0.1 杂题

例题 0.1 设 $Y, x_0, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{Y}}\int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{Y}}\int_{0}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{Y}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $f\in C^3[0,x], x>0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \tag{1}$$

若还有 $f'''(0)\neq 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\xi}{x}$.

笔记 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x)-f(0))\,t + f(0) + f''(\xi)\,t\,(t-x)\,, t\in[0,x]\,.$$

两边同时对 t 在 $[0,x]$ 上积分就能得到(1)式.

证明 设 $K\in\mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{y}{2}[f(0)+f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0)+f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y)-f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由 $g(x)=g(0)=0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1\in(0,x)$ 使得 $g'(\xi_1)=0$. 注意到 $g'(0)=0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即 $K=f''(\xi)$, 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta\in(0,\xi).$$

于是

$$f'''(\eta)\frac{\xi}{x} = \frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)\frac{\xi}{x} &= \lim_{x\to0^+} \frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}-f''(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{-12\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+6x[f(0)+f(x)]-f''(0)x^3}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{-12f(x)+6[f(x)+f(0)]+6xf'(x)-3f''(0)x^2}{4x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{6xf''(x)-6f''(0)x}{12x^2}\\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{f''(x)-f''(0)}{2x} = \frac{1}{2}f'''(0).
\end{aligned}$$

因为 $0<\eta<\xi<x$, 所以

$$\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)=f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.3 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g\in C^2[0,+\infty)$ 满足

$$g''(x)+f(x)g(x)=0. \tag{2}$$

证明: 存在 $M>0$ 使得

$$|g(x)|\leqslant M,\quad |g'(x)|\leqslant M\sqrt{f(x)},\quad \forall x>0. \tag{3}$$

证明 对 $\forall x>0$, 有 f 在 $[0,x]$ 上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知 $f\in R[0,x],\forall x>0,f$ 在 $[0,+\infty)$ 上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^x f(y)g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\forall x>0 \tag{4}$$

利用 f 递增和第二积分中值定理和 (4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+f(x)\int_\xi^x g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\xi\in[0,x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2-\frac{1}{2}|g'(0)|^2+\frac{[f(x)]^2}{2}\left[g^2(x)-g^2(\xi)\right]=0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2=|g'(0)|^2-f(x)g^2(x)+f(x)g^2(\xi)\leqslant|g'(0)|^2+f(x)g^2(\xi). \tag{5}$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)}+g'(x)g(x)=0,\forall x>0.$$

即

$$\int_0^x\frac{g''(y)g'(y)}{f(y)}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\forall x>0$$

由 f 递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)}\int_0^\eta g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\eta\in[0,x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)}\left[|g'(\eta)|^2-|g'(0)|^2\right]+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)}\left[|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2\right] \leqslant g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \tag{6}$$

由 $g \in C[0,+\infty)$ 知 g 有界, 即存在 $C_1 > 0$, 使得 $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$. 于是由(5)式知

$$|g'(x)|^2 \leqslant |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi) \leqslant |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \tag{7}$$

又因为 f 是递增正函数, 所以 $f(x) \geqslant f(0) > 0, \forall x > 0$. 从而存在 $C_2 > 0$, 使得

$$|g'(0)|^2 \leqslant C_2 f(0) \leqslant f(x), \forall x > 0.$$

于是取 $M = \max\left\{C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}\right\}$, 则由(7)式和(6)式可得, 对 $\forall x > 0$, 有

$$|g(x)|^2 \leqslant M \leqslant M^2,$$
$$|g'(x)|^2 \leqslant C_2 f(x) + C_1 f(x) \leqslant M f(x) \leqslant M^2 f(x).$$

进而

$$|g(x)| \leqslant M, |g'(x)| \leqslant M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了(3).

□

例题 0.4 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格单调下降, 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

证明 反证, 假设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = c \in (a,+\infty)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k} \to c$. 记

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A,$$

则 $f(x_n)$ 的子列极限也收敛到 A, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = A$. 由 $x_{n_k} \to c$ 知, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_k} \in (c-\delta, c+\delta), \forall k > K.$$

其中 $\delta = \min\left\{\frac{c-a}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. 任取 $x_1, x_2 \in (c+\delta,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则由 f 严格递减知

$$f\left(x_{n_k}\right) > f(x_1) > f(x_2) > f(x), \forall x > x_2, \forall k > K.$$

左边令 $k \to +\infty$, 右边令 $x \to +\infty$ 得

$$A = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) \geqslant f(x_1) > f(x_2) \geqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) = A,$$

显然矛盾!

□

例题 0.5 设 $\{x_n\} \subset (0,1)$ 满足对 $i \neq j$, 有 $x_i \neq x_j$, 讨论函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $\operatorname{sgn}(x-x_n)$ 在 $x = x_n$ 处间断, 在 $x \neq x_n$ 处连续.

当 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, $f(x)$ 的每一项都连续. 又 $f(x)$ 一致收敛, 故 f 在 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都连续.

当 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k} + \sum_{n\neq k}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在 $x = x_k$ 处间断. 故 $f(x)$ 在 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都间断.

□

例题 0.6 证明 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x \in [0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 由 Abel 变换得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0$ 成立

$$\begin{aligned}
\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t \frac{t}{t^2+x} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{t=m}^{n}(-1)^t \frac{t}{t^2+x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=m}^{n-1}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t+\frac{n}{n^2+x}s_n\right] \\
&= \sum_{t=m}^{\infty}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t \\
&= \sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t-\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t,
\end{aligned}$$

这里 $s_t=\sum_{i=1}^{t}(-1)^i=(-1)^t\in\{1,-1\}$. 一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由 $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$ 和 $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}$ 都收敛知

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}=\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}=0.$$

于是我们有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}=0, \text{关于} x\in[0,+\infty) \text{一致},$$

这就证明了 $\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

□

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续实值右可导函数, 记 $D^+f(x)$ 为 $f(x)$ 的右导函数, 如果 $f(a)=0$, 且 $D^+f(x)\leqslant 0$, 则 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$.

证明 (1) 先假定 $D^+f(x)<0$, 如果结论不成立, 则存在 $x_1\in(a,b)$, 使 $f(x_1)>0$. 记

$$x_0=\inf\{x \mid f(x)>0\}.$$

由 x_0 的定义, 我们有序列 $\{x_n\}$, 使 x_n 单调递减趋于 x_0, 且 $f(x_n)>0$. 从而由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant 0. \tag{8}$$

根据 x_0 的定义可知, 对 $\forall x<x_0$, 都有 $f(x)<f(x_0)$, 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列 $\{x_n'\}$ 单调递增趋于 x_0, 且 $f(x_n')$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n'\right)\leqslant 0. \tag{9}$$

故由(8)(9)知 $f(x_0)=0$. 于是

$$D^+f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\geqslant 0,$$

这与 $D^+f(x_0)<0$ 矛盾, 于是 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$.

(2) 若 $D^+f(x)\leqslant 0$, 对任给的 $\varepsilon>0$ 构造函数

$$f_{\varepsilon}(x)=f(x)-\varepsilon(x-a),$$

对 $f_{\varepsilon}(x)$ 有 $f_{\varepsilon}(a)=0$ 且

$$D^+f_{\varepsilon}(x)\leqslant -\varepsilon<0.$$

从而由 (1) 得 $f_{\varepsilon}(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$. 因此 $f(x)\leqslant\varepsilon(x-a)\leqslant\varepsilon(b-a)$, 由 ε 的任意性, 得 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$.

