## 0.1 高等代数公理化定义

**定理 0.1 (行列式的刻画)**

设 $f$ 为从 $n$ 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 任意的指标 $1 \leqslant i \leqslant n$, 以及任意的常数 $c$, 满足下列条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列是方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 $i$ 列之和, 且 $\boldsymbol{A}$ 的其余列与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对应列完全相同, 则 $f(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{B}) + f(\boldsymbol{C})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列乘以常数 $c$ 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = cf(\boldsymbol{A})$;

(3) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B}) = -f(\boldsymbol{A})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n) = 1$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 $n$ 阶单位阵.

求证:$f(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$.

**笔记** 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 $n$ 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

**证明** 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k$ 列,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为标准单位列向量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k, j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) \\
&= a_{11} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) + a_{21} f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) + \cdots + a_{n1} f(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2}\boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1}\left[a_{12} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) + a_{22} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) + \cdots + a_{n2} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_n, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)\right] \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) = \cdots = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} f\left(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}\right).
\end{aligned}$$

若 $k_i = k_j$, 则 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$ 的第 $i$ 列和第 $j$ 列对换后仍然是 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$. 由条件 (3) 可知,$f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = -f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$, 于是 $f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = 0$. 因此在 $f(\boldsymbol{A})$ 的表示式中, 只剩下 $k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n})$ 变成 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{I}_n$, 故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} f(\boldsymbol{I}_n) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.$$

于是由行列式的组合定义可知

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} f(\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = |\boldsymbol{A}|.$$

□

**定理 0.2 (矩阵迹的刻画)**

设 $K$ 为数域, $f : M_n(K) \to K$ 为一个映射, 且满足

(1) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(K), f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A}) + f(\boldsymbol{B})$;

(2) $\forall k\in K, \boldsymbol{A}\in M_n(K), f(k\boldsymbol{A})=kf(\boldsymbol{A})$;
(3) $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(K), f(\boldsymbol{AB})=f(\boldsymbol{BA})$;
(4) $f(\boldsymbol{I}_n)=n$.
求证:$f$ 就是迹映射, 即 $f(A)=\mathrm{tr}(A)$ 对一切 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 阶矩阵 $A$ 成立.

笔记 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

证明 设 $E_{ij}$ 是 $n$ 阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n=f(I_n)=f(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{nn})=f(E_{11})+f(E_{22})+\cdots+f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj}),$$

所以 $f(E_{ii})=1(1\leqslant i\leqslant n)$. 另一方面, 若 $i\neq j$, 则

$$f(E_{ij})=f(E_{i1}E_{1j})=f(E_{1j}E_{i1})=f(O)=f(0\cdot I_n)=0\cdot f(I_n)=0.$$

设 $n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 则

$$f(A)=f\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A).$$

□

**定理 0.3**

设 $\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足
(i) $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
(ii)$\phi(0)=0$, 且存在秩 1 矩阵 $W$ 使得 $\phi(W)\neq 0$.
证明
(1) 对任意的秩为 $r$ 的矩阵 $A,B$, 都有 $r(A)=r(B)$.
(2) 存在可逆矩阵 $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1},\forall i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

笔记 本题对一切数域都成立.
证明的想法是类比相似矩阵的定理的证明.

证明

(1) 注意到设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且秩一样, 则存在可逆矩阵 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $PAQ=B$. 则 $\mathrm{rank}(\phi(B))=\mathrm{rank}(\phi(PAQ))=\mathrm{rank}(\phi(P)\phi(A)\phi(Q))\leq\mathrm{rank}(\phi(A))$. 对称的有 $\mathrm{rank}(\phi(A))\leq\mathrm{rank}(\phi(B))$. 这就证明了 $\phi(A),\phi(B)$ 秩是相同的.
(2) 我们特定 $R=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$. 等式(1)等价于

$$\phi(E_{ij})(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)E_{ij}=\left(0,\cdots,\underbrace{v_i}_{\text{第}j\text{列}},\cdots,0\right).$$

