

## 0.1 可列集与不可列集

### 0.1.1 可列集

#### 定义 0.1 (可列集)

与自然数集  $\mathbb{N}$  对等的集合称为**可列集**, 其基数记为  $\aleph_0$  (读作阿列夫零). 有限集和可列集统称为**可数集**.

#### 命题 0.1

$A$  是可列集当且仅当  $A$  可以写成  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**证明**  $A$  可列, 则存在  $\mathbb{N}$  到  $A$  的一一映射  $\varphi$ , 记为  $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$ , 则  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 反过来, 若  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 将每个  $a_n$  与其下标  $n$  建立一一对应, 则  $A$  与  $\mathbb{N}$  对等, 从而是可列集  $\square$

#### 命题 0.2 (可列集的性质)

- (1) 任何无限集必包含一个可列子集.
- (2) 可列集的任何无限子集都是可列集.
- (3) 有限集与可列集的并集是可列集.
- (4) 有限个可列集的并集是可列集.
- (5) 可列个可列集的并集是可列集.
- (6) 若  $A$  为无限集,  $B$  为有限集或可列集, 则  $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ .
- (7) 设  $A, B$  为可列集, 则  $A \times B$  是可列集.
- (8) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  可列, 则  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  可列.

**笔记** (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数  $\aleph_0$ .

**证明**

- (1) 设  $A$  为无限集. 从  $A$  中任取一元  $a_1$ ; 由于  $A - \{a_1\} \neq \emptyset$ , 取  $a_2 \in A - \{a_1\}$ ; 又  $A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ , 取  $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$ ;  $\dots$ , 因为  $A$  是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到  $A$  的一个可列子集  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .
- (2) 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ .  $B$  是  $A$  的无限子集. 按照  $A$  中元素的次序依次寻找  $B$  中元素, 分别记为  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ , 则  $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$  为可列集.
- (3) 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . 不妨设  $A \cap B = \emptyset$ , 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots\}$$

可列.

- (4) 设  $A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  为可列集, 则  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \dots\} \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n)}, a_3^{(1)}, \dots\}$$

可列.

(5) 设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  为一列可列集, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \rightarrow a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \cdots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\ A_3 &= \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad a_4^{(n)} \cdots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_{2n+1}^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, \cdots, a_{2n+1}^{(n)}, \cdots\}$$

(依次是下标之和等于  $2, 3, \cdots, 2n+2, \cdots$ ) 可列.

(6) 不妨设  $A \cap B = \emptyset$ , 否则用  $B - A$  代替  $B$  即可.  $A$  为无限集, 由 (1) 可知,  $A$  包含一个可列子集  $A_1$ . 由于  $A_1 \cup B$  是可列集, 故  $A_1 \cup B \sim A_1$ . 注意到  $(A - A_1) \cap (A_1 \cup B) = \emptyset$ , 则有

$$A \cup B = (A - A_1) \cup A_1 \cup B = (A - A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A - A_1) \cup A_1 = A.$$

因此,  $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ .

(7) 由 **命题 0.1** 可设  $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ , 则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{(x, y) : y \in B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (x, y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j). \end{aligned}$$

由 (5) 可知, 对  $\forall i \in \mathbb{N}, \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$  都可列. 于是再由 (5) 可知  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_i, y_j)$  也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明. □

**例题 0.1** 有理数集  $\mathbb{Q}$  是可列集.

**证明**  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ , 其中  $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$  分别表示正、负有理数集. 由对称性以及 **命题 0.2(3)** 和 **命题 0.2(4)**, 只需证明  $\mathbb{Q}^+$  可列.

