



集合论

作者: 実空

组织: 无

时间: November 12, 2025

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊，闲看庭前花开花落；
去留无意，漫随天外云卷云舒。

目录

第1章 集合与点集	1
1.1 集合及其运算	1
1.1.1 集合的基本概念	1
1.1.2 集合的运算	1
1.1.3 上限集与下限集	3
1.2 映射与集合的基数	5
1.2.1 映射	5
1.2.2 集合的对等	9
1.2.3 集合的基数(势)	11
1.3 可列集与不可列集	13
1.3.1 可列集	13
1.3.2 不可列集	16
1.4 整数	18

第1章 集合与点集

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 1.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合(或集)**,通常用大写字母如 A, B, C 等表示.构成一个集合的那些事物称为**集合的元素(或元)**,通常用小写字母如 a, b, c 等表示.

若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$;若 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$.对于给定的集合,任一元素要么属于它,要么不属它,二者必居其一.

不含任何元素的集合称为空集,用 \emptyset 表示;只含有限个元素的集合称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集(不包含0)、有理数集和实数集.特别地,我们用 \mathbb{N}_0 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素.例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$$

(2) 描述法—— $A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}$.例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.若 A 中的每个元素都是 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 为 B 的真子集,记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体,称为 A 的幂集,记为 2^A .

1.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合,由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交,记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$,则称 A 与 B 互不相交.

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为集族,其中 Γ 为指标集(有限或无限), α 为指标.特别地,当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时,集族称为列集,记为 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{A_n\}$.

1.1.2.0.1 集族的并:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x : \exists \alpha_0 \in \Gamma \text{ 使得 } x \in A_{\alpha_0}\}$$

1.1.2.0.2 集族的交:

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集, X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X - A$, 称为 A 的余集, 记为 A^c , 即

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

注 补集是相对概念, 若 $A \subset B$, 则 $B - A$ 称为 A 关于 B 的补集. 特别地, 余集是集合关于全集的补集.

笛卡尔积

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

例如, n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ 个}}$.

定理 1.1 (集合的运算及性质)

- (1) $A \cup A = A, A \cap A = A;$
- (2) $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$
- (3) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$
- (4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- (5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
 $A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha), A \cup (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_\alpha);$
- (6) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset;$
- (7) $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X;$
- (8) $A - B = A \cap B^c.$



定理 1.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为一集族, 则

$$(i) (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c;$$

$$(ii) (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c.$$



证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$, 即 $\forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$, 因此, $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c$. 因此, $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证. □

定义 1.2 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的 **对称差集**, 记为 $A \Delta B$.



笔记 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 1.3 (集合对称差的性质)

- (i) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (ii) $A \Delta \emptyset = A, A \Delta A = \emptyset, A \Delta A^c = X, A \Delta X = A^c$.
- (iii) 交换律: $A \Delta B = B \Delta A$.
- (iv) 结合律: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- (v) 交与对称差满足分配律: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
- (vi) $A^c \Delta B^c = A \Delta B; A = A \Delta B$ 当且仅当 $B = \emptyset$.
- (vii) 对任意的集合 A 与 B , 存在唯一的集合 E , 使得 $E \Delta A = B$ (实际上 $E = B \Delta A$). ♡

证明

(i) 由对称差集的定义及集合的运算及性质 (5) 可得

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

- (ii)
- (iii)
- (iv)
- (v)
- (vi)
- (vii)



1.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列, 若 $\{A_n\}$ 单调递增, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

定义 1.3 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{C_n\}$ 单调递减, 故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的上限集, 记为 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 或 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \cdots \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \cdots$$

记 $D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{D_n\}$ 单调递增, 故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集, 记为 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 或 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则称 $\{A_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

命题 1.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 则

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_n\} \\ &= \{x : \text{对 } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ 都存在 } n_k \text{ 使得 } x \in A_{n_k}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : \text{除有限个 } A_n \text{ 外, 都含有 } x\} \\ &= \{x : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in A_n, \forall n \geq n_0\} \end{aligned}$$

证明 (1) 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n = 1$, 有 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此, x 属于无穷多个 A_n .

