0.1 Fourier 级数基本性质

定理 0.1 (Fourier 级数的逐项积分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意 $c, x \in [-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t.$$

定理 0.2 (Fourier 级数的逐项微分定理)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导. 进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 (注意:$f'(x)$ 在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx).$$

推论 0.1

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

定理 0.3 (Bessel 不等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

笔记 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

定理 0.4 (Parseval 恒等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足恒等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

引理 0.1

设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$. a_n, b_n 为 f 的 Fourier 系数,a_n', b_n' 为 f 的导函数 f' 的 Fourier 系数, 证明

$$a_0' = 0, a_n' = nb_n, b_n' = -na_n'(n = 1, 2, \cdots).$$

注 分部积分的条件, 需要 f 的导函数 f' 在积分区域上连续.

证明 由于 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 因此 $f'\in C([-\pi,\pi])$. 又 $f(\pi)=f(-\pi)$, 故

$$\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = nb_n(n=1,2,\cdots),\\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -na_n(n=1,2,\cdots),
\end{aligned}$$

因此结论得证. □

例题 0.1 设 f 以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数, 证明 f 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

证明 因为 $f(x)$ 是以 2π 为周期的具有二阶连续导数的函数, 故 $f(x), f'(x)$ 可展开成傅里叶级数, 不妨设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx).$$

先证 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛. 由引理 0.1可知

$$a_0'=0, a_n'=nb_n, b_n'=-nb_n(n=1,2,\cdots),$$

从而

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|b_n'|}{n}+\frac{|a_n'|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left[(b_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]. \tag{1}$$

又由Bessel 不等式可知

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]$ 收敛. 再结合 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛及(1)式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 进而 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛.
注意到

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|\leqslant\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|), \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

因此由 Weierstrass 判别法可知,$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 即 f 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f. □