0.1 凸性相关题型

例题 0.1 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x \in (a,b)$, 都有

$$f(x) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)dy. \tag{1}$$

特别的, 若 $f \in C[a,b]$, 则对 $x = a, b$, 也有(1)式成立.

注 **Step2** 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

笔记 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x) = f(x) - p(x)$(其中 $p(x)$ 是 f 过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

证明 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f \in C[a,b]$. 不妨设 $a = 0, b = 1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

Step1 当

$$f(a) = f(b) = 0, x_0\text{是}f(x)\text{最大值点}, x_0 \in (a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x \in [0,x_0] \\ f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1), & x \in [x_0,1] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0}xdx + \int_{x_0}^1 \frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)dx = \frac{1}{2}f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(1).

当 $x_0 = a$或b 时, 由 $f(a) = f(b) = 0$ 且 f 非负可知, 此时 $f(x) \equiv 0$ 结论显然成立.

Step2 一般情况可设

$$g(x) = f(x) - \left[f(1) - f(0)\right]x - f(0),$$

从而 $g(0) = g(1) = 0$, 于是 g 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(1)知

$$g(x) \leqslant 2\int_0^1 g(y)\,dy, \forall x \in [0,1]. \tag{2}$$

于是利用(2)知

$$f(x) - \left[(f(1)-f(0))x + f(0)\right] \leqslant 2\int_0^1 f(y)\,dy - 2\int_0^1 \left[(f(1)-f(0))y + f(0)\right]dy, \forall x \in [0,1].$$

从而

$$f(x) - 2\int_0^1 f(y)\,dy \leqslant \left[(f(1)-f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1)-f(0))y + f(0)\right]dy, \forall x \in [0,1].$$

注意到对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left[(f(1)-f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1)-f(0))y + f(0)\right]dy \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow &\left[f(1)-f(0)\right]x + f(0) \leqslant 2\int_0^1 \left[(f(1)-f(0))x + f(0)\right]dx \\
\Leftrightarrow &\left[f(1)-f(0)\right]x + f(0) \leqslant f(1) + f(0) \\
\Leftrightarrow &\left[f(1)-f(0)\right]x \leqslant f(1) \\
\Leftrightarrow &f(1)(1-x) + f(0)x \geqslant 0
\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x \in [0, 1], f(1), f(0) \geq 0$ 直接得到. 于是我们完成了证明. $\square$