0.1 Stolz 定理

0.1.1 数列 Stolz 定理

定理 0.1 (Stolz 定理)

(a): 设 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(b): 设 x_n 是严格递减数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(c): 分别在 (a),(b) 的条件基础上, 若还有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{1}$$

注 注意 (c) 由 (a),(b) 是显然的, 且只有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞ 时才(1)式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即Stolz 定理是离散的洛必达法则.

证明 我们仅证明 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < \infty$ 时有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{2}$$

记 $A \triangleq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由上极限定义我们知道对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant A+\varepsilon, \forall n \geqslant N$. 利用 x_n 严格递增时, 成立 $y_{n+1}-y_n \leqslant (A+\varepsilon)(x_{n+1}-x_n), n \geqslant N$, 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1}(y_{j+1}-y_j) \leqslant (A+\varepsilon)\sum_{j=N}^{n-1}(x_{j+1}-x_j), \forall n \geqslant N+1.$$

即

$$y_n - y_N \leqslant (A+\varepsilon)(x_n - x_N), \forall n \geqslant N+1.$$

令 $n \to +\infty$, 取上极限就得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_n}}{1 - \frac{x_N}{x_n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} \leqslant A+\varepsilon.$$

由 ε 任意性得到式(2).

□

命题 0.1

设 $\{a_n\}$ 为一个数列,p 为固定的正整数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n) = \lambda$, 其中 λ 为常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

证明 考虑 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的 p 个互不相交的子列 $\left\{\frac{a_{np+k}}{np+k}\right\}, k = 0, 1, 2 \cdots, p-1$. 由条件可得, 对 $\forall k \in [0, p-1] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{(n+1)p+k} - a_{np+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right) = \lambda.$$

从而由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{np+k}}{np+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+k} - a_{np+k}}{(n+1)p+k-[np+k]} = \frac{\lambda}{p}.$$

于是由命题??可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

□

命题 0.2 (Cauchy 命题)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

笔记 这个命题说明Stolz 定理是一种有效的把求和消去的降阶方法.

证明 容易由Stolz 定理的 (a)直接得出.

□

定理 0.2 (反向 Stolz 定理/反向 Cauchy 命题)

对某个 $C>0$, 如果有 $n(a_n-a_{n-1})\geqslant -C,\forall n\geqslant 2$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a\in\mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

笔记 反向 Stolz 定理本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

笔记 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1=a_1,\ b_n=a_n-a_{n-1},\ \forall n\geqslant 2,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证明的想法是用 S_n,S_m 来表示 a_n,m 是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m}=S_n+ma_n+mb_{n+1}+(m-1)b_{n+2}+\cdots+b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_{n+m}-S_n}{m}-\frac{mb_{n+1}+(m-1)b_{n+2}+\cdots+b_{n+m}}{m}\\&\leqslant\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n+1}+(m-1)\frac{C}{n+2}+\cdots+\frac{C}{n+m}\right].\end{aligned}$$

然后想办法取合适的 m 即可.

证明 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1=a_1,\ b_n=a_n-a_{n-1},\ \forall n\geqslant 2,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

我们有 $b_n\geqslant -\dfrac{C}{n}$.

对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $|S_n|\leqslant n\varepsilon,\forall n\geqslant N$, 于是当 $n\geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}-S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]b_{n+1}+([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_{n+2}+\cdots+b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n+1}+([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n+2}+\cdots+\frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n}+([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n}+\cdots+\frac{C}{n}\right)\\&=\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C\\&\leqslant\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C+\varepsilon,\end{aligned}\tag{3}$$

于是我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}+\frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon.$$

另外一方面, 当 $n \geqslant \dfrac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$, 有 $n-[n\sqrt{\varepsilon}] \geqslant n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geqslant N$, 因此

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)b_{n-1}+\cdots+b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\frac{C}{n} + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\frac{C}{n}+\cdots+\frac{C}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{(n-[n\sqrt{\varepsilon}])[n\sqrt{\varepsilon}]}\left(([n\sqrt{\varepsilon}]-1)+([n\sqrt{\varepsilon}]-2)+\cdots+1\right) \\
&\geqslant -\frac{|S_n|+|S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}+\varepsilon,
\end{aligned} \tag{4}$$

