

## 0.1 Stolz 定理

### 0.1.1 数列 Stolz 定理

#### 定理 0.1 (Stolz 定理)

(a): 设  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(b): 设  $x_n$  是严格递减数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(c): 分别在 (a), (b) 的条件基础上, 若还有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (1)$$



**注** 注意 (c) 由 (a), (b) 是显然的, 且只有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$  时才 (1) 式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即 **Stolz 定理** 是离散的洛必达法则.

**证明** 我们仅证明  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} < \infty$  时有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (2)$$

记  $A \triangleq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ , 由上极限定义我们知道对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq A + \varepsilon, \forall n \geq N$ .

利用  $x_n$  严格递增时, 成立  $y_{n+1} - y_n \leq (A + \varepsilon)(x_{n+1} - x_n), n \geq N$ , 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) \leq (A + \varepsilon) \sum_{j=N}^{n-1} (x_{j+1} - x_j), \forall n \geq N + 1.$$

即

$$y_n - y_N \leq (A + \varepsilon)(x_n - x_N), \forall n \geq N + 1.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 取上极限就得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_N}}{1 - \frac{x_N}{x_n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} \leq A + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性得到式 (2). □

#### 命题 0.1 (Cauchy 命题)

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$



**笔记** 这个命题说明 **Stolz 定理** 是一种有效的把求和消去的降阶方法.

**证明** 容易由 **Stolz 定理** 的 (a) 直接得出. □

#### 定理 0.2 (反向 Stolz 定理/反向 Cauchy 命题)


对某个  $C > 0$ , 如果有  $n(a_n - a_{n-1}) \geq -C, \forall n \geq 2$ , 且


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \in \mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$



 **笔记** 反向 Stolz 定理本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

 **笔记** 不妨设  $a = 0$ , 记

$$b_1 = a_1, b_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

证明的想法是用  $S_n, S_m$  来表示  $a_n$ ,  $m$  是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m} = S_n + ma_n + mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+m} - S_n}{m} = \frac{mb_{n+1} + (m-1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+m}}{m} \\ &\leq \frac{|S_{n+m}| + |S_n|}{m} + \frac{1}{m} \left[ m \frac{C}{n+1} + (m-1) \frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+m} \right]. \end{aligned}$$

然后想办法取合适的  $m$  即可.

**证明** 不妨设  $a = 0$ , 记

$$b_1 = a_1, b_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

我们有  $b_n \geq -\frac{C}{n}$ .

对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $|S_n| \leq n\varepsilon, \forall n \geq N$ , 于是当  $n \geq N$ , 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} - S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]} = \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}]b_{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1)b_{n+2} + \cdots + b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} \right) \\ &\leq \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}] \frac{C}{n+1} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) \frac{C}{n+2} + \cdots + \frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]} \right) \\ &\leq \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( [n\sqrt{\varepsilon}] \frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) \frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n} \right) \\ &= \frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}| + |S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] + 1}{2n} C \\ &\leq \frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] + 1}{2n} C + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3}$$

于是我们得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

另外一方面, 当  $n \geq \frac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$ , 有  $n - [n\sqrt{\varepsilon}] \geq n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geq N$ , 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}] - 1)b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2)b_{n-1} + \cdots + b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) \frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2) \frac{C}{n} + \cdots + \frac{C}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{(n - [n\sqrt{\varepsilon}])[n\sqrt{\varepsilon}]} \left( ([n\sqrt{\varepsilon}] - 1) + ([n\sqrt{\varepsilon}] - 2) + \cdots + 1 \right) \\ &\geq \frac{|S_n| + |S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2} \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] - 1}{n - [n\sqrt{\varepsilon}]} \\ &\geq -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2} \frac{[n\sqrt{\varepsilon}] - 1}{n - [n\sqrt{\varepsilon}]} + \varepsilon, \end{aligned} \tag{4}$$

于是我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq -2\sqrt{\varepsilon} - \frac{C}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

□

### 命题 0.2

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  且  $a_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

◆

**证明** 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

□

### 命题 0.3

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}, a_n > 0$ , 并且对某个  $C > 0$ , 如果有  $n(a_n - a_{n-1}) \geq -C, \forall n \geq 2$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ .

