0.1 正交多项式

0.1.1 正交函数族与正交多项式

定义 0.1

若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$,$\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 上的权函数且满足

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ **正交**. 若函数族 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ 满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ A_k > 0, & j = k. \end{cases} \tag{2}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的**正交函数族**; 若 $A_k \equiv 1$, 则称为**标准正交函数族**.

例题 0.1 三角函数族

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

就是在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数族.

证明 对 $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$(1, 1) = 2\pi, \quad (\sin kx, \sin kx) = (\cos kx, \cos kx) = \pi,$$

与 $k = 1, 2, \cdots$ 时,

$$(\cos kx, \sin kx) = (1, \cos kx) = (1, \sin kx) = 0;$$

而对 $k, j = 1, 2, \cdots$, 当 $k \neq j$ 时有

$$(\cos kx, \cos jx) = (\sin kx, \sin jx) = (\cos kx, \sin jx) = 0.$$

□

定义 0.2

设 $\varphi_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上首项系数 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式,$\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 上的权函数. 如果多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 满足关系式

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ A_k > 0, & j = k. \end{cases}$$

则称多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 为在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ **正交**, 称 $\varphi_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上**带权 $\rho(x)$ 的 n 次正交多项式**.

定理 0.1

若给定区间 $[a,b]$ 及权函数 $\rho(x)$, 则可由一族线性无关的幂函数 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$, 利用逐个正交化手续构造出正交多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_n(x) &= x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j(x))}{(\varphi_j(x), \varphi_j(x))} \varphi_j(x), \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

这样得到的正交多项式 $\varphi_n(x)$, 其最高项系数为 1.

反之, 若 $\{\varphi_n(n)\}_0^\infty$ 是正交多项式, 则 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性无关的.

证明 容易验证逐个正交化得到的多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交, 且其最高项系数为 1.

反之, 若

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=0,$$

用 $\rho(x)\varphi_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 乘上式并积分得

$$\begin{aligned}&c_0\int_a^b\rho(x)\varphi_0(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x+c_1\int_a^b\rho(x)\varphi_1(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x+\cdots\\&+c_j\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x+\cdots+c_n\int_a^b\rho(x)\varphi_n(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

利用正交性有

$$c_j\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=0.$$

由于 $(\varphi_j,\varphi_j)=\int_a^b\rho(x)\varphi_j^2(x)\mathrm{d}x>0$, 故 $c_j=0$ 对 $j=0,1,\cdots,n$ 成立. 由此得出 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 线性无关.
□

定理 0.2

设 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, 则

1. 对任何 $P(x)\in H_n$ 均可表示为 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 的线性组合, 即

$$P(x)=\sum_{j=0}^n c_j\varphi_j(x).$$

其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 不全为 0.

2. $\varphi_n(x)$ 与任何次数小于 n 的多项式 $P(x)\in H_{n-1}$ 正交, 即

$$(\varphi_n,P)=\int_a^b\rho(x)\varphi_n(x)P(x)\mathrm{d}x=0.$$

♡

证明

□

定理 0.3

设 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, 对 $n\geq 0$ 成立递推关系

$$\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x),\quad n=0,1,\cdots,\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varphi_0(x)=1,\quad\varphi_{-1}(x)=0,\\&\alpha_n=(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_n(x),\varphi_n(x)),\\&\beta_n=(\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x)),\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

这里 $(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))=\int_a^b x\varphi_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$

♡

证明

□

定理 0.4

设 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式, 则 $\varphi_n(x)(n\geq 1)$ 在区间 (a,b) 内有 n 个不同的零点.