于是我们得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geqslant -2\sqrt{\varepsilon}-\frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}+\varepsilon.$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

命题 0.3

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

证明 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1}-\ln a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

□

命题 0.4

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}, a_n > 0$, 并且对某个 $C > 0$, 如果有 $n(a_n - a_{n-1}) \geqslant -C, \forall n \geqslant 2,$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

证明 由反向 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_{n+1}-\ln a_n} \xlongequal{\text{反向 Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(\ln a_{k+1}-\ln a_k)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n - \ln a_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l.$$

□

0.1.1.1 利用 Stolz 定理求数列极限

例题 0.1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}.$$

笔记 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

证明 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n+1}k^{2020}-\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\frac{\sum_{k=1}^{n+1}k^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)}.$$

又由Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{2020}-(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2020\cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}}=0.$$

于是再利用Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}{n\cdot(n+1)^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}{n^{2021}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021}-n^{2021}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2020}}{2021\cdot n^{2020}}=\frac{1}{2021}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}=\dfrac{1}{2021}$.

□

例题 0.2

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$.

(2) 证明下述极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)$.

笔记 注意,$\gamma\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0.577\cdots$ 是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道 γ 会不会是一个分数.

解

(1) 直接由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

(2) 记 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$, 则

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to+\infty.\end{aligned}$$

从而存在常数 $C>0$, 使得 $|c_{n+1}-c_n|\leqslant\dfrac{C}{n^2}$, 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C}{n^2}$ 收敛, 所以由比较原则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}-c_n|$ 也收敛.

由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_{n+1}-c_n)$ 也收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_1)$

存在. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ 也存在.

(3) 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)n^2}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)}\cdot n^2}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=-\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$$

□

例题 0.3 计算

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

证明

1. 由Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}-\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n}{n}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n}{1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=e^{-1}.$$

2. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}}-e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}}{n}=e^{-1}.$$

故 $e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\sim\frac{n}{e}, n\to\infty$. 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k-(n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2(n+1)}=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n(n+1)} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n+1}\\
&\xlongequal{\text{Stolz 定理}} \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln k-n\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\ln k\right]\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}[(n+1)\ln(n+2)-(n+1)\ln(n+1)] = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.4 计算

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}.
$$

笔记 注意到, 分子求和时, 不是单纯的 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$, 而是 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$.

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.

结论 $C_a^b=\frac{a}{b}C_{a-1}^{b-1}$.

解 由Stolz 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln C_n^{k-1}-\ln C_n^k\right)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\left(\ln C_n^0-\ln C_n^n\right)}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+2)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)}{1}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

笔记 倒序求和与顺序求和相等!(看到 $n+1-k$, 就应该想到倒序求和)

解 由 Stolz 公式可得

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^{n+1-k}k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}} = 1.
$$

□

例题 0.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(H_n-\ln n-\gamma)$, 其中 γ 为欧拉常数,$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n(H_n-\ln n-\gamma) &= \lim_{n\to\infty}\frac{H_n-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}n^2\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

注 类似的, 你可以继续计算 $\lim_{n\to\infty}\left(n(H_n-\ln n-\gamma)-\frac{1}{2}\right)$, 并且仅用 stolz 公式就能证明存在一列 $c_1,\cdots,c_k$ 使得

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_k}{n^k}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),n\to\infty.$$

例题 0.7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$.

笔记 这题也可以凑定积分定义是显然的.

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+2}-\sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

□

命题 0.5

设 $\alpha\in(0,1)$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+o\left(n^{1-\alpha}\right).$$

证明 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha\cdot(1-\alpha)n^{-\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

□

0.1.1.2 利用 Stolz 定理求抽象数列极限

例题 0.8 设 $x_1>0,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{4}}x_n$.

证明 归纳易证 x_n 单调递增, 如果 x_n 有界则设 $x_n\leqslant A<\infty$, 代入条件可知 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n}x_n}\geqslant\frac{1}{A\sqrt{n}}$, 从而 $x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A\sqrt{n}}$. 而这个不等式右边发散, 故 x_n 也发散, 矛盾. 所以 x_n 单调递增趋于无穷, 下面用 Stolz 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\left(2x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=2\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right)=4.$$

因此所求的极限是 2.

