0.1 函数性态分析训练

命题 0.1

设 f' 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

笔记 本题也有积分版本: 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.(令 $F=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 就可以将这个积分版本转化为上述命题)

证明 反证, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0$, 则可以不妨设存在 $\delta>0,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$x_n\to+\infty \text{且} f'(x_n)\geqslant\delta,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由 f' 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\eta>0$, 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f'(x)\geqslant f'(x_n)-\frac{\delta}{2}\geqslant\frac{\delta}{2},\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f(x_n+\eta)-f(x_n)=\int_{x_n}^{x_n+\eta} f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_n+\eta}\frac{\delta}{2}\mathrm{d}x=\frac{\delta\eta}{2}>0,\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

令 $n\to\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $0\geqslant\frac{\delta\eta}{2}>0$, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. □

例题 0.1 时滞方程 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1,\quad f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

证明 由 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 及 $f\in D(\mathbb{R})$ 可知 $f'\in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_1\in\mathbb{R}$, 固定 x_1, 记

$$A=\{z>x_1\mid f'(z)=f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可知

$$\exists x_2\in(x_1,x_1+1)\text{ s.t. } f'(x_1)=f(x_1+1)-f(x_1)=f'(x_2).$$

故 $x_2\in A$, 从而 A 非空. 现在考虑 $y\triangleq\sup A\in(x_1,+\infty)$, 下证 $y=+\infty$. 若 $y<+\infty$, 则存在 $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n'\to y \text{且} f'(z_n')=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n')=f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可得

$$\exists y'\in(y,y+1)\text{ s.t. } f'(y)=f(y+1)-f(y)=f'(y').$$

从而 $y'\in A$ 且 $y'>y$, 这与 $y=\sup A$ 矛盾! 故 $y=+\infty$. 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n\to+\infty \text{且} f'(z_n)=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1.$$

因此由 x_1 的任意性得, 存在 C 为常数, 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. □

例题 0.2 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)\leqslant 0$ 以及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0. \tag{12.27}$$

证明: (1): 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

(2): 存在 $\eta\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta)=0$.

证明 (1) 如果对任何 $x \in (1,+\infty)$, 都有 $f'(x) \leqslant 1$, 那么 $[f(x)-x]' \leqslant 0$ 知 $f(x)-x$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1 \geqslant f(1)-1 \geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|] = 0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何 $x \in \mathbb{R}$, 我们有 $f''(x) \neq 0$. 从而 $f''(x)$ 要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取 $\xi \in \mathbb{R}$.

当 $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x) \geqslant f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \forall x > \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] \geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi)-1)x] = +\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x) \leqslant f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \forall x < \xi.$$

于是

$$0 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] \leqslant \lim_{x\to-\infty}[f(\xi) - f'(\xi)\xi + (f'(\xi)+1)x] = -\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). □

例题 0.3 设 f 在 $[a,b]$ 上每一个点极限都存在, 证明:f 在 $[a,b]$ 有界.

笔记 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即**局部的性质等价于在所有紧集上的性质**. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对 $\forall c \in [a,b]$, 由 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在可知, 存在 c 的邻域 U_c 和 $M>0$, 使得

$$\sup_{x\in U_c\cap[a,b]} |f(x)| \leqslant M_c.$$

注意 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{c\in[a,b]} U_c$, 由有限覆盖定理得, 存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in [a,b]$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{c_k}.$$

故 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} M_k$. □

例题 0.4 设 f 是 $(a,+\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T, 存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0.$$

注 因为 $|f(x+T)-f(x)| \geqslant 0$, 所以

$$0 \leqslant \underline{\lim}_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| < \overline{\lim}_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)|$$

原结论的反面只用考虑 $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)|$ 即可. 若 $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| = 0$, 则一定存在子列 $x_n \to +\infty$, 使得结论成立. 故原结论的反面就是 $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| > 0$.

笔记 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画 $f(x)$ 的大致走势图), 就容易找到矛盾.

