0.1 正测度集与矩体的关系

定理 0.1

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E) > 0, 0 < \lambda < 1$, 则存在矩体 I, 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap E). \tag{1}$$

注 上述定理告诉我们, 任何一个正测集, 其中总有一部分被一个矩体套住, 使两者的测度差小于预先给定的正数 ε. 当然, 这一测度差不一定能等于零.

证明 **情形** I: 当 $m(E) < +\infty$ 时, 对于 $0 < \varepsilon < (\lambda^{-1} - 1)m(E)$, 作 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon.$$

从而存在 k_0, 使得 $\lambda|I_{k_0}| < m(I_{k_0} \cap E)$. 事实上, 若对一切 k, 有

$$\lambda|I_k| \geqslant m(I_k \cap E),$$

则可得

$$m(E) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap E) \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant \lambda(m(E) + \varepsilon) < m(E).$$

这就导致 $m(E) < m(E)$, 产生矛盾.

情形 II: 当 $m(E) = +\infty$ 时, 由定理**??**(ii) 可知, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m(E \backslash F) < 1$. 记 $H = E \backslash F$, 则 $m(H) < 1$ 且 $H \subset E$. 于是由**情形** I 可知, 存在矩体 I, 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap H).$$

再由 $I \cap H \subset I \cap E$ 及测度的单调性可得

$$\lambda|I| < m(I \cap H) \leqslant m(I \cap E).$$

故结论得证. □

例题 0.1 $[0,1]$ 中存在正测集 E, 使对 $[0,1]$ 中任一开区间 I, 有

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

解 首先, 在 $[0,1]$ 中作类 Cantor 集 H_1:$m(H_1) = 1/2$. 其次, 在 $[0,1]$ 中 H_1 的邻接区间 $\{I_{1j}\}$ 的每个 I_{1j} 内再作类 Cantor 集 H_{1j}: $m(H_{1j}) = |I_{1j}|/2^2$, 并记 $H_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_{1j}$. 然后, 对 $H_1 \cup H_2$ 的邻接区间 $\{I_{2j}\}$ 的每个 I_{2j}, 又作类 Cantor 集 H_{2j}:$m(H_{2j}) = |I_{2j}|/2^3$. 再记 $H_3 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_{2j}$, 依次继续进行, 则得 $\{H_m\}$. 令 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, 得证. □

定理 0.2 (Steinhaus 定理)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E) > 0$. 作 (向量差) 点集

$$E - E \stackrel{\text{def}}{=} \{x - y : x, y \in E\},$$

则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $E - E \supset B(0, \delta_0)$.

证明 取 λ 满足 $1 - 2^{-(n+1)} < \lambda < 1 (n \geq 2)$. 由定理 0.1可知, 存在矩体 I, 使得 $\lambda|I| < m(I \cap E)$. 现在记 I 的最短边长为 δ, 并作开矩体

$$J = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : |\xi_i| < \frac{\delta}{2}\ (i = 1, 2, \cdots, n) \right\}.$$

从而只需证明 $J \subset E - E$ 即可 (在 J 中任取一个以原点为中心的开球 $B(0, \delta_0)$), 也就是只要证明对每个 $x_0 \in J$, 点集 $E \cap I$ 必与点集 $(E \cap I) + \{x_0\}$ 相交 (此时任取 $y \in (E \cap I) \cap ((E \cap I) + \{x_0\})$, 从而存在 $z \in E \cap I$, 使得 $y = z + x_0$.

也即存在 $y,z\in E\cap I\subset E$, 使得 $y-z=x_0$) 即可. 因为 J 是以原点为中心, 边长为 δ 的开矩阵, 所以 I 的平移矩体 $I+\{x_0\}$ 仍含有 I 的中心, 从而知

$$m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|(n\geq 2).$$

结合上式, 再由定理**??**(4) 可得

$$m(I\cup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))<2|I|-2^{-n}|I|,$$

即

$$m(I\cup(I+\{x_0\}))<2\lambda|I|.$$

但由于 $E\cap I$ 与 $(E\cap I)+\{x_0\}$ 有着相同的测度并且都大于 $\lambda|I|$, 同时又都含于 $I\cup(I+\{x_0\})$ 之中, 故它们必定相交, 否则其并集测度要大于 $2\lambda|I|$, 从而引起矛盾. □

命题 0.1

设有定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbb{R},$$

且在 $E\subset\mathbb{R}$ $(m(E)>0)$ 上有界, 则 $f(x)=cx$ $(x\in\mathbb{R})$, 其中 $c=f(1)$.

证明 (i) 首先, 由题设知, 对 $r\in\mathbb{Q}$, 必有 $f(r)=rf(1)$.

(ii) 其次, 由 $m(E)>0$ 可知, 存在区间 I: $I\subset E-E$. 不妨设 $|f(x)|\leqslant M$ $(x\in E)$, 又对任意的 $x\in I$, 有 $x',x''\in E$, 使得 $x=x'-x''$, 则

$$|f(x)|=|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')|+|f(x'')|\leqslant 2M.$$

记 $I=[a,b]$, 并考查 $[0,b-a]$. 若 $x\in[0,b-a]$, 则 $x+a\in[a,b]$. 从而由 $f(x)=f(x+a)-f(a)$ 可知, $|f(x)|\leqslant 4M$, $x\in[0,b-a]$. 记 $b-a=c$, 这说明

$$|f(x)|\leqslant 4M,\quad x\in[0,c].$$

易知

$$|f(x)|\leqslant 4M,\quad x\in[-c,c].$$

已知对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 以及自然数 n, 均存在有理数 r, 使得 $|x-r|<c/n$, 因此我们得到

$$\begin{aligned}|f(x)-xf(1)|&=|f(x-r)+rf(1)-xf(1)|\\&=|f(x-r)+(r-x)f(1)|\leqslant\frac{4M+c|f(1)|}{n}.\end{aligned}$$

根据 n 的任意性 (r 的任意性), 即得 $f(x)=xf(1)$. □