0.1 三角函数相关

0.1.1 三角函数

命题 0.1 (三角平方差公式)

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y) = \cos(y-x)\cos(y+x) = \cos^2 y - \cos^2 x.$

证明 首先, 我们有

$$\cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - \left(1 - \sin^2 y\right) = \sin^2 y - \sin^2 x.$$

接着, 我们有

$$\begin{aligned}
\sin(x-y)\sin(x+y) &= (\sin x\cos y - \cos x\sin y)(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\\
&= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y\\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y\\
&= \sin^2 x - \sin^2 y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(y-x)\cos(y+x) &= (\cos x\cos y + \sin x\sin y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y)\\
&= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y\\
&= \cos^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y)\\
&= \cos^2 x - \cos^2 y.
\end{aligned}$$

故结论得证. □

0.1.2 反三角函数

定理 0.1 (常用反三角函数性质)

1. $\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & ,xy < 0\text{或}x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x>0,y>0,x^2+y^2>1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x<0,y<0,x^2+y^2>1 \end{cases}.$

2. $\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) & ,xy \geqslant 0\text{或}x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x>0,y<0,x^2+y^2>1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x<0,y>0,x^2+y^2>1 \end{cases}.$

3. $\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x+y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x+y<0 \end{cases}.$

4. $\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x \geqslant y \\ \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x<y \end{cases}.$

5. $\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan\dfrac{x+y}{1-xy} & ,xy<1 \\ \pi + \arctan\dfrac{x+y}{1-xy},x>0 & ,xy>1 \\ -\pi + \arctan\dfrac{x+y}{1-xy},x<0 & ,xy>1 \end{cases}.$

6. $\arctan x-\arctan y=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,xy>-1\\ \pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,x>0,xy<-1\\ -\pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,x<0,xy<-1\end{cases}.$
7. $2\arcsin x=\begin{cases}\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,|x|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1\\ -\pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,-1\leqslant x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$
8. $2\arccos x=\begin{cases}\arccos\left(2x^2-1\right) & ,0\leqslant x\leqslant 1\\ 2\pi-\arccos\left(2x^2-1\right) & ,-1\leqslant x<0\end{cases}.$
9. $2\arctan x=\begin{cases}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2},|x|\leqslant 1\\ \pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & ,|x|>1\\ -\pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & ,x<-1\end{cases}.$
10. $\cos(n\arccos x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}\ (n\geqslant 1).$

证明

□

命题 0.2

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0\end{cases}.$$

证明 令 $f(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1}(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

故 $f(x)$ 为常函数, 于是就有 $f(x)=f(1)=\dfrac{\pi}{2},\forall x>0\,;f(x)=f(-1)=-\dfrac{\pi}{2},\forall x<0.$ □

0.1.3 双曲三角函数

命题 0.3

(1) $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1,$

(2) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\geqslant x.$

证明 可以分别利用均值不等式和求导进行证明. □

命题 0.4

1. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$
2. $\cosh(2x)=2\cosh^2 x-1=1-2\sinh^2 x.$
3. $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x.$

证明

□