□

注

1. 直接用 stolz 会做不出来:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\frac{1}{x_n\sqrt{n}}}{n^{-\frac{3}{4}}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{4}}}{x_n}.$$

设 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}}=A$, 则由上式可得 $A=\frac{4}{A}$, 解得 $A=2$.
但是注意我们事先并没有论证上式最后一个极限存在, 所以不满足 Stolz 定理的条件, 这导致前面的等号都不一定成立. 因此不可以 "解方程" 得到所求极限为 2.

2. **上述证明中最后一步求原式平方的极限而不求其他次方的极限的原因:** 我们也可以待定系数自己探索出数

列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n\sqrt{n}}\right)^a-x_n^a}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\left(\left(1+\frac{1}{x_n^2\sqrt{n}}\right)^a-1\right)}{bn^{b-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^a\frac{a}{x_n^2\sqrt{n}}}{bn^{b-1}}=\frac{a}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac{1}{2}}}.$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数, 因此令 $a=2,b=\dfrac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^a}{n^b}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{\sqrt{n}}=\dfrac{a}{b}=4$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{\sqrt{n}}$ 即可.

类似题目的最后一步求的极限式都是通过这种待定系数的方式得到的, 并不是靠猜.

例题 0.9 设 $0<x_0<y_0<\dfrac{\pi}{2}$, $x_{n+1}=\sin x_n$, $y_{n+1}=\sin y_n\ (n\geqslant 0)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

证明 因为 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n\ (n\geqslant 0)$, 所以数列 $\{x_n\}$ 严格递减有下界. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $\sin a=a$, 于是 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

另外, 由 $0<x_0<y_0<\dfrac{\pi}{2}$ 可以推得 $0<x_n<y_n<\dfrac{\pi}{2}\ (n\geqslant 0)$. 取正整数 ℓ 使得 $y_\ell<x_0$, 则 $y_\ell<x_0<y_0$, 从而对任意的正整数 n 有

$$y_{n+\ell}<x_n<y_n$$

进而

$$\frac{y_{n+\ell}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<1$$

注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_{n+\ell}}{y_n}=1$, 由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

□

注 事实上, 通过待定系数, 利用 Stolz 公式做形式计算可以得到 x_n 的阶. 待定 $\alpha,\beta>0$, 由 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^\beta x_n^\alpha&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{\frac{1}{x_n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta n^{\beta-1}}{\frac{1}{\sin^\alpha x_n}-\frac{1}{x_n^\alpha}}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^\alpha\sin^\alpha x_n}{x_n^\alpha-\sin^\alpha x_n}=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{x_n^\alpha-\left(x_n-\frac{1}{6}x_n^3+o\left(x_n^3\right)\right)^\alpha}\\&=\beta\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}x_n^{2\alpha}}{\mathrm{C}_\alpha^1x_n^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{6}x_n^3+o\left(x_n^{\alpha+2}\right)}=\frac{6\beta}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta-1}}{x_n^{2-\alpha}+o\left(x_n^{2-\alpha}\right)}.\end{aligned}$$

于是取 $\alpha=2,\beta=1$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=\dfrac{6\cdot 1}{2}=3$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}ny_n^2=3$.. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}y_n=\sqrt{3}$.

例题 0.10 设 $k\geqslant 2, a_0>0, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

笔记 这题很容易能猜出要先对原极限开 k 次方再用 Stolz 定理求解.

实际上, 我们也可以同例题 0.8一样, 待定系数自己探索出数列的阶并算出这样的结果, 待定 $a,b>0$, 则由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n+a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{a(k+1)}-a_n^{a(k+1)}}{bkn^{bk-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\left[\left(1+a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{a(k+1)}-1\right]}{bkn^{bk-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)}\frac{\frac{1}{k}+1}{a_n^{\frac{1}{k}+1}}}{bkn^{bk-1}}=\frac{k+1}{bk^2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{a(k+1)-\frac{k+1}{k}}}{n^{bk-1}}.\end{aligned}$$

我们希望上式最后一个极限能够直接算出具体的数值, 因此令 $a=b=\dfrac{1}{k}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{a(k+1)}}{n^{bk}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\dfrac{k+1}{\frac{1}{k}k^2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{\frac{k+1}{k}-\frac{k+1}{k}}}{n^{\frac{k}{k}-1}}=\dfrac{k+1}{k}$. 故实际书写中我们只需要利用 Stolz 定理求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}$ 即可.

