0.1 重积分方法

定理 0.1 (Chebeshev 不等式积分形式)

设 $p \in R[a,b]$ 且非负,f,g 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right) \le \left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right), f,g\text{单调性相同}$$

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right) \ge \left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right), f,g\text{单调性相反}$$

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

注 证法二中的 $d\mu$ 应该看作测度.

证明 证法一:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right)-\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right)\\
&=\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)dy\right)-\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)dy\right)\\
&=\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]dxdy\\
&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]dxdy\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]dxdy,
\end{aligned}$$

故结论得证.

证法二: 令 $\frac{p\,(x)}{\int_a^b p\,(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则 $\int_a^b \mathrm{d}\mu=\int_a^b \frac{p\,(x)}{\int_a^b p\,(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=1$. 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(x)d\mu-\int_a^b f(x)g(x)d\mu\\
&=\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(y)d\mu-\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)]g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(y)-f(x)]g(x)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]
\end{aligned}$$

故结论得证. □

例题 0.1 设 $f \in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \geqslant \frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \geqslant \frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 xf(x)dx\right) \geqslant \left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right).$$

令 $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(x)dx}dx = d\mu$, 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)d\mu \int_0^1 xd\mu \geqslant \int_0^1 xf(x)d\mu.$$

上式由Chebeshev 不等式积分形式可直接得到. □

命题 0.1 (反向切比雪夫不等式)

设 $f,g \in R[a,b]$ 且 $m_1 \le f(x) \le M_1, m_2 \le g(x) \le M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right| \le \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.$$

注 不妨设 $a=0, b=1$ 的原因: 假设当 $a=0, b=1$ 时,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的 $[a,b]$, 原不等式等价于

$$\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}. \quad (1)$$

又注意到 $f(a+(b-a)x), g(a+(b-a)x) \in R[0,1]$, 且 $f(x) \in [m_1, M_1], g(x) \in [m_2, M_2]$. 故由假设可知(1)式成立. 因此不妨设也成立.

笔记 积累本题的想法.

证明 不妨设 $a=0, b=1$, 则记 $A = \int_0^1 f(x)dx, B = \int_0^1 g(x)dx$. 于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right|^2 &= \left|\int_0^1 (f(x)-A)(g(x)-B)dx\right|^2 \\
&\overset{Cauchy\text{不等式}}{\le} \int_0^1 |f(x)-A|^2dx \cdot \int_0^1 |g(x)-B|^2dx \\
&= \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1 |g(x)|^2dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)dx = M_1A + m_1A - M_1m_1 - \int_0^1 |f(x)|^2dx,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2dx - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2dx - A^2 \\
&= (M_1-A)(A-m_1) - \int_0^1 (M_1-f)(f-m_1)dx \\
&\le (M_1-A)(A-m_1) \le \frac{(M_1-m_1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1 |g(x)|^2dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2 \le \frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right|^2\leq\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立. □

例题 0.2 设 $f\in C[a,b]$ 且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos xdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin xdx\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2. \tag{2}$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

证明 一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\sin y\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[\cos x\cos y+\sin x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)dxdy.$$

于是不等式(2)变为

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]dxdy\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}. \tag{4}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]dxdy\overset{(3)}{\leqslant}M^2\iint_{[a,b]^2}\frac{(x-y)^2}{2}dxdy=\frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(4). □