## 0.1 复正规算子

**定义 0.1 (正规算子和正规矩阵)**

设 $\varphi$ 是内积空间 $V$ 上的线性变换,$\varphi^*$ 是其伴随, 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 $\varphi$ 是 $V$ 上的**正规算子**.

为了不引起混淆, 我们也称酉空间 (欧氏空间) $V$ 上的正规算子 $\varphi$ 为**复正规算子** (**实正规算子**).

复矩阵 $A$ 若适合 $\overline{A}'A = A\overline{A}'$, 则称其为**复正规矩阵**.

实矩阵 $A$ 若适合 $A'A = AA'$, 则称其为**实正规矩阵**.

**命题 0.1**

1. 酉算子 (酉矩阵) 和 Hermite 算子 (Hermite 矩阵) 都是复正规算子 (矩阵).
2. 正交变换 (正交矩阵) 和对称变换 (实对称矩阵) 都是实正规算子 (矩阵).

**证明** 证明都是显然的. □

**定理 0.1**

酉空间 (欧氏空间) $V$ 上的线性变换 $\varphi$ 是复 (实) 正规算子的充分必要条件是 $\varphi$ 在 $V$ 的某一组或任一组标准正交基下的表示矩阵都是复 (实) 正规矩阵. 因此, 复 (实) 矩阵的正规性在酉 (正交) 相似下是不变的.

**证明** 证明都是显然的. □

**引理 0.1**

设 $\varphi$ 是内积空间 $V$ 上的正规算子, 则对任意的 $\alpha \in V$, 成立

$$\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|.$$

**证明** 由 $\varphi$ 的正规性, 有

$$\begin{aligned}\|\varphi(\alpha)\|^2 &= (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \varphi^*\varphi(\alpha)) \\ &= (\alpha, \varphi\varphi^*(\alpha)) = (\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha)) \\ &= \|\varphi^*(\alpha)\|^2.\end{aligned}$$

□

**命题 0.2**

设 $V$ 是 $n$ 维酉空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的正规算子.

(1) 向量 $u$ 是 $\varphi$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量的充分必要条件为 $u$ 是 $\varphi^*$ 属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量;

(2) 属于 $\varphi$ 不同特征值的特征向量必正交.

**证明**

(1) 若 $\lambda$ 是任一数, 则 $(\lambda I - \varphi)^* = \overline{\lambda} I - \varphi^*$, 且

$$(\lambda I - \varphi)(\overline{\lambda} I - \varphi^*) = (\overline{\lambda} I - \varphi^*)(\lambda I - \varphi),$$

即 $\lambda I - \varphi$ 也是正规算子. 于是由引理 0.1,

$$\|(\lambda I - \varphi)(\alpha)\| = \|(\overline{\lambda} I - \varphi^*)(\alpha)\|$$

对一切 $\alpha \in V$ 成立, 故 $(\lambda I - \varphi)(u) = 0$ 当且仅当 $(\overline{\lambda} I - \varphi^*)(u) = 0$ 成立.

(2) 设 $\varphi(u) = \lambda u, \varphi(v) = \mu v$ 且 $\lambda \neq \mu$, 则由 (1) 知 $\varphi^*(v) = \overline{\mu} v$, 于是

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\varphi(u), v) = (u, \varphi^*(v)) = (u, \overline{\mu} v) = \mu(u, v).$$

因为 $\lambda \neq \mu$, 故 $(u, v) = 0$.

□

**引理 0.2**

设 $V$ 是 $n$ 维酉空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的线性变换, 又 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $V$ 的一组标准正交基. 设 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵 $A$ 是一个上三角阵, 则 $\varphi$ 是正规算子的充分必要条件是 $A$ 为对角阵.

