0.1 Vandermode 行列式

本节我们用 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 阶 Vandermonde 行列式.

定义 0.1

对 $1\leqslant i\leqslant n, V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示删除 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 行 $(x_1^{i-1},x_2^{i-1},\cdots,x_n^{i-1})$ 之后新添第 n 行 $(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n)$ 所得 n 阶行列式.

定义 0.2

$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示将 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 n 行换成 $(x_1^{n+1},x_2^{n+1},\cdots,x_n^{n+1})$ 所得 n 阶行列式.

例题 0.1 设初等对称多项式

$$\sigma_j=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j}, j=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

我们有

$$V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

证明 (加边法) 不妨设 $x_i, 1\leqslant i\leqslant n$ 互不相同. 设

$$D_n(x)\triangleq\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-x&x_1&x_2&\cdots&x_n\\(-x)^2&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(-x)^n&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}.$$

由行列式性质我们知道 D_n 是 n 次多项式且有 n 个根 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$. 于是我们有

$$D_n(x)=c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n). \tag{3}$$

把 $D_n(x)$ 按第一列展开得

$$D_n(x)=\sum_{i=1}^n V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}+V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^n. \tag{4}$$

于是比较(3)式和(4)式最高次项系数, 我们有 $c=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 定义 $\sigma_0=1$, 利用根和系数的关系 (Vieta 定理), 结合(3)式和(4)式得

$$D_n(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}=\sum_{i=1}^n V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{i-1}+V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^n,$$

比较上式等号两边 $x^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的系数就能得到(2). □

例题 0.2 证明:

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{5}$$

证明 不妨设 $x_i, 1\leqslant i\leqslant n$ 互不相同. 设 $n+1$ 次多项式

$$P_{n+1}(x)\triangleq\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\-x&x_1&x_2&\cdots&x_n\\(-x)^2&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(-x)^{n-1}&x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\\(-x)^{n+1}&x_1^{n+1}&x_2^{n+1}&\cdots&x_n^{n+1}\end{vmatrix}$$

注意到有 n 个根 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$. 我们用 $-x_{n+1}$ 表示 P_{n+1} 第 $n+1$ 个根. 于是我们有

$$P_{n+1}(x)=c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)(x+x_{n+1}). \tag{6}$$

将 $P_{n+1}(x)$ 按第一列展开得

$$P_{n+1}(x)=-V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{n+1}+\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0 \tag{7}$$

其中 $a_{n-2},\cdots,a_0$ 是某些与 x_j 有关的 n 阶行列式. 比较(6)和(7)式的系数可知 $c=-V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 于是结合(6)式, 并利用 Vieta 定理得

$$P_{n+1}(x)=-V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)(x^{n+1}+\delta_1x^n+\delta_2x^{n-1}+\cdots+\delta_{n-1}) \tag{8}$$

这里 δ_j 类似(1)式定义是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 的初等对称多项式. 比较(7)(8)式的 x^{n-1} 系数可得 $\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-\delta_2V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 因为 $P_{n+1}(x)$ 没有 x^n 的项, 所以

$$\delta_1=x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}=0\Rightarrow x_{n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

从而

$$\begin{aligned}\delta_2&=\sum_{1\le i<j\le n+1}x_ix_j=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j+x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\\&=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\sum_{i=1}^{n}x_i\\&=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j.\end{aligned}$$

现在就有(5)成立. □

命题 0.1

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, f_i(x)=a_{i1}+a_{i2}x+\cdots+a_{in}x^{n-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 证明: 对任何复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 都有

$$\begin{vmatrix}f_1(x_1)&f_1(x_2)&\cdots&f_1(x_n)\\f_2(x_1)&f_2(x_2)&\cdots&f_2(x_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_n(x_1)&f_n(x_2)&\cdots&f_n(x_n)\end{vmatrix}=|A|\cdot V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

这里 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Vandermonde 行列式.

笔记 关键是利用命题??.

证明 直接由矩阵乘法观察知显然. □

推论 0.1

设 $f_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$, 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix}1&f_1(x_1)&f_2(x_1)&\cdots&f_{n-1}(x_1)\\1&f_1(x_2)&f_2(x_2)&\cdots&f_{n-1}(x_2)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&f_1(x_n)&f_2(x_n)&\cdots&f_{n-1}(x_n)\end{vmatrix}.$$

笔记 知道这类行列式化简的操作即可. 以后这种行列式化简操作不再作额外说明.