◆

**证明** 由反向 Stolz 定理可得


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln a_{n+1} - \ln a_n} \xrightarrow{\text{反向 Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=0}^n (\ln a_{k+1} - \ln a_k)}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n - \ln a_0}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

□

#### 0.1.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限

**例题 0.1** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}.$$

 **笔记** 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

**证明** 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}})}.$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{2020} - (n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020 \cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}} = 0.$$

于是再利用 Stolz 定理可得


$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n \cdot (n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n^{2021}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021} - n^{2021}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{2021 \cdot n^{2020}} = \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \frac{1}{2021}.$$

□

## 例题 0.2

- (1) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}$ .
- (2) 证明下述极限存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ .
- (3) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right)$ .

 **笔记** 注意,  $\gamma \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.577 \dots$  是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道  $\gamma$  会不会是一个分数.

解

- (1) 直接由 **Stolz 定理** 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

- (2) 记  $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ , 则

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \left[ \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

从而存在常数  $C > 0$ , 使得  $|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{C}{n^2}$ , 又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$  收敛, 所以由比较原则可知  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+1} - c_n|$  也收敛.

由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1} - c_n)$  也收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_1)$

存在. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$  也存在.

- (3) 由 **Stolz 定理** 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)} \cdot n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.$$

□

## 例题 0.3 计算

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}).$$

证明

1. 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} - \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{n+1}{n} - 1)} = e^{-1}. \end{aligned}$$

2. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1}} - e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = e^{-1}.$$

故  $e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \sim \frac{n}{e}, n \rightarrow \infty$ . 并且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sum_{k=1}^n \ln k - (n+1) \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2(n+1)} = 0. \end{aligned}$$


因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \cdot \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n+1} \\ &\stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - n \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \ln k \right] \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \ln(n+2) - (n+1) \ln(n+1)] = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[ \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \right] = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

□

例题 0.4 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2}.$$

 **笔记** 注意到, 分子求和时, 不是单纯的  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_n^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ , 而是  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ .

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.

结论  $C_a^b = \frac{a}{b} C_{a-1}^{b-1}$ .

解 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{n+1}{k} C_n^{k-1} \right) - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k + \sum_{k=1}^n (\ln C_n^{k-1} - \ln C_n^k)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k - (\ln C_n^0 - \ln C_n^n)}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+2) - n \ln(n+1) - \ln(n+1)}{1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left( \frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

例题 0.5 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

笔记 倒序求和与顺序求和相等!(看到  $n+1-k$ , 就应该想到倒序求和)

解 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^{n+1-k} k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}} = 1.$$

□

例题 0.6 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma)$ , 其中  $\gamma$  为欧拉常数,  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ .

证明

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

注 类似的, 你可以继续计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n(H_n - \ln n - \gamma) - \frac{1}{2} \right)$ , 并且仅用 Stolz 公式就能证明存在一列  $c_1, \dots, c_k$  使得

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), n \rightarrow \infty.$$

例题 0.7 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ .

笔记 这题也可以凑定积分定义是显然的.

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+2} - \sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

□

## 命题 0.4

设  $\alpha \in (0, 1)$ , 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha}).$$

**证明** 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot (1-\alpha)n^{-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

□

## 0.1.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限

**例题 0.8** 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{4}} x_n$ .

**证明** 归纳易证  $x_n$  单调递增, 如果  $x_n$  有界则设  $x_n \leq A < \infty$ , 代入条件可知  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n}x_n} \geq \frac{1}{A\sqrt{n}}$ , 从而  $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{A\sqrt{k}}$ . 而这个不等式右边发散, 故  $x_n$  也发散, 矛盾. 所以  $x_n$  单调递增趋于无穷, 下面用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n \sqrt{n}} \left( 2x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x_n^2 \sqrt{n}} \right) = 4.$$

因此所求的极限是 2.

