第一章 行列式

1.1 行列式基本性质

命题 1.1 (行列式计算常识)

(1)
$$\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n\,;\quad \begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n.$$

(2) 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转 (**行倒排**)、或左右翻转 (**列倒排**) 分别得到 D_1、D_2; 把 D **逆时针旋转** 90°、或**顺时针旋转** 90° 分别得到 D_3、D_4; 把 D **依副对角线翻转**、或**依主对角线翻转**分别得到 D_5、D_6. 易知

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_5=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_6=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1=D_2=D_3=D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D,$$
$$D_5=D_6=D.$$

(3) 设 $A=(a_{i,j})$ 为 n 阶复矩阵, 则一定有 $|A|=\overline{|A|}$.

(4) 若 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|B|$ 是 m 阶行列式, 它们的值都不为零, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

♠

证明 (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

(2)
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{逆时针旋转}90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{顺时针旋转}90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法:$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$,$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, 故由行列式的组合定义可得

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn} \\ &= \sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} \overline{a_{k_11}}\cdot\overline{a_{k_22}}\cdots\overline{a_{k_nn}} = |\overline{A}|. \end{aligned}$$

(4) 将 $|A|$ 的第一列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 共换了 m 次; 再将 $|A|$ 的第二列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 又换了 m 次;$\cdots$. 依次类推, 经过 mn 次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此 $|D| = (-1)^{mn}|C|$, 于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

□

命题 1.2 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 任意的指标 $1\le i\le n$, 以及任意的常数 c, 满足下列条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列是方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列之和, 且 $\boldsymbol{A}$ 的其余列与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对应列完全相同, 则 $f(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{B})+f(\boldsymbol{C})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = cf(\boldsymbol{A})$;

(3) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = -f(\boldsymbol{A})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n) = 1$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位阵.

求证:$f(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$.

笔记 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

证明 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标准单位列向量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^n a_{kj}\boldsymbol{e}_k, j = 1,2,\cdots,n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{A}) &= f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&= a_{11}f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+a_{21}f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+a_{n1}f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right) = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2}\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\left[a_{12}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+a_{22}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+\cdots+a_{n2}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\right]\\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right) = \cdots = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k1}\sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} a_{k1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right).
\end{aligned}
$$

若 $k_i = k_j$, 则 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 的第 i 列和第 j 列对换后仍然是 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$. 由条件 (3) 可知,$f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}) = -f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$, 于是 $f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}) = 0$. 因此在 $f(\boldsymbol{A})$ 的表示式中, 只剩下 $k_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 变成 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{I}_n$, 故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$
f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}) = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f(\boldsymbol{I}_n) = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.
$$

于是由行列式的组合定义可知

$$
f(\boldsymbol{A}) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = |\boldsymbol{A}|.
$$

□

1.2 降阶法

例题 1.1 计算 n 阶行列式:

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & \mathrm{C}_2^1 & \cdots & \mathrm{C}_n^1\\
1 & \mathrm{C}_3^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^2\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
1 & \mathrm{C}_n^{n-1} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

笔记 组合数公式: $\mathrm{C}_m^{k-1}+\mathrm{C}_m^k = \mathrm{C}_{m+1}^k$.

于是有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_m^k &= \mathrm{C}_{m+1}^k - \mathrm{C}_m^{k-1}\\
\mathrm{C}_m^{k-1} &= \mathrm{C}_{m+1}^k - \mathrm{C}_m^k
\end{aligned}
$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&C_2^1&\cdots&C_n^1\\1&C_3^2&\cdots&C_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&C_n^{n-1}&\cdots&C_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot r_{i-1}+r_i}\begin{vmatrix}C_0^0&C_1^0&\cdots&C_{n-1}^0\\0&C_2^1-C_1^0&\cdots&C_n^1-C_{n-1}^0\\0&C_3^2-C_2^1&\cdots&C_{n+1}^2-C_n^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&C_n^{n-1}-C_{n-1}^{n-2}&\cdots&C_{2n-2}^{n-1}-C_{2n-3}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}C_0^0&C_1^0&\cdots&C_{n-1}^0\\0&C_1^1&\cdots&C_{n-1}^1\\0&C_2^2&\cdots&C_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&C_{n-1}^{n-1}&\cdots&C_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}C_1^1&C_2^1&\cdots&C_{n-1}^1\\C_2^2&C_3^2&\cdots&C_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n-1}^{n-1}&C_n^{n-1}&\cdots&C_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}C_1^1&C_2^1-C_1^1&\cdots&C_{n-1}^1-C_{n-2}^1\\C_2^2&C_3^2-C_2^2&\cdots&C_n^2-C_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n-1}^{n-1}&C_n^{n-1}-C_{n-1}^{n-1}&\cdots&C_{2n-3}^{n-1}-C_{2n-4}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_1^1&C_1^0&\cdots&C_{n-2}^0\\C_2^2&C_2^1&\cdots&C_{n-1}^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n-1}^{n-1}&C_{n-1}^{n-2}&\cdots&C_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&C_2^1&\cdots&C_{n-1}^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&C_{n-1}^{n-2}&\cdots&C_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分,并具有相同的规律.不断这样做下去,最后可得 $|A|=1$ □

例题 1.2 计算 n 阶行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&2&*&\cdots&*\\0&0&3&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!$$

□

例题 1.3 计算 n 阶行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3&\cdots&a_1b_n\\a_1b_2&a_2b_2&a_2b_3&\cdots&a_2b_n\\a_1b_3&a_2b_3&a_3b_3&\cdots&a_3b_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1b_n&a_2b_n&a_3b_n&\cdots&a_nb_n\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-a_i)r_1+r_i} a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2-a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & a_3b_n-a_nb_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}} (-1)^{n+1}a_1b_n\begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

$$=a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1}).$$

□

命题 1.3 (" 爪" 型行列式)

证明 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n-\sum_{i=2}^{n}a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

笔记 记忆" 爪" 型行列式的计算方法和结论.

证明 当 $a_i\neq 0\,(\forall i\in[2,n]\cap\mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{\left(-\frac{c_i}{a_i}\right)j_i+j_1}\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n-\sum_{i=2}^{n}a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

当 $\exists i\in[2,n]\cap\mathbb{N}\ s.t.\ a_i=0$ 时, 则 $a_1a_2\cdots a_n-\sum\limits_{i=2}^{n}a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i=-a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i$. 此时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ c_{i-1} & & & a_{i-1} & & & & \\ c_i & & & & 0 & & & \\ c_{i+1} & & & & & a_{i+1} & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ c_n & & & & & & & a_n \end{vmatrix}\xlongequal[\text{(按}c_i\text{所在行展开)}]{\text{按第}i\text{行展开}}(-1)^{i+1}c_i\begin{vmatrix} b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ a_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & a_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{(按}b_i\text{所在列展开)}]{\text{按第}i-1\text{列展开}}(-1)^{i+1}(-1)^ib_ic_i\begin{vmatrix} a_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{i-1} & & & \\ & & & a_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{vmatrix}=-a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

综上所述, 原命题得证. □

命题 1.4 (分块" 爪" 型行列式)

计算 n 阶行列式 $(a_{ii}\neq 0,i=k+1,k+2,\cdots,n)$:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

笔记 记忆分块" 爪" 型行列式的计算方法即可, 计算方法和" 爪" 型行列式的计算方法类似.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=k+1,k+2,\cdots,n]{-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}j_i+j_1,-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}j_i+j_2,\cdots,-\frac{a_{in}}{a_{ii}}j_i+j_k}\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} C & B \\ O & \Lambda \end{vmatrix} = |C|\cdot|\Lambda| = |C|\prod_{i=k+1}^{n} a_{ii}.$$

其中 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} a_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$. 并且 $c_{pq}=a_{pq}-\sum\limits_{i=k+1}^{n}\dfrac{a_{iq}a_{pi}}{a_{ii}}, p,q=1,2,\cdots,n.$ □

推论 1.1 (" 爪" 型行列式的推广)

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 这是一个有用的模板 (即**行列式除了主对角元素外, 每行都一样**).

记忆该命题的计算方法即可. 即先化为" 爪" 型行列式, 再利用" 爪" 型行列式的计算结果.

解 当 $a_i \neq 0\,(\forall i \in [2,n]\cap\mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题1.3}} \left[(x_1-a_1)+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1x_i}{a_i}\right]\prod_{i=2}^{n}(-a_i) = (-1)^{n-1}\left[(x_1-a_1)+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1x_i}{a_i}\right]\prod_{i=2}^{n}a_i$$

$$=(-1)^{n-1}\left[(x_1-a_1)\prod_{i=2}^{n}a_i+\sum_{i=2}^{n}a_1a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nx_i\right].$$

当 $\exists i \in [2,n]\cap\mathbb{N}\ s.t.\ a_i=0$ 时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题1.3}} (x_1-a_1)(-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n)-\sum_{i=2}^{n}(-a_2)\cdots\widehat{(-a_i)}\cdots(-a_n)a_1x_i$$

$$=(-1)^{n-1}(x_1-a_1)\prod_{i=2}^{n}a_i+(-1)^{n-1}\sum_{i=2}^{n}a_1a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nx_i$$

$$=(-1)^{n-1}\left[(x_1-a_1)\prod_{i=2}^{n}a_i+\sum_{i=2}^{n}a_1a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nx_i\right].$$

综上所述,$|A|=(-1)^{n-1}\left[(x_1-a_1)\prod\limits_{i=2}^{n}a_i+\sum\limits_{i=2}^{n}a_1a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nx_i\right].$ □

例题 1.4 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}=a^n+(-1)^{n+1+n}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}.$$

□

注 本题也可由命题1.3直接得到,$|\boldsymbol{A}|=a^n-a^{n-2}$.

命题 1.5

设 $|A|=|a_i|$ 是一个 n 阶行列式,A_{ij} 是它的第 (i,j) 元素的代数余子式,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,$z$ 是任意常数, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & X\\ Y^T & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}=z|\boldsymbol{A}|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j.$$

进而得到

$$\begin{vmatrix} A & X\\ Y^T & 0 \end{vmatrix}=-Y^TA^*X.$$

笔记 根据这个命题可以得到一个**关于行列式 $|A|$ 的所有代数余子式求和的构造**:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{1}' & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} & \boldsymbol{1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta_1} & 1\\ \boldsymbol{\beta_2} & 1\\ \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{\beta_n} & 1\\ \boldsymbol{1}' & 0 \end{vmatrix}.$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$,$|\boldsymbol{A}|$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\cdots,\boldsymbol{\beta_n}$. 并且 $\boldsymbol{1}$ 表示元素均为 1 的列向量,$\boldsymbol{1}'$ 表示 $\boldsymbol{1}$ 的转置. (令上述命题中的 $z=0,x_i=y_i=1,i=1,2,\cdots,n$ 即可得到.)

