0.1 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如 $\int_a^b \left[f(x)\right]^n g(x)\,\mathrm{d}x, n \to \infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a,b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界; 或者 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)\mathrm{d}y, x \to +\infty$ 的渐近展开式, 其中 $f, g \in C[a,b]$ 且 g 在 [a,b] 上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b \left[f(x)\right]^n g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{n\ln f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若参变量 n, x 在积分区间上, 或者估计的不是 $n, x \to +\infty$ 处的渐近展开式, 而是其他点处 $(x \to x_0)$ 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)\mathrm{d}y, x \to +\infty$, 其中 $f, g \in C[a,b]$.

思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有 $e^{f(x)}$, 则积分得到的结果中一定仍含有 $e^{f(x)}$), 我们可以大致估计积分 $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y)\mathrm{d}y, x \to +\infty$ 的结果是 $C_1 h_1(x)\, e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x)\, e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$, 其中 C 为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$. 而我们注意到到改变指数函数 e^{px+q} 的幂指数部分的常数 p 会对这个指数函数的阶 $(x \to +\infty)$ 产生较大影响, 而改变 q 不会影响这个指数函数的阶. 比如,e^{2x} 比 e^x 高阶 $(x \to +\infty)$. 由此我们可以发现 $e^{f(x,b)}$ 和 $e^{f(x,a)}$ 中的幂指数部分中 $f(x,a), f(x,b)$ 中除常数项外的含 x 项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的 $f(x,y)$ 和积分区间决定的, 但是在实际问题中 $f(x,y)$ 的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间 $[a,b]$ 上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量 x 固定时, 并且当积分区间为某一点 y_0 附近时, 只要被积函数的 $e^{f(x,y)}$ 在 y_0 处 (关于 y) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与 x 轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在 y_0 附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量 x 固定时,$f(x,y)$(关于 y) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0(余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 $Taylor$ 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 $Taylor$ 定理将主体部分的被积函数的指数部分 $f(x,y)$ 在最大值点附近 (关于 y) 展开 (注意: 此时最多展开到 x^2 项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到 $\infty + \infty$ 或 $0 \cdot \infty$ 等这一类无效的结果). $Taylor$ 展开之后, 我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处不为 0, 则 $g(x)$ 只会影响渐进展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理 $g(x)$ 的方法:(i) 在余项部分, 直接将 $g(x)$ 放缩成其在相应区间上的上界或下界即可.(ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在 $f(x,y)$(关于 y) 的某些最大值点 y_i 的邻域内, 所以结合 $g(x)$ 的连续性, 直接将 $g(x)$ 用 $g(y_i)$ 代替即可 (将 $g(x)$ 放缩成 $g(y_i) \pm \varepsilon$ 即可). 即相应的主体部分 (y_i 点附近) 乘以 $g(x)$ 相应的函数值 $g(y_i)$. 具体例题见例题 0.9. 也可以采取拟合法处理 $g(x)$, 具体例题见例题 0.10.

若原积分中的有界连续函数 $g(x)$ 在 f 的极值点处为 0, 则在估计积分的阶的时候就要将 $g(x)$ 考虑进去. 需要结合 $g(x)$ 的具体结构、性质进行分析.

严谨的证明过程最好用上下极限和 $\varepsilon - \delta$ 语言书写. 具体严谨的证明书写见例题:例题 0.4,例题 0.5,例题 0.6,例题 0.9.

笔记 *Laplace 方法的思路蕴含了一些常用的想法:* **分段估计、Taylor 定理估阶**. *而严谨的证明书写也使用一些常用方法:* **上下极限、$\varepsilon - \delta$ 语言、拟合法**.

注 上述 Laplace 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和技

巧 (比如 Puiseux 级数展开 (见清疏讲义) 等).

例题 0.1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m > 0, m \in \mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1\leqslant j\leqslant m} a_j.$$

注 熟知, 极限蕴含在 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的最大值中.

