分析学基础

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 求和与求积符号

1.1 求和符号

定义 1.1 (空和 (Empty sum))

$$\sum_{i=b+1}^{b} f(i) \triangleq 0, b \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

定理 1.1 (关于求和号下限大于上限的计算)

$$\sum_{i=a}^{c} f(i) \equiv -\sum_{i=c+1}^{a-1} f(i), a, c \in \mathbb{Z}\text{且}a > c. \tag{1.2}$$

笔记 上述空和的定义与关于求和号下限大于上限的计算定理都来自论文:Interpreting the summation notation when the lower limit is greater than the upper limit(Kunle Adegoke).

定理 1.2 (求和号基本性质)

1. (**倒序求和**) 当 n 为非负整数时, 有
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

笔记

1. 看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下将其转化为倒序求和的形式.

1.1.1 求和号交换顺序

定理 1.3 (基本结论)

1. 当 n, m 均为非负整数时, 有
$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$
2. 当 n, m 均为非负整数,$p \le n, q \le m$且$p, q \in \mathbb{N}_+$ 时, 有
$$\sum_{\substack{p \le i \le n \\ q \le j \le m}} a_{ij} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n} a_{ij}.$$
3. 当 n 为非负整数时, 有
$$\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$
4. 当 n 为非负整数时, 有
$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

5. 当 n 为非负整数时, 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

6. 当 n 为非负整数时, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \geqslant 0, \forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j.$$

笔记 如果上述命题第 1 条中的 n 或 m 取到无穷, 第 2 条中的 n 取到无穷, 则求和号不能直接交换顺序. 此时, 往往要添加一个条件, 相应的交换和号的结论才能成立. 比如, 著名的 *Fubini* 定理 (见关于无限和的 Fubinin 定理).

证明 1. 利用矩阵证明该结论.

设一个 m 行 n 列的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵 A 的第 i 行的和记为

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,(i = 1, 2, \cdots, n).$$

矩阵 A 的第 j 列的和记为

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(j = 1, 2, \cdots, m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和 $r_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 求和也等于所有列和 $c_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 即

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} c_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij}.$$

2. 同理利用矩阵证明该结论.

设一个 m 行 n 列的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{pq} & a_{p,q+1} & \cdots & a_{pm} \\ a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{p+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nq} & a_{n,q+1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵 A 的第 i 行的和记为

$$r_i = \sum_{j=q}^{m} a_{ij}\,(i = p, p+1, \cdots, n).$$

矩阵 A 的第 j 列的和记为

$$c_j=\sum_{i=p}^{n}a_{ij}\,(j=q,q+1,\cdots,m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和 $r_i,i=p,p+1,\cdots,n$ 求和也等于所有列和 $c_j,j=q,q+1,\cdots,m$ 求和, 即

$$\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}}a_{ij}=\sum_{i=p}^{n}r_i=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}a_{ij},$$

$$\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}}a_{ij}=\sum_{j=q}^{m}c_j=\sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n}a_{ij}.$$

故

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}a_{ij}=\sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n}a_{ij}=\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}}a_{ij}.$$

3. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\chi_{i\le j}(i)\xlongequal{1.\text{的结论}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\chi_{i\le j}(i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}.$$

4. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}a_{ij}\chi_{i<j}(i)\xlongequal{1.\text{的结论}}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}\chi_{i<j}(i)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}.$$

5. 结论是显然的.

6. 结论是显然的. □

注 设 X 是全集, 对任意集合 $A\subset X$, 把函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1,x\in A\\ 0,x\notin A\end{cases}.$$

称为集合 A 的**示性函数**.

例题 1.1 计算

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}.$$

解 令 $I=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}$, 则

$$\begin{aligned}I&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}\xlongequal[(\text{轮换换元})]{\text{将}i\text{换成}j,\text{换成}i}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{2^{i+j}(i+j)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]^2.\end{aligned}$$

□

例题 1.2 记

$$T=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3:a,b,c\text{可以构成某个三角形的三边长}\right\}.$$

证明:

$$\sum_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\text{且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}.$$

笔记 核心想法: 两个集合间可以建立一一映射.

结论 若 $x,y,z\in\mathbb{N}_+$, x,y,z 具有相同奇偶性的充要条件为

$$x+y=2a, y+z=2b, x+z=2c, \text{其中} a,b,\in\mathbb{N}_+.$$

证明 必要性显然. 下面证明充分性. 假设 x,y,z 具有不同的奇偶性, 则不妨设 x,z 为奇数,y 为偶数. 从而 $x+y$ 一定为奇数, 这与 $x+y=2a$ 矛盾. 故 x,y,z 具有相同奇偶性. □

证明 设 $T=\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3 : a,b,c$ 可以构成某个三角形的三边长$\}$.

$$\sum_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}.$$

记 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 : x,y,z$ 有相同的奇偶性$\}$, 则对 $\forall(x,y,z)\in S$, 取 $a=\frac{x+y}{2}$,$b=\frac{y+z}{2}$,$c=\frac{z+x}{2}$. 此时我们有

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{x+2y+z}{2} > \frac{z+x}{2} = c,\\ b+c &= \frac{x+y+2z}{2} > \frac{x+y}{2} = a,\\ a+c &= \frac{2x+y+z}{2} > \frac{y+z}{2} = b. \end{aligned}$$

从而 a,b,c 可以构成某个三角形的三边长, 即此时 $(a,b,c)=(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2})\in T$.

于是我们可以构造映射

$$\tau : S\to T, (x,y,z)\mapsto(a,b,c)=(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}).$$

反之, 对 $\forall(a,b,c)\in T$, 取 $x=a+c-b$,$y=a+b-c$,$z=b+c-a$. 此时我们有

$$x+y=2a, y+z=2b, x+z=2c.$$

从而 x,y,z 具有相同的奇偶性, 即此时 $(x,y,z)=(a+c-b,a+b-c,b+c-a)\in S$.

于是我们可以构造映射

$$\tau' : T\to S, (a,b,c)\mapsto(x,y,z)=(a+c-b,a+b-c,b+c-a).$$

因此对 $\forall(x,y,z)\in S$, 都有 $\tau\tau'(x,y,z)=\tau'\tau(x,y,z)=(x,y,z)$. 即 $\tau\tau'=I$. 故映射 τ 存在逆映射 τ'. 从而映射 τ 是双射.

因此集合 S 中的每一个元素都能在集合 T 中找到与之一一对应的元素. 于是两和式 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}$ 和 $\sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$ 的项数一定相同. 并且任取 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}$ 中 (x,y,z) 所对应的一项 $A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}$, $\sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$ 中一定存在与之一一对应的 $\tau(x,y,z)$ 所对应的一项 $A_{\tau(x,y,z)}$. 而 $\tau(x,y,z)=(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2})$, 因此 $A_{\tau(x,y,z)}=A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}$. 故 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}} = \sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$. □

注 上述证明中逆映射的构造可以通过联立方程 $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{y+z}{2}$, $c=\frac{z+x}{2}$ 解出 $x=a+c-b$, $y=a+b-c$, $z=b+c-a$ 得到.

定理 1.4 (关于无限和的 Fubinin 定理)

设 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是一个使得 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ 绝对收敛的函数. 那么

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(n,m) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(n,m).$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f(n,m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} f(n,m).$$

笔记 这个命题是关于求和号换序的基本结论的推广.

证明

□

例题 1.3 (PutnamA3) 已知 $a_0,a_1,\dots,a_n,x$ 是实数, 且 $0<x<1$, 并且满足

$$\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1}{1-x^2}+\cdots+\frac{a_n}{1-x^{n+1}}=0.$$

证明: 存在一个 $0<y<1$, 使得

$$a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n=0.$$

证明 由题意可知, 将 $\frac{1}{1-x^{k+1}}\ (k=0,1,\cdots,n)$ 根据幂级数展开可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}a_kx^{(k+1)i}.$$

又因为 $0<x<1$, 所以几何级数 $\sum_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}$ 是绝对收敛的. 从而有限个绝对收敛的级数的线性组合 $\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}$ 也是绝对收敛的. 于是根据关于无限和的 Fubinin 定理可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}a_kx^{(k+1)i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kx^{(k+1)i}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\sum_{k=0}^{n}a_kx^{ki}.$$

设 $f(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n=0, y\in(0,1)$, 则 $f\in\mathbb{C}(0,1)$. 假设对任意的 $y\in(0,1)$, 有 $f(y)\neq 0$. 则 f 要么恒为正数, 要么恒为负数. 否则, 存在 $y_1,y_2\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)>0, f(y_2)<0$. 那么由连续函数介值定理可知, 一定存在 $y_0\in(0,1)$, 使得 $f(y_0)=0$. 这与假设矛盾. 因此不失一般性, 我们假设 $f(y)>0,\forall y\in(0,1)$. 又由 $0<x<1$ 可知,$x^i\in(0,1)$. 从而

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\sum_{k=0}^{n}a_kx^{ki}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^if\left(x^i\right)>0.$$

这与题设矛盾. 故原结论成立. □

1.1.2 裂项求和

定理 1.5 (基本结论)

(1) 当 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\leq b$ 时, 有

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n+1)\right]=f(a)-f(b+1);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n+1)-f(n)\right]=f(b+1)-f(a);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n-1)\right]=f(b)-f(a-1);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n-1)-f(n)\right]=f(a-1)-f(b).$$

(2) 当 $a,b,m\in\mathbb{Z}$ 且 $a\le b$ 时, 有

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n+m)-f(n)\right]=\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n); \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n+m)\right]=\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)-\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n). \tag{1.4}$$

♡

证明 (1) 将求和展开后很容易得到证明.

(2) 因为 (2) 中上下两个式子(1.3)(1.4)互为相反数, 所以我们只证明(1.3)即可.

当 $m\ge 0$ 时, 若 $m\le b-a$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]\\
&=f(a+m)+\cdots+f(b)+f(b+1)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(a+m-1)-f(a+m)-\cdots-f(b)\\
&=f(b+1)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(a+m-1)\\
&=\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)
\end{aligned}$$

若 $m>b-a$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)\\
&=f(b+1)+\cdots+f(a+m-1)+f(a+m)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(b)-f(b+1)-\cdots-f(a+m-1)\\
&=f(a+m)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(b)\\
&=\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]
\end{aligned}$$

综上, 当 $m\ge 0$ 时, 有 $\sum\limits_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]=\sum\limits_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum\limits_{n=a}^{a+m-1}f(n)$.

当 $m<0$ 时, 我们有 $-m>0$, 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]&=\sum_{n=a+m}^{b+m}[f(n)-f(n-m)]=-\sum_{n=a+m}^{b+m}[f(n-m)-f(n)]\\
&=-\left(\sum_{n=b+m+1}^{b+m-m}f(n)-\sum_{n=a+m}^{a+m-m-1}f(n)\right)=\sum_{n=a+m}^{a-1}f(n)-\sum_{n=b+m+1}^{b}f(n)\\
&\xlongequal{\text{求和号下限大于上限}}\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)
\end{aligned}$$

综上所述, 结论得证. □

例题 1.4 1. 对 $m\in\mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\sin n^2\cdot\sin n\right)$. 2. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+m)}$.

解 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\left(\sin n^2\cdot\sin n\right)&\xlongequal{\text{积化和差公式}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left[\cos\left(n^2+n\right)-\cos\left(n^2-n\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}[\cos(n(n+1))-\cos(n(n-1))]\\
&=-\frac{1}{2}[\cos(m(m+1))-1]
\end{aligned}$$

2.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+m}\right)$$

□

1.2 求积符号

定义 1.2 (求积符号)

$$\prod_{k=1}^{n}a_k\overset{\triangle}{=\!=}a_1a_2\cdots a_n.$$

定理 1.6 (基本结论)

当 $p,q\in\mathbb{Z}$ 且 $p\leq q$ 时, 有

$$\prod_{n=p}^{q}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{q+1}}{a_p};$$
$$\prod_{n=p}^{q}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_p}{a_{q+1}}.$$

证明 由求积符号定义很容易得到证明. □

注 对于正数列的乘积, 我们可以通过取对数的方式, 将其转化为 $\ln\prod_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\ln a_k$ 来研究.

例题 1.5 计算:$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

解

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)+1}{k(k-1)+1}$$
$$=\frac{1\cdot2\cdots n-1}{3\cdot4\cdots n+1}\cdot\frac{n(n+1)+1}{2+1}=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)+1}{3}$$
$$=\frac{2n^2+2n+2}{3n+3}$$

□

例题 1.6 证明:

$$\frac{(2n-1)!!}{2n!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

笔记 利用" **糖水" 不等式**: 对任意真分数 $\frac{b}{a},a,b,c>0$, 都有 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$ 成立.

证明 根据" 糖水" 不等式, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 我们有

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$
$$<\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{1}{2n+1}$$

故对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{(2n-1)!!}{2n!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n\in\mathbb{N}$ 成立. □

第二章 实数基本定理与上下极限

2.1 实数基本定理

2.1.1 定理介绍

定理 2.1 (实数基本定理)

1. 确界存在定理: 有上界的非空数集一定有上确界.
2. 单调有界原理: 单调有界数列一定收敛.
3. 柯西收敛准则: 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $m, n > N$ 都有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
4. 闭区间套定理: 闭区间套 $I_n = [a_n, b_n]$ 满足 $I_{n+1} \subset I_n$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 则存在唯一的 ξ, 使得 ξ 属于每一个 I_n.
5. 聚点定理: 有界数列必有收敛子列.
6. 有限覆盖定理: 有界闭集的任意一族开覆盖, 都存在有限子覆盖.

定义 2.1 (点集相关概念)

1. 如果存在 $r > 0$ 使得 $(a - r, a + r) \subset A$, 则称 a 是集合 A 的内点 (高维改为开球即可).
2. 如果一个集合 A 中的每一个点都是内点, 则称 A 是开集.
3. 如果集合 A 中的任意一个收敛序列 x_n 的极限点 x, 都有 $x \in A$, 则称 A 是闭集.
4. 设 $B \subset A$, 如果对任意 $r > 0$ 和任意 $x \in A$, 都有 $(x - r, x + r) \cap B \neq \varnothing$, 则称 B 在 A 中稠密.

2.1.2 综合应用

例题 2.1 设 $f(x) : [0, 1] \to [0, 1]$ 单调递增且 $f(0) > 0, f(1) < 1$, 证明: 存在 x 使得 $f(x) = x$.

笔记 因为题目条件中的函数 f 只是一个实值函数, 并没有其他更进一步的性质 (连续性、可微性、凸性等). 所以我们只能利用最基本的实数基本定理证明. 证明存在性, 考虑反证法会更加简便.

注 f 并不是连续函数, 不能用介值定理.

证明 (反证法) 假设对 $\forall x \in [0, 1]$, 都有 $f(x) \neq x$. 将闭区间 $[0, 1]$ 记作 $[a_1, b_1]$, 且由条件可知 $f(a_1) > a_1, f(b_1) < b_1$. 令 $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, 若 $f(c_1) > c_1$, 则取 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$; 若 $f(c_1) < c_1$, 则取 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. 从而得到闭区间 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 并且 $f(a_2) > a_2, f(b_2) < b_2$. 以此类推, 可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 并且 $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$.

根据闭区间套定理, 可知存在唯一 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 且 $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$. 又由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增及 $f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 可知 $a_n < f(a_n) \leqslant f(\xi) \leqslant f(b_n) < b_n$. 令 $n \to \infty$ 可得 $\xi \leqslant f(\xi) \leqslant \xi$, 即 $f(\xi) = \xi$. 这与假设矛盾. □

引理 2.1 (Lebesgue 数引理)

如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则存在一个正数 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 中的任何两个点 x', x'', 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 x', x''.(称这个数 δ 为开覆盖的 Lebesgue 数.)

笔记 本题谢惠民上的证明是利用有限覆盖定理, 而 CMC 红宝书上通过直接构造出 δ 进行证明. 这里我们采用的是聚点定理进行证明.

证明 (反证法) 假设对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 取 $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, 都存在相应的 $x_n, y_n \in [a, b]$ 且 $|x_n - y_n| < \delta$, 使得对 $\forall I \in \{O_\alpha\}$, 要么 $x_n \notin I$, 要么 $y_n \notin I$. 由聚点定理可知, 有界数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 一定存在收敛子列. 设 $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$ 为相应的收敛子列, 则由 $|x_n - y_n| < \delta = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ 可知 x_{n_k}, y_{m_k} 收敛于同一个极限点. 故设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k} = x_0 \in [a, b]$.

因为 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 所以存在 $I_0 \in \{O_\alpha\}$, 使得 $x_0 \in I_0$. 又由于 I_0 是开集, 因此存在 $\eta > 0$, 使得 $(x_0-\eta, x_0+\eta) \subset I_0$. 从而由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k} = x_0 \in [a,b]$ 可知, 存在充分大的 K, 使得 $\left|x_{n_K}-x_0\right| < \eta, \left|y_{m_K}-x_0\right| < \eta$. 于是 $x_{n_K}, y_{m_K} \in (x_0-\eta, x_0+\eta) \subset I_0$. 即开区间 $I_0 \in \{O_\alpha\}$ 同时覆盖了 x_{n_K}, y_{m_K} 这两个点, 与假设矛盾. □

注 注意对于两个收敛子列 $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$, 此时 $n_k = m_k$ 并不一定对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$ 都成立, 即这两个收敛子列的指标集 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 不相同也不一定有交集, 故无法利用聚点定理反复取子列的方法取到两个指标相同且同时收敛的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$(取 $\{x_n\}$ 为一个奇子列收敛, 偶子列发散的数列; 取 $\{y_n\}$ 为一个奇子列发散, 偶子列收敛的数列就能得到反例.).

例题 2.2

1. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 中且对任意 x, 都存在与 x 有关的 $r > 0$, 使得 $f(x)$ 在区间 $(x-r, x+r)$ 中为常值函数, 证明:$f(x)$ 是常值函数.
2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 中的实值函数, 如果对任意 $x \in [a,b]$, 均存在 $\delta_x > 0$ 以及 M_x, 使得 $|f(y)| \leq M_x, \forall y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$, 证明:$f(x)$ 是有界的.
3. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 均存在与 x_0 有关的 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 是单调递增的, 证明:f 在整个 $\mathbb{R}$ 上也是单调递增的.

笔记 这个结果说明: 局部常值函数就是常值函数, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数, 局部单调递增函数在整个区间上也是单调递增的, **实数基本定理能够将局部性质扩充为整体性质**.

证明

1. 证法一 (有限覆盖定理)(不建议使用):对任意 $x \in [a,b]$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $f(t)$ 在区间 $(x-r_x, x+r_x)$ 为常值函数, 则 $\bigcup\limits_{x\in[a,b]} (x-r_x, x+r_x) \supset [a,b]$, 故存在其中有限个区间 $(x_k-r_k, x_k+r_k), 1 \leq k \leq n$ 使得他们的并集包含 $[a,b]$.
   直观来看只需要将这些区间“从小到大”排列, 就可以依次推出每一个区间上都是相同的一个常值函数, 但是所谓“从小到大”排列目前是无法准确定义的, 所以这样说不清楚, 优化如下:
   方案 1: 选择其中个数尽可能少的区间, 使得它们的并集可以覆盖 $[a,b]$ 但是任意删去一个都不可以 (这是能够准确定义的一个操作), 此时区间具备性质“任意一个不能被其余的并集盖住”, 接下来将这些区间按照左端点的大小关系来排序, 去论证它们确实是如你所想的那样“从小到大”排列的 (关注右端点), 进而得证.
   方案 2: 利用Lebesgue 数引理, 将区间 $[a,b]$ 分为有限个 $[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \cdots, [a+n\delta, b]$, 其中 δ 是 Lebesgue 数. 则每一个闭区间都可以被开覆盖中的某一个开区间覆盖住, 于是分段常值函数, 并且还能拼接起来, 所以是常值函数.
   证法二 (确界存在定理):(反证法) 假设存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $f(a) \neq f(b)$. 构造数集
   $$E = \{x \in [a,b] \,|\, f(t) = f(a), \forall t \in [a,x]\}.$$
   从而 $E \neq \varnothing$ 且 $E \in [a,b]$. 于是由确界存在定理, 可知数集 E 存在上确界, 设 $x_0 = \sup E$.
   如果 $f(a) \neq f(x_0)$, 则由条件可知, 存在 $r_0 > 0$, 使得 $f(t) = f(x_0), \forall t \in (x_0-r_0, x_0+r_0)$. 由 $x_0 = \sup E$ 可知, 存在 $x_1 \in (x_0-r_0, x_0)$ 且 $x_1 \in E$. 于是 $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_1]$. 从而 $f(t) = f(a) = f(x_0), \forall t \in (x_0-r_0, x_1)$. 这与 $f(x_0) \neq f(a)$ 矛盾.
   如果 $f(a) = f(x_0)$, 则由条件可知, 存在 $r_1 > 0$, 使得 $f(t) = f(x_0) = f(a), \forall t \in (x_0-r_1, x_0+r_1)$. 又由 $x_0 = \sup E$ 可知, 存在 $x_2 \in (x_0-r_1, x_0)$ 且 $x_2 \in E$. 于是 $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_2]$. 进而对 $\forall t \in [a, x_2] \cup (x_0-r_1, x_0+\frac{r_1}{2}] = [a, x_0+\frac{r_1}{2}]$, 有 $f(t) = f(a)$. 从而 $x_0+\frac{r_1}{2} \in E$, 这与 $x_0 = \sup E$ 矛盾.
   故假设不成立, 命题得证.
   证法三 (闭区间套定理):(反证法) 假设存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $f(a) \neq f(b)$. 不妨设 $f(a) < f(b)$, 则记闭区间 $[a,b] = [a_1, b_1]$. 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > f(a_1)$, 则记闭区间 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2, b_2]$; 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < f(b_1)$, 则记闭区间 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$. 以此类推, 可以得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足 $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$. 由闭区间套定理, 可知存在唯一 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 且 $\xi \in [a_n, b_n]$. 又由条件可知, 存在

$r>0$, 使得 $f(t)=f(\xi),\forall t\in(\xi-r,\xi+r)$. 从而存在充分大的 $N\in\mathbb{N}_+$, 使得 $|a_N-\xi|<r,|b_N-\xi|<r$, 即 $a_N,b_N\in(\xi-r,\xi+r)$. 于是 $f(a_N)=f(b_N)$, 这与 $f(a_N)<f(b_N)$ 矛盾.

2. (聚点定理):(反证法) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对 $\forall n>0$, 都存在 $x_n\in[a,b]$, 使得 $|f(x_n)|>n$. 从而得到一个有界数列 $\{x_n\}$. 由聚点定理, 可知其存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. 由条件可知, 存在 $\delta_{x_0}>0$ 以及 M_{x_0}, 使得 $|f(y)|\leqslant M_{x_0},\forall y\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})$. 又由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ 可知, 存在 $K>M_{x_0}$, 使得 $|x_{n_K}-x_0|<\delta_{x_0}$, 即 $x_{n_K}\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})$. 于是 $|f(x_{n_K})|\leqslant M_{x_0}$. 而 $|f(x_{n_K})|>n_K\geqslant K>M_{x_0}$ 矛盾.
3. (闭区间套定理):(反证法) 假设存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $f(a)\geq f(b)$. 记闭区间 $[a,b]=[a_1,b_1]$, 若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\leqslant f(a_1)$, 则记闭区间 $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]=[a_2,b_2]$; 若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\geqslant f(b_1)$, 则记闭区间 $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]=[a_2,b_2]$. 以此类推, 可以得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$, 满足 $[a_n,b_n]\subset[a_{n+1},b_{n+1}],f(a_n)\geqslant f(b_n),\forall n\in\mathbb{N}_+$. 由闭区间套定理, 可知存在唯一 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 且 $\xi\in[a_n,b_n]$. 由条件可知, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在区间 $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 上单调递增. 又由 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 可知, 存在 $N>0$, 使得 $|a_N-\xi|<\delta,|b_N-\xi|<\delta$, 即 $a_N,b_N\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$, 且 $a_N<b_N$. 于是 $f(a_N)\leqslant f(b_N)$. 而 $f(a_N)\geqslant f(b_N)$, 这就产生了矛盾.

□

引理 2.2

设 $f(x)$ 定义在区间 I 中, 则 $f(x)$ 的全体极值构成的集合是至多可数集.

证明 极值只有极大值和极小值, 因此只要证明极大值全体与极小值全体都是至多可数的即可.

设 $f(x)$ 的全体极小值构成的集合为 A, 则

$$A=\{f(x)|\exists\delta>0,\forall t\in(x-\delta,x+\delta),f(t)\geqslant f(x)\}.$$

故对 $\forall y\in A$, 都存在 $x\in I$, 使得 $y=f(x)$, 并且 $\exists\delta>0,\forall t\in(x-\delta,x+\delta),f(t)\geqslant f(x)$. 由有理数的稠密性可知, 存在 $r\in(x-\delta,x)\cap\mathbb{Q},s\in(x,x+\delta)\cap\mathbb{Q}$. 从而 $(r,s)\subset(x-\delta,x+\delta)$, 于是对 $\forall t\in(r,s)$, 同样有 $f(t)\geqslant f(x)$.

再设全体有理开区间构成的集合为 B, 现在定义一个映射

$$\varphi:A\longrightarrow B;\quad y\longmapsto(r,s).$$

任取 $y_1,y_2\in A$ 且 $y_1\neq y_2$, 则存在 $x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 假设 $\varphi(y_1)=\varphi(y_2)=(r_0,s_0)$, 则对 $\forall t\in(r_0,s_0)$, 都有 $f(t)\geqslant y_1,y_2$. 于是 $y_1=f(x_1)\geqslant y_2,y_2=f(x_2)\geqslant y_1$, 从而 $y_1=y_2$, 这产生了矛盾. 故 $\varphi(y_1)\neq\varphi(y_2)$, 因此 φ 是单射.

而由全体有理开区间构成的集合 B 是至多可数的, 因此 $f(x)$ 的全体极小值构成的集合 A 也是至多可数的. 同理,$f(x)$ 的全体极大值构成的集合也是至多可数的. □

注 由全体有理开区间构成的集合 B 是可数集的原因:

构造一个映射

$$\phi:B\longrightarrow\mathbb{Q}\times\mathbb{Q};\quad(r,s)\longmapsto(r,s).$$

显然 ϕ 是一个双射, 而 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 是可数集, 故 B 也是可数集.

例题 2.3 设 $f(x)$ 在区间 I 中连续, 并且在每一点 $x\in I$ 处都取到极值, 证明:$f(x)$ 是常值函数.

注 连续这一条件不可删去, 也不可减弱为至多在可数个点不连续. 反例: 考虑黎曼函数即可, 它处处取极值, 并且在有理点不连续, 无理点连续.

证明 证法一 (引理 2.2):(反证) 假设 $f(x)$ 不是常值函数, 则存在 $a,b\in I$, 使得 $f(a)\neq f(b)$. 由 f 的连续性及连续函数的介值性可知,$f(x)$ 可以取到 $f(a),f(b)$ 中的一切值. 故 $f(x)$ 的值域是不可数集 (区间都是不可数集). 又由条件可知,$f(x)$ 的值域就是由 $f(x)$ 的全体极值构成的. 于是根据引理 2.2可得,$f(x)$ 的值域是至多可数集. 这与 $f(x)$ 的值域是不可数集矛盾.

证法二 (闭区间套定理):假设 $f(x)$ 不是常值函数, 则存在 $a_1,b_1\in I$, 使得 $f(a_1)\neq f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1)<f(b_1)$. 因为 f 在 I 上连续, 所以由介值定理可知, 存在 $c_1\in[a_1,b_1]$, 使得 $f(a_1)<f(c_1)=\frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}<f(b_1)$. 若 $b_1-c_1\leqslant\frac{b_1-a_1}{2}$, 则令 $[a_2,b_2]=[c_1,b_1]$; 若 $c_1-a_1\leqslant\frac{b_1-a_1}{2}$, 则令 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$. 无论哪种情况, 都有

$f(a_2) < f(b_2)$.

在 $[a_2, b_2]$ 上重复上述操作, 并依次类推下去, 得到一列闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由闭区间套定理可知, 存在唯一 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 使得 $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. 再由 f 的连续性以及 *Heine* 归结原则可知,$f(a_n)$ 严格递增收敛于 $f(x_0)$,$f(b_n)$ 严格递减收敛于 $f(x_0)$. 故 $f(a_n) < f(x_0) < f(b_n)$,$\forall n \in \mathbb{N}_+$. 因此对 $\forall \delta > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得 $|a_N - x_0| < \delta$,$|b_N - x_0| < \delta$, 并且 $f(a_N) < f(x_0) < f(b_N)$. 从而 $x_0 \in I$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 这与 f 在 I 上处处取极值矛盾. □

定理 2.2 (Baire 纲定理)

1. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列没有内点的闭集, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也没有内点.
2. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列开集并且都在 $\mathbb{R}$ 稠密, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 也在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
3. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列闭集, 并且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是闭集, 则存在开区间 (a, b)(可以无穷区间) 和正整数 N 使得 $(a, b) \cap A \subset A_N$.
4. 设 A_n 是一列无处稠密集 (闭包没有内点), 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也没有内点.

♡

证明

1. 用反证法. 设 $x_0 \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为内点, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$. 因为 A_1 没有内点, 故存在 $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$. 由于 A_1 为闭集, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得
$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \varnothing$$
不妨设 $\delta_1 < 1$. 因为 A_2 没有内点, 故存在 $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$. 由于 A_2 为闭集, 故存在 $\delta_2 > 0$, 使得
$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \varnothing$$
不妨设 $\delta_2 < \frac{1}{2}$. 如此继续, 我们得到闭区间套
$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$
使得 $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \varnothing, \delta_n < \frac{1}{n}(n \geqslant 1)$. 根据闭区间套原理, 存在 $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n], \forall n \geqslant 1$. 因此 $\xi \notin \bigcup_{n\geqslant 1} A_n = A$, 这和 $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$ 相矛盾.
2.
3.
4.

□

例题 2.4 设数列 a_n 单调递增趋于正无穷, 并且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, 函数 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 中且对任意 $x \geq 1$ 都有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n x) = 0$.

1. 若 $f(x)$ 是连续函数, 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
2. 若删去连续这一条件, 或者虽然连续, 但是 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则上述结论均不成立.

证明

1. 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义 $E_n = \{x \geq 1 | \forall k \geq n, |f(a_k x)| \leq \varepsilon\}$, 则 E_n 是一列闭集, 根据条件有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [1, +\infty)$. 于是根据 baire 纲定理可知存在正整数 N 和区间 (u, v) 使得 $(u, v) \subset E_N$, 也就是说, 任意 $x \in (u, v)$, 任意 $n \geq N$ 都有 $|f(a_n x)| \leq \varepsilon$, 换句话说我们得到了一个一致的 N. 因此 $|f(x)|$ 在区间 $(a_N u, a_N v), (a_{N+1} u, a_{N+1} v), \cdots$ 中

都是不超过 ε 的, 只要这些区间在 n 很大之后能够相互有重叠, 一个接着下一个, 全覆盖就行了. 换句话说, 我们要证明: 存在 N_0 使得任意 $n \geq N_0$ 都有 $a_{n+1}u < a_n v$, 这等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{v}{u}$, 注意条件: 极限等于 1 并且右端 $\frac{v}{u} > 1$, 所以上式成立. 将前面推导的东西梳理一下, 就是说: 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 M 使得 $x > M$ 时恒有 $|f(x)| < \varepsilon$, 结论得证.

2. 例如考虑 $a_n = n$, 定义 $f(x)$ 为: 当 $x = m \cdot 2^{\frac{1}{k}}, m \in \mathbb{N}^+$ 时候取 1, 其余情况都取 0, 则对任意的 $x > 0$, 数列 $f(nx)$ 中都至多只有一项为 1, 因此极限总是 0, 但是很明显 $f(x)$ 的极限并不存在. 另外一个反例, 可以考虑 $a_n = e^n$, 现在有连续性, 条件为
$$\lim_{n\to\infty} f(e^n) = \lim_{n\to\infty} f(e^{n+\ln x}) = 0$$
将 $\ln x \in \mathbb{R}$ 看成一个变量, 相应的考虑 $g(x) = f(e^x)$, 则连续函数 $g(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} g(y+n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(e^{y+n}) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, 我们构造一个例子使得 $g(x)$ 在无穷处极限非零或者不存在即可. 这与经典的命题有关: 设 $f(x)$ 一致连续且 $f(x+n) \to 0$ 对任意 x 成立, 则 $f(x) \to 0$, 现在删去了一致连续性命题自然是错的, 具体构造留作习题.

□

注 通常, 点态收敛 (上题) 或者数列极限 (本题) 这种非一致性的条件, 描述起来是“任意 $x \in (0,1)$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$”或者“任意 $x > 0$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $|f(a_n x)| < \varepsilon$”, 很明显这里的 N 是与 x, ε 都有关系的, 如果我们事先取定 $\varepsilon > 0$, 那么这个过程可以说是“给定 x, 去找对应的 N”. 而 baire 纲定理的想法就是反过来找: 不同的 x 对应的 N 确实可以不一样, 那就先取好 N, 我们看都有哪些 x 对应到这一个 N, 也就是说事先取定 $\varepsilon > 0$, 然后对每一个 n 去定义集合, 反找 x. 所有 baire 纲定理相关的问题, 思想都是如此, 根据定理便能得到一个一致的东西, 拿来做事情.

例题 2.5 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 中可导, 证明:$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 中的一个稠密子集中连续.

证明

□

引理 2.3

有界数列 x_n 如果满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 则 x_n 的全体聚点构成一个闭区间.

证明

□

例题 2.6 设连续函数 $f(x) : [0,1] \to [0,1], x_1 \in [0,1], x_{n+1} = f(x_n)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

证明 必要性 ($\Rightarrow$): 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ 显然成立.

充分性 ($\Leftarrow$): □

2.2 上下极限

命题 2.1 (子列极限命题)

(a): 给定 $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 的充分必要条件是对任何广义存在的 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

(b): 设 $m \in \mathbb{N}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{mn+r}, \forall r = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ 相同, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}$.

笔记 当 $m = 2$, 上述命题是在说如果序列奇偶子列极限存在且为同一个值, 则序列的极限存在且极限和偶子列极限值相同. 所谓奇偶, 就是看除以 2 的余数是 1 还是 0. 对一般的 $m \in \mathbb{N}$, 我们也可以看除以 m 的余数是

$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ 中的哪一个来对整数进行分类, 即 $\bmod m$ 分类. 严格的说, 我们有无交并

$$\mathbb{Z}=\bigcup_{r=0}^{m-1}\{mk+r:k\in\mathbb{Z}\}.$$

证明 对 (a): 考虑上下极限即可.

对 (b): 记 $A\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}x_{mn}$. 事实上对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $k>N$ 时, 我们有

$$|x_{mk+r}-A|<\varepsilon,\forall r\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}. \tag{2.1}$$

我们知道对任何正整数 $n>mN+m-1$, 存在唯一的 $r\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ 和 $k>N$, 使得 $n=km+r$, 于是运用(2.1)我们有 $|x_n-A|<\varepsilon$, 因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=\lim_{n\to\infty}x_{mn}.$$

□

定义 2.2 (上下极限的定义)

我们定义

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n\triangleq\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}a_k,\ \varliminf_{n\to\infty}a_n\triangleq\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}a_k. \tag{2.2}$$

♣

笔记 注意到由定义, $\sup\limits_{k\geq n}a_k$ 是单调递减的, $\inf\limits_{k\geq n}a_k$ 是单调递增的. 因此(2.2)式的极限存在或为确定符号的 ∞.

命题 2.2 (上下极限的等价定义)

假定 $\{a_n\}$ 是个实数列, 则有

(1): 设 A 是某个实数, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $x_n<A+\varepsilon$ 且存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}>A-\varepsilon,k=1,2,\cdots$.

(2): $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A>0$, 存在 n, 使得 $a_n>A$.

(3): 设 A 是某个实数, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $x_n>A-\varepsilon$ 且存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}<A+\varepsilon,k=1,2,\cdots$.

(4): $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A<0$, 存在 n, 使得 $a_n<A$.

♠

命题 2.3 (上下极限的性质)

我们有如下的

1. $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n$.
2. $-\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.
3. $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\geq\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n$.
4. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=ab$.

♠

笔记 上下极限的性质都可以通过考虑其子列的极限快速得到证明. 因此我们一般不需要额外记忆上下极限的性质, 只需要熟悉通过考虑子列极限直观地得到结论即可. 并且**因为上下极限就是 (最大/最小) 子列极限, 所以一般极限的性质对于上下极限都成立**.

证明 1.

2.

3.

4. 由于 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 因此我们可设 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$. 根据极限的四则运算法则, 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n_k}b_{n_k}=ab$. 从而 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_nb_n\geqslant\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n_k}b_{n_k}=ab$. 又由上下极限的性质, 可知 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_nb_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}b_n=ab$. 故 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=$

ab. □

例题 2.7 求上极限

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

解 注意到

$$n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi\right)=(-1)^n n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

又因为

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\varlimsup_{n\to+\infty}(-1)^n n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{\pi}{2}.$$

□

注 本题最后一个等号其实是直接套用了一个上极限的性质得到的.

命题 2.4

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$f_1(n,\varepsilon)\le a_n\le f_2(n,\varepsilon),\forall n\ge N,$$

这里

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty} f_2(n,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty} f_1(n,\varepsilon)=A\in\mathbb{R}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

笔记 以后可以直接使用这个命题. 但是要按照证法一的格式书写.

证明 证法一 (利用上下极限)(也是实际做题中直接使用这个命题的书写步骤):

已知对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$f_1(n,\varepsilon)\le a_n\le f_2(n,\varepsilon),\forall n\ge N,$$

上式两边令 $n\to+\infty$, 则有

$$\lim_{n\to+\infty} f_1(n,\varepsilon)\le\varliminf_{n\to+\infty} a_n,\ \varlimsup_{n\to+\infty} a_n\le\varlimsup_{n\to+\infty} f_2(n,\varepsilon),\forall\varepsilon>0.$$

由 ε 的任意性, 两边令 $\varepsilon\to0^+$, 可得

$$A=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varliminf_{n\to+\infty} f_1(n,\varepsilon)\le\varliminf_{n\to+\infty} a_n,\ \varlimsup_{n\to+\infty} a_n\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\varlimsup_{n\to+\infty} f_2(n,\varepsilon)=A.$$

又显然有 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n\le\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, 于是

$$A=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varliminf_{n\to+\infty} f_1(n,\varepsilon)\le\varliminf_{n\to+\infty} a_n\le\varlimsup_{n\to+\infty} a_n\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\varlimsup_{n\to+\infty} f_2(n,\varepsilon)=A.$$

故由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

证法二 ($\varepsilon-\delta$ 语言):

$\forall\varepsilon>0$, 记 $g_1(\varepsilon)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_1(n,\varepsilon), g_2(\varepsilon)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_2(n,\varepsilon)$. 由 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} g_1(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} g_2(\varepsilon)=A$, 可知对 $\forall\eta>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$g_1(\delta)>A-\frac{\eta}{2}, g_2(\delta)<A+\frac{\eta}{2}.$$

由于 $g_1(\delta)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_1(n,\delta), g_2(\delta)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_2(n,\delta)$, 因此存在 $N'\in\mathbb{N}$, 使得

$$f_1(n,\delta)>g_1(\delta)-\frac{\eta}{2}, f_2(n,\delta)<g_2(\delta)+\frac{\eta}{2},\forall n>N'.$$

又由条件可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$f_1(n,\delta) \leqslant a_n \leqslant f_2(n,\delta), \forall n > N.$$

于是当 $n > \max\{N, N'\}$ 时, 对 $\forall \eta > 0$, 我们都有

$$A - \eta < g_1(\delta) - \frac{\eta}{2} < f_1(n,\delta) \leqslant a_n \leqslant f_2(n,\delta) < g_2(\delta) + \frac{\eta}{2} < A + \eta.$$

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$. □

第三章 极限与渐近分析方法

3.1 基本的渐进估计与求极限方法

3.1.1 基本极限计算

3.1.1.1 基本想法

裂项、**作差**、**作商**的想法是解决极限问题的基本想法.

例题 3.1 对正整数 v, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}$.

笔记 直接裂项即可.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+v-1)}-\frac{1}{(k+1)\,(k+2)\cdots(k+v)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{v!}-\frac{1}{n\,(n+1)\cdots(n+v)}\right]=\frac{1}{v!v}.\end{aligned}$$

□

例题 3.2 设 $p_0=0, 0\le p_j\le 1, j=1,2,\cdots$. 求 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(p_j\prod\limits_{i=0}^{j-1}(1-p_i)\right)+\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$ 的值.

笔记 遇到求和问题, 可以先观察是否存在裂项的结构.

解 记 $q_i=1-p_i$, 则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)+\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-p_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(1-q_j\right)\prod_{i=0}^{j-1}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j-1}q_i-\prod_{i=0}^{j}q_i\right)+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0-\prod_{i=0}^{\infty}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0.$$

□

例题 3.3 设 $|x|<1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

注 如果把幂次 $1,2,2^2,\cdots$ 改成 $1,2,3,\cdots$, 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题.

笔记 平方差公式即可

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

□

例题 3.4 对正整数 n, 方程 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+t}=e$ 的解记为 $t=t(n)$, 证明 $t(n)$ 关于 n 递增并求极限 $(t\to+\infty)$.

解 解方程得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+t}=e\Leftrightarrow(n+t)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n.$$

设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x, x>0$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{x^2+x}-1>0\Leftrightarrow\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x^2+x}\Leftrightarrow\ln(1+t)<\frac{t}{\sqrt{1+t}},t=\frac{1}{x}\in(0,1).$$

最后的不等式由关于 ln 的常用不等式可知显然成立，于是 $f(x)$ 单调递增，故 $t(n)=f(n)$ 也单调递增. 再来求极限

$$\lim_{n\to\infty} t(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

□

命题 3.1

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{n!}{(n+1)^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.$$

证明

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}&=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+k}{k}\right)^{k}=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\\&=\frac{n!}{(n+1)^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}n^{n}}{(n+1)^{n}e^{n}}=\frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}e^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.\end{aligned}$$

□

例题 3.5 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}$.

解 因为

$$\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}=\sqrt{n}\frac{e^{n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{(\frac{2}{1})(\frac{3}{2})^{2}(\frac{4}{3})^{3}\cdots(\frac{n+1}{n})^{n}}=\frac{\sqrt{n}n!e^{n}}{(n+1)^{n}e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n}\ (n\to+\infty)$ 及

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),\quad n\to+\infty$$

得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^{k}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n}{(1+1/n)^{n}e^{\ln n+\gamma}}=\sqrt{2\pi}e^{-(1+\gamma)}$$

□

命题 3.2 (数列常见的转型方式)

数列常见的转型方式:

(1) $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$;

(2) $a_n=a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}$;

(3) $a_n=S_n-S_{n-1}$, 其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

从而我们可以得到

1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.
2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n\neq 0)$ 收敛的充要条件是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 收敛.

注 在关于数列的问题中, **将原数列的等式或不等式条件转化为相邻两项的差或商的等式或不等式条件**的想法是非常常用的.

笔记 这个命题给我们证明数列极限的存在性提供了一种想法: 我们可以将数列的收敛性转化为级数的收敛性, 或者将数列的收敛性转化为累乘的收敛性. 而累乘可以通过取对数的方式转化成级数的形式, 这样就可以利用级数

的相关理论来证明数列的收敛性.

这种想法的**具体操作方式:**

(i) 先令数列相邻两项作差或作商, 将数列的极限写成其相邻两项的差的级数或其相邻两项的商的累乘形式.(如果是累乘的形式, 那么可以通过取对数的方式将其转化成级数的形式.)

(ii) 若能直接证明累乘或级数收敛, 就直接证明即可. 若不能, 则再利用级数的相关理论来证明上述构造的级数的收敛性, 从而得到数列的极限的存在性. 此时, 我们一般会考虑这个级数的通项, 然后去找一个通项能够控制住所求级数通项的收敛级数 (几何级数等), 最后利用级数的比较判别法来证明级数收敛

证明

1. 必要性 (⇒) 和充分性 (⇐) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$ 直接得到.

2. 必要性 (⇒) 和充分性 (⇐) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 直接得到.

□

例题 3.6 设 $a_n = \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\dfrac{1}{2n+1}$, 证明: 数列 a_n 收敛到一个正数.

证明 由条件可得 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+3}}{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 1.$$

从而 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right] = e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}. \tag{3.1}$$

注意到

$$\ln\left[1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right] \sim \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, n\to\infty.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]$ 存在. 于是由 (3.1)式可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}$$

也存在. □

3.1.1.2 带 ln 的极限计算

通常, 带着一堆 ln 的极限算起来都非常烦人, 并不是简单的一个泰勒就秒杀的, 比如这种题. 这种题不建议用泰勒, 很多时候等价无穷小替换、拆项和加一项减一项会方便不少.

注 另外, 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然.

例题 3.7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)$.

注 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然, 比如下面的做法就是错的 (过程和答案都不对)

$$\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x \approx (2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x \approx (2x+3)\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}-\pi x = \frac{3\pi}{2}.$$

解 根据洛必达法则, 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 1$, 拆分一下有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left((2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x\\
&=2\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{\ln(1+x)}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}-1\right)\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi-2.
\end{aligned}
$$

□

3.1.1.3 幂指函数的极限问题

幂指函数的极限问题, 一律写成 $e^{\ln}$ 形式, 并利用等价无穷小替换和加一项减一项去解决, 方便.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看 Taylor 展开的第一项并且是严谨的, 泰勒则需要展开好几项, 计算量爆炸.

例题 3.8 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}$.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}=1+\sin x\ln x+\frac{1}{2}\sin^2x\ln^2x+\frac{1}{6}\sin^3x\ln^3x+O(x^4\ln^4x)$$

$$(\sin x)^x=e^{x\ln\sin x}=1+x\ln\sin x+\frac{1}{2}x^2\ln^2\sin x+\frac{1}{6}x^3\ln^3\sin x+O(x^4\ln^4\sin x)$$

然后你不仅需要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦.

笔记 先说明写成 $e^{\ln}$ 形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可.

解 注意到

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,\ \lim_{x\to0^+}x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0.$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln\sin x}=1.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln x+x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2\ln x}(\frac{\sin x}{x}\sim1-\frac{1}{6}x^2,x\to0^+)\\
&=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3\ln x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=-\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

□

例题 3.9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right)$.

解 注意到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{x\to\infty}ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=e.$$

从而

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}=\lim_{x\to 0^+}e^{ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^e.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\left(e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right)\\
&=e^e\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right)=e^e\lim_{x\to\infty}x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&=e^e\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=e^{e+1}\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\xlongequal{Taylor展开}e^{e+1}\lim_{x\to\infty}x^2\frac{1}{2}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)^2=\frac{e^{e+1}}{2}\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)^2=\frac{e^{e+1}}{8}
\end{aligned}$$

□

3.1.1.4 拟合法求极限

例题 3.10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}}$.

笔记 核心想法是**拟合法**, 但是最后的极限估计用到了**分段估计**的想法.

证明 注意到 $\frac{\ln n}{\ln(2n)}\to 1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}-2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$, 所以只需证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$$

注意对称性, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$ 即可, 待定一个 m 来分段放缩. 首先容易看出数列 $\ln k\ln(n-k)$ 在 $2\le k\le\frac{n}{2}$ 时是单调递增的, 这是因为

$$f(x)=\ln x\ln(n-x),\ f'(x)=\frac{\ln(n-x)}{x}-\frac{\ln x}{n-x}>0$$
$$\Leftrightarrow (n-x)\ln(n-x)>x\ln x,\forall x\in\left(2,\frac{n}{2}\right)$$

显然成立, 所以待定 $m\in[2,\frac{n}{2}]$, 于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right)=\frac{m}{n}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1\right)\le\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1$$

为了让第一个趋于零, 可以取 $m=\dfrac{n}{2\ln^2 n}$, 然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln\frac{n}{2\ln^2 n}\ln\left(n-\frac{n}{2\ln^2 n}\right)}-1=0$$

所以结论得证 (过程中严格来讲应补上取整符号, 这里方便起见省略了). □

3.1.2 Taylor 公式

定理 3.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设 f 在 $x=a$ 是 n 阶右可微的, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),x\to a^+. \tag{3.2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+O((x-a)^n),x\to a^+. \tag{3.3}$$

♡

笔记 用 Taylor 公式计算极限, 如果展开 n 项还是不方便计算, 那么就多展开一项或几项即可.

证明 (1) 要证明(3.2)式等价于证明

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=0.$$

对上式左边反复使用 $n-1$ 次 $L'Hospital'rules$, 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!}(x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\cdots\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}\\
&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\xlongequal{n\text{阶导数定义}}0
\end{aligned}$$

故(3.2)式成立.

(2) 要证明(3.3)式等价于证明: 存在 $C>0$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|\leqslant C,\forall x\in[a,a+\delta].$$

□

3.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限

例题 3.11 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=1$, 计算

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n.$$

笔记 由 $\dfrac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty$, 可得 $f(n)=n+o(n),n\to+\infty$. 这个等式的意思是:$f(n)=n+o(n)$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$ 都成立. 并且当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+o(n)}{n}=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(n)}{n}=1$. 其中 $o(n)$ 表示一个 (类) 数列, 只

不过这个 (类) 数列具有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{o(n)}{n}=0$ 的性质.

解 解法一 (一般解法):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{f(n)}}=e.$$

解法二 (渐进估计):

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{n}=1$, 可知

$$\frac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty.$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\left[1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+o(1)}\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}(1+o(1))\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]},n\to+\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{1+o(1)}=e.$$

□

例题 3.12 计算:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

解

1.
2.

□

例题 3.13 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}\ (\alpha>0)$.

笔记 利用 Taylor 公式即可得到结果. 类似 $\ln(xe^{-x}-1)\sim\ln(xe^{-x}+o(xe^{-x}))\sim\ln(xe^{-x})$ 的等价关系可以直接凭直觉写出, 要严谨证明的话, 只需要利用 L'Hospital 法则即可.

解 由

$$(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=e^{\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{xe^{-x}}-1)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(xe^{-x})}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\\&=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\-1, & \alpha=1,\\-\infty, & 0<\alpha<1.\end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=\begin{cases}1, & \alpha>1,\\e^{-1}, & \alpha=1,\\0, & 0<\alpha<1.\end{cases}$$

□

例题 3.14 计算 $(1+\frac{1}{x})^x,x\to+\infty$ 的渐进估计.

解 由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]}=e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + o\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right]$$
$$= e\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to +\infty.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \frac{e}{2}, \lim_{x\to+\infty} x\left[x\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) - \frac{e}{2}\right] = -\frac{11e}{24}. \tag{3.4}$$

□

注 反复利用上述(3.4)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到 e 的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

例题 3.15 计算

$$\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}.$$

解 记 $I = \lim\limits_{x\to0} \frac{1 - \cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}$, 则由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx) = \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]\left[1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right]\cdots\left[1 - \frac{(nx)^2}{2} + o(x^2)\right]$$
$$= 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 6}x^2 + o(x^2), x \to 0.$$

故 $I = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. □

例题 3.16 计算

$$\lim_{x\to0} \frac{x - \overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3}.$$

解 先证明 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \to 0.$

当 $n = 1$ 时, 由 *Taylor* 公式结论显然成立. 假设 $n = k$ 时, 结论成立. 则当 $n = k + 1$ 时, 我们有

$$\sin\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right)$$
$$= x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3\right)$$
$$= x - \frac{n+1}{6}x^3 + o(x^3), x \to 0.$$

由数学归纳法得 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \to 0$. 故 $\lim\limits_{x\to0} \frac{x - \overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3} = \frac{n}{6}$. □

例题 3.17 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!).$$

解 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式可知

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta x^{n+2}}{(n+2)!}, \theta \in (0, x).$$

从而

$$e=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

于是

$$2\pi en!=2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

而 $n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\in\mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned}n\sin(2\pi en!)&=n\sin\left(2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)=n\sin\left(\frac{2\pi n!}{(n+1)!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)\\&=n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right)\sim n\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right]\to 2\pi,n\to+\infty.\end{aligned}$$

□

3.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

例题 3.18 计算

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})].$$

解 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n\in(\sqrt{n+1},\sqrt{n})$, 使得

$$\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n.$$

从而当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\theta_n\to+\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n]=0.$$

□

例题 3.19 计算

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right).$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $\theta_n\in(\frac{2024}{n},\frac{2024}{n+1})$, 使得

$$\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}=\frac{1}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right).$$

并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arc\tan\frac{2024}{n}-\arc\tan\frac{2024}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right)=2024\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=2024.$$

□

例题 3.20

1. 对 $\alpha\neq0$, 求 $(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha},n\to\infty$ 的等价量;
2. 求 $n\ln n-(n-1)\ln(n-1),n\to\infty$ 的等价量.

笔记 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

注 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

解 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设 $\alpha > 1$, 则有 $\alpha n^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha\,(n+1)^{\alpha-1}$(若 $\alpha \leq 1$, 则有 $\alpha\,(n+1)^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha n^{\alpha-1}$). 故

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\theta_n^{\alpha-1}}{n^{a-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n+1)^{\alpha-1}}{n^{a-1}} = \alpha.$$

因此 $(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \to \infty$.

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-(n-1))\cdot(1+\ln\theta_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又 $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln n} < \dfrac{\ln\theta_n}{\ln n} < \dfrac{\ln n}{\ln n} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是 $n\ln n - (n-1)\ln(n-1) \sim \ln n, n \to +\infty$. □

例题 3.21 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}.$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall x \in U(0)$, 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x)\sin\theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\sin\theta}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 \cdot \sin\theta}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{x}.$$

又由 $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$ 可知

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{x} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

故 $\sin\theta \sim \theta \sim x, x \to 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\theta}{x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \dfrac{1}{3}$. □

3.1.4 L'Hospital'rules

定理 3.2 (上下极限 L'Hospital 法则)

1. 设 f, g 在 (a,b) 内可微, 满足 (i) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$.(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$. 则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.5}$$

且

$$\varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|. \tag{3.6}$$

2. 设 f, g 在 (a,b) 内可微, 满足 (i) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$.(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. 则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.7}$$

且

$$\varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|. \tag{3.8}$$

♡

笔记 此定理第一部分(3.5)和(3.7)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况. 但(3.6)和(3.8)一般是不能直接用的, 需要给证明.

证明 以第一问为例, 事实上, 固定 x, 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x<\xi<y.$$

我们断言对 $A\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 必有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A. \tag{3.9}$$

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A$. 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|.$$

利用

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty}g(y_n)=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

反之设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A$, 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

于是由

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty}|g(y_n)|=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A.$$

现在就证明了(3.9).

于是结合 $x\to+\infty$, 我们容易得到

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\leqslant\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|$$

$$\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\geqslant\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|$$

这就完成了证明. □

例题 3.22 若 $f\in D^1[0,+\infty)$.

(1) 设

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=s$.

(2) 设

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]=s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{s}{2}$.

笔记 (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:$y'+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}y=0$, 整理可得 $\frac{y'}{y}=-\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, 再对其两边同时积分得到 $\ln y=-\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x+C_0$. 从而 $y=Ce^{-\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x}$, 于是 $C=ye^{\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x}$. 故我们要构造的函数就是 $C(x)=f(x)e^{\int_0^x\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x}$. 并且此时

$C(x)$ 满足 $C'(x)=f'(x)+\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)$.

证明

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f+f']=s.$

(2) 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}=+\infty$, 从而由 L'Hospital'rules 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}} &\xlongequal{\text{L'Hospital'rules}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x}\left[f(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f'(x)\right]=\frac{s}{2}.\end{aligned}$$

□

例题 3.23 设可微函数 $a,b,f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)\geqslant 0, g(x)>0, g'(x)>0, \frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}=b(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to+\infty} a(x)=A>0,\ \lim_{x\to+\infty} b(x)=B>0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{A+1}.$$

注 如果直接使用 L'Hospital 法则, 再结合条件会得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[b(x)-a(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right].$$

但是注意这里并不能直接使用极限运算的四则运算法则得到结果, 这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不一定存在.

证明 令 $p(x)=e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}$, 则 $p'(x)=a(x)\dfrac{g'(x)}{g(x)}$, 进而

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}}{e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}}=a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}. \tag{3.10}$$

于是由条件可得

$$f'(x)+a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}f(x)=b(x)g'(x)\iff f'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}f(x)=b(x)g'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3.11}$$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)=A>0$ 可知, 存在 $M>0$, 使得

$$a(x)\geqslant\frac{A}{2},\quad \forall x>M.$$

从而对 $\forall x>M$, 我们有

$$\begin{aligned}p(x)&=e^{\int_0^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}\geqslant e^{\int_M^x a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}\\ &\geqslant e^{\frac{A}{2}\int_M^x \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x}=e^{\frac{A}{2}\ln\frac{g(x)}{g(M)}}=\left[\frac{g(x)}{g(M)}\right]^{\frac{A}{2}}.\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$. 因此, 利用 L'Hospital 法则, 再结合 (3.10) 和 (3.11) 式, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)p(x)}{g(x)p(x)}&\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)p(x)+f(x)p'(x)}{g'(x)p(x)+g(x)p'(x)}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}f(x)}{g'(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)g'(x)}{g'(x)+a(x)\frac{g'(x)}{g(x)}g(x)}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{1+a(x)}=\frac{B}{A+1}.\end{aligned}$$

□

命题 3.3 (L'Hospital 法则 (复变函数版本))

设 $f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$,$g(x)$ 为实值函数, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$, 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=z_0$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=z_0$.

证明 由实数 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{u'(x)}{g'(x)}+\mathrm{i}\frac{v'(x)}{g'(x)}\right)=z_0\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{u(x)}{g(x)}=\mathrm{Re}z_0,\ \lim_{x\to a^+}\frac{v(x)}{g(x)}=\mathrm{Im}z_0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{u(x)+\mathrm{i}v(x)}{g(x)}=z_0.$$

□

例题 3.24 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微且 $a,b\in\mathbb{R}$, 满足 $a>0,a^2-4b<0$ 或者 $a>0,b>0,a^2-4b>0$ 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f''(x)+af'(x)+bf(x))=\ell\in\mathbb{R}$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\ell}{b}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

笔记 对于二阶微分方程而言, 一般考虑降阶. 本题利用 L'Hospital 法则实现降阶.

证明 不妨设 $l=0$, 否则用 $f(x)-\frac{l}{b}$ 代替 $f(x)$ 即可.

①当 $a>0$、$b>0$、$a^2-4b>0$ 时, 考虑二次方程 $x^2+ax+b=0$, 则此时该方程必有两负根. 设这两个负根分别为 $\lambda_1,\lambda_2<0$, 则 $x^2+ax+b=x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$. 注意到

$$\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'=e^{\lambda_2x}\left[f''(x)+(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+\lambda_1\lambda_2f(x)\right]=e^{\lambda_2x}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right],$$

因此由条件可得

$$\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{-\lambda_2x}\right)'}=\frac{f''(x)+af'(x)+bf(x)}{-\lambda_2}\to0,\ x\to+\infty.$$

从而利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)}{e^{-\lambda_2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{\left(e^{-\lambda_2x}\right)'}=0.$$

又注意到

$$\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'=e^{-\lambda_1x}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right],$$

因此

$$\frac{\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'}{\left(e^{-\lambda_1x}\right)'}=\frac{f'(x)-\lambda_1f(x)}{-\lambda_1}\to0,\ x\to+\infty.$$

于是再利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_1x}f(x)}{e^{-\lambda_1x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_1x}f(x)\right]'}{\left(e^{-\lambda_1x}\right)'}=0.$$

故由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=0$ 和极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]+\lambda_1\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

进而再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]=0$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]-a\lim_{x\to+\infty}f'(x)-b\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

②当 $a>0$、$a^2-4b<0$ 时, 考虑二次方程 $x^2+ax+b=0$, 则此时该方程必有两复根, 并且 $\lambda_1+\lambda_2=a<0$.

于是设这两个复根分别为 $\lambda_1=-u+v\mathrm{i}$、$\lambda_2=-u-v\mathrm{i}(u>0,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, 则 $x^2+ax+b=x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$.

从而由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\mathrm{i}vx}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f'(x)-\lambda_1f(x)\right]}{e^{ux}}\xlongequal{\text{L' Hospital 法则 (复变函数版本)}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{(e^{ux})'}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{-\lambda_2x}\left(f'(x)-\lambda_1f(x)\right)\right]'}{(e^{ux})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\lambda_2x}\left[f''(x)+(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+\lambda_1\lambda_2f(x)\right]}{ue^{ux}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{ue^{ux}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}vx}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{u} = 0,$$

因此

$$0 = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+uf(x)+\mathrm{i}vf(x)\right].$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+uf(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} vf(x) = 0.$$

又因为 $u>0$、$v\neq 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 进而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]=0$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$.

综上, 结论得证. □

注 第②中情况中不使用L'Hospital 法则 (复变函数版本)的方法: 考虑

$$e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = e^{(u+\mathrm{i}v)x}\left[f'(x)-(-u+\mathrm{i}v)f(x)\right] = e^{ux}(\cos vx+\mathrm{i}\sin vx)\left[f'(x)+uf(x)-\mathrm{i}vf(x)\right].$$

则上述复变函数实部和虚部分别为

$$\text{实部}: e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right];$$
$$\text{虚部}: e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\sin vx-vf(x)\cos vx\right].$$

于是利用 L' Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ux}\left[(f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right]}{e^{ux}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^{ux}\left((f'(x)+uf(x))\cos vx+vf(x)\sin vx\right)\right]'}{(e^{ux})'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ux}\cos vx\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{ue^{ux}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos vx\left[f''(x)+af'(x)+bf(x)\right]}{u} = 0.\end{aligned}$$

同理利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(f'(x)+uf(x))\sin vx-vf(x)\cos vx\right] = 0.$$

因此当 $x\to+\infty$ 时,$e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right]$ 的实部和虚部都趋于 0, 故

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right] = 0.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)-\lambda_1 f(x)\right]=0$, 后续同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$.

例题 3.25 给定正整数 n, 设 $f(x)\in C^n[-1,1],|f(x)|\leq 1$, 证明: 存在与 $f(x)$ 无关的常数 C, 使得只要 $|f'(0)|\geq C, f^{(n)}(x)$ 在 $(-1,1)$ 中就会有至少 $n-1$ 个不同的根.

证明 证明见豌豆 (2024-2025 竞赛班下数学类讲义洛必达法则部分), 本题证明直观上定性分析比较容易, 但是要严谨地书写过程比较繁琐 (证明太麻烦没看). □

例题 3.26 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中任意阶可导且各阶导数均非负, 证明:$f(x)$ 是实解析函数.(伯恩斯坦定理) 类似的, 如果 $(-1)^n f^{(n)}(x)\geq 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 也是实解析的.

证明 对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 则任取 $h>0$, 使得 $x+2h\in(0,1)$. 于是由 Taylor 定理可知

$$f(x+2h) = f(x)+f'(x)\cdot 2h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n+\frac{1}{n!}\int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(t)(x+2h-t)^n\,dt.$$

又由于 f 任意阶导数均非负, 故 f 的任意阶导数都是单调递增函数. 从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_x^{x+h} f^{(n+1)}(t)(x+h-t)^n\,dt &\leqslant \frac{1}{n!}\int_x^{x+h} f^{(n+1)}(2t-x)(x+h-t)^n\,dt\\ &\xlongequal{u=2t-x} \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_x^{x+2h} f^{(n+1)}(u)(x+2h-u)^n\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[f(x+2h)-\left(f(x)+f'(x)\cdot 2h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n\right)\right] \\
&\leqslant \frac{f(x+2h)-f(x)}{2^{n+1}} \to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

因此 f 可以在 x 的任意右邻域展开成幂级数 (因为余项趋于 0), 即

$$
f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n, \quad \forall y\in U_+(x).
$$

但是同样的方法对于 $x<0$ 时似乎难以处理, 因为单调性对不上, 所以换个方法 (可以一次解决问题, 直接对高阶导数进行估计, 由此说明余项趋于零, 也无需讨论正负)

设 $|f(x)|$ 在 $[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$ 中的最大值为 M, 对任意 $|x|<\frac{1}{4}$ 有

$$
f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\frac{1}{2^k}+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\frac{1}{2^n}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}\geq f(x)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\frac{1}{2^n}
$$

由此得到

$$
0\leq\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\leq 2^n\left(f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)\leq 2^{n+1}M, \forall x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)
$$

进而

$$
\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq 2^{n+2}M|x|^{n+1}\leq 2^{n+2}M\frac{1}{4^{n+1}}\to 0, n\to\infty
$$

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, 这就证明了实解析

对于第二问, 考虑函数 $f(-x)$ 即可. □

例题 3.27 设 $g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 中恒正的连续函数,$a>0$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{1+a}}=+\infty$, 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中恒正且二阶可导, 满足 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))$ 恒成立, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 由 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))>0, \forall x\in(0,+\infty)$ 可得

$$
\left(e^xf'(x)\right)'=e^x\left(f''(x)+f'(x)\right)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

从而 $e^xf'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增.

(i) 若 $e^xf'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点, 则

$$
e^xf'(x)>0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

(ii) 若 $e^xf'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点, 则由其严格递增性可知, 存在唯一的 $a>0$, 使得 $e^af'(a)=0$. 于是

$$
e^xf'(x)>e^af'(a)=0, \forall x\in(a,+\infty).
$$

故一定存在 $X>0$, 使得 $f'(x)>0, \forall x\in(X,+\infty)$. 从而 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上严格递增.

由 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))>0, \forall x\in(0,+\infty)$ 还可以得到

$$
\left[f'(x)+f(x)\right]'=f''(x)+f'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty).
$$

于是 $f'(x)+f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=L$ 为有限数或 $+\infty$(广义存在).

由 L'Hospital 法则可得

$$
\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[f'(x)+f(x)\right]}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=L.
$$

又由 f 恒正可知 $L\geq 0$. 反证, 假设 $L\neq 0$, 则

①当 $L\in(0,+\infty)$ 时, 此时, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

再对 $f''(x)+f'(x)>g(f(x))$ 两边同时令 $x\to+\infty$, 可得

$$
\liminf_{x\to+\infty}f''(x)+\lim_{x\to+\infty}f'(x)\geq\lim_{x\to+\infty}g(f(x))=g\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).
$$

即 $\liminf\limits_{x\to+\infty} f''(x) \geq g(L)$. 于是由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $c > X+1$, 使得

$$f'(x) = f'(X+1) + f''(c)(x-X-1) \geq f'(X+1) + g(L)(x-X-1), \forall x > X+1.$$

令 $x \to +\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 矛盾!

②当 $L = +\infty$ 时, 此时 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f'(x)+f(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 由 $f''(x)+f'(x) > g(f(x))$ 可得

$$\frac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} > \frac{g(f(x))}{(f(x))^{1+a}} = \frac{g(x)}{x^{1+a}}.$$

从而由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^{1+a}} = +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = +\infty$.

由 $f(x) > 0, \forall x > X$ 可得, 对 $\forall x > X$, 我们有

$$\frac{f''(x)+f'(x)}{(f(x))^{1+a}} = \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}(f'(x)+f(x))} < \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)}.$$

令 $x \to +\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty$.

又由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(f'(x)+f(x))^2}{(f(x))^{2+a}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(f'(x)+f(x))^2\right]'}{\left[(f(x))^{2+a}\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(f''(x)+f'(x))(f'(x)+f(x))}{(2+a)(f(x))^{1+a}f'(x)} = +\infty.$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)+f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$. 又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} = +\infty$. 故存在 $M > X+1$, 使得

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}} > 1, \forall x > M.$$

两边同时积分可得

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}f(x) = \int_M^{+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_M^{+\infty} \mathrm{d}x = +\infty.$$

而 $\displaystyle\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{a}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 矛盾! □

例题 3.28 设 $f(x)$ 非负且二阶可导, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty$, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,dt \int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt = 0.$$

证明 由条件可知存在 $X > 0$ 使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} > 0 \quad ,\forall x > X \implies f''(x) > 0 \quad ,\forall x > X.$$

从而 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上下凸 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增于是由下凸函数的单调性可知 f 在 $(X,+\infty)$ 上的单调性只有三种情况递减、递增、先递减再递增若 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增或者先递减再递增则一定存在 $X_2 > X$ 使得 $f(x)$ 在 $(X_2,+\infty)$ 上递增现在只在 $(X_2,+\infty)$ 上进行考虑由 f 递增且非负可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq A_1$ 为正数或 $+\infty$ 假设 A_1 为某个正数则

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A_1}\lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^2}.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$ 于是由 Lagrange 中值定理可知存在 $\eta > X_2+1$ 使得

$$f'(x) = f'(X_2+1) + f''(\eta)(x-X_2-1) \quad ,\forall x > X_2+1.$$

令 $x \to +\infty$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 再利用 Lagrange 中值定理同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq A_1$ 为某个正数矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 再利用 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[-\frac{1}{1+(f'(x))^2}\right]'}{\left[f^2(x)\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2f''(x)f'(x)}{(1+f'^2(x))^2}}{2f(x)f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = +\infty.$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+(f'(x))^2}}{f^2(x)} \leqslant 0$ 矛盾故 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上必然单调递减则 $f'(x)<0 \quad \forall x>X$ 又 $f(x)>0$ 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) \triangleq A \geqslant 0$ 由 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\leqslant 0$ 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\triangleq A'<0$ 则存在 $X_1>X$ 使得

$$f'(x) < \frac{A'}{2} < 0 \quad \forall x > X_1.$$

于是由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi > X_1+1$ 使得

$$f(x) = f(X_1+1) + f'(\xi)(x-X_1-1) < f(X_1+1) + \frac{A'}{2}(x-X_1-1) \quad \forall x > X_1+1.$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant 0$ 矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 从而再由条件可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\triangleq A\geqslant 0$ 假设 $A>0$ 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 及条件可得

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)(1+f'^2(x))^2} = \frac{1}{A}\lim_{x\to+\infty}f''(x) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f''(x) = +\infty.$$

于是存在 $M > X_1+1$ 使得

$$f''(x) > 1 \quad \forall x > M.$$

从而由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi_1 > M+1$ 使得

$$f'(x) = f'(M+1) + f''(\xi_1)(x-M-1) > f'(M+1) + (x-M-1) \quad \forall x > M+1.$$

令 $x\to+\infty$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 再利用 Lagrange 中值定理同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$ 矛盾故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 综上可知 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递减进而 $f'(x)\leqslant 0$ 并且 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 上递增还有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}f'(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

于是显然 $f(x)\geqslant 0$ 从而存在 $X'>X$ 使得

$$f'(x) \leqslant 1 \quad \forall x > X'. \tag{3.12}$$

又因为 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 所以 f,f' 都连续从而在 $[0,X']$ 上都有界即存在 $L>0$ 使得

$$|f(x)|, |f'(x)| < L \quad \forall x \in [0, X']. \tag{3.13}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)}=+\infty$ 可知存在 $X''>X'$ 使得

$$f''(x) > f(x) \quad \forall x > X''.$$

从而结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 可得

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt < \int_x^{+\infty} f''(t)\,dt = f'(+\infty) - f'(x) = -f'(x) \quad \forall x > X''. \tag{3.14}$$

于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = 0. \tag{3.15}$$

利用 L’Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{[(f'(x))^2]'}{[(f(x))^2]'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)f'(x)}{f(x)f'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)} = +\infty.$$

又因为 $f'(x)\leqslant 0$ $f(x)\geqslant 0$ 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-f'(x)}{f(x)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

再结合 (3.15) 式及 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=0. \tag{3.16}$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 则由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 可知 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 并且

$$0=-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{g(x)}}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g'(x)}.$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g'(x)}=0. \tag{3.17}$$

于是由 (3.12) (3.13) (3.14) 式可得

$$\begin{aligned}
\int_0^x\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,dt\int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt &\leqslant \left(\int_0^{X''}\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,dt+\int_{X''}^x\frac{1}{f(t)}\,dt\right)\sqrt{2}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\\
&\leqslant \sqrt{2}\left(\int_0^{X''}\frac{\sqrt{1+L^2}}{-L}\,dt+\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,dt\right)\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\\
&\leqslant -\sqrt{2}\left(\frac{X''\sqrt{1+L^2}}{-L}+\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,dt\right)\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\\
&=\frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt-\sqrt{2}\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,dt\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}X''\sqrt{1+L^2}}{L}f'(x)-\sqrt{2}f(x)\int_0^x\frac{1}{f(t)}\,dt\frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{f(x)}\quad,\forall x>X''.
\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$ 则由 (3.17) (3.16) 式和 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 可得

$$\limsup_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sqrt{1+f'^2(t)}}{f(t)}\,dt\int_x^{+\infty} f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt\leqslant 0.$$

故结论得证. □

3.1.5 与方程的根有关的渐近估计

3.1.5.1 可以解出 n 的类型

例题 3.29 设 $x^{2n+1}+e^x=0$ 的根记为 x_n, 计算

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} n(1+x_n).$$

解 注意到 $0^{2n+1}+e^0>0,(-1)^{2n+1}+e^{-1}<0$ 且 $x^{2n+1}+e^x$ 严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in(-1,0)$, 使得

$$x_n^{2n+1}+e^{x_n}=0\Rightarrow\frac{x_n}{\ln(-x_n)}=2n+1\to+\infty,n\to+\infty.$$

任取 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 又 $x_n\in(-1,0)$, 因此可设 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[-1,0]$, 则 $\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=\frac{c}{\ln(-c)}$. 又因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{\ln(-x_n)}=+\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=+\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=\frac{c}{\ln(-c)}=+\infty,$$

故 $c=-1$. 于是由子列极限命题 (a)知 $\lim_{n\to\infty} x_n=-1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} n(1+x_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2n+1)(1+x_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1^+}\frac{x(1+x)}{\ln(-x)}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 3.30 设 $a_n \in (0,1)$ 是 $x^n+x=1$ 的根, 证明

$$a_n = 1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

证明 注意到 $0^n+0-1<0, 1^n+1-1>0$, 且 x^n+x-1 在 $(0,1)$ 上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在唯一的 $a_n\in(0,1)$, 使得

$$a_n^n+a_n=1 \Rightarrow \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}=n\to+\infty, n\to+\infty. \tag{3.18}$$

任取 $\{a_n\}$ 的一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 又 $a_n\in(0,1)$, 因此可设 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=c\in[0,1]$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}}=\frac{\ln(1-c)}{\ln c}$. 又由 (1.1) 式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}=+\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}}=+\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}}=\frac{\ln(1-c)}{\ln c}=+\infty.$$

故 $c=1$, 于是由子列极限命题 (a)可知

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=c=1. \tag{3.19}$$

而要证 $a_n=1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n\to+\infty$, 等价于证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-1+\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}=0$. 利用(3.18)(3.19)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}\cdot a_n-\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}{\ln\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}+1\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(a_n-1)\ln(1-a_n)}{\ln a_n\left(\ln\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}\right)}+1\right]\\&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{(x-1)\ln(1-x)}{\ln x\left(\ln\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)}+1\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}+1\right].\end{aligned} \tag{3.20}$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}&=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)}{\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}}\xlongequal{\text{L'Hospital's rules}}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\ln(-x)}{\ln^2(1+x)}}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)\cdot\ln(1+x)}{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ln(-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ln(-x)}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)}-\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-\frac{x}{1+x}}=-1.\end{aligned} \tag{3.21}$$

于是结合(3.20)(3.21)式可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}+1\right]=-1+1=0.$$

故 $a_n=1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n\to+\infty$. □

例题 3.31 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n, n\in\mathbb{N}, f_n(x)=1$ 在 $[0,1]$ 的根为 x_n. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 注意到 $f_n(x)-1$ 严格单调递增, 且 $f_n(0)-1=-1<0, f_n(1)-1=n-1>0, \forall n\geqslant 2$. 故由零点存在定理可知, 当 $n\geqslant2$ 时, 存在唯一的 $x_n\in(0,1)$, 使得 $f_n(x_n)=1$. 从而

$$f_n(x_n)=\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1\Rightarrow x_n-x_n^{n+1}=1-x_n\Rightarrow x_n^{n+1}=2x_n-1\Rightarrow n+1=\frac{\ln(2x_n-1)}{\ln x_n}. \tag{3.22}$$

由上式(3.22)可知 $x_n^{n+1}=2x_n-1$ 且 $x_n\in(0,1)$, 因此

$$0\leqslant x_n^{n+1}=2x_n-1\leqslant1\Rightarrow x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

任取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 则由 (1.1) 式和 Heine 归结原则可知

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(2x_{n_k}-1)}{\ln x_{n_k}}=\frac{\ln(2a-1)}{\ln a}=+\infty.$$

故 $a=\frac{1}{2}$, 再由子列极限命题 (a)可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a=\frac{1}{2}$. □

3.1.5.2 迭代方法

例题 3.32 设 x_n 是 $x=\tan x$ 从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n-An-B)=C,$$

求 A,B,C.

笔记 主要想法是结合 $\arctan x$ 的性质:$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},x>0$, 再利用迭代法计算渐近展开.

解 令 $f(x)=\tan x-x,x\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$, 则 $f'(x)=\tan^2 x>0,\forall x\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$. 因此 $f(x)$ 在 $(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$ 上严格单调递增, 其中 $n=1,2,\cdots$. 又注意到 $\lim\limits_{x\to(n\pi)^+}(\tan x-x)=-n\pi<0$, $\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^+}(\tan x-x)=+\infty>0$. 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$, 使得

$$\tan x_n=x_n.$$

从而 $x_n-n\pi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 于是

$$x_n=\tan x_n=\tan(x_n-n\pi)\Longrightarrow x_n=\arctan x_n+n\pi. \tag{3.23}$$

又因为 $x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$, 所以当 $n\to+\infty$ 时, 有 $x_n\to+\infty$. 再结合(3.23)式可得

$$x_n=\arctan x_n+n\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1),n\to+\infty. \tag{3.24}$$

注意到 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},x>0$, 从而 $\arctan x=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$. 于是利用(3.24)式可得

$$\begin{aligned}x_n&=\arctan x_n+n\pi=\frac{\pi}{2}+n\pi-\arctan\frac{1}{x_n}=\frac{\pi}{2}+n\pi-\arctan\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}\\&=\frac{\pi}{2}+n\pi-\arctan\left(\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right)=\frac{\pi}{2}+n\pi-\arctan\left[\frac{1}{n\pi}\left(1+O(\frac{1}{n})\right)\right]\\&=\frac{\pi}{2}+n\pi-\arctan\left[\frac{1}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2})\right]=\frac{\pi}{2}+n\pi-\frac{1}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2}),n\to+\infty.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(x_n-\frac{\pi}{2}-n\pi\right)=-\frac{1}{\pi}$. □

3.2 估计和式的常用方法

3.2.1 和式放缩成积分

命题 3.4

设 f 在 $(0,1)$ 单调且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 f 递减, 则一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

3.2.2 强行替换 (拟合法) 和凑定积分

例题 3.33 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}.$$

笔记 证明的想法要么是凑定积分定义. 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

注 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

解 解法一:注意到

$$\frac{i}{n} < \frac{\sqrt{i^2+1}}{n} < \frac{i+1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

解法二:注意到

$$0 \leq \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\left(n+\frac{i^2+1}{n}\right)\left(n+\frac{i^2}{n}\right)} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \to 0, n\to\infty,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

□

例题 3.34 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}.$$

笔记 长得神似定积分定义且很容易观察到 $\dfrac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}$ 和 $\dfrac{i}{n^2}$ 没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方

法, 即做差 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}$ 强估证明不影响极限.

证明 注意到

$$\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|=\left|\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}\right)\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^2\left(n^2+\frac{1}{i}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^4}=\frac{2n(4n^2-1)}{n^4},$$

于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{n^4}=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n}\sin^4\frac{\pi i}{n}$$
$$=\int_0^2 x\sin^4\pi x\mathrm{d}x\xlongequal[\text{令}x=2-y]{\text{区间再现}}\int_0^2(2-y)\sin^4\pi(2-y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2(2-y)\sin^4\pi y\mathrm{d}y=\int_0^2\sin^4\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}.$$

□

3.2.3 和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)

当和式内部对 n 可求极限时, 极限号与求和号可以换序.(当和式内部对 n 求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 等都不能换序) 本质上就是**控制收敛定理**的应用.

注 不能按照极限号与求和号可换序的想法书写过程, 应该利用不等式放缩、夹逼准则和上下极限进行严谨地书写证明.

例题 3.35 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

笔记 求这种前 n 项和关于 n 的极限 (n 既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$, 使得对 $\forall n>N_0$, 都有

$$\varepsilon>\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}-\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|=\left|\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\sum_{k=0}^{N_0+1}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}-\cos\sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k}\right|>\sum_{k>N_0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对 $\forall N>N_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=0.$

因此对 $\forall N>N_0$, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k>N}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}.$$

再令 $N\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2.$

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原

极限实际上就是 2(如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不发散).

注意: 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2. (上述论证实际上就是一种" 猜测" 这种极限的值的方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的"度"). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前 N 项的极限, 原和式除前 N 项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前 N 项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

注: 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

注 上述思路本质上就是**控制收敛定理**的应用, 也可以使用 *Toplitz* 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去书写证明过程 (夹逼定理和 *Toplitz* 定理).

解 解法一 (夹逼定理):

一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, 于是 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2.$

另一方面, 注意到对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k},\forall n>N$. 从而

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k},\forall N\in\mathbb{N}_+.$$

于是令 $N\to+\infty$, 得到 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\geqslant\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}=2.$

综上所述, 我们有 $2\leqslant\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}\leqslant 2$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}=2.$

解法二 (Toplitz 定理): □

例题 3.36 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

注 注意倒序求和与顺序求和相等.(看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下倒序求和)

笔记 解法一的思路: 我们利用上一题的想法计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}$. 先假设级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$ 收敛, 则由 *Cauchy* 收敛准则可知, 存在 $N'>0$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k},\forall N>N'.$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

解 解法一: 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用 $\ln(1+x)\leq x,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}e^{1-k},\forall n\in\mathbb{N}_{+}.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$.

另一方面, 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\geq\sum\limits_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)},\forall N\in\mathbb{N}_{+}$. 两边同时对 n 取下极限, 可得对 $\forall N\in\mathbb{N}_{+}$, 都有

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}&\geqslant\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to+\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{k-1}{n}\right)}=\sum_{k=1}^{N}e^{1-k}\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$, 则 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}\geq\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{1-k}=\frac{e}{e-1}$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\frac{e}{e-1}$.

解法二 (单调有界定理): 因为

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n},$$

$$S_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

所以证明 $\left(\frac{k}{n}\right)^{n}\leq\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},1\leq k\leq n-1$ 即可, 这等价于 $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\leq\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$. 实际上 $a_k=\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n},1\leq k\leq n$ 是单调递减数列, 因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}}=\frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{x}\right),x=k+1\in[2,n].$$

又由于

$$n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq-\frac{n}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-n}{x^2}\leq 0,\forall x=k+1\in[2,n].$$

从而 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leqslant e^0=1,\forall x=k+1\in[2,n]$, 故 $a_{k+1}\leq a_k,\forall 1\leq k\leq n$. 于是 $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}=a_k\geq a_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, 也即 S_n 单调递增. 注意

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n-1}e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}\leq\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为 S. 对任意正整数 $n>m$, 先固定 m, 对 n 取极限有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}\geq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n\geq\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{m}e^{-k}$$

这对任意正整数 m 均成立, 再令 $m\to\infty$ 有 $S\geq\frac{1}{e-1}$, 从而所求极限为 $\frac{1}{e-1}$. □

3.2.4 利用 Taylor 公式计算和式极限 (和式内部 n,k 不同阶)

只有当和式内部 n,k 不同阶时, 我们才可以直接利用 Taylor 展开进行计算. 但是书写过程不能用 Taylor 展开书写 (关于 o 和 O 余项的求和估计不好说明), 这样书写不严谨 (见例题 3.37 证法一).

我们可以采用**拟合法** (见例题 3.38)、**夹逼准则** (见例题 3.39)、$\varepsilon-\delta$ **语言** (见例题 3.37 证法二) 严谨地书写过程

笔记 虽然这三种方法都比较通用, 但是更推荐**拟合法**和**夹逼准则**, 一般比较简便.

虽然 $\varepsilon-\delta$ **语言**书写起来比较繁琐, 但是当有些和式不容易放缩、拟合的时候, 用这个方法更简单.

这类和式内部 n,k 不同阶的问题的处理方式: 先利用 Taylor 展开计算极限 (可以先不算出极限), 并判断到底要展开多少项, 然后根据具体问题综合运用**拟合法、夹逼准则、$\varepsilon-\delta$ 语言**严谨地书写过程 (怎么书写简便就怎么写).

注 这类和式内部 n,k 不同阶的问题,Taylor 公式是本质, **拟合法、夹逼准则、$\varepsilon-\delta$ 语言**只是形式上的过程.

例题 3.37 设 f 在 0 处可微,$f(0)=0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

笔记 本题如果使用例题 3.35的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f(0)=\lim_{N\to\infty}(N\cdot 0)=+\infty\cdot 0.$$

而 $+\infty\cdot 0$ 我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述 "$+\infty\cdot 0$" 的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们使用 Taylor 展开并引入余项方法和 $\varepsilon-\delta$ 方法更加精细地估计原级数的阶.

注 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的 $\varepsilon-\delta$ 语言进行证明.

证明 证法一 (不严谨的余项方法): 由 f 在 0 处可微且 $f(0)=0$ 和带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$f(x)=f'(0)x+o(x),x\to 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left[f'(0)\cdot\frac{i}{n^2}+o\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{i}{n^2}\right)\\&=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f'(0)(n+1)}{2n}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\to\frac{f'(0)}{2},n\to+\infty.\end{aligned}$$

证法二 ($\varepsilon-\delta$ 严谨的证明): 由 *Taylor* 定理, 可知对 $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists\delta>0$, 当 $|x|\leq\delta$ 时, 有 $|f(x)-f'(0)x|\leq\varepsilon|x|$.

只要 $n>\frac{1}{\delta}$, 有 $\left|\frac{i}{n^2}\right|\leq\delta,\forall i=1,2,\cdots,n$, 故 $\left|f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\frac{i}{n^2}\right|\leq\varepsilon\frac{i}{n^2},i=1,2,\cdots,n.$

从而

$$f'(0)(1-\varepsilon)\frac{i}{n^2}\leq f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leq f'(0)(1+\varepsilon)\frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1-\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}=f'(0)(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\leq\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)\leq f'(0)(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{f'(0)}{2}(1+\varepsilon)\cdot\frac{n+1}{n}.$$

于是

$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2}\leq\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)-\frac{f'(0)}{2}\leq\frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left|\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)-\frac{f'(0)}{2}\right|\leq\frac{|f'(0)|}{2}\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=\frac{f'(0)}{2}.$ □

例题 3.38 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right).$

笔记 本题采用**拟合法**书写过程.

解 由于对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{\sqrt{k}}{n}\to+\infty,n\to\infty$, 故由 Taylor 定理可得, 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{1}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}+\cdots\right),n\to\infty.$$

于是考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right).$$

又由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}-1+\frac{\sqrt{k}}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}\xlongequal{Stolz公式或定积分定义}\frac{2}{3}.$$

□

例题 3.39 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

笔记 本题采用**夹逼准则**书写过程. 注意 n,k 不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉, 然后使用夹逼准则即可.

证明 注意到

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leqslant\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\leqslant\frac{k}{2n^2},\forall k\in\mathbb{N}.$$

所以

$$\frac{n+1}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}=\frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是 $\frac{1}{4}$. □

例题 3.40 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n$.

笔记 证法二综合运用了拟合法和夹逼准则书写过程 (只用其中一种方法的话, 书写起来很麻烦).

解 证法一 (不严谨的余项方法):注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}.$$

由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{k}{2n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]=\frac{1}{n}\left[n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2n^2}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{n+1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\left(-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

证法二 (严谨地书写过程): 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)}. \tag{3.25}$$

因为对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 有 $\dfrac{k}{n^2}\to 0,n\to\infty$, 所以利用 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=1-\frac{k}{2n^2}+\cdots,n\to\infty.$$

从而考虑拟合

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)\right].$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1+\frac{k}{2n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}+\frac{k}{2n^3}\right)-1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^3}\right)-1=\frac{n+1}{4n^2}\to 0,n\to\infty.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^3}=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-\sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

注意到

$$-\frac{n+1}{2\left(n+1+\sqrt{n^2+n}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{2n^2}=-\frac{n+1}{4n},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$, 则由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}=-\dfrac{1}{4}$. 再结合(3.25)(3.26)式可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

□

3.2.5 分段估计 (Toeplitz 定理)

对于估计级数或积分的极限或阶的问题, 当问题难以直接处理时, 我们可以尝试分段估计, 分段点的选取可以直接根据级数或积分的性质选取, 也可以根据我们的需要待定分段点 m, 然后再选取满足我们需要的 m 作为分段点.

定理 3.3 (Toeplitz 定理)

(a): 设 $\{t_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a. \tag{3.27}$$

(b): 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=a. \tag{3.28}$$

笔记 无需记忆 *Toeplitz* 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 *Toeplitz* 定理, 即当 n 比较小的时候, 用 t_{nk} 趋于 0 来控制, 当 n 比较大的时候, 用 a_n 趋于 a 来控制.

我们需要熟悉蕴含在 *Toeplitz* 定理当中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

Toeplitz 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项), 另一部分是余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前 N 项) 和余项 (从 N+1 项开始包括后面的所有项).

注 注意区分 (a),(b) 两者的条件: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}t_{nk}\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}$.

证明 (a): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|=\varlimsup_{n\to+\infty}|a_n|=\varlimsup_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

故(3.27)式成立.

(b): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可.

对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\sum_{k=N+1}^{\infty}|t_{nk}a_k|.$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty}|t_{nk}a_k|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 的任意性, 再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|=\varlimsup_{n\to+\infty}|a_n|=\varlimsup_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

故(3.28)式成立. □

例题 3.41 设 $p_k>0,k=1,2,\cdots,n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

笔记 理解到本质之后不需要记忆Toeplitz 定理, 但是这里可以直接套用 Toeplitz 定理我们就引用了. 今后我们不再直接套用 Toeplitz 定理, 而是利用 Toeplitz 定理的证明方法解决问题.

证明 记 $t_{nk}=\dfrac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geq 0, k=1,2,\cdots,n$. 则 $\sum\limits_{k=1}^n t_{nk}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^n p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=1$. 又因为

$$0\leq\lim_{n\to\infty}t_{nk}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n+k+1}}=0.$$

所以由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 故由Toeplitz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n t_{nk}a_k=a.$$

□

命题 3.5

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $b_n\geqslant 0$. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^n b_k$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS.$$

证明 (i) 若 $S=0$, 则 $b_n\equiv 0$. 此时结论显然成立.

