

0.1 归纳法的应用

数学归纳法是讨论二次型与相关矩阵问题的常用方法之一. 注意到正负惯性指数的降阶公式的证明过程展示了这样一种方法, 例如有一个分块对称矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$, 其中 A 是可逆矩阵, 则通过对称分块初等变换可用 A 同时消去 C 与 C' , 从而得到分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix}$. 此时矩阵 $A, B - C'A^{-1}C$ 的阶都比 M 的阶低, 如果问题的条件和结论在合同关系下不改变, 则上述过程就是运用归纳法的基础. 事实上, 正定阵的判定准则之一, 即实对称矩阵 A 是正定阵的充要条件是 A 的顺序主子式全大于零, 就是通过上述方法证明的.

命题 0.1

证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 的命题等价:

- (1) A 是正定阵;
- (2) 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵 B 和主对角元全为正数的对角矩阵 D , 使得 $A = B'DB$;
- (3)(正定阵的 Cholesky 分解) 存在唯一的主对角元全为正数的上三角矩阵 C , 使得 $A = C'C$.

注 设 $C = (c_{ij})$ 为主对角元全为正数的上三角矩阵, 使得 $A = C'C$, 则 $c_{11}c_{1j} = a_{1j}$, 从而 $c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0$, $c_{1j} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}$ ($2 \leq j \leq n$), 即 C 的第一行元素被唯一确定. 同理不断地讨论下去, 可得这样的 C 存在并被正定阵 A 唯一确定. 因为 S 是由 C 的主对角元构成的对角矩阵, 故由 C 的唯一性可得 S 的唯一性, 从而可得 $D = S^2$ 以及 $B = S^{-1}C$ 的唯一性. 因此, 这个命题 0.1 中关于正定阵 A 的两种分解 (2) 和 (3) 都是存在且唯一的, 其中分解 (3) 通常称为正定阵 A 的 Cholesky 分解. 另外, 上述两种分解也有非常重要的几何意义, 它们与 Gram - Schmidt 正交化方法密切相关.

注 事实上, 正定阵的 Cholesky 分解和非异阵的 QR 分解从某种意义上看是等价的. 证法三即是由非异阵的 QR 分解推出正定阵的 Cholesky 分解. 反之, 对任一非异实矩阵 A , 由命题 ??(2) 可知 $A'A$ 是正定阵, 设 $A'A = R'R$ 是正定阵的 Cholesky 分解, 其中 R 是主对角元全大于零的上三角矩阵. 令 $Q = AR^{-1}$, 则

$$Q'Q = (AR^{-1})'(AR^{-1}) = (R')^{-1}(A'A)R^{-1} = (R')^{-1}(R'R)R^{-1} = I_n,$$

即 Q 是正交矩阵, 从而 $A = QR$ 是 QR 分解. 从几何的层面上看, 上述两种矩阵分解都等价于 Gram - Schmidt 正交化和标准化过程, 所以它们之间的等价性是自然的.

证明 证法一: (1) \Rightarrow (2): 只要证明存在主对角元全为 1 的上三角矩阵 T , 使得 $T'AT = D$ 是正定对角矩阵即可. 因为一旦得证, 由上三角阵性质可知 $B = T^{-1}$ 也是主对角元全为 1 的上三角矩阵, 并且 $A = B'DB$. 对阶数 n 进行归纳, 当 $n = 1$ 时结论显然成立. 假设对 $n - 1$ 阶正定阵结论成立, 现证明 n 阶正定阵的情形. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 A_{n-1} 是 $n - 1$ 阶矩阵, α 是 $n - 1$ 维列向量. 因为 A 正定, 所以 A_{n-1} 是 $n - 1$ 阶正定阵, 从而是可逆矩阵. 考虑如下对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ -\alpha'A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

由 A 的正定性及命题 ??(2) 可得 $a_{nn} - \alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha > 0$. 再由归纳假设, 存在主对角元全为 1 的 $n - 1$ 阶上三角矩阵 T_{n-1} , 使得 $T_{n-1}'A_{n-1}T_{n-1} = D_{n-1}$ 是 $n - 1$ 阶正定对角矩阵. 令

$$T = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

则 T 是一个主对角元全为 1 的 n 阶上三角矩阵, 使得

$$T'AT = \begin{pmatrix} D_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha'A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

是 n 阶正定对角矩阵.

(2) \Rightarrow (3): 由 (2) 可设 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 则 $A = B'DB$, 其中 B 为主对角元全为 1 的上三角矩阵. 令 $s_i = \sqrt{d_i} > 0$,

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}.$$

设 $C = SB$, 则 $A = C'C$. 显然 $C = SB$ 为主对角元全为正数的上三角矩阵.