证明 显然

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m} a_j = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{1\leqslant j\leqslant m} a_j^n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m} a_j \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \max_{1\leqslant j\leqslant m} a_j, \tag{1}$$

从而我们证明了(1).

□

例题 0.2 设非负函数 $f \in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

注 熟知, 极限蕴含在 f 的最大值中.

笔记 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

证明 事实上记 $f(x_0) = \max_{x\in[a,b]} f(x), x_0 \in [a,b]$, 不失一般性我们假设 $x_0 \in (a,b)$. 那么对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 我们由积分中值定理知道存在 $\theta_n \in (x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n})$, 使得

$$f(\theta_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0)\mathrm{d}x} = f(x_0)\sqrt[n]{b-a}. \tag{2}$$

两边取极限即得(2).

□

例题 0.3 设非负严格递增函数 $f \in C[a,b]$, 由积分中值定理我们知道存在 $x_n \in [a,b]$, 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x.$$

计算 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

证明 由(上一题) 例题 0.2, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b-a}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = f(b).$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, 我们知道对任何 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$, 都有 $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) = f(b)$. 又由于 f 为严格递增函数, 因此只能有 $c = b$, 利用命题**??**的 (a)(Heine 归结原理), 我们知道 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. 证毕!

□

定理 0.1 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

注 我们只需要记住 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to +\infty$ 及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

笔记 (3)式等价于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \sqrt{\pi n}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}. \tag{4}$$

证明的想法是把(4)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

证明 我们只证明 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to +\infty$, 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{5}$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln \sin^2 x = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{6}$$

即 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin^2 x}{-(x-\frac{\pi}{2})^2} = -1$. 于是利用(6), 对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 我们知道存在 $\delta \in (0,1)$, 使得对任何 $x \in [\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}]$, 都有

$$-(1+\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqslant \ln \sin^2 x \leqslant -(1-\varepsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2. \tag{7}$$

利用(7)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n \ln \sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)} \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} \mathrm{d}x \\
&= (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\varepsilon)y^2} \mathrm{d}y \\
&= (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}} e^{-z^2} \mathrm{d}z \\
&\leqslant (\frac{\pi}{2}-\delta)\sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\delta) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\delta} e^{-n(1+\varepsilon)y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-z^2} \mathrm{d}z.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z,$$

由 ε 任意性即可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(5)式可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi\sqrt{n}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1.$$

故 $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \to +\infty$.

□

例题 0.4 求 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+x^2)^n} \mathrm{d}x, n \to \infty$ 的等价无穷小.

解 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [0,\delta]$ 时, 有

$$\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+x^2)^n} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} \mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta} e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} \mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2^n}\left(\int_0^{\delta} e^{-n\left(\frac{x^2}{2}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\mathrm{d}x\right)\\
&\xlongequal{\text{令 } y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} e^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}.
$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}+\frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}.
$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

另外一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2^n}\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{x^2}{2}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{令 } y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\frac{1}{2^n\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.
$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$
\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}\ ^{n}}{(2+x^2}) \mathrm{d}x\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}.
$$

再由 ε 的任意性可得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

因此, 再结合 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x$, 我们就有

$$
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}.
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 即 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+x^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}+o\left(\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\right), n\to\infty$.

□

例题 0.5 求 $\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y, x\to+\infty$ 的渐近估计 (仅两项).

笔记 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以实际上只需要估计

$$
\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y-\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_x^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y, x\to+\infty.
$$