对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 令

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots \right\}$$

则  $A_n$  可列. 又  $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  (除去重复元), 由可列集性质知  $\mathbb{Q}^+$  可列. □

**例题 0.2** 实轴上互不相交的开区间至多有可列个.

**证明** 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成  $\mathbb{Q}$  的一个子集. 又  $\mathbb{Q}$  是可列集, 故这样的开区间至多有可列个. □

**例题 0.3** 整系数多项式的全体  $\mathbf{P}$  是可列集.

**证明** 对每个  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , 令

$$P_n = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \cdots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_n$$

由命题 0.2(8) 知  $P_n$  可列. 又  $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ , 由可列集性质知  $\mathbf{P}$  可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集.  $\square$

**例题 0.4**  $\mathbb{R}$  上单调函数的不连续点至多有可列个.

**证明** 不妨设  $f$  单调递增, 若  $x_0$  是  $f$  的不连续点, 则

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

故  $x_0$  就对应着一个开区间  $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ . 显然, 若  $x_1, x_2$  是  $f$  的不同不连续点, 则对应区间  $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$  与  $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$  互不相交. 而  $\mathbb{R}$  上互不相交的开区间至多有可列个, 故  $f$  的不连续点也至多有可列个.  $\square$

## 0.1.2 不可列集

### 定义 0.2 (不可列集)

不是可列集的无限集称为**不可列集**.  $\clubsuit$

### 定理 0.1

$[0, 1]$  是不可列集.  $\heartsuit$

**证明** 假设  $[0, 1]$  可列, 则可表示为  $[0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 把  $[0, 1]$  三等分为:  $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$ , 则其中至少有一个闭区间不包含  $x_1$ , 记该区间为  $I_1$ , 则  $x_1 \notin I_1$ ; 把  $I_1$  三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含  $x_2$ , 记该区间为  $I_2$ , 则  $x_2 \notin I_2, I_2 \subset I_1; \dots$ , 依次做下去, 可得到一列闭区间  $\{I_n\}$  满足:

(i)  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ ;

(ii)  $x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N}$ ;

(iii)  $I_n$  的长度为  $1/3^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

由闭区间套定理, 存在  $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . 由于  $\xi \in [0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 则必存在  $n_0 \in \mathbb{N}$  使得  $\xi = x_{n_0}$ . 而  $x_{n_0} \notin I_{n_0}$ , 这与  $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  矛盾.  $\square$

### 定义 0.3

若  $A \sim [0, 1]$ , 则称  $A$  具有**连续基数**, 记  $\overline{A} = \aleph$ .  $\clubsuit$

### 定理 0.2

对  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 都有  $\overline{[a, b]} = \overline{(a, b)} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = \aleph$ .  $\heartsuit$

**证明** 对  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 映射  $f(x) = a + (b - a)x$  建立了  $[0, 1]$  与  $[a, b]$  之间的一一对应, 故  $\overline{[a, b]} = \aleph$ . 又  $(a, b)$  和  $[a, b]$  分别只差一个点和两个点, 由命题 0.2(6) 知  $\overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \aleph$ . 最后, 由  $\aleph$  与  $\mathbb{R}$  对等] 例题?? 以及刚证明的结论可得,  $\overline{\mathbb{R}} = \overline{[-1, 1]} = \aleph$ .  $\square$

### 推论 0.1

无理数的基数为  $\aleph$ .  $\heartsuit$

**证明** 记无理数集为  $\mathbb{I}$ , 注意到  $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , 且  $\mathbb{Q}$  可列, 由命题 0.2(6) 可得  $\overline{\mathbb{I}} = \overline{\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}} = \aleph$ .  $\square$

## 定理 0.3

设  $\{A_n\}$  为一集列, 若对每个  $n$  都有  $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$ , 则  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \aleph$ .



**证明** 不妨设  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . 由于  $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$ , 则  $A_n \sim (n, n+1]$ , 从而  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}$ . □

## 定义 0.4

设  $A$  为集合, 记  $2^A$  为  $A$  的幂集. 若  $A$  为含有  $n$  个元素的有限集, 则  $2^A$  由 1 个空集,  $C_n^1$  个单元素集,  $C_n^2$  个两元素集,  $\dots, C_n^n$  个  $n$  元素集, 所以,  $2^A$  中元素的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = \overline{\overline{2^A}}$$

更一般地, 设  $\overline{\overline{A}} = \mu$ , 定义  $\overline{\overline{2^A}} = 2^\mu$ .



