0.1 一般可测函数的积分

0.1.1 积分的定义与初等性质

定义 0.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数．若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x, \quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分; 当上式右端两个积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**. 在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

♣

定理 0.1

若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上可积等价于 $|f(x)|$ 在 E 上可积, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由非负可测函数积分的线性性质可知

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E \left[f^+(x) + f^-(x)\right]\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立, 故知在 $f(x)$ 可测的条件下,$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.2 (积分的基本性质)

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.

(2) 若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 若 $E \in \mathscr{M}$, 且 $f(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,$g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \leqslant g(x)$,a.e. $x \in E$($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**控制函数**), 则 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.

(5) 若 $f(x) \leqslant g(x)$,a.e. $x \in E$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(6) (i) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(ii) 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{x \in E : |x| \geqslant N\}$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

♡

注 (3) 反过来并不成立, 例如,$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ -1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$.

证明

(1) 不妨设 $|f(x)| \leqslant M\ (x \in E)$, 由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数, 故有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E M\mathrm{d}x = Mm(E) < +\infty.$$

因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(2) 由 $f \in L(E)$ 及定理 0.1可知, 非负可测函数 $|f(x)|$ 在 E 上也可积. 从而由定理**??**可知,$|f(x)|$ 在 E 上几乎处处有限, 即

$$m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

故 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 因为 $|f(x)| = 0$,a. e.,$x \in E$, 且 $|f(x)|$ 非负可测, 所以由命题**??**可得

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

故 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 由非负可测函数的积分性质 (1) 可知

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(E)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\,\chi_e(x)\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)\,\chi_e(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(e)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(e)$.

(5) 因为 $f(x) \leqslant g(x)$,a.e. $x \in E$, 所以 $f^+(x) \leqslant g^+(x)$,$f^-(x) \geqslant g^-(x)$,a.e. $x \in E$. 由非负可测函数积分的性质 (1) 可知

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+(x)\mathrm{d}x,\quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E g^-(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

故结论成立.

(6) (i) 记 $E_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 则 $\{|f(x)|\chi_{E_N}(x)\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) = 0,\quad x \in \mathbf{R}^n.$$

由此可知

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_N} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{推论??}} \int_{\mathbf{R}^n}\lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(ii) 由 $f \in L(E)$ 及非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\,\chi_{E_N}(x)\right|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\chi_{E_N}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

因此 $f \cdot \chi_{E_N} \in L(\mathbf{R}^n)$. 又 $E_N \subset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 故由非负可测函数的积分性质 (3) 及 (i) 可得

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E\cap E_N} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_{E_N} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant N\}} f(x)\,\chi_{E_N}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

定理 0.3 (积分的线性性质)

若 $f, g \in L(E)$,$C \in \mathbb{R}$, 则

(i) $\displaystyle\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, 进而 $Cf \in L(E)$;

(ii) $f+g\in L(E)$ 且 $\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) 若 $f\in L(E)$,$g(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 则 $f\cdot g\in L(E)$.

注 不妨假定 f,g 都是实值函数 (即处处有限) 的原因:(i) 假设结论对处处有限的函数成立. 若 f 不是处处有限的函数, 则由 $f\in L(E)$ 及可积函数的基本性质 (ii)可知, 令 $E_1=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}$, 则 $m(E_1)=0$, 再令 $E_2=E\backslash E_1$, 则由假设可知

$$\int_{E_2} Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由非负可测函数积分线性性质及定理??(3) 可得

$$\begin{aligned}
\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E (Cf(x))^+\,\mathrm{d}x - \int_E (Cf(x))^-\,\mathrm{d}x\\
&= \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{E_1} (Cf(x))^+\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} (Cf(x))^+\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} (Cf(x))^-\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} (Cf(x))^-\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{E_2} (Cf(x))^+\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} (Cf(x))^-\,\mathrm{d}x \overset{(1)\text{式}}{=} \int_{E_2} Cf(x)\,\mathrm{d}x\\
&= C\int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x = C\int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - C\int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x\\
&= C\left(\int_{E_1} f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

故对一般情况结论也成立.

