0.1 重积分方法

定理 0.1 (Chebeshev 不等式积分形式)

设 $p\in R[a,b]$ 且非负,f,g 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right), f,g\text{单调性相同}$$

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right), f,g\text{单调性相反}$$

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

注 证法二中的 $\mathrm{d}\mu$ 应该看作测度.

证明 证法一:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y\right)\\
&=\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

故结论得证.

证法二: 令 $\dfrac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则 $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\mu=\int_a^b\frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=1$. 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}\mu\\
&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\int_a^b g(y)\mathrm{d}\mu-\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)]g(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(y)-f(x)]g(x)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]
\end{aligned}$$

故结论得证. □

例题 0.1 设 $f\in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \left(\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right).$$

令 $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mu$, 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\mu \int_0^1 x\mathrm{d}\mu \geqslant \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}\mu.$$

上式由Chebeshev 不等式积分形式可直接得到.

□

命题 0.1 (反向切比雪夫不等式)

设 $f,g\in R[a,b]$ 且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.$$

注 不妨设 $a=0, b=1$ 的原因: 假设当 $a=0, b=1$ 时,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的 $[a,b]$, 原不等式等价于

$$\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}. \quad (1)$$

又注意到 $f(a+(b-a)x), g(a+(b-a)x)\in R[0,1]$, 且 $f(x)\in[m_1,M_1], g(x)\in[m_2,M_2]$. 故由假设可知(1)式成立. 因此不妨设也成立.

笔记 积累本题的想法.

证明 不妨设 $a=0, b=1$, 则记 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2 &= \left|\int_0^1 (f(x)-A)(g(x)-B)\mathrm{d}x\right|^2\\ &\overset{\text{Cauchy不等式}}{\leqslant} \int_0^1 |f(x)-A|^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 |g(x)-B|^2\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x = M_1A+m_1A-M_1m_1-\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x-A^2\\ &= (M_1-A)(A-m_1)-\int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x\\ &\leqslant (M_1-A)(A-m_1)\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}.\end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立.

□

例题 0.2 设 $f\in C[a,b]$ 且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{2}$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

$\sin x<x$ 两边同时在 $[0,1]$ 上积分也可得 $1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2}$.

证明 一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\sin y\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[\cos x\cos y+\sin x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是不等式(2)变为

$$\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}. \tag{4}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2}f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{(3)}{\leqslant}M^2\iint_{[a,b]^2}\frac{(x-y)^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(4).

□

例题 0.3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 记

$$\delta=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|,\ \Delta=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

证明:

$$\frac{1}{12}(b-a)^2\delta^2\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}(b-a)^2\Delta^2$$

证明 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(bx+a(1-x))$ 代替 f. 再不妨设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 否则用 $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$ 代替 f. 于是只需证

$$\frac{1}{12}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-1\leqslant\frac{1}{12}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2.$$

由 Lagrange 中值定理可知, 对 $\forall x,y\in[0,1]$, 都存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$\min_{x\in[0,1]}|f'|\cdot|x-y|\leqslant|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f'|\cdot|x-y|$$

从而

$$\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2(x-y)^2\leqslant[f(x)-f(y)]^2\leqslant\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2(x-y)^2$$

对上式取二重积分得

$$\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y\leqslant\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y\leqslant\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y \tag{5}$$

经计算得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y&=\int_0^1\left[f^2(x)+\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-2f(x)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-2\int_0^1\left(f(x)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\end{aligned}$$

因此(5)式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant 2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\leqslant\frac{1}{6}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\\\iff&\frac{1}{12}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-1\leqslant\frac{1}{12}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\end{aligned}$$

故结论得证.

□