

0.1 一致连续

定理 0.1

f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{x''_n\}_{n=1}^\infty \subset I$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) = 0$.

定理 0.2 (Cantor 定理)

$f \in C(a, b)$ 一致连续的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在.

注 这个定理对 $f \in C(a, b]$ 和 $f \in C[a, b)$ 也成立.

推论 0.1

若 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.

命题 0.1

设 $f \in C[0, +\infty)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 证明: f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

注 这个命题反过来并不成立, 反例: $f(x) = \sqrt{x}$. 因此这个条件只是函数一致连续的充分不必要条件.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $A > 0$, 对 $\forall x_1, x_2 \geq A$, 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (1)$$

由 Cantor 定理可知, f 在 $[0, A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in [0, A+1]$ 且 $|x_2 - x_1| \leq \delta$, 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (2)$$

现在对 $\forall |x_1 - x_2| \leq \delta < 1$, 必然有 $x_1, x_2 \in [0, A+1]$ 或 $x_1, x_2 \in [A, +\infty)$, 从而由(1)(2)式可知, 此时一定有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

故 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

□

命题 0.2

设 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续且 $g \in C[0, +\infty)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

证明: g 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 f 一致连续可知, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ 可知, 存在 $A > 0$, 使得对 $\forall x \geq A$, 有

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

由 Cantor 定理可知, g 在 $[0, A+1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得对 $\forall x, y \in [0, A+1]$ 且 $|x - y| \leq \eta$, 有

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

故对 $\forall x, y \geq 0$ 且 $|x - y| \leq \eta$, 要么都落在 $[0, A+1]$, 要么都落在 $[A, +\infty)$.

(i) 若 $x, y \in [0, A+1]$, 则由(5)式可得 $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$;

(ii) 若 $x, y \in [A, +\infty)$, 则由(3)(4)式可得

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 g 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

□

命题 0.3 (连续周期函数必一致连续)

设 f 是周期 $T > 0$ 的 \mathbb{R} 上的连续函数, 则 f 在 \mathbb{R} 上一致连续.

▲

证明 由 **Cantor 定理**, f 在 $[0, 2T]$ 一致连续, 所以对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, T)$ 使得对 $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [0, 2T]$ 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

现在对 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $0 < x_2 - x_1 < \delta$. 注意到

$$x_1 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T \in [0, T), x_2 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T \in [0, 2T), |x_1 - x_2| < \delta,$$

我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| f\left(x_1 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T\right) - f\left(x_2 - \left\lfloor \frac{x_1}{T} \right\rfloor T\right) \right| \leq \varepsilon,$$

这就证明了 f 在 \mathbb{R} 上一致连续.

□

命题 0.4 (一致连续与 Lipschitz 连续的关系)

设 f 定义在区间 I 的函数. 证明 f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得对任何 $x_1, x_2 \in I$, 都有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_1 - x_2| + \varepsilon.$$

▲

注 这个命题相当重要! 但是考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 充分性: 由条件可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $|x_2 - x_1| \leq \delta$ 且 $x_1, x_2 \in I$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| + \varepsilon \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

故 f 在 I 上一致连续.

必要性: 由 f 在 I 上一致连续可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| \leq \delta$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (6)$$

因此任取 $x, y \in I$, ①当 $|x - y| \leq \delta$ 时, 由(6)式可知 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \leq M|x - y| + \varepsilon$. 由 x, y 的任意性可知结论成立.

②当 $|x - y| > \delta$ 时, (i) 当 $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ 时, 此时结论显然成立;

(ii) 当 $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ 时, 不妨设 $y > x, f(y) > f(x)$ (其它情况类似), 令 $f(y) - f(x) = kt$, 其中 $k \in \mathbb{N}, t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$. 由介值定理可知, 存在 $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y$, 使得

$$f(x) \leq f(x_j) = f(x) + jt \leq f(x) + kt = f(y), j = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

于是

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = t > \varepsilon, j = 1, 2, \cdots, k.$$

此时由(6)式可知 $x_j - x_{j-1} > \delta, j = 1, 2, \cdots, k$. 从而我们有

$$y - x = \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) > k\delta \Rightarrow k < \frac{y - x}{\delta}. \quad (7)$$

取 $M = \frac{2\varepsilon}{\delta} > 0$, 于是结合(7)式及 $t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$ 就有

$$|f(y) - f(x)| = kt \leq \frac{t}{\delta} |y - x| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} |y - x| = M|y - x|.$$


再由 x, y 的任意性可知结论成立. □

注 这里 k, t 的存在性可以如此得到: 考虑 $(\varepsilon, +\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (k\varepsilon, 2k\varepsilon]$ 即可, 又因为 $(k+1)\varepsilon \leq 2k\varepsilon$, 所以相邻的 $(k\varepsilon, 2k\varepsilon]$ 一定相交. 于是一定存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $f(y) - f(x) \in (k\varepsilon, 2k\varepsilon]$, 从而 $\frac{f(y) - f(x)}{k} \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$. 故取 $t = \frac{f(y) - f(x)}{k} \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$. 此时就有 $f(y) - f(x) = kt$.

