

0.1 循环群

定义 0.1 (循环群)

设 G 是一个群且 $a \in G$, 我们称

$$\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbf{Z}\}$$

是由 a 生成的 G 的子群, 如果在一个群 G 中存在一个元素 a , 使得 $G = \langle a \rangle$, 即 G 由 a 生成, 则称 G 是循环群, a 为 G 的一个生成元.



注 对 $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, 有 $a^{n_1}a^{-n_2} \in G$. 因此 $\langle a \rangle$ 是 G 的子群. 故由 a 生成的 G 的子群是良定义的.

推论 0.1

有限群 G 的任一元素 a 的阶是 G 的阶的因子, 即 $\text{ord } a | [G : 1]$. 进一步, 若 $G = \langle a \rangle$, 则 $\text{ord } a = [G : 1]$, 并且 $G = \langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{\text{ord } a - 1}\}$.



证明 令 $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbf{Z}\}$, 容易验证这是 G 的一个子群. 又由于 G 有限, 故 $\langle a \rangle$ 有限, 因而 a 是有限阶的, 设为 d . 对 $n \in \mathbf{Z}$ 有 t_n 与 r_n ($0 \leq r_n < d$), 使 $n = t_n d + r_n$, 于是 $a^n = a^{r_n}$. 因此 $\langle a \rangle$ 中至多只有 d 个元素 $1, a, \dots, a^{d-1}$.

又对 $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{N}$, 且 $r_1 \neq r_2$, $0 \leq r_1, r_2 < d$, 则 $|r_1 - r_2| < d$, 从而 $a^{r_1 - r_2} \neq 1$, 进而 $a^{r_1} \neq a^{r_2}$. 故 $1, a, \dots, a^{d-1}$ 互不相同. 由此知 $\langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{d-1}\}$, 即 $\langle a \rangle$ 是 d 阶群. 故由 Lagrange 定理知 d 为 $[G : 1]$ 的因子.

若 $G = \langle a \rangle$, $\text{ord } a = d$, 则由上述证明知 $G = \langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{d-1}\}$ 是 d 阶群, 故 $d = [G : 1]$.



定理 0.1

循环群的任何子群也是循环群.



证明 设 G_1 是循环群 $G = \langle a \rangle$ 的一个非平凡子群. 令

$$k = \min\{m' \in \mathbf{N} | a^{m'} \in G_1\},$$

于是 G 中由 a^k 生成的子群 $\langle a^k \rangle \subseteq G_1$, 又若有 $a^{m'} \in G_1$, 则有整数 q, r 满足

$$m' = kq + r, \quad 0 \leq r < k,$$

因而 $a^r = a^{m'}(a^k)^{-q} \in G_1$, 由 k 的取法知 $r = 0$, 否则与 k 的最小值取法矛盾! 因而 $a^{m'} = (a^k)^q \in \langle a^k \rangle$, 故 $G_1 \subseteq \langle a^k \rangle$, 所以 $G_1 = \langle a^k \rangle$ 为循环群.



推论 0.2

- (1) 设 $m \in \mathbf{Z}$, 则 $m\mathbf{Z} \triangleq \{mx | x \in \mathbf{Z}\}$ 是整数加法群 \mathbf{Z} 的子群.
- (2) 整数加法群 \mathbf{Z} 的任何子群必为 $m\mathbf{Z}$ ($m \geq 0$ 且 $m \in \mathbf{Z}$).



证明

(1) 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$, 有

$$mx_1 - mx_2 = m(x_1 - x_2) \in m\mathbf{Z}.$$

故 $m\mathbf{Z}$ 是整数加法群 \mathbf{Z} 的子群.

(2) 事实上, $\mathbf{Z} = \langle 1 \rangle$. 设 G_1 为 \mathbf{Z} 的子群. 于是由定理 0.1 有 $m \geq 0$ 且 $m \in \mathbf{Z}$, 使得 $G_1 = \langle m \rangle = m\mathbf{Z}$.



命题 0.1 (素数阶群必为循环群)

设 G 是一个群, 且 $|G| = p$ 为一个素数, 则

- (1) G 必是循环群, 并且 $\forall a \in G$ 且 $a \neq e$ 有 $G = \langle a \rangle$.
- (2) G 只有平凡子群.