下证唯一性. 设 B, C 均为主对角元全为正数的上三角阵, 且 $A = C'C = B'B$, 令 $N = BC^{-1}$, 则

$$N'N = (C^{-1})' B' BC^{-1} = (C^{-1})' C' CC^{-1} = I. \quad (1)$$

因此 N 是正交矩阵. 因为 B, C 均为主对角元全为正数的上三角阵, 所以由上三角阵的性质可知, N, N^{-1}, C^{-1} 也是主对角元全为正数的上三角阵, 从而 N' 是下三角阵. 又由 N 是正交矩阵可知 $N' = N^{-1}$ 也是下三角阵, 故 $N' = N^{-1}$ 既是上三角阵也是下三角阵, 即 $N' = N^{-1}$ 是主对角阵, 从而 N 就是主对角元全为正数的主对角阵. 再由 (1) 式可知, N 的主对角元全为 1, 因此 $N = I$. 故 $BC^{-1} = N = I$, 即 $B = C$.

(3) \Rightarrow (1): 这时 $A = C'I_n C$, 故 A 和 I_n 合同, 从而 A 正定.

证法二 (矩阵的 QR 分解): 因为半正定阵 A 是正定阵当且仅当 A 是可逆矩阵, 所以由可逆性和命题??的结论就能推出命题 0.1 的结论. □

命题 0.2

设 $f(x) = x'Ax$ 是实二次型, 相伴矩阵 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式 P_1, \dots, P_{n-1} 非零, 求证: 经过可逆线性变换 f 可化为下列标准型:

$$f = P_1 y_1^2 + \frac{P_2}{P_1} y_2^2 + \dots + \frac{P_n}{P_{n-1}} y_n^2,$$

其中 $P_n = |A|$. ▲

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 假设结论对 $n-1$ 成立. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix},$$

由于 $|A_{n-1}| = P_{n-1} \neq 0$, 故可对 A 进行下列对称分块初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} = B,$$

显然这是一个合同变换. 又因为第三类分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$|A| = |A_{n-1}|(a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha),$$

即

$$a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha = \frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

由归纳假设, 存在可逆矩阵 M , 使得

$$M' A_{n-1} M = \text{diag} \left\{ P_1, \frac{P_2}{P_1}, \dots, \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \right\}.$$

作矩阵 $C = \begin{pmatrix} M & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$C' B C = \text{diag} \left\{ P_1, \frac{P_2}{P_1}, \dots, \frac{P_n}{P_{n-1}} \right\}.$$

□

例题 0.1 设 A 为 n 阶正定实对称矩阵且非主对角元都是负数, 求证: A^{-1} 的每个元素都是正数.

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立, 设结论对 $n-1$ 阶成立, 现证明 n 阶的情形. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子阵, 从而 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶正定实对称矩阵且非主对角元

都是负数,故由归纳假设可知 A_{n-1}^{-1} 的每个元素都是正数. 利用分块初等变换可求出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + d_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \alpha \alpha' A_{n-1}^{-1} & -d_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \alpha \\ -d_n^{-1} \alpha' A_{n-1}^{-1} & d_n^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $d_n = a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha$. 由打洞原理可知

$$|A| = |A_{n-1}| |a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha| = |A_{n-1}| d_n \Rightarrow d_n = \frac{|A|}{|A_{n-1}|} > 0.$$

又注意到 A_{n-1}^{-1} 的每个元素都是正数,且 α 的每个元素都是负数,故 A^{-1} 的每个元素都是正数. □

例题 0.2 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定实对称矩阵,其逆阵 $A^{-1} = (b_{ij})$,求证: $a_{ii}b_{ii} \geq 1$,且等号成立当且仅当 A 的第 i 行和列的所有元素除了 a_{ii} 之外全为零.

证明 对换 A 的第 i, n 行和列,可将 a_{ii} 换到第 (n, n) 位置,这相当于合同变换 $P_{in} A P_{in}$. 此时 $(P_{in} A P_{in})^{-1} = P_{in} A^{-1} P_{in}$,即对换了 A^{-1} 的第 i, n 行和列, b_{ii} 也换到了第 (n, n) 位置. 因此不失一般性,只需证明 $a_{nn}b_{nn} \geq 1$,且等号成立当且仅当 A 的 n 行和列的所有元素除了 a_{nn} 之外全为零即可.

利用数学归纳法,对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时结论显然成立,设结论对 $n - 1$ 阶成立,现证明 n 阶的情形. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$,其中 A_{n-1} 是 A 的第 $n - 1$ 个顺序主子阵. 利用分块初等变换可求出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + d_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \alpha \alpha' A_{n-1}^{-1} & -d_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \alpha \\ -d_n^{-1} \alpha' A_{n-1}^{-1} & d_n^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $d_n = a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha$. 由此可得 $b_{nn} = d_n^{-1}$,再由 A_{n-1} 的正定性及命题??可知 A_{n-1}^{-1} 也正定,于是

$$b_{nn}^{-1} = d_n = a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \leq a_{nn},$$

即有 $a_{nn}b_{nn} \geq 1$,且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$. □

定理 0.1 (反对称矩阵的合同标准型)

设 A 是 n 阶反对称矩阵,则 A 必合同于下列形状的分块矩阵:

$$\text{diag}\{S, \dots, S, 0, \dots, 0\}, \quad (2)$$

其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 我们称(2)式为反对称矩阵 A 的**合同标准型**. 特别地,反对称矩阵 A 的秩必为偶数 $2r$,其中 r 是 S 在 A 的上述合同标准型中的个数. ♥

