0.1 群集合上的作用

定义 0.1 (群作用)

设 G 是一个群,X 是一个非空集合. 若 $G\times X$ 到 X 的映射 f 满足

(1) $f(e,x)=x, \forall x\in X$, e 为 G 的幺元;

(2) $f(g_1g_2,x)=f(g_1,f(g_2,x)), \forall g_1,g_2\in G, x\in X$,

则称 f 决定了**群 G 在 X 上的一个作用**.

群 G 可以多种方式作用在一个集合 X 上. 在不需要特别指出映射 f(即固定好一种作用方式) 时, 常记

$$f(g,x)=g(x), \quad \forall g\in G, x\in X.$$

此时 f 满足的条件 (1), (2) 相应地变为

(1) $e(x)=x, \forall x\in X$,e 为 G 的幺元;

(2) $g_1g_2(x)=g_1(g_2(x)), \forall x\in X, g_1,g_2\in G$.

定义 0.2

1. 设 G 是一个群, 取 $X=G$,
   (a). 若定义 f 为
   $$f(g,x)=L_g(x)=gx, \quad \forall g,x\in G.$$
   则 f 定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为**左平移作用**.
   (b). 若定义 f_1 为
   $$f_1(g,x)=R_{g^{-1}}(x)=xg^{-1}, \quad \forall g,x\in G,$$
   则 f_1 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 这种作用称为**右平移作用**.
   (c). 若定义 f_2 为
   $$f_2(g,x)=\mathrm{ad}g(x)=gxg^{-1}, \quad \forall g,x\in G,$$
   则 f_2 也定义了 G 在 G 上的一个作用, 称为**伴随作用**.
2. 设 H 为群 G 的子群, 取 $X=G/H$(H 在 G 中全体左陪集的集合). 定义 f 为
   $$f(g,xH)=gxH, \quad \forall g\in G, xH\in G/H,$$
   则 f 定义了 G 在 G/H 上的作用 (**左平移作用**). 特别地, 当 $H=\{e\}$ 时,f 恰是 G 在 G 上的左平移作用.

证明

□

定义 0.3

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $\forall x,y\in X, \exists g\in G$, 使 $y=g(x)$, 则称 G 在 X 上的作用是**可递的**,X 称为 (对于 G 的) **齐性空间**.

定义 0.4

设群 G 作用在集合 X 上. 若 $g(x)=x(\forall g\in G, \forall x\in X)$, 则称 G 在 X 上的作用是**平凡的**.

注 显然, 对任意群 G, 任意非空集合 X, 总可定义 G 在 X 上的平凡作用. 由上述定义知 G 在 G 上的伴随作用为平凡作用当且仅当 G 为 Abel 群.

定义 0.5

设群 G 作用在集合 X 上,e 为 G 的幺元, 若当且仅当 $g=e$ 时,$g(x)=x(\forall x\in X)$ 成立, 则称 G 在 X 上的作用是**有效的**.

命题 0.1

群 G 在 G 上的左平移作用与右平移作用既是可递的又是有效的, 而 G 在 G/H 上的左平移作用是可递的.

注 G 在 G 上的伴随作用的可递性与有效性都不能肯定.

G 在 G/H 上的左平移作用不一定是有效的.

证明

□

定理 0.1

设群 G 作用在集合 X 上.$\forall g\in G$, 定义 X 到 X 的映射 σ 满足

$$\sigma_g(x)=g(x),\quad \forall x\in X \tag{1}$$

定义的 σ_g 是 X 的可逆变换, 即 $\sigma_g\in S_X$.

定义的 G 到 S_X 的映射 σ 满足

$$\sigma(g)=\sigma_g,\forall g\in G.$$

则 σ 是一个同态映射, 并且 G 在 X 上的作用有效当且仅当 σ 是单同态.

反之, 若 σ 是群 G 到集合 X 的置换群 S_X 的同态, 则由

$$g(x)=\sigma(g)(x),\quad \forall g\in G,x\in X \tag{2}$$

定义了 G 在 X 的作用, 此时 $\sigma_g=\sigma(g)$.