**证明**

- (1) 由 $p > 1$ 知 G 中至少存在一个非幺元 $a \neq e$, 则对 $\forall a \in G$ 且 $a \neq e$, 有 $\langle a \rangle$ 是 G 的子群. 由 Lagrange 定理知 $\langle a \rangle$ 的阶是 $|G| = p$ 的因数, 而 p 为素数, 故 $\langle a \rangle$ 的阶为 1 或 p . 由 $a, e \in \langle a \rangle$ 知 $\langle a \rangle$ 的阶必大于 1, 因此 $\langle a \rangle$ 的阶为 p . 又因为 $\langle a \rangle \subseteq G$, 所以 $G = \langle a \rangle$. 故 G 为循环群.
- (2) 由结论 (1) 知 G 是循环群. 又 **循环群的任何子群也是循环群**, 故 G 的任意子群 H 也是循环群, 若 $H \neq \{e\}$, G , 则可设 $H = \langle a \rangle, a \in G \setminus \{e\}$, 再由结论 (1) 知 $G = \langle a \rangle = H$ 矛盾! 故 $H = \{e\}$ 或 G .

**命题 0.2**

设 $m > 0$, 则有

$$m\mathbf{Z} \triangleleft \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \bigcup_{k=0}^{m-1} (k + m\mathbf{Z}), \quad \mathbf{Z}_m \triangleq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{m-1}\}, \quad [\mathbf{Z} : m\mathbf{Z}] = m.$$



证明 由推论 0.2(1) 知 $m\mathbf{Z}$ 为 \mathbf{Z} 的子群.

**定理 0.2**

设 $G = \langle a \rangle$ 是一个循环群, 若 G 是无限阶的, 则 G 与整数加法群 \mathbf{Z} 同构. 若 G 的阶 m 有限, 则 G 与加法群 \mathbf{Z}_m 同构. 进而两个循环群同构当且仅当它们的阶相同.



证明 作 \mathbf{Z} 到 G 上的映射 $\varphi : \varphi(n) = a^n (n \in \mathbf{Z})$. 于是有

$$\varphi(n_1 + n_2) = a^{n_1 + n_2} = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = \varphi(n_1)\varphi(n_2),$$

因而 φ 是 \mathbf{Z} 到 G 上的同态映射, 故由群的同态基本定理知 $G \cong \mathbf{Z}/\ker \varphi$ 且 $\ker \varphi \triangleleft \mathbf{Z}$. 由推论 0.2(2) 知存在 $m \geq 0$ 且 $m \in \mathbf{Z}$, 使得 $\ker \varphi = m\mathbf{Z}$.

若 $m > 0$, 则由命题 0.2 知, 此时 $G \cong \mathbf{Z}/\ker \varphi = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_m$ 且 $|G| = |\mathbf{Z}_m| = m$.

若 $m = 0$, 则 $G \cong \mathbf{Z}$ 同构, 此时 G 的阶为无限.

**推论 0.3**

无限循环群的非平凡子群仍为无限循环群.



证明 设 G 为无限循环群, 则由定理 0.2 知 $G \cong \mathbf{Z}$. 又由推论 0.2(2) 知 \mathbf{Z} 的非平凡子群为 $m\mathbf{Z} (m \neq 0, 1)$ 为无限循环群. 故 G 的非平凡子群也为无限循环群.

**定理 0.3**

设 G 是 m 阶循环群, m_1 是 m 的一个因数, 则存在唯一的 m_1 阶子群.



证明 设 $G = \langle a \rangle$. 从推论 0.1 知 G 的阶 m 也就是元素 a 的阶. 由 $m_1 | m$ 知当 $0 < k < m_1$ 时有 $0 < km/m_1 < m$, 因而 $(a^{m/m_1})^k \neq 1$, 但 $(a^{m/m_1})^{m_1} = 1$, 故 $\langle a^{m/m_1} \rangle$ 是 G 的 m_1 阶子群.

下面证 m_1 阶子群的唯一性. 设 G_1 是 G 中的 m_1 阶子群, 由定理 0.1 知 $G_1 = \langle a^k \rangle$, 其中, $k \geq 0$, 并且当 $a^{m'} \in G_1$ 时, $k | m'$. 由 $a^m = 1 \in G_1$ 知 $k | m$, 若 $0 < n < m/k$, 则 $0 < kn < m$, 从而 $(a^k)^n = a^{kn} \neq 1$. 另外 $(a^k)^{m/k} = 1$, 故 G_1 的

阶为 $m/k = m_1$, 因而 $k = m/m_1$, 即 $G_1 = \langle a^{m/m_1} \rangle$.

