0.1 模

定义 0.1 (模)

设 R 是幺环, M 是 Abel 群, 其运算为加法. 若有 $R\times M$ 到 M 的映射: $(a,x)\to ax(a\in R,x\in M)$, 对 $\forall a,b\in R,x,y\in M$ 满足

(1) $a(x+y)=ax+ay$;

(2) $(a+b)x=ax+bx$;

(3) $(ab)x=a(bx)$;

(4) $1\cdot x=x$,

则称 M 为 R 上的一个**左模**, 或称 M 是**左R 模**, ax 称为 a 与 x 的积, 相应地说, R 与 M 间有一个乘法.

类似地, 可定义**右R 模**, 即有映射 $(x,a)\to xa(a\in R,x\in M)$, 对 $\forall a,b\in R,x,y\in M$ 满足

(1) $(x+y)a=xa+ya$;

(2) $x(a+b)=xa+xb$;

(3) $x(ab)=(xa)b$;

(4) $x\cdot 1=x$.

若 M 既是左 R 模, 又是右 R 模且满足

$$(ax)b=a(xb),\quad \forall a,b\in R,\ x\in M,$$

则称 M 是 **R 双模**, 或称 **R 模**.

♣

注 假设 R 交换环且 M 是左或右 R 模, 又对 $a\in R,x\in M$, 令 $xa=ax$, 则易证 M 是一个 R 模, 今后对于交换环 R 上的模都指这种意义下的模.

例题 0.1 数域 P 上的线性空间 V 就是一个 $\boldsymbol{P}$ **模**. 一般地, 域 F 上的模都称为 F 上的**线性空间**.

证明

□

例题 0.2 设 R 是幺环, R 对加法是 Abel 群, 记为 R_+. 考虑 $R\times R_+$ 到 R_+ 的映射

$$(r,x)\to rx,\quad r\in R,x\in R_+$$

及 $R_+\times R$ 到 R_+ 的映射

$$(x,s)\to xs,\quad x\in R_+,s\in R,$$

使 R_+ 变成一个 R 模, 因而 R 可看成它自身上的模.

证明

□

例题 0.3 设 V 是数域 P 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换, 令 $R=P[\lambda]$ 为 P 上的一元多项式环, 则 $R\times V$ 到 V 的映射 $(f(\lambda),x)\to f(\mathcal{A})x, f(\lambda)\in R(x\in V)$, 使 V 成为一个左 R 模.

证明

□

例题 0.4 设 M 是一个 Abel 群, 运算为加法, 则 $\mathrm{End}M$ 为 M 的自同态环, 并且 $\mathrm{End}M\times M$ 到 M 的映射 $(\eta,x)\to\eta(x)(\eta\in\mathrm{End}M,x\in M)$, 使 M 成为一个左 $\mathrm{End}M$ 模.

证明

□

定理 0.1

设 M 是一个 R 模, 则

(1) $\forall a, a_i \in R, x, x_i \in M, 1 \leqslant i \leqslant n$,

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a x_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} a_i x.$$

(2) $\forall a \in R, x \in M$,

$$a0 = 0a = 0, \quad a(-x) = (-a)x = -ax.$$

证明

(1)

(2)

□

定义 0.2

设 M 是一个 R 模, M 的子集 N 若满足

(1) N 是 M 的子群;

(2) $\forall a \in R, x \in N$ 有 $ax \in N$,

则称 N 为 M 的一个**子模**. 显然, $\{0\}$ 与 M 都是 M 的子模, 称为**平凡子模**.

例题 0.5 设 V 是数域 P 上的线性空间, V 的子模即 V 的线性子空间. 一般域 F 上的线性空间的子模, 也称为 V 的线性子空间或子空间.

证明

□

例题 0.6 设 M 是一个 Abel 群, 其运算为加法. 映射

$$(m, x) \to mx, \quad m \in \mathbf{Z}, x \in M,$$

使 M 变成一个 $\mathbf{Z}$ **模**. 并且 M 的子集 N 为子模当且仅当 N 为 M 的子群.

证明

□

命题 0.1

设 R 是一个幺环, R 可看成左 R 模、右 R 模或 R 模. 又设 N 是 R 的子集, 则 N 是左 R 模 (或右 R 模、R 模) R 的子模当且仅当 N 是 R 的左理想 (或右理想、理想).

