

0.1 级数一致收敛性判断

定理 0.1 (函数列一致收敛的柯西准则)

函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是: 对任给正数 ε , 总存在正数 N , 使得当 $n, m > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

证明 必要性 设 $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$, 即对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

于是当 $n, m > N$, 由 (2) 就有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 若条件 (1) 成立, 由数列收敛的柯西准则, $\{f_n\}$ 在 D 上任一点都收敛, 记其极限函数为 $f(x), x \in D$. 现固定 (1) 式中的 n , 让 $m \rightarrow \infty$, 于是当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

因此, $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$. □

定理 0.2

函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (3)$$

证明 必要性 若 $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$. 则对任给的正数 ε , 存在不依赖于 x 的正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in D.$$

由上确界的定义, 亦有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这就证得 (3) 式成立.

由假设, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

因为对一切 $x \in D$, 总有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|,$$

故由 (4) 式得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f . □

推论 0.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上不一致收敛于 f 的充分且必要条件是: 存在 $\{x_n\} \subset D$, 使得 $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ 不收敛于 0.

定理 0.3 (一致收敛的柯西准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数 ε , 总存在某正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p , 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

**推论 0.2**

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

**定理 0.4**

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

**定理 0.5 (A-D 判别法)**

若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在定义域内满足下列两条件之一, 则其在定义域上一致收敛

(1) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且在定义域内一致有界; $\sum_{i=1}^n b_n$ 一致收敛. (Abel 判别法)

(2) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且一致趋于 0; $\sum_{i=1}^n b_n$ 一致有界. (Dirichlet 判别法)

**定理 0.6**

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每个 n , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 均存在且相等.



证明 先证 $\{a_n\}$ 是收敛数列. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 一致收敛, 故有 N , 当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 和对一切 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, 有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad (5)$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知 $\{a_n\}$ 是收敛数列.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 再证 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

由于 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 及 a_n 收敛于 A , 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N , 当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别取 $n = N + 1$, 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$


这样, 当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. □

定理 0.7 (连续性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续. ♥

 **笔记** 由这个定理可知, 若各项为连续函数的函数列在区间 I 上其极限函数不连续, 则此函数列在区间 I 上不一致收敛.

证明 设 x_0 为 I 上任一点. 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, 于是由定理 0.6 知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 亦存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 上连续. □

推论 0.3

若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f , 则 f 在 I 上连续. ♥

定理 0.8 (可积性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (6)$$
♥

证明 设 f 为函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上的极限函数. 由定理 0.7, f 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f_n (n = 1, 2, \dots)$ 与 f 在 $[a, b]$ 上都可积.

因为在 $[a, b]$ 上 $f_n \Rightarrow f (n \rightarrow \infty)$, 故对任给正数 ε , 存在 N , 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再根据定积分的性质, 当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

这就证明了等式 (6). □

定理 0.9 (可微性)

设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 若 $x_0 \in [a, b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点, $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $\{f'_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x). \quad (7)$$
♥

证明 设 $f_n(x_0) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, $f'_n \Rightarrow g (n \rightarrow \infty)$, $x \in [a, b]$. 我们要证明函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛, 且其极限函数的导数存在且等于 g .

由定理条件, 对任一 $x \in [a, b]$, 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 右边第一项极限为 A , 第二项极限为 $\int_{x_0}^x g(t) dt$ (定理 0.8), 所以左边极限存在, 记为 f , 则有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$


其中 $f(x_0) = A$. 由 g 的连续性 & 微积分学基本定理推得

$$f' = g.$$

这就证明了等式 (7). □

定理 0.10 (连续性)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在 $[a, b]$ 上也连续.

 **笔记** 这个定理指出: 在一致收敛条件下, (无限项) 求和运算与求极限运算可以交换顺序, 即

$$\sum \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum u_n(x) \right).$$

定理 0.11 (逐项求积)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

定理 0.12 (逐项求导)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一项都有连续的导函数, $x_0 \in [a, b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点, 且 $\sum u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则

$$\sum \left(\frac{d}{dx} u_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum u_n(x) \right).$$

例题 0.1 判断下列级数在指定区间一致收敛性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}, [0, +\infty);$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}, [-a, a], a > 0;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right), [-1, 1];$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}, [0, +\infty);$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}} \right), (0, +\infty);$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2}, (0, +\infty);$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2, [0, +\infty).$

注 第 4 问可以通过裂项算出级数的和函数:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\
 &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \right] \\
 &= \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.
 \end{aligned}$$

但 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ 的一致收敛性不好判断 (这个方法比较复杂), 因此我们不采取这个方法.

