## 0.1 群作用

**定义 0.1 (置换群 (对称群))**

令 $S$ 是一个集合，则 $S$ 上的**置换群**（或**对称群**），记作 $(\mathrm{Perm}(S), \circ)$，由所有 $S$ 到自身的双射构成，而这里的运算是映射的复合运算。此即

$$\mathrm{Perm}(S) = \{f : S \to S \text{ 双射}\}.$$

**证明** 首先，映射的复合是满足结合律的。这是根据定义立刻可知的。

单位元是恒等映射，记作 id，对所有 $s \in S$，定义为

$$\mathrm{id}(x) = x.$$

故显然有，对所有 $f \in \mathrm{Perm}(S)$，$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$。

逆元是根据双射可知的。假如 $f$ 是一个从 $S$ 到自身的双射，则存在其逆映射 $f^{-1}$，使得 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$。

综上所述，$(\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是个群，称为 $S$ 上的置换群（或对称群）。 □

**例题 0.1** 设 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$，记 $S_n = \mathrm{Perm}(S) = \{f : S \to S \text{ 双射}\}$。证明：$|S_n| = n!$。

**证明** 设 $f : S \to S$ 是双射，我们逐个定义 $f$ 的像。首先，$f(1)$ 有 $n$ 种不同的取法，取定 $f(1)$ 以后，$f(2)$ 就只有 $n-1$ 种不同的取法，否则 $f(1) = f(2)$ 与双射矛盾。依此类推，可知 $f(i)$ 就只有 $n+1-i$ 种不同的取法，$i = 1, 2, \cdots, n$。故 $f$ 就有 $n!$ 种不同的取法，即 $|S_n| = n!$。 □

**命题 0.1**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，我们定义

$$\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(G), \circ), x \mapsto \phi_x.$$

其中 $\phi_x : G \to G, y \mapsto xy$. 则 $\phi$ 是个群同态。

**证明** 证明是很简单的。令 $x, y \in G$，对于 $z \in G$，我们有

$$(\phi_x \circ \phi_y)(z) = x(yz) = (xy)z = \phi_{xy}(z)$$

由于这对于所有 $z \in G$ 都成立，故

$$\phi_x \circ \phi_y = \phi_{xy}$$

即

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

这就证明了 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$ 是个群同态。 □

**定义 0.2 (群作用)**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，$S$ 是一个非空集合，而 $\phi : G \to \mathrm{Perm}(S)$。若 $\phi$ 是一个群同态，则我们说 $\phi$ 是 $G$ 在（集合）$S$ 上的**群作用**。

**命题 0.2 (群作用的等价条件)**

设 $G$ 是一个群,$S$ 是一个非空集合.

(1) 若 $\phi$ 是 $G$ 在 $S$ 的群作用, 记 $\mathrm{Perm}\,(S) = \{\phi_x : x \in G\}$, 则一定满足

$$\forall s \in S, e \cdot s = s, \text{即} \forall s \in S, \phi_e(s) = s.$$

$$\forall x, y \in G, \forall s \in S, x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s, \text{即} \forall x, y \in G, \forall s \in S, \phi_x\left(\phi_y(s)\right) = (\phi_x \circ \phi_y)(s) = \phi_{xy}(s).$$

(2) 若 $\phi: G\times S\to S$ 是满足

$$\forall s\in S, e\cdot s=s, \text{即}\forall s\in S, \phi(e,s)=s.$$

$$\forall x,y\in G,\forall s\in S, x\cdot(y\cdot s)=(xy)\cdot s, \text{即}\forall x,y\in G,\forall s\in S,\phi(x,\phi(y,s))=\phi(xy,s).$$

的映射, 则一定存在一个 $G$ 在 $S$ 上的群作用 $\widetilde{\phi}$.

注 这里我们用 $x\cdot s$，甚至 $xs$，来代表 $\phi_x(s)$，或 $\phi(x,s)$（其中 $x\in G$，$s\in S$）.

