0.1 基本的渐进估计与求极限方法

0.1.1 基本极限计算

0.1.1.1 基本想法

裂项、作差、作商的想法是解决极限问题的基本想法.

例题 0.1 对正整数 v, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}$.

笔记 直接裂项即可.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+v-1)}-\frac{1}{(k+1)\,(k+2)\cdots(k+v)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{v!}-\frac{1}{n\,(n+1)\cdots(n+v)}\right]=\frac{1}{v!v}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $p_0=0, 0\le p_j\le 1, j=1,2,\cdots$. 求 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(p_j\prod\limits_{i=0}^{j-1}(1-p_i)\right)+\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$ 的值.

笔记 遇到求和问题, 可以先观察是否存在裂项的结构.

解 记 $q_i=1-p_i$, 则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)+\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-p_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(1-q_j\right)\prod_{i=0}^{j-1}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j-1}q_i-\prod_{i=0}^{j}q_i\right)+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0-\prod_{i=0}^{\infty}q_i+\prod_{i=0}^{\infty}q_i=q_0.$$

□

例题 0.3 设 $|x|<1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

注 如果把幂次 $1,2,2^2,\cdots$ 改成 $1,2,3,\cdots$, 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题.

笔记 平方差公式即可

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

□

例题 0.4 对正整数 n, 方程 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+t}=e$ 的解记为 $t=t(n)$, 证明 $t(n)$ 关于 n 递增并求极限 $(t\to+\infty)$.

解 解方程得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+t}=e\Leftrightarrow(n+t)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n.$$

设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x, x>0$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{x^2+x}-1>0\Leftrightarrow\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x^2+x}\Leftrightarrow\ln\left(1+t\right)<\frac{t}{\sqrt{1+t}},t=\frac{1}{x}\in(0,1).$$

最后的不等式由关于 ln 的常用不等式可知显然成立, 于是 $f(x)$ 单调递增, 故 $t(n)=f(n)$ 也单调递增. 再来求极限

$$\lim_{n\to\infty}t\left(n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

□

命题 0.1

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{n!}{(n+1)^n}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.$$

证明

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+k}{k}\right)^k=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\&=\frac{n!}{(n+1)^n}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{(n+1)^n e^n}=\frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^n}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}.\end{aligned}$$

□

例题 0.5 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}$.

解 因为

$$\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}=\sqrt{n}\frac{e^{n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{(\frac{2}{1})(\frac{3}{2})^2(\frac{4}{3})^3\cdots(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{\sqrt{n}n!e^n}{(n+1)^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\ (n\to+\infty)$ 及

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),\quad n\to+\infty$$

得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n}{(1+1/n)^n e^{\ln n+\gamma}}=\sqrt{2\pi}e^{-(1+\gamma)}$$

□

命题 0.2 (数列常见的转型方式)

数列常见的转型方式:

(1) $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$;

(2) $a_n=a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$;

(3) $a_n=S_n-S_{n-1}$, 其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

从而我们可以得到

1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛.
2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n\neq0)$ 收敛的充要条件是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 收敛.

注 在关于数列的问题中, **将原数列的等式或不等式条件转化为相邻两项的差或商的等式或不等式条件**的想法是非常常用的.

笔记 这个命题给我们证明数列极限的存在性提供了一种想法: 我们可以将数列的收敛性转化为级数的收敛性, 或者将数列的收敛性转化为累乘的收敛性. 而累乘可以通过取对数的方式转化成级数的形式, 这样就可以利用级数的相关理论来证明数列的收敛性.

这种想法的**具体操作方式:**

(i) 先令数列相邻两项作差或作商, 将数列的极限写成其相邻两项的差的级数或其相邻两项的商的累乘形

式.(如果是累乘的形式, 那么可以通过取对数的方式将其转化成级数的形式.)