证明 任取 $g\in G$, 由式(1)有

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g(x)=g^{-1}(g(x))=g^{-1}g(x)=e(x)=x,\quad \forall x\in X.$$

同样有

$$\sigma_g\sigma_{g^{-1}}(x)=x,\quad \forall x\in X.$$

故

$$\sigma_{g^{-1}}\sigma_g=\sigma_g\sigma_{g^{-1}}=\mathrm{id}_X,$$

因而 $\sigma_g\in S_X$ 且 $\sigma_{g^{-1}}=\sigma_g^{-1}$.

又取 $g_1,g_2\in G$, 对 $\forall x\in X$ 有

$$\sigma(g_1g_2)(x)=\sigma_{g_1g_2}(x)=g_1g_2(x)=g_1(g_2(x))=\sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x))=\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x)=\sigma(g_1)\sigma(g_2)(x),$$

即

$$\sigma(g_1g_2)=\sigma(g_1)\sigma(g_2),\quad \forall g_1,g_2\in G,$$

因而 σ 是 G 到 S_X 的同态. 注意到

$$g\in\ker\sigma\iff\sigma(g)=\sigma_g=\mathrm{id}_X,$$

即

$$g(x)=x,\quad \forall x\in X,$$

故 G 在 X 上作用有效当且仅当 $\ker\sigma=\{e\}$, 即 σ 是单射.

反之, 因 σ 是 G 到 S_X 的同态, 由式(2)有

$$e(x)=\sigma(e)(x)=\mathrm{id}_X(x)=x,\quad \forall x\in X,$$

$$g_1(g_2(x))=\sigma(g_1)(\sigma(g_2)(x))=\sigma(g_1)\sigma(g_2)(x)=\sigma(g_1g_2)(x)=g_1g_2(x),\quad \forall x\in X, g_1,g_2\in G,$$

即 σ 定义了 G 在 X 上的作用. 显然 $\sigma(g)=\sigma_g$.

□

定义 0.6

设群 G 作用在集合 X 上,$x\in X$. 称 X 中的子集

$$O_x=\{g(x)\in X\mid g\in G\}$$

为 x 的**轨道**.

G 中子集

$$F_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$$

称为 x 的**迷向子群**.

♣

证明

□

例题 0.1 设 $X=\mathbf{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间,$G=SO(n)$ 为 X 的特殊正交群,G 以通常方式作用在 X 上. 又设 $X=(1,0,\cdots,0)'$, 则易得

$$O_x=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}\in X, |\boldsymbol{y}|=1\}=S^{n-1}$$

是 X 中 $n-1$ 维单位球面, 其中,$|\boldsymbol{y}|$ 为向量 $\boldsymbol{y}$ 的长度,

$$F_x=\{\mathrm{diag}(1,A)\mid A\in SO(n-1)\},$$

故 F_x 与 $n-1$ 维特殊正交群 $SO(n-1)$ 同构.

证明

□

命题 0.2

设群 G 在 X 上的作用可递,$x\in X$, 则 $X=O_x$.

♠

证明 由 G 在 X 上的作用可递知, 对 $\forall y\in X$, 存在 $g\in G$, 使 $y=g(x)\in O_x$. 又 $O_x\subseteq X$, 故 $X=O_x$.

□

定理 0.2

设群 G 作用在集合 X 上. 定义 X 上的可逆变换σ 满足

$$\sigma_g(x)=g(x),\quad \forall x\in X.$$

定义的 G 到 S_X 的同态σ 满足

$$\sigma(g)=\sigma_g,\forall g\in G.$$

则有

(1) 在 X 中定义关系 R: xRy 当且仅当 $\exists g\in G$, 使 $y=g(x)$, 则 R 为等价关系且 x 所在的等价类为 x 的轨道 O_x, 进而 X 等价类 (所有轨道) 集合是 X 的一个分划, 即可将 X 分解为所有不同的轨道之并, 且不同的轨道必互不相交;

(2) G 在 O_x 上的作用是可递的, $\ker\sigma\lhd G$, G 在 O_x 上作用有效当且仅当 F_x 中所包含的 G 的正规子群仅为 $\{e\}$;

(3) 若 $y = g(x)(x, y \in X, g \in G)$, 则

$$F_{g(x)} = F_y = gF_xg^{-1} = \mathrm{ad}g(F_x).$$

注 这个定理说明, 若群 G 作用在集合 X 上, 则可将 X 分解为轨道之并. 不同的轨道互不相交.G 在每个轨道上的作用是可递的, 是否有效则由迷向子群所含 G 的正规子群来决定.

