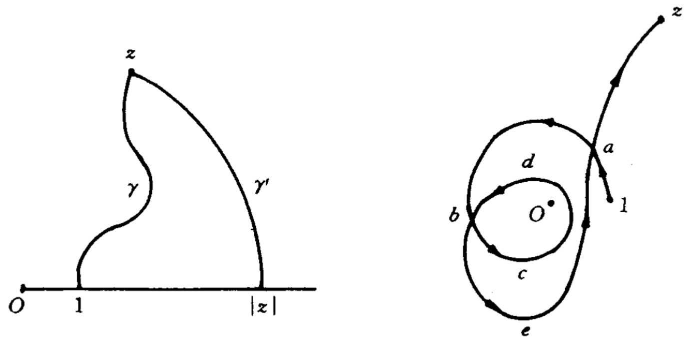

图 2

定理 0.4

设函数 $f(z),g(z)$ 在单连通区域 D 内解析,α,β 是 D 内两点, 试证

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

证明 由定理??知 $f',g' \in H(D)$. 从而由命题??知,$f'g, fg' \in H(D) \subset C(D)$. 注意到

$$\left[f(z)g(z)\right]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

于是由复积分的基本性质和定理 0.3可得

$$f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[f(z)g(z)\right]' \mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} \left[f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\right] \mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)\mathrm{d}z + \int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z.$$

移项即得. □