(ii) 若能直接证明累乘或级数收敛, 就直接证明即可. 若不能, 则再利用级数的相关理论来证明上述构造的级数的收敛性, 从而得到数列的极限的存在性. 此时, 我们一般会考虑这个级数的通项, 然后去找一个通项能够控制住所求级数通项的收敛级数 (几何级数等), 最后利用级数的比较判别法来证明级数收敛

证明

1. 必要性 ($\Rightarrow$) 和充分性 ($\Leftarrow$) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$ 直接得到.
2. 必要性 ($\Rightarrow$) 和充分性 ($\Leftarrow$) 都可由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 直接得到.

□

例题 0.6 设 $a_n = \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\dfrac{1}{2n+1}$, 证明: 数列 a_n 收敛到一个正数.

证明 由条件可得 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+3}}{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}=1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}>1.$$

从而 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$a_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]=e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}. \tag{1}$$

注意到

$$\ln\left[1+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]\sim\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, n\to\infty.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]$ 存在. 于是由 (1)式可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left[1+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]}$$

也存在. □

0.1.1.2 带 ln 的极限计算

通常, 带着一堆 ln 的极限算起来都非常烦人, 并不是简单的一个泰勒就秒杀的, 比如这种题. 这种题不建议用泰勒, 很多时候等价无穷小替换、拆项和加一项减一项会方便不少.

注 另外, 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然.

例题 0.7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)$.

注 做这种题一定要严格处理余项, 不要想当然, 比如下面的做法就是错的（过程和答案都不对）

$$\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\approx(2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\approx(2x+3)\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}-\pi x=\frac{3\pi}{2}.$$

解 根据洛必达法则, 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}=1$, 拆分一下有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x^2+3x+1)\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left((2x+3)\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\ln(1+x)}\arctan x\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\pi x\right)+3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x\\
=&2\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{\ln(1+x)}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}-1\right)\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+x)}\right)+\frac{3}{2}\pi\\
&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi-2.
\end{aligned}
$$

□

0.1.1.3 幂指函数的极限问题

幂指函数的极限问题, 一律写成 $e^{\ln}$ 形式, 并利用等价无穷小替换和加一项减一项去解决, 方便.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看 Taylor 展开的第一项并且是严谨的, 泰勒则需要展开好几项, 计算量爆炸.

例题 0.8 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}$.

注 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$
x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}=1+\sin x\ln x+\frac{1}{2}\sin^2x\ln^2x+\frac{1}{6}\sin^3x\ln^3x+O(x^4\ln^4x)
$$

$$
(\sin x)^x=e^{x\ln\sin x}=1+x\ln\sin x+\frac{1}{2}x^2\ln^2\sin x+\frac{1}{6}x^3\ln^3\sin x+O(x^4\ln^4\sin x)
$$

然后你不仅需要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦.

笔记 先说明写成 $e^{\ln}$ 形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可.

解 注意到

$$
\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,\ \lim_{x\to0^+}x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0.
$$

从而

$$
\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln\sin x}=1.
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin x\ln x-x\ln\sin x}-1}{x^3\ln x}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\ln x-x\ln x+x\ln x-x\ln\sin x}{x^3\ln x}\\
=&\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2\ln x}\left(\frac{\sin x}{x}\sim1-\frac{1}{6}x^2,x\to0^+\right)\\
=&-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})}{x^2\ln x}=-\frac{1}{6}-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3\ln x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=-\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right)$.

解 注意到

$$
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{x\to\infty}ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=e.
$$

从而

$$
\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}=\lim_{x\to0^+}e^{ex\ln(1+\frac{1}{x})}=e^e.
$$

于是我们有

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x-ex\ln(1+\frac{1}{x})}-1\right)$$

$$=e^e\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{(1+\frac{1}{x})^x-ex\ln(1+\frac{1}{x})}-1\right)=e^e\lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=e^e\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-ex\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=e^{e+1}\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\xlongequal{Taylor展开} e^{e+1}\lim_{x\to\infty} x^2\frac{1}{2}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)^2=\frac{e^{e+1}}{2}\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)^2=\frac{e^{e+1}}{8}$$

□

0.1.1.4 拟合法求极限

例题 0.10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=2}^{n-2}\dfrac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}}$.