□

例题 0.7 设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b)$ 上连续且右可导的函数, 如果 $D^+\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续, 证明:$\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可导,$\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$.

证明 设

$$f(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t-\varphi(x),\quad x\in[a,b).$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且右可导, 并且

$$D^+f(x)=D^+\varphi(x)-D^+\varphi(x)=0.$$

又 $f(a)=0$, 由命题 0.1得 $f(x)\leqslant 0$. 又 $-f(x)$ 满足 $-f(a)=0, D^+[-f(x)]=0$, 同理由命题 0.1得 $-f(x)\leqslant 0$, 故 $f(x)=0$. 于是

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

由 $D^+\varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$.

□

例题 0.8 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{2n}{\pi}(\ln 2n+\gamma-\ln\pi)+o(1).$$

证明 见here.

□

例题 0.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln(\ln n)}=1.$

证明 证法一:对任意充分大的 n, 由 Frullani(傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{kx}}{x}\mathrm{d}x.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned}
A&\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln k=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\mathrm{C}_n^k\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-kx}}{x}\mathrm{d}x\right)\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^ke^{-kx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}(1-1)^n-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$(1-e^{-x})^n\geqslant 1-ne^{-x}.$$

取 $M_n>1$, 满足 $M_ne^{M_n}=n$. 于是

$$0\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-ne^{-x})}{M_n}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_n}\int_{M_n}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_ne^{M_n}}=1.$$

从而

$$A=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O\left(1\right). \tag{10}$$

因为 $M_ne^{M_n}=n$, 所以由命题**??**知

$$M_n=\ln n+o\left(\ln n\right),n\rightarrow\infty. \tag{11}$$

于是

$$\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}=e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})}\leqslant e^{-(n-1)e^{-x}}\leqslant e^{-(n-1)e^{-M_n}}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\rightarrow0,\forall x\in\left[0,M_n\right].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}\leqslant\frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\rightarrow0,n\rightarrow\infty.$$

即 $\displaystyle\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right),n\rightarrow\infty$. 故

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\left(1+o\left(1\right)\right)\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x,n\rightarrow\infty. \tag{12}$$

注意到

$$\lim_{x\rightarrow0}\frac{1-e^{-x}}{x}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\rightarrow0}e^x=1,$$

故 $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\leqslant-e^{-M_n}\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\rightarrow0,n\rightarrow\infty,$$

故 $\displaystyle\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 于是再结合(11)式可知

$$\begin{aligned}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=O\left(1\right)+\ln M_n=\ln\left(\ln n+o\left(\ln n\right)\right)+O\left(1\right)\\&=\ln\ln n+o\left(1\right)+O\left(1\right)=\ln\ln n+O\left(1\right),n\rightarrow\infty.\end{aligned}$$

因此再由(12)式可知

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\left(1+o\left(1\right)\right)\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=\left(1+o\left(1\right)\right)\left(\ln\ln n+O\left(1\right)\right)=\ln\ln n+o\left(\ln\ln n\right),n\rightarrow\infty.$$

故由(10)可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln\left(\ln n\right)}&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{A}{\ln\left(\ln n\right)}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O\left(1\right)}{\ln\left(\ln n\right)}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\ln\ln n+o\left(\ln\ln n\right)+O\left(1\right)}{\ln\left(\ln n\right)}=1.\end{aligned}$$

证法二:注意到

$$\begin{aligned}S\triangleq\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

又由二项式定理可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1 t^{k+y-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^{k+y-1}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 t^{y-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^k\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{y-1}\left[(1-t)^{n-1}-1\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t-1}{t\ln t}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=e^{-x}}\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-x})\left[1-(1-e^{-x})^{n-1}\right]}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$
\begin{aligned}
S\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{命题??}}\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x.$$

由命题**??**(4) 知

$$e^{x^2-x} \geqslant \frac{1}{1+x} \geqslant e^{-x}, \forall x>0.$$

于是

$$e^{x^2-x}\cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x}{2}}\cdots e^{\left(\frac{x}{n-1}\right)^2-\frac{x}{n-1}} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

注意到

$$x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \leqslant x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}x<2x, \forall x\in[0,1],$$

故

$$e^{-x\left(-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数 e^{-x} 的介值性知, 存在 $C_n\in\left[-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}, \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right]$, 使得

$$\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}=e^{-C_nx}.$$

于是由 $-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\leqslant C_n\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ 知

$$C_n=\ln n+O(1), n\to\infty.$$

因此

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-e^{-C_nx}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t}}{t}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{t\to0}e^t=1,$$

故 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t=O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\leqslant1-e^{-C_n}=1-e^{-\ln n+O(1)}\to1, n\to\infty,$$

故 $\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t=O(1)$. 从而

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln C_n+O(1)\\&=\ln(\ln n+O(1))+O(1)=\ln\ln n+O(1), n\to\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k}{\ln\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\ln\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n+O(1)}{\ln\ln n}=1.$$

□

例题 0.10 已知 $f(x) \in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F_1(a) = F_1(b) = 0$. 再设 $F_2(x) = \int_a^x F_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left[\int_a^t f(s)ds\right]\mathrm{d}t$, 则 $F_2(a) = 0, F_2'(x) = F_1(x), F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$. 由条件可知

$$0 = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x F_1'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x dF_1(x) = xF_1(x)\Big|_a^b - \int_a^b F_1(x)\mathrm{d}x = -F_2(b).$$

于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$. 从而再由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta_1 \in (a,\xi), \eta_2 \in (\xi,b)$, 使得 $F_1'(\eta_1) = F_1'(\eta_2) = 0$. 即 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$.

□

命题 0.2

已知 $f(x) \in C[a,b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上至少 $n+1$ 个零点.

笔记 利用分部积分转换导数的技巧或匹配零点, 得到不变号的被积函数.

证明 证法一:令 $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \cdots \int_a^{x_3} \left[\int_a^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1\right] \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$. 则 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = F^{(n)}(x)\Big|_a^b = F^{(n)}(b),$$

$$0 = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = xF^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = -F^{(n-1)}(b),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x)\Big|_a^b - n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -n\int_a^b x^{n-1}F^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而 $F(b) = F'(b) = \cdots = F^{(n)}(b) = 0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a,b)$, 使得 $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \cdots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a,b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \cdots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. 即 $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \cdots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$.

证法二:假设 f 在 (a,b) 上只有 $s \leqslant n$ 个不同的零点 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_s < b$. 由 f 的介值性知,f 在 $(x_{i-1}, x_i), i = 1,2,\cdots,s$ 上不变号. 不妨设 f 在相邻两个区间变号, 否则把这两个区间合并. 现在

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s)f(x)$$

在 $[a,b]$ 上不变号. 又由条件得

$$\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s)f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

故 $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. 这与 f 在 (a,b) 上只有 s 个不同的零点矛盾! 故结论得证.

□

例题 0.11 设

$$f \in C[a,b], \int_a^b f(x)e^{kx}\mathrm{d}x = 0, k = 1,2,\cdots,n+1,$$

证明:f 在 (a,b) 至少有 $n+1$ 个不同零点.

