0.1 函数构造类

0.1.1 单中值点问题

例题 0.1

1. 设 $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$ 满足 $f(0)=f(2)=0, \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$. 则存在 $\xi \in (0,2)$ 使得
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
2. 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1), f(0)=0$, 证明: 存在 $u \in (0,1)$, 使得
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$
3. 设 $f \in C[-1,2] \cap D(-1,2)$ 且有 $f(-1)=f(2)=-\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})=1$. 证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都存在 $\xi \in (-1,2)$, 使得
$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

笔记 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

注

1. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\frac{2x-y}{x}$, 解得 $y=\frac{c}{x}+x$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=x(y-x)$, 常数变易得构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$.
2. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\frac{xy}{1-x}$, 解得 $y=\frac{ce^{-x}}{x-1}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=e^{x}(x-1)y$, 常数变易得构造函数 $c(x)=e^{x}(x-1)f(x)$.
3. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\lambda\left[y-\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}$, 解得 $y=ce^{\lambda x}+\frac{x}{2}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=\frac{y-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$, 常数变易得构造函数 $c(x)=\frac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$.

证明

1. 由 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$ 及 $f \in C[0,2]$ 可知
$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=5\lim_{x\to 1}(x-1)+2=2.$$
从而
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5.$$
构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$, 我们求导得
$$c'(x)=f(x)-2x+xf'(x). \tag{1}$$
注意到
$$c(0)=0, c(1)=1, c(2)=-4.$$
于是由 Lagrange 中值定理得 $\alpha \in (0,1), \beta \in (1,2)$, 使得
$$c'(\alpha)=\frac{c(1)-c(0)}{1-0}=1, c'(\beta)=\frac{c(1)-c(2)}{1-2}=-5.$$
由导数介值定理知存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得 $c'(\xi)=0$. 由(1)知
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
这就完成了证明.
2. 构造 $c(x)=e^{x}(x-1)f(x)$, 则 $c(0)=c(1)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $u \in (0,1)$, 使得 $c'(u)=0$, 这恰好是
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 构造 $c(x)=\dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$. 注意到

$$c(-1)=0, c(2)=-\frac{3}{2e^{2\lambda}}, c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

由零点定理知存在 $\theta\in(\frac{1}{2},2)$, 使得 $c(\theta)=0$. 再由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(-1,\theta)\subset(-1,2)$, 使 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.2 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)>0, f(1)>0, \int_0^1 f(x)dx=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

注 虽然本题直接考虑微分方程:$y'+3y^2=0$ 解出 y, 然后常数变易也不难得到构造函数. 但是下述证明的方法旨在介绍一种新的解决这类问题的方法.

笔记 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是要把部分 f 视为已知函数来构造, 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数. 考虑 $y'+3f^2y=0$. 解得 $y=ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 分离变量得构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$.

证明 证法一: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)dx=0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0)>0, f(1)>0$, 我们知道 $f(x)>0, \forall x\in[0,\theta)\cup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)dx>0$, 这就是一个矛盾! 于是存在 $\theta_1\neq\theta_2$, 使得 $f(\theta_1)=f(\theta_2)=0$. 现在就有 $c(\theta_1)=c(\theta_2)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

证法二: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)dx=0.$$

从而 $c(\theta)=0$. 因为 $f(0), f(1)>0$, 所以 $c(0), c(1)>0$. 又由 $c\in C[0,1]$, 故 $c(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取到最大、最小值. 由于 $c(\theta)=0<c(0), c(1)$, 因此 $c(x)$ 只能在 $(0,1)$ 上可取到最小值, 即存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c(\xi)\leq c(x), \forall x\in[0,1]$. 由费马引理可知 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

□

例题 0.3 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$f'(\xi)=\int_0^1(12x-6)f(x)dx.$$

笔记 核心想法: **分部积分转移导数, 但是需要控制非积分部分为零.**

注 $\int_0^1(12x-6)f(x)dx=\int_0^1(6x^2-6x)'f(x)dx$ 的原因: 我们希望利用分部积分后能够直接转移导数而没有多余部分, 因此我们待定 $\int_0^1(12x-6)f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)dx$, 即 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 分部积分得到

$$\int_0^1(12x-6)f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)dx=(ax^2+bx+c)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(ax^2+bx+c)f'(x)dx.$$

