

## 0.1 逼近方法

### 0.1.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在  $[a, b]$  上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设  $[a, b] = [0, 1]$ .

#### 定义 0.1 (一维 Bernstein 多项式)

设  $f \in C[0, 1], n \in \mathbb{N}_0$ , 定义  $f$  的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

设  $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$ , 定义  $f$  的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$



**注**  $[a, b]$  区间上的 Bernstein 多项式可由  $[0, 1]$  区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设  $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$ , 令  $x = (b-a)y + a, \forall x \in [a, b]$ , 则  $y \in [0, 1]$ , 并且

$$y = \frac{x-a}{b-a}, 1-y = \frac{b-x}{b-a}.$$

再令  $g(y) = f((b-a)y + a)$ , 则由  $f \in C[a, b]$  可知  $g \in C[0, 1]$ . 于是  $g$  在  $[0, 1]$  区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g, y) \triangleq \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k y^k (1-y)^{n-k}.$$

故  $[a, b]$  区间上  $f$  的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

#### 引理 0.1

1.  $B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C.$
2.  $B_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x.$
3.  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0.$
4.  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$



#### 证明

1. 由二项式定理可得  $B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C(x+1-x)^n = C.$
2.  $B_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$  由幂级数可逐项求导得
 
$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k\right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k = n y (1+y)^{n-1}.$$

故

$$\begin{aligned} B_n(x, x) &= \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k = \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-1} \\ &= \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{n-1} = x. \end{aligned}$$

3. 由 2 的结论可直接得到.

4. 首先, 展开得到

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^n \sum_{k=0}^n \left( x^2 - \frac{2xk}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k. \end{aligned} \quad (1)$$

接着, 计算  $\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k$  和  $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k$ . 由幂级数可逐项求导得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k y^k \right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}. \\ \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k &= y \left[ \left( \sum_{k=0}^n k C_n^k y^k \right)' \right] = y \left[ \left( y \left( \sum_{k=0}^n C_n^k y^k \right)' \right)' \right] \\ &= y [(y((1+y)^n)')'] = y [(ny(1+y)^{n-1})'] \\ &= y [n(1+y)^{n-1} + n(n-1)y(1+y)^{n-2}] \\ &= ny(1+y)^{n-2} [(1+y) + (n-1)y] \\ &= ny(1+y)^{n-2} (ny+1). \end{aligned}$$

令  $y = \frac{x}{1-x}$ , 则由上式可得

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k = n \left( \frac{x}{1-x} \right) \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-1} = \frac{nx}{1-x} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{n-1} = \frac{nx}{(1-x)^n}.$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k = n \left( \frac{x}{1-x} \right) \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-2} \left( \frac{nx}{1-x} + 1 \right) = \frac{nx}{1-x} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{n-2} \frac{(n-1)x+1}{1-x} = \frac{nx[(n-1)x+1]}{(1-x)^n}.$$

将上式代入(1)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \cdot \frac{nx}{(1-x)^n} + \frac{(1-x)^n}{n^2} \cdot \frac{nx[(n-1)x+1]}{(1-x)^n} \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2+x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

□

#### 定理 0.1 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设  $\varphi(x) = n \left[ f \left( \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n} \right) - f \left( \frac{n-1}{n}x \right) \right]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 则有

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x), n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(2) 若  $f$  递增或者递减, 则  $B_n(f, x), n \in \mathbb{N}_0$  也递增或者递减.

(3) 若  $f$  是  $[0, 1]$  的凸或者凹函数, 则对每个  $n \in \mathbb{N}_0$  都有  $B_n(f, x)$  是  $[0, 1]$  的凸或者凹函数.

(4) 设  $f \in C^k[0, 1], k \in \mathbb{N}_0$ , 则关于  $x \in [0, 1]$ , 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} B'_n(f, x) = f'(x), \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x). \quad (3)$$



**注** 性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!

即当  $f \in C^\infty[0, 1]$  时, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x)$  不成立!

也即当  $f \in C^\infty[0, 1]$  时, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 存在一个  $N$  (与  $k$  无关, 公共的  $N$ ), 使得  $\forall n > N$ , 都有  $B_n^{(k)}(f, x) \not\Rightarrow f^{(k)}(x)$  不成立!

