


0.1 其他

例题 0.1 设 A, B, C 都是 n 阶复方阵, 记 $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$, 证明: M 的特征值是 $A + B + C, A + wB + w^2C, A + w^2B + wC$ 的特征值构成的集合的并, 这里 w 是三次单位根, 并集记重复.

 **笔记** 观察到 M 矩阵与循环矩阵由类似结构, 回忆命题??的证明过程, 利用与命题??相同的方法构造相似矩阵与对应的过渡矩阵.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix}$ 相似. 因此结论得证. \square

例题 0.2 已知整数 $n > 1$. 设 E_{n-1}, E_n 分别为 $n-1$ 阶和 n 阶单位矩阵, $N = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 $n \times n$ 矩阵.

- (1) 求 N 的特征值和特征向量.
- (2) 求如下矩阵的特征多项式:

$$A = \begin{pmatrix} E_n & N & N^2 \\ N^2 & E_n & N \\ N & N^2 & E_n \end{pmatrix}.$$

证明

- (1) 显然 N 的特征值为 $0(n)$ 重, 任意非零向量都是其特征向量.
- (2) 令 $f(X) = E_n + NX + N^2X^2$, 记 ε 是 1 的三次单位根, 且

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \varepsilon_3 = \varepsilon^3 = 1. \quad (1)$$

再记

$$V = \begin{pmatrix} E_n & E_n & E_n \\ \varepsilon_1 E_n & \varepsilon_2 E_n & \varepsilon_3 E_n \\ \varepsilon_1^2 E_n & \varepsilon_2^2 E_n & \varepsilon_3^2 E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{pmatrix} \otimes E_n,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & & \\ & f(\varepsilon_2 E_n) & \\ & & f(\varepsilon_3 E_n) \end{pmatrix}.$$

由定理??(8) 知

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{vmatrix}^3 |E_n|^3 \neq 0,$$

故 V 可逆. 注意到

$$\begin{aligned} AV &= \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & f(\varepsilon_2 E_n) & f(\varepsilon_3 E_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1 E_n) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2 E_n) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3 E_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1 E_n) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2 E_n) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3 E_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & E_n & E_n \\ \varepsilon_1 E_n & \varepsilon_2 E_n & \varepsilon_3 E_n \\ \varepsilon_1^2 E_n & \varepsilon_2^2 E_n & \varepsilon_3^2 E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & & \\ & f(\varepsilon_2 E_n) & \\ & & f(\varepsilon_3 E_n) \end{pmatrix} \\ &= V\Lambda, \end{aligned}$$

故 $A = V^{-1}\Lambda V$. 因此 A 的特征值就是 $f(\varepsilon_1 E_n), f(\varepsilon_1 E_n)f(\varepsilon_2 E_n), f(\varepsilon_3 E_n)$ 特征值的并. 由(1)式知

$$f(\varepsilon_1 E_n) = \varepsilon E_n + \varepsilon N + \varepsilon^2 N^2,$$

$$f(\varepsilon_2 E_n) = \varepsilon^2 E_n + \varepsilon^2 N + \varepsilon^4 N^2,$$

$$f(\varepsilon_3 E_n) = E_n + N + N^2,$$

从而显然 $f(\varepsilon_1 E_n)$ 的特征值为 $\varepsilon(n$ 次), $f(\varepsilon_2 E_n)$ 的特征值为 $\varepsilon^2(n$ 次), $f(\varepsilon_3 E_n)$ 的特征值为 $1(n$ 次). 因此 A 的特征值就是 $1(n$ 次), $\varepsilon(n$ 次), $\varepsilon^2(n$ 次). 于是 A 的特征多项式就是 $(x-1)^n(x-\varepsilon)^n(x-\varepsilon^2)^n$. □

例题 0.3 设 A 是 n 阶方阵, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 A 的 k 个互不相同的特征值, v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量, 若 W 是 A 的一个不变子空间, 且 $w = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \in W$, 这里 c_1, \dots, c_k 全都非零, 证明: 所有 v_i 均在 W 中.