## 命题 0.3

设  $A, B$  都是非空集合, 则  $A \sim B$  的充要条件是  $2^A \sim 2^B$ .



**证明** 必要性: 由  $A \sim B$  可知  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ . 于是  $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$ . 故  $2^A \sim 2^B$ .

充分性: 假设  $A$  与  $B$  不对等, 则不妨设  $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ , 则  $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$ , 这与  $2^A \sim 2^B$  矛盾! 故  $A \sim B$ . □

## 引理 0.1

设  $A$  是一个非空集合, 则  $A$  上所有特征函数的全体  $\mathcal{F}_A$  与  $2^A$  对等, 即  $\mathcal{F}_A \sim 2^A$ . 进而  $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$ .



**证明** 对于每个  $E \in 2^A$ , 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明  $A$  上所有特征函数的全体  $\mathcal{F}_A$  与  $2^A$  对等. □

## 定理 0.4

$\aleph = 2^{\aleph_0}$ .



**证明** 用  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  表示  $\mathbb{N}$  上特征函数的全体, 只需证  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  与  $(0, 1]$  对等.

对任意的  $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ , 作映射

$$f: \varphi \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0, 1\}.$$

易知,  $f$  是从  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  到  $(0, 1]$  的单射, 故命题??可知  $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} \leq \overline{\overline{(0, 1]}}$ .

另一方面, 对每一个  $x \in (0, 1]$ , 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0, 1\}.$$

定义映射

$$g: x \rightarrow \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

易知,  $g$  是从  $(0, 1]$  到  $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$  的单射, 故由命题??可知  $\overline{\overline{(0, 1]}} \leq \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$ .

由 Bernstein 定理可知  $\overline{\overline{(0, 1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$ . 再由引理 0.1 可得  $\aleph = \overline{\overline{(0, 1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\aleph_0}}} = 2^{\aleph_0}$ . □

**例题 0.5**  $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ .

**证明** 由定理 0.4 及命题 0.3 和  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} - \mathbb{N}$  可知  $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}}$ , 故再由命题 ?? 可得  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{Z} - \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ .  
□

**例题 0.6** 用  $M$  表示  $[0, 1]$  上实值有界函数的全体, 则  $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$ .

**证明** 设  $E$  为  $[0, 1]$  的任一子集, 则  $E$  唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] - E \end{cases}$$

显然,  $\chi_E \in M$ . 故  $\overline{\overline{M}} \supseteq \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^{\aleph}$ .

另一方面, 对每一个  $f \in M$ , 其图像  $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$  为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故  $\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph}$ . 由伯恩斯坦定理,  $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$ . □

#### 定理 0.5 (无最大基数定理)

设  $A$  为非空集, 则  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$ .

**证明** 由于  $2^A$  中的单元素集与  $A$  对等, 故  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{2^A}}$ .

若存在集合  $A$  满足  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{2^A}}$ , 则存在  $f: A \rightarrow 2^A$  为一一映射. 令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

注意到  $\emptyset \in 2^A$ , 则存在  $x_0 \in A$  使得  $f(x_0) = \emptyset$ , 故  $x_0 \notin f(x_0)$ . 这说明  $x_0 \in B$ , 从而  $B \neq \emptyset$ .

又  $B \in 2^A$ , 则存在  $x_B \in A$  使得  $f(x_B) = B$ . 下面考察  $x_B$  与  $B$  的关系: 若  $x_B \in B$ , 则  $x_B \notin f(x_B) = B$ , 矛盾; 若  $x_B \notin B$ , 即  $x_B \notin f(x_B)$ , 这又蕴涵  $x_B \in B$ , 矛盾. □