0.1 可列集与不可列集

0.1.1 可列集

定义 0.1 (可列集)

与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集合称为**可列集**, 其基数记为 $\aleph_0$(读作阿列夫零). 有限集和可列集统称为**可数集**.

命题 0.1

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 A 可列, 则存在 $\mathbb{N}$ 到 A 的一一映射 φ, 记为 $\varphi(n)=a_n, n\in\mathbb{N}$, 则 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 $\mathbb{N}$ 对等, 从而是可列集 □

命题 0.2 (可列集的性质)

(1) 任何无限集必包含一个可列子集.
(2) 可列集的任何无限子集都是可列集.
(3) 有限集与可列集的并集是可列集.
(4) 有限个可列集的并集是可列集.
(5) 可列个可列集的并集是可列集.
(6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.
(7) 设 A,B 为可列集, 则 $A\times B$ 是可列集.
(8) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可列, 则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 可列.

笔记 (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 $\aleph_0$.

证明

(1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1; 由于 $A-\{a_1\}\neq\varnothing$, 取 $a_2\in A-\{a_1\}$; 又 $A-\{a_1,a_2\}\neq\varnothing$, 取 $a_3\in A-\{a_1,a_2\}$; $\cdots\cdots$, 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots$, 则 $B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$ 为可列集.

(3) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. 不妨设 $A\cap B=\varnothing$, 则

$$A\cup B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots\}$$

可列.

(4) 设 $A_k=\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},a_3^{(k)},\cdots\}$, $k=1,2,\cdots,n$ 为可列集, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned}
A_1&=\{a_1^{(1)}\quad a_2^{(1)}\quad a_3^{(1)}\quad\cdots\}\\
A_2&=\{a_1^{(2)}\quad a_2^{(2)}\quad a_3^{(2)}\quad\cdots\}\\
&\vdots\\
A_n&=\{a_1^{(n)}\quad a_2^{(n)}\quad a_3^{(n)}\quad\cdots\}
\end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{a_1^{(1)},\cdots,a_1^{(n)},a_2^{(1)},\cdots,a_2^{(n)},a_3^{(1)},\cdots\}$$

可列.

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可列集, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_1^{(1)} \to a_2^{(1)} \to a_3^{(1)} \to a_4^{(1)} \cdots\} \\
A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\
A_3 &= \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\
&\vdots \\
A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad a_4^{(n)} \cdots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \cdots, a_{2n+1}^{(n)}, \cdots\}$$

(依次是下标之和等于 $2, 3, \cdots, 2n+2, \cdots$) 可列.

(6) 不妨设 $A \cap B = \varnothing$, 否则用 $B - A$ 代替 B 即可. A 为无限集, 由 (1) 可知, A 包含一个可列子集 A_1. 由于 $A_1 \cup B$ 是可列集, 故 $A_1 \cup B \sim A_1$. 注意到 $(A - A_1) \cap (A_1 \cup B) = \varnothing$, 则有

$$A \cup B = (A - A_1) \cup A_1 \cup B = (A - A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A - A_1) \cup A_1 = A.$$

因此, $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.

(7) 由命题 0.1 可设 $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\
&= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j).
\end{aligned}
$$

由(5)可知, 对 $\forall i \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明.

□

例题 0.1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, 其中 $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质 (3)和可列集的性质 (4), 只需证明 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$(除去重复元), 由可列集性质 (5)知 $\mathbb{Q}^+$ 可列. □

命题 0.3

实轴 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间至多有可列个.

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 $\mathbb{Q}$ 的一个子集. 又 $\mathbb{Q}$ 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个. □

例题 0.2 整系数多项式的全体 $\mathbf{P}$ 是可列集.

证明 对每个 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, 令

$$P_n = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \cdots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$$

由命题 0.2(8)知 P_n 可列. 又 $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, 由可列集性质知 $\mathbf{P}$ 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集. □

命题 0.4

$\mathbb{R}$ 上单调函数的间断点至多有可列个.

证明 不妨只讨论 f 是开区间 (a,b) 上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的一个间断点, 则有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 这时 f 在点 x_0 的函数值满足不等式 $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$. 称 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间. 对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设 x_1 是 f 的另一个间断点, 且 $x_0 < x_1$. 我们要证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \varnothing. \tag{1}$$

为此在 x_0 和 x_1 之间插入 x, x' 如下:

$$x_0 < x < x' < x_1$$

则有不等式

$$f(x) \leqslant f(x')$$

固定 x', 令 $x \to x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的保不等式性, 得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x')$$

再令 $x' \to x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-)$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-) < f(x_1^+)$$

即所要证明的 (1). 这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 而由命题 0.3可知这些跳跃区间至多有可列个. 这就证明了单调函数的间断点至多有可列个. □

0.1.2 不可列集

定义 0.2 (不可列集)

不是可列集的无限集称为**不可列集**.

