


## 0.1 其他

**例题 0.1** 设  $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  是连续递增函数, 记  $s = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$ . 证明

$$\int_0^s f(x)dx \leq \int_s^1 f(x)dx \leq \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x)dx.$$

 **笔记** 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

**证明** 令  $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ , 则  $F'(t) = f(t)$  连续递增, 故  $F$  是下凸的. 显然  $s \in [0, 1]$ , 于是

$$F(x) \geq F(s) + F'(s)(x-s) = F(s) + f(s)(x-s), \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x)f(x)dx &\geq \int_0^1 [F(s)f(x) + f(s)f(x)(x-s)]dx \\ &= F(s) \int_0^1 f(x)dx + f(s) \int_0^1 [xf(x) - sf(x)]dx \\ &= F(s) \int_0^1 f(x)dx + f(s) \left[ \int_0^1 xf(x)dx - \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \int_0^1 f(x)dx \right] \\ &= F(s) \int_0^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x)dx = \int_0^1 F(x)dF(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 &\geq F(s) \int_0^1 f(x)dx \implies \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx \geq F(s) = \int_0^s f(x)dx \\ \implies \int_0^s f(x)dx + \int_s^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx \geq 2 \int_0^s f(x)dx \\ \implies \int_0^s f(x)dx &\leq \int_s^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} = \frac{\int_0^1 x dF(x)}{F(1)} = 1 - \frac{\int_0^1 F(x)dx}{F(1)},$$

即  $\int_0^1 F(x)dx = (1-s)F(1)$ . 又由  $F$  的下凸性可知

$$F(x) \leq \begin{cases} \frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s), & x \in [s, 1] \\ \frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0), & x \in [0, s] \end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned} (1-s)F(1) &= \int_0^1 F(x)dx \leq \int_0^s \left[ \frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0) \right] dx + \int_s^1 \left[ \frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}F(s) + \frac{1-s}{2}F(1). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1) \leq \frac{1}{2}F(s) \implies F(1) \leq \frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x) dx = F(1) - F(s) \leq \left( \frac{1}{1-s} - 1 \right) F(s) = \frac{s}{1-s} F(s) = \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x) dx.$$

□

**例题 0.2** 求最小实数  $C$ , 使得对一切满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续函数  $f$ , 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx \leq C.$$

**注** 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在  $x = 1$  处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是  $n$  的函数), 类似进行构造函数列即可.

**证明** 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f(t)| dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2.$$

令  $f_n(t) = (n+1)t^n$ , 则  $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ . 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f_n(t)| dt = 2 \int_0^1 t(n+1)t^n dt = 2(n+1) \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty.$$

因此若  $C < 2$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})| dx > C$ . 故  $C = 2$  就是最佳上界.

□

**例题 0.3** 设  $f \in C[0, 1]$  使得  $\int_0^1 x^k f(x) dx = 1, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq n^2.$$

**证明** 设  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &\geq \left[ \int_0^1 f(x)(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) dx \right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})^2 = \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &= \int_0^1 \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \right)^2 dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i x^{i+j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i \int_0^1 x^{i+j} dx = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \frac{\left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2}{\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}} = \frac{a^T J a}{a^T H a},$$

其中  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$ ,  $H = \left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{n \times n}$ . 于是我们只需求  $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$ . 设  $\lambda$  为  $\frac{a^T J a}{a^T H a}$  的一个大于 0

的上界, 由例 8.16(3) 可知  $H$  正定, 则

$$\begin{aligned}\lambda \text{ 为 } \frac{a^T J a}{a^T H a} \text{ 的一个上界} &\iff \lambda \geq \frac{a^T J a}{a^T H a}, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T J a \leq \lambda a^T H a, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T (\lambda H - J) a \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \lambda H - J \text{ 半正定}.\end{aligned}$$

因此  $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a} = \min\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\}$ . 设  $H_k, J_k$  分别为  $H, J$  的  $k$  阶顺序主子阵, 再根据打洞原理及例 2.37(1) 可得

$$\begin{aligned}|\lambda H_k - J_k| &= |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} J_k| = |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T| \\ &= \lambda^{k-1} |H_k| (\lambda - \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k).\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{1}_k^T = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times k}$ . 由  $H$  正定可知  $|H_k| > 0$ , 又因为  $\lambda > 0$ , 所以再由引理 6.4 可得

$$|\lambda H_k - J_k| > 0 \iff \lambda > \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k \stackrel{\text{引理 6.4}}{=} n^2.$$

因此对  $\forall \lambda > n^2$ , 都有  $\lambda H - J$  的顺序主子式都大于 0, 故此时  $\lambda H - J$  正定. 于是对  $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , 固定  $a$ , 都有

$$a^T (\lambda H - J) a > 0, \forall \lambda > n^2.$$

令  $\lambda \rightarrow n^2$ , 则由  $a^T (\lambda H - J) a$  的连续性可知

$$a^T (n^2 H - J) a \geq 0.$$

故  $n^2 H - J$  半正定. 因此  $n^2 = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$ . 结论得证. □

**例题 0.4** 设  $A, B$  都是  $n$  级实对称矩阵, 若  $B$  正定, 证明

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\alpha^T A \alpha}{\alpha^T B \alpha} = \lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

**证明**

□

### 引理 0.1

设  $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$ . 存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $g(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$ , 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

**证明**

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha [g(x) - g(a)]^\alpha M, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

♡

**证明** 不妨设  $g(a) = 0$ , 否则用  $g(x) - g(a)$  代替  $g(x)$ . 当  $M = 0$ , 则不等式(2)显然成立. 当  $M \neq 0$  可以不妨设  $M = 1$ .

现在对非负函数  $g$ , 现在我们正式开始我们的证明, 当  $g'(x_0) = 0$ , 不等式(2)显然成立. 当  $g'(x_0) > 0$ , 则利用(1)有

$$\begin{aligned}g(x_0) &\geq g(x_0) - g(h) = \int_h^{x_0} g'(t) dt \\ &\geq \int_h^{x_0} [g'(x_0) - |t - x_0|^\alpha] dt \\ &= g'(x_0)(x_0 - h) - \frac{(x_0 - h)^{\alpha+1}}{\alpha + 1},\end{aligned}$$

取  $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$ , 就得到了  $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha + 1} |g'(x_0)|^{1 + \frac{1}{\alpha}}$ , 即不等式(2)成立. 类似的考虑  $g'(x_0) < 0$  可得(2).