推论 0.2 (一致连续函数被线性函数控制)

若 f 在 \mathbb{R} 一致连续, 证明存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq f(0) + 1 + M|x|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

 **笔记** 读者应该积累大概的感觉: 一致连续函数的增长速度不超过线性函数, 这能帮助我们快速排除一些非一致连续函数.

证明 取命题 0.4 中的 $\varepsilon = 1, x_1 = x \in \mathbb{R}, x_2 = 0$, 则一定存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq f(0) + 1 + M|x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

具体地, 有 $\delta_0 > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq 1, \forall 0 \leq x \leq y < x + \delta_0.$$

因此, 对于任何 $x \geq 0$,

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left\lceil \frac{x}{\delta_0} \right\rceil + 1 \leq |f(0)| + 1 + \frac{x}{\delta_0}.$$

□

推论 0.3

若 f 在 I 上一致连续, 则存在 $M, c > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq c + M|x|, \forall x \in I.$$

推论 0.4 (一致连续函数的阶的提升)

若 f 在 $[1, +\infty)$ 一致连续, 证明存在 $M > 0$ 使得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M, \forall x \geq 1.$$

证明 取命题 0.4 中的 $\varepsilon = 1, x_1 = x \geq 1, x_2 = 1$, 则一定存在 $C > 0$, 使得

$$|f(x) - f(1)| \leq C|x - 1| + 1, \forall x \geq 1.$$

于是

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(1)}{x} \right| + \frac{|f(1)|}{x} \leq \frac{C|x - 1| + 1}{x} + |f(1)|, \forall x \geq 1.$$

上式两边同时令 $x \rightarrow +\infty$, 得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C.$$

由上极限的定义可知, 存在 $X > 1$, 使得 $\sup_{x \geq X} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C$. 从而我们有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C, \forall x > X. \quad (8)$$

又因为 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[1, X]$ 上连续, 从而 f 在 $[1, X]$ 上有界, 即存在

$C' > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq C', \forall x \in [1, X]. \quad (9)$$

于是取 $M = \max\{C, C'\}$, 则由(8)(9)式可知

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M, \forall x \geq 1.$$

□

命题 0.5

证明区间 I 上的函数 f 一致连续的充要条件是对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\ell > 0$, 使得当 $x_1 \neq x_2 \in I$, 就有:

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

◆

证明 必要性: 由命题 0.4 可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| + \varepsilon, \forall x, y \in I.$$

取 $\ell = \frac{\varepsilon}{\delta} + M$, 任取 $x_1 \neq x_2 \in I$, 当 $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell$ 时, 我们有

$$\ell < \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \frac{M|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|} + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|} = M + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|}.$$

从而

$$|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{\ell - M} = \delta. \quad (10)$$

又由 f 在 I 上一致连续可知

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'' \in I \text{ 且 } |x' - x''| < \delta. \quad (11)$$

因此结合(10)(11)式可得 $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 故必要性得证.

充分性: 已知对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\ell > 0$, 使得 $\forall x_1 \neq x_2 \in I$, 有

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| > \ell \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \quad (12)$$

取 $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\ell}\right)$, 若 $|f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon$ 但 $|x_2 - x_1| \leq \delta$, 则我们有

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \geq \frac{\varepsilon}{\delta} > \ell.$$

而由(12)式可得, 此时 $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. 矛盾! 故 f 在 I 上一致连续.

□

命题 0.6 (一致连续函数的拼接)

设 $f \in C[0, +\infty)$, 若存在 $\delta > 0$ 使得 f 在 $[\delta, +\infty)$ 一致连续, 则 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

◆

笔记 证明的想法比结论本身重要, 在和本命题叙述形式不同的时候需要快速准确判断出来 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 Cantor 定理可知, f 在 $[0, \delta + 1]$ 上一致连续. 故存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $\forall x, y \in [0, \delta + 1]$ 且 $|x - y| \leq \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (13)$$

由 f 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续可知, 对 $\forall x, y \in [\delta, +\infty)$ 且 $|x - y| \leq \eta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (14)$$

现在对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$, 都有 $|x - y| \leq \eta$.

