



概率论

作者: 实空

组织: 无

时间: December 14, 2025

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 大数定律和中心极限定理	1
1.1 大数定律	1

第1章 大数定律和中心极限定理

1.1 大数定律

定义 1.1 ((弱) 大数定律)

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 若存在数列 $\{a_n, n \geq 1\}$ 和 $\{b_n, n \geq 1\}$, 满足 $b_n \rightarrow +\infty$, 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

成立, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.



笔记 通常不作特别说明的时候, 我们称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 都是指 $a_n = E S_n, b_n = n$ 时的规范形式. 即下面的定义.

定义 1.2 ((弱) 大数定律的规范形式)

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 **(弱) 大数定律**, 若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{S_n}{n} - \frac{E S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

成立, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} E \sum_{k=1}^n X_k \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

定理 1.1 (Bernoulli 大数定律)

设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p , 记 S_n 表示 n 次独立的这种试验 A 发生的次数, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$



定理 1.2 (Markov 大数定律)

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 *Markov* 条件, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} D \sum_{k=1}^n X_k = 0.$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从 (弱) 大数定律.



证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 *Chebyshev* 不等式可知

$$1 \geq P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} E \sum_{k=1}^n X_k \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{D \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{D \sum_{k=1}^n X_k}{n^2 \varepsilon^2}.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} E \sum_{k=1}^n X_k \right| < \varepsilon \right) = 1.$$



定理 1.3 (Chebeshev 大数定律)

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 且方差一致有界, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从(弱)大数定律.



证明 因为随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 方差一致有界, 所以存在 $C > 0$, 使得

$$\mathbf{D} X_k \leq C, k \in \mathbb{N}.$$

又由于随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 因此

$$\mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{1}{n^2} \mathbf{D} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{D} X_k.$$

根据 Chebeshev 不等式可得

$$1 \geq P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \mathbf{E} \sum_{k=1}^n X_k \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n}.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \mathbf{E} \sum_{k=1}^n X_k \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

**定理 1.4 (Khinchin 大数定律)**

若随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 且数学期望存在, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从(弱)大数定律.



证明

**定理 1.5 (依概率收敛的性质)**

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 中的随机变量序列.

若 $X_n \xrightarrow{P} c$, 且 $c \neq 0, X_n \neq 0$, 则 $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{c}$.



证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{X_n} - \frac{1}{c} \right| \geq \varepsilon \right) &= P \left(\left| \frac{X_n - c}{cX_n} \right| \geq \varepsilon \right) = P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon \right) = P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon \right) \\ &= P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right) + P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| \geq \varepsilon \right) \quad (1.1) \\ &\leq P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

当 $\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon$ 且 $|X_n - c| < \varepsilon$ 时, 由 $|X_n - c| < \varepsilon$ 可知 $-\varepsilon < X_n - c < \varepsilon$. 从而当 $c > 0$ 时, $c(X_n - c) > -c\varepsilon$;

当 $c < 0$ 时, $c(X_n - c) > c\varepsilon$. 因此对 $\forall c \neq 0$, 都有 $c(X_n - c) > -|c|\varepsilon$. 于是此时 $\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| < \left| \frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon} \right|$. 故

$$\left\{ \left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ \left| \frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right\}.$$

进而结合(1.1)式, 再根据概率的单调性可得

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{X_n} - \frac{1}{c} \right| \geq \varepsilon \right) &\leq P \left(\left| \frac{X_n - c}{c(X_n - c) + c^2} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \\ &\leq P \left(\left| \frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon} \right| \geq \varepsilon, |X_n - c| < \varepsilon \right) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \leq P \left(\left| \frac{X_n - c}{c^2 - |c|\varepsilon} \right| \geq \varepsilon \right) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \\ &= P(|X_n - c| \geq \varepsilon(c^2 - |c|\varepsilon)) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 则由 $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{c}$ 可知

$$0 \leq P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| \geq \varepsilon\right) \leq P(|X_n - c| \geq \varepsilon(c^2 - |c|\varepsilon)) + P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$, 即 $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{c}$. □

定理 1.6 (依概率收敛与依分布收敛的关系)

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 X 分别是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 中的随机变量序列和随机变量.

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ 蕴含 $X_n \xrightarrow{d} X$.



证明 (1) 记 $X_n (n \geq 1)$ 与 X 的分布函数分别为 $F_n(x) (n \geq 1)$ 与 F . 设 $X_n \xrightarrow{P} X$, 往证 $F_n(x) \rightarrow F(x), n \rightarrow +\infty$, 对所有 F 中连续点都成立. 为此只需证明对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x-0) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq F(x+0).$$

任取 $y < x$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} F(y) &= P(X \leq y) = P(X \leq y, X_n \leq x) + P(X \leq y, X_n > x) \\ &\leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| \geq x - y) \\ &= F_n(x) + P(|X_n - X| \geq x - y) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可得 $F(y) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$, 对 $\forall y < x$ 都成立. 由于分布函数左右极限都存在, 因此再令 $y \rightarrow x^-$, 得到 $F(x-0) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

同理, 任取 $y > x$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n \leq x) = P(X_n \leq x, X \leq y) + P(X_n \leq x, X > y) \\ &\leq P(X \leq y) + P(|X_n - X| \geq y - x) \\ &= F(y) + P(|X_n - X| \geq y - x) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可得 $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq F(y)$, 对 $\forall y < x$ 都成立. 由于分布函数左右极限都存在, 因此再令 $y \rightarrow x^+$, 得到 $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq F(x+0)$.

又显然有 $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$. 综上所述, 我们有

$$F(x-0) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \leq F(x+0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

故结论得证. □

定理 1.7 (特征函数性质)

特征函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.



证明 设随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. 其特征函数为 $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)dx$.

由反常积分收敛的柯西收敛准则, 可知 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得 $\int_{|x|>A} p(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

于是对 $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, 取 $h = \frac{\varepsilon}{4A}$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) p(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} (e^{ihx} - 1) p(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| |(e^{ihx} - 1) p(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |(e^{ihx} - 1)| p(x) dx \end{aligned} \tag{1.2}$$

又由欧拉公式, 可得

$$\begin{aligned} |(e^{ihx} - 1)| &= |\cos(hx) - 1 + i \sin(hx)| = \sqrt{(\cos(hx) - 1)^2 + \sin^2(hx)} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(hx)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{hx}{2}} \leq 2 \left| \sin \frac{hx}{2} \right| \end{aligned} \quad (1.3)$$

从而由(1.2)(1.3)式, 可得

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(e^{ihx} - 1)| p(x) dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin \frac{hx}{2} \right| p(x) dx \\ &= 2 \int_{|x|>A} \left| \sin \frac{hx}{2} \right| p(x) dx + 2 \int_{-A}^A \left| \sin \frac{hx}{2} \right| p(x) dx \\ &\leq 2 \int_{|x|>A} p(x) dx + 2 \int_{-A}^A |hx| p(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2hA \int_{-A}^A p(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2hA \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \frac{\varepsilon}{2} + 2hA < \varepsilon \end{aligned}$$

故特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

□