(ii) 由 (i) 同理可证.

证明 不妨假定 f,g 都是实值函数 (即处处有限).

(i) 由公式

$$f^+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f^-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2} \tag{2}$$

立即可知: 当 $C\geq 0$ 时,$(Cf)^+=Cf^+$,$(Cf)^-=Cf^-$. 根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质, 可得

$$\begin{aligned}
\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E Cf^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E Cf^-(x)\,\mathrm{d}x\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

当 $C=-1$ 时, 由(2)式可知 $(-f)^+=f^-$,$(-f)^-=f^+$. 同理可得

$$\int_E (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $C<0$ 时, 由(2)式可知 $Cf(x)=-|C|f(x)$. 由上述结论可得

$$\begin{aligned}
\int_E Cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E -|C|f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_E |C|f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -|C|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = C\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_E |Cf(x)|\,\mathrm{d}x = |C|\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty, \forall C \in \mathbb{R}.$$

故 $Cf(x) \in L(E)$.

(ii) 首先, 由于有 $|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$, 故可知 $f+g \in L(E)$. 其次, 注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

进而

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f+g)^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为式中每项积分值都是有限的, 所以可移项且得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) 注意到

$$|f(x)\cdot g(x)| \le |f(x)|\cdot \sup_{x\in E}|g(x)|, \quad x \in E.$$

由 g 在 E 上有界, 故 $\sup\limits_{x\in E}|g(x)| \in \mathbb{R}$. 从而由 (i) 可得 $|f(x)|\cdot\sup\limits_{x\in E}|g(x)| \in L(E)$, 于是再由定理 0.2(4)(i)可知 $f\cdot g \in L(E)$.

□

推论 0.1

若 $f \in L(E)$, 且 $f(x) = g(x)$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 这个推论表明: **改变可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.**

证明 令 $E_1 = \{x \in E : f(x) \ne g(x)\}$,$E_2 = E \backslash E_1$,$m(E_1) = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E f^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_{E_1} f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_1} g^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} g^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E g^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

例题 0.1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数, 且有

$$\int_{[0,1]} |f(x)| \ln(1+|f(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则 $f \in L([0,1])$.

证明 为了阐明 $f \in L([0,1])$, 自然想到去寻求可积的控制函数. 题设告诉我们 $|f(x)|\ln(1+|f(x)|)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数, 难道它能控制 $|f(x)|$ 吗? 显然, 这只是在 $\ln(1+|f(x)|) \geqslant 1$ 或 $|f(x)| \geqslant \mathrm{e}-1$ 时才行. 但注意到 $|f(x)| < \mathrm{e}-1$ 时, 由于区间 $[0,1]$ 的测度是有限的, 故常数 $\mathrm{e}-1$ 本身就是控制函数. 也就是说, 可在不同的定义区域寻求不同的控制函数.

为此, 作点集

$$E_1 = \{x \in [0,1] : |f(x)| \leqslant \mathrm{e}\}, \quad E_2 = [0,1] \setminus E_1,$$

则我们有

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}, \quad x \in E_1;$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x)| \ln(1+|f(x)|), \quad x \in E_2.$$

这就是说 $f \in L(E_1)$ 且 $f \in L(E_2)$, 从而

$$f \in L(E_1 \cup E_2) = L([0,1]).$$

□

定理 0.4

设 $f \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (x \in E), \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)\ (n \in \mathbf{N}, x \in E),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $F_n(x) = f(x) - f_n(x) (n \in \mathbf{N}, x \in E)$, 则 $\{F_n(x)\}$ 是 E 上非负渐降收敛于 0 的可积函数列, 从而由非负渐降函数列积分定理可知

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_E F_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

