

0.1 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

命题 0.1 (打洞原理)

(1) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且 A 为 n 阶可逆子方阵, 那么


$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且 D 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

 **笔记** 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板 $|\square| = |\square| |\square - \square \square^{-1} \square|$, 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个 \square 填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入 \square 即可.

证明 (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去 B 或 C)

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第一行左乘 $(-CA^{-1})$ 再添加到第二行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第二行左乘 $(-BD^{-1})$ 再添加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$


然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

推论 0.1 (打洞原理推论)

设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则

$$\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|.$$

 **笔记** 这个推论能将原本复杂的矩阵 AB 通过交换顺序变成相对简单的矩阵 BA . 例如: 例题??.

注 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 结论显然成立.

当 $\lambda \neq 0$ 时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^n \left| I_m - \frac{1}{\lambda}BA \right| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|.$$

于是 $\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|$.. 故 $\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|$.

例题 0.1 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 令 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$, 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\begin{aligned} A &= -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n |I_2| \left| I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n |I_n| \left| I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \left| I_2 - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix} \right| = (-1)^n \left[(1-n) \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

例题 0.2 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

例题 0.3 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当 $n > 2$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $|A| = 0$. 当 $n = 2$ 时, $|A| = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2$. 当 $n = 1$ 时, $|A| = a_1 - b_1$.

例题 0.4 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将 A 化为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

利用降阶公式容易求得 $|A| = (-1)^n n! (1 - n)$.

命题 0.2

设 A, B 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + B & A + B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & A - B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

例题 0.5 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解 解法一: 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则 $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$. 由命题??可得

$$\begin{aligned} |A| &= |B+C||B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z). \end{aligned}$$

解法二 (求根法):

命题 0.3

设 A, B 是 n 阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

证明 将分块矩阵的第二行乘以 i 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-i$ 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

例题 0.6 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

解 反复利用命题??的结论可得

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|. \end{aligned}$$

例题 0.7 设 A, B 是 n 阶矩阵且 $AB=BA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2+B^2|.$$

证明 由命题??的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB| = |(A + iB)(A - iB)| = |A^2 + B^2 - i(AB - BA)| = |A^2 + B^2|.$$

例题 0.8 设 A, B 是 n 阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

证明 注意到 A, B 都是实矩阵, 故 $\overline{|A + iB|} = \overline{|A + iB|} = |A - iB|$, 再由命题??的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB| = |A + iB| \cdot \overline{|A + iB|} \geq 0.$$