注 也可以由命题 0.1直接得到.

解 解法一: 利用行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix}1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1)\\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_1+a_{n-1,n-1}\\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_2+a_{n-1,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-2}x_n+a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\\ -a_{i,i-(n-3)}j_{n-2}+j_{i+1},\, i=n-2,n-1\\ -a_{n-1,1}j_{n-1}+j_n}]{\substack{-a_{ii}j_1+j_{i+1},\, i=1,2,\cdots n-1\\ -a_{i,i-1}j_2+j_{i+1},\, i=2,3,\cdots,n-1}}\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

解法二:由命题 0.1可得

$$\begin{vmatrix}1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1)\\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1+a_{11} & x_2+a_{11} & \cdots & x_n+a_{11}\\ x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1,n-1} & x_2^{n-1}+\cdots+a_{n-1,n-1} & \cdots & x_n^{n-1}+\cdots+a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}$$

$$=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{22} & a_{21} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-3} & \cdots & 1\end{vmatrix}=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

□

例题 0.3 计算

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1\\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

证明 由命题 0.1我们知道

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1\\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}=V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

□

命题 0.2

计算下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

注 实际上, 若存在 $a_{k_1},\cdots,a_{k_m}$ 都为 0, 则可将原行列式看作关于 $a_{k_1},\cdots,a_{k_m}$ 的多元连续函数, 从而

$$|\boldsymbol{A}|=\lim_{(a_{k_1},\cdots,a_{k_m})\to(0,\cdots,0)}\prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i).$$

得到的结果与下述证明相同.

解 若所有的 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不为 0, 则有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n a_i^{n-1}\begin{vmatrix}1&\frac{b_1}{a_1}&\cdots&\frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}}&\frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}}\\1&\frac{b_2}{a_2}&\cdots&\frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}}&\frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\frac{b_n}{a_n}&\cdots&\frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}&\frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^n a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{i=1}^n a_i^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{a_ib_j-a_jb_i}{a_ja_i}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i).$$

若只有一个 a_i 为 0, 则将原行列式按第 i 行展开得到具有相同类型的 $n-1$ 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_i^{n-1}&a_i^{n-2}b_i&\cdots&a_ib_i^{n-2}&b_i^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}&b_1^{n-1}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}&b_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&b_i^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}&b_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}i\text{行展开}}(-1)^{n+i}b_i^{n-1}\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}b_1&\cdots&a_1b_1^{n-2}\\a_2^{n-1}&a_2^{n-2}b_2&\cdots&a_2b_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1}^{n-1}&a_{i-1}^{n-2}b_{i-1}&\cdots&a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\a_{i+!}^{n-1}&a_{i+1}^{n-2}b_{i+1}&\cdots&a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^{n-1}&a_n^{n-2}b_n&\cdots&a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

此时同理可得

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2}\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1}^{n-1} & a_{i-1}^{n-2}b_{i-1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}\\ a_{i+1}^{n-1} & a_{i+1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i+1}b_{i+1}^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}}\\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} & \cdots & \frac{b_{i-1}^{n-2}}{a_{i-1}^{n-2}}\\ 1 & \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} & \cdots & \frac{b_{i+1}^{n-2}}{a_{i+1}^{n-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \frac{b_n}{a_n} & \cdots & \frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k^{n-1}\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}}\left(\frac{b_l}{a_l}-\frac{b_k}{a_k}\right)=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k^{n-1}\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}}\frac{a_kb_l-a_lb_k}{a_ka_l}$$

$$=(-1)^{n+i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)=(-1)^{n-i}\,b_i^{n-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}a_k\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)$$

$$=\prod_{1\le k<i}a_kb_i\prod_{i<l\le n}(-a_lb_i)\cdot\prod_{\substack{1\le k<l\le n\\ k,l\ne i}}(a_kb_l-a_lb_k)$$

$$=\prod_{1\le k<l\le n}(a_kb_l-a_lb_k)\left(\text{其中}\,a_i=0\right).$$

若至少有两个 $a_i=a_j=0$, 则第 i 行与第 j 行成比例, 因此行列式的值等于 0. 经过计算发现, 后面两种情形的答案都可以统一到第一种情形的答案.