证明

□

例题 0.7 设 V 是数域 P 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 在定理 0.3中, 从 $\mathcal{A}$ 出发定义了 $P[\lambda]$ 模 V、V 的子集 V_1 是 $P[\lambda]$ 子模当且仅当 V_1 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

证明

□

定理 0.2

设 M 是一个 R 模, 则

(1) M 中任意多个子模之交仍为子模.

(2) M 中有限多个子模 $N_1, N_2, \cdots, N_r$ 之和

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_r = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_r | x_i \in N_i\}$$

仍为 M 的子模.

(3) 设 S 为 M 的子集, 则 M 中包含 S 的最小子模是所有包含 S 的子模之交, 称为**由 S 生成的子模**. 若

$S=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$ 为有限集, 则 S 生成的子模为

$$Ry_1+Ry_2+\cdots+Ry_k=\left\{\sum_{i=1}^{k}a_iy_i\middle|a_i\in R\right\}.$$

特别地, 由一个元素 x 生成的子模 Rx 称为**循环子模**. 若 M 是由一个元素 x 生成, 即 $M=Rx$, 则称 M 为**循环模**.

注 循环群就是循环 $\mathbf{Z}$ 模. 幺环 R 就是循环 R 模.

证明

(1)

(2)

(3)

□

定理 0.3

设 N 为 R 模 M 的子模.$\overline{M}=M/N$ 为 M 对 N 的商群, 定义 $R\times\overline{M}$ 到 $\overline{M}$ 的映射

$$(a,x+N)\to ax+N,\quad \forall x\in M,a\in R,$$

则 $\overline{M}$ 为 R 模, 称为 M 对 N 的**商模**.

证明 因为 N 为 M 的子模, 所以 N 为 Abel 群 M 的子群, 从而 $N\lhd M$. 因此商群 $\overline{M}$ 是良定义的.

先上述映射是单值的, 即 R 中元素 $\overline{M}$ 中元素所作乘法运算的合理性.

设 $x_1,x_2\in M$ 且 $x_1+N=x_2+N$, 于是 $x_1-x_2\in N$, 因而, 由 N 为子模有 $a(x_1-x_2)=ax_1-ax_2\in N$, 故 $ax_1+N=ax_2+N$, 即上面映射是单值的, 即是良定义的映射.

以下只要验证 R 模的 4 个定义条件. 这些验证不难.

□

定义 0.3

设 M,M' 为两个 R 模. 如果 M 到 M' 的映射 η 满足 $\forall a\in R,x,y\in M$ 有

(1) $\eta(x+y)=\eta(x)+\eta(y)$, 即 η 是群同态;

(2) $\eta(ax)=a\eta(x)$,

则称 η 为 M 到 M' 的一个**模同态**或 ***R* 同态**.

若 η 还是满映射, 则称 η 为**满同态**, 此时称 M 与 M' 同态.

η 若还是一一对应, 则称 η 为**模同构**或 ***R* 同构**, 此时称 M 与 M' 同构, 记为 $M\cong M'$.

注 模同态的定义知**模同态必为群同态.**

命题 0.2

设 M,M' 是两个 Abel 群, η 是 M 到 M' 的群同态, 则 η 也是 $\mathbf{Z}$ 模 M 到 $\mathbf{Z}$ 模 M' 的模同态;

若 η 为群同构, 则 η 也是模同构.

证明

□

定理 0.4

设 N 是 R 模 M 的子模, π 是 M 到商模 $\overline{M}=M/N$ 的自然映射, 即 $\pi(x)=x+N(\forall x\in M)$.

若已知 π 是群同态, 又对 $\forall a\in R,x\in M$ 有 $\pi(ax)=ax+N=a(x+N)=a\pi(x)$, 故 π 也是模同态, 称 π 是 M 到 M/N 上的**自然 (模) 同态**.

证明

□

命题 0.3

设 N 是 R 模 M 的子模, 记 M 到商模 M/N 的自然映射为 π, 则

(1) 若 M_1 是模 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$, 则 $\pi(M_1) = M_1/N$.

