

0.1 复变函数的积分

定义 0.1

设 $z = \gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) 是一条可求长曲线, f 是定义在 γ 上的函数, 沿 γ 的正方向取分点 $\gamma(a) = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = \gamma(b)$, 在 γ 中从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任取点 $\zeta_k, k = 1, \dots, n$ (见图 1), 作 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (1)$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 如果当 $\lambda = \max\{s_k : 1 \leq k \leq n\} \rightarrow 0$ 时, 不论 ζ_k 的取法如何, 和式 (1) 总有一个确定的极限, 就称此极限为 f 沿 γ 的积分, 记为 $\int_\gamma f(z)dz$, 即

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

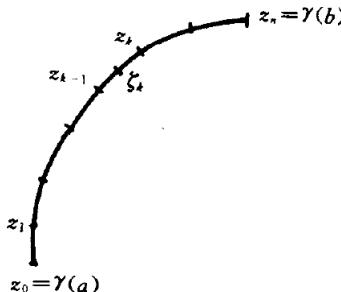


图 1

定理 0.1

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在可求长曲线 γ 上连续, 则 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy.$$



证明 记 $z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$, 于是 f 的 Riemann 和可写成

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \{u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\} + i \sum_{k=1}^n \{v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\}, \end{aligned}$$

这里, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. 当 u, v 在 γ 上连续时, 上述和式当 $\lambda \rightarrow 0$ 时趋于曲线积分

$$\int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy.$$



定理 0.2

如果 f, g 在可求长曲线 γ 上连续, 那么

- (i) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_\gamma f(z)dz$, 这里, γ^- 是指与 γ 方向相反的曲线;
- (ii) $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$, 这里, α, β 是两个复常数;
- (iii) $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$, 这里, γ 是由 γ_1 和 γ_2 组成的曲线.



证明 由定理 0.1 和实变函数第二型曲面积分的性质不难证明.

□

定理 0.3

如果 $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) 是光滑曲线, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 γ 上连续, 那么 f 沿 γ 的积分必存在, 并且

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] (x'(t) + iy'(t))\} dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

♡

证明 在所设的条件下, 由定理??有

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u dx - v dy &= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt, \\ \int_{\gamma} v dx + u dy &= \int_a^b \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\} dt. \end{aligned}$$

由定理 0.1 可知, 第二式乘 i 后与第一式相加, 即得

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] (x'(t) + iy'(t))\} dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

□

例题 0.1 设可求长曲线 $z = \gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) 的起点为 α , 终点为 β , 证明

$$\int_{\gamma} dz = \beta - \alpha, \quad \int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

证明 若 γ 是光滑曲线, 由定理 0.3, 得

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz &= \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \beta - \alpha, \\ \int_{\gamma} z dz &= \int_a^b \gamma(t) \gamma'(t) dt = \frac{1}{2} \gamma^2(t) \Big|_a^b = \frac{1}{2} (\gamma^2(b) - \gamma^2(a)) = \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

如果 γ 不是光滑曲线, 可直接按积分的定义计算:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = \beta - \alpha. \\ \int_{\gamma} z dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_k (z_k - z_{k-1}), \quad \int_{\gamma} z dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_{k-1} (z_k - z_{k-1}), \end{aligned}$$

把两式加起来, 得

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2).$$

□

命题 0.1

设 γ 是以 a 为中心、以 r 为半径的圆周, 则

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi i, & n = 1. \end{cases}$$

这里 n 是任意整数, 且上述积分沿 γ 的正方向进行.

◆

证明 γ 的参数方程为 $z = a + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 由定理 0.3, 得

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{r^n e^{int}} dt = r^{1-n} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= ir^{1-n} \int_0^{2\pi} [\cos(1-n)t + i \sin(1-n)t] dt \\
&= -r^{1-n} \int_0^{2\pi} \sin(1-n)t dt + ir^{1-n} \int_0^{2\pi} \cos(1-n)t dt.
\end{aligned}$$

所以, 上述积分当 $n \neq 1$ 时为零, 当 $n = 1$ 时为 $2\pi i$, 即

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi i, & n = 1. \end{cases}$$

□

定理 0.4 (积分估值定理/长大不等式)

如果 γ 的长度为 $L, M = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$, 那么

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML. \quad (4)$$

♡

证明 f 在 γ 上的 Riemann 和有不等式

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq ML,$$

用 s_k 记弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度, 令 $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} s_k \rightarrow 0$, 即得所要的不等式.

□