

## 0.1 矩阵空间上的经典线性映射

### 定理 0.1 (AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致)

设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , 则  $AB$  和  $BA$  的非 0 Jordan 完全一致, 即  $AB$  和  $BA$  的非零特征值对应的 Jordan 块的形状和数量完全一样.

♡

**证明** 考虑  $PAQQ^{-1}BP^{-1}$ ,  $Q^{-1}BP^{-1}PAQ$  可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}, B_3 \in \mathbb{C}^{(n-r) \times r},$$

这里  $B$  的分块和  $A$  对应. 于是直接计算有

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

从 (1) 可以看到  $AB, BA$  非 0 特征值都集中在  $B_1$  上, 所以非 0 特征值完全一致. 设  $\lambda \neq 0$  是  $AB, BA$  特征值. 则回忆定理??, 决定  $C$  的 Jordan 块分布, 我们知道只需决定  $(\lambda E - C)^k, k \in \mathbb{N}_0$  的秩即可. 于是对每个  $k \in \mathbb{N}_0$ , 我们有

$$(\lambda E_m - AB)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, (\lambda E_n - BA)^k = \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

作初等变换

$$\begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & * \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{m-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\lambda E_n - B_1)^k & 0 \\ * & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda E_r - B_1)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E_{n-r} \end{pmatrix},$$

于是我们证明了

$$r((\lambda E_m - AB)^k) + n = r((\lambda E_n - BA)^k) + m, \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$AB$  和  $BA$  的主对角元为  $\lambda_j (\neq 0)$  的 Jordan 块中  $k$  阶 Jordan 块的个数分别记为  $N_j(k)$  和  $M_j(k)$ , 于是由定理??可知

$$\begin{aligned} N_j(k) &= r((\lambda E_m - AB)^{k+1}) + r((\lambda E_m - AB)^{k-1}) - 2r((\lambda E_m - AB)^k) \\ &= r((\lambda E_n - BA)^{k+1}) + m - n + r((\lambda E_n - BA)^{k-1}) + m - n - 2r((\lambda E_n - BA)^k) - 2(m - n) \\ &= r((\lambda E_n - BA)^{k+1}) + r((\lambda E_n - BA)^{k-1}) - 2r((\lambda E_n - BA)^k), \end{aligned}$$

$$M_j(k) = r((\lambda E_n - BA)^{k+1}) + r((\lambda E_n - BA)^{k-1}) - 2r((\lambda E_n - BA)^k).$$

故  $N_j(k) = M_j(k)$ . 这就证明了  $AB$  和  $BA$  的非 0 Jordan 完全一致. □

### 推论 0.1 ( $E + MN$ 和 $E + NM$ 秩相同)

设  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 则  $E + MN$  和  $E + NM$  有相同的秩.

♡

**证明** 因为  $E + MN$  和  $E + NM$  的秩分别完全由  $MN$  和  $NM$  的特征值  $-1$  的 Jordan 块数决定, 因此由定理 0.1 知结论成立. □

### 推论 0.2

设  $A, B$  都是  $n$  阶复矩阵, 则  $AB \sim BA$  充要条件是

$$r((AB)^i) = r((BA)^i), i = 1, 2, \dots, n-1.$$

♡

**证明** 必要性显然成立. 再证充分性. 由定理 0.1, 只需考虑 0 特征值对应的 Jordan 块的形状和个数. 因此再由定理??可知,  $AB$  和  $BA$  的 0 特征值对应的 Jordan 块的形状和个数完全一致. 于是  $AB \sim BA$ , 故结论成立. □

### 例题 0.1

1. 已知


$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in \mathbb{C}^{3 \times 2}, B \in \mathbb{C}^{2 \times 3},$$

求  $BA$ .

2. 设  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 2}, B \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$  满足

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求  $BA$ .