笔记 核心想法是**拟合法**, 但是最后的极限估计用到了**分段估计**的想法.

证明 注意到 $\dfrac{\ln n}{\ln(2n)}\to 1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\ln(n+k)\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)\sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{2}-2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right]$, 所以只需证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$$

注意对称性, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)=0$ 即可, 待定一个 m 来分段放缩. 首先容易看出数列 $\ln k\ln(n-k)$ 在 $2\le k\le\dfrac{n}{2}$ 时是单调递增的, 这是因为

$$f(x)=\ln x\ln(n-x),f'(x)=\frac{\ln(n-x)}{x}-\frac{\ln x}{n-x}>0$$

$$\Leftrightarrow (n-x)\ln(n-x)>x\ln x,\forall x\in\left(2,\frac{n}{2}\right)$$

显然成立, 所以待定 $m\in[2,\dfrac{n}{2}]$, 于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right)=\frac{m}{n}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2\ln(n-2)}-1\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln k\ln(n-k)}-1\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1\right)\le\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1$$

为了让第一个趋于零，可以取 $m=\dfrac{n}{2\ln^2 n}$，然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln m\ln(n-m)}-1=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln\frac{n}{2\ln^2 n}\ln\left(n-\frac{n}{2\ln^2 n}\right)}-1=0$$

所以结论得证（过程中严格来讲应补上取整符号，这里方便起见省略了）. □

0.1.2 Taylor 公式

定理 0.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设 f 在 $x=a$ 是 n 阶右可微的，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),x\to a^+. \tag{2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+O((x-a)^n),x\to a^+. \tag{3}$$

笔记 用 Taylor 公式计算极限，如果展开 n 项还是不方便计算，那么就多展开一项或几项即可.

证明 (1) 要证明(2)式等价于证明

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=0.$$

对上式左边反复使用 $n-1$ 次 $L'Hospital'rules$，可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!}(x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}\\
&\xlongequal{L'Hospital'rules}\cdots\xlongequal{L'Hospital'rules}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}\\
&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\xlongequal{n\text{阶导数定义}}0
\end{aligned}$$

故(2)式成立.

(2) 要证明(3)式等价于证明：存在 $C>0$ 和 $\delta>0$，使得

$$\left|\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|\leqslant C,\forall x\in[a,a+\delta].$$

□

0.1.2.1 直接利用 Taylor 公式计算极限

例题 0.11 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=1$，计算

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n.$$

笔记 由 $\dfrac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty$，可得 $f(n)=n+o(n),n\to+\infty$. 这个等式的意思是:$f(n)=n+o(n)$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$ 都成立. 并且当 $n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+o(n)}{n}=1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(n)}{n}=1$. 其中 $o(n)$ 表示一个 (类) 数列，只

不过这个 (类) 数列具有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(n)}{n}=0$ 的性质.

解 解法一 (一般解法):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{f(n)}}=e.$$

解法二 (渐进估计):

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}=1$, 可知

$$\frac{f(n)}{n}=1+o(1),n\to+\infty.$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\left[1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+o(1)}\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}(1+o(1))\right]^n=\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]},n\to+\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left[1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{1+o(1)}=e.$$

□

例题 0.12 计算:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

解

1.
2.

□

例题 0.13 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}\ (\alpha>0)$.

笔记 利用 Taylor 公式即可得到结果. 类似 $\ln(xe^{-x}-1)\sim\ln(xe^{-x}+o(xe^{-x}))\sim\ln(xe^{-x})$ 的等价关系可以直接凭直觉写出, 要严谨证明的话, 只需要利用 L'Hospital 法则即可.

解 由

$$(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=e^{\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[n]{n}-1)}{(\ln n)^\alpha}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{xe^{-x}}-1)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(xe^{-x})}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\\&=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\-1, & \alpha=1,\\-\infty, & 0<\alpha<1.\end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}=\begin{cases}1, & \alpha>1,\\e^{-1}, & \alpha=1,\\0, & 0<\alpha<1.\end{cases}$$

□

例题 0.14 计算 $(1+\dfrac{1}{x})^x,x\to+\infty$ 的渐进估计.

