0.1 函数列极限

定理 0.1 (Dini 定理)

若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C([a,b]),f\in C([a,b])$ 且对每一个 $x\in[a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调并成立

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

注 不妨设 $f(x)=0$ 的原因: 假设当 $f(x)=0$ 时结论已经成立, 则当 $f(x)\neq 0$ 时, 令 $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$, 此时 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C[a,b]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=0$. 因为对任意 $x\in[a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调, 所以对任意 $x\in[a,b]$, 也有 $g_n(x)$ 关于 n 单调. 于是由假设可知,$g_n(x)$ 一致收敛到 0. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x)=0$, 不妨设对 $\forall x\in[a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 可知, 对 $\forall x\in[a,b]$, 都有

$$f_n(x)\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}_1.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 考虑 $U_n\triangleq\{x\in[a,b]|f_n(x)<\varepsilon\}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 可得

$$[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}U_n.$$

因为 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C[a,b]$, 又注意 $f_n^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)=U_n$, 所以 U_n 是开集. 又由于对 $\forall x\in[a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 因此 $U_n\subset U_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}_1$. 这是因为对 $\forall x\in U_n$, 都有 $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)<\varepsilon$, 于是 $x\in U_{n+1}$. 从而由有限覆盖定理可知, 存在 $n_1,n_2,\cdots,n_m\in\mathbb{N}_1$, 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{m}U_{n_k}.$$

取 $N\triangleq\max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}$, 则此时 $[a,b]\subset U_N$. 故对 $\forall n\geqslant N$, 由 $U_n\subset U_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}_1$ 可知,$[a,b]\subset U_N\subset U_n$, 即对 $\forall n\geqslant N$, 都有 $f_n(x)<\varepsilon,\forall x\in[a,b]$. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 0. 故原定理得证. □

定理 0.2 (Dini 定理函数单调版本)

设 $f_n\in C[a,b],n=1,2,\cdots$ 都是单调函数. 若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\in C[a,b].$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 是一致的. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

证明 由 Cantor 定理可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有 f_n 在 $[a,b]$ 上一致连续. 从而对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon,\forall|y-x|\leqslant\delta. \tag{1}$$

设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 使得 $x_i-x_{i+1}\leqslant\delta,i=0,1,2,\cdots,m$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 可知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon,\forall i\in\{0,1,2,\cdots,m\}. \tag{2}$$

对 $\forall x\in[a,b]$, 当 $n\geqslant N$ 时, 一定存在 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得 $x\in[x_{i-1},x_i]$. 从而当 $n\geqslant N$ 时, 利用(1)和 (2) 式以及 f_n 的单调性可得

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|<|f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)|+\varepsilon+\varepsilon\\&\leqslant|f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})|+|f(x_{i+1})-f(x_i)|+|f(x_i)-f_n(x_i)|+2\varepsilon\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon=5\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. □