 **笔记** 此类问题肯定就是通过定理 0.1 来确定.

**注** 与纯量阵相似的矩阵只有纯量阵, 因为  $P^{-1}(kI)P = kI$ .

**证明**

1. 计算得  $AB \sim \text{diag}\{0, 9, 9\}$ . 故  $BA \sim \text{diag}\{9, 9\}$ . 因为与纯量阵相似的矩阵只有纯量阵, 且  $BA \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , 所以  $BA = 9E_2$ .

2. 计算得

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{又 } BA \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \text{ 故 } BA \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 因此 } BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

**例题 0.2** 设  $n$  阶复矩阵  $A, B$  满足  $r(ABA) = r(B)$ , 证明  $AB \sim BA$ .

**证明** 类似定理 0.1 的证明, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}.$$

则

$$r(ABA) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right).$$

于是

$$r(ABA) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right) \geq r\left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}\right) \geq r(B_1),$$

以及

$$r(ABA) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right) \geq r((B_1 \ B_2)) \geq r(B_1).$$

故

$$r\left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}\right) = r(B_1) = r((B_1 \ B_2)).$$

由线性方程组有解的充要条件, 我们知道存在  $X, Y$  使得  $B_2 = B_1 X, B_3 = Y B_1$ , 从而有

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_1 X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{相似初等变换}} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$


$$BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ YB_1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{相似初等变换}} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$


我们证明了  $AB \sim BA$ . □

### 定理 0.2 (Lie 映射经典性质)

给定  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 定义  $l_A: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX - XA$ , 我们有

1.  $A$  所有特征值相同等价  $l_A$  幂零.
2.  $l_A$  可对角化等价于  $A$  可对角化.

 **笔记** 一个处理本题的经典技巧是考虑  $l_A$  在基  $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn}\}$  下的表示矩阵形如  $A \otimes I - I \otimes A^T$ , 但我们引入的考虑自然同构的技巧可以完美且简洁的替代这个方法.

 **笔记** 考虑线性映射  $l: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{n \times n}), A \mapsto l_A$ , 则从证明可以看到

$$\ker l = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A \text{ 是数量矩阵}\}.$$

**证明** 1. **必要性:** 若  $A$  所有特征值相同, 则对  $\lambda \neq 0$ ,

$$l_A X = \lambda X \Leftrightarrow AX = X(\lambda E + A)$$

显然  $A, A + \lambda E$  没有公共特征值, 由命题?? 我们知道  $l_A X = \lambda X$  只有 0 解. 现在  $l_A$  特征值全为 0 知  $l_A$  是幂零矩阵.

**充分性:** 若  $A$  有两个不同特征值  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , 则  $A$  和  $(\lambda_2 - \lambda_1)E + A$  有公共特征值  $\lambda_2$ . 于是由命题??, 存在  $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n} \setminus \{0\}$  使得

$$AX_0 = X_0((\lambda_2 - \lambda_1)E + A).$$

于是  $l_A X_0 = (\lambda_2 - \lambda_1)X_0$ . 这表明  $l_A$  有非 0 特征值, 这就是一个矛盾! 故  $A$  所有特征值相同.

2. **充分性:** 若  $A$  可对角化, 可不妨设  $A$  是对角矩阵, 这是因为设可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得  $P^{-1}AP = \tilde{A}$  为对角矩阵, 那么注意到交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n \times n} & \xrightarrow{l_A} & \mathbb{C}^{n \times n} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{C}^{n \times n} & \xrightarrow{l_{\tilde{A}}} & \mathbb{C}^{n \times n}, \end{array}$$

这里  $\tau(X) = P^{-1}XP, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . 从而

$$\tau \circ l_A(X) = P^{-1}(AX - XA)P = \tilde{A}P^{-1}XP - P^{-1}XP\tilde{A}.$$

$$l_{\tilde{A}} \circ \tau(X) = \tilde{A}P^{-1}XP - P^{-1}XP\tilde{A}.$$

又因为  $\tau$  可逆, 所以  $l_A = \tau^{-1} \circ l_{\tilde{A}} \circ \tau \sim l_{\tilde{A}}$ . 换言之, 在同构  $\tau$  下,  $l_A, l_{\tilde{A}}$  应该 (在相似下) 有相同的线性代数性质, 所以我们可以不妨设  $A$  为对角矩阵. 不妨设

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$$

于是直接计算表明

$$l_A(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

这就证明了  $l_A$  是可对角化的.

