0.1 Lebesgue 积分和 Riemann 积分的关系

定义 0.1 (Riemann 积分相关定义)

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数,$\{\Delta^{(n)}\}$ 是对 $[a,b]$ 所做的分划序列:

$$\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$|\Delta^{(n)}| = \max\{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} : 1 \leqslant i \leqslant k_n\}, \quad \lim_{n\to\infty} |\Delta^{(n)}| = 0.$$

对每个 i 以及 n, 若令

$$M_i^{(n)} = \sup\{f(x) : x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

$$m_i^{(n)} = \inf\{f(x) : x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

则关于 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分, 下述等式成立:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}).$$

♣

abc

引理 0.1

♡

证明

□