解 由 *Taylor* 定理可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [0, \delta]$ 时, 有

$$2x - \varepsilon x \leqslant x^2 + 2x \leqslant 2x + \varepsilon x.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y &\xlongequal{\text{令} y=xu} x \int_1^{\infty} e^{-(xu)^2} \mathrm{d}u \xlongequal{\text{令} t=u-1} x \int_0^{\infty} e^{-(xt+x)^2} \mathrm{d}t \\
&= x \int_0^{\infty} e^{-(xt)^2 - 2x^2 t - x^2} \mathrm{d}t = x e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)} \mathrm{d}t \\
&= x e^{-x^2} \left(\int_0^{\delta} e^{-x^2(t^2+2t)} \mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)} \mathrm{d}t \right) \\
&\leqslant x e^{-x^2} \left(\int_0^{\delta} e^{-x^2(2t+\varepsilon t)} \mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2(t+2)} e^{-x^2 \delta} \mathrm{d}t \right) \\
&= x e^{-x^2} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{(2+\varepsilon)x^2} + \frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2} \right) \\
&= \frac{e^{-x^2}}{x} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right).
\end{aligned}$$

于是就有

$$x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令 $x \to +\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2 \delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right) = \frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \dfrac{1}{2}$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y &\xlongequal{\text{令} y=xu} x \int_1^{\infty} e^{-(xu)^2} \mathrm{d}u \xlongequal{\text{令} t=u-1} x \int_0^{\infty} e^{-(xt+x)^2} \mathrm{d}t \\
&= x \int_0^{\infty} e^{-(xt)^2 - 2x^2 t - x^2} \mathrm{d}t = x e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2(t^2+2t)} \mathrm{d}t \\
&\geqslant x e^{-x^2} \int_0^{\delta} e^{-x^2(t^2+2t)} \mathrm{d}t \geqslant x e^{-x^2} \int_0^{\delta} e^{-x^2(2t-\varepsilon t)} \mathrm{d}t \\
&= x e^{-x^2} \cdot \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2 \delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.
\end{aligned}$$

于是就有

$$x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \geqslant \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2 \delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令 $x \to +\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \geqslant \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2 \delta}}{(2-\varepsilon)x^2} = \frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \geqslant \dfrac{1}{2}$.

因此, 再结合 $\varliminf\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \varlimsup\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y$, 我们就有

$$\frac{1}{2} \leqslant \varliminf_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}$, 即 $\int_x^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \dfrac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\dfrac{e^{-x^2}}{x}\right), x \to +\infty$.

因此 $\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \to +\infty.$

□

例题 0.6 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n\mathrm{d}x.$

解 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得当 $x\in[0,\delta]$ 时, 有

$$-t-\varepsilon t\leqslant\ln(1-\sin t)\leqslant -t+\varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x \xlongequal{令x=nt} n\int_0^{10}(1-|\sin t|)^n\mathrm{d}t = n\int_0^{10}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&= n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&\quad + n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi+\delta}^{10}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t\\
&= n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t\\
&\quad + n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi+\delta}^{10}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{8}$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned}
n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t &\xlongequal{令u=\pi-t} -n\int_{\delta}^{0}e^{n\ln(1-\sin(\pi-u))}\mathrm{d}u = n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}\mathrm{d}u,\\
n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t &\xlongequal{令u=t-\pi} n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}\mathrm{d}u = n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}\mathrm{d}u,\\
n\int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t &\xlongequal{令u=t-\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin(\pi+u))}\mathrm{d}u = \int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin u)}\mathrm{d}u,\\
n\int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t &\xlongequal{令u=t-2\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin(2\pi+u))}\mathrm{d}u = \int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1+\sin u)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

从而

$$n\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t = n\int_{\pi-\delta}^{\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{\pi}^{\pi+\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t = 2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t.$$

同理

$$n\int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t = n\int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta}e^{n\ln(1-|\sin t|)}\mathrm{d}t = 2n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t.$$

于是原积分(8)式可化为

$$\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x = 7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + 3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi+\delta}^{10}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t.$$