笔记 命题中的第一条性质，是说明 $\phi$ 是良定义的（$\phi_x$ 是双射），而第二条性质是说明 $\phi$ 是同态。二者缺一不可。这两条性质加起来，就是群作用的定义。

证明

(1) 若 $\phi$ 是一个群作用,则显然利用同态的性质我们有第二条。而根据同态把单位元映到单位元,我们有 $\phi_e=\mathrm{id}$，即对所有 $s\in S$，$es=s$。这就证明了 (1)。

(2) 对 $\forall x\in G$，令

$$\phi_x: S\to S, s\mapsto\phi(x,s)=xs,$$

$$\phi_{x^{-1}}: S\to S, s\mapsto\phi(x^{-1},s)=x^{-1}s.$$

从而由假设可知，对 $\forall s\in S$，都有

$$\phi_x\circ\phi_{x^{-1}}(s)=xx^{-1}s=es=s,$$

$$\phi_{x^{-1}}(s)\circ\phi_x=x^{-1}xs=es=s.$$

因此 $\phi_{x^{-1}}$ 是 $\phi_x$ 的逆映射，故对 $\forall x\in G$，$\phi_x$ 都是双射。于是 $\{\phi_x: x\in G\}\subset\mathrm{Perm}(S)$。令

$$\widetilde{\phi}: G\to\mathrm{Perm}(S), x\mapsto\phi_x.$$

由假设可知，对 $\forall x,y\in G$，$\forall s\in S$，都有

$$x\cdot(y\cdot s)=(xy)\cdot s\Leftrightarrow(\phi_x\circ\phi_y)(s)=\phi_{xy}(s).$$

因此 $\phi_{xy}=\phi_x\phi_y$，$\forall x,y\in G$。故 $\widetilde{\phi}(xy)=\widetilde{\phi}(x)\widetilde{\phi}(y)$，$\forall x,y\in G$。即 $\widetilde{\phi}$ 是群同态。进而 $\widetilde{\phi}$ 就是 $G$ 在 $S$ 上的一个群作用。

□

**定义 0.3 (共轭作用)**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，我们对 $x\in G$，定义 $\phi_x\in\mathrm{Perm}(G)$，对 $y\in G$，定义为

$$\phi_x(y)=xyx^{-1}.$$

则 $\phi: G\to\mathrm{Perm}(G)$，对 $x\in G$，定义为 $\phi(x)=\phi_x$，被称为 $G$ 的**共轭作用**。

**命题 0.3**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，则 $G$ 的共轭作用是 $G$ 在自身的一个群作用。

证明 首先，我们要说明 $\phi_x$ 是双射，而这是显然的，因为其逆是 $\phi_{x^{-1}}$。而这是因为，对于 $y\in G$，

$$(\phi_x\circ\phi_{x^{-1}})(y)=\phi_x(x^{-1}yx)=x(x^{-1}yx)x^{-1}=y$$

$$(\phi_{x^{-1}}\circ\phi_x)(y)=\phi_{x^{-1}}(xyx^{-1})=x^{-1}(xyx^{-1})x=y$$

这样，$\phi: G\to\mathrm{Perm}(G)$ 就是良定义的。接下来，我们证明 $\phi$ 是个同态。令 $x,y\in G$，$z\in G$，则

$$(\phi_x\circ\phi_y)(z)=\phi_x(yzy^{-1})=x(yzy^{-1})x^{-1}=(xy)z(xy)^{-1}=\phi_{xy}(z)$$

这对所有 $z\in G$ 都成立，故

$$\phi_{xy}=\phi_x\circ\phi_y$$

即

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

这就证明了共轭作用确实是一个群在自身的群作用。 $\square$

**命题 0.4**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，$x \in G$，则 $\phi_x : G \to G$，对 $y \in G$，定义为

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

是一个群 $G$ 的自同构（即到自身的同构）.

