0.1 微分不等式问题

0.1.1 一阶/二阶构造类

例题 0.1 Gronwall 不等式 设 $\alpha,\beta,\mu\in C[a,b]$ 且 β 非负, 若还有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds,\forall t\in[a,b]. \tag{1}$$

证明:

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u}ds,\forall t\in[a,b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\in[a,b].$$

笔记 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑 $F(t)=\displaystyle\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds$, 则

$$F'(t)=\beta(t)\mu(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y'=\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)y\Rightarrow y=ce^{\int_a^t\beta(s)ds}+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t)=\frac{F(t)-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u}ds}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}}=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)\mathrm{d}u}ds,t\in[a,b].$$

证明 令

$$c(t)=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)\mathrm{d}u}ds,t\in[a,b], \tag{2}$$

这里 $F(t)=\displaystyle\int_a^t\beta(s)\mu(s)ds$. 由不等式(1)知

$$F'(t)\leqslant\alpha(t)\beta(t)+F(t)\beta(t),\forall t\in[a,b]. \tag{3}$$

于是由(2)和(3)可知

$$c'(t)=[F'(t)-\alpha(t)\beta(t)-\beta(t)F(t)]e^{\int_t^a\beta(s)ds}\leqslant 0,$$

因此 $c(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 从而

$$c(t)\leqslant c(a)=0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}\leqslant\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)\mathrm{d}u}ds.$$

再用一次不等式(1), 即得

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+F(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u}ds,\forall t\in[a,b].$$

特别的, 当 α 递增, 对 $\forall t\in[a,b]$, 固定 t, 记 $G(s)=\displaystyle\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u$, 我们有不等式

$$\begin{aligned}\mu(t)&\leqslant\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t\beta(s)e^{\int_s^t\beta(u)\mathrm{d}u}ds=\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t-G'(s)\,e^{G(s)}ds\\&=\alpha(t)-\alpha(t)\int_a^t e^{G(s)}dG(s)=\alpha(t)+\alpha(t)\left[e^{G(a)}-1\right]=\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geqslant 0, f''(x) \geqslant f(x), \forall x \geqslant 0. \tag{4}$$

证明:

$$f(x) \geqslant f(0)+f'(0)x, \forall x \geqslant 0. \tag{5}$$

笔记 通过 $f''-f'=f-f'$ 视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑 $f''f'=ff'$, 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

证明 令 $h(x)=[f'(x)-f(x)]e^x$, 由(4)知

$$h'(x)=\left(f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)\right)e^x=\left(f''(x)-f(x)\right)e^x \geqslant 0.$$

故

$$h(x) \geqslant h(0)=f'(0)-f(0) \Rightarrow [f'(x)-f(x)]e^x \geqslant f'(0)-f(0)=h(0).$$

继视为一阶构造类可得

$$c(x)=\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}, c'(x)=\frac{[f'(x)-f(x)]e^x-h(0)}{e^{3x}} \geqslant 0.$$

于是

$$\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x} \geqslant f(0)+\frac{1}{2}h(0)=\frac{f'(0)+f(0)}{2}.$$

继续利用(4)即得

$$f(x) \geqslant \frac{e^x+e^{-x}}{2}f(0)+\frac{e^x-e^{-x}}{2}f'(0) \geqslant f(0)+f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \geqslant 1, \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \geqslant x.$$

可以分别了利用均值不等式和求导进行证明. □

例题 0.3 设 $f \in C^1[0,+\infty) \cap D^2(0,+\infty)$ 且满足

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x) \geqslant 0, f(0)=1, f'(0)=0. \tag{6}$$

证明:

$$f(x) \geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}, \forall x \geqslant 0. \tag{7}$$

笔记 显然如果把式(6)得不等号改为等号, 则微分方程的解为 $3e^{2x}-2e^{3x}$. 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(7)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2,3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(6)改写为

$$f''(x)-2f'(x) \geqslant 3(f'(x)-2f(x)).$$

考虑 $g_1(x)=f'(x)-2f(x)$,, 则上式可化为

$$g_1'(x) \geqslant 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为 $g_2(x)=\frac{g_1(x)}{e^{3x}}$. 于是有

$$g_2'(x) \geqslant 0 \Rightarrow g_2(x) \geqslant g_1(0)=-2 \Rightarrow f'(x)-2f(x) \geqslant -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}+2e^x, g_3'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)+2e^{3x}}{e^{2x}} \geqslant 0,$$

于是

$$g_3(x) \geqslant g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

我们完成了证明. □

例题 0.4 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geqslant 0. \tag{8}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

笔记 $f + f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数 $g(x)$, 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑 $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$, 两边同时积分得到 $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$. 由此得到构造函数 $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$.

