0.1 有理标准型的几何与应用

回顾有理标准型和循环子空间相关理论.

命题 0.1

设 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 求证:A 的特征多项式和极小多项式相等.

证明 证法一: 设 A 的 n 个不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则由推论??可知, 特征多项式 $f(\lambda)$ 和极小多项式 $m(\lambda)$ 有相同的根（不计重数）, 因此

$$f(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

证法二: 由于 A 有 n 个不同的特征值, 故 A 相似于对角矩阵. 又因为相似矩阵有相同的特征多项式和极小多项式, 所以只要对对角矩阵证明此结论即可. 设 $A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 则 $\lambda I_n-A=\mathrm{diag}\{\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\cdots,\lambda-\lambda_n\}$, 这是一个主对角元素两两互素的对角矩阵, 由$\lambda$-矩阵和初等因子的基本性质 (1) 以及数学归纳法可知其法式为 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\}$. 因此,$A$ 的特征多项式和极小多项式相等. □

命题 0.2

设 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 且特征值 λ_i 对应的特征向量为 α_i, 由推论??可知 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 则 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 是 A 的循环空间 $\mathbb{C}^n$ 的循环向量, 即 $\mathbb{C}^n=L(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha)=C(A,\alpha)$ 为循环空间,α 是循环向量.

证明 事实上, 由 $A^k\alpha=\lambda_1^k\alpha_1+\cdots+\lambda_n^k\alpha_n$, 利用 Vandermonde 行列式容易证明 $\{\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 从而 $\mathbb{C}^n=L(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha)=C(A,\alpha)$ 为循环空间,α 是循环向量. □

命题 0.3

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)$, 其中 $P_i(\lambda)(1\le i\le k)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式. 求证:A 的有理标准型只有一个 Frobenius 块, 并且 A 在复数域上可对角化.

注 我们也可以利用定理??和初等因子证明这个命题. 若利用不变因子在基域扩张下的不变性, 则这个命题也可由命题 0.1得到.

证明 设 A 的不变因子组为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda),i=1,2,\cdots,n-1$, 则有

$$f(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)\tag{1}$$

由于 $P_i(\lambda)$ 是不可约多项式, 故存在某个 j, 使得 $P_i(\lambda)\mid d_j(\lambda)$, 否则, 由不可约多项式的基本性质 (1) 可知 $(P_i(\lambda),d_j(\lambda))=1,j=1,2,\cdots,n$. 再由互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 可知 $(P_i(\lambda),d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda))=1$, 这与(1)矛盾! 从而 $P_i(\lambda)\mid d_n(\lambda)(1\le i\le k)$. 由互素多项式和最大公因式的基本性质 (1) 可知,$P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)\mid d_n(\lambda)$, 因此只能是 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$,$d_n(\lambda)=f(\lambda)$, 从而 A 的有理标准型只有一个 Frobenius 块. 由于特征多项式 $f(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上无重因式, 故 $(f(\lambda),f'(\lambda))=1$, 从而 $f(\lambda)$ 在复数域上无重根, 即 A 有 n 个不同的特征值, 于是 A 在复数域上可对角化. □

推论 0.1

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)$, 其中 $P_i(\lambda)(1\le i\le k)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式. 并且 α_i 为线性方程组 $P_i(A)x=0$ 的非零解, 则 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ 是 A 的循环空间 $\mathbb{K}^n$ 的循环向量.

证明 由命题 0.3及定理??可知 $\mathbb{K}^n$ 就是一个循环空间.(未完成证明) □

命题 0.4

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,φ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 证明以下 3 个结论等价:

(1) V 只有平凡的 φ-不变子空间;

(2) V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间;

(3) $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 任取 V 中非零向量 α, 则循环子空间 $C(\varphi,\alpha)$ 是非零 φ-不变子空间. 由于 V 只有平凡的 φ-不变子空间, 故 $C(\varphi,\alpha)=V$, 即 V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间.