证明 反证, 假设 $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty} |f(x+T)-f(x)| > 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, $X > 0$, 使得

$$|f(x+T)-f(x)| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X \tag{1}$$

令 $g(x) \triangleq f(x+T)-f(x)$, 则若存在 $x_1, x_2 \geqslant X$, 使得 $g(x_1) = f(x_1+T)-f(x_1) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, $g(x_2) = f(x_2+T)-f(x_2) \leqslant -\varepsilon_0 < 0$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 g 连续及介值定理可知, 存在 $x_3 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$g(x_3) = f(x_3+T) - f(x_3) = 0$$

与(1) 式矛盾! 故 $g(x) \triangleq f(x+T)-f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 ε_0 , 要么恒小于 ε_0 . 于是不妨设

$$f(x+T)-f(x) \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X \tag{2}$$

从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在 $X_k \geqslant X$, 使得当 $x \geqslant X_1$ 时, 有 $x+(k-1)T > X$. 于是由(1)式可得

$$f(x+kT)-f(x+(k-1)T) \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant X_k \tag{3}$$

因此对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $K_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$, 则由(3)式可知 $f(x+kT)-f(x+(k-1)T)$, $\forall x \geqslant K_n$, $\forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$ 进而对上式求和可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x+kT)-f(x+(k-1)T)] = f(x+nT)-f(x) \geqslant n\varepsilon_0, \quad \forall x \geqslant K_n$$

任取 $x_0 \geqslant K_n$, 则 $f(x_0+nT)-f(x_0) \geqslant n\varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $n \to \infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 这与 f 在 $(a,+\infty)$ 上有界矛盾! □

命题 0.2

1. 设 $f_n \in C[a,b]$ 且关于 $[a,b]$ 一致的有
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$
证明: 对 $\{x_n\} \subset [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, 有
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c).$$
2. 设 $f_n(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 都有
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0),$$
证明: $f \in C(\mathbb{R})$.

证明

1. 由 f_n 一致收敛到 $f(x)$ 可知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall N \geqslant N_0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 对 $\forall x \in [a,b]$, 都有
$$|f_n(x) - f_N(x)| < \varepsilon.$$
从而由上式可得
$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(c)| &\leqslant |f_n(x_n) - f_N(x_n)| + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &\leqslant \varepsilon + |f_N(x_n) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)|.\end{aligned}$$
令 $n \to +\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 可得
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n) - f(c)| \leqslant \varepsilon + |f_N(c) - f(c)|.$$
再令 $N \to +\infty$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$ 可知
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n) - f(c)| \leqslant \varepsilon.$$
令 $\varepsilon \to 0^+$, 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n(x_n) - f(c)| \leqslant 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c)$.
2. 反证, 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在 $y_m \in (x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m})$, 使得
$$|f(y_m) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4}$$
对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 令条件中的 $x_0 = y_m, x_n \equiv y_m, \forall n \in \mathbb{N}$, 从而由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(y_m) - f(y_m)| = 0, m = 1,2,\cdots$, 故对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在严格递增的数列 $n_m \to +\infty$, 使得
$$|f_{n_m}(y_m) - f(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{5}$$
从而由(4)(5)式可知, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有
$$|f(y_{n_m}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0, \tag{6}$$

$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{7}$$

因此由(6)(7)式可得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(x_0)|\geqslant|f(y_{n_m})-f(x_0)|-|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{8}$$

注意到 $y_m\to x_0$, 于是 $y_{n_m}\to x_0$. 从而由已知条件可知 $\lim\limits_{m\to\infty}f_{n_m}(y_{n_m})=f(x_0)$. 这与(8)式矛盾! 故 $f\in C(\mathbb{R})$.

□

例题 0.5 设 $g\in C(\mathbb{R})$ 且以 $T>0$ 为周期, 且有

$$f(f(x))=-x^3+g(x). \tag{9}$$

证明: 不存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(9)式成立.

证明 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在 $M>0$, 使得 $|g(x)|\leqslant M$. 反证, 假设存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(9)式成立. 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=-\infty, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=+\infty. \tag{11}$$

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$, 则存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $f(x_n)\to A$. 从而由(9)式可得

$$f(A)=\lim_{n\to\infty}f(f(x_n))=\lim_{n\to\infty}(-x_n^3+g(x_n))=-\infty.$$

上式显然矛盾! 又因为 $f\in C(\mathbb{R})$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$. 否则, 当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 振荡, 则由零点存在定理可知, 存在 $y_n\to+\infty$, 使得 $f(y_n)=0$, $n=1,2,\cdots$. 从而由(10)式可知

$$-\infty=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{n\to\infty}f(f(y_n))=f(0).$$

显然矛盾!

