0.1 矩阵相似的全系不变量

0.1.1 矩阵相似的判定准则之一: 特征矩阵相抵

回顾定理**??**中矩阵相似的充要条件.

命题 0.1

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵,$\lambda I_n - A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$,$\lambda I_n - B$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)\}$, 其中 $f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)$ 是 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)$ 的一个排列. 求证:A 与 B 相似.

证明 对换 λ-矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 的第 i, j 行, 再对换第 i, j 列, 可将 $f_i(\lambda)$ 与 $f_j(\lambda)$ 互换位置. 由于任一排列都可由若干次对换实现, 故 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{f_{i_1}(\lambda), f_{i_2}(\lambda), \cdots, f_{i_n}(\lambda)\}$, 于是 $\lambda I_n - A$ 相抵于 $\lambda I_n - B$, 从而 A 与 B 相似. □

例题 0.1 设 n 阶方阵 A, B, C, D 中 A, C 可逆, 求证: 存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $A = PCQ, B = PDQ$ 的充要条件是 $\lambda A - B$ 与 $\lambda C - D$ 相抵.

证明 必要性由 $\lambda A - B = P(\lambda C - D)Q$ 即得. 下证充分性.

设 $\lambda A - B$ 与 $\lambda C - D$ 相抵, 则由 A, C 可逆知,$\lambda I_n - A^{-1}B$ 与 $\lambda I_n - C^{-1}D$ 相抵, 于是 $A^{-1}B$ 与 $C^{-1}D$ 相似. 设 Q 为可逆矩阵, 使得 $A^{-1}B = Q^{-1}(C^{-1}D)Q$, 令 $P = AQ^{-1}C^{-1}$, 则 P 可逆且 $A = PCQ, B = PDQ$. □

0.1.2 矩阵相似的判定准则二: 有相同的行列式因子组

回顾定理**??**中矩阵相似的充要条件和 λ-矩阵的行列式因子相关定义和性质.

命题 0.2

求证: 任一 n 阶矩阵 A 都与它的转置 A' 相似.

证明 注意到 $(\lambda I_n - A)' = \lambda I_n - A'$, 并且行列式的值在转置下不改变, 故 $\lambda I_n - A$ 和 $\lambda I_n - A'$ 有相同的行列式因子组, 从而 A 和 A' 相似. □

例题 0.2 求证: 对任意的 $b \neq 0$,n 阶方阵 $\boldsymbol{A}(a, b)$ 均相互相似:

$$\boldsymbol{A}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ & a & \ddots & \ddots & b \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

证明 只要证明对任意的 $b \neq 0$,$\boldsymbol{A}(a, b)$ 的行列式因子组都一样即可. 显然 $D_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$.$\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(a, b)$ 的前 $n-1$ 行、前 $n-1$ 列构成的子式, 其值为 $(\lambda - a)^{n-1}$;$\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(a, b)$ 的前 $n-1$ 行、后 $n-1$ 列构成的子式, 其值设为 $g(\lambda)$. 注意到 $g(a)$ 是 $n-1$ 阶上三角行列式, 主对角元素全为 $-b$, 从而 $g(a) = (-b)^{n-1} \neq 0$. 因此 $(\lambda - a)^{n-1}$ 与 $g(\lambda)$ 没有公共根, 故 $((\lambda - a)^{n-1}, g(\lambda)) = 1$, 于是 $D_{n-1}(\lambda) = 1$, 从而 $\boldsymbol{A}(a, b)$ 的行列式因子组为 $1, \cdots, 1, (\lambda - a)^n$, 结论得证. □

注

(1) 在上（下）三角矩阵（如 Jordan 块）或类上（下）三角矩阵（如友阵或 Frobenius 块）中, 若上（下）次对角线上的元素全部非零, 可以尝试计算行列式因子组. 对一般的矩阵（如数字矩阵）, 不建议计算行列式因子组, 推荐使用 λ-矩阵的初等变换计算法式, 得到不变因子组.