证明 注意到

$$\int_a^b f(x)e^{kx}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\ln t} \int_{e^a}^{e^b} f(\ln t)t^{k-1}\mathrm{d}t = 0, \forall k = 1, 2, \cdots, n+1.$$

即

$$\int_{e^a}^{e^b} f(\ln t)t^k\mathrm{d}t = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, n.$$

且 $f(\ln t) \in C\left[e^a, e^b\right]$, 故由命题 0.2知 $f(\ln t)$ 在 $\left(e^a, e^b\right)$ 上至少有 $n+1$ 个不同零点. 因此 f 在 (a,b) 上至少有 $n+1$ 个不同零点.

□

例题 0.12 已知 $f(x) \in D^2[0,1]$, 且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = 16$.

笔记 构造 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x) = f(x) - p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^k g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k[f(x) - p(x)]\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k p(x)\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定 $p(x) = ax^2 + bx + c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c,\\
0 &= \int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax^3 + bx^2 + cx\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2},\\
\frac{1}{60} &= \int_0^1 x^2 p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax^4 + bx^3 + cx^2\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}.
\end{aligned}$$

解得:$a = 8, b = -9, c = 2$. 于是就得到 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$.

证明 令 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令 $G(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left(\int_0^s g(y)\mathrm{d}y\right) ds\right] \mathrm{d}t$, 则 $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&0 = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 G'''(x)\mathrm{d}x = G''(1),\\
&0 = \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xG'''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xdG''(x) = xG''(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x)\mathrm{d}x = -G'(1),\\
&0 = \int_0^1 x^2 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 G'''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 dG''(x) = x^2 G''(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xG''(x)\mathrm{d}x\\
&= -2\int_0^1 xdG'(x) = 2\int_0^1 G'(x)\mathrm{d}x - 2xG'(x)\Big|_0^1 = 2G(1).
\end{aligned}$$

从而 $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$. 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (0,1)$, 使得 $G'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0,1)$, 使得 $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0,1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$. 即 $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$. 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $g''(\xi) = 0$. 即 $f''(\xi) = 16$.

□

例题 0.13 设

$$x_n=\int_0^1 \ln(1+x+\cdots+x^n)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$$

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(2) 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}(2-x_n)\right]$.

证明

(1) 注意到

$$x_n=\int_0^1 \ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\right|\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2 x\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{分部积分}}-2\int_0^1\ln x\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln^2 x\mathrm{d}x=2.\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}x_n&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+2,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}2-x_n&=-\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=e^{-\frac{y}{n+1}}}\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(1-e^{-\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&\quad-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{13}$$

注意到 $\lim\limits_{x\to0}e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}=0$, 故存在 $M>0$, 使得

$$\left|e^{-x}\ln\frac{1-e^x}{x}\right|\leqslant M,\forall y\in(0,+\infty).$$

又注意到

$$\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\right|\leqslant\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y,\forall y\in(0,+\infty).$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot0\cdot1\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\mathrm{d}y\xlongequal{x=e^{-y}}-\int_0^1\ln\left(1-x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\mathrm{d}y=-\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-ny}}{n}\mathrm{d}y\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ny}}{n}\mathrm{d}y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

故再由(13)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(2-x_n\right)=&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(n+1\right)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(n+1\right)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&-\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)\ln n}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\=&\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\=&\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

□

例题 0.14 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x\geqslant 0$, 定义 $F\left(x\right)=\int_0^x t^{\alpha}f\left(t+x\right)\mathrm{d}t$.

(1) 若 $\alpha\in(-1,0)$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A$, 证明:$F$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha\in(0,1)$,f 以 $T>0$ 为周期,$\int_0^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2022$. 证明:$F$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

笔记 本题 (1) 中的 $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A$ 可以削弱为 $\exists M,X>0$, 使得 $\left|f\left(x\right)\right|\leqslant M,x\in[X,+\infty)$.

证明

(1) 由于 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积且 $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A$, 所以 $\exists M>0$, 使得

$$\left|f\left(x\right)\right|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty).$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\left[\frac{\left(\alpha+1\right)\varepsilon}{3M}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$, 则当 $0\leqslant x<\delta$ 时, 有

$$x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}<\delta^{1+\alpha}.$$

当 $x\geqslant\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}&=\frac{x-y}{\left[\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}+\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-2}y^{\alpha+1}+\cdots+\left(y^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}\right]}\\&<\frac{\delta}{\left(x^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}<\frac{\delta}{\left(\delta^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}=\delta^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

因此对 $\forall x,y\in[0,+\infty)$ 且 $0<x-y<\delta$, 都有

$$x^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}<\delta^{1+\alpha}.$$

从而对 $\forall x, y \in [0,+\infty)$ 且 $0 < x - y < \delta$, 都有

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left|\int_0^x t^\alpha f(t+y)\,\mathrm{d}t - \int_0^y t^\alpha f(t+x)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t - \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t - \int_y^x (t-y)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2y} \left[(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha\right] f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_y^x (t-y)^\alpha |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_x^{2y} \left[(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha\right] |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\left[\int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha\,\mathrm{d}t + \int_y^x (t-y)^\alpha\,\mathrm{d}t + \int_x^{2y} \left[(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha\right]\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{M}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1} - (2y-x)^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1} + (2y-x)^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1}\right] \\
&= \frac{M}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + 2(x-y)^{\alpha+1}\right) \\
&< \frac{3M}{\alpha+1}\delta^{1+\alpha} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

故 F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 假设 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 那么存在 $a, b > 0$, 使得 $F(x) < a|x| + b$.

从而 $\left|\dfrac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right| < \dfrac{a|x|+b}{|x|^{\alpha+1}}$, 进而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$.

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} &= \frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}} \xlongequal{\text{换元}} \frac{\int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}} \xlongequal{\text{换元}} \frac{\int_1^2 x^{\alpha+1}(t-1)^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}} \\
&\xlongequal{\text{Riemann 引理}} \int_1^2 (t-1)^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}t \int_1^2 (t-1)^\alpha \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

再结合 $\displaystyle\int_1^2 (t-1)^\alpha \mathrm{d}t > 0$, 知 $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}t = 0$.

现在有

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x t^\alpha f(t+x)\mathrm{d}t = \int_0^x t^\alpha d\left[\int_0^{x+t} f(y)\,dy\right] \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} x^\alpha \int_0^{2x} f(y)\,dy - \alpha\int_0^x t^{\alpha-1}\left[\int_0^{x+t} f(y)\,dy\right]\mathrm{d}t \\
&= x^\alpha \int_0^{2x} f(y)\,dy - \alpha\int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

设 $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$, 则由 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积知, $G \in C[0,+\infty)$. 又由 $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}t = 0$, 得

$$G(x+T) - G(x) = \int_0^x f(x+T)\mathrm{d}t - \int_0^x f(x)\mathrm{d}t = \int_x^{x+T} f(x)\mathrm{d}t = \int_0^T f(x)\mathrm{d}t = 0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以 $G(x)$ 有界.

又 $\alpha - 1 \in (-1, 0)$, 故由 (1) 可得,$-\alpha\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

下面证明 $x^\alpha \displaystyle\int_0^{2x} f(y)\,dy$ 不一致连续.