**必要性:** 运用 Jordan 分解, 我们知道  $A = B + C, B$  可对角化,  $C$  幂零,  $BC = CB$ , 则  $l_A = l_B + l_C$ . 由充分性知  $l_B$  可对角化, 由第一问知  $l_C$  幂零. 由  $BC = CB$ , 容易验证  $l_C \circ l_B = l_B \circ l_C$ , 于是我们知道  $l_A = l_B + l_C$  这是  $l_A$  的 Jordan 分解. 现在  $l_A = l_A + 0$  也是一个 Jordan 分解, 故由 Jordan 分解的唯一性知  $l_B = l_A, l_C = 0$ . 现在  $CX = XC, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 由命题??(2), 我们知道  $C$  为数量矩阵, 所以结合  $C$  幂零, 我们知道  $C = O$ , 故  $A = B$  可对角化, 这就完成了证明.

□

**例题 0.3**

1. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{k \times p}$ , 考虑  $T_{A,B} : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto AXB$ , 求

$$\dim \operatorname{Ker} T_{A,B}, \dim \operatorname{Im} T_{A,B}.$$

2. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{k \times p}$ , 求  $T_{A,B} : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto AXB$  在基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1k}, E_{21}, \dots, E_{2k}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nk}\}$$

和基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{m1}, \dots, E_{mp}\}$$

下的表示矩阵.

**证明**

1. 考虑等价标准型

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, RBS = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

于是记

$$\widetilde{T_{A,B}} = T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times k}, X \mapsto Q^{-1}XR^{-1}, \tau' : \mathbb{C}^{m \times p} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times p}, X \mapsto PXS$$

就有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n \times k} & \xrightarrow{T_{A,B}} & \mathbb{C}^{m \times p} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau' \\ \mathbb{C}^{n \times k} & \xrightarrow{\widetilde{T_{A,B}}} & \mathbb{C}^{m \times p} \end{array}.$$

容易验证在同构映射  $\tau, \tau'$  下,  $\widetilde{T_{A,B}}$  和  $T_{A,B}$  等价, 从而  $\widetilde{T_{A,B}}$  和  $T_{A,B}$  (在等价下) 有相同的线性代数性质. 故可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是对  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, X_1 \in \mathbb{C}^{r \times s}$ , 我们有

$$T_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_{A,B} = rs,$$

以及

$$T_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{维数公式}} \dim \operatorname{Ker} T_{A,B} = nk - rs.$$

2. 注意到

$$(A \otimes B^T)_{((t-1)p+r, (t'-1)k+r')} = a_{tr} b_{r'r'}, 1 \leq t \leq m, 1 \leq t' \leq n, 1 \leq r \leq k, 1 \leq r' \leq \ell$$


现在表示矩阵  $\widetilde{T_{A,B}}$  的  $((t-1)p+r, (t'-1)k+r')$  元为

$$(T_{A,B}(E_{t'r'}))_{(tr)} = (AE_{t'r'}B)_{(tr)} = a_{tr} b_{r'r'} = (A \otimes B^T)_{((t-1)p+r, (t'-1)k+r')}$$

因此, 我们知道  $\widetilde{T_{A,B}} = A \otimes B^T$ .

□

**例题 0.4** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 证明:  $\varphi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AXA$  可对角化的充要条件是  $A$  可对角化.

 **笔记** 下述证明只考虑了  $J_{n_1}(\lambda_1)$  对应的  $\alpha_i$  和  $J_{n_1}(\lambda_1)$  对应的  $\beta_j^T$  的乘积构成的子空间, 得到特征值  $\lambda_1^2$ . 实际上, 我

们可以类似地考虑  $J_{n_i}(\lambda_i)$  对应的  $\alpha_i$  和  $J_{n_j}(\lambda_j)$  对应的  $\beta_j^T$  的乘积构成的子空间, 这样得到特征值就是  $\lambda_i \lambda_j$ . 这些子空间合起来就是  $A$  对角化的过渡矩阵, 并且  $A$  的所有特征值就是  $\lambda_i \lambda_j$ .