证明

(1) 对 $\forall x, y, z \in X$, 由 $e(x) = x$ 知 xRx $(\forall x \in X)$, 由 $g(x) = y$ 得 $g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$, 即 $xRy \Rightarrow yRx$, 再由 xRy, yRz 知 $\exists g_1, g_2 \in G$, 使得 $y = g_1(x), z = g_2(y)$, 故 $z = g_2g_1(x)$, 即 xRz. 这就说明 R 是等价关系, 由 R 的定义知 x 的等价类为 O_x.

(2) 由结论 (1) 知 $\forall z, y \in O_x$, 即 xRy, xRz, 从而 zRy. 因而 $\exists g \in G$, 使 $g(y) = z$. 故 G 在 O_x 上的作用可递得证.

设 σ 为 G 到 S_{O_x} 的映射, 满足 $\sigma(g)y = g(y)(\forall y \in O_x)$. 于是由定理 0.1知 σ 是同态且 G 在 O_x 上作用有效当且仅当 $\ker\sigma = \{e\}$. 由群的同态基本定理**??**知道 $\ker\sigma \lhd G$. 注意到

$$g \in \ker\sigma \iff \sigma(g) = \mathrm{id}_X \iff g(x) = x(\forall x \in X) \iff g \in F_x. \tag{3}$$

故 $\ker\sigma \subseteq F_x$, 因而若 F_x 中所含 G 的正规子群仅为 $\{e\}$, 则必有 $\ker\sigma = \{e\}$. 从而 G 在 O_x 上作用有效.

设 $N \lhd G, N \subseteq F_x$. 任取 $h \in N$, 对 $\forall y \in O_x$, 都存在 $g \in G$, 使得 $y = g(x)$. 由 $N \lhd G$ 知 $g^{-1}hg \in N \subseteq F_x$, 因而

$$h(y) = h(g(x)) = gg^{-1}hg\,(x) = g(g^{-1}hg(x)) = g(x) = y, \quad \forall y \in O_x.$$

由(3)式知 $h \in \ker\sigma$, 即 $N \subseteq \ker\sigma$. 所以若 G 在 O_x 上作用有效, 则 $\ker\sigma = \{e\}$, 由此知 $N = \{e\}$, 即 $\{e\}$ 为 F_x 所包含的唯一的 G 的正规子群.

(3) 设 $g(x) = y$ 且 $g_1 \in F_y$, 即有 $y = g_1(y)$, 则 $g_1g(x) = g(x)$, 因而 $g_2 = g^{-1}g_1g \in F_x$, 故 $g_1 = gg_2g^{-1} \in \mathrm{ad}g(F_x)$. 反之, 若 $g_2 \in F_x$, 则有

$$gg_2g^{-1}(y) = gg_2g^{-1}(g(x)) = g(x) = y,$$

故 $gg_2g^{-1} \in F_y$. 这样就证明了 $F_y = \mathrm{ad}g(F_x)$.

□

定义 0.7

设群 G 作用在集合 X 与 X' 上, 若有 X 到 X' 上的一一对应 ϕ, 使

$$g(\phi(x)) = \phi(g(x)), \quad \forall g \in G, x \in X,$$

则称 G 在 X, X' 上的**作用等价**.

注 如果将 g 引起的 X, X' 上的置换仍以 g 来表示, 那么 G 在 X, X' 上的作用等价也就是对任何 $g \in G$,图 1是交换图.

如果在 G 作用的集合之间规定关系 $R : XRX'$, 若 G 在 X, X' 上作用等价. 这显然是一个等价关系, 因而从抽象的观点来看, 等价作用可以看成是一样的.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & X' \end{tikzcd}$$

图 1

定理 0.3

设群 G 在 X 上的作用可递,$x \in X$, 则 G 在 X 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用 (左平移作用) 等价.

