

0.1 摄动法

摄动法的原理

(1) 证明矩阵问题对非异阵成立.

(2) 对任意的 n 阶矩阵 A , 由上例可知, 存在一列有理数 $t_k \rightarrow 0$, 使得 $t_k I_n + A$ 都是非异阵. 验证 $t_k I_n + A$ 仍满足矩阵问题的条件, 从而该问题对 $t_k I_n + A$ 成立.

(3) 若矩阵问题关于 t_k 连续, 则可取极限令 $t_k \rightarrow 0$, 从而得到该问题对一般的矩阵 A 也成立.

注

1. 矩阵问题对非异阵成立以及矩阵问题关于 t_k 连续, 这两个要求缺一不可, 否则将不能使用摄动法进行证明.
2. 验证摄动矩阵仍然满足矩阵问题的条件是必要的. 例如, 若矩阵问题中有 $AB = -BA$ 这一条, 但 $(t_k I_n + A)B \neq -B(t_k I_n + A)$, 因此便不能使用摄动法.
3. 根据实际问题的需要, 也可以使用其他非异阵来替代 I_n 对 A 进行摄动.



笔记 关于伴随矩阵的问题中经常会使用摄动法.

命题 0.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 求证: 存在一个正数 a , 使得对任意的 $0 < t < a$, 矩阵 $tI_n + A$ 都是非异阵.



笔记 这个命题告诉我们对任意的 n 阶矩阵 A , 经过微小的一维摄动之后, $tI_n + A$ 总能成为一个非异阵.

证明 通过简单的计算可得

$$|tI_n + A| = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n,$$

这是一个关于未定元 t 的 n 次多项式. 由多项式根的有限性可知上述多项式至多只有 n 个不同的根. 若上述多项式的根都是零, 则不妨取 $a = 1$; 若上述多项式有非零根, 则令 a 为 $|tI_n + A|$ 所有非零根的模长的最小值. 因此对任意的 $0 < t_0 < a$, t_0 都不是 $|tI_n + A|$ 的根, 即 $|t_0 I_n + A| \neq 0$, 从而 $t_0 I_n + A$ 是非异阵. \square

例题 0.1 设 A, B, C, D 是 n 阶矩阵且 $AC = CA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$



笔记 本题也给出了例题??的摄动法证明.

证明 若 A 为非异阵, 则由降阶公式, 再结合条件 $AC = CA$ 可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

对于一般的方阵 A , 由命题 0.1 可知, 存在一列有理数 $t_k \rightarrow 0$, 使得 $t_k I_n + A$ 是非异阵, 并且条件 $(t_k I_n + A)C = C(t_k I_n + A)$ 仍然成立. 于是

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(t_k I_n + A)D - CB|.$$

上式两边都是行列式, 其值都是 t_k 的多项式, 从而都关于 t_k 连续. 上式两边同时令 $t_k \rightarrow 0$, 即有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$ 成立. \square