

0.1 杂题

例题 0.1 设 $Y, x_0, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx.$$

证明


$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{Y}} \int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}. \end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $f \in C^3[0, x], x > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \quad (1)$$

若还有 $f'''(0) \neq 0$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x}$.

 **笔记** 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x) - f(0))t + f(0) + f''(\xi)t(t-x), t \in [0, x].$$

两边同时对 t 在 $[0, x]$ 上积分就能得到(1)式.

证明 设 $K \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t) dt - \frac{y}{2}[f(0) + f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0) + f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y) - f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由 $g(x) = g(0) = 0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1 \in (0, x)$ 使得 $g'(\xi_1) = 0$. 注意到 $g'(0) = 0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即 $K = f''(\xi)$, 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0, \xi).$$

于是

$$f'''(\eta) \frac{\xi}{x} = \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) \frac{\xi}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \int_0^x f(t) dt + 6x[f(0)+f(x)] - f''(0)x^3}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12f(x) + 6[f(x)+f(0)] + 6xf'(x) - 3f''(0)x^2}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6xf''(x) - 6f''(0)x}{12x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{2x} = \frac{1}{2} f'''(0).
 \end{aligned}$$

因为 $0 < \eta < \xi < x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) = f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}.$$

□

例题 0.3 设 f 是 $[0, +\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g \in C^2[0, +\infty)$ 满足

$$g''(x) + f(x)g(x) = 0. \quad (2)$$

证明: 存在 $M > 0$ 使得

$$|g(x)| \leq M, \quad |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

证明 对 $\forall x > 0$, 有 f 在 $[0, x]$ 上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知 $f \in R[0, x], \forall x > 0, f$ 在 $[0, +\infty)$ 上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + \int_0^x f(y)g'(y)g(y) dy = 0, \quad \forall x > 0 \quad (4)$$

利用 f 递增和第二积分中值定理和 (4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + f(x) \int_{\xi}^x g'(y)g(y) dy = 0, \quad \xi \in [0, x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2 - \frac{1}{2}|g'(0)|^2 + \frac{[f(x)]^2}{2} [g^2(x) - g^2(\xi)] = 0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2 = |g'(0)|^2 - f(x)g^2(x) + f(x)g^2(\xi) \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi). \quad (5)$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g'(x)g(x) = 0, \quad \forall x > 0.$$

即

$$\int_0^x \frac{g''(y)g'(y)}{f(y)} dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \forall x > 0$$

由 f 递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)} \int_0^{\eta} g''(y)g'(y) dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \quad \eta \in [0, x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] \leq g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \quad (6)$$

由 $g \in C[0, +\infty)$ 知 g 有界, 即存在 $C_1 > 0$, 使得 $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$. 于是由(5)式知

$$|g'(x)|^2 \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(x) \leq |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \quad (7)$$

又因为 f 是递增正函数, 所以 $f(x) \geq f(0) > 0, \forall x > 0$. 从而存在 $C_2 > 0$, 使得

$$|g'(0)|^2 \leq C_2 f(0) \leq f(x), \forall x > 0.$$

于是取 $M = \max \left\{ C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)} \right\}$, 则由(7)式和(6)式可得, 对 $\forall x > 0$, 有

$$|g(x)|^2 \leq M \leq M^2,$$

$$|g'(x)|^2 \leq C_2 f(x) + C_1 f(x) \leq M f(x) \leq M^2 f(x).$$

进而

$$|g(x)| \leq M, |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了(3). □

例题 0.4 设 $f \in C^2[0, 1]$, 证明

(a)

$$|f'(x)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (8)$$

(b)

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (9)$$

(c) 若 $f(0)f(1) \geq 0$, 则

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (10)$$

证明

(a) 注意到对任何 $\theta \in [0, 1]$, 我们有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leq \left| \int_{\theta}^x f''(y) dy \right| + |f'(\theta)| \\ &\leq \int_0^1 |f''(y)| dy + |f'(\theta)|. \end{aligned}$$

于是只需证明存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (11)$$

如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0, 1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足(11)式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性可知, f' 要么恒正, 要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点, 不妨设 $f > 0$, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geq xf'(\eta) \geq x \min_{[0,1]} |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \geq \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|,$$

这也给出了(11)式. 若存在 $t \in [0, 1]$, 使得 $f(t) = 0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x) = f'(\theta)(x - t).$$

从而

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 |x - t| dx \stackrel{\text{命题??}}{\geq} \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|.$$

这也给出了(11)式. 于是我们证明了不等式(8)式.