(2) $\Rightarrow$ (3): 用反证法, 假设 $f(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$, 其中 $g(\lambda),h(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上次数小于 n 的首一多项式. 由 Cayley - Hamilton 定理可知 $\mathbf{0}=f(\varphi)=g(\varphi)h(\varphi)$, 故由命题??(1) 的逆否命题可知 $g(\varphi),h(\varphi)$ 中至少有一个是奇异 (不可逆/非双射) 线性变换, 不妨设为 $g(\varphi)$, 由推论??可知 $\mathrm{Ker}g(\varphi)\neq 0$. 任取 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 中的非零向量 α, 设 $\deg g(\lambda)=r$, 则不妨设

$$g(\varphi)=a_r\varphi^r+a_{r-1}\varphi^{r-1}+\cdots+a_1,\quad 其中\ a_r\neq 0.$$

由 $\alpha\in\ker g(\varphi)$ 可知

$$g(\varphi)(\alpha)=a_r\varphi^r(\alpha)+a_{r-1}\varphi^{r-1}(\alpha)+\cdots+a_1\alpha=0.$$

于是

$$\varphi^r(\alpha)=-\frac{a_{r-1}}{a_r}\varphi^{r-1}(\alpha)-\cdots-\frac{a_1}{a_r}\alpha. \tag{2}$$

假设对 $k\geq r$ 且 $k\in\mathbb{N}$, 成立 $\varphi^k(\alpha)$ 可由 $\{\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 线性表示, 则对(2)式两边同时作用 φ^{k-r+1} 可得

$$\varphi^{k+1}(\alpha)=-\frac{a_{r-1}}{a_r}\varphi^{k}(\alpha)-\cdots-\frac{a_1}{a_r}\varphi^{k-r+1}(\alpha).$$

于是由归纳假设可知,$\varphi^{k+1}(\alpha)$ 可由 $\{\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 线性表示. 故由数学归纳法可得, 对 $\forall k\geq r$ 且 $k\in\mathbb{N}$, 都有 $\varphi^k(\alpha)$ 可由 $\{\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 线性表示. 因此 $C(\varphi,\alpha)=L(\alpha,\varphi(\alpha),\cdots\cdots)=L(\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{r-1}(\alpha))$, 其维数 $\leq r<n$, 故 $C(\varphi,\alpha)\neq V$, 这与 V 中任一非零向量都是循环向量矛盾!

(3) $\Rightarrow$ (1): 用反证法, 假设存在非平凡的 φ-不变子空间 U,$\dim U=r$, 则 φ 在一组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵 $M=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $\varphi|_U$ 的表示矩阵. 于是特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_V-\varphi|=|\lambda\boldsymbol{I}_n-M|=|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{A}|\cdot|\lambda\boldsymbol{I}_{n-r}-\boldsymbol{B}|.$$

是两个低次多项式的乘积, 这与 $f(\lambda)$ 的不可约性矛盾! □

命题 0.5

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,φ 的极小多项式为 $m(\lambda)$. 证明:$m(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式的充要条件是 V 的任一非零 φ-不变子空间 U 必为如下形式:

$$U=C(\varphi,\alpha_1)\oplus C(\varphi,\alpha_2)\oplus\cdots\oplus C(\varphi,\alpha_k)$$

并且 $\varphi|_{C(\varphi,\alpha_i)}$ 的极小多项式都是 $m(\lambda)$. 此时,$\varphi|_U$ 的极小多项式也是 $m(\lambda)$.

证明 **必要性**: 设 $\varphi|_U$ 的极小多项式为 $n(\lambda)$, 则 $m(\varphi|_U)=m(\varphi)|_U=\mathbf{0}$, 从而 $n(\lambda)\mid m(\lambda)$. 因为 $m(\lambda)$ 不可约, 所以 $n(\lambda)=m(\lambda)$. 又由于 $\varphi|_U$ 的所有不变因子都要整除 $m(\lambda)$ 且 $m(\lambda)$ 不可约, 故所有的非常数不变因子都等于 $m(\lambda)$. 最后, 由有理标准型的几何意义即得

$$U=C(\varphi,\alpha_1)\oplus C(\varphi,\alpha_2)\oplus\cdots\oplus C(\varphi,\alpha_k).$$

