0.1 矩阵相似的全系不变量

0.1.1 矩阵相似的判定准则之一: 特征矩阵相抵

回顾定理**??**中矩阵相似的充要条件.

命题 0.1

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵,$\lambda I_n - A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$,$\lambda I_n - B$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)\}$, 其中 $f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)$ 是 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)$ 的一个排列. 求证:A 与 B 相似.

证明 对换 λ-矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 的第 i, j 行, 再对换第 i, j 列, 可将 $f_i(\lambda)$ 与 $f_j(\lambda)$ 互换位置. 由于任一排列都可由若干次对换实现, 故 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)\}$, 于是 $\lambda I_n - A$ 相抵于 $\lambda I_n - B$, 从而 A 与 B 相似. □

例题 0.1 设 n 阶方阵 A, B, C, D 中 A, C 可逆, 求证: 存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $A = PCQ$,$B = PDQ$ 的充要条件是 $\lambda A - B$ 与 $\lambda C - D$ 相抵.

证明 必要性由 $\lambda A - B = P(\lambda C - D)Q$ 即得. 下证充分性.

设 $\lambda A - B$ 与 $\lambda C - D$ 相抵, 则由 A, C 可逆知,$\lambda I_n - A^{-1}B$ 与 $\lambda I_n - C^{-1}D$ 相抵, 于是 $A^{-1}B$ 与 $C^{-1}D$ 相似. 设 Q 为可逆矩阵, 使得 $A^{-1}B = Q^{-1}(C^{-1}D)Q$, 令 $P = AQ^{-1}C^{-1}$, 则 P 可逆且 $A = PCQ$,$B = PDQ$. □

0.1.2 矩阵相似的判定准则二: 有相同的行列式因子组

回顾定理**??**中矩阵相似的充要条件和 λ-矩阵的行列式因子相关定义和性质.

命题 0.2 (矩阵必与其转置相似)

求证: 任一 n 阶矩阵 A 都与它的转置 A' 相似. 从而 A 和 A' 有完全一样的特征多项式和特征值.

证明 证法一: 注意到 $(\lambda I_n - A)' = \lambda I_n - A'$, 并且行列式的值在转置下不改变, 行列式的所有 $k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 阶子式构成的集合在转置下也不改变, 故 $\lambda I_n - A$ 和 $\lambda I_n - A'$ 有相同的行列式因子组, 从而 A 和 A' 相似.

证法二:不妨设

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(a_1) & & & \\ & J_{n_2}(a_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(a_k) \end{pmatrix},$$

其中 P 为 n 阶可逆阵. 记 $H_i = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}_{i\times i}$,$i = 1, 2, \cdots, k$. 显然 H_i 都可逆且 $H_i^{-1} = H_i$. 从而

$$A^T \sim P^T A^T \left(P^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} J_{n_1}^T(a_1) & & & \\ & J_{n_2}^T(a_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}^T(a_k) \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{引理??}}\begin{pmatrix} H_1J_{n_1}(a_1)H_1 & & & \\ & H_2J_{n_2}(a_2)H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_kJ_{n_k}(a_k)H_k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{n_1}(a_1) & & & \\ & J_{n_2}(a_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(a_k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} J_{n_1}(a_1) & & & \\ & J_{n_2}(a_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(a_k) \end{pmatrix}\sim A.$$

□

命题 0.3

求证: 对任意的 $b \neq 0$,n 阶方阵 $\boldsymbol{A}(a,b)$ 均相互相似:

$$\boldsymbol{A}(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ & a & \ddots & \ddots & b \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

证明 只要证明对任意的 $b \neq 0$,$\boldsymbol{A}(a,b)$ 的行列式因子组都一样即可. 显然 $D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$.$\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}(a,b)$ 的前 $n-1$ 行、前 $n-1$ 列构成的子式, 其值为 $(\lambda-a)^{n-1}$;$\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}(a,b)$ 的前 $n-1$ 行、后 $n-1$ 列构成的子式, 其值设为 $g(\lambda)$. 注意到 $g(a)$ 是 $n-1$ 阶上三角行列式, 主对角元素全为 $-b$, 从而 $g(a)=(-b)^{n-1}\neq 0$. 因此 $(\lambda-a)^{n-1}$ 与 $g(\lambda)$ 没有公共根, 故 $((\lambda-a)^{n-1},g(\lambda))=1$, 于是 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 $\boldsymbol{A}(a,b)$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-a)^n$, 结论得证. □

注

(1) 在上 (下) 三角矩阵 (如 Jordan 块) 或类上 (下) 三角矩阵 (如友阵或 Frobenius 块) 中, 若上 (下) 次对角线上的元素全部非零, 可以尝试计算行列式因子组. 对一般的矩阵 (如数字矩阵), 不建议计算行列式因子组, 推荐使用 λ-矩阵的初等变换计算法式, 得到不变因子组.