(b) 直接对(8)式两边关于 x 在 $[0, 1]$ 上积分得(9)式.

(c) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (12)$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0) \geq 0$, 则当 f 递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geq xf'(\eta) \geq x \cdot \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min |f'| \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$

当 f 递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(\alpha) \geq (1-x) \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$

于是必有 (12) 式成立, 这就给出了 (10) 式. □

例题 0.5 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上严格单调下降, 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

证明 反证, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in (a, +\infty)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k} \rightarrow c$. 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

则 $f(x_n)$ 的子列极限也收敛到 A , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$. 由 $x_{n_k} \rightarrow c$ 知, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_k} \in (c - \delta, c + \delta), \forall k > K.$$

其中 $\delta = \min \left\{ \frac{c-a}{2}, \frac{1}{2} \right\}$. 任取 $x_1, x_2 \in (c + \delta, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则由 f 严格递减知

$$f(x_{n_k}) > f(x_1) > f(x_2) > f(x), \forall x > x_2, \forall k > K.$$

左边令 $k \rightarrow +\infty$, 右边令 $x \rightarrow +\infty$ 得

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_1) > f(x_2) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

显然矛盾! □

例题 0.6 设 $\{x_n\} \subset (0, 1)$ 满足对 $i \neq j$, 有 $x_i \neq x_j$, 讨论函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $\operatorname{sgn}(x - x_n)$ 在 $x = x_n$ 处间断, 在 $x \neq x_n$ 处连续.

当 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, $f(x)$ 的每一项都连续. 又 $f(x)$ 一致收敛, 故 f 在 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都连续.

当 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x - x_k)}{2^k} + \sum_{n \neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在 $x = x_k$ 处间断. 故 $f(x)$ 在 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都间断. □

例题 0.7 证明 $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛性.

证明 由 Abel 变换得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$ 成立

$$\begin{aligned} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^n (-1)^t \frac{t}{t^2 + x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=m}^{n-1} \left(\frac{t}{t^2 + x} - \frac{t+1}{(t+1)^2 + x} \right) s_t + \frac{n}{n^2 + x} s_n \right] \\ &= \sum_{t=m}^{\infty} \left(\frac{t}{t^2 + x} - \frac{t+1}{(t+1)^2 + x} \right) s_t \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t,$$

这里 $s_t = \sum_{i=1}^t (-1)^i = (-1)^t \in \{1, -1\}$. 一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$ 和 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}$ 都收敛知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)} = 0.$$

于是我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x} = 0, \text{ 关于 } x \in [0, +\infty) \text{ 一致,}$$

这就证明了 $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2+x}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续实值右可导函数, 记 $D^+f(x)$ 为 $f(x)$ 的右导函数, 如果 $f(a) = 0$, 且 $D^+f(x) \leq 0$, 则 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$. ♠

证明 (1) 先假定 $D^+f(x) < 0$, 如果结论不成立, 则存在 $x_1 \in (a, b)$, 使 $f(x_1) > 0$. 记

$$x_0 = \inf\{x \mid f(x) > 0\}.$$

由 x_0 的定义, 我们有序列 $\{x_n\}$, 使 x_n 单调递减趋于 x_0 , 且 $f(x_n) > 0$. 从而由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq 0. \quad (13)$$

根据 x_0 的定义可知, 对 $\forall x < x_0$, 都有 $f(x) < f(x_0)$, 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列 $\{x'_n\}$ 单调递增趋于 x_0 , 且 $f(x'_n) < f(x_0)$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \leq 0. \quad (14)$$

故由(13)(14)知 $f(x_0) = 0$. 于是

$$D^+f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0,$$

这与 $D^+f(x_0) < 0$ 矛盾, 于是 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$.

(2) 若 $D^+f(x) \leq 0$, 对任给的 $\varepsilon > 0$ 构造函数

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon(x - a),$$

对 $f_\varepsilon(x)$ 有 $f_\varepsilon(a) = 0$ 且

$$D^+f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon < 0.$$

从而由(1)得 $f_\varepsilon(x) \leq 0, x \in [a, b]$. 因此 $f(x) \leq \varepsilon(x - a) \leq \varepsilon(b - a)$, 由 ε 的任意性, 得 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$. □

例题 0.8 设 $\varphi(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续且右可导的函数, 如果 $D^+\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导, $\varphi'(x) = D^+\varphi(x)$.