注 这个定理表明 G 在每个轨道上的作用相当于 G 在某个左陪集空间上的作用.

证明 因 G 在 X 上的作用可递, 于是由命题 0.2有

$$X = O_x = \{g(x) \in X \mid g \in G\}.$$

作 G/F_x 到 X 的映射 ϕ 如下:

$$\phi(gF_x) = g(x), \quad \forall g \in G.$$

显然 ϕ 是满射. 由于 $g_1F_x = g_2F_x$ 当且仅当 $g_1^{-1}g_2 \in F_x$, 当且仅当 $g_1^{-1}g_2(x) = x$, 当且仅当 $g_1(x) = g_2(x)$, 因而 ϕ 是单射. 故 ϕ 是 G/F_x 到 X 上的一一对应. 又对 $\forall h \in G$ 有

$$\phi(h(gF_x)) = \phi(hgF_x) = hg(x) = h(\phi(gF_x)),$$

故 G 在 G/F_x 与 X 上的作用等价.

□

推论 0.1

设有限群 G 作用在集合 X 上,O_x 为 $x \in X$ 的轨道, 则 O_x 中元素个数 $|O_x| = [G : F_x]$, 因而 $|O_x| \mid |G|$.

♡

证明 由定理 0.2(1)知 G 在 O_x 上作用可递, 故由定理 0.3知,G 在 X 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用等价, 即存在 X 到 G/F_x 的双射. 因此 $|O_x| = [G : F_x]$. 再由 Lagrange 定理知

$$|G| = [G : F_x]\,|F_x| = |O_x|\,|F_x|,$$

故 $|O_x| \mid |G|$.

□

命题 0.3

设 G 是一个群, 在伴随作用下, 对 $\forall g \in G$, 定义 G 上的变换 $\mathrm{ad}g$ 满足

$$\mathrm{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义 G 到 S_G 的映射 ad 满足

$$\mathrm{ad} : g \longrightarrow \mathrm{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

则 ad 是 G 到 S_G 的同态.

♠

证明 由定义 0.2与定理 0.1知映射 $\mathrm{ad}g$ 是 G 的可逆变换, 即 $\mathrm{ad} \in S_G$, 并且映射 ad 是 G 到 S_G 的同态.

□

定义 0.8

设 G 是一个群,$g \in G$, g 在伴随作用下的轨道称为以 g 为代表的**共轭类**, 记为 C_g. 若 $h \in C_g$, 则称 h 与 g **共轭**.

g 在伴随作用下的迷向子群, 称为 g 在 G 中的**中心化子**, 记作 $C_G(g)$. 在不混淆时, 简称为 g 的**中心化子**, 记作 $C(g)$.

在伴随作用下, 对 $\forall g \in G$, 定义 G 上的可逆变换$\mathrm{ad}g$ 满足

$$\mathrm{ad}g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

定义 G 到 S_G 的同态ad 满足

$$\mathrm{ad} : g \longrightarrow \mathrm{ad}g, \quad \forall g \in G.$$

称 $\ker \mathrm{ad}$ 为 G 的**中心**, 记作 $C(G)$.

♣

定理 0.4

设 G 是一个群, 在伴随作用下,$g \in G$, 则有

(1) $C_g = \{kgk^{-1} \mid k \in G\}$;

(2) $g, h \in G$共轭 $\Longleftrightarrow \exists k \in G$, 使$h = kgk^{-1}$;

(3) $C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid kg = gk\}$;

(4) $C(G) = \ker \mathrm{ad} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}$.

证明

(1) 由定义知

$$C_g = \{\mathrm{ad}k\,(g) \in G \mid k \in G\} = \left\{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\right\}.$$

(2) 由结论 (1) 知

$$C_g = \left\{kgk^{-1} \in G \mid k \in G\right\},$$

则

$$g, h \in G\text{共轭} \Longleftrightarrow h \in C_g \Longleftrightarrow \exists k \in G, \text{使} h = kgk^{-1}.$$

(3) 由定义知

$$C_G(g) = C(g) = \{k \in G \mid \mathrm{ad}k\,(g) = g\} = \left\{k \in G \mid kgk^{-1} = g\right\} = \{k \in G \mid kg = gk\}.$$

