0.1 Schur 定理

回顾 Schur 定理.

命题 0.1

设 A 是 n 阶实矩阵, 虚数 $a+bi$ 是 A 的一个特征值,$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i}$ 是对应的特征向量, 其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是实列向量. 求证:$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 必线性无关. 若 A 是正规矩阵, 则 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 相互正交且长度相同（取实列向量空间的标准内积）.

证明 由假设

$$A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v})+(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u})\mathrm{i}. \tag{1}$$

假设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u}$, 则 $(1+k\mathrm{i})A\boldsymbol{u}=(1+k\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{u}$, 于是 $A\boldsymbol{u}=(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{u}$, 由此可得 $A\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u},b\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, 这与 $b\neq 0$ 且 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ 相矛盾.

若 A 是正规矩阵, 在(1)式中比较实部和虚部得到

$$A\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\quad A\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u}.$$

因为 A 正规, 故由命题**??**可知,$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i}$ 也是 A' 的属于特征值 $a-b\mathrm{i}$ 的特征向量, 即

$$A'(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a-b\mathrm{i})(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\mathrm{i})=(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})+(a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u})\mathrm{i}.$$

比较实部和虚部得到

$$A'\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v},\quad A'\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u}.$$

又 $(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},A'\boldsymbol{u}),(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A'\boldsymbol{v})$, 将 $A\boldsymbol{u},A'\boldsymbol{u}$ 及 $A'\boldsymbol{v}$ 代入得到

$$(a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}),\quad (a\boldsymbol{u}-b\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u}).$$

由此可得 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$. □

命题 0.2

证明:n 阶实方阵 A 必正交相似于下列分块上三角矩阵:

$$C=\begin{pmatrix} A_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & c_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_k \end{pmatrix}$$

其中 $A_i(1\leq i\leq r)$ 是二阶实矩阵且 A_i 的特征值具有 $a_i\pm b_i\mathrm{i}(b_i\neq 0)$ 的形状,$c_j(1\leq j\leq k)$ 是实数.

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=0$ 时表示归纳过程已结束, 当 $n=1$ 时结论显然成立. 现设对阶小于 n 的矩阵结论成立, 下分两种情况对 n 阶矩阵 A 进行讨论.

首先, 假设 A 有实特征值 λ. 因为 A 和 A' 有相同的特征值, 故 λ 也是 A' 的特征值. 将 A 看成是 n 维实列向量空间 $\mathbb{R}^n$（取标准内积）上的线性变换, 显然 A' 是 A 的伴随. 设 $\boldsymbol{e}_n$ 是 A' 的属于特征值 λ 的单位特征向量, 则 $L(\boldsymbol{e}_n)^{\perp}$ 是 A 的不变子空间. 将 A 限制在 $L(\boldsymbol{e}_n)^{\perp}$ 上, 由归纳假设, 存在 $L(\boldsymbol{e}_n)^{\perp}$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$, 使得线性变换 A 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵. 于是在标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下, 线性变换 A 的表示矩阵就是要求的矩阵 C. 因为线性变换 A' 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 C', 故由 $A'\boldsymbol{e}_n=\lambda\boldsymbol{e}_n$ 可知 $\lambda=c_k$.

其次, 假设 A 没有实特征值, 并设 $a+b\mathrm{i}$ 是 A 的虚特征值. 因为 A 和 A' 有相同的特征值, 故 $a+b\mathrm{i}$ 也是 A' 的特征值. 假设 A' 的属于特征值 $a+b\mathrm{i}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是实列向量, 则有

$$A'(\alpha+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})(\alpha+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}).$$

比较实部和虚部得到

$$\mathcal{A}'\boldsymbol{\alpha} = a\boldsymbol{\alpha} - b\boldsymbol{\beta}, \quad \mathcal{A}'\boldsymbol{\beta} = b\boldsymbol{\alpha} + a\boldsymbol{\beta}.$$

由例 9.86 可知,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 必线性无关. 设 $U = L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则上式表明 U 是线性变换 $\mathcal{A}'$ 的不变子空间, 于是 $U^\perp$ 是 $\mathcal{A}'$ 的伴随 $\mathcal{A}$ 的不变子空间. 注意到 $\dim U^\perp = n-2$, 故由归纳假设, 存在 $U^\perp$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-2}$, 使得线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_{r-1} \end{pmatrix}.$$

在 U 中选取一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n$, 则在标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下, 线性变换 $\mathcal{A}$ 的表示矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & A_{r-1} & \\ & & & A_r \end{pmatrix}.$$

由于线性变换 $\mathcal{A}'$ 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 D', 故 A_r 是 $\mathcal{A}'$ 在 U 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n$ 下的表示矩阵. 又 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{A}'$ 在 U 的基 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 下的表示矩阵, 于是 A_r 相似于 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 从而它的特征值也为 $a \pm b\mathrm{i}$. □

命题 0.3

设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是实数, 求证:A 正交相似于上三角矩阵.

证明 这是命题 0.2的直接推论. 另外, 也可由命题??和命题??的实版本, 采用完全类似于命题??的讨论得到. □

命题 0.4

设 A,B 是实方阵且分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 是实正规矩阵, 求证:$C = O$ 且 A,B 也是正规矩阵.

证明 由已知

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

从而 $AA' + CC' = A'A$. 由于 $\mathrm{tr}(AA' + CC') = \mathrm{tr}(A'A) = \mathrm{tr}(AA')$, 故可得 $\mathrm{tr}(CC') = 0$, 再由 C 是实矩阵可推出 $C = O$, 于是 $AA' = A'A, BB' = B'B$. □

命题 0.5

设 A 是 n 阶实正规矩阵, 求证: 存在正交矩阵 P, 使得

$$P'AP = \mathrm{diag}\{A_1,\cdots,A_r,c_{2r+1},\cdots,c_n\},$$

其中 $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ $(1 \le i \le r)$ 是二阶实矩阵,$c_j (2r+1 \le j \le n)$ 是实数.

证明 由命题 0.2,A 正交相似于命题 0.2中的分块上三角矩阵, 再反复用命题 0.4的结论可知这是个分块对角矩阵. 又因为每一块都是正规矩阵, 故或是二阶正规矩阵 A_i, 或是实数 c_j(一阶矩阵). 对于二阶正规矩阵的情形, 由命题 0.1的证明过程可知, 若设 A_i 的特征值为 $a_i + b_i\mathrm{i}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\mathrm{i}$, 令 $P_i = (\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|})$, 则 P_i 为二阶正交矩阵, 且 $P_i'A_iP_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$. □