第一章 积分不等式

1.1 著名积分不等式

定理 1.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty),(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty),\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 $x_i,i=1,2,\cdots,n$ 相等.

笔记 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a,b\geqslant 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$ 有 $ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出.

□

定义 1.1

(1) $d\mu=g(x)dx$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E\subset\mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu=\sum_{n\in E} f(n)$.

定理 1.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$.

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu=0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu\neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu\neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu=\int_E |g(x)|^2 d\mu=1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}d\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$.

□

定理 1.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geqslant 0, \int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

♡

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式(1.1)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3.Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 为书写简便, 我们记 $\mathrm{d}\mu = \frac{p(x)}{\int_a^b p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x$, 那么有 $\int_a^b 1\mathrm{d}\mu = 1$. 于是我们记 $x_0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}\mu \geqslant \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]\mathrm{d}\mu = \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\right),$$

这就完成了证明.

□

例题 1.1 对连续正值函数 f, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $\mathrm{d}\mu = \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$, 则 $\int_a^b \mathrm{d}\mu = 1$, 再令 $x_0 \triangleq \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu > 0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x \leqslant \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}\mu &\leqslant \int_a^b \ln x_0 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x) - x_0)\mathrm{d}\mu \\
&= \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu - x_0\int_a^b \mathrm{d}\mu\right) \\
&= \ln x_0 = \ln\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

故结论得证.

□

定理 1.4 (Hölder 不等式)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中有体积的有界集,f 和 g 都在 V 上可积, 又设 p, q 是满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正数, 且 $p > 1$, 则有

$$\int_V |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_V |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).

♡

注 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要 “调幂次” 的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于 $p \in (0, 1)$ 的情况会有反向赫尔德不等式.

证明 不妨设 $f,g\geqslant 0$, 否则用 $|f|,|g|$ 代替 f,g. 由 Young 不等式可知

$$f(x)g(x)\leqslant \frac{f^p(x)}{p}+\frac{g^q(x)}{q}.$$

由于 f,g 在 V 上都可积, 故可不妨设 $\int_V f^p(x)\mathrm{d}x=\int_V g^q(x)\mathrm{d}x=1$, 否则用 $\dfrac{f}{\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}, \dfrac{g}{\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$ 代替 f,g. 从而

$$\int_V f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{p}\int_V f^p(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_V g^q(x)\mathrm{d}x=1=\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x)\leqslant \frac{f^p(x)}{p}+\frac{g^q(x)}{q}$$

在 V 上几乎处处取等. 根据 Young 不等式的取等条件可知, 此即 $\dfrac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零).

□

定理 1.5 (Minkowski 不等式)

若 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的非负连续函数, 则对 $p\geqslant 1$ 有 (若 $p\in(0,1)$ 则不等式反向)

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.$$

笔记 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用 Hölder 不等式.

注 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为"绝对值不等式", 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用 p 范数来写会好记并且清晰:

$$\left\|\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right\|_p\leqslant\int_c^d\|f(x,y)\|_p\mathrm{d}y.$$

对于 $p\in(0,1)$ 的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向 Hölder 不等式.

证明 假设 $p\geqslant 1$, 记 $g(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 换序并利用Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\cdot\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^{p-1}\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\int_c^d f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^b f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}y\\
&=\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\\
&=\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 进而 $q(p-1)=p$. 两边约掉 $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x$ 就有

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.$$

□

定理 1.6 (Hardy 不等式)

设 $p>1$ 或 $p<0, f(x)$ 恒正且连续, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\mathrm{d}x.$$

注 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后 Hölder(连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再 Hölder, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外 $p<0$ 的情况证明完全类似, 利用反向 Hölder 即可.

证明 假设 $p>1$, 对任意 $M>0$, 利用分部积分和Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x &= -\frac{1}{p-1}\int_0^M F^p(x)\mathrm{d}\frac{1}{x^{p-1}} = -\frac{1}{p-1}\left(\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M - \int_0^M \frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}F^p(x)\right)\\
&= -\frac{1}{p-1}\frac{F^p(M)}{M^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_0^M \frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^M f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

其中利用了

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0^+} F(x)\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

所以

$$\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} - \lim_{x\to 0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.$$

现在两边约掉相同的部分并同时开 p 次方, 再令 $M\to\infty$ 就有

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\mathrm{d}x.$$

□

推论 1.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列 a_n 非负, 对任意 $p>1$ 或者 $p<0$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

注 如果 $p<0$, 则同样使用反向 Hölder 不等式即可完成证明.

证明 记 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, 不妨设 $p>1$, 先证

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1}\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant \frac{1}{p-1}\left((k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}\right) \leqslant 0. \tag{1.2}$$

上式等价于

$$\begin{aligned}
&(p-1)\frac{S_k^p}{k^p} - p\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant (k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}.\\
\iff &(k+p-1)\frac{S_k^p}{k^p} \leqslant (k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} + p\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k.
\end{aligned}$$

令 $x=S_{k-1}, y=a_k$, 则 $S_k=x+y$, 代入上式得

$$\begin{aligned}
&(k+p-1)\frac{(x+y)^p}{k^p} \leqslant \frac{x^p}{(k-1)^{p-1}} + p\frac{(x+y)^{p-1}}{k^{p-1}}y.\\
\iff &(k+p-1)(x+y)^p \leqslant \frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}x^p + pk(x+y)^{p-1}y.
\end{aligned}$$

两边除以 $(x+y)^p$, 再令 $t=\dfrac{x}{x+y}\in[0,1)$ 代入得

$$k+p-1\leqslant \frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^p+pk(1-t).$$

令

$$h(t)=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^p+pk(1-t)-(k+p-1),$$

则(1.2)式等价于 $h(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1)$. 注意到

$$h'(t)=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}pt^{p-1}-pk=,$$

令 $h'(t)=0$ 得

$$\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^{p-1}=k\Longrightarrow t^{p-1}=\frac{k(k-1)^{p-1}}{k^p}=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}\Longrightarrow t=\frac{k-1}{k}.$$

故 $h(t)$ 在 $t=\dfrac{k-1}{k}$ 处取得最小值. 又因为

$$\begin{aligned}h\left(\frac{k-1}{k}\right)&=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}\left(\frac{k-1}{k}\right)^p+pk\left(1-\frac{k-1}{k}\right)-(k+p-1)\\&=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}\cdot\frac{(k-1)^p}{k^p}+pk\cdot\frac{1}{k}-(k+p-1)\\&=(k-1)+p-(k+p-1)=0.\end{aligned}$$

所以 $h(t)\geqslant h(\dfrac{k-1}{k})=0,\forall t\in[0,1)$ 成立. 故(1.2)式成立. 再对(1.2)式两边求和有

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1}a_k.$$

再利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p&\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1}a_k\\&\leqslant\frac{p}{p-1}\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{p}{p-1}\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

现在两边约掉相同的部分并同时开 p 次方得

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^n a_k^p.$$

□

1.2 积分不等式的应用

例题 1.2 设 f 在区间 $[0,1]$ 上可积且满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1.$$

求证: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 4.$

证明 证法一: 对于任意常数 a 和 b 有 $\int_0^1 (f(x)-ax-b)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$. 由此并根据条件可得

$$\int_0^1 (f(x)-ax-b)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)\,f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
$$\Longrightarrow \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x = 2(a+b) - \frac{1}{3}a^2 - ab - b^2.$$

取 $a=6, b=-2$ 即得所证.

证法二:对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left[\int_0^1 (ax+b)f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = (a+b)^2.$$

从而

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{(a+b)^2}{\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x} = \frac{a^2+2ab+b^2}{\frac{a^2}{3}+ab+b^2} = 3 - \frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}.$$

再由 a,b 的任意性知

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 3 + \sup_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}\right\}. \tag{1.3}$$

令 $g(x) = -\dfrac{3x+6}{x^2+3x+3}$, 则

$$g'(x) = \frac{3(x+1)(x+3)}{(x^2+3x+3)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, -3.$$

又 $g(-1) = -3 < 1 = g(-3)$, 故 $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. 因此

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{3\frac{a}{b}+6}{\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a}{b}+3}\right\} = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 1.$$

再由(1.3)式可知

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

并且这个不等式右边不可改进.

□

例题 1.3 设 $f\in C^1[0,1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0)=0$, 证明:
$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$
2. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明:
$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

注 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\mathrm{d}y = \int_0^x f'(y)\mathrm{d}y.$$
从而
$$|f(x)|^2 = \left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2 \leqslant \int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x |f'(y)|^2\mathrm{d}y = x\int_0^x |f'(y)|^2\mathrm{d}y \leqslant x\int_0^1 |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$
于是对上式两边同时积分可得
$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 |f'(y)|^2\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

2. 由牛顿莱布尼兹公式 (带积分型余项的插值公式) 可得

$$f(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\quad f(x)=\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

从而

$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y=x\int_0^x|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

$$|f(x)|^2=\left|\int_x^1 f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}y\int_x^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant(1-x)\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

于是对上面两式两边同时积分可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

将上面两式相加得

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

□

例题 1.4 opial 不等式

特例:

1. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0,f(b)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

一般情况:

1. 设 $f\in C^1[a,b], p\geqslant 0, q\geqslant 1$ 且 $f(a)=0$. 证明

$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{1.4}$$

2. 若还有 $f(b)=0$. 证明

$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^b|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.\tag{1.5}$$

笔记 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

证明 特例:

1. 令 $F(x)\triangleq\int_a^x|f'(y)|\mathrm{d}y$, 则 $F'(x)=|f'(x)|,F(a)=0$. 从而

$$f(x)=\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y\Rightarrow|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(y)|\mathrm{d}y=F(x).$$

于是

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}F^2(b)=\frac{1}{2}\left(\int_a^b|f'(y)|\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b|f'(y)|^2\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(y)|^2\mathrm{d}x.$$

2. 由第 1 问可知

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y=\frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(y)|^2\mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f'(y)|^{2}\mathrm{d}y=\frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f'(y)|^{2}\mathrm{d}y.$$

将上面两式相加可得

$$\int_{a}^{b}|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_{a}^{b}|f'(y)|^{2}\mathrm{d}y.$$

一般情况:

1. 只证 $q>1$. $q=1$ 可类似得到. 考虑

$$f(x)=\int_{a}^{x}f'(y)\mathrm{d}y,F(x)=\int_{a}^{x}|f'(y)|^{q}\mathrm{d}y.$$

则由Hölder 不等式, 我们知道

$$|f(x)|^{p}\leqslant\left(\int_{a}^{x}|f'(y)|\mathrm{d}y\right)^{p}\leqslant\left(\int_{a}^{x}|f'(y)|^{q}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{a}^{x}1^{\frac{q}{q-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p(q-1)}{q}}=F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b}|f(x)|^{p}|f'(x)|^{q}\mathrm{d}x&\leqslant\int_{a}^{b}F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}|f'(x)|^{q}\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}dF(x)\\
&\leqslant(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\int_{a}^{b}F^{\frac{p}{q}}(x)dF(x)=\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}F^{\frac{p+q}{q}}(b)\\
&=\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_{a}^{b}|f'(y)|^{q}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p+q}{q}}\\
&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_{a}^{b}|f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{q+p}}\left(\int_{a}^{b}1^{(\frac{p+q}{q-1})}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q-1}{q+p}}\\
&=\frac{q(b-a)^{p}}{p+q}\int_{a}^{b}|f'(y)|^{p+q}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

这就证明了不等式(1.4).

2. 由第一问得

$$\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|^{p}|f'(x)|^{q}\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^{p}}{(p+q)2^{p}}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x,$$

对称得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f(x)|^{p}|f'(x)|^{q}\mathrm{d}x\leqslant\frac{q(b-a)^{p}}{(p+q)2^{p}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.$$

故上面两式相加得到(1.5)式.

□

例题 1.5 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\left(\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x\right)^{2}\leqslant\frac{1}{12}\int_{0}^{1}f^{2}(x)\mathrm{d}x.\tag{1.6}$$

笔记 从条件 $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$ 来看, 我们待定 $a\in\mathbb{R}$, 一定有

$$\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(x-a)f(x)\mathrm{d}x.$$

然后利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_{0}^{1}(x-a)f(x)\mathrm{d}x\right)^{2}\leqslant\int_{0}^{1}(x-a)^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}f^{2}(x)\mathrm{d}x.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_{0}^{1}(x-a)^{2}\mathrm{d}x$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a=\frac{1}{2}$ 就是

达到最小值的 a.

证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

这就证明了(1.6)式.

□

例题 1.6 设 $f\in C^1[0,1],\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 27\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

笔记 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0)=g(1)=0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x)=\begin{cases}x-1, & c\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 0\leqslant x\leqslant c\end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c=c-1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}.$$

证明 令

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

结合 $\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27}$, 这就完成了证明.