证明 $\forall w \in W$, 都有 $w = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$, 从而由 W 是 A 的不变子空间及 v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量可知

$$\alpha_1 = Aw = \lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_k c_k v_k \in W,$$

$$\alpha_2 = A^2 w = \lambda_1^2 c_1 v_1 + \dots + \lambda_k^2 c_k v_k \in W,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_k = A^{k-1} w = \lambda_1^{k-1} c_1 v_1 + \dots + \lambda_k^{k-1} c_k v_k \in W.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 v_1 \\ c_2 v_2 \\ \vdots \\ c_k v_k \end{pmatrix}.$$

利用 Vandermonde 行列式可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \text{可逆},$$

因此

$$\begin{pmatrix} c_1 v_1 \\ c_2 v_2 \\ \vdots \\ c_k v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

进而对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 都有 $c_i v_i \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, 又 $c_i \neq 0$, 故 $v_i \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. 又因为 $\alpha_i \in W$ ($1 \leq i \leq k$), 所以 $v_i \in W$. □

例题 0.4 设 A 是 $d \times d$ 整数矩阵且满足 $I + A + A^2 + \dots + A^{100} = 0$, 对任意正整数 $n \leq 100$, 证明: $A^n + A^{n+1} + \dots + A^{100}$

的行列式为 1.

证明 设 $m(x) = x^{100} + \cdots + x + 1$, 则 $m(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $m(x)$ 不可约. 再设 A 的极小多项式为 $g(x)$, 则由条件可知 $g(x) \mid m(x)$, 再由 $m(x)$ 不可约可得 $g(x) = m(x)$. 记 A 的不变因子分别为 d_1, \cdots, d_k , 其中 $d_i \mid d_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k$), 并且 $d_k = m(x)$. 于是 $d_i \mid m(x)$, 而 $m(x)$ 不可约, 故 A 的不变因子为 $m(x), \cdots, m(x)$ (共有 k 个). 从而

$$|\lambda I - A| = (m(\lambda))^k.$$

又因为 A 是 d 阶矩阵, 所以 $d = 100k$. 再根据矩阵的有理标准型可知, 存在可逆矩阵 P , 使得

$$PAP^{-1} = F = \begin{pmatrix} F(m(x)) & & \\ & \ddots & \\ & & F(m(x)) \end{pmatrix}_{100s \times 100s},$$

其中 $F(m(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{100 \times 100}$. 又因为条件和结论在线性变换 $A \rightarrow PAP^{-1} = F$ 下不改变, 故不妨设 $A = F$. 设 $F(m(x))$ 的特征值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{100}$, 则

$$|\lambda_i I - F(m(x))| = 1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{100} = 0,$$

从而 λ_i 都是 $1 + x + \cdots + x^{100} = 0$ 的根, 故

$$\lambda_k = e^{\frac{2k\pi i}{101}} \quad (1 \leq k \leq 100). \quad (2)$$

再根据 Vieta 定理可得

$$|F(m(x))| = \lambda_1 \cdots \lambda_{100} = 1.$$

从而 $|F| = |F(m(x))|^s = 1$, 并且 F 的特征值就是 $\lambda_k = e^{\frac{2k\pi i}{101}}$ ($1 \leq k \leq 100$) 且每个特征值都是 100 重的.

注意到对 $\forall n \in [1, 100] \cap \mathbb{N}$, 有

$$|F^n + F^{n+1} + \cdots + F^{100}| = |F|^n |I + F + \cdots + F^{100-n}| = |I + F + \cdots + F^{100-n}|.$$

记 $k = 100 - n$, 则 $k \in [0, 99] \cap \mathbb{N}$. 因此只需证

$$|I + F + \cdots + F^k| = 1, \forall k \in [0, 99] \cap \mathbb{N}.$$

当 $k = 0$ 时, 结论显然成立. 当 $k \in [1, 99] \cap \mathbb{N}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |I + F + \cdots + F^k| = 1 &\iff |(I + F + \cdots + F^k)(I - F)| = |I - F| \iff |I - F^{k+1}| = |I - F| \\ &\iff (1 - \lambda_1^{k+1})(1 - \lambda_2^{k+1}) \cdots (1 - \lambda_k^{k+1}) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_k). \end{aligned} \quad (3)$$

记 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{101}}$, 则由(2)式可知上式最后一个等式等价于

$$(1 - \varepsilon^{k+1})(1 - \varepsilon^{2(k+1)}) \cdots (1 - \varepsilon^{100(k+1)}) = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \cdots (1 - \varepsilon^{100}).$$