进而, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x &= 7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + 3n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t + n\int_{3\pi+\delta}^{10}e^{n\ln(1+\sin t)}\mathrm{d}t\\
&= 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t+\varepsilon t)}\mathrm{d}t + 3n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin\delta)}\mathrm{d}t + n\int_{\delta}^{10-3\pi}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\\
&\leqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t+\varepsilon t)}\mathrm{d}t + 4n\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin\delta)}\mathrm{d}t\\
&= 7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1} + 4ne^{n\ln(1+\sin\delta)}(\pi-2\delta).
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left[7\cdot\frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta}-1}{\varepsilon-1} + 4ne^{n\ln(1-\sin\delta)}(\pi-2\delta)\right] = \frac{7}{1-\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant 7.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x&=7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t+3\int_{\delta}^{\pi-\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\\&\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-\sin t)}\mathrm{d}t\geqslant 7n\int_0^{\delta}e^{n(-t-\varepsilon t)}\mathrm{d}t\\&=7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,7\cdot\frac{1-e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon+1}=\frac{7}{\varepsilon+1}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{7}{\varepsilon+1}.$

因此, 再结合 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x$, 我们就有

$$7\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x\leqslant 7.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{10n}(1-|\sin(\frac{x}{n})|)^n\mathrm{d}x=7.$

□

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}$.

证明 首先注意到

$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n+1}\Big|_1^0=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).\tag{9}$$

接着, 由 Taylor 定理可知

$$\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)=-\frac{3}{4}x+o\left(x\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\leqslant\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)\leqslant-\frac{3}{4}x+\varepsilon x,\forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\delta}e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}x+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\infty}e^{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right)=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}\left(1-\delta\right).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\ln\left(1-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\delta}e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}x-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\mathrm{d}x\\&=\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n}+e^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}\left(1-\delta\right).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{e^{\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\delta}-1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}(1-\delta)\leqslant n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}+ne^{n\left(-\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\delta}(1-\delta).$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 得

$$-\frac{1}{-\frac{3}{4}-\varepsilon}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{-\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

故 $\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{4}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. 于是再结合(9)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}=\frac{2}{3}.$$

□

例题 0.8 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_0^1\ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x}$ 存在并求其值.

笔记 原式可写成 $\dfrac{\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x}$, 求导可知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增, 故原式分子和分母的阶都集中在 $x=0$ 处. 因为分母积分的被积函数除指数部分外,x 在 0 处取值也为 0, 所以我们在估阶的时候需要将 x 也考虑进去. 利用 Laplace 方法估计分子、分母的阶, 但是此时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在极值点 $x=0$ 处间断, 故我们需要先对 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 补充定义, 使相关函数光滑, 才能进行 Taylor 展开.

证明 由 Taylor 公式可知

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\ln\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right).$$

从而对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, 都存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\leqslant\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\leqslant-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2,\forall x\in[-\delta,\delta],$$

$$-\frac{x}{2}-\varepsilon x\leqslant\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\leqslant-\frac{x}{2}+\varepsilon x,\forall x\in[-\delta,\delta].$$

于是一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^\delta xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}+\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x+\sin^n1\int_\delta^1\frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta}xe^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+\sin^n1\left(\frac{n}{\delta^n}-1\right)\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\infty xe^{\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x+\sin^n1\left(\frac{n}{\delta^n}-1\right)=-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)n}+\sin^n1\left(\frac{n}{\delta^n}-1\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_0^\delta e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x+\int_\delta^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^\delta e^{n\left(-\frac{x}{2}+\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x+(\ln2)^n\int_\delta^1\frac{1}{x^n}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+(\ln2)^n\left(\frac{n+1}{\delta^{n+1}}-1\right)\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x+(\ln2)^n\left(\frac{n+1}{\delta^{n+1}}-1\right)=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n}+(\ln2)^n\left(\frac{n+1}{\delta^{n+1}}-1\right).\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^1 xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\delta xe^{n\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^\delta xe^{n\left(-\frac{x^2}{6}-\varepsilon x^2\right)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}\delta} xe^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty xe^{\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\delta e^{n\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^\delta e^{n\left(-\frac{x}{2}-\varepsilon x\right)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)n}.\end{aligned}$$

因此, 我们就有

$$-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)} \leqslant n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)} + \sin^n 1\left(\frac{n}{\delta^n}-1\right),$$
$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqslant n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + (\ln 2)^n\left(\frac{n+1}{\delta^{n+1}}-1\right).$$

令 $n\to\infty$, 得

$$-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}-\varepsilon\right)} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}$$
$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$, 得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x = 2.$$

故

$$\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad \int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x = \frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 \ln^n(1+x)x^{-n}\mathrm{d}x}{\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^{n-1}}\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^n\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

□

例题 0.9 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\mathrm{d}x}$.