(2) 注意到 $\boldsymbol{A}(a, 0) = a\boldsymbol{I}_n$ 的行列式因子组为 $D_i(\lambda) = (\lambda - a)^i (1 \leq i \leq n)$. 因此, 在求相似标准型的过程中, 注意千万不能使用摄动法!

0.1.3 矩阵相似的判定准则三: 有相同的不变因子组

回顾定理??可知, 所有不变因子的乘积等于特征多项式, 整除关系下最大的那个不变因子等于极小多项式. 因此, 确定特征多项式和极小多项式可帮助确定不变因子组.

命题 0.3 (同阶幂零阵必相似)

设 A 是 n 阶 n 次幂零矩阵, 即 $A^n = O$ 但 $A^{n-1} \neq O$. 若 B 也是 n 阶 n 次幂零矩阵, 求证:A 相似于 B.

证明 显然 A 的极小多项式为 λ^n, 故 A 的不变因子组是 $1, \cdots, 1, \lambda^n$. 同理 B 的不变因子组也是 $1, \cdots, 1, \lambda^n$, 因此 A 和 B 相似. □

命题 0.4

设 A 为 n 阶矩阵, 证明以下 3 个结论等价:

(1) $A = cI_n$, 其中 c 为常数;

(2) A 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-1$ 次多项式;

(3) A 的不变因子组中无常数.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3): 由于 A 的 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda)$ 是一个 n 次多项式, 故 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda) = D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$ 是一个一次多项式, 设为 $\lambda - c$. 因为其他不变因子都要整除 $d_n(\lambda)$, 并且所有不变因子的乘积等于 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda)$, 故 A 的不变因子组只能是 $\lambda - c, \lambda - c, \cdots, \lambda - c$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 A 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 则 $\deg d_i(\lambda) \geq 1$. 注意到 $d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda) = D_n(\lambda)$ 的次数为 n, 因此 $\deg d_i(\lambda) = 1$. 又 $d_i(\lambda) \mid d_n(\lambda)$, 故只能是 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - c$. 因此 A 与 cI_n 有相同不变因子组, 从而它们相似, 即存在可逆矩阵 P, 使得 $A = P^{-1}(cI_n)P = cI_n$. 另外, 也可以利用 A 的极小多项式等于 $\lambda - c$ 或 A 的 Jordan 标准型来证明. □

例题 0.3 设 n 阶矩阵 A 的特征值全为 1, 求证: 对任意的正整数 k,A^k 与 A 相似.

证明 由 A 的特征值全为 1 可知 A^k 的特征值也全为 1. 设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(1), \cdots, J_{r_s}(1)\}$ 为 Jordan 标准型. 由于 $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = J^k$, 故只要证明 J^k 与 J 相似即可 (见 Jordan 块的性质 (3)). 又因为 $J^k = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(1)^k, \cdots, J_{r_s}(1)^k\}$, 故问题可进一步归结到每个 Jordan 块, 即只要证明 $J_{r_i}(1)^k$ 与 $J_{r_i}(1)$ 相似即可. 因此不妨设 $J = J_n(1)$ 只有一个 Jordan 块, 则 $J = I_n + J_0$, 其中 $J_0 = J_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 注意到

$$J^k = (I_n + J_0)^k = I_n + \mathrm{C}_k^1 J_0 + \mathrm{C}_k^2 J_0^2 + \cdots + J_0^k.$$

故 J^k 是一个上三角矩阵, 其主对角线上的元素全为 1, 上次对角线上的元素全为 k, 从而它的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$. 为了确定它的极小多项式, 我们可进行如下计算:

$$(J^k - I_n)^{n-1} = (\mathrm{C}_k^1 J_0 + \mathrm{C}_k^2 J_0^2 + \cdots + J_0^k)^{n-1} = k^{n-1}J_0^{n-1} \neq O.$$

于是 J^k 的极小多项式为 $(\lambda - 1)^n$, 其不变因子组为 $1, \cdots, 1, (\lambda - 1)^n$. 因此 J^k 与 J 有相同的不变因子, 从而 J^k 与 J 相似. □

例题 0.4 设 n 阶矩阵 A 的特征值全为 1 或 -1, 求证:A^{-1} 与 A 相似.