□

例题 1.7 设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

注 不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 的原因: 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0$ 则用 $-f$ 代替 f, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 是平凡的.

证明 反证, 若 $|f'(x)|\leqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\triangleq M$, 则不妨设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$, 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta_1\in(a,x),\theta_2\in(x,b)$, 使得

$$f(x)=f(a)+f'(\theta_1)(x-a)\leqslant M(x-a),\forall x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right].$$

$$f(x)=f(b)+f'(\theta_2)(x-b)\leqslant -M(x-b)=M(b-x),\forall x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x = \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

于是结合 f 的连续性及 $M(x-a)-f(x), M(b-x)-f(x) \geqslant 0(\forall x \in [a,b])$ 可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[M(x-a)-f(x)\right]\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x) = M(x-a), \forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[M(b-x)-f(x)\right]\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x) = M(b-x), \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

故 f 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处不可导, 这与 $f \in D(a,b)$ 矛盾!

□

例题 1.8 设 $f \in C^1[0,\pi]$ 且满足 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t}, \forall x \in [0,\pi].$$

注 原不等式等价于

$$f^2(x) \leqslant \frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t, \forall x \in [0,\pi].$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 先待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t \int_0^\pi g^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2, \forall x \in [0,\pi]. \tag{1.8}$$

此时, 我们希望对 $\forall x \in [0,\pi]$, 固定 x, 都有 $\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t = kf(x)$, 其中 k 为某一常数. 因此 $g(t)$ 必和 x 有关, 于是令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

再代入(1.8)式验证即可.

实际上, 回忆定理??中的 Green 函数, 可以发现上述构造的 $g(x) = \dfrac{\mathrm{d}k(x,t)}{\mathrm{d}x}$, $x,t \in [0,\pi]$.

希望 $\int_0^\pi f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(x)$, 考虑广义导数, 使得 $g'(x) = \delta(x)$. 实际上, 这里的 g 就是 H 函数 (详细参考 rudin 的泛函分析).

证明 对 $\forall x \in [0,\pi]$, 令

$$g(t) = \begin{cases} t-\pi, & t \in [x,\pi] \\ t, & t \in [0,x] \end{cases},$$

则

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 &= \left(\int_x^\pi (t-\pi)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(-(x-\pi)f'(x) - \int_x^\pi f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\ &= \pi^2|f(x)|^2.\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi g^2(t)\mathrm{d}t = \int_x^\pi (t-\pi)^2\mathrm{d}t + \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}(3x^2 - 3\pi x + \pi^2).$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\pi}{3}(3x^2-3\pi x+\pi^2)\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t = \int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t \int_0^\pi g^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^\pi f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \pi^2|f(x)|^2, \forall x \in [0,\pi]$$

即

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{3\pi}(3x^2-3\pi x+x^2)\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\mathrm{d}t, \forall x\in[0,\pi]$$

□

命题 1.1 (反向 Cauchy 不等式)

设 $f,g\in R[a,b]$, $g\geqslant 0$, $0<m\leqslant f\leqslant M$, 证明

$$\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\cdot\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b\left[\sqrt{f(x)g(x)}\right]^2\mathrm{d}x\int_a^b\left[\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\right]^2\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

故第一个不等式成立. 下证第二个不等式. 由条件和均值不等式可知

$$\int_a^b \frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0 \Longleftrightarrow \int_a^b\frac{Mf(x)+mf(x)-mM-f^2(x)}{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow (M+m)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant mM\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{mM}\sqrt{\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

故

$$\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left[\frac{(M+m)}{2\sqrt{mM}}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

即

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

□

例题 1.9 设 $f,g\in R[a,b]$ 满足

$$0<m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad \int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 待定常数 k, 由条件 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b (f(x)-k)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b (f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是我们希望

$$\int_a^b (f(x)-k)^2\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

从而希望

$$(f(x)-k)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x).$$

又因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 所以只需要下式成立即可

$$(t-k)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t^2,\quad \forall t\in[m,M]. \tag{1.9}$$

我们只需要找到出一个合适的 k, 使这个 k 满足上式即可.

现在, 我们先求不等式 $(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \forall t \in [m, M]$ 的最佳系数 C. 即求最小的 $C > 0$, 存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得

$$(t-k)^2 \leqslant Ct^2, \quad \forall t \in [m, M].$$

上式等价于

$$\left(1-\frac{k}{t}\right)^2 \leqslant C, \quad \forall t \in [m, M] \Longleftrightarrow \left(1-\frac{k}{M}\right)^2, \left(1-\frac{k}{m}\right)^2 \leqslant C.$$

令 $h(x) \triangleq \max\left\{\left(1-\frac{x}{M}\right)^2, \left(1-\frac{x}{m}\right)^2\right\}$, 则 $C = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} h(x)$,$k$ 是 $h(x)$ 的最小值点.

(画图) 易知 $h(x)$ 的最小值就在 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2$ 和 $\left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 中间的一个交点处取到, 即 $k \in \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{m}\right)$. 于是由 $\left(1-\frac{x}{M}\right)^2 = \left(1-\frac{x}{m}\right)^2$ 可得

$$\text{(i)} \quad 1-\frac{x}{M} = 1-\frac{x}{m} \Longrightarrow x = 0, \quad h(0) = 1,$$

$$\text{(ii)} \quad 1-\frac{x}{M} = \frac{x}{m} - 1 \Longrightarrow 2 = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)x \Longrightarrow x = \frac{2mM}{M+m}, \quad h\left(\frac{2mM}{M+m}\right) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

故 $k = \frac{2mM}{M+m}$,$C = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$. 再结合 (1.9) 式, 可知原不等式的系数就是最佳系数, 并且此时我们找到了证明需要的 $k = \frac{2mM}{M+m}$. 证明只需要将 $k = \frac{2mM}{M+m}$ 代入上述步骤验证即可.

证明 由条件 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.10}$$

注意到

$$\left(t-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 t = \frac{4mM\,(t-M)\,(m-t)}{(m+M)^2} \leqslant 0, \quad \forall t \in [m, M].$$

因此由 $f(x) \in [m, M], \forall x \in \mathbb{R}$ 可得

$$\left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是再结合 (1.10) 式可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b \left(f(x)-\frac{2mM}{M+m}\right)^2 \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

例题 1.10 设 $f \in C^2[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$. 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant 4.$$

注 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式及条件可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1) - \int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left(g(1) + \int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

将上式两边与要证不等式对比，我们希望 $g''(x)\equiv 0$, 从而 $\displaystyle\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=0$, 于是上式可化为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant g^2(1)\\
\Longleftrightarrow &\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant \frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}\tag{1.11}
$$

因此只要 $g(x)$ 还满足 $\dfrac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant 4$ 即可.

因为 $g''(x)\equiv 0$, 所以我们可以设 $g(x)$ 为一次函数, 即 $g(x)=ax+b,a\neq 0$. 又因为 $\dfrac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 越大, 不等式 (1.11) 越强, 所以现在我们想要找到一个一次函数 $g(x)$ 使得 $\dfrac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 达到最大值.

不妨设 $g(x)=ax-1,a\neq 0$, 否则用 $-bg(x)$ 代替 $g(x)$, 不改变 $\dfrac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 的取值. 此时, 我们有

$$
\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=3\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2-3a+3}=3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right).
$$

令 $h(a)=\dfrac{a}{a^2-3a+3}$, 则由 $h'(a)=\dfrac{3-a^2}{(a^2-3a+3)^2}=0$ 可得 h 的极大值点为 $a=\sqrt{3}$. 又因为

$$
\lim_{a\to-\infty}h(a)=\lim_{a\to-\infty}\frac{a}{a^2-3a+3}=0,\quad h(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.
$$

所以 $\max\limits_{a\in\mathbb{R}}h(a)=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$. 从而

$$
\max_{a\in\mathbb{R}}\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{a\in\mathbb{R}}3\left(1+\frac{a}{a^2-3a+3}\right)=3\left(1+\max_{a\in\mathbb{R}}h(a)\right)=6+2\sqrt{3}>4.
$$

综上, 取 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 就能得到

$$
\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=6+2\sqrt{3}>4.
$$

实际上,$6+2\sqrt{3}$ 就是原不等式的最佳下界. 只需要再将 $g(x)=\sqrt{3}x-1$ 代入最开始的 Cauchy 不等式验证即可.

证明 令 $g(x)=\sqrt{3}x-1$, 则

$$
g''(x)\equiv 0,\quad g(1)=\sqrt{3}-1.
$$

于是由 Cauchy 不等式及条件可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant\left(\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\
&\xlongequal{\text{分部积分}}\left(g(1)-\int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(g(1)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{g^2(1)}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\int_0^1(\sqrt{3}x-1)^2\,\mathrm{d}x}=6+2\sqrt{3}>4.
$$

□

例题 1.11 设 $f\in C^2[0,2]$, 证明:

$$
\int_0^2 |f''(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}[f(0)+f(2)-2f(1)]^2.
$$

注 不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的原因:

(1) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)=0$ 时, 结论显然成立.

(2) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0$ 时, 则待定 a,b,c, 令 $g(x)=cf(x)-ax-b$, 希望 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

注意到上述方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{vmatrix}=f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0.$$

故由 Cramer 法则可知, 存在唯一的解 $a=a_0,b=b_0,c=c_0$ 满足方程组 (1.12). 即 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$ 满足 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$.

下证不妨设成立. 假设原不等式已经对 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$ 的的情况成立, 则对一般的 $f(x)$ 而言, 令 $g(x)=c_0f(x)-a_0x-b_0$, 显然 $g''(x)=c_0f''(x)$, 并且由上述推导可知 $g(0)=g(2)=0,g(1)=1$. 从而此时由假设可得

$$\int_0^2 |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}[g(0)+g(2)-2g(1)]^2.$$

于是

$$\begin{aligned}
&|c_0|^2\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^2 |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[g(0)+g(2)-2g(1)\right]^2\\
&=\frac{3}{2}\left[(c_0f(0)-b_0)+(c_0f(2)-2a_0-b_0)-2\left(c_0f(1)-a_0-b_0\right)\right]^2\\
&=\frac{3\,|c_0|^2}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2.$$

因此不妨设成立.

于是我们可以不妨设 $f(0)=f(2)=0,f(1)=1$, 否则用 $c_0f(x)-a_0x-b_0$ 代替即可. 从而只须证

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{2}\left[f(0)+f(2)-2f(1)\right]^2=6.$$

显然要利用 Cauchy 不等式, 因此待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

对上式右边分部积分可得

$$\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(f'(2)g(2)-f'(0)g(0)-\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{1.13}$$

于是我们希望 $g'(x)\equiv C$, 其中 C 为某一常数,$g(2)=g(0)=0$, 从而设 $g(x)$ 为一次函数, 即设 $g(x)=px+q$. 从而由 $g(2)=g(0)=0$ 可得 $q=p=0$, 进而 $g\equiv 0$, 显然不行!

因此我们猜测 $g(x)$ 为满足 $g(2)=g(0)=0$ 的分段一次函数, 则待定 m, 令

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ m(x-2), & 1<x\leqslant 2 \end{cases}.$$

(因为有 $f(1)=1$ 这个条件, 所以选先 $x=1$ 为分段点) 又由 (1.13) 式可知需要 f 和 g 都连续才能分部积分, 因此 g 在 $x=1$ 处要连续, 故 $m=-1$, 即

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}.$$

再代入(1.13) 式中验证即可得到证明.

证明 不妨设 $f(0)=f(2)=0, f(1)=1$, 否则用 $c_0 f(x)-a_0 x-b_0$ 代替即可. 令

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases},$$

则

$$\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad \left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=(f(1)-f(0)-f(2)+f(1))^2=4.$$

于是由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(\int_0^2 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{3}\int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4\Longleftrightarrow \int_0^2 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 6.$$

□

例题 1.12 设 $f\in C^1[0,1], f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

笔记 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

注 显然要利用 Cauchy 不等式, 待定 $g(x)$, 由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(-\frac{1}{6}g(1)+\frac{1}{6}g(0)-\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{1.14}$$

将上式与要证不等式对比, 于是我们希望 $g'(x)=C$, 其中 C 为某一常数. 这样才能使

$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=C\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

进而不等式右边才会出现我们需要的 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 从而待定的 $g(x)$ 为线性函数. 设 $g(x)=ax+c, a\neq 0$, 进而不妨设 $g(x)=x+c$, 否则用 $\frac{1}{a}g$ 代替 g 仍有不等式 (1.14)(因为不等式两边齐次). 于是不等式 (1.14) 可化为

$$\begin{aligned}\frac{3c^2+3c+1}{3}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 (x+c)^2\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(-\frac{1}{6}(1+c)+\frac{1}{6}c-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{1.15}$$

因此只需要找到一个合适的 c, 使得上述不等式右边满足

$$\frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}. \tag{1.16}$$

即对 $\forall t=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$, 找到一个 c, 记 $K=\frac{3}{3c^2+3c+1}\in\mathbb{R}$, 使得

$$K\left(\frac{1}{6}+t\right)^2\geqslant 2t+\frac{1}{4}\Longleftrightarrow\Delta=\frac{12-K}{3}\leqslant 0\Longleftrightarrow K\geqslant 12.$$

因此取 $c=-\frac{1}{2}$, 得 $K=\frac{3}{3c^2+3c+1}=12$.