即得所证. □

命题 0.1

设 $g \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbf{N})$. 若 $f_n(x) \geqslant g(x)$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 Fatou 引理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_E \varliminf_{n\to\infty} \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_E \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \right) \\
\Longleftrightarrow &\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow &\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

证毕. □

定理 0.5 (Jensen 不等式)

设 $w(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上的正值可测函数, 且

$$\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

$\varphi(x)$ 是区间 $I = [a, b]$ 上的 (下) 凸函数;$f(x)$ 在 E 上可测, 且值域 $R(f) \subset I$. 若 $fw \in L(E)$, 则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 因为 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上下凸, 所以由定理 6.7可知 $\varphi \in C([a, b])$. 从而由定理**??**可知 $\varphi(f(x))$ 在 E 上也可测.

证明 注意到 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 我们有

$$a = \int_E aw(x)\,\mathrm{d}x \leqslant y_0 = \int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E bw(x)\,\mathrm{d}x = b.$$

故 $y_0 \in [a, b]$.

(i) 设 $y_0 \in (a, b)$, 由 $\varphi(x)$ 之 (下) 凸性可知有

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(y_0) + k(y - y_0), \quad y \in [a, b].$$

(其中由定理 6.7及下凸函数的切线放缩可知 $k = \varphi'_+(y_0)$) 以 $f(x)$ 代 y 得

$$\varphi(f(x)) \geqslant \varphi(y_0) + k(f(x) - y_0), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

在上式两端乘以 $w(x)$, 并在 E 上作积分, 则

$$\begin{aligned}\int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_E \varphi(y_0)w(x)\,\mathrm{d}x + k\int_E (f(x) - y_0)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi(y_0) + k\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - y_0\right) \\ &= \varphi(y_0) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

(ii) 若 $y_0 = b$(或 a), 易知此时有

$$\int_E (b - f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

由非负可测函数积分的性质 (5)(i) 可知 $f(x) = b$,a. e. $x \in E$, 从而

$$\int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \varphi(b)w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b)\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证毕. □

注 Jensen 不等式在 $\mathbf{R}^n$ 上也成立, 只需将区间 I 用凸集代替. 下面是一个特例:

设 $E \subset \mathbf{R}$, 且 $m(E) = 1$,$f(x)$ 在 E 上正值可积, 且记 $A = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\sqrt{1 + A^2} \leqslant \int_E \sqrt{1 + f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + A.$$

实际上, 考查 $\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/2}$, 易知 $\varphi(x)$ 是 (下) 凸函数. 根据 Jensen 不等式 ($w(x) \equiv 1$), 有 $\left(A^2 \leqslant \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + A^2} &\leqslant \left(1 + \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_E (1 + f^2(x))\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant \int_E \sqrt{1 + f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E (1 + f(x))\,\mathrm{d}x = 1 + A.\end{aligned}$$

定理 0.6 (积分对定义域的可数可加性)

设 $E_k \in \mathscr{M}(k=1,2,\cdots)$,$E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 $f \in L(E)$ 以及非负可测函数积分的可数可加性, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{E_k} f^{+}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_k} f^{-}(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_E f^{+}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^{-}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.7 (可积函数几乎处处为零的判别法)

(1) 设 $f(x)$ 为 E 上可测函数, 且 $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0$,a.e. $x \in E$.

(2) 设函数 $f(x) \in L([a,b])$. 若对任意的 $c \in [a,b]$, 有 $\int_{[a,c]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0$,a. e. $x \in [a,b]$.