**证明**

(1) 对  $n \geq 1$ , 直接计算得

$$\begin{aligned} B'_n(f, x) &= \left[ \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right]' \\ &= \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ n f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} - n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= B_{n-1}(\varphi, x), \end{aligned}$$

这就给出了式(2).

(2) 如果  $f$  递增, 那么就有  $\varphi \geq 0$ , 则由(2)知  $B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x) \geq 0$ , 故  $B_n(f, x)$  递增. 类似可得递减.

(3) 如果  $f$  下凸, 对  $n=1$  的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设  $n \geq 2$ . 注意继续由(2)知

$$B''_n(f, x) = B'_{n-1}(\varphi, x) = B_{n-2}(\psi, x), \psi(x) = (n-1) \left[ \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right) \right],$$

从而由  $f$  的下凸性可得

$$\begin{aligned} B_{n-2}(\psi, x) &= \sum_{j=0}^{n-2} \psi\left(\frac{j}{n-2}\right) C_{n-2}^j (1-x)^{n-2-j} x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{j}{n-1}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{j+1}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[ \frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{\frac{j+2}{n} + \frac{j}{n}}{2}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

这就证明了  $B_n(f, x)$  下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明  $k=0$  时命题成立. 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $|x-y| \leq \delta$ , 就有

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
|B_n(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} \left| \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| + \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left| \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2 \sup |f| \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{\text{类似Chebeshev不等式的证明}}{\leq} \varepsilon \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{0.1}{=} \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{n\delta^2} x(1-x),
\end{aligned}$$

于是从上式立得

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\sup |f|}{2n\delta^2}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| = 0.$$

故我们得到了  $k=0$  时, 式(3)成立.

**Step2 (\*)** 我们定义

$$T_n f(x) = n \left[ f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right], n \in \mathbb{N}.$$

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(T_n f, x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1} \cdots T_n f(x) = (n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right), \forall j \in \mathbb{N}.$$

事实上, 当  $j=1$ , 由(2)可知命题显然成立, 假设命题对  $j \in \mathbb{N}$  成立, 则

$$\begin{aligned}
&T_{n-j} \cdots T_n f(x) \\
&= T_{n-j} \left( (n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k T_{n-j} \left( f \left( \frac{n-j}{n} x + \frac{k}{n} \right) \right) \\
&= \frac{n!(n-j)}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k \left[ f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k+1}{n} \right) - f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right) \right] \\
&= \frac{n!(-1)^j \left[ f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{1}{n} \right) - f \left( \frac{n-j-1}{n} x \right) \right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k+1}{n} \right) \\
&\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right) \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right) \\
&\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{n!(-1)^j \left[ f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{1}{n} \right) - f \left( \frac{n-j-1}{n} x \right) \right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{j+1}{n} \right) - \frac{n!}{(n-j-1)!} (-1)^j f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{1}{n} \right) \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1+j} (C_j^{k-1} + C_j^k) f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+1+j} C_{j+1}^k f \left( \frac{n-j-1}{n} x + \frac{k}{n} \right).
\end{aligned}$$

因此我们证明了对  $j+1$ , 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有  $j \in \mathbb{N}$ , 命题都成立.

**Step3 (\*)** 我们证明一个中值定理的结果. 由 Hermite 插值定理, 对  $x \in [0, 1]$ , 存在  $\theta \in [0, 1]$ , 我们有

$$f(x) = \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(x - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left( x - \frac{s+i}{n} \right).$$

特别的存在  $\theta \in [\frac{i}{n}, \frac{i+j}{n}]$ , 使得

$$\begin{aligned}
f \left( \frac{i}{n} \right) &= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} \cdot f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left( \frac{i}{n} - \frac{s+i}{n} \right) \\
&= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})} \cdot f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{s}{s-k} \cdot f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j \frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!} (-1)^{k-1} f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} C_j^k f \left( \frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j},
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k f \left( \frac{k+i}{n} \right) = \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j}.$$