并且 $\varphi|_{C(\varphi,\alpha_i)}$ 在基 $\{\alpha_i,\varphi(\alpha_i),\cdots,\varphi^{r_i-1}(\alpha_i)\}$ 下的表示矩阵就是友阵 $C(m(\lambda))$, 其中 $r_i=\dim C(\varphi,\alpha_i)$. 于是 $\varphi|_{C(\varphi,\alpha_i)}$ 的极小多项式就是其表示矩阵 $C(m(\lambda))$ 的极小多项式. 又由引理??可知,$C(m(\lambda))$ 的极小多项式就是 $m(\lambda)$, 并且 $n(\lambda)=m(\lambda)$, 故结论得证.

充分性: 用反证法, 设 $m(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$, 其中 $g(\lambda),h(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上次数小于 $m(\lambda)$ 次数的首一多项式, 则 $\mathbf{0}=m(\varphi)=g(\varphi)h(\varphi)$, 故由命题**??**(1) 的逆否命题可知 $g(\varphi),h(\varphi)$ 中至少有一个是奇异线性变换, 不妨设为 $g(\varphi)$, 于是由推论**??**可知 $\mathrm{Ker}g(\varphi)\neq 0$. 任取 $\mathrm{Ker}g(\varphi)$ 中的非零向量 α, 得到循环子空间 $U=C(\varphi,\alpha)$,

由 $g(\varphi)(\alpha)=\mathbf{0}$ 可知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有 $\varphi^k(g(\varphi)(\alpha))=0$. 从而对 $\forall\beta\in U=C(\varphi,\alpha)$, 存在不全为零的 a_i 使得

$$\begin{aligned}g(\varphi)(\beta)&=g\left(a_1\alpha+a_2\varphi(\alpha)+a_3\varphi^2(\alpha)+\cdots\right)\\&=a_1g(\alpha)+a_2g(\varphi(\alpha))+a_3g\left(\varphi^2(\alpha)\right)+\cdots\\&=a_1g(\alpha)+a_2\varphi(g(\alpha))+a_3\varphi^2(g(\alpha))+\cdots\\&=0+0+0+\cdots=0.\end{aligned}$$

因此 $g(\varphi|_U)=g(\varphi)|_U=\mathbf{0}$, 于是 $\varphi|_U$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)$, 从而其次数 $\leq\deg g(\lambda)<\deg m(\lambda)$, 这与条件矛盾! □

定理 0.1 (基于初等因子组的有理标准型)

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A 的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{r_1},P_2(\lambda)^{r_2},\cdots,P_k(\lambda)^{r_k}$, 证明:$A$ 相似于分块对角矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{F}(P_1(\lambda)^{r_1}),\boldsymbol{F}(P_2(\lambda)^{r_2}),\cdots,\boldsymbol{F}(P_k(\lambda)^{r_k})\}$$
$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{C}(P_1(\lambda)^{r_1}),\boldsymbol{C}(P_2(\lambda)^{r_2}),\cdots,\boldsymbol{C}(P_k(\lambda)^{r_k})\}$$

称为 A 的**基于初等因子组的有理标准型**.

证明 由 Frobenius 块和友阵的性质可知,$\lambda\boldsymbol{I}_n-\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 和 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 都相抵于

$$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,P_1(\lambda)^{r_1};1,\cdots,1,P_2(\lambda)^{r_2};\cdots;1,\cdots,1,P_k(\lambda)^{r_k}\}$$

再由λ-矩阵和初等因子的基本性质 (2) 可知,$\widetilde{\boldsymbol{F}},\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 与 A 有相同的初等因子组, 从而它们相似. □

定理 0.2

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,φ 的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{r_1},P_2(\lambda)^{r_2},\cdots,P_k(\lambda)^{r_k}$. 证明: 存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in V$, 使得

$$V=C(\varphi,\alpha_1)\oplus C(\varphi,\alpha_2)\oplus\cdots\oplus C(\varphi,\alpha_k)$$

证明 由基于初等因子组的有理标准型和定理**??**即得. □

例题 0.1 求证: 存在 n 阶实方阵 A, 满足 $A^2+2A+5I_n=O$ 的充要条件是 n 为偶数. 当 $n\geq 4$ 时, 验证满足上述条件的矩阵 A 有无限个不变子空间.