证明 构造 $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$, 则由(8)知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty, 0]$ 递增,$[0, +\infty)$ 递减. 现在我们有

$$h(x) \leqslant h(0) \Rightarrow |f(x)|^2 \leqslant h(0),$$

即 f 有界. □

0.1.2 双绝对值问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

例题 0.5 对某个 $D > 0$,

1. 设 $f \in D(\mathbb{R}), f(0) = 0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

证明 $f \equiv 0$.

2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(j)}(0) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$, 使得

$$|xf'(x)| \leqslant D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

证明 $f(x) = 0, \forall x \geqslant 0$.

笔记 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y' = \mathrm{d}y, y' = -\mathrm{d}y$ 得构造函数

$$C_1(x) = \frac{y(x)}{e^{\mathrm{d}x}}, C_2(x) = y(x)e^{\mathrm{d}x}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x) = \frac{f^2(x)}{e^{2\mathrm{d}x}}, C_2(x) = f^2(x)e^{2\mathrm{d}x}$, 我们有

$$C_1'(x) = \frac{2f(x)f'(x) - 2Df^2(x)}{e^{2\mathrm{d}x}}, C_2'(x) = [2f(x)f'(x) + 2Df^2(x)]e^{2\mathrm{d}x}.$$

由条件(9), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x) \leqslant |f'(x)||f(x)| \leqslant D|f(x)|^2,$$

于是 C_1 递减, C_2 递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2\mathrm{d}x}} \leqslant \frac{f^2(0)}{e^{20}} = 0, \forall x \geqslant 0, f^2(x)e^{2\mathrm{d}x} \leqslant f^2(0)e^{20} = 0, \forall x \leqslant 0,$$

于是就得到了 $f \equiv 0,\forall x \in \mathbb{R}$.

2. 构造 $C(x)=\frac{f^2(x)}{x^{2D}},x>0$(因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x)=\frac{2f(x)f'(x)x-2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(10), 我们有

$$xf'(x)f(x)\leqslant x|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$

即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x)=o(x^m),\forall m\in\mathbb{N}\cap(D,+\infty)$, 于是

$$C(x)\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{f^2(x)}{x^{2D}}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x^m)}{x^{2D}}=0,$$

故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

□

例题 0.6 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及

$$|f''(x)|^2\leqslant|f(x)f'(x)|,\forall x\geqslant 0.$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 本题的加强版本见命题**??**.

证明 令 $M>0$, 考虑

$$g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right],x\geqslant 0.$$

利用 $1+t^2\geqslant\sqrt{t},\forall t\geqslant 0$, 我们有

$$1+\frac{|f|^2}{|f'|^2}\geqslant\sqrt{\frac{|f|}{|f'|}}\Rightarrow|f'|^2+|f|^2\geqslant|f|^{\frac12}|f'|^{\frac{M}{2}}=|f'|\sqrt{|ff'|}. \tag{11}$$

于是

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|\sqrt{|ff'|}-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\overset{(11)}{\leqslant}e^{-Mx}\left[2|ff'|+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant}e^{-Mx}\left[|f|^2+|f'|^2+2|f'|^2+2|f|^2-Mf^2-M(f')^2\right]=0.\end{aligned}$$

只要取充分大的 M, 就有 g 递减, 从而 $0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$. □

例题 0.7 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)|+|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

笔记 本题的加强版本见命题**??**.

证明 令 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]$, 则

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2f'\left(|f|+|f'|\right)-Mf^2-M(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-Mx}\left[f^2+(f')^2+2(f')^2+f^2+(f')^2-Mf^2-M(f')^2\right]\\&=e^{-Mx}\left[(2-M)f^2+(4-M)(f')^2\right].\end{aligned}$$

取充分大的 M, 就有 $g'(x)\leqslant 0$. 于是 $g(x)\leqslant g(0)=0,\forall x\geqslant 0$. 又注意到 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]\geqslant 0$, 因此 $g(x)\equiv 0,\forall x\geqslant 0$. 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

例题 0.8 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\geqslant 0.$$

注 与例题 0.6不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 0.6的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含 M 的项的次数大于系数含 M 的项, 从而无法直接通过控制 M 的取值, 使得 $g'(x)\leqslant 0$. 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 0.5类比, 采用同样的方法. 因为只需证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 所以将原不等式视为 (等式) 函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是 $f''=ff'$. 我们将其中的 f 看作已知函数, 考虑的微分方程转化为 $y''=fy'$, 则

$$y''=fy'\Rightarrow\frac{y''}{y'}=f\Rightarrow\ln y'=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C\Rightarrow y'=Ce^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t}}$.