综上所述,$|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)$.

□

结论 连乘号计算小结论:

(1) $\prod\limits_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^{n-1}$.

证明:

$$\prod_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdot a_4a_3a_4a_2a_4a_1\cdots\cdots\overbrace{a_ka_{k-1}a_ka_{k-2}\cdots a_ka_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots\overbrace{a_na_{n-1}a_na_{n-2}\cdots a_na_1}^{n-1\text{对}}}_{n-1\text{组}}$$

$$\xlongequal{\text{从左往右按组计数}}a_1^{n-1}a_2^{1+n-2}a_3^{2+n-3}a_4^{3+n-4}\cdots a_k^{k-1+n-k}\cdots a_n^{n-1}=\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}.$$

(2) $\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}a_ia_j=\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}a_i^{n-2}$, 其中 $k\in[1,n]\cap\mathbb{N}_+$.

证明:

$$\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}a_ia_j=\underbrace{a_2a_1\cdot a_3a_2a_3a_1\cdots\cdots\overbrace{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_{k-1}a_1}^{k-2\text{对}}\cdot\overbrace{a_{k+1}a_{k-1}\cdots a_{k+1}a_1}^{k-1\text{对}}\cdots\cdots\overbrace{a_na_{n-1}\cdots a_na_{k+1}a_na_{k-1}\cdots a_na_1}^{n-2\text{对}}}_{n-2\text{组}}$$

$$\xlongequal{\text{从左往右按组计数}}a_1^{n-2}a_2^{1+n-3}a_3^{2+n-4}a_4^{3+n-4}\cdots a_{k-1}^{k-2+n-k}a_{k+1}^{k-1+n-k-1}\cdots a_n^{n-2}=\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}a_i^{n-2}.$$

注意: 从第 $k-1$ 组开始, 后面每组都比原来少一对 (后面每组均缺少原本含 a_k 的那一对).

例题 0.4 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n\\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n\end{vmatrix}$.

解 由二项式定理可知

$$\left(a_i+b_j\right)^n={a_i}^n+\mathrm{C}_n^1{a_i}^{n-1}b_j+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_i{b_j}^{n-1}+{b_j}^n,\text{其中}i,j=0,1,\cdots,n.$$

从而

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0^n+\mathrm{C}_n^1a_0^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0b_0^{n-1}+b_0^n & \cdots & a_0^n+\mathrm{C}_n^1a_0^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_0b_n^{n-1}+b_n^n\\ a_1^n+\mathrm{C}_n^1a_1^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1b_0^{n-1}+b_0^n & \cdots & a_1^n+\mathrm{C}_n^1a_1^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_1b_n^{n-1}+b_n^n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n-1}^n+\mathrm{C}_n^1{a_{n1}}^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}b_0^{n-1}+b_0^n & \cdots & a_{n-1}^n+\mathrm{C}_n^1a_{n-1}^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}b_n^{n-1}+b_n^n\\ a_n^n+\mathrm{C}_n^1a_n^{n-1}b_0+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_nb_0^{n-1}+b_0^n & \cdots & a_n^n+\mathrm{C}_n^1a_n^{n-1}b_n+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}a_nb_n^{n-1}+b_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & a_0 & 1\\ a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1}^n & a_{n-1}^{n-1} & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \mathrm{C}_n^1b_0 & \mathrm{C}_n^1b_1 & \cdots & \mathrm{C}_n^1b_{n-1} & \mathrm{C}_n^1b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \mathrm{C}_n^{n-1}b_0^{n-1} & \mathrm{C}_n^{n-1}b_1^{n-1} & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1}b_{n-1}^{n-1} & \mathrm{C}_n^{n-1}b_n^{n-1}\\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^n\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n\end{vmatrix}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_{n-1}^{n-1} & b_n^{n-1}\\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}\left(b_i-b_j\right)=\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^i\prod_{0\le j<i\le n}\left(a_j-a_i\right)\left(b_i-b_j\right).$$

