0.1 归纳法的应用

数学归纳法是讨论二次型与相关矩阵问题的常用方法之一. 注意到正负惯性指数的降阶公式的证明过程展示了这样一种方法, 例如有一个分块对称矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则通过对称分块初等变换可用 $\boldsymbol{A}$ 同时消去 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}'$, 从而得到分块对角矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$. 此时矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的阶都比 $\boldsymbol{M}$ 的阶低, 如果问题的条件和结论在合同关系下不改变, 则上述过程就是运用归纳法的基础. 事实上, 正定阵的判定准则之一, 即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零, 就是通过上述方法证明的.

命题 0.1

证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵;

(2) 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和主对角元全为正数的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$;

(3)(**正定阵的 Cholesky 分解**) 存在唯一的主对角元全为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$.

注 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为主对角元全为正数的上三角矩阵, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 则 $c_{11}c_{1j}=a_{1j}$, 从而 $c_{11}=\sqrt{a_{11}}>0$, $c_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}(2\le j\le n)$, 即 $\boldsymbol{C}$ 的第一行元素被唯一确定. 同理不断地讨论下去, 可得这样的 $\boldsymbol{C}$ 存在并被正定阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定. 因为 $\boldsymbol{S}$ 是由 $\boldsymbol{C}$ 的主对角元构成的对角矩阵, 故由 $\boldsymbol{C}$ 的唯一性可得 $\boldsymbol{S}$ 的唯一性, 从而可得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{S}^2$ 以及 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的唯一性. 因此, 这个命题 0.1中关于正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的两种分解 (2) 和 (3) 都是存在且唯一的, 其中分解 (3) 通常称为正定阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Cholesky 分解. 另外, 上述两种分解也有非常重要的几何意义, 它们与 Gram - Schmidt 正交化方法密切相关.

注 事实上,正定阵的 Cholesky 分解和非异阵的 QR 分解从某种意义上看是等价的.证法三即是由非异阵的 QR 分解推出正定阵的 Cholesky 分解. 反之, 对任一非异实矩阵 A, 由命题??(2) 可知 $A'A$ 是正定阵, 设 $A'A=R'R$ 是 正定阵的 Cholesky 分解, 其中 R 是主对角元全大于零的上三角矩阵. 令 $Q=AR^{-1}$, 则

$$Q'Q=(AR^{-1})'(AR^{-1})=(R')^{-1}(A'A)R^{-1}=(R')^{-1}(R'R)R^{-1}=I_n,$$

即 Q 是正交矩阵, 从而 $A=QR$ 是 QR 分解. 从几何的层面上看, 上述两种矩阵分解都等价于 Gram - Schmidt 正交化和标准化过程, 所以它们之间的等价性是自然的.

证明 证法一: (1) $\Rightarrow$ (2): 只要证明存在主对角元全为 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}$ 是正定对角矩阵即可. 因为一旦得证, 由上三角阵性质可知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}$ 也是主对角元全为 1 的上三角矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$. 对阶数 n 进行归纳, 当 $n=1$ 时结论显然成立. 假设对 $n-1$ 阶正定阵结论成立, 现证明 n 阶正定阵的情形. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n-1$ 维列向量. 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶正定阵, 从而是可逆矩阵. 考虑如下对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性及命题??(2) 可得 $a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0$. 再由归纳假设, 存在主对角元全为 1 的 $n-1$ 阶上三角矩阵 $\boldsymbol{T}_{n-1}$, 使得 $\boldsymbol{T}_{n-1}'\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{T}_{n-1}=\boldsymbol{D}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶正定对角矩阵. 令

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是一个主对角元全为 1 的 n 阶上三角矩阵, 使得

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$

是 n 阶正定对角矩阵.

(2) $\Rightarrow$ (3): 由 (2) 可设 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, 则 $A=B'DB$, 其中 B 为主对角元全为 1 的上三角矩阵. 令 $s_i=\sqrt{d_i}>0$,

$$\boldsymbol{S}=\operatorname{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}.$$

设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{SB}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 显然 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{SB}$ 是主对角元全为正数的上三角矩阵.