□

命题 0.3

设 G 是 n 阶群且其不同的子群有不同的阶. 试证:

- (1) G 的任何子群都是正规子群;
- (2) G 的子群与商群的不同子群也有不同的阶;
- (3) G 是循环群.



证明

- (1) 设 H 为 G 的子群, $g \in G$. 对 $\forall h_1, h_2 \in H$, 有

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2^{-1}g^{-1}) = gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

故 gHg^{-1} 是 G 的子群. 又由命题??知 gHg^{-1} 与 H 有相同的阶. 因此由条件知 $gHg^{-1} = H$, 故 H 是正规子群.

- (2) 设 H_1, H_2 是 G 的子群 H 的子群, 自然也是 G 的子群, 于是由条件知 $H_1 = H_2$ 当且仅当 $|H_1| = |H_2|$.

设 $\overline{H_1}, \overline{H_2}$ 是商群 G/H 的子群. 记 π 为 G 到商群 G/H 上的自然同态, G 中包含 H 的子群的集合为 Σ , G/H 的子群的集合为 Γ , 由推论????知有 G 的子群 $H_1 \supseteq H, H_2 \supseteq H$ 使得

$$\overline{H_1} = \pi(H_1) = H_1/H, \quad \overline{H_2} = \pi(H_2) = H_2/H.$$

因为 π 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的双射, 所以 $\overline{H_1} = \overline{H_2}$ 当且仅当 $H_1 = H_2$. 而 $H_1 = H_2$ 当且仅当 $|H_1| = |H_2|$. 注意

$$|H_i| = [H_i : H]|H| = |\overline{H_i}| |H|, \quad i = 1, 2.$$

于是 $\overline{H_1} = \overline{H_2}$ 当且仅当 $|\overline{H_1}| = |\overline{H_2}|$.

- (3) 设 $|G| = p_1p_2 \cdots p_s$, 其中 $p_i (1 \leq i \leq s)$ 是素数.

对 s 作归纳证明 G 是循环群. 若 $s = 0$, 则 $|G| = 1$, 显然 G 是循环群. 若 $s = 1$, $|G| = p_1$ 是素数, 由命题 0.1 知 G 是循环群. 假定 $s - 1$ 时结论成立. 以 e 表示 G 的幺元, 取 $a_1 \in G, a_1 \neq e$. 若 a_1 的阶为 n , 则 G 是循环群. 不妨设 a_1 的阶为 $p_s p_{s-1} \cdots p_k \neq n$, 于是 $a = a_1^{p_{s-1} \cdots p_k}$ 的阶为 p_s . 由结论(1), $\langle a \rangle$ 是 G 的正规子群. 由结论(2), 商群 $G/\langle a \rangle$ 的不同子群有不同的阶, 由推论??知 $G/\langle a \rangle$ 的阶为 $n_1 = p_1p_2 \cdots p_{s-1}$. 由归纳假设, $G/\langle a \rangle$ 是循环群. 于是存在 $b \in G$ 使得 $G/\langle a \rangle$ 的元素为 $\langle a \rangle, b\langle a \rangle, \dots, b^{n_1-1}\langle a \rangle$. 从而由 $(b\langle a \rangle)^{n_1} = \langle a \rangle$ 知对 $0 \leq k < p_s$, 有 $k_0 (0 \leq k_0 < p_s)$ 使得

