0.1 反常积分收敛抽象问题

命题 0.1

设 f 为 $[a,+\infty)$ 上的非负可积函数, 若存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

进而可得

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在.

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y = +\infty$.

注 对于瑕积分也有类似的结论.

笔记 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

证明 证法一: 令 $g(x)=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负单调递增. 由单调收敛定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 从而由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

证法二: 令 $g(x)=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则由 $f\in R[a,+\infty)$ 可知,$g\in[a,+\infty)$. 从而由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

□

命题 0.2

若 $f\in R[a,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在且 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|f(x)|=0$, 则 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在.

笔记 若已知 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在. 但是反过来, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 只是 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 的一个子列极限, 故 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 不一定存在. 还需要额外的条件才能使得 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

证明 对 $\forall x\geqslant a$, 一定存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant x<n+1$. 从而可得

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^n f(x)\mathrm{d}x + \int_n^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

并且

$$\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^x |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{y\geqslant n}|f(y)|. \tag{2}$$

对(2)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup_{y\geqslant n}|f(y)| = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)|.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)| = 0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=0$. 于是再对(1)式两边同时令 $x\to+\infty$, 则 $n\to+\infty$. 从而可得

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x+\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也存在.

□

命题 0.3 (积分收敛必有子列趋于 0)

(1) 设连续函数满足 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

(2) 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ln x_n f(x_n)=0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的 $x_n lnx_n$ 可以换成任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足 $\int_a^{\infty} a_n\mathrm{d}x=+\infty$ 即可

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=f(\theta(A)),\ A+1>\theta(A)>A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0=\lim_{A\to+\infty}\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty} f(\theta(A)),\ \lim_{A\to+\infty}\theta(A)=+\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若 $|f(x)|>\dfrac{1}{x\ln x},\forall x>e$, 则由 $\int_e^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=+\infty$ 可得 $\int_e^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x=+\infty$ 矛盾! 故存在 $x_1>e$ 使得 $|f(x_1)|\leqslant\dfrac{1}{x_1\ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)|>\dfrac{1}{2x\ln x},\forall x>x_1+1$, 同理可得矛盾! 因此必然存在 $x_2>x_1+1$ 使得 $|f(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{2x_2\ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{nx_n\ln x_n},n=1,2,\cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n\ln x_n\cdot|f(x_n)|=0.$$

□

命题 0.4

设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $\int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y$ 收敛, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x}=0.$$

笔记 本题不可直接洛必达. 这个命题是命题??的连续版本, 在那里我们先 abel 变换再 Stolz 定理, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

证明 记 $F(x)\triangleq\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{R-S 积分}}\int_0^x y\mathrm{d}F(y)=xF(x)-\int_0^x F(y)\mathrm{d}y.$$

由 $F \in C[0,+\infty)$, 利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{L'Hospital 法则}} \int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y-\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y=0.$$

□

命题 0.5

(1) 设 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $xf(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln xf(x)=0$.

证明

(1) 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f, 从而

$$Af(A)\geqslant\int_A^{2A}f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \frac{A}{2}f(A)\leqslant\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

进而

$$\int_A^{2A}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty,\quad \int_A^{2A}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}Af(A)=0$.

(2) 不妨设 xf 递减, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\frac{1}{2}A\ln Af(A)=Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_A^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^{A^2}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\int_A^{A^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=A\ln Af(A).$$

从而

$$\int_A^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant A\ln Af(A)\leqslant 2\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x$$

又由 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.\quad \int_A^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}A\ln Af(A)=0$.

□

命题 0.6

若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

笔记 本题也有导数版本见命题??.

证明 反证, 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c>0$, 否则 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x)=c<0$ 同理可证. 则存在 $x_n\to+\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=c>0.$$

由 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f(x)-f(x_n)|<\varepsilon\Longrightarrow f(x)>f(x_n)-\varepsilon,\quad \forall x\in(x_n,x_n+\delta).$$

令 $n\to\infty,\varepsilon\to 0^+$, 则

$$f(x)\geqslant c,\quad \forall x\in(x_n,x_n+\delta).$$

于是

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant c\delta,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

这与 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$ 的 Cauchy 收敛准则矛盾!