(ii) 若 $S>0$, 则令 $t_{nk}=\dfrac{1}{S}b_{n-k+1}, k=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\sum_{k=1}^\infty t_{nk}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n t_{nk}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}=\frac{1}{S}\lim_{n\to+\infty}S_n=1.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 存在, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_kb_{n-k+1}=S\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_kt_{nk}.$$

不妨设 $a=0$, 则对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$0\leqslant\left|\sum_{k=1}^n a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^N a_kt_{nk}\right|+\left|\sum_{k=N+1}^n a_kt_{nk}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^N a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=N+1}^n t_{nk}\leqslant\left|\sum_{k=1}^N a_kt_{nk}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^n t_{nk}.$$

令 $n\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^n a_kt_{nk}\right|\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq N+1}|a_k|\sum_{k=1}^n t_{nk}\right)=\sup_{k\geq N+1}|a_k|, \forall N\in\mathbb{N}.$$

再令 $N\to+\infty$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^n a_kt_{nk}\right|\leqslant\lim_{N\to+\infty}\sup_{k\geq N+1}|a_k|=\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_k|=\lim_{n\to+\infty}|a_k|=\lim_{n\to+\infty}a_k=0.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n a_kt_{nk}=a$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=S\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n a_kt_{nk}=aS$. □

例题 3.42 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 且存在常数 $K>0$, 使得 $\sum\limits_{j=0}^n|y_i|\leq K, \forall n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n x_iy_{n-i}=0.$$

证明 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+\left|\sum_{i=N+1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+\sup_{i\geq N+1}|x_i|\cdot\sum_{i=N+1}^{n}|y_{n-i}|\leq\left|\sum_{i=1}^{N}x_iy_{n-i}\right|+K\cdot\sup_{i\geq N+1}|x_i|.$$

令 $n\to+\infty$, 则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}\right|\leq K\cdot\sup_{i\geq N+1}|x_i|$.

由 N 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}=\lim_{N\to\infty}\sup_{i\geq N+1}|x_i|=\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n|=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

□

命题 3.6

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\lim_{n\to\infty}b_n=b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

笔记 可以不妨设 $a=b=0$ 的原因: 假设当 $a=b=0$ 时, 结论成立. 则当 a,b 至少有一个不为零时, 我们有 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, $\lim_{n\to\infty}(b_n-b)=0$. 从而由假设可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_{n-k+1}-b)}{n}=0.$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}+ab-a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}-b\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=0$$

又由Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}=a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}}{n}+b\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}-ab=ab.$

证明 不妨设 $a=b=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n, 用 b_n-b 代替 b_n. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}}{n}\right|&\leq\frac{\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|}{n}+\frac{\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right|}{n}\\&\leq\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|b_{n-k+1}|\\&\leq\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_{n-k+1}\right|+\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k|.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right|\leqslant\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{k=1}^{n}|b_k|}{n}\leqslant\sup_{k\geq N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=0.$$

故 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=0.$ □

例题 3.43 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$.

注 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$ 的原因: 我们希望找到一个合适的分段点 m, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 由 $\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}=\frac{(m-1)}{\sqrt{n}}$ 可知, 我们可以希望 $\frac{(m-1)}{\sqrt{n}}\to 0$, 即 $m=o(\sqrt{n})$. 又由上述证明的积分放缩可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}$, 从而我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{m}}=1$, 也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{m}=0$.

综上, 我们希望当 $n\to\infty$ 时,m 的阶比 $\sqrt{n}$ 低但比 $\ln n$ 高, 于是我们考虑 $\ln n$ 和 $\sqrt{n}$ 的几何平均, 即令 $m=\sqrt{\sqrt{n}\ln n}$, 恰好满足需要. 又由于 m 表示求和项数, 因此取整保证严谨性.

笔记 本题核心想法是: **分段估计**. 分段后的估计方式和分段点的选取方法较多.(清疏讲义上有另一种分段估计的做法)

注意: 本题使用 Stolz 定理解决不了, 直接放缩也不行.

证明 取 $m=[\sqrt{\sqrt{n}\ln n}]+1$, 考虑 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1+\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}+\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}$. 不难发现

$$\frac{m}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{n}\to 0,n\to\infty.$$

$$\sum_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{(m-1)\sqrt{n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\to 0,n\to\infty.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=0$. 并且一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{m-1}^{n}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{n^x}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{m}^{n+1}n^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{n^x}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1).\end{aligned}$$

又注意到

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m-1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{m}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}}}=1.$$

故

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}(n-m+1)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m-1}}}{n}(n-m+1)=1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}+\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k}}}{n}\right)=1+0+1=2.$ □

3.2.6 欧拉麦克劳林公式 (E-M 公式)

命题 3.7 (0 阶欧拉麦克劳林公式 (0 阶 E-M 公式))

设 $a,b\in\mathbb{Z}, f\in D[a,b], f'\in L^1[a,b]$, 让我们有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即可), 再使用.

E-M 公式求和通项与求和号上限无关.

笔记 在 $[0,1)$ 上 $x-[x]-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}$, 它也是 $x-\frac{1}{2}$ 做周期 1 延拓得到的函数. 故 $-\frac{1}{2}\leqslant x-[x]-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=a}^{b-1}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x+k)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{1}{2}f(1+k)+\frac{1}{2}f(k)-\int_0^1 f(x+k)\mathrm{d}x\right]\\
&=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=a}^{b-1}[f(k)+f(k+1)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=a}^{b}f(k)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

注 假设已知 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于 $-\frac{1}{2}\leqslant x-[x]-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$, 因此直接将 $b_1(x)$ 放大成 $\frac{1}{2}$ 就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见例题 3.44.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对 $b_1(x)$ 使用分部积分. 但是由于 b_1 并非连续函数, 为了把 $\int_a^b(x-[x]-\frac{1}{2})f'(x)\mathrm{d}x$ 继续分部积分, 我们需要寻求 b_1 的原函数 b_2 使得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)db_2(x),$$

即期望 $b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 的一个原函数并且仍然有周期 1(因为求导不改变周期性, 又由于 $b_1(x)$ 周期为 1, 故原函数 $b_2(x)$ 的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y, b_2(x+1)=b_2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

(构造 $b_2(x)$ 的想法: 先找到 $x\in[0,1)$ 这个特殊情况下的 $b_2(x)$, 再由此构造出 $x\in\mathbb{R}$ 这个一般情况下的 $b_2(x)$, 即**由特殊推广到一般**)

先考虑 $x\in[0,1)$ 的情况 (因为此时 $[x]\equiv 0$, 方便后续计算得到原函数 $b_2(x)$), 于是就需要 $\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=b_2(1)=b_2(0)=0$. 显然

$$b_2(1)=\int_0^1 b_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=0=b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要 $b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y=\int_0^x\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c(\text{其中}c\text{为任意常数}),x\in[0,1)$. 又因

为我们需要 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1, 所以再将 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ 做周期 1 延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 得到在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1 的 $b_2(x)$(易知此时 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式为

$$b_2(x)=b_2(x-[x])=\int_0^{x-[x]}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x-[x]}\left(y-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c,\forall x\in\mathbb{R}.$$

此时又由 $\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y=0$ 可得

$$\begin{aligned}b_2(x)=b_2(x-[x])&=\int_0^{x-[x]}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^{x}b_1(y-[x])\,\mathrm{d}y=\int_{[x]}^{x}b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^{x}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_0^1 b_1(y+k)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^{x}b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1}b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^{x}b_1(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{[x]}b_1(y)\,\mathrm{d}y+\int_{[x]}^{x}b_1(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的 $b_2(x)$ 恰好就是 $b_1(x)$ 的一个原函数. 即 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续且周期为 1 的原函数 $b_2(x)$,$f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 因此我们可以对 $b_1(x)$ 进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)db_2(x)$$

成立. 并且此时 $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+c,\forall x\in\mathbb{R}$. 其中 c 为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要 $b_3(x)$ 是 $b_2(x)$ 的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望 $b_3(1)=b_3(0)$ 和 $b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0,$$
$$b_3(x)=\int_0^x b_2(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_3(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_3(x)$, 并且 $b_3(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 进而可以利用这个 $b_3(x)$ 继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由 $\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=b_3(1)=b_3(0)=0$ 可知

$$\int_0^1 b_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow c=\frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时 $b_1(x)$ 的原函数 $b_2(x)$ 就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么 c 可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的 $c=\frac{1}{12}$). 此时这个唯一确定的 $b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1,并且

$$b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},x\in[0,1);$$
$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\,\mathrm{d}y,|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}.$$

依次下去我们给出计算 $b_n,n\in\mathbb{N}$ 的算法.

定义 3.1 ($b_n(x)$ 定义和算法)

我们令 $b_1(x)$ 为 $x-\frac{1}{2},x\in[0,1)$ 的周期 1 延拓. 对所有 $n=2,3,\cdots,b_n(x)$ 是 $b_{n-1}(x)$ 的一个原函数.

笔记 $b_n(x)$ **的算法:**

根据上述构造 $b_2(x), b_3(x)$ 的想法可知, 我们只需期望 $b_n(1) = b_n(0)$ 和 $b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y, \forall x \in [0,1)$. 即

$$\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x = b_n(1) = b_n(0) = 0,$$

$$b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y, \forall x \in [0,1).$$

然后以此构造出 $[0,1)$ 上的 $b_n(x)$, 再对其做周期 1 延拓, 就能得到 $\mathbb{R}$ 上的 $b_n(x)$, 并且 $b_n(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1. 并且根据 $\int_0^1 b_{n-1}(x)\mathrm{d}x = b_n(1) = b_n(0) = 0$ 我们可唯一确定 $b_{n-1}(x)$ 在 $[0,1)$ 上的表达式. 从而可以唯一确定 $b_n(x)$ 之前的所有 $b_{n-1}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一确定所有的 $b_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述 $b_n(x)$ 的定义和算法, 可知 $b_n(x)$ 是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在 $M_n > 0$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $|b_n(x)| \leqslant M_n$.

注 我们可以利用这些 $b_n(x)$ 不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见例题 3.4,例题 3.44.

结论 我们计算一些 $b_n(x)$ 以备用:

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2}, x \in [0,1).$$

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, |b_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0,1).$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x-[x])^2 - \frac{1}{2}(x-[x]) + \frac{1}{12}, |b_2(x)| \leqslant \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, x \in [0,1).$$

$$b_3(x) = \frac{(x-[x])^3}{6} - \frac{(x-[x])^2}{4} + \frac{(x-[x])}{12}, |b_3(x)| \leqslant \frac{2\sqrt{3}-3}{36}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}, x \in [0,1).$$

$$b_4(x) = \frac{(x-[x])^4}{24} - \frac{(x-[x])^3}{12} + \frac{(x-[x])^2}{24} - \frac{1}{720}, |b_4(x)| \leqslant \frac{1}{720}, x \in \mathbb{R}.$$

例题 3.44 估计 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \to \infty$.

解 解法一: 一方面, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1).$$

另一方面, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 我们也有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\mathrm{d}x \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 + \ln n.$$

于是对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln n}+1.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$. 即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n, n\to\infty$.

解法二 (E-M 公式): 由E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x. \tag{3.29}$$

因为 $\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{n}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x$ 存在, 所以可设

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq C<\infty.$$

于是 $\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=C-\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\left[C-\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1}{2}-C+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\ln n+\frac{1}{2}-C++O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}$. 此时令 $\frac{1}{2}-C=\frac{1}{2}-\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq$ γ(欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.30}$$

由$b_n(x)$ 的构造和分部积分可知, 上述结果只是对 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}, b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12}$. 则不难发现$b_2(x)$ 是连续且周期为 1 的函数,$b_2(x)$ 是 $b_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, 并且 $|b_2(x)|\leq\frac{1}{12}, x\in\mathbb{R}$. 而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_{1}^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 于是设 $\int_{1}^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\triangleq C$. 从而再对(3.29)分部积分得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{n}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-\left(\int_{1}^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x-\int_{n}^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{x^2}db_2(x)\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+\frac{b_2(x)}{x^2}\Big|_{n}^{+\infty}+2\int_{n}^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+2\int_{n}^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}.(3.29)\end{aligned} \tag{3.31}$$

又由 $|b_2(x)| \leqslant \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知

$$\left|2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}\right| \leqslant 2\left|\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\right|+\frac{|b_2(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{6}\left|\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\right|+\frac{1}{12n^2}=\frac{1}{6n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即

$$2\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{b_2(n)}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

再结合(3.31)和(3.32)式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}-C+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

记 $\gamma \triangleq \frac{1}{2}-C$($\gamma$ 为欧拉常数), 则我们就得到了比(3.30)式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

例题 3.45 计算

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}.$$

笔记 **估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.**

解 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+(-1)^{2m-2}\frac{\ln(2m-1)}{2m-1}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2m-1)}{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+o(1), m \to +\infty. \tag{3.33}$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列 $\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 即可. 又注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}&=\sum_{n=1}^{m}\left[(-1)^{2n-2}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}+(-1)^{2n-1}\frac{\ln 2n}{2n}\right]=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln 2n}{2n}\right]\\&=\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2n}{2n}=\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2+\ln n}{n}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

由例题例题 3.44可知

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}=\ln 2(\ln m+\gamma+o(1))=\ln 2\cdot\ln m+\gamma\ln 2+o(1), m \to +\infty. \tag{3.35}$$

又由E-M 公式可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}&=\frac{\ln m}{2m}+\int_1^m\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln m}{2m}+\frac{1}{2}\ln^2 m+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.36}$$

因为

$$\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_1^m\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

并且 $\int_1^m \frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_1^m \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=C<\infty$. 即

$$\int_1^m \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=C+o(1), m\to+\infty. \tag{3.37}$$

于是结合(3.36)(3.37)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}&=\frac{\ln m}{2m}+\frac{1}{2}\ln^2 m+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\\&=o(1)+\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1)\\&=\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1), m\to+\infty.\end{aligned} \tag{3.38}$$

因此由(3.34)(3.35)(3.38)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}&=\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2+\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln^2 2m+C+o(1)-\left[\ln 2\cdot\ln m+\gamma\ln 2+o(1)+\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1)\right]\\&=\frac{1}{2}\ln^2 2m-\frac{1}{2}\ln^2 m-\ln 2\cdot\ln m-\gamma\ln 2+o(1)=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln m)^2-\frac{1}{2}\ln^2 m-\ln 2\cdot\ln m-\gamma\ln 2+o(1)\\&=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2+o(1), m\to+\infty.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2$. 再结合(3.33)式可得

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{2m-2}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2.$$

故 $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2.$ □

例题 3.46 设 $f\in C^1[1,+\infty)$ 且 $\int_1^\infty |f'(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 证明 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 存在.

笔记 关键想法参考:E-M 公式和命题 14.1.

证明 由E-M 公式可知

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{f(1)+f(n)}{2}+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x. \tag{3.39}$$

注意到 $0\leqslant\left|\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\right|\leqslant\frac{1}{2}|f'(x)|$, 并且 $\int_1^\infty |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\int_1^\infty\left|\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\right|\mathrm{d}x$ 也收敛. 从而 $\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 故由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(1) 若 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 又由 $\int_1^\infty |f'(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ 可知 $\int_1^\infty f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(1)]=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f'(y)\mathrm{d}y=\int_1^\infty f'(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 从而由 *Henie* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 也存在. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结合(3.39)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 存在.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在, 再结

合(3.39)式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. 于是对 $\forall x\geqslant 1$, 一定存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant x<n+1$. 从而可得

$$\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\int_n^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.40}$$

并且

$$\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_n^x |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{y\geqslant n}|f(y)|. \tag{3.41}$$

对(3.41)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\geqslant n}|f(y)|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)|.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)|=0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=0$. 于是再对(3.40)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 从而可得

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. □

例题 3.47

1. 先证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right)$$

存在.

2. 再用积分放缩法求 $\sum\limits_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}, n\to\infty$ 的等价无穷大.

笔记 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

证明

1. 设

$$a_n\triangleq\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n, n=2,3,\cdots.$$

我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln(n+1)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln n-\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=2}^\infty\left|O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right|<\infty,\sum_{n=2}^\infty\left[\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}\right]=-\frac{1}{2\ln 2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_2\right]$$

存在.

2. 注意到对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k\ln k}\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{2}^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2. \tag{3.42}$$

同时, 也有

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k\ln k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\ln n. \tag{3.43}$$

从而对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 由(3.42)(3.43)式可得

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \leqslant \ln\ln n.$$

于是对 $\forall n \geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\frac{\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2}{\ln\ln n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n} \leqslant 1.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln\ln n}=1$. 即 $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln\ln n, n\to\infty$.

□

例题 3.48 用积分放缩法得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2}, x\to 1^-$ 的等价无穷大.

证明 注意到对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{n^2}dt \geqslant -1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{t^2}dt=-1+\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}x^{t^2}dt. \tag{3.44}$$

同时也有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{t^2}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}x^{t^2}dt. \tag{3.45}$$

又由于 $x\in(0,1)$, 因此 $\ln x\in(-\infty,0)$. 从而

$$\int_{0}^{\infty}x^{t^2}dt=\int_{0}^{\infty}e^{t^2\ln x}dt \xlongequal{\text{令}y=t\sqrt{-\ln x}} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_{0}^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

故 $\int_{0}^{\infty}x^{t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$ 收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}x^{t^2}dt=\int_{0}^{\infty}x^{t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \tag{3.46}$$

从而对 $\forall x\in(0,1)$, 结合(3.44)(3.45)(3.46)式可得

$$-1+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}=-1+\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}x^{t^2}dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}x^{t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x}+\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \sqrt{-\ln x}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x\in(0,1).$$

令 $x\to 1^-$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{-\ln x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}, x\to 1^-$.

又由 $ln(1+x)\sim x, x\to 0$ 可知 $-\ln x=-\ln(1+x-1)\sim 1-x, x\to 1^-$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x\to 1^-.$$

□

3.3 Stirling 公式

对于阶乘问题, 最好用的估计工具就是 Stirling 公式. 与组合数相关的极限问题, 都可以尝试将其全部转化为阶乘然后估计大小.

定理 3.4 (Stirling 公式)

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n\to\infty.$$

♡

笔记 提示: 用欧拉麦克劳林公式估计 $\sum_{k=1}^{n}\ln k, n\to\infty$ 的渐近展开式, 以此结合 Wallis 公式:$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to\infty$ 证明.

证明 由E-M 公式可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k=\frac{\ln n}{2}+\int_1^n\ln x\mathrm{d}x+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x. \tag{3.47}$$

由 Dirichlet 判别法可知,$\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 则可设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\triangleq C_0<\infty$. 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, 再令 $b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12}, x\in\mathbb{R}$. 则不难发现$b_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x)=\int_0^x b_1(y)\mathrm{d}y,\quad |b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}.$$

从而对(3.47)式使用分部积分可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln k&=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^n\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_n^{+\infty}\frac{b_1(x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+C_0-\int_n^{+\infty}\frac{1}{x}db_2(x)=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+C_0-\frac{b_2(x)}{x}\Big|_n^{+\infty}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1+C_0+\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x,\forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

又因为 $|b_2(x)|\leqslant\frac{1}{12},\forall x\in\mathbb{R}$. 所以对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{6n}.$$

故 $\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{+\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}$. 于是再记 $C=1+C_0$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.48}$$

注意到

$$(2n)!!=2^n n!, n=0,1,2,\cdots. \tag{3.49}$$

于是由 Wallis 公式:$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to\infty$. 再结合(3.48)(3.49)可得

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!\cdot n!}{(2n)!\sqrt{n}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!\prod\limits_{k=1}^{n}k}{\sqrt{n}\prod\limits_{k=n+1}^{2n}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n! e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}}{\sqrt{n}e^{\sum\limits_{k=1}^{2n}\ln k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n! e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{n}e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln 2n-2n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n! e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)-\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln 2n-2n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n! e^{-n\ln n+n-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n! 2^{-2n-\frac{1}{2}}e^n}{n^n\sqrt{n}}e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2n}}e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\lim\limits_{n\to\infty}e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}}=\sqrt{\pi}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$. 故 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n\to\infty$. □

例题 3.49 设 n,v 为正整数且 $1<v<n$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}=\lambda>0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}C_n^v=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2\lambda^2}$.

证明 根据条件, 显然在 $n\to\infty$ 时 v 也会趋于无穷, 设 $v=\frac{n}{2}+w\sqrt{n}$, 则 $w=\frac{v-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}w=\lambda>0$, 则有

$$
\frac{\sqrt{n}}{2^n}C_n^v=\frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{n!}{v!(n-v)!}, n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n\to\infty.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}C_n^v&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{n!}{v!\,(n-v)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi v}\left(\frac{v}{e}\right)^v\sqrt{2\pi(n-v)}\left(\frac{n-v}{e}\right)^{n-v}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{2^n v^v(n-v)^{n-v}}\frac{n}{\sqrt{v(n-v)}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2\lambda^2}\\
&\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{2^n\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)^v\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)^{n-v}}\frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}}=e^{-2\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

又

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\sqrt{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4w^2}{\sqrt{n}}}}=1,
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{2^n\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)^v\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)^{n-v}}\frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}}=e^{-2\lambda^2}\\
\Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{2^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}}=e^{-2\lambda^2}\\
\Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)}}{(n+2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}(n-2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}}=e^{-2\lambda^2}\\
\Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}+w\sqrt{n}}\left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}-w\sqrt{n}}}=e^{-2\lambda^2}\\
\Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)\ln\left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)\right]=2\lambda^2.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

又由 Taylor 公式可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)\ln\left(1-\frac{2w}{\sqrt{n}}\right)\\
&=\left(\frac{n}{2}+w\sqrt{n}\right)\left(\frac{2w}{\sqrt{n}}-\frac{2w^2}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)+\left(\frac{n}{2}-w\sqrt{n}\right)\left(-\frac{2w}{\sqrt{n}}-\frac{2w^2}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\\
&=w\sqrt{n}+w^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-w\sqrt{n}+w^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2w^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n\to\infty.
\end{aligned}
$$

再结合 $\lim\limits_{n\to\infty}w=\lambda$ 可知(3.50)式成立, 因此结论得证. □

3.4 Abel 变换

定理 3.5 (Abel 变换)

设 $\{a_n\}_{n=1}^N,\{b_n\}_{n=1}^N$ 是数列, 则有恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N a_kb_k &= (a_1-a_2)b_1+\cdots+(a_{N-1}-a_N)(b_1+b_2+\cdots+b_{N-1})+a_N(b_1+b_2+\cdots+b_N)\\ &=\sum_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i.\end{aligned}$$

笔记 Abel 变换的证明想法“强行裂项”是一种很重要的思想.

证明 为了计算 $\sum\limits_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum\limits_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum\limits_{i=1}^{N}b_i$, 我们来强行构造裂项, 差什么就给他补上去再补回来, 即:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i &= \sum_{j=1}^{N-1}\left(a_j\sum_{i=1}^{j}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j}b_i\right)+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i\\ &=\sum_{j=1}^{N-1}\left(a_j\sum_{i=1}^{j}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j+1}b_i\right)+\sum_{j=1}^{N-1}\left(a_{j+1}\sum_{i=1}^{j+1}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j}b_i\right)+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i\\ &=a_1b_1-a_N\sum_{i=1}^{N}b_i+\sum_{j=1}^{N-1}a_{j+1}b_{j+1}+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i=\sum_{j=1}^{N}a_jb_j.\end{aligned}$$

□

命题 3.8 (经典乘积极限结论)

设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 存在. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)a_n=0.$$

笔记 为了估计 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$, 前面的有限项不影响. 而要用上极限 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 自然想到 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_j=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_ja_j}{a_j}$ 和Abel 变换. 而 a_j 的单调性能用在Abel 变换之后去绝对值.

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$. 则由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\sum_{i=N+1}^{m}a_ib_i\right|\leqslant\varepsilon,\forall m\geqslant N+1.$$

当 $n\geqslant N+1$, 由Abel 变换, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=N+1}^{n}b_j\right| &= \left|\sum_{j=N+1}^{n}\frac{a_jb_j}{a_j}\right|=\left|\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right)\sum_{i=N+1}^{j}a_ib_i+\frac{1}{a_n}\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\\ &\leqslant\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right|\cdot\left|\sum_{i=N+1}^{j}a_ib_i\right|\right)+\frac{1}{|a_n|}\left|\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\cdot\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right|\right)+\frac{1}{|a_n|}\left|\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon\left[\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{j+1}}-\frac{1}{a_j}\right)+\frac{1}{a_n}\right]=\varepsilon\left(\frac{2}{a_n}-\frac{1}{a_{N+1}}\right).$$

因此我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{n}b_j\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{N}b_j\right|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=N+1}^{n}b_j\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{N}b_j\right|+\varepsilon\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(2-\frac{a_n}{a_{N+1}}\right)=2\varepsilon.$$

由 ε 任意性即可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|a_n\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right|=0$, 于是就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)a_n=0.$ □

例题 3.50 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k=x.$$

笔记 可以不妨设 $x=0$ 的原因: 假设当 $x=0$ 时, 结论成立, 则当 $x\neq0$ 时, 令 $y_n=x_n-x$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$. 从而由假设可知

$$0=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y_k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(x_k-x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k-x\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k-x.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k=x$.

证明 不妨设 $x=0$, 则对 $\forall N>0$, 当 $n>N$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k x_k\right|+\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k x_k\right|\\&\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k x_k\right|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k x_k\right|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\\&=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k x_k\right|+\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to+\infty$, 则结合 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}C_n^k x_k\right|\xlongequal{\text{因为分子是关于}n\text{的多项式}}0$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|,\forall N>0.$$

由 N 的任意性, 上式两边令 $N\to+\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|\leqslant\overline{\lim_{N\to+\infty}}\sup_{k\geqslant N+1}|x_k|.$$

又根据上极限的定义, 可知 $\lim\limits_{N\to+\infty}\sup\limits_{k\geqslant N+1}|x_k|=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}|x_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

从而

$$0\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|\leqslant0.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x_k\right|=0$. 原命题得证. □

3.5 Stolz 定理

3.5.1 数列 Stolz 定理

定理 3.6 (Stolz 定理)

(a): 设 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(b): 设 x_n 是严格递减数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(c): 分别在 (a),(b) 的条件基础上, 若还有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{3.51}$$

注 注意 (c) 由 (a),(b) 是显然的, 且只有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞ 时才(3.51)式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即Stolz 定理是离散的洛必达法则.

证明 我们仅证明 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < \infty$ 时有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{3.52}$$

记 $A \triangleq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由上极限定义我们知道对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant A+\varepsilon, \forall n \geqslant N$. 利用 x_n 严格递增时, 成立 $y_{n+1}-y_n \leqslant (A+\varepsilon)(x_{n+1}-x_n), n \geqslant N$, 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1}(y_{j+1}-y_j) \leqslant (A+\varepsilon)\sum_{j=N}^{n-1}(x_{j+1}-x_j), \forall n \geqslant N+1.$$

即

$$y_n - y_N \leqslant (A+\varepsilon)(x_n - x_N), \forall n \geqslant N+1.$$

令 $n \to +\infty$, 取上极限就得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_n}}{1-\frac{x_N}{x_n}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} \leqslant A+\varepsilon.$$

由 ε 任意性得到式(3.52). □

命题 3.9 (Cauchy 命题)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

笔记 这个命题说明Stolz 定理是一种有效的把求和消去的降阶方法.

证明 容易由Stolz 定理的 (a)直接得出. □

定理 3.7 (反向 Stolz 定理)

对某个 $C > 0$, 如果有 $n(a_n - a_{n-1}) \geqslant -C, \forall n \geqslant 2$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a \in \mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

笔记 反向洛必达本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

笔记 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n - a_{n-1},\ \forall n \geqslant 2,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

证明的想法是用 S_n, S_m 来表示 a_n, m 是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m} = S_n + ma_n + mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+m} - S_n}{m} - \frac{mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}}{m} \\ &\leqslant \frac{|S_{n+m}| + |S_n|}{m} + \frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n+1} + (m-1)\frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+m}\right]. \end{aligned}$$

然后想办法取合适的 m 即可.

证明 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n - a_{n-1},\ \forall n \geqslant 2,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

我们有 $b_n \geqslant -\dfrac{C}{n}$.

对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $|S_n| \leqslant n\varepsilon, \forall n \geqslant N$, 于是当 $n \geqslant N$, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} - S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]b_{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right) \\ &\leqslant \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right) \\ &\leqslant \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n}\right) \\ &= \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C \\ &\leqslant \frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.53}$$

于是我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

另外一方面, 当 $n \geqslant \dfrac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$, 有 $n - [n\sqrt{\varepsilon}] \geqslant n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geqslant N$, 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)b_{n-1} + \cdots + b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{(n-[n\sqrt{\varepsilon}])[n\sqrt{\varepsilon}]}\left(([n\sqrt{\varepsilon}]-1) + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2) + \cdots + 1\right) \\ &\geqslant \frac{|S_n| + |S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geqslant -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.54}$$

于是我们得到

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \geqslant -2\sqrt{\varepsilon} - \frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon.$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

命题 3.10

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

证明 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1}-\ln a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

□

命题 3.11

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}, a_n > 0$, 并且对某个 $C > 0$, 如果有 $n(a_n - a_{n-1}) \geqslant -C, \forall n \geqslant 2,$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

证明 由反向 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1}-\ln a_n} \xlongequal{\text{反向 Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(\ln a_{k+1}-\ln a_k)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n - \ln a_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l.$$

□

3.5.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限

例题 3.51 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}.$$

笔记 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

证明 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n+1}k^{2020} - \ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}k^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)}.$$

又由Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{2020}-(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2020\cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}} = 0.$$

于是再利用Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}{n\cdot(n+1)^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}{n^{2021}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021}-n^{2021}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{2021\cdot n^{2020}} = \frac{1}{2021}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\dfrac{1}{2021}$. □

例题 3.52

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$.

(2) 证明下述极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)$.

笔记 注意,$\gamma\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0.577\cdots$ 是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道 γ 会不会是一个分数.

解

(1) 直接由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

(2) 记 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$, 则

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.\end{aligned}$$

从而存在常数 $C>0$, 使得 $|c_{n+1}-c_n|\le\dfrac{C}{n^2}$, 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C}{n^2}$ 收敛, 所以由比较原则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}-c_n|$ 也收敛. 由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_{n+1}-c_n)$ 也收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_1)$ 存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$ 也存在.

(3) 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)}\cdot n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=-\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.$$

□

例题 3.53 计算

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

证明

1. 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}-\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n}{n}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n}{1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=e^{-1}.$$

2. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}}-e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=e^{-1}.$$

故 $e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\sim\frac{n}{e},n\to\infty$. 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k-(n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2(n+1)}=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n+1}$$
$$\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln k-n\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\ln k\right]$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)-(n+1)\ln(n+1)\right]=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{e}.$$

□

例题 3.54 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}.$$

笔记 注意到, 分子求和时, 不是单纯的 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$, 而是 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$.

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.

结论 $\mathrm{C}_a^b=\frac{a}{b}\mathrm{C}_{a-1}^{b-1}$.

解 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln C_n^{k-1}-\ln C_n^k\right)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\left(\ln C_n^0-\ln C_n^n\right)}{2n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+2)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)}{1}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

例题 3.55 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

笔记 倒序求和与顺序求和相等!(看到 $n+1-k$, 就应该想到倒序求和)

解 解法一 (Stolz 公式):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^{n+1-k}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}}=1.$$

解法二 (和式内部对 n 可求极限 (极限号与求和号可换序)):一方面, 注意到对 $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)},\forall n>N.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限, 得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^N})}{1-\frac{1}{2}},\forall N\in\mathbb{N}_+.$$

令 $N\to\infty$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\geqslant\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^N})}{1-\frac{1}{2}}=1.$

另一方面, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(n+1-n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}},\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限, 得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

故

$$1\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\leqslant1.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}=1.$ □

例题 3.56 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(H_n-\ln n-\gamma)$, 其中 γ 为欧拉常数,$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明

$$\lim_{n\to\infty} n(H_n - \ln n - \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

□

注 类似的, 你可以继续计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n(H_n - \ln n - \gamma) - \frac{1}{2}\right)$, 并且仅用 stolz 公式就能证明存在一列 $c_1, \cdots, c_k$ 使得

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), n \to \infty.$$

例题 3.57 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$.

笔记 这题也可以凑定积分定义是显然的.

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+2} - \sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

□

命题 3.12

设 $\alpha \in (0,1)$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o\left(n^{1-\alpha}\right).$$

证明 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}(n+1)^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1-\alpha}{n}} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

□

3.5.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限

例题 3.58 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n\sqrt{n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{4}}x_n$.

证明 归纳易证 x_n 单调递增, 如果 x_n 有界则设 $x_n \le A < \infty$, 代入条件可知 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n}x_n} \ge \frac{1}{A\sqrt{n}}$, 从而 $x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{A\sqrt{n}}$. 而这个不等式右边发散, 故 x_n 也发散, 矛盾. 所以 x_n 单调递增趋于无穷, 下面用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\left(2x_n + \frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 2\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right) = 4.$$

因此所求的极限是 2.

□

注

1. 直接用 stolz 会做不出来:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\frac{1}{x_n\sqrt{n}}}{n^{-\frac{3}{4}}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{4}}}{x_n}.$$
设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}}=A$, 则由上式可得 $A=\frac{4}{A}$, 解得 $A=2$.
但是注意我们事先并没有论证上式最后一个极限存在, 所以不满足 Stolz 定理的条件, 这导致前面的等号都不一定成立. 因此不可以 "解方程" 得到所求极限为 2.
2. **上述证明中最后一步求原式平方的极限而不求其他次方的极限的原因:** 我们也可以待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\left(\left(1+\frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right)^a-1\right)}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\frac{a}{x_n^2\sqrt{n}}}{bn^{b-1}}=\frac{a}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac{1}{2}}}.$$
我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数, 因此令 $a=2,b=\frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^a}{n^b}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}=\frac{a}{b}=4$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$ 即可.
类似题目的最后一步求的极限式都是通过这种待定系数的方式得到的, 并不是靠猜.

例题 3.59 设 $0<x_0<y_0<\frac{\pi}{2}$, $x_{n+1}=\sin x_n$, $y_{n+1}=\sin y_n\ (n\geq 0)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$.

证明 因为 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n\ (n\geq 0)$, 所以数列 $\{x_n\}$ 严格递减有下界. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $\sin a=a$, 于是 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

另外, 由 $0<x_0<y_0<\frac{\pi}{2}$ 可以推得 $0<x_n<y_n<\frac{\pi}{2}\ (n\geq 0)$. 取正整数 ℓ 使得 $y_\ell<x_0$, 则 $y_\ell<x_0<y_0$, 从而对任意的正整数 n 有
$$y_{n+\ell}<x_n<y_n$$
进而
$$\frac{y_{n+\ell}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<1$$
注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_{n+\ell}}{y_n}=1$, 由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$. □

注 事实上, 通过待定系数, 利用 Stolz 公式做形式计算可以得到 x_n 的阶. 待定 $\alpha,\beta>0$, 由 Stolz 公式可得
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^\beta x_n^\alpha&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{\frac{1}{x_n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta n^{\beta-1}}{\frac{1}{\sin^\alpha x_n}-\frac{1}{x_n^\alpha}}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^\alpha\sin^\alpha x_n}{x_n^\alpha-\sin^\alpha x_n}=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{x_n^\alpha-\left(x_n-\frac{1}{6}x_n^3+o\left(x_n^3\right)\right)^\alpha}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{\mathrm{C}_\alpha^1x_n^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{6}x_n^3+o\left(x_n^{\alpha+2}\right)}=\frac{6\beta}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}}{x_n^{2-\alpha}+o\left(x_n^{2-\alpha}\right)}.\end{aligned}$$
于是取 $\alpha=2,\beta=1$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=\frac{6\cdot 1}{2}=3$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}ny_n^2=3$.. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}y_n=\sqrt{3}$.

例题 3.60 设 $k\geq 2, a_0>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

笔记 这题很容易能猜出要先对原极限开 k 次方再用 Stolz 定理求解.

实际上, 我们也可以同例题 3.58一样, 待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n+a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\left[\left(1+a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{a(k+1)}-1\right]}{bkn^{bk-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\frac{\frac{1}{k}+1}{a_n^{\frac{1}{k}+1}}}{bkn^{bk-1}} = \frac{k+1}{bk^2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)-\frac{k+1}{k}}}{n^{bk-1}}.$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数值, 因此令 $a = b = \frac{1}{k}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{\frac{1}{k}k^2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}-\frac{k+1}{k}}}{n^{\frac{k}{k}-1}} = \frac{k+1}{k}$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}$ 即可.

证明 归纳易证 a_n 单调递增, 假设 a_n 有界, 则由单调有界定理可知,a_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A < \infty$. 则由递推条件可得,$A = A + \frac{1}{\sqrt[k]{A}}$, 无解, 矛盾. 于是 a_n 单调递增且无上界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$. 根据 Stolz 公式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(a_n+a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{1+\frac{1}{k}}-a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}a_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(1+a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(1+x^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)x^{-(1+\frac{1}{k})} = 1+\frac{1}{k}$$

因此所求极限是 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. □

注 如果题目没给出需要求的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$, 而是问求 a_n 的渐近展开式 (只展开一项), 那么我们就需要待定系数自己探索 a_n 的阶. 待定 $\alpha > 0$, 由 Taylor 公式得到

$$a_{n+1}^{\alpha} = \left(a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^{\alpha} = a_n^{\alpha}+\alpha a_n^{\alpha-1}\frac{1}{\sqrt{a_n}}+o\left(a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^{\alpha} \approx a_n^{\alpha}+\alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}} \Rightarrow a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha} \approx \alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}.$$

从而令 $\alpha = \frac{3}{2}$, 则

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}} = a_{n+1}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}^{\alpha}-a_k^{\alpha}\right) \approx \sum_{k=1}^{n}\alpha a_k^{\alpha-\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}a_k^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{3n}{2}.$$

这样就能写出 a_n 渐近展开式的第一项, 即 $a_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$.

例题 3.61 设 k 为正整数, 正数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k) = 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

证明 设 $S_n = x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$, 则 S_n 单调递增. 如果 S_n 有界, 则 x_n 趋于零,$x_nS_n \to 0$, 这与已知条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件可知 x_n 趋于零. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}S_{n+1}S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}} = 1.$$

下面运用等价无穷小替换和 Stolz 公式来求极限:

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^{k+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^{k+1}S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}^{k+1}-S_n^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(S_{n+1}-S_n)(S_{n+1}^k+S_{n+1}^{k-1}S_n+\cdots+S_{n+1}S_n^{k-1}+S_n^k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}^k(S_{n+1}^k+S_{n+1}^{k-1}S_n+\cdots+S_{n+1}S_n^{k-1}+S_n^k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x_{n+1}S_{n+1})^k+(x_{n+1}S_{n+1})^{k-1}(x_{n+1}S_n)+\cdots+(x_{n+1}S_{n+1})(x_{n+1}S_n)^{k-1}+(x_{n+1}S_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k+1}.$$

□

例题 3.62 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2 = 1$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}a_n$.

解 因为 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right\}$ 单调递增,故由单调有界定理可知,$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right\}$ 的极限要么为有限数,要么为 $+\infty$. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 或不存在,则此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=+\infty$. 否则,设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=c<\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2-\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k^2\right)=c-c=0$ 矛盾. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=1$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}=0$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 或不存在矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 并且由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=1$ 可知 $a_n\sim\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}$,$n\to\infty$. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2\right)^3-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(a_{n+1}^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3\left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}+1\right)^3-1\right]
\end{aligned}$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}^2a_n=0$, 因此由 Taylor 公式可知 $\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}+1\right)^3-1\sim\frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}$,$n\to\infty$. 从而上式可化为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3\left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}+1\right)^3-1\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^3\frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}=3\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^2\\
&=3\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2-a_{n+1}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2-a_{n+1}^2\right)^2\\
&=3\lim_{n\to\infty}\left[a_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2\right)^2-2a_{n+1}^4\sum_{k=1}^{n+1}a_k^2+a_{n+1}^6\right]=3+0+0=3.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. □

例题 3.63

1. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n),n=1,2,\cdots,x_1>0$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n}$.
2. 设 $x_{n+1}=\sin x_n,n=1,2,\cdots,x_1\in(0,\pi)$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n)$.
3. 设 $x_1=1,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n},n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}$.

解

1. 由 $\ln(1+x)\leq x,\forall x\in\mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1}\leq x_n,\forall n\in\mathbb{N}$. 并且 $x_1>0$, 假设 $x_n>0$, 则 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)>0$. 从而由数学归

纳法, 可知 $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是由单调有界定理, 可知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$. 对 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ 两边同时令 $n \to \infty$, 可得

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+x_n) = \ln(1+a).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 进而, 由 *Stolz* 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(1+x_n)} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$. 即 $x_n \sim \dfrac{2}{n}, n \to \infty$.
因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx_n\left(n - \frac{2}{x_n}\right)}{\ln n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n - \frac{2}{x_n}}{\ln n} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{\ln(1+x)}}{x} \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)\ln(1+x) - 2x}{x^2\ln(1+x)} = 4\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2x}{x^3} \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到 x_n 在 $n \to \infty$ 时的渐进估计:

$$\begin{aligned}
\frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} = \frac{2}{3} + o(1) &\Rightarrow nx_n - 2 = \frac{2\ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\
&\Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n \to \infty.
\end{aligned}$$

2. 由 $\sin x \leqslant x, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1} \leqslant x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 又由于 $0 < x_1 < \pi$ 及 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 故归纳可得 $0 \leqslant x_n \leqslant 1, \forall n \geqslant 2$. 因此 $\{x_n\}$ 极限存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < \infty$. 从而对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边同时令 $n \to \infty$ 可得

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin a.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 于是由 *Stolz* 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3}{nx_n^2} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} &= 3\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = 3\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}\right) \\
&= 3\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\
&= 3\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = 1.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 3$. 即 $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}, n \to \infty$. 进而, 再结合 *Stolz* 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right) \xlongequal{\text{平方差公式}} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1 - \frac{n}{3}x_n^2\right)}{\ln n\left(1 + \sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_n^2\left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3}\right)}{\ln n\left(1 + \sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}}{\ln n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}}\\
&= \frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}}{x^2} = \frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x-\frac{1}{3}x^2\sin^2 x}{x^4\sin^2 x}\\
&= \frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2-\frac{1}{3}x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2}{x^6}\\
&= \frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^6}{36}-\frac{x^6}{60}+\frac{x^6}{9}+o\left(x^6\right)}{x^6} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

(最几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出 $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+o\left(x^2\right)$, 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}\geqslant x_n,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又 $x_1=1>0$, 故归纳可得 $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 由单调有界定理可知数列 $\{x_n\}$ 的极限要么是 $+\infty$, 要么是有限数. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<\infty$, 则对 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$ 两边同时令 $n\to\infty$, 可得 $a=a+\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}=0$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 于是由 *Stolz* 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{n+1-n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2\right)}\\
&= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n^2}\right)} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

因此 $x_n\sim\sqrt{2n},n\to\infty$. 从而 $x_n+\sqrt{2n}\sim2\sqrt{2n},n\to\infty$. 再结合 *Stolz* 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n} &\xlongequal{\text{平方差公式}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{(x_n+\sqrt{2n})\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{2\sqrt{2n}\ln n}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-2n}{\ln n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2-2}{\ln(n+1)-\ln n}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{2}{x_n^2}}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

例题 3.64 设 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n},S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$.

解 由于 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n},\forall n\in\mathbb{N}_+$, 并且 $a_1>0$, 故由数学归纳法可知 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又 $a_2=a_1+a_1>a_1$, 再根据递推式, 可以归纳得到数列 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此, 数列 $\{a_n\}$ 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<\infty$, 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由条件可知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{1}{na_1}=\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}_+$. 从而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$
a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1\geqslant\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.
$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=+\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 于是由 *Stolz* 定理, 可知

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}n(a_{n+1}^2-a_n^2)
$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(a_n+\frac{1}{S_n}\right)^2-a_n^2\right]=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right).$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^2}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right].$$

由递推公式, 可得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}1=n+1-n\leqslant n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}&=n+1-\frac{na_n}{a_n+\frac{1}{S_n}}=1+\frac{\frac{n}{a_nS_n}}{1+\frac{1}{a_nS_n}}\\&=1+\frac{n}{1+a_nS_n}\leqslant 1+\frac{n}{1+a_1S_n}=1+\frac{n}{1+S_n}.\end{aligned}$$

又由 Stolz 定理, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_{n+1}}=0$. 故由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n+1-\dfrac{na_n}{a_{n+1}}\right]=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2}=2+0=2.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{\ln n}}=\sqrt{2}$. □

3.5.2 函数 Stolz 定理

定理 3.8 (函数 Stolz 定理)

设 $T>0, f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是内闭有界函数.

(1) 设 $g(x+T)>g(x)$, 若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

(2) 设 $0<g(x+T)<g(x)$, 若有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

注 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 利用夹逼准则和数列 Stolz 定理进行证明. 具体可见例题 3.65.

笔记

(1) 不妨设 $A=0$ 的原因:

(2) 不妨设 $T=1$ 的原因:

证明 我们仅考虑 $A\in\mathbb{R}$, 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可.

(1) 不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可. 对任何 $\varepsilon>0$, 由条件知

存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x+1)-g(x)], g(x)>0. \tag{3.55}$$

于是对 $\forall x>X$, 利用(3.55)式, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}+\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\overset{(3.55)\text{式}}{\leqslant} \varepsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[g(x-k+1)-g(x-k)]}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&= \varepsilon\frac{g(x)-g(x-[x]+X)}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right| \\
&\overset{(3.55)\text{式}g>0}{\leqslant} \varepsilon+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|.
\end{aligned}$$

于是利用 f 在 $[X,X+1]$ 有界及 $X\leqslant x-[x]+X<X+1$, 我们有

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon,$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

这就完成了证明.

(2) 不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可. 任何 $\varepsilon>0$, 由条件可知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x)-g(x+1)]. \tag{3.56}$$

于是对 $\forall x>X,\forall n\in\mathbb{N}$, 利用(3.56)可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+k-1)-f(x+k)]+f(x+n)}{g(x)}\right| \\
&\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x+k-1)-f(x+k)|}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leqslant \varepsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[g(x+k-1)-g(x+k)]}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&= \varepsilon\frac{g(x)-g(x+n)}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leqslant \varepsilon+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}.
\end{aligned}$$

再利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x+n)|}{g(x)}=0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon,\forall x>X.$$

从而结论得证.

□

例题 3.65

(1) 设 $\alpha > -1$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}$.

(3) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (t-[t])dt$, 这里 $[\cdot]$ 表示向下取整函数.

笔记 虽然这个几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见下述证明.

注 第 (1) 题如果直接洛必达得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|\sin x|}{\alpha+1}\text{不存在,}$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

证明

(1) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt-\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,dt}{(x+\pi)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}\\&\xlongequal{Lagrange\text{中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha},\end{aligned}$$

其中 $x\leqslant\theta_x\leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x\sim x, x\to+\infty$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}=\frac{1}{\pi(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt=\frac{1}{\pi(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_0^\pi|\sin t|\,dt=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\pi\leq x\leq(n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha|\sin t|dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}}\leq\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}\leq\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|dt}{(n\pi)^{\alpha+1}},\forall x\in[0,+\infty).\tag{3.57}$$

又由数列 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt}{(n\pi)^{\alpha+1}}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}\\&\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(n\pi)^\alpha\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)},\end{aligned}\tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t^\alpha|\sin t|\,dt}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}\\&\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(n\pi)^\alpha\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.\end{aligned}\tag{3.59}$$

又因为 $n\pi\leq x\leq(n+1)\pi,\forall x\in(0,+\infty)$, 所以 $n\to+\infty$ 等价于 $x\to+\infty$. 于是利用(3.57)(3.58)(3.59)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|dt}{x^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt-\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(x+\pi)-\ln x}\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\frac{\pi}{x}}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}\int_0^\pi|\sin t|\,dt=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

其中 $x\leqslant\theta_x\leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x\sim x, x\to+\infty$. 再结合(3.60)式可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\theta_x}=\frac{2}{\pi}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\pi\leq x\leq(n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln((n+1)\pi)}\leq\frac{\int_0^{x}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}\leq\frac{\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(n\pi)},\forall x>0. \tag{3.61}$$

又由数列 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(n\pi)}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(n\pi)-\ln((n-1)\pi)}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi},\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln((n+1)\pi)}&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln((n+2)\pi)-\ln((n+1)\pi)}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt}{\ln(1+\frac{1}{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi}.\end{aligned} \tag{3.63}$$

又因为 $n\pi\leq x\leq(n+1)\pi,\forall x\in(0,+\infty)$, 所以 $n\to+\infty$ 等价于 $x\to+\infty$. 于是利用(3.61)(3.62)(3.63)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{x}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\frac{2}{\pi}.$$

(3) 直接使用函数 Stolz 定理:注意到 $t-[t]$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的非负函数, 故由函数 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+1}(t-[t])dt-\int_0^x(t-[t])dt}{x+1-x}=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}(t-[t])dt\\&=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}(t-[t])dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{1}(t-[t])dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leq x\leq n+1$. 故

$$\frac{\int_0^n(t-[t])dt}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt\leqslant\frac{\int_0^{n+1}(t-[t])dt}{n},\forall x>0. \tag{3.64}$$

又由数列 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n+1}(t-[t])dt}{n}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}(t-[t])dt=\int_0^1(t-[t])dt=\int_0^1 tdt=1, \tag{3.65}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n}(t-[t])dt}{n+1}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\int_{n-1}^{n}(t-[t])dt=\int_0^1(t-[t])dt=\int_0^1 tdt=1. \tag{3.66}$$

又因为 $n\leq x\leq n+1,\forall x\in(0,+\infty)$, 所以 $n\to+\infty$ 等价于 $x\to+\infty$. 于是利用(3.64)(3.65)(3.66)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])dt=1.$$

□

3.6 递推数列求极限和估阶

3.6.1 “折线图 (蛛网图)”分析法 (图未完成, 但已学会)

关于递推数列求极限的问题, 可以先画出相应的”折线图”, 然后根据“折线图 (蛛网图)”的性质来判断数列的极限. 这种方法可以帮助我们快速得到数列的极限, 但是对于数列的估阶问题, 这种方法并不适用.

注 这种方法只能用来分析问题, 严谨的证明还是需要用单调性分析法或压缩映像法书写.

一般的递推数列问题, 我们先画“折线图 (蛛网图)”分析, 分析出数列 (或奇偶子列) 的收敛情况, 就再用单调分析法或压缩映像法严谨地书写证明.

如果递推函数是单调递增的, 则画蛛网图分析起来非常方便, 书写证明过程往往用单调有界 (单调性分析法)

就能解决问题.

例题 3.66 设 $u_1=b,u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$, 求 a,b 的值使得 a_n 收敛, 并求其极限.

笔记 显然递推函数只有一个不动点 $x=a$, 画蛛网图分析能够快速地得到取不同初值时,u_n 的收敛情况. 但是注意需要严谨地书写证明过程.

解 由条件可得

$$u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2=(u_n-a)^2+u_n\geqslant u_n.$$

故 u_n 单调递增. (i) 若 $b>a$, 则由 u_n 单调递增可知,$u_n>a,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又由单调有界定理可知 u_n 要么发散到 $+\infty$, 要么收敛到一个有限数. 假设 u_n 收敛, 则可设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u>u_1>a$. 从而由递推条件可得

$$u=(u-a)^2+u\Rightarrow u=a$$

矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

(ii) 若 $b=a$, 则由递推条件归纳可得 $u_n=a,\forall n\in\mathbb{N}_+$.

(iii) 若 $b\in[a-1,a]$, 令 $f(x)=x^2+(1-2a)x+a^2$, 则

$$a-1<a-\frac{1}{4}=f\left(\frac{2a-1}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant\max\{f(a-1),f(a)\}=a,\forall x\in[a-1,a].$$

由于 $u_1=b\in[a-1,a]$, 假设 $u_n\in[a-1,a]$, 则

$$a-1\leqslant u_{n+1}=f(u_n)\leqslant a.$$

由数学归纳法可得 $u_n\in[a-1,a],\forall n\in\mathbb{N}_+$. 于是由单调有界定理可知 u_n 收敛. 再对 $u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$ 两边同时取极限, 解得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

(iv) 若 $b<a-1$, 则

$$u_2=(u_1-a)^2+u_1>a\Leftrightarrow(b-a)^2+b>a\Leftrightarrow(b-a)(b-a+1)>0.$$

由 $b<a-1$ 可知上式最后一个不等式显然成立, 故 $u_2>a$. 于是由 (i) 同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

综上, 只有当 $a\in\mathbb{R},b\in[a-1,a]$ 时, 数列 u_n 才收敛, 极限为 a. □

例题 3.67 设 $x_1>0,x_1\neq1,x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}$, 证明 x_n 收敛并求极限.

笔记 显然递推函数有两个个不动点 $x=0,2$, 画蛛网图分析能够快速地得到取不同初值时,x_n 的收敛情况. 这里利用压缩映像书写过程更加简便.

解 (i) 如果 $x_1>1$, 则归纳易证 $x_n\geq2,\forall n\geq2$, 所以

$$|x_{n+1}-2|=\left|\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}-2\right|=\frac{(x_n-2)^2}{2(x_n-1)}=|x_n-2|\left|\frac{x_n-2}{2(x_n-1)}\right|\leq\frac{1}{2}|x_n-2|\leq\cdots\leq\frac{1}{2^n}|x_1-2|$$

令 $n\to\infty$, 由此可知 x_n 的极限是 2.

(ii) 如果 $x_1\in(0,1)$, 则归纳易证 $x_n\leq0,\forall n\geq2$, 所以

$$|x_{n+1}|=\left|\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}\right|=|x_n|\left|\frac{x_n}{2(x_n-1)}\right|\leq\frac{1}{2}|x_n|\leq\cdots\leq\frac{1}{2^n}|x_1|$$

令 $n\to\infty$, 由此可知 x_n 的极限是 0. □

例题 3.68 设 $S_1=1,S_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{S_n}-\sqrt{2}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

笔记 递推函数性质及例题分析递推函数递减时候, 意味着奇偶两个子列具有相反的单调性, 本题没有产生新的不动点, 是容易的.

画蛛网图分析表明递推函数 (在 $(0,1)$ 内) 是递减的, 所以数列不单调, 但是奇偶子列分别单调, 并且 (这一步只能说 "似乎", 因为对于不同的递减的递推式, 可能结论是不一样的, 取决于二次复合有没有新的不动点) 奇子列单调递增趋于 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 偶子列单调递减趋于 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 数列的范围自然是在 $[S_1,S_2]$ 之间, 显然不动点只有 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 一个, 因此证明单调有界即可解决问题.

证明 $S_1=1,S_2=2-\sqrt{2}$, 先证明 $S_n\in[2-\sqrt{2},1]$ 恒成立, 采用归纳法. $n=1,2$ 时显然成立, 如果 n 时成立, 则 $n+1$

时, 注意 $f(x)=x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}$ 在区间 $(0,1)$ 中单调递减, 所以

$$2-\sqrt{2}\le S_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}\le 2-\sqrt{2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}=3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\le 1$$

这就证明了 S_n 是有界数列, 且 $S_3\le S_1, S_4\ge S_2$, 下面证明 S_{2n-1} 递减,S_{2n} 递增: 注意函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}$ 在区间 $(0,1)$ 中单调递减, 所以如果已知 $S_{2n+1}\le S_{2n-1}, S_{2n+2}\ge S_{2n}$, 则

$$S_{2n+3}=f(S_{2n+2})\le f(S_{2n})=S_{2n+1}, S_{2n+4}=f(S_{2n+3})\ge f(S_{2n+1})=S_{2n+2}$$

根据归纳法可得单调性, 这说明 S_{2n-1}, S_{2n} 都是单调有界的, 因此极限存在, 设

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=a,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=b, a,b\in[2-\sqrt{2},1]$$

在递推式 $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}$ 中分别让 n 取奇数, 偶数, 然后令 $n\to\infty$ 取极限, 可得关于极限 a,b 的方程组 $a=b+\frac{1}{b}-\sqrt{2}, b=a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}$, 希望证明 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 为了解这个方程组, 三种方法:

方法一:直接硬算, 将其中一个式子代入到另一个中

$$a=b+\frac{1}{b}-\sqrt{2}=a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}+\frac{1}{a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{1-3\sqrt{2}a+7a^2-3\sqrt{2}a^3+a^4}{a(1-\sqrt{2}a+a^2)}$$

$$1-3\sqrt{2}a+7a^2-3\sqrt{2}a^3+a^4-a^2(1-\sqrt{2}a+a^2)=-\left(\sqrt{2}a-1\right)^3=0$$

由此可知 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 所以数列 S_n 收敛于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

方法二:上面硬算起来实在太麻烦了, 我们可以先对递推式变形化简, 减小计算量

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}=\frac{S_n^2-\sqrt{2}S_n+1}{S_n}=\frac{\left(S_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{S_n}$$

$$\Rightarrow S_{n+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(S_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}S_n}{S_n}=\frac{\left(S_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(S_n-\sqrt{2})}{S_n}$$

然后对奇偶子列 (代入递推式) 分别取极限可得方程组

$$a-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(b-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b-\sqrt{2})}{b}, b-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a-\sqrt{2})}{a}$$

如果 a,b 之中有一个是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 则另一个也是, 显然数列 S_n 收敛于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 如果都不是则

$$a-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(b-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b-\sqrt{2})}{b}=\frac{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a-\sqrt{2})(b-\sqrt{2})}{ab}$$

$$\Rightarrow \left(a-\sqrt{2}\right)\left(b-\sqrt{2}\right)-ab=2-\sqrt{2}(a+b)=0\Rightarrow a+b=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-b=\frac{\left(b-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b-\sqrt{2})}{b}\Rightarrow b-\sqrt{2}=-b, b=\frac{\sqrt{2}}{2}=a.$$

导致矛盾.

方法三:(最快的方法): 如果 $a\ne b$, 则根据方程组 $a=b+\frac{1}{b}-\sqrt{2}, b=a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}$ 有

$$ab=b^2-\sqrt{2}b+1=a^2-\sqrt{2}a+1\Rightarrow a^2-b^2=\sqrt{2}(a-b)\Rightarrow a+b=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b=a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}=\sqrt{2}-a\Rightarrow 2\sqrt{2}=2a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$$

最后一个不等式等号成立当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 由此可知 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 矛盾. □

注 一般来说, 递推函数递减时候是否收敛完全取决于递推函数二次复合之后在区间内 (这个数列的最大, 最小值对应的区间) 是否会有新的不动点, 如果没有就收敛, 如果有, 则通常奇偶子列收敛到不同极限, 于是数列不收敛.

可以看到核心是二次复合后是否有新的不动点，也即解方程 $f(f(x))=x$，一般不建议硬算，尤其是多项式或者分式类型，往往化为两个方程 $a=f(b),b=f(a)$ 然后作差会比较方便，只有出现超越函数时候，才有必要真的把二次复合化简算出来，然后硬解方程，或者求导研究问题，这样"迫不得已"的例子见最后一个练习题.

例题 3.69 定义数列 $a_0=x,a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+y^2}{2},n=0,1,2,\cdots$，求 $D\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\text{数列}a_n\text{收敛}\}$ 的面积.

解

□

3.6.2 单调性分析法

命题 3.13 (不动点) 设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}_+$. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，同时又成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$ 则极限 ξ 一定是方程 $f(x)=x$ 的根 (这时称 ξ 为函数 f 的不动点).

证明 对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限即得. □

关于递推数列求极限和估阶的问题，单调性分析法只适用于

$$x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}.$$

f 是递增或者递减的类型，且大多数情况只适用于 f 递增情况，其余情况不如压缩映像思想方便快捷. 显然递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 确定的 x_n 如果收敛于 $x\in\mathbb{R}$，则当 f 连续时一定有 $f(x)=x$，此时我们也把这个 x 称为 f 的不动点. 因此 $f(x)=x$ 是 x_n 收敛于 $x\in\mathbb{R}$ 的必要条件.

命题 3.14 (递增函数递推数列) 设 f 是递增函数，则递推

$$x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}.\tag{3.67}$$

确定的 x_n 一定单调，且和不动点大小关系恒定.

笔记 本结论表明由递增递推(3.67)确定的数列的单调性和有界性，完全由其 x_2-x_1 和 x_1 与不动点 x_0 的大小关系确定. 即 $x_2>x_1\Rightarrow x_{n+1}>x_n,\forall n\in\mathbb{N}_+.x_1>x_0\Rightarrow x_n>x_0,\forall n\in\mathbb{N}_+$.

证明 我们只证一种情况，其余情况是完全类似的. 设 x_0 是 f 的不动点且 $x_1\le x_0,x_2\ge x_1$，则若 $x_n\le x_{n+1},x_n\le x_0,n\in\mathbb{N}$，运用 f 递增性有

$$x_{n+1}=f(x_n)\le f(x_0)=x_0,x_{n+2}=f(x_{n+1})\ge f(x_n)=x_{n+1}.$$

由数学归纳法即证明了命题 3.14 □

命题 3.15 (递减函数递推数列) 设 f 是递减函数，则递推

$$x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}.\tag{3.68}$$

确定的 $\{x_n\}$ 一定不单调，且和不动点大小关系交错. 但 $\{x_n\}$ 的两个奇偶子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别为单调数列，且具有相反的单调性.

笔记 我们注意到 $f\circ f$ 递增就能把 f 递减转化为递增的情况，本结论无需记忆或证明，只记得思想即可.x_n 和不动点关系交错，即若 x_0 为数列 x_n 的不动点，且 $x_1\ge x_0,x_2\le x_0$，则 $x_3\ge x_0,\cdots,x_{2n}\le x_0,x_{2n-1}\ge x_0,\cdots$; 并且 $x_2\le x_1,x_3\ge x_1,x_4\le x_2,x_5\ge x_3,\cdots,x_{2n}\le x_{2n-2},x_{2n-1}\ge x_{2n-3},\cdots$.

证明 由命题 3.14类似证明即可. □

例题 3.70 递增/递减递推数列

1. 设 $x_1>-6,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n},n=1,2,\cdots$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设 $x_1,a>0,x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3}),n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
3. 设 $x_1=2,x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3,(n=2,3,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
4. 设 $x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1,n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

笔记

1. 不妨设 $x_1\geq 0$ 的原因: 我们只去掉原数列 $\{x_n\}$ 的第一项, 得到一个新数列, 并且此时新数列是从原数列 $\{x_n\}$ 的第二项 x_2 开始的. 对于原数列 $\{x_n\}$ 而言, 有 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 故新数列的每一项都大于等于 0. 将新数列重新记为 $\{x_n\}$, 则 $x_1\geq 0$. 若此时能够证得新数列收敛到 x_0, 则由于数列去掉有限项不会影响数列的敛散性以及极限值, 可知原数列也收敛到 x_0. 故不妨设 $x_1\geq 0$ 是合理地.
(简单地说, 就是原数列用 x_2 代替 x_1, 用 x_{n+1} 代替 $x_n,\forall n\in\mathbb{N}_+$, 而由 $x_1>-6$, 可知 $x_2=\sqrt{6+x_1}\geq 0$.)
注 这种不妨设的技巧在数列中很常用, 能减少一些不必要的讨论. 实际上就是去掉数列中有限个有问题的项, 而去掉这些项后对数列的极限没有影响.

解

1. 不妨设 $x_1\geq 0$, 则设 $f(x)=\sqrt{6+x}$, 则 $f(x)$ 单调递增.
当 $x_1<3$ 时, 由条件可知
$$x_2-x_1=\sqrt{6+x_1}-x_1=\frac{(3-x_1)(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1}+x_1}. \tag{3.69}$$
从而此时 $x_2>x_1$. 假设当 $n=k$ 时, 有 $x_k<3$. 则当 $n=k+1$ 时, 就有
$$x_{k+1}=f(x_k)=\sqrt{6+x_k}<\sqrt{6+3}=3.$$
故由数学归纳法, 可知 $x_n<3,\forall n\in\mathbb{N}_+$.
假设当 $n=k$ 时, 有 $x_{k+1}\geqslant x_k$. 则当 $n=k+1$ 时, 就有
$$x_{k+2}=f(x_{k+1})\geqslant f(x_k)=x_{k+1}.$$
故由数学归纳法, 可知 $\{x_n\}$ 单调递增. 于是由单调有界定理, 可得数列 $\{x_n\}$ 收敛.
当 $x_1\geqslant 3$ 时, 由(3.69)式可知, 此时 $x_2\leqslant x_1$. 假设当 $n=k$ 时, 有 $x_k\geqslant 3$. 则当 $n=k+1$ 时, 就有
$$x_{k+1}=f(x_k)=\sqrt{6+x_k}\geqslant\sqrt{6+3}=3.$$
故由数学归纳法, 可知 $x_n\geqslant 3,\forall n\in\mathbb{N}_+$.
假设当 $n=k$ 时, 有 $x_{k+1}\leqslant x_k$. 则当 $n=k+1$ 时, 就有
$$x_{k+2}=f(x_{k+1})\leqslant f(x_k)=x_{k+1}.$$
故由数学归纳法, 可知 $\{x_n\}$ 单调递减. 于是由单调有界定理, 可得数列 $\{x_n\}$ 收敛.
综上, 无论 $x_1>3$ 还是 $x_1\leqslant 3$, 都有数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 则对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边同时令 $n\to\infty$ 可得 $a=\sqrt{6+a}$, 解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=3$.
2.
3.
4.

□

例题 3.71 设 $c,x_1\in(0,1)$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=c(1-x_n^2),x_2\neq x_1$, 证明 x_n 收敛当且仅当 $c\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

证明 根据题目显然有 $x_n\in(0,1)$, 考虑函数 $f(x)=c(1-x^2)$, 则 $f(x)$ 单调递减, 并且 $f(x)=x$ 在区间 $(0,1)$ 中有唯一解 $t_0=\frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 则 $x_1\neq t_0$, 不妨设 $x_1\in(0,t_0)$(若不然 $x_1>t_0$, 则 $x_2=f(x_1)<f(t_0)=t_0$, 从 x_2 开始考虑即可), 所以 $x_2>t_0,x_3<t_0,\cdots$ 也即 $x_{2n-1}<t_0,x_{2n}>t_0$ 恒成立.

为了研究奇偶子列的单调性, 考虑二次复合, 计算有
$$f(f(x))-x=c\left(1-c^2(1-x^2)^2\right)-x=(-cx^2+c-x)(c^2x^2+cx+1-c^2)$$

两个因子都是二次函数, 前者开口向下, 在 $(0,1)$ 区间中与 $y=x$ 的唯一交点 (横坐标) 是 $t_0=\dfrac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 后者开口向上, 解方程有 (形式上)$x=\dfrac{-c\pm\sqrt{4c^2-3}}{2c}$.

因此我们应该以 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 分类, 当 $c\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时,$c^2x^2+cx+1-c^2\geq 0$ 也即当 $x\in(0,t_0)$ 时 $f(f(x))\geq x$,$x\in(t_0,1)$ 时 $f(f(x))\leq x$, 代入可知

$$x_1\leq x_3\leq x_5\leq\cdots\leq t_0,x_2\geq x_4\geq x_6\geq\cdots\geq t_0$$

也即奇子列单调递增有上界 t_0, 偶子列单调递减有下界 t_0, 所以奇偶子列分别都收敛, 解方程 $f(f(x))=x$ 可知其在 $(0,1)$ 中有唯一解 $t_0=\dfrac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 所以奇偶子列收敛到同一值, 数列收敛.

当 $c>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时,方法一:显然有 $\dfrac{-c-\sqrt{4c^2-3}}{2c}<\dfrac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}<\dfrac{-c+\sqrt{4c^2-3}}{2c}$, 从左至右依次记为 $t_1<t_0<t_2$. 采用反证法, 如果 x_n 收敛, 则解方程 $f(x)=x$ 可知 $x_n\to t_0$, 注意 $x_{2n-1}\in(0,t_0),x_{2n}\in(0,1)$ 并且反证法表明这两个子列也都收敛到 t_0, 则存在 N 使得 $n>N$ 时恒有 $x_{2n-1}\in(t_1,t_0),x_{2n}\in(t_0,t_2)$. 注意

$$f(f(x))-x=(-cx^2+c-x)(c^2x^2+cx+1-c^2)$$

因此在区间 (t_1,t_0) 中 $f(f(x))<x$, 区间 (t_0,t_2) 中 $f(f(x))>x$, 所以 $n>N$ 时奇子列单调递减, 偶子列单调递增, 根据单调有界, 只能奇子列收敛到 t_1, 偶子列收敛到 t_2, 这与 $x_n\to t_0$ 矛盾.

方法二:这个方法可以快速说明 $c>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时数列一定不收敛, 但是剩下一半似乎用不了. 显然 $f(x)=x$ 的解是 $t_0=\dfrac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 如果 $c>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求导有 $f'(x)=-2cx,|f'(t_0)|=\sqrt{1+4c^2}-1>1$. 所以在 t_0 附近的一个邻域内都有 $|f'(x)|\geq 1+\delta>1$, 而如果此时 x_n 收敛, 则必然收敛到 t_0, 也就是说存在 x_N 落入 t_0 附近一个去心邻域内 (条件 $x_2\neq x_1$ 保证了 $x_n\neq t_0$ 恒成立), 于是

$$|x_{N+1}-t_0|=|f(x_N)-f(t_0)|=|f'(\xi)||x_N-t_0|\geq(1+\delta)|x_N-t_0|$$

以此类推下去, 显然 x_n 与 t_0 的距离只会越来越远, 因此不可能收敛到 t_0 导致矛盾. □

注 方法一是标准方法也是通用的,注意多项式时候一定有整除关系 $f(x)-x\mid f(f(x))-x$ 所以必定能因式分解. 方法二则是回忆之前讲过的“极限点处导数大于等于 1 时候就不可能压缩映射”, 利用这个原理我们很快能发现 c 的分界线, 同时也能快速说明 $c>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时数列一定不收敛.

3.6.3 利用上下极限求递推数列极限

例题 3.72 设 $A,B>0$,$a_1>A$ 以及 $a_{n+1}=A+\dfrac{B}{a_n}$,$n\in\mathbb{N}_+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 显然 $a_n>A>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 从而 $a_{n+1}=A+\dfrac{B}{a_n}\leq A+\dfrac{B}{A}$,$\forall n\in\mathbb{N}_+$. 故数列 $\{a_n\}$ 有界. 于是可设 $a=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n<\infty$, $b=\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n<\infty$. 对等式 $a_{n+1}=A+\dfrac{B}{a_n}$ 两边同时关于 $n\to+\infty$ 取上下极限得到

$$a=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+1}=A+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{B}{a_n}=A+\frac{B}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n}=A+\frac{B}{b},$$

$$b=\varliminf_{n\to\infty}a_{n+1}=A+\varliminf_{n\to\infty}\frac{B}{a_n}=A+\frac{B}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n}=A+\frac{B}{a}.$$

于是我们有 $\begin{cases}ab=Ab+B\\ab=Aa+B\end{cases}$, 解得 $a=b0=\dfrac{A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}$. 又由 $a_n>A>0$, 可知 $a=b=\dfrac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}$. □

例题 3.73 设 $x_0,y_0>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}$, $y_{n+1}=\dfrac{1}{2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1}$, 证明: 数列 x_n,y_n 都收敛且极限相

同.

注 $1+\frac{3}{4}u^2$ 的放缩思路: 我们希望 $\frac{x}{(1+\frac{3}{4}x^2)^2}<1$, 待定 $m>0$, 利用均值不等式可知

$$\left(1+\frac{3}{4}x^2\right)^2=\left(\frac{3}{4}x^2+\overbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}^{m\text{个}}\right)^2\geqslant\left((m+1)\sqrt[m+1]{\frac{3}{4}x^2\cdot\frac{1}{m^m}}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{m+1}}\cdot\frac{m+1}{m^{\frac{2m}{m+1}}}x^{\frac{4}{m+1}}.$$

从而我们希望 $x^{\frac{4}{m+1}}=x$, 即 $m=3$. 这样就能使得

$$\frac{x}{(1+\frac{3}{4}x^2)^2}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{m+1}}\cdot\frac{m+1}{m^{\frac{2m}{m+1}}}x^{\frac{4}{m+1}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3+1}}\cdot\frac{3+1}{3^{\frac{2\cdot 3}{3+1}}}<1.$$

故取 $m=3$.

证明 根据条件可知 $x_n,y_n>0$, 并且进一步归纳易证 $x_n,y_n\in[0,1]$, 所以上下极限也都在 $[0,1]$ 之间.

$$\begin{aligned}x_{n+1}-y_{n+1}&=\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}-\frac{1}{2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1}\\&=\frac{x_n^2-y_n^2}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}\end{aligned}$$

由均值不等式可得

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy\geqslant(x+y)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(x+y)^2.$$

记 $u=x_n+y_n\geq 0$, 则由均值不等式可得

$$1+\frac{3}{4}u^2=\frac{3}{4}u^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\geq 4\sqrt[4]{\frac{u^2}{36}}=4\sqrt{\frac{|u|}{6}}\Rightarrow\frac{u}{(1+\frac{3}{4}u^2)^2}\leq\frac{8}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-y_{n+1}|&=\frac{|x_n-y_n|(x_n+y_n)}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}\\&\leq|x_n-y_n|\frac{x_n+y_n}{(x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)(x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}\\&\leq|x_n-y_n|\frac{x_n+y_n}{(1+\frac{3}{4}(x_n+y_n)^2)^2}=|x_n-y_n|\frac{u}{(1+\frac{3}{4}u^2)^2}\end{aligned}$$

故

$$|x_{n+1}-y_{n+1}|\leq\frac{3}{8}|x_n-y_n|\leq\cdots\leq(\frac{3}{8})^n|x_1-y_1|.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. 因此, 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=A$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=B, A,B\in[0,1], A\geq B$ 利用上下极限的基本性质有

$$\begin{aligned}A=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}\leq\frac{1}{4B^2+1}\\B=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n&=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}\geq\frac{1}{4A^2+1}\\\Rightarrow A&\leq\frac{1}{4B^2+1}\leq\frac{1}{\frac{4}{(4A^2+1)^2}+1}=\frac{(4A^2+1)^2}{(4A^2+1)^2+4}\end{aligned}$$

方法一:去分母并化简, 因式分解得到 (这个方法难算, 建议用 mma, 或者慢慢手动拆)

$$A((4A^2+1)^2+4)-(4A^2+1)^2=(2A-1)^3(2A^2+A+1)\leq 0$$

于是 $A\leq\frac{1}{2}$, 同理可知 $B\geq\frac{1}{2}$, 所以 $A=B=\frac{1}{2}$, 因此 x_n,y_n 都收敛到 $\frac{1}{2}$.

方法二:最后计算 A,B 时候如果采用上述方法硬做有点难算, 其实有巧妙一些的选择. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(4x_n^2-(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2))=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n-y_n)+2\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)(x_n-y_n)=0$(有界量乘无穷小量). 进而上下

极限也有等式 $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=\overline{\lim_{n\to\infty}}4x_n^2=4A^2$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=\underline{\lim_{n\to\infty}}4x_n^2=4B^2$ 代入可知

$$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}=\frac{1}{4B^2+1}$$
$$B=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}=\frac{1}{4A^2+1}$$
$$\Rightarrow 4AB^2+A=4A^2B+B=1,(4AB-1)(B-A)=0$$

所以若 $A=B$ 则显然成立, 进而由递推条件可得 $A=B=\frac{1}{2}$. 若 $A\neq B$ 则 $AB=\frac{1}{4}$, 代入有 $A+B=1$, 显然解出 $A=B=\frac{1}{4}$ 矛盾. □

注 有必要先来证明 $x_n-y_n\to 0$ 而不是上来直接设 x_n,y_n 的上下极限一共四个数字, 这样的话根本算不出来 (用 mma 都算不出来), 而如果证明了 $x_n-y_n\to 0$, 则只有两个变量了. 方法二好做是因为都是等式了, 所以可以作差然后简单的因式分解解出来, 而方法一那样无脑硬算, 就要麻烦. 本题运用的若干上下极限性质都可以在任何一本数学分析教材上面找到证明. 只要你记住三点:

1. 逐项 (包括加法也包括乘法) 取上下极限通常都会成立一个确定方向的不等式.
2. 计算上下极限时候, 如果其中某一项极限就是存在的, 那么上下极限的不等式将会成为等式.
3. 对于都是正数的问题, 取倒数的上下极限运算规则就是你脑海中最自然的那种情况. 这样考试时候就算忘了具体的结论, 也可以通过画图和举例快速确定下来.

3.6.4 类递增/类递减递推数列

例题 3.74 类递增模型

1. 设 $c_1,c_2>0,c_{n+2}=\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n},n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim_{n\to\infty}c_n$.
2. 设 $a_k\in(0,1),1\le k\le 2021$ 且 $(a_{n+2021})^{2022}=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020},n=1,2,\cdots$, 这里 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$ 证明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

笔记 解决此类问题一般先定界 (即确定 c_n 的上下界的具体数值), 再对等式两边同时取上下极限即可.

注

1. 记 $b\triangleq\max\{c_1,c_2,4\}$ 的原因: 为了证明数列 c_n 有界, 我们需要先定界 (即确定 c_n 的上下界的具体数值), 然后再利用数学归纳法证得数列 c_n 有界. 显然 c_n 有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列 c_n 的一个上界, 我们可以先假设 c_n 有一个上界 b(此时 b 是待定常数). 则 $c_{n+1}=\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}}\leqslant\sqrt{b}+\sqrt{b}=2\sqrt{b}\leqslant b$, 由此解得 $b\ge 4$. 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证 b 同时也是 c_1,c_2 的上界. 故只要取 $b\ge 4,c_1,c_2$ 就一定能归纳出 b 是 c_n 的一个上界. 而我们取 $b\triangleq\max\{c_1,c_2,4\}$ 满足这个条件.
2. 记 $M=$ 的原因: 同上一问, 假设数列 a_n 有一个上界 M(此时 M 是待定常数), 则
$$a_{n+2021}=\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020}}\le\sqrt[2022]{M+M+\cdots+M}=\sqrt[2022]{2021M}\le M.$$
由此解得 $M\ge(2021)^{\frac{1}{2021}}$. 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证 M 同时也是 $a_1,a_2,\cdots,a_{2020}$ 的上界. 故只要取 $M\ge(2021)^{\frac{1}{2021}},a_1,a_2,\cdots,a_{2020}$ 就一定能归纳出 M 是 a_n 的一个上界. 而我们取 $M=\max\left\{(2021)^{\frac{1}{2021}},a_1,a_2,\cdots,a_{202}\right.$ 满足这个条件.

解

1. 记 $b\triangleq\max\{c_1,c_2,4\}$, 则 $0<c_1,c_2\le b$. 假设 $0<c_n\le b$, 则
$$0<c_{n+1}=\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}}\leqslant\sqrt{b}+\sqrt{b}=2\sqrt{b}\leqslant b.$$
由数学归纳法, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $0<c_n\le b$ 成立. 即数列 $\{c_n\}$ 有界.
因此可设 $L=\overline{\lim_{n\to\infty}}c_n<\infty,l=\underline{\lim_{n\to\infty}}c_n<\infty$. 令 $c_{n+1}=\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}}$ 两边同时对 $n\to\infty$ 取上下极限, 可得
$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}c_{n+1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}})\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{c_n}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{c_{n-1}}=2\sqrt{L}\Rightarrow L\leqslant 4,$$

$$l=\lim_{n\to\infty}c_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{c_n}+\sqrt{c_{n-1}})\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{c_n}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{c_{n-1}}=2\sqrt{l}\Rightarrow l\geqslant 4.$$

又 $l=\varliminf_{n\to\infty}c_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}c_n=L$, 故 $L=l=4$. 即 $\lim_{n\to\infty}c_n=4$.

2. 取 $M=\max\left\{(2021)^{\frac{1}{2021}},a_1,a_2,\cdots,a_{2020}\right\}$, 显然 $a_n>0$ 且 $a_1,a_2,\cdots,a_{2020}\leq M$. 假设 $a_k\leq M,k=1,2,\cdots,n$ 则由条件可得

$$a_{n+1}=\sqrt[2022]{a_{n-2020}+a_{n-2019}+\cdots+a_n}\leq\sqrt[2022]{M+M+\cdots+M}=\sqrt[2022]{2021M}\leq M.$$

由数学归纳法, 可知 $0<a_n\leq M,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 即数列 a_n 有界. 因此可设 $A=\varlimsup_{n\to\infty}a_n<\infty,a=\varliminf_{n\to\infty}a_n<\infty$. 由条件可得

$$a_{n+2021}=\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020}}.$$

上式两边同时对 $n\to\infty$ 取上下极限得到

$$A=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+2021}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020}}=\sqrt[2022]{\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020})}$$
$$\leqslant\sqrt[2022]{\varlimsup_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+1}+\cdots+\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+2020}}=\sqrt[2022]{A+A+\cdots+A}\Rightarrow A\leqslant(2021)^{\frac{1}{2021}},$$

$$a=\varliminf_{n\to\infty}a_{n+2021}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020}}=\sqrt[2022]{\varliminf_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020})}$$
$$\geqslant\sqrt[2022]{\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varliminf_{n\to\infty}a_{n+1}+\cdots+\varliminf_{n\to\infty}a_{n+2020}}=\sqrt[2022]{a+a+\cdots+a}\Rightarrow a\geqslant(2021)^{\frac{1}{2021}}.$$

又 $a=\varliminf_{n\to\infty}a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_n=A$, 故 $A=a=(2021)^{\frac{1}{2021}}$. 即 $\lim_{n\to\infty}a_n=(2021)^{\frac{1}{2021}}$.

□

例题 3.75 类递减模型

1. 设 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n},a_1,a_2>0,n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.
2. 设 $x_1=a>0,x_2=b>0,x_{n+2}=3+\frac{1}{x_{n+1}^2}+\frac{1}{x_n^2},n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

笔记 此类问题一定要记住, 先定界. 这里我们提供两种方法:

第一题我们使用上下极限, 再隔项抽子列的方法.(这里就算我们解不出不动点也能用这个方法证明极限存在.)

第二题我们使用构造二阶差分的线性递推不等式的方法. (这里也可以设出不动点 x_0, 由条件可知,$x_0=3+\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0^2}$, 解出不动点. 然后两边减去不动点, 类似的去构造一个二阶线性递推数列, 然后待定系数放缩一下说明收敛.)

这类题如果不记住做题时会难以想到. 与类递增模型一样, 一开始要定界.

注 第二题的极限是一个无理数, 特征方程比较难解, 因此我们只证明极限的存在性.

证明

1. 取 $a=\min\left\{a_1,a_2,\frac{2}{a_1},\frac{2}{a_2}\right\}>0$, 则有 $0<a\leq a_1,a_2\leq\frac{2}{a}$ 成立. 假设 $0<a\leq a_n\leq\frac{2}{a}$, 则由条件可得

$$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}.$$

由数学归纳法, 可知 $0<a\leq a_n\leq\frac{2}{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$. 即数列 a_n 有界. 于是可设 $A=\varlimsup_{n\to\infty}a_n<\infty,B=\varliminf_{n\to\infty}a_n<\infty$. 由致密性定理, 可知存在一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1<\infty,\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=l_2<\infty,\lim_{k\to\infty}a_{n_k-1}=l_3<\infty$. 并且根据上下极限的定义, 可知 $B\leq l_1,l_2,l_3\leq A$. 对等式 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}$ 两边同时关于 $n\to+\infty$ 取上下极限得到

$$A=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+2}=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} \Rightarrow AB \leqslant 2.$$

$$B = \varliminf_{n\to\infty} a_{n+2} = \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}} + \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$$
$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} \Rightarrow AB \geqslant 2.$$

故 $AB = 2$. 因为 $\{a_{n_k}\}$ 是数列 a_n 的一个子列, 所以 $\{a_{n_k}\}$ 也满足 $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}, \forall k \in \mathbb{N}_+$. 并且子列 $\{a_{n_k-1}\}, \{a_{n_k}\}, \{a_{n_k+1}\}, \{a_{n_k+2}\}$ 的极限都存在, 于是对 $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}$ 等式两边同时关于 $k \to +\infty$ 取极限, 再结合 $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$ 得到

$$A = \lim_{k\to\infty} a_{n_k+2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k+1}} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}}$$
$$= \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \leqslant \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} = A \Rightarrow l_1 = l_2 = B.$$

同理再对 $a_{n_k+1} = \frac{1}{a_{n_k}} + \frac{1}{a_{n_k-1}}$ 等式两边同时关于 $k \to +\infty$ 取极限, 再结合 $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$ 得到

$$B = l_1 = \lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k-1}}$$
$$= \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \geqslant \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = B \Rightarrow l_2 = l_3 = A.$$

故 $A = B = l_1 = l_2 = l_3$, 又由于 $AB = 2$, 因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = A = B = \sqrt{2}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

2. 根据递推条件显然,$x_n \geqslant 3, \forall n \geqslant 3$. 从而 $x_5 = 3 + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_3^2} \leqslant 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4$. 假设 $x_n \leqslant 4, \forall n \geqslant 5$, 则

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \leqslant 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 4.$$

由数学归纳法可知 $x_n \in [3,4], \forall n \geqslant 5$. 于是

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right| + \left|\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}\right| = \frac{|x_n^2 - x_{n+1}^2|}{x_{n+1}^2 x_n^2} + \frac{|x_{n-1}^2 - x_n^2|}{x_n^2 x_{n-1}^2}$$
$$= \frac{x_n + x_{n+1}}{x_{n+1}^2 x_n^2}|x_{n+1} - x_n| + \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n^2 x_{n-1}^2}|x_n - x_{n-1}|$$
$$= \frac{1}{x_{n+1}x_n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}\right)|x_{n+1} - x_n| + \frac{1}{x_n x_{n-1}}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)|x_n - x_{n-1}|$$
$$\leqslant \frac{2}{27}|x_{n+1} - x_n| + \frac{2}{27}|x_n - x_{n-1}|, \forall n \geqslant 6.$$

记 $q = \frac{1}{2} \in (0,1), \lambda = \frac{1}{3}$,$u_n = |x_n - x_{n-1}|$, 则由上式可得

$$u_{n+2} \leqslant \frac{2}{27}u_{n+1} + \frac{2}{27}u_n \leqslant (q-\lambda)u_{n+1} + q\lambda u_n, \forall n \geqslant 6.$$
$$\Leftrightarrow u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leqslant q(u_{n+1} + \lambda u_n), \forall n \geqslant 6.$$

从而对 $\forall n \geqslant 10$(n 大于 7 就行), 我们有

$$u_n \leqslant u_n + \lambda u_{n-1} \leqslant q(u_{n-1} + \lambda u_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant q^{n-7}(u_7 + \lambda u_6).$$

于是对 $\forall n \geqslant 10$, 我们有

$$x_n \leqslant \sum_{k=10}^{n}|x_{k+1} - x_k| + x_6 = \sum_{k=10}^{n}u_k + x_6 \leqslant (u_7 + \lambda u_6)\sum_{k=10}^{n}q^{k-7} + x_6.$$

令 $n \to \infty$, 则由上式右边收敛可知,x_n 也收敛.

□

注

1. (1) 取 $a=\min\left\{a_1,a_2,\frac{2}{a_1},\frac{2}{a_2}\right\}$ 的原因: 为了证明数列 a_n 有界, 我们需要先定界, 然后再利用数学归纳法证得数列 a_n 有界. 显然 a_n 有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列 a_n 的上下界, 我们可以先假设 b 为数列 a_n 的一个上界 (此时 b 是待定常数), 但是我们根据 $a_n>0$ 和 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}$ 只能得到 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}<+\infty$, 无法归纳出 $a_n\le b$, 故我们无法归纳出 $0<a_n<b,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 因此仅待定一个上界并不够, 下界并不能简单的取为 0, 我们还需要找到一个更接近下确界的大于零的下界, 不妨先假设这个下界为 $a>0$(此时 a 也是待定常数). 利用这个下界和递推式 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}$ 归纳出 $0<a\le a_n\le b,\forall n\in\mathbb{N}_+$(此时 a,b 都是待定常数). 于是由已知条件可得
$$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}\leqslant b\Rightarrow ab\geqslant 2,$$
$$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}\geqslant a\Rightarrow ab\leqslant 2.$$
从而 $ab=2$, 即 $b=\frac{2}{a}$. 进而 $0<a\le a_n\le\frac{2}{a}$. 又由数学归纳法的原理, 可知我们需要同时保证 $0<a\le a_1,a_2\le\frac{2}{a}$. 因此找到一个合适的 a, 使得 $0<a\le a_1,a_2\le\frac{2}{a}$ 成立就一定能归纳出 $0<a\le a_n\le\frac{2}{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, 即数列 $\{a_n\}$ 有界. 而当我们取 $a=\min\left\{a_1,a_2,\frac{2}{a_1},\frac{2}{a_2}\right\}$ 时, 有 $a_1,a_2\leqslant a$, $\frac{2}{a}\ge\frac{2}{\frac{2}{a_1}}=a_1$, $\frac{2}{a}\ge\frac{2}{\frac{2}{a_2}}=a_2$. 恰好满足这个条件.

(2) 能取到一个子列 a_{n_k}, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1<\infty,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=l_2<\infty,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k-1}=l_3<\infty$ 成立的原因: 由 $A=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$ 和上极限的定义 (上极限就是最大的子列极限), 可知存在一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A$. 因为数列 $\{a_{n_k+1}\}$ 有界 (因为数列 $\{a_n\}$ 有界), 所以由致密性定理可知 $\{a_{n_k+1}\}$ 一定存在一个收敛的子列 $\{a_{n_{k_j}+1}\}$, 并记 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_{k_j}+1}=l_1<\infty$. 又因为 $\{a_{n_{k_j}+2}\}$ 是 $\{a_{n_k+2}\}$ 的子列, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_{k_j}+2}=A$. 由于 $\{a_{n_{k_j}}\}$ 仍是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 因此不妨将 $\{a_{n_{k_j}}\}$ 记作 $\{a_{n_k}\}$, 则此时有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1<\infty$. 同理由于数列 $\{a_{n_k}\}$ 有界, 所以由致密性定理可知 $\{a_{n_k}\}$ 存在一个收敛的子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 并记 $\lim\limits_{l\to\infty}a_{n_{k_l}}=l_2$. 又因为 $\{a_{n_{k_l}+2}\}$ 是 $\{a_{n_k+2}\}$ 的子列,$\{a_{n_{k_l}+1}\}$ 是 $\{a_{n_k+1}\}$ 的子列, 所以 $\lim\limits_{l\to\infty}a_{n_{k_l}+2}=A,\lim\limits_{l\to\infty}a_{n_{k_l}+1}=l_1$. 由于 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 仍是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 因此不妨将 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 记作 $\{a_{n_k}\}$, 则此时有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1<\infty,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=l_2<\infty$. 再同理由于数列 $\{a_{n_k}\}$ 有界, 所以由致密性定理可知 $\{a_{n_k}\}$ 存在一个收敛的子列 $\{a_{n_{k_s}}\}$, 并记 $\lim\limits_{s\to\infty}a_{n_{k_s}}=l_3$. 又因为 $\{a_{n_{k_s}+2}\}$ 是 $\{a_{n_k+2}\}$ 的子列,$\{a_{n_{k_s}+1}\}$ 是 $\{a_{n_k+1}\}$ 的子列,$\{a_{n_{k_s}}\}$ 是 $\{a_{n_k}\}$ 的子列, 所以 $\lim\limits_{s\to\infty}a_{n_{k_s}+2}=A,\lim\limits_{s\to\infty}a_{n_{k_s}+1}=l_1,\lim\limits_{s\to\infty}a_{n_{k_s}}=l_2$. 由于 $\{a_{n_{k_s}}\}$ 仍是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 因此不妨将 $\{a_{n_{k_s}}\}$ 记作 $\{a_{n_k}\}$, 则此时有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1<\infty,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=l_2<\infty,\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k-1}=l_3<\infty$.