证明 归纳易证 a_n 单调递增, 假设 a_n 有界, 则由单调有界定理可知,a_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A<\infty$. 则由递推条件可

得,$A = A + \frac{1}{\sqrt[k]{A}}$, 无解, 矛盾. 于是 a_n 单调递增且无上界, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 根据 Stolz 公式有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}}\right)^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + x^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k}\right) x^{-(1+\frac{1}{k})} = 1 + \frac{1}{k}$$

因此所求极限是 $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

□

注 如果题目没给出需要求的极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$, 而是问求 a_n 的渐近展开式 (只展开一项), 那么我们就需要待定系数自己探索 a_n 的阶. 待定 $\alpha > 0$, 由二项式定理得到

$$a_{n+1}^{\alpha} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^{\alpha} = a_n^{\alpha} + \alpha a_n^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}} + o\left(a_n^{\alpha-1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^{\alpha} \approx a_n^{\alpha} + \alpha a_n^{\alpha-1-\frac{1}{k}} \Rightarrow a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} \approx \alpha a_n^{\alpha-1-\frac{1}{k}}.$$

从而令 $\alpha = 1 + \frac{1}{k}$, 则

$$a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} = a_{n+1}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{k+1}^{\alpha} - a_k^{\alpha}\right) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k^{\alpha-1-\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha n = \frac{k+1}{k} n.$$

这样就能写出 a_n 渐近展开式的第一项, 即 $a_n = \left(\frac{kn}{k+1}\right)^{1+\frac{1}{k}} + o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$.

例题 0.11 设 k 为正整数, 正数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k) = 1$, 证明: $\lim_{n\to\infty} n x_n^{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

证明 设 $S_n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, 则 S_n 单调递增. 如果 S_n 有界, 则 x_n 趋于零,$x_n S_n \to 0$, 这与已知条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件可知 x_n 趋于零. 注意到

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} S_{n+1} S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{x_{n+1}}{S_{n+1}}} = 1.$$

下面运用等价无穷小替换和 Stolz 公式来求极限:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n x_n^{k+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n x_n^{k+1} S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_{n+1}^{k+1} - S_n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(S_{n+1} - S_n)(S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}^k (S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \cdots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x_{n+1} S_{n+1})^k + (x_{n+1} S_{n+1})^{k-1} (x_{n+1} S_n) + \cdots + (x_{n+1} S_{n+1})(x_{n+1} S_n)^{k-1} + (x_{n+1} S_n)^k} \\
&= \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

例题 0.12 设 $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, 计算 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} a_n$.

解 因为 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}$ 单调递增, 故由单调有界定理可知,$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}$ 的极限要么为有限数, 要么为 $+\infty$. 设 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = c < \infty$, 则由级数收敛知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 于是 $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0 \neq 1$ 矛盾! 故 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = +\infty$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = 0.$$

并且由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ 可知 $a_n \sim \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}, n \to \infty$. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1\right]
\end{aligned}$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 a_n = 0$, 因此由 Taylor 公式可知 $\left(\dfrac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1 \sim \dfrac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}, n \to \infty$. 从而上式可化为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \\
&= 3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2\right)^2 \\
&= 3\lim_{n\to\infty} \left[a_{n+1}^2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^2 - 2a_{n+1}^4 \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6\right] \\
&= 3 + 0 + 0 = 3.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{na_n^3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

□

例题 0.13

1. 设 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \cdots, x_1 > 0$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(nx_n - 2)}{\ln n}$.
2. 设 $x_{n+1} = \sin x_n, n = 1, 2, \cdots, x_1 \in (0, \pi)$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}(1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n)$.
3. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}, n = 1, 2, \cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$.

解

1. 由 $\ln(1+x) \leqslant x, \forall x \in \mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1} \leqslant x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 并且 $x_1 > 0$, 假设 $x_n > 0$, 则 $x_{n+1} = \ln(1+x_n) > 0$. 从而由数学归纳法, 可知 $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是由单调有界定理, 可知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geqslant 0$. 对 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ 两边同时令 $n \to \infty$, 可得
$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + x_n) = \ln(1 + a).$$
故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 进而, 由 Stolz 定理可得
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(1 + x_n)} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$. 即 $x_n \sim \dfrac{2}{n}, n\to\infty$.