综上, 令 $g(x)=x-\frac{1}{2}$, 则由 (1.15)和(1.16) 式可知

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{3c^2+3c+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

只需要将 $g(x)=x-\frac{1}{2}$ 代入上述步骤进行验证即可得到证明.

证明 令 $g(x)=x-\frac{1}{2}$, 则

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12},\quad g(1)=\frac{1}{2},\quad g(0)=-\frac{1}{2}.$$

于是由 Cauchy 不等式和条件可得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\Longleftrightarrow \int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

注意到 $12\left(\frac{1}{6}+t\right)^2 \geqslant 2t+\frac{1}{4}$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 恒成立, 故

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}.$$

□

例题 1.13(一类)Hilbert 不等式

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中可积, 证明:

$$\iint_{[0,+\infty)} \frac{f(x)g(y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 2\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

2. 设 N 为正整数,a_k,b_k 为实数, 证明:

$$\sum_{m,n=1}^N \frac{a_m b_n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2} \leqslant 2\sqrt{\sum_{m=1}^N a_m^2\cdot\sum_{n=1}^N b_n^2}.$$

证明

1.
2.

□

1.3 重积分方法

定理 1.7 (Chebeshev 不等式积分形式)

设 $p\in R[a,b]$ 且非负,f,g 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),f,g\text{单调性相同}$$

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geqslant \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),f,g\text{单调性相反}$$

♡

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

注 证法二中的 $\mathrm{d}\mu$ 应该看作测度.

证明 证法一:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y\right)-\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y\right)\\
&=\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

故结论得证.

证法二: 令 $\dfrac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则 $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\mu=\int_a^b \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=1$. 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}\mu\\
&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\int_a^b g(y)\mathrm{d}\mu-\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)]g(y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(y)-f(x)]g(x)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]
\end{aligned}$$

故结论得证.

□

例题 1.14 设 $f\in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right).$$

令 $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\mu\int_0^1 x\mathrm{d}\mu\geqslant\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}\mu.$$

上式由Chebeshev 不等式积分形式可直接得到.

□

命题 1.2 (反向切比雪夫不等式)

设 $f,g\in R[a,b]$ 且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.$$

注 不妨设 $a=0, b=1$ 的原因: 假设当 $a=0, b=1$ 时,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的 $[a,b]$, 原不等式等价于

$$\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}. \quad (1.17)$$

又注意到 $f(a+(b-a)x), g(a+(b-a)x)\in R[0,1]$, 且 $f(x)\in[m_1,M_1], g(x)\in[m_2,M_2]$. 故由假设可知(1.17)式成立. 因此不妨设也成立.

笔记 积累本题的想法.

证明 不妨设 $a=0, b=1$, 则记 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2&=\left|\int_0^1(f(x)-A)(g(x)-B)\mathrm{d}x\right|^2\\&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\int_0^1|f(x)-A|^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1|g(x)-B|^2\mathrm{d}x\\&=\left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1(M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x=M_1A+m_1A-M_1m_1-\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x-A^2=(M_1-A)(A-m_1)-\int_0^1(M_1-f)(f-m_1)\mathrm{d}x\\&\leqslant(M_1-A)(A-m_1)\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}.\end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立.

□

例题 1.15 设 $f\in C[a,b]$ 且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \quad (1.18)$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1.19)$$

$\sin x<x$ 两边同时在 $[0,1]$ 上积分也可得 $1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2}$.

证明 一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\sin y\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[\cos x\cos y+\sin x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是不等式(1.18)变为

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}.\tag{1.20}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{(1.19)}{\leqslant}M^2\iint_{[a,b]^2}\frac{(x-y)^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(1.20).

□

例题 1.16 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 记

$$\delta=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|,\ \Delta=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

证明:

$$\frac{1}{12}(b-a)^2\delta^2\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}(b-a)^2\Delta^2$$

证明 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(bx+a(1-x))$ 代替 f. 再不妨设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 否则用 $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$ 代替 f. 于是只需证

$$\frac{1}{12}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-1\leqslant\frac{1}{12}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2.$$

由 Lagrange 中值定理可知, 对 $\forall x,y\in[0,1]$, 都存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$\min_{x\in[0,1]}|f'|\cdot|x-y|\leqslant|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f'|\cdot|x-y|$$

从而

$$\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2(x-y)^2\leqslant[f(x)-f(y)]^2\leqslant\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2(x-y)^2$$

对上式取二重积分得

$$\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y\leqslant\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y\leqslant\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y\tag{1.21}$$

经计算得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y&=\int_0^1\left[f^2(x)+\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-2f(x)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-2\int_0^1\left(f(x)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\end{aligned}$$

因此(1.21)式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant 2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\leqslant\frac{1}{6}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\\ \Longleftrightarrow&\frac{1}{12}\left(\min_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-1\leqslant\frac{1}{12}\left(\max_{x\in[0,1]}|f'|\right)^2\end{aligned}$$

故结论得证.

□

1.4 直接求导法

例题 1.17

1. 设 $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, 证明
$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x,$$
并判断取等条件.
2. 设 f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant\lambda$, $\lambda>0$ 为常数, 证明
$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^m\geqslant\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x,\tag{1.22}$$
并判断取等条件.

证明

1. 由 $0<f'(x)\,(x>0)$ 及 $f(0)=0$ 可知 $f(x)>0\,(0<x\leqslant 1)$. 设
$$g(t)=\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2\quad(t\in[0,1]),$$
则
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right).$$
令 $h(t)=f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$, 则由 $0<f'(x)\leqslant 1(x>0)$ 可知
$$h'(t)=2f(t)\left[f'(t)-1\right]\leqslant 0,\forall t\in[0,1].$$
从而 $h(t)\leqslant h(0)=0,\forall t\in[0,1]$. 于是 $g'(t)\leqslant 0,\forall t\in[0,1]$. 因而 g 在 $[0,1]$ 上单调递减. 由 $g(0)=0$ 知 $g\leqslant 0$. 若
$$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$
则 $g(1)=0$, 因而 $g(t)\equiv 0$. 所以
$$g'(t)=f(t)\left(f^2(t)-2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)=0.$$
这推出 $f\equiv 0$ 或 $f^2(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. 因而
$$2f(t)f'(t)=2f(t)\quad(0<t\leqslant 1).$$
这推出 $f'(t)=1$, 即 $f(t)=t$. 故当 $f(t)\equiv 0$ 或 $f(t)=t$ 时等号成立.
2. 定义
$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^m-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)\mathrm{d}t.$$
求导得
$$g'(x)=mf(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1}-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x)$$

$$= mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x)\right].$$

令 $h(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \dfrac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则

$$h'(x) = \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda}[\lambda - f'(x)] \geqslant 0,$$

从而 $h(x) \geqslant h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$

从而 g 递增且

$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$

这就是不等式(1.22). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0\text{或者}\, f(x) = \lambda x.$$

□

例题 1.18 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

证明 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^y f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x)\mathrm{d}x \leqslant a + \int_a^y 1\mathrm{d}x = y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right) - f(y)g(y) \leqslant 0 \to h(b) \leqslant h(a) = 0,$$

故不等式(1.23)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(1.23).

□

命题 1.3

设 f 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 许多有关连续函数积分的不等式可以通过变上限积分的性质来证明.

证明 令

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

只需证明 $F(b)\geqslant 0$. 由于 f 是连续函数, F 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned}F'(t)&=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)\\&=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}(t-a)f(t)=0.\end{aligned}$$

这说明 f 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a)=0$, 所以 $F(b)\geqslant 0$.

□

例题 1.19 设 f 是 $[0,1]$ 上正的可导函数, 且满足 $|f'|\leqslant 1$. 记

$$m=\min f(x),\quad M=\max f(x),\quad \beta=\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

1. 求证: $M\leqslant me^{\beta}$.
2. 求证: 对 $n>-1$, 有

$$\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{m^{n+1}}{n+1}\left(e^{(n+1)\beta}-1\right). \tag{1.25}$$

注 第 2 问中, 令 $n=0$, 可得 $\dfrac{m+1}{m}\leqslant e^{\beta}$. 式 (1.25) 两边开 n 次方根, 再令 $n\to+\infty$, 可得 $M\leqslant me^{\beta}$.

证明

1. 设 $m=f(x), M=f(y)$, 则有

$$\ln M-\ln m=\ln f(y)-\ln f(x)=\int_x^y\frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t=\beta.$$

因而有 $M\leqslant me^{\beta}$.

2. 设

$$h_1(t)=\frac{e^{(n+1)\beta_1(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t)-\int_0^t f^n(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$

$$h_2(t)=\frac{e^{(n+1)\beta_2(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t)-\int_t^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$

其中

$$\beta_1(t)=\int_0^t\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x,\quad \beta_2(t)=\int_t^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x,$$

则有 $\beta_1\geqslant 0,\beta_2\geqslant 0, h_1(0)=0, h_2(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}h_1'(t)&=e^{(n+1)\beta_1(t)}f^n(t)+\left(e^{(n+1)\beta_1(t)}-1\right)f^n(t)f'(t)-f^n(t)\\&=f^n(t)\left(e^{(n+1)\beta_1(t)}-1\right)\left(1+f'(t)\right)\geqslant 0,\\h_2'(t)&=-e^{(n+1)\beta_2(t)}f^n(t)+\left(e^{(n+1)\beta_2(t)}-1\right)f^n(t)f'(t)+f^n(t)\\&=f^n(t)\left(e^{(n+1)\beta_2(t)}-1\right)\left(-1+f'(t)\right)\leqslant 0,\end{aligned}$$

这说明 h_1 在 $[0,1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0,1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即

$$\int_0^t f^n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{(n+1)\beta_1(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t), \tag{1.26}$$

$$\int_t^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{(n+1)\beta_2(t)}-1}{n+1}f^{n+1}(t). \tag{1.27}$$

将以上两式相加, 可得

$$\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{(n+1)\beta_1(t)}+e^{(n+1)\beta_2(t)}-2}{n+1}f^{n+1}(t). \tag{1.28}$$

容易证明对任意 $x>0, y>0$ 有

$$e^x+e^y-2<e^{x+y}-1.$$

因此从式 (1.28) 可得

$$\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{(n+1)(\beta_1(t)+\beta_2(t))}-1}{n+1}f^{n+1}(t)=\frac{e^{(n+1)\beta}-1}{n+1}f^{n+1}(t),$$

这里 $t\in[0,1]$ 是任意的. 故式 (1.25) 成立.

□

例题 1.20 设 $f\in C[a,b]$ 是一个正的连续函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|.$$

对于区间 $[c,d]\subset[a,b]$, 记

$$\beta=\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,\quad \alpha=\int_c^d \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

求证:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.29}$$

证明 只需证明对任意的 $t\in[a,b]$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L}f^2(t), \tag{1.30}$$

这是因为将式 (1.30) 两端除以 $f(t)$, 然后关于变量 t 在区间 $[c,d]$ 上积分, 即得式 (1.29). 不妨假设 $a=0, b=1$, 不然考虑新的函数 $g(t)=(b-a)f(a(1-t)+bt)=(b-a)f(a+(b-a)t), t\in[0,1]$. g 满足 Lipschitz 条件 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant L_1|x_1-x_2|, L_1=(b-a)^2L$. 由于 f 的 Bernstein 多项式 $B_n(f)$ 保持 f 的 Lipschitz 常数, 而且在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f, 我们一开始就可以假设 f 是可导的, 此时 $|f'|\leqslant L$.

以下就在 $a=0, b=1$ 且 $|f'|\leqslant L$ 的条件下证明式 (1.30). 设

$$h_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{2L}f^2(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$
$$h_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{2L}f^2(t)-\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1],$$

其中

$$\beta_1(t)=\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,\quad \beta_2(t)=\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

则有 $h_1(0)=0, h_2(1)=0$, 且

$$\begin{aligned} h_1'(t)&=\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}f(t)+\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{L}f(t)f'(t)-f(t)\\ &=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{L}f(t)(L+f'(t))\geqslant 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2'(t)&=-\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}f(t)+\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{L}f(t)f'(t)+f(t)\\ &=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{L}f(t)(f'(t)-L)\leqslant 0.\end{aligned}$$

这说明 h_1 在 $[0,1]$ 上单调递增, 而 h_2 在 $[0,1]$ 上单调递减. 于是 h_1 和 h_2 都是非负函数, 即

$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}-1}{2L}f^2(t), \tag{1.31}$$

$$\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-1}{2L} f^2(t). \tag{1.32}$$

将此两式相加, 可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta_1(t)}+\mathrm{e}^{2L\beta_2(t)}-2}{2L} f^2(t). \tag{1.33}$$

容易证明对任意 $x>0, y>0$ 有

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y-2<\mathrm{e}^{x+y}-1.$$

因此从式 (1.33) 可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L(\beta_1(t)+\beta_2(t))}-1}{2L} f^2(t)=\frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L} f^2(t).$$

即式 (1.30) 成立.

