0.1 全纯函数的 Laurent 展开

定义 0.1

称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{1}$$

为 **Laurent 级数**, 它由两部分组成, 第一部分就是幂级数, 第二部分是负幂项的级数. 如果这两个级数都收敛, 就称级数 (1) 收敛.

定理 0.1

如果 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

的收敛域为圆环 $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}$, 那么它在 D 中绝对收敛且内闭一致收敛, 它的和函数在 D 中全纯.

上述级数的幂级数部分称为该级数的**全纯部分**, 负幂项级数部分称为该级数的**主要部分**.

注 下面我们将看到,Laurent 级数的一些重要性质取决于它的主要部分.

证明 设第一个级数的收敛半径为 R. 对第二个级数作变换 $\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$, 它对 ζ 而言就是幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

设其收敛半径为 ρ, 则当 $|\zeta| < \rho$, 或者 $|z-z_0| > \dfrac{1}{\rho}$ 时, 上述级数收敛. 记 $r = \dfrac{1}{\rho}$, 则当 $r < |z-z_0| < \infty$ 时, 级数 (1) 中的负幂项级数收敛.

如果 $R \leqslant r$, 则当 $|z-z_0| < R$ 时, 必有 $|z-z_0| < r$, 这时级数 (1) 的第一个级数是收敛的, 但第二个级数却发散了. 当 $|z-z_0| > r$ 时, 必有 $|z-z_0| > R$, 这时级数 (1) 的第二个级数收敛而第一个级数发散. 所以, 两者不能同时收敛.

如果 $r < R$, 则当 $r < |z-z_0| < R$ 时, 级数 (1) 的两个级数都收敛, 而且在这个圆环中内闭一致收敛, 即级数 (1) 在上述圆环中内闭一致收敛, 根据 Weierstrass 定理, 它的和是圆环中的全纯函数.

□

定理 0.2

设 $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$, 如果 $f \in H(D)$, 那么 f 在 D 上可以展开为 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z \in D, \tag{2}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta,\ \ n \in \mathbb{Z},$$

而 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta-z_0| = \rho\}(r < \rho < R)$. 并且展开式 (2) 是唯一的.

证明 如图 1 所示, 任意取定 $z \in D$, 取 r_1, r_2, 使得

$$r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R.$$

记 $\gamma_j = \{\zeta : |\zeta-z_0| = r_j\}, j = 1, 2$. 由定理??, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \tag{3}$$

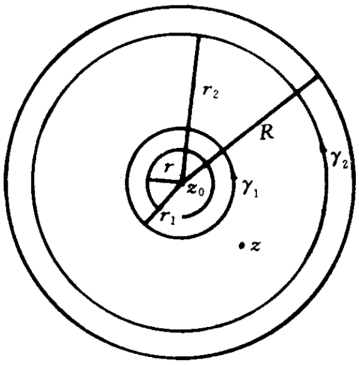

图 1

记 $M_j=\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_j\}, j=1,2$. 当 $\zeta\in\gamma_1$ 时, $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{r_1}{|z-z_0|}<1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-z_0}\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},\ \zeta\in\gamma_1. \tag{4}$$

由于

$$\left|\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\right|\leqslant\frac{M_1}{|z-z_0|}\left(\frac{r_1}{|z-z_0|}\right)^{n-1},$$

并且右端是一收敛级数, 故知级数 (4) 在 γ_1 上一致收敛, 因而可逐项积分:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right)(z-z_0)^{-n}. \tag{5}$$

当 $\zeta\in\gamma_2$ 时, $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r_2}<1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

于是

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},\ \zeta\in\gamma_2. \tag{6}$$

与上面的讨论一样, 级数 (6) 在 γ_2 上一致收敛, 所以

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n. \tag{7}$$

由多连通区域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta=a_{-n},$$
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=a_n.$$

把它们分别代入 (5) 式和 (7) 式, 得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n},$$
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

再把它们代入 (3) 式, 即得展开式 (2).

现在证明展开式 (2) 是唯一的. 如果另有展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n'(z-z_0)^n,$$

因为级数在 γ_ρ 上一致收敛, 逐项积分得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n'\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\rho}(\zeta-z_0)^{n-m-1}\mathrm{d}\zeta\xlongequal{\text{命题??}}a_m',$$

所以这个展开式就是 (2) 式.

□

例题 0.1 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 试分别给出这个函数在 $D_1=\{z:1<|z|<2\}$ 和 $D_2=\{z:2<|z|<\infty\}$ 上的 Laurent 展开式.

解 当 $z\in D_1$ 时, 由于 $1<|z|<2$, 所以

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

当 $z\in D_2$ 时, 由于 $2<|z|<\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)}&=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

□