0.1 直接求导法

例题 0.1

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, 证明
$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x,$$
并判断取等条件.

2. 设 f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \lambda$, $\lambda>0$ 为常数, 证明
$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^m \geqslant \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$
并判断取等条件.

证明

1. 由 $0<f'(x)\,(x>0)$ 及 $f(0)=0$ 可知 $f(x)>0\,(0<x\leqslant 1)$. 设
$$g(t)=\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \quad (t\in[0,1]),$$
则
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right).$$
令 $h(t)=f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$, 则由 $0<f'(x)\leqslant 1(x>0)$ 可知
$$h'(t)=2f(t)\left[f'(t)-1\right]\leqslant 0, \forall t\in[0,1].$$
从而 $h(t)\leqslant h(0)=0, \forall t\in[0,1]$. 于是 $g'(t)\leqslant 0, \forall t\in[0,1]$. 因而 g 在 $[0,1]$ 上单调递减. 由 $g(0)=0$ 知 $g\leqslant 0$. 若
$$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$
则 $g(1)=0$, 因而 $g(t)\equiv 0$. 所以
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)=0.$$
这推出 $f\equiv 0$ 或 $f^2(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. 因而
$$2f(t)f'(t)=2f(t) \quad (0<t\leqslant 1).$$
这推出 $f'(t)=1$, 即 $f(t)=t$. 故当 $f(t)\equiv 0$ 或 $f(t)=t$ 时等号成立.

2. 定义
$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^m-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)\mathrm{d}t.$$
求导得
$$\begin{aligned} g'(x)&=mf(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1}-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x)\\ &=mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1}-\frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x)\right]. \end{aligned}$$
令 $h(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则
$$h'(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]'=f(x)-\frac{f(x)f'(x)}{\lambda}=\frac{f(x)}{\lambda}[\lambda-f'(x)]\geqslant 0,$$

从而 $h(x) \geqslant h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$

从而 g 递增且

$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$

这就是不等式(1). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0 \text{或者} f(x) = \lambda x.$$

□

例题 0.2 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

证明 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x)\mathrm{d}x \leqslant a + \int_a^y 1\mathrm{d}x = y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right) - f(y)g(y) \leqslant 0 \to h(b) \leqslant h(a) = 0,$$

故不等式(2)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(2). □

命题 0.1

设 f 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 许多有关连续函数积分的不等式可以通过变上限积分的性质来证明.

证明 令

$$F(t) = \int_a^t xf(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

只需证明 $F(b) \geqslant 0$. 由于 f 是连续函数, F 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}f(t) \\ &= \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}(t-a)f(t) = 0. \end{aligned}$$

这说明 f 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a)=0$, 所以 $F(b) \geqslant 0$. □

例题 0.3 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数并满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

并且上式成为等式当且仅当 $f(x)=x$.

证明 设 f 是连续函数满足所给的条件, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F' = f$. 由 $0 < f(x) \leqslant x$ 得 $F(x) \leqslant \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$. 因而

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x = F^2(x)\Big|_0^1 = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x &= x^2F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2f(x)F(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - F^2(x)\Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

由证明过程可知只有当 $f(x)=x$ 时, 所证不等式成为等式. □

例题 0.4 设 f 是 $[0,1]$ 上正的可导函数, 且满足 $|f'| \leq 1$. 记

$$m = \min f(x), \quad M = \max f(x), \quad \beta = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx. \tag{3}$$

1. 求证: $M \leq me^{\beta}$.
2. 求证: 对 $n > -1$, 有

$$\int_0^1 f^n(x)\,dx \leq \frac{m^{n+1}}{n+1}\left(e^{(n+1)\beta} - 1\right). \tag{4}$$

注 第 2 问中, 令 $n=0$, 可得 $\frac{m+1}{m} \leq e^{\beta}$. 式 (4) 两边开 n 次方根, 再令 $n \to +\infty$, 可得 $M \leq me^{\beta}$.