下证唯一性. 设 B,C 均为主对角元全为正数的上三角阵, 且 $A=C'C=B'B$, 令 $N=BC^{-1}$, 则

$$N'N=\left(C^{-1}\right)'B'BC^{-1}=\left(C^{-1}\right)'C'CC^{-1}=I. \tag{1}$$

因此 N 是正交矩阵. 因为 B,C 均为主对角元全为正数的上三角阵, 所以由上三角阵的性质可知,N,N^{-1},C^{-1} 也是主对角元全为正数的上三角阵, 从而 N' 是下三角阵. 又由 N 是正交矩阵可知 $N'=N^{-1}$ 也是下三角阵, 故 $N'=N^{-1}$ 既是上三角阵也是下三角阵, 即 $N'=N^{-1}$ 是主对角阵, 从而 N 就是主对角元全为正数的主对角阵. 再由 (1) 式可知,N 的主对角元全为 1, 因此 $N=I$. 故 $BC^{-1}=N=I$, 即 $B=C$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 这时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{C}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 合同, 从而 $\boldsymbol{A}$ 正定.

证法二 (矩阵的 QR 分解): 因为半正定阵 A 是正定阵当且仅当 A 是可逆矩阵, 所以由可逆性和命题**??**的结论就能推出命题 0.1的结论. □

命题 0.2

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是实二次型, 相伴矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $P_1,\cdots,P_{n-1}$ 非零, 求证: 经过可逆线性变换 f 可化为下列标准型:

$$f=P_1y_1^2+\frac{P_2}{P_1}y_2^2+\cdots+\frac{P_n}{P_{n-1}}y_n^2,$$

其中 $P_n=|\boldsymbol{A}|$.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 假设结论对 $n-1$ 成立. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix},$$

由于 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|=P_{n-1}\neq 0$, 故可对 $\boldsymbol{A}$ 进行下列对称分块初等变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

显然这是一个合同变换. 又因为第三类分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_{n-1}|(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

即

$$a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

由归纳假设, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$, 使得

$$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{M}=\operatorname{diag}\left\{P_1,\frac{P_2}{P_1},\cdots,\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right\}.$$

作矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\left\{P_1,\frac{P_2}{P_1},\cdots,\frac{P_n}{P_{n-1}}\right\}.$$

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称矩阵且非主对角元都是负数, 求证: $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每个元素都是正数.

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设结论对 $n-1$ 阶成立, 现证明 n 阶的情形. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $n-1$ 个顺序主子阵, 从而 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶正定实对称矩阵且非主对角元

都是负数, 故由归纳假设可知 A_{n-1}^{-1} 的每个元素都是正数. 利用分块初等变换可求出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1}+d_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\alpha\alpha'A_{n-1}^{-1} & -d_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\alpha \\ -d_n^{-1}\alpha'A_{n-1}^{-1} & d_n^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $d_n=a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha$. 由打洞原理可知

$$|A|=|A_{n-1}|\left|a_{nn}-\alpha\prime A_{n-1}^{-1}\alpha\right|=d_n \Rightarrow d_n=|A|/|A_{n-1}|>0.$$

又注意到 A_{n-1}^{-1} 的每个元素都是正数, 且 α 的每个元素都是负数, 故 A^{-1} 的每个元素都是正数. □

例题 0.2 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定实对称矩阵, 其逆阵 $A^{-1}=(b_{ij})$, 求证: $a_{ii}b_{ii}\geq 1$, 且等号成立当且仅当 A 的第 i 行和列的所有元素除了 a_{ii} 之外全为零.

证明 对换 A 的第 i,n 行和列, 可将 a_{ii} 换到第 (n,n) 位置, 这相当于合同变换 $P_{in}AP_{in}$. 此时 $(P_{in}AP_{in})^{-1}=P_{in}A^{-1}P_{in}$, 即对换了 A^{-1} 的第 i,n 行和列, b_{ii} 也换到了第 (n,n) 位置. 因此不失一般性, 只需证明 $a_{nn}b_{nn}\geq 1$, 且等号成立当且仅当 A 的 n 行和列的所有元素除了 a_{nn} 之外全为零即可.

利用数学归纳法, 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设结论对 $n-1$ 阶成立, 现证明 n 阶的情形. 设 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子阵, 从而 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶正定实对称矩阵且非主对角元都是负数, 故由归纳假设可知 A_{n-1}^{-1} 的每个元素都是正数. 利用分块初等变换可求出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1}+d_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\alpha\alpha'A_{n-1}^{-1} & -d_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\alpha \\ -d_n^{-1}\alpha'A_{n-1}^{-1} & d_n^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $d_n=a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha$. 由此可得 $b_{nn}=d_n^{-1}$, 再由 A_{n-1} 的正定性及命题**??**可知 A_{n-1}^{-1} 也正定, 于是

$$b_{nn}^{-1}=d_n=a_{nn}-\alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha\leq a_{nn},$$