笔记 我们首先可以求解出被积函数带 n 次幂部分的最大值点即 $1-x^2+x^3$ 的最大值点为 $x=0,1$. 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

注 注意由 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1), x\to 1$. 得到的是 $\ln(1-x^2+x^3)=x-1+o(x-1), x\to 1$. 而不是.

证明 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3) = -x^2+o(x^2), x\to 0;$$
$$\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x\to 1.$$

从而对 $\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, 存在 $\delta_1\in(0,\frac{1}{10})$, 使得

$$-x^2-\varepsilon x^2 \leqslant \ln(1-x^2+x^3) \leqslant -x^2+\varepsilon x^2, \forall x\in(0,\delta_1);$$
$$x-1-\varepsilon(x-1) \leqslant \ln(1-x^2+x^3) \leqslant x-1+\varepsilon(x-1), \forall x\in(1-\delta_1,1).$$

设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0),f(1)>0$, 则由连续函数最大值、最小值定理可知,f 在闭区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上都存在最大值和最小值. 设 $M_1=\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]}f(x)$,$M_2=\sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]}f(x)$. 又由连续性可知, 对上述 ε, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon,\forall x\in[0,\delta_2];$$
$$f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon,\forall x\in[1-\delta_2,1].$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则一方面我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant(f(0)+\varepsilon)\int_0^{\delta}e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\mathrm{d}x\\&=\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y+M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right),\end{aligned}$$

又易知 $1-x^2+x^3$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{3},1]$ 上单调递增. 再结合 $\delta<\frac{1}{10}$ 可知,$1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3<1-(\frac{1}{10})^2+(\frac{1}{10})^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3$. 从而当 $x\in(\frac{1}{2},1-\delta)$ 时, 我们就有 $1-x^2+x^3<1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3<1$. 进而可得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\delta}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\delta}^{1}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}M_2\left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n\mathrm{d}x+(f(1)+\varepsilon)\int_{1-\delta}^{1}e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]}\mathrm{d}x\\&=M_2\left(1-(1-\delta)^2+(1-\delta)^3\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{f(1)+\varepsilon}{n(1+\varepsilon)}\left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&\leqslant\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1-\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\sqrt{n}M_1\left(\frac{7}{8}-\delta^2\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right),\\n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&\leqslant nM_2\left(\frac{3}{4}+(1-\delta)^3\right)^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(0)+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}}(f(0)+\varepsilon),$$
$$\varlimsup_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(1)+\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant f(1)$.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^{\delta}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant(f(0)-\varepsilon)\int_0^{\delta}e^{n(-x^2-\varepsilon x^2)}\mathrm{d}x=\frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}}e^{-y^2}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{1-\delta}^{1}(1-x^2+x^3)^nf(x)\mathrm{d}x=\int_{1-\delta}^{1}e^{n\ln(1-x^2+x^3)}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant (f(1)-\varepsilon)\int_{1-\delta}^{1} e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]}\mathrm{d}x = \frac{f(1)-\varepsilon}{n(1+\varepsilon)}\left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).$$

于是就有

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2}\mathrm{d}y,$$
$$n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-e^{-n\delta(1-\varepsilon)}\right).$$

上式两边同时令 $n\to\infty$ 并取下极限得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(0)-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}(f(0)-\varepsilon),$$
$$\varliminf_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(1)-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

再由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0), \varliminf\limits_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(1)$.