**证明** 由命题 0.3 的证明可知 $\phi_x$ 一定是双射，因为它的逆是 $\phi_{x^{-1}}$。因此我们只须证明 $\phi_x$ 本身还是个同态（不是说 $\phi$ 是同态，而是说每个 $\phi_x$ 是同态）。因此我们令 $y, z \in G$，只须证明 $\phi_x(yz) = \phi_x(y)\phi_x(z)$。而这是因为

$$\phi_x(y)\phi_x(z) = (xyx^{-1})(xzx^{-1}) = x(yz)x^{-1} = \phi_x(yz).$$

恰好约掉。这就证明了共轭作用下的每一个 $\phi_x$ 都是群 $G$ 的自同构。 $\square$

**定义 0.4 (内自同构与外自同构)**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，则一个 $G$ 的（由 $x \in G$ 引出的）**内自同构**，指的是 $\phi_x : G \to G$，对 $y \in G$，定义为

$$\phi_x(y) = xyx^{-1}.$$

而其他所有 $G$ 上的自同构，则称为 $G$ 上的**外自同构**。

**定义 0.5 (轨道与稳定化子)**

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 $G$ 在 $S$ 的群作用。若 $s \in S$。则我们定义 $s$ 的**轨道**，记作 $\mathrm{Orb}(s)$，定义为

$$\mathrm{Orb}(s) = \{s' \in S : \exists x \in G, s' = xs\} = \{xs : x \in G\}.$$

我们定义 $s$ 的**稳定化子**，记作 $\mathrm{Stab}(s)$，定义为

$$\mathrm{Stab}(s) = \{x \in G : xs = s\}.$$

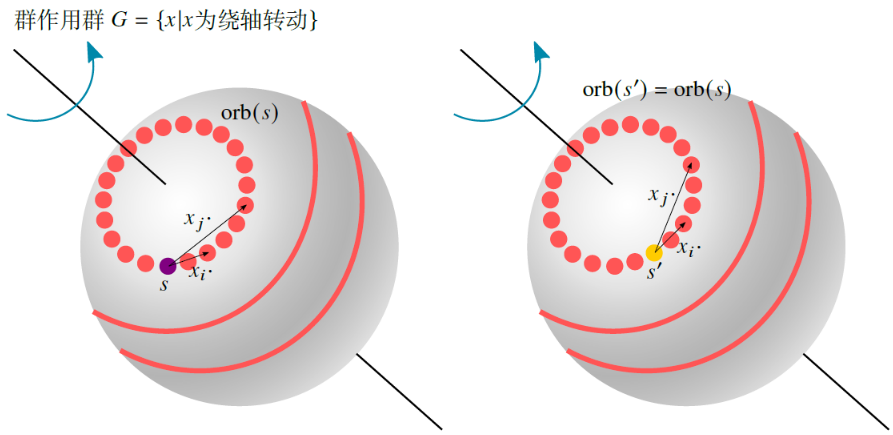


图 1: 群作用与轨道

**命题 0.5**

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 $G$ 在 $S$ 的群作用，而 $s, s' \in S$，则 $\mathrm{Orb}(s)$ 与 $\mathrm{Orb}(s')$ 要么相等，要么无交。因此，$S$ 可以写成轨道的无交并。

**证明** 假设它们有交集，即假设 $s'' \in \mathrm{Orb}(s) \cap \mathrm{Orb}(s')$。进一步，我们找到 $x, x' \in G$，使得 $s'' = xs = x's'$。根据对

称性，我们只须证明 $\mathrm{Orb}(s) \subset \mathrm{Orb}(s')$。

任取 $ys \in \mathrm{Orb}(s)(y \in G)$，则

$$ys = (yx^{-1})xs = (yx^{-1})x's' = (yx^{-1}x')s' \in \mathrm{Orb}(s')$$

根据对称性，我们就知道 $\mathrm{Orb}(s) = \mathrm{Orb}(s')$。 □

**引理 0.1**

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 $G$ 在 $S$ 的群作用，$s \in S$，$x, y \in G$，则 $xs = ys$ 当且仅当 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$。♡