♡

证明 假定 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内的零点都是偶数重的, 则 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上符号保持不变. 这与

$$(\varphi_n,\varphi_0)=\int_a^b\rho(x)\varphi_n(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x=0$$

矛盾. 故 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内的零点不可能全是偶重的, 现设 $x_i(i=1,2,\cdots,l)$ 为 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内的奇数重零点, 不妨设

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_l < b,$$

则 $\varphi_n(x)$ 在 $x_i(i=1,2,\cdots,l)$ 处变号. 令

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l),$$

于是 $\varphi_n(x)q(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则得

$$(\varphi_n, q) = \int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)q(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

若 $l < n$, 由 $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 的正交性可知

$$(\varphi_n, q) = \int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)q(x)\mathrm{d}x = 0,$$

与 $(\varphi_n, q) \neq 0$ 矛盾, 故 $l \geq n$. 而 $\varphi_n(x)$ 只有 n 个零点, 故 $l = n$, 即 n 个零点都是单重的. 证毕. □

0.1.2 Legendre(勒让德) 多项式

定义 0.3 (Legendre(勒让德) 多项式)

当区间为 $[-1,1]$, 权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 时, 由 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ 正交化得到的多项式称为**勒让德 (Legendre) 多项式**, 并用 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x), \cdots$ 表示. 这是勒让德于 1785 年引进的. 1814 年**罗德利克 (Rodrigul)** 给出了勒让德多项式的简单表达式

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{5}$$

由于 $(x^2-1)^n$ 是 $2n$ 次多项式, 求 n 阶导数后得

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

于是得首项 x^n 的系数 $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. 显然最高项系数为 1 的勒让德多项式为

$$\widetilde{P}_0(x) = 1, \quad \widetilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{6}$$

♣

定理 0.5 (Legendre 多项式的性质)

设 $\{P_n(x)\}_0^\infty$ 是 Legendre 多项式, 它可表示为

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

则有

1. (正交性)

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{7}$$

2. (奇偶性)

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{8}$$

3. (递推关系)

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\cdots. \tag{9}$$

4. $P_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 内有 n 个不同的实零点.

♡

证明

1. 令 $\varphi(x)=(x^2-1)^n$, 则

$$\varphi^{(k)}(\pm 1)=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

设 $Q(x)$ 是在区间 $[-1,1]$ 上有 n 阶连续可微的函数, 由分部积分法知

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n(x)Q(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q(x)\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x\\&=\cdots=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面分两种情况讨论.

(1) 若 $Q(x)$ 是次数小于 n 的多项式, 则 $Q^{(n)}(x)\equiv 0$, 故得

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=0,\quad 当 n\neq m.$$

(2) 若

$$Q(x)=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\varphi^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\cdots,$$

则

$$Q^{(n)}(x)=P_n^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!},$$

于是

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t=\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)},$$

故

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1},$$

于是(7)式得证.

2. 由于 $\varphi(x)=(x^2-1)^n$ 是偶次多项式, 经过偶次求导仍为偶次多项式, 经过奇次求导仍为奇次多项式, 故 n 为偶数时 $P_n(x)$ 为偶函数,n 为奇数时 $P_n(x)$ 为奇函数, 于是(8)式成立.

3. 考虑 $n+1$ 次多项式 $xP_n(x)$, 它可表示为

$$xP_n(x)=a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+\cdots+a_{n+1}P_{n+1}(x).$$

两边乘 $P_k(x)$, 并从 -1 到 1 积分, 并利用正交性得

$$\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x=a_k\int_{-1}^{1}P_k^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $k\leq n-2$ 时,$xP_k(x)$ 次数小于等于 $n-1$, 上式左端积分为 0, 故得 $a_0=0$. 当 $k=n$ 时,$xP_n^2(x)$ 为奇函数, 左端积分仍为 0, 故 $a_n=0$. 于是

$$xP_n(x)=a_{n-1}P_{n-1}(x)+a_{n+1}P_{n+1}(x),$$

其中

$$\begin{aligned}a_{n-1}&=\frac{2n-1}{2}\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{2n+3}{2}\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n+1}(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2n+3}{2}\cdot\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+1},\end{aligned}$$

从而得到以下的递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

由 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$, 利用(10)式就可推出

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2, \\ P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2, \\ P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \\ P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8, \\ P_6(x) &= (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16, \\ &\vdots \end{aligned}$$

图 1给出了 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ 的图形.