证明

(1) 记 $E_0 = \{x \in E : |f(x)| > 0\}$, 下面证明 $m(E_0) = 0$. 由于 f 可测, 则 $|f|$ 可测. 令

$$E_n = \left\{ x \in E : |f(x)| \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

则 $\{E_n\}$ 是单调递增的可测集列, 且 $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 由递增可测集列的测度运算可得

$$m(E_0) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = m\left(\lim_{n\to\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

若 $m(E_0) > 0$, 则对 $m(E_0)/2$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$m(E_{n_0}) > m(E_0)/2.$$

注意到, 当 $x \in E_{n_0}$ 时, 有 $|f(x)| \geqslant 1/n_0$. 从而

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_{E_0} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_{n_0}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_{E_{n_0}} \frac{1}{n_0}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n_0} \cdot m(E_{n_0}) \\
&> \frac{m(E_0)}{2n_0} > 0
\end{aligned}$$

矛盾, 故 $m(E_0) = 0$. 因此,$f(x) = 0$,a.e. $x \in E$.

(2) 若结论不成立, 则存在 $E \subset [a,b]$,$m(E) > 0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零. 不妨假定在 E 上 $f(x) > 0$. 由定理**??**, 可作闭集 F,$F \subset E$, 且 $m(F) > 0$, 并令 $G = (a,b) \setminus F$, 则 G 为开集. 于是由开集构造定理可知,$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, 其中 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间. 由积分对定义域的可数可加性, 我们有

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x + \int_F f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 所以

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_{[a_n,b_n]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_F f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \neq 0,$$

从而存在 n_0, 使得

$$\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

又由积分对定义域的可数可加性可知

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,a_{n_0}]\cup[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \Rightarrow \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知

$$\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad \text{或} \quad \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

这与假设矛盾.

□

推论 0.2

设 $f(x)$ 为 E 上非负可测函数, 且 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0, \text{a.e.}\, x \in E$.

证明 由定理 0.7(1)立得. □

命题 0.2

设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L(E)$, 都有 $fg \in L(E)$, 则除一个零测集 Z 外,$g(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的有界函数.

注 比较命题??.

证明 如果结论不成立, 那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : k_i \leqslant |g(x)| < k_{i+1}\}) = m(E_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

现在作函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} g(x)}{i^{1+(1/2)} m(E_i)}, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

因为

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+(1/2)} m(E_i)} m(E_i) < +\infty,\end{aligned}$$

所以 $f \in L^1(E)$, 但我们有

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i^{1+(1/2)} m(E_i)} m(E_i) = +\infty,$$

这说明 $fg \notin L(E)$, 矛盾. □

定理 0.8 (积分的绝对连续性)

若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

♡

证明 不妨假定 $f(x) \geqslant 0$, 否则用 $|f(x)|$ 代替 $f(x)$. 根据简单函数逼近定理可知, 存在非负简单可测函数渐升列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. 再由非负渐降函数列积分定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_E \left(f(x) - \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在可测简单函数 $\varphi(x), 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) (x \in E)$, 使得

$$\int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在设 $\varphi(x) \leqslant M$, 取 $\delta = \varepsilon/(2M)$, 则当 $e \subset E$, 且 $m(e) < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_e f(x)\,\mathrm{d}x - \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + Mm(e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

推论 0.3

设 $f \in L(E) (E \subset \mathbf{R})$, 且

$$0 < A = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则存在 E 中可测子集 e, 使得

$$\int_e f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

♡

证明 设 $E_t = E \cap (-\infty, t), t \in \mathbf{R}$, 并记

$$g(t) = \int_{E_t} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则由积分的绝对连续性可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta t| < \delta$, 由积分对定义域的可数可加性, 就有

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| = \left|\int_{E\cap[t,t+\Delta t)} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{E\cap[t,t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[t,t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这说明 $g \in C(\mathbf{R})$. 因为 $g(x)$ 是递增函数, 且有

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = g(-\infty) = \int_\varnothing f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = g(+\infty) = A,$$

而 $0 < A/3 < A$, 所以根据连续函数介值定理可知, 存在 t_0:$-\infty < t_0 < +\infty$, 使得 $g(t_0) = A/3$:

$$g(t_0) = \int_{E\cap(-\infty,t_0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

令 $e = E \cap (-\infty, t_0)$, 即得所证. □

定理 0.9 (积分变量的平移变换定理)

若 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则对任意的 $y_0 \in \mathbf{R}^n, f(x+y_0) \in L(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

注 $E - \{y_0\} = \{x - y_0 : x \in E\}$ 是向量差集, 不是集合的差.