□

1.5 凸性相关积分不等式

命题 1.4

设 f 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 则有

$$\begin{aligned} & f(t) \leqslant \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow\ & t(1-t) f(t) \leqslant(1-t)^2 \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+t^2 \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

♠

笔记 记忆这不等式以及这个不等式的证明!

证明 设 $t \in(0,1)$, 对于 $x \in[0,1]$, 有

$$t=(1-t)(t x)+t(1-x+t x).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leqslant(1-t) f(t x)+t f(1-x+t x).$$

上式对变量 x 在 $[a, b]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) & \leqslant(1-t) \int_0^1 f(t x)\,\mathrm{d}x+t \int_0^1 f(1-x+t x)\,\mathrm{d}x \\ & =\frac{1-t}{t} \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

例题 1.21 设 f 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 求证:

$$\int_0^1 t(1-t) f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3} \int_0^1\left(t^3+(1-t)^3\right) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

笔记 利用凸函数积分不等式命题 1.4.

证明 设 $t \in(0,1)$, 对于 $x \in[0,1]$, 有

$$t=(1-t)(t x)+t(1-x+t x).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leqslant(1-t) f(t x)+t f(1-x+t x).$$

上式对变量 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$f(t)\leqslant(1-t)\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x+t\int_0^1 f(1-x+tx)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因而

$$t(1-t)f(t)\leqslant(1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\ t\in[0,1].$$

积分可得

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left[(1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t+\int_0^1\left[t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\left[f(x)\int_x^1(1-t)^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left[f(x)\int_0^x t^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^3+(1-x)^3\right)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

命题 1.5

设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x\in[a,b]$, 都有

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\mathrm{d}y. \tag{1.34}$$

注 **Step2** 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

笔记 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x)=f(x)-p(x)$(其中 $p(x)$ 是 f 过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

证明 证法一:利用割线不等式可得, 对 $\forall x\in[a,b]$, 都有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\int_a^x\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)+f(a)\right]\mathrm{d}y+\int_x^b\left[\frac{f(b)-f(x)}{b-x}(y-b)+f(b)\right]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{f(x)+f(a)}{2}(x-a)+\frac{f(x)+f(b)}{2}(b-x)$$
$$=\frac{b-a}{2}f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2}$$
$$\geqslant\frac{b-a}{2}f(x).$$

证法二:由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to b^-}f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f\in C[a,b]$. 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

Step1 当

$$f(a)=f(b)=0,x_0\text{是}f(x)\text{最大值点},x_0\in(a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x\in[0,x_0]\\ f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1), & x\in[x_0,1]\end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0}x\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 \frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(1.34).

当 $x_0 = a$或b 时, 由 $f(a) = f(b) = 0$ 且 f 非负可知, 此时 $f(x) \equiv 0$ 结论显然成立.

Step2 一般情况可设

$$g(x) = f(x) - \left[f(1) - f(0)\right]x - f(0),$$

从而 $g(0) = g(1) = 0$, 于是 g 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(1.34)知

$$g(x) \leqslant 2\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y, \forall x \in [0,1]. \tag{1.35}$$

于是利用(1.35)知

$$f(x) - \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] \leqslant 2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right]\mathrm{d}y, \forall x \in [0,1].$$

从而

$$f(x) - 2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right]\mathrm{d}y, \forall x \in [0,1].$$

注意到对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right]\mathrm{d}y \leqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right]x + f(0) \leqslant 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right]\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right]x + f(0) \leqslant f(1) + f(0)\\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right]x \leqslant f(1)\\
\Leftrightarrow\ &f(1)(1-x) + f(0)x \geqslant 0
\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x \in [0,1], f(1), f(0) \geqslant 0$ 直接得到. 于是我们完成了证明.

□

例题 1.22 设 $f \in C^2[0,1]$ 是下凸函数且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leqslant \max\{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0,1].$$

证明 因为 $f \in C^2[0,1]$ 且下凸, 所以由下凸函数的单调性刻画知 f 的单调性只可能是递增、递减、先减后增其中一种. 无论是哪种情况, 都有 f 的最大值一定在端点 $0,1$ 处取到. 记 f 的最大值点为 $c \in \{0,1\}$, f 的最小值点 $d \in [0,1]$, 则 $f(c) = \max\{f(0), f(1)\}$. 由 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 及积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 故 $f(c) \geqslant 0$. 于是利用命题 1.5可得, 有

$$f(c) - f(d) \leqslant f(c) - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \Longrightarrow f(d) \geqslant 0 \geqslant -f(c).$$

故对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}
-\max\{f(0), f(1)\} = -f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(c) = \max\{f(0), f(1)\}\\
\Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant \max\{f(0), f(1)\}.
\end{aligned}$$

□

命题 1.6

设 g 是 $[-1,1]$ 上的下凸函数,$h(x) = g(x) + g(-x)$, 则 h 在 $[0,1]$ 上单调递增.

证明 证法一:由 Bernstein 多项式的性质知 g 的 Bernstein 多项式 $B_n(g,x)$ 可导且 $B_n(g,x) \rightrightarrows g(x)$, $B_n'(g,x) \rightrightarrows g'(x)$,

并且 $B_n(g,x)$ 仍是 $[-1,1]$ 上的下凸函数. 故可不妨设 $g \in D[-1,1]$. 再由 g 的下凸性知,$g'(x)$ 递增. 故

$$h'(x) = g'(x) - g'(-x) \geqslant 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

因此 h 在 $[0,1]$ 上递增.

证法二:对 $\forall 0 \leqslant a < b \leqslant 1$, 固定 a, b.

(i) 当 $a > 0$ 时, 由 g 的下凸性知

$$\frac{g(a)-g(0)}{a} \leqslant \frac{g(b)-g(a)}{b-a}. \tag{1.36}$$

注意到 $-b < -a < 0$, 再利用 g 的下凸性知

$$\frac{g(-a)-g(-b)}{-a-(-b)} \leqslant \frac{g(0)-g(-a)}{0-(-a)} \Longleftrightarrow \frac{g(-a)-g(-b)}{b-a} \leqslant \frac{g(0)-g(-a)}{a}. \tag{1.37}$$

由 g 的下凸性还有

$$g(0) \leqslant \frac{g(a)+g(-a)}{2} \Longleftrightarrow g(a)-g(0) \geqslant g(0)-g(-a). \tag{1.38}$$

由(1.36)(1.37)(1.38)式可得

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \geqslant \frac{g(a)-g(0)}{a} \geqslant \frac{g(0)-g(-a)}{a} \geqslant \frac{g(-a)-g(-b)}{b-a}.$$

故

$$g(b)-g(a) \geqslant g(-a)-g(-b) \Longleftrightarrow g(b)+g(-b) \geqslant g(a)+g(-a).$$

即 $h(b) \geqslant h(a)$.

(ii) 当 $a = 0$ 时, 由 g 的下凸性知

$$h(0) = 2g(0) \leqslant g(b)+g(-b) = h(b).$$

综上可知 h 在 $[0,1]$ 上递增.

□

例题 1.23 设 $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ 为偶函数,f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的下凸函数, 即对任意 $x, y \in [-1,1]$ 及 $t \in (0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y) \leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x$$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)\mathrm{d}x.$$

因而

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)dx \tag{1.39}$$

令 $h(x) = g(x)+g(-x)$, 则由命题 1.6知 h 在 $[0,1]$ 上递增. 故对任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big) \geqslant 0$$

因而

$$\int_0^1\int_0^1 \big(f(x)-f(y)\big)\big(h(x)-h(y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0$$

由此可得

$$2\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

结合(1.39)即得结论.

□

1.6 数值比较类

例题 1.24 证明如下积分不等式:

1. $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0.$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
3. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

笔记 此类问题都是考虑分母更小的时候正的更多, 通过换元把负的区间转化到正的同一个区间.

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x &\xlongequal{x=\sqrt{y}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{2\sqrt{y+\pi}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin y\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y+\pi}}\right)\mathrm{d}y > 0.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}\mathrm{d}y + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(-y)}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\right]\mathrm{d}y > 0.\end{aligned}$$

3. 本题稍有不同, 注意到

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin y)\mathrm{d}y, \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos y)\mathrm{d}y.$$

现在利用 $\sin x < x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 可得不等式链 $\cos\sin x > \cos x > \sin\cos x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 于是

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

□

定理 1.8 (Jordan 不等式)

$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

♡

证明 利用 $\sin x$ 的上凸性及割线放缩可得

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \geqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

□

例题 1.25 证明如下积分不等式

1. $\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$
2. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\mathrm{d}x \geqslant \sqrt{e}\pi.$
3. $\frac{\pi}{2}e^{-R} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\mathrm{d}x < \frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}, R > 0.$

4. $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x>\frac{2}{\pi}\ln(n+1),n\geqslant 2.$

注 $(2n)!!=2^n\cdot n!$.

证明

1.

$$\frac{\pi}{6}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\mathrm{d}x&=\int_0^\pi\sum_{n=0}^\infty\frac{\sin^{2n}x}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\int_0^\pi\sin^{2n}x\mathrm{d}x\\&=\pi\left[1+\sum_{n=1}^\infty\frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\right]=\pi\left[1+\sum_{n=1}^\infty\frac{(2n-1)!!}{2^n(n!)^2}\right]\\&\overset{(2n-1)!!\geqslant n!}{\geqslant}\pi\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2^n n!}=\sqrt{e}\pi.\end{aligned}$$

3.

$$\frac{\pi}{2}e^{-R}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}\mathrm{d}x\overset{\text{Jordan 不等式}}{<}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R}{\pi}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi(1-e^{-R})}{2R},R>0.$$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=k\pi+y}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin y|}{k\pi+y}\mathrm{d}y\\&>\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin y|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\&>\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(k+2)-\ln(k+1)]\\&=\frac{2}{\pi}\ln(n+1).\end{aligned}$$

还可以使用积分放缩法处理 $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$，如下所示:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^n\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\ln(n+1).$$

□

1.7 Fourier 积分不等式

定理 1.9 (Fourier 型积分不等式)

若 $f(x)\in C^1[a,b]$, 则

(1)

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 若 $f(a)=f(b)$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)+c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right),c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

(3) 若 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c\in\mathbb{R}.$$

注 (1) 中对 f 进行偶延拓的原因是: 使延拓后的区间端点函数值相等, 从而就能利用 Fourier 级数的逐项微分定理.

(2) 已经有区间端点函数值相等的条件了, 所以不需要进行延拓.

(3) 中对 f 进行奇延拓的原因是:f 满足 $f(a)=f(b)=0$, 此时对 f 做奇延拓后能使得 $f\in C^1[2a-b,b]$, 进而就能得到更好的结论.(如果只有 $f(a)=f(b)\neq 0$, 那么 f 奇延拓后在 $x=a$ 处间断.)

证明

(1) 把 $f(x)$ 延拓到 $[2a-b,b]$, 使得 $f(x)=f(2a-x),x\in[a,b)$, 则 $f(b)=f(2a-b),f\in C[2a-b,b]$ 且分段可微, 并且此时 f 关于 $x=a$ 轴对称. 因此设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

进而由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim-\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}[na_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)].$$

这里

$$a_n=\frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^b f(x)\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x,n\in\mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=(b-a)\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right],$$

$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-(b-a)\frac{a_0^2}{2}=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2=\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_{2a-b}^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

利用对称性, 就有

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x) \sim \frac{2\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + nb_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right).$$

这里

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x.$$

由 Parseval 恒等式, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right],$$
$$\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

因此

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{(b-a)\,a_0^2}{4} = \frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqslant \frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$\iff \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c_1 + c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right).$$

(3) 令

$$f(x) = -f(2a-x), x \in [2a-b, a),$$

则 $f(x) \in C^1[2a-b, b]$, 并且此时 f 关于 $(a,0)$ 点中心对称. 设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x) \sim \frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right).$$

这里

$$b_n = \frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^b f(x)\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$
$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leqslant (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

利用对称性, 我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

□

1.8 局部展开和能量积分法

命题 1.7

设 $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $g(a) = \min_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.40}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha}[g(x)-g(a)]^{\alpha}M, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.41}$$

证明 不妨设 $g(a) = 0$, 否则用 $g(x) - g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M = 0$, 则不等式(1.41)显然成立. 当 $M \neq 0$ 可以不妨设 $M = 1$.