证明

1. 显然 $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$ 以及对每一个 $x \in [0, +\infty)$ 都有 $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 单调递减. 又

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

2. 显然 $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$ 以及对每一个 $x \in [-a, a]$ 都有 $\frac{n+x^2}{n^2}$ 单调递减. 又

$$\frac{n+x^2}{n^2} \leq \frac{n+a^2}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$ 在 $[-a, a]$ 一致收敛.

3. 注意到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{x^m}{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} = 0,$$

我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right)$ 在 $[-1, 1]$ 一致收敛.

4. 一方面, 对 $x \in [1, +\infty), n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall x \in [1, +\infty).$$

另外一方面, 对 $n \geq 2, x \in [0, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})} &\leq \frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})} \\
 &\leq \frac{x^{2n}}{\underbrace{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}_n} \leq \frac{x^{2n}}{C_n^2 x^{2n}} = \frac{2}{n(n-1)}.
 \end{aligned}$$

即由 Weierstrass 判别法和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} < \infty,$$

我们知道原级数一致收敛.

5. 首先

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}} \right) \right| \leq \sqrt{\frac{x}{n}}, \forall x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

然后

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{\sqrt{x}(3-nx^2)}{2n(1+nx^2)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \Big|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{x}{1+nx^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}} < +\infty.$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛.

6. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2n^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}} \leq \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{\sin^2 x}{2x^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛.

7. 因为

$$\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)' = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2},$$


于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)^2 < \infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

□

例题 0.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 是否一致收敛.

 **笔记** 连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 一致收敛, 则在 \bar{I} 也一致收敛, 这是因为有等式

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{x \in \bar{I}} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Im \left(\frac{e^{inx}}{n} \right) = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \Im(-\ln(1-e^{ix})) = -\arg(1-e^{ix}) \\ &= -\arg(1-\cos x - i \sin x) = -\arctan \frac{-\sin x}{1-\cos x} = \arctan \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \arctan \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \tan \frac{x}{2} = \frac{\pi-x}{2}, \end{aligned}$$

然后对 $\frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi, \pi]$ 展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi).$$

这个级数结果应当记忆. 注意到上述和函数与 x 有关, 故原级数一定不一致收敛, 下面将证明严格化.

证明 对 $\frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi, \pi]$ 展开为傅立叶级数, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 一致收敛, 则在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot 0)}{n} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

这就和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $x=0$ 应该连续矛盾! 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 不一致收敛. \square

例题 0.3 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 令

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right], n = 1, 2, \dots$$

试证明对任给区间 $[a, b]$ 都有 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f'(x)$.

证明 由 Cantor 定理及 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 可知 f' 内闭一致连续性, 于是对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in [a, b], t \in [0, \delta]$, 我们有

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq \varepsilon.$$

当 $n > \frac{1}{\delta}$, 我们对任何 $x \in [a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f'(x)| &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(y) - f'(x) dy \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(y) - f'(x)| dy = n \int_0^{\frac{1}{n}} |f'(x+t) - f'(x)| dt \\ &\leq \varepsilon n \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dt = \varepsilon, \end{aligned}$$

这就证明了 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛到 $f'(x)$. \square

例题 0.4 讨论下列函数在给定区间可微性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}, (0, +\infty)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, (-\infty, +\infty)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), (-\infty, +\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x, \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

证明

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$ 显然收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 \pi x})' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}.$$

对任何 $[a, b] \subset (0, +\infty)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |-n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi e^{-n^2 \pi a} < \infty,$$

即内闭一致收敛, 因此由定理 0.12 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$ 在 $(0, +\infty)$ 可微.

2. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}.$$

注意到

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \right| \leq 1, \left| \frac{1}{n + x^2} \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

以及对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\frac{1}{n + x^2}$ 递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 可微.}$$

4. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在任何 $[a, b] \subset \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 一致收敛.

显然存在 $c_{a,b} \in (0, 1)$ 使得

$$|\tan x| \leq c_{a,b}, \forall x \in [a, b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} c_{a,b}^{n-1} < \infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在 $[a, b]$ 一致收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 可微.

□

例题 0.5 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $[0, \lambda], \lambda > 0$ 的一致收敛性.