证明 只需考虑 $f(x) \geqslant 0$ 的情形. 首先看 $f(x)$ 是非负可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

显然有

$$f(x+y_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x+y_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i - \{y_0\}}(x),$$

它仍是非负可测简单函数. 注意到 $E - \{y_0\} = E + \{-y_0\}$, 故由外测度的平移不变性知

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i - \{y_0\}) = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其次, 考虑一般非负可测函数 $f(x)$. 此时根据简单函数逼近定理可知, 存在非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$,$x \in \mathbf{R}^n$. 显然,$\{\varphi_k(x+y_0)\}$ 仍为渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x+y_0) = f(x+y_0), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

从而先前的讨论及 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x+y_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.2 设 $f \in L([0,+\infty))$, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a. e. } x \in \mathbf{R}.$$

证明 因为 $f(x+n) = f(x+1+(n-1))$, 所以只需考查 $[0,1]$ 中的点即可. 为证此, 又只需指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛即可. 应用积分的手段, 由于

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f(x+n)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1]} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{[1,\infty)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 作为 x 的函数是在 $[0,1]$ 上可积的, 因而是几乎处处有限的, 即级数是几乎处处收敛的. □

命题 0.3

设 $I \subset \mathbf{R}$ 是区间,$f \in L(I)$,$a \neq 0$, 记 $J = \{x/a : x \in I\}$,$g(x) = f(ax)(x \in J)$, 则 $g \in L(J)$, 且有

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = |a| \int_J g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 这只是积分变量替换的一个特殊情形.

笔记 对 $f \in L(\mathbf{R}^n)$,$a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 (i) 若 $f(x) = \chi_E(x)$,E 是 I 中的可测集, 则 $a^{-1}E \subset J$. 由于 $\chi_E(ax) = \chi_{a^{-1}E}(x)$, 故有

$$\int_J g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|} m(E) = \frac{1}{|a|} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知当 $f(x)$ 是简单可测函数时, 结论也真.

(ii) 对 $f \in L(I)$, 设简单可测函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\varphi_n(x) \to f(x)(n \to \infty, x \in I)$, 且 $|\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|(n =$

$1, 2, \cdots, x \in I$), 则令 $\psi_n(x) = \varphi_n(ax)(x \in J, n = 1, 2, \cdots), \psi_n(x) \to g(x)(n \to \infty, x \in J)$, 我们有

$$|a| \int_J g(x)\,\mathrm{d}x = |a| \lim_{n\to\infty} \int_J \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

0.1.2 控制收敛定理

定理 0.10 (控制收敛定理)

设 $f_k \in L(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E. \tag{3}$$

若存在 E 上的可积函数 $F(x)$, 使得

$$|f_k(x)| \leqslant F(x), \quad \text{a. e. } x \in E\ (k = 1, 2, \cdots),$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(通常称 $F(x)$ 为函数列 $\{f_k(x)\}$ 的**控制函数**.)

♡

证明 显然, 由推论??可知 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 且由 $|f_k(x)| \leqslant F(x)$(a. e. $x \in E$) 及(3)式可知 $|f(x)| \leqslant F(x)$,a. e. $x \in E$. 因此, 由积分的基本性质 (4)(i)可知 $f(x)$ 也是 E 上的可积函数. 作函数列

$$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $g_k \in L(E)$, 且 $0 \leqslant g_k(x) \leqslant 2F(x)$,a. e. $x \in E(k = 1, 2, \cdots)$. 注意到 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$, 显然 $\lim\limits_{k\to+\infty} g_k(x)$ 在 E 上也可积.