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n , 不妨设 $x \in A_{n_k}, k = 1, 2, \dots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$$(2) x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \iff x \in A_n, \forall n \geq n_0.$$

□

例题 1.1 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $A_{2n} = [0, 1 + 1/2n]$, $n = 1, 2, \dots$, 求 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 与 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解 注意到

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 2]$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ (与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

即当 $n \geq n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能“除有限个 A_n 外, 都含有 x ”, 即 $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$; (ii) “ x 属于无穷多个 A_n ”, 故 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1], \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2]$.

□

例题 1.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则 “ $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ ”, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geq k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

□

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

1.2 映射与集合的基数

1.2.1 映射

定义 1.4 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f , 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f : A \rightarrow B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的定义域, 记为 $D(f)$. B 称为 f 的陪域. A 在 f 下的象称为 f 的值域, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subset B$ 在 f 下的原象, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

♣

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

- (1) 对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应; 并且 f 的一个像可以存在多个原像.
- (2) $f(A) \subset B$, 不一定有 $f(A) = B$;
- (3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subset 2^A$, 定义 $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 1.5 (单射、满射和双射)

设 $f : A \rightarrow B$, 则

1. 若 B 中每个元素最多只有一个原像, 即对 $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ 所含元素个数为 0 或 1, 则称 f 为**单射**或**一映射**.
2. 若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \emptyset, \forall y \in B$, 则称 f 为**满射**或**映上的**.
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**或**一一对应**.

定义 1.6 (逆映射)

设 $f : A \rightarrow B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的**逆映射**. 自然 f 也是 f^{-1} 的逆映射, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$.

笔记 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

定理 1.4

设 $f : A \rightarrow B$, 则

1. f 为单射的充要条件是

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

也即

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

亦即

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

2. f 为双射的充要条件是存在 $g : B \rightarrow A$, 使得

$$gf = \text{id}_A, \quad fg = \text{id}_B.$$

此时必有 $f = f^{-1}$. 即有两个交换图, 如图 1.1 所示.

笔记

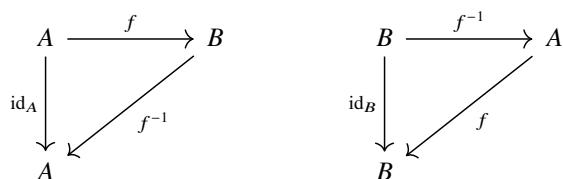


图 1.1

证明

□

定义 1.7 (映射的乘积)

设映射 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, 定义 $g \circ f : A \rightarrow C$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 g 与 f 的**复合映射**或**乘积**. $g \circ f$ 也常简记为 gf .

定理 1.5 (映射的乘法满足结合律)

若有 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$, 则有

$$h(gf) = (hg)f. \quad (1.1)$$

笔记 由映射的乘法满足结合律可知在多个映射相乘时, 可以不加括号. 特别地, $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 均可简记作 hgf .

证明 事实上, 对 $\forall x \in A$ 有

$$\begin{aligned} (h(gf))(x) &= h((gf)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x). \end{aligned}$$

□

定义 1.8

设映射 $f : A \rightarrow B, A_0 \subseteq A$, 定义映射 $i : A_0 \rightarrow A$ 满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称 i 为 A_0 到 A 中的 **嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射 $f : A \rightarrow B$ 与映射 $g : A_0 \rightarrow B$ 满足 $gi = f$, 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的**限制**, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓或开拓**. 即图 1.2 为交换图.

♣

笔记

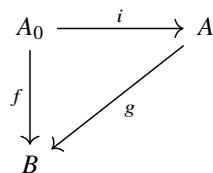


图 1.2

命题 1.2

设一列映射 $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$.