由于 $G(2x)$ 在 $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ 上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记 $M = \max\limits_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} G(2x)$, 则存在 $x_2 \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, 使得 $M = G(2x_2) \geqslant G(2x), x \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$.

又因为 $G(3) = \displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2022$, 且 $G(2x)$ 以 $\dfrac{T}{2}$ 为周期, 所以存在 $x_1 \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, 使得 $G(2x_1) = G(3) > 0$.

因此,$M = G(2x_2) \geqslant G(2x_1) = G(3) = \displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

构造数集 $E=\left\{x'\in\left[0,\frac{T}{2}\right]\mid G\left(2x'\right)=M\right\}$, 由 $x_2\in E$ 知, $E\neq\varnothing$. 又因为 E 有界, 所以由确界存在定理知,E 必有上确界, 取 $x_0=supE$.
假设 $x_0\notin E$, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\left|G\left(2x_0\right)-M\right|$, 则 $\varepsilon_0>0$, 否则 $x_0\in E$ 矛盾.
从而 $\forall\delta'>0,\exists x_{\delta'}\in E$, 使得 $x_0-\delta'<x_{\delta'}<x_0$, 都有 $\left|G\left(2x_0\right)-G\left(2x'_{\delta'}\right)\right|\geqslant\varepsilon_0$.
这与 G(2x) 在闭区间 $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ 上连续, 进而一致连续矛盾. 故 $x_0\in E$.
任取 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}-x_0\right)\right)$, 则 $G\left(2x_0+\delta\right)<M=G\left(2x_0\right)$, 否则与 $x_0=supE$ 矛盾.
进而 $\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\delta}f\left(y\right)dy\right|=\left|G\left(2x_0+\delta\right)-G\left(2x_0\right)\right|>0.$
从而当 $n>\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ 时, 由积分中值定理, 得
存在 $\xi_n\in\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得

$$\left|\int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}f\left(y\right)dy\right|=\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left|f\left(\xi_n\right)\right|>0 \tag{14}$$

又因为 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以 f 在 $\left(2x_0,2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ 上有界.
于是存在 $K,L>0$, 使得

$$K\leqslant\left|f\left(\xi_n\right)\right|\leqslant L \tag{15}$$

取数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$, 其中 $x_n=x_0+n\frac{T}{2}, y_n=x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}, n\in\mathbb{N}_+$. 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n-y_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)=0.$
由拉格朗日中值定理, 得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,
存在 $\xi_n\in\left(x_0+n\frac{T}{2},x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得 $\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}=\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\xi_n}^{\alpha-1}$
从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\xi_n}^{\alpha-1}\leqslant\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令 $n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\xi_n}^{\alpha-1}=0.$
于是存在 $N>0$, 使得 $\forall n>N$, 有

$$\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0}f\left(y\right)dy} \tag{16}$$

现在, 当 $n>\max\left\{N,\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right\}$ 时, 结合(14)(15)(16), 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|{x_n}^{\alpha}\int_0^{2x_n}f\left(y\right)dy-{y_n}^{\alpha}\int_0^{2y_n}f\left(y\right)dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f\left(y\right)dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f\left(y\right)dy\right|\\
=&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f\left(y\right)dy-\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f\left(y\right)dy+\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f\left(y\right)dy\right]\right|\\
=&\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f\left(y\right)dy-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f\left(y\right)dy\right|\\
\geqslant&\left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\int_{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)}f\left(y\right)dy\right|-\left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^{\alpha}-\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha}\right]\int_0^{2\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)}f\left(y\right)dy\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_{2x_0}^{2x_0+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y)\,dy\right| - \left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha\right]\int_0^{2x_0} f(y)\,dy\right| \\
&= \left|\left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha\right| \cdot \left|\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} f(\xi_n)\right| - \left|\left[\left(x_0+n\frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0+n\frac{T}{2}+\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha\right]\int_0^{2x_0} f(y)\,dy\right| \\
&\geqslant 2\left(\frac{T}{2}\right)^\alpha |f(\xi_n)| \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon \\
&\geqslant 2\left(\frac{T}{2}\right)^\alpha K \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon
\end{aligned}
$$

令$n \to +\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n{}^\alpha \int_0^{2x_n} f(y)\,dy - y_n{}^\alpha \int_0^{2y_n} f(y)\,dy\right) = +\infty$.故$x^\alpha \int_0^{2x} f(y)\,dy$在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

这与 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续矛盾. 因此,F在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

□

例题 0.15 计算

$$\lim_{t\to1^-}(1-t)\left(\frac{t}{1+t}+\frac{t^2}{1+t^2}+\cdots+\frac{t^n}{1+t^n}+\cdots\right)$$

解 对 $\forall t\in(0,1)$, 一方面, 我们有

$$(1-t)\sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^\infty \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+t^k}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+t)$$

另一方面, 我们有

$$(1-t)\sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^\infty \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+t^k}\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{1+x}\mathrm{d}x = t\ln 2.$$

故

$$\ln 2 = \lim_{t\to1^-}[\ln(1+t)] \leqslant \lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{1+t^k} \leqslant \lim_{t\to1^-}(t\ln 2) = \ln 2.$$

□

例题 0.16 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}$.

解 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $t_n\in\mathbb{N}$, 使得 $(t_n+1)\pi<n<(t_n+2)\pi$. 从而 $n-7<t_n\pi<n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{n}=\frac{1}{\pi}$. 现在我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} &= \sum_{k=0}^{t_n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} + \int_{(t_n+1)\pi}^n \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} \\
&= \sum_{k=0}^{t_n}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2(x+k\pi)} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2(x+(t_n+1)\pi)} \\
&= t_n\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\right| &\leqslant \frac{1}{1+\cos^2 x}, \\
n\left|\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right| &= \left|\frac{n^3\left(x^2-\cos^2 x\right)}{\left(1+n^2\cos^2 x\right)\left(1+n^2x^2\right)}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{n^3\left(x^2-\cos^2 x\right)}{n^4x^2\cos^2 x}\right| \leqslant \frac{\left|x^2-\cos^2 x\right|}{x^2\cos^2 x},
\end{aligned}
$$

故由控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n-(t_n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} = \int_0^\pi \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x} = 0, \qquad (18)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2\cos^2 x}-\frac{n}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} t_n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}&=\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{n}\cdot n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}+n\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}-\frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=1.\end{aligned}\tag{19}$$

综上, 由(17)(18)(19)式知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\cos^2 x}=1.$$

□

例题 0.17 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x.$

证明 注意到对 $\forall k\in[1,2018]\cap\mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2018-k}}{(1+t)^{2021}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^k-x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=0,\quad \forall k\in[1,2018]\cap\mathbb{N}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=0.$$

□

例题 0.18 设 $I(f)=\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x-f(x))f(x)\mathrm{d}x$, 求当遍历 $[0,\pi]$ 上所有连续函数 f 时 $I(f)$ 的最大值.

解 对函数配方, 有

$$(\sin x-f(x))f(x)=-\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2+\frac{\sin^2 x}{4}.$$

代入积分式, 得

$$\begin{aligned}I(f)&=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{4}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}-\int_0^{\pi}\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故当 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ 时,$I(f)$ 取得最大值 $\dfrac{\pi}{8}$.

