0.1 相抵标准型及其应用

定理 0.1 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

♡

证明

□

命题 0.1 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

♠

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr})\boldsymbol{Q}\\ &=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q}+\cdots+\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}.\end{aligned}$$

于是记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q},\cdots,\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}$, 则每个 $\boldsymbol{A}_i$ 的秩都等于 1. 故 $\boldsymbol{A}$ 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_k, k<r$, 且每个 $\boldsymbol{B}_i$ 的秩都等于 1, 则由命题????可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_2)+\cdots+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_k)=k$, 这与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾, 故不可能. □

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n,p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵,$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立的充要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵.

笔记 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $\boldsymbol{A}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{CQ}_2,\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1 & \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{CQ}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1).$$

从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1).$$

于是由假设可知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1$ 有解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1$. 记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2$, 则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{CQ}_2\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}+\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

故可以不妨设 $A=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $X=X_0, Y=Y_0$ 是矩阵方程 $AX+YB=C$ 的解, 则将 M 的第一分块列右乘 $-X_0$ 加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-Y_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 于是 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

再证必要性. 设 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P_1, Q_1, P_2, Q_2 为非异阵, $r=\mathrm{r}(A), s=\mathrm{r}(B)$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $A\mapsto P_1AQ_1, B\mapsto P_2BQ_2, C\mapsto P_1CQ_2, X\mapsto Q_1^{-1}XQ_2, Y\mapsto P_1YP_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 M 的如下分块初等变换:

$$M=\begin{pmatrix} I_r & O & C_1 & C_2 \\ O & O & C_3 & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由于 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=r+s$, 故 $C_4=O$. 于是矩阵方程 $AX+YB=C$, 即

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$$

有解, 例如 $X_1=C_1, X_2=C_2, Y_1=O, Y_3=C_3$, 其余分块取法任意. □

命题 0.2 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(A)=n$, 即 A 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n\times m$ 矩阵 B(行满秩), 使得 $BA=I_n$(这样的矩阵 B 称为 A 的左逆);

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=m$, 即 A 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 C(列满秩), 使得 $AC=I_m$(这样的矩阵 C 称为 A 的右逆).

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此 $(I_n, O)PAQ=I_n$, 即 $(I_n, O)PA=Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n, O)PA=I_n$. 令 $B=Q(I_n, O)P$ 即可.

(2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论.

□

推论 0.1

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD=AE$, 则 $D=E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA=EA$, 则 $D=E$.

命题 0.3 (满秩分解)

设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 证明:

(1) $A=BC$, 其中 B 是 $m\times r$(列满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(B)=r$,C 是 $r\times n$(行满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(C)=r$, 这种分解称为 A 的满秩分解;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有两个满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2$, 则存在 r 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P},\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}_1$.

证明

(1) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶非异阵,$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}.$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$, 即得结论.

(2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在 $r\times m$ 行满秩阵 $\boldsymbol{S}_2$,$n\times r$ 列满秩阵 $\boldsymbol{T}_2$, 使得 $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{I}_r$, 于是

$$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_2)=(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_2),$$

$$\boldsymbol{C}_2=(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2)=\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1)=(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{C}_1,$$

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_2)=\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_2)(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_2)=\boldsymbol{I}_r.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_2$, 即得结论.

□

命题 0.4

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 是满秩分解当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 的 r 个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当 $\boldsymbol{C}$ 的 r 个行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量张成线性空间的一组基.

证明

□

例题 0.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$.

笔记 证法一的不妨设原因与例题 0.1类似.

证明 证法一: 设 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶非异阵,$\boldsymbol{Q}$ 是 n 阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵变换:$\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{PAQ},\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 是相抵标准型. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$ 为对应的分块, 由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_r$, 其余分块取法任意.

证法二:设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CD}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解,$\boldsymbol{E}$ 为列满秩阵 $\boldsymbol{C}$ 的左逆,$\boldsymbol{F}$ 是行满秩阵 $\boldsymbol{D}$ 的右逆. 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{FE}$, 则

$$\boldsymbol{ABA}=(\boldsymbol{CD})(\boldsymbol{FE})(\boldsymbol{CD})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{DF})(\boldsymbol{EC})\boldsymbol{D}=\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{A}.$$

□

例题 0.3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $3\times 2,2\times 3$ 矩阵且满足

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{BA}$.

证明 解法一: 通过简单的计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=2$, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2,\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant 2$. 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩阵,$\boldsymbol{B}$ 是行满秩阵. 又注意到 $(\boldsymbol{AB})^2=9\boldsymbol{AB}$, 经整理可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA}-9\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 根据推论 0.1, 可以在上式的左边消去 $\boldsymbol{A}$, 右边消去 $\boldsymbol{B}$, 从而可得 $\boldsymbol{BA}=9\boldsymbol{I}_2$.

解法二:由解法一中矩阵秩的计算可知,$\boldsymbol{AB}$ 是题中 3 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的满秩分解. 注意到 $\boldsymbol{C}$ 的后两列线性无关, 因

此可取另一种满秩分解为

$$C=\begin{pmatrix}2&-2\\5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2)可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$. 于是 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=9\boldsymbol{I}_2$, 从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(9\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{P}=9\boldsymbol{I}_2$.

解法三: 经简单的计算可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda-9)^2$, 且特征值 9 的几何重数也等于 2, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可对角化. 由特征值的降价公式可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|=(\lambda-9)^2$, 从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的两个特征值都是 9, 于是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵 (特征值都非零). 因此由命题??可知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 也可对角化, 于是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 相似于 $9\boldsymbol{I}_2$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(9\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{P}=9\boldsymbol{I}_2$. □

命题 0.5 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 求证:$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和秩等于 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_r$.