注 如果需要证明的是矩阵的代数余子式的相关命题, 我们可以考虑一下这种构造, 即令上述命题中的 $z=0$ 并且待定/任取 x_i,y_i.

证明 证法一: 将上述行列式先按最后一列展开, 展开式的第一项为

$$(-1)^{n+2}x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

再将上式按最后一行展开得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+2}x_1\left[(-1)^{n+1}(-1)^{1+1}y_1A_{11}+(-1)^{n+2}(-1)^{1+2}y_2A_{12}+\cdots+(-1)^{n+n}(-1)^{1+n}y_nA_{1n}\right]\\
&=(-1)^{n+2}x_1(-1)^{n+1}\left[(-1)^2y_1A_{11}+(-1)^4y_2A_{12}+\cdots+(-1)^{2n}y_nA_{1n}\right]\\
&=-x_1\left(y_1A_{11}+y_2A_{12}+\cdots+y_nA_{1n}\right)\\
&=-x_1\sum_{j=1}^{n}y_jA_{1j}.
\end{aligned}
$$

同理可得原行列式展开式的第 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 项为

$$
(-1)^{n+1+i}x_i\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\ y_1&y_2&\cdots&y_n\end{vmatrix}.
$$

将上式按最后一行展开得到 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1+i}x_i\left[(-1)^{n+1}(-1)^{i+1}y_1A_{i1}+(-1)^{n+2}(-1)^{i+2}y_2A_{i2}+\cdots+(-1)^{n+n}(-1)^{i+n}y_nA_{in}\right]\\
&=(-1)^{n+1+i}x_i(-1)^{n+1}\left[(-1)^{i+1}y_1A_{i1}+(-1)^{i+2+1}y_2A_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n+n-1}y_nA_{in}\right]\\
&=(-1)^{2i+1}y_1A_{i1}+(-1)^{2i+3}y_2A_{i2}+\cdots+(-1)^{2i+2n-1}y_nA_{in}\\
&=-x_i\left(y_1A_{i1}+y_2A_{i2}+\cdots+y_nA_{in}\right)\\
&=-x_i\sum_{j=1}^{n}y_jA_{ij}.
\end{aligned}
$$

而展开式的最后一项为 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

因此, 原行列式的值为

$$
z|\boldsymbol{A}|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j.
$$

证法二:设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$. 若 A 是非异阵, 则由降阶公式可得

$$
\begin{vmatrix}A&\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}'&z\end{vmatrix}=|A|(z-\boldsymbol{y}'A^{-1}\boldsymbol{x})=z|A|-\boldsymbol{y}'A^*\boldsymbol{x}.
$$

对于一般的方阵 A, 可取到一列有理数 $t_k\to0$, 使得 t_kI_n+A 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$
\begin{vmatrix}t_kI_n+A&\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}'&z\end{vmatrix}=z|t_kI_n+A|-\boldsymbol{y}'(t_kI_n+A)^*\boldsymbol{x}.
$$

注意到上式两边都是关于 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k\to0$, 即有

$$
\begin{vmatrix}A&\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}'&z\end{vmatrix}=z|A|-\boldsymbol{y}'A^*\boldsymbol{x}=z|A|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j.
$$

□

例题 1.5 设 n 阶行列式 $|A|=|a_{ij}|$,A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 求证:

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1\\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1\\ a_{31}-a_{32} & a_{32}-a_{33} & \cdots & a_{3,n-1}-a_{3n} & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

证明 证法一:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量. 则

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{j_i+j_{i-1}}|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|.$$

将最后一列写成 $(\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}$, 进行拆分可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\alpha_n,(\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}|\\ &=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_n}|\\ &=|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|.\end{aligned}$$

根据行列式的性质将 $|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 1 所在的列展开得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|\\ &=|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}-|\boldsymbol{\alpha_1},\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.\end{aligned}$$

证法二:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量.注意到

$$-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} & \mathbf{1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

依次将第 i 列乘以 -1 加到第 $i-1$ 列上去 $(i=2,3,\cdots,n)$, 再按第 $n+1$ 行展开可得

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n} & \boldsymbol{\alpha_n} & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\\ &=-|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|=-|\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

结论得证. □

例题 1.6 设 n 阶矩阵 A 的每一行、每一列的元素之和都为零, 证明:A 的每个元素的代数余子式都相等.

证明 证法一:设 $A=(a_{ij}),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$, 不妨设 x_iy_j 均不相同,$i,j=1,2,\cdots,n$. 考虑如下 $n+1$ 阶矩阵的行列式求值:

$$B=\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}' & 0\end{pmatrix}$$

一方面, 由命题 1.5可得 $|B|=-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$. 另一方面, 先把行列式 $|B|$ 的第二行,$\cdots$, 第 n 行全部加到第一行上; 再将第二列,$\cdots$, 第 n 列全部加到第一列上, 可得

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ \sum\limits_{j=1}^{n}y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

依次按照第一行和第一列进行展开, 可得 $|B| = -A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j$. 比较上述两个结果, 又由于 x_iy_j 均不相同, 因此可得 A 的所有代数余子式都相等.

证法二:由假设可知 $|\boldsymbol{A}| = 0$(每行元素全部加到第一行即得), 从而 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n-1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于零, 结论显然成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和都等于零, 所以由命题**??**可知, 我们可以选取 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)'$ 作为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由命题**??**的证明可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列与 $\boldsymbol{\alpha}$ 成比例, 特别地,$\boldsymbol{A}^*$ 的每一行都相等. 对 $\boldsymbol{A}'$ 重复上面的讨论, 可得 $(\boldsymbol{A}')^*$ 的每一行都相等. 注意到 $(\boldsymbol{A}')^* = (\boldsymbol{A}^*)'$, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都相等, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij} 都相等. □

1.3 求和法

例题 1.7 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 *Vieta* 定理可知,$x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 因此, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \overset{r_i+r_1}{\underset{i=2,3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

□

例题 1.8 设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{11} & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{21} & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n1} & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{j_i+j_1}{\underset{i=2,\cdots,n}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} (n-1)(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (n-1)(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)j_1+j_i}{\underset{i=2,\cdots,n}{=\!=\!=}} (n-1)\begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

例题 1.9 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

□

注 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题1.1的应用, 利用命题1.1的计算方法直接得到结果.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{命题1.2}}-\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例题 1.10 计算 n 阶行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.$$

笔记 既可以将 $|A|$ 看作命题1.1的应用, 利用命题1.1的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.

也可以利用求和法将 $|A|$ 化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题}1.3} (a_1+b)\,b^{n-1}-\sum_{i=2}^{n} b^{n-2}a_i\,(-b)=b^{n-1}\left[(a_1+b)+\sum_{i=2}^{n}a_i\right]=\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)b^{n-1}.$$

解法二:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} (b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-a_i\cdot j_1+j_i} (b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

□

例题 1.11 计算 n 阶行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

笔记 求和法的经典应用.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-j_1+j_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2}(-n)^{n-2} = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

□

1.4 递推法与数学归纳法

命题 1.6 (三对角行列式)

求下列行列式的递推关系式 (空白处均为 0):

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 记忆三对角行列式的计算方法和结果: $\boldsymbol{D_n = a_nD_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}(n \geq 2)}$, 即按最后一列 (或行) 展开得到递推公式.

解 显然 $D_0 = 1, D_1 = a_1$. 当 $n \geq 2$ 时, 我们有

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按最后一列展开}} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} & \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & 0 & c_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二项按最后展开}} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1}c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= a_n D_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}.$$

□

推论 1.2

计算 n 阶行列式 $(bc \neq 0)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

♡

笔记 解递推式:$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} (n \geq 2)$ 对应的特征方程:$x^2 - ax + bc = 0$ 得到两根 $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$, 由 Vieta 定理可知 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$.

若 a, b, c 均为复数, 则上述特征方程

解 由命题 1.6可知, 递推式为 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} (n \geq 2)$. 又易知 $D_0 = 1, D_1 = a$. 令 $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$, 则 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$, 于是 $D_n = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} (n \geq 2)$. 从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}).$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-1}(D_1 - \alpha D_0) = \beta^{n-1}(a-\alpha) = \beta^n,$$
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-1}(D_1 - \beta D_0) = \alpha^{n-1}(a-\beta) = \alpha^n.$$

因此, 若 $a^2 \neq 4bc$(即$\alpha \neq \beta$), 则联立上面两式, 解得

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若 $a^2 = 4bc$(即$\alpha = \beta$), 则由 $a = \alpha + \beta$ 可知,$\alpha = \beta = \frac{a}{2}$. 又由 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$ 可得

$$D_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2}D_{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + \frac{a}{2}D_{n-2}\right) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 D_{n-2} = \cdots = n\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^n D_0 = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

综上, 我们有

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, a^2 \neq 4bc, \\ (n+1)\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n, a^2 = 4bc. \end{cases}$$

□

练习 1.1 求证:n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \cos nx.$$

解 解法一:

设 $|\boldsymbol{A}| = D_n$, 其中 n 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 的阶数 $(n \geq 0)$. 易知 $D_0 = 1, D_1 = \cos x$.

从而 $|\boldsymbol{A}| = D_n \xlongequal[\text{命题1.6}]{\text{按最后一列展开}} 2\cos x D_{n-1} - D_{n-2}\ (n \geq 2)$.

其对应的特征方程为 $\lambda^2 = 2\cos x\lambda - 1$, 解得 $\lambda_1 = \cos x + i\sin x, \lambda_2 = \cos x - i\sin x$.

于是当 $n \geq 2$ 时, 我们有 $D_n = (\lambda_1 + \lambda_2)D_{n-1} + \lambda_1\lambda_2 D_{n-2}$.