□

例题 0.19 设 $\alpha>1,\Gamma_k=\left[k^{\alpha},\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right)\cap\mathbb{N}(k\geqslant 1)$. 试判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性, 其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n=\min\Gamma_k,\\ \dfrac{1}{n^{\alpha}}, & \text{其他},\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n\in\Gamma_k,\\ \dfrac{1}{n^{\alpha}}, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 由 $\alpha>1$ 和条件直接可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{\substack{n\neq\min\Gamma_k,\\ \forall k\in\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{\substack{\exists k\in\mathbb{N},\\ n=\min\Gamma_k}}^{\infty}\frac{1}{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\min\Gamma_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}<\infty.$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{n\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{n}$$

$$\geqslant \sum_{n\notin\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_k}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha}. \tag{20}$$

记 N_k 为 Γ_k 所含元素的个数, 则

$$\left\lfloor\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha-k^\alpha\right\rfloor\leqslant N_k<\left\lfloor\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha-k^\alpha\right\rfloor+1,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

再结合 Lagrange 中值定理知

$$N_k\sim\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha-k^\alpha\sim\frac{\alpha}{2}k^{\alpha-1},\quad k\to\infty.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\alpha}{2}k^{\alpha-1}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha}\geqslant\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\alpha-1}}{2^\alpha k^\alpha}=\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha}=+\infty.$$

故由 (20) 式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

□

例题 0.20 证明:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$;

(2) 计算 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^\alpha}$, 并说明理由.

证明

(1) 注意到对 $\forall\alpha\geqslant0$, 都有

$$\left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}\right|\leqslant\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{n},$$

并且对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{1}{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sin(k+1)-\sin k\right]}{2\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\sin(n+1)-\sin1}{2\sin\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}$ 关于 $\alpha\geqslant0$ 一致收敛. 从而

$$\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\alpha\to0^+}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}.$$

(2) 注意到对 $\forall\alpha\in(0,1)$, 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^\alpha}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{1}{2}\sin n}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^\alpha\sin\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2(n+1)^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 中值定理知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $\xi\in(n,n+1)$, 使得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}}\leqslant\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{n^{1+\alpha}}.
$$

于是再结合 (1) 的结论可得

$$
\lim_{\alpha\to0^{+}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{\alpha\to0^{+}}\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\xi^{1+\alpha}}=0.
$$

故

$$
\lim_{\alpha\to0^{+}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.
$$

□

例题 0.21 计算广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{(x)}{x^{3}}\mathrm{d}x$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, 则 $(x)=x-n$).

证明 注意到 (x) 是周期为 1 的函数, 并且在 $[0,1)$ 上恒有 $(x)=x$. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty}\frac{(x)}{x^{3}}\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\frac{(x)}{x^{3}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{(x+k)}{(x+k)^{3}}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{(x)}{(x+k)^{3}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{x}{(x+k)^{3}}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{(x+k)^{2}}-\frac{k}{(x+k)^{3}}\right]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{(1+k)^{2}}-\frac{1}{k}\right)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{(1+k)^{2}}-\frac{1}{1+k}\right)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(1+k)^{2}}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right]-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}-1\right)\\
&=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^{2}}{6}=1-\frac{\pi^{2}}{12}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.22 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $g(x)=f(x)\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减, 证明 $f(x)\equiv0$.

证明 证法一: 令 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t, G(x)=\frac{F^{2}(x)}{2}$, 则

$$
g(x)=F(x)F'(x)=\left[\frac{F^{2}(x)}{2}\right]'=G'(x),
$$

由条件知 $g(x)=G'(x)$ 单调递减, 故 $G(x)$ 是上凸函数. 注意到 $G'(0)=g(0)=0$, 由 g 递减知,$G'(x)=g(x)\leqslant$

$0,\forall x>0$. 从而 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减. 故

$$0\leqslant G(x)=\frac{F^2(x)}{2}\leqslant G(0)=0.$$

因此 $G(x)=0,\forall x\geqslant 0$. 于是 $F(x)\equiv 0$, 故 $f(x)=F'(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证法二: 证明: 若 $\exists X_0>0$, s.t. $f(X_0)\neq 0$. 不妨设 $f(X_0)>0$, 则由 g 递减知

$$g(X_0)=f(X_0)\int_0^{X_0}f(t)\mathrm{d}t\leqslant g(0)=0\Rightarrow\int_0^{X_0}f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0.$$

从而由积分中值定理知, $\exists\xi\in(0,X_0),s.t.f(\xi)\leqslant 0$ 于是由介值定理知, $\exists x_1\in(0,X_0),s.t.f(x_1)=0$. 记

$$x_2\triangleq\sup\{x\in[x_1,X_0)\mid f(x)=0\}.$$

则 $f(x)>0,\forall x\in(x_2,X_0)$, 否则,

$$\exists\eta\in(x_2,X_0),s.t.f(\eta)\leqslant 0.$$

由介值定理知, $\exists\eta'\in(x_2,X_0)$, s.t. $f(\eta')=0$. 这与上确界定义矛盾! 再记 $f(x')=\max\limits_{x\in[x_2,X_0]}f(x)$, 任取 $x_3\in(x_2,x')$. 则 $f(x_3)>0$, 进而 $\int_{x_3}^{x'}f(t)\mathrm{d}t>0$. 于是

$$\begin{aligned}g(x_3)=f(x_3)\int_0^{x_3}f(t)\mathrm{d}t&<f(x')\left(\int_0^{x_3}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_3}^{x'}f(t)\mathrm{d}t\right)\\&=f(x')\int_0^{x'}f(t)\mathrm{d}t=g(x').\end{aligned}$$

这与 g 递减矛盾! 故 $f(x)=0,\forall x>0$. 同理可得 $f(x)=0,\forall x<0$. 再由 f 的连续性可知 $f(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

□

例题 0.23 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f(x)|\leqslant e^{-\sqrt{x}},f'(x)=-3f(x)+6f(2x),\forall x\geqslant 0.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^nf(x)\,\mathrm{d}x<\infty.$$

并且证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^nf(x)\,\mathrm{d}x=0$$

的充要条件是 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证明 由 $f'(x)=-3f(x)+6f(2x)$ 可得

$$\begin{aligned}I_n\triangleq\frac{3^n}{n!}\int_0^{\infty}x^nf(x)\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{分部积分}}-\frac{3^n}{(n+1)!}\int_0^{\infty}x^{n+1}f\prime(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{\infty}x^{n+1}\left[f(x)-2f(2x)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\left[\int_0^{\infty}x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^{\infty}x^{n+1}f(2x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\left[\int_0^{\infty}x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\infty}x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\cdot\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{\infty}x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\cdot I_{n+1}.\end{aligned}$$

故

$$I_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}I_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$I_n=\frac{2^n}{2^n-1}I_{n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\cdots\frac{2}{2-1}I_0=I_0\prod_{k=1}^{n}\frac{2^k}{(2^k-1)}.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{2^k}\right)=-2\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=-4\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2^k}{(2^k-1)}=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}=e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}\leqslant e^{4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\leqslant e^4.$$

故 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(2^k-1)}$ 收敛. 于是

$$0=\lim_{n\to\infty}I_n=I_0\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(2^k-1)}\Longleftrightarrow I_0=0.$$