因此, 我们就有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0),$$
$$f(1)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(1).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0), \lim\limits_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$. 从而

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n\to\infty;$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$$

故 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2+x^3)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$
从而当 $f\equiv 1$ 时, 上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$; 当 $f(x)=\ln(x+2)$ 时, 上式等价于 $\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\ln(x+2)\mathrm{d}x}{\int_0^1(1-x^2+x^3)^n\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \ln 2.$$

□

例题 0.10 设 $f\in R[0,1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = f(1).$$

笔记 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 也可以用拟合法进行证明.

证明 由于 $f\in R[0,1]$, 因此存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[0,1]$. 于是对 $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\delta\in(0,1)$, 有

$$\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x - n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right| = \left|n\int_0^1[f(x)-f(1)]x^n\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant n\int_0^1|[f(x)-f(1)]x^n|\mathrm{d}x = n\int_0^{\delta}|f(x)-f(1)|x^n\mathrm{d}x + n\int_{\delta}^{1}|f(x)-f(1)|x^n\mathrm{d}x$$
$$\leqslant n\int_0^{\delta}|M+f(1)|\delta^n\mathrm{d}x + n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_{\delta}^{1}x^n\mathrm{d}x$$

$$\leqslant n|M+f(1)|\delta^{n+1}+n\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$
$$=n|M+f(1)|\delta^{n+1}+\frac{n}{n+1}\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|.$$

上式两边同时令 $n\to\infty$, 并取上极限可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x-n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|,\quad\forall\delta\in(0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta\to1^-$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x-n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right|\leqslant\lim_{\delta\to1^-}\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|=\overline{\lim_{\delta\to1^-}}|f(x)-f(1)|.$$

又因为 f 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\overline{\lim\limits_{\delta\to1^-}}|f(x)-f(1)|=0$. 故

$$0\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x-n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x-n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x\right|\leqslant0.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x=f(1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=f(1).$

□

例题 0.11 f 是 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $x=1$ 处存在导数,$f(1)=0,f'(1)=-1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=1.$$

笔记 本题也可以类似例题 0.10用拟合法进行证明.

证明 由 Taylor 定理可知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 对 $\forall x\in[\delta,1]$, 存在 $\theta\in(x,1)$, 使得

$$f(x)=f'(1)(x-1)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2=1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2.$$

记 $M\triangleq\sup\limits_{[0,1]}f,m\triangleq\inf\limits_{[0,1]}f$, 则一方面, 我们有

$$n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=n^2\int_0^\delta x^nf(x)\mathrm{d}x+n^2\int_\delta^1 x^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant Mn^2\delta^n+n^2\int_\delta^1 x^n\left[1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$\leqslant Mn^2\delta^n+n^2\int_0^1\left[x^n-x^{n+1}+\frac{f''(\theta)}{2}(x^{n+2}-2x^{n+1}+x^n)\right]\mathrm{d}x$$
$$=Mn^2\delta^n+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{n^2f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x\leqslant1.$$

另一方面, 我们有

$$n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=n^2\int_0^\delta x^nf(x)\mathrm{d}x+n^2\int_\delta^1 x^nf(x)\mathrm{d}x\geqslant mn^2\int_0^\delta x^n\mathrm{d}x+n^2\int_\delta^1 x^n\left[1-x+\frac{f''(\theta)}{2}(x-1)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{mn^2}{n+1}\delta^{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}-n^2\left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\right)+\frac{n^2f''(\theta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}-n^2\left(\frac{\delta^{n+3}}{n+3}-\frac{2\delta^{n+2}}{n+2}+\frac{\delta^{n+1}}{n+1}\right).$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x\geqslant1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=1.$$

□

例题 0.12 Possion 核 设 $f \in R[0,1]$ 且 f 在 $x=0$ 连续, 证明

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明 因为 $f \in R[0,1]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [0,1]$. 于是对 $\forall \delta \in (0,1)$, 固定 δ, 再对 $\forall t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|\mathrm{d}x \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\arctan\frac{x}{t}\Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)| \\
&= \sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\cdot\arctan\frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2+t^2}|M+f(0)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令 $t\to 0^+$ 并取上极限, 可得