进而

$$\begin{aligned} D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= \lambda_2(D_n - \lambda_1 D_{n-1}), \\ D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= \lambda_1(D_n - \lambda_2 D_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

由此可得

$$D_n - \lambda_1 D_{n-1} = \lambda_2^{\ n-1}(D_1 - \lambda_1 D_0) = -i\sin x \cdot \lambda_2^{\ n-1},$$
$$D_n - \lambda_2 D_{n-1} = \lambda_1^{\ n-1}(D_1 - \lambda_2 D_0) = i\sin x \cdot \lambda_1^{\ n-1}.$$

若 $x \neq k\pi(k \in \mathbb{Z})$, 则联立上面两式, 解得

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{i\sin x \cdot \lambda_1^{\ n} + i\sin x \cdot \lambda_2^{\ n}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{i\sin x \cdot (\cos x + i\sin x)^n + i\sin x \cdot (\cos x - i\sin x)^n}{2i\sin x} \\ &\xlongequal[e^{ix}=\cos x + i\sin x, e^{-ix}=\cos x - i\sin x.]{Euler\text{公式}} \frac{i\sin x \cdot e^{nxi} + i\sin x \cdot e^{-nxi}}{2i\sin x} = \frac{i\sin x \cdot (\cos nx + i\sin nx) + i\sin x \cdot (\cos nx - i\sin nx)}{2i\sin x} \\ &= \frac{2i\sin x \cdot \cos nx}{2i\sin x} = \cos nx. \end{aligned}$$

若 $x = k\pi(k \in \mathbb{Z})$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos k\pi$. 从而由(1.1)式可得,$D_n - \cos k\pi D_{n-1} = -i\sin x \cdot (\cos k\pi) = 0$.

于是

$$D_n = \cos k\pi D_{n-1} = (\cos k\pi)^2 D_{n-2} = \cdots = (\cos k\pi)^n D_0 = (\cos k\pi)^n = (-1)^{kn} = \cos(nk\pi) = \cos nx.$$

解法二:仿照练习1.14中的数学归纳法证明. □

练习 1.2 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}.$$

笔记 观察原行列式我们可以得到,D_n 的每列和有一定的规律,即除了第一列和最后一列,中间每列和均为 0. 并且 D_n 是三对角行列式. 因此,我们既可以直接应用三对角行列式的结论 (即命题1.6),又可以使用求和法进行求解. 如果我们直接应用三对角行列式的结论 (即命题1.6),按照对一般的三对角行列式展开的方法能得到相应递推式,但是这样得到的递推式并不是相邻两项之间的递推,后续求解通项并不简便. 又因为使用求和法计算行列式后续计算一般比较简便所以我们先采用求和法进行尝试.

解 解法一: 当 $n\geq 1$ 时,我们有

$$D_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1}\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}}-a_1D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$=-a_1D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=1-a_1D_{n-1}.$$

其中 D_{n-i} 表示 D_{n-i+1} 去掉第一行和第一列得到的 $n-i$ 阶行列式,$i=1,2,\cdots,n-1$. (或者称 D_{n-i} 表示以 $a_{i+1},\cdots,a_n$ 为未定元的 $n-i$ 阶行列式,$i=1,2,\cdots,n-1$)

由递推不难得到

$$D_n=1-a_1(1-a_2D_{n-2})=1-a_1+a_1a_2D_{n-2}=\cdots=1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+\cdots+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

解法二:仿照练习1.14中的数学归纳法证明. □

命题 1.7

计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & y & y & \cdots & y & y\\ z & x_2 & y & \cdots & y & y\\ z & z & x_3 & \cdots & y & y\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y\\ z & z & z & \cdots & z & x_n\end{vmatrix}.$$

笔记 解法二: $f(x) \triangleq \begin{vmatrix} x_1+x & y+x & \cdots & y+x \\ z+x & x_2+x & \cdots & y+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z+x & z+x & \cdots & x_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x & y+x & \cdots & y+x \\ z-x_1 & x_2-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z-x_1 & z-y & \cdots & x_n-y \end{vmatrix}$, 再按第一行展开可得 $f(x)$ 一定为关于 x 的线性函数.

解 解法一(小拆分法): 对第 n 列进行拆分即可得到递推式: (对第 1 或 n 行 (或列) 拆分都可以得到相同结果)

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y+0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y+0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y+0 \\ z & z & z & \cdots & z & y+x_n-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x_n-y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-z & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + (x_n-y)\,D_{n-1} = y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-z) + (x_n-y)\,D_{n-1}. \tag{1.2}$$

将原行列式转置后, 同理可得

$$D_n = D_n^T = \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z+0 \\ y & x_2 & z & \cdots & z & z+0 \\ y & y & x_3 & \cdots & z & z+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z+0 \\ y & y & y & \cdots & y & z+x_n-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z \\ y & x_2 & z & \cdots & z & z \\ y & y & x_3 & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & 0 \\ y & x_2 & z & \cdots & z & 0 \\ y & y & x_3 & \cdots & z & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x_n-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + (x_n-z)\,D_{n-1}^T = z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y) + (x_n-z)\,D_{n-1}. \tag{1.3}$$

若 $z \neq y$, 则联立(1.2)(1.3)式, 解得

$$D_n = \frac{1}{z-y}\left[z\prod_{i=1}^{n}(x_i-y) - y\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)\right];$$

若 $z=y$, 则由(1.2)式递推可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\,D_{n-1}\\
&= y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)+(x_n-y)\left(y\prod_{i=1}^{n-2}(x_i-y)+(x_{n-1}-y)\,D_{n-2}\right)\\
&= y\prod_{j\neq n}(x_i-y)+y\prod_{j\neq n-1}(x_i-y)+(x_n-y)(x_{n-1}-y)\,D_{n-2}\\
&= \cdots = y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)D_0\\
&= y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).
\end{aligned}
$$

解法二(大拆分法):令 $f(x)\triangleq\begin{vmatrix} x_1+x & y+x & \cdots & y+x\\ z+x & x_2+x & \cdots & y+x\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ z+x & z+x & \cdots & x_n+x \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 一定是线性函数, 从而设 $f(x)=ax+b$. 注意到

$$
f(-z)=\begin{vmatrix} x_1-z & y-z & \cdots & y-z\\ 0 & x_2-z & \cdots & y-z\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n-z \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-z),\quad f(-y)=\begin{vmatrix} x_1-y & 0 & \cdots & 0\\ z-y & x_2-y & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ z-y & z-y & \cdots & x_n-y \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).
$$

当 $y\neq z$ 时, 将上式代入 $f(x)=ax+b$(即线性函数 $f(x)$ 过两点 $(-y,f(-y))$,$(-z,f(-z))$, 再利用两点式) 解得

$$
f(x)=\frac{f(-z)-f(-y)}{-z-(-y)}(x+y)+f(-y)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-z)-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-y)}{y-z}(x+y)+\prod_{i=1}^{n}(x_i-y).
$$

从而此时就有

$$
D_n=f(0)=\frac{y\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-z)-z\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-y)}{y-z}. \tag{1.4}
$$

当 $y=z$ 时, 将 D_n 看作关于 y 的连续函数, 记为 $g(y)=D_n$, 则此时由 g 的连续性及(1.4)式和 L'Hospital 法则可得

$$
\begin{aligned}
D_n = g(z) = \lim_{y\to z}g(y) &= \lim_{y\to z}\frac{y\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-z)-z\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-y)}{y-z}\\
&= \lim_{y\to z}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-z)+y\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j\neq i}(x_j-y)}{1}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)+z\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-z).
\end{aligned}
$$

□

例题 1.12

(1) 计算

$$
|B|=\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{vmatrix}.
$$

(2) 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

笔记 第 (2) 问解法一中不仅使用了升阶法还使用了分块” 爪” 型行列式的计算方法. 观察到各行各列有不同的公共项, 因此可以利用升阶法将各行各列的公共项消去.

注 因为第 (2) 问中, 当 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 最后的结果不含 a_i 的分式结构, 所以当存在 $a_i=0$, 其中 $i \in 1,2,\cdot,ns$ 时, 根据行列式 (可以看作多元多项式函数) 的连续性可知, 此时最后的结果就是将 a_i 中相应为零的值代入当 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 时的结果中. 因此我吗们可以直接不妨设 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, 只需考虑这一种情况即可.

解

(1) 注意到 $B=\begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. 由 Cauchy-Binet 公式可知,$|B|=\begin{cases} 0, & n \geq 3, \\ -(a_1-a_2)^2, & n=2, \\ 2a_1, & n=1. \end{cases}$.

(2) (i) 当 $a_i \neq 0(1 \leq i \leq n)$ 时, 解法一 (升阶法):

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n+1]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ -a_2 & 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,3,4\cdots,n+2]{j_1+j_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4\cdots,n+2]{\substack{-\frac{1}{2}j_i+j_1\\ \frac{1}{2a_{i-2}}j_i+j_2}}\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{S}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \frac{T}{2} & 1-\frac{n}{2} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n,T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$. 注意到上述行列式是分块上三角行列式, 从而可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=(-2)^n\prod_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{(n-2)^2-ST}{4}=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})]\\&=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i\,(n-2)^2-(-2)^{n-2}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}a_k.\end{aligned}$$

解法二 (直接计算两个矩阵和的行列式)(不推荐使用!):

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|$.

从而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right) \tag{1.5}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式.

我们先来计算 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix},k=1,2,\cdots,n$. 拆分 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的第一列得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}&=\begin{vmatrix}a_{i_1}+a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2}+a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k}+a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{i_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{j_1} & a_{i_1}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_1}+a_{j_k}\\ a_{j_1} & a_{i_2}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_2}+a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k}+a_{j_2} & \cdots & a_{i_k}+a_{j_k}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{i_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ a_{i_2} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_k} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{j_1} & a_{i_1} & \cdots & a_{i_1}\\ a_{j_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j_1} & a_{i_k} & \cdots & a_{i_k}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

因此当 $k \geqslant 3$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0$; 当 $k = 2$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{j_2} \\ a_{i_2} & a_{j_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1} \\ a_{j_1} & a_{i_2} \end{vmatrix} = (a_{i_1}a_{j_2} - a_{i_2}a_{j_2})(a_{i_2}a_{j_1} - a_{i_1}a_{j_1})$; 当 $k = 1$ 时,$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} = a_{i_1} + a_{j_1}$.

又注意到 $|\boldsymbol{C}|$ 只有主子式非零, 而其主子式 $\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = (-2)^k a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$. 于是当 $\exists m \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得 $i_m \neq j_m$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0$; 当 $i_m \neq j_m, m = 1, 2, \cdots, k$ 时,$\widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = (-2)^{n-k} a_1 \cdots \hat{a}_{i_1} \cdots \hat{a}_{i_2} \cdots \hat{a}_{i_k} \cdots a_n$.