当  $g'(x_0) < 0$ , 则利用(1)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geq -g(h) + g(x_0) = -\int_{x_0}^h g'(t)dt \\ &\geq -\int_{x_0}^h [g'(x_0) + |t - x_0|^\alpha]dt \\ &= -g'(x_0)(h - x_0) - \frac{(h - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \end{aligned}$$

取  $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$ , 就得到了  $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha + 1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$ , 即不等式(2)成立.  $\square$

### 命题 0.1 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx. \quad (3)$$

**注** 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx\right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$

但是上述分部积分部分需要零边界条件 (即需要  $\lim_{x \rightarrow \infty} x|f(x)|^2 = 0$  上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在  $\mathbb{R}$  上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

**证明** Method 1 专业技术: 对一般的  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

取紧化序列  $h_n, n \in \mathbb{N}$ , 则对每一个  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2 dx\right)^2 &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |(h_n f)'(x)|^2 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

右边让  $n \rightarrow +\infty$ , 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2 dx \right] = \left[ 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right].$$

但是左边暂时不知道是否有  $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2 < \infty$ , 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(x)f(x)|^2 dx\right)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2 dx\right)^2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

从而不等式(3)成立.

Method 2 正常方法: 对一般的  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x|f(x)|^2 = 0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty > \sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\geq} \int_x^\infty y |f'(y)f(y)| dy \geq x \int_x^\infty |f'(y)f(y)| dy, \quad (4)$$

于是  $\int_x^\infty f(y)f'(y)dy = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2 - \frac{1}{2}|f(x)|^2$  收敛. 因此  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2$  存在. 注意  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty$ , 因此由

积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在  $x_n \rightarrow \infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n |f(x_n)| = 0$ , 于是再结合  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2$  存在可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0.$$

现在继续用(4), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy} \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy \geq x \int_x^\infty f'(y) f(y) dy = \frac{x}{2} |f(x)|^2,$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 由 Cauchy 收敛准则即得  $\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy} \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy \rightarrow 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)|^2 = 0$ , 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 我们有

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left( \int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx,$$

即不等式(3)成立. □

**例题 0.5** 设  $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$  是内闭 Riemann 可积函数, 若  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$  均收敛, 证明

$$\left( \int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx. \quad (5)$$

**证明** 记  $a = \int_0^\infty f(x) dx > 0$ , 待定  $s > 0$ , 则不等式(5)等价于

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^s x f(x) dx + \int_s^\infty x f(x) dx > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^s x f(x) dx + s \int_s^\infty f(x) dx &\geq \frac{a^2}{2} \iff \int_0^s x f(x) dx + s \left( a - \int_0^s f(x) dx \right) \geq \frac{a^2}{2} \\ \iff \frac{a^2}{2} - sa + s \int_0^s f(x) dx - \int_0^s x f(x) dx &\leq 0 \iff \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x) f(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

利用  $f < 1$ , 取  $s = a$ , 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x) f(x) dx = -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x) f(x) dx < -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x) dx = 0.$$

从而

$$\int_0^a x f(x) dx + a \int_a^\infty f(x) dx > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^s x f(x) dx + \int_s^\infty x f(x) dx \geq \int_0^a x f(x) dx + a \int_a^\infty f(x) dx > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(5). □

**例题 0.6** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的单调函数. 求证: 对任意实数  $a$  有

$$\int_0^1 |f(x) - a| dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx. \quad (6)$$

**证明** 不妨设  $f$  是单调递增函数. 注意到  $\frac{1}{2}$  是积分区间的中点, 将式(6)右端的积分从  $\frac{1}{2}$  处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - a| dx. \end{aligned}$$

故式 (6) 成立. □

**例题 0.7** 若  $[a, b]$  上的可积函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于函数  $f$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

**证明** 由已知条件, 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $k$  使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a, b].$$

因为  $f_k \in R([a, b])$ , 所以存在  $[a, b]$  的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里  $\omega_j(f_k)$  是  $f_k$  在区间  $[x_{j-1}, x_j]$  上的振幅. 因为

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x) - f_k(y)|, \end{aligned}$$

所以

$$\omega_j(f) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon.$$

故  $f$  在  $[a, b]$  上可积. □

**例题 0.8** 设  $f$  在  $[a, b]$  上非负可积. 求证: 数列  $I_n = \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$  是单调递增的.

**注** 当  $f$  是连续函数时, 可以进一步证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  (见例题??).

**证明** 要比较  $I_n$  与  $I_{n+1}$  的大小, 就要比较  $f^n$  的积分与  $f^{n+1}$  之间的关系. 这可以利用 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^n(x) dx &= \int_a^b 1 \cdot f^n(x) dx \\ &\leq \left( \int_a^b 1^{n+1} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{n+1}} \left( \int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{n}{n+1}}, \end{aligned}$$

即

$$\left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故  $\{I_n\}$  是单调递增数列. □

**例题 0.9** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可导, 且  $f(a) = 0$ . 求证: 对  $p \geq 1$  有

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx.$$

**证明** 为了建立  $|f|^p$  的积分与  $|f'|^p$  的积分之间的关系, 先建立  $|f|$  与  $|f'|$  的积分的关系. 根据 Newton-Leibniz 公

式, 有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

所以对于  $p > 1$  应用 Hölder 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \left( \int_a^x 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (x-a)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 因而

$$|f(x)|^p \leq (x-a)^{p-1} \int_a^x |f'(t)|^p dt, \quad x \in [a, b].$$

注意到上式对  $p = 1$  也是成立的. 上式两边在  $[a, b]$  上积分, 可得

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \int_a^b (x-a)^{p-1} \left( \int_a^x |f'(t)|^p dt \right) dx.$$

注意到  $\int_a^x |f'(t)|^p dt$  是  $|f'|^p$  的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^p dx &\leq \frac{1}{p} (x-a)^p \int_a^x |f'(t)|^p dt \Big|_a^b - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} (b-a)^p \int_a^b |f'(t)|^p dt - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx. \end{aligned}$$

□

**例题 0.10** 设  $f$  是  $[0, a]$  上的连续函数, 且存在正常数  $M, c$  使得

$$|f(x)| \leq M + c \int_0^x |f(t)| dt,$$

求证:  $|f(x)| \leq M e^{cx} (\forall x \in [0, a])$ .

**证明** 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x) \leq M + cF(x).$$

令

$$G(x) = F(x)e^{-cx} + \frac{M}{c}e^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x)e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &= |f(x)|e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &\leq (M + cF(x))e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} = 0. \end{aligned}$$

这说明  $G$  在  $[0, a]$  上单调递减. 因为  $G(0) = \frac{M}{c}$ , 所以  $G \leq \frac{M}{c}$ . 因而

$$F(x) + \frac{M}{c} \leq \frac{M}{c} e^{cx}.$$

再结合条件可得  $|f(x)| \leq M + cF(x) \leq M e^{cx}$ .

