0.1 复变函数的导数

定义 0.1

设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1}$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可微**或**可微**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**或**微商**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在 D 中每点都可微, 就称 f 是域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**. ♣

命题 0.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续. ♠

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{2}$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. □

例题 0.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

笔记 但容易看出这个函数在 $\mathbb{C}$ 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z) = \mathrm{Re}z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbb{C}$ 中处处不可导. □

命题 0.2

(1) 若 f 和 g 在域 D 中全纯, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z \in D, g(z) \neq 0$, 那么 $\dfrac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) **复合函数的求导法则:** 设 D_1, D_2 是 $\mathbb{C}$ 中的两个域, 且

$$f: D_1 \to D_2,$$
$$g: D_2 \to \mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h = g \circ f$ 是 $D_1 \to \mathbb{C}$ 的全纯函数, 而且 $h'(z) = g'[f(z)]f'(z)$. 这里,$g \circ f$ 记 f 和 g 的复合函数:$g \circ f(z) = g[f(z)]$.

(3) **反函数的求导法则:** 若函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内是单叶解析的, 其反函数 $z = g(w)$ 在区域 $E = f(D)$

内连续, 则 $g(w)$ 在 E 内解析, 且
$$g'(w)=\frac{1}{f'[g(w)]}.$$

证明

(1)

(2) 设 z_0 是 D 内任意一点. 由条件,$\zeta_0=f(z_0)\in E$,$g(\zeta)$ 在 ζ_0 可导, 所以
$$g(\zeta)-g(\zeta_0)=g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\rho(\zeta-\zeta_0),$$
$$\Delta g=g'(\zeta_0)\Delta\zeta+\rho\Delta\zeta,$$
其中 ρ 是随 $\Delta\zeta\to 0$ 而趋于零的复数. 将 $\zeta=f(z)$,$\zeta_0=f(z_0)$ 代入上式, 并用 Δz 除等式两边, 得到
$$\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'[f(z_0)]\frac{\Delta f}{\Delta z}+\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}.$$
因为
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho\Delta\zeta}{\Delta z}=0,$$
所以
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta z}=g'[f(z_0)]f'(z_0).$$
因为 z_0 是 D 内任意一点, 所以
$$h'(z)=g'[f(z)]f'(z)$$
在 D 内成立.

(3) 设 $w_0\in E$,$z_0=g(w_0)$, 由 $z=g(w)$ 是 $w=f(z)$ 的反函数知,$w=f[g(w)]$, 故
$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{g(w)-g(w_0)}{f[g(w)]-f[g(w_0)]}=\frac{1}{\frac{f[g(w)]-f[g(w_0)]}{g(w)-g(w_0)}}.$$
因为 $g(w)$ 在 w_0 连续, 所以 $\lim\limits_{w\to w_0}g(w)=g(w_0)$, 于是
$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{f'[g(w_0)]},$$
定理证毕.

□