

## 0.1 集合之间的运算

### 定义 0.1 (递增、递减集合列)

设  $\{A_k\}$  是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ ; 若  $\{A_k\}$  满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称  $\{A_k\}$  为**递增集合列**, 此时称其并集  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  为  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

### 命题 0.1

1. 当  $\{A_k\}$  为递减集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .
2. 当  $\{A_k\}$  为递增集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .

### 证明

1. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递减集合列可得

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \dots.$$

因此  $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ .

2. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递增集合列可得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$

因此  $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ .

□

### 定义 0.2 (上、下极限集)

设  $\{A_k\}$  是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \dots),$$

显然有  $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \dots)$ . 我们称

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列  $\{A_k\}$  的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的 **下极限集**, 简称为 **下限集**, 记为

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说  $\{A_k\}$  的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

### 命题 0.2

设  $\{A_k\}$  是一个集合列, 我们有

1. 若  $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$ , 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

2. 若  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$ , 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

### 证明

1. 由于  $\{A_k\}$  为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

2. 由于  $\{A_k\}$  为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

□

**命题 0.3 (上、下极限集的性质)**

设  $\{A_k\}$  是一集合列,  $E$  是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} (E \setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} (E \setminus A_k).$$



证明

□

**定理 0.1**

若  $\{A_k\}$  为一集合列, 则

$$(i) \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geq j \text{ 且 } k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$(ii) \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \{x : \text{除有限个 } A_k \text{ 外, 都含有 } x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j_0 \text{ 且 } k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k.$$



**证明** 以 (ii) 为例. 若  $x \in \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k$ , 则存在自然数  $j_0$ , 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ . 反之, 若存在自然数  $j_0$ , 当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ , 则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k$ .

由 (i)(ii) 可知,  $\{A_k\}$  的上限集是由属于  $\{A_k\}$  中无穷多个集合的元素所形成的;  $\{A_k\}$  的下限集是由只不属于  $\{A_k\}$  中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k.$$

□