

## 0.1 反常积分收敛抽象问题

## 命题 0.1

设  $f$  为  $[a, +\infty)$  上的非负可积函数, 若存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy.$$

进而可得

- (i)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的充要条件是存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy$  存在.
- (ii)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散的充要条件是存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(y) dy = +\infty$ .

**注** 对于瑕积分也有类似的结论.

**笔记** 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

**证明** 令  $g(x) = \int_a^x f(y) dy$ , 则  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上非负单调递增. 由单调收敛定理可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . 从而由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

□

## 命题 0.2 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  收敛, 则

- (1) 存在趋于  $+\infty$  的  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ .
- (2) 若  $f$  不一定连续, 但有  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , 则存在严格递增的  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n f(x_n) = 0$ .

**笔记** 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的  $x_n \ln x_n$  可以换成任意数列  $\{a_n\}$ , 只要满足  $\int_a^{\infty} a_n dx = +\infty$  即可

**证明**

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x) dx = f(\theta(A)), A+1 > \theta(A) > A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{A+1} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} f(\theta(A)), \lim_{A \rightarrow +\infty} \theta(A) = +\infty.$$

这就完成了证明.

- (2) 若  $|f(x)| > \frac{1}{x \ln x}, \forall x > e$ , 则由  $\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = +\infty$  可得  $\int_e^{\infty} |f(x)| dx = +\infty$  矛盾! 故存在  $x_1 > e$  使得  $|f(x_1)| \leq \frac{1}{x_1 \ln x_1}$ . 同样的, 如果  $|f(x)| > \frac{1}{2x \ln x}, \forall x > x_1 + 1$ , 同理可得矛盾! 因此必然存在  $x_2 > x_1 + 1$  使得  $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2x_2 \ln x_2}$ . 依次下去我们得到

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{nx_n \ln x_n}, n = 1, 2, \dots,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n \cdot |f(x_n)| = 0.$$

□

### 命题 0.3

- (1) 设  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  单调, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ .  
 (2) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛且  $x f(x)$  单调, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f(x) = 0$ .

◆

### 证明

- (1) 不妨设  $f$  递减, 否则用  $-f$  代替  $f$ , 从而

$$A f(A) \geq \int_A^{2A} f(x) dx, \quad \frac{A}{2} f(A) \leq \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x) dx \leq A f(A) \leq 2 \int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx.$$

由  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{2A} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A f(A) = 0$ .

- (2) 不妨设  $x f$  递减, 否则用  $-f$  代替  $f$  即可. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A \ln A f(A) &= A f(A) \int_{\sqrt{A}}^A \frac{1}{x} dx \leq \int_{\sqrt{A}}^A \frac{x f(x)}{x} dx = \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx, \\ \int_A^{A^2} f(x) dx &= \int_A^{A^2} \frac{x f(x)}{x} dx \leq A f(A) \int_A^{A^2} \frac{1}{x} dx = A \ln A f(A). \end{aligned}$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x) dx \leq A \ln A f(A) \leq 2 \int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx$$

又由  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^A f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty, \quad \int_A^{A^2} f(x) dx \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty.$$

故由夹逼准则可知  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A \ln A f(A) = 0$ .

□

### 命题 0.4

若  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且  $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

◆

### 证明

□

**例题 0.1** 设  $f \in D^1(0, +\infty)$  且  $|f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减. 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$ .

**证明** 若存在  $a > 0$ , 使得  $f'(a) = 0$ , 则由  $|f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减可得

$$f'(x) = 0, \quad \forall x > a.$$

此时结论显然成立.

若  $f' \neq 0, \forall x \in (0, +\infty)$ , 则由导数介值性可知,  $f'$  在  $(0, +\infty)$  上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设  $f' > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ , 故此时  $f$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增. 并且此时  $f' = |f'|$  在  $(0, +\infty)$  递减, 故此时  $f'$  在  $(0, +\infty)$  内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y) dy = f(x) - f(1).$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 所以  $\int_1^{+\infty} f'(y) dy$  收敛. 于是由命题 0.3(1) 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$ .  $\square$

**例题 0.2** 设  $f$  在  $(a, +\infty)$  可导. 如果  $f$  有界且  $xf'$  为单调函数, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0.$$

**证明** 由  $xf'$  单调可知,  $g(x) \triangleq xf'$  在  $(a, +\infty)$  上内闭 Riemann 可积. 从而  $f' = \frac{g(x)}{x}$  在  $(a, +\infty)$  上也内闭 Riemann 可积. 不妨设  $xf'$  单调递增, 由单调有界定理可知,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x)$  存在或  $+\infty$ . 由  $f$  有界可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) \leq 0$ . 否则, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) > 0$ , 则存在  $C > 0$ , 使得

$$xf'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a, 0\}, +\infty). \quad (1)$$

对 (1) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{C}{t} dt = C \ln |x| - C \ln a.$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 这与  $f$  有界矛盾! 于是由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) \leq 0$  可知存在  $X > \max\{a, 0\}$ , 使得

$$xf'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0, \quad x \in (X, +\infty).$$

故  $f$  在  $(X, +\infty)$  上递减. 又因为  $f$  有界, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在可得  $\int_a^{+\infty} f'(t) dt$  收敛. 又  $xf'(x)$  单调, 于是由命题 0.3(2) 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x f'(x) = 0$ .  $\square$

**例题 0.3** 设  $f \in D[a, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  且  $f'$  严格递增, 证明  $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$  收敛.

