0.1 基变换与过渡矩阵

定义 0.1 (过渡矩阵)

设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, 若

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{f}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_n = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{cases}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵. 并且 $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}$.

定理 0.1 (同一向量在不同基下坐标向量的关系)

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, 从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. 若 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标向量是 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

证明 由过渡矩阵定义可得

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

又因为 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

□

定理 0.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 的基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵且从基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 又若 $\boldsymbol{B}$ 是从基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵, 则从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{AB}$.

证明

□

例题 0.1 设 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\},\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\},\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是向量空间 V 的 3 组基. 若从 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 到 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$, 从 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{B}$, 求从 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵.

解 从 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 故从 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

□

例题 0.2 在四维行向量空间中求从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵, 其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,1,0,1),\boldsymbol{e}_2=(2,1,2,0),\boldsymbol{e}_3=(1,1,0,0),\boldsymbol{e}_4=(0,1,-1,-1),$$
$$\boldsymbol{f}_1=(1,0,0,1),\boldsymbol{f}_2=(0,0,1,-1),\boldsymbol{f}_3=(2,1,0,3),\boldsymbol{f}_4=(-1,0,1,2).$$

笔记 这类题如用求解线性方程组的方法比较繁, 可采用下列方法.

解 设该向量空间的标准基为

$$\boldsymbol{u}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{u}_2=(0,1,0,0),\boldsymbol{u}_3=(0,0,1,0),\boldsymbol{u}_4=(0,0,0,1),$$

则由条件可知从 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ 到 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&2&0&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix},$$

于是就有

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{1}$$

又由条件可知从 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&3&2\end{pmatrix}.$$

于是就有

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)\boldsymbol{B}. \tag{2}$$

从而由(**??**)(**??**)式可得

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

故从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 它可以用初等变换和求逆矩阵类似的方法直接求得 (对矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ 进行初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵, 则右边一块就化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$) 因此, 所求之过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\-1&1&-1&2\\4&-2&3&-10\\-2&1&-2&3\end{pmatrix}.$$

□

例题 0.3 设 a 为常数, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1=(a^{n-1},a^{n-2},\cdots,a,1),\boldsymbol{f}_2=(a^{n-2},a^{n-3},\cdots,1,0),\cdots,\boldsymbol{f}_n=(1,0,\cdots,0,0)\}$ 下的坐标.

证明 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是标准单位行向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}'$, 并且从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$

到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1\\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{\alpha}'$. 这是一个非齐次线性方程组, 可由初等行变换求出方程组的解:

$$\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1\\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1-a^{n-1}a_n\\ 0 & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2-a^{n-2}a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1-aa_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2-aa_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1}-aa_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2-aa_3\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1-aa_2\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{x}=(a_n,a_{n-1}-aa_n,\cdots,a_2-aa_3,a_1-aa_2)$. □

例题 0.4 设 V 是次数不超过 n 的实系数多项式全体组成的线性空间, 求从基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 到基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 的过渡矩阵, 并以此证明多项式的 Taylor 公式:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

其中 $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次导数.

解 从基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 到基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 的过渡矩阵 ($n+1$ 阶) 利用二项式定理容易求出为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^n a^n\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{n-1}na^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

注意 $\boldsymbol{P}$ 的逆矩阵实际上就是从基 $\{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\}$ 到基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 的过渡矩阵, 结合 $x^n=[(x-a)+a]^n$, 再利用二项式定理可以马上得到 (不必用初等变换法求逆矩阵):

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 则 $f(x)$ 在基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 下的坐标向量为 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)'$. 设 $f(x)$ 在基

$\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$ 下的坐标向量为 $(y_0, y_1, \cdots, y_n)'$. 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系可知

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ \dfrac{f'(a)}{1!} \\ \vdots \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$f(x) = \left(1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\right) \begin{pmatrix} f(a) \\ \dfrac{f'(a)}{1!} \\ \vdots \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

□

0.1.1 练习

练习 0.1 验证下列映射是线性同构:

(1) 一维实行向量空间 $\mathbb{R}$, 例题**????**中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$, 映射 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 定义为 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$;

(2) 二维实行向量空间 $\mathbb{R}_2$, 例题**????**中的实线性空间 V, 映射 $\varphi: \mathbb{R}_2 \to V$ 定义为 $\varphi(a, b) = (a, b + \frac{1}{2}a^2)$.

解

(1) φ 的逆映射是 $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \psi(y) = \ln y$, 故 φ 是一一对应的. 根据加法和数乘的定义可得

$$\varphi(x+y) = \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \varphi(x) \oplus \varphi(y), \varphi(kx) = \mathrm{e}^{kx} = (\mathrm{e}^x)^k = k \circ \varphi(x),$$

因此 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是线性同构.

(2) φ 的逆映射是 $\psi: V \to \mathbb{R}_2, \psi(x, y) = (x, y - \frac{x^2}{2})$, 故 φ 是一一对应的. 根据具体的计算可得

$$\varphi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \varphi(a_1, b_1) \oplus \varphi(a_2, b_2), \varphi(ka, kb) = k \circ \varphi(a, b),$$

因此 $\varphi: \mathbb{R}_2 \to V$ 是线性同构.

□

练习 0.2 构造下列线性空间之间的线性同构:

(1) V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶上三角矩阵构成的线性空间,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称矩阵构成的线性空间 (例题**????**);

(2) V 是数域 $\mathbb{K}$ 上主对角元全为零的 n 阶上三角矩阵构成的线性空间,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶反对称矩阵构成的线性空间 (例题**????**);

(3) V 是 n 阶 Hermite 矩阵构成的实线性空间,U 是 n 阶斜 Hermite 矩阵构成的实线性空间 (例题**??**).

解

(1) $\varphi: V \to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in V$, 当 $i \leqslant j$ 时, 矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的第 (i, j) 元素为 a_{ij}; 当 $i > j$ 时, 矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的第 (i, j) 元素为 a_{ji}. 容易验证 $\varphi: V \to U$ 是定义好的映射, 并且是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性同构.

(2) $\varphi : V \to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in V, \varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$. 容易验证 $\varphi : V \to U$ 是定义好的映射, 并且是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性同构.

(3) $\varphi : V \to U$ 定义为: 对任意的 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in V, \varphi(\boldsymbol{A}) = \mathrm{i}\boldsymbol{A}$. 容易验证 $\varphi : V \to U$ 是定义好的映射, 并且是实数域上的线性同构. 注意到 φ 的逆映射 $\psi : U \to V$ 为:$\psi(\boldsymbol{B}) = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}$.

□