- (1) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是单射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.
- (2) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是满射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.
- (3) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是双射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

♣

证明

- (1)
- (2)
- (3)

□

定义 1.9 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数 (示性函数)** 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

♣

 **笔记** 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 1.3 (特征函数的基本性质)

- (1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x);$
- (2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x);$
- (3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)].$

证明 证明都是显然的. □

命题 1.4 (映射的基本性质)

对于映射 $f : C \rightarrow D, A \subset C, B \subset D$, 下列事实成立:

- (i) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B);$
- (ii) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha);$
- (iii) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;
- (iv) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, 当且仅当 f 为满射时, “=” 成立;
 $A \subset f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;
- (v) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$

 **笔记** (iv) 中第一条的直观理解是: B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是: $C - A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$ (即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subset f(f^{-1}(B))$, 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subset A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾.

□

1.2.2 集合的对等

定义 1.10 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$. 规定 $\emptyset \sim \emptyset$.

♣



笔记 A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 1.6

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

- (1) (反身性) $A \sim A$;
- (2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

♡

证明 证明是显然的.

□

命题 1.5

(1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$.

♣

证明

(1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f : A \rightarrow C$ 和 $g : B \rightarrow D$. 于是令

$$\varphi : A \times B \rightarrow C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall (a, b) \in A \times B$, 由 $f(a) \in C, g(b) \in D$ 可知 $(f(a), g(b)) \in C \times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f, g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 1.3 自然数集 $\mathbb{N} \sim$ 正偶数集 \sim 正奇数集 \sim 整数集 \mathbb{Z} .

证明 正偶数集 $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 正奇数集 $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

例题 1.4 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

证明 $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$.

□

例题 1.5 $\{$ 去掉一点的圆周 $\} \sim \mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 1.3, 设圆周为 C , 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切(不过点 P)的直线表示实轴 \mathbb{R} . 对于 $C - \{P\}$ 上的每一点 c , 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x . 建立一一对应:

$s : \mathbb{R} \rightarrow C - \{P\}$ 为 $s(x) = c$. (点 P 对应 ∞)

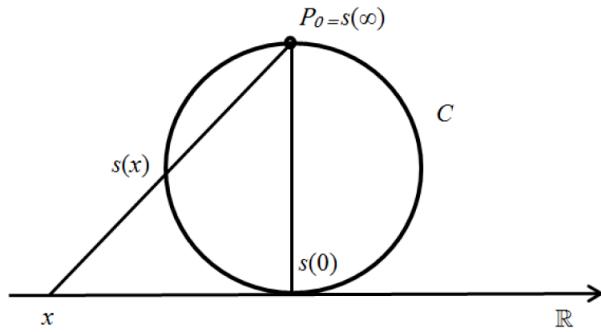


图 1.3: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 1.1

设 A, B 为非空集, 若 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

- (i) $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$;
- (ii) $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
- (iii) $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

♡

证明 作集族

$$\Gamma = \{E \subset A : E \cap g(B - f(E)) = \emptyset\}$$

Γ 中的元称为 A 中的隔离集. 令 $A_1 = \bigcup_{E \in \Gamma} E$, 则 $A_1 \in \Gamma$. 实际上, 对任意的 $E \in \Gamma$, 都有 $E \subset A_1$, 再由 $E \cap g(B - f(E)) = \emptyset$ 知

$$E \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

从而

$$A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \bigcup_{E \in \Gamma} [E \cap g(B - f(E))] = \emptyset$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1 = f(A_1), B_2 = B - B_1, A_2 = g(B_2)$, 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \emptyset$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$, 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \emptyset$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾.

□

1.2.3 集合的基数(势)

定义 1.11 (集合的基数(势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的基数或势相同, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.



笔记 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 1.7

- (1) 自反性: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$.
- (2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.
- (3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$.



证明 由定理 1.5 及集合的基数(势)的定义可直接得到. □

定义 1.12

对于集合 A, B , 若有 $B_0 \subset B, A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$. 若 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. 同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.