(i) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty.$$

显然矛盾!

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 则

$$f(-\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty. \tag{12}$$

从而对上式两边同时作用 f 可得

$$f(-\infty)=f(f(-\infty))=\lim_{x\to-\infty}[-x^3+g(x)]=+\infty. \tag{13}$$

于是(12)式与(13)式显然矛盾! 综上,$f\in C(\mathbb{R})$ 的解不存在. □

例题 0.6

1. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.
2. 设 $f\in C(\mathbb{R})$,n 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y\in\mathbb{R}$, 都有 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存在.

证明

1. 反证, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 由 f 有界, 可设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=A>B=\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)$. 任取 $C\in(B,A)$, 则由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_1\geqslant0$, 使得 $f(x_1)>C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_2>x_1+1$, 使得 $f(x_2)<C$. 于是再由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_3>x_2+1$, 使得 $f(x_3)>C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_4>x_3+1$, 使得 $f(x_4)<C$. 依此类推, 可得递增数列 $\{x_n\}$, 使得
$$x_{n+1}>x_n+1,\quad f(x_{2n-1})>C,\quad f(x_{2n})<C,\quad n=1,2,\cdots.$$
从而由 $f\in C[0,+\infty)$ 及介值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $y_n\in(x_{2n-1},x_{2n})$, 使得 $f(y_n)=C$, 矛盾!
2. 设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是 f 的所有零点, 记 $x_0=-\infty$,$x_{n+1}=+\infty$, 则由 f 的连续性及介值定理可知,f 在

(x_{i-1},x_i) 上不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 现在考虑 $(x_{i-1},x_i), i=2,3,\cdots,n$, 这 $n-1$ 个区间. 于是由抽屉原理可知, 这 $n-1$ 个区间中必存在 $\frac{n}{2}$ 区间, 使 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内都同号.

不妨设 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内恒大于 0, 记 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值记为 $f(m_i)\triangleq M_i>0$, 其中 $m_i\in(x_{i-1},x_i), i=2,3,\cdots,n$. 由介值定理知, 至少存在 $c_i\in(x_{i-1},m_i), c_i'\in(m_i,x_i)$, 使得

$$f(c_i)=f(c_i')=\frac{1}{2}\min_{2\leq i\leq n}M_i>0, i=2,3,\cdots,n.$$

注意到在 $(x_0,x_1),(x_n,x_{n+1})$ 上 f 必不同号. 否则, 不妨设在 $(x_0,x_1),(x_n,x_{n+1})$ 上 f 恒大于 0, 则由 $f\in C(\mathbb{R})$ 可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|<M, \forall x\in[x_1,x_{n+1}]$. 从而 $f(x)\geqslant -M, \forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R}, f(x)=y$ 都有根矛盾!

不妨设 f 在 (x_0,x_1) 上恒小于 0, 在 (x_n,x_{n+1}) 上恒大于 0, 则 f 在 (x_n,x_{n+1}) 上无上界. 否则, 存在 $K>\max\limits_{2\leq i\leq n}M_i>0$, 使得 $f(x)<K, \forall x\in(x_n,x_{n+1})$. 又因为 $f(x)<0<K, \forall x\in(x_0,x_1)$, $f(x)\leqslant\max\limits_{2\leq i\leq n}M_i<K, \forall x\in(x_1,x_n)$. 所以 $f(x)<K, \forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R}, f(x)=y$ 都有根矛盾!

又 $f(x_n)=0$, 故至少存在一个 $c\in(x_n,x_{n+1})$, 使得 $f(c)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leq i\leq n}M_i>0$. 综上, 至少有 $n+1$ 个点使得 $f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leq i\leq n}M_i>0$. 这与 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leq i\leq n}M_i\}$ 是 n 元集矛盾!