注 本例题给出了命题??的另一证明. 注意到在本题的证明中,我们采用的是跨度为 2 的数学归纳法(第二数学归纳法),故在起始步骤时需要验证 $n = 1, 2$ 这两种情形,但我们不难发现 $n = 2$ 情形的证明完全包含在归纳过程的证明中,因此可以用 $n = 0, 1$ 的情形作为起始步骤. 需要注意的是, $n = 0$ 并不意味着存在零阶矩阵,而只是说明归纳过程已经完全结束. 后面遇到跨度为 2 的数学归纳法,我们通常都采用上述约定.

证明 对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 0, 1$ 时结论显然成立,假设结论对阶数小于 n 的反对称矩阵成立. 现有 n 阶反对称矩阵 A ,若 $A = O$,结论已成立,故设 $A \neq O$. 由于反对称矩阵的主对角元全为零,故可设 A 的 (i, j) 元素 $a_{ij} \neq 0 (i < j)$,此时 A 的 (j, i) 元素为 $-a_{ij}$. 于是利用矩阵的初等对称变换,对换 A 的第一行与第 i 行,再对换第一列与第 i 列;对换第二行与第 j 行,再对换第二列与第 j 列;然后将第一行乘以 $\frac{1}{a_{ij}}$,第一列乘以 $\frac{1}{a_{ij}}$;最后得到 A 合同于下列形状的矩阵:

$$M = \begin{pmatrix} S & B \\ -B' & A_{n-2} \end{pmatrix},$$

其中 A_{n-2} 是 $n - 2$ 阶反对称矩阵, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 显然 S 是可逆反对称矩阵,对 M 作下列对称分块初等变换: 第

一分块行左乘 $B'S^{-1}$ 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 $(B'S^{-1})' = -S^{-1}B$ 加到第二分块列上, 于是 A 合同于下列矩阵:

$$N = \begin{pmatrix} S & O \\ O & A_{n-2} + B'S^{-1}B \end{pmatrix}.$$

注意到 $A_{n-2} + B'S^{-1}B$ 是 $n-2$ 阶反对称矩阵, 故由归纳假设它合同于 (2) 式形状的矩阵, 因此分块对角矩阵 N 也合同于 (2) 式形状的矩阵, 结论得证.

由命题 ?? 可知反称矩阵 A 的秩必为偶数 $2r$, 从而反称矩阵 A 的秩等于其合同标准型的秩等于 $2r$. 设 A 的上述合同标准型中 S 的个数为 k , 则由 S 的秩为 2 及命题 ??? 可得

$$r(A) = kr(S) = 2k = 2r.$$

故 $k = r$.

□

命题 0.3

求证: n 阶实反对称矩阵 A 的行列式值总是非负实数.

▲

证明 由定理 0.1 可知, 存在非异实矩阵 C , 使得

$$C'AC = \text{diag}\{S, \dots, S, 0, \dots, 0\},$$

其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 若 A 是奇异阵, 则 $|A| = 0$, 结论显然成立. 若 A 是非异阵, 则由上式可得 $|A| \cdot |C|^2 = |S|^{\frac{n}{2}} = 1$, 从而 $|A| > 0$.

□

命题 0.4

设 A 为 n 阶实反对称矩阵, 求证:

(1) $|I_n + A| \geq 1 + |A|$, 且等号成立当且仅当 $n \leq 2$ 或当 $n \geq 3$ 时, $A = O$.

(2) $|I_n + A| \geq 1$, 且等号成立当且仅当 $A = O$.

▲

证明 (1) **证法一:** 由命题 ?? 可知

$$|I_n + A| = |I_n| + |A| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \right).$$

注意到 $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ 是 k 阶实反对称行列式, 故由命题 0.3 可知其值大于等于零, 于是 $|I_n + A| \geq 1 + |A|$ 成立. 当 $n \leq 2$ 时, 容易验证不等式的等号成立. 当 $n \geq 3$ 时, 若不等式的等号成立, 则必有

$$A \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{vmatrix} = a_{ij}^2 = 0,$$

即有 $a_{ij} = 0 (1 \leq i < j \leq n)$, 从而 $A = O$.

证法二: 由命题 ?? 知, A 的特征值为 0 或纯虚数, 不妨设为

$$0, \dots, 0, \pm a_1 i, \dots, \pm a_k i.$$

从而 $I_n + A$ 的全体特征值为

$$1, \dots, 1, 1 \pm a_1 i, \dots, 1 \pm a_k i.$$

于是

$$|I_n + A| = \prod_{i=1}^k (1 + a_i^2) \geq 1 + \prod_{i=1}^k a_i^2 = 1 + |A|.$$

显然上式等号成立当且仅当 $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 由实反称矩阵的合同标准型知, 此时存在可逆实矩阵 C , 使得

$$A = C^T O C = O.$$

(2) 由 (1) 立得.

□