# 0.1 级数计算

## 0.1.1 裂项方法

**例题 0.1** 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\sqrt[2^n]{2})}$.

**笔记** 继续采用强行裂项的想法, 猜出裂项之后的模样之后还原看看差什么.

**证明** 注意到

$$\frac{1}{2^{n-1}\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}=\frac{2}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}+1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}=-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}$$

$$=-\frac{2^{\frac{1}{2^n}}-1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}=-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)},$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}\right)-1=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

□

**例题 0.2** 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$$

**笔记** 想法的关键是强行裂项.

**证明**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)(k+2)!}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)!}-\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\xlongequal{e\text{的 Taylor 展开}}\frac{1}{2}-\left(e-1-1-\frac{1}{2}\right)=3-e.$$

□

**例题 0.3** 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$$

**笔记** 此类问题化部分和之后估阶.

**证明** 注意到

$$\sum_{n=1}^{2m+1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2m+1)}{2m+1}.$$

令 $m\to\infty$, 得

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m+1}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}.$$

于是由子列极限命题 (b) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln(2n)}{2n}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}\right)$$

利用例题**??**(2), 我们知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}=\ln 2\cdot\ln m+\ln 2\cdot\gamma+o(1), m\to\infty$$

由 0 阶 E-M 公式知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln m}{2m}+\int_1^m\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x$$

注意到 $\int_1^m\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 m$ 以及

$$\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{|1-\ln x|}{x^2}\mathrm{d}x<\infty$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1), m\to\infty$$

这里 $C=\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\mathrm{d}x$. 现在结合上述渐近估计式就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln^2(2m)-\frac{1}{2}\ln^2 m-\ln 2\cdot\ln m-\ln 2\cdot\gamma+o(1)\right]=\frac{\ln^2 2}{2}-\ln 2\cdot\gamma$$

□

**例题 0.4**

1. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$$

2. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}$$

**笔记** 证明的想法即强行裂项.

**证明**

1. 记 $H_n\triangleq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}\right)+\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_1}{2}-\frac{H_{m+1}}{m+2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1.\end{aligned}$$

2. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+1}}{n+1}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=H_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

□

**例题 0.5** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$$

**笔记** 证明的想法即利用合适范围内都成立的恒等式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

来裂项.

**证明** 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

□

### 0.1.2 凑已知函数

**例题 0.6** 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}y^{2n}dy\\&=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-y^2}dy\\&=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & ,x\neq 0\\ 3 & ,x=0\end{cases}.\end{aligned}$$

□

**例题 0.7** 计算

$$1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)(3k-7)\cdots 5\cdot 2}{6^k k!}.$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)(3k-7)\cdots 5\cdot 2}{6^k k!}&=1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^{k-1}\prod\limits_{j=2}^{k}\left(j-\frac{4}{3}\right)}{6^k k!}\\&=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}3\prod\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{3}-j+1\right)}{6^k k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

□

**例题 0.8** 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}.$$

**证明** 相似例题??的计算, 我们有恒等式

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\cos\frac{x}{2^k} = \ln\sin x - n\ln 2 - \ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

两边求导有

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

于是就有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = -\frac{\cos x}{\sin x} + \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \begin{cases} -\dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

□

### 0.1.3 生成函数和幂级数计算方法

**例题 0.9** 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

**笔记** 使用 Cauchy 积计算幂级数有一个特点, 即系数往往出现求和结构.

**证明** 考虑 $a_n = 1, n \in \mathbb{N}_0, b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 0 \end{cases}$. 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x}, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = -\ln(1-x),$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x| < 1.$$

收敛域可以直接注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) 1^n = \infty, \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) (-1)^n = \infty$$

来得到. □