□

例题 0.24 设连续函数 $g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足 g 单调递减. 设

$$x_0>0,x_{n+1}=x_n+g(x_n),n=0,1,2,\cdots,$$

以及 $x\in D^1[0,+\infty)$ 满足

$$x(0)=x_0,x'(t)=g(x(t)),\forall t\geqslant 0.$$

证明

$$x_n=x(n)+O(1),n\to\infty.$$

证明 由条件可知

$$x_{n+1}-x_n=g\left(x_n\right)>0,\quad x'\left(t\right)=g\left(x\left(t\right)\right)>0.$$

故 $\{x_n\}$ 严格递增,$x\left(t\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上也严格递增. 由条件知 $x_0\geqslant x\left(0\right)$, 假设 $x_n\geqslant x\left(n\right)$, 则由条件知

$$n=\int_0^n\frac{x'\left(t\right)}{g\left(x(t)\right)}\mathrm{d}t=\int_{x(0)}^{x(n)}\frac{1}{g\left(t\right)}\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而

$$\int_{x(0)}^{x_{n+1}}\frac{1}{g\left(t\right)}\mathrm{d}t=\int_{x(0)}^{x_n}\frac{1}{g\left(t\right)}\mathrm{d}t+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{1}{g\left(t\right)}\mathrm{d}t\geqslant n+\frac{x_{n+1}-x_n}{g\left(x_n\right)}=n+1=\int_{x(0)}^{x(n+1)}\frac{1}{g\left(t\right)}\mathrm{d}t.$$

又因为 g 非负, 所以 $x_{n+1}\geqslant x\left(n+1\right)$. 故由数学归纳法知,$x_n\geqslant x\left(n\right),\forall n\in\mathbb{N}$. 于是

$$\begin{aligned}x_n&=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}g\left(x_k\right)=x_0+g\left(x_0\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}g\left(x_k\right)\mathrm{d}t\\&\leqslant x_0+g\left(x_0\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}g\left(x\left(t\right)\right)\mathrm{d}t=x_0+g\left(x_0\right)+\int_0^{n-1}g\left(x\left(t\right)\right)\mathrm{d}t\\&=x_0+g\left(x_0\right)+\int_0^{n-1}x'\left(t\right)\mathrm{d}t=x_0+g\left(x_0\right)+x\left(n-1\right)\\&<x_0+g\left(x_0\right)+x\left(n\right).\end{aligned}$$

故

$$x\left(n\right)\leqslant x_n\leqslant x\left(n\right)+x_0+g\left(x_0\right)\Longleftrightarrow x_n=x\left(n\right)+O\left(1\right),\quad n\to\infty.$$

□

例题 0.25 设 $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ 是连续满射且满足对某个 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$|\gamma(s)-\gamma(t)|\leqslant M|s-t|^{\alpha},\forall s,t\in[0,1].$$

证明:$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

证明 记

$$B_k\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}^2:\left|x-\gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n^{\alpha}}\right\},\quad k=0,1,2\cdots,n-1.$$

对 $\forall x\in[0,1]$, 存在 $k\in[0,n-1]\cap\mathbb{N}$, 使得 $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. 由条件可知

$$\left|\gamma(x)-\gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant M\left|x-\frac{k}{n}\right|^{\alpha}\leqslant\frac{M}{n^{\alpha}}\Longrightarrow\gamma(x)\in B_k.$$

故 γ 的值域 $[0,1]^2\subseteq\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}B_k$. 于是

$$1\leqslant S\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}B_k\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}S(B_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi M^2}{n^{2\alpha}}=\frac{\pi M^2}{n^{2\alpha-1}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

□

例题 0.26 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足对某个 $M>0$ 成立

$$0<f(x)<M,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f''(\xi)+2[f'(\xi)]^2=0.$$

证明 注意到

$$(f^3(x))''=3f(x)\left[f''(x)f(x)+2[f'(x)]^2\right].$$

若 ξ 不存在, 则 $(f^3(x))''$ 不变号, 从而 $f^3(x)$ 是上凸或者下凸函数. 但是无穷区间上的有界凸函数必为常函数, 因此 f 为常值函数, 这就和 ξ 不存在矛盾! 现在我们知道存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f''(\xi)+2[f'(\xi)]^2=0.$$

□

例题 0.27 已知: 存在连续正函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$, 满足

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,

(2) $\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 有界.

证明: 当 $\alpha>1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x f^{\alpha}(t)\ln(1+f(t))\mathrm{d}t}{x^{\alpha}\ln(1+x)}=0.$$

证明 由 $x^{\alpha}\ln(1+x)$ 递增可得, 对 $\forall A>1$, 都有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x f^{\alpha}(t)\ln(1+f(t))\mathrm{d}t}{x^{\alpha}\ln(1+x)}&=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\int_A^x f^{\alpha}(t)\ln(1+f(t))\mathrm{d}t}{x^{\alpha}\ln(1+x)}\\&\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_A^x f(t)\cdot\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t\\&\leqslant\sup_{t\geqslant A}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\cdot\sup_{t\geqslant A}\frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)}\cdot\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\int_A^x f(t)\mathrm{d}t}{x}.\end{aligned}\tag{21}$$

由条件可知

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{t\geqslant A}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=0\implies f(t)\leqslant t,\quad t\to+\infty.$$

从而

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{t\geqslant A}\frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)}\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+t)}=1.$$

于是令(21)式 $A\to+\infty$ 得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\int_1^x f^{\alpha}(t)\ln(1+f(t))\mathrm{d}t}{x^{\alpha}\ln(1+x)}\leqslant 0.$$

□

例题 0.28 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续下凸函数, 实数 m 满足

$$\int_a^b|f(x)-m|\mathrm{d}x=\min_{t\in[a,b]}\int_a^b|f(x)-f(t)|\mathrm{d}x,$$

证明:$m\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证明 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可. 再不妨设 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 否则用 $f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ 代替即可. 现在只需证明 $m\geqslant 0$. 因为 f 在 $[0,1]$ 上连续下凸, 所以 f 在 $[0,1]$ 上存在最小值, 不妨设

$$\min_{x\in[0,1]}f(x)=f(x_0),\quad x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

根据下凸性知,f 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上非负递增. 反证, 假设 $m<0$, 则由条件可知 (取 $t=\frac{1}{2}$)

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1|f(x)-m|\mathrm{d}x.$$

但是另一方面, 根据绝对值不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1(|f(x)-m|-|f(x)|)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}}(|f(x)-m|-|f(x)|)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[(f(x)-m)-f(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(|f(x)-m|-|f(x)|)\,\mathrm{d}x-\frac{m}{2}\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(|m|+|f(x)-m|-|f(x)|)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}(|m+f(x)-m|-|f(x)|)\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

因此上述绝对值不等式取等, 即对 $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 都有

$$\begin{aligned}|m|+|f(x)-m|&=|m+f(x)-m|=|f(x)|\\&\implies m^2+f^2(x)-2mf(x)+m^2=f^2(x)\\&\implies f(x)=m.\end{aligned}$$

这与 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 矛盾!

□

例题 0.29 设 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 定义

$$x_{n+1}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}x_n,n\geqslant 2.$$

请问 $\{x_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 请证明; 若不收敛, 请举反例.