定理 0.1

$[0,1]$ 是不可列集.

证明 假设 $[0,1]$ 可列, 则可表示为 $[0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0,1]$ 三等分为: $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1, 记该区间为 I_1, 则 $x_1 \notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2, 记该区间为 I_2, 则 $x_2 \notin I_2$, $I_2 \subset I_1$; $\cdots\cdots$, 依次做下去, 可得到一列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \notin I_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) I_n 的长度为 $1/3^n \to 0$, $n \to \infty$.

由闭区间套定理, 存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾. □

定义 0.3

若 $A \sim [0,1]$, 则称 A 具有**连续基数**, 记 $\overline{\overline{A}} = \aleph$. ♣

定理 0.2

对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$. ♡

证明 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x) = a + (b-a)x$ 建立了 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 又 (a,b) 和 $(a,b]$ 与 $[a,b]$ 分别只差一个点和两个点, 由可列集的性质 (6)知 $\overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 最后, 由 § 与 R 对等] 例题??以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[-1,1]}} = \aleph$. □

推论 0.1

无理数的基数为 $\aleph$. ♡

证明 记无理数集为 $\mathbb{I}$, 注意到 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 且 $\mathbb{Q}$ 可列, 由可列集的性质 (6)可得 $\overline{\overline{\mathbb{I}}} = \overline{\overline{\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$. □

定理 0.3

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph$. ♡

证明 不妨设 $A_i \cap A_j = \varnothing$. 由于 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $A_n \sim (n, n+1]$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}$. □

定义 0.4

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, $\cdots\cdots$, C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{\overline{\overline{A}}}$$

更一般地, 设 $\overline{\overline{A}} = \mu$, 定义 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\mu}$. ♣

命题 0.5

设 A, B 都是非空集合, 则 $A \sim B$ 的充要条件是 $2^A \sim 2^B$. ♠

证明 必要性: 由 $A \sim B$ 可知 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 于是 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$. 故 $2^A \sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$, 这与 $2^A \sim 2^B$ 矛盾! 故 $A \sim B$. □

引理 0.1

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A \sim 2^A$. 进而 $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$. ♡

证明 对于每个 $E \in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等. □

定理 0.4

$\aleph = 2^{\aleph_0}$.

证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{N}$ 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0,1]$ 对等.

对任意的 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f : \varphi \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0,1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0,1]$ 的单射, 故命题??可知 $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} \leqslant \overline{\overline{(0,1]}}$.

另一方面, 对每一个 $x \in (0,1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0,1\}.$$

定义映射

$$g : x \to \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

易知, g 是从 $(0,1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由命题??可知 $\overline{\overline{(0,1]}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$.

由 Bernstein 定理可知 $\overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$. 再由引理 0.1可得 $\aleph = \overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = 2^{\aleph_0}$. □

例题 0.3 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

证明 由定理 0.4及命题 0.5和 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$, 故再由命题??可得 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.
□

例题 0.4 用 M 表示 $[0,1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0,1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0,1] - E \end{cases}$$

显然, $\chi_E \in M$. 故 $\overline{\overline{M}} \geqslant \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^{\aleph}$.

另一方面, 对每一个 $f \in M$, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$. □

定理 0.5 (无最大基数定理)

设 A 为非空集, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$.

证明 由于 2^A 中的单元素集与 A 对等, 故 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{2^A}}$.

若存在集合 A 满足 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{2^A}}$, 则存在 $f : A \to 2^A$ 为一一映射. 令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

注意到 $\varnothing \in 2^A$, 则存在 $x_0 \in A$ 使得 $f(x_0) = \varnothing$, 故 $x_0 \notin f(x_0)$. 这说明 $x_0 \in B$, 从而 $B \neq \varnothing$.

又 $B \in 2^A$, 则存在 $x_B \in A$ 使得 $f(x_B) = B$. 下面考察 x_B 与 B 的关系: 若 $x_B \in B$, 则 $x_B \notin f(x_B) = B$, 矛盾; 若 $x_B \notin B$, 即 $x_B \notin f(x_B)$, 这又蕴涵 $x_B \in B$, 矛盾. □