命题 1.6 (映射与基数之间的关系)

- (1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$;
- (2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$;
- (3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.



证明

- (1)
- (2)
- (3)



定理 1.8 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:

- (1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.
- (2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.



证明

- (1) 由题设存在单射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$, 利用引理 1.1 可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$. 注意到 $f: A_1 \rightarrow B_1, g^{-1}: A_2 \rightarrow B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F: A \rightarrow B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$.

- (2) 由定义 1.11 和定义 1.12 可知 (2) \Leftrightarrow (1).

□

例题 1.6 $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.

证明 由例题 1.4 可知, $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subset [-1, 1]$; 又 $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. 由 Bernstein 定理 (1) 可知, $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$. □

定理 1.9

对于集合 $A, B, \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立.

♡

证明 由定义 1.12 可知, 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 A 与 B 对等, 另外两个不会成立; 假设 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 同时成立, 则存在 $B_0 \subset B, A_0 \subset A$, 使得 $A \sim B_0, B \sim A_0$. 使用 Bernstein 定理 (1) 得出 $A \subset B$, 进而 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 显然矛盾, 证毕. □

定义 1.13 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n , 使得 $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}} = n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$.

♣

笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 1.10

设 A 是非空集合, 则

- (1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.
- (2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.

♡

笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设 $\overline{\overline{A}} = n$, 用数学归纳法证明, $n = 1$, 显然. 假设 $n = k$ 时, 结论成立.

当 $n = k + 1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A \sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi : A \rightarrow A_0$. 下面分两种情况:

(i) $\exists a \in A$, 使得 $\varphi(a) = a$.

令 $A_1 = A - \{a\}, A_2 = A_0 - \{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}} = k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1 \sim A_2$. 这与假设矛盾.

(ii) $\forall a \in A$, 都有 $\varphi(a) \neq a$.

A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$. 令

$$A_3 = A - \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 - \{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0 \notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subset A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故 $\varphi(x_0) \in A - \{x_0\} = A_3$, 而 $\varphi(x_0) \notin A_0 - \{\varphi(x_0)\} = A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}} = k, \varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3 \sim A_4$. 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 a_1, a_2, \dots . 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1 . 因为 A 是无限集, 集 $A - \{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A - \{a_1\}$ 取一个元素 a_2 , 同样, $A - \{a_1, a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 a_1, a_2, \dots , 记余集为 $\hat{A} = A - \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \dots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作 A 与 \tilde{A} 之间的映射 φ :

$$\varphi(a_i) = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 \tilde{A} 上的一一对应, 证毕.

再证(1)(2)的充分性.

(1) 的充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 的充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 不是有限集. 故 A 一定是无限集.

1

1.3 可列集与不可列集

1.3.1 可列集

定义 1.14 (可列集)

与自然数集 \mathbb{N} 对等的集合称为可列集，其基数记为 \aleph_0 （读作阿列夫零）。有限集和可列集统称为可数集。

命题 1.7

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

证明 A 可列, 则存在 \mathbb{N} 到 A 的一一映射 φ , 记为 $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 \mathbb{N} 对等, 从而是可列集

1

命题 1.8 (可列集的性质)

- (1) 任何无限集必包含一个可列子集.
 - (2) 可列集的任何无限子集都是可列集.
 - (3) 有限集与可列集的并集是可列集.
 - (4) 有限个可列集的并集是可列集.
 - (5) 可列个可列集的并集是可列集.
 - (6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{A \cup B} = \overline{A}$.
 - (7) 设 A, B 为可列集, 则 $A \times B$ 是可列集.
 - (8) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 可列, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 可列.

1



笔记 (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 \aleph_0 .

证明

- (1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1 ; 由于 $A - \{a_1\} \neq \emptyset$, 取 $a_2 \in A - \{a_1\}$; 又 $A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, 取 $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$; ……, 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
 - (2) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 a_{n_1}, a_{n_2}, \dots , 则 $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$ 为可列集.
 - (3) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$. 不妨设 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots\}$$

可列.