□

**例题 0.11** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续且对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证:  $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**证明** 结论中出现  $\pi$  且条件中要求  $x, y \in [0, 1]$ . 因此将条件中的  $x, y$  分别换成  $\sin t$  和  $\cos t$ , 有

$$f(\cos t) \sin t + f(\sin t) \cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

由对称性可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换  $\sin t = x$  即得  $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$ . □

**例题 0.12** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续且对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证:  $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**注** 结论中的  $\frac{\pi}{4}$  是最佳的, 这只要取  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  即可验证.

**证明** 结论中出现  $\pi$  且条件中要求  $x, y \in [0, 1]$ . 因此将条件中的  $x, y$  分别换成  $\sin t$  和  $\cos t$ , 有

$$f(\cos t) \sin t + f(\sin t) \cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

由区间再现恒等式可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换  $\sin t = x$  即得  $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$ . □

**例题 0.13** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上有可积的导函数且满足  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 求证: 对任意  $a \geq 0$  有

$$\int_0^1 |af(x) + f'(x)|dx \geq 1.$$

**证明** 因为  $e^{-ax} \geq e^{-a}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 |af(x) + f'(x)|dx &= \int_0^1 |(e^{ax}f(x))'e^{-ax}|dx \geq e^{-a} \int_0^1 |(e^{ax}f(x))'|dx \\ &\geq e^{-a} \left| \int_0^1 (e^{ax}f(x))'dx \right| = e^{-a} |e^a f(1) - f(0)| = 1. \end{aligned}$$

□

**例题 0.14** 设  $f$  在  $[0, 2]$  上可导且  $|f'| \leq 1, f(0) = f(2) = 1$ . 求证:

$$1 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 3$$

**证明** 由 Taylor 中值定理可知, 存在  $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [1, 2]$ , 使得

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$f(x) = 1 + f'(\xi_2)(x-2), \quad \forall x \in [1, 2].$$



于是

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 [1 + f'(\xi_1)x]dx + \int_1^2 [1 + f'(\xi_2)(x-2)]dx \\ &= 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2).\end{aligned}$$

由  $|f'| \leq 1$  可知

$$1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2) \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

故


$$1 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 3.$$

□

**例题 0.15** 设  $f$  在区间  $[0, 1]$  上连续可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ . 求证:

$$\left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当  $f(x) = Ax(1-x)$ , 其中  $A$  是常数.

 **笔记** 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑  $(ax+b)f'(x)$  的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

**证明** 设  $t$  是任意常数, 有

$$\int_0^1 (x+t)f'(x)dx = (x+t)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 &= \left( \int_0^1 (x+t)f'(x)dx \right)^2 \\ &\leq \int_0^1 (x+t)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \left( \frac{1}{3} + t + t^2 \right) \int_0^1 (f'(x))^2 dx.\end{aligned}$$

取  $t = -\frac{1}{2}$ , 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数  $C$  使得  $f'(x) = C \left( x - \frac{1}{2} \right)$ . 注意到  $f(0) = f(1) = 0$ , 可得  $f(x) = Ax(1-x)$ , 这里  $A$  为任意常数. □

**例题 0.16** 设  $f, g$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 使得对  $[0, 1]$  上任意满足  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  的连续可导函数  $\varphi$  有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

求证:  $f$  可导, 且  $f' = g$ .

**证明** 证明设

$$c = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 t g(t)dt$$

考察函数

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt + c$$

显然  $G$  可导且  $G'(x) = g(x)$ ,  $G(1) = \int_0^1 g(t)dt + c$ . 只需证明  $f = G$ . 令

$$\varphi(x) = \int_0^x [f(t) - G(t)] dt$$

则  $\varphi$  可导, 且  $\varphi(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 G(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt - \left[ tG(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 tg(t)dt \right] \\ &= \int_0^1 f(t)dt - G(1) + \int_0^1 tg(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt - c + \int_0^1 tg(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = G(x)\varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx$$

所以

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)] \varphi'(x)dx = 0$$

注意到  $\varphi' = f - G$ . 我们有

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)]^2 dx = 0$$

于是  $f = G$ . □

### 命题 0.2

设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的严格单调递减连续函数,  $f(a) = b, f(b) = a, g$  是  $f$  的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

特别地, 对  $p > 0, q > 0$  取  $f(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{p}}, g(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{q}}$ , 可得

$$\int_0^1 (1 - x^p)^{\frac{1}{q}} dx = \int_0^1 (1 - x^q)^{\frac{1}{p}} dx.$$

**证明** 因为可以用在  $a, b$  分别插值于  $f(a), f(b)$  的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在  $[a, b]$  上一致逼近  $f(x)$ , 所以只需对  $f$  是连续可微函数的情况证明.

作变换  $x = f(t)$ , 有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x) dx &= \int_b^a g(f(t))f'(t) dt = \int_b^a tf'(t) dt \\ &= tf(t) \Big|_b^a - \int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt\end{aligned}$$

故所证等式成立. □

**例题 0.17** 设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

**证明** 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设  $\max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(y)$ . 因此对任意  $x \in [a, b]$ , 有

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) - f(x) = f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt$$

关于  $x$  在  $[a, b]$  上积分, 即得

$$(b-a) \max_{a \leq x \leq b} f(x) - \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)| dt.$$

两边除以  $b-a$  即得所证. □

**例题 0.18** 设  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $f \in C^1[0, 1]$  且满足  $f(1) = 0$ . 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

**证明** 设  $\alpha \in [0, 1)$  且  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ . 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对  $x \in [0, 1]$  有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left( \int_x^1 f'(t) dt \right)^2 = \left( \int_x^1 t^{-\alpha} \cdot t^{\alpha} f'(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int_x^1 t^{-2\alpha} dt \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{1-2\alpha} (1-x^{1-2\alpha}) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &\leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 (1-x^{1-2\alpha}) \left( \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right) dx \\ &= \frac{1}{1-2\alpha} \left[ \left( x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left( x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) x^{2\alpha} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx - \frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (7)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \left| \int_1^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left( \int_x^1 |f'(t)| dt \right) dx \\ &= x \left( \int_x^1 |f'(t)| dt \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 x |f'(x)| dx \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 x |f'(x)| dx. \quad (8)$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 &\leq \left( \int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}} |f'(x)| dx \right)^2 \\ &\leq \left( \int_0^1 x^{1-2\alpha} dx \right) \left( \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

结合式 (7), 可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx - \frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \quad (9)$$

在上式中取  $\alpha = \frac{3}{4}$ , 即得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq 4 \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (10)$$

对  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ , 将式 (9) 两边乘以  $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$  再与式 (10) 相加可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

□

**例题 0.19** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上非负且连续可导. 求证:

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

**证明** 记  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$ , 则有

$$-Mf(x) \leq f(x)f'(x) \leq Mf(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

因此

$$-M \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f^2(0) \leq M \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

上式两边乘以  $f$  得

$$-Mf(x) \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{1}{2} f^2(0)f(x) \leq Mf(x) \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

将上式关于变量  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$-M \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \leq M \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

结论得证.