解 由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]}=e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+o\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right]$$
$$= e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

故

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), x\to+\infty.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{e}{2}, \lim_{x\to+\infty} x\left[x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)-\frac{e}{2}\right]=-\frac{11e}{24}. \tag{4}$$

□

注 反复利用上述(4)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到 e 的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

例题 0.15 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}.$$

解 记 $I=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}$, 则由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式, 可得

$$\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)=\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right]\cdots\left[1-\frac{(nx)^2}{2}+o(x^2)\right]$$
$$=1-\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2}x^2+o(x^2)=1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot6}x^2+o(x^2), x\to0.$$

故 $I=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. □

例题 0.16 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3}.$$

解 先证明 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}}=x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3), x\to0.$

当 $n=1$ 时, 由 *Taylor* 公式结论显然成立. 假设 $n=k$ 时, 结论成立. 则当 $n=k+1$ 时, 我们有

$$\sin\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)$$
$$=x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3)\right)^3\right)$$
$$=x-\frac{n+1}{6}x^3+o(x^3), x\to0.$$

由数学归纳法得 $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x))\cdots))}_{n\text{次复合}}=x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3), x\to0$. 故 $\lim_{x\to0}\frac{x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{n\text{次复合}}}{x^3}=\frac{n}{6}$. □

例题 0.17 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!).$$

解 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式可知

$$e^x=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^\theta x^{n+2}}{(n+2)!}, \theta\in(0,x).$$

从而

$$e=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

于是

$$2\pi en!=2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!},\theta\in(0,1).$$

而 $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\in\mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned}n\sin(2\pi en!)&=n\sin\left(2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)=n\sin\left(\frac{2\pi n!}{(n+1)!}+\frac{2\pi n!e^{\theta}}{(n+2)!}\right)\\&=n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right)\sim n\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right]\to 2\pi,n\to+\infty.\end{aligned}$$

□

0.1.3 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

例题 0.18 计算

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})].$$

解 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n\in(\sqrt{n+1},\sqrt{n})$, 使得

$$\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n.$$

从而当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\theta_n\to+\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\sqrt{n+1})-\sin(\sqrt{n})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\cos\theta_n]=0.$$

□

例题 0.19 计算

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right).$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $\theta_n\in(\frac{2024}{n},\frac{2024}{n+1})$, 使得

$$\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}=\frac{1}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right).$$

并且 $\lim_{n\to+\infty}\theta_n=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+\theta_n^2}\cdot\left(\frac{2024}{n}-\frac{2024}{n+1}\right)=2024\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=2024.$$

□

例题 0.20

1. 对 $\alpha\neq 0$, 求 $(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha},n\to\infty$ 的等价量;
2. 求 $n\ln n-(n-1)\ln(n-1),n\to\infty$ 的等价量.

笔记 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

注 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

解 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设 $\alpha > 1$, 则有 $\alpha n^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha(n+1)^{\alpha-1}$(若 $\alpha \le 1$, 则有 $\alpha(n+1)^{\alpha-1} \leqslant \alpha\theta_n^{\alpha-1} \leqslant \alpha n^{\alpha-1}$). 故

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\theta_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = \alpha.$$

因此 $(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \to \infty$.

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-(n-1)) \cdot (1+\ln\theta_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又 $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} < \frac{\ln\theta_n}{\ln n} < \frac{\ln n}{\ln n} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是 $n\ln n - (n-1)\ln(n-1) \sim \ln n, n \to +\infty$. □

例题 0.21 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}.$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对 $\forall x \in U(0)$, 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x)\sin\theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\sin\theta}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 \cdot \sin\theta}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{x}.$$

又由 $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$ 可知

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{x} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

故 $\sin\theta \sim \theta \sim x, x \to 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}$. □

0.1.4 L'Hospital'rules

定理 0.2 (上下极限 L'Hospital 法则)