(2) 注意到 $\boldsymbol{A}(a,0)=a\boldsymbol{I}_n$ 的行列式因子组为 $D_i(\lambda)=(\lambda-a)^i(1\leq i\leq n)$. 因此, 在求相似标准型的过程中, 注意千万不能使用摄动法!

0.1.3 矩阵相似的判定准则三: 有相同的不变因子组

回顾定理**??**可知, 所有不变因子的乘积等于特征多项式, 整除关系下最大的那个不变因子等于极小多项式. 因此, 确定特征多项式和极小多项式可帮助确定不变因子组.

命题 0.4 (同阶幂零阵必相似)

设 A 是 n 阶 n 次幂零矩阵, 即 $A^n=O$ 但 $A^{n-1}\neq O$. 若 B 也是 n 阶 n 次幂零矩阵, 求证:A 相似于 B.

证明 显然 A 的极小多项式为 λ^n, 故 A 的不变因子组是 $1,\cdots,1,\lambda^n$. 同理 B 的不变因子组也是 $1,\cdots,1,\lambda^n$, 因此 A 和 B 相似. □

命题 0.5

设 A 为 n 阶矩阵, 证明以下 3 个结论等价:

(1) $A = cI_n$, 其中 c 为常数;

(2) A 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-1$ 次多项式;

(3) A 的不变因子组中无常数.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3): 由于 A 的 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda)$ 是一个 n 次多项式, 故 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda) = D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$ 是一个一次多项式, 设为 $\lambda - c$. 因为其他不变因子都要整除 $d_n(\lambda)$, 并且所有不变因子的乘积等于 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda)$, 故 A 的不变因子组只能是 $\lambda - c, \lambda - c, \cdots, \lambda - c$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 A 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 则 $\deg d_i(\lambda) \geq 1$. 注意到 $d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda) = D_n(\lambda)$ 的次数为 n, 因此 $\deg d_i(\lambda) = 1$. 又 $d_i(\lambda) \mid d_n(\lambda)$, 故只能是 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - c$. 因此 A 与 cI_n 有相同不变因子组, 从而它们相似, 即存在可逆矩阵 P, 使得 $A = P^{-1}(cI_n)P = cI_n$. 另外, 也可以利用 A 的极小多项式等于 $\lambda - c$ 或 A 的 Jordan 标准型来证明. □

命题 0.6

设 n 阶矩阵 A 的特征值全为 1, 求证: 对任意的正整数 k,A^k 与 A 相似.

注 证法一是用“三段论法”和极小多项式来证明的 (当然用行列式因子和几何重数替代也可以); 后面利用命题**??**给出了第二种证法; 而命题**??** (当 $a = \pm 1$ 时) 给出了第三种证法.

证明 证法一: 由 A 的特征值全为 1 可知 A^k 的特征值也全为 1. 设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}\ A\ P = J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(1),\cdots,J_{r_s}(1)\}$ 为 Jordan 标准型. 由于 $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = J^k$, 故只要证明 J^k 与 J 相似即可. 又因为 $J^k = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(1)^k, \cdots, J_{r_s}(1)^k\}$, 故问题可进一步归结到每个 Jordan 块, 即只要证明 $J_{r_i}(1)^k$ 与 $J_{r_i}(1)$ 相似即可. 因此不妨设 $J = J_n(1)$ 只有一个 Jordan 块, 则 $J = I_n + J_0$, 其中 $J_0 = J_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 注意到

$$J^k = (I_n + J_0)^k = I_n + \mathrm{C}_k^1 J_0 + \mathrm{C}_k^2 J_0^2 + \cdots + J_0^k.$$

故 J^k 是一个上三角矩阵, 其主对角线上的元素全为 1, 上次对角线上的元素全为 k, 从而它的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$. 为了确定它的极小多项式, 我们可进行如下计算:

$$(J^k - I_n)^{n-1} = (\mathrm{C}_k^1 J_0 + \mathrm{C}_k^2 J_0^2 + \cdots + J_0^k)^{n-1} = k^{n-1} J_0^{n-1} \neq O.$$

于是 J^k 的极小多项式为 $(\lambda - 1)^n$, 其不变因子组为 $1, \cdots, 1, (\lambda - 1)^n$. 因此 J^k 与 J 有相同的不变因子, 从而 J^k 与 J 相似.