我们希望 $(ax^2+bx+c)f(x)\big|_0^1=(a+b+c)f(1)-cf(0)=0$, 即希望 $x=0,1$ 恰好是 ax^2+bx+c 的根, 并且 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 从而

$$\begin{cases}a+b+c=0\\c=0\\2a=12\\b=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=-6\\c=0\end{cases}.$$

由此可知, 满足我们期望的二次函数只有 $6x^2-6x$, 即 $\int_0^1(12x-6)f(x)dx=\int_0^1(6x^2-6x)'f(x)dx$.

证明

$$\begin{aligned}\int_0^1(12x-6)f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(6x^2-6x\right)'f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}f'(\xi)\int_0^1\left(6x-6x^2\right)\mathrm{d}x=f'(\xi),\xi\in[0,1].\end{aligned}$$

□

例题 0.4

1. 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}], f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi).$$

注

1. 考虑微分方程 $y''=\frac{2y'}{1-x}$, 解得 $y'=\frac{c}{(1-x)^2}$, 常数变易得到构造函数 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$.
2. 虽然我们可以通过解微分方程得到构造函数, 但是也不要忘记直接猜测构造函数的想法. 当需要考虑的微分方程比较难解时, 就只能猜测构造函数.
   考虑微分方程:$y''=2yy'$, 解得 $y'=y^2+c$, 得到构造函数 $c(x)=f'(x)-f^2(x)$. 但是根据这个构造函数结合已知条件再利用中值定理无法得到结论.($f(\frac{\pi}{4})=1$ 用不了) 因此需要构造更加具体的函数才行.
   然而原问题等价于利用 Rolle 中值定理找一个中值点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c'(\xi)=0$. 但由条件只能得到 $c(0)=1$,$c(\frac{\pi}{4})$ 无法确定. 因此我们希望还能找一个点 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1$.
   将这个看作一个新的中值问题, 即已知设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}], f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明: 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1.$$
   考虑微分方程:$y'-y^2=1$, 解得 $\arctan y=x+C$, 常数变易得到新的构造函数 $g(x)=\arctan f(x)-x$. 由条件可知 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0$, 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-f^2(x_0)=1$. 从而找到了满足我们需求的中值点 x_0, 故结论得证.(具体证明见下述证明)

证明

1. 令 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$, 则 $c'(x)=2(x-1)f'(x)+(1-x)^2f''(x)$. 由 $f(0)=f(1)$ 及 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 从而 $c(1)=c(\xi)=0$, 再根据 Rolle 中值定理可得, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得
$$c'(\eta)=0\Leftrightarrow f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 令 $c(x)=f'(x)-f^2(x), g(x)=\arctan f(x)-x$, 则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f^2(x)-1}{1+f^2(x)}$. 进而由条件可得 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0, g'(0)=0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $a\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(a)=0$, 即 $f'(a)=f^2(a)+1$. 从而 $c(a)=$

$1, c(0) = f'(0) - f^2(0) = 1$, 故再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得

$$c(1) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

□

0.1.2 多中值点问题

例题 0.5 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

笔记 核心想法: 插入一个点 c, 将两个中值点问题转换为如何确定这单个插入点 c 的问题.

注 思路分析: 待定 $c \in (0,1)$, 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0,c), \mu \in (c,1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

需要

$$2 = f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c}\left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1}\right],$$

只需找到一个 $c \in (0,1)$ 使得上式成立. 但是直接考虑上式比较困难, 我们希望能找到一个特殊的 c 从而将上式化简. 因此待定 k, 我们希望 $f(c)$ 同时满足 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = k$(这里期望 $f(c)$ 满足 $\frac{f(c)}{c} = k$ 也可以), 从而上式就转化为

$$2 = \frac{kc - k + 1}{c} \cdot (k+1) \Leftrightarrow \left(k^2 + k - 2\right)c - \left(k^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)\left[(k+2)c - k - 1\right] = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{或} k = \frac{1 - 2c}{c - 1}.$$

若取 $k = 1$, 则我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = 1$, 即 $f(c) = c$. 此时令 $g(x) = f(x) - x$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 但是由条件可知 $g(0) = g(1) = 0$, 无法用中值定理直接找出 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = 1$ 不能找到满足我们的需求的 c.