故当 $n \geqslant 3$ 时,(1.5)式可化为

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n}} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right)$$

$$= |\boldsymbol{C}| + \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 \leqslant n}} \boldsymbol{B}\binom{i_1}{j_1} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n}} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}$$

$$= |\boldsymbol{C}| + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} = |\boldsymbol{C}| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{C}} \Bigg($$

$$= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} 2a_i(-2)^{n-1} a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [(a_i a_j - a_j^2)(a_i a_j - a_i^2)(-2)^{n-2} a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n]$$

$$= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_1 a_2 \cdots \cdots a_n + (-2)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [-(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n]$$

$$= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n n a_1 a_2 \cdots \cdots a_n - (-2)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n]$$

$$= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i(1-n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})]$$

$$= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i(1-n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j}$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right]$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_j}{a_i} + \frac{a_i}{a_j} - 2 \right) \right]$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \sum_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 \right]$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2 \right]$$

$$= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n - \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} - n \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i\left[4-4n+n+n(n-1)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}\right]\\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i\left[n^2-4n+4-\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right]\\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})]\\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i\,(n-2)^2-(-2)^{n-2}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}a_k.
\end{aligned}
$$

解法三 (降价公式)(推荐使用!): 令 $\Lambda=\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}$, 则

$$
A=\begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix} I_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}=B+\Lambda I_2^{-1}\Lambda'.
$$

于是由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$
|A|=|I|\left|B+\Lambda I_2^{-1}\Lambda'\right|=\begin{vmatrix} I_2 & \Lambda'\\ \Lambda & B\end{vmatrix}=|B|\left|I_2-\Lambda' B^{-1}\Lambda\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{vmatrix}\cdot\left|I_2-\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & & & \\ & -\frac{1}{2a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\right|\\
&=(-2)^n\prod_{i=1}^{n}a_i\left|I_2-\begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & -\frac{1}{2a_2} & \cdots & -\frac{1}{2a_n}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\right|\\
&=(-2)^n\prod_{i=1}^{n}a_i\left|I_2-\begin{pmatrix} -\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & -\frac{n}{2}\end{pmatrix}\right|=(-2)^n\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} \frac{n+2}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & \frac{n+2}{2}\end{vmatrix}\\
&=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i\left[(n+2)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]\\
&=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i\,(n-2)^2-(-2)^{n-2}\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}a_k.
\end{aligned}
$$

(ii) 当存在 $a_i=0$, 其中 $i\in 1,2,\cdot,ns$ 时, 不妨设只有 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}=0,i_1,i_2,\cdots,i_m\in 1,2,\cdots,n$, 则可将 $|A|$ 看作关于 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$ 连续的多元多项式函数 $g(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m})$, 于是由 g 的连续性可得

$$
g(0,0,\cdots,0)=\lim_{(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m})\to(0,0,\cdots,0)}g(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m})
$$

$$= \lim_{(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}) \to (0,0,\cdots,0)} \left[(-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i (n-2)^2 - (-2)^{n-2} \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} a_k\right] = 0.$$

即由行列式的连续性可知

$$|A| = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i (n-2)^2 - (-2)^{n-2} \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} a_k.$$

对某些 a_i 为 0 时也成立.

□

结论 对角矩阵行列式的子式和余子式:

设 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, 则其 k 阶子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 k 阶主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外都为零, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

记 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式 $(n-k$ 阶). 于是 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 除 $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 外也都为零, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

并且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k},$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_1 \cdots \hat{a}_{i_1} \cdots \hat{a}_{i_2} \cdots \hat{a}_{i_k} \cdots a_n$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

命题 1.8 (Cauchy 行列式)

证明:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (a_i + b_j)}.$$

笔记 需要记忆 Cauchy 行列式的计算方法.

1. 分式分母有公共部分可以作差, 得到的分子会变得相对简便.

2. 行列式内行列做加减一般都是加减同一行 (或列). 但是在循环行列式中, 我们一般采取相邻两行 (或列) 相加减的方法.

证明

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$
\overset{-j_n+j_i}{\underset{i=n-1,\cdots,1}{=\!=\!=}}
\begin{vmatrix}
\frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\
\frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_n+b_2)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\
\frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{-r_n+r_i}{\underset{i=n-1,\cdots,1}{=\!=\!=}}
\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}
\begin{vmatrix}
\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\
\frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\
\frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\
\frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\text{按最后一列展开}}{=\!=\!=\!=}
\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\
\frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot D_{n-1}.
$$

不断递推下去即得

$$
D_n=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot D_{n-1}
=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\left(a_j+b_{n-1}\right)\prod\limits_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdot D_{n-2}
$$

$$
=\cdots=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(a_j+b_n\right)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\left(a_j+b_{n-1}\right)\prod\limits_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)}\cdot\cdots\cdots\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{3}\left(a_j+b_3\right)\prod\limits_{k=1}^{2}(a_3+b_k)}\cdot D_2
$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)} \cdots \frac{\prod_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod_{j=1}^{3}(a_j+b_3)\prod_{k=1}^{2}(a_3+b_k)} \cdot \frac{(b_2-b_1)(a_2-a_1)}{\prod_{j=1}^{2}(a_j+b_2)(a_2+b_1)} \cdot D_1$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2}(b_{n-1}-b_i)(a_{n-1}-a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_j+b_{n-1})\prod_{k=1}^{n-2}(a_{n-1}+b_k)} \cdots \frac{\prod_{i=1}^{2}(b_3-b_i)(a_3-a_i)}{\prod_{j=1}^{3}(a_j+b_3)\prod_{k=1}^{2}(a_3+b_k)} \cdot \frac{(b_2-b_1)(a_2-a_1)}{\prod_{j=1}^{2}(a_j+b_2)(a_2+b_1)} \cdot \frac{1}{a_1+b_1}$$

$$= \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\le i\le j\le n}(a_i+b_j)\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i+b_j)} = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(a_i+b_j)}.$$

□

例题 1.13 证明:

$$A = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

是正定矩阵.

证明 由Cauchy 行列式可知, 对 A 的所有 m 阶顺序主子式, 我们都有

$$\begin{vmatrix} (1+1)^{-1} & (1+2)^{-1} & \cdots & (1+m)^{-1} \\ (2+1)^{-1} & (2+2)^{-1} & \cdots & (2+m)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m+1)^{-1} & (m+2)^{-1} & \cdots & (m+m)^{-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(j-i)^2}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(i+j)} > 0.$$

故 A 是正定矩阵. □

例题 1.14 设 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$A_n = a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

笔记 用**数学归纳法**证明与行列式有关的结论.

练习1.1和练习1.2都可同理使用用数学归纳法证明 (对阶数 n 进行归纳即可).

证明 (数学归纳法) 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1,2$ 时, 结论显然成立. 假设阶数小于 n 结论成立. 现证明 n 阶的情形. 注意到

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} = (a_{n-1}+a_n)A_{n-1} - a_{n-1}^2A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子中得

$$\begin{aligned} A_n &= (a_{n-1}+a_n)A_{n-1} - a_{n-1}^2A_{n-2} \\ &= (a_{n-1}+a_n)a_0a_1\cdots a_{n-1}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right) - a_{n-1}^2a_0a_1\cdots a_{n-2}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+a_0a_1\cdots a_{n-2}a_{n-1}^2\frac{1}{a_{n-1}}\\
&= a_0a_1\cdots a_{n-1}\left[a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+1\right]\\
&= a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right).
\end{aligned}
$$

故由数学归纳法可知, 结论对任意正整数 n 都成立. □

例题 1.15 设 $n(n>2)$ 阶行列式 $|A|$ 的所有元素或为 1 或为 -1, 求证:$|A|$ 的绝对值小于等于 $\frac{2}{3}n!$.

解 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=3$ 时, 将 $|A|$ 的第一列元素为-1 的行都乘以-1, 再将 $|A|$ 的第一行元素为 1 的列都乘以-1,$|A|$ 的绝对值不改变.

因此不妨设 $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&a_0&b_0\\1&c_0&d_0\end{vmatrix}$, 其中$a_0,b_0,c_0,d_0=1$或$-1$.

从而

$$
|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&a_0&b_0\\1&c_0&d_0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{j_1+j_i}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a&b\\1&c&d\end{vmatrix}, \text{其中} a,b,c,d=0\text{或}2.
$$

于是

$$
abs\left(|A|\right)=abs\left(\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a&b\\1&c&d\end{vmatrix}\right)=abs\left(ad-bc\right)\leqslant 4=\frac{2}{3}\cdot 3!
$$

假设 n-1 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形. 将 $|A|$ 按第一行展开得

$$
|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \text{其中} a_{1i}=1\text{或}-1\,(i=1,2\cdots,n).
$$

从而由归纳假设可得

$$
\begin{aligned}
abs\left(|A|\right)&=abs\left(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\right)\leqslant abs\left(A_{11}\right)+abs\left(A_{12}\right)+\cdots+abs\left(A_{1n}\right)\\
&\leqslant \frac{2}{3}(n-1)!+\frac{2}{3}(n-1)!+\cdots+\frac{2}{3}(n-1)!\\
&= n\cdot\frac{2}{3}(n-1)!=\frac{2}{3}n!.
\end{aligned}
$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立. □

命题 1.9 (行列式的求导运算)

设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数,

$$
F(t)=\begin{vmatrix}f_{11}(t)&f_{12}(t)&\cdots&f_{1n}(t)\\f_{21}(t)&f_{22}(t)&\cdots&f_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_{n1}(t)&f_{n2}(t)&\cdots&f_{nn}(t)\end{vmatrix}
$$

求证:$\frac{d}{dt}F(t)=\sum_{j=1}^{n}F_j(t)$, 其中

$$
F_j(t)=\begin{vmatrix}f_{11}(t)&f_{12}(t)&\cdots&\frac{d}{dt}f_{1j}(t)&\cdots&f_{1n}(t)\\f_{21}(t)&f_{22}(t)&\cdots&\frac{d}{dt}f_{2j}(t)&\cdots&f_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\f_{n1}(t)&f_{n2}(t)&\cdots&\frac{d}{dt}f_{nj}(t)&\cdots&f_{nn}(t)\end{vmatrix}
$$

证明 证法一 (数学归纳法):对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n-1$ 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形.