因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n\left(n-\frac{2}{x_n}\right)}{\ln n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{x_n}}{\ln n}\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{x_{n+1}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}}\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x_n}-\frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{\ln(1+x)}}{x}\\
&= 4\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\ln(1+x)-2x}{x^2\ln(1+x)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-2x}{x^3}\\
&= 4\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到 x_n 在 $n\to\infty$ 时的渐进估计:

$$\begin{aligned}
\frac{n(nx_n-2)}{\ln n} = \frac{2}{3}+o(1) &\Rightarrow nx_n-2 = \frac{2\ln n}{3n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\\
&\Rightarrow x_n = \frac{2}{n}+\frac{2\ln n}{3n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n\to\infty.
\end{aligned}$$

2. 由 $\sin x \leqslant x, \forall x\in\mathbb{R}$ 可知 $x_{n+1}\leqslant x_n, \forall n\in\mathbb{N}$. 又由于 $0<x_1<\pi$ 及 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$, 故归纳可得 $0\leqslant x_n\leqslant 1, \forall n\geqslant 2$. 因此 $\{x_n\}$ 极限存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a<\infty$. 从而对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时令 $n\to\infty$ 可得

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sin x_n = \sin a.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$. 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{3}{nx_n^2} &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\right) = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}\right)\\
&= 3\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}{x^4}\\
&= 3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4} = 1.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 3$. 即 $x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}, n\to\infty$. 进而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right) &\xlongequal{\text{平方差公式/有理化}} \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{n}{3}x_n^2\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^2\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}}{\ln n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}}\\
&= \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}}{x^2} = \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x-\frac{1}{3}x^2\sin^2 x}{x^4\sin^2 x}\\
&= \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2-\frac{1}{3}x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^2}{x^6}
\end{aligned}$$

$$=\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^6}{36}-\frac{x^6}{60}+\frac{x^6}{9}+o\left(x^6\right)}{x^6}=\frac{3}{10}.$$

(最后几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出 $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+o\left(x^2\right)$, 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}\geqslant x_n,\forall n\in\mathbb{N}$. 又 $x_1=1>0$, 故归纳可得 $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 由单调有界定理可知数列 $\{x_n\}$ 的极限要么是 $+\infty$, 要么是有限数. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<\infty$, 则对 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$ 两边同时令 $n\to\infty$, 可得 $a=a+\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}=0$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 于是由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{n+1-n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2\right)}$$

$$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n^2}\right)}=\sqrt{2}.$$

因此 $x_n\sim\sqrt{2n},n\to\infty$. 从而 $x_n+\sqrt{2n}\sim 2\sqrt{2n},n\to\infty$. 再结合 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}\xlongequal{\text{平方差公式/有理化}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{(x_n+\sqrt{2n})\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n^2-2n)}{2\sqrt{2n}\ln n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-2n}{\ln n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2-2}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-x_n^2-2}{\frac{2}{x_n^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.14 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^s$ 的敛散性, 其中 $v_1=\sin x>0,v_{n+1}=\sin v_n(n=1,2,\cdots)$.

证明 由条件可知 $v_{n+1}=\sin v_n\leqslant v_n,\quad\forall n\in\mathbb{N}$. 故 $\{v_n\}$ 递减且有下界 0. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=a\in[0,+\infty)$, 从而对 $v_{n+1}=\sin v_n$ 两边取极限得

$$a=\sin a\Longrightarrow a=0.$$

由 Stolz 公式得

$$\lim_{n\to\infty}nv_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{v_{n+1}^2}-\frac{1}{v_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^2v_{n+1}^2}{v_n^2-v_{n+1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^2\sin^2 v_n}{v_n^2-\sin^2 v_n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}=3.$$

故

$$v_n^2\sim\frac{3}{n}\Longrightarrow v_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}},\quad n\to\infty.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{s}{2}}$ 当且仅当 $s>2$ 时收敛,$s\leqslant 2$ 时发散. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^s$ 当且仅当 $s>2$ 时收敛,$s\leqslant 2$ 时发散.

□

例题 0.15 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n}, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$.