证明 令 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t}}$, 则

$$C'(x)=\frac{2f'(x)f''(x)-2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t}}.$$

又因为

$$f'f''\leqslant|f'f''|\leqslant|f|(f')^2.$$

所以 $C'(x)\leqslant 0$, 故 $C(x)\leqslant C(0)=0$. 又注意到 $C(x)=\dfrac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t}}\geqslant 0$, 故 $C(x)\equiv 0$. 于是 $f'(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 进而 f 就是常值函数, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$. □

0.1.3 极值原理

例题 0.9 设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$, 若还有

$$f''(x)-g(x)f'(x)=f(x). \tag{12}$$

证明: $f(x)=0,\forall x\in[0,1]$.

证明 如果 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c)>0,f'(c)=0,c\in(0,1)$, 代入(12)式知 $f''(c)=f(c)>0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c)<0,f'(c)=0,c\in(0,1)$, 代入(12)式知 $f''(c)=f(c)<0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上,f 在 $(0,1)$ 上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即

$$0\leqslant f(x)\leqslant 0.$$

$f(x)=0,\forall x\in[0,1]$. □

例题 0.10 设 $f\in C(a,b)$ 且

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,\mathrm{d}u\right\}=0,\forall x\in(a,b),$$

证明: f 是线性函数.

笔记 还可以不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a(1-x)+bx)=f((b-a)x+a)$ 代替 f 即可. 这样就可以直接不妨设 $f\in C[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$.

不妨设 $a=0,b=1$ 的原因: 令 $g(x)\triangleq f((b-a)x+a)$, 则对 $\forall x\in(0,1)$, 记 $y=(b-a)x+a\in[a,b]$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h[g(x+u)+g(x-u)-2g(x)]\,\mathrm{d}u\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h [f(y+(b-a)u)+f(y-(b-a)u)-2f(y)]\,\mathrm{d}u\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(b-a)h^3}\left\{\int_0^{(b-a)h} [f(y+u)+f(y-u)-2f(y)]\,\mathrm{d}u\right\}\\
&= (b-a)^2\lim_{h\to 0}\frac{1}{(b-a)^3h^3}\left\{\int_0^{(b-a)h} [f(y+u)+f(y-u)-2f(y)]\,\mathrm{d}u\right\}\\
&= (b-a)^2\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^{h} [f(y+u)+f(y-u)-2f(y)]\,\mathrm{d}u\right\}=0.
\end{aligned}
$$

因此 g 仍然满足题目条件. 若已证 $g\equiv 0$, 就有

$$
f((b-a)x+a)=0,\forall x\in[0,1]\Longleftrightarrow f(x)=0,\forall x\in[a,b].
$$

故可以不妨设 $a=0,b=1$.

证明 不妨设 $f\in C[a,b]$, 否则内闭的考虑或修改 f 在端点的值即可. 用 $f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ 代替 f 可以不妨设 $f(a)=f(b)=0$. 此时只需证 $f\equiv 0$ 即可.

若

$$
f(x_0)=\max_{x\in[a,b]}f(x)>0,
$$

则 $x_0\in(a,b)$. 取 $\varepsilon>0$ 使得

$$
f(x_0)+\varepsilon(x_0-a)(x_0-b)>0.
$$

考虑

$$
f_\varepsilon(x)\triangleq f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b),
$$

则存在 $x_1\in(a,b)$, 使得

$$
f_\varepsilon(x_1)=\max_{x\in[a,b]}f_\varepsilon(x)\geqslant f_\varepsilon(x_0)>0.
$$

现在

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h [f_\varepsilon(x_1)+f_\varepsilon(x_1)-2f_\varepsilon(x_1)]\,\mathrm{d}u\right\}\\
&\geqslant \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h [f_\varepsilon(x_1+u)+f_\varepsilon(x_1-u)-2f_\varepsilon(x_1)]\,\mathrm{d}u\right\}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h 2\varepsilon u^2\mathrm{d}u}{h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{3}\varepsilon h^3}{h^3}=\frac{2}{3}\varepsilon>0,
\end{aligned}
$$

这就是一个矛盾! 因此我们有

$$
\max_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant 0\Longrightarrow f(x)\leqslant 0,\forall x\in[a,b].
$$

考虑 $-f$, 令 $-f_\varepsilon(x)=-f(x)-\varepsilon(x-a)(x-b)$, 同理可得

$$
\max_{x\in[a,b]}(-f(x))\leqslant 0\Longrightarrow -f(x)\leqslant 0,\forall x\in[a,b]\Longrightarrow f(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b].
$$

现在就有

$$
f(x)=0,\forall x\in[a,b],
$$

即所求函数 f 为线性函数. □