现在对非负函数 g, 当 $g'(x_0) = 0$, 不等式(1.41)显然成立. 当 $g'(x_0) > 0$, 则利用(1.40)有

$$\begin{aligned}g(x_0) &\geqslant g(x_0) - g(h) = \int_h^{x_0} g'(t)\mathrm{d}t\\&\geqslant \int_h^{x_0}[g'(x_0) - |t-x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t\\&= g'(x_0)(x_0-h) - \frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(1.41)成立. 类似的考虑 $g'(x_0) < 0$ 可得(1.41).

当 $g'(x_0) < 0$, 则利用(1.40)有

$$\begin{aligned}g(x_0) &\geqslant -g(h) + g(x_0) = -\int_{x_0}^{h} g'(t)\mathrm{d}t\\&\geqslant -\int_{x_0}^{h}[g'(x_0) + |t-x_0|^{\alpha}]\mathrm{d}t\\&= -g'(x_0)(h-x_0) - \frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(1.41)成立.

□

推论 1.2

设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

证明 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 固定 x.

(i) 若 $f'(x)=0$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $f'(x)<0$, 则令 $h=\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h} f'(t)\mathrm{d}t=f(x)+\int_x^{x+h}\left[f'(t)-f'(x)\right]\mathrm{d}t+f'(x)h\\
&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f'(x)h=f(x)+\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f'(x)h\\
&=f(x)+\frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1}+f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x)-\frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<f(x)\Longleftrightarrow f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(iii) 若 $f'(x)>0$, 则令 $h=\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x} f'(t)\mathrm{d}t+f(x)=\int_{x-h}^{x}\left[f'(x)-f'(t)\right]\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h\\
&\leqslant\int_{x-h}^{x}(x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h=\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f(x)-f'(x)h\\
&=\frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1}+f(x)-f'(x)\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\left[f'(x)-\frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<f(x)\Longleftrightarrow\left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

□

例题 1.26 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数的非负函数, 且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|.$$

证明: 对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$.

证明 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x. 由 $f\geqslant 0$ 可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$\int_{x-h}^{x}[f'(x)-f'(t)]\mathrm{d}t=f'(x)h-[f(x)-f(x-h)]\geqslant f'(x)h-f(x).$$

又由条件可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$\int_{x-h}^{x}|f'(x)-f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant M\int_{x-h}^{x}|x-t|\mathrm{d}t=\frac{M}{2}h^2.$$

于是对 $\forall h>0$, 有

$$f'(x)h-f(x)\leqslant\int_{x-h}^{x}[f'(x)-f'(t)]\mathrm{d}t\leqslant\int_{x-h}^{x}|f'(x)-f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{2}h^2.$$

故对 $\forall h>0$, 都有

$$\frac{M}{2}h^2-f'(x)h+f(x)\geqslant 0.$$

因此

$$\Delta=(f'(x))^2-2Mf(x)\leqslant 0\Longleftrightarrow(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x).$$

再由 x 的任意性可知结论成立.

□

例题 1.27 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导, 且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)>0,\quad f'''(x)\leqslant f(x).$$

证明:$\forall x\in\mathbb{R}$ 成立

$$f'(x)<2f(x).$$

证明 证法一:由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都存在 ξ 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0<f(x+t)=f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2+\frac{f'''(\xi)}{6}t^3. \tag{1.42}$$

当 $t\leqslant 0$ 时, 由(1.42)式和条件可得

$$0<f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2+\frac{f'''(\xi)}{6}t^3\leqslant f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2.$$

当 $t>0$ 时, 由条件可得

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0.$$

故

$$f(x)+f'(x)t+\frac{f''(x)}{2}t^2>0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

由二次函数的性质可知

$$\Delta=\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^2<2f''(x)f(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1.43}$$

同理, 由 Taylor 定理可知, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都存在 η 在 x 与 $x+t$ 之间, 使得

$$0<f'(x+t)=f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2.$$

由 $f'>0$ 知 f 递增, 再结合 $f'''(x)<f(x)$, 由上式可得, 对 $\forall x,t\in\mathbb{R}$, 都有

$$0<f'(x)+f''(x)t+\frac{f'''(\eta)}{2}t^2<f'(x)+f''(x)t+\frac{f(\eta)}{2}t^2\leqslant f'(x)+f''(x)t+\frac{f(x)}{2}t^2.$$

于是由二次函数的性质可知

$$\Delta'=\left[f''(x)\right]^2-2f'(x)f(x)<0\Longrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f'(x)f(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1.44}$$

由(1.43)(1.44)式可得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left[f'(x)\right]^4<4\left[f''(x)\right]^2f^2(x)<8f'(x)f^3(x)\Longrightarrow\left[f'(x)\right]^3<8f^3(x)\Longrightarrow f'(x)<2f(x).$$

证法二 (能量积分法):由条件知 f,f',f'' 都是递增函数且有下界 0, 故

$$f(-\infty), f'(-\infty), f''(-\infty)\in[0,+\infty).$$

若 $f'(-\infty)=A>0$, 则存在 $-M<0$, 使得

$$f'(x)>\frac{A}{2},\quad\forall x\leqslant -M.$$

于是对 $\forall x<-M$, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(-M)+\int_{-M}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t=f(-M)-\int_{x}^{-M}f'(t)\,\mathrm{d}t\\&<f(-M)-\int_{x}^{-M}\frac{A}{2}\mathrm{d}t=f(-M)-\frac{A}{2}(-M-x)\\&=f(-M)+\frac{A}{2}(x+M).\end{aligned}$$

令 $x\to-\infty$ 得 $f(-\infty)=-\infty$, 这与 $f(-\infty)\in[0,+\infty)$ 矛盾! 故 $f'(-\infty)=0$. 同理可证 $f''(-\infty)=0$. 由条件可得

$$\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'=f'''(x)f''(x)<f(x)f''(x)=\left[f(x)f'(x)\right]'-\left[f'(x)\right]^2<\left[f(x)f'(x)\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\left[\left(f''(x)\right)^2\right]'\mathrm{d}t<\int_{-\infty}^{x}\left[f(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t\Longleftrightarrow\left[f''(x)\right]^2<2f(x)f'(x). \tag{1.45}$$

同理, 由条件可得

$$\left[f''(x)f'(x)\right]' - \left[f''(x)\right]^2 = f'''(x)f'(x) < f(x)f'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2.$$

从而

$$\left[f''(x)f'(x)\right]' < \frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'.$$

两边同时积分得, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{x}\left[f''(x)f'(x)\right]'\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^{x}\frac{3}{2}\left[(f(x))^2\right]'\mathrm{d}t \Longleftrightarrow f''(x)f'(x) < \frac{3}{2}f^2(x). \tag{1.46}$$

将(1.45)(1.46)两式相乘得

$$\left[f''(x)\right]^3 < 3f^3(x) \Longrightarrow f''(x) < \sqrt[3]{3}f(x) \Longrightarrow f''(x)f'(x) < \sqrt[3]{3}f(x)f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

两边再同时积分得

$$\int_{-\infty}^{x} f''(t)f'(t)\mathrm{d}t < \sqrt[3]{3}\int_{-\infty}^{x} f(t)f'(t)\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \left[f'(x)\right]^2 < \sqrt[3]{3}f^2(x) \Longleftrightarrow f'(x) < \sqrt[6]{3}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

1.9 其他

例题 1.28 设 $f \in C^2[0,1]$, 证明

(1)

$$|f'(x)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{1.47}$$

(2)

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{1.48}$$

(3) 若 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 则

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{1.49}$$

笔记 对于 $[a,b]$ 的情况, 考虑 $f(a+(b-a)x), x \in [0,1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

当 $f(a)f(b) \geqslant 0$, 我们有

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

证明

(1) 注意到对任何 $\theta \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant |f'(x)-f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x f''(y)\mathrm{d}y\right| + |f'(\theta)| \\ &\leqslant \int_0^1 |f''(y)|\mathrm{d}y + |f'(\theta)|.\end{aligned}$$

于是只需证明存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{1.50}$$

如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0,1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足 (1.50) 式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性

可知,f' 要么恒正,要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点,不妨设 $f>0$,则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\min_{[0,1]}|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\geqslant\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|,$$

这也给出了 (1.50) 式. 若存在 $t\in[0,1]$,使得 $f(t)=0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x)=f'(\theta)(x-t)\Longrightarrow|f(x)|=|f'(\theta)|\,|x-t|\geqslant\min_{[0,1]}f'\,|x-t|,\quad\forall x\in[0,1].$$

从而

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1|x-t|\mathrm{d}x\overset{\text{命题 1.10}}{\geqslant}\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|.$$

这也给出了 (1.50) 式. 于是我们证明了不等式(1.47)式.

(2) 直接对(1.47)式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分得(1.48)式.

(3) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)|\leqslant2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x.\tag{1.51}$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0)\geqslant0$,则当 f 递增,由 Lagrange 中值定理,我们有

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\cdot\min|f'|\Longrightarrow\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min|f'\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

当 f 递减,由 Lagrange 中值定理,我们有

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\alpha)\geqslant(1-x)\min|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

于是必有 (1.51) 式成立,这就给出了(1.49)式.

□

例题 1.29 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 是连续递增函数,记 $s=\dfrac{\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}$. 证明

$$\int_0^sf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{s}{1-s}\int_0^sf(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 看到函数复合积分就联想Jensen 不等式 (积分形式),不过Jensen 不等式 (积分形式)考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

证明 令 $F(t)=\int_0^tf(x)\,\mathrm{d}x$,则 $F'(t)=f(t)$ 连续递增,故 F 是下凸的. 显然 $s\in[0,1]$,于是

$$F(x)\geqslant F(s)+F'(s)(x-s)=F(s)+f(s)(x-s),\quad\forall x\in[0,1].$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1F(x)f(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^1\left[F(s)f(x)+f(s)f(x)(x-s)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\int_0^1\left[xf(x)-sf(x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\left[\int_0^1xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\int_0^1xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x}\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=F(s)\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1F(x)\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

故

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant F(s)=\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\implies \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x+\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\implies \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由分部积分可得

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x)}{F(1)}=1-\frac{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}{F(1)},$$

即 $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=(1-s)F(1)$. 又由 F 的下凸性可知

$$F(x)\leqslant\begin{cases}\dfrac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\ \dfrac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0), & x\in[0,s]\end{cases}.$$

于是

$$(1-s)F(1)=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^s\left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s)\right]\mathrm{d}x+\int_s^1\left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1)\leqslant\frac{1}{2}F(s)\implies F(1)\leqslant\frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(s)\leqslant\left(\frac{1}{1-s}-1\right)F(s)=\frac{s}{1-s}F(s)=\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 1.30 求最小实数 C, 使得对一切满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 f, 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x \leqslant C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x=1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是 n 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t=2.$$

令 $f_n(t)=(n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=1$. 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 t(n+1)t^n\,\mathrm{d}t=2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2, n\to\infty.$$

因此若 $C<2$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x>C$. 故 $C=2$ 就是最佳上界.

□

命题 1.8

设 $f \in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1, k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant n^2.$$

笔记 也可以利用命题 9.53得到

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{a^TJa}{a^THa} = \lambda_{\max}\left(JH^{-1}\right) = n^2.$$

证明 设 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2 \mathrm{d}x &\geqslant \left[\int_0^1 f(x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x\right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_jx^j\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_ix^{i+j}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_i \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}} = \frac{a^TJa}{a^THa},$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n\times n}.$$

显然 J 半正定, 由例题 8.18(3)可知 H 正定. 于是我们只需求 $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{a^TJa}{a^THa}$. 注意到

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{a^TJa}{a^THa} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^T J\frac{a}{\|a\|}}{\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^T H\frac{a}{\|a\|}} = \sup_{a\in\{\alpha\in\mathbb{R}^n:\|\alpha\|=1\}} \frac{a^TJa}{a^THa},$$

又 $\frac{a^TJa}{a^THa}$ 是定义在单位球面的 n 元连续函数, 故由单位球面的紧性和 H 的正定性以及 J 的半正定性知

$$0 < \sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{a^TJa}{a^THa} = \sup_{a\in\{\alpha\in\mathbb{R}^n:\|\alpha\|=1\}} \frac{a^TJa}{a^THa} < +\infty.$$

又 H 正定, 故

$$\begin{aligned}\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界} &\iff \lambda \geqslant \frac{a^TJa}{a^THa}, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^TJa \leqslant \lambda a^THa, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T(\lambda H - J)a \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

$$\iff \lambda H - J\text{半正定}.$$

因此 $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{a^TJa}{a^THa} = \inf\{\lambda>0 \mid \lambda H - J\text{半正定}\}$. 设 H_k, J_k 分别为 H, J 的 k 阶主子阵, 再设 $\lambda>0$. 根据打洞原理及例题 2.41(1)可得

$$|\lambda H_k - J_k| = |H_k||\lambda I_k - H_k^{-1}J_k| = |H_k||\lambda I_k - H_k^{-1}\mathbf{1}_k\mathbf{1}_k^T| = \lambda^{k-1}|H_k|(\lambda - \mathbf{1}_k^T H_k^{-1}\mathbf{1}_k).$$

其中 $\mathbf{1}_k^T = (1,1,\cdots,1)_{1\times k}$. 由 H 正定可知 $|H_k|>0$, 又因为 $\lambda>0$, 所以

$$|\lambda H_k - J_k| \geqslant 0 \iff \lambda \geqslant \mathbf{1}_k^T H_k^{-1}\mathbf{1}_k \xlongequal{\text{引理 6.3}} n^2.$$

因此

$$\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界} \iff \lambda H - J\text{半正定} \iff \lambda H - J\text{的主子式都大于等于}0 \iff \lambda \geqslant n^2.$$

故

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{a^TJa}{a^THa} = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J\text{半正定}\} = \inf\left[n^2, +\infty\right) = n^2.$$

结论得证.