**证明** 若 $A$ 是对角阵, 则 $A\overline{A}' = \overline{A}'A$, 故 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 即 $\varphi$ 是正规算子. 反之, 设 $\varphi$ 是正规算子. 由于 $A$ 是上三角阵, 可记 $A = (a_{ij}), a_{ij} = 0(i > j)$. 于是 $\varphi(e_1) = a_{11}e_1$, 再由上面的命题可知 $\varphi^*(e_1) = \overline{a}_{11}e_1$. 另一方面, 有

$$\varphi^*(e_1) = \overline{a}_{11}e_1 + \overline{a}_{12}e_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}e_n.$$

因此 $a_{1j} = 0$ 对一切 $j > 1$ 成立. 又因为 $A$ 是上三角阵, 所以

$$\varphi(e_2) = a_{22}e_2,$$

故又有 $\varphi^*(e_2) = \overline{a}_{22}e_2$ 及 $a_{2j} = 0(j > 2)$. 不断这样做下去即得 $A$ 是对角阵. □

**定理 0.2 (Schur(舒尔) 定理)**

设 $V$ 是 $n$ 维酉空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的线性算子, 则存在 $V$ 的一组标准正交基, 使 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

**证明** 对 $V$ 的维数 $n$ 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时结论显然成立. 设对 $n-1$ 维酉空间结论成立, 现证 $n$ 维酉空间的情形. 由于 $V$ 是复线性空间, 故 $\varphi^*$ 总存在特征值与特征向量, 即有

$$\varphi^*(e) = \lambda e.$$

设 $W$ 是由 $e$ 张成的一维子空间的正交补空间, 由命题**??**知 $W$ 是 $(\varphi^*)^* = \varphi$ 的不变子空间, 将 $\varphi$ 限制在 $W$ 上得到 $W$ 上的一个线性变换. 注意到 $\dim W = n-1$, 故由归纳假设, 存在 $W$ 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$, 使 $\varphi|_W$ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵. 令 $e_n = \dfrac{e}{\|e\|}$, 则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 成为 $V$ 的一组标准正交基, 使 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵. □

**推论 0.1 (Schur 定理)**

任一 $n$ 阶复矩阵均酉相似于一个上三角阵.

**证明** 由定理 0.2立得. □

**定理 0.3**

设 $V$ 是 $n$ 维酉空间,$\varphi$ 是 $V$ 上的线性算子, 则 $\varphi$ 为正规算子的充分必要条件是存在 $V$ 的一组标准正交基, 使 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵是对角阵. 特别, 这组基恰为 $\varphi$ 的 $n$ 个线性无关的特征向量.

**证明** 利用引理 0.2和Schur 定理, 我们立即得到证明. □

**定理 0.4**

复矩阵 $A$ 为复正规矩阵的充分必要条件是 $A$ 酉相似于对角阵.

**证明** 利用引理 0.2和Schur 定理, 我们立即得到证明. □

**定理 0.5**

复正规矩阵的特征值就是复正规矩阵在酉相似关系下的全系不变量, 即两个复正规矩阵酉相似的充分必要条件是它们具有相同的特征值.

**证明**

□

**命题 0.3**

设 $\varphi$ 是 $n$ 维酉空间 $V$ 上的线性算子,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 $\varphi$ 的全体不同特征值,$V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是对应的特征子空间, 则 $\varphi$ 是正规算子的充分必要条件是

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k. \tag{1}$$

**证明** 设 $\varphi$ 是正规算子, 则它是一个可对角化线性变换, 因此

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

又从命题 0.2知道, 若 $i \neq j$, 则 $V_i \perp V_j$, 所以 (1)式成立.

反之, 若(1)式成立, 则在每个 $V_i$ 中取一组标准正交基, 将这些基向量组成 $V$ 的一组标准正交基. 因为每个 $V_i$ 都是 $\varphi$ 的特征子空间, 即 $\varphi(\alpha) = \lambda_i \alpha$ 对一切 $\alpha \in V_i$ 成立, 故 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵是对角阵, 因此 $\varphi$ 是正规算子. □

**定理 0.6**

任一 $n$ 阶酉矩阵必酉相似于下列对角阵:

$$\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

其中 $c_i$ 为模长等于 1 的复数.

**证明** 由命题 0.1及定理 0.4知酉矩阵酉相似于 $\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$. 由于与酉矩阵酉相似的矩阵仍是酉矩阵, 故 $\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 是酉矩阵, 因此 $|c_i| = 1$. □