□

**例题 0.20** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上非负单调递增连续函数,  $0 < \alpha < \beta < 1$ . 求证:

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

并且  $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$  不能换为更大的数.

**注** 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

**证明** 根据积分中值定理, 存在  $\xi \in (\alpha, \beta)$  使得

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

因而由  $f$  的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \leq (\beta - \alpha)f(\beta)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(\beta) dx \\ &= \int_\alpha^\beta f(x) dx + (1-\beta)f(\beta) \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \frac{1-\beta}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx \\ &= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx. \end{aligned}$$

取正整数  $n$  使得  $\alpha + \frac{1}{n} < \beta$ . 构造函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ n(x - \alpha), & \alpha < x \leq \alpha + \frac{1}{n}, \\ 1, & \alpha + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \alpha - \frac{1}{2n}, \quad \int_\alpha^\beta f_n(x) dx = \beta - \alpha - \frac{1}{2n}.$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 f_n(x) dx}{\int_\alpha^\beta f_n(x) dx} = \frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}$$

故题中  $\frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}$  不能换成更大的数. □

**例题 0.21** 设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续的二阶导函数,  $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$ . 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的  $f$ .

**注** 当  $f$  在端点的值为零,  $f'$  在端点的值确定时, 可以考虑  $f''$  与线性函数的乘积的积分.

**证明** 根据分部积分, Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 x(f''(x) - a)^2 dx = \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \int_0^1 x f''(x) dx + a^2 \int_0^1 x dx \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \left( x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \right) + \frac{a^2}{2} \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a (f'(1) - f(1) + f(0)) + \frac{a^2}{2} \\ &= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x) = a$$

即  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ . 因为  $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$ , 所以  $c = 0, b = -\frac{a}{2}$ . 因此

$$f(x) = \frac{1}{2}ax(x - 1).$$

□

**例题 0.22** 设  $n$  是正整数, 且  $m > 2$ . 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left( \frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

**注** 当利用积分的可加性把区间  $[a, b]$  上的积分分为区间  $[a, c]$  和区间  $[c, b]$  上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的  $c$ .

**证明** 用数学归纳法容易证明  $|\sin nt| \leq n \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . 另外又有

$$|\sin nt| \leq 1, \quad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

设  $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ . 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt &= \int_0^a t \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt \\ &\leq \int_0^a t n^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left( \frac{1}{2t/\pi} \right)^m dt \\ &= \frac{1}{2} n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^m \left( \frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}} \right). \end{aligned}$$

易知函数  $g(a) = \frac{1}{2} n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$  当  $a = \frac{\pi}{2n}$  时取最小值. 于是将上面的  $a$  换成  $\frac{\pi}{2n}$  可得

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left( \frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

□

**例题 0.23** 设  $n \geq 1$  是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

**证明** 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt.$$

因为当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ , 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{2t/\pi} dt = \frac{\pi}{2} \ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

用数学归纳法容易证明当  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时, 有  $|\sin nt| \leq n \sin t$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt &= \int_0^{\pi/(2n+1)} \left( \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \int_0^{\pi/(2n+1)} 2n \cos t dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} < 2n \sin \frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \left( 2n + \frac{1}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1}, \end{aligned}$$

$$- \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \left( \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt < - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \cos 2nt dt = \frac{1}{2n} \sin \frac{\pi}{2n+1}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \left( 2n + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} < \left( 2n + \frac{1}{n} \right) \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n^2+1}{2n^2+n} \pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} \pi + \frac{\pi}{2} \ln n.$$

两边同时除以  $\pi$  得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

□

**例题 0.24** 设  $f \not\equiv 0$ , 在  $[a, b]$  上可微,  $f(a) = f(b) = 0$ . 求证: 至少存在一点  $c \in [a, b]$  使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx. \quad (11)$$

**证明** 记上式右端为  $M$ . 假设对一切  $c \in [a, b]$  有  $|f'(c)| \leq M$ , 下面推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于  $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  存在  $\xi \in (a, x)$ , 使

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leq M(x - a), \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad (12)$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \quad (13)$$

再根据微分中值定理, 对于  $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ , 存在  $\eta \in (x, b)$ , 使得

$$f(x) - f(b) = f'(\eta)(x - b),$$

由假设, 有

$$|f(x)| \leq M(b - x), \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad (14)$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \quad (15)$$

将式 (13) 与式 (15) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M = \int_a^b |f(x)| dx.$$

这说明式 (13) 与式 (15) 必须是等式, 因而式 (12) 与式 (14) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ M^2(b-x)^2, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \end{cases}$$

此分段函数在  $x = \frac{a+b}{2}$  不可导, 这与  $f$  在  $[a, b]$  可导矛盾! □

**例题 0.25** 设  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的下凸函数. 求证: 对一切  $t \in [0, 1]$ , 有


$$t(1-t)f(t) \leq (1-t)^2 \int_0^t f(x) dx + t^2 \int_t^1 f(x) dx.$$

**注** 从本题结论知: 当  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的下凸函数时, 有

$$\int_0^1 t(1-t)f(t) dt \leq \frac{1}{3} \int_0^1 [t^3 + (1-t)^3] f(x) dt.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^1 t(1-t)f(t) dt &\leq \int_0^1 (1-t)^2 \left( \int_0^t f(x) dx \right) dt + \int_0^1 t^2 \left( \int_t^1 f(x) dx \right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_0^t f(x) dx \right) d(1-t)^3 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_t^1 f(x) dx \right) dt^3 \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{3} \int_0^1 (1-t)^3 f(x) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [t^3 + (1-t)^3] f(x) dt. \end{aligned}$$

