0.1 矩阵的迹

命题 0.1 (矩阵迹的性质)

设 A, B 是 n 阶矩阵, 则有:

1. (线性)$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$,$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)$;
2. (对称性)$\mathrm{tr}(A')=\mathrm{tr}(A)$;
3. (交换性)$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

证明 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证.

□

例题 0.1 求证: 不存在 n 阶矩阵 A, B, 使得 $AB-BA=kI_n(k\neq 0)$.

证明 用反证法证明. 若存在 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $AB-BA=kI_n(k\neq 0)$, 则

$$kn=\mathrm{tr}(kI_n)=\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$$

矛盾.

□

命题 0.2

设 A 是 n 阶矩阵,P 是同阶可逆阵, 求证:$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$, 即相似矩阵具有相同的迹.

证明 因为 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, 故 $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})=\mathrm{tr}(A)$.

□

命题 0.3

1. 设 n 阶实矩阵 A 适合 $A'=-A$, 如果存在同阶实矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$;
2. 设 n 阶复矩阵 A 适合 $\overline{A}'=-A$, 如果存在同阶复矩阵 B, 使得 $AB=B$, 则 $B=O$.

证明

1. 在等式 $AB=B$ 两边同时左乘 B' 可得

$$B'AB=B'B.$$

上式两边同时转置并注意到 $A'=-A$, 可得

$$B'B=(B'B)'=(B'AB)'=B'A'B=-B'AB=-B'B,$$

从而有 $B'B=O$. 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得 $B=O$.

2. 证明与 1 类似.

□

命题 0.4

1. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 实矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AA')\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $A=O$.
2. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 复矩阵, 则 $\mathrm{tr}(A\overline{A}')\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $A=O$.

证明 1. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 实矩阵, 则通过计算可得

$$\mathrm{tr}(AA')=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij}=0(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$, 即 $A=O$.

2. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 复矩阵, 则通过计算可得

$$\operatorname{tr}(A\overline{A}')=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij}=0(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$, 即 $A=O$.

□

例题 0.2 已知 A,B 均为 n 阶实矩阵, 且 $AB-BA=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$, 求 $A+B$.

证明 由条件可得

$$\operatorname{tr}\left[(A+B)(A+B)^{T}\right]=\operatorname{tr}\left(A^2B-ABA+BAB-B^2A\right)=0,$$

故由命题 0.4知 $A+B=O$.

□

命题 0.5

设 A 为 n 阶实矩阵, 求证:$\operatorname{tr}(A^2)\leqslant\operatorname{tr}(AA')$, 等号成立当且仅当 A 是对称阵.

笔记 也可以将 A^2 和 AA' 的对角元求和写出来, 再利用 Cauchy 不等式证明.

证明 根据命题 0.4, 再由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\operatorname{tr}((A-A')(A-A')')\\
&=\operatorname{tr}((A-A')(A'-A))=\operatorname{tr}(AA'-A^2-(A')^2+A'A)\\
&=2\operatorname{tr}(AA')-2\operatorname{tr}(A^2),
\end{aligned}$$

故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知 $A-A'=O$, 即 A 为对称阵. 若已知 A 为对称阵, 则 $\operatorname{tr}(AA')=\operatorname{tr}(A^2)$ 显然成立.

□

例题 0.3 设 A,B 为实对称方阵, 证明: $\operatorname{tr}(ABAB)\leqslant\operatorname{tr}(AABB)$.

证明 由命题 0.5和 A,B 的对称性可得

$$\operatorname{tr}(ABAB)=\operatorname{tr}\left[(AB)^2\right]\leqslant\operatorname{tr}\left[(AB)(AB)^{T}\right]=\operatorname{tr}(ABBA)=\operatorname{tr}(AABB).$$

□

例题 0.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是实对称阵且 $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2=O$, 证明: 每个 $A_i=O$.

证明 对题设中的等式两边同时取迹, 可得

$$0=\operatorname{tr}(O)=\operatorname{tr}(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2)=\operatorname{tr}(A_1A_1')+\operatorname{tr}(A_2A_2')+\cdots+\operatorname{tr}(A_kA_k').$$

又由于 $\operatorname{tr}(A_iA_i')\geqslant 0$, 从而只可能是 $\operatorname{tr}(A_iA_i')=0(1\leqslant i\leqslant k)$, 再次由零矩阵的充要条件可得 $A_i=O(1\leqslant i\leqslant k)$.

□

命题 0.6

设 A,B 是两个 n 阶矩阵, 使得 $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(CBA)$ 对任意 n 阶矩阵 C 成立, 求证:$AB=BA$.

注 根据矩阵迹的性质不能得到 $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(BAC)$, 只能得到 $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(CAB)$.

证明 设 $AB=(d_{ij}),BA=(e_{ij})$, 令 $C=E_{kl}(1\leqslant k,l\leqslant n)$, 则

$$\operatorname{tr}(ABC)=d_{lk},\operatorname{tr}(CBA)=e_{lk},$$

因此 $d_{lk}=e_{lk}(1\leqslant k,l\leqslant n)$, 即有 $AB=BA$.

□

注 注若 A,B 是实 (复) 矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得 $\operatorname{tr}((AB-BA)C)=0$, 令 C 为 $AB-BA$ 的转置 (共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

例题 0.5 若 n 阶实方阵 A 满足 $AA' = I_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 A, B 满足 $A^2 = cAB + B^2$, 其中 c 是非零常数.

证明 用反证法, 设存在 n 阶正交阵 A, B, 使得 $A^2 = cAB + B^2 (c \neq 0)$. 在等式两边同时左乘 A', 右乘 B', 可得 $AB' = cI_n + A'B$, 从而 $cI_n = A'B - AB'$. 两边同时取迹, 可得 $0 \neq nc = \mathrm{tr}(cI_n) = \mathrm{tr}(A'B) - \mathrm{tr}(AB') = \mathrm{tr}((A'B)') - \mathrm{tr}(AB') = \mathrm{tr}(B'A) - \mathrm{tr}(AB') = 0$, 矛盾.

□

例题 0.6 设 A, B 为 n 阶实对称阵, 证明:$\mathrm{tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$, 并求等号成立的充要条件.

证明 证法一: 由命题 0.5, 再结合 A, B 的对称性可得

$$\mathrm{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \mathrm{tr}\left((AB)(AB)'\right) = \mathrm{tr}\,(ABBA) = \mathrm{tr}\left(A^2B^2\right).$$

等号成立当且仅当 AB 也为实对称矩阵, 即 $AB = B'A' = BA$.

证法二:设 P 为正交矩阵, 使得 $P'AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A \mapsto P'AP, B \mapsto P'BP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 A 为正交相似标准型 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 设 $B = (b_{ij})$, 则经计算可知

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2B^2) - \mathrm{tr}((AB)^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 b_{ij}^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j b_{ij}^2 \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j) b_{ij}^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 b_{ij}^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leqslant i < j \leqslant n)$, 这也当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 即当且仅当 $AB = BA$ 成立.

□