(4) 由定义知

$$\begin{aligned} C(G) = \ker \mathrm{ad} &= \{k \in G \mid \mathrm{ad}\,(k) = \mathrm{id}_G\} = \{k \in G \mid \mathrm{ad}k = \mathrm{id}_G\} \\ &= \left\{k \in G \mid kgk^{-1} = g, \forall g \in G\right\} = \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\}. \end{aligned}$$

□

定理 0.5

设 G 是一个群, 则有

(1) $C(G)$ 是 G 的正规子群且 $\mathrm{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构;

(2) G 中共轭关系为等价关系, 因而 G 的共轭类的集合是 G 的一个分划;

(3) 若 G 是有限群,$g \in G$, 则 g 的共轭类 C_g 中所含元素个数 $|C_g| = [G : C(g)]$, 故是 $|G|$ 的因数;

(4) $h \in C(G) \Longleftrightarrow |C_h| = 1 \Longleftrightarrow h \in \bigcap\limits_{g \in G} C(g)$.

证明

(1) 由定理 0.2(2)知 $C(G) \lhd G$. 再由群的同态基本定理**??**知 $\mathrm{ad}G$ 与 $G/C(G)$ 同构.

(2) 由定理 0.2(1)即得.

(3) 由推论 0.1即得.

(4) 由定理 0.4可得

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\Longleftrightarrow h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \Longleftrightarrow hg = gh, \forall g \in G \\ &\Longleftrightarrow ghg^{-1} = h, \forall g \in G \Longleftrightarrow C_h = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\} = \{h\} \Longleftrightarrow |C_h| = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \in C(G) &\Longleftrightarrow h \in \{k \in G \mid kg = gk, \forall g \in G\} \Longleftrightarrow hg = gh, \forall g \in G \\ &\Longleftrightarrow h \in \{k \in G \mid kg = gk\}, \forall g \in G \Longleftrightarrow h \in C(g), \forall g \in G \Longleftrightarrow h \in \bigcap_{g \in G} C(g). \end{aligned}$$

□

定理 0.6

设 H 是群 G 的子群, 则

(1) $\forall g \in G, H_1 = gHg^{-1}$ 也是 G 的子群, 称为 H 的**共轭子群**;

(2) 群 G 的子集 $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ 也是 G 的子群, 而且 $H \lhd N_G(H)$,$N_G(H)$ 称为 H 在 G 中的**正规化子**, 也简称为 H 的**正规化子**.

证明

(1) 以 e 表示 G 的幺元. 因为 $e = geg^{-1} \in H_1$, 故 $H_1 \neq \varnothing$. 设 $h_1, h_2 \in H$, 于是

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1},\ (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in H_1.$$

由此知 H_1 是 G 的子群.

(2) G 在 G 的伴随作用下,H 的迷向子群恰为 $N_G(H)$, 故 $N_G(H)$ 是 G 的子群. 因 H 是 G 的子群且 $H \subseteq N_G(H)$, 故 H 是 $N_G(H)$ 的子群. 又 $\forall g \in N_G(H), gHg^{-1} = H$, 因此 $H \lhd N_G(H)$.

□

定理 0.7

设 H 是群 G 的子群, 则

(1) G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$;

(2) $H \lhd G \iff N_G(H) = G$.

证明

(1) 设 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的映射 f, 满足

$$f(gHg^{-1}) = gN_G(H), \quad \forall g \in G.$$

显然 f 是满射. 因为 $gHg^{-1} = g_1Hg_1^{-1}$ 当且仅当 $H = g^{-1}g_1H(g^{-1}g_1)^{-1}$ 当且仅当 $g^{-1}g_1 \in N_G(H)$ 当且仅当 $gN_G(H) = g_1N_G(H)$, 所以 f 是单射. 因此 f 是 H 的共轭子群到 $G/N_G(H)$ 的双射. 从而 G 中与 H 共轭的子群的个数与 $|G/N|$ 相等, 即 G 中与 H 共轭的子群的个数为 $[G : N_G(H)]$.

(2) 因为 $H \lhd G$ 当且仅当 $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$, 所以由 $N_G(H)$ 的定义知 $N_G(H) = G$.

□