0.1 著名积分不等式

定理 0.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty)$,$(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty)$,$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 $x_i, i=1,2,\cdots,n$ 相等.

笔记 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a,b\geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$ 有 $ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出.

□

定义 0.1

(1) $\mathrm{d}\mu = g(x)\mathrm{d}x$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E\subset \mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in E} f(n)$.

定理 0.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2\mathrm{d}\mu \int_E |g(x)|^2\mathrm{d}\mu.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$.

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}\mu \int_E |g(x)|^2\mathrm{d}\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_E |g(x)|\mathrm{d}\mu=0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu\neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|\mathrm{d}\mu\neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}\mu=\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}\mu=1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$.

□

定理 0.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geqslant 0, \int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式(1)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3.Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 为书写简便, 我们记 $\mathrm{d}\mu = \frac{p(x)}{\int_a^b p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x$, 那么有 $\int_a^b 1\mathrm{d}\mu = 1$. 于是我们记 $x_0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}\mu \geqslant \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]\mathrm{d}\mu = \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu\right),$$

这就完成了证明.

□

例题 0.1 对连续正值函数 f, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $\mathrm{d}\mu = \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$, 则 $\int_a^b \mathrm{d}\mu = 1$, 再令 $x_0 \triangleq \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu > 0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x \leqslant \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}\mu &\leqslant \int_a^b \ln x_0 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x) - x_0)\mathrm{d}\mu \\
&= \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu - x_0\int_a^b \mathrm{d}\mu\right) \\
&= \ln x_0 = \ln\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

故结论得证.

□

定理 0.4 (Hölder 不等式)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中有体积的有界集,f 和 g 都在 V 上可积, 又设 p,q 是满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数, 且 $p > 1$, 则有

$$\int_V |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_V |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).

注 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要 “调幂次” 的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于 $p \in (0,1)$ 的情况会有反向赫尔德不等式.

证明 不妨设 $f,g \geqslant 0$, 否则用 $|f|,|g|$ 代替 f,g. 由 Young 不等式可知

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}.$$

由于 f,g 在 V 上都可积, 故可不妨设 $\int_V f^p(x)\mathrm{d}x = \int_V g^q(x)\mathrm{d}x = 1$, 否则用 $\frac{f}{\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}, \frac{g}{\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$ 代替 f,g. 从而

$$\int_V f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_V f^p(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_V g^q(x)\mathrm{d}x = 1 = \left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}$$

在 V 上几乎处处取等. 根据 Young 不等式的取等条件可知, 此即 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零).

□

定理 0.5 (Minkowski 不等式)

若 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的非负连续函数, 则对 $p \geqslant 1$ 有 (若 $p \in (0,1)$ 则不等式反向)

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.$$

笔记 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用 Hölder 不等式.

注 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为“绝对值不等式”, 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用 p 范数来写会好记并且清晰:

$$\left\|\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right\|_p \leqslant \int_c^d \|f(x,y)\|_p\mathrm{d}y.$$

对于 $p \in (0,1)$ 的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向 Hölder 不等式.

证明 假设 $p \geqslant 1$, 记 $g(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 换序并利用Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\cdot\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^{p-1}\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b\int_c^d f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d\int_a^b f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant \int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}y\\
&= \left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\\
&= \left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 进而 $q(p-1)=p$. 两边约掉 $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x$ 就有

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.$$

□

定理 0.6 (Hardy 不等式)

设 $p>1$ 或 $p<0, f(x)$ 恒正且连续, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\mathrm{d}x.$$

♡

注 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后 Hölder(连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再 Hölder, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外 $p<0$ 的情况证明完全类似, 利用反向 Hölder 即可.

证明 假设 $p>1$, 对任意 $M>0$, 利用分部积分和Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x &= -\frac{1}{p-1}\int_0^M F^p(x)\mathrm{d}\frac{1}{x^{p-1}} = -\frac{1}{p-1}\left(\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M - \int_0^M \frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}F^p(x)\right)\\
&= -\frac{1}{p-1}\frac{F^p(M)}{M^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_0^M \frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^M f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

其中利用了

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \lim_{x\to0^+}F(x)\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1},\ \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to0^+}f(x)=f(0).$$

所以

$$\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} - \lim_{x\to0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.$$

现在两边约掉相同的部分并同时开 p 次方, 再令 $M\to\infty$ 就有

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\mathrm{d}x.$$

□

推论 0.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列 a_n 非负, 对任意 $p>1$ 或者 $p<0$, 都有

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

♡

注 如果 $p<0$, 则同样使用反向 Hölder 不等式即可完成证明.

证明 记 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, 不妨设 $p>1$, 先证

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1}\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant \frac{1}{p-1}\left((k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}\right) \leqslant 0. \tag{2}$$

上式等价于

$$\begin{aligned}
&(p-1)\frac{S_k^p}{k^p} - p\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant (k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}.\\
\Longleftrightarrow\ &(k+p-1)\frac{S_k^p}{k^p} \leqslant (k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} + p\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k.
\end{aligned}$$

令 $x=S_{k-1}, y=a_k$, 则 $S_k=x+y$, 代入上式得

$$\begin{aligned}
&(k+p-1)\frac{(x+y)^p}{k^p} \leqslant \frac{x^p}{(k-1)^{p-1}} + p\frac{(x+y)^{p-1}}{k^{p-1}}y.\\
\Longleftrightarrow\ &(k+p-1)(x+y)^p \leqslant \frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}x^p + pk(x+y)^{p-1}y.
\end{aligned}$$

两边除以 $(x+y)^p$, 再令 $t=\dfrac{x}{x+y}\in[0,1)$ 代入得

$$k+p-1\leqslant\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^p+pk(1-t).$$

令

$$h(t)=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^p+pk(1-t)-(k+p-1),$$

则(2)式等价于 $h(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1)$. 注意到

$$h'(t)=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}pt^{p-1}-pk=,$$

令 $h'(t)=0$ 得

$$\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}t^{p-1}=k\Longrightarrow t^{p-1}=\frac{k(k-1)^{p-1}}{k^p}=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1}\Longrightarrow t=\frac{k-1}{k}.$$

故 $h(t)$ 在 $t=\dfrac{k-1}{k}$ 处取得最小值. 又因为

$$\begin{aligned}h\left(\frac{k-1}{k}\right)&=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}\left(\frac{k-1}{k}\right)^p+pk\left(1-\frac{k-1}{k}\right)-(k+p-1)\\&=\frac{k^p}{(k-1)^{p-1}}\cdot\frac{(k-1)^p}{k^p}+pk\cdot\frac{1}{k}-(k+p-1)\\&=(k-1)+p-(k+p-1)=0.\end{aligned}$$

所以 $h(t)\geqslant h(\dfrac{k-1}{k})=0,\forall t\in[0,1)$ 成立. 故(2)式成立. 再对(2)式两边求和有

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1}a_k.$$

再利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p&\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1}a_k\\&\leqslant\frac{p}{p-1}\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{p}{p-1}\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

现在两边约掉相同的部分并同时开 p 次方得

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^n a_k^p.$$

□