证明

1. 设 $m = f(x), M = f(y)$, 则有

$$\ln M - \ln m = \ln f(y) - \ln f(x) = \int_x^y \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,dt = \beta.$$

   因而有 $M \leq me^{\beta}$.
2. 设

$$h_1(t) = \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_0^t f^n(x)\,dx, \quad t \in [0,1],$$

$$h_2(t) = \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)} - 1}{n+1} f^{n+1}(t) - \int_t^1 f^n(x)\,dx, \quad t \in [0,1],$$

其中

$$\beta_1(t)=\int_0^t \frac{1}{f(x)}\,dx,\quad \beta_2(t)=\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\,dx,$$

则有 $\beta_1\ge 0,\beta_2\ge 0,h_1(0)=0,h_2(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}h_1'(t)&=e^{(n+1)\beta_1(t)}f^n(t)+\left(e^{(n+1)\beta_1(t)}-1\right)f^n(t)f'(t)-f^n(t)\\&=f^n(t)\left(e^{(n+1)\beta_1(t)}-1\right)\left(1+f'(t)\right)\ge 0,\\h_2'(t)&=-e^{(n+1)\beta_2(t)}f^n(t)+\left(e^{(n+1)\beta_2(t)}-1\right)f^n(t)f'(t)+f^n(t)\\&=f^n(t)\left(e^{(n+1)\beta_2(t)}-1\right)\left(-1+f'(t)\right)\le 0,\end{aligned}$$

这说明 h_1 在 $[0,1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0,1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即

$$\int_0^t f^n(x)\,dx\le \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t), \tag{5}$$

$$\int_t^1 f^n(x)\,dx\le \frac{e^{(n+1)\beta_2(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t). \tag{6}$$

将以上两式相加, 可得

$$\int_0^1 f^n(x)\,dx\le \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)}+e^{(n+1)\beta_2(t)}-2}{n+1}f^{n+1}(t). \tag{7}$$

容易证明对任意 $x>0,y>0$ 有

$$e^x+e^y-2<e^{x+y}-1.$$

因此从式 (7) 可得

$$\int_0^1 f^n(x)\,dx\le \frac{e^{(n+1)(\beta_1(t)+\beta_2(t))}-1}{n+1}f^{n+1}(t)=\frac{e^{(n+1)\beta}-1}{n+1}f^{n+1}(t),$$

这里 $t\in[0,1]$ 是任意的. 故式 (4) 成立.

□

例题 0.5 设 $f\in C[a,b]$ 是一个正的连续函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|.$$

对于区间 $[c,d]\subset[a,b]$, 记

$$\beta=\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,\quad \alpha=\int_c^d \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

求证:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

证明 只需证明对任意的 $t\in[a,b]$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L}f^2(t), \tag{9}$$

这是因为将式 (9) 两端除以 $f(t)$, 然后关于变量 t 在区间 $[c,d]$ 上积分, 即得式 (8). 不妨假设 $a=0,b=1$, 不然考虑新的函数 $g(t)=(b-a)f(a(1-t)+bt)=(b-a)f(a+(b-a)t), t\in[0,1]$. g 满足 Lipschitz 条件 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant L_1|x_1-x_2|, L_1=(b-a)^2L$. 由于 f 的 Bernstein 多项式 $B_n(f)$ 保持 f 的 Lipschitz 常数, 而且在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f, 我们一开始就可以假设 f 是可导的, 此时 $|f'|\leqslant L$.

以下就在 $a=0,b=1$ 且 $|f'|\leqslant L$ 的条件下证明式 (9). 设

$$h_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{2L}f^2(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$
$$h_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{2L}f^2(t)-\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$

其中
$$\beta_1(t)=\int_0^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,\quad \beta_2(t)=\int_t^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x.$$
则有 $h_1(0)=0, h_2(1)=0$, 且
$$\begin{aligned}h_1'(t)&=\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}f(t)+\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{L}f(t)f'(t)-f(t)\\&=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{L}f(t)(L+f'(t))\geqslant 0,\\h_2'(t)&=-\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}f(t)+\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{L}f(t)f'(t)+f(t)\\&=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{L}f(t)(f'(t)-L)\leqslant 0.\end{aligned}$$
这说明 h_1 在 $[0,1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0,1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即
$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{2L}f^2(t),\tag{10}$$
$$\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{2L}f^2(t).\tag{11}$$
将此两式相加, 可得
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}+\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-2}{2L}f^2(t).\tag{12}$$
容易证明对任意 $x>0, y>0$ 有
$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y-2<\mathrm{e}^{x+y}-1.$$
因此从式 (12) 可得
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2L(\beta_1(t)+\beta_2(t))}-1}{2L}f^2(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L}f^2(t).$$
即式 (9) 成立. □