证明 设

$$f(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+ \varphi(t) dt - \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且右可导, 并且

$$D^+ f(x) = D^+ \varphi(x) - D^+ \varphi(x) = 0.$$

又 $f(a) = 0$, 由命题 0.1 得 $f(x) \leq 0$. 又 $-f(x)$ 满足 $-f(a) = 0, D^+[-f(x)] = 0$, 同理由命题 0.1 得 $-f(x) \leq 0$, 故 $f(x) = 0$. 于是

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+ \varphi(t) dt.$$

由 $D^+ \varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi'(x) = D^+ \varphi(x)$. □

例题 0.9 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{2n}{\pi} (\ln 2n + \gamma - \ln \pi) + o(1).$$

证明 见 here. □

例题 0.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} = 1.$

证明 证法一: 对任意充分大的 n , 由 Frullani(傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned} A &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^k C_n^k \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx \right) \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{-kx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} (1-1)^n - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx. \end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$(1 - e^{-x})^n \geq 1 - ne^{-x}.$$

取 $M_n > 1$, 满足 $M_n e^{M_n} = n$. 于是

$$0 \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - ne^{-x})}{M_n} dx = \frac{n}{M_n} \int_{M_n}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{n}{M_n e^{M_n}} = 1.$$

从而

$$A = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1). \quad (15)$$

因为 $M_n e^{M_n} = n$, 所以由命题??知

$$M_n = \ln n + o(\ln n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

于是

$$(1 - e^{-x})^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})} \leq e^{-(n-1)e^{-x}} \leq e^{-(n-1)e^{-M_n}} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, \quad \forall x \in [0, M_n].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} \leq \frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

即 $\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx = o\left(\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx\right), n \rightarrow \infty$. 故

$$\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx = (1+o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx, n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

故 $\frac{1-e^{-x}}{x}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx \leq -e^{-M_n} \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

故 $\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx = O(1)$. 于是再结合(16)式可知

$$\begin{aligned} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \\ &= O(1) + \ln M_n = \ln(\ln n + o(\ln n)) + O(1) \\ &= \ln \ln n + o(1) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此再由(17)式可知

$$\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx = (1+o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx = (1+o(1))(\ln \ln n + O(1)) = \ln \ln n + o(\ln \ln n), n \rightarrow \infty.$$

故由(15)可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\ln(\ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x} - (1-e^{-x})^n}{x} dx + O(1)}{\ln(\ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + o(\ln \ln n) + O(1)}{\ln(\ln n)} = 1. \end{aligned}$$

证法二: 注意到

$$\begin{aligned} S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx. \end{aligned}$$

又由二项式定理可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 t^{k+y-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^{k+y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{y-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^k dt = \int_0^1 t^{y-1} [(1-t)^{n-1} - 1] dt.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}S &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} dy = \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dt dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dy dt = \int_0^1 \frac{t-1}{t \ln t} [1 - (1-t)^{n-1}] dt \\ &\stackrel{t=e^{-x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-x}) [1 - (1-e^{-x})^{n-1}]}{x} dx.\end{aligned}$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$\begin{aligned}S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} \right) dx \\ &\stackrel{\text{命题??}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n-1})} \right) dx.\end{aligned}$$

由命题??(4) 知

$$e^{x^2-x} \geq \frac{1}{1+x} \geq e^{-x}, \forall x > 0.$$

于是

$$e^{x^2-x} \cdot e^{(\frac{x}{2})^2-\frac{x}{2}} \cdots e^{(\frac{x}{n-1})^2-\frac{x}{n-1}} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \geq \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geq e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

注意到

$$x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \leq x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}x < 2x, \forall x \in [0, 1],$$

故

$$e^{-x\left(-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)} \geq \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geq e^{-x\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数 e^{-x} 的介值性知, 存在 $C_n \in \left[-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}, \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right]$, 使得

$$\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} = e^{-C_n x}.$$

于是由 $-2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \leq C_n \leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ 知

$$C_n = \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} (1 - e^{-C_n x}) dx \\ &= \int_0^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^{-t}}{t} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1,$$

故 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt \leq 1 - e^{-C_n} = 1 - e^{-\ln n + O(1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

故 $\int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = O(1)$. 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln(\ln n + O(1)) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + O(1)}{\ln \ln n} = 1.$$

□