**证明** 对 $xs = ys$ 两边同时左乘 $x^{-1}$，就显然了。 □

**定理 0.1 (轨道 - 稳定化子定理)**

令 $\phi : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(S), \circ)$ 是一个 $G$ 在 $S$ 的群作用，$s \in S$，则存在 $G/\mathrm{Stab}(s)$ 到 $\mathrm{Orb}(s)$ 的双射。特别地，若 $G$ 是有限群，则

$$|G| = |\mathrm{Stab}(s)| \cdot |\mathrm{Orb}(s)|.$$

♡

**证明** 令 $f : G/\mathrm{Stab}(s) \to \mathrm{Orb}(s)$，定义为 $f(x\,\mathrm{Stab}(s)) = xs$。

首先证明 $f$ 是良定义的。根据上面的引理，若 $x\,\mathrm{Stab}(s) = y\,\mathrm{Stab}(s)$，则 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$，故 $xs = ys$。

根据 $\mathrm{Orb}(s)$ 的定义，$f$ 显然是一个满射。

单射则是再次利用上面的引理。若 $xs = ys$，则 $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}(s)$，故 $x\,\mathrm{Stab}(s) = y\,\mathrm{Stab}(s)$。

假如 $G$ 是有限群，则同时取集合大小，就得到了

$$|G| = |\mathrm{Stab}(s)| \cdot |\mathrm{Orb}(s)|$$

综上，我们就证明了轨道 - 稳定化子定理。 □

**定义 0.6**

二面体群 $D_{2n}$，它是由所有正 $n$ 边形到自身的对称变换所构成的。

对称变换就是把自身映到自身，而且是保距的。

保距指的是，原先距离相同的点，变换后距离仍然相同。♣

**笔记** 如图 2中的例子.

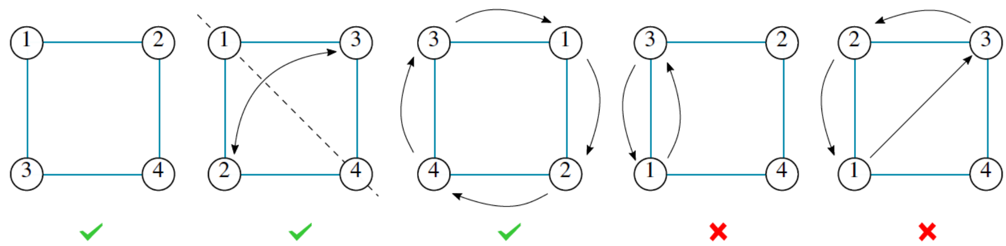


图 2: 置换群中的对称变换

**例题 0.2** $|D_{2n}| = 2n$.

**笔记** 事实上，每一个对称变换由其 $n$ 个顶点的像唯一确定，因为其余的点都可以通过顶点来找到位置。很明显,$D_{2n}$ 中的元素都是个轴对称图形，有 $n$ 个翻折变换；这还是个中心对称图形，有 $n$ 个旋转变换. 由此可知, 二面体群 $D_{2n}$ 就是恰好由 $n$ 个翻折变换和 $n$ 个旋转变换所组成的群.

**证明** 任取正多边形的一个顶点 $s$，考虑其轨道 $\mathrm{Orb}(s)$。最多只有 $n$ 个顶点可以去，而 $n$ 个旋转变换恰好带 $s$ 去了这些顶点，因此 $|\mathrm{Orb}(s)| = n$。

接下来，考虑其稳定化子 $\mathrm{Stab}(s)$。如果 $x \in D_{2n}$ 把 $s$ 映射到 $s$，但又有保证是一个等距变换，则 $s$ 相邻的两

个顶点一定要被映射到这两个顶点。其中一个是恒等变换，而另一个是沿 $s$ 所在的对称轴的翻折变换。不难看出，这两个是唯二的 $s$ 的稳定化子。因此 $|\mathrm{Stab}(s)| = 2$。

根据定理 0.1,$|D_{2n}| = |\mathrm{Orb}(s)| \cdot |\mathrm{Stab}(s)| = 2n$。这就证明了这个命题。 □