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|, \forall \delta \in (0,1).$$

再根据 δ 的任意性, 令 $\delta \to 0^+$ 可得

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)| = \frac{\pi}{2}\overline{\lim_{x\to 0^+}}|f(x)-f(0)|.$$

又由于 f 在 $x=0$ 处连续, 从而 $\overline{\lim\limits_{x\to 0^+}}|f(x)-f(0)|=0$. 故

$$0 \leqslant \underline{\lim_{t\to 0^+}}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant \overline{\lim_{t\to 0^+}}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x\right| \leqslant 0.$$

因此 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(0)\mathrm{d}x = f(0)\lim\limits_{t\to 0^+}\arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}f(0)$.

□

例题 0.13 Fejer 核 设 f 在 $x=0$ 连续且在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 可积, 则

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

证明 因为 $f \in R\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 又因为 $\sin x \sim x, x\to 0$, 所以对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta_0>0$, 使得当 $|x| \leqslant \delta_0$ 时, 有 $\sin x \geqslant (1-\varepsilon)x$. 于是对 $\forall \delta \in (0, \min\left\{\frac{1}{2},\delta_0\right\})$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}|M+f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{令}y=Nx} \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{|y|\leqslant N\delta}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y + \frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y+\frac{1}{N}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|M+f(0)|}{\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}x.$$

上式两边同时令 $N\to+\infty$ 并取上极限, 得到

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y.$$

由

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y<+\infty.$$

可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y$ 收敛. 从而根据 δ 的任意性, 上式两边同时令 $\delta\to0^+$, 再结合 f 在 $x=0$ 处连续, 可得

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\frac{\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y}{1-\varepsilon}\lim_{x\to0^+}|f(x)-f(0)|=0.\end{aligned}$$

从而

$$0\leqslant\underline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\leqslant0.$$

故 $\lim_{N\to+\infty}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|=0$. 而一方面, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x\geqslant\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}f(0)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{令y=Nx}\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}f(0)\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}f(0)\,\mathrm{d}x\xlongequal{命题??}f(0).\end{aligned}$$

另一方面, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x=\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x\\&\leqslant f(0)\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}f(0)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{令y=Nx}\frac{f(0)}{1-\varepsilon}\lim_{N\to+\infty}\int_{|y|\leqslant N\delta}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y=\frac{f(0)}{1-\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}\mathrm{d}x\frac{f(0)}{1-\varepsilon}\xlongequal{命题??}\frac{f(0)}{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

再根据 ε 的任意性, 可知

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x\leqslant f(0).$$

因此, 由夹逼准则, 可知 $\lim_{N\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(0)\mathrm{d}x=f(0)$.

□

例题 0.14 设 $\varphi_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}, n=1,2,\cdots, f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\varphi_n(x-y)\mathrm{d}y=f(x).$$

证明 由条件可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}$. 于是对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x, 再对 $\forall\delta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\leqslant\delta}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x-y|\geqslant\delta}2M\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2\delta^2}\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{令z=n(x-y)}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\\
&=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|.
\end{aligned}$$

令 $\delta\to0^+$, 再结合 f 在 $\forall x\in\mathbb{R}$ 上连续, 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)-f(x)|\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\right|\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(y)-f(x)|=\lim_{y\to x}|f(y)-f(x)|=0.$$

故

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\\
&=f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y\xlongequal{令z=n(x-y)}f(x)\lim_{n\to\infty}\int_{|z|\leqslant n\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\\
&=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z=f(x).
\end{aligned}$$

□

例题 0.15 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f'(0)$ 存在, 证明: 对任意正整数 m, 在 $n\to\infty$ 时有

$$\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x=f(0)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{\ln^k x}{k!}\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

注 这里积分换元之后, 再 Taylor 展开, 但是后续的积分与求和的换序以及余项的估计并不好处理.