2. 记 $q=\frac{1}{2}\in(0,1),\lambda=\frac{1}{3}$ 的原因: 记 $u_n=|x_n-x_{n-1}|$, 则 $u_{n+2}\le\frac{2}{27}(u_{n+1}+u_n)$, 类比二阶线性递推数列方法, 希望找到 $\lambda>0,q\in(0,1)$ 使得 $u_{n+2}+\lambda u_{n+1}\le q(u_{n+1}+\lambda u_n)$ 恒成立, 这样一直递推下去就有 $u_{n+2}+\lambda u_{n+1}\le Cq^n,C>0$, 说明 $|x_{n+1}-x_n|$ 是以等比数列速度趋于零的, 根据级数收敛的比较判别法显然 x_n 收敛, 结论成立.
而对比已知不等式 $u_{n+2}\le\frac{2}{27}(u_{n+1}+u_n)$ 和目标不等式 $u_{n+2}\le(q-\lambda)u_{n+1}+q\lambda u_n$ 可知, 只要满足 $u_{n+2}\le\frac{2}{27}(u_{n+1}+u_n)\le(q-\lambda)u_{n+1}+q\lambda u_n,q\in(0,1),\lambda>0$ 即可达到目的. 即只需取合适的 q,λ 使其满足 $q-\lambda\ge\frac{2}{27},q\lambda\ge\frac{2}{27},q\in(0,1),\lambda>0$ 即可. 这明显有很多可以的取法, 例如 $q=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{3}$, 因此得证.

例题 3.76 设 $a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_k>0,k\ge 2,a_n=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{b_i}{a_{n-i}},n\ge k+1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}$.

笔记 本题是例题 3.75 第一题的推广. 核心想法就是**反复抽收敛子列**.

证明 先证明数列是有界的, 为此取充分大的正数 M 使得

$$a_n \in \left[\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{M}, M\right], n=1,2,\cdots,k$$

然后归纳证明对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有上述不等式成立, 若 n 时成立, 则 $n+1$ 时

$$a_{n+1}=\frac{b_1}{a_n}+\frac{b_2}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n-k+1}}\geq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{M}$$

$$a_{n+1}=\frac{b_1}{a_n}+\frac{b_2}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n-k+1}}\leq\frac{b_1}{\frac{b_1+\cdots+b_k}{M}}+\frac{b_2}{\frac{b_1+\cdots+b_k}{M}}+\cdots+\frac{b_k}{\frac{b_1+\cdots+b_k}{M}}=M$$

因此 a_n 是有界数列, 设其上极限为 L, 下极限为 l, 则 $L\geq l$. 在递推式两边取上下极限可知

$$L=\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_{n-1}}+\frac{b_2}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n-k}}\right)\leq\varlimsup_{n\to\infty}\frac{b_1}{a_{n-1}}+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{b_2}{a_{n-2}}+\cdots+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{b_k}{a_{n-k}}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{l}$$

$$l=\varliminf_{n\to\infty}a_n=\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_{n-1}}+\frac{b_2}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n-k}}\right)\geq\varliminf_{n\to\infty}\frac{b_1}{a_{n-1}}+\varliminf_{n\to\infty}\frac{b_2}{a_{n-2}}+\cdots+\varliminf_{n\to\infty}\frac{b_k}{a_{n-k}}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{L}$$

所以 $Ll=b_1+b_2+\cdots+b_k$, 只要证明 $L=l$ 便可得到需要的结论.

根据上极限定义, 可以取子列 $a_{n_i}\to L$, 不妨要求 $n_{i+1}-n_i>2k+2$, 然后关注各个 a_{n_i} 的上一项 a_{n_i-1} 构成的数列, 这也是一个有界数列, 所以一定存在收敛子列, 我们可以将其记为 $a_{n_{i_j}-1}, j=1,2,\cdots$, 那么对于这个子列的每一项, 它后面的那一项 $a_{n_{i_j}}$ 构成的数列, 是之前取的数列 $a_{n_i}\to L$ 的子列, 自然成立 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_{i_j}-1}=l_1\in[l,L]$, $\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_{i_j}}=L$, 为了方便起见, 我们将这两个数列分别记为 a_{n_i-1}, a_{n_i}.(n_{i_j} 的指标集是可列集, 按对角线或正方形法则排序)

进一步考虑每个 a_{n_i-1} 的上一项构成的数列, 作为有界数列一定存在收敛子列, 然后取出这个收敛子列, 则对于这个子列, 它后面一项构成的数列趋于 l_1, 它后面第二项构成的数列趋于 L.

以此类推反复操作有限次 (可以保证每次取的子列 $n_{i+1}-n_i\geq 2$, 从而反复取 $k+1$ 次后就有 $n_{i+1}-n_i\geq 2(k+1)$, 但本题用不上这个条件), 最终我们可以得到一列正整数 n_i 单调递增趋于无穷, 满足

$$a_{n_i}\to L, a_{n_i-1}\to l_1, a_{n_i-2}\to l_2,\cdots,a_{n_i-k}\to l_k, a_{n_i-k-1}\to l_{k+1}, n_{i+1}-n_i\geq 2k+2, l_1,\cdots,l_{k+1}\in[l,L]$$

代入到条件递推式中, 取极限有

$$L=\lim_{i\to\infty}a_{n_i}=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_{n_i-1}}+\frac{b_2}{a_{n_i-2}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n_i-k}}\right)=\frac{b_1}{l_1}+\frac{b_2}{l_2}+\cdots+\frac{b_k}{l_k}\leq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{l}=L$$

$$\Rightarrow l_1=l_2=\cdots=l_k=l$$

$$l_1=\lim_{i\to\infty}a_{n_i-1}=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_{n_i-2}}+\frac{b_2}{a_{n_i-3}}+\cdots+\frac{b_k}{a_{n_i-k-1}}\right)=\frac{b_1}{l_2}+\frac{b_2}{l_3}+\cdots+\frac{b_k}{l_{k+1}}\geq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{L}=l_1$$

$$\Rightarrow l_2=l_3=\cdots=l_{k+1}=L$$

于是 $L=l_1=l_2=l$(这是公共的一个值, 注意 $k\geq 2$), 结论得证. 再对递推条件两边取极限得到极限值. □

3.6.5 压缩映像

我们来看一种重要的处理模型, 压缩映像方法, 它是我们以后解决基础题的重要方法. 其思想内核有两种, 一种是找到不动点 x_0, 然后得到某个 $L\in(0,1)$, 使得

$$|x_n-x_0|\leq L|x_{n-1}-x_0|\leq\cdots\leq L^{n-1}|x_1-x_0|.$$

还有一种是得到某个 $L\in(0,1)$, 使得

$$|x_n-x_{n-1}|\leq L|x_{n-1}-x_{n-2}|\leq\cdots\leq L^{n-2}|x_2-x_1|.$$

当数列由递推确定时, 我们有

$$|x_n-x_0|=|f(x_{n-1})-f(x_0)|, |x_n-x_{n-1}|=|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|,$$

因此往往可适用中值定理或者直接放缩法来得到渴望的 $L\in(0,1)$, 特别强调 $L=1$ 是不对的.

笔记 常规的递减递推数列求极限问题我们一般使用压缩映像证明. 压缩映像的书写过程往往比用递推函数的二

次复合和数学归纳法的书写要简便的多.

注 **当递推函数的不动点/极限点处导数大于等于 1 的时候, 就不可能压缩映射.**

例题 3.77

1. 设 $x_1 > -1, x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}, n = 1, 2, \cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. 求数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \cdots$ 极限.

解

1. 解法一 (递减递推归纳法): 不妨设 $x_1 > 0$(因为 $x_2 = \dfrac{1}{1+x_1} > 0$), 归纳可知 $x_n > 0$. 由于原递推函数是递减函数, 因此考虑递推函数的二次复合 $x_{n+2} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}} = \dfrac{1+x_n}{2+_n}$, 这个递推函数一定是单调递增的. 进而考虑
$$\frac{1+x}{2+x} - x = \frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)}{2+x}.$$
于是当 $x_1 \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, 有 $x_3 - x_1 = \dfrac{1+x_1}{2+x_1} - x_1 \leqslant 0$, 即 $x_3 \leqslant x_1$. 从而由递增递推结论可知,$\{x_{2n-1}\}$ 单调递减且 $x_{2n-1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 此时 $x_2 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$(由 $x = \dfrac{1}{1+x}$ 以及 $x_n > 0$ 可以解得不动点 $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 又因为原数列是递减递推, 所以 x_n 与 x_0 大小关系交错. 而 $x_1 \geqslant \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故 $x_2 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$). 于是 $x_4 - x_2 = \dfrac{1+x_2}{2+x_2} - x_2 > 0$, 即 $x_4 > x_2$. 从而由递增递推结论可知,$\{x_{2n}\}$ 单调递增且 $x_{2n} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$.
因此由单调有界定理可知,$\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = b > 0$. 又由 $x_{2n} = \dfrac{1}{1+x_{2n}}, x_{2n-1} = \dfrac{1}{1+x_{2n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 再令 $n \to \infty$, 可得 $a = \dfrac{1}{1+a}, b = \dfrac{1}{1+b}$, 进而解得 $a = b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 同理, 当 $x_1 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, 也有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
解法二 (压缩映像):不妨设 $x_1 > 0$(用 $x_2 = \dfrac{1}{1+x_1} > 0$ 代替 x_1), 归纳可知 $x_n > 0$. 设 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则
$$|x_{n+1} - x| = \left|\frac{1}{1+x_n} - x\right| = \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x}\right| = \frac{|x_n - x|}{(1+x_n)(1+x)} \leqslant \frac{1}{1+x}|x_n - x|.$$
从而
$$|x_{n+1} - x| \leqslant \frac{1}{1+x}|x_n - x| \leqslant \frac{1}{(1+x)^2}|x_{n-1} - x| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{(1+x)^n}|x_1 - x|.$$
于是令 $n \to \infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - x| = 0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
2. 由条件可知,$x_{n+2} = \sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$(由此可解得 $x = 2$ 为不动点). 于是
$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 2| &= |\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}} - 2| = \frac{|3-\sqrt{7+x_n}|}{\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+2} \\ &= \frac{|2-x_n|}{(\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+2)(3+\sqrt{7+x_n})} \leqslant \frac{1}{6}|x_n - 2|. \end{aligned}$$
从而对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都有
$$|x_{2n} - 2| \leqslant \frac{1}{6}|x_{2n-2} - 2| \leqslant \frac{1}{6^2}|x_{2n-4} - 2| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{6^{n-1}}|x_2 - 2|;$$
$$|x_{2n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{6}|x_{2n-1} - 2| \leqslant \frac{1}{6^2}|x_{2n-3} - 2| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{6^n}|x_1 - 2|.$$
上式两边同时令 $n \to \infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{2n} - 2| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_{2n+1} - 2| = 0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 2$.

□

例题 3.78 设数列 $x_1 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \cos x_n, n \in \mathbb{N}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 令 $g(x) = x - \cos x$, 则 $g'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0$, 且 $g'(x)$ 不恒等于 0. 又 $g(0) = -1 < 0, g(1) = 1 - \cos 1 > 0$, 因此由零

点存在定理可知,g 存在唯一零点 $x_0\in(0,1)$. 不妨设 $x_1\in[-1,1]$(用 x_2 代替 x_1), 则 $x_n\in[-1,1]$. 再令 $f(x)=\cos x$, 则 $f'(x)=-\sin x$. 于是记 $C\triangleq\max\limits_{x\in[-1,1]}|f'(x)|\in(0,1)$.

故由 Lagrange 中值定理, 可得存在 $\theta_n\in(\min\{x_n,x_0\},\max\{x_n,x_0\})$, 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$|x_{n+1}-x_0|=|f(x_n)-f(x_0)|=|f'(\theta_n)||x_n-x_0|\leqslant C|x_n-x_0|.$$

进而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$|x_{n+1}-x_0|\leqslant C|x_n-x_0|\leqslant C^2|x_{n-1}-x_0|\leqslant\cdots\leqslant C^n|x_1-x_0|.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 再结合 $C\in(0,1)$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_0|=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. □

命题 3.16 (加强的压缩映像)

设可微函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足 $|f'(x)|<1,\forall x\in[a,b]$. 证明: 对

$$x_1\in[a,b],x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N},$$

必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注 注意到 f' 未必是连续函数, 所以 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ 未必可以严格小于 1.

笔记 实际上, 用压缩映像证明 $\{x_n\}$ 的极限是 x_0, 也同时蕴含了 x_0 就是这个递推数列的唯一不动点 (反证易得).

证明 令 $g(x)=x-f(x)$, 则 $g(a)=a-f(a)\leqslant 0,g(b)=b-f(b)\geqslant 0$. 由零点存在定理可知, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $x_0=f(x_0)$. 令 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$, 则由导数定义可知 $h\in C[a,b]$. 又由 $|f'(x)|<1,\forall x\in[a,b]$, 可知 $|h(x_0)|<1$. 对 $\forall x\neq x_0$, 由 Lagrange 中值定理可知

$$|h(x)|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(\theta_x)|<1,\quad \theta_x\in(\min\{x,x_0\},\max\{x,x_0\})$$

故 $|h(x)|<1,\forall x\in[a,b]$. 于是记 $L\triangleq\max\limits_{x\in[a,b]}|h(x)|\in(0,1)$. 因此再由 *Lagrange* 中值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$|x_{n+1}-x_0|=|f(x_n)-f(x_0)|=|f'(\xi_n)||x_n-x_0|,\quad \xi_n\in(\min\{x_n,x_0\},\max\{x_n,x_0\})$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$|f'(\xi_n)|=\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right|=|h(x_n)|\leqslant L$$

进而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$|x_{n+1}-x_0|=|f'(\xi_n)||x_n-x_0|\leqslant L|x_n-x_0|\leqslant L^2|x_{n-1}-x_0|\leqslant\cdots\leqslant L^n|x_1-x_0|$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_0|=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. □

命题 3.17 (反向压缩映像)

设 $x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in\mathbb{R},x_n\neq a,\forall n\in\mathbb{N},$$

证明: 若 f 在 $x=a$ 可导, 则 $|f'(a)|\leq 1$.

证明 (反证法) 假设 $|f'(a)|>1$, 由导数定义及极限保号性可知, 存在 $r>1,\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\geqslant r>1,\quad \forall x\in[a-\delta,a+\delta].$$

即

$$|f(x)-f(a)|\geqslant r|x-a|,\quad \forall x\in[a-\delta,a+\delta].$$

因为 f 在 $x=a$ 可导以及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 所以由 *Heine* 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$. 又 $x_{n+1}=f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}_+$, 从

而等式两边同时令 $n\to\infty$, 可得 $a=f(a)$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$, 因此存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N$, 有

$$|x_{n+1}-a|=|f(x_n)-f(a)|\geqslant r|x_n-a|.$$

故对 $\forall n\geqslant N$, 有

$$|x_{n+1}-a|\geqslant r|x_n-a|\geqslant r^2|x_{n-1}-a|\geqslant\cdots\geqslant r^n|x_1-x_0|.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-a|=+\infty$, 矛盾. □

3.6.6 利用不等放缩求递推数列极限

例题 3.79 对 $x\geq 0$, 定义 $y_n(x)=\sqrt[n]{[x[x\cdots[x]\cdots]]}$, 这里一共 n 层取整, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$.

笔记 这里求极限运用了递推的想法找关系, 如果直接对取整函数用不等式放缩, 只能得到 $x-1<y_n(x)\leq x$, 这没什么用处, 因为放缩太粗糙了.

实际上, 由 Stolz 定理可知, 数列 $\frac{1}{n}$ 次幂的极限与其相邻两项项除的极限近似相等.

解 显然 $x\in[0,1)$ 时 $y_n(x)=0$,$x\in[1,2)$ 时 $y_n(x)=1$, 这两个式子对任意 n 都成立, 下面来看 $x\geq 2$ 时的极限.

令 $u_n(x)=(y_n(x))^n=\overbrace{[x[\cdots[x]\cdots]]}^{n\text{次复合}}\geqslant 0$, 由于单调递增函数的复合仍是单调递增函数, 且 $[x]$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 故 $u_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 从而由 $u_n(x)$ 的单调性可得

$$u_n(x)\geqslant u_n(2)=\overbrace{[2[\cdots[2]\cdots]]}^{n\text{次复合}}=2^n\to\infty,n\to\infty.$$

再结合 $[x]$ 的基本不等式:$x-1<[x]\leqslant x$ 可知

$$xu_{n-1}(x)-1\leq u_n(x)=[xu_{n-1}(x)]\leq xu_{n-1}(x),\forall x\geq 2.$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{u_{n-1}(x)}\leq\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\leq x\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}=x,\forall x\geq 2.$$

再根据 Stolz 公式有

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n(x)}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\ln u_n(x)-\ln u_{n-1}(x)]}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}=x.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x\in[1,2)\\ x, & x\geq 2\end{cases}$$

□

3.6.7 可求通项和强求通项

3.6.7.1 三角换元求通项

先来看能够直接构造出数列通项的例子. 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数或双曲三角函数的形式, 再利用三角函数或双曲三角函数的性质递推归纳.

例题 3.80 设 $a_1\in(0,1)$,$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$,$n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.

笔记 本题是经典的例子, 注意此类问题如果不能求出通项就无法求出具体值, 本题便是一个能求出通项从而算出极限值的经典例子.

注 这类问题只能靠记忆积累.

解 利用

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},\theta\in\mathbb{R},$$

因为 $a_1\in(0,1)$, 所以一定存在 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使得 $a_1=\cos\theta$. 则 $\theta=\arccos a_1,\sin\theta=\sqrt{1-a_1^2}$. 并且由 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$,$n=1,2,\cdots$ 可得

$$a_2=\cos\frac{\theta}{2},a_3=\cos\frac{\theta}{2^2},\cdots,a_n=\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\theta}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\theta}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}\prod_{k=0}^{n-2}\cos\frac{\theta}{2^k}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}=\frac{\sin 2\theta}{2\theta}=\frac{\sin(2\arccos a_1)}{2\arccos a_1}=\frac{a_1\sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}.$$

□

例题 3.81 设 $x_1=\sqrt{5}$,$x_{n+1}=x_n^2-2$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

笔记 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数/双曲三角函数的形式, 再利用三角函数/双曲三角函数的性质递推归纳.

解 注意到 $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无解, 因此推测类似的双曲三角函数可以做到. 设 $x_1=2\cosh\theta,\theta\in(0,+\infty)$. 利用

$$\cosh x=2\cosh^2\frac{x}{2}-1,\forall x\in\mathbb{R},$$

我们归纳可证

$$x_n=2\cosh(2^{n-1}\theta),n=1,2,\cdots.$$

于是利用 $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}\cosh(2^k\theta)}{2\cosh(2^n\theta)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sinh\theta\prod\limits_{k=0}^{n-1}\cosh(2^k\theta)}{2\sinh\theta\cosh(2^n\theta)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\sinh(2\theta)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cosh(2^k\theta)}{2\sinh\theta\cosh(2^n\theta)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\sinh(2^2\theta)\prod\limits_{k=2}^{n-1}\cosh(2^k\theta)}{2\sinh\theta\cosh(2^n\theta)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh 2^n\theta}{2\sinh\theta\cosh(2^n\theta)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tanh 2^n\theta}{2\sinh\theta}=\frac{1}{2\sinh\theta}=1,$$

这里倒数第二个等号来自 $\lim\limits_{x\to+\infty}\tanh x=1$. □

例题 3.82 设 $a_1=3,a_n=2a_{n-1}^2-1,n=2,3,\cdots$, 则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^na_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$

注 因为双曲三角函数 $\cosh x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $(1,+\infty)$, 并且 $\cosh x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 所以一定存在唯一的 $\theta\in(0,+\infty)$, 使得 $a_1=\cosh\theta=3$.

证明 设 $a_1=\cosh\theta=3,\theta\in(0,+\infty)$. 则利用 $\cosh 2\theta=2\cosh^2\theta-1$, 再结合条件归纳可得

$$a_n=2a_{n-1}^2-1=\cosh 2^{n-1}\theta,\quad n=2,3,\cdots.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^na_1a_2\cdots a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh 2^{n-1}\theta}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cosh 2^{k-1}\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh\theta\cosh 2^{n-1}\theta}{2^n\sinh\theta\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cosh 2^{k-1}\theta}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh\theta\cosh 2^{n-1}\theta}{2^{n-1}\sinh 2\theta\prod\limits_{k=2}^{n-1}\cosh 2^{k-1}\theta}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh\theta\cosh 2^{n-1}\theta}{2\sinh 2^{n-1}\theta}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh\theta}{2\tanh 2^{n-1}\theta}\xlongequal{\lim\limits_{n\to\infty}\tanh 2^{n-1}\theta=1}\frac{\sinh\theta}{2}=\frac{\sqrt{\cosh^2\theta-1}}{2}=\sqrt{2}.$$

□

例题 3.83 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$, 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$.

笔记 关于求和的问题, 要注意求和的通项能否凑成相邻两项相减的形式, 从而就能直接求和消去中间项, 进而将求和号去掉.

注 因为双曲三角函数 $2\cosh x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $(1,+\infty)$, 并且 $2\cosh x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 所以一定存在唯一的 $\theta \in (0,+\infty)$, 使得 $y_0 = 2\cosh\theta \geq 2$.

证明 设 $y_0 = 2\cosh\theta, \theta \in (0,+\infty)$, 则利用 $\cosh 2\theta = 2\cosh^2\theta - 1$, 再结合条件归纳可得

$$
\begin{aligned}
&y_1 = y_0^2 - 2 = 4\cosh^2\theta - 2 = 2(2\cosh^2\theta - 1) = 2\cosh 2\theta,\\
&y_2 = y_1^2 - 2 = 4\cosh^2 2\theta - 2 = 2(2\cosh^2 2\theta - 1) = 2\cosh 2^2\theta,\\
&\quad \cdots\cdots\\
&y_n = y_{n-1}^2 - 2 = 4\cosh^2 2^{n-1}\theta - 2 = 2(2\cosh^2 2^{n-1}\theta - 1) = 2\cosh 2^n\theta,\\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} 2^{n+1}\cosh 2^k\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\theta}{2^{n+1}\sinh\theta \prod\limits_{k=0}^{n}\cosh 2^k\theta}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\theta}{2^n \sinh 2\theta \prod\limits_{k=1}^{n}\cosh 2^k\theta} = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\theta}{\sinh 2^{n+1}\theta}\\
&= 2\sinh\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{2^{n+1}\theta} - e^{-2^{n+1}\theta}} = 2\sinh\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2^{n+1}\theta}}{e^{2^{n+2}\theta} - 1}\\
&= 2\sinh\theta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2^{n+1}\theta} - 1} - \frac{1}{e^{2^{n+2}\theta} - 1} \right) = \frac{2\sinh\theta}{e^{2\theta} - 1}\\
&= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right)} = e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta\\
&= \frac{y_0}{2} - \sqrt{\cosh^2\theta - 1} = \frac{y_0}{2} - \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - 1}.
\end{aligned}
$$

□

例题 3.84

1. 设 $x_1 = \sqrt{5}, x_{n+1} = x_n^2 - 2$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

2. 设 $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1, n = 2, 3, \cdots$, 则计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

3. 设 $y_0 > 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$, 计算

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{y_n}\right).$$

解

1.
2.
3.

□

3.6.7.2 凑出可求通项的递推数列

利用比值换元等方法, 可以将原本不能直接求通项的递推数列转化成可三角换元或用高中方法求通项的递推数列. 求出通项后, 后续问题就很简单了.

例题 3.85 设 $a>b>0$, 定义 $a_0=a,b_0=b,a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

注 这是算数-调和平均数数列, 与算术-几何平均不同, 这个通项以及极限值都可以求出来.

笔记 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$ 是一个经典的可求通项的递推数列 (高中学过), 处理方法必须掌握. 即先求解其特征方程, 然后用 x_{n+1} 分别减去两个特征根再作商, 再将递推式代入这个分式, 反复递推得到一个等比数列, 进而得到 x_n 的通项. 具体步骤见下述证明.

证明 由条件可得

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\frac{a_nb_n}{a_{n+1}}\Rightarrow a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n=\cdots=a_0b_0=ab.$$

因此 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{ab}{a_n}\right)$. 令 $a_n=\sqrt{ab}x_n,x_0=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1$, 则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right),\forall n\in\mathbb{N}_+$. 从而

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=\frac{\frac{x_{n+1}^2-1}{2x_{n+1}}}{\frac{x_{n+1}^2+1}{2x_{n+1}}}=\frac{(x_n-1)^2}{(x_n+1)^2}=\cdots=\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)^{2^{n+1}}\Rightarrow\frac{x_n-1}{x_n+1}=C^{2^n},C=\frac{x_0-1}{x_0+1}\in(0,1).$$

于是 $x_n=\dfrac{1+C^{2^n}}{1-C^{2^n}}$. 再由 $a_n=\sqrt{ab}x_n$ 可得

$$a_n=\sqrt{ab}\frac{1+C^{2^n}}{1-C^{2^n}}\to\sqrt{ab},n\to\infty.$$
$$b_n=\frac{ab}{a_n}\to\sqrt{ab},n\to\infty.$$

□

例题 3.86 设 $a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n},b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$, 证明:$a_n,b_n$ 收敛到同一极限, 并且在 $a_1=2\sqrt{3},b_1=3$ 时, 上述极限值为 π.

注 这是几何 - 调和平均数列, 通项也能求出来, 自然求极限就没有任何问题.

笔记 (1) 因为 a_n,b_n 的递推式都是齐次式, 所以我们尝试比值换元, 将其转化为可求通项的递推数列. 实际上, 我们利用的比值换元是 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$, 但是为了避免讨论数列 a_n 能否取 0 的情况, 我们就取 $b_n=a_nc_n$.

(2) 三角换元求通项的一些问题: 由递推条件易证 $a_n,b_n\geq 0$, 其实当 a_n,b_n 中出现为零的项时, 由递推条件易知 a_n,b_n 后面的所有项都为零, 此时结论平凡. 因此我们只需要考虑 $a_n,b_n>0$ 的情况. 此时直接设 $\cos x_1=c_1=\dfrac{b_1}{a_1}$ 似乎不太严谨. 因为虽然 $c_1>0$, 但是 c_1 不一定在 $(0,1)$ 内, 所以我们需要对其进行分类讨论.

当 $c_1\in(0,1)$ 时, 设 $\cos x_1=c_1=\dfrac{b_1}{a_1}$, 其中 $x_1\in(0,\dfrac{\pi}{2})$;

当 $c_1>1$ 时, 设 $\cosh x_1=c_1=\dfrac{b_1}{a_1}$, 其中 $x_1\in(0,+\infty)$.

实际上, 我们直接设 $\cos x_1=c_1=\dfrac{b_1}{a_1}$, 只要将 x_1 看作一个复数, 就可以避免分类讨论. 因为由复变函数论可知,$\cos x$ 在复数域上的性质与极限等结论与在实数域上相同, 而且由 $c_1>0$ 可知, 一定存在一个复数 x_1, 使得 $\cos x_1=c_1$. 所以这样做是严谨地.(考试的时候最好还是分类讨论书写)

证明 设 $b_n=a_nc_n$ 代入有

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\frac{2a_nc_n}{c_n+1},a_{n+1}c_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}a_nc_n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{c_n}{c_{n+1}^2}=\frac{2c_n}{c_n+1}\Rightarrow c_{n+1}=\sqrt{\frac{c_n+1}{2}}\tag{3.70}$$

设 $\cos x_1=c_1=\dfrac{b_1}{a_1}$, 其中 $x_1\in\mathbb{C}$, 则由(3.70)式归纳可得 $c_n=\cos\left(\dfrac{x_1}{2^{n-1}}\right)$. 代入回去求 a_n,b_n 有

$$c_n=\frac{b_n}{a_n}=\cos\left(\frac{x_1}{2^{n-1}}\right),b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\Rightarrow b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n=\frac{b_{n+1}b_n}{c_{n+1}}\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{\cos\left(\frac{x_1}{2^n}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_1} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x_1}{2^n}\right)} = \frac{2^n\sin\frac{x_1}{2^n}}{\sin x_1} \Rightarrow b_n = b_1\frac{2^{n-1}\sin\frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{b_1\frac{2^{n-1}\sin\frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1}}{\cos\frac{x_1}{2^{n-1}}} = 2^{n-1}\frac{b_1}{\sin x_1}\tan\frac{x_1}{2^{n-1}}, \cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

由此可见

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \frac{b_1\arccos\frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{1-\frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{a_1 b_1\arccos\frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}$$

所以收敛到同一极限对于 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$ 的情况有

$$\cos x_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = \frac{\pi}{6}, \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \pi$$

结论得证. □

例题 3.87 设 $a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, n \geq 1$, 求 a_0 的所有可能值, 使得 a_n 严格单调递增.

证明 直接裂项, 求通项即可得到

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} = \frac{a_n}{(-3)^n} + \frac{2^n}{(-3)^{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-3)^n} = \frac{2^n}{(-3)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} = \frac{a_0}{(-3)^0} - \frac{1}{3}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = a_0 - \frac{1}{3}\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{(-3)^n} = a_0 - \frac{1}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow a_n = \left(a_0-\frac{1}{5}\right)(-3)^n + \frac{1}{5}2^n.$$

由此可见 $a_0 = \dfrac{1}{5}$ 是唯一解. □

例题 3.88 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 解方程 $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, 于是

$$\frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2} = \frac{1+\frac{1}{x_n}-\lambda_1}{1+\frac{1}{x_n}-\lambda_2} = \frac{(1-\lambda_1)x_n+1}{(1-\lambda_2)x_n+1} = \frac{\lambda_2 x_n+1}{\lambda_1 x_n+1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{x_n+\frac{1}{\lambda_2}}{x_n+\frac{1}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\frac{x_1-\lambda_1}{x_1-\lambda_2} \to 0, n\to\infty.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

例题 3.89 设 $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$, 求 a_n 的通项公式.

证明 设 $a_n = 2b_n$ 则问题转化为已知 $b_{n+1} = \sqrt{\dfrac{b_n+1}{2}}$, 求 b_n 的通项公式. 由例题 3.86, 立即得到

$$a_n = 2\cos\frac{\theta_1}{2^{n-1}}, \cos\theta_1 = \frac{1}{2}a_1.$$

□

3.6.7.3 直接凑出通项

例题 3.90 设 $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n^2 + 2a_n$, 求 a_n 的通项公式.

证明

$$a_{n+1} = 2a_n^2 + 2a_n = 2\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2a_{n+1}+1 = (2a_n+1)^2 = \cdots = (2a_1+1)^{2^n}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(2a_1+1)^{2^{n-1}}-1}{2} = \frac{2^{2^{n-1}}-1}{2}.$$

□

3.6.7.4 凑裂项

凑裂项: 根据已知的递推式, 将需要求解的累乘或求和的通项凑成裂项的形式, 使得其相邻两项相乘或相加可以抵消中间项, 从而将累乘或求和号去掉.

例题 3.91 设 $a_1=1,a_n=n(a_{n-1}+1),x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 由条件可知 $a_n+1=\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$, 从而

$$x_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{a_k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k}=\frac{a_{n+1}}{a_1}\frac{1}{(n+1)!}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

再根据 $a_n=n(a_{n-1}+1)$ 可得

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}.$$

故

$$x_n=\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}=\cdots=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\to e.$$

□

例题 3.92 设 $y_0>2,y_n=y_{n-1}^2-2,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{y_n})$.

笔记 关于累乘的问题, 要注意累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式, 从而就能直接累乘消去中间项, 进而将累乘号去掉.

本题是利用已知条件和平方差公式将累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式.

证明 一方面

$$y_n+1=y_{n-1}^2-1=(y_{n-1}-1)(y_{n-1}+1)\Rightarrow y_{n-1}-1=\frac{y_n+1}{y_{n-1}+1}\Rightarrow y_n-1=\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}.$$

另外一方面

$$y_n-2=y_{n-1}^2-4=(y_{n-1}-2)(y_{n-1}+2)\Rightarrow y_n-2=(y_{n-1}-2)y_{n-2}^2\Rightarrow y_n=\sqrt{\frac{y_{n+2}-2}{y_{n+1}-2}}.$$

于是结合 $\lim\limits_{m\to\infty}y_m=+\infty$ 我们有

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)&=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{y_n-1}{y_n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}\cdot\sqrt{\frac{y_{n+1}-2}{y_{n+2}-2}}\right)=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m}\left(\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}\cdot\sqrt{\frac{y_{n+1}-2}{y_{n+2}-2}}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{y_{m+1}+1}{y_0+1}\cdot\sqrt{\frac{y_1-2}{y_{m+2}-2}}=\lim_{m\to\infty}\frac{y_{m+1}+1}{\sqrt{y_{m+1}^2-4}}\cdot\frac{\sqrt{y_0^2-4}}{y_0+1}=\frac{\sqrt{y_0^2-4}}{y_0+1}.\end{aligned}$$

□

3.6.7.5 母函数法求通项

例题 3.93 设 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1},n\geq1,a_0>0,a_1>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$.

注 本题采用单调有界只能证明极限存在, 而并不能算出来极限值:

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{a_n}{n^2}=\frac{a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}}{(n+1)^2}-\frac{a_n}{n^2}=\frac{2n^2a_{n-1}-(2n+1)(n+1)a_n}{n^2(n+1)^3}<0$$

证明 这类线性递推数列问题采用母函数方法是无敌的, 因为能求出来通项公式. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则根据条件有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}\right)x^n$$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_1 + xf'(x) + f(x) - a_0 + 2xf(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) + \frac{2x+1}{1-x}f(x) = \frac{a_1 - a_0}{1-x}, f(0) = a_0, f'(0) = a_1$$

这是一阶线性微分方程, 容易求出

$$f(x) = \frac{2x^2-6x+5}{(1-x)^3}\frac{a_1-a_0}{4} + \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}\frac{9a_0-5a_1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

然后对左边这两个函数 (先不看系数) 做泰勒展开, 关注 x^n 前面的 n^2 项系数, 就对应极限.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$$

$$\frac{2x^2-6x+5}{(1-x)^3} = (2x^2-6x+5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2})x^n$$

$$b_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow 5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2} = \frac{1}{2}n^2 + O(n)$$

由此可见第一部分对应着极限 $\frac{a_1-a_0}{8}$, 然后算第二部分

$$\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^m}{m!}x^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k}\frac{(-2)^m}{m!}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^k$$

所以每一个 x^m 项相应的系数是

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^m}{m!}\frac{(k+2-m)(k+1-m)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^m}{m!}(m-(k-1))(m-(k-2))$$

由 Stolz 公式和 e^x 的无穷级数展开式可得, 对应的极限为

$$\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{(-2)^m}{m!}(m^2-(2k-3)m+(k-1)(k-2))}{m^2} = \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^m}{m!} = \frac{1}{2e^2}$$

这是因为括号里面的 m 一次项和常数项部分, 对应的求和的极限是零, 由 stolz 公式是显然的. 所以第二部分提供了 $\frac{9a_0-5a_1}{8e^2}$, 最终所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \frac{a_1-a_0}{8} + \frac{9a_0-5a_1}{8e^2}$. □

3.6.7.6 强求通项和强行裂项

若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足下列递推条件之一:

1. $a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \cdots$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - d_n a_{n-1}) = A$.

则我们都可以考虑对 a_n 进行强行裂项和强求通项, 从而可以将 a_n 写成关于 b_n, d_n 或 A, d_n 的形式, 进而将题目条件和要求进行转化.

命题 3.18 (强求通项和强行裂项)

(1) 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推条件:

$$a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \cdots, \tag{3.71}$$

则令 $c_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \cdots$, 一定有

$$a_n = \frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \cdots.$$

(2) 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推条件:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-d_na_{n-1})=A, \tag{3.72}$$

则令 $c_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k},n=0,1,\cdots$, 再令 $b_0=1,b_n=a_n-\frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n},n=1,2,\cdots$, 一定有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=A,$$

$$a_n=\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}c_kb_k+a_0,n=0,1,\cdots.$$

注 此时**只能都对 a_n 进行强行裂项和强求通项**,b_n 和 d_n 都无法通过这种方法强行裂项和强求通项!

笔记 也可以通过观察原数列 a_n 的递推条件直接得到需要构造的数列, 从而将 a_n 强行裂项和强求通项. 具体可见例题 3.94 解法一. (1) 的具体应用可见例题 3.95 笔记; (2) 的具体应用可见例题 3.94 笔记.

证明 (强行裂项和强求通项的具体步骤)

(1) 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=0}^{\infty},\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推条件(3.71)式, 则令 $c_0=1$, 待定 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, 由递推条件(3.71)式可得

$$c_na_n=c_nd_na_{n-1}+c_nb_n,n=1,2,\cdots. \tag{3.73}$$

我们希望 $c_nd_n=c_{n-1},n=2,3,\cdots$, 即 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{d_n},n=2,3,\cdots$. 从而 $c_n=c_0\prod_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_{k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k},n=1,2,\cdots$, 且该式对 $n=0$ 也成立. 因此, 令 $c_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k},n=0,1,\cdots$, 则由(3.73)式可知

$$c_na_n=c_nd_na_{n-1}+c_nb_n\Rightarrow c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}=c_nb_n,n=1,2,\cdots.$$

于是

$$a_n=\frac{1}{c_n}(c_na_n-c_0a_0+c_0a_0)=\frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_ka_k-c_{k-1}a_{k-1})+c_0a_0\right]=\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}c_kb_k+a_0,n=0,1,\cdots.$$

这样就完成了对 a_n 的强行裂项和强求通项, 并将 a_n 写成了关于 b_n,d_n 的形式.

(2) 若数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推条件(3.72)式, 则令 $c_0=1$, 待定 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, 由递推条件(3.72)式可得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-d_na_{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-c_nd_na_{n-1}}{c_n}=A. \tag{3.74}$$

我们希望 $c_nd_n=c_{n-1},n=2,3,\cdots$, 即 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{d_n},n=2,3,\cdots$. 从而 $c_n=c_0\prod_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_{k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k},n=1,2,\cdots$, 且该式对 $n=0$ 也成立. 因此, 令 $c_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k},n=0,1,\cdots$, 则由(3.74)式可知

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-d_na_{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-c_nd_na_{n-1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}=A. \tag{3.75}$$

于是令 $b_0=1$, 待定 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, 希望 b_n 满足 $c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1},n=1,2,\cdots$, 即 $b_n=\frac{c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}=a_n-\frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n},n=1,2,\cdots$. 因此, 令 $b_0=1,b_n=a_n-\frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n},n=1,2,\cdots$, 则 b_n 满足

$$c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1},n=1,2,\cdots. \tag{3.76}$$

并且由(3.75)式可知

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}=A.$$

从而由(3.76)式可得

$$a_n=\frac{1}{c_n}(c_na_n-c_0a_0+c_0a_0)=\frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_ka_k-c_{k-1}a_{k-1})+c_0a_0\right]=\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{n}c_kb_k+a_0,n=0,1,\cdots.$$

这样就完成了对 a_n 的强行裂项和强求通项.

□

例题 3.94 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=a,|\lambda|<1$,计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

笔记 解法二构造数列 c_n,b_n 的思路: 待定数列 c_n 且 $c_0=1$, 由条件可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_na_n-\lambda c_na_{n-1}}{c_n}=a$. 希望 $c_{n-1}=\lambda c_n$, 即 $\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=\dfrac{1}{\lambda}$, 等价于 $c_n=c_0\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{c_k}{c_{k-1}}=\dfrac{1}{\lambda^n}$. 该式对 $n=0$ 也成立. 于是令 $c_n=\dfrac{1}{\lambda^n}$, 则由条件可知

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-\lambda c_na_{n-1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}$$

从而待定 b_n, 希望 b_n 满足 $c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$, 即 $\dfrac{b_n}{\lambda^n}=\dfrac{a_n}{\lambda^n}-\dfrac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}}=\dfrac{a_n-\lambda a_{n-1}}{\lambda^n}$. 于是令 $b_n=a_n-\lambda a_{n-1}$, 则由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=a,c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$. 因此

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{c_n}(c_na_n-c_0a_0+c_0a_0)=\frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_ka_k-c_{k-1}a_{k-1})+c_0a_0\right]\\=&\frac{1}{c_n}\left(\sum_{k=1}^{n}c_kb_k+c_0a_0\right)=\lambda^n\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}+a_0\lambda^n.\end{aligned}$$

这样就完成了对 a_n 的强行裂项和强求通项. 后续计算极限的方法与解法一相同.

解 解法一 (通过观察直接构造出裂项数列 b_n): 当 $\lambda=0$ 问题时显然的, 当 $\lambda\neq0$, 记 $b_n=a_n-\lambda a_{n-1},n=1,2,\cdots$, 我们有

$$\frac{b_n}{\lambda^n}=\frac{a_n-\lambda a_{n-1}}{\lambda^n}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}},n=1,2,\cdots.$$

上式对 $n=1,2,\cdots$ 求和得

$$a_n=\lambda^n\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}+a_0\lambda^n,n=1,2,\cdots. \tag{3.77}$$

由于 $|\lambda|<1$, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_0\lambda^n=0$. 于是由 Stolz 定理, 可知当 $\lambda>0$ 时, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}}-\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{1-\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

当 $\lambda<0$ 时 (此时分母 $\dfrac{1}{\lambda^n}$ 不再严格单调递增趋于 $+\infty$, 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于 $+\infty$ 满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于(3.77)式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n+2}\frac{b_k}{\lambda^k}-\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}}+\frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+2}+\lambda b_{2n+1}}{1-\lambda^2}=\frac{a+\lambda a}{1-\lambda^2}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

对于(3.77)式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^{2n-1}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}-\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}\xlongequal{\text{因为偶子列的极限}}\frac{a}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{a}{\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

因此无论如何我们都有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a}{1-\lambda}$.

解法二 (强求通项和强行裂项的标准解法): 令 $c_n=\dfrac{1}{\lambda^n},n=0,1,\cdots,b_n=a_n-\lambda a_{n-1},n=1,2,\cdots$, 则由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=a,c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$. 从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{c_n}(c_na_n-c_0a_0+c_0a_0)=\frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_ka_k-c_{k-1}a_{k-1})+c_0a_0\right]\\=&\frac{1}{c_n}\left(\sum_{k=1}^{n}c_kb_k+c_0a_0\right)=\lambda^n\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}+a_0\lambda^n.\end{aligned} \tag{3.78}$$

由于 $|\lambda|<1$, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_0\lambda^n=0$. 于是由 Stolz 定理, 可知当 $\lambda>0$ 时, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}}-\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{1-\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

当 $\lambda<0$ 时 (分母 $\frac{1}{\lambda^n}$ 不再严格单调递增趋于 $+\infty$, 不满足 Stolz 定理条件. 而我们发现其奇偶子列恰好严格单调递增趋于 $+\infty$ 满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于(3.78)式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n+2}\frac{b_k}{\lambda^k}-\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}}+\frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+2}+\lambda b_{2n+1}}{1-\lambda^2}=\frac{a+\lambda a}{1-\lambda^2}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

对于(3.78)式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^{2n-1}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}-\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}\xlongequal{\text{因为偶子列的极限}}\frac{a}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{a}{\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

因此无论如何我们都有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{a}{1-\lambda}$. □

例题 3.95 设 $a_1=2, a_n=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}a_{n-1}+\frac{1}{n}, n\geq 2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 存在.

笔记 构造数列 c_n, b_n 的思路: 待定数列 c_n 且 $c_1=1$, 由条件可得 $c_na_n=\frac{n+1}{2n}c_na_{n-1}+\frac{c_n}{n}$, 希望 c_n 满足 $\frac{n+1}{2n}c_n=c_{n-1}, n=2,3,\cdots$, 即 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{n+1}{n}$, 等价于 $c_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{2k}{k+1}=\frac{(2n)!!}{(n+1)!}$ 且该式对 $n=1$ 也成立. 于是令 $c_n=\frac{(2n)!!}{(n+1)!}$, 则由条件可知

$$c_na_n=\frac{n+1}{2n}c_{n-1}+\frac{c_n}{n}=c_{n-1}a_{n-1}+\frac{c_n}{n}, n=2,3,\cdots.$$

于是待定 b_n, 希望 b_n 满足 $c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$, 即 $c_nb_n=\frac{1}{n}$. 从而令 $b_n=\frac{1}{n}$, 则 $c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$. 因此对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\begin{aligned}a_m&=\frac{1}{c_m}(c_ma_m-c_1a_1+c_1a_1)=\frac{1}{c_m}\left[\sum_{n=1}^{m}(c_na_n-c_{n-1}a_{n-1})+c_1a_1\right]\\&=\frac{1}{c_m}\left(\sum_{n=1}^{m}c_nb_n+c_1a_1\right)=\frac{(m+1)!}{(2m)!!}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}+2\right).\end{aligned}$$

这样就完成了对 a_n 的强行裂项和强求通项. 后续再利用 Stolz 定理计算极限即可.

证明 令 $c_n=\frac{(2n)!!}{(n+1)!}, b_n=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 则由条件可知 $c_nb_n=c_na_n-c_{n-1}a_{n-1}$. 从而对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$c_ma_m-2=c_ma_m-c_1a_1=\sum_{n=2}^{m}(c_na_n-c_{n-1}a_{n-1})=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_n}{n}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!},$$

从而

$$a_m=\frac{1}{c_m}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}\right)=\frac{(m+1)!}{(2m)!!}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}\right).$$

再由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} ma_m&=\lim_{m\to\infty} m\frac{(m+1)!}{(2m)!!}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{2+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}}{\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}}\\&\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}}{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}-\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2m+2}{m+1}}{\frac{2m+2}{m+1}-\frac{m+2}{m}}=\frac{2}{2-1}=2.\end{aligned}$$

□

例题 3.96 设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 存在, 令

$$a_{n+1} = b_n - \frac{na_n}{2n+1},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

笔记 构造数列 c_n 的思路: 令 $c_1 = 1$, 待定 $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 由条件可知 $c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n - \frac{n}{2n+1}c_{n+1}a_n$. 希望 $-\frac{n}{2n+1}c_{n+1} = c_n$, 则 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{2n+1}{n}$, 从而

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2k+1}{k}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$$

该式对 $n = 1$ 也成立. 因此令 $c_n = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$, 则由条件可知

$$c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n + c_n a_n \Rightarrow c_{n+1}a_{n+1} - c_n a_n = c_{n+1}b_n$$

从而

$$a_n = \frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=2}^{n}(c_k a_k - c_{k-1}a_{k-1}) + c_1 a_1\right] = \frac{1}{c_n}\left[\sum_{k=2}^{n} c_k b_{k-1} + c_1 a_1\right]$$

这样就完成了对 a_n 的强行裂项和强求通项.

注 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的思路分析: 如果此时我们将(3.79)中的 $\frac{(2n+1)!!}{n!}$ 看作分母, 将 $(-1)^n$ 放到分子上, 那么由Wallis公式可知分母严格单调递增趋于 $+\infty$, 此时 a_n 满足 Stolz 定理条件. 但是使用一次 Stolz 定理后我们并不能直接得到结果, 并且此时 $(-1)^n$ 仍未消去. 因此我们不采用这种处理方式.

如果此时我们将(3.79)中的 $\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{n!}$ 看作分母, 则由于 $(-1)^n$ 的振荡性, 导致这个分母不再严格单调递增趋于 $+\infty$, 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于 $+\infty$ 满足 Stolz 定理条件, 因此我们可以分奇偶子列进行讨论.

证明 令 $c_n = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}, n = 1, 2, \cdots$, 则由条件可知

$$c_{n+1}a_{n+1} = c_{n+1}b_n - \frac{n}{2n+1}c_{n+1}a_n = c_{n+1}b_n + c_n a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而 $c_{n+1}a_{n+1} - c_n a_n = c_{n+1}b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$. 于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{c_{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}a_{k+1} - c_k a_k) + c_1 a_1\right] = \frac{1}{c_{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{k+1}b_k + c_1 a_1\right] \\ &= \frac{1}{c_{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{k+1}b_k + a_1\right] = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k + a_1\right], n \in \mathbb{N}_+. \end{aligned} \tag{3.79}$$

下面计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

由Wallis 公式可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to \infty.$$

从而我们有

$$\frac{n!}{(2n+1)!!} = \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)2^n(2n-1)!!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{n2^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}, n \to \infty. \tag{3.80}$$

于是由(3.79)(3.80)式以及 Stolz 定理和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 可知, 一方面, 考虑 $\{a_n\}$ 的奇子列, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}(2n)!}{(4n+1)!!}\left[\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k + a_1\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k+1)!!}{(2k)!}b_{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!}b_{2k-1} + a_1\right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k+1)!!}{(2k)!}b_{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!}b_{2k-1}\right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n}} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\frac{(4n+1)!!}{(2n)!}b_{2n} - \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!}b_{2n-1}\right]}{2^{2n+1}\sqrt{2n} - 2^{2n-1}\sqrt{2n-2}} \end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!}\left(\frac{4n+1}{2n}b_{2n}-b_{2n-1}\right)}{2^{2n+1}\sqrt{n}-2^{2n-1}\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\sqrt{2n-1}\left(\frac{4n+1}{2n}b_{2n}-b_{2n-1}\right)}{2^{2n+1}\sqrt{n}-2^{2n-1}\sqrt{n-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\left(\frac{4n+1}{2n}b_{2n}-b_{2n-1}\right)}{4\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{4\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{2n}b_{2n}-b_{2n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{4-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\cdot(2b-b)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot b=\frac{2}{3}b. \tag{3.81}$$

另一方面, 考虑 $\{a_n\}$ 的偶子列, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)!}{(4n-1)!!}\left[\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k+a_1\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(4k+1)!!}{(2k)!}b_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!}b_{2k-1}+a_1\right]}{2^{2n}\sqrt{2n-1}}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(4k+1)!!}{(2k)!}b_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!}b_{2k-1}\right]}{2^{2n}\sqrt{2n-1}}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left[\frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!}b_{2n-2}-\frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!}b_{2n-1}\right]}{2^{2n}\sqrt{2n-1}-2^{2n-2}\sqrt{2n-3}}$$

$$=-\sqrt{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!}\left(b_{2n-2}-\frac{4n-1}{2n-1}b_{2n-1}\right)}{2^{2n}\sqrt{2n-1}-2^{2n-2}\sqrt{2n-3}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}\sqrt{2n-2}\left(b_{2n-2}-\frac{4n-1}{2n-1}b_{2n-1}\right)}{2^{2n}\sqrt{2n-1}-2^{2n-2}\sqrt{2n-3}}$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-2}\left(b_{2n-2}-\frac{4n-1}{2n-1}b_{2n-1}\right)}{4\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}}=-2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-2}}{4\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(b_{2n-2}-\frac{4n-1}{2n-1}b_{2n-1}\right)$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{2}{n}}}{4\sqrt{2-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{3}{n}}}=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\cdot(-b)=\frac{2}{3}b. \tag{3.82}$$

故由(3.81)(3.82)式, 再结合子列极限命题 (b)可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{2}{3}b.$$

□

例题 3.97 设 $a_n,b_n>0,a_1=b_1=1,b_n=a_nb_{n-1}-2,n\geq 2$ 且 b_n 有界, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$.

笔记 构造数列 c_n 的思路: 观察已知的数列递推条件: $b_n=a_nb_{n-1}-2$, 可知我们只能对 b_n 进行强行裂项和强求通项. 于是令 $c_1=1$, 待定 $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 则由条件可知 $c_nb_n=a_nc_nb_{n-1}-2c_n,n\geq 2$. 希望 $a_nc_n=c_{n-1}$, 则 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{a_n}$, 从而 $c_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$. 该式对 $n=1$ 也成立. 因此, 令 $c_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, 则由条件可知

$$c_nb_n=a_nc_nb_{n-1}-2c_n=c_{n-1}b_{n-1}-2c_n,n\geq 2.$$

于是

$$c_nb_n-c_{n-1}b_{n-1}=-2c_n,n\geq 2.$$

故

$$b_{n+1}=\frac{1}{c_{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}b_{k+1}-c_kb_k)+c_1b_1\right]=\frac{1}{c_n}\left(1-2\sum_{k=1}^{n}c_k\right).$$

这样就完成了对 b_n 的强行裂项和强求通项, 而我们发现 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$ 恰好就是题目要求的数列极限.

证明 令 $c_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, 则由条件可知 $c_n>0$, 且

$$c_nb_n=a_nc_nb_{n-1}-2c_n=c_{n-1}b_{n-1}-2c_n,n\geq 2.$$

于是

$$c_nb_n-c_{n-1}b_{n-1}=-2c_n,n\geq 2.$$

故

$$b_{n+1}=\frac{1}{c_{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}b_{k+1}-c_kb_k)+c_1b_1\right]=\frac{1}{c_n}\left(1-2\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}\right).\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\sum_{k=1}^{n}c_k=1+\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}=1+\frac{1-b_{n+1}c_n}{2}=\frac{3}{2}-\frac{c_nb_{n+1}}{2},\forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{3.83}$$

由于 $a_n,b_n,c_n>0$, 再结合(3.83)式, 可知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$ 单调递增且 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{3}{2}-\frac{c_nb_{n+1}}{2}\leq\frac{3}{2}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$ 一定存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. 从而再结合(3.83)式和 b_n 有界可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{c_nb_{n+1}}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

□

3.6.8 递推数列综合问题

再次回顾命题 3.2的想法. 这个想法再解决递推数列问题中也很常用.

例题 3.98 设 $a_n,b_n\geq 0$ 且 $a_{n+1}<a_n+b_n$, 同时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 证明:a_n 也收敛.

注 不妨设 $m_k>n_k$ 的原因: 由假设 a_n 不收敛可知, 存在 $\delta>0$, 对 $\forall N>0$, 都存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_m-A|\geqslant\delta$. 从而

取$N=n_1>0$, 则存在$m_1\in\mathbb{N}$, 使得$|a_{m_1}-A|\geqslant\delta$.

取$N=n_2>0$, 则存在$m_2\in\mathbb{N}$, 使得$|a_{m_2}-A|\geqslant\delta$.

……

取$N=n_k>0$, 则存在$m_k\in\mathbb{N}$, 使得$|a_{m_k}-A|\geqslant\delta$.

……

这样就得到了一个子列 $\{a_{m_k}\}$ 满足对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $m_k>n_k$ 且 $|a_{m_k}-A|\geqslant\delta$.

证明 由 $a_{n+1}<a_n+b_n$ 可得

$$a_n=a_1+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)<a_1+\sum_{i=1}^{n-1}b_i,\forall n\geqslant 2. \tag{3.84}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 故对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$ 有界. 再结合 (3.84) 式可知,a_n 也有界. 由聚点定理可知, 存在一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A<\infty$.

(反证) 假设 a_n 不收敛, 则存在 $\delta>0$ 和一个子列 $\{a_{m_k}\}$, 使得

$$|a_{m_k}-A|\geqslant\delta,\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

不妨设 $m_k>n_k,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 此时分两种情况讨论.

(i) 如果有无穷多个 k, 使得 $a_{m_k}\geqslant A+\delta$ 成立. 再结合条件可得, 对这些 k, 都有

$$a_{m_k}-a_{n_k}=\sum_{i=n_k}^{m_k-1}(a_{i+1}-a_i)<\sum_{i=n_k}^{m_k-1}b_i, \tag{3.85}$$

$$a_{m_k}-a_{n_k}=(a_{m_k}-A)+(A-a_{n_k})\geqslant\delta+(A-a_{n_k}). \tag{3.86}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛和 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$, 所以

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=n_k}^{m_k-1} b_i = \lim_{k\to\infty} (A - a_{n_k}) = 0.$$

于是对 (3.85)(3.86) 式两边同时令 $k \to \infty$, 得到

$$0 < \delta \leqslant \lim_{k\to\infty} (a_{m_k} - a_{n_k}) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n_k}^{m_k-1} b_i = 0.$$

上述不等式矛盾.

(ii) 如果有无穷多个 k, 使得 $a_{m_k} \leqslant A - \delta$ 成立. 取 $\{a_{n_k}\}$ 的一个子列 $\{a_{t_k}\}$, 使得 $t_k > m_k, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则 $\lim_{k\to\infty} a_{t_k} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. 再结合条件可得, 对这些 k, 都有

$$a_{t_k} - a_{m_k} = \sum_{i=m_k}^{t_k-1} (a_{i+1} - a_i) < \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i, \tag{3.87}$$

$$a_{t_k} - a_{m_k} = (a_{t_k} - A) + (A - a_{m_k}) \geqslant (a_{t_k} - A) + \delta. \tag{3.88}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛和 $\lim_{k\to\infty} a_{t_k} = A$, 所以

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i = \lim_{k\to\infty} (a_{t_k} - A) = 0.$$

于是对 (3.87)(3.88)式两边同时令 $k \to \infty$, 得到

$$0 < \delta \leqslant \lim_{k\to\infty} (a_{t_k} - a_{m_k}) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=m_k}^{t_k-1} b_i = 0.$$

上述不等式矛盾. 结论得证. □

例题 3.99 设 $a_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right)$,$a_1 = 1$, 证明: 极限 $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ 存在.

笔记 本题证明的思路分析:

注意到递推函数 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 且 $a_1 = 1 > 0$. 因此直接利用单调分析法归纳证明 $\{a_n\}$ 单调有界且 $a_n \in (0,1]$. 进而得到 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 再利用命题 3.2将 $2^n a_n$ 转化为级数的形式. 因为递推函数与 ln 有关, 所以我们考虑作差转换, 即

$$2^{n+1} a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} a_{k+1} - 2^k a_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \left(\ln\left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k}\right) - \frac{1}{2} a_k \right).$$

因此我们只需证明级数 $\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \left(\ln\left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k}\right) - \frac{1}{2} a_k \right)$ 收敛即可. 考虑其通项 $2^{n+1} \left(\ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n \right)$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 因此利用 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n &= \ln \frac{a_n + \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)}{a_n} - \frac{1}{2} a_n = \ln\left(1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right) - \frac{1}{2} a_n \\
&= \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2) - \left(\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right)^2 + o(a_n^2) - \frac{1}{2} a_n = \frac{a_n^2}{24}, n \to \infty.
\end{aligned}$$

故当 n 充分大时, 我们有

$$2^{n+1} \left(\ln\left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right) - \frac{1}{2} a_n \right) = \frac{1}{24} 2^{n+1} a_n^2.$$

于是我们只须证级数 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{24} 2^{n+1} a_n^2$ 收敛即可. 因此我们需要找到一个收敛级数 $\sum_{k=1}^{n} c_n$, 使得 $2^{n+1} a_n^2$ 被这个收敛级

数的通项 c_n 控制, 即当 n 充分大时, 有

$$2^{n+1}a_n^2 \le c_n.$$

又题目要证 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$ 存在, 说明 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$ 一定存在, 从而一定有

$$a_n \sim \frac{c}{2^n}, n \to \infty, \tag{3.89}$$

其中 c 为常数. 虽然无法直接证明 (3.89) 式, 但是 (3.89)式给我们提供了一种找 c_n 的想法.(3.89)式表明 a_n 与几何级数的通项近似, 于是一定存在 $\lambda \in (0,1)$, 使得 $a_n \approx \frac{c}{2^n} \le c_0\lambda^n, n \to \infty$. 其中 c_0 为常数. 从而

$$2^{n+1}a_n^2 \le c_0^2 2^{n+1}\lambda^{2n} = c_1(2\lambda^2)^n, n \to \infty.$$

故我们只需要保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2\lambda^2)^n$ 收敛, 就能由级数的比较判别法推出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{24}2^{n+1}a_n^2$ 收敛. 因此我们待定 $\lambda \in (0,1)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2\lambda^2)^n$ 恰好就是一个几何级数. 于是 $2\lambda^2 < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故我们只要找到一个恰当的 $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 使得

$$a_n \le c_0\lambda^n, n \to \infty. \tag{3.90}$$

其中 c_0 为常数, 即可. 我们需要与已知的递推条件联系起来, 因此考虑

$$a_{n+1} \le c_0\lambda^{n+1}, n \to \infty. \tag{3.91}$$

又 $a_n \in (0,1]$, 显然将(3.90)与(3.91) 式作商得到

$$a_n \leqslant c_0\lambda^n, n \to \infty \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lambda, n \to \infty \Leftrightarrow \frac{f(a_n)}{a_n} \le \lambda, n \to \infty$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 故上式等价于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} \le \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} \le \lambda$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2}+o(x)}{x} = \frac{1}{2}$, 所以任取 $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 即可. 最后根据上述思路严谨地书写证明即可.

(注: 也可以利用 $f(x)$ 的凸性去找 $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 见下述证明过程.)

证明 令 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, 注意到对 $\forall x > 0$, 有

$$f(x) < x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < x \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} < e^x \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{t} > 1-t, \text{ 其中} t = \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln t < t-1, \text{ 其中} t = \frac{1}{x} > 0.$$

上式最后一个不等式显然成立. 因此

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < x, \forall x > 0. \tag{3.92}$$

由 $e^x - 1 > x, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) > \ln 1 = 0, \forall x > 0. \tag{3.93}$$

从而由 (3.92)(3.93) 式及 $a_1 = 1$, 归纳可得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$a_{n+1} = f(a_n) < a_n, \quad a_{n+1} = f(a_n) > 0.$$

故数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界 0. 于是 $a_n \in (0,1]$, 并且由单调有界原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [0,1]$. 对 $a_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)$ 两边同时令 $n \to \infty$, 得到

$$A = \ln\left(\frac{e^A-1}{A}\right) \Leftrightarrow Ae^A = e^A - 1 \Leftrightarrow (1-A)e^A = 1.$$

显然上述方程只有唯一解:$A=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}2^na_n$ 存在. 由 $a_{n+1}=\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)$ 可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=2^{n+1}\left[\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)-\frac{1}{2}a_n\right].$$

从而

$$2^{n+1}a_{n+1}=2a_1+\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\left(\ln\left(\frac{e^{a_k}-1}{a_k}\right)-\frac{1}{2}a_k\right)=2+\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\left(\ln\left(\frac{e^{a_k}-1}{a_k}\right)-\frac{1}{2}a_k\right),\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

故要证 $\lim\limits_{n\to\infty}2^na_n$ 存在, 即证 $\sum\limits_{k=1}^{n}2^{k+1}\left(\ln\left(\frac{e^{a_k}-1}{a_k}\right)-\frac{1}{2}a_k\right)$ 收敛. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{e^x-1}{x}-\frac{1}{2}x}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x}-\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)-\frac{1}{2}x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)-\frac{1}{2}x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{24}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{24}<1,\end{aligned}$$

再结合 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可得, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)-\frac{1}{2}a_n}{a_n^2}=\frac{1}{24}<1$. 故存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)-\frac{1}{2}a_n<a_n^2,\forall n>N.\tag{3.94}$$

由 $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 可知, $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$. 注意到对 $\forall x\in(0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}f''(x)>0&\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}>\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\\&\Leftrightarrow\frac{1}{\ln^2t}>\frac{t}{(t-1)^2},\ \text{其中}t=e^x>1\\&\Leftrightarrow\ln t<\frac{t-1}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}},\ \text{其中}t=e^x>1\end{aligned}$$

而上式最后一个不等式显然成立(见关于 ln 的常用不等式 (2)). 故 $f''(x)>0,\forall x\in(0,1]$. 故 f 在 $(0,1]$ 上是下凸函数. 从而由下凸函数的性质 (切割线放缩) 可得,$\forall x\in(0,1]$, 固定 x, 对 $\forall y\in(0,x)$, 都有

$$f'(y)x\leq f(x)\leq[f(1)-f(y)]x=[\ln(e-1)-f(y)]x.\tag{3.95}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to0^+}f(y)=\lim_{y\to0^+}\ln\left(\frac{e^y-1}{y}\right)=\ln\left(\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}\right)=\ln1=0,\\&\lim_{y\to0^+}f'(y)=\lim_{y\to0^+}\left(\frac{e^y}{e^y-1}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{e^y(y-1)+1}{y(e^y-1)}\\&=\lim_{y\to0^+}\frac{(1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2))(y-1)+1}{y^2}=\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}{y^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是令 (3.95) 式 $y\to0^+$, 得到

$$\frac{1}{2}x=\lim_{y\to0^+}f'(y)x\leq f(x)\leq[\ln(e-1)-\lim_{y\to0^+}f(y)]x=x\ln(e-1),\forall x\in(0,1].$$

又 $a_n\in(0,1]$, 故

$$\frac{1}{2}a_n\leq a_{n+1}=f(a_n)\leq\ln(e-1)a_n,\forall n\in\mathbb{N}_+.$$

从而

$$\frac{1}{2}\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\ln(e-1)<\frac{\sqrt{2}}{2},\forall n\in\mathbb{N}_+.\tag{3.96}$$

因此

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq [\ln(e-1)]^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \tag{3.97}$$

于是结合 (3.94)(3.97) 式可得对 $\forall n > N$, 我们有

$$2^{n+1}\left(\ln\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right) - \frac{1}{2}a_n\right) < 2^{n+1}a_n^2 \leq 2^{n+1}[\ln(e-1)]^{2n-2} = \frac{2}{\ln^2(e-1)}[2\ln^2(e-1)]^n.$$

又由 (3.96)式可知,$2\ln^2(e-1) < 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$. 故 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\ln^2(e-1)}[2\ln^2(e-1)]^k$ 收敛. 从而由比较判别法知,$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}\left(\ln\left(\frac{e^{a_k}-1}{a_k}\right) -\right.$
¥ 也收敛. 结论得证. □

例题 3.100 Herschfeld 判别法 设 $p > 1$, 令 $a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}}$,$b_n > 0$, 证明: 数列 a_n 收敛等价于数列 $\frac{\ln b_n}{p^n}$ 有界.

注 这个很抽象的结果叫做 Herschfeld 判别法, 但是证明起来只需要单调有界.

证明 由条件可知 $a_2 > a_1$, 假设 $a_n > a_{n-1}$, 则由 $b_n > 0$ 可得

$$a_{n+1} = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n + \sqrt[p]{b_{n+1}}}}} > \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} = a_n.$$

由数学归纳法可知 $\{a_n\}$ 单调递增.

若 a_n 收敛, 则由单调有界定理可知,a_n 有上界. 即存在 $M > 0$, 使得 $a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 从而

$$M > a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} > \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} = b_n^{\frac{1}{p^n}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

故

$$\frac{\ln b_n}{p^n} = \ln b_n^{\frac{1}{p^n}} < \ln M, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即 $\frac{\ln b_n}{p^n}$ 有界.

若 $\frac{\ln b_n}{p^n}$ 有界, 则存在 $M_1 > 0$, 使得

$$\frac{\ln b_n}{p^n} < M_1, \forall n \in \mathbb{N}_+. \tag{3.98}$$

记 $C = e^{M_1}$, 则由 (3.98)式可得

$$b_n < e^{M_1 p^n} = C^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \cdots + \sqrt[p]{b_n}}} < \sqrt[p]{C^p + \sqrt[p]{C^{p^2} + \cdots + \sqrt[p^n]{C^{p^n}}}} = C\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}. \tag{3.99}$$

考虑数列 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 显然 $x_n > 0$, 记 $f(x) = \sqrt[p]{1+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{p}(1+x)^{\frac{1}{p}-1} < \frac{1}{p} < 1, \forall x > 0.$$

而显然 $f(x) = x$ 有唯一解 $a > 1$, 从而由 Lagrange 中值定理可得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 存在 $\xi_n \in (\min\{x_n, a\}, \max\{x_n, a\})$, 使得

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = f'(\xi_n)|x_n - a| < \frac{1}{p}|x_n - a|.$$

于是

$$|x_{n+1} - a| < \frac{1}{p}|x_n - a| < \frac{1}{p^2}|x_{n-1} - a| < \cdots < \frac{1}{p^n}|x_1 - a| \to 0, n \to \infty.$$

故 x_n 收敛到 a, 因此 x_n 有界, 即存在 K, 使得 $x_n < K, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 于是结合 (3.99) 可得

$$a_n = C\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} = Cx_n < CK, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即 a_n 有界, 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以由单调有界定理可知,a_n 收敛. □

引理 3.1 (有界数列差分极限为 0 则其闭包一定是闭区间)

有界数列 x_n 如果满足 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 则 x_n 的全体聚点构成一个闭区间 (且这个闭区间的端点就是数列的上下极限).

笔记 先根据条件直观地画图分析, 分析出大致的思路后, 再考虑严谨地书写证明.

证明 当数列 x_n 收敛时,x_n 的聚点集为单点集, 结论显然成立.

当数列 x_n 不收敛时, 因为数列 x_n 有界, 所以可设 $\limsup_{n\to\infty} x_n=L<\infty$,$\liminf_{n\to\infty} x_n=l<L$. 假设 $\exists A\in(l,L)$, 使得 A 不是 x_n 的极限点. 则 $\exists\delta\in(0,\min\{L-A,A-l\})$, 使得区间 $(A-\delta,A+\delta)\subseteq(l,L)$ 中只包含了数列 x_n 中有限项. 因此存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有 $|x_n-A|\geqslant\delta$. 即

$$\text{当}n>N_1\text{时, 要么}x_n\geqslant A+\delta, \text{要么}x_n\leqslant A-\delta. \tag{3.100}$$

由 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 可知, 存在 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得

$$|x_{n+1}-x_n|<\delta, \forall n>N_2. \tag{3.101}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 由 $\limsup_{n\to\infty} x_n=L$ 和 $\liminf_{n\to\infty} x_n=l$ 可知, 对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\min\{L-A-\delta,A-l-\delta,\frac{L-l}{2}\}\right)$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$,$\{x_{m_k}\}$, 使得对 $\forall k\in\mathbb{N}_+\cap(N,+\infty)$, 都有

$$x_{m_k}<l+\varepsilon\leqslant A-\delta<A+\delta\leqslant L-\varepsilon<x_{n_k}.$$

任取 $K\in\mathbb{N}_+\cap(N,+\infty)$, 则 $x_{m_K}<l+\varepsilon\leqslant A-\delta<A+\delta\leqslant L-\varepsilon<x_{n_K}$. 不妨设 $n_K>m_K$, 则 $n_K>m_K\geqslant K>N$. 现在考虑 $x_{m_K},x_{m_K+1},\cdots,x_{n_K-1},x_{n_K}$ 这些项. 将其中最后一个小于等于 $A-\delta$ 的项记为 x_s, 显然 $n_K-1\geqslant s\geqslant m_K\geqslant K>N$, 进而 $s+1\in[m_K+1,n_K]$, 于是 $x_{s+1}>A-\delta$. 又因为 $s+1\geqslant m_K+1>K>N$, 所以结合(3.100)可知,$x_{s+1}\geqslant A+\delta$. 因此 $|x_{s+1}-x_s|\geqslant2\delta$. 这与(3.101)式矛盾! 因此 x_n 的全体聚点构成一个闭区间 $[l,L]$. □

例题 3.101 设连续函数 $f(x):[0,1]\to[0,1]$,$x_1\in[0,1]$,$x_{n+1}=f(x_n)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

笔记 先根据条件直观地画图分析, 分析出大致的思路后, 再考虑严谨地书写证明.

注 $x_{n_k}\to A\Rightarrow x_{n_{k+1}}\to A$,$k\to\infty$. 但是 $x_{n_k}\to A\nRightarrow x_{n_k+1}\to A$,$k\to\infty$.

证明 **必要性**: 如果 x_n 收敛, 则显然 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

充分性: 假设数列 x_n 不收敛. 设 $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=L$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=l$, 则由条件可知 $l<L$ 且 $[l,L]\subseteq[0,1]$. 从而由引理3.1可知, 数列 x_n 的全体聚点构成一个闭区间 $[l,L]$. 于是 $\forall A\in[l,L]$, 则存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=A$. 由 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 可知, $\lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=A$. 根据 $x_{n+1}=f(x_n)$ 可得 $x_{n_k+1}=f(x_{n_k})$, 令 $k\to\infty$, 再结合 $f\in C[0,1]$ 可得

$$A=f(A),\forall A\in[l,L]. \tag{3.102}$$

因此取 $A=\frac{l+L}{2}$, 这也是 x_n 的一个极限点, 从而令 $\varepsilon_0=\frac{L-l}{2}$ 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$l=A-\varepsilon_0<x_N<A+\varepsilon_0=L.$$

即 $x_N\in[l,L]$. 于是由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 及(3.102)式可得 $x_{N+1}=f(x_N)=x_N$. 从而归纳可得 $x_n=x_N,\forall n\in\mathbb{N}_+\cap(N,+\infty)$. 显然此时 x_n 收敛到 x_N, 这与 x_n 不收敛矛盾! 故数列 x_n 收敛. □

例题 3.102 设 d 为正整数, 给定 $1<a\leq\frac{d+2}{d+1}$,$x_0,x_1,\cdots,x_d\in(0,a-1)$, 令 $x_{n+1}=x_n(a-x_{n-d})$,$n\geq d$, 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.

证明 证明见 lsz(2024-2025) 数学类讲义的不动点与蛛网图方法部分. □

例题 3.103 设 x_n 满足当 $|i-j|\leq2$ 时总有 $|x_i-x_j|\geq|x_{i+1}-x_{j+1}|$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在.

注 仅凭 $|x_{n+1}-x_n|$ 单调递减无法保证极限存在, 只能说明数列 $\frac{x_n}{n}$ 有界, 但是完全有可能其聚点集合是一个闭区间, 所以 $|x_{n+2}-x_n|$ 的递减性是必要的. 本题其实画图来看走势很直观.

证明 条件等价于 $|x_{n+1}-x_n|,|x_{n+2}-x_n|$ 这两个数列都是单调递减的, 显然非负, 所以它们的极限都存在.

(i) 如果 $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, 则由 stolz 公式显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_n=0$.

(ii) 如果 $\lim_{n\to\infty}|x_{n+2}-x_n|=0$, 则奇偶两个子列分别都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n+2}-x_{2n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}-x_{2n-1}=0$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$, 因此下面只需讨论 $|x_{n+1}-x_n|,|x_{n+2}-x_n|$ 的极限都非零的情况.

不妨设 $|x_{n+1}-x_n|$ 单调递减趋于 1(如果极限不是 1 而是别的正数, 考虑 kx_n 这样的数列就可以了), 由于非负递减数列 $|x_{n+2}-x_n|$ 的极限非零, 故存在 $\delta\in(0,1)$ 使得 $|x_{n+2}-x_n|\geq\delta$ 恒成立.

(i) 如果 x_n 是最终单调的, 也就是说存在 N 使得 $n>N$ 时 $x_{n+1}-x_n$ 恒正或者恒负, 则 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_n=1$ 或者 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_n=-1$, 再用 stolz 公式可知极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在.

(ii) 如果 x_n 不是最终单调的, 因为 $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=1$, 所以存在 N 使得 $n>N$ 时恒有 $|x_{n+1}-x_n|\in\left[1,1+\frac{\delta}{2}\right]$, 并且 $n>N$ 时 x_n 不是单调的, 故存在 $n>N$ 使得以下两种情况之一成立

(a):$1\leq x_{n+1}-x_n\leq 1+\frac{\delta}{2},1\leq x_{n+1}-x_{n+2}\leq 1+\frac{\delta}{2}\Rightarrow|x_{n+2}-x_n|\leq\frac{\delta}{2}$.

(b):$1\leq x_n-x_{n+1}\leq 1+\frac{\delta}{2},1\leq x_{n+2}-x_{n+1}\leq 1+\frac{\delta}{2}\Rightarrow|x_{n+2}-x_n|\leq\frac{\delta}{2}$.

可见不论哪种情况成立, 都会与 $|x_{n+2}-x_n|\geq\delta$ 恒成立矛盾, 结论得证. □

例题 3.104 设四个正数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{t_n\}$ 满足

$$t_n\in(0,1),\sum_{n=1}^{\infty}t_n=+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{t_n}=0,x_{n+1}\leq(1-t_n)x_n+a_n+b_n$$

证明: $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

笔记 这类问题直接强求通项即可.

证明 根据条件有

$$\frac{x_{n+1}}{(1-t_n)\cdots(1-t_1)}\leq\frac{x_n}{(1-t_{n-1})\cdots(1-t_1)}+\frac{a_n+b_n}{(1-t_n)\cdots(1-t_1)}$$

$$\frac{x_{n+1}}{(1-t_n)\cdots(1-t_1)}\leq x_1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+b_k}{(1-t_k)\cdots(1-t_1)}$$

$$x_{n+1}\leq x_1(1-t_n)\cdots(1-t_1)+\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)(1-t_{k+1})\cdots(1-t_n)$$

换元令 $u_n=1-t_n\in(0,1)$, 则

$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln u_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-1)=-\sum_{n=1}^{\infty}t_n=-\infty\Rightarrow\prod_{n=1}^{\infty}u_n=0$$

代入有

$$x_{n+1}\leq x_1u_1u_2\cdots u_n+\sum_{k=1}^{n}a_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n+\sum_{k=1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n$$

显然 $x_1u_1u_2\cdots u_n\to 0$, 于是只需要看后面两项. 对于最后一项, 我们待定正整数 $N\leq n$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n=\sum_{k=1}^{N}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n+\sum_{k=N+1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n$$

其中 $\sum_{k=N+1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n\leq\sum_{k=N+1}^{n}b_k<\sum_{k=N}^{\infty}b_k$,于是对任意 $\varepsilon>0$, 可以取充分大的 N 使得 $\sum_{k=N+1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n<\varepsilon$, 现在 N 已经取定, 再对前面有限项取极限有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}b_ku_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n\leq\sum_{k=1}^{N}b_k\overline{\lim_{n\to\infty}}(u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n)+\varepsilon=\varepsilon$$

由此可见最后一项的极限是零, 最后来看中间一项, 记 $s_n = \dfrac{a_n}{t_n} = \dfrac{a_n}{1-u_n} \to 0$, 则对任意 N 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n &= \sum_{k=1}^{n} s_k(1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n\\ &= \sum_{k=1}^{N} s_k(1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n + \sum_{k=N+1}^{n} s_k(1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n\end{aligned}$$

$$\sum_{k=N+1}^{n} s_k(1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n \le \sup_{k\ge N} s_k \sum_{k=N+1}^{n} (1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n \le \sup_{k\ge N} s_k$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N} s_k(1-u_k)u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_n + \sup_{k\ge N} s_k = \sup_{k\ge N} s_k$$

再令 $N\to\infty$, 由此可见这一部分的极限也是零, 结论得证. □

3.7 分部积分

分析学里流传着一句话: “遇事不决分部积分”.

分部积分在渐近分析中的用法:

(1) 有时候分部积分不能计算出某一积分的具体值, 但是我们可以利用分部积分去估计原积分 (或原含参积分) 的范围. 并且我们可以通过不断分部积分来提高估计的精确程度.

(2) 分部积分也可以转移被积函数的导数.

(3) 分部积分可以改善阶. 通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计. 并且可以通过反复分部积分得到更加精细的估计.

例题 3.105

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin\left(t^2\right) dt.$$

证明 $|f(x)| \le \dfrac{1}{x}, x > 0.$

笔记 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (1).

证明 由分部积分可得, 对 $\forall x > 0$, 都有

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_x^{x+1}\sin\left(t^2\right)dt\right| = \left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du\right| = \left|-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}u^{-\frac{3}{2}}\cos u du - \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}u^{-\frac{3}{2}}du\right| + \left|\frac{\cos x}{2x} - \frac{\cos(x+1)}{2(x+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(x+1)}{(x+1)}\right|\\ &= \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x[\cos x - \cos(x+1)] + \cos x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{2x+1}{2} + \cos x}{2x(x+1)}\\ &\le \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x+1}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

□

例题 3.106 设 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y$, 求 $f'(0)$.

笔记 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (3).

解 注意到

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}}\sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y}{x} \xlongequal{令t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y, (1.1) \tag{3.103}$$

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}}\sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y}{x} \xlongequal{令t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to-\infty} t\int_t^{-\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y. (1.2) \tag{3.104}$$

由分部积分可得

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} \mathrm{d}y = -\int_t^{+\infty} \frac{1}{y^2} d\cos y = \frac{\cos y}{y^2}\Big|_{+\infty}^{t} + \int_t^{+\infty} \cos y d\frac{1}{y^2} = \frac{\cos t}{t^2} - 2\int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} \mathrm{d}y.$$

故对 $\forall t > 0$, 我们有

$$\left|\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} \mathrm{d}y\right| = \left|\frac{\cos t}{t^2} - 2\int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} \mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{t^2} + 2\int_t^{+\infty} \frac{1}{y^3} \mathrm{d}y = \frac{2}{t^2}.$$

即 $\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} \mathrm{d}y = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \forall t > 0$. 再结合(3.103)式可知

$$f'_+(0) = \lim_{t \to +\infty} t \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} \mathrm{d}y = 0.$$

同理可得 $f'_-(0) = \lim_{t \to -\infty} t \int_t^{-\infty} \frac{\sin y}{y^2} \mathrm{d}y = 0$. 故 $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. □

3.8 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如 $\int_a^b [f(x)]^n g(x) \mathrm{d}x, n \to \infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a, b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界; 或者 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) \mathrm{d}y, x \to +\infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a, b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b [f(x)]^n g(x) \mathrm{d}x = \int_a^b e^{n \ln f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$

若参变量 n, x 在积分区间上, 或者估计的不是 $n, x \to +\infty$ 处的渐近展开式, 而是其他点处 $(x \to x_0)$ 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) \mathrm{d}y, x \to +\infty$, 其中 $f, g \in C[a, b]$.

思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有 $e^{f(x)}$, 则积分得到的结果中一定仍含有 $e^{f(x)}$), 我们可以大致估计积分 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) \mathrm{d}y, x \to +\infty$ 的结果是 $C_1 h_1(x) e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x) e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$, 其中 C 为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$. 而我们注意到到改变指数函数 e^{px+q} 的幂指数部分的常数 p 会对这个指数函数的阶 $(x \to +\infty)$ 产生较大影响, 而改变 q 不会影响这个指数函数的阶. 比如,e^{2x} 比 e^x 高阶 $(x \to +\infty)$. 由此我们可以发现 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$ 中的幂指数部分中 $f(x,a), f(x,b)$ 中除常数项外的含 x 项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的 $f(x,y)$ 和积分区间决定的, 但是在实际问题中 $f(x,y)$ 的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间 $[a,b]$ 上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量 x 固定时, 并且当积分区间为某一点 y_0 附近时, 只要被积函数的 $e^{f(x,y)}$ 在 y_0 处 (关于 y) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与 x 轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在 y_0 附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量 x 固定时,$f(x,y)$(关于 y) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0(余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 *Taylor* 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 *Taylor* 定理将主体部分的被积函数的指数部分 $f(x,y)$ 在最大值点附近 (关于 y) 展开 (注意: 此时最多展开到 x^2 项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到 $\infty + \infty$ 或 $0 \cdot \infty$ 等这一类无效的结果). *Taylor* 展开之后, 我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处不为 0, 则 $g(x)$ 只会影响渐进展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理 $g(x)$ 的方法:(i) 在余项部分, 直接将 $g(x)$ 放缩成其在相应区间上的上界或下界即可.(ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在 $f(x,y)$(关于 y) 的某些最大值点 y_i 的邻域内, 所以结合 $g(x)$ 的连续性, 直接将 $g(x)$ 用 $g(y_i)$ 代替即可 (将 $g(x)$ 放缩成 $g(y_i)\pm\varepsilon$ 即可). 即相应的主体部分 (y_i 点附近) 乘以 $g(x)$ 相应的函数值 $g(y_i)$. 具体例题见例题 3.115. 也可以采取拟合法处理 $g(x)$, 具体例题见例题 3.116.

若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处为 0, 则在估计积分的阶的时候就要将 $g(x)$ 考虑进去. 需要结合 $g(x)$ 的具体结构、性质进行分析.

严谨的证明过程最好用上下极限和 $\varepsilon-\delta$ 语言书写. 具体严谨的证明书写见例题:例题 3.110,例题 3.111,例题 3.112,例题 3.115.

笔记 *Laplace* 方法的思路蕴含了一些常用的想法: **分段估计、Taylor 定理估阶**. 而严谨的证明书写也使用一些常用方法: **上下极限、$\varepsilon-\delta$ 语言、拟合法**.

注 上述 *Laplace* 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和技巧 (比如 *Puiseux* 级数展开 (见清疏讲义) 等).

例题 3.107 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m>0, m\in\mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le j\le m}a_j.$$

注 熟知, 极限蕴含在 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的最大值中.

证明 显然

$$\max_{1\le j\le m}a_j=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{1\le j\le m}a_j^n}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\max_{1\le j\le m}a_j\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\max_{1\le j\le m}a_j, \tag{3.105}$$

从而我们证明了(3.105). □

例题 3.108 设非负函数 $f\in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

注 熟知, 极限蕴含在 f 的最大值中.

笔记 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

证明 事实上记 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x), x_0\in[a,b]$, 不失一般性我们假设 $x_0\in(a,b)$. 那么对充分大的 $n\in\mathbb{N}$, 我们由积分中值定理知道存在 $\theta_n\in(x_0-\frac{1}{2n},x_0+\frac{1}{2n})$, 使得

$$f(\theta_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}}f^n(x)\mathrm{d}x}\le\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}\le\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0)\mathrm{d}x}=f(x_0)\sqrt[n]{b-a}. \tag{3.106}$$

两边取极限即得(3.106). □

例题 3.109 设非负严格递增函数 $f\in C[a,b]$, 由积分中值定理我们知道存在 $x_n\in[a,b]$, 使得

$$f^n(x_n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 由(上一题) 例题 3.108, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b-a}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}=f(b).$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$, 我们知道对任何 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)=f(b)$. 又由于 f 为严格递增函数, 因此只能有 $c=b$, 利用命题 2.1 的 (a)(Heine 归结原理), 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. 证毕! □

定理 3.9 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi n}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.107}$$

注 我们只需要记住 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to+\infty$ 及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

笔记 (3.107)式等价于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\sqrt{\pi n}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{8}. \tag{3.108}$$

证明的想法是把(3.108)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

证明 我们只证明 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, n\to+\infty$, 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{3.109}$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln\sin^2 x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{3.110}$$

即 $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})}\frac{\ln\sin^2 x}{-(x-\frac{\pi}{2})^2}=-1$. 于是利用(3.110), 对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 我们知道存在 $\delta\in(0,1)$, 使得对任何 $x\in[\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}]$, 都有

$$-(1+\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\leqslant\ln\sin^2 x\leqslant-(1-\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2. \tag{3.111}$$

利用(3.111)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{n\ln\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}e^{n\ln\sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}x\\&=(\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta)+\int_0^{\delta}e^{-n(1-\varepsilon)y^2}\mathrm{d}y\\&=(\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta)+\frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}}\int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}}e^{-z^2}dz\\&\leqslant(\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta)+\frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz.\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\geqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{-n(1+\varepsilon)y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}}e^{-z^2}dz.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

由 ε 任意性即可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(3.109)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=1.$$

故 $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n},n\to+\infty.$ □

例题 3.110 求 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x,n\to\infty$ 的等价无穷小.

解 由 $Taylor$ 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\leqslant\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\leqslant\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\mathrm{d}x\right)\\
&\xlongequal{\text{令}y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{令}y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\frac{1}{2^n\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2}^n)\mathrm{d}x\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

因此, 再结合 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x$, 我们就有

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 即 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}+o\left(\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\right),n\to\infty$. □

例题 3.111 求 $\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y, x\to+\infty$ 的渐近估计 (仅两项).

笔记 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以实际上只需要估计

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y-\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y, x\to+\infty.$$

解 由 *Taylor* 定理可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$2x-\varepsilon x\leqslant x^2+2x\leqslant 2x+\varepsilon x.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y &\xlongequal{令y=xu} x\int_1^{\infty}e^{-(xu)^2}du\xlongequal{令t=u-1}x\int_0^{\infty}e^{-(xt+x)^2}\mathrm{d}t\\
&=x\int_0^{\infty}e^{-(xt)^2-2x^2t-x^2}\mathrm{d}t=xe^{-x^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2(t^2+2t)}\mathrm{d}t\\
&=xe^{-x^2}\left(\int_0^{\delta}e^{-x^2(t^2+2t)}\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\infty}e^{-x^2(t^2+2t)}\mathrm{d}t\right)\\
&\leqslant xe^{-x^2}\left(\int_0^{\delta}e^{-x^2(2t+\varepsilon t)}\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\infty}e^{-x^2(t+2)}e^{-x^2\delta}\mathrm{d}t\right)\\
&=xe^{-x^2}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{(2+\varepsilon)x^2}+\frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2}\right)\\
&=\frac{e^{-x^2}}{x}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon}+e^{-2x^2(\delta+1)}\right).
\end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon}+e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令 $x\to+\infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{1-e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon}+e^{-2x^2(\delta+1)}\right)=\frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2}$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y &\xlongequal{令y=xu} x\int_1^{\infty}e^{-(xu)^2}du\xlongequal{令t=u-1}x\int_0^{\infty}e^{-(xt+x)^2}\mathrm{d}t\\
&=x\int_0^{\infty}e^{-(xt)^2-2x^2t-x^2}\mathrm{d}t=xe^{-x^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2(t^2+2t)}\mathrm{d}t\\
&\geqslant xe^{-x^2}\int_0^{\delta}e^{-x^2(t^2+2t)}\mathrm{d}t\geqslant xe^{-x^2}\int_0^{\delta}e^{-x^2(2t-\varepsilon t)}\mathrm{d}t\\
&=xe^{-x^2}\cdot\frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.
\end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\geqslant\frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令 $x\to+\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\geqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}=\frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{2}$.

因此, 再结合 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\varlimsup\limits_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y$, 我们就有

$$\frac{1}{2}\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x^2}\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$, 即 $\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{e^{-x^2}}{2x}+o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right),x\to+\infty$.

因此 $\int_0^{x}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2x}+o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right),x\to+\infty$. □

例题 3.112 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n\mathrm{d}x$.