□

命题 1.9 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{1.52}$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

但是上述**分部积分**部分需要零边界条件 (即需要 $\lim\limits_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 **专业技术**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

取紧化序列 $h_n, n\in\mathbb{N}$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|(h_nf)'(x)|^2\mathrm{d}x\\ &= 4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

右边让 $n\to+\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x\right] = \left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2<\infty$, 因此不能直接换序. 但是Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而不等式(1.52)成立.

Method 2 **正常方法**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty} x|f(x)|^2 = 0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty > \sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2\mathrm{d}y} \overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant} \int_x^{\infty} y|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y \geqslant x\int_x^{\infty} |f'(y)f(y)|\mathrm{d}y, \tag{1.53}$$

于是 $\int_x^{\infty} f(y)f'(y)\mathrm{d}y = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2 - \frac{1}{2}|f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$, 因此由积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在 $x_n \to \infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n|f(x_n)| = 0$, 于是再结合 $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} f(y) = 0.$$

现在继续用(1.53), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2\mathrm{d}y} \geqslant x\int_x^{\infty} f'(y)f(y)\mathrm{d}y = \frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

令 $x \to +\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2\mathrm{d}y} \to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x|f(x)|^2 = 0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

即不等式(1.52)成立.

□

例题 1.31 设 $f : [0,+\infty) \to (0,1)$ 是内闭 Riemman 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 < 2\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{1.54}$$

证明 记 $a = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 0$, 待定 $s > 0$, 则不等式(1.54)等价于

$$\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + \int_s^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + s\int_s^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + s\left(a - \int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{a^2}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + s\int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x)f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

利用 $f < 1$, 取 $s = a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x)f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x)f(x)\mathrm{d}x < -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而

$$\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(1.54).

□

命题 1.10

设 f 是 $[0,1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 a 有

$$\int_0^1 |f(x)-a|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}x. \tag{1.55}$$

证明 不妨设 f 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (1.55) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (a-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x)-a)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |a-f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)-a|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(x)-a|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

故式 (1.55) 成立.

□

例题 1.32 若 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 由已知条件, 对任意正数 ε, 存在正整数 k 使得

$$|f_k(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

因为 $f_k \in R([a,b])$, 所以存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\omega_j(f_k)$ 是 f_k 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的振幅. 因为

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(y)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x)-f_k(y)|,
\end{aligned}$$

所以

$$\omega_j(f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)\left(x_j - x_{j-1}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j\left(f_k\right)\left(x_j - x_{j-1}\right) < \varepsilon.$$

故 f 在 $[a,b]$ 上可积.

□

例题 1.33 设 f 在 $[a,b]$ 上非负可积. 求证: 数列 $I_n = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

注 当 f 是连续函数时, 可以进一步证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$(见例题**??**).

证明 要比较 I_n 与 I_{n+1} 的大小, 就要比较 f^n 的积分与 f^{n+1} 之间的关系. 这可以利用Hölder 不等式:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b 1\cdot f^n(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \left(\int_a^b 1^{n+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}}\\ &= (b-a)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n+1}},\end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故 $\{I_n\}$ 是单调递增数列.

□

例题 1.34 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证: 对 $p\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b \left[(b-a)^p-(x-a)^p\right]|f'(x)|^p\mathrm{d}x.$$

证明 为了建立 $|f|^p$ 的积分与 $|f'|^p$ 的积分之间的关系, 先建立 $|f|$ 与 $|f'|$ 的积分的关系. 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

所以对于 $p>1$ 应用Hölder 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left(\int_a^x 1^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= (x-a)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 因而

$$|f(x)|^p \leqslant (x-a)^{p-1}\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

注意到上式对 $p=1$ 也是成立的. 上式两边在 $[a,b]$ 上积分, 可得

$$\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)^{p-1}\left(\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t$ 是 $|f'|^p$ 的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{p}(x-a)^p\int_a^x |f'(t)|^p\mathrm{d}t\bigg|_a^b - \frac{1}{p}\int_a^b (x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{p}(b-a)^p\int_a^b |f'(t)|^p\mathrm{d}t - \frac{1}{p}\int_a^b (x-a)^p|f'(x)|^p\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{p}\int_a^b \left[(b-a)^p-(x-a)^p\right]|f'(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例题 1.35 设 f 是 $[0,a]$ 上的连续函数, 且存在正常数 M,c 使得

$$|f(x)|\leqslant M+c\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

求证: $|f(x)|\leqslant M\mathrm{e}^{cx}$ $(\forall x\in[0,a])$.

证明 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x) \leqslant M + cF(x).$$

令

$$G(x) = F(x)e^{-cx} + \frac{M}{c}e^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(t)e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &= |f(x)|e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &\leqslant (M + cF(x))e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} = 0. \end{aligned}$$

这说明 G 在 $[0, a]$ 上单调递减. 因为 $G(0) = \frac{M}{c}$, 所以 $G \leqslant \frac{M}{c}$. 因而

$$F(x) + \frac{M}{c} \leqslant \frac{M}{c}e^{cx}.$$

再结合条件可得 $|f(x)| \leqslant M + cF(x) \leqslant Me^{cx}$.

□

例题 1.36 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上连续且对任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 1.$$

求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

注 结论中的 $\frac{\pi}{4}$ 是最佳的, 这只要取 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 即可验证.

证明 结论中出现 π 且条件中要求 $x, y \in [0, 1]$. 因此将条件中的 x, y 分别换成 $\sin t$ 和 $\cos t$, 有

$$f(\cos t)\sin t + f(\sin t)\cos t \leqslant 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

由区间再现恒等式可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

作变换 $\sin t = x$ 即得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

□

例题 1.37 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上有可积的导函数且满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 求证: 对任意 $a \geqslant 0$ 有

$$\int_0^1 |af(x) + f'(x)|\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

证明 因为 $e^{-ax} \geqslant e^{-a}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 |af(x) + f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_0^1 |(e^{ax}f(x))'e^{-ax}|\mathrm{d}x \geqslant e^{-a}\int_0^1 |(e^{ax}f(x))'|\mathrm{d}x \\ &\geqslant e^{-a}\left|\int_0^1 (e^{ax}f(x))'\mathrm{d}x\right| = e^{-a}|e^a f(1) - f(0)| = 1. \end{aligned}$$

□

例题 1.38 设 f 在 $[0, 2]$ 上可导且 $|f'| \leqslant 1, f(0) = f(2) = 1$. 求证:

$$1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$$

证明 由 Taylor 中值定理可知, 存在 $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [1, 2]$, 使得

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, \forall x \in [0, 1].$$

$$f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2),\forall x\in[1,2].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1[1+f'(\xi_1)x]\mathrm{d}x+\int_1^2[1+f'(\xi_2)(x-2)]\mathrm{d}x\\&=2+\frac{f'(\xi_1)}{2}-\frac{1}{2}f'(\xi_2).\end{aligned}$$

由 $|f'|\leqslant 1$ 可知

$$1=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\leqslant 2+\frac{f'(\xi_1)}{2}-\frac{1}{2}f'(\xi_2)\leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3.$$

故

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

□

例题 1.39 设 f 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$

且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 其中 A 是常数.

笔记 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑 $(ax+b)f'(x)$ 的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

证明 设 t 是任意常数, 有

$$\int_0^1(x+t)f'(x)\mathrm{d}x=(x+t)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_0^1(x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_0^1(x+t)^2\mathrm{d}x\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{3}+t+t^2\right)\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取 $t=-\frac{1}{2}$, 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数 C 使得 $f'(x)=C\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 注意到 $f(0)=f(1)=0$, 可得 $f(x)=Ax(1-x)$, 这里 A 为任意常数.

□

例题 1.40 设 f,g 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 使得对 $[0,1]$ 上任意满足 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 的连续可导函数 φ 有

$$\int_0^1\left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

求证:f 可导, 且 $f'=g$.

证明 设

$$c=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t$$

考察函数

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+c$$

显然 G 可导且 $G'(x)=g(x),G(1)=\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+c$. 只需证明 $f=G$. 令

$$\varphi(x)=\int_0^x \left[f(t)-G(t)\right]\mathrm{d}t$$

则 φ 可导, 且 $\varphi(0)=0$,

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\left[tG(t)\Big|_0^1-\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\right]=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-G(1)+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t-c+\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1 \left[f(x)\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=G(x)\varphi(x)\Big|_0^1-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 G(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 \left[f(x)-G(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=0$$

注意到 $\varphi'=f-G$. 我们有

$$\int_0^1 \left[f(x)-G(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

于是 $f=G$.

□

命题 1.11

设 f 是区间 $[a,b]$ 上的严格单调递减连续函数,$f(a)=b,f(b)=a,g$ 是 f 的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $p>0,q>0$ 取 $f(x)=(1-x^q)^{\frac{1}{p}},g(x)=(1-x^p)^{\frac{1}{q}}$, 可得

$$\int_0^1 (1-x^p)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x^q)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}x.$$

证明 因为可以用在 a,b 分别插值于 $f(a),f(b)$ 的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在 $[a,b]$ 上一致逼近 $f(x)$, 所以只需对 f 是连续可微函数的情况证明.

作变换 $x=f(t)$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_b^a g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_b^a tf'(t)\,\mathrm{d}t\\&=tf(t)\Big|_b^a-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故所证等式成立.

□

例题 1.41 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=f(y)$. 因此对任意 $x\in[a,b]$, 有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)-f(x)=f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

关于 x 在 $[a,b]$ 上积分, 即得

$$(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant (b-a)\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

两边除以 $b-a$ 即得所证.

□

例题 1.42 设 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,$f\in C^1[0,1]$ 且满足 $f(1)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{4}{3-4\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 $\alpha\in[0,1)$ 且 $\alpha\neq\frac{1}{2}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对 $x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}f^2(x)&=\left(\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_x^1 t^{-\alpha}\cdot t^{\alpha}f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\\&\leqslant\int_x^1 t^{-2\alpha}\,\mathrm{d}t\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-2\alpha}(1-x^{1-2\alpha})\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1(1-x^{1-2\alpha})\left(\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-2\alpha}\left[\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)\int_x^1 t^{2\alpha}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big|_0^1\right.\\&\quad\left.+\int_0^1\left(x-\frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right)x^{2\alpha}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\tag{1.56}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left|\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=x\left(\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\Big|_0^1+\int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x|f'(x)|\,\mathrm{d}x.\tag{1.57}$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\left(\int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}}\cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\left(\int_0^1 x^{1-2\alpha}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2-2\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合式 (1.56), 可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\tag{1.58}$$

在上式中取 $\alpha=\frac{3}{4}$, 即得

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.59}$$

对 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, 将式 (1.58) 两边乘以 $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$ 再与式 (1.59) 相加可得

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{4}{3-4\alpha}\int_0^1 x^{2\alpha+1}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 1.43 设 f 在 $[0,1]$ 上非负且连续可导. 求证:

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$, 则有

$$-Mf(x)\leqslant f(x)f'(x)\leqslant Mf(x),\quad\forall x\in[0,1]$$

因此

$$-M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(0)\leqslant M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad\forall x\in[0,1]$$

上式两边乘以 f 得

$$-Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}f^3(x)-\frac{1}{2}f^2(0)f(x)\leqslant Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad\forall x\in[0,1]$$

将上式关于变量 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$-M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

结论得证.