**证明** 因为命题??知  $A \sim A^T$ , 所以存在

$$P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

是可逆矩阵并使得  $P^{-1}AP = Q^{-1}A^TQ$  是相似标准型. 由命题??知  $\alpha_i \beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$  必然线性无关.

当  $A$  可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, A^T \beta_j = \lambda_j \beta_j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

我们有

$$\varphi(\alpha_i \beta_j^T) = A\alpha_i \beta_j^T A = \lambda_i \lambda_j \alpha_i \beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$$

这就证明了  $\varphi$  有  $n^2$  个线性无关的特征向量从而可对角化.

反之, 当  $\varphi$  可对角化, 若  $A$  不可对角化, 设  $P, Q$  可逆, 且

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\ Q^{-1}A^TQ &= \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\ P &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

考虑  $U \triangleq \text{span}\{\alpha_i \beta_j^T : 1 \leq i, j \leq n_1\}$ , 注意到

$$\begin{aligned} A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}) J_{n_1}(\lambda_1), \quad A^T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_1}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_1}) J_{n_1}(\lambda_1). \\ \Rightarrow A\alpha_j &= \alpha_{j-1} + \lambda_1 \alpha_j, \quad A^T \beta_j = \beta_{j-1} + \lambda_1 \beta_j, \quad 2 \leq j \leq n_1. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 \beta_1^T) &= A\alpha_1 \beta_1^T A = \lambda_1^2 \alpha_1 \beta_1^T \\ \varphi(\alpha_1 \beta_j^T) &= A\alpha_1 \beta_j^T A = \lambda_1 \alpha_1 \beta_{j-1}^T + \lambda_1^2 \alpha_1 \beta_j^T, 2 \leq j \leq n_1 \\ \varphi(\alpha_i \beta_1^T) &= A\alpha_i \beta_1^T A = \lambda_1 \alpha_{i-1} \beta_1^T + \lambda_1^2 \alpha_i \beta_1^T, 2 \leq i \leq n_1 \\ \varphi(\alpha_i \beta_j^T) &= A\alpha_i \beta_j^T A = \alpha_{i-1} \beta_{j-1}^T + \lambda_1 \alpha_{i-1} \beta_j^T + \lambda_1 \alpha_i \beta_{j-1}^T + \lambda_1^2 \alpha_i \beta_j^T, 2 \leq i, j \leq n_1 \end{aligned}$$

即  $U$  是  $\varphi$ -不变子空间. 由引理??知  $\varphi|_U$  可对角化. 在基  $\{\alpha_1 \beta_1^T, \alpha_1 \beta_2^T, \dots, \alpha_1 \beta_{n_1}^T, \alpha_2 \beta_1^T, \alpha_2 \beta_2^T, \dots, \alpha_2 \beta_{n_1}^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_1^T, \alpha_{n_1} \beta_2^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_{n_1}^T\}$  下  $\varphi|_U$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1^2$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和  $\varphi|_U$  可对角化矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.5** 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\varphi: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX - XB$ . 证明:  $\varphi$  可对角化的充要条件是  $A, B$  可对角化.

**证明** 若  $A, B$  可对角化, 设

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, B^T \beta_i = \mu_i \beta_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, i = 1, 2, \dots, n$$

且  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_i\}_{i=1}^n$  是两组线性无关的向量组. 由命题??知  $\alpha_i \beta_j^T, 1 \leq i, j \leq n$  必然线性无关.