证明 由条件可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$x_{n+1}-x_n=-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x_n-x_{n-1})=\cdots=(-1)^{n-1}(x_2-x_1)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

于是对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$x_n=x_1+\sum_{m=1}^{n-1}(x_{m+1}-x_m)=x_1+(x_2-x_1)\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m-1}\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

注意到对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)<\prod_{k=2}^{m-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\Longrightarrow\left\{\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}\text{递减}.$$

并且

$$\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=e^{\sum\limits_{k=2}^{m}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}\leqslant e^{-\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}},\quad\forall m\in\mathbb{N}.$$

令 $m\to\infty$ 得

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\,e^{-\sum\limits_{k=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}}=0,$$

故 $\left\{\prod\limits_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}$ 单调递减趋于 0. 由 leibniz 判别法知

$$\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)<+\infty.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_1+(x_2-x_1)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)<+\infty.$$

□

例题 0.30 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots$.

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n-2}+a_n)$.

(2) 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域.

证明

(1) 由条件可知

$$a_{n-2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\left(\tan^2x+1\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n-1}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n-2}+a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}.$$

(2) 注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\xlongequal{t=\tan x}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

又因为

$$\left(\frac{t}{1+t^2}\right)'=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\geqslant 0,\quad\forall t\in[0,1],$$

所以

$$\frac{t^n}{2}\leqslant\frac{t^n}{1+t^2}=t^{n-1}\cdot\frac{t}{1+t^2}\leqslant\frac{t^{n-1}}{2},\quad\forall t\in[0,1],$$

故对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\frac{1}{2(n+1)}=\int_0^1\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t\leqslant a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{t^{n-1}}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}.$$

因此 $a_n\sim\frac{1}{2n},n\to\infty$. 而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

□

命题 0.3

设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

证明 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x.

(i) 若 $f'(x)=0$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $f'(x)<0$, 则令 $h=\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h}f'(t)\mathrm{d}t=f(x)+\int_x^{x+h}\left[f'(t)-f'(x)\right]\mathrm{d}t+f'(x)h\\&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f'(x)h=f(x)+\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f'(x)h\\&=f(x)+\frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1}+f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left[f'(x)-\frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<f(x)\\\iff&f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).\end{aligned}$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(iii) 若 $f'(x)>0$, 则令 $h=\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x}f'(t)\mathrm{d}t+f(x)=\int_{x-h}^{x}\left[f'(x)-f'(t)\right]\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h\\&\leqslant\int_{x-h}^{x}(x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h=\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f(x)-f'(x)h\\&=\frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1}+f(x)-f'(x)\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left[f'(x)-\frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<f(x)\\\iff&\left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).\end{aligned}$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

□

例题 0.31 给定 $f,g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且 f 连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. 若有不等式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant g(x)\sup_{t\in[x,y]}f(t),\forall 0\leqslant x<y.$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

证明 (i) 若 $f(x)$ 有界, 设 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty)$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 使得

$$g(x)<\varepsilon,\quad \forall x>X.$$

于是对 $\forall y>x>X$, 都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant g(x)\sup_{t\in[x,y]}f(t)<M\varepsilon.$$

故由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

(ii) 若 $f(x)$ 无界, 记 $K\triangleq\lfloor f(0)\rfloor+1$,

$$y_n\triangleq\inf\{y\in[0,+\infty):f(y)=n\},\quad \forall n>K.$$

由 f 的连续性知 $f(y_n)=n,\forall n>K$. 断言 $y_{n+1}>y_n$. 若 $y_{n+1}\leqslant y_n$, 则由介值定理知, 存在 $y_n'\in(y_{n+1},y_n)$, 使得 $f(y_n')=f(y_n)=n$, 这与 y_n 的下确界定义矛盾! 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\in(K,+\infty]$. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故

$$f\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}n=+\infty.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 否则 $f\left(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\right)=f(a)<+\infty$ 矛盾! 我们还可以断言

$$f(y_n)=\sup_{t\in[0,y_n]}f(t),\quad \forall n>K.\tag{22}$$

否则, 对 $\forall n>K$, 存在 $t_n\in[0,y_n)$, 使得 $f(t_n)>f(y_n)$. 由介值定理知, 存在 $\xi_n\in(t_n,y_n)$, 使得 $f(\xi_n)=f(y_n)=n$, 这与 y_n 的下确界定义矛盾! 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 知, 存在 $x_0\in[0,+\infty)$, 使得 $g(x_0)<1$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $y_n>x_0$. 于是由条件和(22)式可得, 对 $\forall n>N$, 有

$$f(y_n)-f(x_0)=|f(y_n)-f(x_0)|\leqslant g(x_0)\sup_{t\in[x_0,y_n]}f(t)\leqslant g(x_0)f(y_n).$$

进而

$$f(x_0)\geqslant f(y_n)\left[1-g(x_0)\right]=n\left[1-g(x_0)\right],\quad \forall n>N.$$

令 $n\to+\infty$ 得 $f(x_0)=+\infty$, 显然矛盾! 故 f 必有界. 再由 (i) 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

□

例题 0.32 设

$$\varphi(x)\triangleq\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ \cos x, & x<0\end{cases},$$

证明不存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数 f 使得对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(f(x))-|x|f'(x)=\varphi(x).$$

笔记 实际上, 可以直接看出

$$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x\sim\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

显然矛盾!

证明 假设存在这样的 $f(x)$, 则由条件得 $f(f(0))=0$. 注意到

$$f'(x)=\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x},\ \forall x<0.$$

于是我们有

$$f(-\varepsilon)-f(-1)=\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x,\ \forall\varepsilon\in(0,1).$$

现在让 $\varepsilon\to0^+$ 得

$$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x.$$

由 $f\in D(\mathbb{R})$ 知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[-1,0]$. 再结合 f,φ 在 $x=0$ 处的连续性知, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f(0)-f(-1)&=\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{0}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\delta}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{-\delta}^{0}\frac{\varphi(0)-f(f(0))}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\delta}\frac{1+M}{-\delta}\,\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{0}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1+M}{\delta}(1-\delta)=+\infty\end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此满足条件的可微函数 f 不存在.

□

例题 0.33 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数,ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2}=\psi\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right),\ n\geqslant2.$$

证明:$\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明 由条件可得

$$\varphi(x_{n+2})=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1}),\quad n\geqslant2.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(x_{n+2})-\varphi(x_{n+1})&=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\left[\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\right]\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-1\right)\left[\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})\right]\\&=\cdots=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-1\right)\left[\varphi(x_3)-\varphi(x_2)\right]>0,\ \forall n\geqslant2.\end{aligned}$$

从而 $\{\varphi(x_n)\}$ 递增, 并且

$$\begin{aligned}\varphi(x_n)&=\varphi(x_3)+\sum_{k=3}^{n-1}\left[\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)\right]\\&=\varphi(x_3)+\left[\varphi(x_3)-\varphi(x_2)\right]\sum_{k=3}^{n-1}\prod_{m=2}^{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-1\right)\\&=\varphi(x_3)+\left[\varphi(x_3)-\varphi(x_2)\right]\sum_{k=3}^{n-1}e^{\sum\limits_{m=2}^{k-1}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-1\right)},\ \forall n\geqslant4.\end{aligned}\tag{23}$$