□

例题 1.44 设 f 在 $[0,1]$ 上非负单调递增连续函数,$0<\alpha<\beta<1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

并且 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

注 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

证明 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in(\alpha,\beta)$ 使得

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(\beta-\alpha)$$

因而由 f 的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(\beta-\alpha)f(\beta)$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\beta^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\beta^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\beta^1 f(\beta)\,\mathrm{d}x\\&=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+(1-\beta)f(\beta)\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1-\beta}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取正整数 n 使得 $\alpha+\frac{1}{n}<\beta$. 构造函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ n(x-\alpha), & \alpha<x\leqslant\alpha+\frac{1}{n},\\ 1, & \alpha+\frac{1}{n}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha-\frac{1}{2n},\quad \int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x=\beta-\alpha-\frac{1}{2n}.$$

因而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

故题中 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换成更大的数.

□

例题 1.45 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续的二阶导函数,$f(0)=f(1)=0,f'(1)=\frac{a}{2}$. 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的 f.

注 当 f 在端点的值为零,f' 在端点的值确定时, 可以考虑 f'' 与线性函数的乘积的积分.

证明 根据分部积分,Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_0^1 x(f''(x)-a)^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x+a^2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\left(xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)+\frac{a^2}{2}\\&=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-2a\left(f'(1)-f(1)+f(0)\right)+\frac{a^2}{2}\\&=\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x)=a$$

即 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$. 因为 $f(0)=f(1)=0,f'(1)=\frac{a}{2}$, 所以 $c=0,b=-\frac{a}{2}$. 因此

$$f(x)=\frac{1}{2}ax(x-1).$$

□

例题 1.46 设 n 是正整数, 且 $m>2$. 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{m\cdot n^{m-2}}{8(m-2)}-\frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

注 当利用积分的可加性把区间 $[a,b]$ 上的积分分为区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的 c.

证明 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt|\leqslant n\sin t,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 另外又有

$$|\sin nt|\leqslant 1,\quad \sin t\geqslant\frac{2t}{\pi},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

设 $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^m \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^a tn^m \,\mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^m \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}}\right).\end{aligned}$$

易知函数 $g(a) = \frac{1}{2}n^m a^2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$ 当 $a = \frac{\pi}{2n}$ 时取最小值. 于是将上面的 a 换成 $\frac{\pi}{2n}$ 可得

$$\int_0^{\pi/2} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^m \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)}\right)\pi^2.$$

□

例题 1.47 设 $n \geqslant 1$ 是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2}\ln n.$$

证明 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x > \frac{2x}{\pi}$, 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{2t/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

用数学归纳法容易证明当 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 有 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/(2n+1)} \left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t} + \cos 2nt\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \int_0^{\pi/(2n+1)} 2n\cos t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} < 2n\sin\frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \left(2n + \frac{1}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1},\end{aligned}$$

$$-\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n}\left(\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t} + \cos 2nt\right)\mathrm{d}t < -\int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \cos 2nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\sin\frac{\pi}{2n+1}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \left(2n + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1} < \left(2n + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi + \frac{\pi}{2}\ln n.$$

两边同时除以 π 得:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,\mathrm{d}t < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2}\ln n.$$

□

命题 1.12

设 f 在区间 $[0,a)$ 上有二阶连续导数, 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且 $f''(x)>0\,(0<x<a)$. 求证: 对任意 $x\in(0,a)$, 有

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,\mathrm{d}t < x+\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}. \tag{1.60}$$

注 式 (1.60) 左端是弧长计算公式, 不等式 (1.60) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点 A 和终点 B 处的切线在曲线凸出的一侧相交于 C 点, 则直线段 AC 与 BC 的长度之和大于这条曲线段的长度.

证明 将式 (1.60) 右端第一项 x 移到左端, 有

$$\int_0^x \left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $f'(t)$ 和 $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$ 都是单调递增函数, 所以 $\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+1}$ 是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x \left(\sqrt{1+(f'(t))^2}-1\right)\mathrm{d}t<\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}\cdot\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}+1}.$$

□

例题 1.48 f 是区间 $[0,1]$ 上的正连续函数,$k\geqslant 1$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f^k(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1.61}$$

并讨论等号成立的条件.

证明 当 $k\geqslant 1$ 时, 函数 $\dfrac{t^k}{1+t}$ 和 t^{k+1} 都是单调递增的. 因此对于任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)}\left(\frac{f^k(x)}{1+f(x)}-\frac{f^k(y)}{1+f(y)}\right)\left(f^{k+1}(x)-f^{k+1}(y)\right)\geqslant 0, \tag{1.62}$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)}+\frac{f(y)}{1+f(x)}\leqslant\frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)}\cdot\frac{1}{f^k(y)}+\frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)}\cdot\frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量 x,y 在区间 $[0,1]$ 上积分, 即得所证.

要使式 (1.61) 成为等式, 必须式 (1.62) 成为等式. 因此对任意 $x,y\in[0,1]$, 有 $f(x)=f(y)$, 即 f 在 $[0,1]$ 上为常数.

□

例题 1.49 设 $b\geqslant a+2$. 函数 f 在 $[a,b]$ 上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant 1. \tag{1.63}$$

并求式 (1.63) 成为等式的条件.

证明 令 $g(x)=\dfrac{b-a}{1+f(x)}$, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续且 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=b-a$. 从 g 的定义可得 $f(x)=\dfrac{b-a-g(x)}{g(x)}$. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}&=\frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a}\\
&=\frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1}\right]\leqslant\frac{1}{b-a}\left[-1+\frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1}\right]\\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1},
\end{aligned}$$

故

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1.$$

等号成立当且仅当 $g(x)=1$, 即 $f(x)=b-a-1$ 时成立.

□

例题 1.50 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续函数, 且在 $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ 上等于零. 又设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (h>0).$$

求证:

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 作变换 $u=t-x$, 得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-h}^{h} |f(u+x)|\,\mathrm{d}u.$$

因此

$$\int_a^b \int_{-h}^{h} |f(u+x)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h}\int_a^b |f(u+x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u.$$

作变换 $v=u+x$, 得

$$\int_a^b |f(u+x)|\,\mathrm{d}x = \int_{a+u}^{b+u} |f(v)|\,\mathrm{d}v = \begin{cases} \displaystyle\int_{a+u}^{b} |f(v)|\,\mathrm{d}v, & u \geq 0,\\ \displaystyle\int_{a}^{b+u} |f(v)|\,\mathrm{d}v, & u<0 \end{cases} \leqslant \int_a^b |f(v)|\,\mathrm{d}v.$$

由此可知

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{-h}^{h}|f(u+x)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_a^b|f(u+x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_a^b|f(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_a^b|f(v)|\,\mathrm{d}v.$$

□

例题 1.51 设 f 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续并满足

$$x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\int_1^x t f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.64}$$

求 f.

解 假设 f 是满足条件的连续函数, 则对式 (1.64) 两边求导得

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x^2 f(x). \tag{1.65}$$

由此可知,$f(1)=0$, 且当 $x\geqslant 1$ 时,f 可导. 对式 (1.65) 两边求导得

$$f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x),$$

即

$$f'(x) = \frac{1-3x}{x^2} f(x), \quad x\geqslant 1. \tag{1.66}$$

所以

$$|f'(x)| \leqslant 2|f(x)|. \tag{1.67}$$

令 $g(x)=\mathrm{e}^{-4x}f^2(x)$, 则有

$$g'(x)=2\mathrm{e}^{-4x}\left(f(x)f'(x)-2f^2(x)\right).$$

结合式(1.67) 可知 $g'\leqslant 0$, 这说明 g 单调递减. 因为 $g(1)=0$, 所以 $g\leqslant 0$. 但从 g 的定义知 $g\geqslant 0$. 于是 $g=0$, 从而 $f=0$.

实际上, 由(1.66)可解得 $f(x)=Ce^{\int_1^x \frac{1-3t}{t^2}\,\mathrm{d}t}=Ce^{1-\frac{1}{x}-3\ln x}$, 再将 $f(1)=0$ 代入得 $C=0$. 故 $f\equiv 0$.

总之, 原方程 (1.64) 的解只有 $f\equiv 0$.

□

例题 1.52 设 f 在任意有限区间上可积, 且对任意 x 及任意 $a\neq 0$ 满足

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

试求函数 f.

解 易知线性函数满足上面的式子. 下面证明满足上式的函数必是线性函数. 由条件知, 对任意 x 和 a, 有

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t=2af(x).$$

因此

$$2af(x+y)=\int_{x+y-a}^{x+y+a} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{y+x-a}^{y+a-x} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{y+a-x}^{x+y+a} f(t)\,\mathrm{d}t=2(a-x)f(y)+2xf(y+a).$$

取 $a=1, y=0$ 就得

$$f(x)=(f(1)-f(0))x+f(0),$$

即 f 是线性函数.

□

例题 1.53 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有下界的连续函数. 若存在常数 $a\in(0,1]$ 使得

$$f(x)-a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数, 则 f 无穷可微且它的任意阶导函数都是非负的.

证明 不妨设 $m=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$ (不然将 f 换为 $f-m$ 之后再证明). 此时 $f\geqslant 0$. 记

$$A=f(x)-a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.68}$$

则 $f\geqslant A$. 因此, $A\leqslant 0$. 由式 (1.68) 知 f 无穷可微, 且

$$f'(x)=af(x+1)-af(x). \tag{1.69}$$

记 $a_1=a$, 则

$$f'(x)+a_1f(x)\geqslant 0.$$

假设存在 $a_n>0$ 使得

$$f'(x)+a_nf(x)\geqslant 0. \tag{1.70}$$

则 $(e^{a_nx}f(x))'\geqslant 0$. 这说明函数 $e^{a_nx}f(x)$ 是递增的. 由式 (1.68) 可得

$$\begin{aligned}
f(x)&\leqslant a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t=a\int_x^{x+1} e^{a_nt}f(t)e^{-a_nt}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant ae^{a_n(x+1)}f(x+1)\int_x^{x+1} e^{-a_nt}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}af(x+1)\\
&=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}(f'(x)+af(x)).
\end{aligned}$$

由此可得

$$f'(x)+a_{n+1}f(x)\geqslant 0, \tag{1.71}$$

其中

$$a_{n+1}=a-\frac{a_n}{e^{a_n}-1}.$$

若 $a_{n+1}\leqslant 0$, 则由 (1.71) 得 $f'\geqslant 0$. 若 $a_{n+1}>0$, 则接着可构造 a_{n+2}. 若 $\{a_n\}$ 均为正的, 则 $\{a_n\}$ 为递减正数列, 设其极限为 $r\geqslant 0$. 若 $r>0$, 则从上式得 $r=a-\frac{r}{e^r-1}$, 即 $a=\frac{re^r}{e^r-1}>1$. 这与条件不符, 因此必有 $r=0$. 在式 (1.70) 中令 $n\to+\infty$, 即得对一切 x 有 $f'(x)\geqslant 0$. 注意到

$$f^{(n)}(x)-a\int_x^{x+1}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

因而将前面的 f 换为 f', 可以得到 $f''(x)\geqslant 0$, 依次可以证明 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$.

□

例题 1.54 求所有连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意正整数 n, 有

$$n^2\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)\,\mathrm{d}t=nf(x)+\frac{1}{2}.$$

解 设 f 是要求的一个连续函数, 则 f 是可导的且

$$n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1.72}$$

由此知 f 二阶可导, 且

$$n\left[f'\left(x+\frac{1}{n}\right)-f'(x)\right]=f''(x). \tag{1.73}$$

将 (1.72) 中的 n 换成 $2n$, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{2n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1.74}$$

将上式中的 x 换成 $x+\frac{1}{2n}$ 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right). \tag{1.75}$$

将式 (1.72) 两边乘以 2 再减去式 (1.74) 两边, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'(x). \tag{1.76}$$

从式 (1.75) 和式 (1.76) 得

$$f'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right),\quad \forall n\in\mathbb{Z}^+,\forall x\in\mathbb{R}.$$

由(1.73)式可知 $f''=0$. 因而存在常数 a,b 使得 $f(x)=ax+b$. 代入题设条件可得 $a=1$. 于是 $f(x)=x+b$, 这里 b 是任意常数.

□

例题 1.55 设 $f\in C[-1,1]$ 且对任意整数 n 满足

$$\int_0^1 f(\sin(nx))\,\mathrm{d}x=0. \tag{1.77}$$

求证: 对任意 $x\in[-1,1]$ 有 $f(x)=0$.