证明 **必要性**: 注意到 A 适合多项式 $g(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+5$, 故 A 的极小多项式 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$, 又因为 $g(\lambda)$ 在实数域上不可约, 故只能是 $m(\lambda)=g(\lambda)$. 同理可证 A 所有的非常数不变因子都等于 $g(\lambda)$, 从而 A 的不变因子组为 $1,\cdots,1,g(\lambda),\cdots,g(\lambda)$ (k 个 $g(\lambda)$). 因此 A 的特征多项式 $f(\lambda)=g(\lambda)^k$, 于是 $n=\deg f(\lambda)=2k$ 为偶数.

充分性: 设 $n=2k$ 为偶数, 则由必要性的证明可知,A 的不变因子组为 $1,\cdots,1,g(\lambda),\cdots,g(\lambda)$ (k 个 $g(\lambda)$). 可用有理标准型构造满足条件的矩阵:

$$A=\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&-5\\1&-2\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&-5\\1&-2\end{pmatrix}\right\}(k\text{ 个二阶方阵})\tag{3}$$

当 $n\geq 4$ 时, 设 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是前 4 个标准单位列向量, 则容易验证(3)式中的矩阵 A 满足 $Ae_1=e_2,Ae_3=e_4$, 于是构造循环子空间 $\{C_l:=C(A,e_1+le_3)=L(e_1+le_3,e_2+le_4),l\in\mathbb{R}\}$, 进一步容易验证循环子空间 $\{C_l:=C(A,e_1+le_3)=L(e_1+le_3,e_2+le_4),l\in\mathbb{R}\}$ 是两两互异的 A-不变子空间, 故 A 有无限个不变子空间. □

命题 0.6

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 求证:A 的极小多项式的次数小于等于 $\mathrm{r}(A)+1$.

证明 证法一: 设 A 的不变因子组为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 则极小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$, 并且由定理**??**可知 A

相似于 $F=\mathrm{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$. 设 $\deg d_k(\lambda)=r$, 若 $d_k(0)\neq 0$, 则由 Frobenius 块的基本性质 (1) 可知 $F(d_k(\lambda))$ 非异; 若 $d_k(0)=0$, 则由 Frobenius 块的基本性质 (1) 可知 $F(d_k(\lambda))$ 奇异且右上角的 $r-1$ 阶子式非零, 从而秩为 $r-1$. 因此,$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(F)\geq \mathrm{r}(F(d_k(\lambda)))\geq r-1=\deg d_k(\lambda)-1$.

证法二: 从 A 的极小多项式 $m(\lambda)$ 分离出来的初等因子中, 形如 λ^r 的初等因子至多只有 1 个, 对应于零特征值的 Jordan 块 $J_r(0)$, 其余的初等因子对应于非零特征值的 Jordan 块. 因此 $\mathrm{r}(A)$ 大于等于这些 Jordan 块秩的和, 后者等于 $\deg m(\lambda)-1$ 或 $\deg m(\lambda)$. □

命题 0.7

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A 的不变因子组是 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda)$ 是非常数首一多项式,$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(1\leq i\leq k-1)$. 求证: 对 A 的任一特征值 λ_0,

$$\mathrm{r}(\lambda_0 I_n-A)=n-\sum_{i=1}^{k}\delta_{d_i(\lambda_0),0}$$

其中记号 $\delta_{a,b}$ 表示: 若 $a=b$, 取值为 1; 若 $a\neq b$, 取值为 0.