 **笔记** 构造思路: 待定  $a = a(t, x), b = b(t, x)$ , 使得  $t = ta + (1-t)b$ . 由  $f$  是下凸函数可知

$$f(t) \leq tf(a) + (1-t)f(b), \quad \forall t \in (0, 1).$$

并且上式两边对  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} t \int_0^1 f(a) dx + (1-t) \int_0^1 f(b) dx &= \frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x) dx + \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^1 f(b) dx &= \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = \int_0^1 f(tx) dx \\ \Rightarrow b &= tx, t = ta + (1-t)b \\ \Rightarrow a &= t - tx + t^2x = t(1-x+tx). \end{aligned}$$

**证明** 对于  $t=0$  和  $t=1$  所证不等式是显然的. 设  $t \in (0, 1)$ , 由定理??可知, 下凸函数在  $t$  点是连续的, 所以  $f$  在  $[0, 1]$  上可积. 对于  $x \in [0, 1]$ , 有  $t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx)$ . 因此根据下凸函数的定义, 得

$$f(t) \leq (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$

上式对变量  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leq (1-t) \int_0^1 f(tx) dx + t \int_0^1 f(1-x+tx) dx \\ &= \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x) dx + \frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

□

### 命题 0.3

设  $f$  在区间  $[0, a]$  上有二阶连续导数, 满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且  $f''(x) > 0$  ( $0 < x < a$ ). 求证: 对任意  $x \in (0, a)$ , 有

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2} dt < x + \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2} + 1}. \quad (16)$$

▲

**注** 式 (16) 左端是弧长计算公式, 不等式 (16) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点  $A$  和终点  $B$  处的切线在曲线凸出的一侧相交于  $C$  点, 则直线段  $AC$  与  $BC$  的长度之和大于这条曲线段的长度.

**证明** 将式 (16) 右端第一项  $x$  移到左端, 有

$$\int_0^x \left( \sqrt{1+(f'(t))^2} - 1 \right) dt = \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + 1} \cdot f'(t) dt.$$

因为  $f'(t)$  和  $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$  都是单调递增函数, 所以  $\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}$  是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x \left( \sqrt{1+(f'(t))^2} - 1 \right) dt < \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1} \cdot \int_0^x f'(t) dt = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}.$$

□

**例题 0.26**  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的正连续函数,  $k \geq 1$ . 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} dx \int_0^1 \frac{1}{f^k(x)} dx, \quad (17)$$

并讨论等号成立的条件.

**证明** 当  $k \geq 1$  时, 函数  $\frac{t^k}{1+t}$  和  $t^{k+1}$  都是单调递增的. 因此对于任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)} \left( \frac{f^k(x)}{1+f(x)} - \frac{f^k(y)}{1+f(y)} \right) (f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)) \geq 0, \quad (18)$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)} + \frac{f(y)}{1+f(x)} \leq \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} \cdot \frac{1}{f^k(y)} + \frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)} \cdot \frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量  $x, y$  在区间  $[0, 1]$  上积分, 即得所证.

要使式 (17) 成为等式, 必须式 (18) 成为等式. 因此对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有  $f(x) = f(y)$ , 即  $f$  在  $[0, 1]$  上为常数.



□

**例题 0.27** 设  $b \geq a+2$ . 函数  $f$  在  $[a, b]$  上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)} dx = 1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx \leq 1. \quad (19)$$

并求式 (19) 成为等式的条件.

**证明** 令  $g(x) = \frac{b-a}{1+f(x)}$ , 则  $g$  在  $[a, b]$  上连续且  $\int_a^b g(x) dx = b-a$ . 从  $g$  的定义可得  $f(x) = \frac{b-a-g(x)}{g(x)}$ . 因此

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} &= \frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ -1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1} \right] \leq \frac{1}{b-a} \left[ -1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx &\leq \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $g(x) = 1$ , 即  $f(x) = b-a-1$  时成立. □

**例题 0.28** 设  $f$  是  $(-\infty, +\infty)$  上连续函数, 且在  $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$  上等于零. 又设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \quad (h > 0).$$

求证:

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**证明** 作变换  $u = t - x$ , 得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt = \int_{-h}^h |f(u+x)| du.$$

因此

$$\int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du.$$

作变换  $v = u + x$ , 得

$$\int_a^b |f(u+x)| dx = \int_{a+u}^{b+u} |f(v)| dv = \begin{cases} \int_a^b |f(v)| dv, & u \geq 0, \\ \int_a^{b+u} |f(v)| dv, & u < 0 \end{cases} \leq \int_a^b |f(v)| dv.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b |\varphi(x)| dx &= \int_a^b \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \right| dx \leq \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt dx \\ &= \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(v)| dv du = \int_a^b |f(v)| dv. \end{aligned}$$

□

**例题 0.29** 设  $f$  在区间  $[1, +\infty)$  上连续并满足

$$x \int_1^x f(t) dt = (x+1) \int_1^x t f(t) dt. \quad (20)$$

求  $f$ .

**解** 假设  $f$  是满足条件的连续函数, 则对式 (20) 两边求导得

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x t f(t) dt + x^2 f(x). \quad (21)$$

由此可知,  $f(1) = 0$ , 且当  $x \geq 1$  时,  $f$  可导. 对式 (21) 两边求导得

$$f(x) = x f(x) + 2x f(x) + x^2 f'(x),$$

即

$$f'(x) = \frac{1-3x}{x^2} f(x), \quad x \geq 1. \quad (22)$$

所以

$$|f'(x)| \leq 2|f(x)|. \quad (23)$$

令  $g(x) = e^{-4x} f^2(x)$ , 则有

$$g'(x) = 2e^{-4x} (f(x)f'(x) - 2f^2(x)).$$

结合式 (23) 可知  $g' \leq 0$ , 这说明  $g$  单调递减. 因为  $g(1) = 0$ , 所以  $g \leq 0$ . 但从  $g$  的定义知  $g \geq 0$ . 于是  $g = 0$ , 从而  $f = 0$ .

实际上, 由 (22) 可解得  $f(x) = C e^{\int_1^x \frac{1-3t}{t^2} dt} = C e^{1-\frac{1}{x}-3\ln x}$ , 再将  $f(1) = 0$  代入得  $C = 0$ . 故  $f \equiv 0$ .

总之, 原方程 (20) 的解只有  $f \equiv 0$ . □

**例题 0.30** 设  $f$  在任意有限区间上可积, 且对任意  $x$  及任意  $a \neq 0$  满足

$$\frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = f(x).$$

试求函数  $f$ .