证明 在式 (1.77) 中取 $n=0$, 可得 $f(0)=0$. 对任意非零整数 n, 将式 (1.77) 中的积分作变换 $t=nx$ 可得

$$\int_0^n f(\sin t)\,\mathrm{d}t=0.$$

令

$$F(x)=\int_x^{x+1}f(\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

则 F 可导, 且 $F(n)=0$. 对整数 k 有

$$
\begin{aligned}
F(x+2k\pi) &= \int_{x+2k\pi}^{x+2k\pi+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x+1} f(\sin(t+2k\pi))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x}^{x+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = F(x).
\end{aligned}
$$

因而 $F(n+2k\pi)=F(n)=0$. 这说明 F 在集合 $A=\{n+2k\pi \mid n,k\in\mathbb{Z}\}$ 上取值为 0. 由于集合 A 在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的, 由 F 的连续性可知 $F(x)=0\,(x\in\mathbb{R})$. 于是

$$
F'(x)=f(\sin(x+1))-f(\sin x)=0.
$$

这说明 $f(\sin x)$ 是以 1 和 2π 为周期的连续函数. 仍由集合 A 的稠密性可知 $f(\sin x)$ 是常数. 因此 f 在 $[-1,1]$ 上是常数. 故 $f(x)=f(0)=0$.

□

例题 1.56 设 f 是 $[0,2\pi]$ 上可导的凸函数, f' 有界, 试证

$$
a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0.
$$

证明 因为 f 是可导的凸函数, 所以 f' 是单调递增的函数. 由 f' 的单调有界性, 知 f' 在 $[0,2\pi]$ 上可积. 根据分部积分公式, 得

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = f(x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\sin\left((k-1)\pi+x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)(-1)^{k-1}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1} f'\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(f'\left(x+\frac{(2k-2)\pi}{n}\right)-f'\left(x+\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\right)\sin x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

注意到 f' 是单调递增的, 即知 $a_n\geqslant 0$.

□

例题 1.57 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, $f(0)=0$. 求证:

$$
\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x, \tag{1.78}
$$

且右边的系数 4 是最佳的.

证明 证法一:因为

$$
f'(x)=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)'+\frac{f(x)}{2x},
$$

所以

$$
\left(f'(x)\right)^2=\left[x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)'\right]^2+\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)'+\frac{f^2(x)}{4x^2}\geqslant\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right)'+\frac{f^2(x)}{4x^2}.
$$

因而

$$
\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}f^2(1)+\int_0^1\frac{f^2(x)}{4x^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\frac{f^2(x)}{4x^2}\mathrm{d}x,
$$

即所证不等式 (1.78) 成立.

若存在常数 $c\in(0,4)$ 使得

$$\int_0^1\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant c\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x \tag{1.79}$$

对任意满足条件的 f 成立, 则对 $\delta\in(0,1)$ 取

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\in[\delta,1],\\ \dfrac{3}{2\sqrt{\delta}}x-\dfrac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x^2, & x\in[0,\delta).\end{cases}$$

此时, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^\delta\left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}}-\frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x\right)^2\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\delta\left(\frac{9}{4\delta}-\frac{3x}{2\delta^2}+\frac{x^2}{4\delta^3}\right)\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{19}{12}+\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\\ \int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x&=\int_0^\delta\left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}}-\frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}}x\right)^2\mathrm{d}x+\int_\delta^1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^\delta\left(\frac{9}{4\delta}-\frac{3x}{\delta^2}+\frac{x^2}{\delta^3}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{13}{12}+\frac{1}{4}\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此式(1.79)导致

$$\left(1-\frac{c}{4}\right)\int_\delta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{13}{12}c-\frac{19}{12}.$$

此式当 δ 充分小时是不成立的. 这个矛盾说明 4 是最佳的.

证法二: 利用 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}&=\left[\int_0^1\left(\int_0^1 f'(xt)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant\int_0^1\left(\int_0^1|f'(xt)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t&\xlongequal{\text{换元}}\int_0^1\left(\frac{\int_0^t|f'(x)|^2\mathrm{d}x}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\ \leqslant\left(\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t&=2\left(\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

从上式推导可以看出, 对于不恒为零的 f, 严格不等号成立.

为说明相关常数不可改进, 任取 $\varepsilon\in(0,1)$, 考察不恒为零的 $\bar{f}\in C[\varepsilon,1]$ 使得

$$\frac{\int_\varepsilon^1\frac{|\bar{f}(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^1|\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x}=\lambda\equiv\sup_{\substack{f\in C[\varepsilon,1]\\ f\not\equiv0}}\frac{\int_\varepsilon^1\frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_\varepsilon^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

这样的 $\bar{f}$ 的存在性一般需要用泛函分析. 这里只作形式推导. 任取 $\varphi\in C_c^1(\varepsilon,1)$, 则

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\int_\varepsilon^1\frac{|\bar{f}(x)+s\varphi(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_\varepsilon^1|\bar{f}'(x)+s\varphi'(x)|^2\mathrm{d}x}\Bigg|_{s=0}\\&=\frac{2\lambda}{\int_\varepsilon^1|\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\lambda}\int_\varepsilon^1\frac{\bar{f}(x)\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^1\bar{f}'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{2\lambda}{\int_\varepsilon^1|\bar{f}'(x)|^2\mathrm{d}x}\int_\varepsilon^1\left(\bar{f}''(x)+\frac{1}{\lambda}\frac{\bar{f}(x)}{(x+\varepsilon)^2}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此, 尝试寻找 $\bar{f}$ 满足

$$\bar{f}''(x)+\frac{1}{\lambda}\frac{\bar{f}(x)}{x^2}=0,\quad x\in[\varepsilon,1].$$

若取 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\bar{f}(x)=x^\alpha$ 满足上述方程. 对应的 $\lambda=\dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$, 为使得 λ 最大, 取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

以上讨论启发我们考虑

$$f'_\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x\in[0,\varepsilon],\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in(\varepsilon,1].\end{cases}$$

则

$$f_\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x\in[0,\varepsilon],\\ \sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, & x\in(\varepsilon,1].\end{cases}$$

直接计算得到

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\int_0^1\frac{|f_\varepsilon(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^1|f'_\varepsilon(x)|^2\mathrm{d}x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{2\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{4}-\ln\varepsilon-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{\ln\varepsilon}{4}}=4.$$

这就表明不等式中的常数 4 是最佳的.

□

例题 1.58 设 $f,g:[a,b]\to(0,+\infty)$ 都是连续函数, 且 $f\neq g$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 定义数列

$$I_n=\int_a^b\frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,\cdots$$

求证:$\{I_n\}$ 严格单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.

证明 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}\cdot\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{f^2(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

即 $I_0\leqslant I_1$, 等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}=c\sqrt{g(x)}$, 即 $f(x)=cg(x)$. 再由条件 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 可得 $c=1$. 这与 $f\neq g$ 矛盾, 故 $I_0<I_1$.

假设 $I_0<I_1<\cdots<I_n$, 根据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_a^b\frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)}\cdot g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_a^b\left(\frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+1}{n+2}}\left(\int_a^b\left(g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x)\right)^{n+2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+2}}\\&=I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}}\cdot I_0^{\frac{1}{n+2}}<I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}}\cdot I_n^{\frac{1}{n+2}}\end{aligned}$$

因而 $I_n<I_{n+1}$, 这样, 根据数学归纳法原理, 就证明了 $\{I_n\}$ 严格单调递增.

若对任意 $x\in(a,b)$, 有 $g(x)\geqslant f(x)$, 则 $g(x)-f(x)\geqslant0$. 根据条件 $g(x)-f(x)$ 连续且满足 $\displaystyle\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x=0$,

这可推出 $f=g$, 与条件矛盾! 因此必存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>g(x_0)$, 因而存在正数 $\delta<\min\{x_0-a,b-x_0\}$ 使得

$$f(x)>g(x),\quad x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$$

记 $m=\min\limits_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 则 $m>1$, 因此

$$I_n\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n f(x)\mathrm{d}x\geqslant m^n\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x$$

令 $n\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.

□

例题 1.59 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 定义 $g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (x\in\mathbb{R})$. 如果 g 是 $\mathbb{R}$ 上的递减函数, 求证:$f\equiv 0$.

证明 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 F 可导且 $F'=f$. 由条件知

$$(F^2(x))'=2F'(x)F(x)=2g(x)$$

是单调递减函数. 注意到 $F(0)=0$. 有 $(F^2(x))'\leqslant 0\,(x>0)$,$(F^2(x))'\geqslant 0\,(x<0)$. 这说明 $F^2(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时单调递减, 当 $x\leqslant 0$ 时单调递增. 因此 F^2 的最大值为 $F^2(0)=0$. 但显然 $F^2\geqslant 0$. 故 $F=0$, 于是 $f=F'=0$.

□

例题 1.60 设 $f\in C[0,1]$. 如果对任意 $x\in[0,1]$ 有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(x)\geqslant 0,$$

求证:$f(x)\equiv 0$.

证明 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则 F 可导且 $F'=f$. 由条件知 $F(x)\geqslant F'(x)$. 因此 $(\mathrm{e}^{x}F(x))'\leqslant 0$, 即 $\mathrm{e}^xF(x)$ 单调递减. 由 $F(0)=0$, 得 $F(x)\leqslant 0$. 但由条件 $F(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$, 故 $F(x)=0$, 于是 $f(x)=F'(x)=0$.

□

命题 1.13

设 $g(x)\in C^2[0,1]$ 是递增的下凸函数, 则有

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(x)-g(x^2)}}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^1|g'(x)|^2\mathrm{d}x,\tag{1.80}$$

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x)}}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^1|g'(x)|^2\mathrm{d}x.\tag{1.81}$$

笔记 这题的下确界 inf 可以改成最小值 min, 因为可取到等号.

证明 我们令

$$F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y+g(x),$$

则 $F(x^2)\geqslant F(x),\forall x\in[0,1]$, 因此由 F 连续性, 就有

$$F(x)\geqslant F\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\geqslant F\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\geqslant\cdots\geqslant\lim_{n\to\infty}F\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)=F(1),\forall x\in(0,1],$$

于是我们有 $F(x)\geqslant F(1),\forall x\in[0,1]$, 现在就有

$$\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x),\forall x\in[0,1],$$

因此

$$\left\{\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x:f\in C[0,1],\int_{x^2}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y\geqslant g(x)-g\left(x^2\right)\right\}\subset\left\{\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x:f\in C[0,1],\int_{x^2}^{1}f(y)\,\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g\left(x^2\right)\right\}.$$

故

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(x)-g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

取 $f(y)=g'(y)$, 可以知道(1.80)(1.81)式等号都成立. 从而

$$\int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(x)-g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

故只须证明

$$\inf_{\substack{f\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \text{对}\forall f\in C[0,1]\text{且}\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\geqslant g(1)-g(x)\text{, 都有}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

于是设 $f\in C[0,1]$ 且 $\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y$, 由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x &\geqslant \left(\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)^2\\
&= \left(-g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - \int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&\geqslant \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 (g(1)-g(x))g''(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \left(g'(0)\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - g'(0)(g(1)-g(0)) + \int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\\
&\geqslant \left(\int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

因此 $\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 |g'(x)|^2\mathrm{d}x$. 这样我们就完成了证明.

□

例题 1.61 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$, 都有

1. $\int_{x^2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2-x^4}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{10}$.
2. $\int_{x^2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^3-x^6}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{9}{20}$.

证明

1. 证法一:由命题 1.13可得

$$\inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{x^2-x^4}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y\geqslant \frac{1-x^2}{2}-0}} \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

证法二:注意到

$$\int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\int_t^{\sqrt{t}} f(t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{15}.$$

从而待定 $a>0$,

$$0\leqslant\int_0^1\left[af(x)-\left(\sqrt{t}-t\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2a\int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right)f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right)^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant a^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \frac{2}{15}a + \frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{15a} - \frac{1}{30a^2}.$$

当 $a=2$ 时, 上式右边取到最大值 $\frac{2}{15}$. 故

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

证法三: 条件可得, 对 $\forall a\in(0,1)$, 都有

$$\int_{a^{2^n}}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_{a^{2^k}}^{a^{2^{k-1}}} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a^{2^k}-a^{2^{k+1}}}{2} = \frac{a^2-a^{2^{n+1}}}{2}.$$

于是

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{a^{2^n}}^{a} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{a^2}{2}.$$

进而

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{a\to1^-}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}.$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

2. 由命题 1.13可得

$$\inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x^2}^{x} f(y)\mathrm{d}y \geqslant \frac{x^3-x^6}{2}-0}}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \inf_{\substack{f(x)\in C[0,1],\\ \int_{x}^{1} f(y)\mathrm{d}y \geqslant \frac{1-x^3}{2}-0}}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{9}{20}$$

□

例题 1.62 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 求证: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 记 $a_k=\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x, k=1,2,\cdots,n$. 若存在 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $a_k=0$, 则结论显然成立. 下设 $a_k>0, k=1,2,\cdots,n$.

于是由均值不等式可得

$$\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)}{a_k}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)}{a_k}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x}{a_k} = 1.$$

故由积分不等式知, 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

□