0.1 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

0.1.1 闭集

定义 0.1 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \supset E'$（即 E 包含 E 的一切极限点）, 则称 E 为**闭集**（这里规定空集为闭集）. 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**（E 为闭集就是 $E = \overline{E}$）.

定义 0.2 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 0.1 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;

(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集.

(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n (\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = (0, 1]$. 此例还说明

$$[0, 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0, 1].$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}
\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\
&= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\
&= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\
&= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}
\end{aligned}$$

可知, 若 F_1, F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$. 即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 0.2 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时, $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k, F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (一切 k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1}(k=1,2,\cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}|x_{k_i}-x|=0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k(k=1,2,\cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

0.1.2 开集

定义 0.3 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

♣

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 0.3 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集（有限个开集的交集是开集）;

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.

♡

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c(\alpha\in I)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcap\limits_{\alpha\in I} G_\alpha^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集, 且有 $G^c=\bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k^c$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x\in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x\notin G^c$, 可知存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$.
反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$, 则

$$B(x,\delta)\cap G^c=\varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 0.4 (内点与边界点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 对 $x\in E$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x\in\overline{E}$ 但 $x\notin\mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E.

♣

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 0.4 ($\mathbb{R}^n$ 中的非空开集的性质)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间（这里也包括 $(-\infty,a)$,$(b,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$）的并集;
(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

♡

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta>0$, 使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset G$. 现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

（这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$）, 显然 $a'<a<a''$ 且 $(a',a'')\subset G$. 这是因为对区间 (a',a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a'<z\leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a'<x<z$ 且 $(x,a)\subset G$, 即 $z\in G$. 我们称这样的开区间 (a',a'') 为 G（关于点 a）的构成区间 I_a.

如果 $I_a=(a',a'')$,$I_b=(b',b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a<b$. 若

$$I_a\cap I_b\neq\varnothing,$$

则有 $b'<a''$. 于是令 $\min\{a',b'\}=c$,$\max\{a'',b''\}=d$, 则有 $(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$. 取 $x\in I_a\cap I_b$, 则 $I_x=(c,d)$ 是构成区间, 且

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G\setminus\bigcup_{J\in H_0}J$$

（J 表示半开闭二进方体）内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G\setminus\bigcup_{i=0}^{k-1}\bigcup_{J\in H_i}J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k(k=0,1,2,\cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x\in G$, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k\to\infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体. 这说明

$$G=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{J\in H_k}J,\quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{B\left(x,\frac{1}{k}\right):x\mathbb{R}^n,k\right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x,x')<1/k$, 其中 $k>2/\delta$, 从而有

$$x\in B(x',1/k)\subset B(x,\delta)\subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x',1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 0.5 (开覆盖)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x\in E$, 存在 $G\in\Gamma$, 使得 $x\in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma'\subset\Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ（关于 E）的一个**子覆盖**. ♣

引理 0.1

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖. ♡

定理 0.5 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆

盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right\} \quad (n=1,2,\cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 0.1, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma=\{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k=\bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k=F \cap H_k^c \quad (k=1,2,\cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1}(k=1,2,\cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F \subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0 \in L_k(k=1,2,\cdots)$, 即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c(k=1,2,\cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 0.6

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集. ♡

证明 设 $y \in E^c$, 则对于每一个 $x \in E$, 存在 $\delta_x>0$, 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x)=\varnothing.$$

显然,$\{B(x, \delta_x): x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0=\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E=\varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 0.6 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**. ♣

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 0.6表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 0.7 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x=x_0$ 处连续）. 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$. ♣

命题 0.1 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0)=\sup\{f(x): x \in F\}, \quad f(y_0)=\inf\{f(x): x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

0.1.3 Borel 集

定义 0.8 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集.

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 0.1 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$$

为 F_σ 集.

命题 0.2

设 V 是由 n 阶实矩阵全体构成的欧氏空间（取 Frobenius 内积）,V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(A) = PAQ$, 其中 $P, Q \in V$.

(1) 求 φ 的伴随 φ^*;

(2) 若 P, Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是正交算子的充要条件是 $P'P = cI_n$,$QQ' = c^{-1}I_n$, 其中 c 是正实数;

(3) 若 P, Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是自伴随算子的充要条件是 $P' = \pm P$,$Q' = \pm Q$;

(4) 若 P, Q 都是可逆矩阵, 求证:φ 是正规算子的充要条件是 P, Q 都是正规矩阵.

解

(1) 对任意的 $A, B \in V$, 由迹的交换性可得

$$(\varphi(A), B) = \mathrm{tr}(PAQB') = \mathrm{tr}(AQB'P) = \mathrm{tr}(A(P'BQ')') = (A, P'BQ').$$

定义 V 上的线性变换 ψ 为 $\psi(B) = P'BQ'$, 则上式即为 $(\varphi(A), B) = (A, \psi(B))$. 由伴随的唯一性即得 $\varphi^* = \psi$.

(2) 若 φ 是正交算子, 即 $\varphi^*\varphi = I_V$, 则由 (1) 可知,$P'PAQQ' = A$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 由 Q 的非异性可得 $P'PA = A(QQ')^{-1}$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 令 $A = I_n$ 可得 $P'P = (QQ')^{-1}$, 因此上式即言 $P'P$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $P'P = cI_n$. 又 P 可逆, 故 $P'P$ 正定, 从而 $c > 0$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

(3) 若 φ 是自伴随算子, 即 $\varphi^* = \varphi$, 则由 (1) 可知,$P'AQ' = PAQ$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 由 P, Q 的非异性可得 $P^{-1}P'A = AQ(Q')^{-1}$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 令 $A = I_n$ 可得 $P^{-1}P' = Q(Q')^{-1}$, 因此上式即言 $P^{-1}P'$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $P^{-1}P' = cI_n$, 即 $P' = cP$. 此式转置后可得 $P = cP' = c^2P$, 又 P 可逆, 故 $c^2 = 1$, 从而 $c = \pm 1$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

(4) 若 φ 是正规算子, 即 $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$, 则由 (1) 可知,$P'PAQQ' = PP'AQ'Q$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 由 P, Q 的非异性可得 $(PP')^{-1}P'PA = AQ'Q(QQ')^{-1}$ 对任意的 $A \in V$ 成立. 令 $A = I_n$ 可得 $(PP')^{-1}P'P = Q'Q(QQ')^{-1}$, 因此上式即言 $(PP')^{-1}P'P$ 与任意的 A 均乘法可交换, 于是存在实数 c, 使得 $(PP')^{-1}P'P = cI_n$, 即 $P'P = cPP'$. 上式两边同时取迹, 由于 P 可逆, 故 $\mathrm{tr}(P'P) = \mathrm{tr}(PP') > 0$, 从而 $c = 1$, 由此即得必要性. 充分性显然成立.

□