(4) 设 $A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 为可列集, 则 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \quad a_2^{(1)} \quad a_3^{(1)} \quad \dots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad \dots\} \end{aligned}$$

⋮

$$A_n = \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad \dots\}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n)}, a_3^{(1)}, \dots\}$$

可列.

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 为一列可列集, 则 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$A_1 = \{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \rightarrow a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \dots\}$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \dots\}$$

$$A_3 = \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \dots\}$$

⋮

$$A_n = \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad a_4^{(n)} \dots\}$$

⋮

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \dots, a_{2n+1}^{(n)}, \dots\}$$

(依次是下标之和等于 $2, 3, \dots, 2n+2, \dots$) 可列.

(6) 不妨设 $A \cap B = \emptyset$, 否则用 $B - A$ 代替 B 即可. A 为无限集, 由 (1) 可知, A 包含一个可列子集 A_1 . 由于 $A_1 \cup B$ 是可列集, 故 $A_1 \cup B \sim A_1$. 注意到 $(A - A_1) \cap (A_1 \cup B) = \emptyset$, 则有

$$A \cup B = (A - A_1) \cup A_1 \cup B = (A - A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A - A_1) \cup A_1 = A.$$

因此, $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A}}$.

(7) 由命题 1.7 可设 $A = \{x_i\}_{i=1}^\infty$, $B = \{y_j\}_{j=1}^\infty$, 则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty (x_i, y_j). \end{aligned}$$

由(5)可知, 对 $\forall i \in \mathbb{N}, \bigcup_{j=1}^\infty (x_i, y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty (x_i, y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明.

□

例题 1.7 有理数集 \mathbb{Q} 是可列集.

证明 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, 其中 $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质 (3) 和可列集的性质 (4), 只需证明 \mathbb{Q}^+ 可列.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (除去重复元), 由可列集性质(5)知 \mathbb{Q}^+ 可列.

□

命题 1.9

实轴 \mathbb{R} 上互不相交的开区间至多有可列个.

◆

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 \mathbb{Q} 的一个子集. 又 \mathbb{Q} 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个.

□

例题 1.8 整系数多项式的全体 \mathbf{P} 是可列集.

证明 对每个 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, 令

$$P_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_n$$

由命题 1.8(8)知 P_n 可列. 又 $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, 由可列集性质知 \mathbf{P} 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集.

□

命题 1.10

\mathbb{R} 上单调函数的间断点至多有可列个.

◆

证明 不妨只讨论 f 是开区间 (a, b) 上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若 $x_0 \in (a, b)$ 是 f 的一个间断点, 则有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 这时 f 在点 x_0 的函数值满足不等式 $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$. 称 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间. 对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设 x_1 是 f 的另一个间断点, 且 $x_0 < x_1$. 我们要证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \emptyset. \quad (1.2)$$

为此在 x_0 和 x_1 之间插入 x, x' 如下:

$$x_0 < x < x' < x_1$$

则有不等式

$$f(x) \leq f(x')$$

固定 x' , 令 $x \rightarrow x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的保不等式性, 得到

$$f(x_0^+) \leq f(x')$$

再令 $x' \rightarrow x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leq f(x_1^-)$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leq f(x_1^-) < f(x_1^+)$$

即所要证明的(1.1). 这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 而由命题 1.9 可知这些跳跃区间至多有可列个. 这就证明了单调函数的间断点至多有可列个.

□

1.3.2 不可列集

定义 1.15 (不可列集)

不是可列集的无限集称为**不可列集**.



定理 1.11

$[0, 1]$ 是不可列集.