□

**注**

1. 直接用 stolz 会做不出来:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{1}{x_n \sqrt{n}}}{n^{-\frac{3}{4}}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{x_n}.$$

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}} = A$ , 则由上式可得  $A = \frac{4}{A}$ , 解得  $A = 2$ .

但是注意我们事先并没有论证上式最后一个极限存在, 所以不满足 Stolz 定理的条件, 这导致前面的等号都不一定成立. 因此不可以“解方程”得到所求极限为 2.

2. 上述证明中最后一步求原式平方的极限而不求其他次方的极限的原因: 我们也可以待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定  $a, b > 0$ , 则由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n \sqrt{n}}\right)^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \left( \left(1 + \frac{1}{x_n^2 \sqrt{n}}\right)^a - 1 \right)}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \frac{a}{x_n^2 \sqrt{n}}}{bn^{b-1}} = \frac{a}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac{1}{2}}}.$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数, 因此令  $a = 2, b = \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \frac{a}{b} = 4$ . 故

实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$  即可.

类似题目的最后一步求的极限式都是通过这种待定系数的方式得到的, 并不是靠猜.

**例题 0.9** 设  $0 < x_0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = \sin y_n$  ( $n \geq 0$ ). 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ .

**证明** 因为  $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$  ( $n \geq 0$ ), 所以数列  $\{x_n\}$  严格递减有下界. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 则  $\sin a = a$ , 于是  $a = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . 同理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

另外, 由  $0 < x_0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$  可以推得  $0 < x_n < y_n < \frac{\pi}{2}$  ( $n \geq 0$ ). 取正整数  $\ell$  使得  $y_\ell < x_0$ , 则  $y_\ell < x_0 < y_0$ , 从而对任意的正整数  $n$  有

$$y_{n+\ell} < x_n < y_n$$

进而

$$\frac{y_{n+\ell}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < 1$$


注意到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+\ell}}{y_n} = 1$ , 由夹逼准则即得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ . □

**注** 事实上, 通过待定系数, 利用 Stolz 公式做形式计算可以得到  $x_n$  的阶. 待定  $\alpha, \beta > 0$ , 由 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta x_n^\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{\frac{1}{x_n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta n^{\beta-1}}{\frac{1}{\sin^\alpha x_n} - \frac{1}{x_n^\alpha}} \\ &= \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^\alpha \sin^\alpha x_n}{x_n^\alpha - \sin^\alpha x_n} = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^{2\alpha}}{x_n^\alpha - (x_n - \frac{1}{6}x_n^3 + o(x_n^3))^\alpha} \\ &= \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1} x_n^{2\alpha}}{C_1 \alpha x_n^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{6}x_n^3 + o(x_n^{\alpha+2})} = \frac{6\beta}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-1}}{x_n^{2-\alpha} + o(x_n^{2-\alpha})}. \end{aligned}$$

于是取  $\alpha = 2, \beta = 1$ , 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$ . 同理可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} ny_n^2 = 3$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}y_n = \sqrt{3}$ .

**例题 0.10** 设  $k \geq 2, a_0 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ .

 **笔记** 这题很容易能猜出要先对原极限开  $k$  次方再用 Stolz 定理求解.

实际上, 我们也可以同 **例题 0.8** 一样, 待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定  $a, b > 0$ , 则由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{a(k+1)} - a_n^{a(k+1)}}{bk n^{bk-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{a(k+1)} - a_n^{a(k+1)}}{bk n^{bk-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)} \left[\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{a(k+1)} - 1\right]}{bk n^{bk-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1) \frac{1}{k}+1}}{bk n^{bk-1}} = \frac{k+1}{bk^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1) - \frac{k+1}{k}}}{n^{bk-1}}. \end{aligned}$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数值, 因此令  $a = b = \frac{1}{k}$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{\frac{1}{k}k^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{k+1}{k} - \frac{k+1}{k}}}{n^{\frac{k}{k}-1}} = \frac{k+1}{k}$ . 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}$  即可.