**Step4 (\*)** 注意到

$$B_n^{(j)}(f, x) = B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x), 1 \leq j \leq k, n > k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned} |B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x)| \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f\left(\frac{i}{n-j}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n! f^{(j)}(\theta)}{(n-j)! n^j}| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-j} \left| 1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right| \cdot |f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i}. \end{aligned}$$

**Step5 (\*) Step1** 告诉我们关于  $x \in [0, 1]$ , 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f^{(j)}, x) = f^{(j)}(x), j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

同时注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right) = 0,$$

以及

$$\left| \frac{i}{n} - \frac{i}{n-j} \right| = \frac{ji}{n(n-j)} \leq \frac{j}{n}, \left| \frac{i+j}{n} - \frac{i}{n-j} \right| \leq \frac{2j}{n}, \forall n > j.$$

我们同时假设

$$M_j \triangleq \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(j)}(x)|, j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

并注意到  $f^{(j)}$  是一致连续的. 现在对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  和  $\delta > 0$ , 使得

$$|B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [0, 1],$$

$$\left| 1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right| < \frac{\varepsilon}{3M_j}, \forall n > N,$$

$$|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall |x - y| < \delta, x, y \in [0, 1].$$

因此当正整数  $n > \max \left\{ \frac{2j}{\delta}, j, N \right\}$ , 利用 **Step4**, 我们有

$$|B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b],$$

这就完成了证明. □

**例题 0.1** 设  $f \in C[0, 1]$  使得

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots.$$

证明

$$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

**注**  $p_n(x)$  的良好性可由 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 得到. 实际上, 我们这里取的  $p_n(x)$  就是  $g$  的 **Bernstein 多项式**

$B_n(g, x)$ .

**证明** 由条件可知, 对任意实系数多项式  $p(x)$ , 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0, \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

对  $\forall g \in C[0, 1]$ , 取  $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 使得  $p_n(x) \rightrightarrows g(x)$ , 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)p_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_n(x)dx = 0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0, \forall g \in C[a, b].$$

再取  $g = f$ , 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

□

### 定理 0.2

设  $f(x) \in C^k[a, b]$ , 这里  $a < b, a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$ , 那么对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $p(x)$ , 使得

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b], s = 0, 1, 2, \dots, k.$$

♡

**注**  $q(x)$  的良好定义性可由  $f^{(k)}$  的连续性和 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 直接得到. 实际上,  $q(x) = B(f^{(k)}, x)$ .

**证明** 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $q \in \mathbb{R}[x]$ , 使得

$$|q(x) - f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (4)$$

设

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} q(t) dt,$$

则对  $p$  求导可得, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$p^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} q(t) dt. \quad (5)$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$f^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} f^{(k)}(t) dt. \quad (6)$$

于是利用 (4)(5)(6) 式可得, 对  $\forall s \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| = \left| \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} [f^{(k)}(t) - q(t)] dt \right| \leq \frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!}, \forall x \in [a, b].$$

故结论得证. □

**例题 0.2** 设多项式列  $p_n, n = 1, 2, \dots$  在  $\mathbb{R}$  一致收敛到  $f$ , 证明  $f$  为多项式.

**证明** 由条件可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|p_m(x) - p_n(x)| \leq 1, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此  $p_m(x) - p_n(x) = C, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}$ . 其中  $C$  是一个常数. 故

$$p_n(x) = p_N(x) + c_n, \forall n \geq N, x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

其中  $\{c_n\}$  是一个常数列. 从而任取  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n(x_0) - p_N(x_0)] = f(x_0) - p_N(x_0).$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  存在. 于是由  $x_0$  的任意性可得

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f(x) - p_N(x), x \in \mathbb{R}.$$

即  $f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ . 因此结论得证. 或者对(7)式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 也能得到

$$f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

## 0.1.2 可积函数的逼近

### 定理 0.3 (可积被连续函数逼近)

(1) 设  $f \in R[a, b]$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C[a, b]$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (8)$$

(2) 设  $f \in R[a, b]$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C_c(a, b)$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

这里  $g \in C_c(a, b)$  表示  $g$  是有含于  $(a, b)$  的紧支撑的连续函数.