**证明** 由命题 ?? 和命题 ?? 可知,  $f' \in C[a, +\infty)$ . 又由命题 ?? 可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 故存在  $X > 0$ , 使得  $f', f$  在  $[X, +\infty)$  上恒正, 且  $f$  在  $[X, +\infty)$  上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,  $f$  存在严格单调递增的反函数

$$g : [f(X), +\infty) \rightarrow [X, +\infty).$$

于是令  $x = g(y)$ , 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin yg'(y) dy.$$

又由反函数求导定理可知  $g'(y)f'(g(y)) = 1$ , 并且  $f(g(y)) = y$ , 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x) dx = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin yg'(y) dy = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))} dy.$$

因为  $f', g$  都严格递增趋于  $+\infty$ , 所以  $\frac{1}{f'(g(x))}$  严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left| \int_{f(X)}^A \sin y dy \right| \leq 2, \quad \forall A \geq f(X).$$

故由 Dirichlet 判别法可知  $\int_0^{\infty} \sin f(x) dx$  收敛.  $\square$

**例题 0.4**

(1) 设  $f$  内闭可积且  $f(x) > 0, x_0 > 0$ . 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛, } \ell < 1 \\ \text{发散, } \ell > 1 \end{cases}.$$

(2) 设  $f > 0$  内闭可积, 若有常数  $k > 1$  使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛, } \ell < \frac{1}{k} \\ \text{发散, } \ell > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设  $f > 0$  内闭可积, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{收敛, } -\infty \leq p < -1 \\ \text{发散, } -1 < p \leq +\infty \end{cases}.$$

**注** 第(1)题中当  $\ell = 1$  时无法判断反常积分的敛散性!

第(3)题中当  $p = 1$  时无法判断反常积分的敛散性!

**注** 第(3)题的条件  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p$  可改为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = p$ . 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = p.$$

**证明**

(1) 注意到

$$\int_a^\infty f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x) dx \triangleq \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由题设可知, 存在  $X > a$ , 使得

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{f(x_0+x)}{f(x)} \leq \ell + \varepsilon, \forall x \geq X.$$

从而当  $n > \frac{X-a}{x_0}$  时, 就有  $a+nx_0 > X$ , 进而

$$a_{n+1} = \int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x) dx = \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0) dx \in [(\ell - \varepsilon)a_n, (\ell + \varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon, \forall n > \frac{X-a}{x_0}.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ , 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令  $x = e^t$ , 任取  $c > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \int_c^\infty f(x) dx &= \int_{\ln c}^\infty f(e^t) e^t dt. \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(e^{t+\ln k}) e^{t+\ln k}}{f(e^t) e^t} &= k \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(ke^t)}{f(e^t) e^t} = k\ell. \end{aligned}$$

于是由 (??) 可知结论成立.

(3) 只讨论  $p \in \mathbb{R}$  的情况, 其余  $p = \pm\infty$  情况类似. 由题意可知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $X > e$ , 使得当  $x > X$  时, 有

$$p - \varepsilon \leq \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq p + \varepsilon \iff x^{p-\varepsilon} \leq f(x) \leq x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$


再由比较判别法即得结论. □

**注** 上述例题第 (3) 题的证明中, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为  $X$  是与  $\varepsilon$  有关的. 因此只有固定  $\varepsilon$  时, 才有  $\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$  成立. 故再利用比较判别法, 不能令  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**例题 0.5** 若  $f \in C^1[0, +\infty)$  且  $f(0) > 0, f'(x) > 0$ . 若  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < \infty$ , 证明  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$ .

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

**证明** 由条件可知  $f(x)$  严格递增且恒正, 从而  $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是


$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{f(x) + f'(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| dx = \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f(x)[f(x) + f'(x)]} dx \leq \int_0^\infty \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{f^2(x)} df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x) + f'(x)} \right| + \frac{1}{f(x) + f'(x)}.$$

又  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx < +\infty$ , 故  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)} dx < \infty$ . □

**例题 0.6** 设非负函数  $f \in C(\mathbb{R})$  使得对任何  $k \in \mathbb{N}$  都有  $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M$ , 证明  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  收敛且  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \leq M$ .

 **笔记** 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

**证明** **证法一:**  $\forall a < b$ , 注意到  $1 - x \leq e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ . 从而对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x) dx \leq \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

于是

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{k} \int_a^b |x| f(x) dx + M.$$

令  $k \rightarrow +\infty$  得  $\int_a^b f(x) dx \leq M$ . 再由  $a, b$  的任意性可得  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq M$ .

**证法二:** 由 Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x) dx \leq M.$$

□

**例题 0.7** 设  $f \in C^1[0, +\infty)$  满足

$$|f'(x)| \leq M, \forall x \geq 0, \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty.$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**证明** 由条件可得

$$\int_0^{+\infty} |f^2(x)f'(x)| dx \leq M \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

故  $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx$  收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x)$  存在. 由  $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  及 **命题 0.2(1)** 可知, 存在  $\{x_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $f(x_n) \rightarrow 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^3(x_n) = 0$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\square$

**例题 0.8** 设  $f \in D^2[0, +\infty)$  且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2 dx < \infty.$$

证明  $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty$ .

**证明** 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2 dx} < +\infty.$$

故  $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx$  收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^x |f'(y)|^2 dy = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(y)f''(y) dy \quad (2)$$

由 **命题 0.1** 可知, 只须找一个  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使  $f(x_n)f'(x_n)$  极限存在即可.

由于  $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$ , 故由 **命题 0.2(1)** 可知存在  $a_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n)|^2 = 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$ . 于是再由 **命题??** 可知, 存在  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f^2(x_n)]' = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由 **命题 0.1** 及 (2) 式可知结论成立.  $\square$

**例题 0.9**

**证明**

$\square$