证法二: 显然 A^k 的特征值也全为 1. 注意到

$$(A^k - I_n)^l = (A - I_n)^l (A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + I_n)^l, \quad l \geq 1.$$

由于 $A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + I_n$ 的特征值全为 k, 故为可逆矩阵, 从而 $\mathrm{r}((A^k - I_n)^l) = \mathrm{r}((A - I_n)^l)$ 对任意的正整数 l 都成立. 由命题**??**可知, A^k 与 A 相似. □

命题 0.7

设 n 阶矩阵 A 的特征值全为 1 或 -1, 求证:A^{-1} 与 A 相似.

注 证法一是用“三段论法”和极小多项式来证明的 (当然用行列式因子和几何重数替代也可以); 后面利用命题**??**给出了第二种证法; 而命题**??** (当 $a = \pm 1$ 时) 给出了第三种证法.

证明 证法一: 设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\lambda_i = \pm 1$. 由于 $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = J^{-1}$, 故只要证明 J^{-1} 与 J 相似即可. 又因为 $J^{-1} = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)^{-1}, \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)^{-1}\}$, 故问题可进一步归结到每个 Jordan 块, 即只要证明 $J_{r_i}(\lambda_i)^{-1}$ 与 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 相似即可. 因此不妨设 $J = J_n(\lambda_0)$ 只有一个 Jordan

块, 则 $J=\lambda_0 I_n+J_0$, 其中 $\lambda_0=\pm1, J_0=J_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 注意到

$$\lambda_0^n I_n=(\lambda_0 I_n)^n-(-J_0)^n=(\lambda_0 I_n+J_0)(\lambda_0^{n-1}I_n-\lambda_0^{n-2}J_0+\cdots+(-1)^{n-1}J_0^{n-1}).$$

以及 $\lambda_0^{-1}=\lambda_0$, 故可得

$$J^{-1}=(\lambda_0 I_n+J_0)^{-1}=\lambda_0 I_n-\lambda_0^2 J_0+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda_0^n J_0^{n-1}.$$

因此 J^{-1} 是一个上三角矩阵, 其主对角线上的元素全为 λ_0, 上次对角线上的元素全为 $-\lambda_0^2$, 从而它的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^n$. 为了确定它的极小多项式, 我们可进行如下计算:

$$(J^{-1}-\lambda_0 I)^{n-1}=(-\lambda_0^2 J_0+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda_0^n J_0^{n-1})^{n-1}=(-1)^{n-1}J_0^{n-1}\neq O$$

于是 J^{-1} 的极小多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^n$, 其不变因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^n$. 因此 J^{-1} 与 J 有相同的不变因子组, 从而 J^{-1} 与 J 相似.

证法二: 显然 A^{-1} 的特征值也全为 1 或 -1. 设 $\lambda_0=\pm1$, 则由 A 可逆以及 $(A^{-1}-\lambda_0 I_n)^l=(-\lambda_0)^l A^{-l}(A-\lambda_0 I_n)^l$ 可得 $\mathrm{r}((A^{-1}-\lambda_0 I_n)^l)=\mathrm{r}((A-\lambda_0 I_n)^l)$ 对任意的正整数 l 都成立. 由命题??可知, A^{-1} 与 A 相似. □

0.1.4 矩阵相似的判定准则四: 有相同的初等因子组

定义 0.1 (准素因子)

设 $f(\lambda)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式,$p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, 若存在正整数 k, 使得 $p(\lambda)^k\mid f(\lambda)$, 但 $p(\lambda)^{k+1}\nmid f(\lambda)$, 则称 $p(\lambda)^k$ 为 $f(\lambda)$ 的一个**准素因子**. 所有 $f(\lambda)$ 的准素因子称为 $f(\lambda)$ 的**准素因子组**.