若取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 则我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 此时令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$ 能找到满足我们的需求的 c, 进而就确定了满足题目要求的 λ 和 μ.

证明 令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0,c), \mu \in (c,1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

再结合 $f(c) = 2 - 2c$ 可得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c}\left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1}\right] = 2.$$

故结论得证. □

例题 0.6 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$，正实数满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$。证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1.$$

笔记 核心想法: 插入 $n-1$ 个点 y_i, 将 n 个中值点问题转换为如何确定这些插入点 y_i 的问题.

注 思路分析: 证明的想法就是插入 $n-1$ 个点 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$ 之后用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是需要满足

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

而为了得到(2), 我们只需反复用介值定理即可. 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$.

证明 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$. 再利用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, x_i\in(y_{i-1},y_i), i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

故结论得证. □

0.1.3 只能猜的类型

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.

例题 0.7 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$ 且 $f(0)=0$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$, 证明对任何 $\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

注 注意到

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\Leftrightarrow \alpha f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0.$$

因此想到构造函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$.

笔记 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 的原因: 如果 $f(x)<0$, 则 $f^{\alpha}(x)$ 可能无意义.

由 $f\in C[0,1]$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$ 可知,$f(x)$ 在 $(0,1]$ 要么恒大于零, 要么恒小于零. 否则由零点存在定理得到矛盾! 假设结论对 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 成立, 则当 $f(x)<0,\forall x\in(0,1]$ 时, 令 $F(x)=-f(x)>0,\forall x\in(0,1]$, 则 $F(0)=0$. 从而由假设可知, 对 $\forall\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\alpha\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)}\Leftrightarrow \alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$. 对 $\forall\alpha>0$, 令 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$. 从而由 Rolle 中值定理可

知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$g'(\xi)=0\Rightarrow g'(\xi)=\alpha f^{\alpha-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^{\alpha}(\xi)f'(1-\xi)\Rightarrow \alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□

0.1.4 中值极限问题

此类问题有一个固定操作，即对中值点再套一次中值定理，使得中值参数可以暴露出来，从而解出参数求极限得到证明。

例题 0.8 设 $f\in C^2[0,1], f'(0)=0, f''(0)\neq 0$，证明对任何 $x\in(0,1)$，存在 $\xi(x)\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)dt=f(\xi(x))x,$$

且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

证明 对 $\forall x\in(0,1)$，由积分中值定理可知，存在 $\xi(x)\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x.$$

从而对 $\forall x\in(0,1)$，由 Taylor 定理可知，存在 $\theta(x)\in(0,\xi(x))$，使得

$$f(\xi(x))=f(0)+f'(0)\xi(x)+\frac{1}{2}f''(\theta(x))\xi^2(x)=f(0)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x).$$

从而将 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x$ 代入上式可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(0)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x)\right].$$

故 $f''(\theta(x))\xi^2(x)=2\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}-f(0)\right)$。于是

$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f''(\theta(x))=f''(0).$$

因此由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}f''(0)\lim_{x\to 0^+}\frac{\xi^2(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(\theta(x))\xi^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(0)\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(f(x)-f(0)\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{3x}=\frac{f''(0)}{3}.\end{aligned}$$

又 $f''(0)\neq 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi^2(x)}{x^2}=\frac{1}{3}$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$。 □

例题 0.9 设 f 在 $x=a$ 的邻域 $n+p$ 阶可导且 $p\geq 1$，于是有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{3}$$

如果对于 $j=1,2,\cdots,p-1$ 都有 $f^{(n+j)}(a)=0$，$f^{(n+p)}(a)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}$。

证明 由 Taylor 中值定理及条件可知，存在 $\theta\in U(a)$，使得

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^p. \tag{4}$$

从而结合上式，再利用带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\lim_{x\to a^+}f^{(n+p)}(\theta)=\lim_{x\to a^+}p!\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(c-a)^p}=\lim_{x\to a^+}p!\frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{p!}(c-a)^p+o((c-a)^p)}{(c-a)^p}=f^{(n+p)}(a).$$