即有 $a_{nn}b_{nn}\geq 1$, 且等号成立当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$. □

定理 0.1 (反对称矩阵的合同标准型)

设 A 是 n 阶反对称矩阵, 则 A 必合同于下列形状的分块矩阵:

$$\mathrm{diag}\{S,\cdots,S,0,\cdots,0\}, \tag{2}$$

其中 $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 我们称(2)式为反对称矩阵 A 的**合同标准型**. 特别地, 反对称矩阵 A 的秩必为偶数 $2r$, 其中 r 是 S 在 A 的上述合同标准型中的个数.

注 本例题给出了命题**??**的另一证明. 注意到在本题的证明中, 我们采用的是跨度为 2 的数学归纳法 (第二数学归纳法), 故在起始步骤时需要验证 $n=1,2$ 这两种情形, 但我们不难发现 $n=2$ 情形的证明完全包含在归纳过程的证明中, 因此可以用 $n=0,1$ 的情形作为起始步骤. 需要注意的是, $n=0$ 并不意味着存在零阶矩阵, 而只是说明归纳过程已经完全结束. 后面遇到跨度为 2 的数学归纳法, 我们通常都采用上述约定.

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=0,1$ 时结论显然成立, 假设结论对阶数小于 n 的反对称矩阵成立. 现有 n 阶反对称矩阵 A, 若 $A=O$, 结论已成立, 故设 $A\neq O$. 由于反对称矩阵的主对角元全为零, 故可设 A 的 (i,j) 元素 $a_{ij}\neq 0(i<j)$, 此时 A 的 (j,i) 元素为 $-a_{ij}$. 对换 A 的第一行与第 i 行, 再对换第一列与第 i 列; 对换第二行与第 j 行, 再对换第二列与第 j 列; 然后将第一行乘以 $\dfrac{1}{a_{ij}}$, 第一列乘以 $\dfrac{1}{a_{ij}}$; 最后得到 A 合同于下列形状的矩阵:

$$M=\begin{pmatrix} S & B \\ -B' & A_{n-2} \end{pmatrix},$$

其中 A_{n-2} 是 $n-2$ 阶反对称矩阵,$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 显然 S 是可逆反对称矩阵, 对 M 作下列对称分块初等变换: 第一分块行左乘 $B'S^{-1}$ 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 $(B'S^{-1})'=-S^{-1}B$ 加到第二分块列上, 于是 A 合同

于下列矩阵:

$$N=\begin{pmatrix} S & O \\ O & A_{n-2}+B'S^{-1}B \end{pmatrix}.$$

注意到 $A_{n-2}+B'S^{-1}B$ 是 $n-2$ 阶反对称矩阵, 故由归纳假设它合同于(2)式形状的矩阵, 因此分块对角矩阵 N 也合同于(2)式形状的矩阵, 结论得证. □

命题 0.3

求证: n 阶实反对称矩阵 A 的行列式值总是非负实数.

证明 由定理 0.1可知, 存在非异实矩阵 C, 使得

$$C'AC=\mathrm{diag}\{S,\cdots,S,0,\cdots,0\},$$

其中 $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 若 A 是奇异阵, 则 $|A|=0$, 结论显然成立. 若 A 是非异阵, 则由上式可得 $|A|\cdot|C|^2=|S|^{\frac{n}{2}}=1$, 从而 $|A|>0$. □

命题 0.4

设 A 为 n 阶实反对称矩阵, 求证:

(1) $|I_n+A|\geq 1+|A|$, 且等号成立当且仅当 $n\leq 2$ 或当 $n\geq 3$ 时, $A=O$.

(2) $|I_n+A|\geq 1$, 且等号成立当且仅当 $A=O$.

证明 (1) 由命题??可知

$$|I_n+A|=|I_n|+|A|+\sum_{1\leq k\leq n-1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\right).$$

注意到 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 是 k 阶实反对称行列式, 故由命题 0.3可知其值大于等于零, 于是 $|I_n+A|\geq 1+|A|$ 成立. 当 $n\leq 2$ 时, 容易验证不等式的等号成立. 当 $n\geq 3$ 时, 若不等式的等号成立, 则必有

$$A\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{vmatrix}=a_{ij}^2=0,$$

即有 $a_{ij}=0(1\leq i<j\leq n)$, 从而 $A=O$.

(2) 同理可证, 细节留给读者完成. □