证明 设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\lambda_i = \pm 1$. 由于 $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = J^{-1}$, 故只要证明 J^{-1} 与 J 相似即可. 又因为 $J^{-1} = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)^{-1}, \cdots, J_{r_s}(\lambda_s)^{-1}\}$, 故问题可进一步归结到每个 Jordan 块, 即只要证明 $J_{r_i}(\lambda_i)^{-1}$ 与 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 相似即可 (见 Jordan 块的性质 (4)). 因此不妨设 $J = J_n(\lambda_0)$ 只有一个 Jordan 块, 则 $J = \lambda_0 I_n + J_0$, 其中 $\lambda_0 = \pm 1$,$J_0 = J_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 注意到

$$\lambda_0^n I_n = (\lambda_0 I_n)^n - (-J_0)^n = (\lambda_0 I_n + J_0)(\lambda_0^{n-1} I_n - \lambda_0^{n-2} J_0 + \cdots + (-1)^{n-1} J_0^{n-1}).$$

以及 $\lambda_0^{-1} = \lambda_0$, 故可得

$$J^{-1} = (\lambda_0 I_n + J_0)^{-1} = \lambda_0 I_n - \lambda_0^2 J_0 + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda_0^n J_0^{n-1}.$$

因此 J^{-1} 是一个上三角矩阵, 其主对角线上的元素全为 λ_0, 上次对角线上的元素全为 $-\lambda_0^2$, 从而它的特征多项式为

$(\lambda-\lambda_0)^n$. 为了确定它的极小多项式, 我们可进行如下计算:

$$(J^{-1}-\lambda_0 I)^{n-1}=(-\lambda_0^2 J_0+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda_0^n J_0^{n-1})^{n-1}=(-1)^{n-1}J_0^{n-1}\neq O$$

于是 J^{-1} 的极小多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^n$, 其不变因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^n$. 因此 J^{-1} 与 J 有相同的不变因子组, 从而 J^{-1} 与 J 相似. □

0.1.4 矩阵相似的判定准则四: 有相同的初等因子组

定义 0.1 (准素因子)

设 $f(\lambda)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式,$p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, 若存在正整数 k, 使得 $p(\lambda)^k \mid f(\lambda)$, 但 $p(\lambda)^{k+1}\nmid f(\lambda)$, 则称 $p(\lambda)^k$ 为 $f(\lambda)$ 的一个**准素因子**. 所有 $f(\lambda)$ 的准素因子称为 $f(\lambda)$ 的**准素因子组**.
事实上, 若设 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的标准因式分解为

$$f(\lambda)=cP_1(\lambda)^{e_1}P_2(\lambda)^{e_2}\cdots P_t(\lambda)^{e_t}$$

其中 c 为非零常数,$P_i(\lambda)$ 为互异的首一不可约多项式,$e_i>0(1\leq i\leq t)$, 则 $f(\lambda)$ 的所有准素因子为 $P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,P_t(\lambda)^{e_t}$.

♣

定理 0.1 (λ-矩阵和初等因子的基本性质)

(1) 设 $f(\lambda),g(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的首一多项式,$d(\lambda)=(f(\lambda),g(\lambda))$,$m(\lambda)=[f(\lambda),g(\lambda)]$ 分别是 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的最大公因式和最小公倍式, 证明下列 λ-矩阵相抵:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0\\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0\\ 0 & m(\lambda)\end{pmatrix}$$

(2) 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 其特征矩阵 λI_n-A 经过初等变换可化为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$, 其中 $f_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一多项式. 求证: 矩阵 A 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子组.