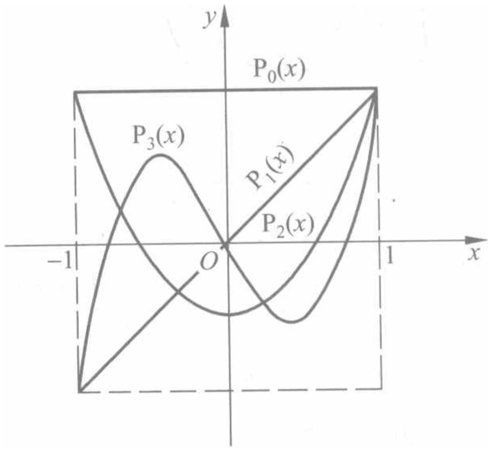

图 1

4.

□

0.1.3 Chebeshev(切比雪夫) 多项式

定义 0.4 (Chebeshev(切比雪夫) 多项式)

当权函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 区间为 $[-1, 1]$ 时, 由序列 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ 正交化得到的正交多项式就是 **Chebeshev(切比雪夫) 多项式**, 它可表示为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \le 1. \tag{11}$$

若令 $x = \cos\theta$, 则 $T_n(x) = \cos n\theta, 0 \le \theta \le \pi$.

♣

注 由于切比雪夫多项式是在区间 $[-1, 1]$ 上定义的, 对于一般区间 $[a, b]$, 要通过变量替换变换到 $[-1, 1]$, 可令

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b], \tag{12}$$

则可将 $x \in [a, b]$ 变换到 $t \in [-1, 1]$.

定理 0.6 (Chebeshev 多项式的性质)

设 $\{T_n(x)\}$ 是 Chebeshev 多项式, 它可表示为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \le 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则有

1. (递推关系)
$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{cases} \tag{13}$$
2. $T_n(x)$ 的首项 x^n 的系数为 $2^{n-1}(n = 1, 2, \cdots)$, 进而若令
$$\widetilde{T}_0(x) = 1, \widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), n = 1, 2, \cdots,$$
则 $\widetilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 Chebeshev 多项式.
3. $T_{2k}(x)$ 只含 x 的偶次幂,$T_{2k+1}(x)$ 只含 x 的奇次幂.
4. Chebeshev 多项式 $\{T_k(x)\}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交, 且
$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m \neq 0; \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases} \tag{14}$$
5. $T_n(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有 n 个零点
$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$
和 $n+1$ 个极值点 (包括端点)
$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$
这两组点称为 **Chebeshev(切比雪夫) 点**.

证明

1. 这只要由三角恒等式
$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta, \quad n = 1, 2, \cdots,$$
令 $x = \cos\theta$ 即得. 由(13)式就可推出
$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$
函数 $T_0(x)$,$T_1(x)$,$T_2(x)$,$T_3(x)$ 的图形见图 2.

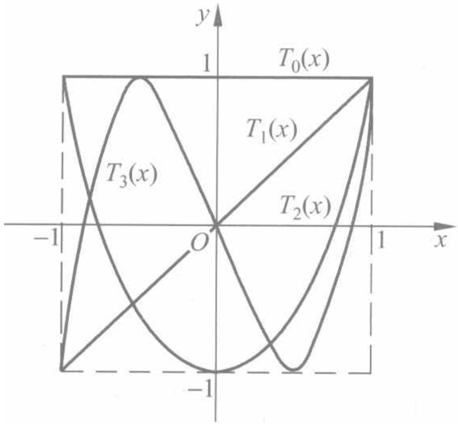

图 2

2. 此性质可由递推关系(13)归纳得到.
3. 此性质也可由递推关系(13)归纳得到.
4. 事实上, 令 $x=\cos\theta$, 则 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$, 于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

5.

□

定理 0.7

设 $\widetilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的切比雪夫多项式, 记 $\widetilde{H}_n$ 为所有次数小于等于 n 的首项系数为 1 的多项式集合, 则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\widetilde{T}_n(x)|\leqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|,\quad \forall P(x)\in\widetilde{H}_n,$$

且

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\widetilde{T}_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

♡

笔记 这个定理表明在所有首项系数为 1 的 n 次多项式集合 $\widetilde{H}_n$ 中

$$\|\widetilde{T}_n\|_\infty=\min_{P\in\widetilde{H}_n}\|P(x)\|_\infty,$$

所以 $\widetilde{T}_n(x)$ 是 $\widetilde{H}_n$ 中最大值最小的多项式, 即

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|\widetilde{T}_n(x)|=\min_{P\in\widetilde{H}_n}\max_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{15}$$

利用这一结论, 可求 $P(x)\in H_n$ 在 H_{n-1} 中的最佳 (一致) 逼近多项式.

