0.1 求和法

例题 0.1 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}.$$

解 由 *Vieta* 定理可知,$x_1+x_2+x_3=0$. 因此, 我们有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{r_i+r_1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=0.$$

□

例题 0.2 设 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{11} & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n}\\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{21} & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n1} & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix} (n-1)(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n}\\ (n-1)(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{12} & \cdots & (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})-a_{1n}\\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{22} & \cdots & (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})-a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{n2} & \cdots & (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)j_1+j_i}(n-1)\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}.$$

□

结论 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

例题 0.3 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix}n-1&1&\cdots&1&1\\n-1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&1&\cdots&0&1\\n-1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\\0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

□

注 因为 $|\boldsymbol{A}|$ 除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&-1&0\\1&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{命题1.2}}-\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例题 0.4 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}.$$

笔记 既可以将 $|\boldsymbol{A}|$ 看作命题??的应用, 利用命题??的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.

也可以利用求和法将 $|\boldsymbol{A}|$ 化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题}??} (a_1+b)\,b^{n-1}-\sum_{i=2}^{n} b^{n-2}a_i\,(-b)=b^{n-1}\left[(a_1+b)+\sum_{i=2}^{n} a_i\right]=\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)b^{n-1}.$$

解法二:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-a_i\cdot j_1+j_i} (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)b^{n-1}.$$

□

例题 0.5 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

笔记 求和法的经典应用.

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{j_i+j_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1+r_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-j_1+j_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2}(-n)^{n-2} = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

□