证明 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \left[\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right], n = 2, 3, \dots$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^m \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$

现在

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

于是由级数和函数不连续知其 $[0, \lambda], \lambda > 0$ 不一致收敛. □

例题 0.6 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right]$ 在 $[0, b]$ 和 $[0, +\infty)$ 的一致收敛性.

证明 首先注意到

$$\left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right]' = e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n-1} \geq 0,$$

我们有

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq e^b - \left(1 + \frac{b}{n} \right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned} e^b - \left(1 + \frac{b}{n} \right)^n &= e^b \left[1 - e^{n \ln(1 + \frac{b}{n}) - b} \right] = e^b \left[1 - e^{n \left[\frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - b} \right] \\ &= e^b \left[1 - e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} \right] = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

(实际上我们可以写出具体的等价量 $e^b - \left(1 + \frac{b}{n} \right)^n \sim \frac{e^b b^2}{2n}, n \rightarrow \infty$) 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^b - \left(1 + \frac{b}{n} \right)^n \right] < \infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right]$ 在 $[0, b]$ 一致收敛. 注意到

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{1}{n} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right] \right| = +\infty,$$

我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right]$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致收敛. □

例题 0.7 对 $\alpha > 0$, 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$(x^\alpha e^{-nx})' = (\alpha - nx)x^{\alpha-1} e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{n}.$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx} \leq \left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha > 1$, 我们由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ 知原级数在 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

当 $\alpha \in [0, 1)$, 注意到


$$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

如果原级数在 $[0, +\infty)$ 一致收敛, 那么上述和函数在 $x = 0$ 应该连续. 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} \neq 0,$$

故原级数在 $[0, +\infty)$ 不一致收敛. □

例题 0.8 求 α 的范围, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n} \right)^n (1-x)^\alpha$ 在 $x \in [0, 1]$ 一致收敛.

 **笔记** 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n} \right)^n (1-x)^\alpha$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha = +\infty$$

时一定有 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$ 在 $x \in [0, 1]$ 不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对 x 赋值往往能实现这一点.

证明 当 $\alpha > 1$, 首先由

$$\left[\left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha\right]' = \left(x - \frac{1}{n}\right)^{n-1} (1-x)^{\alpha-1} \left[n + \frac{\alpha}{n} - (n+\alpha)x\right] = 0 \Rightarrow x = \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha}$$

知

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha &= \left(\frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha}\right)^\alpha = \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \left(\frac{\alpha n - \alpha}{n^2 + \alpha n}\right)^\alpha \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n = \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(1+\alpha)n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} e^{-\frac{(1+\alpha)n^3}{n^3 + \alpha n^2}} \sim \frac{e^{-(1+\alpha)} \alpha^\alpha}{n^\alpha}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故由 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$ 在 $x \in [0, 1]$ 一致收敛.

当 $\alpha \leq 0$, 原级数在 $x = 1$ 时通项极限不等于 0, 故此时级数在 $x = 1$ 时发散.

当 $0 < \alpha \leq 1$, 当 $N \rightarrow +\infty$, 取 $x = n + \frac{\alpha}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha &\geq \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha = \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\sim N e^{-\frac{(1+\alpha)(2N-1)}{N+\alpha}} \cdot \frac{\alpha^\alpha}{N^\alpha} \sim \frac{\alpha^\alpha e^{-2(1+\alpha)}}{N^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$ 在 $x \in [0, 1]$ 不一致收敛. □

例题 9.9 设 $f_1 \in C[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. 考虑函数列

$$f_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

讨论 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛性.

 **笔记** 注意到

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \leq M &\Rightarrow |f_2(x)| \leq \int_{x_0}^x M dx = M |x - x_0| \\ \Rightarrow |f_3(x)| &\leq \int_{x_0}^x M |x - x_0| dx = \frac{M}{2} |x - x_0|^2 \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

于是就有下述归纳.

注 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 因此我们放缩时在积分号外面再加了一个绝对值 (当然也可以分类讨论).

证明 设 $M \triangleq \sup_{x \in [a,b]} |f_1(x)|$, 我们归纳证明

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1}. \quad (8)$$

现在(8)对 $n = 1$ 已经成立. 假设 n 时成立, 我们对 $x_0 \in [a, b]$ 有

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t)| dt \right| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_{x_0}^x |x - x_0|^{n-1} dx = \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

现在由数学归纳法知对一切 $n \in \mathbb{N}$ 都有(8)成立, 故

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1} \leq \frac{M}{(n-1)!} \max \{ |b - x_0|^{n-1}, |x_0 - a|^{n-1} \},$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛到 0. □