证明 假设 $[0, 1]$ 可列, 则可表示为 $[0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0, 1]$ 三等分为: $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1 , 记该区间为 I_1 , 则 $x_1 \notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2 , 记该区间为 I_2 , 则 $x_2 \notin I_2, I_2 \subset I_1; \dots, \dots$, 依次做下去, 可得到一列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

- (i) $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$;
- (ii) $x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N}$;
- (iii) I_n 的长度为 $1/3^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

由闭区间套定理, 存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾.



定义 1.16

若 $A \sim [0, 1]$, 则称 A 具有**连续基数**, 记 $\overline{\overline{A}} = \aleph$.



定理 1.12

对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a, b]}} = \overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$.



证明 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x) = a + (b - a)x$ 建立了 $[0, 1]$ 与 $[a, b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a, b]}} = \aleph$. 又 (a, b) 和 $(a, b]$ 与 $[a, b]$ 分别只差一个点和两个点, 由**可列集的性质 (6)**知 $\overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{[a, b]}} = \aleph$. 最后, 由 § 与 R 对等] 例题 1.6 以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[-1, 1]}} = \aleph$.



推论 1.1

无理数的基数为 \aleph .



证明 记无理数集为 \mathbb{I} , 注意到 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 且 \mathbb{Q} 可列, 由**可列集的性质 (6)**可得 $\overline{\overline{\mathbb{I}}} = \overline{\overline{\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$.



定理 1.13

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph$.



证明 不妨设 $A_i \cap A_j = \emptyset$. 由于 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $A_n \sim (n, n+1]$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}$.



定义 1.17

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, \dots , C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{\bar{A}}$$

更一般地, 设 $\bar{A} = \mu$, 定义 $\overline{2^A} = 2^\mu$.

**命题 1.11**

设 A, B 都是非空集合, 则 $A \sim B$ 的充要条件是 $2^A \sim 2^B$.



证明 必要性: 由 $A \sim B$ 可知 $\bar{A} = \bar{B}$. 于是 $\overline{2^A} = 2^{\bar{A}} = 2^{\bar{B}} = \overline{2^B}$. 故 $2^A \sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\bar{A} > \bar{B}$, 则 $\overline{2^A} = 2^{\bar{A}} > 2^{\bar{B}} = \overline{2^B}$, 这与 $2^A \sim 2^B$ 矛盾! 故 $A \sim B$.

**引理 1.2**

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 \mathcal{F}_A 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A \sim 2^A$. 进而 $\overline{\mathcal{F}_A} = \overline{2^A} = 2^{\bar{A}}$.



证明 对于每个 $E \in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 \mathcal{F}_A 与 2^A 对等.

**定理 1.14**

$\aleph = 2^{\aleph_0}$.



证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 \mathbb{N} 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0, 1]$ 对等.

对任意的 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f : \varphi \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0, 1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0, 1]$ 的单射, 故由**命题 1.12**可知 $\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \leqslant \overline{(0, 1]}$.

另一方面, 对每一个 $x \in (0, 1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0, 1\}.$$

定义映射

$$g : x \rightarrow \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

易知, g 是从 $(0, 1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由**命题 1.12**可知 $\overline{(0, 1]} \leqslant \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}$.

由**Bernstein 定理**可知 $\overline{(0, 1]} = \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}$. 再由**引理 1.2**可得 $\aleph = \overline{(0, 1]} = \overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} = \overline{2^{\mathbb{N}}} = 2^{\aleph_0}$.



例题 1.9 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

证明 由**定理 1.13**及**命题 1.11**和 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}}$, 故再由**命题 1.5**可得 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.



例题 1.10 用 M 表示 $[0, 1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{M} = 2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0, 1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] - E \end{cases}$$

显然, $\chi_E \in M$. 故 $\overline{\overline{M}} \geq \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^{\aleph_0}$.

另一方面, 对每一个 $f \in M$, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph_0}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph_0}$.

□

定理 1.15 (无最大基数定理)

设 A 为非空集, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$.

♡

证明 由于 2^A 中的单元素集与 A 对等, 故 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{2^A}}$.