**解** 易知线性函数满足上面的式子. 下面证明满足上式的函数必是线性函数. 由条件知, 对任意  $x$  和  $a$ , 有

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = 2a f(x).$$

因此

$$2a f(x+y) = \int_{x+y-a}^{x+y+a} f(t) dt = \int_{y+a-x}^{y+a-x} f(t) dt + \int_{y+a-x}^{x+y+a} f(t) dt = 2(a-x)f(y) + 2x f(y+a).$$

取  $a = 1, y = 0$  就得

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0),$$

即  $f$  是线性函数. □

**例题 0.31** 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上有下界的连续函数. 若存在常数  $a \in (0, 1]$  使得

$$f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt$$

为常数, 则  $f$  无穷可微且它的任意阶导函数都是非负的.

**证明** 不妨设  $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  (不然将  $f$  换为  $f - m$  之后再证明). 此时  $f \geq 0$ . 记

$$A = f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt, \quad (24)$$

则  $f \geq A$ . 因此,  $A \leq 0$ . 由式 (24) 知  $f$  无穷可微, 且

$$f'(x) = a f(x+1) - a f(x). \quad (25)$$

记  $a_1 = a$ , 则

$$f'(x) + a_1 f(x) \geq 0.$$

假设存在  $a_n > 0$  使得

$$f'(x) + a_n f(x) \geq 0. \quad (26)$$

则  $(e^{a_n x} f(x))' \geq 0$ . 这说明函数  $e^{a_n x} f(x)$  是递增的. 由式 (24) 可得

$$\begin{aligned} f(x) &\leq a \int_x^{x+1} f(t) dt = a \int_x^{x+1} e^{a_n t} f(t) e^{-a_n t} dt \\ &\leq a e^{a_n(x+1)} f(x+1) \int_x^{x+1} e^{-a_n t} dt \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} a f(x+1) \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} (f'(x) + a f(x)). \end{aligned}$$

由此可得

$$f'(x) + a_{n+1} f(x) \geq 0, \quad (27)$$

其中

$$a_{n+1} = a - \frac{a_n}{e^{a_n} - 1}.$$

若  $a_{n+1} \leq 0$ , 则由 (27) 得  $f' \geq 0$ . 若  $a_{n+1} > 0$ , 则接着可构造  $a_{n+2}$ . 若  $\{a_n\}$  均为正的, 则  $\{a_n\}$  为递减正数列, 设其极限为  $r \geq 0$ . 若  $r > 0$ , 则从上式得  $r = a - \frac{r}{e^r - 1}$ , 即  $a = \frac{r e^r}{e^r - 1} > 1$ . 这与条件不符, 因此必有  $r = 0$ . 在式 (26) 中令  $n \rightarrow +\infty$ , 即得对一切  $x$  有  $f'(x) \geq 0$ . 注意到

$$f^{(n)}(x) - a \int_x^{x+1} f^{(n)}(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

因而将前面的  $f$  换为  $f'$ , 可以得到  $f''(x) \geq 0$ , 依次可以证明  $f^{(n)}(x) \geq 0$ . □

**例题 0.32** 求所有连续函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得对任意  $x \in \mathbb{R}$  和任意正整数  $n$ , 有

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt = n f(x) + \frac{1}{2}.$$

**解** 设  $f$  是要求的一个连续函数, 则  $f$  是可导的且

$$n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (28)$$

由此知  $f$  二阶可导, 且

$$n \left[ f'\left(x + \frac{1}{n}\right) - f'(x) \right] = f''(x). \quad (29)$$

将 (28) 中的  $n$  换成  $2n$ , 得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{2n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (30)$$

将上式中的  $x$  换成  $x + \frac{1}{2n}$  得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right). \quad (31)$$

将式 (28) 两边乘以 2 再减去式 (30) 两边, 得

$$2n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'(x). \quad (32)$$

从式 (31) 和式 (32) 得

$$f'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{R}.$$

由 (29) 式可知  $f'' = 0$ . 因而存在常数  $a, b$  使得  $f(x) = ax + b$ . 代入题设条件可得  $a = 1$ . 于是  $f(x) = x + b$ , 这里  $b$  是

任意常数. □

**例题 0.33** 设  $f \in C[-1, 1]$  且对任意整数  $n$  满足

$$\int_0^1 f(\sin(nx)) dx = 0. \quad (33)$$

求证: 对任意  $x \in [-1, 1]$  有  $f(x) = 0$ .

**证明** 在式 (33) 中取  $n = 0$ , 可得  $f(0) = 0$ . 对任意非零整数  $n$ , 将式 (33) 中的积分作变换  $t = nx$  可得

$$\int_0^n f(\sin t) dt = 0.$$

令

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(\sin t) dt,$$

则  $F$  可导, 且  $F(n) = 0$ . 对整数  $k$  有

$$\begin{aligned} F(x + 2k\pi) &= \int_{x+2k\pi}^{x+2k\pi+1} f(\sin t) dt = \int_x^{x+1} f(\sin(t + 2k\pi)) dt \\ &= \int_x^{x+1} f(\sin t) dt = F(x). \end{aligned}$$

因而  $F(n + 2k\pi) = F(n) = 0$ . 这说明  $F$  在集合  $A = \{n + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$  上取值为 0. 由于集合  $A$  在  $\mathbb{R}$  上是稠密的, 由  $F$  的连续性可知  $F(x) = 0 (x \in \mathbb{R})$ . 于是

$$F'(x) = f(\sin(x+1)) - f(\sin x) = 0.$$

这说明  $f(\sin x)$  是以 1 和  $2\pi$  为周期的连续函数. 仍由集合  $A$  的稠密性可知  $f(\sin x)$  是常数. 因此  $f$  在  $[-1, 1]$  上是常数. 故  $f(x) = f(0) = 0$ . □

**例题 0.34** 设  $f$  是  $[0, 2\pi]$  上可导的凸函数,  $f'$  有界, 试证

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \geq 0.$$

**证明** 因为  $f$  是可导的凸函数, 所以  $f'$  是单调递增的函数. 由  $f'$  的单调有界性, 知  $f'$  在  $[0, 2\pi]$  上可积. 根据分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin((k-1)\pi + x) dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) (-1)^{k-1} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} f' \left( x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin x dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^n \left( f' \left( x + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) - f' \left( x + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) \right) \sin x dx. \end{aligned}$$

注意到  $f'$  是单调递增的, 即知  $a_n \geq 0$ . □

**例题 0.35** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续可微,  $f(0) = 0$ . 求证:

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^1 (f'(x))^2 dx, \quad (34)$$

且右边的系数 4 是最佳的.