(i) 若 $x, y \in [0, \delta + 1]$ 或 $[\delta, +\infty)$, 则由(13)(14)式可直接得到 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

(ii) 若 $x \in [0, \delta + 1], y \in [\delta, +\infty)$, 则 $|x - y| \geq 1 > \eta$, 这是不可能的.
故原命题得证. □

例题 0.1 设 f 在 $[1, +\infty)$ 一致连续. 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续.

证明 由 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x, y \geq 1$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

由 **推论 0.4** 可知, $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$ 有界. 故可设 $M \triangleq \sup_{x \geq 1} \left| \frac{f(x)}{x} \right| < +\infty$. 取 $\delta' = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2M} \right\}$, 则对 $\forall x, y \geq 1$ 且 $|x - y| \leq \delta'$, 由(15)式可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leq \frac{|yf(x) - yf(y)| + |y - x||f(y)|}{xy} \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{x} + \frac{|y - x|}{xy} |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| + M|y - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\frac{f(x)}{x}$ 也在 $[1, +\infty)$ 一致连续. □

命题 0.7 (函数爆炸一定不一致连续)

设 f 在 $[a, +\infty)$ 可微且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明: f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

证明 **证法一:** 假设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 则由 **推论 0.3** 可知, 存在 $c, d > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \quad (16)$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| < +\infty. \quad (17)$$

由上下极限 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

这与(17)式矛盾. 故 f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续.

证法二: 假设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 则由 **推论 0.3** 可知, 存在 $c, d > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq c|x| + d, \forall x \in [a, +\infty). \quad (18)$$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 可知, 存在 $X > 0$, 使得对 $\forall x \geq X$, 有

$$f'(x) \geq c + 1 \Leftrightarrow f'(x) - c + 1 \geq 0.$$

从而 $f(x) - (c + 1)x$ 在 $[X, +\infty)$ 上单调递增, 于是就有

$$f(x) - (c + 1)x \geq f(X) - (c + 1)X \triangleq D, \forall x \geq X.$$

故 $f(x) \geq (c + 1)x + D, \forall x \geq X$. 再结合(18)式可得

$$(c + 1)x + D \leq f(x) \leq cx + d, \forall x \geq X > 0.$$

即 $x \leq d - D, \forall x \geq X > 0$. 令 $x \rightarrow +\infty$, 则

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \leq d - D.$$

矛盾. 故 f 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续. □

例题 0.2 判断下述函数的一致连续性:

- (1) $f(x) = \ln x, \quad x \in (0, 1];$
- (2) $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1];$
- (3) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, +\infty);$
- (4) $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R};$
- (5) $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$
- (6) $f(x) = \sin x^2, \quad x \in [0, +\infty);$
- (7) $f(x) = \sin(x \sin x), \quad x \in [0, +\infty);$
- (8) $f(x) = x \cos x, \quad x \in [0, +\infty);$
- (9) 设 $a > 0$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, a)$ 和 $x \in (a, +\infty);$

 **笔记** 关于三角函数找数列的问题, 一般 \sin, \cos 函数就多凑一个 $2n\pi$ 或 $2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

注 (6) 中找这两个数列 $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的方式: 待定 c_n , 令 $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + c_n$, 我们希望

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x''_n) - f(x'_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) \neq 0.$$

再结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(c_n^2 + 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin c_n^2 \cos 2c_n\sqrt{2n\pi} + \cos c_n^2 \sin 2c_n\sqrt{2n\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2c_n\sqrt{2n\pi}.$$

故我们希望 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2c_n\sqrt{2n\pi} \neq 0$. 从而令 $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 即可.

(7)(8) 找数列的方式与 (6) 类似.