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x-1)}{-x}=1$, 故

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-1\right)\sim-\frac{1}{\sqrt{m}},\ m\to+\infty.$$

因此

$$e^{\sum\limits_{m=2}^{k-1}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-1\right)}\sim e^{-\sum\limits_{m=2}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{m}}},\ m\to+\infty.$$

由 Stolz 公式可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln k}{\sum\limits_{m=2}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{m}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{\sqrt{k}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\sqrt{k}}{k}=0.$$

从而当 k 充分大时, 有

$$\sum_{m=2}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{m}}>2\ln k\Longleftrightarrow e^{-\sum\limits_{m=2}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{m}}}<e^{-2\ln k}=\frac{1}{k^2}.$$

于是

$$\sum_{k=3}^{\infty}e^{\sum\limits_{m=2}^{k-1}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-1\right)}<\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty.$$

再由(23)式知 $\varphi(x_n)$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=a$, 由 $\{\varphi(x_n)\}$ 递增知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in(x_1,+\infty]$. 由 φ 连续且存在反函数知

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=a\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\psi(a)<+\infty.$$

□

例题 0.34 证明:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\ln x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}=-1.$$

证明 对 $\forall x\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}&=\sin x+\sum_{n=2}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}+\sum_{n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant\sin x+\sum_{n=2}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{nx}{n^2}+\sum_{n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\&=\sin x+x\sum_{n=2}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{1}{n}+\sum_{n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\leqslant\sin x+x\sum_{n=2}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\sum_{n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=\sin x+x\int_{1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\leqslant\sin x+x\ln\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+\frac{x}{1-x}.\end{aligned}$$

注意到

$$\sin x\geqslant x-x^3,\ \forall x\in(0,1].$$

故另一方面, 对 $\forall x\in(0,\dfrac{1}{N})$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}+\sum_{n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\\&\geqslant\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{nx-(nx)^3}{n^2}=x\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{1}{n}-x^3\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}n\\&\geqslant x\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-x^3\cdot\frac{1}{x^2}=x\int_{1}^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-x\\&=x\ln\lfloor\frac{1}{x}\rfloor-x\geqslant x\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)-x^2\\&=-x\ln x+x\ln(1-x)-x.\end{aligned}$$

综上, 对 $\forall x\in(0,1)$, 我们有

$$-x\ln x+x\ln(1-x)-x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant\sin x-x\ln x+\frac{x}{1-x}.$$

从而对 $\forall x\in(0,1)$, 我们有

$$-1+\frac{\ln(1-x)}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}\leqslant\frac{1}{x\ln x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant\frac{\sin x}{x\ln x}-1\leqslant\frac{1}{\ln x}-1+\frac{1}{(1-x)\ln x}.$$

令 $x \to 0^+$ 得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\ln x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}=-1.$$

□

例题 0.35 设 $f\in C(0,1]$ 且对某个 $\mu>1$ 有

$$\lim_{x\to 0^+}x[f(\mu x)-f(x)]=A.$$

证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}xf(x)$ 存在.

笔记 取 $n=\lfloor\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}+\frac{1}{2}\rfloor$ 的原因:

$$\mu^n x\geqslant\delta,\quad \mu^k x<\delta,\ k=0,1,\cdots,n-1$$

由 $\mu>1$ 知上式等价于

$$\mu^n x\geqslant\delta\text{且}\mu^{n-1}x<\delta\Longleftrightarrow\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}\leqslant n<\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}+1.$$

故取 $n=\lfloor\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}+\frac{1}{2}\rfloor$ 即可满足要求.

注 也可以不妨设 $A=0$, 否则用 $f(x)+\dfrac{\mu A}{(\mu-1)x}$ 代替即可.

证明 由条件知, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$A-\varepsilon<x\left[f\left(\mu x\right)-f\left(x\right)\right]<A+\varepsilon,\ \forall x\in(0,\delta).$$

因此

$$\begin{aligned}&A-\varepsilon<-\mu^k x\left[f\left(\mu^{k-1}x\right)-f\left(\mu^k x\right)\right]<A+\varepsilon,\quad\forall\mu^k x\in(0,\delta).\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{-\varepsilon-A}{\mu^k}<x\left[f\left(\mu^{k-1}x\right)-f\left(\mu^k x\right)\right]<\frac{\varepsilon-A}{\mu^k},\quad\forall\mu^k x\in(0,\delta).\end{aligned}\tag{24}$$

由 $f\in C\left[\delta,1\right]$ 知, 存在 $M>0$, 使得

$$|f\left(x\right)|<M,\quad x\in\left[\delta,1\right].\tag{25}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}-A\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\mu^{k-1}}=-\dfrac{\mu A}{\mu-1}$, 故存在 $N>0$, 使得

$$-\frac{\mu A}{\mu-1}-\varepsilon<-A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu^{k-1}}<-\frac{\mu A}{\mu-1}+\varepsilon.\tag{26}$$

对 $\forall x\in(0,\delta)$, 取 $n_x=\lfloor\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}+\frac{1}{2}\rfloor$, 则

$$\mu^{n_x}x\geqslant\delta,\quad\mu^k x<\delta,\ k=0,1,\cdots,n_x-1.$$

$$x<\frac{\delta}{\mu^N}\Longrightarrow\lfloor\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}+\frac{1}{2}\rfloor\geqslant\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\mu}>N\Longrightarrow n_x>N.$$

于是由(24)(25)(26)式知, 对 $\forall x\in\left(0,\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{M},\frac{\delta}{\mu^N}\right\}\right)$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}xf\left(x\right)&=x\sum_{k=1}^{n_x}\left[f\left(\mu^{k-1}x\right)-f\left(\mu^k x\right)\right]+xf\left(\mu^{n_x}x\right)\\&<\sum_{k=1}^{n_x}\frac{\varepsilon-A}{\mu^{k-1}}+xM<-A\sum_{k=1}^{n_x}\frac{1}{\mu^{k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\mu^{k-1}}+\varepsilon\\&<-\frac{\mu A}{\mu-1}+\varepsilon+\frac{\mu\varepsilon}{\mu-1}+\varepsilon.\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
xf(x) &= x\sum_{k=1}^{n_x}\left[f\left(\mu^{k-1}x\right)-f\left(\mu^k x\right)\right]+xf\left(\mu^{n_x}x\right)\\
&> \sum_{k=1}^{n_x}\frac{-\varepsilon-A}{\mu^{k-1}}-xM > -A\sum_{k=1}^{n_x}\frac{1}{\mu^{k-1}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\mu^{k-1}}-\varepsilon\\
&> -\frac{\mu A}{\mu-1}-\varepsilon-\frac{\mu\varepsilon}{\mu-1}-\varepsilon.
\end{aligned}
$$

综上，对 $\forall x\in\left(0,\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{M},\frac{\delta}{\mu^N}\right\}\right)$，我们有

$$
\left|xf(x)+\frac{\mu A}{\mu-1}\right|<\varepsilon\left(2+\frac{\mu}{\mu-1}\right).
$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}xf(x)=-\frac{\mu A}{\mu-1}$.

□

例题 0.36

证明

□

例题 0.37

证明

□

例题 0.38

证明

□

例题 0.39

证明

□