0.1 反常积分收敛的相关结论

命题 0.1 (积分收敛必有子列趋于 0)

设连续函数满足 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

(1) 存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

(2) 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\ln x_n f(x_n)=0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限.

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=f(\theta(A)), A+1>\theta(A)>A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0=\lim_{A\to+\infty}\int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty} f(\theta(A)), \lim_{A\to+\infty}\theta(A)=+\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若 $|f(x)|>\dfrac{1}{x\ln x}, \forall x>e$, 则因为 $\int_e^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=+\infty$, 我们知道这不可能. 故存在 $x_1>e$ 使得 $|f(x_1)|\leqslant \dfrac{1}{x_1\ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)|>\dfrac{1}{2x\ln x}, \forall x>x_1+1$, 仍然有会有矛盾! 因此必然存在 $x_2>x_1+1$ 使得 $|f(x_2)|\leqslant \dfrac{1}{2x_2\ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)|\leqslant \frac{1}{nx_n\ln x_n}, n=1,2,\cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n\ln x_n\cdot|f(x_n)|=0.$$

□

命题 0.2

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $xf(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x f(x)=0$.

证明

(1) 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f, 从而

$$Af(A)\geqslant \int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \frac{A}{2}f(A)\leqslant \int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty, \quad \int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A)=0.$

(2) 不妨设 xf 递减, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\frac{1}{2}A\ln Af(A)=Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{A}^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{A}^{A^2}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leq Af(A)\int_{A}^{A^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=A\ln Af(A).$$

从而

$$\int_{A}^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x\leq A\ln Af(A)\leq 2\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x$$

又由 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.\quad \int_{A}^{A^2}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty} A\ln Af(A)=0.$

□

例题 0.1 设 $f\in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$

证明 若存在 $a>0$, 使得 $f'(a)=0$, 则由 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减可得

$$f'(x)=0,\quad \forall x>a.$$

此时结论显然成立.

若 $f'\neq 0,\forall x\in(0,+\infty)$, 则由导数介值性可知,$f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设 $f'>0,\forall x\in(0,+\infty)$, 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f'=|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减, 故此时 f' 在 $(0,+\infty)$ 内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y)\,\mathrm{d}y=f(x)-f(1).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 所以 $\int_1^{+\infty}f'(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛. 于是由命题 0.2(1)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$ □

例题 0.2 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln xf'(x)=0.$$

证明 由 xf' 单调可知,$g(x)\triangleq xf'$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f'=\frac{g(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 xf' 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)\leqslant 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)>0$, 则存在 $C>0$, 使得

$$xf'(x)>C\Rightarrow f'(x)>\frac{C}{x},\quad x\in(\max\{a,0\},+\infty).\tag{1}$$

对 (1) 式两边同时积分得到

$$f(x)>\int_a^x\frac{c}{t}\,\mathrm{d}t=c\ln|x|-c\ln a.$$

令 $x\to+\infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 这与 f 有界矛盾! 于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)\leqslant 0$ 可知存在 $X>\max\{a,0\}$, 使得

$$xf'(x)\leqslant 0\Rightarrow f'(x)\leqslant 0,\quad x\in(X,+\infty).$$

故 f 在 $(X,+\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a).$$

令 $x\to+\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在可得 $\int_a^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 又 $xf'(x)$ 单调, 于是由命题 0.2(2)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln xf'(x)=0.$

□