解 由 *Taylor* 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$-t-\varepsilon t\leqslant\ln(1-\sin t)\leqslant -t+\varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=nt}n\int_0^{10}(1-|\sin t|)^n\mathrm{d}t=n\int_0^{10}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&\quad+n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t\\
&\quad+n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t+n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{3.112}$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned}
n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t&\xlongequal{\text{令}u=\pi-t}-n\int_{\delta}^{0}e^{n\ln(1-\sin(\pi-u))}du=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t&\xlongequal{\text{令}u=t-\pi}n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}du=n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t&\xlongequal{\text{令}u=t-\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}du=\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du,\\
n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t&\xlongequal{\text{令}u=t-2\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin(2\pi+u))}du=\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}du.
\end{aligned}$$

从而

$$n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t=n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t=2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t.$$

同理,$n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t=n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t=2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t$. 于是原积分(3.112)式可化为

$$\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t.$$

进而, 一方面我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x&=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\\&\leqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t+\varepsilon t)}\mathrm{d}t+3n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin\delta)}\mathrm{d}t\\&=7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1}+3ne^{n\ln(1-\sin\delta)}(\pi-2\delta).\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1}+3ne^{n\ln(1-\sin\delta)}(\pi-2\delta)\right]=\frac{7}{1-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant 7.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x&=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\\&\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t-\varepsilon t)}\mathrm{d}t=7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}=\frac{7}{\varepsilon+1}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{7}{\varepsilon+1}.$

因此, 再结合 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x$, 我们就有

$$7\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant 7.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x=7.$ □

例题 3.113 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}$.

证明 首先注意到

$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n+1}\Big|_1^0=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).\tag{3.113}$$

接着, 由 Taylor 定理可知

$$\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)=-\frac{3}{4}x+o\left(x\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\leqslant\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)\leqslant-\frac{3}{4}x+\varepsilon x,\forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\delta}e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\infty}e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right)=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta} e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\delta}e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&=\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}(1-\delta).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 得

$$-\frac{1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

故 $\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{4}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. 于是再结合(3.113)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}=\frac{2}{3}.$$

□

例题 3.114 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_0^1\ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x}$ 存在并求其值.

笔记 原式可写成 $\dfrac{\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x}$, 求导可知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增, 故原式分子和分母的阶都集中在 $x=0$ 处. 因为分母积分的被积函数除指数部分外,x 在 0 处取值也为 0, 所以我们在估阶的时候需要将 x 也考虑进去. 利用 Laplace 方法估计分子、分母的阶, 但是此时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在极值点 $x=0$ 处间断, 故我们需要先对 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 补充定义, 使相关函数光滑, 才能进行 Taylor 展开.

证明 由 Taylor 公式可知

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\ln\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\leqslant\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\leqslant-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2,\forall x\in[-\delta,\delta],$$

$$-\frac{x}{2}-\varepsilon x\leqslant\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\leqslant-\frac{x}{2}+\varepsilon x,\forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\delta}xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta}xe^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\infty} xe^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}(1-\delta)=-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta^2}(1-\delta).$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta} e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\delta} e^{n\left(-\frac{x}{2}+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{x}{2}+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta)=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta} xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\delta} xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta} xe^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{\infty} xe^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta)=-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta} e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\delta} e^{n\left(-\frac{x}{2}-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{x}{2}-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta)=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta).\end{aligned}$$

因此, 我们就有

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}+ne^{n\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}+ne^{n\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta),\\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)}\leqslant\varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}\\ \frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon}\leqslant\varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\end{aligned}$$

再令 $\varepsilon\to0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{3},\quad\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x=2.$$

故

$$\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3}.$$

□

例题 3.115 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\mathrm{d}x}$.

笔记 我们首先可以求解出被积函数带 n 次幂部分的最大值点即 $1-x^2+x^3$ 的最大值点为 $x=0,1$. 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

注 注意由 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1$. 得到的是 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1$. 而不是.

证明 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3)=-x^2+o(x^2),x\to 0;$$
$$\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1),x\to 1.$$

从而对 $\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, 存在 $\delta_1\in(0,\frac{1}{10})$, 使得

$$-x^2-\varepsilon x^2\leqslant\ln(1-x^2+x^3)\leqslant -x^2+\varepsilon x^2,\forall x\in(0,\delta_1);$$
$$x-1-\varepsilon(x-1)\leqslant\ln(1-x^2+x^3)\leqslant x-1+\varepsilon(x-1),\forall x\in(1-\delta_1,1).$$

设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0),f(1)>0$, 则由连续函数最大值、最小值定理可知,f 在闭区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上都存在最大值和最小值. 设 $M_1=\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]}f(x)$,$M_2=\sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]}f(x)$. 又由连续性可知, 对上述 ε, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon,\forall x\in[0,\delta_2];$$
$$f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon,\forall x\in[1-\delta_2,1].$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则一方面我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant(f(0)+\varepsilon)\int_0^{\delta}e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\mathrm{d}x\\&=\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y+M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right),\end{aligned}$$

又易知 $1-x^2+x^3$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{3},1]$ 上单调递增. 再结合 $\delta<\frac{1}{10}$ 可知,$1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3<1-(\frac{1}{10})^2+(\frac{1}{10})^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3$. 从而当 $x\in(\frac{1}{2},1-\delta)$ 时, 我们就有 $1-x^2+x^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3<1$. 进而可得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\delta}^1(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\delta}^1e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}M_2\left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n\mathrm{d}x+(f(1)+\varepsilon)\int_{1-\delta}^1e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]}\mathrm{d}x\\&=M_2\left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{f(1)+\varepsilon}{n(1+\varepsilon)}\left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

于是就有

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\sqrt{n}M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right),$$
$$n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant nM_2\left(\frac{3}{4}+(1-\delta)^3\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}}(f(0)+\varepsilon),$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(1).$

另外一方面,我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^{\delta}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant(f(0)-\varepsilon)\int_0^{\delta}e^{n(-x^2-\varepsilon x^2)}\mathrm{d}x=\frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_{1-\delta}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_{1-\delta}^1 e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant(f(1)-\varepsilon)\int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]}\mathrm{d}x=\frac{f(1)-\varepsilon}{n(1+\varepsilon)}\left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y,\\n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}(f(0)-\varepsilon),\\\varliminf_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),\varliminf\limits_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(1).$

因此,我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),\\f(1)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(1).\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),\lim\limits_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$. 从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&=\frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),n\to\infty;\\\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x&=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.\end{aligned}$$

故 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.$

从而当 $f\equiv 1$ 时,上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty$; 当 $f(x)=\ln(x+2)$ 时,上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}}+\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)\mathrm{d}x}{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}}+\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\ln 2.$$

$\square$

例题 3.116 设 $f \in R[0,1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = f(1).$$

笔记 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 也可以用拟合法进行证明.

证明 由于 $f \in R[0,1]$, 因此存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [0,1]$. 于是对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall \delta \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| = \left|n\int_0^1 [f(x)-f(1)]x^n\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant n\int_0^1 |[f(x)-f(1)]x^n|\mathrm{d}x = n\int_0^\delta |f(x)-f(1)|x^n\mathrm{d}x + n\int_\delta^1 |f(x)-f(1)|x^n\mathrm{d}x \\
&\leqslant n\int_0^\delta |M+f(1)|\delta^n\mathrm{d}x + n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_\delta^1 x^n\mathrm{d}x \\
&\leqslant n|M+f(1)|\delta^{n+1} + n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\
&= n|M+f(1)|\delta^{n+1} + \frac{n}{n+1}\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 并取上极限可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|, \quad \forall \delta \in (0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \to 1^-$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| \leqslant \lim_{\delta\to1^-}\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)| = \overline{\lim_{\delta\to1^-}}|f(x)-f(1)|.$$

又因为 f 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\overline{\lim\limits_{\delta\to1^-}}|f(x)-f(1)|=0$. 故

$$0 \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| \leqslant 0.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x = f(1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = f(1)$. $\square$

例题 3.117 f 是 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $x=1$ 处存在导数, $f(1)=0, f'(1)=-1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

笔记 本题也可以类似例题 3.116用拟合法进行证明.

证明 由 Taylor 定理可知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 对 $\forall x\in[\delta,1]$, 存在 $\theta\in(x,1)$, 使得

$$f(x) = f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2 = 1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2.$$

记 $M \triangleq \sup\limits_{[0,1]} f, m \triangleq \inf\limits_{[0,1]} f$, 则一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x &= n^2\int_0^\delta x^n f(x)\mathrm{d}x + n^2\int_\delta^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant Mn^2\delta^n + n^2\int_\delta^1 x^n\left[1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2\right]\mathrm{d}x \\
&\leqslant Mn^2\delta^n + n^2\int_0^1\left[x^n - x^{n+1} + \frac{f''(\theta)}{2}(x^{n+2}-2x^{n+1}+x^n)\right]\mathrm{d}x = Mn^2\delta^n + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^2f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

另一方面, 我们有

$$n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = n^2\int_0^\delta x^n f(x)\mathrm{d}x + n^2\int_\delta^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant n^2\min\{0, m\delta^n\} + n^2\int_\delta^1 x^n\left[1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= n^2\min\{0, m\delta^n\} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} - n^2\left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2}\right) + \frac{n^2 f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - n^2\left(\frac{\delta^{n+3}}{n+3} - \frac{2\delta^{n+2}}{n+2} + \frac{\delta^{n+1}}{n+1}\right).$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\varliminf_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

□

例题 3.118 Possion 核 设 $f \in R[0,1]$ 且 f 在 $x=0$ 连续, 证明

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明 因为 $f \in R[0,1]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [0,1]$. 于是对 $\forall\delta \in (0,1)$, 固定 δ, 再对 $\forall t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|\mathrm{d}x \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\arctan\frac{x}{t}\Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)| \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\cdot\arctan\frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $t \to 0^+$ 并取上极限, 可得

$$\varlimsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|, \forall\delta \in (0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \to 0^+$ 可得

$$\varlimsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)| = \frac{\pi}{2}\varlimsup_{x\to 0^+}|f(x)-f(0)|.$$

又由于 f 在 $x=0$ 处连续, 从而 $\varlimsup\limits_{x\to 0^+}|f(x)-f(0)| = 0$. 故

$$0 \leqslant \varliminf_{t\to 0^+}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varlimsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant 0.$$

因此 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x = f(0)\lim\limits_{t\to 0^+}\arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}f(0)$. □

例题 3.119 Fejer 核 设 f 在 $x=0$ 连续且在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 可积, 则

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

证明 因为 $f \in R\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 又因为 $\sin x \sim x, x \to 0$, 所以对 $\forall\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|x| \leqslant \delta_0$ 时, 有 $\sin x \geqslant (1-\varepsilon)x$. 于是对 $\forall\delta \in \min\left\{\frac{1}{2},\delta_0\right\}$, 我们有

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)| \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}|M+f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{|y|\leqslant N\delta}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

上式两边同时令 $N\to+\infty$ 并取上极限, 得到

$$
\varlimsup_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y.
$$

又由 *Dirichlet* 判别法, 可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y$ 收敛. 从而根据 δ 的任意性, 上式两边同时令 $\delta\to0^+$, 再结合 f 在 $x=0$ 处连续, 可得

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \lim_{\delta\to0^+}\frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y}{1-\varepsilon}\lim_{x\to0^+}|f(x)-f(0)| = 0.
\end{aligned}
$$

从而

$$
0\leqslant\varliminf_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \varlimsup_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \leqslant 0.
$$

故 $\lim_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| = 0$. 即 $\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x$.
而一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x \geqslant \lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}f(0)\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)\mathrm{d}y = f(0).
\end{aligned}
$$

另一方面, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x + \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x \\
&\leqslant f(0)\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x + \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}f(0)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{令 y=Nx} \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|y|\leqslant N\delta}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y = \frac{f(0)}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y = \frac{f(0)}{1-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

再根据 ε 的任意性, 可知

$$
\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x \leqslant f(0).
$$

因此, 由夹逼准则, 可知 $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x=f(0)$. □

例题 3.120 设 $\varphi_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2},n=1,2,\cdots,f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\varphi_n(x-y)\mathrm{d}y=f(x).$$

证明 由条件可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}$. 于是对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x, 再对 $\forall\delta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}2M\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2\delta^2}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{令z=n(x-y)}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\\
&=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|.
\end{aligned}$$

令 $\delta\to0^+$, 再结合 f 在 $\forall x\in\mathbb{R}$ 上连续, 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\right|\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|=\lim_{y\to x}|f(y)-f(x)|=0.$$

故

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&=f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\xlongequal{令z=n(x-y)}f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\\
&=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz=f(x).
\end{aligned}$$

□

例题 3.121 设 $f(x)\in C[0,1],f'(0)$ 存在, 证明: 对任意正整数 m, 在 $n\to\infty$ 时有

$$\int_0^1f(x^n)\mathrm{d}x=f(0)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{\ln^kx}{k!}\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

注 这里积分换元之后, 再 Taylor 展开, 但是后续的积分与求和的换序以及余项的估计并不好处理.

笔记 估计抽象函数的渐近展开一般考虑拟合和分段. 如果考虑积分与求和换序的话并不好处理, 一般只有估计具体函数的渐近才会考虑换序.

这里分段的想法也是将原积分分成主体部分和余项部分. 容易观察 (直观地分析一下即可) 到这里积分的阶的主体部分集中在 0 附近.

证明 记 $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 则由条件可知,$g\in C[0,1]$, 从而

$$|g(x)|\leqslant C,\forall x\in[0,1].\tag{3.114}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1f(x^n)\,\mathrm{d}x-f(0)&=\int_0^1\left[f(x^n)-f(0)\right]\mathrm{d}x\xlongequal{令y=x^n}\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}\left[f(x)-f(0)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1e^{\frac{\ln x}{n}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此原问题等价于证明对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 当 $n\to\infty$ 时, 都有

$$\frac{1}{n}\int_0^1e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^kx}{k!}g(x)\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

由 Taylor 公式可知,$\forall x\in[\delta,1]$, 对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$e^{\frac{\ln x}{n}}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}+O\left(\frac{1}{n^m}\right),n\to\infty.$$

即存在 $M>0$, 使得 $\forall x\in[\delta,1]$, 对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 都有

$$\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|\leqslant\frac{M}{n^m}.\tag{3.115}$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n^{2m}}\in(0,1)$, 则对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 结合 (3.114)(3.115) 式, 我们有

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!n^k}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\tag{3.116}$$

$$=\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\int_0^1\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{n}\int_0^1\left(e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\delta\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\int_\delta^1\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(x^{\frac{1}{n}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|\ln x|^k}{k!n^k}\right)\mathrm{d}x+\frac{C}{n}\int_\delta^1\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(1+\sum_{k=0}^{m-1}|\ln x|^k\right)\mathrm{d}x+\frac{C}{n}\int_0^1\frac{M}{n^m}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(1+m\,|\ln x|^{m-1}\right)\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}=\frac{C}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\left(1-m\ln^{m-1}x\right)\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}$$

$$=\frac{C}{n^{2m+1}}-\frac{mC}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|.\tag{3.117}$$

注意到

$$\int\ln^n x\mathrm{d}x=x\left(a_0+a_1\ln x+\cdots+a_n\ln^n x\right)+c=x\left(a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\ln k\right)+c,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,c$ 都是常数. 又因为对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}=0$, 所以一定存在 $N'>0$, 使得当 $n>N'$ 时, 我们有

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|=\left|x\left(b_0+b_1\ln x+\cdots+b_{m-1}\ln^{m-1}x\right)\Big|_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\right|=\left|\frac{1}{n^{2m}}\left(b_0+b_1\ln\frac{1}{n^{2m}}+\cdots+b_{m-1}\ln^{m-1}\frac{1}{n^{2m}}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{mB}{n^{2m}}\left|\ln^{m-1}\frac{1}{n^{2m}}\right|=\frac{2m^2B\ln^{m-1}n}{n^{2m}}\leqslant\frac{2m^2B}{n^{2m-1}}\leqslant\frac{2m^2B}{n^m},\tag{3.118}$$

其中 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}$ 都是常数,$B=\max\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}\}$. 因此由 (3.117)(3.118) 式可得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>\max\{N,N'\}$ 时, 我们有

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\cdot\frac{2m^2B}{n^m}=\frac{MC+C-2m^3BC}{n^{m+1}}.$$

即 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),n\to\infty$. 结论得证. □

3.9 Riemann 引理

引理 3.2 (Riemann 引理)

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是区间且 f 在 E 上绝对可积. g 是定义在 $\mathbb{R}$ 的周期 $T>0$ 函数, 且在任何有界闭区间上 Riemann 可积, 则我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y. \tag{3.119}$$

♡

注 f 在 E 上绝对可积包含 f 为反常积分的情况 (即反常积分绝对收敛).

考试中,Riemann 引理不能直接使用, 需要我们根据具体问题给出证明. 具体可见例题 3.122.

笔记

(1) 不妨设 $E=\mathbb{R}$ 的原因: 若 (1.1) 式在 $E=\mathbb{R}$ 时已得证明, 则当 $E\subseteq\mathbb{R}$ 时, 令 $\widetilde{f}(y)=f(y)\cdot\mathcal{X}_E,y\in\mathbb{R}$, 则由 $f(y)$ 在 E 上绝对可积, 可得 $\widetilde{f}(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也绝对可积. 从而由假设可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$$

故可以不妨设 $E=\mathbb{R}$.

(2) 不妨设 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$ 的原因: 若 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|=0$, 则 $g(x)\equiv 0$, 此时结论显然成立. 因此我们只需要考虑当 $\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$ 时的情况.

(3) 不妨设 $T=1$ 的原因: 若 (3.119) 式在 $T=1$ 时已得证明, 则当 $T\neq 1$ 时, 有

$$\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y\xlongequal{令y=Tx}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Tx)\mathrm{d}x=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y. \tag{3.120}$$

由于 $g(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 $T\neq 1$ 的函数, 因此 $g(Ty)$ 就是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数. 从而由假设可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(Txy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y. \tag{3.121}$$

又由(3.120) 式及 $T>0$ 可得

$$\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(Ty)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(Txy)\mathrm{d}y\xlongequal{令t=Tx}\lim_{t\to+\infty}\int_E f(y)g(ty)\mathrm{d}y=\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y$$

再结合(3.121)式可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^T g(y)\mathrm{d}y$. 故可以不妨设 $T=1$.

(4) 不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 的原因: 若 (3.119) 式在 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 时已得证明, 则当 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y\neq 0$ 时, 令 $G(y)=g(y)-\int_0^1 g(t)dt$, 则 $G(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数, 并且 $\int_0^1 G(y)\mathrm{d}y=0$. 于是由假设可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)G(xy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 G(y)\mathrm{d}y\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)\left[g(xy)-\int_0^1 g(t)dt\right]\mathrm{d}y=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1\left[g(y)-\int_0^1 g(t)dt\right]\mathrm{d}y\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y-\int_E f(y)\int_0^1 g(t)dt\mathrm{d}y\right)=\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y-\int_E f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 g(t)dt=0\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)g(xy)\mathrm{d}y=\int_E f(y)\int_0^1 g(t)dt\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

再结合(2)可知, 此时原结论成立. 故可以不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y = 0$.

证明 不妨设 $E=\mathbb{R}$,$\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|>0$,$T=1$,再不妨设 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$. 因此只需证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)\mathrm{d}y=0$. 由 g 的周期为 1 及 $\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=0$ 可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{0} g(t)dt &\xlongequal{\text{令}x=t+n} \int_0^n g(x-n)\mathrm{d}x \xlongequal{g\text{的周期为}1} \int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \int_0^n g(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(t)dt \xlongequal{\text{令}y=t-k} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 g(y+k)\mathrm{d}y \xlongequal{g\text{的周期为}1} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y \\
&= (n-1)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

从而对 $\forall \beta>\alpha>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_\alpha^\beta g(t)dt\right| &= \left|\int_0^\beta g(t)dt - \int_0^\alpha g(t)dt\right| = \left|\int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t+[\beta])dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t+[\alpha])dt\right| \\
&= \left|\int_{-[\beta]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_{-[\alpha]}^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt\right| = \left|\int_0^{\beta-[\beta]} g(t)dt - \int_0^{\alpha-[\alpha]} g(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{\alpha-[\alpha]}^{\beta-[\beta]} g(t)dt\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}}|g|.
\end{aligned}$$

故

$$\left|\int_\alpha^\beta g(xy)\mathrm{d}y\right| \xlongequal{\text{令}t=xy} \frac{1}{x}\left|\int_{x\alpha}^{x\beta} g(t)dt\right| \leqslant \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}, \quad \forall x>0, \forall \beta>\alpha>0. \tag{3.122}$$

因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 所以由 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\int_{|y|>N} f(y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}. \tag{3.123}$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上也 Riemann 可积, 因此由可积的充要条件可知, 存在划分

$$-N=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{i-1},t_i]} f\right)(t_i-t_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}. \tag{3.124}$$

于是当 $x > \dfrac{3\sum\limits_{j=1}^{n}|\inf\limits_{[t_{j-1},t_j]} f|\cdot\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{\varepsilon}$ 时, 结合(3.122)(3.123)(3.124)可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| &\leqslant \left|\int_{-N}^{N} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{|y|>N} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| \overset{(3.123)}{\leqslant} \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(y)g(xy)\mathrm{d}y\right| + \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(y)-\inf_{[t_{j-1},t_j]} f]g(xy)\mathrm{d}y\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\inf_{[t_{j-1},t_j]} f\cdot g(xy)\mathrm{d}y\right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\overset{(3.122)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(y)-\inf_{[t_{j-1},t_j]} f]\mathrm{d}y\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g| + \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|\inf_{[t_{j-1},t_j]} f|\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f)\mathrm{d}y\cdot\sup_{\mathbb{R}}|g| + \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|\inf_{[t_{j-1},t_j]} f|\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sup_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f)(t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1},t_j]} f| \mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\overset{(3.124)}{<} \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1},t_j]} f| \mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\overset{x\text{充分大}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

因此 $\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)\mathrm{d}y = 0$. 结论得证. □

例题 3.122 设 $f \in R[0,2\pi]$, 不直接使用Riemann 引理计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x.$$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 固定 n. 将 $[0,2\pi]$ 等分成 $2n$ 段, 记这个划分为

$$T: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 2\pi,$$

其中 $t_i = \frac{i\pi}{n}, i = 0, 1, \cdots, n$. 此时我们有

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sin(nx)|\mathrm{d}x = \int_{\frac{(i-1)\pi}{n}}^{\frac{i\pi}{n}} |\sin(nx)|\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \frac{2}{n}. \tag{3.125}$$

由 $f \in R[0,2\pi]$ 可知,f 在 $[0,2\pi]$ 上有界也内闭有界. 从而利用(3.125)式可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \xlongequal{(3.125)\text{式}} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).\end{aligned} \tag{3.126}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \xlongequal{(3.125)\text{式}} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).\end{aligned} \tag{3.127}$$

由 $f \in R[0,2\pi]$ 和 Riemann 可积的充要条件可知

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

于是对(3.126)(3.127)式两边同时令 $n \to \infty$, 得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

例题 3.123 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 设

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt, n = 1, 2, \cdots.$$

若 $x_0 \in (-\pi,\pi)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 唯一间断点且存在下述极限

$$A = \lim_{x\to x_0^+} f(x), B = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-A}{x-x_0}, \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-B}{x-x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)}{2}.$$

笔记

(1) 计算 $I_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)dt$ 的思路: 由于 $\dfrac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上只可能有奇点 $t=0$, 因此 $\dfrac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上不一定绝对可积. 从而不能直接利用 Riemann 引理. 于是我们需要将 $\dfrac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 转化为在 $[0,\pi]$ 上无奇点的函数 (排除 $t=0$ 这个奇点, 即证明 $t=0$ 不再是奇点), 只要被积函数在积分区间上无奇点且 Riemann 可积, 就一定绝对可积. 进而满足 Riemann 引理的条件, 再利用 Riemann 引理就能求解出 I_1. 具体处理方式见下述证明.

计算 $I_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)dt$ 的思路同理, 也是要排除 $t=0$ 这个可能的奇点, 再利用 Riemann 引理进行求解. 具体计算方式见下述证明.

(2) 计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)dt$ 的思路: 注意由于 $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上有一个奇点 $t=0$, 并且对 $\forall t\in(0,\pi]$, 都有

$$\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right|\geqslant\left|\frac{1}{2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}}\right|=\frac{\pi}{2t}>0.$$

而 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2t}dt$ 是发散的, 故 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt$ 也发散. 因此 $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上一定不是绝对可积的, 从而不能利用 Riemann 引理计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$. 真正能计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$ 的方法有多种, 下述证明利用的是强行替换/拟合法.

证明 注意到

$$\begin{aligned}S_n(x_0)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\\&\xlongequal{\text{令}y=-t}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\end{aligned}\tag{3.128}$$

记 $I_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt, I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$, 则由(3.128)式可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2).\tag{3.129}$$

于是

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt,\tag{3.130}$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\frac{B}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt.\tag{3.131}$$

由条件可知 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-A}{t}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-A}{x-x_0}$ 存在, $\displaystyle\lim_{t\to0^-}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0^-}\frac{f(x_0-t)-B}{t}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-B}{x-x_0}$ 存在, 因此 $\dfrac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}},\dfrac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 都没有奇点且Riemann 可积, 从而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\Big(\frac{2n+}{2}$ 都满足 Riemann 引理的条件. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=0.\tag{3.132}$$

下面计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$.

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt-\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|.\tag{3.133}$$

而 $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{t^2}\xlongequal{\text{L'Hospital'rules}}\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{2t}=0$, 因此 $\dfrac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上无奇点且 Riemann 可

积, 从而由 Riemann 引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=0$. 于是再结合 (3.133) 式可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}. \tag{3.134}$$

因此, 由 (3.130)(3.131)(3.132)(3.134)式可得

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)-A}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\lim_{n\to\infty}\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=0+\frac{A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{A}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}I_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-t)-B}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt+\lim_{n\to\infty}\frac{B}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt=0+\frac{B}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{B}{2}.$$

再结合 (3.129)式可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)=\lim_{n\to\infty}I_1+\lim_{n\to\infty}I_2=\frac{A+B}{2}.$$

□

例题 3.124 设 $f\in C^1[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(0)=0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\mathrm{d}x.$$

注 由于 $x=0$ 可能是 $\frac{f(x)}{\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇点, 因此我们需要将其转化为在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不含奇点的函数, 才能利用Riemann 引理进行计算.

证明 注意到

$$\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x. \tag{3.135}$$

先计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x$. 由 $f\in C^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 可知,$f\in D^2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 从而由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}.$$

于是 $\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 故由Riemann 引理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x<\infty.\end{aligned} \tag{3.136}$$

利用(3.136)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x=0. \tag{3.137}$$

下面计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x$. 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 我们有

$$\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)}{x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{f'(0)}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x\right|. \tag{3.138}$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$, 故 $\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 于是由Riemann 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}f'(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\mathrm{d}x<\infty. \tag{3.139}$$

利用(3.139)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x\sin^2 x}\cdot\sin^2(nx)\mathrm{d}x=0. \tag{3.140}$$

因此, 对(3.138)式两边同时令 $n\to\infty$, 利用(3.140)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)}{x}\sin^2(nx)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)}{\ln n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x}{\ln\frac{n\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\tag{3.141}$$

而由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(0)\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}dt}{\ln x-\ln\frac{\pi}{2}}=f'(0)\lim_{n\to\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}\frac{\sin^2 t}{t}dt}{\ln(x+\pi)-\ln x}=\frac{f'(0)}{\pi}\lim_{n\to\infty}x\int_x^{x+\pi}\frac{\sin^2 t}{t}dt.\tag{3.142}$$

由积分中值定理可知, 对 $\forall x>0$, 存在 $\theta_x\in[x,x+\pi]$, 使得

$$\int_x^{x+\pi}\frac{\sin^2 t}{t}dt=\frac{1}{\theta_x}\int_x^{x+\pi}\sin^2 tdt=\frac{1}{\theta_x}\int_0^{\pi}\sin^2 tdt=\frac{\pi}{2\theta_x}.$$

又由 $\theta_x\in[x,x+\pi]$ 可知,$\theta_x\sim x,x\to+\infty$. 从而(3.142)式可化为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(0)\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}dt}{\ln x-\ln\frac{\pi}{2}}=\frac{f'(0)}{\pi}\lim_{n\to\infty}x\int_x^{x+\pi}\frac{\sin^2 t}{t}dt=\frac{f'(0)}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi x}{2\theta_x}=\frac{f'(0)}{2}.$$

于是由 Heine 归结原则可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x}{\ln\frac{n\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(0)\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}dt}{\ln x-\ln\frac{\pi}{2}}=\frac{f'(0)}{2}.\tag{3.143}$$

利用(3.137)(3.143)式, 对(3.135)式两边同时令 $n\to\infty$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(0)x}{\sin^2 x}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{f'(0)}{2}.$$

□

3.10 极限问题综合

例题 3.125 设二阶可微函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足

$$f''(x)\leqslant 0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

求极限

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}.$$

笔记 本例非常经典, 深刻体现了“拉格朗日中值定理”保持阶不变和“和式和积分”转化的思想.

证明 由条件 $f''(x)\leqslant 0$ 可知,f 是上凸函数. 而上凸函数只能在递增、递减、先增后减中发生一个. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 因此 f 一定在 $[1,+\infty)$ 上递增. 再结合 $f''(x)\leqslant 0$ 可知 $f'\geqslant 0$ 且单调递减. 下面来求极限.

由 Lagrange 中值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n\in(2n-1,2n)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{f^s(2n)}-\frac{1}{f^s(2n-1)}\right]\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}}s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}.\tag{3.144}$$

由于 $\theta_n\in(2n-1,2n),\forall n\in\mathbb{N}_+$ 且 $f\geqslant 0$ 单调递增,$f'\geqslant 0$ 单调递减, 因此

$$s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)}\leqslant s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}\leqslant s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}.\tag{3.145}$$

又因为 $\left[\frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}\right]'=\frac{f''(x)f(x)-(s+1)f'(x)}{f^{s+2}(x)}\leqslant 0$, 所以 $\frac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}$ 单调递减. 从而一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{s\to0^+}s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}&\leqslant-\lim_{s\to0^+}s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-1}^{2n}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\&=-\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)\end{aligned}$$

$$= \lim_{s\to 0^+} \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{sf^s(x)}\Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right] = -\frac{1}{2}. \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} &\geqslant -\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_2^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_2^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)\\ &= \lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_2^{+\infty} = -\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(2)}\right] = -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.147}$$

于是利用(3.146)(3.147)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)} = -\frac{1}{2}. \tag{3.148}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\leqslant -\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{f'(2x-1)}{f^{s+1}(2x-1)}\mathrm{d}x\right] = -\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{2n-3}^{2n-1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\right]\\ &= -\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\right] = -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x) = \lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_1^{+\infty}\\ &= -\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right] = -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.149}$$

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} &\geqslant -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)\\ &= \lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_1^{+\infty} = -\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right] = -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.150}$$

于是利用(3.149)(3.150)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} = -\frac{1}{2}. \tag{3.151}$$

故结合(3.144)(3.145)(3.148)(3.151)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} = -\frac{1}{2}.$$

□

例题 3.126 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n \sup\limits_{x\in[0,1]}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}$.

证明 根据对称性, 不妨设 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 先尝试找到最大值点. 在 $x=0,\frac{1}{2}$ 时代入, 很明显对应的极限是零, 考虑 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 根据等比数列求和公式有

$$\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} = (1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n)$$

如果 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 已经取定, 则在区间 $\left[\delta,\frac{1}{2}\right]$ 中

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} \leq n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}$$

右端是指数级趋于零的并且上式不依赖于 x, 所以函数会一致趋于零. 因此最大值点应该在 $x=0$ 附近, 近似的有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{nx(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n)\approx nx(1-x)^n$$

取 $x=\dfrac{1}{n}$ 显然极限是 $\dfrac{1}{e}$, 我们猜测这就是答案, 下面开始证明. 首先取 $x=\dfrac{1}{n}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(\frac{1}{n}\right)^n\right)=\frac{1}{e}$$

由此可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\geq\frac{1}{e}$, 下面估计上极限. 根据对称性, 不妨只考虑 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, 对任意 $\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 取定, 当 $x\in\left[\delta,\dfrac{1}{2}\right]$ 时总有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\leq n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-\delta)^{n-k}\leq n(1-\delta)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k=\frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}$$

当 $x\in[0,\delta]$ 时, 结合均值不等式有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{nx(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n)\approx\frac{nx(1-x)^n}{1-2\delta}\leq\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-2\delta}\leq\frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}$$

所以可以取 $n>N$ 充分大, 使得 $\dfrac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}<\dfrac{1}{e}$, 此时便有

$$n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}\Rightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}$$

最后, 根据 δ 的任意性, 可知结论成立. □

例题 3.127 设 $x_n>0$,k 为正整数, 证明: $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+k}}{x_n}\geq\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$ 且常数是最佳的.

笔记 此类问题反证法将会带来一个恒成立的不等式, 有很强的效果, 所以一般都用反证法, 证明的灵感来源于 $k=1$ 时的情况.

证明 设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 采用反证法, 则存在 N 使得 $n\geq N$ 时恒成立

$$S_{n+k}\leq\lambda(S_n-S_{n-1}),\lambda\in\left[1,\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right)$$

显然 S_n 是单调递增的, 如果 S_n 有界, 则在不等式两端取极限可知 S_n 收敛到零, 矛盾, 所以 S_n 严格单调递增趋于正无穷, 因此对任意 $n\geq N$ 有 $S_n>S_{n-1}$. 如果已经得到了 $S_n>cS_{n-1}$ 对任意 $n\geq N$ 恒成立, 这里 c 是正数, 则对任意 $n\geq N$ 有

$$S_{n+k}>cS_{n+k-1},S_{n+k-1}>cS_{n+k-2},\cdots,S_{n+1}>cS_n\Rightarrow S_{n+k}>c^kS_n$$

$$0<S_{n+k}-c^kS_n\leq(\lambda-c^k)S_n-\lambda S_{n-1}\Rightarrow S_n>\frac{\lambda}{\lambda-c^k}S_{n-1}$$

这样不等式就加强了, 记 $c'=\dfrac{\lambda}{\lambda-c^k}$, 我们得到 $S_n>c'S_{n-1}$ 对任意 $n\geq N$ 恒成立. 定义数列 u_n 为 $u_1=1,u_{n+1}=\dfrac{\lambda}{\lambda-u_n^k}$, 则重复以上过程可知 $S_n>u_mS_{n-1}$ 对任意 m 以及 $n\geq N$ 都恒成立, 所以 u_m 这个数列必须是有界的, 下面我们就由此导出矛盾. 因为 $u_{n+1}>u_n\Leftrightarrow(\lambda-u_n^k)u_n<\lambda\Leftrightarrow(\lambda-u_n^k)^ku_n^k<\lambda^k$, 由均值不等式有

$$kx^k(\lambda-x^k)^k\leq\left(\frac{k\lambda}{k+1}\right)^{k+1}<k\lambda^k\Leftrightarrow\lambda<\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

显然成立, 所以 u_m 单调递增, 而如果极限存在, 则极限点满足方程 $x=\dfrac{\lambda}{\lambda-x^k}\Leftrightarrow x(\lambda-x^k)=\lambda$, 这与前面均值不等式导出的结果矛盾, 所以 u_m 单调递增趋于正无穷, 又与有界性矛盾. 综上结论得证. □

例题 3.128 设 $x_n>0,x_n\to0$ 且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=a<0$, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{\ln n}=-1$.

证明 不妨设 $a=-1$, 否则将 x_n 换成 x_n^k 即可, 取 k 将 a 变成 -1.

设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则 $S_n>0$ 严格单调递增, 如果 S_n 收敛, 则 $\ln x_n\to-\infty$ 与条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷.

因为 $\dfrac{\ln x_n}{\ln n}=\dfrac{\ln x_n}{S_n}\dfrac{S_n}{\ln n},\dfrac{\ln x_n}{S_n}\to-1$, 所以等价的只要证明 $\dfrac{S_n}{\ln n}\to 1$.

条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{S_n}=-1$, 设想作为等式, 对应着 $S_n-S_{n-1}=e^{-S_n}$ 是一个隐函数类型的递推式, 不方便使用, 所以考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_{n+1}}{S_{n+1}}\frac{S_{n+1}}{S_n}=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}}{S_n}\right)=-1$$

现在等价的, 已知 S_n 单调递增趋于无穷且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(S_{n+1}-S_n)}{S_n}=-1$, 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}=1$. 由极限定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得任意 $n>N$ 都有 $(-1-\varepsilon)S_n<\ln(S_{n+1}-S_n)<(-1+\varepsilon)S_n$ 也即

$$\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)^{S_n}+S_n<S_{n+1}<\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^{S_n}+S_n,\forall n\geq N$$

不妨要求 $S_N>1$, 考虑

$$f(x)=\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x+x,f'(x)=1+\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x\ln\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)>1-\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x>0$$

再定义 $u_N=S_N,u_{n+1}=\left(\dfrac{1}{e}+\varepsilon\right)^{u_n}+u_n$, 于是若有 $u_n\leq S_n$ 则结合单调性可知 $u_{n+1}=f(u_n)\leq f(S_n)=S_{n+1}$, 这说明 $S_n\leq u_n$ 对任意 $n\geq N$ 恒成立. 同样考虑

$$g(x)=\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)^x+x,g'(x)=1-\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)^x\ln\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)\geq 1-\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)\ln\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)>0$$

再定义 $v_N=S_N,v_{n+1}=\left(\dfrac{1}{e}-\varepsilon\right)^{v_n}+v_n$, 同样道理 $S_n\geq v_n$ 恒成立, 于是 $\dfrac{v_n}{\ln n}\leq\dfrac{S_n}{\ln n}\leq\dfrac{u_n}{\ln n},n\geq N$.

注意 u_n,v_n 具备完全一样的形式, 所以统一的考虑 $a_1>1,a_{n+1}=a_n+e^{ca_n}$, 其中 c 在 $\dfrac{1}{e}$ 附近, 显然这个数列是单调递增趋于正无穷的, 我们用 stolz 公式来计算相应的极限, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-ca_n}}{c^{-a_n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^{-a_{n+1}}-c^{-a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{-ca_n}(c^{-(a_{n+1}-a_n)}-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ca_n}}{c^{-e^{ca_n}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{cx}}{e^{-x\ln c}-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{e^{-x\ln c}-1}=\frac{1}{-\ln c}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\ln n}=\frac{1}{-\ln(\frac{1}{e}+\varepsilon)}=\frac{1}{1-\ln(1+e\varepsilon)},\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{\ln n}=\frac{1}{-\ln(\frac{1}{e}-\varepsilon)}=\frac{1}{1-\ln(1-e\varepsilon)}$$

这意味着

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n}\leq\frac{1}{1-\ln(1+e\varepsilon)},\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n}\geq\frac{1}{1-\ln(1-e\varepsilon)},\forall\varepsilon>0$$

由此可知结论成立. □

例题 3.129 设 $n\in\mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\cdot\sqrt[3]{\cos(3x)}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}.$$

解 由 Taylor 公式知

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),x\to 0.$$

$$\sqrt[k]{1+x}=1+\frac{x}{k}+o(x),x\to 0.$$

于是

$$\sqrt[k]{\cos x}=\sqrt[k]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=1+\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{k}+o(x^2)=1-\frac{k}{2}x^2+o(x^2),x\to 0.$$

从而

$$\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2}x^2+o(x^2)\right)=1-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\right)x^2+o(x^2),x\to 0.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

□

例题 3.130 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right).$$

笔记 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}},$$

对 $\forall i\in\mathbb{N}$, 都有

$$\frac{\sqrt{i}}{n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0,n\to\infty.$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}$ 中的每一项 $\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}$ 都可以 Taylor 展开.

解 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{i}}{n}+\frac{i}{n^2}+O\left(\frac{i\sqrt{i}}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left[n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i}{n^2}+nO\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]\\&=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n^2}+\frac{n+1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

□

例题 3.131 设 $f\in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

笔记 注意 $\frac{2k}{2n-1},\frac{2k-1}{2n-1}\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$.

证明 注意到

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{2n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) \\
&\to \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0, n\to\infty.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n-1}\right) &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\
&= \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n-1}\right) - \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right) \\
&\to \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0, n\to\infty.
\end{aligned}
$$

故由子列极限命题 (b)可知

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.
$$

□

例题 3.132 设 $x_{n+1} = x_n - x_n^3, x_1 \in \mathbb{R}$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 收敛性.

笔记 因为递推函数 $g(x) = x(1-x^2)$ 关于原点对称, 而 $\{x_n\}$ 的敛散性只由 x_1 决定, 所以我们只需要考虑 $x_1 > 0$ 的情况即可, 由于 $g(x)$ 关于原点对称, 故 $x_1 < 0$ 的情况和 $x_1 > 0$ 的情况类似. 因此我们可以直接考虑数列 $\{|x_n|\}$. 这样能避免很多分类讨论. 注意这个递推函数 $g(x)$ 只有一个不动点 $x = 0$.

如果不加绝对值, 原递推函数的蛛网图会比较杂乱, 加上绝对值后讨论会比较清晰. 实际上, 通过蛛网图分析, 也能得到使得 $\{x_n\}$ 发散的 x_1 的临界点满足 $g(x_1) = x_2, g(x_2) = x_1$, 即 $g(g(x_1)) = x_1$. 于是就有

$$
-x_1^6 + 3x_1^4 - 3x_1^2 + 2 = 0. \tag{3.152}
$$

但是当 $x_1 = \pm1, \pm2$ 上式不成立, 故上述方程没有有理根. 令 $t = x_1^2$, 则上式可化为

$$
-t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = 0.
$$

当 $t = 2$ 时, 上式成立. 故上式可化为

$$
(t-2)(-t^2 + t - 1) = 0.
$$

因此上式只有一个实根 $t = 2$, 即(3.152)式只有当 $x_1^2 = 2$ 时才有实根. 故(3.152)式只有两个实根 $x_1 = \pm\sqrt{2}$.

考虑 $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$, 记 $f(x) = x|1 - x^2|$, 则 $f(x)$ 有两个不动点 $x = \pm\sqrt{2}$.

证明 考虑 $|x_{n+1}| = |x_n - x_n^3| = |x_n||1 - x_n^2|$, 则

(1) 当 $|x_1| > \sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \geqslant |x_n| > \sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递增, 且有下界 $\sqrt{2}$. 而 f 没有大于 $\sqrt{2}$ 的不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

(2) 当 $|x_1| \leqslant \sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1| \leqslant |x_n| \leqslant \sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递减, 且有下界 $\sqrt{2}$. 于是 $A \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$ 存在. 对 $|x_{n+1}| = |x_n||x_n^2 - 1|$ 两边同时取极限得 $A = 0$ 或 $\sqrt{2}$.

(i) 若 $A = 0$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = A = 0$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) 若 $A = \sqrt{2}$, 则由 $\{|x_n|\}$ 递减, 且 $|x_n| \leqslant \sqrt{2}$ 知 $\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \leqslant |x_n| \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow |x_n| = \sqrt{2}, n = 1, 2, \cdots$. 此时 $x_1 = \pm\sqrt{2}$, 再代入 $x_{n+1} = x_n - x_n^3$ 得 $x_n = (-1)^n x_1, n = 2, 3, \cdots$. 故此时 $\{x_n\}$ 发散.

综上

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \text{发散} & , |x_1| \geqslant \sqrt{2} \\ 0 & , |x_1| < \sqrt{2} \end{cases}.
$$

□

例题 3.133 设函数 $f : [a, b] \to [a, b]$ 满足

$$
|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in [a, b]
$$

设递推

$$x_1 \in [a,b], x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), n = 1, 2, \cdots$$

证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明 由于 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 因此归纳易得 $a \leqslant x_n \leqslant b$. 令 $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, 则

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(y) - f(x)]}{2} \geqslant 0, \forall y \geqslant x.$$

由命题可知递增递推数列 $\{x_n\}$ 一定单调, 故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在. □

例题 3.134 设 $f(x) \in C[0,1]$, $f(x) > 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{[0,1]} f.$$

笔记 回顾例题 3.108和命题 3.10. 因此我们只需证明命题 3.10的反向, 再结合例题 3.108就能得证. 但是反向 Stolz 定理一般不会直接应用, 因此我们可以尝试利用单调有界定理证明比值极限存在, 再利用命题 3.10就能直接得证.

实际上, 只要证明了单调性, 就能利用反向 Stolz 定理证明命题 3.10的反向也成立, 再利用例题 3.108就能得到结论.

证明 注意到

$$\frac{\int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} \iff \int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{3.153}$$

由 Cauchy 不等式知

$$\int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f^{\frac{n+2}{2}}(x) f^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

故(3.153)式成立, 即 $\left\{\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 单调递增. 因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 由例题 3.108可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{[0,1]} f.$$

再根据命题 3.10可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{[0,1]} f.$$

□

例题 3.135

1. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2, \ n = 1, 2, \cdots$$

   证明: $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在并求极限.

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$a_{n+1} + \frac{4}{a_n} < 4, \ n = 1, 2, \cdots$$

   证明: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在并求极限.

3. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$x_n + \frac{4}{x_{n+1}^2} < 3, \ n = 1, 2, \cdots$$

   证明: $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在并求极限.

4. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$ 满足

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1,\ n = 1,2,\cdots$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求极限.

笔记 此类问题其实就是把 x_{n+1}, x_n 部分全部换成 x, 数字部分往往是 x 部分的一个最值, 从把这个数字用不等式放缩为数列来得到估计.

证明

1. 由均值不等式可知

$$x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 2 \leqslant x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} \geqslant x_n.$$

并且 $x_n < 2 - \dfrac{1}{x_{n+1}} < 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \triangleq x$ 存在. 于是

$$2 \leqslant x + \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \leqslant 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.
3.
4.

□

例题 3.136 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R}), |f(x)| \le 1, f'(x) > 0$, 证明: 对任意 $b > a > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f'\left(nx - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

证明 证法一:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{1}{n+\frac{1}{x^2}}\left(n+\frac{1}{x^2}\right)f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{n+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}f\left(nx-\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{f\left(nb-\frac{1}{b}\right)}{n+\frac{1}{b^2}} - \frac{f\left(na-\frac{1}{a}\right)}{n+\frac{1}{a^2}} + \int_a^b f\left(nx-\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3\left(n+\frac{1}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&\le \frac{1}{n+\frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{a^2}} + \frac{2}{a^3\left(n+\frac{1}{b^2}\right)^2}\int_a^b f\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&\le \frac{1}{n+\frac{1}{b^2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{a^2}} + \frac{2(b-a)}{a^3\left(n+\frac{1}{b^2}\right)^2} \to 0,\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

证法二:令 $y = nx - \dfrac{1}{x}$, 则 $x = \dfrac{y+\sqrt{y^2+4n}}{2n} > a > 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int_{na-\frac{1}{a}}^{nb-\frac{1}{b}} f'(y)\frac{1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4n}}}{2n}\mathrm{d}y = \int_{na-\frac{1}{a}}^{nb-\frac{1}{b}} \frac{1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4n}}}{2n}\mathrm{d}f(y)\\
&= \frac{1+\frac{nb-\frac{1}{b}}{\sqrt{\left(nb-\frac{1}{b}\right)^2+4n}}}{2n}f\left(nb-\frac{1}{b}\right) - \frac{1+\frac{na-\frac{1}{a}}{\sqrt{\left(na-\frac{1}{a}\right)^2+4n}}}{2n}f\left(na-\frac{1}{a}\right) - \int_{na-\frac{1}{a}}^{nb-\frac{1}{b}} f(y)\frac{\sqrt{y^2+4n}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2+4n}}}{4n^2(y^2+4n)}\mathrm{d}y\\
&\le \frac{1+\frac{nb-\frac{1}{b}}{\sqrt{\left(nb-\frac{1}{b}\right)^2+4n}}}{2n} + \frac{1+\frac{na-\frac{1}{a}}{\sqrt{\left(na-\frac{1}{a}\right)^2+4n}}}{2n} + \int_{na-\frac{1}{a}}^{nb-\frac{1}{b}} \frac{\sqrt{\left(nb-\frac{1}{b}\right)^2+4n}+\frac{\left(nb-\frac{1}{b}\right)^2}{\sqrt{\left(na-\frac{1}{a}\right)^2+4n}}}{4n^2\left(\left(na-\frac{1}{a}\right)^2+4n\right)}\mathrm{d}y\\
&\to 0,\ n\to+\infty.
\end{aligned}$$

□

例题 3.137 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

证明 证法一:对 $\forall\delta>0$, 我们有
$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x<\frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{e^x}\mathrm{d}x<+\infty.$$
于是由Riemman 引理可知
$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x\int_{\delta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=0.$$
注意到
$$\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x\sim\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x,\ \delta\to 0^+,$$
$$\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{n\delta}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\to\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{命题 10.3(2)}}\frac{\pi}{2},\ n\to\infty,$$
故
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$
证法二:记 $p(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$, $p(0)=-1$, 则 $p(x)$ 可导, 并且
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-1}{x}\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{命题 10.3(2)}}\int_0^{\infty}p(x)\sin nx\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\infty}p(x)d\frac{\cos nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\left(1-\int_0^{\infty}p'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$
求导有 $p'(x)=\dfrac{1-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}$, $p'(0)=\dfrac{1}{2}$, 所以 $\left|\int_0^{\infty}p'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\infty}\dfrac{1-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}\mathrm{d}x<\infty$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin nx}{x}e^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. □

例题 3.138 设 $f(x),g(x)\in C[0,1]$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{x}$ 为有限数, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)g(x^n)dx=f(1)\int_0^1\frac{g(x)}{x}dx.$$

证明 注意到
$$n\int_0^1 f(x)g(x^n)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)g(x)x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{g(x)}{x}\cdot x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x.$$
令 $h(x)\triangleq\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x},x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{x},x=0\end{cases}$, 则 $h\in C[0,1]$. 从而
$$n\int_0^1 f(x)g(x^n)\mathrm{d}x=\int_0^1 h(x)\cdot x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x.$$
$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 对 $\forall x\in[\delta,1]$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$ 及 $f\in C[0,1]$ 可知, 存在 $N>0$, 使得
$$\left|x^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon,\quad\left|f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)\right|<\varepsilon,\forall n>N.$$
设 $|h(x)|,|f(x)|\leqslant M\in\mathbb{R}$, 则
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 h(x)\cdot x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x-f(1)\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^1 h(x)\left[x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\delta}|h(x)|\left|x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)\right|\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1|h(x)|\left|x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2M^2\delta+\int_\delta^1 |h(x)|\left[\left|x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-x^{\frac{1}{n}}f(1)\right|+\left|x^{\frac{1}{n}}f(1)-f(1)\right|\right]\mathrm{d}x\\
&=2M^2\delta+\int_\delta^1 |h(x)|\left[x^{\frac{1}{n}}\left|f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-f(1)\right|+f(1)\left|x^{\frac{1}{n}}-1\right|\right]\mathrm{d}x\\
&<2M^2\varepsilon+\int_\varepsilon^1 M\left[1+f(1)\right]\varepsilon\mathrm{d}x=\left(2M^2+M\left[1+f(1)\right](1-\varepsilon)\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(x)\cdot x^{\frac{1}{n}}f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x=f(1)\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)g(x^n)\mathrm{d}x=f(1)\int_0^1\frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

□

例题 3.139 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 且 $f(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}\cos\frac{3}{t}\cos\frac{5}{t}\cos\frac{7}{t}dt$, 求证:$f$ 是可导的, 并求 $f'(0)$.

笔记 此类问题一般都是利用Riemman 引理解决.

证明 由Riemman 引理可知

$$\int_1^\infty\frac{\cos nx}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\cos\frac{3}{t}\cos\frac{5}{t}\cos\frac{7}{t}\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=\frac{1}{u}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^\infty\frac{\cos u\cos 3u\cos 5u\cos 7u}{u^2}\mathrm{d}u=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\int_\lambda^\infty\frac{\cos u\cos 3u\cos 5u\cos 7u}{u^2}\mathrm{d}u\\
&\xlongequal{u=\lambda x}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\infty\frac{\cos(\lambda x)\cos(3\lambda x)\cos(5\lambda x)\cos(7\lambda x)}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\infty\frac{\frac{1}{2}(\cos(2\lambda x)+\cos(4\lambda x))\cos(5\lambda x)\cos(7\lambda x)}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\infty\frac{\frac{1}{4}(\cos(3\lambda x)+\cos(7\lambda x)+\cos(9\lambda x)+\cos(\lambda x))\cos(7\lambda x)}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\infty\frac{\frac{1}{8}[\cos(16\lambda x)+\cos(14\lambda x)+\cos(10\lambda x)+\cos(6\lambda x)+\cos(4\lambda x)+\cos(2\lambda x)+1]}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{8}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

□

例题 3.140 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(n\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x^2}dx-\frac{1}{\pi^2}\right)=0.$$

笔记 如果需要估计得更精确, 就需要利用 E-M 公式对 $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2}$ 进行更精确的估计和计算.

证明 注意到

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_0^{k\pi}\frac{|\sin x|}{(x+n\pi)^2}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\frac{|\sin x|}{(x+(n+k-1)\pi)^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin x\sum_{k=1}^n\frac{1}{(x+(n+k-1)\pi)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\pi\sin x\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

对 $\forall x\in[0,\pi]$, 我们有

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{[(k+1)\pi]^2}\leq\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2}\leq\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k\pi)^2}.$$

又因为

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}\leq\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\ \forall k\in\mathbb{N},$$

所以一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\sin x\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2}\mathrm{d}x\leq\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\sin x\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k\pi)^2}\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{\pi^2}.\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\sin x\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2}\mathrm{d}x\geq\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\sin x\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{[(k+1)\pi]^2}\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{\pi^2}.\end{aligned}$$

故由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi^2}\right)=0.$$

□

第四章 函数与微分

4.1 基本定理

常见的反例:$f(x)=x^m sin\frac{1}{x^n}$.

定理 4.1 (Leibniz 公式)

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

例题 4.1 设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 中且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

笔记 将极限定义中的 ε,δ 适当地替换成 $\frac{1}{n},\frac{1}{N}$ 往往更方便我们分析问题和书写过程.

证明 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 则 $x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=x\left\{\frac{1}{x}\right\}$.

对任意 $\varepsilon>0$, 依据极限定义, 存在 $\delta>0$ 使得任意 $x\in(0,\delta)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

取充分大的正整数 N 使得 $\frac{1}{N}<\delta$, 则任意 $x\in\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

考虑函数 $x\left\{\frac{1}{x}\right\}$ 在区间 $\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)$ 中的值域, 也就是连续函数

$$g(u)=\frac{u-[u]}{u}=\frac{u-N}{u},u\in(N,N+1)$$

的值域, 考虑端点处的极限可知 $g(u)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 且严格单调递增. 所以对任意 $y\in\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 都存在 $x\in\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)\subset(0,\delta)$ 使得 $\frac{1}{x}=g^{-1}(y)\in(N,N+1)$, 即 $y=g(\frac{1}{x})=x\left\{\frac{1}{x}\right\}$, 故 $|f(y)|=\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

也就是说, 任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得任意 $y\in\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 都有 $|f(y)|<\varepsilon$, 结论得证. □

例题 4.2

证明

□

4.2 微分学计算

4.2.1 单变量微分学计算

例题 4.3

(1) 设 $f(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(x-k)$. 对整数 $0\leqslant j\leqslant n$, 求导数 $f'(j)$.

(2) 设 $g(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(e^x-k)$, 求 $g'(\ln j),j=0,1,2,\cdots,n$.

解

(1) 解法一:注意到 $f'(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x-k)$, 故

$$\begin{aligned}f'(j)&=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(j-k)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(j-k)\\&=(-1)^{n-j}j!(n-j)!+\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(j-j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}(j-k)\\&=(-1)^{n-j}j!(n-j)!\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}f'(j)&=\lim_{x\to j}\frac{f(x)-f(j)}{x-j}=\lim_{x\to j}\frac{\prod_{k=0}^{n}(x-k)-\prod_{k=0}^{n}(j-k)}{x-j}\\&=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)+\lim_{x\to j}\frac{(j-j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)}{x-j}\\&=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(j-k)=(-1)^{n-j}j!(n-j)!\end{aligned}$$

(2) 记 $f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-k)$, 则 $g(x)=f(e^x)$. 从而 $g'(x)=e^xf'(e^x)$, 于是由 (1) 可知

$$g'(\ln j)=jf'(j)=j\cdot(-1)^{n-j}j!(n-j)!$$

□

例题 4.4 对 $n\in\mathbb{N}$,

(1) 设 $f(x)=\sin(ax)$,$a\in\mathbb{R}$, 求 $f^{(n)}$.

(2) 设 $f(x)=e^x\cos x$, 求 $f^{(n)}$.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 求 $f^{(n)}$.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}$.

(5) 设 $f(x)=\arctan x$,$x>0$, 求 $f^{(n)}$.

解

(1) 我们断言

$$f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right),\quad\forall n\in\mathbb{N}.\tag{4.1}$$

当 $n=0$ 时, 上式显然成立. 假设当 $n=k$ 时上式成立, 则

$$f^{(k+1)}(x)=a^{k+1}\cos\left(ax+\frac{k}{2}\pi\right)=a^{k+1}\sin\left(ax+\frac{k+1}{2}\pi\right).$$

故由数学归纳法可知 (4.1) 式成立.

(2) 由 Euler 公式可知,$\cos x=\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})$, 从而 $f(x)=\mathrm{Re}[e^{(1+\mathrm{i})x}]$. 于是

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{Re}[(1+\mathrm{i})^ne^{(1+\mathrm{i})x}],\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

注意到

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},$$

进而 $(1+\mathrm{i})^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$. 故

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{Re}\left[2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})x}\right]=2^{\frac{n}{2}}e^{x}\mathrm{Re}\left[e^{\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{i}}\right]=2^{\frac{n}{2}}e^{x}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

(3) 令 $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $\ln x=xy$. 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 两边同时对 x 求 n 阶导, 得

$$(\ln x)^{(n)}=(xy)^{(n)}\Longleftrightarrow\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}x^{(k)}y^{(n-k)}=xy^{(n)}+ny^{(n-1)}.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}&xy^{(n)}+ny^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\\ \Longleftrightarrow\ &(-1)^n x^{n+1}y^{(n)}-(-1)^{n-1}nx^ny^{(n-1)}=-(n-1)!\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{(-1)^n x^{n+1}y^{(n)}}{n!}-\frac{(-1)^{n-1}x^ny^{(n-1)}}{(n-1)!}=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{(-1)^nx^{n+1}y^{(n)}}{n!}-xy=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}\right).$$

故

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}\right)-\ln x\right).$$

(4) 注意到 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$, 则 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$.

(5) 注意到 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}}-\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$, 故

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n}-\frac{1}{(x+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}\right]=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\mathrm{n}}}\left[(x+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}-(x-\mathrm{i})^n\right]\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\mathrm{n}}}\left[\left(\sqrt{1+x^2}e^{\mathrm{i}\arctan\frac{1}{x}}\right)^{\mathrm{n}}-\left(\sqrt{1+x^2}e^{-\mathrm{i}\arctan\frac{1}{x}}\right)^n\right]\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\left(e^{\mathrm{i}n\arctan\frac{1}{x}}-e^{-\mathrm{i}n\arctan\frac{1}{x}}\right)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\cdot2\mathrm{i}\cdot\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

□

例题 4.5 设 $f(x)=x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 计算 $f^{(n)}(0),n\in\mathbb{N}$.

笔记 此类问题都是通过背 Taylor 公式之后通过拼凑来得到 $f^{(n)}(0)$, 这是因为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

解 注意到

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=[\operatorname{arcsinh}x]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\xlongequal{\text{广义二项式定理}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n}x^{2n},$$

于是

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n}}{2n+1}x^{2n+1}=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{n}}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}\\
&= x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}.
\end{aligned}
$$

从而 $f(x)=x^3+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+3}$, 因此

$$
f^{(n)}(0)=\begin{cases}6, & n=3\\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!(2m+3)!}{m!\cdot 2^m(2m+1)}, & n=2m+3,\ m=1,2,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
$$

□

命题 4.1

$$
\arcsin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n},\ x\in(-1,1).
$$

例题 4.6 生成级数或者建立递推法求解高阶导数值 对 $n\in\mathbb{N}_0$,

(1) 设 $f(x)=\arcsin^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(2) 设 $f(x)=\arcsin x\cdot\arccos x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(3) 设 $f(x)=(x+\sqrt{x^2+1})^m$,$m\in\mathbb{N}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(4) 设 $f(x)=\arctan^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

笔记 此类问一般是先建立函数满足的微分方程, 然后用乘积求导法则或者形式幂级数对比系数来得到导数的递推, 从而完成了证明.

解

(1) 解法一:注意到

$$
f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\Longleftrightarrow\sqrt{1-x^2}f'=2\arcsin x,
$$

令 $y=f(x)$, 则对上式两边同时求导得

$$
-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'+\sqrt{1-x^2}f''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\Longleftrightarrow -xy'+(1-x^2)y''=2.
$$

再对上式两边同时对 x 求 n $(n\geqslant 2)$ 阶导, 得

$$
\begin{aligned}
&\left[-xy'+(1-x^2)y''\right]^{(n)}=2^{(n)}\\
\Longleftrightarrow&-\left[ny^{(n)}+xy^{(n+1)}\right]+\left[\binom{n}{2}\cdot(-2)y^{(n)}+\binom{n}{1}(-2x)y^{(n+1)}+(1-x^2)y^{(n+2)}\right]=0
\end{aligned}
$$

将 $x=0$ 代入上式得

$$
f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0),\forall n\geqslant 2. \tag{4.2}
$$

显然上式对 $n=1$ 也成立. 又注意到 $f''(0)=2$, 因此对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 由(4.2) 式可得

$$
\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)}=4n^2\Rightarrow\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)}=\prod_{i=1}^{n}4i^2\Rightarrow f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2.
$$

显然上式对 $n=0$ 也成立. 故

$$
f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2,\forall n\in\mathbb{N}_0.
$$

又 $f'''(0)=0$, 故由(4.2)式可得

$$
f^{(2n-1)}(0)=(2n-1)^2f^{(2n-3)}(0)=\cdots=[(2n-1)!!]^2f^{(3)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}_1.
$$

解法二:注意到

$$f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2}f'=2\arcsin x,$$

令 $y=f(x)$, 则对上式两边同时求导得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'+\sqrt{1-x^2}f''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow -xy'+(1-x^2)y''=2. \tag{4.3}$$

因为 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 所以由 Taylor 公式可知

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

其中 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n\in\mathbb{N}_0$. 再将上式代入(4.3) 式可得

$$\begin{aligned}
2&=-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-n(n-1)a_n\right]x^n.
\end{aligned}$$

比较上式两边系数, 得对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 都有

$$\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-n(n-1)a_n=0\\
\Longleftrightarrow\ &(n+2)(n+1)\cdot\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}-n\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}-n(n-1)\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0\\
\Longleftrightarrow\ &f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

又 $f''(0)=2$, 因此对 $\forall n\in\mathbb{N}_1$, 由 (4.4)式可得

$$\frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2n)}(0)}=4n^2 \Rightarrow \frac{f^{(2n+2)}(0)}{f^{(2)}(0)}=\prod_{i=1}^{n}4i^2 \Rightarrow f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2.$$

显然上式对 $n=0$ 也成立. 故

$$f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(n!)^2, \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

又 $f'''(0)=0$, 故由(4.4)式可得

$$f^{(2n-1)}(0)=(2n-1)^2f^{(2n-3)}(0)=\cdots=[(2n-1)!!]^2f^{(3)}(0)=0, \forall n\in\mathbb{N}_1.$$

(2)

(3)

(4)

□

命题 4.2

设 f 在 a 处 $n+1$ 阶连续可导的, 证明:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

注 不妨设 $a=0, f(a)=0$ 的原因: 先证不妨设 $f(a)=0$ 成立. 假设 $f(a)=0$ 时结论成立, 则当 $f(a)\neq 0$ 时, 令 $g(x)=f(x)-f(a)$, 则 $g(a)=0$, 从而由假设可知

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x-a}\right]=\frac{g^{(n+1)}(a)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

故可以不妨设 $f(a)=0$.

再证不妨设 $a=0$ 成立. 假设 $a=0$ 时结论成立, 则当 $a\neq 0$ 时, 令 $g(x)=f(x+a)$, 则由假设可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x}\right]=\frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x+a)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{g(x)}{x}\right]\\&=\frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.\end{aligned}$$

故可以不妨设 $a=0$.

证明 不妨设 $a=0, f(a)=0$, 不妨设 $a=0, f(a)=0$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}=\frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(-x)^k.$$

于是由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)}{x}\right]&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(-x)^k}{x^{n+1}}\\&\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}}n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(x)(-x)^{k-1}}{(n+1)x^n}\\&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k)!}f^{(k+1)}(x)(-x)^{k}}{(n+1)x^n}\\&=n!(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(-x)^n}{(n+1)x^n}\\&=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.\end{aligned}$$

□

例题 4.7 设 $f\in C^\infty(\mathbb{R}), n\in\mathbb{N}$ 满足

$$f^{(j)}(0)=0, j=0,1,2,\cdots,n-1, f^{(n)}(0)\neq 0.$$

证明: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^n}, & x\neq 0\\ \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}, & x=0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微.

笔记 本题不能对 Taylor 公式的 peano 余项求导来说明 g 可微分性, 这是不严格的.

证明 当 $n=0$ 时,$g=f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 显然成立. 假设命题对 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 考虑 $n+1$ 的情形. 令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 则

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{\frac{f(x)}{x}}{x^n}=\frac{h(x)}{x^n}. \tag{100.119}$$

对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 由命题 4.2可知

$$\lim_{x\to 0}h^{(k)}(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(k)}=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}.$$

于是由导数极限定理可知 $h^{(k)}(x)=\dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$, 故 $h\in C^\infty(\mathbb{R})$. 并且

$$h^{(j)}(0)=\lim_{x\to 0}h^{(j)}(x)=\frac{f^{(j+1)}(0)}{j+1}=0,\quad 0\leqslant j\leqslant n-1,$$

$$h^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}h^{(n)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\neq 0. \tag{4.5}$$

因此 $h(x)$ 满足归纳假设条件, 进而由归纳假设及(4.4)(4.5)式可知

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}} & ,x\neq 0\\ \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} & ,x=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{h(x)}{x^{n}} & ,x\neq 0\\ \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!} & ,x=0\end{cases}\in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

因此由数学归纳法可知, 结论成立. □

第五章 微分中值定理

5.1 Hermite 插值定理

定理 5.1 (Taylor 定理)

(1) **带 Peano 余项:**

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 则 $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

(2) **带 Lagrange 余项:**

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶连续导数, 且 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导数,x_0 为 $[a,b]$ 内一定点, 则对于任意的 $x\in[a,b]$, 在 x,x_0 之间存在一个数 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(3) **带积分型余项:**

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0,\delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x\in U(x_0,\delta)$, t 在 x 与 x_0 之间, 都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

(4) **带 Cauchy 型余项:**

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0,\delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x\in U(x_0,\delta)$, 都存在 ξ 在 x 与 x_0 之间, 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

♡

证明

(1) 带 Peano 余项:

(2) 带 Lagrange 余项:

(3) 带积分型余项:

(4) 带 Cauchy 型余项:

□

定理 5.2 (Hermite 插值定理)

给定 $a<x_1<x_2<\cdots<x_m<b$ 和非负整数 $s_j, j=0,1,2,\cdots,m$. 设 $f\in C^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1}[a,b]$ 且 $f\in D^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)}(a,b)$, 设 $p(x)$ 满足条件: 闭区间 $[a,b]$ 中的 m 个点 $a\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le b$,$s_j\in\mathbb{N}_0$, $j=1,2,\cdots,m$, 都有唯一的次数不超过 $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$ 的多项式 $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, 并且

$$p^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j), i=0,1,\cdots,s_j, j=1,2,\cdots,m.$$

并称满足上述条件的多项式 $p(x)$ 为 **Hermite 插值多项式**, 则对每个 $x\in[a,b]$, 都存在 $\theta\in(\min\{x,x_1\},$

$\max\{x, x_m\})$, 使得

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)}(\theta)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)!}(x-x_1)^{s_1+1}(x-x_2)^{s_2+1}\cdots(x-x_m)^{s_m+1}.$$

笔记 $p(x)$ 的求法: 先由各插值点的次数确定 $p(x)$ 的最高次数 (即 $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$), 再由方程 $p^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j), i=0,1,\cdots,s_j, j=1,2,\cdots,m$. 直接解出.

证明

□

命题 5.1 (Lagrange 插值公式)

设 $f\in C[a,b]\cap D^2(a,b)$, 证明: 对 $\forall x\in[a,b]$, 存在 $\theta\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b).$$

注 考试中先用 K 值法证明, 再直接用.

笔记 K 值法: 先令要证的中值等式中的高阶导数中值点 (本题为 $f''(\theta)$) 为常数, 再构造函数由 Rolle 中值定理推出结论即可.

证明 当 $x=a$ 或 b 时, 结论显然成立.

对 $\forall x\in(a,b)$, 固定 x, 记

$$K=\frac{2\left[f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]}{(x-a)(x-b)}.$$

令 $g(y)=f(y)-\frac{y-b}{a-b}f(a)-\frac{y-a}{b-a}f(b)-\frac{K}{2}(y-a)(y-b)$, 则

$$g'(y)=f'(y)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}-\frac{K}{2}(2y-a-b),\quad g''(y)=f''(y)-K.$$

从而 $g(a)=g(b)=g(x)=0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1\in(a,x)$,$\theta_2\in(x,b)$, 使得

$$g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)\subset(a,b)$, 使得 $g''(\theta)=f''(\theta)-K=0$, 即 $f''(\theta)=K$. □

定理 5.3 (带积分型余项的 Lagrange 插值公式)

设 f 是 $[a,b]$ 上的二阶可微函数且 f'' 在 $[a,b]$ 可积, 则成立

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y,$$

这里

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geq y\geq x\geq a,\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geq x\geq y\geq a.\end{cases}$$

特别的, 若还有 $f(a)=f(b)=0$, 则有

$$f(x)=\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y. \tag{5.1}$$

笔记 $k(x,y)$ 也叫 Green 函数. 容易验证 $|k(x,y)|\leq|k(x,x)|$.

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b),x\in[a,b],$$

则有 $g''(x)=f''(x),g(a)=g(b)=0$. 因此只需对 g 证明式(5.1).

事实上, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_a^b g''(y)k(x,y)\mathrm{d}y&=\frac{b-x}{b-a}\int_a^x g''(y)(a-y)\mathrm{d}y+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b g''(y)(y-b)\mathrm{d}y\\&=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)g'(x)-\int_a^x g'(y)\mathrm{d}y\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)(x-b)+\int_x^b g'(y)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{b-x}{b-a}[(a-x)g'(x)+g(x)]+\frac{x-a}{b-a}[-g'(x)(x-b)+g(x)]\\&=g(x).\end{aligned}$$

这就证明了(5.1)式. □

例题 5.1 设 $f\in D^3[0,1]$ 满足 $f(0)=-1,f'(0)=0,f(1)=0$, 证明对任何 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{6}f'''(\theta).$$

证明 当 $x=0$ 或 1 时, 结论显然.

对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 记 $K=\dfrac{6[f(x)+1-x^2]}{x^2(x-1)}$. 令 $g(y)=f(y)+1-y^2-\dfrac{y^2(y-1)}{6}K$, 则

$$\begin{aligned}g'(y)&=f'(y)-2y-\frac{y(y-1)}{3}K-\frac{y^2}{6}K,\\g''(y)&=f''(y)-2-\frac{2y-1}{3}K-\frac{y}{3}K,\\g'''(y)&=f'''(y)-K.\end{aligned}$$

从而 $g(0)=g(1)=g(x)=0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1\in(0,x)$,$\theta_2\in(x,1)$, 使得

$$g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

又由 $f'(0)=0$ 可知

$$g'(0)=g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1\in(0,\theta_1)$,$\xi_2\in(\theta_1,\theta_2)$, 使得

$$g''(\xi_1)=g''(\xi_2)=0.$$

于是再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$, 使得 $g'''(\theta)=f'''(\theta)-K$. 即 $f'''(\theta)=K$. □

例题 5.2 设 $f\in C[0,2]\cap D(0,2)$ 满足 $f(0)=f(2)=0,|f'(x)|\leq M,\forall x\in(0,2)$. 证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq M.$$

笔记 靠近哪个点就用哪个点的插值多项式.(原因是: 越靠近插值点, 拟合的效果越好)

证明 当 $x\in[0,1]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(\theta(x))}{1!}(x-0)=f'(\theta(x))x,$$

于是

$$|f(x)|\leq|f'(\theta(x))|\cdot x\leq Mx. \tag{5.2}$$

当 $x\in[1,2]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(\zeta(x))}{1!}(x-2)=f'(\zeta(x))(x-2),$$

于是

$$|f(x)|\leq|f'(\zeta(x))|\cdot|x-2|\leq M(2-x). \tag{5.3}$$

结合(5.2) 和(5.3), 我们有

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\le \int_0^1 (Mx)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (M(2-x))\,\mathrm{d}x = M.$$

□

例题 5.3 设 $f \in D^2[0,1], f(0)=f(1)=0, |f''(x)| \le M$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}.$$

笔记 最多可以拟合 $f(0), f(1)$ 两个条件, 需要插值一次多项式, 余项需要 2 阶导数, 条件完美符合. 因此先由 Hermite 插值定理 (Lagrange 插值公式) 直接写出插值多项式和余项: 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1].$$

但是注意考试时, 需要先用 K 值法证明上式再使用.

证明 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1].$$

积分并取绝对值就有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 \left|\frac{f''(\theta(x))}{2}\right| |x(x-1)|\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{12}.$$

□

例题 5.4 设 $f \in D^2[a,b]$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

笔记 题目并没有明确给出插值点的相关条件, 需要我们自己选取合适的插值点.(一般插值点都是特殊点, 比如: 端点、中点、极值点等)

我们观察到需要证明的等式中含有 a,b 两点并且 $f2$ 阶可导, 因此直接选取这两点作为插值点即可.

注 考试中下述证明中的 Lagrange 插值公式也需要先用 K 值法证明才能使用.

本题也可以直接用 K 值法证明. 只需令 $g(y) = \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x = (y-a)\frac{f(a)+f(y)}{2} - \frac{(y-a)^3}{12}K$ 即可.

证明 由 Lagrange 插值公式可知, 对 $\forall x \in [a,b]$, 存在 $\theta(x) \in (a,b)$ 使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{f''(\theta(x))}{2}(x-a)(x-b). \tag{5.4}$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{x-a}{b-a}f(b)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))(x-a)(x-b)\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

由(5.4)式可得

$$f''(\theta(x)) = \frac{2\left[f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)\right]}{(x-a)(x-b)} \in C(a,b).$$

又由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to a^+} f''(\theta(x)) = \lim_{x\to a^+} \frac{2\left(f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)\right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{a-b}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)}{x-a}$$
$$= \frac{2}{a-b}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2}{b-a}\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f\prime(a)\right],$$

$$\lim_{x\to b^-} f''(\theta(x)) = \lim_{x\to b^-} \frac{2\left(f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)\right)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2}{b-a}\lim_{x\to b^-}\frac{f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)}{x-a}$$

$$= \frac{2}{b-a} \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a}}{1} = \frac{2\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]}{b-a}.$$

从而 $f''(\theta(x))$ 可以连续延拓到 $[a,b]$ 上, 又因为改变有限个点的函数值后, 其积分结果不变, 所以可以不妨设 $f''(\theta(x)) \in C[a,b]$. 于是由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

利用(5.5)和(5.6)式可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 5.5 设 $f \in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

笔记 本题需要我们选取合适的插值点和插值条件, 这里我们应该选 $f(\frac{a+b}{2}), f'(\frac{a+b}{2})$ 作为插值条件, 插值多项式为 1 次, 余项需要 2 阶导数.

注 本题也可以直接用 K 值法证明.

证明 由 Taylor 定理 (Hermite 插值定理) 可知, 存在 $\theta \in (a,b)$, 使得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\theta)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边同时积分, 并由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \frac{f''(\theta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 5.6 设 $f \in C^2[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geq 4.$$

证明 由带积分余项的 Lagrange 插值定理可知, 我们有

$$f(x) = \int_0^1 f''(y)k(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{其中} \quad k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a, \\ \dfrac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant \int_0^1 |f''(y)||k(x,y)|\,\mathrm{d}y \leqslant |k(x,x)|\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y \\ &= x(1-x)\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{\frac{1}{4}\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}x = \frac{4}{\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y}\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x = 4.$$

但实际上, 我们可以得到

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x)\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_0^1 |f''(y)|\,\mathrm{d}y}\int_0^1 \frac{|f''(x)|}{x(1-x)}\mathrm{d}x.$$

□

5.2 函数构造类

5.2.1 单中值点问题 (一阶构造类)

例题 5.7

1. 设 $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$ 满足 $f(0) = f(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 5$. 则存在 $\xi \in (0,2)$ 使得
$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$
2. 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$, $f(0) = 0$, 证明: 存在 $u \in (0,1)$, 使得
$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$
3. 设 $f \in C[-1,2] \cap D(-1,2)$ 且有 $f(-1) = f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$. 证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都存在 $\xi \in (-1,2)$, 使得
$$f'(\xi) = \lambda\left[f(\xi) - \frac{\xi}{2}\right] + \frac{1}{2}.$$

笔记 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

注

1. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \dfrac{2x-y}{x}$, 解得 $y = \dfrac{c}{x} + x$.
   Step2 分离常数 c 得 $c = x(y-x)$, 常数变易得构造函数 $c(x) = x(f(x)-x)$.
2. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \dfrac{xy}{1-x}$, 解得 $y = \dfrac{ce^{-x}}{x-1}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c = e^x(x-1)y$, 常数变易得构造函数 $c(x) = e^x(x-1)f(x)$.
3. **Step1** 考虑微分方程 $y' = \lambda\left[y - \frac{x}{2}\right] + \frac{1}{2}$, 解得 $y = ce^{\lambda x} + \frac{x}{2}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c = \dfrac{y-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$, 常数变易得构造函数 $c(x) = \dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$.

证明

1. 由 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 5$ 及 $f \in C[0,2]$ 可知
$$f(1) = \lim_{x\to1} f(x) = 5\lim_{x\to1}(x-1) + 2 = 2.$$
从而
$$f'(1) = \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5.$$
构造函数 $c(x) = x(f(x)-x)$, 我们求导得
$$c'(x) = f(x) - 2x + xf'(x). \tag{5.7}$$
注意到
$$c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4.$$
于是由 Lagrange 中值定理得 $\alpha \in (0,1), \beta \in (1,2)$, 使得
$$c'(\alpha) = \frac{c(1)-c(0)}{1-0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1)-c(2)}{1-2} = -5.$$
由导数介值定理知存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得 $c'(\xi) = 0$. 由(5.7)知
$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}.$$
这就完成了证明.
2. 构造 $c(x) = e^x(x-1)f(x)$, 则 $c(0) = c(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $u \in (0,1)$, 使得 $c'(u) = 0$, 这恰好是
$$f'(u) = \frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 构造 $c(x)=\dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$. 注意到

$$c(-1)=0, c(2)=-\frac{3}{2e^{2\lambda}}, c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

由零点定理知存在 $\theta\in(\frac{1}{2},2)$, 使得 $c(\theta)=0$. 再由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(-1,\theta)\subset(-1,2)$, 使 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

□

例题 5.8 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)>0, f(1)>0, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

注 虽然本题直接考虑微分方程:$y'+3y^2=0$ 解出 y, 然后常数变易也不难得到构造函数. 但是下述证明的方法旨在介绍一种新的解决这类问题的方法.

笔记 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是要把部分 f 视为已知函数来构造, 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数. 考虑 $y'+3f^2y=0$. 解得 $y=ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 分离变量得构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$.

证明 证法一: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0)>0, f(1)>0$, 我们知道 $f(x)>0, \forall x\in[0,\theta)\cup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$, 这就是一个矛盾! 于是存在 $\theta_1\neq\theta_2$, 使得 $f(\theta_1)=f(\theta_2)=0$. 现在就有 $c(\theta_1)=c(\theta_2)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

证法二: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

从而 $c(\theta)=0$. 因为 $f(0),f(1)>0$, 所以 $c(0),c(1)>0$. 又由 $c\in C[0,1]$, 故 $c(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取到最大、最小值. 由于 $c(\theta)=0<c(0),c(1)$, 因此 $c(x)$ 只能在 $(0,1)$ 上可取到最小值, 即存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c(\xi)\leq c(x), \forall x\in[0,1]$. 由费马引理可知 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

□

例题 5.9 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$f'(\xi)=\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 核心想法: **分部积分转移导数, 但是需要控制非积分部分为零.**

注 $\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(6x^2-6x)'f(x)\mathrm{d}x$ 的原因: 我们希望利用分部积分后能够直接转移导数而没有多余部分, 因此我们待定 $\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)\mathrm{d}x$, 即 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 分部积分得到

$$\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)\mathrm{d}x=(ax^2+bx+c)f(x)|_0^1-\int_0^1(ax^2+bx+c)f'(x)\mathrm{d}x.$$

我们希望 $(ax^2+bx+c)f(x)\big|_0^1=(a+b+c)f(1)-cf(0)=0$, 即希望 $x=0,1$ 恰好是 ax^2+bx+c 的根, 并且 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 从而

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=0 \\ 2a=12 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-6 \\ c=0 \end{cases}.$$

由此可知, 满足我们期望的二次函数只有 $6x^2-6x$, 即 $\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(6x^2-6x)'f(x)\mathrm{d}x$.

证明

$$\begin{aligned}\int_0^1(12x-6)f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(6x^2-6x\right)'f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}f'(\xi)\int_0^1\left(6x-6x^2\right)\mathrm{d}x=f'(\xi),\xi\in[0,1].\end{aligned}$$

□

例题 5.10

1. 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}]$, $f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi).$$

注

1. 考虑微分方程 $y''=\frac{2y'}{1-x}$, 解得 $y'=\frac{c}{(1-x)^2}$, 常数变易得到构造函数 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$.
2. 虽然我们可以通过解微分方程得到构造函数, 但是也不要忘记直接猜测构造函数的想法. 当需要考虑的微分方程比较难解时, 就只能猜测构造函数.

   考虑微分方程:$y''=2yy'$, 解得 $y'=y^2+c$, 得到构造函数 $c(x)=f'(x)-f^2(x)$. 但是根据这个构造函数结合已知条件再利用中值定理无法得到结论.($f(\frac{\pi}{4})=1$ 用不了) 因此需要构造更加具体的函数才行.

   然而原问题等价于利用 Rolle 中值定理找一个中值点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c'(\xi)=0$. 但由条件只能得到 $c(0)=1$,$c(\frac{\pi}{4})$ 无法确定. 因此我们希望还能找一个点 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1$.

   将这个看作一个新的中值问题, 即已知设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}]$, $f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明: 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1.$$
   考虑微分方程:$y'-y^2=1$, 解得 $\arctan y=x+C$, 常数变易得到新的构造函数 $g(x)=\arctan f(x)-x$. 由条件可知 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0$, 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-f^2(x_0)=1$. 从而找到了满足我们需求的中值点 x_0, 故结论得证.(具体证明见下述证明)

证明

1. 令 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$, 则 $c'(x)=2(x-1)f'(x)+(1-x)^2f''(x)$. 由 $f(0)=f(1)$ 及 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 从而 $c(1)=c(\xi)=0$, 再根据 Rolle 中值定理可得, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得
$$c'(\eta)=0\Leftrightarrow f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 令 $c(x)=f'(x)-f^2(x), g(x)=\arctan f(x)-x$, 则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f^2(x)-1}{1+f^2(x)}$. 进而由条件可得 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0, g'(0)=0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $a\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(a)=0$, 即 $f'(a)=f^2(a)+1$. 从而 $c(a)=$

$1, c(0)=f'(0)-f^2(0)=1$, 故再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得

$$c(1)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi).$$

□

5.2.2 多中值点问题

例题 5.11 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在互不相同的 $\lambda,\mu\in(0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1+f'(\mu))=2.$$

笔记 核心想法: 插入一个点 c, 将两个中值点问题转换为如何确定这单个插入点 c 的问题.

注 思路分析: 待定 $c\in(0,1)$, 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\lambda\in(0,c),\mu\in(c,1)$, 使得

$$f'(\lambda)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}, f'(\mu)=\frac{f(c)-f(1)}{c-1}=\frac{f(c)-1}{c-1}.$$

需要

$$2=f'(\lambda)(1+f'(\mu))=\frac{f(c)}{c}\left[1+\frac{f(c)-1}{c-1}\right],$$

只需找到一个 $c\in(0,1)$ 使得上式成立. 但是直接考虑上式比较困难, 我们希望能找到一个特殊的 c 从而将上式化简. 因此待定 k, 我们希望 $f(c)$ 同时满足 $\frac{f(c)-1}{c-1}=k$(这里期望 $f(c)$ 满足 $\frac{f(c)}{c}=k$ 也可以), 从而上式就转化为

$$2=\frac{kc-k+1}{c}\cdot(k+1)\Leftrightarrow\left(k^2+k-2\right)c-\left(k^2-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow(k-1)\left[(k+2)c-k-1\right]=0\Leftrightarrow k=1\text{或}k=\frac{1-2c}{c-1}.$$

若取 $k=1$, 则我们只需找到一个 $c\in(0,1)$, 使得 $\frac{f(c)-1}{c-1}=1$, 即 $f(c)=c$. 此时令 $g(x)=f(x)-x$, 则现在我们只需找到一个 $c\in(0,1)$, 使得 $g(c)=0$ 即可. 但是由条件可知 $g(0)=g(1)=0$, 无法用中值定理直接找出 $c\in(0,1)$, 使得 $g(c)=0$. 故取 $k=1$ 不能找到满足我们的需求的 c.

若取 $k=\frac{1-2c}{c-1}$, 则我们只需找到一个 $c\in(0,1)$, 使得 $\frac{f(c)-1}{c-1}=\frac{1-2c}{c-1}$, 即 $f(c)=2-2c$. 此时令 $g(x)=f(x)+2x-2$, 则现在我们只需找到一个 $c\in(0,1)$, 使得 $g(c)=0$ 即可. 由条件可知 $g(0)=-2, g(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $g(c)=0$. 故取 $k=\frac{1-2c}{c-1}$ 能找到满足我们的需求的 c, 进而就确定了满足题目要求的 λ 和 μ.

证明 令 $g(x)=f(x)+2x-2$, 则由条件可知 $g(0)=-2, g(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $g(c)=0$, 即 $f(c)=2-2c$. 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道存在 $\lambda\in(0,c),\mu\in(c,1)$, 使得

$$f'(\lambda)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}, f'(\mu)=\frac{f(c)-f(1)}{c-1}=\frac{f(c)-1}{c-1}.$$

再结合 $f(c)=2-2c$ 可得

$$f'(\lambda)(1+f'(\mu))=\frac{f(c)}{c}\left[1+\frac{f(c)-1}{c-1}\right]=2.$$

故结论得证. □

例题 5.12 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 正实数满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明存在互不相同的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1.$$

笔记 核心想法: 插入 $n-1$ 个点 y_i, 将 n 个中值点问题转换为如何确定这些插入点 y_i 的问题.

注 思路分析: 证明的想法就是插入 $n-1$ 个点 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$ 之后用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, x_i\in(y_{i-1},y_i), i=1,2,\cdots,n.$$

于是需要满足

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n. \tag{5.8}$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

而为了得到(5.8), 我们只需反复用介值定理即可. 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$.

证明 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$. 再利用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, x_i\in(y_{i-1},y_i), i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

故结论得证. □

5.2.3 只能猜的类型

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.

例题 5.13 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$ 且 $f(0)=0$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$, 证明对任何 $\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

注 注意到

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\Leftrightarrow \alpha f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0.$$

因此想到构造函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$.

笔记 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 的原因: 如果 $f(x)<0$, 则 $f^{\alpha}(x)$ 可能无意义.

由 $f\in C[0,1]$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$ 可知,$f(x)$ 在 $(0,1]$ 要么恒大于零, 要么恒小于零. 否则由零点存在定理得到矛盾! 假设结论对 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 成立, 则当 $f(x)<0,\forall x\in(0,1]$ 时, 令 $F(x)=-f(x)>0,\forall x\in(0,1]$, 则 $F(0)=0$. 从而由假设可知, 对 $\forall\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\alpha\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)}\Leftrightarrow\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$. 对 $\forall\alpha>0$, 令 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$. 从而由 Rolle 中值定理可

知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) = \alpha f^{\alpha-1}(\xi) f'(\xi) f(1-\xi) - f^{\alpha}(\xi) f'(1-\xi) \Rightarrow \alpha \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□

5.3 中值极限问题

此类问题有一个固定操作, 即对中值点再套一次中值定理, 使得中值参数可以暴露出来, 从而解出参数求极限得到证明.

例题 5.14 设 $f \in C^2[0,1]$, $f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$, 证明对任何 $x \in (0,1)$, 存在 $\xi(x) \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t)dt = f(\xi(x))x,$$

且

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

证明 对 $\forall x \in (0,1)$, 由积分中值定理可知, 存在 $\xi(x) \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t)dt = f(\xi(x))x.$$

从而对 $\forall x \in (0,1)$, 由 Taylor 定理可知, 存在 $\theta(x) \in (0, \xi(x))$, 使得

$$f(\xi(x)) = f(0) + f'(0)\xi(x) + \frac{1}{2} f''(\theta(x))\xi^2(x) = f(0) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x).$$

从而将 $\int_0^x f(t)dt = f(\xi(x))x$ 代入上式可得

$$\int_0^x f(t)dt = x\left[f(0) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x)\right].$$

故 $f''(\theta(x))\xi^2(x) = 2\left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} - f(0)\right)$. 于是

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f''(\theta(x)) = f''(0).$$

因此由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} f''(0) \lim_{x \to 0^+} \frac{\xi^2(x)}{x^2} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f''(\theta(x))\xi^2(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\left(\int_0^x f(t)dt - xf(0)\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\left(f(x) - f(0)\right)}{3x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{3x} = \frac{f''(0)}{3}. \end{aligned}$$

又 $f''(0) \neq 0$, 故 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\xi^2(x)}{x^2} = \frac{1}{3}$, 因此 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

例题 5.15 设 f 在 $x = a$ 的邻域 $n + p$ 阶可导且 $p \geq 1$, 于是有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{5.9}$$

如果对于 $j = 1, 2, \cdots, p-1$ 都有 $f^{(n+j)}(a) = 0, f^{(n+p)}(a) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{c-a}{x-a}$.

证明 由 Taylor 中值定理及条件可知, 存在 $\theta \in U(a)$, 使得

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^p. \tag{5.10}$$

从而结合上式, 再利用带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\lim_{x \to a^+} f^{(n+p)}(\theta) = \lim_{x \to a^+} p! \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{(c-a)^p} = \lim_{x \to a^+} p! \frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{p!}(c-a)^p + o((c-a)^p)}{(c-a)^p} = f^{(n+p)}(a).$$

于是利用(5.9)(5.10)式, 再结合带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+}\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^p &= \lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right] = \lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{\frac{n![f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j]}{(x-a)^n}-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right] \\
&= \lim_{x\to a^+}\left[n!p!\cdot\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}{(x-a)^{n+p} f^{(n+p)}(\theta)}\right] = \frac{n!p!}{f^{(n+p)}(a)}\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p}+o[(x-a)^{n+p}]}{(x-a)^{n+p}} \\
&= \frac{n!p!}{(n+p)!}.
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{c-a}{x-a}=\sqrt[p]{\dfrac{n!p!}{(n+p)!}}$. □

5.4 性态分析类

定理 5.4 (积分中值定理)

(1) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号,$g(x)\in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(5) $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号,$g(x)\in C[a,b]$, 则存在 $\zeta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\zeta)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(6) 若 (1),(2),(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta\in(a,b)$.