于是利用(3)(4)式，再结合带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^p &= \lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right] = \lim_{x\to a^+}\left[p!\cdot\frac{\frac{n![f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j]}{(x-a)^n}-f^{(n)}(a)}{(x-a)^p f^{(n+p)}(\theta)}\right]\\ &= \lim_{x\to a^+}\left[n!p!\cdot\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}{(x-a)^{n+p}f^{(n+p)}(\theta)}\right] = \frac{n!p!}{f^{(n+p)}(a)}\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p}+o[(x-a)^{n+p}]}{(x-a)^{n+p}}\\ &= \frac{n!p!}{(n+p)!}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{c-a}{x-a}=\sqrt[p]{\dfrac{n!p!}{(n+p)!}}$。 □

0.1.5 性态分析类

定理 0.1 (积分中值定理)

(1) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx.$$

(2) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$$

(3) $f(x)\in R[a,b], g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)dx+g(b)\int_\zeta^b f(x)dx.$$

(4) $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号,$g(x)\in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta\int_a^b f(x)dx.$$

(5) $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号,$g(x)\in C[a,b]$, 则存在 $\zeta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\zeta)\int_a^b f(x)dx.$$

(6) 若 (1),(2),(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta\in(a,b)$.

定理 0.2 (Hadamard 不等式)

f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

笔记 一句话积累证明：一边是区间再现，一边是换元到区间 $[0,1]$。

注 左边的不等式证明中的线性换元构造思路: 我期望找到一个线性函数 $g(t)$，使得令 $x=g(t)$ 换元后，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=g(t)} \int_0^1 f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

即 $g(0)=a$，$g(1)=b$。因此 $g(t)=\dfrac{b-a}{1-0}t+a=a+(b-a)t$。从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\mathrm{d}t=(b-a)\int_0^1 f((1-t)a+bt)\mathrm{d}t.$$

证明 由 f 在 $[a,b]$ 上下凸，一方面，我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f(a(1-t)+bt)dt\leqslant\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b[f(a+b-x)+f(x)]dx\\&\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

故结论成立. □

例题 0.10 若 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$。

注 通过 $f''(x)+2\geq 0,\forall x\in(0,1)$ 来推出 $f+x^2$ 在 $[0,1]$ 下凸: 实际上，令 $g=f+x^2$, 则 $g''\geq 0,\forall x\in(0,1)$, 从而 g 在 $(0,1)$ 下凸. 因为 $g=f+x^2\in C[0,1]$ 和 g 在 $(0,1)$ 下凸我们就有

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),\forall x,y\in(0,1),\lambda\in[0,1].$$

上式中令 x 趋于 0 或者 1 也成立，再令 y 趋于 1 或者 0 也成立. 因此 g 在 $[0,1]$ 下凸。

证明 若不然，对任何 $x\in(0,1)$ 都有 $f''(x)\geq-2$，于是 $f(x)+x^2$ 是 $[0,1]$ 的下凸函数。于是由Hadamard 不等式我们知道

$$\frac{4}{3}=\int_0^1[f(x)+x^2]dx\leq\frac{f(0)+0^2+f(1)+1^2}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

矛盾！现在存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$。 □

定理 0.3 (达布中值定理/导数介值定理)

设 $f\in D[a,b]$，对任何介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的 η，存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\eta$.

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理。即不妨设 $f'(a)<0<f'(b)$，去找 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=0$。事实上由极限保号性和

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

我们知道存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta],f(x)<f(b),\forall x\in[b-\delta,b).$$

因此 f 最小值在内部取到，此时由费马引理知最小值的导数为 0，从而证毕！ □

定理 0.4 (加强的 Rolle 中值定理)

(a)：设 $f\in D(a,b)$ 且在 $[a,b]$ 上 f 有介值性，则若 $f(a)=f(b)$，必然存在 $\theta\in(a,b)$，使得 $f'(\theta)=0$。

(b)：设 $f\in C[a,+\infty)\cap D^1(a,+\infty)$ 满足 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$。