根据 Fatou 引理, 我们有

$$\int_E \lim_{k\to\infty} (2F(x) - g_k(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E (2F(x) - g_k(x))\,\mathrm{d}x.$$

因为 $F(x), \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ 以及每个 $g_k(x)$ 都是可积的, 所以由积分的线性性质可得

$$\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

消去 $\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x$, 并注意到 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 可得

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

又由积分的线性性质及定理 0.1可知 $(k = 1, 2, \cdots)$

$$\left| \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_E (f_k(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $k \to \infty$, 得

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| = 0,$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty} \left[\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right] = 0$. 因此 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$. □

注 注意 (i) 在上述定理的推演中, 实际上证明了更强的结论:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

今后, 我们将称式(4)为 $f_k(x)$ 在 E 上依 L^1 的意义收敛于 $f(x)$. 一般来说, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 不能推

出(4)成立 (在非负情形有例外).

此外, 当式(4)成立时, 也不一定有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

不过可以得出 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的结论. 实际上, 因为对任意的 $\sigma > 0$, 记

$$E_k(\sigma) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \sigma\},$$

就有

$$\begin{aligned}\sigma m(E_k(\sigma)) &= \int_{E_k(\sigma)} \sigma\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k(\sigma)} |f_k(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \to 0 \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

所以 $m(E_k(\sigma)) \to 0\ (k \to \infty)$.

由此, 进一步又可知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

(ii) 上述控制收敛定理的一个特例是有界收敛定理:

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列,$m(E) < +\infty$, 且对 $x \in E$ 有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad |f_k(x)| \leqslant M \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $f \in L(E)$, 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, \mathrm{d}x = \int_E f(x)\, \mathrm{d}x.$$

为阐明这一点, 只需注意常数函数 M 就是 E 上的控制函数.

例题 0.3 设 $f_n \in C^{(1)}((a, b))(n = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = F(x), \quad x \in (a, b).$$

若 $f'(x), F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 则 $f'(x) = F(x), x \in (a, b)$.

证明 只需指出在 (a, b) 的一个稠密子集上有 $f'(x) = F(x)$ 即可. 为此, 任取 (a, b) 中的子区间 $[c, d]$, 且记

$$E_n = \left\{x \in [c, d] : |f_k'(x) - F(x)| \leqslant 1, k \geqslant n\right\},$$

易知每个 E_n 皆闭集, 且 $[c, d] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 从而根据 Baire 定理 (定理 1.23) 可知, 存在 n_0 以及区间 $[c', d']$, 使得 $E_{n_0} \supset [c', d']$. 由于

$$|f_k'(x) - F(x)| \leqslant 1 \quad (k \geqslant n_0), x \in [c', d'],$$

故知 $k \geqslant n_0$ 时,$\{f_k'(x)\}$ 在 $[c', d']$ 上一致有界. 这样, 由等式

$$\int_{[c',x]} f_k'(t)\mathrm{d}t = f_k(x) - f_k(c'), \quad c' < x < d'$$

可知 (有界收敛定理)

$$\int_{[c',x]} F(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(c'), \quad c' < x < d'.$$

在等式两端对 x 求导可得

$$F(x) = f'(x), \quad c' < x < d',$$

即得所证. □

定理 0.11 (依测度收敛型控制收敛定理)

设 $f_k \in L(\mathbb{R}^n)(k = 1, 2, \cdots)$, 且 $f_k(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若存在 $F \in L(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$|f_k(x)| \leqslant F(x) \quad (k = 1, 2, \cdots; \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n),$$

则 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

注 也可由第三章的相关定理可以直接证明.

证明 (下述证法虽繁, 但习之也不无益处.) 设 ε 是任意给定的正数, 则只需指出存在 K, 使得 $k > K$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

首先, 由题设知, 存在 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

从而在 $|f_{k_i}(x)| \leqslant F(x)$ 中令 $i \to \infty$, 即知 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $|f(x)| \leqslant F(x)$,a. e. $x \in \mathbb{R}^n$.