定理 5.5 (Hadamard 不等式)

f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

笔记 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间 $[0,1]$.

注 左边的不等式证明中的线性换元构造思路: 我期望找到一个线性函数 $g(t)$, 使得令 $x=g(t)$ 换元后, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=g(t)} \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt.$$

即 $g(0)=a,g(1)=b$. 因此 $g(t)=\dfrac{b-a}{1-0}t+a=a+(b-a)t$. 从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt = (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+bt)dt.$$

证明 由 f 在 $[a,b]$ 上下凸, 一方面, 我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(a(1-t)+bt)dt\leqslant\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b[f(a+b-x)+f(x)]\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

故结论成立. □

例题 5.16 若 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$.

注 通过 $f''(x)+2\geq 0,\forall x\in(0,1)$ 来推出 $f+x^2$ 在 $[0,1]$ 下凸: 实际上, 令 $g=f+x^2$, 则 $g''\geq 0,\forall x\in(0,1)$, 从而 g 在 $(0,1)$ 下凸. 因为 $g=f+x^2\in C[0,1]$ 和 g 在 $(0,1)$ 下凸我们就有

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),\forall x,y\in(0,1),\lambda\in[0,1].$$

上式中令 x 趋于 0 或者 1 也成立, 再令 y 趋于 1 或者 0 也成立. 因此 g 在 $[0,1]$ 下凸.

证明 若不然, 对任何 $x\in(0,1)$ 都有 $f''(x)\geq -2$, 于是 $f(x)+x^2$ 是 $[0,1]$ 的下凸函数. 于是由Hadamard 不等式我们知道

$$\frac{4}{3}=\int_0^1[f(x)+x^2]\mathrm{d}x\leq\frac{f(0)+0^2+f(1)+1^2}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

矛盾! 现在存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$. □

命题 5.2

设 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad\forall b\neq a.$$

证明:f 是下凸函数.

注 本题对一般情况 $f\in C(\mathbb{R})$ 也成立, 需要取磨光函数如**卷积磨光核**. 详细见清疏讲义.

笔记 这就是Hadamard 不等式的反向结果.

证明 当 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 时, 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to a^+}\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{6}(b-a)^3}\\=&\lim_{b\to a^+}\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}(b-a)^2}\\=&\lim_{b\to a^+}\frac{f'(b)-f'(\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{4}f''(\frac{a+b}{2})}{b-a}\\=&\lim_{b\to a^+}\left(f''(b)-\frac{3}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{8}f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\\=&\frac{1}{4}f''(a)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$f''(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

所以 f 是下凸函数. □

定理 5.6 (Darboux 中值定理/导数介值定理)

设 $f\in D[a,b]$, 对任何介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的 η, 存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\eta$.

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理. 即不妨设 $f'(a)<0<f'(b)$, 去找 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=0$. 事实上由极限保号性和

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

我们知道存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta],f(x)<f(b),\forall x\in[b-\delta,b).$$

因此 f 最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的导数为 0, 从而证毕! □

定理 5.7 (加强的 Rolle 中值定理)

(a): 设 $f\in D(a,b)$ 且在 $[a,b]$ 上 f 有介值性, 则若 $f(a)=f(b)$, 必然存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$.

(b): 设 $f\in C[a,+\infty)\cap D^1(a,+\infty)$ 满足 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$.

笔记 一旦罗尔成立, 所有中值定理和插值定理都会有类似的结果, 可以具体情况具体分析.

证明 对于 (a): 不妨设 f 不恒为常数, 则可取 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$, 不妨设 $f(x_0)>f(a)$, 则由 f 的介值性, 我们知道存在 $x_1\in(a,x_0),x_2\in(x_0,b)$, 使得

$$f(x_1)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2},f(x_2)=\frac{f(b)+f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a)=f(b)$, 我们知道 $f(x_1)=f(x_2)$, 由 Rolle 中值定理 ($f\in C[x_1,x_2]\cap D(x_1,x_2)$) 可知, 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$. 这就完成了 (a) 的证明.

对于 (b): 若对任何 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x)\neq 0$, 则由导数介值性可知,f' 恒大于 0 或恒小于 0(否则, 由导数介值性可得到一个零点). 从而 f 在 $[0,+\infty)$ 严格单调, 不妨设为递增. 现在

$$f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),\forall x\geqslant a+1,$$

于是

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$. □

例题 5.17 设 f 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可微且不是线性函数, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

笔记 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 这个线性构造必须记忆!

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $g(a)=g(b)=0$ 且 g 不是常值函数. 因 $g'\leq 0$ 恒成立会导致 g 在 $[a,b]$ 递减, 从而 $0=g(b)<g(a)=0$, 这不可能! 现在存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)>0$, 即结论成立. □

例题 5.18

1. 设 $f\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$ 满足

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0.$$

证明存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

2. 设 $f\in C[0,\frac{\pi}{2}]$ 满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0. \tag{5.11}$$

证明:f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

笔记 此类给出积分等式的问题, 往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标. 即本题我们要寻求合适的

$a, b \in \mathbb{R}$, 考虑积分

$$\int_0^\pi f(x)(a\cos x + b\sin x)\mathrm{d}x = 0.$$

一句话证明本题 1 问, 就是寻求合适的 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $a\cos x + b\sin x$ 和 f 的符号一致. 第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合.

证明

1. 我们只需断言 f 在 $[0,\pi]$ 至少有两个不相同的零点, 之后由罗尔定理就给出了存在 $\xi \in (0,\pi)$, 使得 $f'(\xi) = 0$. 由积分中值定理可知, 存在 $x_0 \in (0,\pi)$, 使得
$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = f(\theta)\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2f(x) = 0.$$
即 f 在 $(0,\pi)$ 上有一个零点 x_0. 若 f 在 $[0,\pi]$ 只有一个零点, 则 f 在 $[0,x_0),(x_0,\pi]$ 不同号 (否则 f 不变号, 则由 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0$ 知 $f = 0$, 与 f 只有一个零点矛盾!). 不妨设
$$f(x) < 0, \forall x \in [0,x_0), f(x) > 0, \forall x \in (x_0,\pi].$$
于是可取
$$a\sin x + b\cos x = \sin(x - x_0)(a = \cos x_0, b = \sin x_0).$$
此时根据条件就有
$$\int_0^\pi f(x)\sin(x - x_0)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)(\cos x_0\sin x - \sin x_0\cos x)\mathrm{d}x = \cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x - \sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0.$$
又注意到
$$f(x)\sin(x - x_0) > 0, \forall x \in [0,\pi]\setminus\{x_0\},$$
故 $0 = \int_0^\pi f(x)\sin(x - x_0)\mathrm{d}x > 0$, 矛盾! 这就完成了证明.

2. 不妨设 f 不恒为 0, 由积分中值定理和(5.11)式知 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有一个零点且变号. 若 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 只变号一次, 设在 x_1 变号, 则 f 在 x_1 两侧符号相反. 由(5.11)式得
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x - x_1)\mathrm{d}x = 0.$$
但是 $f(x)\sin(x - x_1)$ 不变号, 这就推出 $f = 0$ 而矛盾! 若 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 只变号两次, 设变号处为 x_1, x_2, 考虑
$$g(x) \triangleq \sin x - \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\cos x + \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 - \cos x_1}, x \in [0,\frac{\pi}{2}].$$
注意到
$$g'(x) = \cos x + \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\sin x = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1}\cos x\left(\tan x - \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\sin x_2 - \sin x_1}\right),$$
我们知 g' 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 有且只有一个零点. 注意 $g(x_1) = g(x_2) = 0$, 我们由罗尔中值定理知道 g' 在 (x_1,x_2) 有零点, 因此 g 当且仅当在 x_1, x_2 变号. 现由(5.11)式得
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$
但是 fg 不变号, 故 $f = 0$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

□

例题 5.19 设 $f(x) \in C[0,1]$, 证明:

(1) 存在唯一的 $\xi \in (0,1)$, 使得
$$\int_0^\xi e^{f(t)}dt = \int_\xi^1 e^{-f(t)}dt$$

(2) 对任何大于 1 的正整数 n, 存在唯一的 $\xi_n \in (0,1)$, 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)}dt = \int_{\xi_n}^{1} e^{-f(t)}dt$$

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

证明

(1) 令 $F(x) = \int_0^x e^{f(t)}dt - \int_x^1 e^{-f(t)}dt$, 则 $F(0) = -\int_0^1 e^{-f(t)}dt < 0, F(1) = \int_0^1 e^{f(t)}dt > 0$. 又 $F'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_0^{\xi} e^{f(t)}dt = \int_{\xi}^1 e^{-f(t)}dt$.

(2) 令 $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x e^{f(t)}dt - \int_x^1 e^{-f(t)}dt$, 则 $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)}dt < 0, F_n(1) = \int_x^1 e^{-f(t)}dt > 0$. 又 $F_n'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi_n \in \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, 使得 $F(\xi_n) = 0$, 即

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)}dt = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)}dt. \tag{5.12}$$

因为 $\xi_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}$, 所以由聚点定理可知,$\{\xi_n\}$ 存在收敛子列. 任取 $\{\xi_n\}$ 的一个收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k} = a$, 则由(5.12)式可知

$$\int_{\frac{1}{n_k}}^{\xi_{n_k}} e^{f(t)}dt = \int_{\xi_{n_k}}^1 e^{-f(t)}dt.$$

令 $k \to \infty$, 由归结原则得到

$$\int_0^a e^{f(t)}dt = \int_a^1 e^{-f(t)}dt.$$

由 (1) 可知 $a = \xi$. 故由命题 2.1(a)可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$.

□

例题 5.20 $f \in C(0,1)$ 且存在互不相同的 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0,1)$ 满足

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = b.$$

证明对任何 $\lambda \in (a,b)$, 存在互不相同的 $x_5, x_6 \in (0,1)$, 使得 $\lambda = \dfrac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$.

证明 要证原结论, 等价于对 $\forall \lambda \in (a,b)$, 存在 $x_5 \neq x_6$ 且 $x_5, x_6 \in (0,1)$, 使得

$$f(x_6) - f(x_5) = \lambda(x_6 - x_5) \Leftrightarrow f(x_6) - \lambda x_6 = f(x_5) - \lambda x_5.$$

即证 $f(x) - \lambda x$ 在 $(0,1)$ 上不是单射. 又由命题 6.10及 $f \in C(0,1)$, 故只须证 $f(x) - \lambda x$ 不是严格单调的. 对 $\forall \lambda \in (a,b)$, 令 $g(x) = f(x) - \lambda x$, 不妨设 $x_2 > x_1, x_4 > x_3$, 则

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a - \lambda < 0, \quad \frac{g(x_4) - g(x_3)}{x_4 - x_3} = b - \lambda > 0.$$

从而 $g(x_2) < g(x_1), g(x_4) > g(x_3)$, 故 g 在 $(0,1)$ 上非严格单调, 结论得证. □

例题 5.21 $f \in D[a,b]$, 且在 (a,b) 上 f' 有零点. 证明: 存在 $\theta \in (a,b)$, 使得

$$f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}.$$

注 先考虑微分方程:$y' = \dfrac{y - f(a)}{b - a}$, 解出微分方程的解, 再常数变易得到构造函数:$g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$.

证明 令 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 则 $g'(x) = \dfrac{f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}$. 由条件可设 $f'(c) = 0, c \in (a,b)$. 从而 $g'(c) = \dfrac{-\frac{f(c) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}}$.

(i) 若 $g'(c) = 0$, 则取 $\theta = c$ 即可.

(ii) 若 $g'(c) > 0$, 则 $f(c) < f(a)$. 从而 $g(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}} < 0$. 于是存在 $\delta > 0$, 使得

$$g(x) \leqslant g(c) < 0, \forall x \in (c - \delta, c + \delta).$$

又因为 $g(a)=0$, 所以

$$g(x)\leqslant g(c)<g(a),\forall x\in(c-\delta,c+\delta). \tag{5.13}$$

由于 $g\in C[a,c]$, 因此 g 在 $[a,c]$ 上存在最小值. 由(5.13)式可知,g 在 $[a,c]$ 上的最小值一定在 (a,c) 上取到. 故存在 $\theta\in(a,c)$, 使得

$$g(\theta)=\min_{x\in(a,c)}g(x).$$

由 Fermat 引理可知,$g'(\theta)=0$, 即 $f'(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(a)}{b-a}$.

(iii) 若 $g'(c)<0$, 则由 (ii) 同理可证, 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(a)}{b-a}$. □

例题 5.22 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$, 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $|f(\xi)|=4$.

笔记 考虑题目条件的线性组合, 待定 $a\in\mathbb{R}$ 考虑

$$1=\left|\int_0^1(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1|x-a|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_0^1|x-a|\,\mathrm{d}x.$$

为了使放缩最精确, 我们希望右边积分 $\int_0^1|x-a|\,\mathrm{d}x$ 达到最小, 容易知道是 $a=\dfrac{1}{2}$.

证明 注意到

$$1=\left|\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1|x-\frac{1}{2}|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_0^1|x-\frac{1}{2}|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

故 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant 4$. 又因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以由积分中值定理可知, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得 $f(\theta)=|f(\theta)|=0$. 从而由介值定理可知, 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $|f(\xi)|=4$. □

5.5 微分不等式问题

5.5.1 一阶/二阶构造类

例题 5.23 Gronwall 不等式 设 $\alpha,\beta,\mu\in C[a,b]$ 且 β 非负, 若还有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds,\forall t\in[a,b]. \tag{5.14}$$

证明:

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds,\forall t\in[a,b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\in[a,b].$$

笔记 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑 $F(t)=\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds$, 则

$$F'(t)=\beta(t)\mu(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y'=\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)y\Rightarrow y=ce^{\int_a^t\beta(s)ds}+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t)=\frac{F(t)-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}}=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds,t\in[a,b].$$

证明 令

$$c(t)=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds,t\in[a,b],\tag{5.15}$$

这里 $F(t)=\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds$. 由不等式(5.14)知

$$F'(t)\leqslant\alpha(t)\beta(t)+F(t)\beta(t),\forall t\in[a,b].\tag{5.16}$$

于是由(5.15)和(5.16)可知

$$c'(t)=[F'(t)-\alpha(t)\beta(t)-\beta(t)F(t)]e^{\int_t^a\beta(s)ds}\leqslant0,$$

因此 $c(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 从而

$$c(t)\leqslant c(a)=0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}\leqslant\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds.$$

再用一次不等式(5.14), 即得

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+F(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds,\forall t\in[a,b].$$

特别的, 当 α 递增, 对 $\forall t\in[a,b]$, 固定 t, 记 $G(s)=\int_s^t\beta(u)du$, 我们有不等式

$$\begin{aligned}\mu(t)&\leqslant\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t\beta(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds=\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t-G'(s)\,e^{G(s)}ds\\&=\alpha(t)-\alpha(t)\int_a^te^{G(s)}dG(s)=\alpha(t)+\alpha(t)\left[e^{G(a)}-1\right]=\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds}.\end{aligned}$$

□

例题 5.24 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且

$$f(0),f'(0)\geqslant0,f''(x)\geqslant f(x),\forall x\geqslant0.\tag{5.17}$$

证明:

$$f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x,\forall x\geqslant0.\tag{5.18}$$

笔记 通过 $f''-f'=f-f'$ 视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑 $f''f'=ff'$, 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

证明 令 $h(x)=[f'(x)-f(x)]e^x$, 由(5.17)知

$$h'(x)=\left(f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)\right)e^x=\left(f''(x)-f(x)\right)e^x\geqslant0.$$

故

$$h(x)\geq h(0)=f'(0)-f(0)\Rightarrow[f'(x)-f(x)]e^x\geq f'(0)-f(0)=h(0).$$

继视为一阶构造类可得

$$c(x)=\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x},c'(x)=\frac{[f'(x)-f(x)]e^x-h(0)}{e^{3x}}\geqslant0.$$

于是

$$\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}\geqslant f(0)+\frac{1}{2}h(0)=\frac{f'(0)+f(0)}{2}.$$

继续利用(5.17)即得

$$f(x)\geqslant\frac{e^x+e^{-x}}{2}f(0)+\frac{e^x-e^{-x}}{2}f'(0)\geqslant f(0)+f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geqslant x.$$

可以分别了利用均值不等式和求导进行证明. □

例题 5.25 设 $f \in C^1[0, +\infty) \cap D^2(0, +\infty)$ 且满足

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geqslant 0, f(0) = 1, f'(0) = 0. \tag{5.19}$$

证明:

$$f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geqslant 0. \tag{5.20}$$

笔记 显然如果把式(5.19)得不等号改为等号, 则微分方程的解为 $3e^{2x} - 2e^{3x}$. 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(5.20)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2,3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(5.19)改写为

$$f''(x) - 2f'(x) \geqslant 3(f'(x) - 2f(x)).$$

考虑 $g_1(x) = f'(x) - 2f(x)$,, 则上式可化为

$$g_1'(x) \geqslant 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为 $g_2(x) = \frac{g_1(x)}{e^{3x}}$. 于是有

$$g_2'(x) \geqslant 0 \Rightarrow g_2(x) \geqslant g_1(0) = -2 \Rightarrow f'(x) - 2f(x) \geqslant -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + 2e^x, g_3'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}}{e^{2x}} \geqslant 0,$$

于是

$$g_3(x) \geqslant g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

我们完成了证明. □

例题 5.26 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geqslant 0. \tag{5.21}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

笔记 $f + f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数 $g(x)$, 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑 $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$, 两边同时积分得到 $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$. 由此得到构造函数 $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$.

证明 构造 $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 则由(5.21)知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty, 0]$ 递增,$[0, +\infty)$ 递减. 现在我们有

$$h(x) \leqslant h(0) \Rightarrow |f(x)|^2 \leqslant h(0),$$

即 f 有界. □

5.5.2 双绝对值问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

例题 5.27 对某个 $D > 0$,

1. 设 $f \in D(\mathbb{R}), f(0) = 0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.22}$$

证明 $f\equiv 0$.

2. 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}), f^{(j)}(0)=0,\forall j\in\mathbb{N}_0$, 使得

$$|xf'(x)|\leqslant D|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{5.23}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y'=\mathrm{d}y, y'=-\mathrm{d}y$ 得构造函数

$$C_1(x)=\frac{y(x)}{e^{Dx}}, C_2(x)=y(x)e^{Dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x)=\dfrac{f^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2(x)=f^2(x)e^{2Dx}$, 我们有

$$C_1'(x)=\frac{2f(x)f'(x)-2Df^2(x)}{e^{2Dx}}, C_2'(x)=[2f(x)f'(x)+2Df^2(x)]e^{2Dx}.$$

由条件(5.22), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x)\leqslant|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$

于是 C_1 递减, C_2 递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}}\leqslant\frac{f^2(0)}{e^{20}}=0,\forall x\geqslant 0, f^2(x)e^{2Dx}\leqslant f^2(0)e^{20}=0,\forall x\leqslant 0,$$

于是就得到了 $f\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

2. 构造 $C(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^{2D}}, x>0$(因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x)=\frac{2f(x)f'(x)x-2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(5.23), 我们有

$$xf'(x)f(x)\leqslant x|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$

即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x)=o(x^m),\forall m\in\mathbb{N}\cap(D,+\infty)$, 于是

$$C(x)\leqslant\lim_{x\to 0^+}\frac{f^2(x)}{x^{2D}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{o(x^m)}{x^{2D}}=0,$$

故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

例题 5.28 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及

$$|f''(x)|^2\leqslant|f(x)f'(x)|,\forall x\geqslant 0.$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 本题的加强版本见命题 6.29.

证明 令 $M>0$, 考虑

$$g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right], x\geqslant 0.$$

利用 $1+t^2\geqslant\sqrt{t},\forall t\geqslant 0$, 我们有

$$1+\frac{|f|^2}{|f'|^2}\geqslant\sqrt{\frac{|f|}{|f'|}}\Rightarrow|f'|^2+|f|^2\geqslant|f|^{\frac{1}{2}}|f'|^{\frac{M}{2}}=|f'|\sqrt{|ff'|}. \tag{5.24}$$

于是

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|\sqrt{|ff'|}-Mf^2-M(f')^2\right]\\
&\overset{(5.24)}{\leqslant} e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[|f|^2+|f'|^2+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]=0.$$

只要取充分大的 M, 就有 g 递减, 从而 $0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$. □

例题 5.29 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)|+|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

笔记 本题的加强版本见命题 6.30.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]$, 则

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2f'\left(|f|+|f'|\right)-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2(f')^2+f^2+(f')^2-Mf^2-M(f')^2\right]\\&=e^{-Mx}\left[(2-M)f^2+(4-M)(f')^2\right].\end{aligned}$$

取充分大的 M, 就有 $g'(x)\leqslant 0$. 于是 $g(x)\leqslant g(0)=0,\forall x\geqslant 0$. 又注意到 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]\geqslant 0$, 因此 $g(x)\equiv 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

例题 5.30 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\geqslant 0.$$

注 与例题 5.28不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 5.28的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含 M 的项的次数大于系数含 M 的项, 从而无法直接通过控制 M 的取值, 使得 $g'(x)\leqslant 0$. 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 5.27类比, 采用同样的方法. 因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以将原不等式视为 (等式) 函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是 $f''=ff'$. 我们将其中的 f 看作已知函数, 考虑的微分方程转化为 $y''=fy'$, 则

$$y''=fy'\Rightarrow\frac{y''}{y'}=f\Rightarrow\ln y'=\int_0^x f(t)\,dt+C\Rightarrow y'=Ce^{\int_0^x f(t)dt}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数 $C(x)=\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|dt}}$.

证明 令 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|dt}}$, 则

$$C'(x)=\frac{2f'(x)f''(x)-2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|dt}}.$$

又因为

$$f'f''\leqslant|f'f''|\leqslant|f|(f')^2.$$

所以 $C'(x)\leqslant 0$, 故 $C(x)\leqslant C(0)=0$. 又注意到 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|dt}}\geqslant 0$, 故 $C(x)\equiv 0$. 于是 $f'(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 进而 f 就是常值函数, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

5.5.3 极值原理

例题 5.31 设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$, 若还有

$$f''(x)-g(x)f'(x)=f(x).\tag{5.25}$$

证明: $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

证明 如果 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c)>0, f'(c)=0, c\in(0,1)$, 代入(5.25)式知 $f''(c)=f(c)>0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c)<0, f'(c)=0, c\in(0,1)$, 代入(5.25)式知 $f''(c)=f(c)<0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上,f 在 $(0,1)$ 上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即

$$0\leqslant f(x)\leqslant 0.$$

$f(x)=0, \forall x\in[0,1]$. □

第六章 函数性态分析

6.1 基本性态分析模型

命题 6.1 (多个函数取最值或者中间值)

设 f,g,h 是定义域上的连续函数, 则 (a):$\max\{f,g\},\min\{f,g\}$ 是定义域上的连续函数. (b):$\mathrm{mid}\{f,g,h\}$ 是定义域上的连续函数.

注 这里 $\mathrm{mid}\{f,g,h\}$ 表示取中间值函数, 显然这个命题可以推广到多个函数的情况.

证明 只需要注意到

$$\begin{aligned}\max\{f,g\}&=\frac{f+g+|f-g|}{2},\\ \min\{f,g\}&=\frac{f+g-|f-g|}{2},\\ \mathrm{mid}\{f,g,h\}&=f+g+h-\max\{f,g,h\}-\min\{f,g,h\}.\end{aligned}$$

□

命题 6.2

若 f 是区间 I 上处处不为零的连续函数, 则 f 在区间 I 上要么恒大于零, 要么恒小于零.

证明 用反证法, 若存在 $x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 则由零点存在定理可知, 存在 $\xi\in(\min x_1,x_2,\max x_1,x_2)$, 使得 $f(\xi)=0$ 矛盾. □

命题 6.3

设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明:f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

证明 充分性显然, 下证必要性. 设 $f'(x)\equiv C$, 其中 C 为某一常数. $\forall x\in I$, 任取固定点 $x_0\in I$, 由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(\min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\})$, 使得

$$f(x)=f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)=C(x-x_0)+f(x_0).$$

故 $f(x)$ 为线性函数. □

命题 6.4 (连续的周期函数的基本性质)

设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且以 $T>0$ 为周期, 则

(1) f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

(2) f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明

(1)

(2)

□

命题 6.5 (导数有正增长率则函数爆炸)

设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c>0$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

笔记 类似的还有趋于 $-\infty$ 或者非极限形式的结果, 读者应该准确理解含义并使得各种情况都能复现, 我们引用本结论时未必就是本结论本身, 而是其蕴含的思想.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = c > 0$, 所以存在 $X > a$, 使得 $f'(x) > \frac{c}{2}, \forall x \geqslant X$. 于是由 Lagrange 中值定理得到, 对 $\forall x \geqslant X$, 存在 $\theta \in (X, x)$, 使得

$$f(x) = f(X) + f'(\theta)(x - X) \geqslant f(X) + \frac{c}{2}(x - X), \forall x \geqslant X.$$

让 $x \to +\infty$ 就得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

□

命题 6.6 (函数不爆破则各阶导数必然有趋于 0 的子列)

设 $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ 且 $f \in D^k[a, +\infty)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| \neq +\infty$, 那么存在趋于正无穷的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, +\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n) = 0.$$

笔记

(1) 存在 $X > 0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X, +\infty)$ 要么恒正, 要么恒负的原因: 否则, 对 $\forall X > 0$, 存在 $x_1, x_2 \in (X, +\infty)$, 使得 $f^{(k)}(x_1) > 0, f^{(k)}(x_2) < 0$. 从而由导数的介值性可知, 存在 $\xi_X \in (x_1, x_2)$, 使得 $f^{(k)}(\xi_X) = 0$. 于是

$$\begin{aligned}
&\text{令}X = 1, \text{则存在}y_1 > 1, \text{使得}f^{(k)}(y_1) = 0;\\
&\text{令}X = \max\{2, y_1\}, \text{则存在}y_2 > \max\{2, y_1\}, \text{使得}f^{(k)}(y_2) = 0;\\
&\cdots\cdots\\
&\text{令}X = \max\{n, y_{n-1}\}, \text{则存在}y_n > \max\{n, y_{n-1}\}, \text{使得}f^{(k)}(y_n) = 0;\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这样得到一个数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \text{且} f^{(k)}(y_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这与假设矛盾!

(2) 存在 $m > 0$, 使得 $f^{(k)}(x) \geqslant m > 0, \forall x \geqslant X$ 的原因: 假设对 $\forall m > 0$, 有 $m > f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geqslant X$. 再令 $m \to 0^+$, 则由夹逼准则可得 $f^{(k)}(x) = 0, \forall x \geqslant X$. 这与假设矛盾! (也可以用下极限证明)

证明 注意到若不存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立那么将存在 $X > 0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X, +\infty)$ 要么恒正, 要么恒负 (见笔记 (1)).如果找不到子列使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立, 那么不妨设存在 $X > 0$ 使得

$$f^{(k)}(x) > 0, \forall x \geqslant X.$$

从而一定存在 $m > 0$(见笔记 (2)), 使得

$$f^{(k)}(x) \geqslant m > 0, \forall x \geqslant X. \tag{6.1}$$

则由 Taylor 中值定理, 我们知道对每个 $x > X$, 运用(6.1), 都有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x - X)^j + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x - X)^k \geqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x - X)^j + \frac{m}{k!}(x - X)^k,$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了必有子列使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(x_n) = 0$ 成立. □

定理 6.1 (严格单调和导数的关系)

1. 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 f 递增, 则 f 在 $[a, b]$ 严格递增的充要条件是对任何 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ 都存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(c) > 0$.

2. 设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且 f 递减, 则 f 在 $[a,b]$ 严格递减的充要条件是对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 都存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)<0$.

证明 若 f 在 $[a,b]$ 严格递增, 则对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $c\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0.$$

反之对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 都存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)>0$. 任取 $[s,t]\subset[a,b]$, 现在有 $c\in(s,t)$ 使得 $f'(c)>0$, 则根据 $f'(c)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(c)-f(c-h)}{h}>0$, 再结合 f 递增, 可知存在充分小的 $h>0$ 使得

$$f(s)\leqslant f(c-h)<f(c)<f(c+h)\leqslant f(t),$$

这就证明了 f 严格递增. 严格递减是类似的, 我们完成了证明. □

定理 6.2 (单侧导数极限定理)

设 $f\in C[a,b]\cap D^1(a,b]$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=c$ 存在, 证明 f 在 a 右可导且 $f'_+(a)=c$.

注 本结果当然也可对应写出左可导的版本和可导的版本, 以及对应的无穷版本 (即 a,b,c 相应的取 $\pm\infty$).

笔记 本结果告诉我们可在 f 连续的时候用 f' 的左右极限存在性来推 f 可导性.

证明 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}f'(\theta(x))=c,$$

其中 $\theta(x)\in(a,x)$, $\lim\limits_{x\to a^+}\theta(x)=a$. 这就完成了这个定理的证明. □

例题 6.1 经典光滑函数 考虑

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & |x|>0\\ 0, & |x|=0\end{cases}$$

则 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

证明 我们归纳证明, 首先 $f\in C^0(\mathbb{R})=C(\mathbb{R})$, 假定 $f\in C^k(\mathbb{R}), k\in\mathbb{N}$. 注意到存在多项式 $p_{k+1}\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$f^{(k+1)}(x)=p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\forall x\neq0.$$

于是

$$\lim_{x\to0}f^{(k+1)}(x)=\lim_{x\to0}p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}p_{k+1}(x)e^{-x^2}=0,$$

运用导数极限定理, 我们知道 $f^{(k+1)}(0)=0$. 由数学归纳法我们知道 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}$, 这就完成了证明. □

定理 6.3 (连续函数中间值定理)

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n\geqslant0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^n p_j=1$. 则对有介值性函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 和 $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b$, 必然存在 $\theta\in[x_1,x_n]$, 使得

$$f(\theta)=\sum_{j=1}^n p_jf(x_j).$$

笔记 中间值可以通过介值定理取到是非常符合直观的. 特别的当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$, 就是所谓的平均值定理

$$f(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(x_j).$$

证明 设

$$M=\max_{1\leqslant i\leqslant n} f(x_i), m=\min_{1\leqslant i\leqslant n} f(x_i).$$

于是

$$m=m\sum_{j=1}^{n} p_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) \leqslant M\sum_{j=1}^{n} p_j = M.$$

因此由 f 的介值性知: 必然存在 $\theta \in [x_1, x_n]$, 使得 $f(\theta)=\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)$ 成立. □

命题 6.7

若 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 则 f' 没有第一类间断点与无穷间断点.

注 也可以利用Darboux 定理进行证明.

证明 若 f' 存在第一类间断点 $c \in [a,b]$, 则由单侧导数极限定理可知

$$f'\left(c^{-}\right)=f'_{-}(c), \quad f'\left(c^{+}\right)=f'_{+}(c).$$

又因为 f 在 $x=c$ 处可导, 所以 $f'_{-}(c)=f'_{+}(c)$. 从而

$$f'\left(c^{-}\right)=f'_{-}(c)=f'_{+}(c)=f'\left(c^{+}\right).$$

即 f 在 $x=c$ 处既左连续又右连续, 故 f 在 $x=c$ 处连续, 矛盾!

由于单侧导数极限定理同样适用于单侧导数为无穷大的情况, 因此对于无穷大的情况可同理证明. □

命题 6.8

设 f 是一个定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的单调函数, 并且满足 $f(I)=I'$, 其中 $I' \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, 则 f 在区间 I 上连续, 即 $f \in C(I)$.

证明 反证, 假设 f 在某个点 $c \in I$ 处间断. 若 c 在区间 I 的内部, 则由 f 在区间 I 上单调递增, 利用单调有界定理可知 $\lim_{x\to c^{+}} f(x)$ 和 $\lim_{x\to c^{-}} f(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x\to c^{-}} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^{+}} f(x).$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=c$ 处间断, 所以上式至少有一个严格不等号成立, 故不妨设

$$\lim_{x\to c^{-}} f(x) \leqslant f(c) < \lim_{x\to c^{+}} f(x).$$

对 $\forall x>c$, 固定 x, 由 f 在 I 上递增可知

$$f(x)>f(y), \quad \forall y \in (c,x).$$

令 $y \to c^{+}$, 得 $f(x) \geqslant \lim_{x\to c^{+}} f(x)$. 对 $\forall x<c$, 由 f 在 I 上递增可知 $f(x) \leqslant f(c)$. 因此 $f(I) \subset (-\infty, f(c)] \cup [\lim_{x\to c^{+}} f(x), +\infty)$, 故 $(f(c), \lim_{x\to c^{+}} f(x)) \not\subset f(I)$, 但 $(f(c), \lim_{x\to c^{+}} f(x)) \subset I'$. 这与 $f(I)=I'$ 矛盾!

若 c 是区间 I 的端点, 则同理可得矛盾! □

命题 6.9

定义在区间 I 上的单调函数 f 只有第一类间断点, 特别地, 若 x_0 在区间 I 的内部, 则 x_0 要么是跳跃间断点, 要么就是连续点.

证明

□

命题 6.10 (连续单射等价严格单调)

设 f 是区间 I 上的连续函数, 证明 f 在 I 上严格单调的充要条件是 f 是单射.

证明 必要性是显然的, 只证充分性. 如若不然, 不妨考虑 $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2), x_1 < x_2 < x_3$(其他情况要么类似, 要么平凡), 于是由连续函数介值定理知存在 $\theta \in [x_2, x_3]$ 使得 $f(\theta) = f(x_1)$, 这就和 f 在 I 上单射矛盾! 故 f 严格单调. □

例题 6.2 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 满足方程

$$f(f(x)) = e^{-x}.$$

笔记 注意积累二次复合的常用处理手法, 即运用命题 6.10.

证明 假设存在满足条件的函数 f. 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$e^{-x} = f(f(x)) = f(f(y)) = e^{-y}.$$

由 e^{-x} 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 6.10知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = e^{-x}$ 递增, 这和 e^{-x} 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在. □

例题 6.3 求 $k \in \mathbb{R}$ 的范围, 使得存在 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f(f(x)) = kx^9$.

笔记 **取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$ 的原因:** 当 $k \geqslant 0$ 时, 我们可待定 $f(x) = cx^3$, 需要 $c^4x^9 = kx^9$, 从而可取 $c = \sqrt[4]{k}$.

证明 当 $k < 0$ 时, 假设存在满足条件的函数 f. 设 $f(x) = f(y)$, 则

$$kx^9 = f(f(x)) = f(f(y)) = ky^9.$$

由 kx^9 的严格单调性我们知 $x = y$, 于是 f 是单射. 由命题 6.10知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x)) = kx^9$ 递增, 这和 kx^9 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在.

当 $k \geqslant 0$ 时,取 $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$, 此时 $f(x)$ 满足条件. □

命题 6.11 ($[a, b]$ 到 $[a, b]$ 的连续函数必有不动点)

设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 是连续函数, 证明 f 在 $[a, b]$ 上有不动点.

笔记 注意 $[a, b] \to [a, b]$ 表示 f 是从 $[a, b] \to [a, b]$ 的映射, 右端的 $[a, b]$ 是像集而不是值域,f 可能取不到整个 $[a, b]$.

证明 考虑 $g(x) = f(x) - x \in C[a, b]$, 注意到 $g(a) \geqslant 0, g(b) \leqslant 0$, 由连续函数的零点定理知道 f 在 $[a, b]$ 上有不动点. □

命题 6.12 (没有极值点则严格单调)

设 $f \in C[a, b]$ 且 f 在 (a, b) 没有极值点, 证明 f 在 $[a, b]$ 严格单调.

证明 因为闭区间上连续函数必然取得最值, 且在 (a, b) 的最值点必然是极值点, 因此由假设我们不妨设 f 在 $[a, b]$ 端点取得最值. 不失一般性假设

$$f(a) = \min_{x\in[a,b]} f(x), f(b) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

此时若在 $[a, b]$ 上 f 严格单调, 则只能是严格单调递增. 若在 $[a, b]$ 上 f 不严格递增, 则存在 $x_2 > x_1$, 使得 $f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

若 $x_1 > a$, 在 $[a, x_2]$ 上我们注意到 $f(x_1) \geqslant \max\{f(a), f(x_2)\}$, 又由 f 的连续性可知,f 一定能在 $[a, x_2]$ 上取到最大值. 于是 f 只能在 (a, x_2) 达到最大值, 从而 f 在 (a, x_2) 存在极大值点, 这和 f 在 (a, b) 没有极值点矛盾!

若 $x_1 = a, x_2 < b$, 则注意到 $f(x_2) \leqslant \min\{f(a), f(b)\}$, 同样的 f 在 (a, b) 取得极小值而矛盾.

若 $x_1 = a, x_2 = b$, 则 f 恒为常数而矛盾! 这就完成了证明. □

命题 6.13 (函数值相同的点导数值相同就一定单调)

设 $f \in D(a,b)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2), x_1,x_2 \in (a,b)$, 必有 $f'(x_1)=f'(x_2)$, 证明 f 在 (a,b) 是单调函数.

笔记 **令 $\sigma = \max\left\{x \in [c,\xi] : f(x) = f(d)\right\}$ 的原因:** 设 $E=\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$. 实际上, 这里取 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$ 也可以, 效果类似.

(1) **σ 的存在性证明:** 由 f 的介值性知, 存在 $\eta\in(c,\xi)$, 使得

$$f(\xi)\leq f(\eta)=f(d)\leq f(c).$$

从而 $\eta\in E=\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$, 故 E 非空. 又由 E 的定义, 显然 E 有界, 故由确界存在定理可知,E 存在上确界. 于是令 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}\leq\in[c,\xi]$. 下证 $\sigma=\sup\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}=\max\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$, 即 $\sigma\in E=\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$.

由上确界的性质可知, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_n\in E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sigma$. 从而 $f(x_n)=f(d)$. 于是由 f 的连续性可得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(\sigma)=f(d).$$

故 $\sigma\in E$. 这样就完成了证明.

(2) **取 $\sigma = \max\left\{x \in [c,\xi] : f(x) = f(d)\right\}$ 的原因:** 当 $f(c)\geqslant f(d)$ 时,$E=\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}$ 中的其他点 $a\in E$, 可能有 $f'(a)>0$, 也可能有 $f'(a)\leqslant 0$. 而 σ 一定只满足 $f'(\sigma)\leqslant 0$.

证明 若 f 不在 (a,b) 是单调, 则不妨设 $a<c<d<b$, 使得 $f'(c)<0<f'(d)$.

由 $f'(d)=\lim\limits_{x\to d^-}\dfrac{f(x)-f(d)}{x-d}>0$ 知在 d 的左邻域内,$f(x)<f(d)$. 由 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$ 知 f 在 c 的右邻域内有 $f(x)<f(c)$, 于是 $f(c),f(d)$ 不是 f 在 $[c,d]$ 上的最小值, 又由 $f\in C[c,d]$ 可知 f 在 $[c,d]$ 上一定存在最小值. 故可以设 f 在 $[c,d]$ 最小值点为 $\xi\in(c,d)$.

当 $f(c)\geqslant f(d)$ 时,令

$$\sigma=\max\{x\in[c,\xi]: f(x)=f(d)\}.$$

注意到 $\sigma<\xi$. 显然 $f'(\sigma)\leqslant 0$, 因为如果 $f'(\sigma)>0$ 会导致在 σ 右邻域内有大于 $f(d)$ 的点, 由介值定理可以找到 $\xi>\sigma'>\sigma$, 使得 $f(\sigma')=f(d)$ 而和 σ 是最大值矛盾! 而函数值相同的点导数值也相同, 因此 $f'(\sigma)=f'(d)>0$, 这与 $f'(\sigma)\leqslant 0$ 矛盾!

当 $f(c)\leqslant f(d)$ 时类似可得矛盾! 我们完成了证明. □

命题 6.14 (一个经典初等不等式)

设 $a,b\geqslant 0$, 证明:

$$\begin{cases} a^p+b^p\leqslant(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p), & p\geqslant 1, p\leqslant 0\\ a^p+b^p\geqslant(a+b)^p\geqslant 2^{p-1}(a^p+b^p), & 0<p<1\end{cases}\tag{6.2}$$

笔记 不等式左右是奇次对称的, 我们可以设 $t=\dfrac{a}{b}\in[0,1]$, 于是(6.2)两边同时除以 b^p 得

$$\begin{cases} t^p+1\leqslant(t+1)^p\leqslant 2^{p-1}(t^p+1), & p\geqslant 1, p\leqslant 0\\ t^p+1\geqslant(t+1)^p\geqslant 2^{p-1}(t^p+1), & 0<p<1\end{cases}.$$

证明 考虑 $f(t)\triangleq\dfrac{(t+1)^p}{1+t^p}, t\in[0,1]$, 我们有

$$f'(t)=p(t+1)^{p-1}\frac{1-t^{p-1}}{(1+t^p)^2}\begin{cases}\geqslant 0, & p\geqslant 1, p\leqslant 0\\ <0, & 0<p<1\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} 2^{p-1}=f(1)\geqslant f(t)\geqslant f(0)=1, & p\geqslant 1, p\leqslant 0\\ 2^{p-1}=f(1)\leqslant f(t)\leqslant f(0)=1, & 0<p<1\end{cases}$$

这就完成了证明. □

定理 6.4 (反函数存在定理)

设 $y=f(x), x\in D$ 为严格增 (减) 函数, 则 f 必有反函数 f^{-1}, 且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增 (减) 函数.

证明 设 f 在 D 上严格增. 对任一 $y\in f(D)$, 有 $x\in D$ 使 $f(x)=y$. 下面证明这样的 x 只能有一个. 事实上, 对于 D 中任一 $x_1\neq x$, 由 f 在 D 上的严格增性, 当 $x_1<x$ 时, $f(x_1)<y$, 当 $x_1>x$ 时, 有 $f(x_1)>y$, 总之 $f(x_1)\neq y$. 这就说明, 对每一个 $y\in f(D)$, 都只存在唯一的一个 $x\in D$, 使得 $f(x)=y$, 从而函数 f 存在反函数 $x=f^{-1}(y), y\in f(D)$.

现证 f^{-1} 也是严格增的. 任取 $y_1,y_2\in f(D), y_1<y_2$. 设 $x_1=f^{-1}(y_1), x_2=f^{-1}(y_2)$, 则 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$. 由 $y_1<y_2$ 及 f 的严格增性, 显然有 $x_1<x_2$, 即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1} 是严格增的. □

定理 6.5 (反函数连续定理)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续, 则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续.

证明 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上严格增. 此时 f 的值域即反函数 f^{-1} 的定义域为 $[f(a),f(b)]$. 任取 $y_0\in(f(a),f(b))$, 设 $x_0=f^{-1}(y_0)$, 则 $x_0\in(a,b)$. 于是对任给的 $\varepsilon>0$, 可在 (a,b) 上 x_0 的两侧各取异于 x_0 的点 $x_1,x_2(x_1<x_0<x_2)$, 使它们与 x_0 的距离小于 ε.

设与 x_1,x_2 对应的函数值分别为 y_1,y_2, 由 f 的严格增性知 $y_1<y_0<y_2$. 令

$$\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\}$$

则当 $y\in U(y_0;\delta)$ 时, 对应的 $x=f^{-1}(y)$ 的值都落在 x_1 与 x_2 之间, 故有

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$$

这就证明了 f^{-1} 在点 y_0 连续, 从而 f^{-1} 在 $(f(a),f(b))$ 上连续.

类似地可证 f^{-1} 在其定义区间的端点 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别为右连续与左连续. 所以 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上连续.
□

定理 6.6 (反函数求导定理)

设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数, 若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续, 严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x_0(x_0=\varphi(y_0))$ 可导, 且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

证明 设 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0), \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 因为 φ 在 y_0 的某邻域上连续且严格单调, 故 $f=\varphi^{-1}$ 在 x_0 的某邻域上连续且严格单调. 从而当且仅当 $\Delta y=0$ 时 $\Delta x=0$, 并且当且仅当 $\Delta y\to 0$ 时 $\Delta x\to 0$. 由 $\varphi'(y_0)\neq 0$, 可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

□

6.2 函数方程

定义 6.1

我们称 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足的方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

为 **Cauchy 方程**.

笔记 显然 $f(x)=cx, c\in\mathbb{R}$ 为 Cauchy 方程的解, 一个自然的问题是, 满足 Cauchy 方程的函数 f 是否一定是 cx?

命题 6.15 (Cauchy 方程基本性质)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的解, 则

$$f(rx)=rf(x),\forall r\in\mathbb{Q}.$$

证明 $\forall x\in\mathbb{R}$, 由条件可知 $f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$, 然后就有

$$f(3x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x).$$

依次下去可得

$$f(nx)=nf(x),\forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{6.3}$$

现在对 $\forall r=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}, p\neq 0, q,p\in\mathbb{Z}$. 我们由条件可得

$$rf(x)=f(rx)\Leftrightarrow qf(x)=pf\left(\frac{q}{p}x\right). \tag{6.4}$$

利用 (6.3)式可得

$$pf\left(\frac{q}{p}x\right)=f(qx)=qf(x).$$

故由 (6.4)式可知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $rf(x)=f(rx),\forall r\in\mathbb{Q}$ 成立. □

定理 6.7

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则

$$f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 由命题 6.15可知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$rf(x)=f(rx),\forall r\in\mathbb{Q}. \tag{6.5}$$

成立. 现在对每个无理数 a, 由有理数的稠密性可知, 存在有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=a$. 于是由 f 的连续性及 (6.5) 式可得

$$f(ax)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=af(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

故 $f(ax)=af(x),\forall a,x\in\mathbb{R}$. 取 $x=1$, 则 $f(a)=f(1)a,\forall a\in\mathbb{R}$. □

定理 6.8 (Cauchy 方程基本定理)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Cauchy 方程:$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的解, 则满足下述条件之一:

1. f 在某点连续.
2. f 在某个区间有上界或者下界.
3. f 在某个区间上单调.
4. f 在一个正测集上有界.

5. f 可测.
6. $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不稠密.

我们就有 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.

注 不妨设 f 在包含原点的对称区间 I 上有上界原因: 假设已证 f 在 $(-a, a)$ 上有上界时, 结论成立.

如果 f 在 (c, d) 上有上界, 那么记 $x_0 = \dfrac{c+d}{2}, a = \dfrac{d-c}{2}$($x_0$ 可根据我们的期望, 待定系数得到, 具体见豌豆讲义), 则 $(c, d) = (x_0 - a, x_0 + a)$, 即 f 在 $(x_0 - a, x_0 + a)$ 上有上界. 从而令 $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$, 则由条件可得

$$
\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x+y+x_0) - f(x_0) = f(x+y+2x_0-x_0) - f(x_0) \\
&= f(x+x_0) + f(y+x_0-x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(y+x_0) - 2f(x_0) \\
&= g(x) + g(y).
\end{aligned}
$$

故 $g(x)$ 满足 Cauchy 方程且在 $(-a, a)$ 上有上界, 于是由假设可知,$g(x) = g(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$. 又注意到

$$g(x) = f(x+x_0) - f(x_0) = f(x+x_0) + f(-x_0) = f(x).$$

故 $f(x) = g(x) = g(1)x = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$. 因此不妨设合理.

证明

1. 如果 f 在 x_0 连续, 则对任何 $x' \in \mathbb{R}$, 有
$$\lim_{x \to x'} f(x) = \lim_{x \to x'} f(x - x' + x_0) + \lim_{x \to x'} f(x' - x_0) = f(x_0) + f(x' - x_0) = f(x').$$
于是我们证明了 f 在 x' 连续. 于是由定理 6.7我们知道 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. 不妨设 f 在包含原点的对称区间 I 上有上界. 下证 f 在原点连续. 注意到由命题 6.15我们知道
$$f(x) = \frac{f(rx)}{r}, \forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$
现在对任何 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, 取 $r_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 使得
$$\lim_{n \to \infty} r_n = +\infty, \lim_{n \to \infty} r_n x_n = 0. \tag{6.7}$$
注意到在(6.6)中令 $r = -1$ 知 f 是奇函数, 从而 f 在 I 上有下界. 现在由于有界和无穷小之积也为无穷小, 我们由(6.6)和(6.7)得
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(r_n x_n)}{r_n} = 0.$$
由 Heine 归结原理即得 f 在 $x = 0$ 连续. 故由第一点知 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. 在区间单调自然在子区间上有界, 用第二点即得 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. 其依托于经典结论
结论 设勒贝格可测集 A, B 的勒贝格测度都非 0, 则 $A + B$ 包含一个区间.
上述结论可以在任何一本实变函数习题集中找到, 例如徐森林. 运用此结论假设 f 在 E 上有界,E 的勒贝格测度非 0. 则 $E + E$ 包含一个区间 I, 于是对 $z \in I$, 存在 $x, y \in E$ 使得 $z = x + y$, 然后
$$|f(z)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant 2 \sup_E |f|.$$
由第二点即得 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
5. 由 Lusin 定理, 存在有正测度的紧集 K 和 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 g 使得 $f(x) = g(x), \forall x \in K$, 故 f 在 K 上有界. 现在我们就可以运用上一条知 $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
6. 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) \neq f(1)x_0$, 显然 $x_0 \neq 0, 1$. 于是
$$
\begin{aligned}
&(1, f(1)), (x_0, f(x_0)) \text{ 线性无关} \\
\Rightarrow& \mathbb{R}^2 = \{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\
\Rightarrow& \mathbb{R}^2 = \overline{\{c_1(1, f(1)) + c_2(x_0, f(x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}} \\
\Rightarrow& \mathbb{R}^2 = \overline{\{(c_1 + c_2 x_0, f(c_1 + c_2 x_0)) : c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}},$$

这就证明了 $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 稠密. 这是一个矛盾!

□

例题 6.4 求函数方程 $2f(2x) = f(x) + x$ 的所有 $\mathbb{R}$ 上在 $x = 0$ 的连续解.

笔记 这里也能利用强求通项和强行裂项的想法. 具体操作如下:

$\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x, 则由条件可知

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}.$$

从而由上式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是令 $x_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right), n = 0, 1, 2, \cdots$, 则

$$x_n = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

对上式进行强行裂项并强求通项得到

$$\frac{x_n}{2^{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

即

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而

$$2x_0 - \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_k}{2^{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{2k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

这就完成了对 x_n 的强行裂项并强求通项.

注 只有除以 2 的迭代才能与 f 在 $x = 0$ 处连续联系起来, 如果是乘 2 的迭代则不行.

证明 设 f 在 $x = 0$ 处连续,$\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x, 则由条件可知

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{x}{4}, \tag{6.8}$$

$$2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

从而由 f 在 $x = 0$ 处连续可知,$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$. 由 (6.8)式归纳可得

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

注意到

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^n} + \frac{x}{2^{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

于是

$$f(x) = x_0 = \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{2k+2}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{2^{2k+2}} + \lim_{n \to \infty}\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{4}x}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{x}{3}.$$

根据 x 的任意性, 可知 $f(x)=\frac{x}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ 就是原方程符合条件的一个解.

再将 $f(x)=\frac{x}{3}$ 代入原方程, 仍然成立. 故 $f(x)=\frac{x}{3},\forall x\in\mathbb{R}$ 就是原方程符合条件的所有解. □

例题 6.5 $\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线 $\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线.

笔记 容易由证明知道任何开区间 (a,b) 上的既凸又凹的连续函数也是直线.

证明 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上既凸又凹, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y).$$

考虑 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则运用 $f(x+y)+f(0)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 知 g 满足 Cauchy 方程, 于是由定理 6.7可得

$$f(x)=f(0)+[f(1)-f(0)]x.$$

□

例题 6.6 求方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 的全部连续解.

证明 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 则由条件可得

$$f(0)=xf(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=0.$$

$$f(x)=xf(1)+f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow xf(1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0.$$

$$f(1)=-f(-1)-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0.$$

$$f(-x)=xf(-1)-f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)+f(-x)=xf(-1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\text{是}\mathbb{R}\text{上的奇函数}.$$

于是对 $\forall x,y>0$, 我们取 $x=e^s,y=e^t,\forall s,t\in\mathbb{R}$. 则由条件可得

$$\frac{f(e^{s+t})}{e^{s+t}}=\frac{f(e^s)}{e^s}+\frac{f(e^t)}{e^t}.$$

从而 $\frac{f(e^x)}{e^x}$ 满足 Cauchy 方程, 且 $f\in C(\mathbb{R})$, 因此由定理 6.7可得

$$\frac{f(e^x)}{e^x}=\frac{f(e)}{e}x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\frac{f(e)}{e}x\ln x,\forall x>0.$$

又因为 f 是奇函数, 所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{f(e)}{e}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{f(e)}{e}x\ln(-x), & x<0\end{cases}.$$

最后, 将上述 $f(x)$ 代入原方程, 等式仍成立. 故上述 $f(x)$ 就是原方程的全部连续解. □

6.3 凸函数与上半连续函数

6.3.1 凸函数

定义 6.2 (下凸函数的定义)

对集 $S\subset\mathbb{R}^n$, 我们称

1. $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x,y\in S$, 只要

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}\subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

2. $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个严格 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x\neq y\in S$, 只要

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}\subset S,$$

就有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

3. 称 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个下凸函数, 如果对任何 $x,y\in S$, 只要

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}\subset S,$$

就有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in[0,1].$$

4. 称 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个严格下凸函数, 如果对任何 $x\neq y\in S$, 只要

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}\subset S,$$

就有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1).$$

注 同理可以定义上凸函数.

笔记

1. 我们常用 $\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}$ 来表示连接 x,y 的线段.
2. 显然 f 在 S 上各种凸的充要条件都是对任何含于 S 的线段 ℓ, 都有 $f|_\ell$ 上是对应的那种一元凸函数.
3. 开集上的二阶可微函数为下凸函数等价于 Hess 矩阵半正定可以在任何一般数学分析教材上找到.
4. 显然下凸蕴含 Jensen 下凸, 实际运用中我们更偏爱下凸而不是 Jensen 下凸, 推导二者的联系是重要的命题.

命题 6.16

闭区间上的连续函数如果在开区间内是下凸函数, 则必然在闭区间上也是下凸函数.

证明

□

命题 6.17 (下凸函数的基本性质)

1. **下凸函数恒在割线下方**

(1) 设 I 为一区间,$f:I\to\mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对任何 $[s,t]\subset I$ 成立

$$f(x)\leqslant\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s),\forall x\in[s,t].$$

(2) 设 I 为一区间,$f:I\to\mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对任何 $[s,t]\subset I$ 成立

$$f(x)<\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s),\forall x\in(s,t),$$

2. **下凸函数割线斜率递增**

(1) 设 I 为一区间,$f:I\to\mathbb{R}$, 则 f 在 I 上下凸的充要条件是对 $x_1<x_2<x_3$,$x_1,x_2,x_3\in I$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(2) 设 I 为一区间,$f:I\to\mathbb{R}$, 则 f 在 I 上严格下凸的充要条件是对 $x_1<x_2<x_3$,$x_1,x_2,x_3\in I$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

3. **可微的下凸函数恒在切线上方**

(1) 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a,b) 下凸的充要条件是对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\forall x\in(a,b).$$

(2) 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 则 f 在 (a,b) 严格下凸的充要条件是对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}.$$

注 上述下凸函数的性质都可以通过几何作图直观地得到.

笔记 **下凸函数割线斜率递增**也表明: 下凸函数对 $\forall x_0\in I$, 都有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 单调递增.(但是不能由这个结论推出 f 下凸)

证明

1. 函数恒在割线下方

(1) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 对 $\forall[s,t]\subset I$,$\forall x\in[s,t]$, 可设 $x=\lambda s+(1-\lambda)t$, 其中 $\lambda\in[0,1]$. 由 f 在 I 上下凸可知, 对 $\forall x\in[s,t]$, 有

$$f(x)=f(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t)=(\lambda-1)[f(s)-f(t)]+f(s).$$

再结合 $\lambda=\dfrac{x-t}{s-t}$ 可得

$$f(x)\leqslant\left(\frac{x-t}{s-t}-1\right)[f(s)-f(t)]+f(s)=\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s),\quad\forall x\in[s,t].$$

接着证明必要性 ($\Leftarrow$): 对 $\forall s,t\in I$, 不妨设 $s<t$, 则 $[s,t]\subset I$. 对 $\forall x\in[s,t]$, 可设 $x=\lambda s+(1-\lambda)t$, 其中 $\lambda\in[0,1]$. 则由条件可知, 对 $\forall x\in[s,t]$, 有

$$f(x)=f(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(\lambda s+(1-\lambda)t-s)+f(s)=\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t).$$

即 $\forall s,t\in I$, 都有 $f(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t)$. 故 f 在 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

2. 下凸函数割线斜率递增

(1) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 对于任意的 $x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 取 $\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\in(0,1)$. 因为函数 f 在区间 I 上下凸, 所以有

$$f(x_2)=f(\lambda x_3+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda f(x_3)+(1-\lambda)f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1).$$

即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

接下来证明必要性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 都满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

这等价于

$$f(x_2)\leqslant\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1).\tag{6.9}$$

进而, 对于任意的 $x_1,x_3\in I$ 且 $x_1<x_3$, 以及任意的 $\lambda\in[0,1]$, 令 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3\in(x_1,x_3)$, 此时 $\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$. 于是, 根据(6.9)式可以得到

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)=f(x_2)\leqslant\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3).$$

所以, 函数 f 在区间 I 上下凸.

(2) 显然 (1) 证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

3. 可微的下凸函数恒在切线上方

(1) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0\in(a,b)$, 函数 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a,b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in (x_0, x)$, 根据 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}.$$

令 $x' \to x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \lim_{x'\to x_0^+} \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in (x, x_0)$, 由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}.$$

令 $x'' \to x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant \lim_{x''\to x_0^-} \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

接下来证明必要性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$f(x_1) \geqslant f'(x_2)(x_1-x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) \geqslant f'(x_2)(x_3-x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2) \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸.

(2) 首先证明充分性 ($\Rightarrow$): 由下凸函数割线斜率递增可知, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 函数 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a, b) 上单调递增.

对于任意的 $x \in (x_0, b)$, 取 $x' \in \left(x_0, \dfrac{x+x_0}{2}\right)$, 根据 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} > \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}.$$

令 $x' \to x_0^+$, 则可得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} \geqslant \lim_{x'\to x_0^+} \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

同理, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 取 $x'' \in \left(x_0, \dfrac{x+x_0}{2}\right)$, 由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} > \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}.$$

令 $x'' \to x_0^-$, 则有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0} \geqslant \lim_{x''\to x_0^-} \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此, 对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

接下来证明必要性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于任意的 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1-x_2) + f(x_2), \quad f(x_3) > f'(x_2)(x_3-x_2) + f(x_2).$$

由此可以推出

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < f'(x_2) < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

所以, 由下凸函数割线斜率递增可知 f 在 I 上下凸.

□

例题 6.7 导数递增则割线斜率也递增 函数 f 在 (a,b) 可导, 证明:

1. f' 递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
2. f' 严格递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明

(1) 首先证明必要性 ($\Rightarrow$): 对于满足 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1\in(x_1,x_2)$,$y_2\in(x_2,x_3)$, 使得
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(y_1)\leqslant f'(y_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
由此, 必要性得证.
接着证明充分性 ($\Leftarrow$): 由已知条件可知, 对于满足 $a<x_1<x_2<b$ 的情况, 取 $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 则有
$$\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2},\quad\forall s\in(a,x_1),$$
$$\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}\leqslant\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2},\quad\forall t\in(x_2,b).$$
令 $s\to x_1^-$,$t\to x_2^+$, 可得
$$f'(x_1)=\lim_{s\to x_1^-}\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2},\quad\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}\leqslant\lim_{t\to x_2^+}\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}=f'(x_2).$$
所以有 $f'(x_1)\leqslant\dfrac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}\leqslant f'(x_2)$. 再由 x_1,x_2 的任意性可知,f' 单调递增.

(2) 首先证明必要性 ($\Rightarrow$): 对于满足 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 的情况, 根据 Lagrange 中值定理以及 f' 单调递增的性质可知, 存在 $y_1\in(x_1,x_2)$,$y_2\in(x_2,x_3)$, 使得
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(y_1)<f'(y_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
由此, 必要性得证.
接着证明充分性 ($\Leftarrow$): 由条件可知, 对于满足 $a<x_1<x_2<b$ 的情况, 取 $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 则有
$$\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}<\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2},\quad\forall s\in(a,x_1),$$
$$\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}<\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2},\quad\forall t\in(x_2,b).$$
令 $s\to x_1^-$,$t\to x_2^-$, 可得
$$f'(x_1)=\lim_{s\to x_1^-}\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2},\quad\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}\leqslant\lim_{t\to x_2^-}\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}=f'(x_2).$$
故 $f'(x_1)\leqslant\dfrac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}\leqslant f'(x_2)$. 若 $f'(x_1)=f'(x_2)$, 则由命题 6.3可知,f 在 $[x_1,x_2]$ 上为线性函数. 设 $f(x)=cx+d$,$x\in[x_1,x_2]$, 其中 $c,d\in\mathbb{R}$. 从而
$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=c=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$
这与已知条件矛盾! 故 $f'(x_1)<f'(x_2)$,$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $a<x_1<x_2<b$, 即 f' 递增.

□

命题 6.18

设 f 在 (a,b) 上的下凸函数, 则 f 在 (a,b) 有上界的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

笔记 由这个命题及命题 6.16可知: 如果下凸函数 f 在 (a,b) 上有上界, 则 f 可连续延拓到 $[a,b]$(补充定义端点的函数值等于端点的左右极限即可), 使得 f 在 $[a,b]$ 上仍是下凸函数.

证明 $(\Leftarrow)$: 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知,f 在 (a,b) 上连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在, 所以由Cantor 定理可知,f 可以连续延拓到 $[a,b]$ 上, 故 f 在 $[a,b]$ 上有界, 从而在 (a,b) 上有界.

$(\Rightarrow)$: 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0\in(a,b)$, 有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上递增. 由 f 在 (a,b) 上有上界可知, 存在 $M>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in(a,b). \tag{6.10}$$

由 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的递增性及(6.10)式可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{M-f(x_0)}{x-x_0},\forall x\in(x_0,b). \tag{6.11}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{M-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{M-f(x_0)}{b-x_0}$, 所以 $\dfrac{M-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (x_0,b) 上有界. 从而存在 $K>0$, 使得

$$\frac{M-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant K,\forall x\in(x_0,b). \tag{6.12}$$

于是结合(6.11)(6.12)式可知,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant K,\forall x\in(x_0,b)$. 进而由单调有界定理可知 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在. 于是

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right]=(b-x_0)\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0).$$

故 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 也存在. 同理可得 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 也存在.

□

命题 6.19 (下凸函数的单调性刻画)

1. **闭区间凸函数的单调性刻画**

   设 f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则 f 只有下述三种情况:

   (1) f 在 $[a,b)$ 递减,

   (2) f 在 $(a,b]$ 递增,

   (3) 存在 $c\in(a,b)$, 使得 f 在 $[a,c]$ 递减, 在 $[c,b]$ 递增.

2. **开区间凸函数的单调性刻画**

   设 f 是 (a,b) 上的下凸函数,a 允许取 $-\infty$,b 允许取 $+\infty$, 则 f 只有下述三种情况:

   (1) f 在 (a,b) 递减;

   (2) f 在 (a,b) 递增;

   (3) 存在 $c\in(a,b)$, 使得 f 在 $(a,c]$ 递减, 在 $[c,b)$ 递增.

证明

1. 闭区间凸函数的单调性刻画

   由下凸函数恒在割线下方, 我们有

$$f(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a),\forall x\in[a,b].$$

   因此 f 在 $[a,b]$ 上有上界. 于是由命题 6.18可知,f 可以连续延拓到 $[a,b]$, 并且仍然在 $[a,b]$ 上下凸. 记这个连续延拓函数为 $\overline{f}$, 则 $\overline{f}\in C[a,b]$ 且 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 上也下凸.

   下证

$$f(a)\geqslant\tilde{f}(a),f(b)\geqslant\tilde{f}(b). \tag{6.13}$$

事实上，由下凸函数割线斜率递增可知 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(x_0,b]$ 递增，从而

$$\begin{aligned}\tilde{f}(b)&=\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right]\\&\leqslant\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}+f(x_0)\right]=f(b),\end{aligned}$$

类似可得 $f(a)\geqslant\tilde{f}(a)$，这就证明了(6.13). 下面证明 $\overline{f}$ 的单调性.

由上述证明可知 $\overline{f}\in C[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上下凸. 不妨设 $\overline{f}$ 最小值为 0. 现在设 $c\in[a,b]$ 是 f 的最小值点. 若 $c\in(a,b)$，则对 $b\geqslant x_2>x_1>c$，我们有

$$\frac{\overline{f}(x_2)-\overline{f}(c)}{x_2-c}\geqslant\frac{\overline{f}(x_1)-\overline{f}(c)}{x_1-c}\Rightarrow\overline{f}(x_2)\geqslant\frac{x_2-c}{x_1-c}\overline{f}(x_1)\geqslant\overline{f}(x_1).\tag{6.14}$$

故 $\overline{f}$ 在 $[c,b]$ 递增. 类似可知 $\overline{f}$ 在 $[a,c]$ 递减. 这就证明了第三种情况. 若 $c=a$，则不等式(6.14)也成立，故 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 递增. 同样的若 $c=b$ 则 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 递减.

于是再结合(6.13)可知

(i) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c=b$ 时，若 $f(b)>\overline{f}(b)$，则 f 只在 $[a,b)$ 上单调递减；若 $f(b)=\overline{f}(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上单调递减. 故此时无论如何,f 一定在 $[a,b)$ 上单调递减.

(ii) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c=a$ 时，若 $f(a)>\overline{f}(a)$，则 f 只在 $(a,b]$ 上单调递增；若 $f(a)=\overline{f}(a)$，则 f 在 $[a,b]$ 上单调递增. 故此时无论如何,f 一定在 $(a,b]$ 上单调递增.

(iii) 当 $\overline{f}$ 的最小值 $c\in(a,b)$ 时,f 的单调性与 $\overline{f}$ 相同，即 f 在 $[c,b]$ 递增，在 $[a,c]$ 递减.

因此结论得证.

2. **开区间凸函数的单调性刻画** 由 (1) 的证明类似，只是不再额外需要考虑 f 的两个端点，同理证明即可.

□

定理 6.9 (Jensen 不等式)

对集 $S\subset\mathbb{R}^n$，设 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数，则对完全含于 S 内的一条线段上的点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和

$$\sum_{k=1}^m\lambda_k=1,\lambda_k\in[0,1]\cap\mathbb{Q},$$

我们有

$$f\left(\sum_{k=1}^m\lambda_kx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^m\lambda_kf(x_k).\tag{6.15}$$

特别的，

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^mx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^m\frac{1}{m}f(x_k).\tag{6.16}$$

笔记 初等的，如果 S 性质足够好且 f 二阶可微，读者可以通过把 f 在 $\sum\limits_{k=1}^m\lambda_kx_k$ Taylor 展开，然后丢掉二阶微分那项来得到不等式 $f\left(\sum\limits_{k=1}^m\lambda_kx_k\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^m\lambda_kf(x_k)$. 本部分的证明尽可能追求一般性.

证明 首先不等式(6.16)的建立是经典高中数学习题，一个参考可以见Jensen 不等式. 我们归纳证明不等式(6.15)，当 $m=2$，设有理数 $\frac{p}{q}\in[0,1],q>0$，运用不等式(6.16)，我们有

$$f\left(\frac{p}{q}x+\left(1-\frac{p}{q}\right)y\right)=f\left(\underbrace{\frac{x}{q}+\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{p}+\underbrace{\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdots+\frac{y}{q}}_{q-p}\right)\leqslant\frac{p}{q}f(x)+\left(1-\frac{p}{q}\right)f(y).$$

这就证明了(6.15)的 $m=2$ 的情况. 假定 m 时不等式(6.15)成立，当 $m+1$ 时，我们不妨设 $\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i\neq0$，否则不等

式(6.15)是平凡的. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j f(x_j) &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}f(x_j)+\lambda_{m+1}f(x_{m+1})\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot f\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x_j\right)+\lambda_{m+1}f(x_{m+1})\\ &\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}x_j+\lambda_{m+1}x_{m+1}\right)=f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_i x_j\right),\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 $m=2$ 时的不等式. 于是就对一般的 $m\in\mathbb{N}$, 我们证明了(6.15). □

引理 6.1

设 f 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是 Jensen 下凸函数, 若 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)<\infty$, 则 f 在 x_0 连续.

证明 要证 f 在 x_0 连续, 只须证 $f(x_0)\leqslant \varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant f(x_0)$.

由条件可知

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2},\quad \forall x\in U(0).$$

令 $x\to 0$ 并取下极限, 得到

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to0}\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to0}f(x_0-x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to0}f(x_0+x)=\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x).\qquad(6.17)$$

根据条件可得

$$f(x)\leqslant\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2},\quad \forall x\in U(x_0).$$

令 $x\to x_0$ 并取上极限, 则

$$\varlimsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2}\leqslant\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(2x-x_0)=\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x).$$

于是 $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 将其代入 (6.17) 式得到

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}\varlimsup_{x\to x_0}f(x)\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\Rightarrow f(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to x_0}f(x).$$

因此 $f(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 即 f 在 x_0 处连续. □

定理 6.10 (开区间下凸函数左右导数处处存在)

(a,b) 上的下凸函数 f 在每一点左右导数都存在, 从而 f 在 (a,b) 连续.

证明 由下凸函数割线斜率递增可知, 对 $\forall x_0\in(a,b)$, 有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上递增. 从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2}-x_0},\quad\forall x\in(a,x_0),$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant\frac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2}-x_0},\quad\forall x\in(x_0,b).$$

于是 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (a,x_0) 上有上界 $\dfrac{f\left(\frac{x_0+b}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+b}{2}-x_0}$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (x_0,b) 上有下界 $\dfrac{f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0+a}{2}-x_0}$.

故由单调有界定理可知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 都存在,即 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在. 进而

$$\lim_{x\to x_0^+}[f(x)-f(x_0)]=f'_+(x_0)\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0^-}[f(x)-f(x_0)]=f'_-(x_0)\lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 即 f 在 $x=x_0$ 处连续, 再根据 x_0 的任意性可知,f 在 (a,b) 上连续. □

定理 6.11 (开区间上的下凸函数内闭 Lipschitz 连续)

(a,b) 上的下凸函数 f 一定内闭 Lipschitz 连续.

证明 对 $\forall[A,B]\subset(a,b)$, 任取 $s\in(a,A)$,$t\in(B,b)$, 固定 s,t. 则由下凸函数割线斜率递增可知

$$\frac{f(A)-f(s)}{A-s}\leqslant\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leqslant\frac{f(t)-f(B)}{t-B},\quad\forall x,y\in[A,B].$$

记 $L=\max\left\{\left|\frac{f(A)-f(s)}{A-s}\right|,\left|\frac{f(t)-f(B)}{t-B}\right|\right\}$, 则

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant L\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad\forall x,y\in[A,B].$$

故 f 在 (a,b) 上内闭 Lipschitz 连续. □

定理 6.12

设 f 在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是下凸函数, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 连续.

笔记 下述证明表明:n 元下凸函数一定也关于单变量下凸.

证明 仅证明 $n=2$ 的情形, 一般情况是类似的.

由条件可知, 当 $n=2$ 时, 设 $\delta>0$,f 在 $(x_0-\delta,y_0-\delta)\times(x_0+\delta,y_0+\delta)$ 上下凸, 则对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[x_0-\delta,y_0-\delta]\times[x_0+\delta,y_0+\delta]$,$\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda f(x_1,y_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2).\tag{6.18}$$

$\forall x'\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 固定 x', 在 (6.18)式中令 $x_1=x_2=x'$, 则对 $\forall y_1,y_2\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$, 都有

$$f(x',\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=f(\lambda x'+(1-\lambda)x',\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda f(x',y_1)+(1-\lambda)f(x',y_2).$$

故 f 关于单变量 y 在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上下凸. 同理可得 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上下凸. 由开区间下凸函数左右导数处处存在可知 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上连续, 关于单变量 y 在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上连续. 因此对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1\in(0,\delta)$, 使得当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时, 有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{6.19}$$

任取 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 固定 x, 从而此时 $f(x,y)$ 是在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上关于 y 的一元连续下凸函数. 于是由开区间上的下凸函数一定内闭 Lipschitz 连续可知,$f(x,y)$ 在 $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 上内闭 Lipschitz 连续. 进而存在 $\delta_2\in(0,\delta)$, 使得对 $\forall y\in[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$, 有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant\max\left\{\frac{f(x,y_0-\delta_2)-f(x,y_0-\delta_2)}{\delta_2},\frac{f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0+\delta_2)}{\delta_2}\right\}\cdot|y-y_0|.\tag{6.20}$$

由 f 关于单变量 x 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上连续可知,$f(x,y_0-\delta_2)$,$f(x,y_0-\delta_2)$,$f(x,y_0+\delta_2)$,$f(x,y_0+\delta_2)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上都有界, 从而我们记

$$L=\max\left\{\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\frac{f(x,y_0-\delta_2)-f(x,y_0-\delta_2)}{\delta_2},\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\frac{f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0+\delta_2)}{\delta_2}\right\}.$$

令 $\delta'=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{\varepsilon}{2L}\}$, 于是由 (6.20) 式可知, 对 $\forall(x,y)\in[x_0-\delta',x_0+\delta']\times[y_0-\delta',y_0+\delta']$, 都有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|.\tag{6.21}$$

利用 (6.19) (6.21) 式可得, 对上述 ε,δ', 当 $(x,y)\in[x_0-\delta',x_0+\delta']\times[y_0-\delta',y_0+\delta']$ 时, 我们都有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\leqslant |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &< L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 在 (x_0,y_0) 连续. □

推论 6.1 (开集上的下凸函数必连续)

开集上的下凸函数是连续函数. ♡

6.3.2 上半连续函数

定义 6.3 (半连续函数定义)

拓扑空间 X 上的一个函数 $f:X\to[-\infty,+\infty)$ 被称为**上半连续的**, 如果对每个 $c\in\mathbb{R}$ 都有

$$\{x\in X: f(x)<c\}$$

是 X 的开集. ♣

注 下半连续函数同理定义.

笔记

(1) 显然 f 连续等价于 f 上半连续且下半连续.

(2) 上半连续等价于对 $\forall x_0\in X$, 都有 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)\leqslant f(x_0)$.

命题 6.20 (上半连续函数基本性质)

设 X 是拓扑空间,

(1) 若 f_α 是一族 X 上的上半连续函数, 则 $f=\inf\limits_\alpha f_\alpha$ 也是上半连续函数.

(2) 若 f 是 X 上的上半连续函数, 则对每一个紧集 $K\subset X$ 有 $a\in K$ 使得 $f(x)\le f(a),\forall x\in K$.

(3) 设 $I\subset[-\infty,+\infty)$ 是开区间, 如果 $f:X\to I$ 和 $g:I\to[-\infty,+\infty)$ 是上半连续函数且 g 递增, 则 $g\circ f$ 是上半连续函数. ♠

注 下半连续函数同理也有相应的性质.

笔记 (2) 是说紧集上的上半连续函数一定有上界且取得最大值. 一个经典的技巧是, 很多时候如果一个命题对所有紧集成立, 则等价于这个命题局部上成立, 即对每个点, 都存在一个邻域使得在这个邻域上成立. 现在我们注意到对每个点 x, 如果其所有邻域上, 上半连续函数 f 无上界, 那么取 $x_n\to x$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$, 则 f 在紧集 $\{x_n\}\cup\{x\}$ 上无上界, 这就是一个矛盾!

证明

1. 对任何 $x_0\in X,\beta$, 由 f_α 下半连续和下确界的定义, 我们有

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\inf_\alpha f_\alpha(x)\le\overline{\lim_{x\to x_0}} f_\beta(x)\le f_\beta(x_0).$$

两边对 β 取下确界即得

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\inf_\alpha f_\alpha(x)\le\inf_\beta f_\beta(x_0).$$

故 $f=\inf\limits_\alpha f_\alpha$ 也是上半连续函数.

2. 注意到开覆盖 $K=\bigcup\limits_c\{x\in K: f(x)<c\}$, 由 K 是紧集可知, 必有有限子覆盖

$$K=\bigcup_{i=1}^n\{x\in K: f(x)<c_i\}.$$

不妨设 c_1 是 $c_i,i=1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则 $f(x)<c_1,\forall x\in K$. 即上半连续函数 f 在 K 上有上界. 取 $c=\sup\limits_K f$,

如果 f 达不到最大值, 注意到

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{1}{c-f(x)}\leqslant\frac{1}{c-\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)}\leqslant\frac{1}{c-f(x_0)}.$$

故 $\frac{1}{c-f(x)}$ 在 K 上上半连续. 因此同理可得 $\frac{1}{c-f(x)}$ 在 K 上也有上界. 于是存在 $M>0$, 使得

$$\frac{1}{c-f(x)}\leqslant M\Rightarrow f(x)\leqslant c-\frac{1}{M}<c.$$

这与 $c=\sup\limits_K f$ 矛盾! 从而 f 能取到最大值, 于是一定存在 $a\in K$, 使得 $c=f(a)$, 故 $f(x)<c=f(a),\forall x\in K$.

3. 注意到 $\{x\in X:g(x)<c\}=[-\infty,\alpha_c)$, 因此

$$\{x\in X:g\circ f(x)<c\}=\{x\in X:f(x)<\alpha_c\},$$

这就证明了 $g\circ f$ 是上半连续函数.

□

定理 6.13 (半连续函数逼近定理)

设 X 是一个度量空间,f 是 X 上的上半连续函数, 则存在递减函数列 $f_n\subset C(X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in X$$

证明 如果 $f\equiv-\infty$, 取 $f_n=-n,n=1,2,\cdots$. 现在假定 $f\not\equiv-\infty$, 然后考虑 $g=e^{-f}:X\to(0,+\infty]$ 并定义

$$g_n(x)=\inf_{z\in X}\{g(z)+nd(x,z)\},n=1,2,\cdots.$$

显然

$$g_n(x)\leq g_{n+1}(x)\leq g(x),\forall x\in X,n=1,2,\cdots.$$

因为 $g\not\equiv+\infty$, 我们知道 $g_n,n\in\mathbb{N}$ 都是有限函数. 若对某个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X$, 有 $g_n(x)=0$. 则存在 $z_m\in X,m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}[g(z_m)+nd(z_m,x)]=0,$$

即

$$\lim_{m\to\infty}d(z_m,x)=0,\ \lim_{m\to\infty}f(z_m)=+\infty.$$

又由上半连续函数基本性质 (2) 和笔记知 f 局部有上界, 这就是矛盾! 因此我们证明了

$$g_n(x)>0,\forall x\in X,n\in\mathbb{N}.$$

为了说明 $f_n=-\ln g_n,n\in\mathbb{N}$ 是我们需要的函数, 我们只需证明

$$g_n\in C(X),\ \lim_{n\to\infty}g_n=g.$$

事实上, 对任何 $x,y,z\in X$, 我们有

$$g_n(x)\leq g(z)+nd(z,x)\leq g(z)+nd(y,z)+nd(x,y).$$

对 z 取下确界得

$$g_n(x)\leq g_n(y)+nd(x,y),$$

对称得

$$g_n(y)\leq g_n(x)+nd(x,y),$$

即

$$|g_n(y)-g_n(x)|\leq nd(x,y).$$

故 $g_n\in C(X),\forall n\in\mathbb{N}$.

给定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 因为 g 下半连续, 所以存在 x 的半径为 $\delta > 0$ 的开球邻域 U, 使得

$$g(z) > g(x) - \varepsilon, \forall z \in U.$$

于是由 g_n 定义知

$$g_n(x) \geq \min\{g(x) - \varepsilon, n\delta\}.$$

当 n 充分大, 我们知道 $g(x) \geq g_n(x) \geq g(x) - \varepsilon$, 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. 我们完成了证明. □

定理 6.14 (下凸函数的局部定义)

设开集 $V \subset \mathbb{R}^n$,f 在 V 上半连续, 如果对任何 $x \in V$,$y \in \mathbb{R}^n$,$\delta > 0$, 都存在 $h \in (0, \delta)$, 使得

$$f(x) \leqslant \frac{f(x + hy) + f(x - hy)}{2}. \tag{6.22}$$

证明 f 是 V 上的下凸函数.

笔记 本定理表明下凸函数是个局部的概念, 只要局部是下凸函数, 整体也是下凸函数. 从证明可以看到, 若对 $y \neq 0$, 不等式(6.22)改为严格不等号, 则 f 也是严格下凸的.

证明 对 $x \in V, y \in \mathbb{R}^n$, 满足 $x + wy \in V, \forall w \in [-1, 1]$, 考虑上半连续函数

$$g(w) = f(x + wy) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2} w - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2},$$

现在有

$$g(1) = g(-1) = 0.$$

如果存在 $s \in (-1, 1)$, 使得 $g(s) > 0$, 那么记

$$M \triangleq \sup_{[-1,1]} g > 0, A \triangleq \{x \in [-1, 1] : g(x) = M\}.$$

显然 A 是 $(-1, 1)$ 中的紧集, 设 A 的最大值点 w_0, 则 $1 - w_0 > 0$, 现在运用条件不等式(6.22), 我们知道存在充分小的 $h > 0$, 使得

$$f(x + w_0 y) \leqslant \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2}.$$

于是对这个 h, 我们有

$$\begin{aligned}
g(w_0) &= f(x + w_0 y) - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2} w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\
&\leqslant \frac{f(x + w_0 y + hy) + f(x + w_0 y - hy)}{2} - \frac{f(x + y) - f(x - y)}{2} w_0 - \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \\
&= \frac{g(w_0 + h) + g(w_0 - h)}{2} < M,
\end{aligned}$$

这是一个矛盾! 因此

$$g(w) \leqslant 0, \forall w \in [-1, 1],$$

因此

$$g(0) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2},$$

故 f 是 Jensen 下凸函数, 因为 f 上半连续, 所以 f 局部有上界, 所以由引理 6.1知 f 在 V 上连续, 因此我们证明了 f 是下凸函数. □

例题 6.8 设有限函数

$$S(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} u_n(x), u_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N}.$$

若 $u_n, n \in \mathbb{N}$ 非负, 证明 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 达到最小值.

证明 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由 $u_n \in C[a,b]$ 且非负可得

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to x_0} S(x) &= \varliminf_{x\to x_0} \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} u_n(x) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{m} u_n(x) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{m} \varliminf_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{m} u_n(x_0).\end{aligned}$$

令 $m \to +\infty$, 则 $\varliminf_{x\to x_0} S(x) \geqslant S(x_0)$, 故 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上下半连续. 由半连续函数的基本性质 (2)可知,$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最小值. □

例题 6.9 设 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$, 若

$$h_n \geq h_{n+1}, g_{n+1} \geq g_n, n = 1,2,\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} g_n \text{存在}.$$

证明: $\lim_{n\to\infty} h_n$ 是连续函数.

证明 记 $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$, 则一方面, 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$h_n(x) \leqslant h_{n-1}(x) \leqslant \cdots \leqslant h_N(x), \forall n > N.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$h(x) \leqslant h_N(x), \forall n > N.$$

$\forall x_0 \in [a,b]$, 令 $x \to x_0$, 并取上极限, 结合 $h_N \in C[a,b]$ 可得

$$\varlimsup_{x\to x_0} h(x) \leqslant \varlimsup_{x\to x_0} h_N(x) = h_N(x_0), \forall n > N.$$

令 $N \to \infty$, 得到 $\varlimsup_{x\to x_0} h(x) \leqslant h(x_0)$. 故 h 在 $[a,b]$ 上上半连续.

另一方面, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 由条件可知

$$g_n(x) \geqslant g_{n-1}(x) \geqslant \cdots \geqslant g_m(x), \forall n > m.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$g(x) \geqslant h_m(x), \forall n > m.$$

$\forall x_0 \in [a,b]$, 令 $x \to x_0$, 并取上极限, 结合 $g_m \in C[a,b]$ 可得

$$\varliminf_{x\to x_0} g(x) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} g_m(x) = g_m(x_0), \forall n > m.$$

令 $m \to \infty$, 得到 $\varliminf_{x\to x_0} g(x) \geqslant g(x_0)$. 故 g 在 $[a,b]$ 上下半连续. 因此 $h = g$ 在 $[a,b]$ 上既上半连续又下半连续, 从而 $h = g$ 在 $[a,b]$ 上连续. □

6.4 一致连续

定理 6.15

f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n''\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n'' - x_n') = 0$ 都有 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n'') - f(x_n')) = 0$.

定理 6.16 (Cantor 定理)

$f \in C(a,b)$ 一致连续的充要条件是 $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

注 这个定理对 $f \in C(a,b]$ 和 $f \in C[a,b)$ 也成立.

推论 6.2

若 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

命题 6.21

设 $f \in C[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明:f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

注 这个命题反过来并不成立, 反例:$f(x)=\sqrt{x}$. 因此这个条件只是函数一致连续的充分不必要条件.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $A>0$, 对 $\forall x_1,x_2\geqslant A$, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{6.23}$$

由 Cantor 定理可知,f 在 $[0,A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\delta\in(0,1)$, 使得 $\forall x_1,x_2\in[0,A+1]$ 且 $|x_2-x_1|\leqslant\delta$, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{6.24}$$

现在对 $\forall\,|x_1-x_2|\leqslant\delta<1$, 必然有 $x_1,x_2\in[0,A+1]$ 或 $x_1,x_2\in[A,+\infty)$, 从而由(6.23)(6.24)式可知, 此时一定有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

故 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. □

命题 6.22

设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $g\in C[0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

证明:g 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 由 f 一致连续可知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得对 $\forall x,y\in[0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leq\delta$, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.25}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ 可知, 存在 $A>0$, 使得对 $\forall x\geq A$, 有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.26}$$

由 Cantor 定理可知,g 在 $[0,A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta\in(0,1)$, 使得对 $\forall x,y\in[0,A+1]$ 且 $|x-y|\leq\eta$, 有

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.27}$$

故对 $\forall x,y\geq0$ 且 $|x-y|\leq\eta$, 要么都落在 $[0,A+1]$, 要么都落在 $[A,+\infty)$.

(i) 若 $x,y\in[0,A+1]$, 则由(6.27)式可得 $|g(x)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$;

(ii) 若 $x,y\in[A,+\infty)$, 则由(6.25)(6.26)式可得

$$|g(x)-g(y)|\leq|g(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故 g 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. □

命题 6.23 (连续周期函数必一致连续)

设 f 是周期 $T>0$ 的 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明 由 Cantor 定理,f 在 $[0,2T]$ 一致连续, 所以对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,T)$ 使得对 $|x_1-x_2|<\delta,x_1,x_2\in[0,2T]$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon.$$

现在对 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $0<x_2-x_1<\delta$. 注意到

$$x_1-\left[\frac{x_1}{T}\right]T\in[0,T),x_2-\left[\frac{x_1}{T}\right]T\in[0,2T),|x_1-x_2|<\delta,$$

我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f\left(x_1-\left[\frac{x_1}{T}\right]T\right)-f\left(x_2-\left[\frac{x_1}{T}\right]T\right)\right|\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. □

命题 6.24

设 f 定义在区间 I 的函数. 证明 f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in I$, 都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le M|x_1-x_2|+\varepsilon.$$

注 这个命题相当重要! 但是考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 **充分性**: 由条件可知,$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$, 则当 $|x_2-x_1|\leqslant\delta$ 且 $x_1,x_2\in I$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|+\varepsilon\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}+\varepsilon=2\varepsilon.$$

故 f 在 I 上一致连续.

必要性: 由 f 在 I 上一致连续可知,$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{6.28}$$

因此任取 $x,y\in I$,①当 $|x-y|\leqslant\delta$ 时, 由(6.28)式可知 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon\leqslant M|x-y|+\varepsilon$. 由 x,y 的任意性可知结论成立.

②当 $|x-y|>\delta$ 时,(i) 当 $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$ 时, 此时结论显然成立;

(ii) 当 $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$ 时, 不妨设 $y>x,f(y)>f(x)$(其它情况类似), 令 $f(y)-f(x)=kt$, 其中 $k\in\mathbb{N},t\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 由介值定理可知, 存在 $x=x_0<x_1<\cdots<x_k=y$, 使得

$$f(x)\leqslant f(x_j)=f(x)+jt\leqslant f(x)+kt=f(y),j=0,1,2,\cdots,k.$$

于是

$$f(x_j)-f(x_{j-1})=t>\varepsilon,j=1,2,\cdots,k.$$

此时由(6.28)式可知 $x_j-x_{j-1}>\delta,j=1,2,\cdots,k$. 从而我们有

$$y-x=\sum_{j=1}^{k}(x_j-x_{j-1})>k\delta\Rightarrow k<\frac{y-x}{\delta}. \tag{6.29}$$

取 $M=\dfrac{2\varepsilon}{\delta}>0$, 于是结合(6.29)式及 $t\in(\varepsilon,2\varepsilon]$ 就有

$$|f(y)-f(x)|=kt\leqslant\frac{t}{\delta}|y-x|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\delta}|y-x|=M|y-x|.$$

再由 x,y 的任意性可知结论成立. □

注 这里 k,t 的存在性可以如此得到: 考虑 $(\varepsilon,+\infty)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(k\varepsilon,2k\varepsilon]$ 即可, 又因为 $(k+1)\varepsilon\leqslant 2k\varepsilon$, 所以相邻的 $(k\varepsilon,2k\varepsilon]$ 一定相交. 于是一定存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $f(y)-f(x)\in(k\varepsilon,2k\varepsilon]$, 从而 $\dfrac{f(y)-f(x)}{k}\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 故取 $t=\dfrac{f(y)-f(x)}{k}\in(\varepsilon,2\varepsilon]$. 此时就有 $f(y)-f(x)=kt$.

推论 6.3 (一致连续函数被线性函数控制)

若 f 在 $\mathbb{R}$ 一致连续且 $f(0)=0$, 证明存在 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant 1+M|x|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

笔记 读者应该积累大概的感觉: 一致连续函数的增长速度不超过线性函数, 这能帮助我们快速排除一些非一致连续函数.