解

- (1) 不一致连续. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty$ 及 **Cantor 定理** 可得.
- (2) 不一致连续. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cos \frac{1}{x}$ 不存在及 **Cantor 定理** 可得.
- (3) 一致连续. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1)$ 存在 (连续性), $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ 及 **Cantor 定理** 可知, f 在 $(0, 1]$ 上一致连续. 又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 所以由 **命题 0.1** 可知, f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 再根据 **一致连续函数的拼接** 可知, f 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.
- (4) 一致连续. 由 $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x \leq 2$ 及由 Lagrange 中值定理, 易知 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 从而一致连续.
- (5) 不一致连续. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ 及 **命题 0.7** 可得.
- (6) 不一致连续. 令 $x'_n = \sqrt{2n\pi}, x''_n = \sqrt{2n\pi} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$. 但是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{1}{n} + 2\sqrt{2n\pi}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n} + 2\sqrt{2n\pi}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin 2\sqrt{2n\pi} \cos \frac{1}{n} + \cos 2\sqrt{2n\pi} \sin \frac{1}{n}\right] = \sin 2\sqrt{2n\pi} \neq 0. \end{aligned}$$

故根据 **定理 0.1** 可知 f 不一致连续.

- (7) 不一致连续. 令 $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0.$$

但是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[\pi^2 + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \pi^2 x \cos o \left(\frac{1}{n^2} \right) + \cos \pi^2 \sin o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\
&= \sin \pi^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

故根据定理 0.1 可知 f 不一致连续.

(8) 不一致连续. 令 $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0.$$

但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x''_n) - f(x'_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \cos \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{1}{n} = -2\pi.$$

故根据定理 0.1 可知 f 不一致连续.

(9) 在 $(0, a)$ 上不一致连续, 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续. 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x} = 0$ 及 Cantor 定理可得.

□

命题 0.8 (一个重要不等式)

对 $\alpha \in (0, 1)$, 证明

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

◆

证明 不妨设 $y \geq x \geq 0$, 则只须证 $y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$. 则只须证 $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \leq \left(\frac{y}{x} - 1\right)^\alpha$. 故只须证

$$t^\alpha - 1 \leq (t - 1)^\alpha, \quad \forall t \geq 1.$$

令 $g(t) = t^\alpha - 1 - (t - 1)^\alpha$, 则 $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(t - 1)^{\alpha-1} \leq 0$. 从而 $g(t) \leq g(1) = 0, \forall t \geq 1$. 故 $t^\alpha - 1 \leq (t - 1)^\alpha, \forall t \geq 1$.

□

例题 0.3 证明: $f(x) = x^\alpha \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha \in (0, 1)$.

证明 当 $\alpha \geq 1$ 时, f 不被线性函数控制, 故由一致连续函数被线性函数控制可知 f 不一致连续.

当 $\alpha \leq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在, 由 Cantor 定理可知, f 在 $(0, 2)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, 有 $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x - 1)$. 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上有界, 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1, +\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[2, +\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 故由 Cantor 定理可知, f 在 $(0, 2]$ 上一致连续. 于是由一致连续的拼接可得, f 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

□

例题 0.4 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 求 α 的范围使得 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

笔记 找这两个数列 $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$ 的方法: 当 $\alpha > 1$ 时, 待定 c_n , 令 $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + c_n$. 我们希望 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x''_n) - f(x'_n)] \neq 0$. 注意到

$$\begin{aligned}
f(x''_n) - f(x'_n) &= (2n\pi + c_n)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\
&= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi} \right)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + c_n} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\
&= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi} \right)^\alpha \left[1 + O \left(\frac{1}{(2n\pi + c_n)^2} \right) \right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\
&= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{c_n}{2n\pi} \right)^\alpha \left[1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\
&= (2n\pi)^\alpha \left[\left(1 + \frac{c_n}{2n\pi} \right)^\alpha - 1 \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\
&= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi} + O \left(\frac{c_n^2}{n^2} \right) \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha c_n}{2n\pi} + O\left(\frac{c_n}{n^2}\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

于是取 $c_n = n^{1-\alpha}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, 并且由上式可得

$$\begin{aligned} f(x'_n) - f(x'_n) &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1}) \right] \\ &= \alpha (2\pi)^{\alpha-1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \alpha (2\pi)^{\alpha-1} \neq 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故我们可取 $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$.

证明 当 $\alpha \leq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在, 由 **Cantor 定理** 可知, f 在 $(0, 1)$ 上不一致连续. 故此时 f 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, 由条件可知, 对 $\forall x \geq 1$, 都有

$$|f'(x)| = \left| \left(x^\alpha \cos \frac{1}{x} \right)' \right| = \left| \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x} \right| + \left| x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \alpha + 1.$$

因此 $f'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界. 从而由 Lagrange 中值定理易得 f 在 $[1, +\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 故 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 此时, 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 故由 **Cantor 定理** 可知, f 在 $(0, 1]$ 上一致连续. 于是由 **一致连续的拼接** 可得, f 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