$$(ba^k)^{n_1} = a^{k_0}.$$

下面证明 $b\langle a \rangle$ 中有元素 c 使得 $c^{n_1} \neq e$. 若 $b^{n_1} \neq e$, 则可取 $c = b$. 故设 $b^{n_1} = e$. 注意 $G/\langle a \rangle$ 的阶为 n_1 , 于是当 $0 < r < n_1$ 时, $b^r \neq e, (ba)^r \neq e$. 如果 $(ba)^{n_1} = e$, 则 $\langle b \rangle$ 与 $\langle ba \rangle$ 均为 n_1 阶群, 因而由条件知 $\langle b \rangle = \langle ba \rangle$, 于是有 $ba = b^m, 0 < m < n_1$. 由于 $ba \in b\langle a \rangle, b^m \in b^m\langle a \rangle$, 而 $m \neq 1$ 时, 由推论??知 $b\langle a \rangle \cap b^m\langle a \rangle = \emptyset$, 于是 $m = 1$, 即 $ba = b$, 从而 $a = e$, 这就得到矛盾. 由此可知 $(ba)^{n_1} \neq e$. 取 $c = ba$. 由 $c \in b\langle a \rangle$, 知 $b\langle a \rangle = c\langle a \rangle$, 于是 $G/\langle a \rangle = \langle c\langle a \rangle \rangle$. 因为 $G/\langle a \rangle$ 的阶为 n_1 , 所以 $(c\langle a \rangle)^{n_1} = c^{n_1}\langle a \rangle = \langle a \rangle$. 因而 $c^{n_1} \in \langle a \rangle$. 注意 $c^{n_1} \neq e$, 于是

$$c^{n_1} = a^m \neq e, \quad 1 \leq m < p_s.$$

因为 p_s 是素数, 所以有 $(m, p_s) = 1$. 进而 $a \in \langle c \rangle, \langle a \rangle \subset \langle c \rangle$. 于是有

$$\langle c \rangle / \langle a \rangle = G / \langle a \rangle.$$

因此 $G = \langle c \rangle$ 为循环群.

□

定理 0.4

一个 m 阶群 G 对 m 的每个因数 m_1 存在唯一的 m_1 阶子群, 则群 G 必是循环群.

♡

证明 设 G_1, G_2 是 G 的两个不同子群, 则由 Lagrange 定理知 $[G_1 : 1], [G_2 : 1]$ 都是 m 的因数. 若 $[G_1 : 1] = [G_2 : 1]$, 则由条件知 $G_1 = G_2$ 矛盾! 故 $[G_1 : 1] \neq [G_2 : 1]$. 因此 G 的不同的子群有不同的阶. 于是由**命题 0.3(3)**知 G 必是循环群.

□

定理 0.5

设 G 是一个群, $a, b \in G$. 它们的阶分别为 m, n , 则有下列结论:

- (1) a^k 的阶为 $\frac{m}{(m, k)}$, (m, k) 是 m 与 k 的最大公因数;
- (2) 若 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}, ab = ba$, 则 ab 的阶为 m, n 的最小公倍数 $[m, n]$.

♡

证明

(1) 设 a^k 的阶为 q , 即 $a^{kq} = 1$, 因而有 $m|kq$, 故由数论相关结论知 $\frac{m}{(m, k)}|q$. 又 $(a^k)^{m/(m, k)} = (a^m)^{k/(m, k)} = 1$, 即得 $q|(\frac{m}{(m, k)})$, 因而

$$q = \frac{m}{(m, k)}.$$

(2) 设 ab 的阶为 m_1 , 则有 $(ab)^{m_1} = 1$. 由 $ab = ba$ 知 $a^{m_1}b^{m_1} = (ab)^{m_1} = 1$, 即 $a^{m_1} = b^{-m_1} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$, 因而 $a^{m_1} = b^{m_1} = 1$, 故 $m|m_1, n|m_1$, 因而 $[m, n]|m_1$. 另有 $(ab)^{[m, n]} = a^{[m, n]}b^{[m, n]} = 1$, 故 $m_1|[m, n]$, 即 $m_1 = [m, n]$.

□

推论 0.4

- (1) 若 a 为 m 阶元素, 则 a^k 为 m 阶元素的充要条件是 $(m, k) = 1$;
- (2) 若 a, b 的阶分别为 m, n 且 $ab = ba, (m, n) = 1$, 则 ab 的阶为 mn .

♡

证明

- (1) 这是**定理 0.5**的自然推论.
- (2) 设 m_1 是 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ 的阶, 由**推论 0.1**知 $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ 的阶分别为 m, n . 由于 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ 是 $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ 的子群, 故由 Lagrange 定理知 $m_1|m, m_1|n$. 但 $(m, n) = 1$, 故 $m_1 = 1$, 因而 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$, 于是由**定理 0.5**知 ab 的阶为 $[m, n] = mn$.

□