证明 取命题 6.24中的 $\varepsilon=1,x_1=x\in\mathbb{R},x_2=0$, 则一定存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant 1+M|x|,\forall x\in\mathbb{R}$. □

推论 6.4

若 f 在 I 上一致连续, 则存在 $M,c>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant c+M|x|,\forall x\in I.$$

推论 6.5 (一致连续函数的阶的提升)

若 f 在 $[1,+\infty)$ 一致连续, 证明存在 $M>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M, \forall x \geqslant 1.$$

证明 取命题 6.24中的 $\varepsilon=1, x_1=x \geqslant 1, x_2=1$, 则一定存在 $C>0$, 使得

$$|f(x)-f(1)| \leqslant C|x-1|+1, \forall x \geqslant 1.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant\left|\frac{f(x)-f(1)}{x}\right|+\frac{|f(1)|}{x} \leqslant \frac{C|x-1|+1}{x}+|f(1)|, \forall x \geqslant 1.$$

上式两边同时令 $x \rightarrow+\infty$, 得到

$$\varlimsup_{x \rightarrow+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C.$$

由上极限的定义可知, 存在 $X>1$, 使得 $\sup\limits_{x \geqslant X}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C$. 从而我们有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C, \forall x>X. \tag{6.30}$$

又因为 f 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[1, X]$ 上连续, 从而 f 在 $[1, X]$ 上有界, 即存在 $C'>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C', \forall x \in[1, X]. \tag{6.31}$$

于是取 $M=\max\{C, C'\}$, 则由(6.30)(6.31)式可知

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M, \forall x \geqslant 1.$$

□

命题 6.25

证明区间 I 上的函数 f 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\ell>0$, 使得当 $x_1 \neq x_2 \in I$, 就有:

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell \Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

证明 **必要性**: 由命题 6.24可知, $\forall \varepsilon>0, \exists M>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|+\varepsilon, \forall x, y \in I.$$

取 $\ell=\frac{\varepsilon}{\delta}+M$, 任取 $x_1 \neq x_2 \in I$, 当 $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell$ 时, 我们有

$$\ell<\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leq \frac{M|x_2-x_1|}{|x_2-x_1|}+\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}=M+\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}.$$

从而

$$|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{\ell-M}=\delta. \tag{6.32}$$

又由 f 在 I 上一致连续可知

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon, \forall x', x'' \in I \text{且} |x'-x''|<\delta. \tag{6.33}$$

因此结合(6.32)(6.33)式可得 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 故必要性得证.

充分性: 已知对 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $\ell>0$, 使得 $\forall x_1 \neq x_2 \in I$, 有

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell \Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon. \tag{6.34}$$

取 $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\ell}\right)$, 若 $|f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon$ 但 $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, 则我们有

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\delta} > \ell.$$

而由(6.34)式可得, 此时 $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 矛盾! 故 f 在 I 上一致连续. □

命题 6.26 (一致连续函数的拼接)

设 $f \in C[0, +\infty)$, 若存在 $\delta > 0$ 使得 f 在 $[\delta, +\infty)$ 一致连续, 则 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

笔记 证明的想法比结论本身重要, 在和本命题叙述形式不同的时候需要快速准确判断出来 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 Cantor 定理可知,f 在 $[0, \delta + 1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $\forall x, y \in [0, \delta + 1]$ 且 $|x - y| \leqslant \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.35}$$

由 f 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续可知, 对 $\forall x, y \in [\delta, +\infty)$ 且 $|x - y| \leqslant \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.36}$$

现在对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$, 都有 $|x - y| \leqslant \eta$.

(i) 若 $x, y \in [0, \delta + 1]$ 或 $[\delta, +\infty)$, 则由(6.35)(6.36)式可直接得到 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

(ii) 若 $x \in [0, \delta + 1]$,$y \in [\delta, +\infty)$, 则 $|x - y| \geqslant 1 > \eta$, 这是不可能的.

故原命题得证. □

例题 6.10 设 f 在 $[1, +\infty)$ 一致连续. 证明:$\dfrac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续.

证明 由 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续可知,$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x, y \geqslant 1$ 且 $|x - y| \leqslant \delta$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.37}$$

由推论 6.5可知,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ 有界. 故可设 $M \triangleq \sup\limits_{x \geqslant 1} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < +\infty$. 取 $\delta' = \min\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{2M}\right\}$, 则对 $\forall x, y \geqslant 1$ 且 $|x - y| \leqslant \delta'$, 由(6.37)式可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leqslant \frac{|yf(x) - yf(y)| + |y - x|\,|f(y)|}{xy} \\
&= \frac{|f(x) - f(y)|}{x} + \frac{|y - x|}{xy}|f(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + M\,|y - x| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续. □

命题 6.27 (函数爆炸一定不一致连续)

设 f 在 $[a, +\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明:$f$ 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

证明 证法一:假设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 则由推论 6.4可知, 存在 $c, d > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant c\,|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \tag{6.38}$$

从而

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \overline{\lim_{x \to +\infty}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| < +\infty. \tag{6.39}$$

由上下极限 L'Hospital 法则可得

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{f(x)}{x} \geqslant \underline{\lim_{x \to +\infty}} f'(x) = +\infty.$$

这与(6.39)式矛盾. 故 f 在 $[a,+\infty)$ 不一致连续.

证法二:假设 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则由推论 6.4可知, 存在 $c,d>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant c|x|+d,\forall x\in[a,+\infty).\tag{6.40}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 可知, 存在 $X>0$, 使得对 $\forall x\geqslant X$, 有

$$f'(x)\geqslant c+1\Leftrightarrow f'(x)-c+1\geqslant 0.$$

从而 $f(x)-(c+1)x$ 在 $[X,+\infty)$ 上单调递增, 于是就有

$$f(x)-(c+1)x\geqslant f(X)-(c+1)X\triangleq D,\forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)\geqslant(c+1)x+D,\forall x\geqslant X$. 再结合(6.40)式可得

$$(c+1)x+D\leqslant f(x)\leqslant cx+d,\forall x\geqslant X>0.$$

即 $x\leqslant d-D,\forall x\geqslant X>0$. 令 $x\to+\infty$, 则

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}x\leqslant d-D.$$

矛盾. 故 f 在 $[a,+\infty)$ 不一致连续. □

例题 6.11 判断下述函数的一致连续性:

(1) $f(x)=\ln x,\quad x\in(0,1]$;

(2) $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1]$;

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\quad x\in(0,+\infty)$;

(4) $f(x)=\sin^2 x,\quad x\in\mathbb{R}$;

(5) $f(x)=e^x,\quad x\in\mathbb{R}$;

(6) $f(x)=\sin x^2,\quad x\in[0,+\infty)$;

(7) $f(x)=\sin(x\sin x),\quad x\in[0,+\infty)$;

(8) $f(x)=x\cos x,\quad x\in[0,+\infty)$;

(9) 设 $a>0,\quad f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,a)$ 和 $x\in(a,+\infty)$;

笔记 关于三角函数找数列的问题, 一般 sin, cos 函数就多凑一个 $2n\pi$ 或 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

注 (6)中找这两个数列 $x_n'=\sqrt{2n\pi},x_n''=\sqrt{2n\pi}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的方式: 待定 c_n, 令 $x_n'=\sqrt{2n\pi},x_n''=\sqrt{2n\pi}+c_n$, 我们希望

$$\lim_{n\to\infty}(x_n''-x_n')=\lim_{n\to\infty}c_n=0,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)\neq 0.$$

再结合 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(c_n^2+2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sin c_n^2\cos 2c_n\sqrt{2n\pi}+\cos c_n^2\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}.$$

故我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2c_n\sqrt{2n\pi}\neq 0$. 从而令 $c_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 即可.

(7)(8) 找数列的方式与 (6) 类似.

解

(1) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=+\infty$ 及Cantor 定理可得.

(2) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}e^x\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在及Cantor 定理可得.

(3) 一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(1)$ 存在 (连续性), $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及 Cantor 定理可知,f 在 $(0,1]$ 上一致连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, 所以由命题 6.21可知,$f$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 再根据一致连续函数的拼接可知,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

(4) 一致连续. 由 $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x \le 2$ 及由 Lagrange 中值定理, 易知 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 从而一致连续.

(5) 不一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 及命题 6.27可得.

(6) 不一致连续.令 $x_n' = \sqrt{2n\pi}, x_n'' = \sqrt{2n\pi} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$. 但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi + \frac{1}{n} + 2\sqrt{2\pi}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n} + 2\sqrt{2\pi}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sin 2\sqrt{2\pi}\cos\frac{1}{n} + \cos 2\sqrt{2\pi}\sin\frac{1}{n}\right] = \sin 2\sqrt{2\pi} \ne 0.$$

故根据定理 6.15可知 f 不一致连续.

(7) 不一致连续.令 $x_n' = 2n\pi, x_n'' = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sin\left[\pi^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sin\pi^2 x\cos o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\pi^2\sin o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= \sin\pi^2 \ne 0.$$

故根据定理 6.15可知 f 不一致连续.

(8) 不一致连续.令 $x_n' = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, x_n'' = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n''\right) - f\left(x_n'\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} = -2\pi.$$

故根据定理 6.15可知 f 不一致连续.

(9) 在 $(0,a)$ 上不一致连续, 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x} = 0$ 及Cantor 定理可得.

□

命题 6.28 (一个重要不等式)

对 $\alpha \in (0,1)$, 证明

$$|x^\alpha - y^\alpha| \le |x-y|^\alpha,\ \forall x,y \in [0,+\infty).$$

证明 不妨设 $y \geqslant x \geqslant 0$, 则只须证 $y^\alpha - x^\alpha \leqslant (y-x)^\alpha$. 则只须证 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \leqslant \left(\dfrac{y}{x} - 1\right)^\alpha$. 故只须证

$$t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha, \forall t \geqslant 1.$$

令 $g(t) = t^\alpha - 1 - (t-1)^\alpha$, 则 $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(t-1)^{\alpha-1} \leqslant 0$. 从而 $g(t) \leqslant g(1) = 0, \forall t \geqslant 1$. 故 $t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha, \forall t \geqslant 1$.

□

例题 6.12 证明:$f(x) = x^\alpha \ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha \in (0,1)$.

证明 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,f 不被线性函数控制, 故由一致连续函数被线性函数控制可知 f 不一致连续.

当 $\alpha \leqslant 0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ 不存在, 由Cantor 定理可知,f 在 $(0,2)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \in (0,1)$ 时, 有 $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha\ln x - 1)$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上有界, 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1,+\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[2,+\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$, 故

由Cantor 定理可知,f 在 $(0,2]$ 上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. □

例题 6.13 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 求 α 的范围使得 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

笔记 **找这两个数列 $x_n'=2n\pi, x_n''=2n\pi+n^{1-\alpha}$ 的方法:** 当 $\alpha>1$ 时, 待定 c_n, 令 $x_n'=2n\pi, x_n''=2n\pi+c_n$. 我们希望 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n''-x_n'\right)=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)\right]\neq 0$. 注意到

$$\begin{aligned}
f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)&=(2n\pi+c_n)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+c_n}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi}\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{c_n}{2n\pi}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+c_n}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi}\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{c_n}{2n\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{(2n\pi+c_n)^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{c_n}{2n\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left[\left(1+\frac{c_n}{2n\pi}\right)^{\alpha}-1\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi}+O\left(\frac{c_n}{n^2}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi}+O\left(\frac{c_n}{n^2}\right)\right],\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

于是取 $c_n=n^{1-\alpha}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, 并且由上式可得

$$\begin{aligned}
f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)&=(2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right]\\
&=\alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\to\alpha\left(2\pi\right)^{\alpha-1}\neq 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

故我们可取 $x_n'=2n\pi, x_n''=2n\pi+n^{1-\alpha}$.

证明 当 $\alpha\leqslant 0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在, 由Cantor 定理可知,f 在 $(0,1)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha\in(0,1]$ 时, 由条件可知, 对 $\forall x\geqslant 1$, 都有

$$\left|f'(x)\right|=\left|\left(x^{\alpha}\cos\frac{1}{x}\right)'\right|=\left|\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}\right|+\left|x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\alpha+1.$$

因此 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1,+\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, 故由Cantor 定理可知,$f$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得,f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

当 $\alpha>1$ 时,令 $x_n'=2n\pi, x_n''=2n\pi+n^{1-\alpha}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n''-x_n'\right)=\lim_{n\to\infty}n^{1-\alpha}=0.$$

此时我们有

$$\begin{aligned}
f\left(x_n''\right)-f\left(x_n'\right)&=\left(2n\pi+n^{1-\alpha}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+n^{1-\alpha}}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi}\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi+n^{1-\alpha}}-(2n\pi)^{\alpha}\cos\frac{1}{2n\pi}\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{\left(2n\pi+n^{1-\alpha}\right)^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-(2n\pi)^{\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=(2n\pi)^{\alpha}\left[\left(1+\frac{n^{-\alpha}}{2\pi}\right)^{\alpha}-1\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= (2n\pi)^{\alpha}\left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi}+O\left(n^{-\alpha-1}\right)\right]\\
&= \alpha(2\pi)^{\alpha-1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\to\alpha(2\pi)^{\alpha-1}\neq 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

故根据定理 6.15可知 f 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续. □

例题 6.14 设 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R},n=1,2,\cdots$ 是一致连续函数且 $f_n\to f$, 证明:f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$
|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(0,+\infty). \tag{6.41}
$$

由 f_N 一致连续, 可知 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$, 有

$$
|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon. \tag{6.42}
$$

于是对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$, 结合 (6.41) 和 (6.42) 式, 我们有

$$
|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<3\varepsilon.
$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续. □

例题 6.15 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且对任何 $x\geq 0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 并说明如果去掉一致连续则结论不对.

笔记 证明的想法即把点拉回到 $[0,1]$ 并用一致连续来解决. 反例可积累

$$
f(x)=\frac{x\sin(\pi x)}{1+x^2\sin^2(\pi x)}.
$$

核心想法: 分段放缩、取整平移、一致连续.

证明 由 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $x,y\in[0,+\infty)$ 且 $|x-y|\leqslant\delta$ 时, 有

$$
|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{6.43}
$$

把 $[0,1]$ 做 N 等分, 其中 $N=\frac{1}{\delta}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{i}{N}+n\right)=0,i=0,1,\cdots,N$ 可知, 存在 $N'\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geqslant N'$, 有

$$
\left|f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right|<\varepsilon,\quad i=0,1,\cdots,N. \tag{6.44}
$$

从而对 $\forall x\geqslant 1+N'$, 一定存在 $i\in\{0,1,\cdots,N-1\},n\in\mathbb{N}\cap[N',+\infty)$, 使得 $x\in\left[\frac{i}{N}+n,\frac{i+1}{N}+n\right]$. 注意到此时

$$
\left|x-\left(\frac{i}{N}+n\right)\right|\leqslant\left|\left(\frac{i+1}{N}+n\right)-\left(\frac{i}{N}+n\right)\right|=\frac{1}{N}=\delta.
$$

于是结合 (6.43) 和 (6.44) 式我们就有

$$
|f(x)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right|+\left|f\left(\frac{i}{N}+n\right)\right|<2\varepsilon.
$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. □

6.5 函数列极限

定理 6.17 (Dini 定理)

若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C([a,b]),f\in C([a,b])$ 且对每一个 $x\in[a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调并成立

$$
\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).
$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

注 不妨设 $f(x)=0$ 的原因: 假设当 $f(x)=0$ 时结论已经成立, 则当 $f(x)\neq 0$ 时, 令 $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$, 此时

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. 因为对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调, 所以对任意 $x \in [a,b]$, 也有 $g_n(x)$ 关于 n 单调. 于是由假设可知,$g_n(x)$ 一致收敛到 0. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x) = 0$, 不妨设对 $\forall x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 可知, 对 $\forall x \in [a,b]$, 都有

$$f_n(x) \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 考虑 $U_n \triangleq \{x \in [a,b] | f_n(x) < \varepsilon\}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 可得

$$[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n.$$

因为 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, 又注意 $f_n^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) = U_n$, 所以 U_n 是开集. 又由于对 $\forall x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 因此 $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$. 这是因为对 $\forall x \in U_n$, 都有 $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) < \varepsilon$, 于是 $x \in U_{n+1}$. 从而由有限覆盖定理可知, 存在 $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}_1$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}.$$

取 $N \triangleq \max\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$, 则此时 $[a,b] \subset U_N$. 故对 $\forall n \geqslant N$, 由 $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$ 可知,$[a,b] \subset U_N \subset U_n$, 即对 $\forall n \geqslant N$, 都有 $f_n(x) < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 0. 故原定理得证. □

定理 6.18 (Dini 定理函数单调版本)

设 $f_n \in C[a,b], n = 1, 2, \cdots$ 都是单调函数. 若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b].$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 是一致的. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

♡

证明 由 Cantor 定理可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 f_n 在 $[a,b]$ 上一致连续. 从而对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall |y - x| \leqslant \delta. \tag{6.45}$$

设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 使得 $x_i - x_{i+1} \leqslant \delta, i = 0, 1, 2, \cdots, m$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}. \tag{6.46}$$

对 $\forall x \in [a,b]$, 当 $n \geqslant N$ 时, 一定存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $x \in [x_{i-1}, x_i]$. 从而当 $n \geqslant N$ 时, 利用(6.45)和 (6.46) 式以及 f_n 的单调性可得

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| + \varepsilon + \varepsilon \\
&\leqslant |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + 2\varepsilon \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. □

6.6 更弱定义的导数

定理 6.19 (最弱递增条件)

1. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有

$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

则 f 在 $[a,b]$ 递增.

2. 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0 \in (a,b)$ 都有

$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \tag{6.47}$$

则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.

3. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} > 0.$$

证明 f 在 (a,b) 严格递增.

4. 设 $f \in C(a,b)$ 满足对任何 $x \in (a,b)$, 都有

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \geqslant 0.$$

证明 f 在 (a,b) 递增.

注 只需证明 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 的原因: 假设 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 已经成立. 任取 $c,d \in (a,b)$ 或 $[a,b]$, 则我们考虑 (c,d) 或 $[c,d]$ 这个区间, 并且已知 f 在 (c,d) 或 $[c,d]$ 上连续且满足上述条件, 于是由假设可知 $f(d) \geq f(c)$ 或 $f(d) > f(c)$. 故我们只需证明 $f(b) \geq f(a)$ 或 $f(b) > f(a)$ 即可.

证明

1. 只需证明 $f(b) \geq f(a)$. 由 f 的连续性和极限保号性, 我们只需证明对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $f(b) \geq f(a+\varepsilon)$. 考虑

$$F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon).$$

则 $F(b) = F(a+\varepsilon) = 0$, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \dfrac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$, $\forall x_0 \in [a+\varepsilon, b)$. 于是设 F 在 $[a+\varepsilon, b]$ 最大值点为 c,

(i) 当 $c \in [a+\varepsilon, b)$ 时, 则

$$0 \geq \overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geq -\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$$

故 $f(b) \geq f(a+\varepsilon)$.

(ii) 当 $c = b$ 时, 则对 $\forall x \in [a+\varepsilon, b]$, 都有 $0 = F(b) = F(c) \geqslant F(x)$. 从而

$$\begin{aligned}
&F(x) = f(x) - f(a+\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon) \leqslant 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} \leqslant \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \\
\Rightarrow\ & \frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} \geqslant \overline{\lim_{x\to(a+\varepsilon)^+}} \frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon} > 0 \\
\Rightarrow\ & f(b) > f(a+\varepsilon)
\end{aligned}$$

证毕.

2. 若 f 在 $[a,b]$ 不严格增, 则存在 $[c,d] \subset [a,b]$ 使得 $f(d) = f(c)$, 注意到由第 1 问可知 f 在 $[c,d]$ 递增, 从而只能为常数, 于是 $f(x) \equiv f(c)$. 不妨设 $[c,d] \subset (a,b)$, 否则任取 $[a,b]$ 一个子区间即可. 因此

$$\overline{\lim_{x\to c^+}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0.$$

这显然和(6.47)矛盾! 故我们证明了 f 在 $[a,b]$ 严格递增.

3. 对 $[c,d] \subset (a,b)$, 我们断言存在 $x_1 \in (c,d)$ 使得

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} \geq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h} \tag{6.48}$$

现在我们用 $g(x) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c) + f(c) - f(x)$ 代替 f. 于是考虑 $g \in C^1[c,d]$, $g(d) = g(c) = 0$, 此时要

证明(6.48), 就只需证明存在 $x_1 \in (c,d)$ 使得

$$\varlimsup_{h\to 0^+} \frac{g(x_1+h)-g(x_1-h)}{2h} \geq 0 \tag{6.49}$$

若 $g \equiv 0$, 已经得到了不等式(6.49).

若 $t \in (a,b)$ 是 g 的最大值点使得 $g(t) > 0$. 取 $k \in (0, g(t))$, 则构造非空有界集 $U = \{x \in [c,t] : g(x) > k\}$. 记 $x_1 = \inf U$, 则存在 $t_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$ 使得 $t_n \geq x_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x_1$. 注意 $x_1 \neq c$, 若 $g(x_1) > k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $g > k$, 这和 x_1 是 inf 矛盾! 故我们只有 $x_1 \notin U$ 且 $g(x_1) = k$. 注意到 $\dfrac{g(x_1+t_n-x_1)-g(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)} \geq \dfrac{k-k}{2(t_n-k_1)} = 0$ 这就给出了(6.49).

若 f 有负的最小值 $g(t) < 0$. 取 $k \in (g(c), 0)$, 构造非空有界集 $V = \{x \in [t,d] : g(x) < k\}$. 并取 $x_1 = \sup V$, 同样的 $g(x_1) = k$ 且 $x_1 \neq d$. 存在 $s_n \in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x_1$. 于是由 $\dfrac{g(x_1+x_1-s_n)-g(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)} \geq \dfrac{k-k}{2(x_1-s_n)} = 0$ 知(6.49)成立.

现在由不等式(6.48)和题目条件就证明了 $f(d) > f(c)$, 从而 f 严格递增.

4. 注意到 $f(x)+\varepsilon x$, $\varepsilon > 0$ 满足第 3 问要求, 因此 $f(y)+\varepsilon y > f(x)+\varepsilon x$, $\forall b > y > x > a$, $\varepsilon > 0$. 让 $\varepsilon \to 0^+$, 我们有 $f(y) \geq f(x)$, 这就证明了 f 在 (a,b) 递增.

□

6.7 逼近方法

6.7.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在 $[a,b]$ 上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设 $[a,b]=[0,1]$.

定义 6.4 (一维 Bernstein 多项式)

设 $f \in C[0,1], n \in \mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

设 $f \in C[a,b], n \in \mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式**为

$$B_n(f,x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

♣

注 $[a,b]$ 区间上的 Bernstein 多项式可由 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设 $f \in C[a,b], n \in \mathbb{N}_0$, 令 $x=(b-a)y+a, \forall x \in [a,b]$, 则 $y \in [0,1]$, 并且

$$y = \frac{x-a}{b-a}, 1-y = \frac{b-x}{b-a}.$$

再令 $g(y) = f((b-a)y+a)$, 则由 $f \in C[a,b]$ 可知 $g \in C[0,1]$. 于是 g 在 $[0,1]$ 区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g,y) \triangleq \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k y^k (1-y)^{n-k}.$$

故 $[a,b]$ 区间上 f 的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f,x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} f\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

引理 6.2

1. $B_n(C,x) = C\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C$.

2. $B_n(x,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x.$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=0.$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$

证明

1. 由二项式定理可得 $B_n(C,x)=C\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=C(x+1-x)^n=C.$
2. $B_n(x,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{(1-x)^n}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y^k\right)'=\left[(1+y)^n\right]'=n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^k=ny(1+y)^{n-1}.$$

故

$$\begin{aligned}B_n(x,x)&=\frac{(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=\frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1}\\&=\frac{(1-x)^n}{n}\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}=x.\end{aligned}$$

3. 由 2 的结论可直接得到.
4. 首先, 展开得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(1-x)^n\sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2xk}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)\\&=x^2\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\\&=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.\end{aligned}\tag{6.50}$$

接着, 计算 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^k$ 和 $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k y^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y^k\right)'=\left[(1+y)^n\right]'=n(1+y)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k y^k&=y\left[\left(\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k y^k\right)'\right]=y\left[\left(y\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k y^k\right)'\right)'\right]\\&=y\left[\left(y\left((1+y)^n\right)'\right)'\right]=y\left[\left(ny(1+y)^{n-1}\right)'\right]\\&=y\left[n(1+y)^{n-1}+n(n-1)y(1+y)^{n-2}\right]\\&=ny(1+y)^{n-2}\left[(1+y)+(n-1)y\right]\\&=ny(1+y)^{n-2}(ny+1).\end{aligned}$$

令 $y=\dfrac{x}{1-x}$, 则由上式可得

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-1}=\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}=\frac{nx}{(1-x)^n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{n-2}\left(\frac{nx}{1-x}+1\right)=\frac{nx}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2}\frac{(n-1)x+1}{1-x}=\frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n}.$$

将上式代入(6.50)可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}&=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k+\frac{(1-x)^n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\\&=x^2-\frac{2x(1-x)^n}{n}\cdot\frac{nx}{(1-x)^n}+\frac{(1-x)^n}{n^2}\cdot\frac{nx\left[(n-1)x+1\right]}{(1-x)^n}\\&=x^2-2x^2+\frac{(n-1)x^2+x}{n}=\frac{x(1-x)}{n}.\end{aligned}$$

□

定理 6.20 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设 $\varphi(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right], n=1,2,3,\cdots$, 则有

$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x), n\in\mathbb{N}. \tag{6.51}$$

(2) 若 f 递增或者递减, 则 $B_n(f,x),n\in\mathbb{N}_0$ 也递增或者递减.

(3) 若 f 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数, 则对每个 $n\in\mathbb{N}_0$ 都有 $B_n(f,x)$ 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数.

(4) 设 $f\in C^k[0,1],k\in\mathbb{N}_0$, 则关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_n(f,x)=f(x),\ \lim_{n\to\infty}B_n'(f,x)=f'(x),\cdots,\ \lim_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f,x)=f^{(k)}(x). \tag{6.52}$$

♡

注 性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!

即当 $f\in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f,x)=f^{(k)}(x)$ 不成立!

也即当 $f\in C^\infty[0,1]$ 时, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在一个 N(与 k 无关, 公共的 N), 使得 $\forall n>N$, 都有 $B_n^{(k)}(f,x)\rightrightarrows f^{(k)}(x)$ 不成立!

证明

(1) 对 $n\geqslant 1$, 直接计算得

$$\begin{aligned}B_n'(f,x)&=\left[\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right]'\\&=\sum_{k=1}^{n}kf\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}x^k(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}-(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}-(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[nf\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}-nf\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\right]x^k(1-x)^{n-k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{C}_{n-1}^{k} x^{k}(1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^{k} x^{k}(1-x)^{n-k-1} \\
&= B_{n-1}(\varphi, x),
\end{aligned}$$

这就给出了式(6.51).

(2) 如果 f 递增, 那么就有 $\varphi \geqslant 0$, 则由(6.51)知 $B_n'(f,x) = B_{n-1}(\varphi,x) \geqslant 0$, 故 $B_n(f,x)$ 递增. 类似可得递减.

(3) 如果 f 下凸, 对 $n=1$ 的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设 $n \geqslant 2$. 注意继续由(6.51)知

$$B_n''(f,x) = B_{n-1}'(\varphi,x) = B_{n-2}(\psi,x), \psi(x) = (n-1)\left[\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right)\right],$$

从而由 f 的下凸性可得

$$\begin{aligned}
B_{n-2}(\psi,x) &= \sum_{j=0}^{n-2} \psi\left(\frac{j}{n-2}\right) \mathrm{C}_{n-2}^{k}(1-x)^{n-2-j}x^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^{j} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^{j} \\
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{j+1}{n}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^{j} \\
&= 2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{\frac{j+2}{n} + \frac{j}{n}}{2}\right)\right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^{j} \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

这就证明了 $B_n(f,x)$ 下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明 $k=0$ 时命题成立. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x-y| \leqslant \delta$, 就有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
|B_n(f,x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leqslant \delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| + \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leqslant \delta}\left|C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| + 2\sup|f| \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta}\left|C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&\overset{\text{类似}Chebeshev\text{不等式的证明}}{\leqslant} \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2\sup|f|}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{2\sup|f|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\overset{6.2}{=} \varepsilon + \frac{2\sup|f|}{n\delta^2} x(1-x),
\end{aligned}$$

于是从上式立得

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\sup|f|}{2n\delta^2}.$$

令 $n \to \infty$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x)-f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x)-f(x)| = 0.$$

故我们得到了 $k=0$ 时, 式(6.52)成立.

Step2 $(*)$ 我们定义

$$T_n f(x) = n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right], n\in\mathbb{N}.$$

$$B_n'(f,x) = B_{n-1}(T_n f,x), \forall n\in\mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1}\cdots T_n f(x) = (n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right), \forall j\in\mathbb{N}.$$

事实上, 当 $j=1$, 由(6.51)可知命题显然成立, 假设命题对 $j\in\mathbb{N}$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
&T_{n-j}\cdots T_n f(x)\\
=&T_{n-j}\left((n-j+1)\cdots(n-1)n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k T_{n-j}\left(f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\frac{n!(n-j)}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right]\\
=&\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)\\
&-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j}C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
&-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
=&\frac{n!(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!}\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{j+1}{n}\right)-\frac{n!}{(n-j-1)!}(-1)^j f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)\\
&+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1+j}(C_j^{k-1}+C_j^k)f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\\
=&\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^{k+1+j}C_{j+1}^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

因此我们证明了对 $j+1$, 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有 $j\in\mathbb{N}$, 命题都成立.

Step3 $(*)$ 我们证明一个中值定理的结果. 由Hermite 插值定理, 对 $x \in [0,1]$, 存在 $\theta \in [0,1]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{j} \prod_{s \neq k} \frac{(x - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^{j} \left(x - \frac{s+i}{n}\right).$$

特别的存在 $\theta \in [\frac{i}{n}, \frac{i+j}{n}]$, 使得

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{j} \prod_{s \neq k} \frac{(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^{j} \left(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \prod_{s \neq k} \frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^{j} \prod_{s \neq k} \frac{s}{s-k} \cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^{j} \frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!} (-1)^{k-1} f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j},
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right) = \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j}.$$

Step4 $(*)$ 注意到

$$B_n^{(j)}(f,x) = B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x), 1 \leqslant j \leqslant k, n > k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned}
&|B_n^{(j)}(f,x) - f^{(j)}(x)| \leqslant |B_{n-j}(f^{(j)},x) - f^{(j)}(x)| + |B_{n-j}(f^{(j)},x) - B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x)| \\
&\leqslant |B_{n-j}(f^{(j)},x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f\left(\frac{i}{n-j}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\
&= |B_{n-j}(f^{(j)},x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\
&= |B_{n-j}(f^{(j)},x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n! f^{(j)}(\theta)}{(n-j)! n^j}| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\
&\leqslant |B_{n-j}(f^{(j)},x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-j} \left|1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j}\right| \cdot |f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i}.
\end{aligned}$$

Step5 $(*)$ **Step1** 告诉我们关于 $x \in [0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} B_n\left(f^{(j)}, x\right) = f^{(j)}(x), j = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j}\right) = 0,$$

以及

$$\left|\frac{i}{n} - \frac{i}{n-j}\right| = \frac{ji}{n(n-j)} \leqslant \frac{j}{n}, \left|\frac{i+j}{n} - \frac{i}{n-j}\right| \leqslant \frac{2j}{n}, \forall n > j.$$

我们同时假设

$$M_j \triangleq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(j)}(x)|, j=0,1,2,\cdots,k.$$

并注意到 $f^{(j)}$ 是一致连续的. 现在对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \forall x\in[0,1],$$

$$\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|<\frac{\varepsilon}{3M_j}, \forall n>N,$$

$$\left|f^{(j)}(x)-f^{(j)}(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \forall |x-y|<\delta, x,y\in[0,1].$$

因此当正整数 $n>\max\left\{\frac{2j}{\delta},j,N\right\}$, 利用 **Step4**, 我们有

$$\left|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)\right|<\varepsilon, \forall x\in[a,b],$$

这就完成了证明.

□

例题 6.16 设 $f\in C[0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0, \forall n=0,1,2,\cdots.$$

证明

$$f(x)=0, \forall x\in[0,1].$$

注 $p_n(x)$ 的良定义性可由Bernstein 多项式的性质 (4)得到. 实际上, 我们这里取的 $p_n(x)$ 就是 g 的 Bernstein 多项式 $B_n(g,x)$.

证明 由条件可知, 对任意实系数多项式 $p(x)$, 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)\mathrm{d}x=0, \forall p(x)\in\mathbb{R}[x].$$

对 $\forall g\in C[0,1]$, 取 $p_n(x)\in\mathbb{R}[x]$, 使得 $p_n(x)\rightrightarrows g(x)$, 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x)p_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0, \forall g\in C[a,b].$$

再取 $g=f$, 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0.$$

□

定理 6.21

设 $f(x)\in C^k[a,b]$, 这里 $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_0$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\left|f^{(s)}(x)-p^{(s)}(x)\right|\leqslant\varepsilon, \forall x\in[a,b], s=0,1,2,\cdots,k.$$

注 $q(x)$ 的良定义性可由 $f^{(k)}$ 的连续性和 Bernstein 多项式的性质 (4) 直接得到. 实际上, $q(x)=B(f^{(k)},x)$.

证明 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)dt.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $q\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$|q(x)-f^{(k)}(x)|\leqslant\varepsilon,\forall x\in[a,b]. \tag{6.53}$$

设

$$p(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}q(t)dt,$$

则对 p 求导可得, 对 $\forall s\in\mathbb{N}$, 我们有

$$p^{(s)}(x)=\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-s-1}q(t)dt. \tag{6.54}$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对 $\forall s\in\mathbb{N}$, 我们有

$$f^{(s)}(x)=\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-s-1}f^{(k)}(t)dt. \tag{6.55}$$

于是利用(6.53)(6.54)(6.55)式可得, 对 $\forall s\in\mathbb{N}$, 我们有

$$|f^{(s)}(x)-p^{(s)}(x)|=\left|\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-s-1}[f^{(k)}(t)-q(t)]dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!},\forall x\in[a,b].$$

故结论得证. □

例题 6.17 设多项式列 $p_n, n=1,2,\cdots$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f, 证明 f 为多项式.

证明 由条件可知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|p_m(x)-p_n(x)|\leqslant 1,\forall m>n\geqslant N,x\in\mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此 $p_m(x)-p_n(x)=C,\forall m>n\geqslant N,x\in\mathbb{R}$. 其中 C 是一个常数. 故

$$p_n(x)=p_N(x)+c_n,\forall n\geqslant N,x\in\mathbb{R}. \tag{6.56}$$

其中 $\{c_n\}$ 是一个常数列. 从而任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)=f(x)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}[p_n(x_0)-p_N(x_0)]=f(x_0)-p_N(x_0).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 存在. 于是由 x_0 的任意性可得

$$c=\lim_{n\to\infty}c_n=f(x)-p_N(x),x\in\mathbb{R}.$$

即 $f(x)=p_N(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}$. 因此结论得证. 或者对(6.56)式两边同时令 $n\to\infty$, 也能得到

$$f(x)=p_N(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}.$$

□

6.7.2 可积函数的逼近

定理 6.22 (可积被连续函数逼近)

(1) 设 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{6.57}$$

(2) 设 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_c(a,b)$, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这里 $g\in C_c(a,b)$ 表示 g 是有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.

(3) 设 $p\geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这里 $g\in C_c(a,b)$ 表示 g 是有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.

笔记 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

证明

(1) 对任何 $\varepsilon>0$, 因为 $f\in R[a,b]$, 所以存在一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\varepsilon, w_i(f)\text{ 表示}f\text{ 在}[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n\text{ 的振幅}.$$

连接线段 $(x_{i-1},f(x_{i-1})),(x_i,f(x_i)), i=1,2,\cdots,n$ 得到连续函数 g.(不难发现 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|g|\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$) 则

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})|\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-f(x_{i-1})|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}w_i(f)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n}w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(2) 对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 由第 1 问可知, 存在 $g\in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的 $\delta>0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{16},\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{16}.$$

再取 $h\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

(a): $0\leqslant h(x)\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R}$;

(b): $h(x)=0,\forall x\in(-\infty,a+\delta)\cup(b-\delta,+\infty)$;

(c): $h(x)=1,\forall x\in[a+2\delta,b-2\delta]$.

于是取 $g_1(x)=h(x)g(x)\in C_c(a,b)$, 由第 1 问可知 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|g|\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$, 从而 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|g_1|\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}|f|$. 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)-g_1(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^b|f(x)-g(x)h(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{a+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{a+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{a+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4}+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{3\varepsilon}{4}+2\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)|\mathrm{d}x+2\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

(3) 证明的想法和第 2 问类似. 由条件可知, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 使得

$$
\int_{|x|\geqslant X}|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_X^{\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-X}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon.
$$

因为 f 在 $[-X,X]$ 黎曼可积, 所以由第 2 问, 存在 $g\in C_c(-X,X)$ 使得

$$
\int_{-X}^{X}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{1+\sup_{[-X,X]}|2f|^{p-1}}.
$$

从前两问的构造可以看到

$$
\sup_{[-X,X]}|g|\leqslant\sup_{[-X,X]}|f|,
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_{|x|\geqslant X}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{-X}^{X}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant \varepsilon+\sup_{[-X,X]}|f-g|^{p-1}\int_{-X}^{X}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \varepsilon+\sup_{[-X,X]}(2|f|)^{p-1}\int_{-X}^{X}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\
&<\varepsilon+\varepsilon,
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

□

引理 6.3

证明: 若 $A,B,C\in\mathbb{R}$, 则存在 $C_p>0$, 使得

$$
|A+B+C|^p\leqslant C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).
$$

♡

笔记 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

证明 令

$$
S\triangleq\{(A,B,C)\mid |A|^p+|B|^p+|C|^p=1\},
$$

则 S 是 $\mathbb{R}^3$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $|A+B+C|^p$ 可以看作紧集 S 上关于 (A,B,C) 的连续函数, 故一定存在 $C_p>0$, 使得

$$
|A+B+C|^p\leqslant C_p,\forall(A,B,C)\in S. \tag{6.58}
$$

对 $\forall(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$, 固定 A,B,C, 不妨设 A,B,C 不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$
L=\frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p+|B|^p+|C|^p}},
$$

考虑 (LA,LB,LC), 则此时

$$
|LA|^p+|LB|^p+|LC|^p=1.
$$

因此 $(LA,LB,LC)\in S$. 从而由(6.58)式可知

$$
|LA+LB+LC|^p\leqslant C_p.
$$

于是

$$|A+B+C|^p \leqslant \frac{C_p}{L^p} = C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

故结论得证. □

定理 6.23 (积分的绝对连续性)

设 $p \geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$, 证明

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{6.59}$$

笔记 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

证明 **Step1**: 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$ 时, 则存在 $X > 0$, 使得

$$f(x) = 0, \forall |x| \geqslant X.$$

从而当 $h \in (-1,1)$ 时, 就有

$$f(x) = 0, \forall |x| \geqslant X+1.$$

又因为 $f \in C[-X-1, X+1]$, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[-X-1, X+1]$ 上一致连续. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\int_{|x|\leqslant X+1} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\leqslant X+1} \lim_{h\to 0} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Step2: 对一般的 f, 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由定理 6.22(3)可知, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-g(x+h)+g(x+h)-g(x)+g(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x$$

利用齐次化方法得到引理 6.3, 从而可知若 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A+B+C|^p \leqslant C_p(|A|^p+|B|^p+|C|^p).$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant C_p\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-g(x+h)|^p \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h)-g(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x\right) \\ &\xlongequal[y=x+h]{\text{换元}} 2C_p\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x + C_p\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h)-g(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\varepsilon C_p + C_p\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h)-g(x)|^p \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.60}$$

由 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 结合 **Step1** 可知

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h)-g(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{6.61}$$

于是由(6.60)(6.61) 式可得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon C_p.$$

再由 ε 的任意性得证. □

6.7.3 齐次微分不等式问题

命题 6.29

设 $f\in D^s(0,+\infty)\cap C[0,+\infty),s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0,\ j=0,1,2,\cdots,s-1.$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geq 0,\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1,C>0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leq C\left|f(x)\right|^{\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{\lambda_s},\forall x\geq 0. \tag{6.62}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geq 0$.

笔记 我们把下述证明中左右两边各项次数均相同的不等式:$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$ 称为**齐次不等式**.(虽然也可以直接利用幂平均不等式得到, 但这里我们旨在介绍如何利用**齐次化方法**证明**一般的齐次不等式**.)

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right],M>0$, 显然 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件 (6.62) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{(6.62)\text{式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right].
\end{aligned} \tag{6.63}$$

我们先证明 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$.

令 $S\triangleq\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K>0$, 使得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S. \tag{6.64}$$

对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$, 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}>0$, 考虑 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2=1$, 因此 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)\in S$. 从而由(6.64)式可知

$$(Lx_1)^{2\lambda_1}(Lx_2)^{2\lambda_2}\cdots(Lx_n)^{2\lambda_n}\leqslant K.$$

于是

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant\frac{K}{L^{2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_n}}=\frac{K}{L^2}=K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意性可得

$$x_1^{2\lambda_1}x_2^{2\lambda_2}\cdots x_n^{2\lambda_n}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. \tag{6.65}$$

因此由(6.63) (6.65) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+C^2\left|f(x)\right|^{2\lambda_1}\left|f'(x)\right|^{2\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{2\lambda_s}\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+KC^2\left(f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right]\\
&=e^{-Mx}\left[\left(KC^2+1-M\right)f^2+\left(KC^2+2-M\right)\left(f'\right)^2+\cdots+\left(KC^2+2-M\right)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M>KC^2+2$, 利用上式就有 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geq 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x)\leqslant g(0)=0$. 又因为 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$, 所以 $g(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(s-1)}(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

命题 6.30

设 $f\in D^s(0,+\infty)\cap C[0,+\infty),s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,s-1.$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geq 0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leq\lambda_1|f(x)|+\lambda_2|f'(x)|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}(x)\right|,\forall x\geq 0. \tag{6.66}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geq 0$.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right],M>0$, 显然 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 则利用均值不等式和条件(6.66) 式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+2f''f'''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[f^2+\left(f'\right)^2+\left(f'\right)^2+\left(f''\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left|f^{(s)}\right|^2-Mf^2-M\left(f'\right)^2-\cdots-M\left(f^{(s-1)}\right)^2\right]\\
&\overset{(6.66)\text{式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2|f'|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{6.67}$$

我们先证明 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$.

令 $S\triangleq\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2$ 为紧集 S 上的连续函数, 故一定存在 $K>0$, 使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant K,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S. \tag{6.68}$$

对 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$, 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, 否则结论显然成立. 取 $L=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}>0$, 考虑 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)$, 则此时 $(Lx_1)^2+(Lx_2)^2+\cdots+(Lx_n)^2=1$, 因此 $(Lx_1,Lx_2,\cdots,Lx_n)\in S$. 从而由 (6.68) 式可知

$$(\lambda_1Lx_1+\lambda_2Lx_2+\cdots+\lambda_sLx_s)^2\leqslant K.$$

于是

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant\frac{K}{L^2}=K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

故由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意性可得

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_sx_s)^2\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. \tag{6.69}$$

因此由 (6.67) (6.69)式可得, 对 $\forall x\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}
g'(x)&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+\left(\lambda_1|f|+\lambda_2|f'|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}\right|\right)^2\right]\\
&\leqslant e^{-Mx}\left[(1-M)f^2+(2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2+K\left(f^2+\left(f'\right)^2+\cdots+\left(f^{(s-1)}\right)^2\right)\right]\\
&=e^{-Mx}\left[(K+1-M)f^2+(K+2-M)\left(f'\right)^2+\cdots+(K+2-M)\left(f^{(s-1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

于是任取 $M>K+2$, 利用上式就有 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 因此 $g(x)\leqslant g(0)=0$. 又因为 $g(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0$, 所以 $g(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(s-1)}(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

6.8 函数性态分析综合

命题 6.31

设 f' 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

笔记 本题也有积分版本: 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.(令 $F=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 就可以将这个积分版本转化为上述命题)

证明 反证, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0$, 则可以不妨设存在 $\delta>0,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$x_n\to+\infty \text{且} f'(x_n)\geqslant\delta, \forall n\in\mathbb{N}.$$

由 f' 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\eta>0$, 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f'(x)\geqslant f'(x_n)-\frac{\delta}{2}\geqslant\frac{\delta}{2}, \forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f(x_n+\eta)-f(x_n)=\int_{x_n}^{x_n+\eta} f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_n+\eta}\frac{\delta}{2}\mathrm{d}x=\frac{\delta\eta}{2}>0, \forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

令 $n\to\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $0\geqslant\frac{\delta\eta}{2}>0$, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. □

例题 6.18 时滞方程 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1,\quad f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

证明 由 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 及 $f\in D(\mathbb{R})$ 可知 $f'\in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_1\in\mathbb{R}$, 固定 x_1, 记

$$A=\{z>x_1\mid f'(z)=f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可知

$$\exists x_2\in(x_1,x_1+1) \text{ s.t. } f'(x_1)=f(x_1+1)-f(x_1)=f'(x_2).$$

故 $x_2\in A$, 从而 A 非空. 现在考虑 $y\triangleq\sup A\in(x_1,+\infty)$, 下证 $y=+\infty$. 若 $y<+\infty$, 则存在 $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n'\to y \text{且} f'(z_n')=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n')=f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可得

$$\exists y'\in(y,y+1) \text{ s.t. } f'(y)=f(y+1)-f(y)=f'(y').$$

从而 $y'\in A$ 且 $y'>y$, 这与 $y=\sup A$ 矛盾! 故 $y=+\infty$. 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n\to+\infty \text{且} f'(z_n)=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1.$$

因此由 x_1 的任意性得, 存在 C 为常数, 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. □

例题 6.19 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)\leqslant 0$ 以及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0. \tag{12.27}$$

证明: (1): 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

(2): 存在 $\eta\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta)=0$.

证明 (1) 如果对任何 $x \in (1,+\infty)$, 都有 $f'(x) \leqslant 1$, 那么 $[f(x)-x]' \leqslant 0$ 知 $f(x)-x$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1 \geqslant f(1)-1 \geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|] = 0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何 $x \in \mathbb{R}$, 我们有 $f''(x) \neq 0$. 从而 $f''(x)$ 要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取 $\xi \in \mathbb{R}$.

当 $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x) \geqslant f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \forall x > \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] \geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi)-1)x] = +\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x) \leqslant f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \forall x < \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] \leqslant \lim_{x\to-\infty}[f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi)+1)x] = -\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). □

例题 6.20 设 f 在 $[a,b]$ 上每一个点极限都存在, 证明:f 在 $[a,b]$ 有界.

笔记 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即**局部的性质等价于在所有紧集上的性质**. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对 $\forall c \in [a,b]$, 由 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在可知, 存在 c 的邻域 U_c 和 $M > 0$, 使得

$$\sup_{x\in U_c\cap[a,b]} |f(x)| \leqslant M_c.$$

注意 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{c\in[a,b]} U_c$, 由有限覆盖定理得, 存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in [a,b]$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{c_k}.$$

故 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} M_k$. □

例题 6.21 设 f 是 $(a,+\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T, 存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0.$$

注 因为 $|f(x+T)-f(x)| \geqslant 0$, 所以

$$0 \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| < \varlimsup_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)|$$

原结论的反面只用考虑 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)|$ 即可. 若 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| = 0$, 则一定存在子列 $x_n \to +\infty$, 使得结论成立. 故原结论的反面就是 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| > 0$.

笔记 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画 $f(x)$ 的大致走势图), 就容易找到矛盾.

证明 反证, 假设 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| > 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, $X > 0$, 使得

$$|f(x+T)-f(x)| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X \tag{6.70}$$

令 $g(x) \triangleq f(x+T)-f(x)$, 则若存在 $x_1, x_2 \geqslant X$, 使得 $g(x_1) = f(x_1+T)-f(x_1) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, $g(x_2) = f(x_2+T)-f(x_2) \leqslant -\varepsilon_0 < 0$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 g 连续及介值定理可知, 存在 $x_3 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$g(x_3) = f(x_3+T) - f(x_3) = 0$$

与(6.70) 式矛盾! 故 $g(x) \triangleq f(x+T)-f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 ε_0 , 要么恒小于 ε_0 . 于是不妨设

$$f(x+T)-f(x) \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X \tag{6.71}$$

从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在 $X_k \geqslant X$, 使得当 $x \geqslant X_1$ 时, 有 $x+(k-1)T > X$. 于是由(6.70)式可得

$$f(x+kT)-f(x+(k-1)T) \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X_k \tag{6.72}$$

因此对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $K_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$, 则由(6.72)式可知 $f(x+kT)-f(x+(k-1)T)$, $\forall x \geqslant K_n$, $\forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$ 进而对上式求和可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x+kT)-f(x+(k-1)T)] = f(x+nT)-f(x) \geqslant n\varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant K_n$$

任取 $x_0 \geqslant K_n$, 则 $f(x_0+nT)-f(x_0) \geqslant n\varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $n \to \infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 这与 f 在 $(a,+\infty)$ 上有界矛盾! □

命题 6.32

1. 设 $f_n \in C[a,b]$ 且关于 $[a,b]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

证明: 对 $\{x_n\} \subset [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c).$$

2. 设 $f_n(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0),$$

证明: $f \in C(\mathbb{R})$.

证明

1. 由 f_n 一致收敛到 $f(x)$ 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall N \geqslant N_0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 对 $\forall x \in [a,b]$, 都有

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \varepsilon.$$

从而由上式可得

$$\begin{aligned}|f_n(x_n)-f(c)| &\leqslant |f_n(x_n)-f_N(x_n)| + |f_N(x_n)-f_N(c)| + |f_N(c)-f(c)| \\ &\leqslant \varepsilon + |f_N(x_n)-f_N(c)| + |f_N(c)-f(c)|.\end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)| \leqslant \varepsilon + |f_N(c)-f(c)|.$$

再令 $N \to +\infty$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$ 可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)| \leqslant \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)| \leqslant 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c)$.

2. 反证, 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在 $y_m \in (x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m})$, 使得

$$|f(y_m) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{6.73}$$

对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 令条件中的 $x_0 = y_m, x_n \equiv y_m, \forall n \in \mathbb{N}$, 从而由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(y_m) - f(y_m)| = 0, m = 1,2,\cdots$, 故对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在严格递增的数列 $n_m \to +\infty$, 使得

$$|f_{n_m}(y_m) - f(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6.74}$$

从而由(6.73)(6.74)式可知, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f(y_{n_m}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0, \tag{6.75}$$

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6.76}$$

因此由(6.75)(6.76)式可得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_{n_m}(y_{n_m}) - f(x_0)| \geqslant |f(y_{n_m}) - f(x_0)| - |f_{n_m}(y_{n_m}) - f(y_{n_m})| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6.77}$$

注意到 $y_m \to x_0$, 于是 $y_{n_m} \to x_0$. 从而由已知条件可知 $\lim\limits_{m\to\infty} f_{n_m}(y_{n_m}) = f(x_0)$. 这与(6.77)式矛盾! 故 $f \in C(\mathbb{R})$.

□

例题 6.22 设 $g \in C(\mathbb{R})$ 且以 $T > 0$ 为周期, 且有

$$f(f(x)) = -x^3 + g(x). \tag{6.78}$$

证明: 不存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得(6.78)式成立.

证明 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在 $M > 0$, 使得 $|g(x)| \leqslant M$. 反证, 假设存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得(6.78)式成立. 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x^3 + g(x)\right) = -\infty, \tag{6.79}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^3 + g(x)\right) = +\infty. \tag{6.80}$$

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 则存在 $x_n \to +\infty$, 使得 $f(x_n) \to A$. 从而由(6.78)式可得

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (-x_n^3 + g(x_n)) = -\infty.$$

上式显然矛盾! 又因为 $f \in C(\mathbb{R})$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 或 $-\infty$. 否则, 当 $x \to +\infty$ 时,$f(x)$ 振荡, 则由零点存在定理可知, 存在 $y_n \to +\infty$, 使得 $f(y_n) = 0, n = 1, 2, \cdots$. 从而由(6.79)式可知

$$-\infty = \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{n\to\infty} f(f(y_n)) = f(0).$$

显然矛盾!

(i) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 则

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty.$$

显然矛盾!

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, 则

$$f(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} [-x^3 + g(x)] = -\infty. \tag{6.81}$$

从而对上式两边同时作用 f 可得

$$f(-\infty) = f(f(-\infty)) = \lim_{x\to-\infty} [-x^3 + g(x)] = +\infty. \tag{6.82}$$

于是(6.81)式与(6.82)式显然矛盾! 综上,$f \in C(\mathbb{R})$ 的解不存在. □

例题 6.23

1. 设 $f \in C[0, +\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = r$ 在 $[0, +\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.
2. 设 $f \in C(\mathbb{R})$,n 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y \in \mathbb{R}$, 都有 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存在.

证明

1. 反证, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在, 由 f 有界, 可设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = A > B = \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)$. 任取 $C \in (B, A)$, 则由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = A > C$ 可知, 存在 $x_1 \geqslant 0$, 使得 $f(x_1) > C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = B < C$ 可知, 存在 $x_2 > x_1 + 1$, 使得 $f(x_2) < C$. 于是再由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = A > C$ 可知, 存在 $x_3 > x_2 + 1$, 使得 $f(x_3) > C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = B < C$ 可知, 存在 $x_4 > x_3 + 1$, 使得 $f(x_4) < C$. 依此类推, 可得递增数列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_{n+1} > x_n + 1, \quad f(x_{2n-1}) > C, \quad f(x_{2n}) < C, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

从而由 $f \in C[0, +\infty)$ 及介值定理可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $y_n \in (x_{2n-1}, x_{2n})$, 使得 $f(y_n) = C$, 矛盾!

2. 设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 是 f 的所有零点, 记 $x_0 = -\infty, x_{n+1} = +\infty$, 则由 f 的连续性及介值定理可知, f 在 (x_{i-1}, x_i) 上不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 现在考虑 $(x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \cdots, n$, 这 $n-1$ 个区间. 于是由抽屉原理可知, 这 $n-1$ 个区间中必存在 $\frac{n}{2}$ 区间, 使 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内都同号.
不妨设 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内恒大于 0, 记 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值记为 $f(m_i) \triangleq M_i > 0$, 其中 $m_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 2, 3, \cdots, n$. 由介值定理知, 至少存在 $c_i \in (x_{i-1}, m_i), c_i' \in (m_i, x_i)$, 使得
$$f(c_i) = f(c_i') = \frac{1}{2}\min_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i > 0, i = 2, 3, \cdots, n.$$
注意到在 $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$ 上 f 必不同号. 否则, 不妨设在 $(x_0, x_1), (x_n, x_{n+1})$ 上 f 恒大于 0, 则由 $f \in C(\mathbb{R})$ 可知, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in [x_1, x_{n+1}]$. 从而 $f(x) \geqslant -M, \forall x \in \mathbb{R}$. 这与对 $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ 都有根矛盾!
不妨设 f 在 (x_0, x_1) 上恒小于 0, 在 (x_n, x_{n+1}) 上恒大于 0, 则 f 在 (x_n, x_{n+1}) 上无上界. 否则, 存在 $K > \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i > 0$, 使得 $f(x) < K, \forall x \in (x_n, x_{n+1})$. 又因为 $f(x) < 0 < K, \forall x \in (x_0, x_1)$, $f(x) \leqslant \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i < K, \forall x \in (x_1, x_n)$. 所以 $f(x) < K, \forall x \in \mathbb{R}$. 这与对 $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ 都有根矛盾!
又 $f(x_n) = 0$, 故至少存在一个 $c \in (x_n, x_{n+1})$, 使得 $f(c) = \frac{1}{2}\min\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i > 0$. 综上, 至少有 $n+1$ 个点使得 $f(x) = \frac{1}{2}\min\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i > 0$. 这与 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}\min\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} M_i\}$ 是 n 元集矛盾!

□

例题 6.24 设 $f \in C^2[0, +\infty), g \in C^1[0, +\infty)$ 且存在 $\lambda > 0$ 使得 $g(x) \geqslant \lambda, \forall x \geqslant 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且
$$f''(x) + g(x)f(x) = 0, \quad \forall x \geqslant 0,$$
证明: f 在 $[0, +\infty)$ 有界.

笔记 形式计算分析需要的构造函数: 由条件微分方程可得
$$y'y'' = -gyy' \Rightarrow \frac{(y')^2}{2} = -\int gyy'\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int g\mathrm{d}y^2 = -\frac{1}{2}gy^2 + \frac{1}{2}\int y^2\mathrm{d}g$$
$$\Rightarrow (y')^2 = -gy^2 + \int y^2\mathrm{d}g \Rightarrow \frac{(y')^2}{g} + y^2 = \int y^2\mathrm{d}g.$$
于是考虑构造函数 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X > 0$, 使得 $g'(x) \neq 0, \forall x \geqslant X$. 从而由导数介值性可知, g' 在 $[X, +\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x) \triangleq \frac{|f'(x)|^2}{g(x)} + f^2(x), x \geqslant X$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得
$$F_1'(x) = \frac{2f'f''g - g'(f')^2 + 2ff'g}{g^2} = \frac{-2f'fg^2 - g'(f')^2 + 2ff'g^2}{g^2} = -\frac{g'(f')^2}{g^2}. \tag{6.83}$$
(i) 若 $g'(x) > 0, \forall x \geqslant X$, 则由(6.83)式可知 $F'(x) \leqslant 0$, 即 $F(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可知, 存在 $C > 0$, 使得
$$f^2(x) \leqslant F_1(x) \leqslant C, \quad \forall x \geqslant X.$$
故 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上有界. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故 f 在 $[0, X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0, +\infty)$ 上有界.
(ii) 若 $g'(x) < 0, \forall x \geqslant X$, 令 $F_2(x) \triangleq |f'(x)|^2 + g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f'' = -gf$ 可得
$$F_2'(x) = 2f'f'' + g'f^2 + 2gff' = -2f'fg + g'f^2 + 2gff' = g'f^2 \leqslant 0. \tag{6.84}$$
从而 $F_2(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上递减, 于是存在 $C' > 0$, 使得
$$g(x)f^2(x) \leqslant F_2(x) \leqslant C, \quad \forall x \geqslant X.$$
进而由 $g(x) > \lambda > 0, \forall x > 0$ 可得
$$f^2(x) \leqslant \frac{C}{g(x)} \leqslant \frac{C}{\lambda}, \quad \forall x \geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界. □

例题 6.25 设 $a,b>1$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 邻域有界. 若

$$f(ax)=bf(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

证明:f 在 $x=0$ 连续.

证明 注意到

$$f(0)=bf(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

由条件可得

$$f(ax)=bf(x)\Rightarrow f(x)=\frac{f(ax)}{b}=\frac{f(a^2x)}{b^2}=\cdots=\frac{f(a^nx)}{b^n},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{6.85}$$

因为 f 在 $x=0$ 邻域有界, 所以存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in(-\delta,\delta). \tag{6.86}$$

从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{M}{b^N}<\varepsilon. \tag{6.87}$$

于是当 $x\in\left(-\frac{\delta}{a^N},\frac{\delta}{a^N}\right)$ 时, 结合(6.85)(6.86)(6.87)式, 我们有

$$|f(x)|=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|\leqslant\frac{M}{b^N}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$. □

例题 6.26 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x),f(x^2)$ 都是周期函数, 证明:f 为常值函数.

证明 由连续周期函数必一致连续可知,$f(x),f(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 于是对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 的数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$, 都有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|,|f((x_n')^2)-f((x_n'')^2)|\to0,\quad n\to\infty. \tag{6.88}$$

设 $f(x)$ 的周期为 $T>0$, 则对 $\forall c\in\mathbb{R}$, 取 $x_n'=\sqrt{nT+c},x_n''=\sqrt{nT}$, 显然 $x_n'-x_n''=\dfrac{c}{\sqrt{nT+c}+\sqrt{nT}}\to0$. 从而由 (6.88) 式可得

$$|f((x_n')^2)-f((x_n'')^2)|=f(nT+c)-f(nT)=f(c)-f(0)\to0.$$

故 $f(c)=f(0),\forall c\in\mathbb{R}$. 故 f 为常值函数. □

例题 6.27 计算函数方程 $f(\log_2x)=f(\log_3x)+\log_5x$ 所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

笔记 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\frac{\ln x}{\ln 5},x>0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5},n\in\mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3},\quad \frac{\ln a_n}{\ln 3}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}>1$, 后者公比 $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}<1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 取 $a_1=x,\ln a_n=\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1}\cdot\ln x,n\in\mathbb{N}$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=0$. 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2},\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\frac{\ln x}{\ln 5}\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n = 1, 2, \cdots$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_n}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0).$$

故

$$\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}} = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0) \overset{y=\frac{\ln x}{\ln 2}}{\Rightarrow} f(y) = f(0) + \frac{y\ln 2\ln 3}{\ln 5\ln\frac{3}{2}}.$$

□

例题 6.28 设 $n\in\mathbb{N}, f\in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta\in\mathbb{R}$ 满足对任何 $x,h\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 对 $\forall x,h\in\mathbb{R}$, 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x+\theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2}{n!}h^n, \end{aligned} \tag{6.89}$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n+1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2}. \tag{6.90}$$

比较(6.89)式和(6.90)式得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!}\right] f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} - \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\right] h. \tag{6.91}$$

当 $\theta = \dfrac{1}{n+1}$ 时, 我们有

$$\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令 $h\to 0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2} = \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} \Rightarrow f^{(n+2)}(x) = 0.$$

当 $\theta \neq \dfrac{1}{n+1}$ 时, 对(6.91)式令 $h\to 0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!}\right] f^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0.$$

因此, 无论如何都有 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式. □

例题 6.29

1. 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{6.92}$$

证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$.

2. 设 $g(x)=e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$, 证明 g 是只有实根的多项式.

笔记 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式, 且 ±1 是 $\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n$ 的 $n-k$ 重根 $(0\leqslant k\leqslant n)$. 由 Rolle 定理可知,$\dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知,$\dfrac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得,$\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有 n 个不同实根. 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 故 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$ 上.
2. 设 $\dfrac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})=P_k(x)e^{-x^2}$,$P_k$ 是 k 次多项式,$k\in\mathbb{N}$, 显然 $P_0(x)=1$, 于是
$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{-x^2})=\left[P_k'(x)-2xP_k(x)\right]e^{-x^2}.$$
令 $P_{k+1}(x)=P_k'(x)-2xP_k(x)$, 则由 P_k 是 k 次多项式可知 $P_{k+1}(x)$ 是 $k+1$ 次多项式. 故由数学归纳法可知
$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=P_n(x)e^{-x^2},\quad P_n\in\mathbb{R}[x],\quad n\in\mathbb{N}.$$
因此 $g(x)=e^{-x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=P_n(x)$ 是 n 次多项式 $(n\in\mathbb{N})$. 设 P_k 是有 k 个不同实根的多项式, 这 k 个根为
$$x_1<x_2<\cdots<x_k.$$
从而这 k 个根也是 $P_k(x)e^{-x^2}$ 的根. 由 Rolle 定理可知
$$P_{k+1}(x)=e^{-x^2}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})=e^{-x^2}\frac{d}{dx}\left(P_k(x)e^{-x^2}\right)$$
在 $(x_{j-1},x_j),j=2,3,\cdots,k$ 有实根. 而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_k(x)e^{-x^2}=0$, 故由 Rolle 定理可知 $P_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_k,+\infty)$ 上还各有一个实根. 因此 $P_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个根. 故由数学归纳法可知 $P_n(x)$ 有 n 个实根 $(n\in\mathbb{N})$. 又因为 $g(x)=P_n(x)$ 是 n 次多项式, 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 所以 $g(x)=P_n(x)$ 是只有实根的多项式.

□

例题 6.30 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 且 f,f',f'' 都是正值函数. 若存在 $a,b>0$ 使得
$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
求 $f'(x)\leqslant cf(x)$ 恒成立的最小的 c.

证明 考虑微分方程 $y''=ay+by'$, 其特征方程为
$$x^2-bx-a=0\Rightarrow x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>0,\quad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}<0.$$
于是
$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)\Longleftrightarrow f''(x)-x_1f'(x)\leqslant x_2\left[f'(x)-x_1f(x)\right].$$
令 $g(x)\triangleq f'(x)-x_1f(x)$, 则 $g'(x)\leqslant x_2g(x)$. 再令 $c(x)\triangleq\dfrac{g(x)}{e^{x_2x}}$, 则
$$c'(x)=\frac{g'(x)-x_2g(x)}{e^{x_2x}}\leqslant0\Rightarrow c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}c(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
由 $f'',f',f>0$ 可知 f,f' 递增有下界. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 都存在. 因此
$$c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
即
$$f'(x)\leqslant x_1f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
取 $f(x)=e^{x_1x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min}=x_1=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

□

注 若存在 $c < x_1$, 使得 $f'(x) \leqslant cf(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 则

$$f'(x) \leqslant cf(x) < x_1 f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x) = e^{x_1 x}$ 时,$f'(x) = x_1 f(x)$ 矛盾! 故 $c_{\min} = x_1$.

例题 6.31 设 $f \in C^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 若对某个 $M > 0$ 和 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2} \geq 0, \lambda_{n-1} \geq 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \prod_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明 $f(x) \equiv 0$.

笔记 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)} = f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y + C \Rightarrow f^{(n-1)} = Ce^{\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}.$$

$$f^{(n)} = -f^{(n-1)} \cdot g \Rightarrow \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} = -g \Rightarrow \ln f^{(n-1)} = -\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y + C \Rightarrow f^{(n-1)} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}.$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x) \triangleq \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}}, c_2(x) \triangleq f^{(n-1)}(x)e^{\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x) \triangleq c_1^2(x) = \dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}}, C_2(x) \triangleq c_2^2(x) = [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant |f^{(n-1)}(x)| \cdot g(x),$$

其中 $g(x) = M \prod_{k=1}^{n-1} |f^{(k)}(x)|^{\lambda_k - 1}$. 从而 $f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x) \leqslant |f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)| \leqslant |f^{(n-1)}(x)|^2 \cdot g(x)$.

(6.93)

令 $C_1(x) \triangleq \dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}}$, 则由 (6.93) 式可知

$$C_1'(x) = \frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) - 2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}} \leqslant 0.$$

故 $C_1(x) \leqslant C_1(x_0) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 因此 $C_1(x) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 令 $C_2(x) \triangleq [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y}$, 则由 (6.93) 式可知

$$C_2'(x) = \left[2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) + 2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2\right] e^{2\int_{x_0}^{x} g(y)\mathrm{d}y} \geqslant 0.$$

故 $C_2(x) \leqslant C_2(x_0) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 因此 $C_2(x) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 又 $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$, 故 $f(x) \equiv 0$. □

例题 6.32 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g \in C(\mathbb{R})$ 且 $\varlimsup_{x\to+\infty} \dfrac{|g(x)|}{x} = +\infty$, 证明: $f \circ g$ 不是周期函数.

笔记 $\varlimsup_{x\to+\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

证明 若 $f \circ g$ 是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知 $f \circ g$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 设 f 的周期为 $T > 0$, 记 $a \triangleq \max f - \min f > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使

$$|f(g(x)) - f(g(y))| < a, \forall |x - y| \leqslant \delta. \tag{6.94}$$

先证 $\varlimsup_{x\to+\infty} |g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 若 $\varlimsup_{x\to+\infty} |g(x+\delta) - g(x)| \neq +\infty$, 则存在 $A > 0$, 使 $|g(x+\delta) - g(x)| \leqslant A, \forall x \geqslant 0$. 对 $x \in [n\delta, (n+1)\delta), n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right| \leqslant \frac{|g(x-n\delta)|}{n\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{g(x-k\delta) - g(x-(k+1)\delta)}{n\delta}\right| \leqslant \frac{1}{n\delta} \sup_{x\in[0,\delta]} |g(x)| + \frac{A}{\delta}.$$

故 $\varlimsup_{x\to+\infty}\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{A}{\delta}$ 矛盾! 因此 $\varlimsup_{x\to+\infty}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 于是存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $|g(x_0+\delta)-g(x_0)|\geqslant T$. 由介值定理可知, 存在 $s,t\in[x_0,x_0+\delta]$, 使得 $f(g(s))=\max f,\quad f(g(t))=\min f$. 从而由 (6.94) 式可知

$$a=|f(g(s))-f(g(t))|<a$$

矛盾! 故 $f\circ g$ 不是周期函数 ($f\circ g$ 甚至不是一致连续函数). □

第七章 反常积分

7.1 反常积分敛散性判别

定理 7.1 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$ 使得任意 $x_1, x_2 > A$ 都有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$.

定理 7.2 (A-D 判别法)

设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f, g 在 $x = a$ 处都有界.

1. Abel 判别法: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. Dirichlet 判别法: 若 $\int_a^{x} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

注 Dirichlet 判别法要强于 Abel 判别法. 因为可以由 Dirichlet 判别法直接推出 Abel 判别法. 证明如下:

设 $f(x), g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f, g 在 $x = a$ 处都有界. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \triangleq A \in \mathbb{R}$, 令 $h(x) = g(x) - A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, 并且 $h(x)$ 与 $g(x)$ 有相同单调性. 由 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可知, $\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, +\infty)$ 上必有界. 从而由 Dirichlet 判别法可知 $\int_a^{\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x + A\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

例题 7.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中非负且递减, 证明: $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散性.

证明 (i) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由条件可知

$$f(x)\sin^2 x \leqslant f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

故由比较判别法可得 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$.

(ii) 若 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x < \infty$, 则由 f 非负递减, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \triangleq a > 0$, 则存在 $M > 0$, 使得

$$f(x)\sin^2 x > \frac{a}{2}\sin^2 x, \quad \forall x \in [M, +\infty). \tag{7.1}$$

又因为

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(b - \frac{\sin 2b}{2}\right),$$

而上式右边极限不存在, 所以 $\int_0^{\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散. 从而结合 (7.1) 式, 由比较判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

注意到

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

即 $\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 考虑 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$\int_0^{C}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 2C}{2}<1,\quad \forall C>0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由狄利克雷判别法可知 $\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty$. 因此

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x<\infty.$$

(iii) 当 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散时, 实际上, $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 发散的情形就是 (i)(ii) 的逆否命题. 故结论得证. □

命题 7.1

设 $f(x),g(x)$ 在任何闭区间上黎曼可积, 其 f,g 在 $x=a$ 处都有界.

(1) 若 $\int_a^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 一定条件收敛.

(2) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都绝对收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 也绝对收敛.

(3) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

(4) 若 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都条件收敛, 则 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 的收敛性无法直接判断.

证明

(1) 由 $f(x)\le|f(x)|$ 立得.

(2) 由 $|f(x)\pm g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ 立得.

(3) 由 (1) 可知 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都条件收敛, 从而 $\int_a^{\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 也条件收敛. 若 $\int_a^{\infty}|f(x)\pm g(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, 注意到 $g(x)=\left[f(x)+g(x)\right]-f(x)$, 从而由 (2) 可知 $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\infty}\left[(f(x)+g(x))-f(x)\right]\mathrm{d}x$ 也绝对收敛, 矛盾!

(4)

□

例题 7.2 判断如下积分的收敛性:

1. $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\mathrm{d}x$;
2. $\int_0^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x, m,n\in\mathbb{N}$;
3. $\int_2^{\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p\ln\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x$.

证明

1. 四个瑕点 $x=0,1,2,\infty$, 分别估阶讨论即得收敛.
2. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{x^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}},x\to 0^+.$$

又 $\frac{1}{n}<1+\frac{2}{m},\forall m,n\in\mathbb{N}$, 故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x\ (\forall m,n\in\mathbb{N})$ 收敛. 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\ln^{\frac{2}{m}}(1-x),x\to 1^-.$$

并且对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{\frac12}\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12}\ln^{\frac{2}{m}}x\mathrm{d}x\xlongequal{x=e^t}\int_{-\infty}^{-\ln 2}t^{\frac{2}{m}}e^t dt$$
$$\xlongequal{t=-u}\int_{\ln 2}^{\infty}u^{\frac{2}{m}}e^{-u}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{\infty}u^{\frac{2}{m}}e^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)<+\infty.$$

故 $\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x\ (\forall m,n\in\mathbb{N})$ 收敛. 综上, $\int_0^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x\ (\forall m,n\in\mathbb{N})$ 收敛.

3. 由于 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p\ln\frac{x+1}{x-1}\sim\frac{1}{x^{1+\frac{p}{2}}},x\to+\infty$. 故 $\int_2^{\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p\ln\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>0$. □

例题 7.3 设 $p,q>0$, 判断 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 收敛性.

笔记 一个经验上的小结论. 在幂函数次数不为 1 时, 趋于无穷或者趋于 0 时 ln 可忽略.

证明 先讨论 $\int_1^{2}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 的收敛性. 由于

$$\frac{1}{x^p\ln^q x}\sim\frac{1}{(x-1)^q},x\to1^+.$$

因此 $\int_1^{2}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $q<1$.

再讨论 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

①当 $p>1$ 时, 我们有

$$\frac{\frac{1}{x^p\ln^q x}}{\frac{1}{x^p}}=\frac{1}{\ln^q x}\to0,x\to+\infty.$$

从而存在 $C>0$, 使得

$$\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{C}{x^p}\to0,x\to+\infty.$$

而 $\int_2^{\infty}\frac{C}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 此时收敛.

②当 $0<p<1$ 时, 取 $\varepsilon>0$, 使得 $p+\varepsilon<1$, 从而

$$\frac{\frac{1}{x^p\ln^q x}}{\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}}=\frac{x^{\varepsilon}}{\ln^q x}\to+\infty,x\to+\infty.$$

于是存在 $M>0$, 使得

$$\frac{1}{x^p\ln^q x}>\frac{M}{x^{p+\varepsilon}},x\to+\infty.$$

而 $\int_2^{\infty}\frac{M}{x^{p+\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 发散, 故 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 此时发散.

③当 $p=1$ 时, 我们有

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^q x}\mathrm{d}x=\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^q x}\mathrm{d}\ln x=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{t^q}dt.$$

于是此时 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^q x}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $q>1$.

综上所述, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>1,q<1$. □

例题 7.4 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 判断 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x^b}{x^a}\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.

证明 **收敛性:**

1. 当 $b=0$ 时, 此时 $\int_0^{\infty}\frac{\sin 1}{x^a}\mathrm{d}x$ 必定发散.

2. 当 $b \neq 0$ 时, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx \xlongequal{y=x^b} \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a}{b}}} y^{\frac{1}{b}-1} dy = \frac{1}{|b|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy. \tag{7.2}$$

(a). 先考虑 $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$. 注意到

$$\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \to 0^+.$$

因此 $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 收敛当且仅当 $\frac{a-1}{b} < 1$.

(b). 再考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$.

I. 当 $\frac{a-1}{b} + 1 \leqslant 0$ 时, 我们有

$$\left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \right| \geqslant \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)^{-(\frac{a-1}{b}+1)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \sin y dy \right|$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-(\frac{a-1}{b}+1)} \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \right| = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-(\frac{a-1}{b}+1)} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知, 此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 发散.

II. 当 $\frac{a-1}{b} + 1 > 0$ 时, 我们有

$$\left| \int_0^x \sin y dy \right| \leqslant 2\ (\forall x > 0), \quad \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \text{单调递减趋于0}\ (y \to +\infty).$$

于是由 Dirichlet 判别法可知, 此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 收敛.

综上, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx$ 收敛当且仅当 $b \neq 0$ 且 $-1 < \frac{a-b}{b} < 1$.

绝对收敛性: 在 $-1 < \frac{a-1}{b} < 1, b \neq 0$ 情况下, 先考虑 $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$. 我们有

$$\frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \sim \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}, x \to 0^+.$$

又因为 $\frac{a-1}{b} < 1$, 所以 $\int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}} dy$ 必收敛, 因此 $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 必绝对收敛.

再考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$. 当 $\frac{a-1}{b} > 0$, 注意到由(7.2)知道

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a} dx = \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \leqslant \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} < \infty,$$

故此时 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 绝对收敛.

当 $\frac{a-1}{b} \leqslant 0$, 我们有

$$\frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \geqslant \frac{1}{|b|} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|^2}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy = \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$$
$$= \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy - \frac{1}{2|b|} \int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$$

显然 $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 收敛, 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty} \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 发散. 故此时 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy$ 发散.

综上, 这就证明了原积分在 $-1<\dfrac{a-1}{b}\leqslant 0, b\neq 0$ 情况下条件收敛,$0<\dfrac{a-1}{b}<1, b\neq 0$ 情况下绝对收敛. □

例题 7.5 判断收敛性 $\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln x}x}\mathrm{d}x$.

笔记 注意运用 $x^{\square}=e^{\square\ln x}=(e^{\square})^{\ln x}$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln x}x}\mathrm{d}x&=\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln x\cdot\ln\ln x}}\mathrm{d}x=\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln x\cdot\ln\ln x}}\mathrm{d}x\\&=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x=\int_{e^2}^{e^{e^2}}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x+\int_{e^{e^2}}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{e^2}^{e^{e^2}}\frac{1}{x^{\ln\ln x}}\mathrm{d}x+\int_{e^{e^2}}^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x<+\infty.\end{aligned}$$

故原积分收敛. □

例题 7.6 判断收敛性和绝对收敛性:

1. $\int_1^{\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$,
2. $\int_2^{\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x, p>0$.

笔记 经验上,Taylor 公式应该展开到余项里面的函数绝对收敛为止.

证明

1. 由 Taylor 公式可知

$$\tan\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right), x\to+\infty. \tag{7.3}$$

由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 显然有 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛. 注意到

$$\left|O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\right|\leqslant M\left|\frac{\sin x}{x}\right|^3\leqslant\frac{M}{x^3}, x\to+\infty.$$

故 $\int_1^{\infty}O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 因此由(7.3)式可得 $\int_1^{\infty}\tan\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

2. 注意到

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1+\frac{\sin x}{x^p})}\mathrm{d}x.$$

取 $m\in\mathbb{N}$, 使 $m>\frac{1}{p}-1$. 由 Taylor 公式可知

$$\frac{t}{1+t}=t-t^2+\cdots+(-1)^m t^{m-1}+O(t^m), t\to 0^+.$$

从而

$$\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p(1+\frac{\sin x}{x^p})}=\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+\cdots+(-1)^m\frac{\sin^{m-1}x}{x^{mp}}+O\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right), x\to+\infty. \tag{7.4}$$

注意到

$$\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}=\frac{1}{2x^{3p}}-\frac{\cos 2x}{x^{3p}}, \tag{7.5}$$

(i) 当 $p\leqslant\frac{1}{3}$ 时, 有 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{3p}}\mathrm{d}x$ 发散, 从而此时 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$ 发散.

(ii) 当 $p>\frac{1}{3}$ 时, 有 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛, 并且由 Dirichlet 判别法可知 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{2p}}\mathrm{d}x, \int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{3p}}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而

由(7.5)式可知, 此时 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}dx$ 收敛. 又因为对 $\forall k\geqslant 2$, 都有

$$\left|\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}\right|\leqslant\frac{1}{x^{(k+1)p}}\leqslant\frac{1}{x^{3p}},\forall x>2.$$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3p}}dx$ 收敛, 所以此时 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}dx$ 都绝对收敛. 故由(7.4)式可知, 此时原积分收敛.

综上, 原积分在 $p\leqslant\frac{1}{3}$ 时发散,$p>\frac{1}{3}$ 收敛. 再讨论绝对收敛性.

(a). 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 由 M 判别法易知 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}dx(1\le k\le m)$ 绝对收敛. 再由(7.4)式可知, 此时原积分绝对收敛.

(b). 当 $\frac{1}{3}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$\left|\frac{\sin x}{x^{2p}}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}=\frac{1}{2x^{2p}}-\frac{\cos 2x}{2x^{2p}}.$$

显然 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{2p}}dx$ 发散, 故此时 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{2p}}dx$ 条件收敛. 注意到对 $\forall k\geqslant 2$, 都有

$$\left|\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}\right|\leqslant\frac{1}{x^{(k+1)p}}\leqslant\frac{1}{x^{3p}},\forall x>2.$$

而显然此时 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3p}}dx$ 收敛, 故 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^k x}{x^{(k+1)p}}dx(2\le k\le m)$ 绝对收敛. 因此再由(7.4)式及命题 7.1(3)可知原积分此时条件收敛.

□

例题 7.7 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负连续, 对任意正整数 k 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)dx\le 1$, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\le 1$.

注 实际上, 由实变函数相关结论可直接得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\left[\lim_{k\to\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\right]dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx.$$

证明 由条件可得, 对 $\forall A>0$, 我们有

$$1\geqslant\int_{-A}^{A}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)dx\geqslant e^{-\frac{1}{k}}\int_{-A}^{A}f(x)dx.\Rightarrow\int_{-A}^{A}f(x)dx\leqslant e^{-\frac{1}{k}},\forall k\in\mathbb{N}.$$

令 $k\to\infty$, 则 $\int_{-A}^{A}f(x)dx\leqslant 1,\forall A>0$. 于是再令 $A\to+\infty$, 可得 $\int_{\mathbb{R}}f(x)dx\leqslant 1$.

实际上再由单调有界可知 $\int_{\mathbb{R}}f(x)dx$ 收敛.

□

例题 7.8 对实数 a, 讨论 $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx$ 的敛散性.

证明 证法一: 先讨论 $\int_0^{1}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx$ 的敛散性. 注意到

$$\int_0^{1}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx\leqslant\int_0^{1}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_0^1=\tan 1<\infty,\quad\forall a\in\mathbb{R}.$$

故 $\forall a\in\mathbb{R}$, 都有 $\int_0^{1}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx$ 收敛. 再讨论 $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx$ 的敛散性.

(i) 当 $a\leqslant 2$ 时,

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx\geqslant\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^2\sin^2 x}dx\geqslant\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=+\infty.$$

(ii) 当 $a>2$ 时, 我们有 (等价关系直观上是显然的, 可由拟合法或放缩严谨证明)

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x+n\pi}{\cos^2 x+(x+n\pi)^a\sin^2 x}dx\sim n\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x+(n\pi)^a\sin^2 x}dx,\quad n\to\infty.\tag{7.6}$$

注意到对 $\forall\lambda>0$, 我们都有

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2x+\lambda\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2x+\lambda\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\lambda\tan^2x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\lambda t^2}dt=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

故再结合(7.6)式可知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x\sim n\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2x+(n\pi)^a\sin^2x}\mathrm{d}x\sim n\pi\frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}}\sim\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}},\quad n\to\infty.$$

由于被积函数非负, 因此再结合命题 7.3可知

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x\sim\int_{\pi}^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}},\quad n\to\infty.$$

从而当 $\frac{a}{2}-1\leqslant 1$ 时, 即 $2<a\leqslant 4$, $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $\frac{a}{2}-1>1$, 即 $a>4$ 时, $\int_1^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 当 $a>4$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $a\leqslant 4$ 时, $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x$ 发散.

证法二:由于被积函数非负, 因此由命题 7.3可知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^a\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2y}\mathrm{d}y&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\pi}{\cos^2y+[(n-1)\pi]^a\sin^2y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2n\pi}{\cos^2y+[(n-1)\pi]^a\sin^2y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2n\pi}{\cos^2y}}{1+[(n-1)\pi]^a\tan^2y}\mathrm{d}y\\&\xlongequal{t=\tan y}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+[(n-1)\pi]^a\,\mathrm{t}^2}\\&=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{[(n-1)\pi]^a}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1}{n^{\frac{a}{2}-1}},n\to\infty.\end{aligned}$$

故当 $a<4$ 时, 有 $\frac{a}{2}-1<1$, 此时原积分收敛. 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(n-1)\pi+y}{\cos^2y+\left[(n-1)\pi+y\right]^a\sin^2y}\mathrm{d}y&\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(n-1)\pi}{\cos^2y+(n\pi)^a\sin^2y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2y+(n\pi)^a\sin^2y}\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2(n-1)\pi}{\cos^2y}}{1+(n\pi)^a\tan^2y}\mathrm{d}y\\&\xlongequal{t=\tan y}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(n\pi)^a\,\mathrm{t}^2}\\&=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{(n\pi)^a}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_2}{n^{\frac{a}{2}-1}},n\to\infty.\end{aligned}$$

故当 $a \geqslant 4$ 时, 有 $\frac{a}{2} - 1 \geqslant 1$, 此时原积分发散. □

例题 7.9 对 $x > 0$, 判断积分 $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$ 收敛性.

证明 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{[t] - t + a}{t + x} dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{k - t + a}{t + x} dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a + k + x) \ln \left(1 + \frac{1}{k + x} \right) - 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a - \frac{1}{2}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2} \right) \right]. \tag{7.7}$$

故当 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - \frac{1}{2}}{k}$ 发散, 从而结合(7.7)式可知, 此时 $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt$ 不存在. 因此由子列极限命题(a)可知, 此时 $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + a}{t + x} dt$ 发散.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2} \right) \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \tag{7.8}$$

对 $\forall y > 0$, 存在唯一 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leqslant y < n + 1$. 于是

$$\int_0^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt + \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt. \tag{7.9}$$

注意到

$$\left| \int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt \right| \leqslant \int_n^y \frac{1 + \frac{1}{2}}{t + x} dt \leqslant \frac{3}{2} \int_n^{n+1} \frac{1}{t + x} dt = \frac{3}{2} \ln \frac{n + 1 + x}{n + x}.$$

当 $y \to +\infty$ 时, 有 $n \to +\infty$, 故 $\int_n^y \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt \to 0, y \to +\infty$. 再结合(7.8)(7.9)式可知

$$\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt < \infty.$$

故当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t + x} dt$ 收敛. □

例题 7.10 对正整数 n, 讨论 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 注意到

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (x + k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x, \quad k \to \infty. \tag{7.10}$$

又注意到

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x \geqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty,$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \frac{4}{\pi^2} x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \sim \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty.$$

故 $\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \lambda \to +\infty$, 其中 C 为某一常数. 因此

$$\int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \frac{C}{(k\pi)^6}, \quad k \to +\infty,$$
$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \frac{C}{[(k+1)\pi]^6}, \quad k \to +\infty.$$

又因为

$$\int_0^{\pi} e^{-[(k+1)\pi]^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} e^{-(k\pi)^{12} \sin^2 x} \mathrm{d}x,$$

所以 $\int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \frac{C_1}{k^6}, k \to +\infty$, 其中 C_1 为某一常数. 于是结合(7.10)式可知

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (x+k\pi)^n e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim (k\pi)^n \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim C_2 k^{n-6}, \quad k \to \infty.$$

其中 C_2 为某一常数. 因此

$$\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_2 k^{n-6}, \quad k \to \infty.$$

故当 $n < 5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时, $\int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. 又因为

$$\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x \leqslant \pi^n,$$

所以 $\int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都收敛. 从而由

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

可知当 $n < 5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $n \geqslant 5$ 时, $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散. □

引理 7.1

(1) $\cos^{2n+1} x$ 可以写成 $\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x$ 的线性组合, 即 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$, 也即 $\cos^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(2k+1)x$, 其中 $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \cdots, n$.

(2) $\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$.

证明 (1) 利用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\cos^{2n+1} x = \cos^2 x \cdot \cos^{2n-1} x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos 2x \cos(2k+1)x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k [\cos(2k+3)x + \cos(2k-1)x] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2}a_0 [\cos 3x + \cos(-x)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(2k+1)x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k [\cos(2k+5)x + \cos(2k+1)x] + \frac{1}{2}a_0 [\cos 3x + \cos x].
\end{aligned}$$

故 $\cos^{2n+1} x \in L(\cos x, \cos 3x, \cdots, \cos(2n+1)x)$

(2) 由二项式定理可得

$$(1+t^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k t^{2k}$$

令 $t = e^{\mathrm{i}x}$, 则

$$(1+e^{2\mathrm{i}x})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2e^{-\mathrm{i}x}}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx} \Rightarrow 2^{2n}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{2n} = e^{-2\mathrm{i}nx}\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k e^{2\mathrm{i}kx}$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{k}e^{2\mathrm{i}(k-n)x}=\sum_{k=0}^{n-1}[\mathrm{C}_{2n}^{k}e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+\mathrm{C}_{2n}^{2n-k}e^{2\mathrm{i}((2n-k)-n)x}]+\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}(e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x})+\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

$$\Rightarrow 2^{2n}\cos^{2n}x=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\left(\frac{e^{2\mathrm{i}(k-n)x}+e^{2\mathrm{i}(n-k)x}}{2}\right)+\mathrm{C}_{2n}^{n}=2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\cos 2(n-k)x+\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

$$\Rightarrow \cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^{k}\cos 2(n-k)x+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}$$

□

例题 7.11 设 p,q 为正整数, 求反常积分 $I(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件.

证明 因为当 $p=q$ 时, 积分显然收敛, 所以只需考虑 $p\neq q$ 的情形. 由 $I(q,p)=-I(p,q)$ 可知, 可以不妨设 $p>q$, 否则用 $I(q,p)=-I(p,q)$ 代替 $I(p,q)$ 即可

先讨论 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\leqslant\cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2,\quad\forall x\in[0,\delta].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^\delta\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2)^p-(1-\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2)^q}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{2}x^2+(p+q)\mathrm{C}_p^2x^4}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}(1-\delta)\\&=\frac{q-p+(p-q)\varepsilon}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 得 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{q-p}{4}\delta+\frac{(p+q)\mathrm{C}_p^2}{4}\delta+\frac{2}{\delta}(1-\delta)$. 故对 $\forall p>q$ 且 $p,q\in\mathbb{N}$, 都有 $\int_0^1\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

再讨论 $\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

(i) 当 p,q 都是奇数时, 由引理 7.1可知

$$\cos^p x=\sum_{k=1}^{p}p_k\cos kx,\quad 其中 p_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,p.$$

$$\cos^q x=\sum_{k=1}^{q}q_k\cos kx,\quad 其中 q_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,q.$$

从而此时

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x&=\int_1^\infty\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}p_k\cos kx-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{q}(p_k-q_k)\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\sum_{k=q+1}^{p}p_k\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到对 $\forall k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\int_1^x\cos kt\mathrm{d}t=\frac{\sin kx-\sin k}{k}<2,\quad\forall x>1.$$

并且 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^\infty\frac{\cos kx}{x}\mathrm{d}x(k\in\mathbb{N})$ 都收敛. 因此再结合(**??**)式可

知, $\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 当 p,q 中至少有一个是偶数时, 不妨设 p 是偶数 q 不是偶数, 则由引理 7.1可知

$$\cos^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}C_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x+\frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}.$$

$$\cos^q x=\sum_{k=1}^{q}q_k\cos kx\quad \text{其中}q_k\in\mathbb{R}\quad k=1,2,\cdots,q.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x&=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}C_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx+\frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\sum\limits_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}C_p^k\cos 2\left(\frac{p}{2}-k\right)x-\sum\limits_{k=1}^{q}q_k\cos kx}{x}\mathrm{d}x+\frac{C_p^{\frac{p}{2}}}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散, 故此时 $\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 也发散.

综上, 由

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x.$$

可知当 $p=q$ 或 p,q 均为奇数时, $\int_0^{\infty}\frac{\cos^p x-\cos^q x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其余情形均发散. □

例题 7.12 对实数 $p\neq 0$, 讨论 $I=\int_0^1\frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 对 I 进行积分换元可得

$$\begin{aligned}I=\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt[p]{1-x^2}}\mathrm{d}x&\xlongequal{u=\frac{1}{1-x}}\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(1-\left(1-\frac{1}{u}\right)^2\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}\mathrm{d}u=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u.\end{aligned}\tag{7.11}$$

(i) 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 令 $f(u)=\left[\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}\right]^p=\left(2-\frac{1}{u}\right)u^{2p-1}$, 则显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$ 且 $f(u)$ 递增. 于是 $\frac{1}{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{p}}u^2}=\frac{1}{\sqrt[p]{f(u)}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(7.11)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛.