设 f, g 满足洛必达法则的适用条件, 则有

$$\underline{\lim} \frac{f'}{g'} \leqslant \underline{\lim} \frac{f}{g} \leqslant \overline{\lim} \frac{f}{g} \leqslant \overline{\lim} \frac{f'}{g'}. \tag{5}$$

且

$$\underline{\lim} \left|\frac{f'}{g'}\right| \leqslant \underline{\lim} \left|\frac{f}{g}\right| \leqslant \overline{\lim} \left|\frac{f}{g}\right| \leqslant \overline{\lim} \left|\frac{f'}{g'}\right|. \tag{6}$$

笔记 此定理第一部分(5)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况. 但(6)一般是不能直接用的, 需要给证明.

证明 以 $\to +\infty$ 为例, 事实上, 固定 x, 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x < \xi < y.$$

我们断言对 $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 必有

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right| = A. \tag{7}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| = A$. 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|.$$

利用

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| - \left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| \leqslant \left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| \leqslant \left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty} g(y_n)=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| = A.$$

反之设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right| = A$, 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| = A.$$

于是由

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| - \left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| \leqslant \left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| \leqslant \left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|, \lim_{n\to\infty}|g(y_n)|=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right| = A.$$

现在就证明了(7).

于是结合 $x\to+\infty$, 我们容易得到 [7]

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right| &= \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| = \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right| \\ \underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right| &= \underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| = \underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \geqslant \underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例题 0.22 若 $f\in D^1[0,+\infty)$.

(1) 设

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)] = s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = s$.

(2) 设

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right] = s\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{s}{2}$.

笔记 (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:$y'+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}y=0$, 整理可得 $\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, 再对其两边同时积分得到 $\ln y = -\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx + C_0$. 从而 $y = Ce^{-\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$, 于是 $C = ye^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$. 故我们要构造的函数就是 $C(x) = f(x)e^{\int_0^x \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx}$. 并且此时 $C(x)$ 满足 $C'(x) = f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)$.

证明

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f+f'] = s.$

(2) 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt} = +\infty$, 从而由 L′Hospital′rules 可得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\cdot e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}} \xlongequal{\text{L'Hospital'rules}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x}\left[f(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f'(x)\right] = \frac{s}{2}.$$

□

0.1.5 与方程的根有关的渐进估计

0.1.5.1 可以解出 n 的类型

例题 0.23 设 $x^{2n+1}+e^x=0$ 的根记为 x_n, 计算

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} n(1+x_n).$$

解 注意到 $0^{2n+1}+e^0>0, (-1)^{2n+1}+e^{-1}<0$ 且 $x^{2n+1}+e^x$ 严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in(-1,0)$, 使得

$$x_n^{2n+1}+e^{x_n}=0 \Rightarrow \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = 2n+1 \to +\infty, n\to+\infty.$$

任取 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 又 $x_n\in(-1,0)$, 因此可设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[-1,0]$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)} = \frac{c}{\ln(-c)}$. 又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{\ln(-x_n)}=+\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)}=+\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k}}{\ln\left(-x_{n_k}\right)} = \frac{c}{\ln(-c)} = +\infty,$$

故 $c=-1$. 于是由子列极限命题 (a) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} n(1+x_n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2n+1)(1+x_n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to-1^+}\frac{x(1+x)}{\ln(-x)} = \frac{1}{2}.$$

□

例题 0.24 设 $a_n\in(0,1)$ 是 $x^n+x=1$ 的根, 证明

$$a_n = 1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

证明 注意到 $0^n+0-1<0, 1^n+1-1>0$, 且 x^n+x-1 在 $(0,1)$ 上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在唯一的 $a_n\in(0,1)$, 使得

$$a_n^n+a_n=1 \Rightarrow \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = n\to+\infty, n\to+\infty. \tag{8}$$

任取 $\{a_n\}$ 的一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 又 $a_n\in(0,1)$, 因此可设 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}=c\in[0,1]$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c}$. 又由 (1.1) 式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}=+\infty$, 所以由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}}=+\infty$. 从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c} = +\infty.$$