由 $(k+1, 100) = 1$ ($1 \leq k \leq 99$) 及命题??可知, ε^{k+1} 是 101 阶循环群 $\{1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{100}\} = \langle \varepsilon \rangle$ 的一个生成元, 因此

$$\{1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{100}\} = \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon^{k+1} \rangle = \{1, \varepsilon^{k+1}, \cdots, \varepsilon^{100(k+1)}\}.$$

从而

$$(1 - \varepsilon^{k+1})(1 - \varepsilon^{2(k+1)}) \cdots (1 - \varepsilon^{100(k+1)}) = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \cdots (1 - \varepsilon^{100}).$$

故再由(3)式, 结论得证. □

例题 0.5 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $(A^T)^m = A^k$, 其中 m, k 是不同的正整数, 证明: A 的特征值是零或者单位根.

证明 由条件可知

$$\begin{aligned} (A^T)^{m^2} &= A^{mk}, \\ (A^T)^{mk} &= A^{k^2}. \end{aligned}$$

进而

$$A^{m^2} = (A^T)^{mk} = A^{k^2}.$$

于是 A 的特征值 λ 都满足

$$\lambda^{m^2} = \lambda^{k^2}.$$

故 λ 为 0 或单位根. □

例题 0.6 设 A, B 是 n 阶方阵, 满足 $A^2B + BA^2 = 2ABA$, 证明: $AB - BA$ 是幂零矩阵.

证明 记 $C = AB - BA$, 则显然 $\text{tr}(C) = 0$. 由条件可知

$$A^2B + BA^2 = 2ABA \iff A^2B - ABA = ABA - BA^2 \iff A(AB - BA) = (AB - BA)A \iff AC = CA.$$

从而由上式及矩阵迹的交换性可得, 对 $\forall k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$\text{tr}(C^k) = \text{tr}(C^{k-1}(AB - BA)) = \text{tr}(C^{k-1}AB) - \text{tr}(C^{k-1}BA) = \text{tr}(AC^{k-1}B) - \text{tr}(AC^{k-1}B) = 0.$$

故由命题??可知 $C = AB - BA$ 是幂零矩阵. □

例题 0.7 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{当 } i = j + 1, 1 \leq j \leq n - 1; \\ 1, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

求矩阵 A 的特征多项式.

证明 记 J 为全 1 矩阵, S 为仅在次对角线 ($i = j + 1$) 上为 1 的矩阵, 则 $A = J + S$. 由引理??知 $J = \alpha^T \alpha$, 其中 $\alpha = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T$. 设 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的特征值, 注意到

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\text{按第 } n \text{ 列展开}} (-1)^{n+1} \neq 0.$$

故 $\lambda_i \neq 0$. 令 $M = \lambda_i I - S$, 则由命题??(4) 知

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_i} & & & \\ -\frac{1}{\lambda_i^2} & \frac{1}{\lambda_i} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda_i^2} & \frac{1}{\lambda_i} \end{pmatrix}.$$

于是由打洞原理可得

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda_i I - A| = |\lambda_i I - S - J| = |M - J| \\ &= |M - \alpha \alpha^T| = |M| \left| 1 - \alpha^T M^{-1} \alpha \right| \\ &= \lambda_i^n \left| 1 - \alpha^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_i} & & & \\ -\frac{1}{\lambda_i^2} & \frac{1}{\lambda_i} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda_i^2} & \frac{1}{\lambda_i} \end{pmatrix} \alpha \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_i^n \left[1 - \left(\frac{n}{\lambda_i} - \frac{n-1}{\lambda_i^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_i^n} \right) \right] \\
&= \lambda_i^n - n\lambda_i^{n-1} + (n-1)\lambda_i^{n-2} + \cdots + 2(-1)^{n-2}\lambda_i + (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

因此 A 的所有 n 个特征值 λ_i 都是方程

$$x^n - nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2(-1)^{n-2}x + (-1)^{n-1} = 0.$$

的根. 而上述方程至多只有 n 个根, 故

$$|xI - A| = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2(-1)^{n-2}x + (-1)^{n-1}.$$

□