□

例题 0.7 设 $f\in C^2[0,+\infty), g\in C^1[0,+\infty)$ 且存在 $\lambda>0$ 使得 $g(x)\geqslant\lambda, \forall x\geqslant 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x)+g(x)f(x)=0,\quad \forall x\geqslant 0,$$

证明:f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

笔记 形式计算分析需要的构造函数: 由条件微分方程可得

$$y'y''=-gyy'\Rightarrow\frac{(y')^2}{2}=-\int gyy'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int g\mathrm{d}y^2=-\frac{1}{2}gy^2+\frac{1}{2}\int y^2\mathrm{d}g$$
$$\Rightarrow(y')^2=-gy^2+\int y^2\mathrm{d}g\Rightarrow\frac{(y')^2}{g}+y^2=\int y^2\mathrm{d}g.$$

于是考虑构造函数 $F_1(x)\triangleq\frac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x), F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X>0$, 使得 $g'(x)\neq 0, \forall x\geqslant X$. 从而由导数介值性可知,$g'$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x)\triangleq\frac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x), x\geqslant X$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_1'(x)=\frac{2f'f''g-g'(f')^2+2ff'g}{g^2}=\frac{-2f'fg^2-g'(f')^2+2ff'g^2}{g^2}=-\frac{g'(f')^2}{g^2}. \tag{14}$$

(i) 若 $g'(x)>0, \forall x\geqslant X$, 则由(14)式可知 $F'(x)\leqslant 0$, 即 $F(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x)>\lambda>0, \forall x>0$ 可知, 存在 $C>0$, 使得

$$f^2(x)\leqslant F_1(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(ii) 若 $g'(x)<0, \forall x\geqslant X$, 令 $F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_2'(x)=2f'f''+g'f^2+2gff'=-2f'fg+g'f^2+2gff'=g'f^2\leqslant 0. \tag{15}$$

从而 $F_2(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减, 于是存在 $C'>0$, 使得

$$g(x)f^2(x)\leqslant F_2(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

进而由 $g(x)>\lambda>0, \forall x>0$ 可得

$$f^2(x)\leqslant\frac{C}{g(x)}\leqslant\frac{C}{\lambda},\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

□

例题 0.8 设 $a,b>1$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 邻域有界. 若

$$f(ax)=bf(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

证明:f 在 $x=0$ 连续.

证明 注意到

$$f(0)=bf(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

由条件可得

$$f(ax)=bf(x)\Rightarrow f(x)=\frac{f(ax)}{b}=\frac{f(a^2x)}{b^2}=\cdots=\frac{f(a^nx)}{b^n},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

因为 f 在 $x=0$ 邻域有界, 所以存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in(-\delta,\delta). \tag{17}$$

从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{M}{b^N}<\varepsilon. \tag{18}$$

于是当 $x\in\left(-\frac{\delta}{a^N},\frac{\delta}{a^N}\right)$ 时, 结合(16)(17)(18)式, 我们有

$$|f(x)|=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|\leqslant\frac{M}{b^N}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0.$ □

例题 0.9 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x),f(x^2)$ 都是周期函数, 证明:f 为常值函数.

证明 由连续周期函数必一致连续可知,$f(x),f(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 于是对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 的数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$, 都有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|,|f((x_n')^2)-f((x_n'')^2)|\to 0,\quad n\to\infty. \tag{19}$$

设 $f(x)$ 的周期为 $T>0$, 则对 $\forall c\in\mathbb{R}$, 取 $x_n'=\sqrt{nT+c},x_n''=\sqrt{nT}$, 显然 $x_n'-x_n''=\dfrac{c}{\sqrt{nT+c}+\sqrt{nT}}\to 0$. 从而由 (19) 式可得

$$|f((x_n')^2)-f((x_n'')^2)|=f(nT+c)-f(nT)=f(c)-f(0)\to 0.$$

故 $f(c)=f(0),\forall c\in\mathbb{R}$. 故 f 为常值函数. □

例题 0.10 计算函数方程 $f(\log_2 x)=f(\log_3 x)+\log_5 x$ 所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