**证明** 归纳易证  $a_n$  单调递增, 假设  $a_n$  有界, 则由单调有界定理可知,  $a_n$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < \infty$ . 则由递推条件可得,  $A = A + \frac{1}{\sqrt[k]{A}}$ , 无解, 矛盾. 于是  $a_n$  单调递增且无上界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 根据 Stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + x^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k}\right) x^{-(1+\frac{1}{k})} = 1 + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

因此所求极限是  $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ . □

**注** 如果题目没给出需要求的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ , 而是问求  $a_n$  的渐近展开式 (只展开一项), 那么我们就需要待定系数自己探索  $a_n$  的阶. 待定  $\alpha > 0$ , 由 Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha &= \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^\alpha = a_n^\alpha + \alpha a_n^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}} + o\left(a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right) \\ &\Rightarrow a_{n+1}^\alpha \approx a_n^\alpha + \alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}} \Rightarrow a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \approx \alpha a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

从而令  $\alpha = \frac{3}{2}$ , 则

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}} = a_{n+1}^\alpha = \sum_{k=1}^n (a_{k+1}^\alpha - a_k^\alpha) \approx \sum_{k=1}^n \alpha a_k^{\alpha-\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} a_k^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{3n}{2}.$$



这样就能写出  $a_n$  渐近展开式的第一项, 即  $a_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ .

**例题 0.11** 设  $k$  为正整数, 正数列  $\{x_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k) = 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^{k+1} = \frac{1}{k+1}$ .

**证明** 设  $S_n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ , 则  $S_n$  单调递增. 如果  $S_n$  有界, 则  $x_n$  趋于零,  $x_n S_n \rightarrow 0$ , 这与已知条件矛盾, 所以  $S_n$  单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件可知  $x_n$  趋于零. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} S_{n+1} S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{x_{n+1}}{S_{n+1}}} = 1.$$

下面运用等价无穷小替换和 Stolz 公式来求极限:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^{k+1} S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}^{k+1} - S_n^{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(S_{n+1} - S_n)(S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{n+1}^k (S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_{n+1} S_{n+1})^k + (x_{n+1} S_{n+1})^{k-1} (x_{n+1} S_n) + \cdots + (x_{n+1} S_{n+1})(x_{n+1} S_n)^{k-1} + (x_{n+1} S_n)^k} \\ &= \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.12** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na_n}$ .

**解** 因为  $\left\{\sum_{k=1}^n a_k^2\right\}$  单调递增, 故由单调有界定理可知,  $\left\{\sum_{k=1}^n a_k^2\right\}$  的极限要么为有限数, 要么为  $+\infty$ . 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 =$

$c < \infty$ , 则由级数收敛知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \neq 1$  矛盾! 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = +\infty$ . 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = 0.$$

并且由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$  可知  $a_n \sim \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^3 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^3 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^3 \left[ \left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1\right)^3 - 1 \right] \end{aligned}$$

又由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 a_n = 0$ , 因此由 Taylor 公式可知  $\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1\right)^3 - 1 \sim \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 从而上式可

化为

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \left[ \left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2 \right)^2 \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^2 - 2a_{n+1}^4 \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6 \right] \\
 &= 3 + 0 + 0 = 3.
 \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{na_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

□

### 例题 0.13

1. 设  $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $x_1 > 0$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n}$ .
2. 设  $x_{n+1} = \sin x_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $x_1 \in (0, \pi)$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n)$ .
3. 设  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ .

解

1. 由  $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 并且  $x_1 > 0$ , 假设  $x_n > 0$ , 则  $x_{n+1} = \ln(1+x_n) > 0$ . 从而由数学归纳法, 可知  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是由单调有界定理, 可知数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$ . 对  $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+x_n) = \ln(1+a).$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 进而, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 2$ . 即  $x_n \sim \frac{2}{n}, n \rightarrow \infty$ .