(3) 设  $p \geq 1$  且反常积分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ , 则对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

这里  $g \in C_c(a, b)$  表示  $g$  是有含于  $(a, b)$  的紧支撑的连续函数.

♡

 **笔记** 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

**证明**

(1) 对任何  $\varepsilon > 0$ , 因为  $f \in R[a, b]$ , 所以存在一个划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  使得

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon, w_i(f) \text{ 表示 } f \text{ 在 } [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n \text{ 的振幅.}$$

连接线段  $(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \dots, n$  得到连续函数  $g$ . (不难发现  $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ ) 则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x_{i-1})| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n w_i(f) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{3}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

这就完成了证明.



(2) 对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 由第 1 问可知, 存在  $g \in C[a, b]$  使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的  $\delta > 0$ , 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}.$$

再取  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  使得

(a):  $0 \leq h(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

(b):  $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a + \delta) \cup (b - \delta, +\infty)$ ;

(c):  $h(x) = 1, \forall x \in [a + 2\delta, b - 2\delta]$ .

于是取  $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a, b)$ , 由第 1 问可知  $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ , 从而  $\sup_{x \in [a, b]} |g_1| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g_1(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - g(x)h(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x) - g(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)| dx \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} + 2 \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx + 2 \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

这就完成了证明.

(3) 证明的想法和第 2 问类似. 由条件可知, 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $X > 0$ , 使得

$$\int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx = \int_X^\infty |f(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

因为  $f$  在  $[-X, X]$  黎曼可积, 所以由第 2 问, 存在  $g \in C_c(-X, X)$  使得

$$\int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{1 + \sup_{[-X, X]} |2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X, X]} |g| \leq \sup_{[-X, X]} |f|,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |f(x) - g(x)|^p dx &= \int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx + \int_{-X}^X |f(x) - g(x)|^p dx \\ &\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} |f - g|^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)| dx \\ &< \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

这就完成了证明.

□

## 引理 0.2

证明: 若  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , 则存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$



**笔记** 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

**证明** 令

$$S \triangleq \{(A, B, C) \mid |A|^p + |B|^p + |C|^p = 1\},$$

则  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  上的有界闭集, 从而  $S$  是紧集. 于是  $|A + B + C|^p$  可以看作紧集  $S$  上关于  $(A, B, C)$  的连续函数, 故一定存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p, \forall (A, B, C) \in S. \quad (9)$$

对  $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ , 固定  $A, B, C$ , 不妨设  $A, B, C$  不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$L = \frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p + |B|^p + |C|^p}},$$

考虑  $(LA, LB, LC)$ , 则此时

$$|LA|^p + |LB|^p + |LC|^p = 1.$$

因此  $(LA, LB, LC) \in S$ . 从而由(9)式可知

$$|LA + LB + LC|^p \leq C_p.$$

于是

$$|A + B + C|^p \leq \frac{C_p}{L^p} = C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故结论得证. □

## 定理 0.4 (积分的绝对连续性)

设  $p \geq 1$  且反常积分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ , 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \quad (10)$$



**笔记** 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

**证明 Step1:** 当  $f \in C_c(\mathbb{R})$  时, 则存在  $X > 0$ , 使得

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X.$$

从而当  $h \in (-1, 1)$  时, 就有

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X+1.$$

又因为  $f \in C[-X-1, X+1]$ , 所以由 Cantor 定理可知  $f$  在  $[-X-1, X+1]$  上一致连续. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| \leq X+1} |f(x+h) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{|x| \leq X+1} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

**Step2:** 对一般的  $f$ , 满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ . 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由定理 0.3(3) 可知, 存在  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h) + g(x+h) - g(x) + g(x) - f(x)|^p dx$$

利用齐次化方法得到引理 0.2, 从而可知若  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , 则存在  $C_p > 0$ , 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &\leq C_p \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right) \\ &\stackrel{\substack{\text{换元} \\ y=x+h}}{=} 2C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx \\ &\leq 2\varepsilon C_p + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (11)$$

由  $g \in C_c(\mathbb{R})$ , 结合 Step1 可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx = 0. \quad (12)$$

于是由(11)(12) 式可得

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq 2\varepsilon C_p.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性得证. □