

0.1 相抵标准型及其应用

定理 0.1 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 A , 总存在 m 阶非异阵 P 和 n 阶非异阵 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

证明

□

命题 0.1 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明 将 A 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 P 及 Q , 使得


$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr})Q \\ &= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q. \end{aligned}$$

于是记 $A_1 = PE_{11}Q, A_2 = PE_{22}Q, \dots, A_r = PE_{rr}Q$, 则每个 A_i 的秩都等于 1. 故 A 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $A = B_1 + B_2 + \cdots + B_k, k < r$, 且每个 B_i 的秩都等于 1, 则由命题 0.1 可知 $r(A) \leq r(B_1) + r(B_2) + \cdots + r(B_k) = k$, 这与 $r(A) = r$ 矛盾, 故不可能. □

命题 0.2

设 A, B, C 分别为 $m \times n, p \times q$ 和 $m \times q$ 矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 证明: $r(M) = r(A) + r(B)$ 成立的充要条件是矩阵方程 $AX + YB = C$ 有解, 其中 X, Y 分别是 $n \times q$ 和 $m \times p$ 未知矩阵.

 **笔记** 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $A \neq \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B \neq \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 时, 记 $A_1 = P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B_1 = P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}, C_1 = P_1 C Q_2, M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\begin{aligned} r(A) &= r(P_1 A Q_1) = r \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(A_1), \quad r(B) = r(P_2 B Q_2) = r \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(B_1), \\ r(M) &= r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r \left(\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} \right) = r \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = r(M_1). \end{aligned}$$

从而

$$r(M) = r(A) + r(B) \Leftrightarrow r(M_1) = r \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(B_1).$$

于是由假设可知 $A_1 X_1 + Y_1 B_1 = C_1$ 有解 X_1, Y_1 . 记 $X = Q_1 X_1 Q_2^{-1}, Y = P_1^{-1} Y_1 P_2$, 则

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + Y_1 B_1 &= C_1 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow P_1 A Q_1 X_1 + Y_1 P_2 B Q_2 &= P_1 C Q_2 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow A Q_1 X_1 Q_2^{-1} + P_1^{-1} Y_1 P_2 B &= C \text{ 有解 } X_1, Y_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AX + YB = C \text{ 有解 } X, Y$$

故可以不妨设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $X = X_0, Y = Y_0$ 是矩阵方程 $AX + YB = C$ 的解, 则将 M 的第一分块列右乘 $-X_0$ 加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-Y_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 于是 $r(M) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

再证必要性. 设 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P_1, Q_1, P_2, Q_2 为非异阵, $r = r(A), s = r(B)$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $A \mapsto P_1AQ_1, B \mapsto P_2BQ_2, C \mapsto P_1CQ_2, X \mapsto Q_1^{-1}XQ_2, Y \mapsto P_1YP_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 M 的如下分块初等变换:

$$M = \begin{pmatrix} I_r & O & C_1 & C_2 \\ O & O & C_3 & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由于 $r(M) = r(A) + r(B) = r + s$, 故 $C_4 = O$. 于是矩阵方程 $AX + YB = C$, 即

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$$

有解, 例如 $X_1 = C_1, X_2 = C_2, Y_1 = O, Y_3 = C_3$, 其余分块取法任意. □

命题 0.3 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

- (1) 若 $r(A) = n$, 即 A 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n \times m$ 矩阵 B (行满秩), 使得 $BA = I_n$ (这样的矩阵 B 称为 A 的左逆);
- (2) 若 $r(A) = m$, 即 A 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n \times m$ 矩阵 C (列满秩), 使得 $AC = I_m$ (这样的矩阵 C 称为 A 的右逆).

证明

- (1) 设 P 为 m 阶非异阵, Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此 $(I_n, O)PAQ = I_n$, 即 $(I_n, O)PA = Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n, O)PA = I_n$. 令 $B = Q(I_n, O)P$ 即可.

- (2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论. □

推论 0.1

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD = AE$, 则 $D = E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA = EA$, 则 $D = E$. ♥