因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n \left( n - \frac{2}{x_n} \right)}{\ln n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{2}{x_n}}{\ln n} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{\ln(1+x)}}{x} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \ln(1+x) - 2x}{x^2 \ln(1+x)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - 2x}{x^3} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到  $x_n$  在  $n \rightarrow \infty$  时的渐进估计:

$$\begin{aligned}\frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} &= \frac{2}{3} + o(1) \Rightarrow nx_n - 2 = \frac{2 \ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ \Rightarrow x_n &= \frac{2}{n} + \frac{2 \ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

2. 由  $\sin x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 又由于  $0 < x_1 < \pi$  及  $0 < x_{n+1} = \sin x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 故归纳可得  $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \geq 2$ . 因此  $\{x_n\}$  极限存在, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ . 从而对  $x_{n+1} = \sin x_n$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$  可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{nx_n^2} &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} \right) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = 1.\end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = 3$ . 即  $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, n \rightarrow \infty$ . 进而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left( 1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right) &\stackrel{\text{平方差公式/有理化}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 1 - \frac{n}{3} x_n^2 \right)}{\ln n \left( 1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^2 \left( \frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3} \right)}{\ln n \left( 1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n \right)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3}}{\ln n} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}}{x^2} = \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x - \frac{1}{3} x^2 \sin^2 x}{x^4 \sin^2 x} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 - \frac{1}{3} x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2}{x^6} \\ &= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^6}{36} - \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{9} + o(x^6)}{x^6} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

(最后几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^2)$ , 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $x_1 = 1 > 0$ , 故归纳可得  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由单调有界定理可知数列  $\{x_n\}$  的极限要么是  $+\infty$ , 要么是有限数. 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ , 则对  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = a + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 0$  矛盾. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1 - n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)^2 - x_n^2 \right)} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x_n^2} \right)} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

因此  $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 从而  $x_n + \sqrt{2n} \sim 2\sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} &\stackrel{\text{平方差公式/有理化}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{2\sqrt{2n} \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

**例题 0.14** 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$ .

**解** 由于  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 并且  $a_1 > 0$ , 故由数学归纳法可知  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $a_2 = a_1 + \frac{1}{S_1} > a_1$ , 再根据递推式, 可以归纳得到数列  $\{a_n\}$  单调递增. 因此, 数列  $\{a_n\}$  要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < \infty$ , 要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 由条件可知

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{S_n} \geq \frac{1}{na_1} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \text{ 从而对 } \forall n \in \mathbb{N}_+, \text{ 都有}$$

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 \geq \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_{n+1}^2 - a_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left(a_n + \frac{1}{S_n}\right)^2 - a_n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right). \end{aligned}$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}^2} = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

由递推公式, 可得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned} 1 &= n+1 - n \leq n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} = n+1 - \frac{na_n}{a_n + \frac{1}{S_n}} = 1 + \frac{\frac{n}{a_n S_n}}{1 + \frac{1}{a_n S_n}} \\ &= 1 + \frac{n}{1 + a_n S_n} \leq 1 + \frac{n}{1 + a_1 S_n} = 1 + \frac{n}{1 + S_n}. \end{aligned}$$

又由 Stolz 定理, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$ . 故由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right] = 1$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} = 2 + 0 = 2.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$ .

□

## 0.1.2 函数 Stolz 定理

## 定理 0.3 (函数 Stolz 定理)

设  $T > 0, f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是内闭有界函数.

(1) 设  $g(x+T) > g(x)$ , 若有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

(2) 设  $0 < g(x+T) < g(x)$ , 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$



**注** 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 利用夹逼准则和数列 Stolz 定理进行证明. 具体可见 **例题 0.15**.

**证明** 我们仅考虑  $A \in \mathbb{R}$ , 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设  $A = 0$ , 否则用  $f - Ag$  代替  $f$  即可. 不妨设  $T = 1$ , 否则用  $f(Tx)$  代替  $f$  即可.