故 $c=1$, 于是由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = 1. \tag{9}$$

而要证 $a_n = 1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n\to+\infty$, 等价于证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-1+\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}=0$. 利用(8)(9)式

可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}\cdot a_n-\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}{\ln\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}}+1\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(a_n-1)\ln(1-a_n)}{\ln a_n\left(\ln\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}\right)}+1\right]$$
$$=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{(x-1)\ln(1-x)}{\ln x\left(\ln\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)}+1\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}+1\right].\tag{10}$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)}{\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}}\xlongequal{\text{L'Hospital's rules}}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\ln(-x)}{\ln^2(1+x)}}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)\cdot\ln(1+x)}{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ln(-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ln(-x)}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)}-\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-\frac{x}{1+x}}=-1.\tag{11}$$

于是结合(10)(11)式可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-n+\ln n}{\ln n}=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{x\ln(-x)}{\ln(1+x)\left(\ln\frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}\right)}+1\right]=-1+1=0.$$

故 $a_n=1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),n\to+\infty.$ □

例题 0.25 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n,n\in\mathbb{N},f_n(x)=1$ 在 $[0,1]$ 的根为 x_n. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 注意到 $f_n(x)-1$ 严格单调递增, 且 $f_n(0)-1=-1<0,f_n(1)-1=n-1>0,\forall n\geqslant2$. 故由零点存在定理可知, 当 $n\geqslant2$ 时, 存在唯一的 $x_n\in(0,1)$, 使得 $f_n(x_n)=1$. 从而

$$f_n(x_n)=\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1\Rightarrow x_n-x_n^{n+1}=1-x_n\Rightarrow x_n^{n+1}=2x_n-1\Rightarrow n+1=\frac{\ln(2x_n-1)}{\ln x_n}.\tag{12}$$

由上式(12)可知 $x_n^{n+1}=2x_n-1$ 且 $x_n\in(0,1)$, 因此

$$0\leqslant x_n^{n+1}=2x_n-1\leqslant1\Rightarrow x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

任取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 则由 (1.1) 式和 Heine 归结原则可知

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(2x_{n_k}-1)}{\ln x_{n_k}}=\frac{\ln(2a-1)}{\ln a}=+\infty.$$

故 $a=\frac{1}{2}$, 再由子列极限命题 (a) 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a=\frac{1}{2}$. □

0.1.5.2 迭代方法

例题 0.26 设 x_n 是 $x=\tan x$ 从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n\to\infty}n(x_n-An-B)=C,$$

求 A,B,C.

笔记 主要想法是结合 $\arctan x$ 的性质:$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},x>0$, 再利用迭代法计算渐近展开.

解 令 $f(x)=\tan x-x,x\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$, 则 $f'(x)=\tan^2x>0,\forall x\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$. 因此 $f(x)$ 在 $(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$ 上严格单调递增, 其中 $n=1,2,\cdots$. 又注意到 $\lim\limits_{x\to(n\pi)^+}(\tan x-x)=-n\pi<0$, $\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^+}(\tan x-x)=+\infty>0$. 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$, 使得

$$\tan x_n=x_n.$$

从而 $x_n - n\pi \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 于是

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - n\pi) \Rightarrow x_n = \arctan x_n + n\pi. \tag{13}$$

又因为 $x_n \in (n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2})$,$n = 1, 2, \cdots$, 所以当 $n \to +\infty$ 时, 有 $x_n \to +\infty$. 再结合(13)式可得

$$x_n = \arctan x_n + n\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1), n \to +\infty. \tag{14}$$

注意到 $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$,$x > 0$, 从而 $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{1}{x}$. 于是利用(14)式可得

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname{arc\,tan} x_n + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi - \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\
&= \frac{\pi}{2} + n\pi - \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \right) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{1}{n\pi} \left(1 + O(\frac{1}{n}) \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} + n\pi - \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{1}{n\pi} + O(\frac{1}{n^2}) \right] = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + O(\frac{1}{n^2}), n \to +\infty.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left(x_n - \dfrac{\pi}{2} - n\pi \right) = -\dfrac{1}{\pi}$. □