

## 0.1 分部积分

分析学里流传着一句话:“遇事不决分部积分”.

分部积分在渐近分析中的用法:

- (1) 有时候分部积分不能计算出某一积分的具体值,但是我们可以利用分部积分去估计原积分(或原含参积分)的范围.并且我们可以通过不断分部积分来提高估计的精确程度.
- (2) 分部积分也可以转移被积函数的导数.
- (3) 分部积分可以改善阶.通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计.并且可以通过反复分部积分得到更加精细的估计.

### 定理 0.1 (Newton-Leibniz 公式)

1. 若  $f \in \mathbf{R}[a, b]$ , 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

2. 若函数  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

若函数  $f$  在  $(-\infty, a]$  上无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

若函数  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 且有原函数  $F$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

### 定理 0.2 (分部积分公式)

1. 设函数  $u, v$  在  $[a, b]$  上连续可微, 则

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

2. 设函数  $u, v$  在  $[a, +\infty)$  上连续可微且极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$  存在. 若  $u'v$  和  $uv'$  中有一个在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分收敛, 则另一个在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x) dx.$$

**注** 广义积分的分部积分公式形式上与常义积分的分部积分公式一样, 既可用于计算(已知收敛的)广义积分, 也能用来证明广义积分收敛.

#### 例题 0.1

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt.$$

证明  $|f(x)| \leq \frac{1}{x}, x > 0$ .

 **笔记** 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法(1).

**证明** 由分部积分可得, 对  $\forall x > 0$ , 都有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt \right| = \left| \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right| = \left| -\frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} \cos u du - \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{(x+1)^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} du \right| + \left| \frac{\cos x}{2x} - \frac{\cos(x+1)}{2(x+1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(x+1)}{(x+1)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x[\cos x - \cos(x+1)] + \cos x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{2\sin \frac{1}{2}x \sin \frac{2x+1}{2} + \cos x}{2x(x+1)} \\
&\leq \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x+1}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

□

**例题 0.2** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b], \quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt,$$

证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx.$$

**证明** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)dx &= b \int_a^b f(t)dt - \int_a^b \left( \int_a^x f(t)dt \right) dx \\
&\leq b \int_a^b g(t)dt - \int_a^b \left( \int_a^x g(t)dt \right) dx \\
&= \int_a^b xg(x)dx.
\end{aligned}$$

□

**例题 0.3** 设  $f(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{y} dy$ , 求  $f'(0)$ .

 **笔记** 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (3).

**解** 注意到

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin y}{y^2} dy}{x} \stackrel{\text{令 } t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy, \quad (1.1)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \sin y d\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin y}{y^2} dy}{x} \stackrel{\text{令 } t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} t \int_t^{-\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy. \quad (1.2)$$

由分部积分可得

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = - \int_t^{+\infty} \frac{1}{y^2} d \cos y = \frac{\cos y}{y^2} \Big|_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \cos y d \frac{1}{y^2} = \frac{\cos t}{t^2} - 2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} dy.$$

故对  $\forall t > 0$ , 我们有

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy \right| = \left| \frac{\cos t}{t^2} - 2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^3} dy \right| \leq \frac{1}{t^2} + 2 \int_t^{+\infty} \frac{1}{y^3} dy = \frac{2}{t^2}.$$

即  $\int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \forall t > 0$ . 再结合 (1) 式可知

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = 0.$$

同理可得  $f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t \int_t^{-\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy = 0$ . 故  $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ .

□

**例题 0.4** 设  $f$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数并满足  $0 \leq f(x) \leq x$ . 求证:

$$\int_0^1 f(x)dx - \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 \geq \int_0^1 x^2 f(x)dx \geq \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

并且上式成为等式当且仅当  $f(x) = x$ .

**证明** **证法一:** 设  $f$  是连续函数满足所给的条件,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则  $F' = f$ . 由  $0 < f(x) \leq x$  得  $F(x) \leq \int_0^x tdt =$

$\frac{1}{2}x^2$ . 因而

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \geq \int_0^1 2F(x)F'(x) dx = F^2(x) \Big|_0^1 = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x) dx &= x^2 F(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x F(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2x F(x) dx \\ &\leq \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2f(x)F(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - F^2(x) \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

由证明过程可知只有当  $f(x) = x$  时, 所证不等式成为等式.

证法二 (直接求导法): 令

$$F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt - \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2,$$

则

$$F'(x) = x^2 f(x) - 2f(x) \int_0^x f(t) dt \geq x^2 f(x) - 2f(x) \int_0^x t dt = 0.$$

故

$$\int_0^1 t^2 f(t) dt - \left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2 = F(1) \geq F(0) = 0.$$

令  $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $f(x) = h'(x)$ , 从而

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 h'(x) dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 x h(x) dx.$$

因此

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx - \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \iff 2 \int_0^1 x h(x) dx \geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \quad (3)$$

再令

$$G(x) = 2 \int_0^x t h(t) dt - \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2,$$

则

$$G'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt - 2f(x) \int_0^x f(t) dt \geq 0.$$

故

$$2 \int_0^1 x h(x) dx - \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 = G(1) \geq G(0) = 0.$$

因此(3)式成立.

□