证明 充分性显然, 现证必要性. 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

代入 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 消去两侧的非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

只需令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 列满秩,$\boldsymbol{I}$ 行满秩, 经简单计算即得结论. □

推论 0.2 (幂等矩阵的迹和秩相等)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明 证法一:由命题 0.5可知,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证法二 (相似标准型):事实上, 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1},$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1}$, 可得 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. □

命题 0.6

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 证明: 存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 证明: 存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

笔记 这个命题中的 $\boldsymbol{I}_r$ 和 $\boldsymbol{I}_s$ 都可以替换为主对角元都为相应矩阵特征值的对角阵 (两边同乘主对角元为对应特征值根式的对角阵和其逆矩阵即可).

证明

1. 证法一 (代数方法):设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r,\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r+s$, 且存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{S}$, n 阶非异阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

$$\boldsymbol{SAT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{SBT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r+s$, 故删去 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{T}$ 的前 r 行, 可得后 $m-r$ 行的秩必大于等于 s, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_{21},\boldsymbol{B}_{22})\geq s$. 另一方面, 我们还有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_{21},\boldsymbol{B}_{22})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_{21},\boldsymbol{B}_{22})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$, 从而 $(\boldsymbol{B}_{21},\boldsymbol{B}_{22})$ 的行向量的极大无关组也是 $\boldsymbol{SBT}$ 的行向量组的极大无关组. 因此利用 $\boldsymbol{SBT}$ 的后 $m-r$ 行的初等行变换可以消去 $\boldsymbol{SBT}$ 的前 r 行. 同理可证利用 $\boldsymbol{SBT}$ 的后 $n-r$ 列的初等列变换可以消去 $\boldsymbol{SBT}$ 的前 r 列, 即存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{U}$, n 阶非异阵 $\boldsymbol{V}$, 使得

$$\boldsymbol{USATV}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{USBTV}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}.$$

此时存在 $m-r$ 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, $n-r$ 阶非异阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $\boldsymbol{CB}_{22}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{US}$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{TV}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶非异阵, $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶非异阵, 且满足结论.

证法二 (几何方法):将问题转换成几何的语言: 设 $V=\mathbb{K}^n$ 为 n 维列向量空间, $U=\mathbb{K}^m$ 为 m 维列向量空间, $\varphi_{\boldsymbol{A}},\varphi_{\boldsymbol{B}}:V\to U$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 左乘诱导的线性映射, 满足 $\mathrm{r}(\varphi_{\boldsymbol{A}}+\varphi_{\boldsymbol{B}})=\mathrm{r}(\varphi_{\boldsymbol{A}})+\mathrm{r}(\varphi_{\boldsymbol{B}})$, 证明: 存在 V 的一组基, U 的一组基, 使得 $\varphi_{\boldsymbol{A}},\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 在这两组基下的表示矩阵分别是题中的两个矩阵.

设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r,\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r+s$. 由命题**??**(5) 知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

因此 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r+s$, 从而 $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}\cap\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}})=n-(r+s)$. 由交和空间的维数公式可得

$$\dim(\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}})=(n-r)+(n-s)-(n-r-s)=n,$$

又显然有 $V\supset\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}}$, 故有 $V=\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}}$. 另一方面, 注意到

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\dim\mathrm{Im}(\varphi_{\boldsymbol{A}}+\varphi_{\boldsymbol{B}})\leq\dim(\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{B}})\leq\dim\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\dim\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

因此 $\mathrm{Im}(\varphi_{\boldsymbol{A}}+\varphi_{\boldsymbol{B}})=\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}\oplus\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{B}}$.

设 $\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}\cap\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基为 $\{e_{r+s+1},\cdots,e_n\}$, 将其扩张为 $\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基 $\{e_{r+1},\cdots,e_n\}$, 再将其扩张为 $\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_r,e_{r+s+1},\cdots,e_n\}$. 根据推论**??**可知, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 恰好是 $V=\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{Ker}\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基. 又由推论**??**可知, $\boldsymbol{A}e_1,\cdots,\boldsymbol{A}e_r$ 是 $\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基, $\boldsymbol{B}e_{r+1},\cdots,\boldsymbol{B}e_{r+s}$ 是 $\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基. 因为 $\mathrm{Im}(\varphi_{\boldsymbol{A}}+\varphi_{\boldsymbol{B}})=\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}\oplus\mathrm{Im}\varphi_{\boldsymbol{B}}$, 所以 $\boldsymbol{A}e_1,\cdots,\boldsymbol{A}e_r,\boldsymbol{B}e_{r+1},\cdots,\boldsymbol{B}e_{r+s}$ 线性无关, 从而可扩张为 U 的一组基

$$\{\boldsymbol{A}e_1,\cdots,\boldsymbol{A}e_r,\boldsymbol{B}e_{r+1},\cdots,\boldsymbol{B}e_{r+s},f_{r+s+1},\cdots,f_m\}.$$

最后容易验证 $\varphi_{\boldsymbol{A}},\varphi_{\boldsymbol{B}}$ 在 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, U 的一组基 $\{\boldsymbol{A}e_1,\cdots,\boldsymbol{A}e_r,\boldsymbol{B}e_{r+1},\cdots,\boldsymbol{B}e_{r+s},f_{r+s+1},\cdots,f_m\}$ 下的表示矩阵即为所要求的矩阵.

2. 类似第 1 问的证明可得.

□