将 $F(t)$ 按第一列展开得

$$F(t)=f_{11}(t)A_{11}(t)+f_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+f_{n1}(t)A_{n1}(t).$$

其中 $A_{i1}(t)$ 是元素 $f_{i1}(t)$ 的代数余子式.$(i=1,2,\cdots,n)$

从而由归纳假设可得

$$A'_{i1}(t)=\frac{d}{dt}A_{i1}(t)=\sum_{k=2}^{n}A_{i1}^{k}(t), i=1,2,\cdots,n.$$

$$\text{其中}A_{i1}^{k}(t)=\begin{vmatrix} f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1k}(t) & \cdots & f_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_{i-1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i-1,k}(t) & \cdots & f_{i-1,n}(t)\\ f_{i+1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i+1,k}(t) & \cdots & f_{i+1,n}(t)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nk}(t) & \cdots & f_{nn}(t)\end{vmatrix}, k=2,3,\cdots,n.$$

于是, 我们就有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t)&=\frac{d}{dt}\left[f_{11}(t)A_{11}(t)+f_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+f_{n1}(t)A_{n1}(t)\right]\\
&=f'_{11}(t)A_{11}(t)+f'_{21}(t)A_{21}(t)+\cdots+f'_{n1}(t)A_{n1}(t)+f_{11}(t)A'_{11}(t)+f_{21}(t)A'_{21}(t)+\cdots+f_{n1}(t)A'_{n1}(t)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f'_{i1}(t)A_{i1}(t)+f_{11}(t)\sum_{k=2}^{n}A_{11}^{k}(t)+f_{21}(t)\sum_{k=2}^{n}A_{21}^{k}(t)+\cdots+f_{n1}(t)\sum_{k=2}^{n}A_{n1}^{k}(t)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f'_{i1}(t)A_{i1}(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i1}(t)\sum_{k=2}^{n}A_{i1}^{k}(t)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f'_{i1}(t)A_{i1}(t)+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}(t)\left(A_{i1}^{2}+A_{i1}^{3}+\cdots+A_{i1}^{n}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}f'_{i1}(t)A_{i1}(t)+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}(t)A_{i1}^{2}+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}(t)A_{i1}^{3}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}f_{i1}(t)A_{i1}^{n}\\
&=F_{1}(t)+F_{2}(t)+F_{3}(t)+\cdots+F_{n}(t)\\
&=\sum_{j=1}^{n}F_{j}(t).\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

证法二 (行列式的组合定义):由行列式的组合定义可得

$$F(t)=\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_11}(t)f_{k_22}(t)\cdots f_{k_nn}(t).$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t)=&\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f_{k_{22}}(t)\cdots f_{k_{nn}}(t)\\
&+\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f\prime_{k_{22}}(t)\cdots f_{k_{nn}}(t)\\
&+\cdots+\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f_{k_{11}}(t)f_{k_{22}}(t)\cdots f\prime_{k_{nn}}(t)\\
=&F_1(t)+F_2(t)+\cdots+F_n(t).\end{aligned}$$

□

1.5 拆分法

命题 1.10 (大拆分法)

设 t 是一个参数,

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)|=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A(0)|$ 中的代数余子式.

笔记 大拆分法的想法: **将行列式的每一行/列拆分成两行/列**, 得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=|\boldsymbol{A}(0)|+t\sum_{j=1}^{n}|A_j|.\text{其中}A_j=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array},j=1,2,\cdots,n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成 2^n 个行列式.(不一定需要公共的 t). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1 加到后面每一列上, 得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开, 不断这样做下去就可得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}(0)|+\sum_{j=1}^{n}|A_j|.$$

其中 $A_j = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 将 A_j 按第 j 列展开可得

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t\left(A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{nj}\right) = t\sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

从而

$$|\boldsymbol{A}(t)| = |\boldsymbol{A}(0)| + \sum_{i=1}^{n} A_i = |\boldsymbol{A}(0)| + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = |\boldsymbol{A}(0)| + t\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

□

推论 1.3 (推广的大拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1, t_2, \cdots, t_n)| = \begin{vmatrix} a_{11}+t_1 & a_{12}+t_2 & \cdots & a_{1n}+t_n \\ a_{21}+t_1 & a_{22}+t_2 & \cdots & a_{2n}+t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t_1 & a_{n2}+t_2 & \cdots & a_{nn}+t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^{n}\left(t_j\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\right).$$

♡

笔记 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即**将行列式的每一行/列拆分成两行/列**).

这里推广的大拆分法的关键也是**要找到合适的** $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 运用大拆分法的证明方法不难得到. □

命题 1.11 (小拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且 a_{in} 可以拆分成 $b_{in} + c_{in}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_{1n}+c_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_{2n}+c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_{nn}+c_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&c_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}.$$

笔记 记忆小拆分法的想法 (即**拆边列/行, 再展开得到递推式**).

注 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列, 则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方法将这一行或一列变成最后一列, 再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 由行列式的性质可直接得到结论. □

例题 1.16 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 解法一 (大拆分法): 注意到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b+(a-b)&b+0&\cdots&b+0\\b+0&b+(a-b)&\cdots&b+0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b+0&b+0&\cdots&b+(a-b)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-b&0&\cdots&0\\0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}A_i=(a-b)^n+\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

其中 A_i 是第 i 行元素全为 b, 主对角元素除了 (i,i) 元外都为 $a-b$, 其他元素都为 0 的 n 阶行列式.

又因为

$$A_i=\begin{array}{c}1\\\vdots\\i\\\vdots\\n\end{array}\begin{vmatrix}a-b&&&&\\&\ddots&&&\\b&\cdots&b&\cdots&b\\&&&\ddots&\\&&&&a-b\end{vmatrix}=b\,(a-b)^{n-1},i=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$|\boldsymbol{A}|=(a-b)^n+\sum_{i=1}^{n}A_i=(a-b)^n+nb\,(a-b)^{n-1}=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b+(a-b)&b&\cdots&b\\b+0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b+0&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a-b&b&\cdots&b\\0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b)\,D_{n-1} = b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1}.(n \geq 2)$$

从而由上式递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1} \\ &= b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)\left[b\,(a-b)^{n-2} + (a-b)\,D_{n-2}\right] = 2b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)^2\,D_{n-2} \\ &= \cdots = (n-1)\,b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}\,D_1 \\ &= (n-1)\,b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}\,a \\ &= [a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法三 (求和法):

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{j_i+j_1} \begin{vmatrix} a+(n-1)\,b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)\,b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)\,b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)\,b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} [a+(n-1)\,b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法四 (" 爪" 型行列式的推广):

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-j_i+j_1} \begin{vmatrix} a-(n-1)\,b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a-(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

□

例题 1.17 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一 (大拆分法): 令

$$|\boldsymbol{A}(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| + tu, u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

当 $t=-b$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-b)|=\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|-bu=(a-b)^n.$$

当 $t=-c$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-c)|=\begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|-cu=(a-c)^n.$$

若 $b\neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b=c$, 则由练习1.16可知

$$|\boldsymbol{A}|=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-b)\,D_{n-1}=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}+(a-b)\,D_{n-1}$$

$$=b\,(a-c)^{n-1}++(a-b)\,D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c+(a-c) & b & \cdots & b \\ c+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+0 & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-c & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=c\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}=c\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}$$

$$=c\,(a-b)^{n-1}++(a-c)\,D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

若 $b\neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}|=D_n=\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b=c$, 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|=D_n&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}\\&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\left[b\,(a-b)^{n-2}+(a-b)\,D_{n-2}\right]=2b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^2\,D_{n-2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots = (n-1)\,b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}\,D_1 \\
&= (n-1)\,b\,(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1}\,a \\
&= [a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

当 $b=c$ 时, 也可以由练习1.16可知

$$
|\boldsymbol{A}| = [a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.
$$

□

例题 1.18 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式, 求证: 对任意 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 均有

$$
\begin{vmatrix}
f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\
f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)
\end{vmatrix} = 0.
$$

证明 证法一 (大拆分法): 因为 $f_k(x)(1 \leq k \leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以它们都是单项式 $1, x, \cdots, x^{n-2}$ 的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这 $n-1$ 个单项式进行拆分, 最后得到至多 $(n-1)!$ 个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有 n 列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

证法二 (多项式根的有限性): 令 $f(x) = \begin{vmatrix}
f_1(x) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\
f_1(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_1(x) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)
\end{vmatrix}$, 则将 $f(x)$ 按第一列展开得到

$$
f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x).
$$

其中 k_i 为行列式 $f(x)$ 的第 $(i,1)$ 元素的代数余子式,$i = 1, 2, \cdots, n$.

注意 k_i 与 x 无关, 均为常数. 若 $f(x)$ 不恒为 0, 则又因为 $f_k(x)(1 \leq k \leq n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以 $deg f(x) \leq n-2$. 但是, 注意到 $f(a_2) = f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$, 即 $f(x)$ 有 $n-1$ 个根. 于是由余数定理可知,$(x-a_2)\cdots(x-a_n) \mid f(x)$. 从而 $n-1 = deg\,(x-a_2)\cdots(x-a_n) \geq deg f(x)$. 这与 $deg f(x) \leq n-2$ 矛盾. 故 $f(x) \equiv 0$, 当然也有 $f(a_1) = 0$.

证法三:

设多项式

$$
f_k(x) = c_{k,n-2}x^{n-2} + \cdots + c_{k1}x + c_{k0}, 1 \leq k \leq n.
$$

则有如下的矩阵分解:

$$
\begin{pmatrix}
f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\
f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\
1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\
c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2}
\end{pmatrix}.
$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是 $n \times (n-1)$ 和 $(n-1) \times n$ 矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零. □

例题 1.19 求下列 n 阶行列式的值:

$$
D_n = \begin{vmatrix}
1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\
a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2
\end{vmatrix}
$$

笔记 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的 t 对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的 t_i, 所以推广的大拆分也不行)

解 (小拆分法) 将 D_n 最后一列拆成两列得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{vmatrix}+D_{n-1}.$$

若 $a_n\neq 0$, 则由上式可得

$$D_n=a_n\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n\end{vmatrix}+D_{n-1}\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{\text{对第一个行列式}:-a_ij_n+j_i}a_n\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & a_1\\ 0 & 1 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}+D_{n-1}=a_n^2+D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

若 $a_n=0$, 则上面第一个行列式等于 0, 进而 $D_n=D_{n-1}(n\geq 0)$. 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n=a_n^2+D_{n-1}=a_n^2+\left(a_{n-1}^2+D_{n-2}\right)=\cdots=\sum_{i=2}^{n}a_i^2+D_1=1+\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

□

1.6 Vandermode 行列式

本节我们用 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 阶 Vandermonde 行列式.