(ii) 当 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 若 $p=\frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=2$; 若 $p\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, 则 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=+\infty$. 因此对 $\forall p\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 都存在 $K>0$, 使得

$$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\geqslant 1,\forall u>K.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}\cap(K,+\infty)$, 都有

$$\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u\right|\geqslant\left|\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u\right|=1.$$

故由 Cauchy 收敛准则可知,$I=\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}u$ 发散.

(iii) 当 $p<0$ 时, 显然有 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=0$. 令 $g(u)=\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}$, 则

$$g'(u)=\frac{2}{p}u^{-\frac{1}{p}}\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}-1}+\left(2-\frac{1}{p}\right)\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{1-\frac{1}{p}}>0,\forall u\in[1,+\infty).$$

因此 $g(u)$ 单调递增, 于是 $\frac{1}{\left(2-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}}u^{2-\frac{1}{p}}}=\frac{1}{g(u)}$ 单调递减趋于 0. 又显然有 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 所以结合(7.11)式, 再由 Dirichlet 判别法可知 I 收敛. □

例题 7.13 对实数 p, 讨论反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

注 令 $u=x+\frac{1}{x}$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_u^{\infty}\frac{\sin u}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}\right)\mathrm{d}u.$$

显然 $\int_0^A\sin u\mathrm{d}u$ 关于 A 有界. 再证明 $\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2-4}}}{\left(u+\sqrt{u^2-4}\right)^p}$ 单调递减趋于 0, 就能利用 Dirichlet 判别法得到 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 再同理讨论 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 即可. 这种方法虽然能做, 但是比较繁琐, 不适合考场中使用.

证明 显然 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 有两个奇点 $x=0,+\infty$.

(1) 当 $p\leqslant 0$ 时, 考虑区间 $\left[2n\pi+\frac{\pi}{4},2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$, 则

$$x+\frac{1}{x}\in\left[2n\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}},2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right].$$

于是当 $n>10$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)>0.\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 当 $p>0$ 时, 先考虑 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p>1$, 则

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

因此 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\in(0,1]$, 则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\sin x\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\cos x\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x.\tag{7.12}$$

显然 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 并且 $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

收敛. 令 $f(u)=u^p\cos u$, 则当 $u\in\left(0,\dfrac{4p}{\pi}\right)$ 时, 有

$$f'(u)=pu^{p-1}\cos u-u^p\sin u=u^{p-1}\cos u\,(p-u\tan u)>0.$$

于是 $f(u)$ 在 $\left(0,\dfrac{4p}{\pi}\right)$ 上单调递增, 从而 $\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4}p,+\infty\right)$ 上单调递减趋于 0. 又显然 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}p}^{A}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 A 有界, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}p}^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 又 $\dfrac{\pi}{4}p<1$, 故此时 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因此再由(7.12)式可知 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

注意到

$$\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x.$$

显然 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 故此时 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

再考虑 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

(i) 若 $p\in(0,1)$, 则

$$\int_0^{1}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty.$$

故此时 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(ii) 若 $p\geqslant1$, 则

$$\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-p}}dt.$$

此时 $2-p\leqslant1$. 于是当 $2-p\leqslant0$ 即 $p\geqslant2$ 时, 由 (1) 可知 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. 当 $2-p\in(0,1]$ 即 $p\in[1,2)$ 时, 由 (i) 可知 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 但不绝对收敛.

综上, 当 $p\leqslant0$ 时, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $p\in(0,2)$ 时, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛; 当 $p\geqslant2$ 时, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 7.14 判断广义积分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

证明 (1) 由于 $e^{\cos x}\sin(2\sin x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 故

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}e\mathrm{d}x=2\pi e.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{A}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{A}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant0+\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{A}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{2\pi\left[\frac{A}{2\pi}\right]}^{2\pi\left(\left[\frac{A}{2\pi}\right]+1\right)}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\left|e^{\cos x}\sin(2\sin x)\right|\mathrm{d}x\leqslant2\pi e,\forall A>2\pi.\end{aligned}$$

又显然有 $\dfrac{1}{x}$ 单调趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{\cos x}\sin(2\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{C}{n},$$

其中 C 为某一常数.(这里需要对上述积分进行数值估计,C 需要具体确定出来, 太麻烦暂时省略) 于是

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+2)\pi}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n}=\infty.$$

故 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 7.15 设 $f(x)\in C^1[1,+\infty),0\le f(x)\le x^2\ln x,f'(x)>0$, 证明: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

笔记 首先形式计算一下, 假如 $f(x)=x^2\ln x$, 则 $f'(x)=2x\ln x+x$, 量级是 $x\ln x$, 代入进去刚刚好积分是发散的, 可以把这个视为取等条件, 然后对着这个取等, 使用柯西不等式 (目标是去掉难以处理的分母).

证明 对任意充分大的 $b>a$, 令 $A=e^a,B=e^b$, 则由 Cauchy 不等式有

$$\int_A^B\frac{f'(x)}{x^2\ln^2x}\mathrm{d}x\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_A^B\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\right)^2=(\ln\ln B-\ln\ln A)^2=\left(\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right)^2.$$

注意到

$$\int_A^B\frac{f'(x)}{x^2\ln^2x}\mathrm{d}x=\int_A^B\frac{1}{x^2\ln^2x}\mathrm{d}f(x)=\frac{f(B)}{B^2\ln^2B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2A}+2\int_A^B\frac{f(x)(\ln x+1)}{x^3\ln^3x}\mathrm{d}x,$$

故

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right)^2&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left[\frac{f(B)}{B^2\ln^2B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2A}+2\int_A^B\frac{f(x)(\ln x+1)}{x^3\ln^3x}\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left[\frac{f(B)}{B^2\ln^2B}-\frac{f(A)}{A^2\ln^2A}+4\int_A^B\frac{f(x)}{x^3\ln^2x}\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{\ln B}+4\int_A^B\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\right)\\&=\int_A^B\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{\ln B}+4\ln\frac{\ln B}{\ln A}\right).\end{aligned}$$

从而

$$\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2\leqslant\int_{e^a}^{e^b}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{b}+4\ln\frac{b}{a}\right)\Rightarrow\int_{e^a}^{e^b}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{(\ln\frac{b}{a})^2}{(\frac{1}{b}+4\ln\frac{b}{a})}.$$

于是对任意充分大的 a, 取 $b=2a$, 则

$$\int_{e^a}^{e^{2a}}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{(\ln 2)^2}{(\frac{1}{2a}+4\ln 2)}\to\frac{\ln 2}{4},a\to+\infty.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散. □

例题 7.16 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减趋于零,$p>1$, 若 $\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\int_1^{\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

笔记 首先要搞清楚一个误区: 一定不存在 $C>0$, 使得

$$\int_1^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\tag{7.13}$$

成立. 因为如果上式成立, 则对 $\forall k>0$, 用 $kf(x)$ 代替 $f(x)$ 就有

$$\begin{aligned}&k^p\int_1^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant Ck^{p-1}\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\\\Rightarrow&\frac{k}{C}\int_1^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 得 $\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x>+\infty$, 矛盾! 因此, 只有(7.13)式左右 f 的次数相同 (齐次不等式), 才可能存在上述的 C. 由此得到启发, 我们可以尝试建立如下不等式

$$\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_0^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

因为 $\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以

$$\int_0^1\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\int_0^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而可以不妨将积分下限改成 0, 方便后续计算. 定义 $F(x)\triangleq\begin{cases}f(1),x\in[0,1]\\f(x),x>1\end{cases}$, 则 $F(x)$ 递减, $F(x)=f(x),\forall x\geqslant 1$, 并且

$$\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

待定 $C>0$, 令 $g(x)=\int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t-C\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则 $g(0)=0$, 形式计算 (f 不一定连续, g 不一定可导) 可得

$$\begin{aligned}g'(x)&=F^p(x)-\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\\&=\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\left[F(x)x^{\frac{1}{p}}-\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\right].\end{aligned}$$

由 F 递减可得

$$\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\geqslant\frac{Cp}{p-1}\left(F^{p-1}(x)\int_0^x\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}=C\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取 $C=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则上式可化为

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\geqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}=F(x)x^{\frac{1}{p}},\forall x\geqslant 1.\tag{7.14}$$

于是 $g'(x)\leqslant 0,\forall x\geqslant 1$ 再结合 $g(0)=0$ 就有

$$\int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t-\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}}=g(x)\leqslant g(0)=0,\forall x\geqslant 1.$$

令 $x\to\infty$ 得

$$\int_0^{\infty}F^p(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p-1}}<+\infty.$$

但是注意上述 g 不一定可导, 所以还是需要通过定性地放缩得到严谨的证明, 只需注意到(7.14)式始终成立.

当然也可以通过逼近方法, 构造一个折线函数 $h(x)$ 逼近 $F(x)$, 此时 $h(x)$ 连续, 从而用 $h(x)$ 代替 $g(x)$ 中的 $F(x)$ 得到的新的 $G(x)$ 是可导的. 就能按照上述方法进行严谨证明.(逼近得到的不等式系数往往更加精确)

证明 定义 $F(x)\triangleq\begin{cases}f(1),x\in[0,1]\\f(x),x>1\end{cases}$, 则 $F(x)$ 递减, $F(x)=f(x),\forall x\geqslant 1$, 并且

$$\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(1)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

待定 $C>0$, 令 $g(x)=\int_0^x F^p(t)\mathrm{d}t-C\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则由 F 递减可得

$$\frac{Cp}{p-1}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\geqslant \frac{Cp}{p-1}\left(F^{p-1}(x)\int_0^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}=C\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}.$$

从而取 $C=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, 则上式可化为

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\geqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}=F(x)x^{\frac{1}{p}},\forall x\geqslant 1.$$

由 $\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t$ 收敛可知, 存在 $C>0$, 使得

$$F(x)x^{\frac{1}{p}}\leqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^x \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}\leqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^{\infty} \frac{F^{p-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p-1}}<C,\forall x\geqslant 1.$$

于是

$$\int_0^{\infty}F^p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\cdot F(x)x^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^{\infty}\frac{F^{p-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x<+\infty.$$

□

命题 7.2

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中连续, 证明: 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件有

1. 存在 $u(x),v(x)$ 使得 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调趋于零, $\int_0^A v(x)\,\mathrm{d}x$ 有界.
2. 存在 $u(x),v(x)$ 使得 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调有界, $\int_0^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

♠

笔记 这个命题说明:A-D 判别法“几乎”是充要条件 (只有确定 f 的分解逆命题才成立), 并且“逆命题”当中, 依然是 Dirichlet 判别法强于 Abel 判别法. 级数版本见命题 11.10.

证明 充分性由 A-D 判别法立得. 下证明必要性.

1. 由 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛及 Cauchy 收敛准则可知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall B>A>M$, 有
$$\left|\int_A^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$
对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{n^3}$, 则存在 $M_n>0$, 对 $\forall B>M_n$, 有
$$\left|\int_{M_n}^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n^3}. \tag{7.15}$$
取 $\varepsilon=\frac{1}{(n+1)^3}$, 则存在 $M_{n+1}>M_n+1$, 对 $\forall B>M_{n+1}$, 有
$$\left|\int_{M_{n+1}}^B f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{(n+1)^3}.$$
由 $M_{n+1}>M_n+1$ 及(7.15)式可知
$$\left|\int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n^3}.$$
令 $u(x)\triangleq\begin{cases}\frac{1}{n}, & x\in[M_n,M_{n+1})\\ 1, & x\in[0,M_1)\end{cases}$, $v(x)\triangleq\frac{f(x)}{u(x)}$, 则 $u(x)$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$. 对 $\forall A>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使

得 $A\in[M_n,M_{n+1})$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^{M_1}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\int_{M_1}^{M_2}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{M_{n-1}}^{M_n}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x+\int_{M_n}^{A}\frac{f(x)}{u(x)}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_0^{M_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{M_1}^{M_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\cdots+\left|\int_{M_{n-1}}^{M_n}(n-1)f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{M_n}^{A}nf(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_0^{M_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+1+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\\&<\left|\int_0^{M_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\frac{\pi^2}{6}<+\infty.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

2. 由第 1 问可知, 存在 $u(x),v(x)$, 使得 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$ 单调趋于 0, $\int_0^A v(x)\,\mathrm{d}x$ 有界. 令 $u_1(x)=\sqrt{u(x)}$, $v_1(x)=\sqrt{u(x)}v(x)$, 则 $f(x)=u_1(x)v_1(x)$. 由 $u(x)$ 单调趋于 0 可知, $u_1(x)$ 单调有界. 因为 $\sqrt{u(x)}$ 单调趋于 0, $\int_0^A v(x)\mathrm{d}x$ 有界, 所以由第 1 问可知

$$\int_0^\infty v_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\sqrt{u(x)}v(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $u_1(x),v_1(x)$ 就是第 2 问中我们要找的分解.

□

7.2 反常积分收敛抽象问题

命题 7.3

设 f 为 $[a,+\infty)$ 上的非负可积函数, 若存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n}f(y)\,\mathrm{d}y\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

进而可得

(i) $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n}f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在.

(ii) $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n}f(y)\,\mathrm{d}y=+\infty$.

注 对于瑕积分也有类似的结论.

笔记 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

证明 令 $g(x)=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负单调递增. 由单调收敛定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 从而由子列极限命题 (a)可知

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

□

命题 7.4 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

(1) 存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

(2) 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln x_n f(x_n) = 0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的 $x_n ln x_n$ 可以换成任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足 $\int_a^{\infty} a_n \mathrm{d}x = +\infty$ 即可

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x = f(\theta(A)), A+1 > \theta(A) > A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0 = \lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} f(\theta(A)), \lim_{A\to+\infty} \theta(A) = +\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若 $|f(x)| > \frac{1}{x\ln x}, \forall x > e$, 则由 $\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = +\infty$ 可得 $\int_e^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = +\infty$ 矛盾! 故存在 $x_1 > e$ 使得 $|f(x_1)| \leqslant \frac{1}{x_1 \ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)| > \frac{1}{2x\ln x}, \forall x > x_1+1$, 同理可得矛盾! 因此必然存在 $x_2 > x_1+1$ 使得 $|f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2x_2 \ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{nx_n \ln x_n}, n = 1, 2, \cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ln x_n \cdot |f(x_n)| = 0.$$

□

命题 7.5

设 $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 满足 $\int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y$ 收敛, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x} = 0.$$

笔记 本题不可直接洛必达. 这个命题是命题 11.1的连续版本, 在那里我们先 abel 变换再 Stolz 定理, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

证明 记 $F(x) \triangleq \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{R-S 积分}} \int_0^x y\mathrm{d}F(y) = xF(x) - \int_0^x F(y)\mathrm{d}y.$$

由 $F \in C[0,+\infty)$, 利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{L'Hospital 法则}} \int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y = 0.$$

□

命题 7.6

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $xf(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln xf(x)=0$.

证明

(1) 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f, 从而

$$Af(A)\geqslant\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \frac{A}{2}f(A)\leqslant\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty,\quad \int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A)=0$.

(2) 不妨设 xf 递减, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\frac{1}{2}A\ln Af(A)=Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^{A^2}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leq Af(A)\int_A^{A^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=A\ln Af(A).$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\leq A\ln Af(A)\leq 2\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

又由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.\quad \int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty} A\ln Af(A)=0$.

□

命题 7.7

若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明

□

例题 7.17 设 $f\in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0$.

证明 若存在 $a>0$, 使得 $f'(a)=0$, 则由 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减可得

$$f'(x)=0,\quad \forall x>a.$$

此时结论显然成立.

若 $f'\neq 0,\forall x\in(0,+\infty)$, 则由导数介值性可知,$f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设 $f'>0,\forall x\in(0,+\infty)$, 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f'=|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减, 故此时 f' 在 $(0,+\infty)$ 内

闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y)\,\mathrm{d}y = f(x) - f(1).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛. 于是由命题 7.6(1)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$. □

例题 7.18 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln xf'(x) = 0.$$

证明 由 xf' 单调可知,$g(x) \triangleq xf'$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f' = \frac{g(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 xf' 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) > 0$, 则存在 $C>0$, 使得

$$xf'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a,0\},+\infty). \tag{7.16}$$

对 (7.16) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{c}{t}\,dt = c\ln|x| - c\ln a.$$

令 $x\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 这与 f 有界矛盾! 于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$ 可知存在 $X > \max\{a,0\}$, 使得

$$xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x) \leqslant 0, \quad x \in (X,+\infty).$$

故 f 在 $(X,+\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

令 $x\to+\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $\int_a^{+\infty} f'(t)\,dt$ 收敛. 又 $xf'(x)$ 单调, 于是由命题 7.6(2)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln xf'(x) = 0$. □

例题 7.19 设 $f \in D[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 且f' 严格递增, 证明 $\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由命题 6.7和命题 6.9可知,$f' \in C[a,+\infty)$. 又由命题 6.5可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 故存在 $X>0$, 使得 f', f 在 $[X,+\infty)$ 上恒正, 且 f 在 $[X,+\infty)$ 上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,f 存在严格单调递增的反函数

$$g : [f(X),+\infty) \to [X,+\infty).$$

于是令 $x = g(y)$, 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

又由反函数求导定理可知 $g'(y)f'(g(y)) = 1$, 并且 $f(g(y)) = y$, 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))}\mathrm{d}y.$$

因为 f', g 都严格递增趋于 $+\infty$, 所以 $\frac{1}{f'(g(x))}$ 严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left|\int_{f(X)}^{A} \sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant 2, \forall A \geqslant f(X).$$

故由 Dirchlet 判别法可知 $\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例题 7.20

(1) 设 f 内闭可积且 $f(x)>0$,$x_0>0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty)\bigcup\{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛}, & \ell < 1 \\ \text{发散}, & \ell > 1 \end{cases}.$$

(2) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若有常数 $k > 1$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{是} \begin{cases} \text{收敛}, & \ell < \frac{1}{k} \\ \text{发散}, & \ell > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{收敛}, & -\infty \leqslant p < -1 \\ \text{发散}, & -1 < p \leqslant +\infty \end{cases}.$$

注 第 (1) 题中当 $\ell = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题中当 $p = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

注 第 (3) 题的条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} = p$ 可改为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = p$. 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = p.$$

证明

(1) 注意到

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 由题设可知, 存在 $X > a$, 使得

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{f(x_0 + x)}{f(x)} \leqslant \ell + \varepsilon, \forall x \geqslant X.$$

从而当 $n > \dfrac{X-a}{x_0}$ 时, 就有 $a + nx_0 > X$, 进而

$$a_{n+1} = \int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0)\,\mathrm{d}x \in [(\ell-\varepsilon)a_n, (\ell+\varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \ell + \varepsilon, \forall n > \frac{X-a}{x_0}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令 $x = e^t$, 任取 $c > 0$, 则

$$\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ln c}^{\infty} f\left(e^t\right) e^t dt.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f\left(e^{t+\ln k}\right) e^{t+\ln k}}{f\left(e^t\right) e^t} = k \lim_{t\to+\infty} \frac{f\left(ke^t\right)}{f\left(e^t\right) e^t} = k\ell.$$

于是由 (**??**) 可知结论成立.

(3) 只讨论 $p \in \mathbb{R}$ 的情况, 其余 $p = \pm\infty$ 情况类似. 由题意可知,$\forall \varepsilon > 0$, 存在$X > e$, 使得当$x > X$时, 有

$$p - \varepsilon \leqslant \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leqslant p + \varepsilon \Longleftrightarrow x^{p-\varepsilon} \leqslant f(x) \leqslant x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$

再由比较判别法即得结论.

□

注 上述例题第 (3) 题的证明中, 令 $\varepsilon \to 0$, 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为 X 是与 ε 有关的. 因此只有固定 ε 时, 才有 $\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$ 成立. 故再利用比较判别法式, 不能令 $\varepsilon \to 0$.

例题 7.21 若 $f \in C^1[0,+\infty)$ 且 $f(0) > 0, f'(x) > 0$. 若 $\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x < \infty$, 证明 $\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x < \infty$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 由条件可知 $f(x)$ 严格递增且恒正, 从而 $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{1}{f(x)+f'(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{f'(x)}{f(x)\left[f(x)+f'(x)\right]} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2(x)} df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)}\right| + \frac{1}{f(x)+f'(x)}.$$

又 $\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)} \mathrm{d}x < +\infty$, 故 $\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x < \infty$. □

例题 7.22 设非负函数 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$, 证明 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 证法一:$\forall a < b$, 注意到 $1 - x \leqslant e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. 从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |x| f(x)\,\mathrm{d}x + M.$$

令 $k \to +\infty$ 得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$. 再由 a, b 的任意性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

证法二:由 Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varliminf_{k\to+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

□

例题 7.23 设 $f \in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f'(x)| \leqslant M, \forall x \geqslant 0, \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证明 由条件可得

$$\int_0^{+\infty} \left|f^2(x)f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant M\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^3(x)$ 存在. 由 $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$ 及命题 7.4(1)可知, 存在 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $f(x_n) \to 0$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^3(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^3(x_n) = 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

例题 7.24 设 $f \in D^2[0,+\infty)$ 且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2\mathrm{d}x < \infty.$$

证明 $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$.

证明 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x} < +\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^{x} |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^{x} f(y)f''(y)\,\mathrm{d}y \tag{7.17}$$

由命题 7.3可知, 只须找一个 $x_n \to +\infty$, 使 $f(x_n)f'(x_n)$ 极限存在即可.

由于 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$, 故由命题 7.4(1)可知存在 $a_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} |f(a_n)|^2 = 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$. 于是再由命题 6.6可知, 存在 $x_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} [f^2(x_n)]' = 0 \iff \lim_{n\to\infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由命题 7.3及(7.17)式可知结论成立. □

例题 7.25

证明

□

第八章 无理数初步

定理 8.1 (狄利克雷定理)

对于无理数 a, 则存在无穷多对互素的整数 p,q 使得 $\left|a-\dfrac{p}{q}\right| \le \dfrac{1}{q^2}$, 而对有理数 a, 这样的互素整数对 (p,q) 只能是有限个.

笔记 这通常称为"**齐次逼近**", 证明利用抽屉原理即可.

推论 8.1

对于实数 a, 则 a 为无理数当且仅当任意 $\varepsilon>0$, 存在整数 x,y 使得 $0<|ax-y|<\varepsilon$.

证明 对任意正整数 N, 将 $[0,1]$ 均分为 N 个闭区间, 每一个长度 $\dfrac{1}{N}$, 则 $n+1$ 个数 $0,\{a\},\{2a\},\cdots,\{Na\}$ 全部落在 $[0,1]$ 中, 根据抽屉原理必定有两个数落入同一区间, 也即存在 $0\le i<j\le N$ 使得 $\{ia\},\{ja\}\in\left[\dfrac{k}{N},\dfrac{k+1}{N}\right]$. 注: 因为 a 是无理数, 所以任意 $i\ne j$ 都一定有 $\{ia\}\ne\{ja\}$, 否则 $ia-[ia]=ja-[ja]$ 意味着 a 是有理数. 所以

$$|\{ia\}-\{ja\}|=|(j-i)a-M|\le\frac{1}{N}\Rightarrow\left|a-\frac{M}{j-i}\right|\le\frac{1}{N(j-i)}$$

这里 M 是一个整数, 现在不一定有 M 与 $j-i$ 互素, 但是我们可以将其写成既约分数 $M=up, j-i=uq$, 其中 $(p,q)=1, u\in\mathbb{N}^+$, 代入得到: 对任意正整数 N, 都存在互素的整数 p,q, 其中 $1\le q\le N$ 是正整数, 使得 $\left|a-\dfrac{p}{q}\right|\le\dfrac{1}{Nq}\le\dfrac{1}{q^2}$. 现在还没有说明"无穷多个", 采用反证法, 假如使得 $\left|a-\dfrac{p}{q}\right|\le\dfrac{1}{q^2}$ 成立的互素的整数 (p,q) 只有有限对, 记为 $(p_1,q_1),\cdots,(p_m,q_m)$, 那么 (在上面证明的结论里面) 依次取 $N=3,4,\cdots$, 则每一个 N 都能够对应这 m 对 (p,q) 中的某一个, 而 $N=3,4,\cdots$ 是无限的,m 是有限的, 所以必定有一个 (p_i,q_i) 对应了无穷多个正整数 N. 不妨设 $i=1$, 换句话说: 存在一列正整数 N_k 单调递增趋于正无穷, 使得 $\left|a-\dfrac{p_1}{q_1}\right|\le\dfrac{1}{N_kq_1}$ 恒成立, 令 $k\to\infty$ 可知 $a=\dfrac{p}{q}$ 是有理数, 导致矛盾.

而如果 $a=\dfrac{m}{n}$ 是有理数, 但是有无穷个互素的 (p,q) 使得 $\left|\dfrac{m}{n}-\dfrac{p}{q}\right|\le\dfrac{1}{q^2}$, 则当 q 充分大时, 所有这些 (p,q) 中的 p 也都会充分大 (相当于同时趋于无穷), 然而不等式等价于 $\dfrac{1}{q}\ge\dfrac{|mq-np|}{n}$, 则当 p,q 都充分大时 $mq-np\ne 0$(不然会导致 $p|mq$ 结合互素有 $p|m$(对充分大的 p 均成立), 显然矛盾), 于是 $\dfrac{1}{q}\ge\dfrac{|mq-np|}{n}\ge\dfrac{1}{n}$ 导致 q 有上界, 还是矛盾, 结论得证. □

第九章 积分不等式

9.1 著名积分不等式

定理 9.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty),(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty),\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 $x_i,i=1,2,\cdots,n$ 相等.

笔记 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a,b\geq 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$ 有 $ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 本结果可以取对数用Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合Jensen 不等式给出. □

定义 9.1

(1) $d\mu = g(x)\mathrm{d}x$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E\subset\mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu=\sum_{n\in E} f(n)$.

定理 9.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu=0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu\neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu\neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu=\int_E |g(x)|^2 d\mu=1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}d\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$. □

定理 9.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geqslant 0, \int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}. \tag{9.1}$$

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式(9.1)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3.Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 为书写简便, 我们记 $d\mu = \frac{p(x)}{\int_a^b p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x$, 那么有 $\int_a^b 1d\mu = 1$. 于是我们记 $x_0 = \int_a^b f(x)d\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))d\mu \geqslant \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]d\mu = \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b f(x)d\mu\right),$$

这就完成了证明. □

例题 9.1 对连续正值函数 f, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $d\mu = \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$, 则 $\int_a^b d\mu = 1$, 再令 $x_0 \triangleq \int_a^b f(x)d\mu > 0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x \leqslant \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln f(x)d\mu &\leqslant \int_a^b \ln x_0 d\mu + \frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x) - x_0)d\mu \\ &= \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)d\mu - x_0\int_a^b d\mu\right) \\ &= \ln x_0 = \ln\int_a^b f(x)d\mu.\end{aligned}$$

故结论得证. □

定理 9.4 (Hold 不等式)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中有体积的有界集,f 和 g 都在 V 上可积, 又设 p, q 是满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正数, 且 $p > 1$, 则有

$$\int_V |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_V |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).

注 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要 “调幂次” 的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于 $p \in (0, 1)$ 的情况会有反向赫尔德不等式.

证明 不妨设 $f, g \geqslant 0$, 否则用 $|f|, |g|$ 代替 f, g. 由Young 不等式可知

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}.$$

由于 f,g 在 V 上都可积, 故可不妨设 $\int_V f^p(x)\mathrm{d}x = \int_V g^q(x)\mathrm{d}x = 1$, 否则用 $\dfrac{f}{\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}, \dfrac{g}{\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$ 代替 f,g. 从而

$$\int_V f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_V f^p(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_V g^q(x)\mathrm{d}x = 1 = \left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}$$

在 V 上几乎处处取等. 根据Young 不等式的取等条件可知, 此即 $\dfrac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零). □

定理 9.5 (Minkowski 不等式)

若 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的非负连续函数, 则对 $p \geqslant 1$ 有 (若 $p \in (0,1)$ 则不等式反向)

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

笔记 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用赫尔德不等式.

注 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为 “绝对值不等式”, 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用 p 范数来写会好记并且清晰:

$$\left\|\int_c^d f(x,y)dy\right\|_p \leq \int_c^d \|f(x,y)\|_p dy.$$

对于 $p \in (0,1)$ 的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向赫尔德不等式.

证明 假设 $p \geq 1$, 记 $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, 换序并利用赫尔德不等式有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^p dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy \cdot \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^{p-1} dx \\
&= \int_a^b \int_c^d f(x,y)g^{p-1}(x)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)g^{p-1}(x)dxdy \\
&\leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 进而 $q(p-1)=p$. 两边约掉 $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^p dx$ 就有

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

□

定理 9.6 (Hardy 不等式)

设 $p>1$ 或 $p<0, f(x)$ 恒正且连续, 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx.$$

注 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后赫尔德 (连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再赫尔德, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外 $p<0$ 的情况证明完全类似, 利用反向赫尔德即可.

证明 假设 $p>1$, 对任意 $M>0$, 利用分部积分和赫尔德不等式有

$$\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = -\frac{1}{p-1}\int_0^M F^p(x)d\frac{1}{x^{p-1}} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\Big|_0^M - \int_0^M \frac{1}{x^{p-1}}dF^p(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{p-1}\frac{F^p(M)}{M^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_0^M \frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}}dx \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx$$

$$\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^M f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

其中利用了

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0^+} F(x)\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}, \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

所以

$$\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\Big|_0^M = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} - \lim_{x\to 0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.$$

现在约掉相同的部分, 再令 $M\to\infty$ 就有

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx.$$

□

推论 9.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列 a_n 非负, 对任意 $p>1$ 或者 $p<0$, 都有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

♡

注 如果 $p<0$, 则同样使用反向赫尔德不等式即可完成

证明 记 $S_k = a_1+a_2+\cdots+a_k$, 不妨设 $p>1$, 利用均值不等式或者 Young 不等式容易证明

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1}\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant \frac{1}{p-1}\left((k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}\right)$$

求和有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1} a_k.$$

效果上就和前面分部积分完全一样, 然后再用赫尔德不等式即可. □

9.2 积分不等式的应用

例题 9.2 设 $f\in C^1[0,1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

2. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

注 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y=\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y.$$

从而

$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y=x\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

于是对上式两边同时积分可得

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

2. 由牛顿莱布尼兹公式 (带积分型余项的插值公式) 可得

$$f(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\quad f(x)=\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y,x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

从而

$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y=x\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

$$|f(x)|^2=\left|\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_x^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant(1-x)\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y,x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

于是对上面两式两边同时积分可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

将上面两式相加得

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

□

例题 9.3 opial 不等式

特例:

1. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0,f(b)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

一般情况:

1. 设 $f\in C^1[a,b],p\geqslant 0,q\geqslant 1$ 且 $f(a)=0$. 证明

$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{9.2}$$

2. 若还有 $f(b)=0$. 证明

$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{9.3}$$

笔记 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

证明 特例:

1. 令 $F(x) \triangleq \int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y$, 则 $F'(x) = |f'(x)|, F(a) = 0$. 从而

$$f(x) = \int_0^x f'(y)\mathrm{d}y \Rightarrow |f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y = F(x).$$

于是

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}F^2(b) = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(y)|\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}x \int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 由第 1 问可知

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

将上面两式相加可得

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

一般情况:

1. 只证 $q > 1$. $q = 1$ 可类似得到. 考虑

$$f(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y, F(x) = \int_a^x |f'(y)|^q\mathrm{d}y.$$

则由Hold 不等式, 我们知道

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|\mathrm{d}y\right)^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_a^x 1^{\frac{q}{q-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p(q-1)}{q}} = F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$

这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 于是

$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}|f'(x)|^q\mathrm{d}x = \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}dF(x)$$
$$\leqslant (b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)dF(x) = \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}F^{\frac{p+q}{q}}(b)$$
$$= \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b |f'(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p+q}{q}}$$
$$\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leqslant} \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b |f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{q+p}}\left(\int_a^b 1^{(\frac{p+q}{q-1})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q-1}{q+p}}$$
$$= \frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b |f'(y)|^{p+q}\mathrm{d}y,$$

这就证明了不等式(9.2).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x,$$

对称得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.$$

故上面两式相加得到(9.3)式.

□

例题 9.4 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 从条件 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 来看, 我们待定 $a \in \mathbb{R}$, 一定有

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-a)f(x)\mathrm{d}x.$$

然后利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x-a)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (x-a)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_0^1 (x-a)^2\mathrm{d}x$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a = \frac{1}{2}$ 就是达到最小值的 a.

证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2,
\end{aligned}$$

这就证明了(**??**)式. □

例题 9.5 设 $f \in C^1[0,1], \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant 27\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

笔记 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0) = g(1) = 0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x) = \begin{cases} x-1, & c \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant c \end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c = c-1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}.$$

证明 令

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x \int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x - 2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

结合 $\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{27}$, 这就完成了证明. □

例题 9.6 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 $f(a) = f(b) = 0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

注 不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$ 的原因: 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0$ 则用 $-f$ 代替 f, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 是平凡的.

证明 反证, 若 $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \triangleq M$, 则不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$, 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta_1 \in (a,x)$,$\theta_2 \in (x,b)$, 使得

$$f(x) = f(a) + f'(\theta_1)(x-a) \leqslant M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$f(x) = f(b) + f'(\theta_2)(x-b) \leqslant -M(x-b) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x = \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

于是结合 f 的连续性可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

故 f 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处不可导, 这与 $f \in D(a,b)$ 矛盾! □

例题 9.7 设 $f \in C^1[0,\pi]$ 且满足 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2 dt}, \forall x \in [0,\pi].$$

注 原不等式等价于

$$f^2(x) \leqslant \frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2 dt, \forall x \in [0,\pi].$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 先待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^\pi |f'(t)|^2 dt \int_0^\pi g^2(t)dt \geqslant \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)dt\right)^2, \forall x \in [0,\pi]. \tag{9.4}$$

此时, 我们希望对 $\forall x \in [0,\pi]$, 固定 x, 都有 $\int_0^\pi f'(t)g(t)dt = kf(x)$, 其中 k 为某一常数. 因此 $g(t)$ 必和 x 有关, 于是令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

再代入(9.4)式验证即可.

实际上, 回忆定理 5.3中的 Green 函数, 可以发现上述构造的 $g(x) = \frac{\mathrm{d}k(x,t)}{\mathrm{d}x}$, $x,t \in [0,\pi]$.

希望 $\int_0^\pi f(t)g'(t)dt = f(x)$, 考虑广义导数, 使得 $g'(x) = \delta(x)$. 实际上, 这里的 g 就是 H 函数 (详细参考 rudin 的泛函分析).

证明 令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

则对 $\forall x \in [0,\pi]$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\pi f'(t)g(t)dt\right)^2 &= \left(\int_x^\pi (t-\pi)f'(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(-(x-\pi)f'(x) - \int_x^\pi f(t)dt + xf(x) - \int_0^x f(t)dt\right)^2 \\ &= \pi^2|f(x)|^2\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi g^2(t)dt = \int_x^\pi (t-\pi)^2dt + \int_0^x t^2dt = \frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2)$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2)\int_0^\pi |f'(t)|^2dt = \int_0^\pi |f'(t)|^2dt \int_0^\pi g^2(t)dt \geqslant \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)dt\right)^2 = \pi^2|f(x)|^2, \forall x \in [0,\pi]$$

即

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{3\pi}(3x^2 - 3\pi x + x^2)\int_0^\pi |f'(t)|^2dt \leqslant \frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2dt, \forall x \in [0,\pi]$$

□

命题 9.1 (反向 Cauchy 不等式)

设 $f,g \in R[a,b], g \geq 0, 0 < m \leq f \leq M$, 证明

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,dx \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2 \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2.$$

证明 由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)} \cdot \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\sqrt{f(x)g(x)}\right]^2 dx \int_a^b \left[\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\right]^2 dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,dx.$$

故第一个不等式成立. 下证第二个不等式. 由条件和均值不等式可知

$$\int_a^b \frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}g(x)\,dx \geqslant 0 \Longleftrightarrow \int_a^b \frac{Mf(x) + mf(x) - mM - f^2(x)}{f(x)}g(x)\,dx \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow (M+m)\int_a^b g(x)\,dx \geqslant mM\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}dx + \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant 2\sqrt{mM}\sqrt{\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}dx \int_a^b f(x)g(x)\,dx}.$$

故

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,dx \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \left[\frac{(M+m)}{2\sqrt{mM}}\int_a^b g(x)\,dx\right]^2.$$

即

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,dx \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2 \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2.$$

□

例题 9.8 设 $f,g \in R[a,b]$ 满足

$$0 < m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \int_a^b g(x)dx = 0.$$

证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 待定常数 k, 由条件 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b (f(x)-k)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是我们希望

$$\int_a^b (f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

从而希望

$$(f(x)-k)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x).$$

又因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 所以只需要下式成立即可

$$(t-k)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t^2, \quad \forall t \in [m, M]. \tag{9.5}$$

我们只需要找到出一个合适的 k, 使这个 k 满足上式即可.

现在, 我们先求不等式 $(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \forall t \in [m, M]$ 的最佳系数 C. 即求最小的 $C > 0$, 存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得

$$(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \quad \forall t \in [m, M].$$

上式等价于

$$\left(1-\frac{k}{t}\right)^2 \leqslant C, \quad \forall t \in [m, M] \Longleftrightarrow \left(1-\frac{k}{M}\right)^2, \left(1-\frac{k}{m}\right)^2 \leqslant C.$$

令 $h(x) \triangleq \max\left\{\left(1-\frac{x}{M}\right)^2, \left(1-\frac{x}{m}\right)^2\right\}$, 则 $C = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} h(x)$,$k$ 是 $h(x)$ 的最小值点.

(画图) 易知 $h(x)$ 的最小值就在 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2$ 和 $\left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 中间的一个交点处取到, 即 $k \in \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{m}\right)$. 于是由 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2 = \left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 可得

(i) $1-\frac{x}{M} = 1-\frac{x}{m} \Longrightarrow x = 0, \quad h(0) = 1,$

(ii) $1-\frac{x}{M} = \frac{x}{m} - 1 \Longrightarrow 2 = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)x \Longrightarrow x = \frac{2mM}{M+m}, \quad h\left(\frac{2mM}{M+m}\right) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$

故 $k = \frac{2mM}{M+m}$,$C = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$. 再结合 (9.5) 式, 可知原不等式的系数就是最佳系数, 并且此时我们找到了证明需要的 $k = \frac{2mM}{M+m}$. 证明只需要将 $k = \frac{2mM}{M+m}$ 代入上述步骤验证即可.

证明 由条件 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{9.6}$$

注意到

$$\left(t-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t = \frac{4mM\,(t-M)\,(m-t)}{(m+M)^2} \leqslant 0, \quad \forall t \in [m, M].$$

因此由 $f(x) \in [m, M], \forall x \in \mathbb{R}$ 可得

$$\left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是再结合 (9.6) 式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

□

例题 9.9 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$. 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant 4.$$

注 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1)-\int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

将上式两边与要证不等式对比, 我们希望 $g''(x)\equiv 0$, 从而 $\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=0$, 于是上式可化为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant g^2(1)\\ \Longleftrightarrow &\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}.\end{aligned} \tag{9.7}$$

因此只要 $g(x)$ 还满足 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x} \geqslant 4$ 即可.

因为 $g''(x)\equiv 0$, 所以我们可以设 $g(x)$ 为一次函数, 即 $g(x)=ax+b, a\neq 0$. 又因为 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 越大, 不等式 (9.7) 越强, 所以现在我们想要找到一个一次函数 $g(x)$ 使得 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 达到最大值.

不妨设 $g(x)=ax-1, a\neq 0$, 否则用 $-bg(x)$ 代替 $g(x)$, 不改变 $\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 的取值. 此时, 我们有

$$\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x} = 3\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2-3a+3} = 3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right).$$

令 $h(a)=\frac{a}{a^2-3a+3}$, 则由 $h'(a)=\frac{3-a^2}{(a^2-3a+3)^2}=0$ 可得 h 的极大值点为 $a=\sqrt{3}$. 又因为

$$\lim_{a\to-\infty} h(a) = \lim_{a\to-\infty}\frac{a}{a^2-3a+3}=0,\quad h(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

所以 $\max\limits_{a\in\mathbb{R}} h(a)=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$. 从而

$$\max_{a\in\mathbb{R}}\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x} = \max_{a\in\mathbb{R}} 3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right) = 3\left(1+\max_{a\in\mathbb{R}} h(a)\right) = 6+2\sqrt{3} > 4.$$

综上, 取 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 就能得到

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x} = 6+2\sqrt{3} > 4.$$

实际上,$6+2\sqrt{3}$ 就是原不等式的最佳下界. 只需要再将 $g(x)=\sqrt{3}x-1$ 代入最开始的 Cauchy 不等式验证即可.

证明 令 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 则

$$g''(x)\equiv 0,\quad g(1)=\sqrt{3}-1.$$

于是由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1)-\int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\int_0^1(\sqrt{3}x-1)^2\,\mathrm{d}x} = 6+2\sqrt{3} > 4.$$

□

例题 9.10 设 $f \in C^2[0,2]$, 证明:

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}[f(0)+f(2)-2f(1)]^2.$$

注 不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的原因:

(1) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)=0$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0$ 时, 则待定 a,b,c, 令 $g(x)=cf(x)-ax-b$, 希望 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$, 即

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & f(2)\\ 0 & -1 & f(0)\\ -1 & -1 & f(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

注意到上述方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}-2 & -1 & f(2)\\ 0 & -1 & f(0)\\ -1 & -1 & f(1)\end{vmatrix} = f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0.$$

故由 Cramer 法则可知, 存在唯一的解 $a=a_0,b=b_0,c=c_0$ 满足方程组 (9.8). 即 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$ 满足 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$.

下证不妨设成立. 假设原不等式已经对 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的的情况成立, 则对一般的 $f(x)$ 而言, 令 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$, 显然 $g''(x)=c_0f''(x)$, 并且由上述推导可知 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$. 从而此时由假设可得

$$\int_0^2 |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}[g(0)+g(2)-2g(1)]^2.$$

于是

$$\begin{aligned}&|c_0|^2\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}\left[g(0)+g(2)-2g(1)\right]^2\\ &= \frac{3}{2}\left[(c_0f(0)-b_0)+(c_0f(2)-2a_0-b_0)-2\left(c_0f(1)-a_0-b_0\right)\right]^2\\ &= \frac{3\,|c_0|^2}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.$$

因此不妨设成立.

于是我们可以不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$, 否则用 $c_0f(x)-a_0x-b_0$ 代替即可. 从而只须证

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2 = 6.$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 因此待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

对上式右边分部积分可得

$$\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(f'(2)g(2)-f'(0)g(0)-\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{9.9}$$

于是我们希望 $g'(x)\equiv C$, 其中 C 为某一常数,$g(2)=g(0)=0$, 从而设 $g(x)$ 为一次函数, 即设 $g(x)=px+q$. 从而由 $g(2)=g(0)=0$ 可得 $q=p=0$, 进而 $g\equiv 0$, 显然不行!

因此我们猜测 $g(x)$ 为满足 $g(2)=g(0)=0$ 的分段一次函数, 则待定 m, 令

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ m(x-2), & 1<x\leqslant 2\end{cases}.$$

(因为有 $f(1)=1$ 这个条件, 所以选先 $x=1$ 为分段点) 又由 (9.9) 式可知需要 f 和 g 都连续才能分部积分, 因此 g 在 $x=1$ 处要连续, 故 $m=1$, 即

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}.$$

再代入 (9.9) 式中验证即可得到证明.

证明 不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$, 否则用 $c_0f(x)-a_0x-b_0$ 代替即可. 令

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-2, & 1<x\leqslant 2\end{cases},$$

则

$$\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad \left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=(-1-1)^2=4.$$

于是由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\Longleftrightarrow\frac{2}{3}\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4\Longleftrightarrow\int_0^2|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 6.$$

□

例题 9.11 设 $f\in C^1[0,1],f(0)=f(1)=-\dfrac{1}{6}$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

笔记 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

注 显然要利用 Cauchy 不等式, 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(-\frac{1}{6}g(1)+\frac{1}{6}g(0)-\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{9.10}$$

将上式与要证不等式对比, 于是我们希望 $g'(x)=C$, 其中 C 为某一常数. 这样才能使

$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=C\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

进而不等式右边才会出现我们需要的 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 从而待定的 $g(x)$ 为线性函数. 设 $g(x)=ax+c,a\neq 0$, 进而不妨设 $g(x)=x+c$, 否则用 $\dfrac{1}{a}g$ 代替 g 仍有不等式 (9.10)(因为不等式两边齐次). 于是不等式 (9.10) 可化为

$$\begin{aligned}\frac{3c^2+3c+1}{3}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1(x+c)^2\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(-\frac{1}{6}(1+c)+\frac{1}{6}c-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{9.11}$$

因此只需要找到一个合适的 c, 使得上述不等式右边满足

$$\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}. \tag{9.12}$$

即对 $\forall t=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$, 找到一个 c, 记 $K=\frac{3}{3c^2+3c+1}\in\mathbb{R}$, 使得

$$K\left(\frac{1}{6}+t\right)^2 \geqslant 2t+\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \Delta=\frac{12-K}{3}\leqslant 0 \Longleftrightarrow K\geqslant 12.$$

因此取 $c=-\frac{1}{2}$, 得 $K=\frac{3}{3c^2+3c+1}=12$.

综上, 令 $g(x)=x-\frac{1}{2}$, 则由 (9.11)和(9.12) 式可知

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

只需要将 $g(x)=x-\frac{1}{2}$ 代入上述步骤进行验证即可得到证明.

证明 令 $g(x)=x-\frac{1}{2}$, 则

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12},\quad g(1)=\frac{1}{2},\quad g(0)=-\frac{1}{2}.$$

于是由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

注意到 $\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}+t\right)^2\geqslant 2t+\frac{1}{4}$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 恒成立, 故

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

□

例题 9.12(一类)Hilbert 不等式

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中可积, 证明:

$$\iint_{[0,+\infty)}\frac{f(x)g(y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}dxdy\leqslant 2\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)dx\int_0^\infty g^2(x)dx}.$$

2. 设 N 为正整数,a_k,b_k 为实数, 证明:

$$\sum_{m,n=1}^{N}\frac{a_mb_n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}\leq 2\sqrt{\sum_{m=1}^{N}a_m^2\cdot\sum_{n=1}^{N}b_n^2}.$$

证明

1.

2.

□

9.3 重积分方法

定理 9.7 (Chebeshev 不等式积分形式)

设 $p \in R[a,b]$ 且非负,f,g 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),f,g\text{单调性相同}$$

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),f,g\text{单调性相反}$$

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

注 证法二中的 $d\mu$ 应该看作测度.

证明 证法一:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y\right)\\
&=\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

故结论得证.

证法二: 令 $\dfrac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则 $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\mu=\int_a^b \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=1$. 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(x)d\mu-\int_a^b f(x)g(x)d\mu\\
&=\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(y)d\mu-\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)]g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(y)-f(x)]g(x)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]
\end{aligned}$$

故结论得证. □

例题 9.13 设 $f \in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \left(\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right).$$

令 $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = d\mu$, 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)d\mu \int_0^1 xd\mu \geqslant \int_0^1 xf(x)d\mu.$$

上式由Chebeshev 不等式积分形式可直接得到. □

命题 9.2 (反向切比雪夫不等式)

设 $f, g \in R[a,b]$ 且 $m_1 \leq f(x) \leq M_1, m_2 \leq g(x) \leq M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.$$

注 不妨设 $a=0, b=1$ 的原因: 假设当 $a=0, b=1$ 时,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的 $[a,b]$, 原不等式等价于

$$\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}. \quad (9.13)$$

又注意到 $f(a+(b-a)x), g(a+(b-a)x) \in R[0,1]$, 且 $f(x) \in [m_1, M_1], g(x) \in [m_2, M_2]$. 故由假设可知(9.13)式成立. 因此不妨设也成立.

笔记 积累本题的想法.

证明 不妨设 $a=0, b=1$, 则记 $A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, B = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2 &= \left|\int_0^1 (f(x)-A)(g(x)-B)\mathrm{d}x\right|^2 \\
&\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leq} \int_0^1 |f(x)-A|^2\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 |g(x)-B|^2\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x = M_1A + m_1A - M_1m_1 - \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x - A^2 \\
&= (M_1-A)(A-m_1) - \int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x \\
&\leq (M_1-A)(A-m_1) \leq \frac{(M_1-m_1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2\leq\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立. □

例题 9.14 设 $f\in C[a,b]$ 且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{9.14}$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{9.15}$$

证明 一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\sin y\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[\cos x\cos y+\sin x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是不等式(9.14)变为

$$\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}. \tag{9.16}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{(9.15)}{\leqslant}M^2\iint_{[a,b]^2}\frac{(x-y)^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(9.16). □

9.4 直接求导法

例题 9.15

1. 设 $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, 证明
$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x,$$
并判断取等条件.
2. 设 f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant\lambda$, $\lambda>0$ 为常数, 证明
$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^m\geqslant\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x, \tag{9.17}$$
并判断取等条件.

证明 因为第一题是第二题的特例了, 所以我们只证第二题. 定义

$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^m-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)dt.$$

求导得

$$g'(x)=mf(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1}-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x)$$

$$= mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x)\right].$$

令 $h(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则

$$h'(x) = \left[\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda}[\lambda - f'(x)] \geqslant 0,$$

从而 $h(x) \geq h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$

从而 g 递增且

$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$

这就是不等式(9.17). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t)dt$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0\text{或者}f(x) = \lambda x.$$

□

例题 9.16 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)dt}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{9.18}$$

证明 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t)dt} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x)\mathrm{d}x \leqslant a + \int_a^y 1\mathrm{d}x = y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)dt\right) - f(y)g(y) \leqslant 0 \to h(b) \leqslant h(a) = 0,$$

故不等式(9.18)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(9.18). □

9.5 凸性相关题型

例题 9.17 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x \in (a,b)$, 都有

$$f(x) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\mathrm{d}y. \tag{9.19}$$

特别的, 若 $f \in C[a,b]$, 则对 $x = a, b$, 也有(9.19)式成立.

注 **Step2** 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

笔记 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x) = f(x) - p(x)$(其中 $p(x)$ 是 f 过两个端点的直

线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

证明 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f\in C[a,b]$. 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

Step1 当

$$f(a)=f(b)=0, x_0\text{是}f(x)\text{最大值点}, x_0\in(a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x)\geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x\in[0,x_0] \\ f(x)\geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1), & x\in[x_0,1] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{x_0}\frac{f(x_0)}{x_0}x\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(9.19).

当 $x_0=a$或b 时, 由 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 非负可知, 此时 $f(x)\equiv 0$ 结论显然成立.

Step2 一般情况可设

$$g(x)=f(x)-\left[f(1)-f(0)\right]x-f(0),$$

从而 $g(0)=g(1)=0$, 于是 g 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(9.19)知

$$g(x)\leqslant 2\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1]. \tag{9.20}$$

于是利用(9.20)知

$$f(x)-\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\leqslant 2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1].$$

从而

$$f(x)-2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y, \forall x\in[0,1].$$

注意到对 $\forall x\in[0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y\leqslant 0\\
\Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant 2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant f(1)+f(0)\\
\Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x\leqslant f(1)\\
\Leftrightarrow& f(1)(1-x)+f(0)x\geqslant 0
\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x\in[0,1], f(1), f(0)\geq 0$ 直接得到. 于是我们完成了证明. □

9.6 数值比较类

例题 9.18 证明如下积分不等式:

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

3. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

笔记 此类问题都是考虑分母更小的时候正的更多，通过换元把负的区间转化到正的同一个区间.

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx &\xlongequal{x=\sqrt{y}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{2\sqrt{y+\pi}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin y\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y+\pi}}\right)dy > 0.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}dy + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(-y)}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}dy \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\right]dy > 0.\end{aligned}$$

3. 本题稍有不同，注意到

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin y)dy, \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\cos y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos y)dy.$$

现在利用 $\sin x < x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 可得不等式链 $\cos\sin x > \cos x > \sin\cos x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$，于是

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

□

定理 9.8 (Jordan 不等式)

$sinx \geqslant \frac{2}{\pi}x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

证明 利用 $\sin x$ 的上凸性及割线放缩可得

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \geqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

□

例题 9.19 证明如下积分不等式

1. $\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$
2. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}dx \geqslant \sqrt{e}\pi.$
3. $\frac{\pi}{2}e^{-R} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}, R > 0.$
4. $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\ln(n+1), n \geqslant 2.$

注 $(2n)!! = 2^n \cdot n!.$

证明

1.

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^2}}dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\\ &= \pi\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\right] = \pi\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\,(n!)^2}\right]\\ &\overset{(2n-1)!!\geqslant n!}{\geqslant} \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e}\pi.\end{aligned}$$

3.

$$\frac{\pi}{2}e^{-R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R}\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\mathrm{d}x \overset{Jordan\text{不等式}}{<} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}x}\mathrm{d}x = \frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}, R>0.$$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=k\pi+y} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin y|}{k\pi+y}\mathrm{d}y\\ &> \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin y|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\ &> \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(k+2)-\ln(k+1)]\\ &= \frac{2}{\pi}\ln(n+1).\end{aligned}$$

还可以使用积分放缩法处理 $\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$, 如下所示:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{n}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\ln(n+1).$$

□

9.7 Fourier 积分不等式

定理 9.9 (Fourier 型积分不等式)

若 $f(x)\in C^1[a,b]$, 则

(1)

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x) = c_1 + c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1, c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 若 $f(a)=f(b)$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c_1 + c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right), c_1, c_2, c_3\in\mathbb{R}.$$

(3) 若 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c\in\mathbb{R}.$$

注 (1) 中对 f 进行偶延拓的原因是: 使延拓后的区间端点函数值相等, 从而就能利用Fourier 级数的逐项微分定理.

(2) 已经有区间端点函数值相等的条件了, 所以不需要进行延拓.

(3) 中对 f 进行奇延拓的原因是:f 满足 $f(a)=f(b)=0$, 此时对 f 做奇延拓后能使得 $f\in C^1[2a-b,b]$, 进而就能得到更好的结论.(如果只有 $f(a)=f(b)\neq 0$, 那么 f 奇延拓后在 $x=a$ 处间断.)

证明

(1) 把 $f(x)$ 延拓到 $[2a-b,b]$, 使得 $f(x)=f(2a-x)$,$x\in[a,b)$, 则 $f(b)=f(2a-b)$,$f\in C[2a-b,b]$ 且分段可微, 并且此时 f 关于 $x=a$ 轴对称. 因此设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

进而由Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim-\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}[na_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)].$$

这里

$$a_n=\frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^{b}f(x)\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}_0.$$

我们由Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x=(b-a)\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right],$$

$$\int_{2a-b}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-(b-a)\frac{a_0^2}{2}=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2=\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_{2a-b}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

利用对称性, 就有

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right),$$

由Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim\frac{2\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+nb_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right).$$

这里

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x.$$

由Parseval 恒等式, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right],$$

$$\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

因此

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{(b-a)\,a_0^2}{4}=\frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leqslant\frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)+c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right).$$

(3) 令

$$f(x)=-f(2a-x),x\in[2a-b,a),$$

则 $f(x)\in C^1[2a-b,b]$, 并且此时 f 关于 $(a,0)$ 点中心对称. 设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

由Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right).$$

这里

$$b_n=\frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^b f(x)\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x,n\in\mathbb{N}_0.$$

我们由Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$

$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\leqslant(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_n^2=\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

利用对称性, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

□

9.8 其他

例题 9.20 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s=\dfrac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$. 证明

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

证明 令 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $F'(t)=f(t)$ 连续递增, 故 F 是下凸的. 显然 $s\in[0,1]$, 于是

$$F(x)\geq F(s)+F'(s)(x-s)=F(s)+f(s)(x-s),\quad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x&\geq\int_0^1\left[F(s)f(x)+f(s)f(x)(x-s)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\int_0^1\left[xf(x)-sf(x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geq F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\implies\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq F(s)=\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\implies\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x+\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq 2\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\implies\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x)}{F(1)}=1-\frac{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}{F(1)},$$

即 $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=(1-s)F(1)$. 又由 F 的下凸性可知

$$F(x)\leq\begin{cases}\dfrac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\ \dfrac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0), & x\in[0,s]\end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}(1-s)F(1)=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&\leq\int_0^s\left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s)\right]\,\mathrm{d}x+\int_s^1\left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0)\right]\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1) \leq \frac{1}{2}F(s) \implies F(1) \leq \frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(s) \leq \left(\frac{1}{1-s} - 1\right)F(s) = \frac{s}{1-s}F(s) = \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 9.21 求最小实数 C, 使得对一切满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 f, 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x \leqslant C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x = 1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是 n 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,dt \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,dt = 2.$$

令 $f_n(t) = (n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$. 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,dt = 2\int_0^1 t(n+1)t^n\,dt = 2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2, n \to \infty.$$

因此若 $C < 2$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x > C$. 故 $C = 2$ 就是最佳上界. □

例题 9.22 设 $f \in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant n^2.$$

证明 设 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &\geqslant \left[\int_0^1 f(x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x\right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_jx^j\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_ix^{i+j}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_i \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}} = \frac{a^TJa}{a^THa},$$

其中 $J=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$,$H=\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n\times n}$. 于是我们只需求 $\sup\limits_{a\neq0}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 设 λ 为 $\frac{a^TJa}{a^THa}$ 的一个大于 0 的上界, 由例题 8.16(3)可知 H 正定, 则

$$\begin{aligned}\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界}&\Longleftrightarrow\lambda\geqslant\frac{a^TJa}{a^THa},\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow a^TJa\leqslant\lambda a^THa,\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow a^T(\lambda H-J)a\geqslant0,\forall a\in\mathbb{R}^n\\&\Longleftrightarrow\lambda H-J\text{半正定}.\end{aligned}$$

因此 $\sup\limits_{a\neq0}\frac{a^TJa}{a^THa}=\min\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}$. 设 H_k,J_k 分别为 H,J 的 k 阶顺序主子阵, 再根据打洞原理及例题 2.37(1)可得

$$\begin{aligned}|\lambda H_k-J_k|&=|H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}J_k|=|H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}\mathbf{1}_k\mathbf{1}_k^T|\\&=\lambda^{k-1}|H_k|(\lambda-\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k).\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_k^T=(1,1,\cdots,1)_{1\times k}$. 由 H 正定可知 $|H_k|>0$, 又因为 $\lambda>0$, 所以再由引理 6.4可得

$$|\lambda H_k-J_k|>0\Longleftrightarrow\lambda>\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k\xlongequal{\text{引理 6.4}}n^2.$$

因此对 $\forall\lambda>n^2$, 都有 $\lambda H-J$ 的顺序主子式都大于 0, 故此时 $\lambda H-J$ 正定. 于是对 $\forall a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 固定 a, 都有

$$a^T(\lambda H-J)a>0,\forall\lambda>n^2.$$

令 $\lambda\to n^2$, 则由 $a^T(\lambda H-J)a$ 的连续性可知

$$a^T(n^2H-J)a\geqslant0.$$

故 n^2H-J 半正定. 因此 $n^2=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\sup\limits_{a\neq0}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 结论得证. □

例题 9.23 设 A,B 都是 n 级实对称矩阵, 若 B 正定, 证明

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}=\lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

证明

□

引理 9.1

设 $\alpha>0,g\in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $g(a)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$, 如果

$$|g'(x)-g'(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,\forall x,y\in\mathbb{R},\tag{9.21}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1}\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha[g(x)-g(a)]^\alpha M,\forall x\in\mathbb{R}.\tag{9.22}$$

证明 不妨设 $g(a)=0$, 否则用 $g(x)-g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M=0$, 则不等式(9.22)显然成立. 当 $M\neq0$ 可以不妨设 $M=1$.

现在对非负函数 g, 现在我们正式开始我们的证明, 当 $g'(x_0)=0$, 不等式(9.22)显然成立. 当 $g'(x_0)>0$, 则利用(9.21)有

$$\begin{aligned}g(x_0)\geqslant g(x_0)-g(h)&=\int_h^{x_0}g'(t)dt\\&\geqslant\int_h^{x_0}[g'(x_0)-|t-x_0|^\alpha]dt\end{aligned}$$

$$= g'(x_0)(x_0-h) - \frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

取 $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(9.22)成立. 类似的考虑 $g'(x_0) < 0$ 可得(9.22).

当 $g'(x_0) < 0$, 则利用(9.21)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geqslant -g(h) + g(x_0) = -\int_{x_0}^{h} g'(t)dt \\ &\geqslant -\int_{x_0}^{h} [g'(x_0) + |t-x_0|^{\alpha}]dt \\ &= -g'(x_0)(h-x_0) - \frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取 $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(9.22)成立. □

命题 9.3 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{9.23}$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

但是上述**分部积分**部分需要零边界条件 (即需要 $\lim\limits_{x\to\infty} x|f(x)|^2 = 0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 **专业技术**: 对一般的 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

取紧化序列 $h_n, n \in \mathbb{N}$, 则对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |(h_n f)'(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= 4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

右边让 $n \to +\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}} x^2|h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2 \mathrm{d}x\right] = \left[4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x\right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 < \infty$, 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

从而不等式(9.23)成立.

Method 2 **正常方法**: 对一般的 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty} x|f(x)|^2 = 0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty>\sqrt{\int_x^\infty y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^\infty|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant}\int_x^\infty y|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y\geqslant x\int_x^\infty|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y,\tag{9.24}$$

于是 $\int_x^\infty f(y)f'(y)\mathrm{d}y=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2-\frac{1}{2}|f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$, 因此由积分收敛必有子列趋于 0可知, 存在 $x_n\to\infty$, 使得 $\lim_{n\to\infty}x_n|f(x_n)|=0$, 于是再结合 $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}f(y)=0.$$

现在继续用(9.24), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^\infty|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\geqslant x\int_x^\infty f'(y)f(y)\mathrm{d}y=\frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

令 $x\to+\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^\infty y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^\infty|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\to0$, 从而 $\lim_{x\to+\infty}x|f(x)|^2=0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}4\left(\int_{\mathbb{R}}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

即不等式(9.23)成立. □

例题 9.24 设 $f:[0,+\infty)\to(0,1)$ 是内闭 Riemman 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^2<2\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x.\tag{9.25}$$

证明 记 $a=\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x>0$, 待定 $s>0$, 则不等式(9.25)等价于

$$\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x+\int_s^\infty xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x+s\int_s^\infty f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}\Longleftrightarrow\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x+s\left(a-\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{a^2}{2}\\&\Longleftrightarrow\frac{a^2}{2}-sa+s\int_0^s f(x)\mathrm{d}x-\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x\leqslant0\Longleftrightarrow\frac{a^2}{2}-sa+\int_0^s(s-x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant0.\end{aligned}$$

利用 $f<1$, 取 $s=a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2}-sa+\int_0^s(s-x)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{a^2}{2}+\int_0^a(a-x)f(x)\mathrm{d}x<-\frac{a^2}{2}+\int_0^a(a-x)\mathrm{d}x=0.$$

从而

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x+a\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x+\int_s^\infty xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x+a\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x>\frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(9.25). □

例题 9.25 设 f 是 $[0,1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 a 有

$$\int_0^1|f(x)-a|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x.\tag{9.26}$$

证明 不妨设 f 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (9.26) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

故式 (9.26) 成立. □

例题 9.26

证明

□

第十章 积分计算

10.1 不定积分计算

10.1.1 直接猜原函数

计算定积分,能直接猜出原函数,就直接写出原函数,然后求导验证即可.

例题 10.1 计算 $\int \frac{e^{-\sin x}\sin(2x)}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

笔记 因为 $e^{g(x)}$ 的原函数一定仍含有 $e^{g(x)}$, 并且 $\frac{1}{1-sinx}$ 求导后一部分是 $\frac{1}{(1-sinx)^2}$, 所以我们猜测原函数与 $\frac{e^{-\sin x}}{1-\sin x}$ 有关. 因此对其求导进行尝试.

证明 注意到

$$\left(\frac{e^{-\sin x}}{1-\sin x}\right)'=\frac{-\cos xe^{-\sin x}(1-\sin x)+\cos xe^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2}=\frac{e^{-\sin x}\cos x\sin x}{(1-\sin x)^2}.$$

故原函数为 $\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$, 其中 C 为任意常数. 求导验证:

$$\left(\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}\right)'=\frac{e^{-\sin x}(2\cos x\sin x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}.$$

□

例题 10.2 计算 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

笔记 由 $(x-\ln x)^2$ 知可待定原函数 $\frac{f(x)}{x-\ln x}$, 从而猜出答案.

证明 注意到

$$\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)'=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}.$$

故原函数为 $\frac{x}{x-\ln x}+C$, 其中 C 为任意常数. □

10.1.2 换元积分

例题 10.3 设 $y(x-y)^2=x$, 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3y}$.

笔记 令 $y=tx$, 则 $t=\frac{y}{x}$(这里是猜测过程,t 只是中间变量, 不用考虑 x 是否取 0), 从而由条件可得

$$tx(x-tx)^2=x\Rightarrow tx^3(1-t)^2=x$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{t(1-t)^2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}.$$

因为这里是猜测的过程(只要最后能得到一个正确的原函数即可), 不需要保证严谨性, 所以我们直接取 $x=\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$,

于是 $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)} \\ y=\frac{\sqrt{t}}{1-t} \end{cases}$. 代入不定积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}-\frac{3\sqrt{t}}{1-t}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{dt}{2(t^2-t)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C,
\end{aligned}
$$

其中 C 为任意常数. 因此我们断言 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3y} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C$.

证明 对原方程两边同时关于 x 求导得

$$
y'(x-y)^2 + 2y(1-y')(x-y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-2y(x-y)}{(x-y)(x-3y)}.
$$

于是利用上式经过计算可得

$$
\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C\right)' = \frac{1}{x-3y}.
$$

故 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3y} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C$, 其中 C 为任意常数. □

10.2 定积分

10.2.1 建立积分递推

例题 10.4 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx)\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}$.

证明 利用分部积分和和差化积公式可得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x \sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)]\mathrm{d}x \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x[\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x]\mathrm{d}x \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{I_n}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(nx)\mathrm{d}\cos x \\
&= \frac{I_{n-1}+I_n}{2} - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\mathrm{d}\cos^n x \\
&= \frac{I_{n-1}+I_n}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{I_{n-1}+I_n}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{I_n}{2} \\
&= \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}
$$

故 $I_n = \frac{I_{n-1}}{2} + \frac{1}{2n}$, 则两边同乘 2^n(强行裂项)

$$
2^n I_n = 2^{n-1} I_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n}, n = 1, 2, \cdots
$$

又注意到 $I_0 = 0$, 从而

$$
2^n I_n = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k} \Rightarrow I_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k}.
$$

□

命题 10.1

证明:

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ \pi, & n\text{为奇数} \end{cases}.$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = n\pi.$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1}.$

笔记 提示:$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y)$(证明见命题 13.2).

证明

(1) 记 $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$, 则

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{2\cos((n+1)x)\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \cos((n+1)x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = I_n = I_{n-2} = \cdots = \begin{cases} I_0, & n\text{为偶数} \\ I_1, & n\text{为奇数} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ \pi, & n\text{为奇数} \end{cases}.$$

(2) 记 $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin x \cdot \sin((2n+1)x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{命题 10.1(1)}} \pi. \end{aligned} \tag{10.1}$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = I_n = \pi + I_{n-1} = \cdots = (n-1)\pi + I_1 = n\pi.$$

(3) 记 $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin x \cdot \sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)x)\Big|_\pi^0 = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

于是

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = I_n = \frac{2}{2n-1} + I_{n-1} = \cdots = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2k+1} + I_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}.$$

□

10.2.2 区间再现

定理 10.1 (区间再现恒等式)

当下述积分有意义时, 我们有

1.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$

2.
$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f(x) + \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2}\right]\mathrm{d}x.$$

笔记 注意: 倒代换具有将 $[0,1]$ 转化为 $[1,+\infty)$ 的功能.

证明 证明是显然的. □

命题 10.2

证明

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

证明

1.
$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\cos x + \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}I\\
&\Longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\cos x + \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}I\\
&\Longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\tan\theta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan\theta)}{1+\tan\theta^2}\mathrm{d}\tan\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\cdot\ln(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\ln(1+\tan\theta) + \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right)\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\ln(1+\tan\theta) + \ln\left(1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\ln(1+\tan\theta) + \ln\frac{2}{1+\tan\theta}\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\ln 2.
\end{aligned}$$
□

例题 10.5 计算

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, a>0.$
2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解

1. 注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=at}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(at)}{1+t^2}dt=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{1+t^2}dt+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt. \tag{10.3}$$

又注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x\Longrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=0.$$

于是再结合(10.3)式可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}.$$

2.

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_0^{\infty}\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}\frac{1}{t}=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln t}{1+t+t^2}dt\Longrightarrow\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=0.$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=\sin^2 y}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin^2 y}{\sqrt{\sin^2 y(1-\sin^2 y)}}\mathrm{d}\sin^2 y\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\mathrm{d}y\xlongequal{\text{命题 10.2}}4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=-2\pi\ln 2.\end{aligned}$$

□

例题 10.6

1. 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$
3. 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\mathrm{d}x.$

解

1.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}+\frac{\sin(nx)}{(1+2^{-x})\sin x}\right]\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\left(\frac{1}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^{-x}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\cdot\frac{2+2^x+2^{-x}}{2+2^x+2^{-x}}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{例题 10.1}}\begin{cases}0,n\text{为偶数}\\\pi,n\text{为奇数}\end{cases}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}+\frac{x\sin x\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}(\arctan e^x+\arctan e^{-x})\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{命题 13.3(1)}}\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^2}{2}\arctan\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{8}.\end{aligned}$$

3.
$$\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx=\int_0^{2\pi}\sin[\sin(2\pi-x)+n(2\pi-x)]\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin(-\sin x-nx)\,dx=-\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx$$
$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx=0.$$

□

10.2.3 化成多元累次积分 (换序)

命题 10.3

证明:

(1) $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

(3) $\int_0^{\infty}\sin x^2dx,\ \int_0^{\infty}\cos x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

笔记 本结果可以直接使用.

证明

(1) 注意到
$$\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)\xlongequal{\text{把 }\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\text{看作常数}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dx\right)dy$$
$$\xlongequal{\text{把}e^{-x^2}\text{看作常数}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\right)dy\xlongequal{e^{-(x^2+y^2)}\text{连续}}\iint_{R^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}dr^2=\frac{\pi}{4}.$$

故 $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) 注意到
$$\int_0^{+\infty}\sin xe^{-yx}\,dx=\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}e^{ix-yx}\,dx=\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}e^{-(y-i)x}\,dx=\operatorname{Im}\frac{1}{y-i}=\operatorname{Im}\frac{y+i}{y^2+1}=\frac{1}{y^2+1}.$$
因此就有
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\sin x\left(\int_0^{+\infty}e^{-yx}\,dy\right)dx=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\sin xe^{-yx}\,dx$$
$$=\int_0^{+\infty}dy\left(\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}e^{ix-yx}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\,dy=\frac{\pi}{2}.$$
当然本题也可以直接利用分部积分计算 $\int_0^{+\infty}\sin xe^{-yx}\,dx=\frac{1}{y^2+1}$.

(3) 注意到
$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\,dx\xlongequal{x=\frac{t}{\sqrt{a}}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0.$$
并且 $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$, 从而 $\sqrt{-i}=e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. 于是
$$\int_0^{+\infty}(\cos x^2-i\sin x^2)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-ix^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{i}}=\frac{1}{2}\sqrt{-i\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\mathrm{i}.$$

故

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} (\cos x^2 - \mathrm{i}\sin x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$
$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} (\cos x^2 - \mathrm{i}\sin x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

□

例题 10.7 计算 $\int_0^1 \sin\ln\frac{1}{x}\cdot\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\ (b > a > 0)$.

证明

$$\int_0^1 \sin\ln\frac{1}{x}\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\ln\frac{1}{x}\left(\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x=e^{-t}} \int_a^b \mathrm{d}y\int_{+\infty}^0 e^{-ty}\sin t\,de^{-t} = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin t\,dt$$
$$\xlongequal{\text{命题 10.3(2) 的证明过程}} \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y = \arctan(b+1) - \arctan(a+1).$$

□

10.2.4 化成含参积分 (求导)

例题 10.8 设 $a, b \geqslant 0$ 且不全为 0, 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$.

注 实际上, 根据 $a > b$ 时得到的结果, 可以看出 $F(a,b) = \pi\ln\frac{a+b}{2}$ 对 a, b 有轮换对称性, 故这个结果对其他情况显然也成立.

证明 设 $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$, 当 $a > b$ 时, 则

$$\frac{\partial}{\partial b}F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial b}\ln\left(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b\tan^2 x}{a^2 + b^2\tan^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2bt^2}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)}dt$$
$$= \frac{1}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2a^2b}{a^2+b^2t^2} - \frac{2b}{1+t^2}\right)dt$$
$$= \frac{1}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\frac{2a^2b}{a^2+b^2t^2}dt - \frac{2b}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$= \frac{2b}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2}dt - \frac{b\pi}{a^2-b^2}$$
$$= \frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{b\pi}{a^2-b^2} = \frac{\pi}{a+b}.$$

于是

$$F(a,b) = F(a,0) + \int_0^b \frac{\partial}{\partial b'}F(a,b')\mathrm{d}b' = F(a,0) + \int_0^b \frac{\pi}{a+b'}\mathrm{d}b'$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\cos x)\mathrm{d}x + \pi\ln\frac{a+b}{a} \xlongequal{\text{例题 10.2}} \pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

当 $a < b$ 时, 类似可得 $F(a,b) = \pi\ln\frac{a+b}{2}$. 当 $a = b$ 时,$F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2\mathrm{d}x = \pi\ln a = \pi\ln\frac{a+b}{2}$.

综上, 对 $\forall a, b \geqslant 0$, 都有 $F(a,b) = \pi\ln\frac{a+b}{2}$.

□

10.2.5 级数展开方法

积分和求和换序 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$, 等价于

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

又由于有限和随意交换, 因此上式等价于

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\Longleftrightarrow\lim_{m\to\infty}\int_a^b\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

例题 10.9 计算 $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad 0<x<1.$$

并且 $0<e^{-x}<1$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{换序}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}xe^{-(n+1)x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}.\end{aligned}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}.$$

下面证明(**??**)式换序成立, 等价于证明 $\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=m}^{\infty}x(-1)^n e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x=0$. 由交错级数不等式及 $xe^{-(n+1)x}$ 关于 n 非负递减, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{+\infty}\left|\sum_{n=m}^{\infty}x(-1)^n e^{-(n+1)x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}xe^{-(m+1)x}\mathrm{d}x=-\frac{xe^{-(m+1)x}}{m+1}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{m+1}\int_0^{+\infty}e^{-(m+1)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(m+1)^2}.$$

令 $m\to+\infty$, 得 $\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{n=m}^{\infty}x(-1)^n e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x=0$. 故(**??**)式换序成立. □

命题 10.4

证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n}=\arctan\frac{q\sin x}{1-q\cos x},|q|\leqslant 1.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1+q^2-2q\cos x),|q|\leqslant 1.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n!}=e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1,|q|\leqslant 1,x\in\mathbb{R}.$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n!}=e^{q\cos x}\sin(q\sin x),|q|\leqslant 1,x\in\mathbb{R}.$

笔记 在 $\mathbb{C}$ 上,

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),k\in\mathbb{Z}.$$

我们定义主值支

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

本部分内容无需记忆,只需要大概有个可以算的感觉即可,实际做题中可以围绕这种级数给出构造.

证明 $\mathfrak{I}$ 表示取虚部,$\mathfrak{R}$ 表示取实部.

(1) 利用欧拉公式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n}=\mathfrak{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^ne^{inx}}{n}\right)=\mathfrak{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(qe^{ix})^n}{n}\right)=\mathfrak{I}(-\ln(1-qe^{ix}))$$
$$=-\mathfrak{I}\left(\ln|1-qe^{ix}|+i\frac{-q\sin x}{1-q\cos x}\right)=\arctan\frac{q\sin x}{1-q\cos x}.$$

(2) 利用欧拉公式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n}=-\mathfrak{R}\left(\ln|1-qe^{ix}|+i\frac{-q\sin x}{1-q\cos x}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left[(1-q\cos x)^2+q^2\sin^2 x\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1+q^2-2q\cos x).$$

(3) 利用欧拉公式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n!}=\mathfrak{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(qe^{ix})^n}{n!}\right)=\mathfrak{R}\left(e^{qe^{ix}}-1\right)=\mathfrak{R}\left(e^{q\cos x+iq\sin x}-1\right)$$
$$=\mathfrak{R}\left(e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1+ie^{q\cos x}\sin(q\sin x)\right)$$
$$=e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1.$$

(4) 利用 (3) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n!}=\mathfrak{I}\left(e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1+ie^{q\cos x}\sin(q\sin x)\right)$$
$$=e^{q\cos x}\sin(q\sin x).$$

□

例题 10.10 计算

1. $\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x,a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}.$

注 由 1 的证明可得

$$e^{\cos x}\cos(\sin x)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{\mathrm{i}x})^n}{n!}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}nx}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}.$$

实际上, 上式就是命题 10.4(3)的结论.

注 第 2 问也可以用含参积分求导的方法进行计算 (这个方法更容易想到).

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x&=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{\cos x}e^{\mathrm{i}\sin x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{\cos x+\mathrm{i}\sin x}\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{e^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\mathrm{d}x\right]\\&=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\mathrm{i}nx}}{n!}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{\mathrm{i}\cdot 0\cdot x}}{n!}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{i}n\cdot n!}\right)\\&=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}x+0\right)=2\pi.\end{aligned}$$

2. 注意到当 $a\in(0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos(nx)}{n}&=\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ae^{\mathrm{i}x})^n}{n}\right]=-\mathrm{Re}\left[\ln(1-ae^{\mathrm{i}x})\right]\\&=-\mathrm{Re}\left[\ln|1-ae^{\mathrm{i}x}|+\mathrm{i}\arg(1-ae^{\mathrm{i}x})\right]=-\ln|1-ae^{\mathrm{i}x}|\\&=-\ln|(1-a\cos x)+a\mathrm{i}\sin x|=-\frac{1}{2}\ln(1+a^2-2a\cos x).\end{aligned}$$

于是当 $a\in(0,1)$ 时, 就有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x=0.$$

若 $a>1$, 则 $\frac{1}{a}\in(0,1)$, 从而此时我们有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\pi\ln a^2+\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\mathrm{d}x=\pi\ln a^2=2\pi\ln a.$$

又由 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 关于 a 的偏导存在可知 $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$ 关于 a 连续. 于是由

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=2\pi\ln a,\quad\forall a>1.$$

可知当 $a=1$ 时, 我们有

$$\int_0^{\pi}\ln(2-2\cos x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to1^+}\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\lim_{a\to1^+}(2\pi\ln a)=0.$$

□

定义 10.1 (多重对数函数-Li_2 函数)

定义

$$\mathrm{Li}_2(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad x\in[-1,1].$$

♣

命题 10.5

(1) $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\cdot\ln(1-x), x\in(0,1)$.

(2) $\mathrm{Li}_2(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \mathrm{Li}_2(0)=0,\quad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}$.

证明

(1) 记 $f(x)\triangleq\mathrm{Li}_2(x), F(x)\triangleq f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$. 则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

于是

$$F'(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{\ln x}{1-x}-\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}=0.$$

故 $F(x)\equiv F(1)=f(0)+f(1)=0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) 显然 $\mathrm{Li}_2(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \mathrm{Li}_2(0)=0$. 由 (1) 可得

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\ln^2\frac{1}{2}\Longrightarrow \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}.$$

□

例题 10.11 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n-1}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn^2}=-\frac{\pi^2}{6}+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\\&\xlongequal{\text{命题 10.5}}-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

10.2.6 其他

例题 10.12 证明积分 $\int_0^{\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}, a,b>0$.

证明 当 $a=1$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x&=e^{-2\sqrt{b}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{y=\frac{\sqrt{b}}{x}}e^{-2\sqrt{b}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{b}}{y^2}e^{-\left(\frac{\sqrt{b}}{y}-y\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{b}}{y^2}\right)e^{-\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2}\mathrm{d}y=\frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2}\mathrm{d}\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)\\&=\frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

于是对 $\forall a>0$, 就有

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-\frac{ab}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

□

例题 10.13 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x, a\in\mathbb{R}$.

注 本题可以用复变函数的方法 (留数定理) 来计算. 但是我们这里用基本的高等数学的方法来计算. $\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 这个积分没办法算出具体的初等数值.

证明

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ax)\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1+x^2)y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1+x^2)y}\cos(ax)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(1+x^2)y}\cos(ax)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1+x^2)y}\cos(ax)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2y}\cos(ax)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2y+\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y\left(x^2-\frac{a\mathrm{i}x}{y}+\left(\frac{a\mathrm{i}}{2y}\right)^2\right)-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y\left(x-\frac{a\mathrm{i}}{2y}\right)^2-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y\left(x+\frac{a}{2\mathrm{i}y}\right)^2-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y\left(x+\frac{a}{2\mathrm{i}y}\right)^2-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}\left(x+\frac{a}{2\mathrm{i}y}\right)\right)\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-yx^2-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-y-\frac{a^2}{4y}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-yx^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{y=t^2}\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{a^2}{4t^2}}dt \xlongequal{\text{例题 10.12}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-|a|} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}.
\end{aligned}$$

□

例题 10.14 计算 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x$.

注 由命题 10.6可知对 $\forall s>0$, 都有

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-ty}\mathrm{d}y, \forall t\in\mathbb{R}.$$

本题的核心想法就是利用上式将 $\frac{z}{1+x^8}$ 转化成积分形式.

证明 注意到

$$\int_0^{+\infty}ye^{-(1+x^8)y}\mathrm{d}y \xlongequal{y=\frac{z}{1+x^8}} \frac{1}{(1+x^8)^2}\int_0^{+\infty}ze^{-z}\mathrm{d}z = \frac{1}{(1+x^8)^2},$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-(1+x^8)y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-(1+x^8)y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{+\infty}ye^{-y}\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^8y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \xlongequal{x=y^{-\frac{1}{8}}z^{\frac{1}{8}}} \int_0^{+\infty}ye^{-y}\left(\int_0^{+\infty}y^{-\frac{1}{8}}e^{-z}\mathrm{d}z^{\frac{1}{8}}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}y^{\frac{7}{8}}e^{-y}\left(\int_0^{+\infty}z^{-\frac{7}{8}}e^{-z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}y^{\frac{7}{8}}e^{-y}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\\
&\xlongequal{10.2}\frac{7\pi}{64\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{7\pi}{32\sqrt{2-\sqrt{2}}}.
\end{aligned}$$

□

例题 10.15 计算积分 $I=\int_{-1}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

注 在此例中 $I\neq F(2)-F(-1)$. 这是因为 F 并不是 f 在区间 $[-1,2]$ 上的原函数.

解 在不包含 0 的区间上作变换 $t=x-\frac{1}{x}$ 得

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int\frac{x-\frac{1}{x}}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.$$

这说明在区间 $[-1,0)$ 和 $(0,2]$ 上, 函数 $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 的一个原函数是

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}.$$

因此

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0^-) - F(-1) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

故

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

□

10.3 Euler 积分

定理 10.2 (余元公式)

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}, 0 < x < 1.$

♡

证明

□

命题 10.6

对 $\forall s > 0$, 都有

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} \mathrm{d}y, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

♠

证明 已知 Γ 函数:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \quad s > 0.$$

令 $x = ty$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, 得

$$\Gamma(s) = t^s \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} \mathrm{d}y.$$

故

$$\frac{1}{t^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-ty} \mathrm{d}y.$$

□

第十一章 级数

11.1 级数基本结论

11.1.1 级数的敛散性

定理 11.1 (交错级数不等式)

设 $\{a_n\}$ 递减非负数列, 则对 $m,p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}(-1)^n a_n\right|\leqslant a_m. \tag{11.1}$$

笔记 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m=0$, 则

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为偶数}\\ a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p & ,p\text{为奇数}\end{cases}\leqslant a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}(a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-2}-a_{p-1})+a_p & ,p\text{为偶数}\\ (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为奇数}\end{cases}\geqslant 0,$$

这就证明了不等式(11.1). □

定理 11.2 (A-D 判别法)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 满足下列条件之一时收敛.

1. $\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, b_n 递减到 0;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, b_n 单调有界.

证明 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^{m}a_kb_k=\sum_{k=n}^{m-1}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=n}^{k}a_j+b_m\sum_{k=n}^{m}a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M=2\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|,$$

我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant M\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}|+M|b_m|=Mb_n\to 0, \text{当} n,m\to\infty.$$

对于第二种情况, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 故对任何 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大, 对任何 $p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|\leqslant\varepsilon.$$

于是当 n,m 充分大, 我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + \varepsilon |b_m| = \varepsilon |b_m - b_n| + \varepsilon |b_m| \leqslant 3\varepsilon \sup_{n\geqslant 1} |b_n|.$$

因此无论如何都有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

定理 11.3 (积分判别法)

若 f 是 $[1,+\infty)$ 的单调不变号函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

笔记 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

证明 不妨设 f 非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

由夹逼准则即证. □

定理 11.4 (比值判别法)

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0,1)$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.

定理 11.5 (Cauchy 链)

设正值递增函数 $F \in C^1[a,+\infty), \frac{F'}{F}$ 在 $[a,+\infty)$ 递减. 若满足 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散, 则对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 有如下判别法:

极限版:

1. 若
$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \tag{11.2}$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若
$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \tag{11.3}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (11.3)为 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leqslant 1$, 则 $\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$ 仍然可能在 n 充分大严格超过 1.

注 取 $F(x) = e^x$, 则
$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{n - \ln a_n}{n} = 1 - \ln \sqrt[n]{a_n},$$
这恰好是根值判别法.

取 $F(x) = x$, 则
$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} = \frac{-\ln a_n}{\ln n},$$
这恰好是对数判别法.

证明 **Step 1** 先证明
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty. \tag{11.4}$$
设 $\lim_{x\to+\infty} F(x) = A$, 则积分判别法表明
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_a^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx = \ln F(x)\Big|_a^{\infty},$$
即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)}$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{A}$, 这就和 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散矛盾! 故我们证明了 (11.4).

Step 2 当 (11.2) 成立, 再利用(11.4)式, 存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \geqslant c, F(N) > 1, \forall n \geqslant N.$$
因此
$$\frac{F'(n)}{a_n} \geqslant e^{c \ln F(n)} \Rightarrow \frac{F'(n)}{F^c(n)} \geqslant a_n, \forall n \geqslant N.$$
结合 $\frac{F'(n)}{F^c(n)} = \frac{F'(n)}{F(n)} \cdot \frac{1}{F^{c-1}(n)}$ 递减, 由积分判别法, 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F^c(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F^c(x)}\, dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y^c}\, \mathrm{d}y < \infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Step 3 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leqslant c, F(n) \geqslant 1, \forall n \geqslant N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有 $\frac{F'(n)}{F(n)} \leqslant \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leqslant a_n, \forall n \geqslant N$ 以及由积分判别法有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 11.6 (对数判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 11.7 (根值判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 而应该是 $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. 也不应是无穷多个 n, 而是任何 $n \geqslant N$. 所以我们需要一些加强的证明.

证明 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则存在 $n_k \to \infty$, 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant c \geqslant 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 11.8 (Kummer 链)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \cdots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf_{n\to\infty} K_n > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} K_n < 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ 使得 $K_n \geqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_n \leqslant 0, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$.

注 当 $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$. 我们有 $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$, 这恰好就是比值判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有 $K_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$, 这恰好是拉比判别法.

当 $d_n = \frac{1}{n\ln n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
K_n &= n\ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \\
&= n\ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

即得一个较为广泛的判别法. 要注意我们在阶的层面对 K_n 做了变形, 因此不再给出不等式版本的较为广泛的判别法.

证明 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>0$ 使得 $K_n\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\geqslant a_{n+1},\forall n\geqslant N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^{m}a_{k+1}\leqslant\sum_{k=N}^{m}\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_k}{d_k}-\frac{a_{k+1}}{d_{k+1}}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{d_N}-\frac{a_{m+1}}{d_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\cdot\frac{a_N}{d_N},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $K_n\leqslant 0,\forall n\geqslant N$. 则 $\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\geqslant\frac{a_n}{d_n},\forall n\geqslant N$. 现在

$$a_{n+1}\geqslant\frac{a_N}{d_N}d_{n+1},\forall n\geqslant N,\sum_{n=1}^{\infty}d_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,$$

这就完成了证明. □

定理 11.9 (拉比判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>1$ 使得 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明

□

定理 11.10 (较为广泛的判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版 1:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

极限版 2:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

笔记 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是Kummer 链的 $d_n = \frac{1}{n\ln n}$ 的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设 $t > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] > t, \forall n \geqslant N.$$
然后
$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{n} + \frac{t}{n\ln n}, \forall n \geqslant N.$$
现在求和得
$$\ln\frac{a_N}{a_{n+1}} > \sum_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{t}{k\ln k}\right), \forall n \geqslant N.$$
于是
$$a_{n+1} < a_N e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}, \forall n \geqslant N.$$
现在由例题 3.52(2)和例题 3.47, 我们有
$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + O(1), \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + O(1), n \to \infty.$$
于是
$$e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)} = e^{-\ln n - \ln\ln n + O(1)} = \frac{e^{O(1)}}{n\ln^t n}.$$
结合积分判别法有
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx = \int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y < \infty,$$
我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
2. 设 $0 < t < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] < t, \forall n \geqslant N.$$
然后相似第 1 问的证明和
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n} \sim \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx = \int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y = +\infty,$$
我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

□

定理 11.11 (Herschfeld 判别法)

设 $p > 1$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$. 定义
$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}}, n \in \mathbb{N},$$
然后 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界. 显然 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增.

证明 **必要性:** 若 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由
$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \geqslant \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{p^n}}$$
和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界知 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

充分性: 若 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界, 则设 $a_n^{\frac{1}{p^n}} \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$, 于是我们有 $a_n \leqslant M^{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 因此

$$t_n = \sqrt[p]{a_1 + \sqrt[p]{a_2 + \cdots + \sqrt[p]{a_n}}} \leqslant \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \cdots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}}$$
$$= M\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}} \leqslant M \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \cdots + \sqrt[p]{1}}}}_{n\text{ 个根号}},$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1 = \sqrt[p]{1},\ x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

注意到 $x_2 = \sqrt[p]{2} > 1 = x_1$, 不动点 $x_0 > 1$ 满足 $x_0^p - x_0 - 1 = 0$. 因此由命题 3.14知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增有上界, 从而极限存在. □

命题 11.1

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$.