我们的目标转化为寻求一组基 $v_i$ 使得

$$\phi(E_{ij})v_k=\delta_{jk}v_i. \tag{2}$$

特别的, 在(2)中考虑 $k=j=k$, 则需要的是 $\phi(E_{ii})v_i=v_i,i=1,2,\cdots,n$.
我们知道 $E_{ij}E_{ki}=\delta_{jk}E_{ii},\phi(E_{ii}^2)=\phi(E_{ii})=\phi^2(E_{ii})$, 即 $\phi(E_{ii})$ 是幂等矩阵. 注意到 $E_{ii}$ 的秩为 1, 于是有

$$\mathrm{rank}(\phi(E_{ii}))=\mathrm{rank}(\phi(W))>0,$$

即 $\phi(E_{ii})$ 有特征值 1. 现在就可以取 $v_i$ 是 $\phi(E_{ii})$ 属于特征值 1 的特征向量. 问题变为如此取的 $v_i$ 是否满足(2)? 如果 $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$, 则

$$\phi(E_{kk})\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = 0 = c_k\phi(E_{kk})v_k = c_k v_k \implies c_k = 0,$$

即 $v_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 线性无关. 注意到当 $k \neq j$, 有

$$\phi(E_{ij})v_k = \phi(E_{ij})\phi(E_{kk})v_k = 0.$$

当 $k = j$, 有

$$\phi(E_{ij})v_k = \phi(E_{ij})\phi(E_{kk})v_k = \phi(E_{ik})v_k,$$

这并没有用处, 因此我们需要改造 $v_i$.

现在设 $\phi(E_{ij})v_j = t_{i1}v_1 + t_{i2}v_2 + \cdots + t_{in}v_n$, 并取 $k \neq i$, 则有

$$\phi(E_{kk})\phi(E_{ij})v_j = t_{ik}\phi(E_{kk})v_k = t_{ik}v_k = 0 \implies t_{ik} = 0.$$

于是可设 $\phi(E_{ij})v_j = r_{ij}v_i$. 我们待定非 0 的 $c_i \in \mathbb{R}$, 注意 $c_i v_i$ 仍然是 $\phi(E_{ii})$ 特征值 1 对应的特征向量, 所以之前推导的性质并没有改变. 现在期望 $\phi(E_{ij})c_j v_j = c_i v_i$, 即 $r_{ij} = \frac{c_i}{c_j}$. 那么 $r_{ij}$ 能否表示为这种形式呢? 这诱使我们继续考虑 $r_{ij}$ 的样子. 注意到

$$\phi(E_{il})\phi(E_{lj})v_j = \phi(E_{il})r_{lj}v_l = r_{il}r_{lj}v_i = r_{ij}v_i \implies r_{ij} = r_{il}r_{lj},$$

即 $r_{ij} = \frac{r_{ii}}{r_{ji}}$. 于是问题转化为是否存在 $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $r_{il} \neq 0, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 事实上这一定存在, 若不然, 则对任何 $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 存在 $i_l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $r_{i_l l} = 0$. 于是对任何 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 我们有 $r_{ij} = r_{ii_l}r_{i_l j} = 0$, 这不可能! 现在我们就证明了存在可逆矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得(1)成立.

□

**定理 0.4 (基础矩阵的刻画)**

设有 $n^2$ 个 $n$ 阶非零矩阵 $A_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 适合

$$A_{ij}A_{jk} = A_{ik},\ A_{ij}A_{lk} = O\ (j \neq l).$$

求证: 存在可逆矩阵 $P$, 使得对任意的 $i, j, P^{-1}A_{ij}P = E_{ij}$, 其中 $E_{ij}$ 是基础矩阵.

**证明** 因为 $A_{11} \neq O$, 故存在 $\alpha$, 使得 $A_{11}\alpha \neq 0$. 令 $\alpha_1 = A_{11}\alpha$, 由 $A_{11}A_{11} = A_{11}$ 可得 $A_{11}\alpha_1 = \alpha_1$. 再令 $\alpha_i = A_{i1}\alpha_1$, 由 $A_{i1}A_{i1} = A_{11}$ 可知 $\alpha_i \neq 0$. 我们得到了 $n$ 个非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 由已知条件容易验证这 $n$ 个向量适合下列性质:

$$A_{ij}\alpha_j = \alpha_i,\ A_{ij}\alpha_k = 0\ (j \neq k)$$

由此不难证明这 $n$ 个向量线性无关. 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则 $P$ 是可逆矩阵, 且

$$A_{ij}P = (A_{ij}\alpha_1, A_{ij}\alpha_2, \cdots, A_{ij}\alpha_n) = (0, \cdots, 0, \alpha_i, 0, \cdots, 0).$$

其中上式中的 $\alpha_i$ 在第 $j$ 列. 另一方面, 有

$$PE_{ij} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)E_{ij} = (0, \cdots, 0, \alpha_i, 0, \cdots, 0).$$

因此, 对任意的 $i, j, A_{ij}P = PE_{ij}$, 即 $P^{-1}A_{ij}P = E_{ij}$.

□