定义 1.1

对 $1\leqslant i\leqslant n$, $V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示删除 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 行 $(x_1^{i-1},x_2^{i-1},\cdots,x_n^{i-1})$ 之后新添第 n 行 $(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n)$ 所得 n 阶行列式. ♣

定义 1.2

$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示将 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 n 行换成 $(x_1^{n+1},x_2^{n+1},\cdots,x_n^{n+1})$ 所得 n 阶行列式. ♣

例题 1.20 设初等对称多项式

$$\sigma_j=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j},\ j=1,2,\cdots,n,\tag{1.6}$$

我们有

$$V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,n.\tag{1.7}$$

证明 (加边法) 不妨设 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 互不相同. 设

$$D_n(x) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ (-x)^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-x)^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

由行列式性质我们知道 D_n 是 n 次多项式且有 n 个根 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$. 于是我们有

$$D_n(x) = c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n). \tag{1.8}$$

把 $D_n(x)$ 按第一列展开得

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^{n} V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} + V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^n. \tag{1.9}$$

于是比较(1.8)式和(1.9)式最高次项系数, 我们有 $c = V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 定义 $\sigma_0 = 1$, 利用根和系数的关系 (Vieta 定理), 结合(1.8)式和(1.9)式得

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_{n-i+1} V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} + V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^n,$$

比较上式等号两边 $x^i (1 \leq i \leq n)$ 的系数就能得到(1.7). □

例题 1.21 证明:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right) V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.10}$$

证明 不妨设 $x_i, 1 \leq i \leq n$ 互不相同。设 $n+1$ 次多项式

$$P_{n+1}(x) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ (-x)^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-x)^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ (-x)^{n+1} & x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

注意到有 n 个根 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$。我们用 $-x_{n+1}$ 表示 P_{n+1} 第 $n+1$ 个根。于是我们有

$$P_{n+1}(x) = c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)(x+x_{n+1}). \tag{1.11}$$

将 $P_{n+1}(x)$ 按第一列展开得

$$P_{n+1}(x) = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{n+1} + \Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \tag{1.12}$$

其中 $a_{n-2}, \cdots, a_0$ 是某些与 x_j 有关的 n 阶行列式。比较(1.11)和(1.12)式的系数可知 $c = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 于是结合(1.11)式, 并利用 Vieta 定理得

$$P_{n+1}(x) = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)(x^{n+1} + \delta_1 x^n + \delta_2 x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}) \tag{1.13}$$

这里 δ_j 类似(1.6)式定义是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的初等对称多项式。比较(1.12)(1.13)式的 x^{n-1} 系数可得 $\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\delta_2 V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。因为 $P_{n+1}(x)$ 没有 x^n 的项, 所以

$$\delta_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0 \Rightarrow x_{n+1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

从而

$$\delta_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i x_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + x_{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j - (x_1+x_2+\cdots+x_n)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j.$$

现在就有(1.10)成立。 □

命题 1.12

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $f_i(x)=a_{i1}+a_{i2}x+\cdots+a_{in}x^{n-1}(i=1,2,\cdots,n)$，证明：对任何复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = |A|\cdot V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

这里 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Vandermonde 行列式。

笔记 关键是利用命题??.

证明 直接由矩阵乘法观察知显然。 □

推论 1.4

设 $f_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$, 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

笔记 知道这类行列式化简的操作即可. 以后这种行列式化简操作不再作额外说明.

注 也可以由命题 1.12直接得到.

解 解法一: 利用行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_1+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_2+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_n+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ -a_{i,i-(n-3)}j_{n-2}+j_{i+1},\, i=n-2,n-1 \\ -a_{n-1,1}j_{n-1}+j_n}]{\substack{-a_{ii}j_1+j_{i+1},\, i=1,2,\cdots n-1 \\ -a_{i,i-1}j_2+j_{i+1},\, i=2,3,\cdots,n-1}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

解法二:由命题 1.12可得

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ x_1+a_{11} & x_2+a_{11} & \cdots \\ x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ x_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1,n-1} & x_2^{n-1}+\cdots+a_{n-1,n-1} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

□

例题 1.22 计算

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1+1&x_2+1&x_3+1&\cdots&x_n+1\\x_1^2+x_1&x_2^2+x_2&x_3^2+x_3&\cdots&x_n^2+x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^{n-2}&x_2^{n-1}+x_2^{n-2}&x_3^{n-1}+x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

证明 由命题 1.12我们知道

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1+1&x_2+1&x_3+1&\cdots&x_n+1\\x_1^2+x_1&x_2^2+x_2&x_3^2+x_3&\cdots&x_n^2+x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^{n-2}&x_2^{n-1}+x_2^{n-2}&x_3^{n-1}+x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

□

命题 1.13

计算下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

解 若所有的 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不为 0, 则有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\begin{vmatrix}1&\frac{b_1}{a_1}&\cdots&\frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}}&\frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}}\\1&\frac{b_2}{a_2}&\cdots&\frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}}&\frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\frac{b_n}{a_n}&\cdots&\frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}&\frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{a_ib_j-a_jb_i}{a_ja_i}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i).$$

若只有一个 a_i 为 0, 则将原行列式按第 i 行展开得到具有相同类型的 $n-1$ 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_i^{n-1}&a_i^{n-2}b_i&\cdots&a_ib_i^{n-2}&b_i^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&b_i^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}i\text{行展开}}(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1}^{n-1}&a_{i-1}^{n-2}b_{i-1}&\cdots&a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\a_{i+!}^{n-1}&a_{i+1}^{n-2}b_{i+1}&\cdots&a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

此时同理可得

$$|A|=(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1}^{n-1}&a_{i-1}^{n-2}b_{i-1}&\cdots&a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\a_{i+1}^{n-1}&a_{i+1}^{n-2}b_{i+1}&\cdots&a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}a_k^{n-1}\begin{vmatrix}1&\frac{b_1}{a_1}&\cdots&\frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}}\\1&\frac{b_2}{a_2}&\cdots&\frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\frac{b_{i-1}}{a_{i-1}}&\cdots&\frac{b_{i-1}^{n-2}}{a_{i-1}^{n-2}}\\1&\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}&\cdots&\frac{b_{i+1}^{n-2}}{a_{i+1}^{n-2}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\frac{b_n}{a_n}&\cdots&\frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}a_k^{n-1}\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\k,l\ne i}}\left(\frac{b_l}{a_l}-\frac{b_k}{a_k}\right)=(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}a_k^{n-1}\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\k,l\ne i}}\frac{a_kb_l-a_lb_k}{a_ka_l}$$

$$=(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}a_k\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)=(-1)^{n-i}b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}a_k\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)$$

$$=\prod_{1\le k<i}a_kb_i\prod_{i<l\le n}(-a_lb_i)\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)$$

$$=\prod_{1\le k<l\le n}(a_kb_l-a_lb_k).\ (a_i=0)\ .$$

若至少有两个 $a_i=a_j=0$, 则第 i 行与第 j 行成比例, 因此行列式的值等于 0. 经过计算发现, 后面两种情形的答案都可以统一到第一种情形的答案.

综上所述,$|A|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)$.

□

结论 连乘号计算小结论:

(1) $\prod\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_j=\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$.

证明: $$\prod_{1\le i<j\le n} a_ia_j=\underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdot a_4a_3a_4a_2a_4a_1\cdots\cdots\overbrace{a_ka_{k-1}a_ka_{k-2}\cdots a_ka_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots\overbrace{a_na_{n-1}a_na_{n-2}\cdots a_na_1}^{n-1\text{对}}}_{n-1\text{组}}$$

$$\xlongequal{\text{从左往右按组计数}} a_1^{n-1}a_2^{1+n-2}a_3^{2+n-3}a_4^{3+n-4}\cdots a_k^{k-1+n-k}\cdots a_n^{n-1}=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}.$$

(2) $\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} a_ia_j=\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}} a_i^{n-2}$, 其中 $k\in[1,n]\cap\mathbb{N}_+$.

证明: $$\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} a_ia_j=\underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdots\cdots\overbrace{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_{k-1}a_1}^{k-2\text{对}}\cdot\overbrace{a_{k+1}a_{k-1}\cdots a_{k+1}a_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots\overbrace{a_na_{n-1}\cdots a_na_{k+1}a_na_{k-1}\cdots a_na_1}^{n-2\text{对}}}_{n-2\text{组}}$$

$$\xlongequal{\text{从左往右按组计数}} a_1^{n-2}a_2^{1+n-3}a_3^{2+n-4}a_4^{3+n-4}\cdots a_{k-1}^{k-2+n-k}a_{k+1}^{k-1+n-k-1}\cdots a_n^{n-2}=\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}a_i^{n-2}.$$

注意: 从第 $k-1$ 组开始, 后面每组都比原来少一对 (后面每组均缺少原本含 a_k 的那一对).

例题 1.23 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\cdots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\cdots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\cdots&(a_n+b_n)^n\end{vmatrix}$.

解 由二项式定理可知

$$\left(a_i+b_j\right)^n={a_i}^n+\mathrm{C}_n^1{a_i}^{n-1}b_j+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_i{b_j}^{n-1}+{b_j}^n,\text{其中}i,j=0,1,\cdots,n.$$

从而

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}{a_0}^n+\mathrm{C}_n^1{a_0}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0{b_0}^{n-1}+{b_0}^n&\cdots&{a_0}^n+\mathrm{C}_n^1{a_0}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0{b_n}^{n-1}+{b_n}^n\\{a_1}^n+\mathrm{C}_n^1{a_1}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1{b_0}^{n-1}+{b_0}^n&\cdots&{a_1}^n+\mathrm{C}_n^1{a_1}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1{b_n}^{n-1}+{b_n}^n\\\vdots&&\vdots\\{a_{n-1}}^n+\mathrm{C}_n^1{a_{n1}}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}{b_0}^{n-1}+{b_0}^n&\cdots&{a_{n-1}}^n+\mathrm{C}_n^1{a_{n-1}}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}{b_n}^{n-1}+{b_n}^n\\{a_n}^n+\mathrm{C}_n^1{a_n}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_n{b_0}^{n-1}+{b_0}^n&\cdots&{a_n}^n+\mathrm{C}_n^1{a_n}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_n{b_n}^{n-1}+{b_n}^n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}{a_0}^n&{a_0}^{n-1}&\cdots&a_0&1\\{a_1}^n&{a_1}^{n-1}&\cdots&a_1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\{a_{n-1}}^n&{a_{n-1}}^{n-1}&\cdots&a_{n-1}&1\\{a_n}^n&{a_n}^{n-1}&\cdots&a_n&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\\mathrm{C}_n^1b_0&\mathrm{C}_n^1b_1&\cdots&\mathrm{C}_n^1b_{n-1}&\mathrm{C}_n^1b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\mathrm{C}_n^{n-1}{b_0}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}{b_1}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_n^{n-1}{b_{n-1}}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}{b_n}^{n-1}\\{b_0}^n&{b_1}^n&\cdots&{b_{n-1}}^n&{b_n}^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1&a_0&\cdots&{a_0}^{n-1}&{a_0}^n\\1&a_1&\cdots&{a_1}^{n-1}&{a_1}^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&\cdots&{a_n}^{n-1}&{a_n}^n\end{vmatrix}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\b_0&b_1&\cdots&b_{n-1}&b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\{b_0}^{n-1}&{b_1}^{n-1}&\cdots&{b_{n-1}}^{n-1}&{b_n}^{n-1}\\{b_0}^n&{b_1}^n&\cdots&{b_{n-1}}^n&{b_n}^n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}\left(b_i-b_j\right)==\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}\left(a_j-a_i\right)\left(b_i-b_j\right).$$

□

例题 1.24 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}.$$

解 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\begin{aligned}&\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k\\&=\cos^k\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta-\cdots\\&=\cos^k\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta-\cdots\end{aligned}$$

比较实部可得

$$\begin{aligned}\cos k\theta&=\cos^k\theta\left(1+\mathrm{C}_k^2+\mathrm{C}_k^4+\cdots\right)-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}+\mathrm{C}_k^4\cos^{k-4}-\cdots\\&=2^{k-1}\cos^k\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}+\mathrm{C}_k^4\cos^{k-4}-\cdots\end{aligned}$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成 $\cos\theta_j(j=2,3,\cdots,n)$ 的多项式.