解 由于 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{S_n}, \forall n\in\mathbb{N}$, 并且 $a_1>0$, 故由数学归纳法可知 $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. 又 $a_2=a_1+a_1>a_1$, 再根据递推式, 可以归纳得到数列 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此, 数列 $\{a_n\}$ 要么 $\lim_{n\to\infty}a_n=a<\infty$, 要么 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由条件可知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{1}{na_1}=\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}$. 从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1\geqslant\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=+\infty$, 故 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 于是由 Stolz 定理, 可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}n(a_{n+1}^2-a_n^2)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(a_n+\frac{1}{S_n}\right)^2-a_n^2\right]=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right).\end{aligned}$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^2}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right].$$

由递推公式, 可得对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}1=n+1-n\leqslant n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}&=n+1-\frac{na_n}{a_n+\frac{1}{S_n}}=1+\frac{\frac{n}{a_nS_n}}{1+\frac{1}{a_nS_n}}\\&=1+\frac{n}{1+a_nS_n}\leqslant1+\frac{n}{1+a_1S_n}=1+\frac{n}{1+S_n}.\end{aligned}$$

又由 Stolz 定理, 可得 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0$. 故由夹逼准则可知, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\left[n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right]=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2}=2+0=2.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}=\sqrt{2}$.

□

0.1.2 函数 Stolz 定理

定理 0.3 (函数 Stolz 定理)

设 $T>0, f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是内闭有界函数.

(1) 设 $g(x+T)>g(x)$, 若有 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

(2) 设 $0<g(x+T)<g(x)$, 若有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

注 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 利用夹逼准则和数列 Stolz 定理进行证明. 具体可见例题 0.16.

证明 我们仅考虑 $A\in\mathbb{R}$, 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可.

(1) 对任何 $\varepsilon>0$, 由条件知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x+1)-g(x)],\ g(x)>0. \tag{5}$$

于是对 $\forall x>X$, 利用(5)式, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|&=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}+\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\overset{(5)\text{式}}{\leqslant}\varepsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[g(x-k+1)-g(x-k)]}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&=\varepsilon\frac{g(x)-g(x-[x]+X)}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\overset{g>0}{\leqslant}\varepsilon+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

于是利用 f 在 $[X,X+1]$ 有界及 $X\leqslant x-[x]+X<X+1$, 我们有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon,$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

这就完成了证明.

(2) 任何 $\varepsilon>0$, 由条件可知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon[g(x)-g(x+1)]. \tag{6}$$

于是对 $\forall x>X,\forall n\in\mathbb{N}$, 利用(6)可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|&=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+k-1)-f(x+k)]+f(x+n)}{g(x)}\right|\\&\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x+k-1)-f(x+k)|}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{n}[g(x+k-1)-g(x+k)]}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}$$
$$=\varepsilon \frac{g(x)-g(x+n)}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}$$
$$\leqslant \varepsilon+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}.$$

再利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x+n)|}{g(x)}=0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\varepsilon, \forall x>X.$$

从而结论得证.

□

例题 0.16

(1) 设 $\alpha>-1$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t}{\ln x}$.

(3) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])\mathrm{d}t$, 这里 $[\cdot]$ 表示向下取整函数.

笔记 虽然这个几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见下述证明.

注 第 (1) 题如果直接洛必达得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|\sin x|}{\alpha+1}\text{不存在,}$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

证明

(1) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(x+\pi)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}$$
$$\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{\pi(\alpha+1)x^\alpha},$$

其中 $x\leqslant\theta_x\leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x\sim x, x\to+\infty$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta_x^\alpha\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{\pi(\alpha+1)x^\alpha}=\frac{1}{\pi(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\text{定理??}}\frac{1}{\pi(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha|\sin t|\mathrm{d}t}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}}\leqslant\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|\mathrm{d}t}{(n\pi)^{\alpha+1}}, \forall x\in[0,+\infty). \tag{7}$$

又由数列 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n\pi)^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}$$
$$\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(n\pi)^\alpha\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \tag{8}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{[(n+1)\pi]^{\alpha+1}}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t^\alpha|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}$$

$$\xlongequal[\text{Lagrange 中值定理}]{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(n\pi)^{\alpha} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\, \mathrm{d}t}{(\alpha+1)\, n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}. \tag{9}$$