(1) 对任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x+1) - g(x)], g(x) > 0. \quad (5)$$

于是对  $\forall x > X$ , 利用(5)式, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} + \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\stackrel{(5) \text{式}}{\leq} \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [g(x-k+1) - g(x-k)]}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &= \varepsilon \frac{g(x) - g(x-[x]+X)}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\stackrel{(5) \text{式} g>0}{\leq} \varepsilon + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right|. \end{aligned}$$

于是利用  $f$  在  $[X, X+1]$  有界及  $X \leq x - [x] + X < X+1$ , 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

由  $\varepsilon$  任意性即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

这就完成了证明.

(2) 任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件可知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x) - g(x+1)]. \quad (6)$$

于是对  $\forall x > X, \forall n \in \mathbb{N}$ , 利用(6)可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n [f(x+k-1) - f(x+k)] + f(x+n)}{g(x)} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |f(x+k-1) - f(x+k)|}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leq \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^n [g(x+k-1) - g(x+k)]}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &= \varepsilon \frac{g(x) - g(x+n)}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leq \varepsilon + \frac{|f(x+n)|}{g(x)}. \end{aligned}$$


再利用  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x+n)|}{g(x)} = 0 \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon, \forall x > X.$$

从而结论得证. □

### 例题 0.15

- (1) 设  $\alpha > -1$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}}$ .
- (2) 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x}$ .
- (3) 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt$ , 这里  $[ \cdot ]$  表示向下取整函数.

 **笔记** 虽然这个几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见下述证明.

**注** 第(1)题如果直接洛必达得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\sin x|}{\alpha+1} \text{ 不存在,}$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

**证明**

(1) **直接使用函数 Stolz 定理:** 由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt - \int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{(x+\pi)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}} \\ &\stackrel{\text{Lagrange 中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} \stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}, \end{aligned}$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x+\pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

**不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):** 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ . 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}} \leq \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n\pi)^{\alpha+1}}, \forall x \in [0, +\infty). \quad (7)$$

又由数列 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n\pi)^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\xrightarrow[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n\pi)^\alpha \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\xrightarrow[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n\pi)^\alpha \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| dt}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}. \quad (9)$$

又因为  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用(7)(8)(9)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{(n\pi)^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 直接使用函数 Stolz 定理: 由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt - \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} \xrightarrow{\text{Lagrange 中值定理}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\frac{\pi}{x}}$$

$$\xrightarrow[\text{积分中值定理}]{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x}. \quad (10)$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x+\pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 再结合(10)式可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} = \frac{2}{\pi}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写): 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ . 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \leq \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)}, \quad \forall x > 0. \quad (11)$$

又由数列 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi) - \ln((n-1)\pi)}$$

$$\xrightarrow[\text{积分中值定理}]{\text{积分中值定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1 + \frac{1}{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+1)\pi)} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln((n+2)\pi) - \ln((n+1)\pi)}$$

$$\xrightarrow[\text{积分中值定理}]{\text{积分中值定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{\ln(1 + \frac{1}{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}. \quad (13)$$

又因为  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用(11)(12)(13)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(n\pi)} = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 直接使用函数 Stolz 定理: 注意到  $t - [t]$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的非负函数, 故由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+1} (t - [t]) dt - \int_0^x (t - [t]) dt}{x+1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写): 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 存在唯一的  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x \leq n+1$ . 故

$$\frac{\int_0^n (t - [t]) dt}{n+1} \leq \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt \leq \frac{\int_0^{n+1} (t - [t]) dt}{n}, \quad \forall x > 0. \quad (14)$$

又由数列 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n+1} (t - [t])dt}{n} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} (t - [t])dt = \int_0^1 (t - [t])dt = \int_0^1 t dt = 1, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n (t - [t])dt}{n+1} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n-1}^n (t - [t])dt = \int_0^1 (t - [t])dt = \int_0^1 t dt = 1. \quad (16)$$

又因为  $n \leq x \leq n+1, \forall x \in (0, +\infty)$ , 所以  $n \rightarrow +\infty$  等价于  $x \rightarrow +\infty$ . 于是利用(14)(15)(16)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t])dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t])dt = 1.$$

□