若存在集合 A 满足 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{2^A}}$, 则存在 $f : A \rightarrow 2^A$ 为一一映射. 令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

注意到 $\emptyset \in 2^A$, 则存在 $x_0 \in A$ 使得 $f(x_0) = \emptyset$, 故 $x_0 \notin f(x_0)$. 这说明 $x_0 \in B$, 从而 $B \neq \emptyset$.

又 $B \in 2^A$, 则存在 $x_B \in A$ 使得 $f(x_B) = B$. 下面考察 x_B 与 B 的关系: 若 $x_B \in B$, 则 $x_B \notin f(x_B) = B$, 矛盾; 若 $x_B \notin B$, 即 $x_B \notin f(x_B)$, 这又蕴含 $x_B \in B$, 矛盾.

□

1.4 整数

定理 1.16 (逆归定理)

假设 S 是一个集合, $a \in S$, 并且对于每个 $n \in N$, $f_n : S \rightarrow S$ 均是函数, 则存在唯一的函数 $\varphi : N \rightarrow S$, 使得 $\varphi(0) = a$ 并且 $\varphi(n+1) = f_n(\varphi(n)) (\forall n \in N)$.

♡

证明 我们将构造 $N \times S$ 上的一个关系 R , 使得它是满足上述性质的函数 $\varphi : N \rightarrow S$ 的图象, 令

$$\mathcal{F} = \{Y \subset N \times S \mid (0, a) \in Y, \text{ 并且 } (n, x) \in Y \Rightarrow (n+1, f_n(x)) \in Y (\forall n \in N)\}$$

由于 $N \times S \in \mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F} \neq \emptyset$. 令 $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$, 则 $R \in \mathcal{F}$. 又设 M 为子集合

$$\{n \in N \mid \text{存在唯一的 } x_n \in S, \text{ 使得 } (n, x_n) \in R\}$$

我们归纳证明 $M = N$. 如果 $0 \notin M$, 则有 $(0, b) \in R$, 其中 $b \neq a$, 并且集合 $R - \{(0, b)\} \subset N \times S$ 属于 \mathcal{F} . 从而 $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \subset R - \{(0, b)\}$, 这就导致矛盾. 因此 $0 \in M$. 现在假定 $n \in M$ (即有唯一的 $x_n \in S$, 使得 $(n, x_n) \in R$), 则 $(n+1, f_n(x_n)) \in R$. 如果又有 $(n+1, c) \in R$, 而 $c \neq f_n(x_n)$, 则 $R - \{(n+1, c)\} \in \mathcal{F}$ (验证!), 由此又可象上面那样导致矛盾. 因此 $x_{n+1} = f_n(x_n)$ 是 S 中唯一的元素, 使得 $(n+1, x_{n+1}) \in R$. 于是由归纳法 (定理 6.1) 可知 $N = M$, 即 $n \mapsto x_n$ 定义了一个函数 $\varphi : N \rightarrow S$, 它的图象为 R . 由于 $(0, a) \in R$, 从而 $\varphi(0) = a$. 对于每个 $n \in N$, $(n, x_n) = (n, \varphi(n)) \in R$. 由于 $R \in \mathcal{F}$, 从而 $(n+1, f_n(\varphi(n))) \in R$. 但是 $(n+1, x_{n+1}) \in R$. 由 x_{n+1} 的唯一性推出 $\varphi(n+1) = x_{n+1} = f_n(\varphi(n))$.

□

注 如果 A 是非空集合, A 中的序列是一个函数 $N \rightarrow A$. 一个序列通常表示成 $\{a_0, a_1, \dots\}, \{a_i\}_{i \in N}$ 或者 $\{a_i\}$, 其中 $a_i \in A$ 是 $i \in N$ 的象. 类似地, 函数 $N^* \rightarrow A$ 也称作序列, 并且表示成 $\{a_1, a_2, \dots\}, \{a_i\}_{i \in N^*}$ 或者 $\{a_i\}$, 这些符号在课文中不会引起混乱.