证明

(1)

□

例题 0.8 假设 V 是域 F 上的线性空间. V 到自身的模同态 $\mathcal{A}$, 称为 V 的线性变换. 显然, 当 F 为数域时, $\mathcal{A}$ 就是线性代数中讲的线性空间的线性变换.

证明

□

定理 0.5

设 M 是一个 R 模,

(1) 设 η 是 M 到 M' 的 R 同态, 则 $\eta(M)$ 是 M' 的子模且 η 是 M 到 $\eta(M)$ 上的同态. 进而若 M_1 是 M 的子模, 则 $\eta(M_1)$ 也是 M' 的子模.

(2) 设 η 是 R 模 M 到 R 模 M' 的同态, η' 是 R 模 M' 到 R 模 M'' 的同态, 则 $\eta'\eta$ 是 M 到 M'' 的模同态 (图 1).

(3) R 模之间的同构关系是等价关系.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'\eta"'] & M' \arrow[dl, "\eta'"] \\
M'' &
\end{tikzcd}
$$

图 1

证明

(1) 后者注意到 $\eta|_{M_1}$ 是 $M_1 \to M'$ 上的模同态, 故由前面的结论知 $\eta(M_1)$ 也是 M' 的子模.

(2)

(3)

□

定义 0.4

一个 R 模 M 到自身的同态称为 M 的 R 自同态, 简称**自同态**. R 模 M 的 R 自同态的集合记为 $\mathrm{End}_R M$. 以 $\mathrm{End} M$ 表示 Abel 群 M 的所有群自同态的集合.

注 由模同态的定义知模同态必为群同态, 故有 $\mathrm{End}_R M \subseteq \mathrm{End} M$. 另一方面, 可以验证在 $\mathrm{End} M$ 中可定义加法与乘法使 $\mathrm{End} M$ 是一个环.

定理 0.6

设 M 是一个 R 模, 则 M 的 R 自同态的集合 $\mathrm{End}_R M$ 是 Abel 群 M 的自同态环 $\mathrm{End} M$ 的子环. $\mathrm{End}_R M$ 称为 R 模 M 的**模自同态环**.

证明 显然, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{End}_R M$, 故 $\mathrm{End}_R M \neq \varnothing$, 又若 $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{End}_R M, x, y \in M, a \in R$, 则有

$$(\eta_1 - \eta_2)(x+y) = \eta_1(x+y) - \eta_2(x+y) = (\eta_1 - \eta_2)(x) + (\eta_1 - \eta_2)(y),$$

可知 $\eta_1 - \eta_2 \in \mathrm{End}_R M$, 故 $\mathrm{End}_R M$ 对加法成群. 又由同态性质知 $\eta_1\eta_2 \in \mathrm{End}_R M$, 由此可知 $\mathrm{End}_R M$ 是 $\mathrm{End} M$ 的子环.

□

例题 0.9 设 M 为 Abel 群, 于是 M 为 $\mathbf{Z}$ 模. 则由命题 0.2知 $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M = \mathrm{End} M$.

证明

□

例题 0.10 设 R 是一个幺环, 则 R 作为左 R 模有 $\mathrm{End}_R R = R_r$.

注 设 M 是一个左 R 模, 一般把 M 的模自同态环记为 ${}_R\mathrm{End} M$. 若 M 是右 R 模, 则将 M 的模自同态环记为 $\mathrm{End}_R M$. 交换幺环上的模, 可自然地看成双模, 故这时没必要区分这两种记号, 统一地以 $\mathrm{End}_R M$ 表示.

证明 $\forall a \in R$, 可定义 a 的右乘变换 a_r 为 $a_r(x) = xa (\forall x \in R)$. 显然, 对 $\forall x, y, a, b \in R$ 有 $a_r(x+y) = a_r(x) + a_r(y)$, $a_r(bx) = bxa = ba_r(x)$, 故 $a_r \in \mathrm{End}_R R$. 令 $R_r = \{a_r | a \in R\}$, 即有 $R_r \subseteq \mathrm{End}_R R$. 现设 $\eta \in \mathrm{End}_R R$, $\eta(1) = a$, 于是 $\eta(x) = \eta(x \cdot 1) = x\eta(1) = xa = a_r(x)$, 即 $\eta = a_r$. 故 $\eta \in R_r$, 这样就证明了幺环 R 作为左 R 模有 $\mathrm{End}_R R = R_r$.

□