再利用行列式的性质, 可依次将第 $3,4,\cdots,n$ 列消去除最高次项外的其他项, 从而得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & 2\cos^2\theta_n & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}\\&=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).\end{aligned}$$

□

结论 组合式计算常用公式:

(1)$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$

(2)$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\cdots=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3+\cdots=2^{n-1}$

证明:(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^m&=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!}+\frac{(n-1)!m}{m!\,(n-m)!}\\&=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}\end{aligned}$$

(2)(i) 当 n 为奇数时, 由 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$, 可得

$$\begin{aligned}C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}&=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}\\C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n&=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4+C_{n-1}^5+\cdots+C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^n\end{aligned}$$

由于 $C_{n-1}^n=0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

(ii) 当 n 为偶数时, 由 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$, 可得

$$\begin{aligned}C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^n&=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4\cdots+C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^n\\C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^{n-1}&=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4+C_{n-1}^5+\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}\end{aligned}$$

由于 $C_{n-1}^n=0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

综上所述,$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$.

例题 1.25 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$

笔记 可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论.

解 根据和差化积公式, 可得

$$\sin k\theta - \sin(k-2)\theta = 2\sin\theta\cos(k-1)\theta, k = 2, 3, \cdots, n.$$

再结合上一题结论, 可得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & 2\sin\theta_1\cos\theta_1 & \cdots & 2\sin\theta_1\cos(n-1)\theta_1 \\ \sin\theta_2 & 2\sin\theta_2\cos\theta_2 & \cdots & 2\sin\theta_2\cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_n & 2\sin\theta_n\cos\theta_n & \cdots & 2\sin\theta_n\cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i \prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j - \cos\theta_i\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i \prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j - \cos\theta_i\right).$$

□

命题 1.14 (多项式根的有限性)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 即 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 求证:$f(x)$ 是零多项式, 即 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.

证明 由 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 可知 $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$ 是下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_1^{n-1}x_{n-1} + b_1^n x_n = 0, \\ x_0 + b_2 x_1 + \cdots + b_2^{n-1}x_{n-1} + b_2^n x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0 + b_{n+1}x_1 + \cdots + b_{n+1}^{n-1}x_{n-1} + b_{n+1}^n x_n = 0. \end{cases}$$

上述线性方程组的系数行列式是一个 Vandermode 行列式, 由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 互不相同, 所以系数行列式不等于零. 由 Crammer 法则可知上述方程组只有零解. 即有 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. □

1.7 升阶法

例题 1.26 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

笔记 本题也可以使用大拆分法进行求解. 但我们以本题为例介绍利用**升阶法**计算行列式.

解 解法一升阶法:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{小拆分法}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1x_2\cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

$$= 2x_1x_2\cdots x_n \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i) - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

$$= [2x_1x_2\cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i).$$

解法二 (大拆分法): 设 $|\boldsymbol{B}(t)| = \begin{vmatrix} x_1+t & x_1^2+t & \cdots & x_1^n+t \\ x_2+t & x_2^2+t & \cdots & x_2^n+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+t & x_n^2+t & \cdots & x_n^n+t \end{vmatrix}$, 且 B_{ij} 是 $|\boldsymbol{B}(0)|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式.

根据行列式的性质将 $|\boldsymbol{A}|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 t 所在的列展开得到

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}(1)| = |\boldsymbol{B}(0)| + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij},$$

$$|\boldsymbol{B}(-1)| = |\boldsymbol{B}(0)| - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}.$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{B}(0)|-|\boldsymbol{B}(-1)|$. 注意到

$$|\boldsymbol{B}(0)|=\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

又由推论 1.4或命题 1.12可得

$$|\boldsymbol{B}(-1)|=\begin{vmatrix} x_1-1 & x_1^2-1 & \cdots & x_1^n-1 \\ x_2-1 & x_2^2-1 & \cdots & x_2^n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-1 & x_n^2-1 & \cdots & x_n^n-1 \end{vmatrix}=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2}\cdots+x_1+1 \\ 1 & x_2+1 & \cdots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2}\cdots+x_2+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+1 & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\cdots+x_n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

故可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=2|\boldsymbol{B}(0)|-|\boldsymbol{B}(-1)|=2x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\\&=[2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).\end{aligned}$$

□

结论 **升阶法:** 将原行列式加上一行和一列使得到到新行列式的阶数比原行列式要高一阶.

升阶法的应用:

(1) 当原行列式每一行具有相同的结构时, 我们可以在原行列式的基础上加上一行和一列, 新加上的一列和一行需要满足: 新的一列除了与新的一行交叉位置的元素为 1 外其余全为 0(这样才能保证新的行列式按新的一行或一列展开后与原行列式相同), 并且新加上的一行除 1 以外其他位置的元素就取原行列式中每一行所具有的相同结构 (这样可以利用行列式的性质将每一行中的相同的结构减去, 进而达到简化原行列式的目的). 具体例子见练习1.26.

(2) 当原行列式是我们由熟悉的行列式去掉某一行、或某一列、或某一行和一列得到的, 我们可以在原行列式的基础上补充上缺少的那一行和一列, 再进行计算得到新行列式的式子. 再将新行列式按照新添加的一行或一列展开得到的对应元素乘与其对应的代数余子式, 而新添加的一行和一列交叉位置的元素对应的余子式就是原行列式, 最后两边式子比较系数一般就能得到原行列式的值. 具体例子见练习1.27.

例题 1.27 求下列 n 阶行列式的值 $(1\leq i\leq n-1)$:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解 令

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix}=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{1.14}$$

而上式右边是关于 y 的 n 次多项式, 并且其 y^i 前的系数是

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leqslant n}(-1)^{n-i}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开, 得

$$|\boldsymbol{B}|=A_{n1}+A_{n2}y+\cdots+A_{ni}y^i+\cdots+A_{nn}y^n,$$

其中 A_{nk} 为 $|\boldsymbol{B}|$ 的 (n,k) 位置元素的代数余子式,$k=1,2,\cdots,n$.

注意到 A_{nk} 均与 y 无关. 因此 $|\boldsymbol{B}|$ 作为关于 y 的 n 次多项式, 其 y^i 前的系数是

$$A_{ni}=(-1)^{n+1+i+1}|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+i}|\boldsymbol{A}|.$$

再结合(1.14)式, 可知

$$(-1)^{n+i}|\boldsymbol{A}|=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leqslant n}(-1)^{n-i}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

故 $|\boldsymbol{A}|=x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_{n-i}}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$. □

1.8 求根法

1.9 行列式的组合定义

例题 1.28 若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 证明:$|A|=0$.

证明 由行列式的组合定义可得

$$|A|=\sum_{1\le k_1k_2\cdots k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$$

由于 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 故 $a_{k_11},a_{k_22},\cdots,a_{k_nn}$ 中至少有一个为零, 从而 $a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}=0$, 因此 $|A|=0$. 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个, 由抽屉原理可知,$|A|$ 至少有一列其零元素的个数大于等于 $\left[\dfrac{n^2-n}{n}\right]+1=n$, 即 $|A|$ 至少有一列其元素全为零, 因此 $|A|=0$. □

例题 1.29 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n(n\ge 2)$ 阶非异整数方阵, 满足对任意的 i,j,$|A|$ 均可整除 a_{ij}, 证明:$|A|=\pm1$.

解 $|A|$ 可整除每个元素 $a_{i,j}$, 故由行列式的组合定义

$$\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$$

可知 $|A|^n$ 可整除 $|A|$ 中每个单项 $a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$, 从而 $|A|^n$ 可整除 $|A|$, 即有 $|A|^{n-1}$ 可整除 1, 于是 $|A|^{n-1}=\pm1$. 又由行列式的组合定义可知 $|A|$ 是整数, 从而只能是 $|A|=\pm1$. □

命题 1.15 (奇数阶反对称行列式的值等于零)

如果 n 阶行列式 $|A|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(1\le i,j\le n)$, 则称为反对称行列式. 求证: 奇数阶反对称行列式的值等于零.

笔记 证法二的想法是将行列式按组合的定义写成 (n-1)! 个单项的和. 然后将其两两分组再求和 (因为一共有 (n-1)! 个单项, 即和式中共有偶数个单项, 所以只要使用合适的分组方式就一定能够将其两两分组再求和), 最后发现每组的和均为 0.

构造的这个映射 φ 的目的是为了更加准确、严谨地说明分组的方式. 证明这个映射 φ 是一个双射是为了保证原来的和式中的每一个单项都能与和式中另一个单项一一对应. 然后利用反证法证明了这两个一一对应的单项一定互不相同 **(注: 我认为这步有些多余. 这里应该只需要说明这两个一一对应的单项是原和式中不同的单项即可, 即这两个单项的角标不完全相同就行, 其实, 这个在我们定义映射 φ 的时候就已经满足了. 满足这个条件就足**

以说明原和式可以按照这种方式进行分组. 并且利用反对称行列式的性质也能够证明这两个单项不仅互不相同, 还能进一步得到这两个单项互为相反数). 于是我们就可以将原和式中的每一个单项与其在双射 φ 作用下的像看成一组, 按照这种方式就可以将原和式进行分组再求和.

证明 证法一 (行列式的性质): 由反对称行列式的定义可知,$|A|$ 的转置 $|A'|$ 与 $|A|$ 的每个元素都相差一个符号, 将 $|A'|$ 的每一行都提出公因子 -1 可得 $|A| = |A'| = (-1)^n|A| = -|A|$, 从而 $|A| = 0$.