笔记 这个命题是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人卡住.

这个命题是命题 7.5的离散版本.

注 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理就可以的. 笔记如果我们直接使用 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n a_n}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} n a_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在, 而 Stolz 定理不可以逆用.

证明 记 $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, 则由Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} [k - (k+1)]\, s_k + n s_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(s_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k}{n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.\end{aligned}$$

□

命题 11.2

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

1. 若 a_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.
2. 若 $n a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln n \cdot a_n = 0$.
3. 若 $n \ln n \cdot a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot a_n = 0$.

证明

1. 不妨设 a_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道 a_n 递减到 0. 注意到由 a_n 递

减知

$$0 \leqslant 2na_{2n} \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k,\ 0 \leqslant (2n-1)a_{2n-1} \leqslant 2na_{2n-1} \leqslant 2\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = \lim_{n\to\infty}(2n-1)a_{2n-1} = 0.$$

由命题 2.1知 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

2. 不妨设 na_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为 $\lim_{n\to\infty} na_n = c \neq 0$ 会导致 $a_n \sim \frac{c}{n}$, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以我们知道 na_n 递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{ka_k}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{1}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \\ &= na_n \int_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n} \frac{1}{x}dx = na_n \ln\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \geqslant na_n \ln\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}na_n\ln n \geqslant 0,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到 $\lim_{n\to\infty} n\ln n\cdot a_n = 0$.

3. 不妨设 $n\ln n\cdot a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 若 $\lim_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n) = c \neq 0$. 注意到 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此 $\lim_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n) = 0$, 从而 $a_n \geqslant 0$.

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} a_k &= \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} \frac{k\ln k\cdot a_k}{k\ln k} \geqslant n\ln n\cdot a_n \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k\ln k} \\ &\geqslant n\ln n\cdot a_n \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx = n\ln n\cdot a_n\int_{[\ln n]}^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx \\ &= n\ln n\cdot a_n\cdot\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]} \geqslant n\ln n\cdot a_n\cdot\ln\frac{\ln n}{\ln\ln n} \sim n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了 $\lim_{n\to\infty} n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n = 0$.

□

定理 11.12 (级数的控制收敛定理)

设 $a_n(s), n = 1, 2, \cdots$ 满足

$$|a_n(s)| \leqslant c_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及 $\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$.

则

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里 $\lim_s$ 表示 s 趋于某个 $s_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

证明 事实上由极限保号性, 我们知道 $|b_n| \leqslant c_n, n = 1, 2, \cdots$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s)-b_n)\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n(s)-b_n| \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s)-b_n)\right| + 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.\end{aligned}$$

对 s 取极限得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|\leqslant 2\sum_{n=m+1}^{\infty}c_n.$$

由 m 任意性及 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|=0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

例题 11.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)\right|\leqslant e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leqslant e^{n\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}.$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}<\infty$, 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n&=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}\\&=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

□

定理 11.13 (级数的 Levi 定理)

若非负 $a_n(s),n=1,2,\cdots$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是 $s\to s_0^+$, 那么应该是关于 s 的递减函数) 且

$$\lim_{s}a_n(s)=b_n\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 那么由于 $0\leqslant a_n(s)\leqslant b_n$, 取控制级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ 也单调递增, 故 $\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ 广义存在. 假设

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=m<\infty,$$

此时对任何 $N\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{n=1}^{N}b_n=\lim_{s}\sum_{n=1}^{N}a_n(s)\leqslant\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)=m<\infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

引理 11.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列 $a_n(s), n=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varliminf_{s} a_n(s) \leqslant \varliminf_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s).$$

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 不妨设 $s \to +\infty$, 考虑 $g_n(s) \triangleq \inf_{t \geqslant s} a_n(t)$, 则 g_n 关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varliminf_{s} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geqslant s} a_k(t) \leqslant \varliminf_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_k(s),$$

这就完成了证明. □

定理 11.14 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{11.5}$$

1. $a_{m,n} \geqslant 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$;
2. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

笔记 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

证明

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到 $\{\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\}$ 关于 N 非负递增, 于是有
$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \tag{11.6}$$
这就是 (11.5).
2. 注意到
$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$
于是由级数的控制收敛定理知 (11.6) 仍然成立, 这就是 (11.5).

□

定理 11.15 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致.

证明

1. 设加括号后新的级数是 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$, 其中 n_k 递增趋于 $+\infty$. 则
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$
这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N},n_1=0$, 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j$ 收敛且对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $a_{n_k+1},a_{n_k+2},\cdots,a_{n_{k+1}}$ 将符号相同, 则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ 收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{11.7}$$

事实上, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $n_m<n\leqslant n_{m+1}$, 此时

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j+\sum_{j=n_m+1}^{n}a_j.$$

则当 $a_j\geqslant 0,n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j,\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j-\sum_{j=n+1}^{n_{m+1}}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{11.8}$$

若 $a_j\leqslant 0,n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 可得 (11.8) 的类似式

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{11.9}$$

让 $n\to+\infty$, 我们由 (11.8),(11.9) 和夹逼准则得 (11.7). 这就完成了证明.

□

命题 11.3

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty),S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}$. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不恒为 0, 不妨设 $a_1\neq 0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{和}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{同敛散}, & 0<p\leqslant 1\end{cases}.$$

笔记 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right),\sum\left(\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

证明 当 $p>1$, 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{S_1}^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,$$

可以看到无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性如何都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则有 $\frac{a_n}{S_n^p}\sim\frac{a_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)^p}=ca_n,n\to\infty$, 其中 c 是某个常数, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 我们对任何充分大的 $m,k\in\mathbb{N}$ 都有

$$1-\frac{S_k}{S_{k+m}}=\frac{S_{k+m}-S_k}{S_{k+m}}=\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_{k+m}}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n^p}.$$

让 $m \to +\infty$, 利用 $S_{k+m} \to +\infty$, 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散. 这就完成了证明. □

11.1.2 幂级数阶与系数阶的关系

定理 11.16 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

(1) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x\in(-1,1) \tag{11.10}$$

满足

$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0, \lim_{x\to 1^-} g(x)=+\infty, \tag{11.11}$$

则

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{11.12}$$

(2) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x\in(-1,1)$$

满足

$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \lim_{x\to 1^-} g(x)=+\infty, \tag{11.13}$$

则

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{11.14}$$

(3) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x\in\mathbb{R} \tag{11.15}$$

满足

$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0, \tag{11.16}$$

则

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{11.17}$$

(4) 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x\in\mathbb{R} \tag{11.18}$$

满足

$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \tag{11.19}$$

则

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{11.20}$$

♡

注 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

证明

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leqslant \lim_{x\to1^-} \frac{b_n x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \lim_{x\to1^-} \frac{b_n x^n}{g(x)} = 0.$$

由Toeplitz 定理 (b)以及 (11.11) 即得 (11.12).

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ 和 (1) 可知

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (11.14).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}.$$

我们有

$$0 \leqslant \frac{b_n x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \leqslant \frac{b_n x^n}{b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + b_{n+1} x},$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b_n x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = 0$. 由Toeplitz 定理 (b)以及 (11.16) 我们就得到 (11.17).

(4) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ 和 (3) 可知

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0,$$

即得 (11.20).

□

例题 11.2 设 p 是 $\mathbb{R}$ 上实解析函数且 $0 < \prod\limits_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(0) < \infty$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{p'(x)}{p(x)}$.

证明 注意到

$$1 = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod\limits_{n=0}^{m+1} p^{(n)}(0)}{\prod\limits_{n=0}^{m} p^{(n)}(0)} = \lim_{m\to\infty} p^{(m)}(0),$$

所以 $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, 故

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上有定义且收敛. 于是

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n+1)}(0)}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}.$$

由定理 11.16(3), 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 1.$$

□

例题 11.3 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot x^n\sim\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x},x\to1^-.$$

解 注意到

$$\ln n\sim1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},n\to\infty.$$

由定理 11.16可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot x^n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\xlongequal{\text{例题 11.27}}\frac{-\ln(1-x)}{1-x}=\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x},x\to1^-.$$

□

例题 11.4 证明:

$$\lim_{y\to1^-}\frac{1}{\ln(1-y)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}}=-\frac{1}{2}.$$

证明 注意到

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^kk!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

于是

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}}=\int_0^1\frac{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}x^{2k}y^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^1\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right]y^{2k}$$

$$\xlongequal{x=\cos\theta}\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\theta\mathrm{d}\theta\right]y^{2k}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2y^{2k}.$$

又由Wallis 公式知

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\sim\sqrt{\pi k},k\to\infty.$$

故由定理 11.16可得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}}\sim\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{2k}}{\pi k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y^2)^k}{k}=-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1-y)-\frac{1}{2}\ln(1+y)\sim-\frac{1}{2}\ln(1-y),y\to1^-.$$

□

例题 11.5 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}\sim\frac{1}{(1-x)\ln\frac{1}{1-x}},x\to1^-.$$

证明 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$ 在 $(-1,1)$ 上绝对收敛, 由Cauchy 积收敛定理及推论 11.1可知

$$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}\xlongequal{\text{推论 11.1}}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln k(n-k)}\right)x^n.$$

下证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}=1$. 一方面, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\geqslant\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(n-1)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}}{\ln(n-1)}\to1,n\to\infty.$$

另一方面, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}&\leqslant\sum_{2\leqslant k\leqslant\varepsilon n}\frac{1}{(n-k)\ln k}+\sum_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\\&\leqslant\frac{1}{n(1-\varepsilon)}\sum_{2\leqslant k\leqslant\varepsilon n}\frac{1}{\ln 2}+\sum_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln\varepsilon n}\\&\leqslant\frac{\varepsilon n}{n(1-\varepsilon)\ln 2}+\frac{\sum\limits_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}}{\ln\varepsilon+\ln n}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\leqslant\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\ln 2}+1.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\leqslant 1.$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n-1}\dfrac{1}{(n-k)\ln k}=1$. 于是由定理 11.16可知

$$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln k\,(n-k)}\right)x^n\sim\sum_{n=3}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\to1^-.$$

即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{\ln n}\sim\dfrac{1}{(1-x)\ln\frac{1}{1-x}},x\to1^-.$ □

例题 11.6 设

$$a_0=1,a_1=\frac{5}{4},a_n=\frac{(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}}{4n},n=2,3,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的 f 的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的 f, 对这个 f 来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了 a_n 的通项. 此外考虑 $\dfrac{1}{1-x}f(x)$ 的幂级数并用 Cauchy 积可以导出 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ 的信息.

如果要严谨地证明, 就是用数学归纳法证明下述求出来的 a_n 通项表达式 (其实就是下面解出来的 f 的 Taylor 展开式中的通项) 就是满足题目条件的 a_n, 再直接计算其极限即可.

证明 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. 由条件可得

$$\begin{aligned}&4na_n=(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2},\quad n=2,3,\cdots.\\\Rightarrow\ &4\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}[(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}]x^n.\\\Rightarrow\ &4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4a_1x=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{n+2}\\\Rightarrow\ &4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-5x=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2x^3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\\Rightarrow\ &4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-5x=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2x^3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-5x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2x^3+2x^2-4x)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + (x^2+5x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\Rightarrow (2x^3+2x^2-4x)f'(x) + (x^2+5x)f(x) = 0.$$

又注意到 $f(0)=a_0=1, f'(0)=a_1=\frac{5}{4}$, 故分离变量解上述微分方程得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x+2}}{1-x}.$$

因为 $\sqrt{x+2}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 所以可记 $\sqrt{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则 $\sqrt{3}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. 由Cauchy 积收敛定理及推论 11.1知

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)x^n.$$

因此 $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n} b_k$, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. □

11.1.3 Cauchy 积

定义 11.1 (Cauchy 积)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy(乘) 积**. 我们记

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

♣

注 我们暂时并不清楚 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

结论 延续定义 11.1, 我们有

$$\begin{cases} a_0b_0 = c_0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = c_1 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = c_2 \\ \vdots \\ a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0 = c_n \end{cases}$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则当 $a_0 \neq 0$, 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

例题 11.7 设 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n = 0, 1, \cdots$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

注 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

证明 事实上, 我们有

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \to 2,$$

上式的放缩实际上利用了二次函数 $(n-k+1)(k+1) = -k^2 + nk + n + 1$ 的最值大值点 $k = \dfrac{n}{2}$. 这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散. □

命题 11.4

延续定义 11.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n} S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{11.21}$$

证明 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i,$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^{n} S_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i} B_i$$

由命题 3.6可得(11.21). □

推论 11.1

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则它们的 Cauchy 积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

证明 延续定义 11.1, 充分性显然成立, 下证必要性. 由命题 11.4及 Stolz 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} S_j}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

□

定理 11.17 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义 11.1, 我们有

1. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 有一个绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.
2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

证明 1. 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i,$$

因此我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设 (否则, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, 则用 $B_n - B$ 代替 B_n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

于是运用命题 3.5就有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot |B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot 0 = 0$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.

2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| \sum_{k=i}^{n} |b_{k-i}| \right)$$

于是由命题 3.5就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| \sum_{k=i}^{n} |b_{k-i}| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛. □

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

命题 11.5

延续定义 11.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{收敛}. \tag{11.22}$$

证明 注意到

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{n}a_iB_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}B_i,$$

即 $\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}c_k$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}&=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}-\sum_{j=k}^{n}b_{n-j}\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\left(\sum_{k=0}^{n}a_k-a_0\right)-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{n-k}b_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}a_kb_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}c_k\end{aligned}$$

由于 Cauchy 积收敛, 则由推论 11.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}=0\iff\sum_{n=0}^{\infty}c_n\text{收敛}$$

□

例题 11.8 设递减数列 $a_n,b_n>0,n=0,1,2,\cdots$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n,\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nb_n$ 收敛, 记 $c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nc_n\text{收敛}\iff\lim_{n\to\infty}c_n=0\tag{11.23}$$

证明 左推右显然, 现在假设 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$, 由命题 11.5, 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}=0$$

现在

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\leqslant\sum_{k=0}^{n+1}a_kb_{n-k+1}=c_{n+1}\end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于交错级数不等式. 于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|=0$$

我们证明了(11.23). □

命题 11.6

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in(-1,1).$$

记 $S_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$, 则

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, x \in (-1,1).$$

证明 由 Taylor 级数可知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1).$$

显然 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上绝对收敛, 故由Cauchy 积收敛定理可知 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的 Cauchy 积也收敛, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a_k x^k\right) x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n < +\infty.$$

故由推论 11.1可知

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

□

11.2 具体级数敛散性判断

11.2.1 估阶法

例题 11.9 判断下述级数收敛性.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(e^n + n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1} \cdot \ln^2(n+1)}$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^p}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^4\right)^n}$.

证明

1. 注意到

$$\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)} = \frac{\ln\left(e^n\right)+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)} \sim \frac{n}{n^2\cdot\ln^2 n} = \frac{1}{n\ln^2 n}, n \to \infty.$$

由积分判别法, 我们有

$$\sum \frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y < \infty,$$

故原级数收敛.

2. 注意到运用 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n\ln^2 n-(n-1)\ln^2(n-1)} \xlongequal{\text{拉中保持阶不变}} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n + 2\ln n} = 1.$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p} \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln^2 n}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}.$$

当 $p>2$ 时, 取 $\delta>0$, 使得 $p-1-\delta>1$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^\delta}=0$, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p-1-\delta}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^\delta}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C}{n^{p-1-\delta}}<+\infty.$$

当 $p\leqslant 2$ 时, 有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 2}{n^{p-1}}=+\infty.$$

因此原级数收敛等价于 $p>2$.

3. 由 Laplace 方法, 我们有

$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}=\int_0^1 e^{-n\ln(1+t^4)}dt\sim\int_0^{\infty}e^{-nt^4}dt=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^{\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x, n\to\infty.$$

现在

$$\frac{1}{n}\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}\sim\frac{C}{n^{\frac{5}{4}}}, n\to\infty,$$

故原级数收敛.

□

例题 11.10 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt, n\in\mathbb{N}$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛性.

笔记 如果需要 a_n 的一个精确的上界, 那么 (就是证法一) 我们可以先待定分段点 θ, 利用不等式 (这个不等式可用数学归纳法证明)

$$|\sin(nt)|\leqslant n|\sin t|, \forall n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R},$$

再结合 Jordan 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt&=\int_0^{\theta}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt\\&\leqslant\int_0^{\theta}\frac{tn^3\sin^3 t}{\sin^3 t}dt+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3}dt\\&=\frac{\theta^2 n^3}{2}+\frac{\pi^3}{8\theta}-\frac{\pi^2}{4}=g(\theta), \forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

此时再求出 $g(\theta)$ 的最小值点, 就能确定 θ 的取值, 进而得到一个较为精确的上界. 求导易知 $g(\theta)\geqslant g\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{3\pi^2}{8}n$, 即

$$\theta=\frac{\pi}{2n}, a_n\leqslant\frac{3\pi^2}{8}n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

证明 证法一: 利用不等式

$$|\sin(nt)|\leqslant n|\sin t|, \forall n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R},$$

我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{tn^3\sin^3 t}{\sin^3 t}dt=\frac{n^3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4n^2}=\frac{\pi^2}{8}n.$$

利用不等式 $\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t, \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 我们有

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt\leqslant\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3}dt\leqslant\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{2n}{\pi}=\frac{\pi^2}{4}n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

现在

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|dt\leqslant\frac{\pi^2}{8}n+\frac{\pi^2}{4}n=\frac{3\pi^2}{8}n, \forall n\in\mathbb{N},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{8}{3\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

证法二: 注意到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3 x}{x^3}=1$, 故存在 $c>0$, 使得

$$|\sin^3 x|\geqslant cx^3,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

从而

$$a_n\leqslant\frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin^3(nt)|}{t^2}dt=\frac{n}{c}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin^3 y|}{y^2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{n}{c}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\leqslant Kn,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

其中 K 为某个常数. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Kn}=+\infty.$$

□

例题 11.11 对 $x>0$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]$ 收敛性.

证明 当 $x=2^m, m\in\mathbb{N}$, 我们知道级数末项在 n 充分大时恒为 0, 因此原本的级数收敛. 下设 $x\neq2^m,\forall m\in\mathbb{N}$. 此时由

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)}{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n+1}}\right)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\ln x}{n+1}=\ln x,$$

以及拉比判别法, 我们就有 $x>e$ 时级数收敛,$x<e$ 时级数发散. 当 $x=e$ 时, 计算 Taylor 展开式得

$$\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{12n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right),n\to\infty,$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}-1\right]=0.$$

运用较为广泛的判别法 (极限版 2), 我们知道原级数发散. □

例题 11.12 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{\sin1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}},x\in(0,1)$ 收敛性.

证明 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x^{\sin1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x}-1\right)=-\ln x\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n+1}=-\ln x.\end{aligned}$$

由拉比判别法, 我们有 $0<x<\frac{1}{e}$ 时原级数收敛, $\frac{1}{e}<x<1$ 时原级数发散. 当 $x=\frac{1}{e}$, 由较为广泛的判别法 (极限版 2)和

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{x^{\sin1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1+O\left(\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)^2\right)\right]-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[-\sin\frac{1}{n+1}\ln x+O\left(\left(-\sin\frac{1}{n+1}\ln x\right)^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(\left[n\sin\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0,\end{aligned}$$

我们有原级数在 $x=\frac{1}{e}$ 发散. □

11.2.2 带对数换底法

例题 11.13 判断下列级数收敛性.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{\ln n}}\ (r>0)$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln n} n}$;
3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;
4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$;
6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$

证明

1. 注意到
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n\cdot \ln r}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln r}},$$
我们有原级数收敛等价于 $r>e$.
2. 注意到
$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\ln n} n} = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln n}} = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln\ln n}} \leqslant \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln\ln 100}} < \infty,$$
我们有原级数收敛.
3. 注意到
$$\sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln n}} \leqslant \sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln(e^{e^e}+1)}} = \sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln\ln\ln(e^{e^e}+1)}} < \infty,$$
我们有原级数收敛.
4. 由积分判别法, 我们有
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln^2\ln n}} \sim \int_3^{\infty} \frac{1}{e^{\ln^2\ln x}}dx \overset{x=e^y}{=} \int_{\ln 3}^{\infty} e^{y-\ln^2 y}dy = \infty,$$
故原级数发散.
5. 首先
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}},$$
于是我们结合
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{t}}}dt < \infty$$
知原级数收敛.
6. 当 n 充分大有
$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n} = \frac{1}{e^{(1+\frac{1}{\ln\ln n})\ln n}\ln n} = \frac{1}{n\ln ne^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}}} \leqslant \frac{1}{n\ln ne^{\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln\ln n}}} = \frac{1}{n\ln ne^{\ln\ln n}} = \frac{1}{n\ln^2 n}.$$
由积分判别法知
$$\sum \frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^2}dy < \infty,$$

因此 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$ 收敛.

□

11.2.3 Taylor 公式法

例题 11.14 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}$ 收敛性.

笔记 此类问题可采用 Taylor 公式的 peano 余项方法, 主要要展开到余项的级数绝对收敛. 注意积累绝对 ± 绝对 = 绝对, 绝对 ± 条件 = 条件的结论.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right).$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散知原级数发散.

□

11.2.4 分组判别法

例题 11.15 设 $a_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛.

笔记 待定常数 c, 记

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant ca_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>ca_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$a_n>ca_n^{\frac{n}{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{c}>a_n^{\frac{1}{n+1}}\Rightarrow a_n<\left(\frac{1}{c}\right)^{n+1}.$$

现在我们想要利用几何级数将原级数进行分组, 故只需任取 $c>1$ 即可, 不妨取 $c=2$, 就有下述证明.

证明 记

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

现在

$$a_n^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow a_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,\forall n\in M,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}=\sum_{n\in M}a_n^{\frac{n}{n+1}}+\sum_{n\in N}a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\sum_{n\in M}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sum_{n\in N}a_n<\infty,$$

这就完成了证明.

□

例题 11.16 设 $a_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}, s>1-\frac{1}{p}, p>1$ 收敛.

注 本题也可用分组判别法进行证明.

证明 利用Young 不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{p}+\frac{1}{qn^{sq}}\right)<\infty,sq=\frac{s}{1-\frac{1}{p}}>1,$$

这就完成了证明.

□

11.2.5 杂题

例题 11.17 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

证明 相似(12.1)式的计算, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\sin j\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin j\cdot\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos\left(j-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(j+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\\&=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\left|\sin n-\cot\frac{1}{2}\cos n+\cot\frac{1}{2}\right|\\&\leqslant\frac{2}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\cos j\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos j\cdot\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\\&=\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\left|\cos n+\cot\frac{1}{2}\sin n-1\right|\\&\leqslant\frac{2}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

都是有界的. 又 $\frac{1}{n}$ 递减到 0, 我们由A-D 判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n}=\text{发散}-\text{收敛}=\text{发散};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(2n)}{2n}=\text{发散}+\text{收敛}=\text{发散}.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛. □

例题 11.18 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

注 实际上, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都存在 $t\in\mathbb{N}$, 使得

$$t\leqslant\sqrt{n}<t+1\iff t^2\leqslant n\leqslant(t+1)^2-1.$$

因此

$$(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^t,\forall k\in[t^2,(t+1)^2-1].$$

注 $\ln(1+x)\leqslant x\Rightarrow\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\leqslant-\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{1}{k}\geqslant\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

证明 证法一:由级数加括号的理解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k}=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}.$$

我们来证明上式右边级数符合莱布尼兹判别法.

首先

$$0\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\ln\frac{k}{k-1}=\lim_{t\to\infty}\ln\frac{(t+1)^2-1}{t^2-1}=0,$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=0.$$

然后对 $t\in\mathbb{N}, t\geqslant 3$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=(t+1)^2}^{(t+2)^2-1}\frac{1}{k}&=\sum_{k=0}^{2t}\frac{1}{k+t^2}-\sum_{k=0}^{2t+2}\frac{1}{k+t^2+2t+1}\\&=\sum_{k=0}^{2t}\left(\frac{1}{k+t^2}-\frac{1}{k+t^2+2t+1}\right)-\frac{1}{t^2+4t+2}-\frac{1}{t^2+4t+3}\\&=\sum_{k=0}^{2t}\frac{2t+1}{(k+t^2)(k+t^2+2t+1)}-\frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\\&\geqslant\frac{(2t+1)^2}{(2t+t^2)(2t+t^2+2t+1)}-\frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\\&\geqslant\frac{(2t+1)^2}{(t^2+2t+2)(t^2+4t+3)}-\frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\\&=\frac{2t^2-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\geqslant\frac{6t-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}>0,\end{aligned}$$

这就证明了 $\sum\limits_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}$ 单调递减! 现在由莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

证法二:由级数加括号的理解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k}=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}.$$

我们用估阶方法进行证明. 由例题 3.52(2)可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{t^2-1}\frac{1}{k}=\ln\left(t^2-1\right)+\gamma+O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=\ln\left[(t+1)^2-1\right]+\gamma+O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

于是

$$\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=\ln\frac{t^2+2t}{t^2-1}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)=\ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)+O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

进而

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\left[\ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right].$$

显然 $\ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ 单调递减趋于 0, 故由莱布尼兹判别法可知原级数收敛. □

11.3 级数计算

11.3.1 裂项方法

例题 11.19 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\sqrt[2^n]{2})}$.

笔记 继续采用强行裂项的想法, 猜出裂项之后的模样之后还原看看差什么.

证明 注意到

$$\frac{1}{2^{n-1}\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}=\frac{2}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}+1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}=-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}$$
$$=-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}=-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)},$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}\right)-1=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

□

例题 11.20 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$$

笔记 想法的关键是强行裂项.

证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)(k+2)!}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)!}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\xlongequal{e\text{的 Taylor 展开}}\frac{1}{2}-\left(e-1-1-\frac{1}{2}\right)=3-e.$$

□

例题 11.21 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$$

笔记 此类问题化部分和之后估阶.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{2m+1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2m+1)}{2m+1}.$$

令 $m\to\infty$, 得

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m+1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}.$$

于是由子列极限命题 (b)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln(2n)}{2n}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}\right)$$

利用例题 3.52(2), 我们知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}=\ln 2\cdot\ln m+\ln 2\cdot\gamma+o(1),m\to\infty$$

由0 阶 E-M 公式知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln m}{2m}+\int_1^m\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x$$

注意到 $\int_1^m\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 m$ 以及

$$\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{|1-\ln x|}{x^2}\mathrm{d}x<\infty$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1),m\to\infty$$

这里 $C=\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x$. 现在结合上述渐近估计式就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln^2(2m)-\frac{1}{2}\ln^2 m-\ln 2\cdot\ln m-\ln 2\cdot\gamma+o(1)\right]=\frac{\ln^2 2}{2}-\ln 2\cdot\gamma$$

□

例题 11.22

1. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$$
2. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}$$

笔记 证明的想法即强行裂项.

证明

1. 记 $H_n\triangleq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们有
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}\right)+\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_1}{2}-\frac{H_{m+1}}{m+2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1.\end{aligned}$$
2. 我们有
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+1}}{n+1}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=H_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

□

例题 11.23 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$$

笔记 证明的想法即利用合适范围内都成立的恒等式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

来裂项.

证明 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

□

11.3.2 凑已知函数

例题 11.24 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}y^{2n}\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-y^2}\mathrm{d}y\\&=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & ,x\neq 0\\ 3 & ,x=0\end{cases}.\end{aligned}$$

□

例题 11.25 计算

$$1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)(3k-7)\cdots5\cdot2}{6^k k!}.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)(3k-7)\cdots5\cdot2}{6^k k!}&=1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^{k-1}\prod\limits_{j=2}^{k}\left(j-\frac{4}{3}\right)}{6^k k!}\\&=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}3\prod\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{3}-j+1\right)}{6^k k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

□

例题 11.26 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}.$$

证明 相似例题 3.80的计算, 我们有恒等式

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \cos \frac{x}{2^k} = \ln \sin x - n \ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2^n}.$$

两边求导有

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

于是就有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = -\frac{\cos x}{\sin x} + \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \begin{cases} -\dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

□

11.3.3 生成函数和幂级数计算方法

例题 11.27 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

笔记 使用 Cauchy 积计算幂级数有一个特点, 即系数往往出现求和结构.

证明 考虑 $a_n = 1, n \in \mathbb{N}_0, b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 0 \end{cases}$. 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x}, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = -\ln(1-x),$$

并且上述级数在 $(-1,1)$ 上绝对收敛, 于是由Cauchy 积收敛定理及推论 11.1可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x| < 1.$$

收敛域可以直接注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) 1^n = \infty, \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) (-1)^n = \infty$$

故收敛域就是 $(-1,1)$. □

例题 11.28 设

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}.$$

笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的 f 的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的 f, 对这个 f 来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

对本题而言,$f(x)$ 已知, 且容易求出其收敛半径. 此时用形式幂级数法本身就是严谨地.

证明 考虑 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则对任意在其收敛域内的 x 我们有

$$\begin{aligned}1=(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n\\&=a_0+a_1x-a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n,\end{aligned}$$

于是对比系数得

$$a_0=1,\ a_1=a_0=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ n=2,3,\cdots.$$

显然有

$$a_n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{3}{2}.$$

注 (证明可见复分析教材) 为了求出 f 收敛半径, 可以展开点为中心作圆并一直扩大直到接触到和函数在 $\mathbb{C}$ 上第一个奇点为止. 对于 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$, 第一个奇点即使得 $\frac{1}{1-x-x^2}$ 分母为 0 且模更小的点 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 于是我们得到一个极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

□

例题 11.29 设 $a_0=0,a_1=\frac{2}{3},(n+1)a_{n+1}=2a_n+(n-1)a_{n-1},n\in\mathbb{N}$, 计算 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$ 收敛域和和函数.

证明 记 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 形式的, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-1}.$$

于是

$$\frac{1}{x}[f'(x)-a_1]=\frac{2}{x}[f(x)-a_0]+xf'(x)\Rightarrow\frac{1}{x}\left[f'(x)-\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{x}f(x)+xf'(x).$$

故解微分方程得 $f(x)=\frac{2x}{3-3x},x\in(-1,1)$. 这给出了 $a_n=\frac{2}{3},n\in\mathbb{N}$. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{2}{3}x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\frac{2}{3}x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{2x}{3(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

□

例题 11.30

1. 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

2. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot 2n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\right].$$

注 第 2 问是第十届大学生数学竞赛非数学类决赛得分率非常低的一个题. 可以看到如果我们平时记忆 $\arcsin^2 x$ 展开, 就能快速解题而规避掉最容易考的构造微分方程求解幂级数的技巧. 这一点我们在命题 4.1中也提到过.

证明

1. 考虑

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}, g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n},$$

我们有

$$\begin{aligned}g'(x)&=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)'\\&=1+x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\right)'=1+x[xg(x)]',\end{aligned}$$

即

$$g'(x)-\frac{x}{1-x^2}g(x)=\frac{1}{1-x^2}, g(0)=0.$$

由常数变易法得 $g(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 于是收敛区间为 $|x|<1$. 由

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)=+\infty,\ \lim_{x\to -1^+}g(x)=+\infty$$

知幂级数在 $x=\pm 1$ 不收敛, 故收敛域为 $|x|<1$.

2. 首先把级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot 2n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{n+1}\right].$$

然后利用等式 $(2n)!!=2^n n!$ 可考虑

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(\sqrt{2}x)^{2n+2}}{n+1}\right].$$

现在所求级数为 $2f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 我们利用第 1 问有

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right).$$

于是我们有

$$2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2f(0)=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}-1.$$

□

例题 11.31 计算 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}$.

证明 注意到

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}, f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, f'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}.$$

于是我们有

$$f+f'+f''+f'''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

注意到 $f(0)=1, f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, 求解微分方程 (Euler 待定指数法) 得解 $f(x)=\frac{1}{4}(e^{-x}+e^{x}+2\cos x)$. □

11.3.4 多重求和

例题 11.32 计算

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}.$$

笔记 二重级数一类题型往往会用对称性来简化结构.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}&\xlongequal{\text{级数的 Fubini 定理}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n\left(m3^n+n3^m\right)}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^mmn^2+3^nm^2n}{3^{n+m}\left(m3^n+n3^m\right)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^{n+m}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2=\frac{9}{32},\end{aligned}$$

这里最后的级数是一个差比数列, 高中数学的错位相减可以直接算出结果. 或者利用凑已知函数的方法计算:

$$\sum_{m=1}^{\infty}mx^m=x\left(\sum_{m=1}^{\infty}x^m\right)'=x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

将 $x=\frac{1}{3}$ 代入得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2=\frac{9}{32}.$$

□

例题 11.33 计算

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}\right].$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}&\xlongequal{\text{级数的 Fubini 定理}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100mn^2}{2^n\left(m2^n+n2^m\right)}=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}+\frac{n^2m}{2^n\left(m2^n+n2^m\right)}\right)\\&=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mn\left(\frac{m}{2^m}+\frac{n}{2^n}\right)}{n2^m+m2^n}\right)=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{2^{m+n}}=50\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\right)^2=200.\end{aligned}$$

□

11.3.5 级数特殊算法 (换序法)

例题 11.34

1. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
2. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
3. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^22^n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$.

注 熟知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

证明

1. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

2. (考试肯定会给提示或多设置一问) 注意到傅立叶展开 $f(x)=x^3-\pi^2x, x\in[-\pi,\pi]$ 得

$$x^3-\pi^2x\sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx).$$

考虑 $x=\frac{\pi}{2}$ 即得

$$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)=-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)=-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}.$$

故 $12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

3. 由命题 10.5(2)得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$.

□

例题 11.35 设 $f\in C^1[0,1]$, $f(x)\geqslant 0$, 证明下述级数收敛且求值

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 为了有换序

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\mathrm{d}x=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

我们只需要

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\mathrm{d}x=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

即需要证明

$$\lim_{m\to\infty}\int\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

注 实际上, 这里的换序就是控制收敛定理.

证明 显然 $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ 递减且

$$0\leqslant\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\max f\cdot\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\to 0, n\to\infty,$$

故由交错级数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{xf(x)}{1+x}\mathrm{d}x,$$

这里换序来自

$$\left|\int_0^1\sum_{n=m}^{\infty}(-x)^n f(x)\mathrm{d}x\right|\overset{\text{交错级数不等式}}{\leqslant}\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x\to 0, m\to\infty.$$

□

命题 11.7 (组合数的无穷和技巧)

1. 我们有
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k \Rightarrow b_k = x^{-k}\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k a_n x^n.$$
2. 我们有
$$\sum_{n=0}^{m} a_n(y+x)^n = \sum_{k=0}^{m} b_k y^k \Rightarrow b_k = x^{-k}\sum_{n=k}^{m} C_n^k a_n x^n.$$

证明

□

例题 11.36 计算
$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n, k\in\mathbb{N}.$$

证明 取 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$. 由例题 11.27, 我们有
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(y+x)^n &= -\frac{\ln(1-x-y)}{1-x-y} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\frac{1}{1-\frac{y}{1-x}} - \frac{1}{1-x}\frac{\ln\left(1-\frac{y}{1-x}\right)}{1-\frac{y}{1-x}} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{(1-x)^k} + \frac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\frac{y^k}{(1-x)^k} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}}\right]y^k\end{aligned}$$
于是由命题 11.7, 我们有
$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n = b_k x^k = \left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}}\right]x^k$$
注意到和函数第一个奇点是 $x=1$, 所以幂级数收敛半径是 1. 注意到和函数在 $x=1$ 的左极限发散, 因此幂级数在 $x=1$ 不收敛. 虽然和函数在 $x=-1$ 的右极限收敛, 但并不能一定能推出幂级数在 $x=-1$ 收敛, 为了判断 $x=-1$ 的收敛性, 我们要使用小 o Tauber 定理.

若 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=k}^{\infty} C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-x)^n$ 存在, 则由小 o Tauber 定理知
$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=k}^{k+m}\left[(-1)^n nC_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]=0.$$
注意到
$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{n=k}^{k+2m}\left[(-1)^n nC_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]=0.$$
$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\sum_{n=k}^{k+2m+1}\left[(-1)^n nC_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]=0.$$
我们有
$$\lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^{k+2m+1}(k+2m+1)C_{k+2m+1}^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+2m+1}\right)}{2m+1}=0.$$
又
$$\lim_{m\to\infty} C_{k+2m+1}^k = \lim_{m\to\infty}\frac{(k+2m+1)!}{k!(2m+1)!}=+\infty.$$
矛盾! 因此我们证明了原幂级数收敛域是 $(-1,1)$. □

11.4 级数一致收敛性判断

定理 11.18 (函数列一致收敛的柯西准则)

函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是: 对任给正数 ε, 总存在正数 N, 使得当 $n,m>N$ 时, 对一切 $x\in D$, 都有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \tag{11.24}$$

证明 **必要性** 设 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty), x\in D$, 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在正数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in D$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.25}$$

于是当 $n,m>N$, 由 (11.25) 就有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性 若条件 (11.24) 成立, 由数列收敛的柯西准则,$\{f_n\}$ 在 D 上任一点都收敛, 记其极限函数为 $f(x), x\in D$. 现固定 (11.24) 式中的 n, 让 $m\to\infty$, 于是当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in D$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty), x\in D$. □

定理 11.19

函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{11.26}$$

证明 **必要性** 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty), x\in D$. 则对任给的正数 ε, 存在不依赖于 x 的正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ x\in D.$$

由上确界的定义, 亦有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这就证得 (11.26) 式成立.

由假设, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{11.27}$$

因为对一切 $x\in D$, 总有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|,$$

故由 (11.27) 式得

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f. □

推论 11.2

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上不一致收敛于 f 的充分且必要条件是: 存在 $\{x_n\}\subset D$, 使得 $\{f_n(x_n)-f(x_n)\}$ 不收敛于 0.

定理 11.20 (一致收敛的柯西准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数 ε, 总存在某正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p, 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

推论 11.3

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

定理 11.21

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

定理 11.22 (A-D 判别法)

若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在定义域内满足下列两条件之一, 则其在定义域上一致收敛

(1) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且在定义域内一致有界;$\sum\limits_{i=1}^{n} b_n$ 一致收敛.(Abel 判别法)

(2) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且一致趋于 0;$\sum\limits_{i=1}^{n} b_n$ 一致有界.(Dirichlet 判别法)

定理 11.23

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在且相等.

证明 先证 $\{a_n\}$ 是收敛数列. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 一致收敛, 故有 N, 当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 和对一切 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, 有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{11.28}$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知 $\{a_n\}$ 是收敛数列.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 再证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

由于 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 及 a_n 收敛于 A, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N, 当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别取 $n = N + 1$, 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样, 当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x) - A| &\leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. □

定理 11.24 (连续性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续.

笔记 由这个定理可知, **若各项为连续函数的函数列在区间 I 上其极限函数不连续, 则此函数列在区间 I 上不一致收敛.**

证明 设 x_0 为 I 上任一点. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, 于是由定理 11.23知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 亦存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 上连续. □

推论 11.4

若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f, 则 f 在 I 上连续.

定理 11.25 (可积性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{11.29}$$

证明 设 f 为函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上的极限函数. 由定理 11.24,f 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 与 f 在 $[a, b]$ 上都可积.

因为在 $[a, b]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$, 故对任给正数 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再根据定积分的性质, 当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

这就证明了等式 (11.29). □

定理 11.26 (可微性)

设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 若 $x_0 \in [a, b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点,$\{f_n\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $\{f_n'\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x). \tag{11.30}$$

证明 设 $f_n(x_0) \to A$ $(n \to \infty)$,$f_n' \rightrightarrows g$ $(n \to \infty)$,$x \in [a, b]$. 我们要证明函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛, 且其极限函数的导数存在且等于 g.

由定理条件, 对任一 $x \in [a,b]$, 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt.$$

当 $n \to \infty$ 时, 右边第一项极限为 A, 第二项极限为 $\int_{x_0}^{x} g(t)dt$(定理 11.25), 所以左边极限存在, 记为 f, 则有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt,$$

其中 $f(x_0) = A$. 由 g 的连续性及微积分学基本定理推得

$$f' = g.$$

这就证明了等式 (11.30). □

定理 11.27 (连续性)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在 $[a,b]$ 上也连续.

笔记 这个定理指出: 在一致收敛条件下,(无限项) 求和运算与求极限运算可以交换顺序, 即

$$\sum \left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} \left(\sum u_n(x)\right).$$

定理 11.28 (逐项求积)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 11.29 (逐项求导)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数,$x_0 \in [a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点, 且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$\sum \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right).$$

例题 11.37 判断下列级数在指定区间一致收敛性:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}, [0,+\infty);$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}, [-a,a], a > 0;$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right), [-1,1];$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}, [0,+\infty);$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin\frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right), (0,+\infty);$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}, (0,+\infty);$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2, [0,+\infty).$

注 第 4 问可以通过裂项算出级数的和函数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}&=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\\&=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\right]\\&=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}=1-\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}.\end{aligned}$$

但 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 的一致收敛性不好判断 (这个方法比较复杂), 因此我们不采取这个方法.

证明

1. 显然 $\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 单调递减. 又

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\to 0,n\to\infty,$$

我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

2. 显然 $\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[-a,a]$ 都有 $\frac{n+x^2}{n^2}$ 单调递减. 又

$$\frac{n+x^2}{n^2}\leqslant\frac{n+a^2}{n^2}\to 0,n\to\infty,$$

我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$ 在 $[-a,a]$ 一致收敛.

3. 注意到

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)\right|=\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\frac{x^m}{m+1}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}=0,$$

我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛.

4. 一方面, 对 $x\in[1,+\infty),n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},\forall x\in[1,+\infty).$$

另外一方面, 对 $n\geqslant 2,x\in[0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})}&\leqslant\frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})}\\&\leqslant\frac{x^{2n}}{\underbrace{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}_{n}}\leqslant\frac{x^{2n}}{C_n^2x^{2n}}=\frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

即由 Weierstrass 判别法和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<\infty,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}<\infty,$$

我们知道原级数一致收敛.

5. 首先

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}},\forall x>0,n\in\mathbb{N}.$$

然后

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{\sqrt{x}(3-nx^2)}{2n(1+x^2n)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\bigg|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\operatorname{arc}\tan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{x}{1+nx^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}} < +\infty.$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

6. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{2n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}} \leqslant \sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{\sin^2 x}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

7. 因为

$$\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)' = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2},$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)^2 < \infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

□

例题 11.38 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是否一致收敛.

笔记 连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 一致收敛, 则在 $\overline{I}$ 也一致收敛, 这是因为有等式

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| = \sup_{x\in\overline{I}}|f_n(x)-f_m(x)|.$$

我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\frac{e^{inx}}{n}\right) = \Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} = \Im(-\ln(1-e^{ix})) = -\arg(1-e^{ix})\\ &= -\arg(1-\cos x - i\sin x) = -\operatorname{arc}\tan\frac{-\sin x}{1-\cos x} = \operatorname{arc}\tan\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\ &= \operatorname{arc}\tan\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\tan\tan\frac{x}{2} = \frac{\pi-x}{2},\end{aligned}$$

然后对 $\frac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi,\pi]$ 展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi).$$

这个级数结果应当记忆. 注意到上述和函数与 x 有关, 故原级数一定不一致收敛, 下面将证明严格化.

证明 对 $\frac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi,\pi]$ 展开为傅立叶级数, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 一致收敛, 则在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot 0)}{n}=0\neq\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

这就和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $x=0$ 应该连续矛盾! 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 不一致收敛. □

例题 11.39 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 令

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right], n=1,2,\cdots.$$

试证明对任给区间 $[a,b]$ 都有 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f'(x)$.

证明 由Cantor 定理及 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 可知 f' 内闭一致连续性, 于是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in[a,b]$,$t\in[0,\delta]$, 我们有

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant\varepsilon.$$

当 $n>\frac{1}{\delta}$, 我们对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f'(x)|&=n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}}f'(y)-f'(x)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant n\int_x^{x+\frac{1}{n}}|f'(y)-f'(x)|\mathrm{d}y=n\int_0^{\frac{1}{n}}|f'(x+t)-f'(x)|dt\\&\leqslant\varepsilon n\int_0^{\frac{1}{n}}1dt=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f'(x)$. □

例题 11.40 讨论下列函数在给定区间可微性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$, $(0,+\infty)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$, $(-\infty,+\infty)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$, $(-\infty,+\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$, $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

证明

1. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 显然收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n^2\pi x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2\pi e^{-n^2\pi x}.$$

对任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-n^2\pi e^{-n^2\pi x}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi e^{-n^2\pi a}<\infty,$$

即内闭一致收敛, 因此由定理 11.29可知 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 在 $(0,+\infty)$ 可微.

2. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\rightrightarrows 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$$

注意到

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\right|\leqslant 1,\left|\frac{1}{n+x^2}\right|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},$$

以及对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\frac{1}{n+x^2}$ 递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

4. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)$$

在任何 $[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 一致收敛.
显然存在 $c_{a,b}\in(0,1)$ 使得

$$|\tan x|\leqslant c_{a,b},\forall x\in[a,b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)\right|\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}c_{a,b}^{n-1}<\infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)$$

在 $[a,b]$ 一致收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 可微.

□

例题 11.41 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 的一致收敛性.

证明 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\left[\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right],n=2,3,\cdots.$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}&=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\\&=\begin{cases}\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.\end{aligned}$$

于是由级数和函数不连续知其在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 不一致收敛. □

例题 11.42 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 和 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性.

证明 首先注意到

$$\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]'=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\geqslant 0,$$

我们有

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n&=e^b\left[1-e^{n\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)-b}\right]=e^b\left[1-e^{n\left[\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-b}\right]\\&=e^b\left[1-e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}\right]=O\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty,\end{aligned}$$

(实际上我们可以写出具体的等价量 $e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\sim\frac{e^bb^2}{2n},n\to\infty$) 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right]<\infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 一致收敛. 注意到

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\right|=+\infty,$$

我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛. □

例题 11.43 对 $\alpha>0$, 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$(x^\alpha e^{-nx})'=(\alpha-nx)x^{\alpha-1}e^{-nx}=0\Rightarrow x=\frac{\alpha}{n}.$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx}\leqslant\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha>1$, 我们由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty$ 知原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

当 $\alpha\in[0,1)$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}=\begin{cases}\frac{x^\alpha}{e^x-1}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

如果原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 那么上述和函数在 $x=0$ 应该连续. 但是

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{e^x-1}\neq 0,$$

故原级数在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛. □

例题 11.44 求 α 的范围, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

笔记 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha=+\infty$$

时一定有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对 x 赋值往往能实现这一点.

证明 当 $\alpha>1$, 首先由

$$\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha\right]'=\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}\left[n+\frac{\alpha}{n}-(n+\alpha)x\right]=0\Rightarrow x=\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}\text{ 为函数列通项最大值点.}$$

知

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha&=\left(\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}\right)^\alpha=\left(\frac{n^3-n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^n\left(\frac{\alpha n-\alpha}{n^2+\alpha n}\right)^\alpha\\&\sim\frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha}\left(\frac{n^3-n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^n=\frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha}\left(1-\frac{(1+\alpha)n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^n\\&\sim\frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha}e^{-\frac{(1+\alpha)n^3}{n^3+\alpha n^2}}\sim\frac{e^{-(1+\alpha)}\alpha^\alpha}{n^\alpha},n\to\infty.\end{aligned}$$

故由 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

当 $\alpha\leqslant 0$, 原级数在 $x=1$ 时通项极限不等于 0, 故此时级数在 $x=1$ 时发散.

当 $0<\alpha\leqslant 1$, 当 $N\to+\infty$, 取 $x=n+\frac{\alpha}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha&\geqslant\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{N}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha=\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\\&\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(\frac{\alpha-\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\\&\sim Ne^{-\frac{(1+\alpha)(2N-1)}{N+\alpha}}\cdot\frac{\alpha^\alpha}{N^\alpha}\sim\frac{\alpha^\alpha e^{-2(1+\alpha)}}{N^{\alpha-1}}\to+\infty,\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛. □

例题 11.45 设 $f_1\in C[a,b],x_0\in[a,b]$. 考虑函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_{x_0}^{x}f_n(t)dt,n=1,2,\cdots.$$

讨论 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛性.

笔记 注意到

$$\begin{aligned}&|f_1(x)|\leqslant M\Rightarrow|f_2(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}M\mathrm{d}x=M|x-x_0|\\&\Rightarrow|f_3(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}M|x-x_0|\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}|x-x_0|^2\Rightarrow\cdots\cdots\end{aligned}$$

于是就有下述归纳.

注 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 因此我们放缩时在积分号外面再加了一个绝对值 (当然也可以分类讨论).

证明 设 $M\triangleq\sup_{x\in[a,b]}|f_1(x)|$, 我们归纳证明

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1}.\tag{11.31}$$

现在(11.31)对 $n=1$ 已经成立. 假设 n 时成立, 我们对 $x_0\in[a,b]$ 有

$$|f_{n+1}(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f_n(t)dt\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_n(t)|\,dt\right|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}|x-x_0|^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{M}{n!}|x-x_0|^n.$$

现在由数学归纳法知对一切 $n \in \mathbb{N}$ 都有(11.31)成立, 故

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1} \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\max\left\{|b-x_0|^{n-1}, |x_0-a|^{n-1}\right\},$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 0. □

11.5 级数证明

例题 11.46 设 $f \in \mathbb{R}[x]$ 是只有正实根的多项式, 求 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $x=0$ 幂级数展开和收敛域.

证明 设 $f(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n}$, 其中 $a \neq 0$, 并且

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, k_i \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \left[\ln f(x)\right]' = [\ln a + k_1\ln(x-x_1) + k_2\ln(x-x_2) + \cdots + k_n\ln(x-x_n)]' \\
&= \frac{k_1}{x-x_1} + \frac{k_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-x_n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x-x_j} \\
&= -\frac{k_j}{x_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{x}{x_j}} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_j}\right)^m \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x^m.
\end{aligned}$$

显然收敛半径就是 x_1, 注意到

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x_1^m = \frac{k_1}{x_1} \neq 0,$$

故收敛域为 $(-x_1, x_1)$. □

例题 11.47 设 $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}, a_n > 0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证明 显然 $e^{b_n} = e^{a_n} - a_n \geqslant 1$, 故 $b_n \geqslant 0$, 并且由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $a_n \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
b_n &= \ln\left(e^{a_n} - a_n\right) = \ln e^{a_n} + \ln\left(1 - a_n e^{-a_n}\right) \\
&= a_n + O\left(a_n e^{-a_n}\right), n \to \infty.
\end{aligned}$$

注意到 $O\left(a_n e^{-a_n}\right) \leqslant a_n$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}O\left(a_n e^{-a_n}\right)$ 也收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. □

例题 11.48 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = +\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} = 1.$$

证明 由条件可知对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n} \leqslant a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1},$$

故 $A \leqslant 1$. 注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \geqslant \frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} = 1 - \frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \\
&\geqslant 1 - \frac{a_1}{\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{2}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{2}} = 1 - \frac{2a_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i} \to 1, n \to \infty.
\end{aligned}$$

故 $A \geqslant 1$. 因此 $A = 1$. □

命题 11.8

设 a_n 递减到 0, 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

笔记 (11.32)式可由Abel 变换直接得到, 也可以采用下述证明一样的强行凑裂项的思路.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left[k a_k - (k+1) a_{k+1}\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1) a_{k+1} - k a_{k+1}\right] \\ &= a_1 - (n+1) a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) a_{n+1}.\end{aligned} \tag{11.32}$$

充分性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由命题 11.2可知 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. 再由(11.32)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

必要性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ 收敛, 则由 $\{a_n\}$ 的单调性知, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 当 $n \geqslant m$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k + (n-m) a_n.$$

又由(11.32)式和 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ 收敛知, 存在 $A > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_n \leqslant A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故

$$A \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_n \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k + (n-m) a_n - n a_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - m a_n.$$

令 $n \to +\infty$ 得 $\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant A$. 再由 m 的任意性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 此时由命题 11.2可知 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, 再由(11.32)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

例题 11.49 设 a_n 递减到 0, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx$$

发散, 这里 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 可知 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故 $f(x)$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$. 显然 $f > 0, x > 0$, 且 f 在 $(0, +\infty)$ 上递增. 待定 $\{b_n\}$ 满足:$b_n \nearrow +\infty$. 从而

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} \mathrm{d}x \geqslant \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(b_n)}{x^2} \mathrm{d}x = \ln f(b_n)\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

$$\geqslant \ln\left(a_n^n b_n^n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=n\ln\left(a_n b_n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right).$$

取 $b_n=\dfrac{C}{a_n}, C>\max\{1,a_1\}$, 则

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant n\ln\left(a_n b_n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{\ln C}{C}n\left(a_n-a_{n+1}\right).$$

由命题 11.8可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 发散. 故

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\ln C}{C}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)=+\infty.$$

□

例题 11.50 证明:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p,\forall p\in(1,+\infty).$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant p,\forall p\in(0,1).$$

笔记 注意强行凑裂项和熟悉Bernoulli 不等式.

证明

1.
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right) \tag{11.33}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=1-\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant\frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}.$$

下证 $\sqrt[p]{1-\dfrac{1}{n+1}}\leqslant 1-\dfrac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x)\triangleq\sqrt[p]{1-x}-\dfrac{x}{p}$, 则

$$f\prime(x)=-\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right]<0.$$

故

$$f(x)\leqslant f(0)=1\Longleftrightarrow\sqrt[p]{1-x}\leqslant 1-\frac{x}{p}.$$

令 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1-\dfrac{1}{n+1}}\leqslant 1-\dfrac{1}{p(n+1)}$, 从而(11.33)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p.$$

2.
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right) \tag{11.34}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=1-\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}.$$

下证 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x)\triangleq\sqrt[p]{1-x}-\frac{x}{p}$, 则

$$f\prime(x)=-\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right]>0.$$

故

$$f(x)\geqslant f(0)=1\Longleftrightarrow\sqrt[p]{1-x}\geqslant 1-\frac{x}{p}.$$

令 $x=\frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$, 从而(11.34)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p.$$

□

例题 11.51 对 $t\in\mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n^n}=\int_0^1\frac{1}{x^{tx}}dx.$$

证明

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{1}{x^{tx}}\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{-tx\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tx\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-tx\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x=e^{-y}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}e^{-y}y^n\mathrm{d}y\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^n}.
\end{aligned}$$

□

命题 11.9

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $a_n=o(A_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $A_n=o(a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 发散.

笔记 这个命题说明: **没有收敛最慢的级数, 也没有发散最慢的级数.**

证明

1. 令

$$A_n\triangleq\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}a_k}-\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}<+\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k}+\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k}\right)}{a_n}=0.$$

故 $a_n = o(A_n), n \to \infty$.

2. 令

$$A_1 = 1, \quad A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k},\ n = 2, 3, \cdots.$$

则

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{a_1}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}\right)} = 0.$$

故 $A_n = o(a_n), n \to \infty$.

□

例题 11.52 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n} < \infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} < \infty.$$

注 本题的想法就是把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}$ 放大为阶更小的量, 从而其收敛.

证明 记 $S_0 = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, 则对 $N \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} &= \sum_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{S_n^2} = \sum_{n=2}^{N}\frac{n^2(S_n - S_{n-1})}{S_n^2} \\
&= \sum_{n=2}^{N} n^2\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^2}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{N} n^2\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N} n^2\left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N}\left[\frac{n^2}{S_{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{S_n}\right] + \sum_{n=2}^{N}\frac{(n+1)^2 - n^2}{S_n} \\
&= \frac{4}{S_1} - \frac{(N+1)^2}{S_N} + \sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{S_n} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + 3\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n} = \frac{4}{S_1} + 3\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n\sqrt{p_n}}{S_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_n}}\right) \\
&\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leqslant} \frac{4}{S_1} + 3\sqrt{\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{S_n^2}\cdot\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{p_n}} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + C\sqrt{\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{S_n^2}}.
\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \leqslant \frac{4}{S_1}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{n^2 p_n}{S_n^2}}} + C.$$

若 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2p_n}{S_n^2}$ 发散, 则对上式令 $N\to+\infty$ 得 $+\infty\leqslant C$ 矛盾! 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2p_n}{S_n^2}<+\infty$. □

例题 11.53

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0.$$
证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2. 设 $\alpha\in(0,1),\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且满足
$$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$
证明: $\lim_{n\to\infty}n^ka_n=0$.

注 由 $\lim_{k\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}=0,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛可知 $\sum_{k=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 收敛, 故 $\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{k^2}\right)=O(1),\forall n\in\mathbb{N}$.

证明

1. 由条件可知, 存在 $c>0,N\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N$ 有
$$b_n\leqslant\frac{c}{2}n,\quad b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>c>0.$$
不妨设 $N=1$, 则
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{c}{b_n}\Longrightarrow a_1>a_{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{b_k}\right).$$
于是
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<a_1\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{c}{b_k}}=a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{b_k}\right)}\\&\leqslant a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}=a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{k}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]}\\&=a_1e^{-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1)}=a_1e^{-2[\ln n+O(1)]+O(1)}\\&=a_1e^{-2\ln n+O(1)}\sim\frac{C}{n^2},n\to\infty.\end{aligned}$$
故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2. 由条件可知, 当 n 充分大时, 有
$$n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}>1.$$
从而不妨设 $\{a_n\}$ 递减. 再根据条件可知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{\lambda}{2},\forall n\geqslant N.$$
故
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\lambda}{2n^{\alpha}},\forall n\geqslant N.$$
于是对 $\forall n\geqslant N$, 有
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<a_N\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}}=a_Ne^{-\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}\right)}\\&=a_Ne^{-\sum_{k=N}^{n}\left[\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right]}\xlongequal{\text{命题 3.12}}a_Ne^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}+O(n^{1-\alpha})+O(n^{1-2\alpha})\right]}\end{aligned}$$

$$= a_N e^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}+O(n^{1-\alpha})\right]} \leqslant a_N e^{-Cn^{1-\alpha}}, n \to \infty.$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Cn^{1-\alpha}} < +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

□

命题 11.10

证明:

1. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 且 $\sum b_n$ 部分和有界.
2. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调有界且 $\sum b_n$ 部分和收敛.

笔记 这个命题说明:A-D 判别法是级数收敛的“充要条件”. 积分版本见命题 7.2.

证明 充分性就是由级数收敛的 A-D 判别法. 下证必要性.

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 存在 $n_i \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left|\sum_{n=k}^{k+p} u_n\right| \leqslant \frac{1}{i^3}, \forall k \geqslant n_i, p \in \mathbb{N}.$$

定义

$$a_0 = 1, \quad a_n \triangleq \begin{cases} 1, 1 \leqslant n \leqslant n_1 \\ \frac{1}{i}, n_i < n \leqslant n_{i+1} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots. \quad b_n = \frac{u_n}{a_n}.$$

显然 $a_n \searrow 0$. 当 $1 \leqslant n \leqslant n_1$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n_1} |u_k|.$$

当 $n > n_1$ 时, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, 于是

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} i u_j + k \sum_{j=n_k+1}^{n} u_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} i \left|\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} u_j\right| + k \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} u_j\right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i^3} + \frac{k}{k^3} \leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \frac{\pi^2}{6}.$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由第 1 问可知, 存在 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$ 使得 $u_n = \alpha_n \beta_n$, 并且 $\{\alpha_n\}$ 单调递减趋于 0,$\sum \beta_n$ 部分和有界. 令

$$a_n \triangleq \sqrt{\alpha_n}, \quad b_n \triangleq \beta_n \sqrt{\alpha_n} = \beta_n a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

显然 $a_n \searrow 0$, 进而 $\{a_n\}$ 单调有界. 又 $\sum \beta_n$ 部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知,$\sum b_n$ 部分和收敛.

□

例题 11.54 设实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 条件收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t \neq s$ 是一个重排. 证明: 对任何 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|n - f(n)| > N$.

证明 若 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|n - f(n)| \leqslant N$, 那么对 $\forall m > N$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \text{中一定不包含} a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{f(1)}, a_{f(2)}, \cdots, a_{f(m-N)}.$$

$$\text{并且} \sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \text{至多含有} m + N + m - (2m - N) = 2N\text{项}.$$

故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n|\leqslant\varepsilon$. 于是对 $\forall m>N_1$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+N}a_{f(k)}-\sum_{k=1}^{m}a_k\right|\leqslant 2N\varepsilon.$$

令 $m\to+\infty$ 得 $|s-t|\leqslant 2N\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $s=t$, 矛盾! □

例题 11.55

1. 设 f 满足: 对任何绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 绝对收敛, 证明 $f(x)=O(x),x\to0$.
2. 设 f 满足: 对任何收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 收敛, 证明存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

证明

1. 反证, 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 邻域内无界, 则 $\exists x_n\to0$, 使得

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|>n,\ \ n=1,2,\cdots. \tag{11.35}$$

取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\left|x_{n_k}\right|<\frac{1}{k^2},k=1,2,\cdots.$$

从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}-\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}=\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}>1,$$

于是存在正整数 m_k, 使得

$$\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}<m_k<\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}. \tag{11.36}$$

令

$$a_n\triangleq x_{n_k},\quad m_{k-1}<n\leqslant m_k.$$

则由(11.36)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|x_{n_k}\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}<+\infty.$$

由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_n)|=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|<+\infty. \tag{11.37}$$

又由(11.35)(11.36)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_n)|&=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_kn_k\left|x_{n_k}\right|\\&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}km_k\left|x_{n_k}\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.\end{aligned}$$

这与(11.37)式矛盾!

2. 目标证明 f 在 $x=0$ 邻域满足 Cauchy 方程. 考虑 $g(x,y)=f(x+y)+f(-x)+f(-y)$. 如果对任何 0 的开邻域 U 都有 g 在 $U\times U$ 上不恒为 0, 那么存在 $(x_n,y_n)\to(0,0)$ 使得 $g(x_n,y_n)\neq0$.
考虑

$$\underbrace{(x_1+y_1)-x_1-y_1,(x_1+y_1)-x_1-y_1,\cdots,(x_1+y_1)-x_1-y_1}_{m_1}+$$
$$\underbrace{(x_2+y_2)-x_2-y_2,(x_2+y_2)-x_2-y_2,\cdots,(x_2+y_2)-x_2-y_2}_{m_2}+$$
$$\vdots$$

上述级数的部分和只可能出现 $x_n+y_n, y_n, 0$, 而当 $n\to+\infty$ 时它们都趋于 0, 因此上述级数收敛. 由题目条件, 我们有

$$\underbrace{(f(x_1)+f(y_1))+f(-x_1)+f(-y_1),\cdots,(f(x_1)+f(y_1))+f(-x_1)+f(-y_1)}_{m_1}+$$
$$\underbrace{(f(x_2)+f(y_2))+f(-x_2)+f(-y_2),\cdots,(f(x_2)+f(y_2))+f(-x_2)+f(-y_2)}_{m_2}+$$
$$\vdots$$

收敛. 由收敛级数加括号也收敛, 我们知道对任何一组 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m_ng(x_n,y_n)$ 收敛. 这显然不可能! 因此我们证明了 $f(x+y)+f(-x)+f(-y)$ 在某个 $U\times U$ 上恒为 0, 这里 U 是一个开区间. 现在由

$$f(0)+f(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

知

$$f(x-x)+f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f\text{是奇函数},$$

即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
再证明 f 在 $x=0$ 连续. 设 $x_n\to0$, 我们考虑收敛级数 $x_1-x_1+x_2-x_2+\cdots$, 故级数

$$f(x_1)-f(x_1)+f(x_2)-f(x_2)+\cdots$$

收敛. 考虑上述级数部分和可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$, 从而 f 在 $x=0$ 连续. 现在由定理 6.8知存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

□

例题 11.56 给定 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-1,1).$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=+\infty(-\infty),$$

证明

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty(-\infty),$$

并指出

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right|=+\infty\not\Rightarrow\lim_{x\to1^-}|f(x)|=+\infty.$$

笔记 熟记命题 11.6.

证明 记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, 不妨设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

于是对任意 $C>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n>N$, 成立 $S_n\geq C$. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{f(x)}{1-x}\xlongequal{\text{命题 11.6}}\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n\right]\\&=\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}S_nx^n\right]\\&\geqslant\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+C\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\right]\\&=C\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{x^{N+1}}{1-x}=C,\end{aligned}$$

由 C 任意性, 我们证明了

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty.$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f(x)=\frac{x-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n+1)x^n.$$

□

命题 11.11

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是两两不同的实数,$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为复数. 证明:
$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_jx}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,n.$$
2. 设 $m\geq2,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R},C_1,C_2,\cdots,C_m\in\mathbb{C}$. 若
$$\lambda_j-\lambda_k\neq2\ell\pi,\forall1\leq j<k\leq m,\ell\in\mathbb{Z},$$
证明:
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,m.$$

笔记 想法即类比傅立叶系数, 做积分使得系数暴露出来. 离散版本可以类似连续版本证明, 连续的处理方式核心是乘上某个 $e^{-i\lambda x}$ 均值形式的积分取极限, 从而离散的时候应该是乘上某个 $e^{-i\lambda y}$ 均值的取和.

证明

1. 充分性显然, 只需证明必要性. 考虑 $f(x)\triangleq\sum\limits_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}$, 其中 i 是虚数单位. 对 $T>0,k=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=1}^{n}C_j\int_T^{2T}e^{i(\lambda_j-\lambda_k)x}\,\mathrm{d}x=TC_k+\sum_{j\neq k}C_j\frac{e^{i(\lambda_j-\lambda_k)2T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|C_k|&=\frac{\left|\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x-\sum\limits_{j\neq k}C_j\frac{e^{i(\lambda_j-\lambda_k)2T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k}\right|}{T}\\&\leq\frac{\int_T^{2T}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T}=\frac{|f(\theta_T)|T+\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T},\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自积分中值定理且 $\theta_T \in (T, 2T)$. 现在由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 可知

$$\lim_{T\to+\infty} C_k = 0, k = 1, 2, \cdots, n,$$

这就证明了 $C_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 必要性得证.

2. 充分性显然, 只需证明必要性. 对 $k = 1, 2, \cdots, m$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_k + \sum_{j\neq k} C_j e^{in(\lambda_j-\lambda_k)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-in\lambda_k}\sum_{j=1}^{m} C_j e^{in\lambda_j}\right) = 0.$$

现在由 Stolz 定理我们有

$$C_k = -\lim_{n\to\infty}\sum_{j\neq k} C_j e^{in(\lambda_j-\lambda_k)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{n}\sum\limits_{j\neq k} C_j e^{i\ell(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1}$$
$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}\sum\limits_{\ell=0}^{n} C_j e^{i\ell(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}}{n+1}.$$

结合

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sum\limits_{j\neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}\right|}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k} |C_j| \frac{2}{|1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}|}}{n+1} = 0,$$

我们知道 $C_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 这就证明了必要性!

□

例题 11.57 设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{m}\sin(n\alpha_i) = 0.$$

证明: 必有一个 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得 $\frac{\alpha_i}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

笔记 本题是命题**??**的一个应用.

证明 由 Euler 公式得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}}{2i} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}(e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0.$$

打开括号得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|}e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)} = 0. \tag{11.38}$$

注意到若有

$$\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \cdots + \varepsilon_m\alpha_m = \varepsilon_1{\prime}\alpha_1 + \varepsilon_2{\prime}\alpha_2 + \cdots + \varepsilon_m{\prime}\alpha_m + 2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}, \tag{11.39}$$

则

$$e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)} = e^{in(\varepsilon_1{\prime}\alpha_1+\varepsilon_2{\prime}\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m{\prime}\alpha_m)}.$$

因此将(**??**)式中满足(**??**)式的项合并, 得到新的和式的任意两项中的 $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \cdots + \varepsilon_m\alpha_m$ 的差值都不等于 $2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$. 于是由命题**??**知

$$\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|}e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)}$$

恒为 0. 否则, 上式每项系数 $(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|} = 0$ 矛盾! 故现在就有 $\prod\limits_{j=1}^{m}(e^{in\alpha_j} - e^{-in\alpha_j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 取 $n = 1$, 则必存在一个 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得

$$e^{i\alpha_j} - e^{-i\alpha_j} = 0 \Longrightarrow e^{2i\alpha_j} = 0 \Longrightarrow 2\alpha_j = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \frac{\alpha_j}{\pi} = k \in \mathbb{Z}.$$

□

11.6 特殊级数

命题 11.12 ($\frac{\sin x}{x}$ 因式分解)

对任意 x 都有 $\dfrac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$, 这里 x 可以为复数.

证明

□

命题 11.13

1. $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x+n\pi}+\dfrac{1}{x-n\pi}\right)$.
2. $\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}-x}-\dfrac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}+x}\right)$.
3. $\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(x+n\pi)^2}+\dfrac{1}{(x-n\pi)^2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(x+n\pi)^2}$.
4. $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{x+n\pi}+\dfrac{1}{x-n\pi}\right)$.

证明

1. 对命题 11.11中级数两边同时取对数得

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

两边同时求导得

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{2x}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right).$$

故

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right).$$

2. 由第 1 问及 $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$ 可得

$$\begin{aligned}\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x+n\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x-n\pi}\right)\\&=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}-x}-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}+x}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}-x}-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}+x}\right).\end{aligned}$$

3.
4.

□

第十二章 Fourier 级数

12.1 Fourier 级数及基本性质

我们首先需要熟悉傅立叶级数的现代形式:

定义 12.1

设 f 是周期 1 的的可积函数, 则定义 f 的傅立叶系数为

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}dx, m \in \mathbb{Z}.$$

f 的傅立叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)e^{2\pi imx}.$$

♣

注 定义 12.1中的傅立叶级数(??)不意味着收敛到 f 或者收敛.

定义 12.2

对每个 $N \in \mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_N(x) = \sum_{|m|\leqslant N} e^{2\pi imx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N+1}[D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_N(x)] \\ &= \sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx} \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \end{aligned}$$

为 **Fejr 核**.

♣

注 定义 12.2中的等式关系都是等比数列求和和欧拉公式, 二重求和换序的应用. 我们略去证明

下面我们在高数框架下给出 Dirichlet 核和 Fejér 核, 为了形式上的统一, 我们定义

定义 12.3

对每个 $n \in \mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_0(x) = 1, D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, n = 1, 2, \cdots. \tag{12.1}$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(x) = 1 + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx = \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 \tag{12.2}$$

为 **Fejr 核**.

♣

证明 证明的关键是如下结论

结论 [三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法] 三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法可以通过欧拉公式之后用等比数列求和公式或者乘 $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ 之后对分子和差化积得到.

1. 我们有

$$\begin{aligned}1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx &= 1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2}\cos kx}{2\sin\frac{x}{2}} = 1+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\ &= 1+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

我们证明了式(12.1)式.

2. 我们有

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x) = \frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(1+2\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right)\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right) = \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\cos kx\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx\right) = 1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{j=0}^{n}\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x = -\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{j=0}^{n}[\cos(j+1)x-\cos jx]\\ &= -\frac{\cos(n+1)x-1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

这就证明了(12.2)式.

□

定理 12.1 (傅立叶部分和积分表达式)

设 f 是周期 2π 的可积函数, 其傅立叶系数为 a_n, b_n. 记 $S_0(x)=\sigma_0(x)=\dfrac{a_0}{2}$ 以及

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x),n=1,2,\cdots.$$

则我们有

Dirichlet :

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

Fejr :

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(t)dt=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

笔记 根据经验, 取平均性质会更好一些, 因此 Fejér 是一个好核而 Dirichlet 核性质就相当糟糕, 在后面的证明中我们将充分感受到这一点.

证明 当 $n=0$, 这个定理显然成立. 当 $n>0$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\cos kx\mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\sin kx\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos k(y-x)\mathrm{d}y\right)\\
&\xlongequal{\text{注意周期}2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)2\cos ky\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)D_n(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}S_j(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)D_j(y)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)F_n(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这就证明了这个定理. □

定理 12.2 (Fourier 级数的逐项积分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意 $c,x\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt.$$

定理 12.3 (Fourier 级数的逐项微分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$f(-\pi)=f(\pi)$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导. 进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 (注意:$f'(x)$ 在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x)\sim\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_nn\sin nx+b_nn\cos nx).$$

推论 12.1

$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛.

定理 12.4 (Bessel 不等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

定理 12.5 (Parseval 恒等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足恒等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

引理 12.1

设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$. a_n,b_n 为 f 的 Fourier 系数,a_n',b_n' 为 f 的导函数 f' 的 Fourier 系数, 证明

$$a_0'=0,a_n'=nb_n,b_n'=-na_n'(n=1,2,\cdots).$$

注 分部积分的条件, 需要 f 的导函数 f' 在积分区域上连续.

证明 由于 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 因此 $f'\in C([-\pi,\pi])$. 又 $f(\pi)=f(-\pi)$, 故

$$\begin{aligned}
a_0'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\\
a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=nb_n(n=1,2,\cdots),\\
b_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-na_n(n=1,2,\cdots),
\end{aligned}$$

因此结论得证. □

例题 12.1 设 f 以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数, 证明 f 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

证明 因为 $f(x)$ 是以 2π 为周期的具有二阶连续导数的函数, 故 $f(x),f'(x)$ 可展开成傅里叶级数, 不妨设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx).$$

先证 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛. 由引理 12.1可知

$$a_0'=0,a_n'=nb_n,b_n'=-nb_n(n=1,2,\cdots),$$

从而

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|b_n'|}{n}+\frac{|a_n'|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left[(b_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right].\tag{12.3}$$

又由Bessel 不等式可知

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]$ 收敛. 再结合 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛及(12.3)式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 进而 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛. 注意到

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|\leqslant\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|),\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

因此由 Weierstrass 判别法可知,$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 即 f 的 Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 f. $\square$

第十三章 常用不等式和等式

13.1 基本初等不等式

命题 13.1 (关于 ln 的常用不等式)

(1) $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2) $\ln x < \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x > 0.$

(3)

证明

(1) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x \geqslant 0$, 则

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - x - 2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+x-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x > 0.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减, 又 $f \in C[0,+\infty)$, 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上也严格单调递减. 从而

$$f(x) \leqslant f(0) = 0, \forall x > 0.$$

即 $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0.$

(2)

(3)

□

13.2 重要不等式

定理 13.1 (Cauchy 不等式)

对任何 $n \in \mathbb{N}, (a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2. \tag{13.1}$$

且等号成立条件为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关.

证明 (i) 当 b_i 全为零时,(13.1)式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 注意到 $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + t b_i)\right)^2 \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$. 等价于

$$t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leqslant 0.$

从而 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$. 下证(13.1)式等号成立的充要条件.

若(13.1)式等号成立, 则

(i) 当 b_i 全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时 $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 此时我们有 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$. 根据一元二次方程根的存在性定理, 可知存在 $t_0\in\mathbb{R}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2t_0\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0.$$

于是 $a_i+t_0b_i=0,i=1,2,\cdots,n$. 即 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

反之, 若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lambda a_i+\mu b_i=0,i=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $\lambda\neq0$, 则 $a_i=-\frac{\mu}{\lambda}b_i,i=1,2,\cdots,n$. 从而当 $t=\frac{\mu}{\lambda}$ 时, $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=0$.

即一元二次方程 $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2t_0\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0$ 有实根 $\frac{\mu}{\lambda}$.

因此 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$. 即(13.1)式等号成立. □

例题 13.1 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$$

证明 对 $\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 由Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2=n^2.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$ □

例题 13.2 求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 在定义域内的最大值和最小值.

笔记 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后我们通过简单的放缩就能得到 $y(0)$ 就是最小值. 再利用Cauchy 不等式我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设 $A,B,C>0$, 则由 *Cauchy* 不等式可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax+27A}+\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{13B-Bx}+\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{Cx}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)[(A+C-B)x+27A+13B]$$

并且当且仅当 $\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}$ 时, 等号成立.

令 $A+C-B=0$(因为要求解 y 的最大值, 我们需要将 y 放大成一个不含 x 的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases}\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}\\ A+C-B=0\end{cases}$$

解得:$A=1,B=3,C=2,x=9$.

从而得到我们需要构造的 *Cauchy* 不等式为

$$\left(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)(x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立.

解 由题可知, 函数 y 的定义域就是:$0\leqslant x\leqslant 13$. 而

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x+27}+\sqrt{[\sqrt{13-x}+\sqrt{x}]^2} \\ &= \sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}} \\ &\geqslant \sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}=y(0) \end{aligned}$$

于是 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$. 由 *Cauchy* 不等式可得

$$\begin{aligned} y^2(x) &= (\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2 \\ &= (\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x})^2 \\ &\leqslant (1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x) \\ &= 121 = y^2(9) \end{aligned}$$

即 $y(x)\leqslant y(9)=11$. 并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立. 故 y 的最大值为 11.
□

定理 13.2 (均值不等式)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} &, r\neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, & r=0\end{cases}. \tag{13.2}$$

其中若 $r_1\neq r_2$, 则 $f(r_1)=f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

笔记 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

定理 13.3 (均值不等式常用形式)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

例题 13.3 设 $f(x)=4x(x-1)^2, x\in(0,1)$, 求 f 的最大值.

解 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2\cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2\cdot\left[\sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)}\right]^3 \\ &\leqslant 2\cdot\left[\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right]^3 \\ &= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当 $2x=1-x$, 即 $x=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立. □

定理 13.4 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq -1$ 且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明 当 $n=1$ 时, 我们有 $1+x_1 \geq 1+x_1$, 结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时, 结论成立. 则当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\
&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}
\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立. □

定理 13.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)

设 $x \geq -1, n \geq 0$, 则

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

定理 13.6 (Jesen 不等式)

设 $\lambda_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 则对下凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

定理 13.7 (Young 不等式)

对任何 $a, b \geq 0, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, p>1$ 有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.

笔记 若 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则我们称 p 与 q **共轭**.

注 这个 Young 不等式不等式和加权均值不等式等价.

证明 (i) 当 a, b 至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a, b 均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned}
&ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \\
\Leftrightarrow\ &\ln a + \ln b \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)
\end{aligned}$$

由Jesen 不等式和 $f(x)=\ln x$ 函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由Jesen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立. □

定理 13.8 (Hold 不等式)

设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, p>1, a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0, b_1,b_2,\cdots,b_n\geq 0$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}\cdot\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}.$$

证明 (i) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零时, 令

$$a_k'=\frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}}, b_k'=\frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}}, k=1,2,\cdots,n.$$

从而只需证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k'b_k'\leqslant 1$. 由Young 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k'b_k'\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(a_k')^p}{p}+\frac{(b_k')^q}{q}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}+\frac{b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}\right)$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

故原结论成立. □

定理 13.9 (排序和不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n, b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\leq\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\leq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j, 1\leq i<j\leq n$ 或者 $b_i=b_j, 1\leq i<j\leq n$.

笔记 简单记为倒序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 同序和.

定理 13.10 (Chebeshev 不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n, b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i\leq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j, 1\leq i<j\leq n$ 或者 $b_i=b_j, 1\leq i<j\leq n$.

13.3 基本组合学公式

定义 13.1

对 $\forall m \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 定义

$$\mathrm{C}_m^k = \binom{m}{k} \triangleq \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

特别地,$\mathrm{C}_m^0 \triangleq 1$. 若 $m, k \in \mathbb{N}$, 则还有

$$\mathrm{C}_m^k = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

♣

定理 13.11 (二项式定理的推广)

$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n) = \sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}} \left(\prod_{i\in I} a_i \prod_{j\in\{1,2,\cdots,n\}-I} b_j\right).$$

♡

证明 用数学归纳法证明即可. □

13.4 三角函数相关

13.4.1 三角函数

命题 13.2 (三角平方差公式)

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y) = \cos(y-x)\cos(y+x) = \cos^2 y - \cos^2 x$.

♠

证明 首先, 我们有

$$\cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - \left(1 - \sin^2 y\right) = \sin^2 y - \sin^2 x.$$

接着, 我们有

$$\begin{aligned}
\sin(x-y)\sin(x+y) &= (\sin x\cos y - \cos x\sin y)(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\\
&= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y\\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y\\
&= \sin^2 x - \sin^2 y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(y-x)\cos(y+x) &= (\cos x\cos y + \sin x\sin y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y)\\
&= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y\\
&= \cos^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y)\\
&= \cos^2 x - \cos^2 y.
\end{aligned}$$

故结论得证. □

13.4.2 反三角函数

命题 13.3

(1) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

(2) $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

证明

1. 令 $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

故 $f(x)$ 为常函数, 于是就有 $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0\,; f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \forall x < 0$.

2.

□

13.4.3 双曲三角函数

命题 13.4

(1) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$,

(2) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geqslant x$.

证明 可以分别利用均值不等式和求导进行证明. □

命题 13.5

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 - 2\sinh^2 x$.
3. $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

证明

□

第十四章 积分

14.1 积分常用结论

定理 14.1 (基本结论)

$$\sum_{n=1}^{m}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\sum_{n=1}^{m}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a_0}^{a_m}f(x)\,\mathrm{d}x,\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n-1}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a_m}^{a_0}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由定积分的性质易证. □

命题 14.1

若 $f\in R[a,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在且 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f(x)|=0$, 则 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在.

笔记 若已知 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在. 但是反过来, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 只是 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的一个子列极限, 故 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 不一定存在. 还需要额外的条件才能使得 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

证明 对 $\forall x\geqslant a$, 一定存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant x<n+1$. 从而可得

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^n f(x)\mathrm{d}x+\int_n^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{14.1}$$

并且

$$\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_n^x|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{y\geqslant n}|f(y)|\,. \tag{14.2}$$

对(14.2)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\geqslant n}|f(y)|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}|f(x)|\,.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}|f(x)|=0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=0$. 于是再对(14.1)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 从而可得

$$\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x+\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也存在. □

定理 14.2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积 (即绝对可积), 且成立

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

14.2 积分性态分析

例题 14.1 已知 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $F_1(a)=F_1(b)=0$. 再设 $F_2(x)=\int_a^x F_1(t)dt=\int_a^x\left[\int_a^t f(s)ds\right]dt$, 则 $F_2(a)=0$,$F_2'(x)=F_1(x)$,$F_2''(x)=F_1'(x)=f(x)$. 由条件可知

$$0=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xF_1'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xdF_1(x)=xF_1(x)\Big|_a^b-\int_a^b F_1(x)\mathrm{d}x=-F_2(b).$$

于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F_2'(\xi)=F_1(\xi)=0$. 从而再由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta_1\in(a,\xi)$,$\eta_2\in(\xi,b)$, 使得 $F_1'(\eta_1)=F_1'(\eta_2)=0$. 即 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$. □

例题 14.2 已知 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,k=0,1,2,\cdots,n.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 n+1 个零点.

笔记 利用分部积分转换导数的技巧.

证明 令 $F(x)=\int_a^x\int_a^{x_n}\cdots\int_a^{x_3}\left[\int_a^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 则 $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n)}(a)=0$,$F^{(n+1)}(x)=f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $k\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&0=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=F^{(n)}(x)\Big|_a^b=F^{(n)}(b),\\
&0=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xF^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xdF^{(n)}(x)=xF^{(n)}(x)\Big|_a^b-\int_a^b F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=-F^{(n-1)}(b),\\
&\cdots\cdots\\
&0=\int_a^b x^nf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^nF^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^ndF^{(n)}(x)=x^nF^{(n)}(x)\Big|_a^b-n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=-n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=(-1)^n n!\int_a^b F\prime(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n n!F(b).
\end{aligned}$$

从而 $F(b)=F'(b)=\cdots=F^{(n)}(b)=0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi_1^1)=0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知存在 $\xi_1^2,\xi_2^2\in(a,b)$, 使得 $F''(\xi_1^2)=F''(\xi_2^2)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1},\xi_2^{n+1},\cdots,\xi_{n+1}^{n+1}\in(a,b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1})=F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1})=\cdots=F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1})=0$. 即 $f(\xi_1^{n+1})=f(\xi_2^{n+1})=\cdots=f(\xi_{n+1}^{n+1})=0$. □

例题 14.3 已知 $f(x)\in D^2[0,1]$, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6},\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=16$.

笔记 构造 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x)=f(x)-p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^kg(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^k[f(x)-p(x)]\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^kp(x)\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2.$$

待定 $p(x)=ax^2+bx+c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\frac{1}{6}=\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c,$$

$$0=\int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^3+bx^2+cx\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2},$$
$$\frac{1}{60}=\int_0^1 x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(ax^4+bx^3+cx^2\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}.$$

解得:$a=8,b=-9,c=2$. 于是就得到 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$.

证明 令 $g(x)=f(x)-(8x^2-9x+2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2.$$

再令 $G(x)=\int_0^x\left[\int_0^t\left(\int_0^s g(y)\mathrm{d}y\right)ds\right]dt$, 则 $G(0)=G'(0)=G''(0)=0,G'''(x)=g(x)$. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&0=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 G'''(x)\mathrm{d}x=G''(1),\\
&0=\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xG'''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xdG''(x)=xG''(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G''(x)\mathrm{d}x=-G'(1),\\
&0=\int_0^1 x^2g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2G'''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2dG''(x)=x^2G''(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 xG''(x)\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^1 xdG'(x)=2\int_0^1 G'(x)\mathrm{d}x-2xG'(x)\Big|_0^1=2G(1).
\end{aligned}$$

从而 $G(1)=G'(1)=G''(1)=0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1\in(0,1)$, 使得 $G'(\xi_1^1)=0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2,\xi_2^2\in(0,1)$, 使得 $G''(\xi_1^2)=G''(\xi_2^2)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3,\xi_2^3,\xi_3^3\in(0,1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3)=G'''(\xi_2^3)=G'''(\xi_3^3)=0$. 即 $g(\xi_1^3)=g(\xi_2^3)=g(\xi_3^3)=0$. 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g''(\xi)=0$. 即 $f''(\xi)=16$. □

第十五章 小技巧

15.1 长除法

例题 15.1 利用多项式除法计算 Taylor 级数和 Laurent 级数

已知 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots, \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$.

1. 求 $\tan x$.　　2. 求 $\frac{1}{\sin^2 x}$.

笔记 实际问题中需要多展开几项,展开得越多,得到的结果也越多.

解 1. 根据多项式除法可得

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \quad - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \quad - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
 & \qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0 + \cdots
\end{array}
$$

因此 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$.

2. 根据多项式乘法可得

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

再根据多项式除法可得

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots \\ \cline{2-2}
x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots & 1 \\
 & 1 - \frac{1}{3}x^2 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad \frac{1}{3}x^2 + \cdots \\
 & \qquad \frac{1}{3}x^2 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0 + \cdots
\end{array}
$$

因此 $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots$.　　□

15.2 将多项式分式分解为其部分因式的和

例题 15.2

1. 分解 $a>0,\dfrac{1}{(1+x^2)(1+ax)}$.
2. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x)^2}$.
3. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)^2(1+x)}$.
4. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)^2(1+x)^2}$.

解

1. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+ax}. \tag{15.1}$$

其中 A,B,C 均为常数.

解法一 (待定系数法):

将(15.1)式右边通分得到

$$\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+ax}=\frac{(Ax+B)(1+ax)+C\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{(Aa+C)x^2+(A+Ba)x+B+C}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases}Aa+C=0\\A+Ba=0\\B+C=1\end{cases}$$

解得:$A=-\dfrac{a}{1+a^2},B=\dfrac{1}{1+a^2},C=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{-\frac{a}{1+a^2}x+\frac{1}{1+a^2}}{1+x^2}+\frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法二 (留数法):

(15.1)式两边同时乘 $1+ax$, 得到 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+ax)+C$. 再令 $x\to-\dfrac{1}{a}$, 得 $C=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a^2}}=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

(15.1)式两边同时乘 $1+x^2$, 得到 $\dfrac{1}{1+ax}=Ax+B+\dfrac{C}{1+ax}\cdot\left(1+x^2\right)$. 再分别令 $x\to\pm i$, 可得

$$\begin{cases}A\mathrm{i}+B=\dfrac{1}{1+a\mathrm{i}}\\-A\mathrm{i}+B=\dfrac{1}{1-a\mathrm{i}}\end{cases}$$

解得:$A=-\dfrac{a}{1+a^2},B=\dfrac{1}{1+a^2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{-\frac{a}{1+a^2}x+\frac{1}{1+a^2}}{1+x^2}+\frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法三 (留数法 + 待定系数法):

(15.1)式两边同时乘 $1+ax$, 得到 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+ax)+C$. 再令 $x\to-\dfrac{1}{a}$, 得 $C=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a^2}}=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

容易直接观察出(15.1)式右边通分后分子的最高次项系数为 $Aa+C$, 常数项为 $B+C$. 并将其与(15.1)式左边的分子对比, 可以得到

$$\begin{cases}Aa+C=0\\B+C=1\end{cases}$$

解得:$A=-\dfrac{a}{1+a^2},B=\dfrac{1}{1+a^2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{-\frac{a}{1+a^2}x+\frac{1}{1+a^2}}{1+x^2}+\frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

2. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+x}+\frac{D}{(1+x)^2}. \tag{15.2}$$

其中 A,B,C,D 均为常数.

(15.2)式两边同时乘 $(1+x)^2$, 得到

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+x)^2+C(1+x)+D. \tag{15.3}$$

再令 $x\to-1$, 可得 $D=\frac{1}{2}$. 对(15.3)式两边同时求导得到

$$\left.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x\to-1}=\left.\left[\frac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+x)^2\right]'\right|_{x\to-1}+C=C.$$

从而 $C=\frac{1}{2}$. 令(15.2)中的 $x=0$, 得到 $1=B+C+D$, 将 $C=D=\frac{1}{2}$ 代入解得:$B=0$. 再令(15.2)中的 $x=1$, 得到 $\frac{1}{8}=\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{D}{4}$, 将 $C=D=\frac{1}{2}$,$B=0$ 代入解得:$A=-\frac{1}{2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}=\frac{-x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2+2x}+\frac{1}{2(1+x)^2}.$$

3.

4.

□

例题 15.3 分解 $\frac{1}{1+x^4}$.

解 首先我们注意到

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{\left(1+x^2\right)-2x^2}=\frac{1}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}.$$

然后根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \tag{15.4}$$

其中 A,B,C,D 均为常数. 将上式右边通分可得

$$\frac{1}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} B+D=1 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0 \\ A+C=0 \end{cases}$$

解得:$A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,$B=\frac{1}{2}$,$C=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$D=\frac{1}{2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

□

例题 15.4 分解 $\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)}$.

解 先利用多项式除法用 x^4 除以 $(1+x)(1+x^2)$ 得到 $x^4=(x-1)(1+x)\left(1+x^2\right)+1$. 从而

$$\frac{x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=\frac{(x-1)(1+x)\left(1+x^2\right)+1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=x-1+\frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}.$$

然后再利用多项式分式的分解方法 (待定系数法和留数法) 将 $\frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}$ 分解为部分因式的和. 最后我们可将原式分解为

$$\frac{x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=x-1+\frac{1}{2+2x}+\frac{-x+1}{2+2x^2}.$$

□

第十六章 钓鱼题合集

数学水平不够高之前, 尽量不要碰钓鱼题!!!

例题 16.1

注

笔记

例题 16.2

证明

□