现在

$$\varphi(\alpha_i \beta_j^T) = A\alpha_i \beta_j^T - \alpha_i \beta_j^T B = (\lambda_i - \mu_j) \alpha_i \beta_j^T, i, j = 1, 2, \dots, n$$

即我们证明了  $\varphi$  可对角化且特征值为

$$\lambda_i - \mu_j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

若  $A, B$  有一个不可对角化, 不妨设  $A$  不可对角化. 于是可设可逆矩阵  $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, Q = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1, \\ Q^{-1}B^TQ &= \text{diag}\{J_{m_1}(\mu_1), J_{m_2}(\mu_2), \dots, J_{m_t}(\mu_t)\}. \end{aligned}$$

设

$$L \triangleq \text{span}\{\alpha_i \beta_j^T : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1\}$$

由命题??知  $\alpha_i \beta_j^T : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1$  是  $L$  的基.

现在

$$\varphi(\alpha_1 \beta_1^T) = A \alpha_1 \beta_1^T - \alpha_1 \beta_1^T B = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 \beta_1^T$$

$$\varphi(\alpha_1 \beta_j^T) = A \alpha_1 \beta_j^T - \alpha_1 \beta_j^T B = -\alpha_1 \beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 \beta_j^T, 2 \leq j \leq m_1$$

$$\varphi(\alpha_i \beta_1^T) = A \alpha_i \beta_1^T - \alpha_i \beta_1^T B = \alpha_{i-1} \beta_1^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_i \beta_1^T, 2 \leq i \leq n_1$$

$$\varphi(\alpha_i \beta_j^T) = A \alpha_i \beta_j^T - \alpha_i \beta_j^T B = \alpha_{i-1} \beta_j^T - \alpha_i \beta_{j-1}^T + (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_i \beta_j^T, 2 \leq i \leq n_1, 2 \leq j \leq m_1$$

现在  $L$  是  $\varphi$ -不变子空间且在基

$$\{\alpha_1 \beta_1^T, \alpha_1 \beta_2^T, \dots, \alpha_1 \beta_{m_1}^T, \alpha_2 \beta_1^T, \alpha_2 \beta_2^T, \dots, \alpha_2 \beta_{m_1}^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_1^T, \alpha_{n_1} \beta_2^T, \dots, \alpha_{n_1} \beta_{m_1}^T\}$$

下  $\varphi|_L$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1 - \mu_1$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即  $\varphi|_L$  不可对角化. 由引理??可知  $\varphi|_L$  不可对角化, 矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.6** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\varphi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto AX$ . 证明:  $\varphi$  可对角化的充要条件是  $A$  可对角化.

**证明 充分性:** 设可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 考虑  $\psi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, X \mapsto PX$ , 则

$$\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(X) = P^{-1} A P X, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

故不妨设  $A$  为相似标准型. 因此若

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$$

则  $\varphi(E_{ij}) = \lambda_i E_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ . 在基

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn}\}$$

下的矩阵为对角矩阵.

**必要性:** 设可逆矩阵  $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$P^{-1} A P = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)\}, n_1 > 1$$

设

$$L \triangleq \text{span}\{\alpha_i \alpha_j^T : 1 \leq i, j \leq n_1\}$$

我们有

$$A \alpha_1 \alpha_j^T = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_j^T, 1 \leq j \leq n_1$$

$$A \alpha_i \alpha_j^T = \alpha_{i-1} \alpha_j^T + \lambda_i \alpha_i \alpha_j^T, 2 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_1$$

即  $L$  是  $\varphi$  不变子空间. 由引理??知  $\varphi|_L$  可对角化. 由命题??知  $\alpha_i \alpha_j^T, 1 \leq i, j \leq n_1$  必然线性无关.

在基  $\{\alpha_1 \alpha_1^T, \alpha_1 \alpha_2^T, \dots, \alpha_1 \alpha_{n_1}^T, \alpha_2 \alpha_1^T, \alpha_2 \alpha_2^T, \dots, \alpha_2 \alpha_{n_1}^T, \dots, \alpha_{n_1} \alpha_1^T, \alpha_{n_1} \alpha_2^T, \dots, \alpha_{n_1} \alpha_{n_1}^T\}$  下  $\varphi|_L$  的表示矩阵形如对角线为  $\lambda_1$  的上三角矩阵且不是对角矩阵, 这就和  $\varphi|_L$  可对角化矛盾! 我们完成了证明.  $\square$