♡

笔记 由 (2) 可知, 矩阵 A 的初等因子组就是 A 的所有不变因子的准素因子组. 实际上,(2) 就是引理**??**的一个推广.

证明

(1) 由已知, 存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$, 使得 $f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=d(\lambda)$. 设 $f(\lambda)=d(\lambda)h(\lambda)$, 则 $m(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$. 作下列 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ f(\lambda)u(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ d(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 0 & -g(\lambda)h(\lambda)\\ d(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & g(\lambda)h(\lambda)\\ d(\lambda) & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0\\ 0 & m(\lambda)\end{pmatrix}.$$

另一结论同理可得.

(2) 对任意的 $i<j$, 以下操作记为 $O(i,j)$: 设 $d(\lambda)=(f_i(\lambda),f_j(\lambda))$,$m(\lambda)=[f_i(\lambda),f_j(\lambda)]$ 分别是 $f_i(\lambda)$ 和 $f_j(\lambda)$ 的最大公因式和最小公倍式, 则用 $d(\lambda)$ 替代 $f_i(\lambda)$, 用 $m(\lambda)$ 替代 $f_j(\lambda)$. 我们先证明, 操作 $O(i,j)$ 可通过 λ-矩阵的初等变换来实现, 并且前后两个对角矩阵, 即 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),\cdots,f_i(\lambda),\cdots,f_j(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 与 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda),\cdots,d(\lambda),\cdots,m(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)\}$ 有相同的准素因子组.

由 (1) 即知 $O(i,j)$ 是 λ-矩阵的相抵变换. 设 $f_i(\lambda),f_j(\lambda)$ 的公共因式分解为

$$f_i(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_{i1}}P_2(\lambda)^{e_{i2}}\cdots P_t(\lambda)^{e_{it}},\quad f_j(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_{j1}}P_2(\lambda)^{e_{j2}}\cdots P_t(\lambda)^{e_{jt}}$$

其中 $P_i(\lambda)$ 为互异的首一不可约多项式,$e_{ik}\geq 0$,$e_{jk}\geq 0(1\leq k\leq t)$, 令 $r_k=\min\{e_{ik},e_{jk}\}$,$s_k=\max\{e_{ik},e_{jk}\}$, 则有

$$d(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\cdots P_t(\lambda)^{r_t},\quad m(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}P_2(\lambda)^{s_2}\cdots P_t(\lambda)^{s_t}$$

显然 $\{f_i(\lambda), f_j(\lambda)\}$ 和 $\{d(\lambda), m(\lambda)\}$ 有相同的准素因子组, 因此 $O(i,j)$ 操作前后的两个对角矩阵也有相同的准素因子组.

对对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 依次实施操作 $O(1,j)(2 \le j \le n)$, 则得到对角矩阵的第 $(1,1)$ 元素的所有不可约因式的幂在主对角元素中都是最小的; 然后依次操作 $O(2,j)(3 \le j \le n); \cdots$; 最后操作 $O(n-1,n)$, 可得一个对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}$. 由操作的性质可知,$\Lambda$ 满足 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(1 \le i \le n-1)$, 因此 Λ 就是矩阵 A 的法式. 又因为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 与法式有相同的准素因子组, 故所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子组就是矩阵 A 的初等因子组.

□

命题 0.5

设 $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 为分块对角矩阵, 求证:A 的初等因子组等于 $A_i(1 \le i \le k)$ 的初等因子组的无交并集. 又若交换各块的位置, 则所得的矩阵仍和 A 相似.

证明 □

显然 $\lambda I - A$ 也是一个分块对角矩阵, 用 λ-矩阵的初等变换将每一块化为法式, 则由λ-矩阵和初等因子的基本性质 (2)可知,A 的初等因子组就是所有各块的初等因子组的无交并集. 又交换 A 的各块并不改变 A 的初等因子组, 因此所得之矩阵仍和 A 相似.