当 $\alpha > 1$ 时, 令 $x'_n = 2n\pi, x''_n = 2n\pi + n^{1-\alpha}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x''_n - x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} = 0.$$

此时我们有

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x'_n) &= (2n\pi + n^{1-\alpha})^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + n^{1-\alpha}} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi} \right)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi + n^{1-\alpha}} - (2n\pi)^\alpha \cos \frac{1}{2n\pi} \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi} \right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{(2n\pi + n^{1-\alpha})^2} \right) \right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi} \right)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] - (2n\pi)^\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\left(1 + \frac{n^{-\alpha}}{2\pi} \right)^\alpha - 1 \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1}) \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= (2n\pi)^\alpha \left[\frac{\alpha n^{-\alpha}}{2\pi} + O(n^{-\alpha-1}) \right] \\ &= \alpha (2\pi)^{\alpha-1} + O\left(\frac{1}{n} \right) \rightarrow \alpha (2\pi)^{\alpha-1} \neq 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故根据 **定理 0.1** 可知 f 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续. □

例题 0.5 设 $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$ 是一致连续函数且 $f_n \rightarrow f$, 证明: f 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (19)$$

由 f_N 一致连续, 可知 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in (0, +\infty)$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 有

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon. \quad (20)$$


于是对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 结合 (19) 和 (20) 式, 我们有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

故 f 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

□

例题 0.6 设 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续且对任何 $x \geq 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 并说明如果去掉一致连续则结论不对.

 **笔记** 证明的想法即把点拉回到 $[0, 1]$ 并用一致连续来解决. 反例可积累

$$f(x) = \frac{x \sin(\pi x)}{1 + x^2 \sin^2(\pi x)}.$$

核心想法: 分段放缩、取整平移、一致连续.

证明 由 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x, y \in [0, +\infty)$ 且 $|x - y| \leq \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (21)$$

把 $[0, 1]$ 做 N 等分, 其中 $N = \frac{1}{\delta}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{N} + n\right) = 0, i = 0, 1, \dots, N$ 可知, 存在 $N' \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \geq N'$, 有

$$\left|f\left(\frac{i}{N} + n\right)\right| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (22)$$

从而对 $\forall x \geq 1 + N'$, 一定存在 $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, n \in \mathbb{N} \cap [N', +\infty)$, 使得 $x \in \left[\frac{i}{N} + n, \frac{i+1}{N} + n\right]$. 注意到此时

$$\left|x - \left(\frac{i}{N} + n\right)\right| \leq \left|\left(\frac{i+1}{N} + n\right) - \left(\frac{i}{N} + n\right)\right| = \frac{1}{N} = \delta.$$

于是结合 (21) 和 (22) 式我们就有

$$|f(x)| \leq \left|f(x) - f\left(\frac{i}{N} + n\right)\right| + \left|f\left(\frac{i}{N} + n\right)\right| < 2\varepsilon.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

□

例题 0.7 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt{n})$ 存在且 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt{n}) = a$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$,

$$|f(\sqrt{n}) - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N. \quad (23)$$

由 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \geq 0 \text{ 且 } |x - y| < \delta. \quad (24)$$

对 $\forall x \geq 0$, 取 $n_x = [x^2]$. 注意到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{n_x}) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - [x^2]}{x + \sqrt{[x^2]}} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{[x^2]}} = 0.$$

故存在 $X > N$, 使得

$$|x - \sqrt{n_x}| < \delta, \quad \forall x > X.$$

此时 $\sqrt{n_x} > X > N$. 于是由 (23) 和 (24) 式可得, 对 $\forall x > X$, 有

$$|f(x) - a| \leq |f(\sqrt{n_x}) - a| + |f(x) - f(\sqrt{n_x})| \leq 2\varepsilon.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

□

例题 0.8 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并在 $[a, b]$ 上满足 $|f'_n(x)| \leq M$.

(1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛;

(2) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a, b]$ 上处处可导, 为什么?

证明

(1) 由 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall n > m > N$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (25)$$

取 $[a, b]$ 的一个分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

满足 $x_i - x_{i-1} < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n$. 于是当 $\forall n > m > N$ 时, 对 $\forall x \in [a, b]$, 都存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $x \in [x_{i-1}, x_i]$. 再利用(25)和 Lagrange 中值定理可得

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| \\ &< |f'_n(\xi_n)| \cdot |x_i - x| + \varepsilon + |f'_m(\xi_m)| \cdot |x_i - x| \\ &\leq (2M + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(2) 不一定, 反例: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ 在 $x = 0$ 处不可导.

□