## 0.1 不定积分计算

### 0.1.1 直接猜原函数

计算定积分, 能直接猜出原函数, 就直接写出原函数, 然后求导验证即可.

**例题 0.1** 计算 $\int \frac{e^{-\sin x}\sin(2x)}{(1-\sin x)^2}dx$.

**笔记** 因为 $e^{g(x)}$ 的原函数一定仍含有 $e^{g(x)}$, 并且 $\frac{1}{1-sinx}$ 求导后一部分是 $\frac{1}{(1-sinx)^2}$, 所以我们猜测原函数与 $\frac{e^{-\sin x}}{1-\sin x}$ 有关. 因此对其求导进行尝试.

**证明** 注意到

$$\left(\frac{e^{-\sin x}}{1-\sin x}\right)' = \frac{-\cos x e^{-\sin x}(1-\sin x)+\cos x e^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2} = \frac{e^{-\sin x}\cos x\sin x}{(1-\sin x)^2}.$$

故原函数为 $\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$, 其中 $C$ 为任意常数. 求导验证:

$$\left(\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}\right)' = \frac{e^{-\sin x}(2\cos x\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}.$$

□

**例题 0.2** 计算 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

**笔记** 由 $(x-\ln x)^2$ 知可待定原函数 $\frac{f(x)}{x-\ln x}$, 从而猜出答案.

**证明** 注意到

$$\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)' = \frac{x-\ln x - x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}.$$

故原函数为 $\frac{x}{x-\ln x}+C$, 其中 $C$ 为任意常数. □

### 0.1.2 换元积分

**例题 0.3** 设 $y(x-y)^2=x$, 计算 $\int \frac{dx}{x-3y}$.

**笔记** 令 $y=tx$, 则 $t=\frac{y}{x}$（这里是猜测过程,$t$ 只是中间变量, 不用考虑 $x$ 是否取 0）, 从而由条件可得

$$tx(x-tx)^2 = x \Rightarrow tx^3(1-t)^2 = x$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{t(1-t)^2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}.$$

因为这里是猜测的过程（只要最后能得到一个正确的原函数即可）, 不需要保证严谨性, 所以我们直接取 $x=\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$, 于是 $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)} \\ y=\frac{\sqrt{t}}{1-t} \end{cases}$. 代入不定积分得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y} = \int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}-\frac{3\sqrt{t}}{1-t}} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}t}{2(t^2-t)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}}\right| + C\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C,$$

其中 $C$ 为任意常数. 因此我们断言 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3y} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C.$

**证明** 对原方程两边同时关于 $x$ 求导得

$$y'(x-y)^2 + 2y(1-y')(x-y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-2y(x-y)}{(x-y)(x-3y)}.$$

于是利用上式经过计算可得

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C\right)' = \frac{1}{x-3y}.$$

故 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3y} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y}\right| + C$, 其中 $C$ 为任意常数. □