□

例题 0.1 设 $f\in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

证明 若存在 $a>0$, 使得 $f'(a)=0$, 则由 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减可得

$$f'(x)=0,\quad \forall x>a.$$

此时结论显然成立.

若 $f'\neq 0,\forall x\in(0,+\infty)$, 则由导数介值性可知,$f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设 $f'>0,\forall x\in(0,+\infty)$, 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f'=|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减, 故此时 f' 在 $(0,+\infty)$ 内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y)\,\mathrm{d}y=f(x)-f(1).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 所以 $\int_1^{+\infty}f'(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛. 于是由命题 0.5(1)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

□

例题 0.2 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln xf'(x)=0.$$

证明 由 xf' 单调可知,$g(x)\triangleq xf'$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f'=\dfrac{g(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 xf' 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)\leqslant 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)>0$, 则存在 $C>0$, 使得

$$xf'(x)>C\Rightarrow f'(x)>\frac{C}{x},\quad x\in(\max\{a,0\},+\infty). \tag{3}$$

对 (3) 式两边同时积分得到

$$f(x)>\int_a^x\frac{c}{t}\,\mathrm{d}t=c\ln|x|-c\ln a.$$

令 $x\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 这与 f 有界矛盾! 于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)\leqslant 0$ 可知存在 $X>\max\{a,0\}$, 使得

$$xf'(x)\leqslant 0\Rightarrow f'(x)\leqslant 0,\quad x\in(X,+\infty).$$

故 f 在 $(X,+\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a).$$

令 $x\to+\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在可得 $\int_a^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 又 $xf'(x)$ 单调, 于是由命题 0.5(2)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln xf'(x)=0$.

□

例题 0.3 设 $f\in D[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 且 f' 严格递增, 证明 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由命题**??**和命题**??**可知,$f'\in C[a,+\infty)$. 又由命题**??**可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 故存在 $X>0$, 使得 f',f 在 $[X,+\infty)$ 上恒正, 且 f 在 $[X,+\infty)$ 上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,f 存在严格单调递增的反函数

$$g:[f(X),+\infty)\to[X,+\infty).$$

于是令 $x = g(y)$, 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

又由反函数求导定理可知 $g'(y)f'(g(y)) = 1$, 并且 $f(g(y)) = y$, 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))}\mathrm{d}y.$$

因为 f', g 都严格递增趋于 $+\infty$, 所以 $\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left|\int_{f(X)}^{A} \sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant 2, \forall A \geqslant f(X).$$

故由 Dirchlet 判别法可知 $\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

□

例题 0.4

(1) 设 f 内闭可积且 $f(x) > 0$,$x_0 > 0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty)\bigcup\{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛}, & \ell < 1 \\ \text{发散}, & \ell > 1 \end{cases}.$$

(2) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若有常数 $k > 1$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty)\bigcup\{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\text{是} \begin{cases} \text{收敛}, & \ell < \frac{1}{k} \\ \text{发散}, & \ell > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设 $f > 0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{收敛}, & -\infty \leqslant p < -1 \\ \text{发散}, & -1 < p \leqslant +\infty \end{cases}.$$

注 第 (1) 题中当 $\ell = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题中当 $p = 1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

注 第 (3) 题的条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} = p$ 可改为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = p$. 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = p.$$

证明

(1) 注意到

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

对 $\forall\varepsilon > 0$, 由题设可知, 存在 $X > a$, 使得

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{f(x_0+x)}{f(x)} \leqslant \ell + \varepsilon, \forall x \geqslant X.$$

从而当 $n > \dfrac{X-a}{x_0}$ 时, 就有 $a + nx_0 > X$, 进而

$$a_{n+1} = \int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x+x_0)\,\mathrm{d}x \in [(\ell-\varepsilon)a_n, (\ell+\varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \ell + \varepsilon, \forall n > \frac{X-a}{x_0}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令 $x = e^t$, 任取 $c > 0$, 则

$$\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ln c}^{\infty} f\left(e^t\right) e^t \mathrm{d}t.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f\left(e^{t+\ln k}\right) e^{t+\ln k}}{f\left(e^t\right) e^t} = k \lim_{t\to+\infty} \frac{f\left(ke^t\right)}{f\left(e^t\right) e^t} = k\ell.$$

于是由 (**??**) 可知结论成立.