证法二 (行列式的组合定义): 由于 $|A|$ 的主对角元全为 0, 故由组合定义, 只需考虑下列单项:

$$T = \{a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} \mid k_i \neq i(1 \leq i \leq n)\}$$

定义映射 $\varphi: T \to T, a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} \mapsto a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$. 显然 $\varphi^2 = \mathrm{Id}_T$, 于是 φ 是一个双射. 我们断言:$a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$ 和 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 作为 $|A|$ 的单项不相同, 否则 $\{1,2,\cdots,n\}$ 必可分成若干对 $(i_1,j_1),\cdots,(i_t,j_t)$, 使得 $a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = a_{i_1 j_1}a_{j_1 i_1}\cdots a_{i_t j_t}a_{j_t i_t}$, 这与 n 为奇数矛盾. 将上述两个单项看成一组, 则它们在 $|A|$ 中符号均为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$. 由于 $|A|$ 反对称, 故

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} = (-1)^n a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} = -a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

从而每组和为 0, 于是 $|A| = 0$. □

命题 1.16 (直接计算两个矩阵和的行列式)

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + \sum_{1\leq k\leq n-1}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\ 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right).$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 是 $|\boldsymbol{B}|$ 的 k 阶子式 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 的代数余子式.

笔记 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之一是比较简单的矩阵 (例如对角矩阵或秩较小的矩阵) 时, 可利用这个命题计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

证明 设 $|\boldsymbol{A}| = |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|,|\boldsymbol{B}| = |\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n|$, 其中 $\alpha_j,\beta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量. 注意到

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n|.$$

对 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$, 按列用行列式的性质展开, 使每个行列式的每一列或者只含有 α_j, 或者只含有 β_j(即利用大拆分法按列向量将行列式完全拆分开), 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 可以表示为 2^n 个这样的行列式之和. 即 (并且单独把 $k=0,n$ 的项分离出来, 即将 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 分离出来)

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n| \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c} \begin{matrix}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{matrix} \\ |\beta_1,\cdots,\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k},\cdots,\beta_n|\end{array}.
\end{aligned}$$

再对上式右边除 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 外的每个行列式用 *Laplace* 定理按含有 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的那些列展开得到

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c} \begin{matrix}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{matrix} \\ |\beta_1,\cdots,\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k},\cdots,\beta_n|\end{array} \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant n}\sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix} \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+\sum_{1\leq k\leq n-1}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\ 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

□

例题 1.30 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 x 是未定元,a_{ij} 是常数. 证明:$f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$.

笔记 注意 $f(x)$ 的每行每列除主对角元素外, 其他元素均不相同. 因此 $f(x)$ 并不是推广的" 爪" 型行列式.

解 由行列式的组合定义可知,$f(x)$ 的最高次项出现在组合定义展开式中的单项 $(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ 中, 且展开式中的其他单项作为 x 的多项式其次数小于等于 $n-2$. 因此 $f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$. □

注 将这个例题进行推广再结合直接计算两个矩阵和的行列式的结论可以得到下述推论.

推论 1.5

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵,x 为未定元,

$$f(x)=|xI_n-A|=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 其中

$$a_k=(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, 1\le k\le n.$$

笔记 需要注意上述推论中 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}), a_n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$.

证明 注意到 xI_n 非零的 $n-k$ 阶子式只有 $n-k$ 阶主子式, 并且其值为 x^{n-k}, 其余 $n-k$ 阶子式均为零. 记 $\widehat{xI_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是 $xI_n\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式, 则 $\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是 xI_n 非零的 $n-k$ 阶子式. 于是我们有

$$\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=x^{n-k}.$$

再利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论就可以得到

$$f(x)=|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}+\sum_{1\le k\le n-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n \\ 1\le j_1,j_2,\cdots,j_k\le n}}(-\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^n|\boldsymbol{A}|+x^n+\sum_{1\le k\le n-1}\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n}(-1)^k\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\widehat{x\boldsymbol{I}_n}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

$$= x^n + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^k \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \cdot x^{n-k} + (-1)^n |\boldsymbol{A}|$$

$$= x^n + \sum_{1\le k\le n-1} x^{n-k} (-1)^k \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} + (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

因此 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, 其中

$$a_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$$

□

1.10 Laplace 定理

例题 1.31 利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式:

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

解 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 *Laplace* 定理按第一、二列展开得

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

□

例题 1.32 求 $2n$ 阶行列式的值 (空缺处都是零):

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

解 设原行列式为 D_{2n}, 其中 $2n$ 为行列式的阶数. 不断用 *Laplace* 定理按第一行及最后一行展开, 可得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行及最后一行展开}} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2n-2} = \left(a^2 - b^2\right) D_{2(n-1)}.$$

进而, 由上述递推式可得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \left(a^2 - b^2\right) D_{2(n-1)} = \left(a^2 - b^2\right)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = \left(a^2 - b^2\right)^{n-1} D_2 \\ &= \left(a^2 - b^2\right)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right)^n. \end{aligned}$$

□

1.11 循环行列式

例题 1.33 设 a, n 是给定互素正整数，按 Build 除法，存在唯一确定的整数对 (s, t) 使得 $a = sn + t, 0 \le t \le n-1$。令

$$u_i = \begin{cases} s+1, & 0 \le i < t \\ s, & t \le i \le n-1 \end{cases}$$

若 t 与 n 互素，计算

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_0 & \cdots & u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_0 \end{vmatrix}$$

证明 记 $f(x) \triangleq \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x^i, w_j \triangleq e^{\frac{2\pi j i}{n}}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 则由命题??可知

$$D_n = \prod_{k=0}^{n} f\left(w_k\right) = f\left(1\right) \prod_{k=0}^{n-1} f\left(w_k\right).$$

由条件可知

$$f(1) = \sum_{i=0}^{t-1} (s+1) + \sum_{i=t}^{n-1} s = (s+1)t + (n-t)s = ns + t = a.$$

从而

$$D_n = a \prod_{i=0}^{n-1} f(w_k) = a \prod_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} (s+1) w_k^i + \sum_{i=t}^{n-1} s w_k^i \right]$$

$$= a\prod_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{t-1} w_k^i + s\sum_{i=0}^{n-1} w_k^i\right] = a\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1-w_k^t}{1-w_k} + s\frac{1-w_k^n}{1-w_k}\right).$$

由 $w_k^n = 1, w_k = w_1^k$ 可知

$$D_n = a\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k}.$$

由群论可知 $\{1, w_1, \cdots, w_1^{n-1}\}$ 是一个循环群且 w_1 的阶为 n, 再根据群论的 Lagrange 定理及 $(t,n) = 1$ 可知, w_1^t 的阶为 $\frac{n}{(n,t)} = n$。因此 $w_1^k = w_1$, 故 $\{w_1, w_1^2, \cdots, w_1^{n-1}\} = \{w_1^t, w_2^{2t}, \cdots, w_1^{(n-1)t}\}$。于是 $w_1^k = w_1^{tk}$, 故

$$D_n = a\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k} = a.$$

□

1.12 行列式综合问题

例题 1.34 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的"爪"型行列式.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x - x^2 & x^2 - 2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x - x^2 & 0 & \cdots & x^2 - 2a_nx \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{"爪"型行列式}} (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\left(2a_1x - x^2\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n} a_i^2\left(x^2-2a_1x\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= (x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= \left[\left(x^2-2a_1x\right)+a_1^2\right]\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_ix\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right).$$

□

例题 1.35 求下列行列式式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-j_1+j_i}\begin{vmatrix}(a+b)^2-c^2 & c^2 & 0\\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-r_i+r_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ -2b & 2bc & -2c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2} & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=2abc(a+b+c)^3.$$

解法二 (求根法): □

例题 1.36 证明: 若一个 $n(n>1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数. □

例题 1.37 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|$$

$$=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\ \sum_{2\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{array}\\ |\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_1+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_2+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|\end{array}$$

$$+\sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\ \sum_{2\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_k\leq n}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n\end{array}\\ |\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_1+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_2+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|\end{array}.$$

$$=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|$$

$$=c+(-1)^{n-1}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$$

$$=c+(-1)^{n-1}c$$

$$=\begin{cases}0\ ,n\text{为偶数}\\ 2c,n\text{为奇数}\end{cases}$$

□

例题 1.38 令

$$(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & -1 & a_n\end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}=\frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_2a_3\cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n\le k-1, k\in\mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n=k$ 时, 将行列式 $(a_1a_2,\cdots,a_k)$ 按第一列展开得

$$(a_1a_2\cdots a_k)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & & \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & 1 & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

$$=a_1(a_2a_3\cdots a_k)+(a_3a_4\cdots a_k).$$

从而

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{(a_3a_4\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}=a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

例题 1.39 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-r_i+r_{i-1}}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n.$$

□

例题 1.40 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-2)^{n-2}(n-1).$$

□

例题 1.41 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时，但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整. 此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律，再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式，而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式. 后续求解很繁琐，因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2 - a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \\ 1 & y-a & y(y-a) & y^2(y-a) & \cdots & y^{n-1}(y-a) \end{vmatrix}$，则

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由上式可知，$|\boldsymbol{B}|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开得到

$$|\boldsymbol{B}| = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}B_{n+1,i}y^{i-1}, \text{其中}B_{ni}\text{是}|\boldsymbol{B}|\text{的第}(n+1,i)\text{元的余子式}, i = 1,2,\cdots,n+1.$$

从而

$$|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n+2}B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i+1}B_{n+1,i}y^{i-2}(y-a) = \prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{1.15}$$

又易知 $B_{n+1,2} = |\boldsymbol{A}|$，而当 $a=0$ 时，由等式(1.15)可知，$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(1.15)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_1)\cdots(-x_{i-1})(-x_{i+1})\cdots(-x_n)\right).$$

于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right) = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right)$.

当 $a \neq 0$ 时，由等式(1.15)可知，$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$，但是，我们比较等式(1.15)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k). \tag{1.16}$$

又因为

$$\begin{aligned} B_{n+1,1} &= \begin{vmatrix} x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \end{aligned}$$

所以再结合等式(1.16)可得

$$
\begin{aligned}
-a(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}| = -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k)-(-1)^{n+2}B_{n+1,1}\\
&=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\\
&=(-1)^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left[\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right].
\end{aligned}
$$

故此时 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)$. □

例题 1.42 求下列行列式的值 (n 为偶数)

$$
I=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1}\\
\frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2}
\end{vmatrix}.
$$

笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x)=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1}\\
\frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2}
\end{vmatrix}$, 则 $I=\dfrac{G(n)}{n}$ 且 $G(0)=0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$
G'(x)=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1}\\
x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1}
\end{vmatrix}
= n!x\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n\\
1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n
\end{vmatrix}
= n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\prod_{k=0}^{n}(x-k).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I=\frac{G(n)}{n}=\frac{\int_0^n G'(x)dx}{n}&=(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\
&\overset{\text{区间再现}}{=}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(n-k-x)dx\\
&=(-1)^{n+1}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\
&=(-1)^{n+1}I.
\end{aligned}
$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1}=-1$. 于是 $I=-I$. 故 $I=0$. □