

0.1 基本组合学公式

定义 0.1 (组合数定义的扩充)

对 $\forall n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 定义

$$C_n^k = \binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} 0 & , k < 0, \\ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & , 0 < k \leq n, \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

特别地, $C_n^0 \triangleq 1$. 若 $n, k \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leq k \leq n$, 则还有

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

定理 0.1 (二项式定理的推广)

$$(a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} \left(\prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in \{1, 2, \dots, n\} - I} b_j \right).$$

证明 用数学归纳法证明即可. □

命题 0.1

对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 都有

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{x+k} = \frac{m!}{x(x+1) \cdots (x+m)}.$$

证明 设

$$f(x) = \frac{m!}{x(x+1) \cdots (x+m)},$$

则由有理分式分解定理知, 存在 $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{x+j},$$

两边同乘 $x+j$ ($j=0, 1, \dots, m$), 再取 $x=-j$ 得

$$\begin{aligned} c_j &= [(x+j)f(x)]_{x=-j} = \frac{m!}{-j(-j+1) \cdots (-j+j-1)(-j+j+1) \cdots (-j+m)} \\ &= (-1)^j \frac{m!}{j(j-1) \cdots 1 \cdot 1 \cdots (m-j)} = (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} \\ &= (-1)^j \binom{m}{j}, j=0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

故结论得证. □