(3) 只讨论 $p \in \mathbb{R}$ 的情况, 其余 $p = \pm\infty$ 情况类似. 由题意可知,$\forall \varepsilon > 0$, 存在$X > e$, 使得当$x > X$时, 有

$$p - \varepsilon \leqslant \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leqslant p + \varepsilon \Longleftrightarrow x^{p-\varepsilon} \leqslant f(x) \leqslant x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X.$$

再由比较判别法即得结论.

□

注 上述例题第 (3) 题的证明中, 令 $\varepsilon \to 0$, 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p}}, \forall x > X.$$

因为 X 是与 ε 有关的. 因此只有固定 ε 时, 才有 $\dfrac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x > X$ 成立. 故再利用比较判别法式, 不能令 $\varepsilon \to 0$.

例题 0.5 若 $f \in C^1[0,+\infty)$ 且 $f(0) > 0, f'(x) > 0$. 若 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x < \infty$, 证明 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x < \infty$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 由条件可知 $f(x)$ 严格递增且恒正, 从而 $f(+\infty) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

于是

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{1}{f(x)+f'(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{f'(x)}{f(x)\left[f(x)+f'(x)\right]}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{f^2(x)}\,df(x) = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(+\infty)} < +\infty.$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)}\right| + \frac{1}{f(x)+f'(x)}.$$

又 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x < +\infty$, 故 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x < \infty$.

□

例题 0.6 设非负函数 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$, 证明 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 证法一:$\forall a < b$, 注意到 $1 - x \leqslant e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$. 从而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\int_a^b \left(1 - \frac{|x|}{k}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

于是
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |x|f(x)\,\mathrm{d}x + M.$$
令 $k \to +\infty$ 得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$. 再由 a,b 的任意性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

证法二:由Fatou 引理可得
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$
□

例题 0.7 设 $f \in C^1[0,+\infty)$ 满足
$$|f'(x)| \leqslant M, \forall x \geqslant 0, \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$
证明
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
证明 由条件可得
$$\int_0^{+\infty} \left|f^2(x)f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant M\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
故 $\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是
$$\int_0^{+\infty} f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f^3(x) - f^3(0) < \infty.$$
从而 $\lim_{x\to+\infty} f^3(x)$ 存在. 由 $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$ 及命题 0.3(1)可知, 存在 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $f(x_n) \to 0$. 故 $\lim_{x\to+\infty} f^3(x) = \lim_{n\to\infty} f^3(x_n) = 0$, 因此 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

□

例题 0.8 设 $f \in D^2[0,+\infty)$ 且
$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2\mathrm{d}x < \infty.$$
证明 $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$.

证明 由 Cauchy 不等式得
$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x} < +\infty.$$
故 $\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 利用分部积分得
$$\int_0^x |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(y)f''(y)\,\mathrm{d}y \tag{4}$$
由命题 0.1可知, 只须找一个 $x_n \to +\infty$, 使 $f(x_n)f'(x_n)$ 极限存在即可.

由于 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$, 故由命题 0.3(1)可知存在 $a_n \to +\infty$, 使得 $\lim_{n\to\infty} |f(a_n)|^2 = 0$, 从而 $\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^2 \neq +\infty$. 于是再由命题**??**可知, 存在 $x_n \to +\infty$, 使得
$$\lim_{n\to\infty} [f^2(x_n)]' = 0 \iff \lim_{n\to\infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$
从而由命题 0.1及(4)式可知结论成立.

□

例题 0.9 设 $f \in C^1[0,+\infty), f(0) > 0, f'(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,+\infty)$. 已知
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x < +\infty,$$

求证

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<+\infty.$$

证明 由 $f'(x)\geq 0$ 知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增, 又 $f(0)>0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in[f(0),+\infty)$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}<+\infty$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{f(x)+f'(x)}-\frac{1}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{|f(x)+f'(x)||f(x)|}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{f(x)}\right|_{+\infty}^{0}=\frac{1}{f(0)}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}<+\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)<+\infty.$$

□