笔记 一旦罗尔成立，所有中值定理和插值定理都会有类似的结果，可以具体情况具体分析。

证明 对于 (a)：不妨设 f 不恒为常数，则可取 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)\neq f(a)$，不妨设 $f(x_0)>f(a)$，则由 f 的介值性，我们知道存在 $x_1\in(a,x_0),x_2\in(x_0,b)$，使得

$$f(x_1)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2},f(x_2)=\frac{f(b)+f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a)=f(b)$，我们知道 $f(x_1)=f(x_2)$，由 Rolle 中值定理 $(f\in C[x_1,x_2]\cap D(x_1,x_2))$ 可知, 存在 $\theta\in(a,b)$，使得 $f'(\theta)=0$。这就完成了 (a) 的证明。

对于 (b)：若对任何 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x)\neq 0$, 则由导数介值性可知,f' 恒大于 0 或恒小于 0(否则, 由导数介值性可得到一个零点). 从而 f 在 $[0,+\infty)$ 严格单调，不妨设为递增。现在

$$f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),\forall x\geqslant a+1,$$

于是

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),$$

这就是一个矛盾！因此我们证明了存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$。 □

例题 0.11 设 f 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可微且不是线性函数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

笔记 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 这个线性构造必须记忆!

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $g(a)=g(b)=0$ 且 g 不是常值函数。因 $g'\leq 0$ 恒成立会导致 g 在 $[a,b]$ 递减, 从而 $0=g(b)<g(a)=0$, 这不可能！现在存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)>0$，即结论成立. □

例题 0.12

1. 设 $f\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$ 满足

$$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0.$$

证明存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

2. 设 $f\in C[0,\frac{\pi}{2}]$ 满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin xdx=0. \tag{5}$$

证明：f 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点。

笔记 此类给出积分等式的问题，往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标。即本题我们要寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$，考虑积分

$$\int_0^\pi f(x)(a\cos x+b\sin x)dx=0.$$

一句话证明本题 1 问，就是寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$，使得 $a\cos x+b\sin x$ 和 f 的符号一致。第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合。

证明

1. 我们只需断言 f 在 $[0,\pi]$ 至少有两个不相同的零点,之后由罗尔定理就给出了存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$。由积分中值定理可知, 存在 $x_0\in(0,\pi)$, 使得

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(\theta)\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=2f(x)=0.$$

即 f 在 $(0,\pi)$ 上有一个零点 x_0。若 f 在 $[0,\pi]$ 只有一个零点，则 f 在 $[0,x_0)$，$(x_0,\pi]$ 不同号（否则 f 不变号，则由 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$ 知 $f=0$，与 f 只有一个零点矛盾！)。不妨设

$$f(x)<0,\forall x\in[0,x_0),f(x)>0,\forall x\in(x_0,\pi].$$

于是可取

$$a\sin x+b\cos x=\sin(x-x_0)(a=\cos x_0,b=\sin x_0).$$

此时根据条件就有

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)(\cos x_0\sin x-\sin x_0\cos x)\mathrm{d}x=\cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0.$$

又注意到

$$f(x)\sin(x-x_0)>0,\forall x\in[0,\pi]\setminus\{x_0\},$$

故 $0=\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x>0$，矛盾！这就完成了证明。

2. 不妨设 f 不恒为 0，由积分中值定理和(5)式知 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 至少有一个零点且变号。若 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 只变号一次，设在 x_1 变号，则 f 在 x_1 两侧符号相反。由(5)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_1)dx=0.$$

但是 $f(x)\sin(x-x_1)$ 不变号，这就推出 $f=0$ 而矛盾！若 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 只变号两次，设变号处为 x_1,x_2，考虑

$$g(x)\triangleq\sin x-\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\cos x+\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_2-\cos x_1},x\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

注意到

$$g'(x)=\cos x+\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\sin x=\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\cos x\left(\tan x-\frac{\cos x_1-\cos x_2}{\sin x_2-\sin x_1}\right),$$

我们知 g' 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 有且只有一个零点。注意 $g(x_1)=g(x_2)=0$，我们由罗尔中值定理知道 g' 在 (x_1,x_2) 有零点，因此 g 当且仅当在 x_1,x_2 变号。现由(5)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx=0.$$

但是 fg 不变号，故 $f=0$，这就是一个矛盾！至此我们证明了 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点。

□