事实上, 若设 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的标准因式分解为

$$f(\lambda)=cP_1(\lambda)^{e_1}P_2(\lambda)^{e_2}\cdots P_t(\lambda)^{e_t}$$

其中 c 为非零常数,$P_i(\lambda)$ 为互异的首一不可约多项式,$e_i>0(1\le i\le t)$, 则 $f(\lambda)$ 的所有准素因子为 $P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,P_t(\lambda)^{e_t}$. ♣

定理 0.1 (λ-矩阵和初等因子的基本性质)

(1) 设 $f(\lambda),g(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的首一多项式,$d(\lambda)=(f(\lambda),g(\lambda))$,$m(\lambda)=[f(\lambda),g(\lambda)]$ 分别是 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的最大公因式和最小公倍式, 证明下列 λ-矩阵相抵:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0\\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0\\ 0 & m(\lambda)\end{pmatrix}$$

(2) 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 其特征矩阵 λI_n-A 经过初等变换可化为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$, 其中 $f_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一多项式. 求证: 矩阵 A 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子组. ♡

笔记 由 (2) 可知, 矩阵 A 的初等因子组就是 A 的所有不变因子的准素因子组. 实际上,(2) 就是引理??的一个推广.

证明

(1) 由已知, 存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$, 使得 $f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=d(\lambda)$. 设 $f(\lambda)=d(\lambda)h(\lambda)$, 则 $m(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$. 作下列 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ f(\lambda)u(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ d(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 0 & -g(\lambda)h(\lambda)\\ d(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & g(\lambda)h(\lambda)\\ d(\lambda) & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0\\ 0 & m(\lambda)\end{pmatrix}.$$

另一结论同理可得.

(2) 对任意的 $i<j$, 以下操作记为 $O(i,j)$: 设 $d(\lambda)=(f_i(\lambda),f_j(\lambda))$,$m(\lambda)=[f_i(\lambda),f_j(\lambda)]$ 分别是 $f_i(\lambda)$ 和 $f_j(\lambda)$ 的最大公因式和最小公倍式, 则用 $d(\lambda)$ 替代 $f_i(\lambda)$, 用 $m(\lambda)$ 替代 $f_j(\lambda)$. 我们先证明, 操作 $O(i,j)$ 可通过 λ-矩阵

的初等变换来实现, 并且前后两个对角矩阵, 即 diag $\{f_1(\lambda),\cdots,f_i(\lambda),\cdots,f_j(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 与 diag $\{f_1(\lambda),\cdots,d(\lambda),\cdots,m(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 有相同的准素因子组.

由 (1) 即知 $O(i,j)$ 是 λ-矩阵的相抵变换. 设 $f_i(\lambda),f_j(\lambda)$ 的公共因式分解为

$$f_i(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_{i1}}P_2(\lambda)^{e_{i2}}\cdots P_t(\lambda)^{e_{it}},\quad f_j(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_{j1}}P_2(\lambda)^{e_{j2}}\cdots P_t(\lambda)^{e_{jt}}$$

其中 $P_i(\lambda)$ 为互异的首一不可约多项式,$e_{ik}\geq 0$,$e_{jk}\geq 0(1\leq k\leq t)$, 令 $r_k=\min\{e_{ik},e_{jk}\}$,$s_k=\max\{e_{ik},e_{jk}\}$, 则有

$$d(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\cdots P_t(\lambda)^{r_t},\quad m(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}P_2(\lambda)^{s_2}\cdots P_t(\lambda)^{s_t}$$

显然 $\{f_i(\lambda),f_j(\lambda)\}$ 和 $\{d(\lambda),m(\lambda)\}$ 有相同的准素因子组, 因此 $O(i,j)$ 操作前后的两个对角矩阵也有相同的准素因子组.

对对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 依次实施操作 $O(1,j)(2\leq j\leq n)$, 则得到对角矩阵的第 $(1,1)$ 元素的所有不可约因式的幂在主对角元素中都是最小的; 然后依次操作 $O(2,j)(3\leq j\leq n)$;$\cdots$; 最后操作 $O(n-1,n)$, 可得一个对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$. 由操作的性质可知,$\Lambda$ 满足 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(1\leq i\leq n-1)$, 因此 Λ 就是矩阵 A 的法式. 又因为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 与法式有相同的准素因子组, 故所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子组就是矩阵 A 的初等因子组.

□

命题 0.8

设 $A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 为分块对角矩阵, 求证:A 的初等因子组等于 $A_i(1\leq i\leq k)$ 的初等因子组的无交并集. 又若交换各块的位置, 则所得的矩阵仍和 A 相似.

证明 □

显然 $\lambda I-A$ 也是一个分块对角矩阵, 用 λ-矩阵的初等变换将每一块化为法式, 则由λ-矩阵和初等因子的基本性质 (2)可知,A 的初等因子组就是所有各块的初等因子组的无交并集. 又交换 A 的各块并不改变 A 的初等因子组, 因此所得之矩阵仍和 A 相似.