证明

□

例题 0.2 求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳二次逼近多项式.

解 由题意, 所求最佳逼近多项式 $P_2^*(x)$ 应满足

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)-P_2^*(x)|=\min.$$

由定理 0.7可知, 当

$$f(x)-P_2^*(x)=\frac{1}{2}T_3(x)=2x^3-\frac{3}{2}x$$

时, 多项式 $f(x)-P_2^*(x)$ 与零偏差最小, 故

$$P_2^*(x)=f(x)-\frac{1}{2}T_3(x)=x^2+\frac{7}{2}x-1$$

就是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳二次逼近多项式. □

0.1.4 Chebeshev 多项式零点插值

Chebeshev(切比雪夫) 点在插值中有重要作用. 从图 3可以看到切比雪夫点恰好是单位圆周上等距分布点的横坐标, 这些点的横坐标在接近区间 $[-1,1]$ 的端点处是密集的.

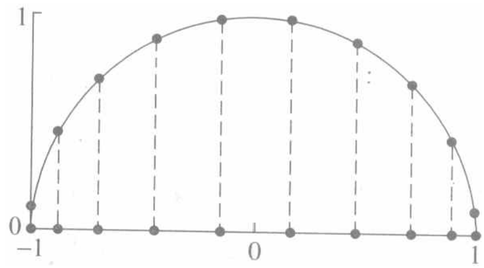

图 3

定理 0.8

设插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为切比雪夫多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点, 被插函数 $f\in C^{n+1}[-1,1]$,$L_n(x)$ 为相应的插值多项式, 则

$$\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-L_n(x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty. \tag{16}$$

对于一般区间 $[a,b]$ 上的插值只要利用变换(12)式则可得到相应结果

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_n(x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty.$$

此时插值节点为

$$x_k=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi+\frac{a+b}{2},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

♡

笔记 对(16)式令 $n\to\infty$ 则误差趋于 0. 因此这个定理表明: 利用切比雪夫点做插值, 可使插值区间最大误差最小化.

证明 由定理??知插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

这里 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x, $\omega_{n+1}(x)$ 由 (??) 式所定义. 于是

$$\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|,$$

其中

$$M_{n+1}=\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty=\max_{-1\le x\le 1}|f^{(n+1)}(x)|$$

是由被插函数确定的. 因为插值节点为 $T_{n+1}(x)$ 的零点

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi,\quad k=0,1,\cdots,n,$$

所以 $\omega_{n+1}(x)$ 就是首先系数为 1 的 Chebeshev 多项式. 由(15)式可得

$$\max_{-1\le x\le 1}|\omega_{n+1}(x)|=\max_{-1\le x\le 1}|\widetilde{T}_{n+1}(x)|=\frac{1}{2^n}.$$

由此可得(16). □

例题 0.3 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,1]$ 上的四次拉格朗日插值多项式 $L_4(x)$, 插值节点用 $T_5(x)$ 的零点, 并估计误差 $\max\limits_{0\le x\le 1}|\mathrm{e}^x-$

$L_4(x)|$.

解 利用 $T_5(x)$ 的零点和区间变换可知节点

$$x_k = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k+1}{10}\pi\right),\quad k=0,1,2,3,4,$$

即

$$x_0 = 0.97553,\quad x_1 = 0.79390,\quad x_2 = 0.5,$$

$$x_3 = 0.20611,\quad x_4 = 0.02447.$$

对应的拉格朗日插值多项式为

$$L_4(x) = 1.00002274 + 0.99886233x + 0.50902251x^2 + 0.14184105x^3 + 0.06849435x^4.$$

利用(16)式可得误差估计

$$\max_{0\le x\le 1}|\mathrm{e}^x - L_4(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},\quad n=4,$$

而

$$M_{n+1} = \|f^{(5)}(x)\|_\infty \le \|\mathrm{e}^x\|_\infty \le \mathrm{e}^1 \le 2.72,$$

于是有

$$\max_{0\le x\le 1}|\mathrm{e}^x - L_4(x)| \le \frac{\mathrm{e}}{5!}\frac{1}{2^9} < \frac{2.72}{6}\frac{1}{10240} < 4.4\times 10^{-5}.$$

□

在第 2 章中已经知道, 由于高次插值出现龙格现象, 一般 $L_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$, 因此它并不适用. 但若用切比雪夫多项式零点插值却可避免龙格现象, 可保证整个区间上收敛.