笔记 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\frac{\ln x}{\ln 5},\ x>0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5},\ n\in\mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3},\qquad \frac{\ln a_n}{\ln 3}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}>1$, 后者公比 $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}<1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 取 $a_1=x,\ln a_n=\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1}\cdot\ln x,n\in\mathbb{N}$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=0$. 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2},\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\frac{\ln x}{\ln 5}\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5},n=1,2,\cdots$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)-f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_n}{\ln 5}=\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)-f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right]=f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right)-\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)-f(0).$$

故

$$\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}=f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)-f(0)\overset{y=\frac{\ln x}{\ln 2}}{\Longrightarrow}f(y)=f(0)+\frac{y\ln 2\ln 3}{\ln 5\ln\frac{3}{2}}.$$

□

例题 0.11 设 $n\in\mathbb{N},f\in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta\in\mathbb{R}$ 满足对任何 $x,h\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 对 $\forall x,h\in\mathbb{R}$, 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned}f(x+h)&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2h^2}{n!}h^n,\end{aligned}\tag{20}$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2}.\tag{21}$$

比较(20)式和(21)式得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}-\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\right]h.\tag{22}$$

当 $\theta=\frac{1}{n+1}$ 时, 我们有

$$\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}=\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令 $h\to0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2}=\frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!}\Rightarrow f^{(n+2)}(x)=0.$$

当 $\theta\neq\frac{1}{n+1}$ 时, 对(22)式令 $h\to0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=0\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=0.$$

因此, 无论如何都有 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式. □

例题 0.12

1. 设

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots\tag{23}$$

证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$.

2. 设 $g(x)=e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$, 证明 g 是只有实根的多项式.

笔记 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式, 且 ±1 是 $\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n$ 的 $n-k$ 重根 $(0\leqslant k\leqslant n)$. 由 Rolle 定理可知, $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知, $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得, $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有 n 个不同实根. 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 故 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$ 上.
2. 设 $\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})=P_k(x)e^{-x^2}$,$P_k$ 是 k 次多项式,$k\in\mathbb{N}$, 显然 $P_0(x)=1$, 于是
$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{-x^2})=\left[P_k'(x)-2xP_k(x)\right]e^{-x^2}.$$
令 $P_{k+1}(x)=P_k'(x)-2xP_k(x)$, 则由 P_k 是 k 次多项式可知 $P_{k+1}(x)$ 是 $k+1$ 次多项式. 故由数学归纳法可知
$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=P_n(x)e^{-x^2},\quad P_n\in\mathbb{R}[x],\quad n\in\mathbb{N}.$$
因此 $g(x)=e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=P_n(x)$ 是 n 次多项式 $(n\in\mathbb{N})$. 设 P_k 是有 k 个不同实根的多项式, 这 k 个根为
$$x_1<x_2<\cdots<x_k.$$
从而这 k 个根也是 $P_k(x)e^{-x^2}$ 的根. 由 Rolle 定理可知
$$P_{k+1}(x)=e^{-x^2}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})=e^{-x^2}\frac{d}{dx}\left(P_k(x)e^{-x^2}\right)$$
在 $(x_{j-1},x_j),j=2,3,\cdots,k$ 有实根. 而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_k(x)e^{-x^2}=0$, 故由 Rolle 定理可知 $P_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_k,+\infty)$ 上还各有一个实根. 因此 $P_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个根. 故由数学归纳法可知 $P_n(x)$ 有 n 个实根 $(n\in\mathbb{N})$. 又因为 $g(x)=P_n(x)$ 是 n 次多项式, 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 所以 $g(x)=P_n(x)$ 是只有实根的多项式.

□

例题 0.13 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 且 f,f',f'' 都是正值函数. 若存在 $a,b>0$ 使得
$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
求 $f'(x)\leqslant cf(x)$ 恒成立的最小的 c.