其次, 把 $\mathbb{R}^n$ 分解如下:

(i) 由 $F \in L(\mathbb{R}^n)$ 可知, 存在 N, 使得

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6}.$$

自然同时对一切 $k = 1, 2, \cdots$, 也有

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{\{x:|x|\leqslant N\}} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(ii) 由 $F(x)$ 的积分绝对连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\int_e F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6}.$$

自然, 同时对一切 $k = 1, 2, \cdots$, 也有

$$\int_e |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_e F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(iii) 再看 $B = B(0, N)$, 记 $m(B) = l$. 由 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ 可知, 对 $\varepsilon/(3l)$ 以及 δ,(记 $E_k = \{x \in B : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/(3l)\}$) 必存在 K, 当 $k \geqslant K$ 时, 有 $m(E_k) < \delta$.

(iv) 对 $k \geqslant K$ 作分解

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x &= \int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_B |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \int_{E_k} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_{B\setminus E_k} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{B\setminus E_k} \frac{\varepsilon}{3l}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3l}\int_B \mathrm{d}x = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

注 对于 E 上依测度收敛于 $f \in L(E)$ 的非负可积函数列 $\{f_k(x)\}$, 若有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

记 $m_k(x) = \min\limits_{x\in E}\{f_k(x), f(x)\}$,$M_k(x) = \max\limits_{x\in E}\{f_k(x), f(x)\}$, 则对 $\sigma > 0$, 由于 $\{x \in E : f(x) - m_k(x) > \sigma\} \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \sigma\}$, 故知 $m_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 再注意到 $0 \leqslant m_k(x) \leqslant f(x)(x \in E)$, 可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E m_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $M_k(x) = f(x) + f_k(x) - m_k(x)(x \in E)$, 所以有

$$\int_E M_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E m_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\to \int_E f(x)\mathrm{d}x \quad (k \to \infty).$$

最后, 根据 $|f_k(x) - f(x)| = M_k(x) - m_k(x)$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E M_k(x)\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_E m_k(x)\mathrm{d}x = 0.$$

例题 0.4 $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{x\sin x}{1+(nx)^\alpha}\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty, \alpha > 1).$

证明 往证

$$\int_{[0,1]} \frac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}\mathrm{d}x \to 0\,(n\to\infty).$$

令

$$g(x) = 1+(nx)^\alpha - nx^{3/2} \quad (g(0)=1, g(1) = 1+n^\alpha - n),$$

易知, 在 $1<\alpha\leqslant 3/2$ 且 n 充分大时,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 中有极值点, 从而在 n 充分大时, 不难得出

$$0 < \frac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x\in[0,1]).$$

根据控制收敛定理即得所证. □

例题 0.5 $\displaystyle\int_{[a,+\infty)} \frac{xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty, a>0).$

证明 只需指出

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,\infty)} \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

即可. 令 $u = nx$, 则

$$I = \int_{[na,+\infty)} \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u = \int_{[0,\infty)} \chi_{[na,+\infty)}(u)\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{[na,+\infty)}(u)(1+u^2/n^2)^{-1}ue^{-u^2} = 0,$$

$$0\leqslant \chi_{[na,+\infty)}(u)(1+u^2/n^2)^{-1}ue^{-u^2} \leqslant ue^{-u^2} \quad (0\leqslant u < +\infty),$$

以及 ue^{-u^2} 在 $[0,+\infty)$ 上可积, 故根据控制收敛定理即得所证. □

推论 0.4 (逐项积分定理)

设 $f_k \in L(E)(k=1,2,\cdots)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x < +\infty,$$

则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛; 若记其和函数为 $f(x)$, 则 $f\in L(E)$, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 作函数 $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$, 由非负可测函数的逐项积分定理可知

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x < +\infty,$$

即 $F\in L(E)$, 从而 $F(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的. 这说明级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛. 记其和函数为

$f(x)$. 由于

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = F(x), \quad \text{a. e. } x \in E,$$

故 $f \in L(E)$.