**证明 证法一:** 因为

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f(x)}{2x},$$

所以

$$(f'(x))^2 = \left[ x^{\frac{1}{2}} \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' \right]^2 + \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2} \geq \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left( x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2}.$$

因而

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2} f^2(1) + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx,$$

即所证不等式 (34) 成立.

若存在常数  $c \in (0, 4)$  使得

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq c \int_0^1 (f'(x))^2 dx \quad (35)$$

对任意满足条件的  $f$  成立, 则对  $\delta \in (0, 1)$  取

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [\delta, 1], \\ \frac{3}{2\sqrt{\delta}}x - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x^2, & x \in [0, \delta). \end{cases}$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx &= \int_0^\delta \left( \frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{4\delta^3} \right) dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{19}{12} + \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx, \\ \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= \int_0^\delta \left( \frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_\delta^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{\delta^3} \right) dx + \frac{1}{4} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{13}{12} + \frac{1}{4} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

因此式(35)导致

$$\left(1 - \frac{c}{4}\right) \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{13}{12}c - \frac{19}{12}.$$

此式当  $\delta$  充分小时是不成立的. 这个矛盾说明 4 是最佳的.

**证法二:** 利用 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 f'(xt) dt \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f'(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \stackrel{\text{换元}}{=} \int_0^1 \left( \frac{\int_0^t |f'(x)|^2 dx}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \left( \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \left( \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从上式推导可以看出, 对于不恒为零的  $f$ , 严格不等号成立.

为说明相关常数不可改进, 任取  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 考察不恒为零的  $\bar{f} \in C[\varepsilon, 1]$  使得

$$\frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|\bar{f}(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} = \lambda \equiv \sup_{\substack{f \in C[\varepsilon, 1] \\ f \neq 0}} \frac{\int_\varepsilon^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx}{\int_\varepsilon^1 |f'(x)|^2 dx}.$$

这样的  $\bar{f}$  的存在性一般需要用泛函分析. 这里只作形式推导. 任取  $\varphi \in C_c^1(\varepsilon, 1)$ , 则

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \frac{\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\bar{f}(x) + s\varphi(x)|^2}{x^2} dx}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x) + s\varphi'(x)|^2 dx} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \left( \frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\bar{f}(x)\varphi(x)}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^1 \bar{f}'(x)\varphi'(x) dx \right) \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \int_{\varepsilon}^1 \left( \bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{(x+\varepsilon)^2} \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

因此, 尝试寻找  $\bar{f}$  满足

$$\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{x^2} = 0, \quad x \in [\varepsilon, 1].$$

若取  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\bar{f}(x) = x^\alpha$  满足上述方程. 对应的  $\lambda = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$ , 为使得  $\lambda$  最大, 取  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

以上讨论启发我们考虑

$$f'_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

则

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \sqrt{x} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

直接计算得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 \frac{|f_\varepsilon(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |f'_\varepsilon(x)|^2 dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{4} - \ln \varepsilon - \frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{\ln \varepsilon}{4}} = 4.$$

这就表明不等式中的常数 4 是最佳的. □

**例题 0.36** 设  $f, g: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  都是连续函数, 且  $f \neq g$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ . 定义数列

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

求证:  $\{I_n\}$  严格单调递增, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

**证明** 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \cdot \sqrt{g(x)} dx \leq \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx$$

即  $I_0 \leq I_1$ , 等号成立当且仅当存在常数  $c$  使得  $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = c\sqrt{g(x)}$ , 即  $f(x) = cg(x)$ . 再由条件  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$  可得  $c = 1$ . 这与  $f \neq g$  矛盾, 故  $I_0 < I_1$ .

假设  $I_0 < I_1 < \dots < I_n$ , 根据 Hölder 不等式, 有

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \cdot g^{\frac{(n+1)^2}{n+2} - n}(x) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \left( \int_a^b \left( \frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}} \left( \int_a^b \left( g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x) \right)^{n+2} dx \right)^{\frac{1}{n+2}} \\ &= I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_0^{\frac{1}{n+2}} < I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_n^{\frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

因而  $I_n < I_{n+1}$ , 这样, 根据数学归纳法原理, 就证明了  $\{I_n\}$  严格单调递增.

若对任意  $x \in (a, b)$ , 有  $g(x) \geq f(x)$ , 则  $g(x) - f(x) \geq 0$ . 根据条件  $g(x) - f(x)$  连续且满足  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = 0$ , 这可推出  $f = g$ , 与条件矛盾! 因此必存在  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x_0) > g(x_0)$ , 因而存在正数  $\delta < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$  使得

$$f(x) > g(x), \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

记  $m = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x)}{g(x)}$ , 则  $m > 1$ , 因此

$$I_n \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^n f(x) dx \geq m^n \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx$$

令  $n \rightarrow +\infty$  得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ . □

**例题 0.37** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  连续, 定义  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). 如果  $g$  是  $\mathbb{R}$  上的递减函数, 求证:  $f \equiv 0$ .

**证明** 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F$  可导且  $F' = f$ . 由条件知

$$(F^2(x))' = 2F'(x)F(x) = 2g(x)$$

是单调递减函数. 注意到  $F(0) = 0$ . 有  $(F^2(x))' \leq 0$  ( $x > 0$ ),  $(F^2(x))' \geq 0$  ( $x < 0$ ). 这说明  $F^2(x)$  当  $x \geq 0$  时单调递减, 当  $x \leq 0$  时单调递增. 因此  $F^2$  的最大值为  $F^2(0) = 0$ . 但显然  $F^2 \geq 0$ . 故  $F = 0$ , 于是  $f = F' = 0$ . □

**例题 0.38** 设  $f \in C[0, 1]$ . 如果对任意  $x \in [0, 1]$  有

$$\int_0^x f(t) dt \geq f(x) \geq 0,$$

求证:  $f(x) \equiv 0$ .

