0.1 伴随

定义 0.1 (伴随)

设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在 V 上的线性算子 φ^*, 使等式

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta))$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的**伴随算子**, 简称为 φ 的**伴随**.

定理 0.1

设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性变换, 则存在 V 上唯一的线性变换 φ^*, 使对一切 $\alpha, \beta \in V$, 成立

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)).$$

笔记 这个定理表明: **对有限维内积空间 V 上的任一线性算子, 它的伴随必存在且唯一.**

证明 只需证明唯一性. 若 $\varphi^\sharp$ 是 V 上的线性变换且

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^\sharp(\beta))$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则 $(\alpha, \varphi^\sharp(\beta)) = (\alpha, \varphi^*(\beta))$ 对一切 $\alpha \in V$ 成立, 即 $(\alpha, \varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta)) = 0$ 对一切 $\alpha \in V$ 成立, 特别, 对 $\alpha = \varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta)$ 也成立. 由内积定义即知 $\varphi^\sharp(\beta) - \varphi^*(\beta) = 0$, 即 $\varphi^\sharp(\beta) = \varphi^*(\beta)$. 而 β 是任意的, 故有 $\varphi^\sharp = \varphi^*$.
□

定理 0.2

设 V 是 n 维内积空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 V 上的线性算子 φ 在这组基下的表示矩阵为 A, 则

(1) 当 V 是酉空间时,φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{A}'$, 即 A 的共轭转置;

(2) 当 V 是欧氏空间时,φ^* 的表示矩阵为 A', 即 A 的转置.

证明 由伴随的唯一性知道本节一开始由 $\overline{A}'$ 定义的线性变换 ψ 就是 φ 的伴随, 而 ψ 的表示矩阵就是 $\overline{A}'$. □

定理 0.3 (伴随算子的性质)

设 V 是有限维内积空间, 若 φ 及 ψ 是 V 上的线性变换,c 为常数, 则

(1) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(2) $(c\varphi)^* = \overline{c}\varphi^*$;

(3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

(4) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

证明 证法一:设 φ, ψ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 则 φ^*, ψ^* 在同一组标准正交基下的表示矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}', \overline{\boldsymbol{B}}'$. 由线性变换和表示矩阵的一一对应, 我们只要验证矩阵的共轭转置满足上述 5 条性质即可, 而这些都是显然的.

证法二:我们也可以直接用伴随的定义来证明, 下面以 (3) 为例, 其余的留给读者自行验证. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有

$$((\varphi\psi)(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\varphi(\psi(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{\beta}) = (\psi(\boldsymbol{\alpha}), \varphi^*(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \psi^*(\varphi^*(\boldsymbol{\beta}))) = (\boldsymbol{\alpha}, (\psi^*\varphi^*)(\boldsymbol{\beta}))$$

由伴随的唯一性即得 $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$. □

命题 0.1

设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性算子.

(1) 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间;

(2) 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\cdots,\overline{\lambda}_n$.

证明

(1) 任取 $\alpha\in U,\beta\in U^{\perp}$, 因为

$$(\alpha,\varphi^*(\beta))=(\varphi(\alpha),\beta)=0,$$

所以 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间.

(2) 取 V 的一组标准正交基, 设 φ 在这组基下的表示矩阵为 A, 则无论 V 是酉空间还是欧氏空间,φ^* 的表示矩阵总可写为 $\overline{A}'$. 由假设

$$|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

则容易验证

$$|\lambda I_n-\overline{A}'|=(\lambda-\overline{\lambda}_1)(\lambda-\overline{\lambda}_2)\cdots(\lambda-\overline{\lambda}_n),$$

故结论成立.

□

命题 0.2

设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性变换, 求证:$\mathrm{Im}\varphi^*=(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$.

证明 由命题**??**可知, 只要证明 $\mathrm{Ker}\varphi=(\mathrm{Im}\varphi^*)^{\perp}$ 即可. 一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 则对任一 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 有 $(\boldsymbol{\alpha},\varphi^*(\boldsymbol{\beta}))=(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in(\mathrm{Im}\varphi^*)^{\perp}$, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq(\mathrm{Im}\varphi^*)^{\perp}$. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in(\mathrm{Im}\varphi^*)^{\perp}$, 则对任一 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 有 $0=(\boldsymbol{\alpha},\varphi^*(\boldsymbol{\beta}))=(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ 或由命题**??**即得 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 于是 $(\mathrm{Im}\varphi^*)^{\perp}\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$, 因此结论得证. □