证明 考虑微分方程 $y''=ay+by'$, 其特征方程为
$$x^2-bx-a=0\Rightarrow x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>0,\quad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}<0.$$
于是
$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)\Longleftrightarrow f''(x)-x_1f'(x)\leqslant x_2\left[f'(x)-x_1f(x)\right].$$
令 $g(x)\triangleq f'(x)-x_1f(x)$, 则 $g'(x)\leqslant x_2g(x)$. 再令 $c(x)\triangleq\frac{g(x)}{e^{x_2x}}$, 则
$$c'(x)=\frac{g'(x)-x_2g(x)}{e^{x_2x}}\leqslant0\Rightarrow c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}c(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}},\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$
由 $f'',f',f>0$ 可知 f,f' 递增有下界. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 都存在. 因此
$$c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}}=0,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$
即
$$f'(x)\leqslant x_1f(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$
取 $f(x)=e^{x_1x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min}=x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. □

注 若存在 $c<x_1$, 使得 $f'(x)\leqslant cf(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 则
$$f'(x)\leqslant cf(x)<x_1f(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x)=e^{x_1x}$ 时,$f'(x)=x_1f(x)$ 矛盾! 故 $c_{\min}=x_1$.

例题 0.14 设 $f\in C^n(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N},f^{(k)}(x_0)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$. 若对某个 $M>0$ 和 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2}\geq 0,\lambda_{n-1}\geq 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)|\leq M\prod_{k=0}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k},\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

笔记 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)}=f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}.$$

$$f^{(n)}=-f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=-g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=-\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{-\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}.$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x)\triangleq\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}},c_2(x)\triangleq f^{(n-1)}(x)e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x)\triangleq c_1^2(x)=\dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}},C_2(x)\triangleq c_2^2(x)=[f^{(n-1)}(x)]^2e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant|f^{(n-1)}(x)|\cdot g(x),$$

其中 $g(x)=M\prod\limits_{k=1}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k-1}$. 从而 $f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)\leqslant|f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)|\leqslant|f^{(n-1)}(x)|^2\cdot g(x)$.

$$\tag{24}$$

令 $C_1(x)\triangleq\dfrac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}$, 则由 (24) 式可知

$$C_1'(x)=\frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)-2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}\leqslant 0.$$

故 $C_1(x)\leqslant C_1(x_0)=0,\forall x\geqslant x_0$. 因此 $C_1(x)=0,\forall x\geqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x)=0,\forall x\geqslant x_0$. 令 $C_2(x)\triangleq[f^{(n-1)}(x)]^2e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$, 则由 (24) 式可知

$$C_2'(x)=\left[2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)+2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2\right]e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}\geqslant 0.$$

故 $C_2(x)\leqslant C_2(x_0)=0,\forall x\leqslant x_0$. 因此 $C_2(x)=0,\forall x\leqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x)=0,\forall x\leqslant x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x)\equiv 0,x\in\mathbb{R}$. 又 $f^{(k)}(x_0)=0,k=0,1,\cdots,n-1$, 故 $f(x)\equiv 0$. □

例题 0.15 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g\in C(\mathbb{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|g(x)|}{x}=+\infty$, 证明: $f\circ g$ 不是周期函数.

笔记 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

证明 若 $f\circ g$ 是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知 $f\circ g$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 设 f 的周期为 $T>0$, 记 $a\triangleq\max f-\min f>0$, 则存在 $\delta>0$, 使

$$|f(g(x))-f(g(y))|<a,\forall|x-y|\leqslant\delta.\tag{25}$$

先证 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 若 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g(x+\delta)-g(x)|\neq+\infty$, 则存在 $A>0$, 使 $|g(x+\delta)-g(x)|\leqslant A,\forall x\geqslant 0$. 对 $x\in[n\delta,(n+1)\delta),n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|g(x-n\delta)|}{n\delta}+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{g(x-k\delta)-g(x-(k+1)\delta)}{n\delta}\right|\leqslant\frac{1}{n\delta}\sup_{x\in[0,\delta]}|g(x)|+\frac{A}{\delta}.$$

故 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{A}{\delta}$ 矛盾! 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 于是存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $|g(x_0+\delta)-g(x_0)|\geqslant T$. 由介值

定理可知, 存在 $s,t \in [x_0, x_0+\delta]$, 使得 $f(g(s)) = \max f, \quad f(g(t)) = \min f$. 从而由 (25) 式可知

$$a = |f(g(s)) - f(g(t))| < a$$

矛盾! 故 $f \circ g$ 不是周期函数 ($f \circ g$ 甚至不是一致连续函数). □