□

例题 0.5 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}.$$

解 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\begin{aligned}&\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k\\ &=\cos^k\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta-\cdots\\ &=\cos^k\theta+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^1\cos^{k-1}\theta\sin\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\mathrm{i}\mathrm{C}_k^3\cos^{k-3}\theta\sin^3\theta-\cdots\end{aligned}$$

比较实部可得

$$\begin{aligned}\cos k\theta&=\cos^k\theta\left(1+\mathrm{C}_k^2+\mathrm{C}_k^4+\cdots\right)-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}+\mathrm{C}_k^4\cos^{k-4}-\cdots\\ &=2^{k-1}\cos^k\theta-\mathrm{C}_k^2\cos^{k-2}+\mathrm{C}_k^4\cos^{k-4}-\cdots\end{aligned}$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成 $\cos\theta_j(j=2,3,\cdots,n)$ 的多项式.

再利用行列式的性质, 可依次将第 $3,4,\cdots,n$ 列消去除最高次项外的其他项, 从而得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&\cos\theta_1&2\cos^2\theta_1&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1\\1&\cos\theta_2&2\cos^2\theta_2&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\cos\theta_n&2\cos^2\theta_n&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\begin{vmatrix}1&\cos\theta_1&\cos^2\theta_1&\cdots&\cos^{n-1}\theta_1\\1&\cos\theta_2&\cos^2\theta_2&\cdots&\cos^{n-1}\theta_2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\cos\theta_n&\cos^2\theta_n&\cdots&\cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).$$

□

结论 组合式计算常用公式:

$(1)\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$

$(2)\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\cdots=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3+\cdots=2^{n-1}$

证明:(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^m&=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!}+\frac{(n-1)!m}{m!\,(n-m)!}\\&=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}=\mathrm{C}_{n-1}^m+\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}\end{aligned}$$

(2)(i) 当 n 为奇数时, 由 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$, 可得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}$$
$$C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4+C_{n-1}^5+\cdots+C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^n$$

由于 $C_{n-1}^n=0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

(ii) 当 n 为偶数时, 由 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$, 可得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^n=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4\cdots+C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^n$$
$$C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+C_{n-1}^4+C_{n-1}^5+\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}$$

由于 $C_{n-1}^n=0$, 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

故 $C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots+C_n^n=2^{n-1}$.

综上所述,$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$.

例题 0.6 求下列行列式式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\sin\theta_1&\sin2\theta_1&\cdots&\sin n\theta_1\\\sin\theta_2&\sin2\theta_2&\cdots&\sin n\theta_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sin\theta_n&\sin2\theta_n&\cdots&\sin n\theta_n\end{vmatrix}.$$

笔记 可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论.

解 根据和差化积公式, 可得

$$\sin k\theta-\sin(k-2)\theta=2\sin\theta\cos(k-1)\theta,k=2,3,\cdots,n.$$

再结合上一题结论, 可得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\sin\theta_1&\sin2\theta_1&\cdots&\sin n\theta_1\\\sin\theta_2&\sin2\theta_2&\cdots&\sin n\theta_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sin\theta_n&\sin2\theta_n&\cdots&\sin n\theta_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta_1&2\sin\theta_1\cos\theta_1&\cdots&2\sin\theta_1\cos(n-1)\theta_1\\\sin\theta_2&2\sin\theta_2\cos\theta_2&\cdots&2\sin\theta_2\cos(n-1)\theta_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sin\theta_n&2\sin\theta_n\cos\theta_n&\cdots&2\sin\theta_n\cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).$$

□

命题 0.3 (多项式根的有限性)

设多项式

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 即 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 求证:$f(x)$ 是零多项式, 即 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.

注 实际上, 利用余数定理知 $n+1$ 次多项式整除 n 次多项式 $f(x)$, 从而 $f \equiv 0$.

证明 由 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 可知 $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$ 是下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_1^{n-1}x_{n-1} + b_1^nx_n = 0,\\ x_0 + b_2x_1 + \cdots + b_2^{n-1}x_{n-1} + b_2^nx_n = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_0 + b_{n+1}x_1 + \cdots + b_{n+1}^{n-1}x_{n-1} + b_{n+1}^nx_n = 0.\end{cases}$$

上述线性方程组的系数行列式是一个 Vandermode 行列式, 由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 互不相同, 所以系数行列式不等于零. 由 Crammer 法则可知上述方程组只有零解. 即有 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. □