证明 证法一: 设 $\deg d_i(\lambda)=r_i$, 则由定理??可知 A 相似于 $F=\mathrm{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$, 而相似矩阵有相同的特征多项式, 故 $\lambda_0 I_n-A=\lambda_0 I_n-F$. 由 Frobenius 块的基本性质 (2) 可知 $|\lambda_0 I_{r_i}-F(d_i(\lambda))|=d_i(\lambda_0)$. 若 $d_i(\lambda_0)\neq 0$, 则 $\lambda_0 I_{r_i}-F(d_i(\lambda))$ 非异; 若 $d_i(\lambda_0)=0$, 则 $\lambda_0 I_{r_i}-F(d_i(\lambda))$ 奇异且右上角的 r_i-1 阶子式非零, 从而秩为 r_i-1. 因此,

$$\mathrm{r}(\lambda_0 I_n-A)=\mathrm{r}(\lambda_0 I_n-F)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{r}(\lambda_0 I_{r_i}-F(d_i(\lambda)))$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(r_i-\delta_{d_i(\lambda_0),0})=n-\sum_{i=1}^{k}\delta_{d_i(\lambda_0),0}$$

证法二: 由定理??可知存在可逆 λ-矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)\}$$

在上式中令 $\lambda=\lambda_0$, 注意到 $P(\lambda_0),Q(\lambda_0)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵, 故 $\lambda_0 I_n-A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda_0),\cdots,d_k(\lambda_0)\}$, 于是 $\mathrm{r}(\lambda_0 I_n-A)$ 等于 n 减去等于零的 $d_i(\lambda_0)$ 的个数, 从而结论得证. □

命题 0.8

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 求证: 若 $\mathrm{tr}(A)=0$, 则 A 相似于一个 $\mathbb{K}$ 上主对角元全为零的矩阵.

证明 对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时,$A=O$, 结论显然成立. 设阶数小于 n 时结论成立, 现证 n 阶的情形. 由于题目的条件和结论在相似关系下不改变, 故不妨从一开始就假设 A 是有理标准型

$$F=\mathrm{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是 A 的非常数不变因子,$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(1\leq i\leq k-1)$,$\deg d_i(\lambda)=r_i$. 若 r_i 都为 1, 则 $d_1(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=\lambda-c$, 从而 $A=cI_n$. 又 $\mathrm{tr}(A)=0$, 故 $c=0$, 从而 $A=O$, 结论成立. 以下假设存在某个 $r_i>1$, 将第 $(1,1)$ 分块与第 (i,i) 分块对换, 这是一个相似变换, 此时矩阵的第 $(1,1)$ 元为零, 故不妨设 A 的第 $(1,1)$ 元为零. 注意到矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha'\\ \beta&B\end{pmatrix}$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}^{n-1}$,$B\in M_{n-1}(\mathbb{K})$,$\mathrm{tr}(B)=0$. 由归纳假设, 存在 $\mathbb{K}$ 上的 $n-1$ 阶非异阵 Q, 使得 $Q^{-1}BQ$ 的主对角元全为零, 令 $P=\begin{pmatrix}1&O\\ O&Q\end{pmatrix}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&\alpha'Q\\ Q^{-1}\beta&Q^{-1}BQ\end{pmatrix}$ 的主对角元全为零, 结论得证. □

命题 0.9

设 C 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 求证: 存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A,B, 使得 $AB-BA=C$ 的充要条件是 $\mathrm{tr}(C)=0$.

证明 必要性由矩阵迹的线性和交换性即得, 下证充分性. 由于题目的条件和结论在同时相似变换 $A\mapsto P^{-1}AP$,$B\mapsto$

$P^{-1}BP, C \mapsto P^{-1}CP$ 下不改变, 故由命题 0.8不妨从一开始就假设 $C = (c_{ij})$ 的主对角元 $c_{ii} = 0(1 \le i \le n)$. 取定 $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的主对角元互异的对角矩阵. 设 $B = (x_{ij})$, 则 $AB - BA = C$ 等价于方程 $\lambda_i x_{ij} - \lambda_j x_{ij} = c_{ij}$. 当 $i = j$ 时, 上式恒成立, 故 x_{ii} 可任取. 当 $i \neq j$ 时,$x_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}$ 被唯一确定. 因此, 一定存在 $\mathbb{K}$ 上的矩阵 A, B, 使得 $AB - BA = C$ 成立. □