现在令 $g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)(m = 1, 2, \cdots)$, 则

$$|g_m(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leqslant F(x) \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

于是由控制收敛定理可得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{m\to\infty} g_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.12 (积分号下求导)

设 $f(x, y)$ 是定义在 $E \times (a, b)$ 上的函数, 它作为 x 的函数在 E 上是可积的, 作为 y 的函数在 (a, b) 上是可微的. 若存在 $F \in L(E)$, 使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x, y)\right| \leqslant F(x), \quad (x, y) \in E \times (a, b),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_E f(x, y)\mathrm{d}x = \int_E \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 任意取定 $y \in (a, b)$ 以及 $h_k \to 0(k \to \infty)$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x, y), \quad x \in E,$$

而且当 k 充分大时, 下式成立 (可从微分中值定理考查):

$$\left|\frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k}\right| \leqslant F(x), \quad x \in E.$$

从而由控制收敛定理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_E f(x, y)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E \frac{f(x, y + h_k) - f(x, y)}{h_k}\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_E f(x, y + h_k)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x, y)\,\mathrm{d}x}{h_k} = \int_E \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.6 设 $f(x), f_n(x)(n \in \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{R}$ 上实值可积. 若对 $\mathbb{R}$ 中任一可测集 E, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,a. e. $x \in \mathbb{R}$. (由此可知, 若存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g(x)$,a. e. $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(x) = g(x)$,a. e. $x \in \mathbb{R}$.)

证明 作 $g_n(x) = \sup\limits_{k\geqslant n}\{f_k(x)\}$, 且令

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

则只需指出在 $E(m(E) < +\infty)$ 上, 有 $f(x) \leqslant p(x)$,a. e. $x \in E$ 即可.

(i) 作点集 $P = \{x \in E : p(x) = -\infty\}$,$P_n = \{x \in E : g_n(x) < 0\}(n \in \mathbb{N})$, 由 $g_n(x)$ 递减收敛于 $p(x)$, 故 $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. 又对任意的闭集 $F \subset P_n$, 均有

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_F f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_F g_k(x)\mathrm{d}x = \int_F p(x)\mathrm{d}x,$$

从而可知 $f(x) \leqslant p(x)$,a. e. $x \in P_n$, 自然有 $f(x) \leqslant p(x)$,a. e. $x \in P$. 注意到 $p(x) = -\infty(x \in P)$, 故 $m(P) = 0$.

(ii) 若 $p(x) = +\infty$, 则易知 $f(x) \leqslant p(x)$.

(iii) 若 $-\infty < p(x) < +\infty$, 则令 $Q_m = \{x \in \mathbb{R} : -m \leqslant p(x) \leqslant m\}$, 我们有 $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$. 易知只需考查 Q_m 上 $f(x)$ 与 $p(x)$ 的大小.

作点集 $S_n = \{Q_m : g_n(x) - p(x) < 1\}$, 则 $Q_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. 由此又只需指出 $f(x) \leqslant p(x)(x \in S_n)$. 因为函数 $p(x), g_n(x), g_{n+1}(x), \cdots$ 均一致有界, 所以得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_F g_k(x)\mathrm{d}x = \int_F p(x)\mathrm{d}x \quad (F \subset S_n).$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_F f(x)\mathrm{d}x &= \varliminf_{k\to\infty} \int_F f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_F g_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_F p(x)\mathrm{d}x \quad (F \in S_n).\end{aligned}$$

故得 $f(x) \leqslant p(x)$,a. e. $x \in S_n$. 当然, 此结论在 $\mathbb{R}$ 上也真.

(iv) 对于前一不等式, 只需注意

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = -\varlimsup_{n\to\infty}(-f_n(x)).$$

□

注 设 $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx} (n \in \mathbb{N})$, 则 $f_n \in L([0, +\infty))(n \in \mathbb{N})$, 但逐项积分等式不真:

$$\int_{[0,+\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n(x)\mathrm{d}x.$$