笔记 估计抽象函数的渐近展开一般考虑拟合和分段. 如果考虑积分与求和换序的话并不好处理, 一般只有估计具体函数的渐近才会考虑换序.

这里分段的想法也是将原积分分成主体部分和余项部分. 容易观察 (直观地分析一下即可) 到这里积分的阶的主体部分集中在 0 附近.

证明 记 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, 则由条件可知,$g\in C[0,1]$, 从而

$$|g(x)|\leqslant C,\forall x\in[0,1]. \tag{10}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x-f(0)&=\int_0^1\left[f(x^n)-f(0)\right]\mathrm{d}x\xlongequal{令y=x^n}\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}\left[f(x)-f(0)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此原问题等价于证明对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 当 $n\to\infty$ 时, 都有

$$\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

由 Taylor 公式可知,$\forall x\in[\delta,1]$, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$e^{\frac{\ln x}{n}}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}+O\left(\frac{1}{n^m}\right),n\to\infty.$$

即存在 $M>0$, 使得 $\forall x\in[\delta,1]$, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 都有

$$\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|\leqslant\frac{M}{n^m}.\tag{11}$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n^{2m}}\in(0,1)$, 则对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 结合 (10)(11) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!n^k}g(x)\,\mathrm{d}x\right| \qquad (12)\\
&=\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\int_0^1\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{n}\int_0^1\left(e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\delta\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\int_\delta^1\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|g(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(x^{\frac{1}{n}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|\ln x|^k}{k!n^k}\right)\mathrm{d}x+\frac{C}{n}\int_\delta^1\left|e^{\frac{\ln x}{n}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ln^k x}{k!n^k}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(1+\sum_{k=0}^{m-1}|\ln x|^k\right)\mathrm{d}x+\frac{C}{n}\int_0^1\frac{M}{n^m}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{C}{n}\int_0^\delta\left(1+m\,|\ln x|^{m-1}\right)\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}=\frac{C}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\left(1-m\ln^{m-1}x\right)\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}\\
&=\frac{C}{n^{2m+1}}-\frac{mC}{n}\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x+\frac{MC}{n^{m+1}}\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|. \qquad (13)
\end{aligned}$$

注意到

$$\int\ln^n x\mathrm{d}x=x\left(a_0+a_1\ln x+\cdots+a_n\ln^n x\right)+c=x\left(a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\ln k\right)+c,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,c$ 都是常数. 又因为对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}=0$, 所以一定存在 $N'>0$, 使得当 $n>N'$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|&=\left|x\left(b_0+b_1\ln x+\cdots+b_{m-1}\ln^{m-1}x\right)\Big|_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\right|=\left|\frac{1}{n^{2m}}\left(b_0+b_1\ln\frac{1}{n^{2m}}+\cdots+b_{m-1}\ln^{m-1}\frac{1}{n^{2m}}\right)\right|\\
&\leqslant\frac{mB}{n^{2m}}\left|\ln^{m-1}\frac{1}{n^{2m}}\right|=\frac{2m^2B\ln^{m-1}n}{n^{2m}}\leqslant\frac{2m^2B}{n^{2m-1}}\leqslant\frac{2m^2B}{n^m}, \qquad (14)
\end{aligned}$$

其中 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}$ 都是常数,$B=\max\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}\}$. 因此由 (13)(14) 式可得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 当 $n>\max\{N,N'\}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\left|\int_0^{\frac{1}{n^{2m}}}\ln^{m-1}x\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\frac{MC+C}{n^{m+1}}+\frac{mC}{n}\cdot\frac{2m^2B}{n^m}=\frac{MC+C-2m^3BC}{n^{m+1}}.
\end{aligned}$$

即 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\ln x}{n}}g(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n^{k+1}}\int_0^1\frac{\ln^k x}{k!}g(x)\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),n\to\infty$. 结论得证.

□