**证明** 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 则  $F$  可导且  $F' = f$ . 由条件知  $F(x) \geq F'(x)$ . 因此  $(e^x F(x))' \leq 0$ , 即  $e^x F(x)$  单调递减. 由  $F(0) = 0$ , 得  $F(x) \leq 0$ . 但由条件  $F(x) \geq f(x) \geq 0$ , 故  $F(x) = 0$ , 于是  $f(x) = F'(x) = 0$ . □

**例题 0.39** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的凹函数, 且  $f(1) = 1$ . 求证:

(1)

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}, \quad (36)$$

(2)

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx. \quad (37)$$

**注** 若取  $f(x) = x$ , 则式 (37) 成为等式, 因而 (37) 式中的系数  $\frac{2}{3}$  是最佳的.

**注** (38) 式实际上就是凹函数的割线放缩, 用凹函数的定义表示了而已.

**证明** (1) 由定理 ?? 知, 凹函数在定义域内部是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改  $f$  在 0 的值为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 这不改变积分的值, 此时  $f$  在 0 处连续, 故可不妨设  $f \in C[0, 1]$ . 对于给定的  $\delta \in (0, 1)$  以及  $x \in (\delta, 1)$ , 有

$$x = \frac{1-x}{1-\delta} \delta + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) \cdot 1.$$

因为  $f$  是凹函数, 有

$$f(x) \geq \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta) + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) f(1). \quad (38)$$

由上式和条件  $f(1) = 1$ , 得  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq 1$ . 若  $f$  在 1 处不连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > 1$ . 可取  $\delta$  充分靠近 1, 使得在  $(\delta, 1)$

上  $f(x) > 1$ . 令

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \delta, \\ \frac{x-\delta}{1-\delta} \cdot 1 + \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta), & \delta < x \leq 1, \end{cases}$$

则  $f_{\delta}$  是  $[0, 1]$  上连续的凹函数且  $f_{\delta}(1) = 1, f_{\delta}(x) \leq f(x)$ . 由此可知, 只需对连续的凹函数证明式 (36). 又由于连续函数的 Bernstein 多项式在两个端点插值、保持凸性且一致收敛到该连续函数, 只需对有二阶连续导数的凹函数来证明式 (36). 因此, 不妨设  $f \in C^2[0, 1]$ .

**解法一:** 设  $a, b$  是两个待定常数, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \frac{a}{2} + ab + b^2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)f(x) dx &= \left[ \left( \frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f'(x) dx = \frac{1}{2}a + b - \int_0^1 \left( \frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}a + b - \left[ \left( \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f'(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f''(x) dx. \end{aligned}$$

取  $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ , 则有

$$\int_0^1 \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 (x-1)x^2 f''(x) dx.$$

由于  $f$  是凹函数, 有  $f''(x) \leq 0$ . 因而

$$\int_0^1 \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

将此代入式 (39), 可得式 (36).

**解法二:** 设  $a, b$  是两个待定常数, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 (ax + b)f(x) dx \right)^2 \\ \iff \left( \frac{a}{2} + ab + b^2 \right) \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left( \int_0^1 (ax + b)f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (40)$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)f(x) dx &= \frac{a}{2} + b - \int_0^1 \left( \frac{ax^2}{2} + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{a}{2} + b - \left( \frac{a}{6} + \frac{b}{2} \right) f'(1) + \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 (ax + 3b) f''(x) dx. \end{aligned}$$

由  $\begin{cases} \frac{a}{6} + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + b = \frac{1}{4} \end{cases}$  解得  $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ . 于是取  $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ , 代入上式得

$$\int_0^1 (ax + b)f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx.$$

由  $f$  是  $[0, 1]$  上的凹函数可知,  $f''(x) \leq 0$ . 从而

$$\int_0^1 (ax + b)f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

再代入(40)即得

$$\frac{1}{4} \int_0^1 f^2(x) dx \geq \left( \frac{1}{4} \right)^2 \implies \int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$



(2) 设  $c \in (0, 1)$  是待定系数, 则  $g(x) = \frac{f(x) - c}{1 - c}$  仍是  $[0, 1]$  上的凹函数且  $g(1) = 1$ . 由式 (36) 有

$$\int_0^1 g^2(x) dx \geq \frac{1}{4},$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx - 2c \int_0^1 f(x) dx + c^2 \geq \frac{1}{4}(1 - c)^2.$$

取  $c = \frac{1}{3}$ , 则  $c^2 = \frac{1}{4}(1 - c)^2$ . 于是

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx.$$

□

### 定理 0.1 (Favard 不等式)

若  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的非负凹函数, 则有对  $p \geq 1$ ,

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$

♡

**证明** 凹函数在内点是连续的, 选充分小的  $\delta > 0$ , 并修改  $f$  在  $[0, \delta]$  和  $[1 - \delta, 1]$  上的值, 使得修改后的函数是在  $[0, 1]$  的连续凹函数, 且在  $0, 1$  取零值:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{f(\delta)}{\delta}x, & x \in [0, \delta), \\ f(x), & x \in [\delta, 1 - \delta), \\ \frac{f(1 - \delta)}{\delta}(1 - x), & x \in [1 - \delta, 1]. \end{cases}$$

易知

$$\int_0^1 f_\delta(x) dx = \frac{\delta[f(\delta) + f(1 - \delta)]}{2} + \int_\delta^{1 - \delta} f(x) dx.$$

因而

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^1 f_\delta(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

因此只需对  $[0, 1]$  上满足  $f(0) = f(1) = 0$  的连续凹函数证明. 又因为  $f$  的 Bernstein 多项式

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ , 且  $B_n(f; x)$  仍是在两个端点取零值的凹函数. 因此只需对有二阶连续导数的函数证明. 此时有  $f''(x) \leq 0$ . 由  $f(0) = 0$ , 得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = x f'(x) - \int_0^x t f''(t) dt.$$

再由  $f(1) = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \int_0^1 t f''(t) dt, \\ f(x) &= x(f'(x) - f'(1)) + x f'(1) - \int_0^x t f''(t) dt \\ &= -x \int_x^1 f''(t) dt + x \int_0^1 t f''(t) dt - \int_0^x t f''(t) dt \\ &= - \int_0^1 K(x, t) f''(t) dt, \end{aligned}$$

其中二元函数  $K(x, t)$  定义为

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 K^p(x, t)(-f''(t))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &= \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t)|f''(t)| dt. \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t)f''(t) dt \right) dx \\ &= - \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t)f''(t) dx \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t(1-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$

□

**注** (1) 可以用连续函数的积分来逼近可积函数的积分;

(2) 对  $[0, 1]$  上的凸或凹的连续函数  $f$ , 可以用 Bernstein 多项式列  $B_n(f; x)$  一致逼近  $f$ , 且  $B_n(f; x)$  与  $f$  有相同的凸性或凹性, 而且  $B_n(f; x)$  在两个端点与  $f$  的值相同;

(3) 当  $f$  二阶连续可导且在两个端点 0 和 1 取零值时,  $f$  可表示为

$$\int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt.$$

**例题 0.40**

**证明**

□

**例题 0.41**

**证明**

□

**例题 0.42**

**证明**

□

**例题 0.43**

**证明**

□

**例题 0.44**

**证明**

□

**例题 0.45**

**证明**