又因为 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi, \forall x \in (0,+\infty)$, 所以 $n \to +\infty$ 等价于 $x \to +\infty$. 于是利用(7)(8)(9)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^{\alpha} |\sin t| \mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^x t^{\alpha} |\sin t| \mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 直接使用函数 Stolz 定理:由函数 Stolz 定理、Lagrange 中值定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln(x+\pi) - \ln x} \xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\frac{\pi}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \frac{1}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} |\sin t|\, \mathrm{d}t \xlongequal{\text{定理??}} \frac{1}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_0^{\pi} |\sin t|\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\theta_x}. \tag{10}$$

其中 $x \leqslant \theta_x \leqslant x+\pi$. 从而 $\theta_x \sim x, x \to +\infty$. 再结合(10)式可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\theta_x} = \frac{2}{\pi}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x \in (0,+\infty)$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$. 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln((n+1)\pi)} \leqslant \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln x} \leqslant \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln(n\pi)}, \forall x > 0. \tag{11}$$

又由数列 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln(n\pi)} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln(n\pi) - \ln((n-1)\pi)}$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \mathrm{d}t}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}, \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln((n+1)\pi)} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln((n+2)\pi) - \ln((n+1)\pi)}$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \mathrm{d}t}{\ln(1+\frac{1}{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}. \tag{13}$$

又因为 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi, \forall x \in (0,+\infty)$, 所以 $n \to +\infty$ 等价于 $x \to +\infty$. 于是利用(11)(12)(13)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t}{\ln x} = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 直接使用函数 Stolz 定理:注意到 $t-[t]$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的非负函数, 故由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t-[t]) \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x+1} (t-[t]) \mathrm{d}t - \int_0^x (t-[t]) \mathrm{d}t}{x+1-x} = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} (t-[t]) \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} (t-[t]) \mathrm{d}t \xlongequal{\text{定理??}} \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 (t-[t]) \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

不直接使用函数 Stolz 定理(考试中的书写):对 $\forall x \in (0,+\infty)$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leqslant x \leqslant n+1$. 故

$$\frac{\int_0^n (t-[t]) \mathrm{d}t}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \int_0^x (t-[t]) \mathrm{d}t \leqslant \frac{\int_0^{n+1} (t-[t]) \mathrm{d}t}{n}, \forall x > 0. \tag{14}$$

又由数列 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n+1} (t-[t]) \mathrm{d}t}{n} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} (t-[t]) \mathrm{d}t = \int_0^1 (t-[t]) \mathrm{d}t = \int_0^1 t \mathrm{d}t = 1, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^n (t-[t]) \mathrm{d}t}{n+1} \xlongequal{\text{Stolz 定理}} \lim_{n\to\infty} \int_{n-1}^{n} (t-[t]) \mathrm{d}t = \int_0^1 (t-[t]) \mathrm{d}t = \int_0^1 t \mathrm{d}t = 1. \tag{16}$$

又因为 $n \leqslant x \leqslant n+1, \forall x \in (0,+\infty)$, 所以 $n \to +\infty$ 等价于 $x \to +\infty$. 于是利用(14)(15)(16)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t-[t]) \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t-[t]) \mathrm{d}t = 1.$$

□

例题 0.17 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上内闭黎曼可积且周期为 $T>0$ 的函数, 计算

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\,\mathrm{d}x\right),$$

其中 $\displaystyle\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\lambda\in(0,+\infty)$ 收敛.

注 因为 $x=0$ 是 $\displaystyle\int_0^T\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的奇点, 所以不能直接用 Riemann 引理计算.(这里也难以实现去奇点再使用 Riemann 引理的操作)

解 由函数 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)&=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^{\lambda T}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\int_{\lambda T}^{(\lambda+1)T}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\int_0^T\frac{\varphi(x+\lambda T)}{x+\lambda T}\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^T\frac{\lambda}{x+\lambda T}\,\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\left(\int_0^T\frac{\lambda}{x+\lambda T}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\int_0^T\frac{x}{T\,(x+\lambda T)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\int_0^T\frac{x}{\lambda T^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{T^2}\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\frac{1}{\lambda}\int_0^T x\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^T\frac{\lambda}{x+\lambda T}\,\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

□