例题 0.4 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 在 $[-5,5]$ 上利用 $T_{11}(x)$ 的零点作插值点, 构造 10 次拉格朗日插值多项式 $\widetilde{L}_{10}(x)$. 与第 2 章得到的等距节点造出的 $L_{10}(x)$ 近似 $f(x)$ 作比较.

解 在 $[-1,1]$ 上的 11 次切比雪夫多项式 $T_{11}(x)$ 的零点为

$$t_k = \cos\frac{21-2k}{22}\pi,\quad k=0,1,\cdots,10.$$

作变换 $x_k = 5t_k, k=0,1,\cdots,10$. 它们是 $(-5,5)$ 内的插值点, 由此得到 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的拉格朗日插值多项式 $\widetilde{L}_{10}(x)$,$f(x)$,$L_{10}(x)$,$\widetilde{L}_{10}(x)$ 的图形见图 4, 从图中看到 $\widetilde{L}_{10}(x)$ 没有出现龙格现象.

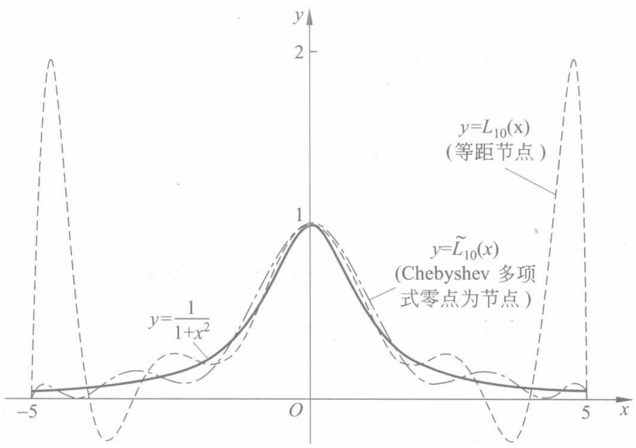

图 4

□

0.1.5 其他常用的正交多项式

定义 0.5 (第二类切比雪夫多项式)

在区间 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式称为**第二类切比雪夫多项式**, 其表达式为

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{17}$$

♣

定理 0.9

$\{U_n(x)\}$ 是 $[-1,1]$ 上带权 $\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式族. 并且还有递推关系式

$$U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,$$

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

♡

证明 令 $x=\cos\theta$, 可得

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n,\end{cases}$$

故 $\{U_n(x)\}$ 是 $[-1,1]$ 上带权 $\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式族. □

定义 0.6 (Laguerre(拉盖尔) 多项式)

在区间 $[0,+\infty)$ 上带权 e^{-x} 的正交多项式称为 **Laguerre(拉盖尔) 多项式**, 其表达式为

$$\mathrm{L}_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}). \tag{18}$$

♣

定理 0.10

Laguerre(拉盖尔) 多项式也具有正交性质

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ (n!)^2, & m=n,\end{cases}$$

和递推关系

$$\mathrm{L}_0(x)=1,\quad \mathrm{L}_1(x)=1-x,$$

$$\mathrm{L}_{n+1}(x)=(1+2n-x)\mathrm{L}_n(x)-n^2\mathrm{L}_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

♡

证明

□

定义 0.7 (Hermite(埃尔米特) 多项式)

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上带权 e^{-x^2} 的正交多项式称为 **Hermite(埃尔米特) 多项式**, 其表达式为

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}). \tag{19}$$

♣

定理 0.11

Hermite(埃尔米特) 多项式满足正交关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n,\end{cases}$$

并有递推关系

$$\mathrm{H}_0(x) = 1, \quad \mathrm{H}_1(x) = 2x,$$

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{H}_n(x) - 2n\mathrm{H}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明

□