

0.1 其他

例题 0.1 设 $f \in C^2[0, 1]$, 证明

(1)


$$|f'(x)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (1)$$

(2)

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (2)$$

(3) 若 $f(0)f(1) \geq 0$, 则

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (3)$$

 **笔记** 对于 $[a, b]$ 的情况, 考虑 $f(a + (b-a)x)$, $x \in [0, 1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |f''(x)| dx,$$

以及

$$\int_a^b |f'(x)| dx \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx + (b-a) \int_a^b |f''(x)| dx.$$

当 $f(a)f(b) \geq 0$, 我们有

$$\int_a^b |f'(x)| dx \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx + (b-a) \int_a^b |f''(x)| dx.$$

证明

(1) 注意到对任何 $\theta \in [0, 1]$, 我们有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leq \left| \int_{\theta}^x f''(y) dy \right| + |f'(\theta)| \\ &\leq \int_0^1 |f''(y)| dy + |f'(\theta)|. \end{aligned}$$

于是只需证明存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (4)$$

如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0, 1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足 (4) 式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性可知, f' 要么恒正, 要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点, 不妨设 $f > 0$, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geq xf'(\eta) \geq x \min_{[0,1]} |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \geq \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|,$$

这也给出了 (4) 式. 若存在 $t \in [0, 1]$, 使得 $f(t) = 0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x) = f'(\theta)(x-t) \implies |f(x)| = |f'(\theta)| |x-t| \geq \min_{[0,1]} |f'| |x-t|, \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 |x-t| dx \stackrel{\text{命题 0.2}}{\geq} \min_{[0,1]} |f'| \cdot \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \frac{1}{4} \min_{[0,1]} |f'|.$$

这也给出了 (4) 式. 于是我们证明了不等式 (1) 式.

(2) 直接对 (1) 式两边关于 x 在 $[0, 1]$ 上积分得 (2) 式.

(3) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (5)$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0) \geq 0$, 则当 f 递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(0) + x f'(\eta) \geq x f'(\eta) \geq x \cdot \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \min |f'| \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$


当 f 递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(\alpha) \geq (1-x) \min |f'| \implies \int_0^1 |f(x)| dx \geq \frac{1}{2} \min |f'|.$$

于是必有 (5) 式成立, 这就给出了 (3) 式. □

例题 0.2 设 $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$. 证明

$$\int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx \leq \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x) dx.$$

 **笔记** 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

证明 令 $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, 则 $F'(t) = f(t)$ 连续递增, 故 F 是下凸的. 显然 $s \in [0, 1]$, 于是

$$F(x) \geq F(s) + F'(s)(x-s) = F(s) + f(s)(x-s), \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x) f(x) dx &\geq \int_0^1 [F(s)f(x) + f(s)f(x)(x-s)] dx \\ &= F(s) \int_0^1 f(x) dx + f(s) \int_0^1 [xf(x) - sf(x)] dx \\ &= F(s) \int_0^1 f(x) dx + f(s) \left[\int_0^1 xf(x) dx - \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \int_0^1 f(x) dx \right] \\ &= F(s) \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x) f(x) dx = \int_0^1 F(x) dF(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 &\geq F(s) \int_0^1 f(x) dx \implies \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \geq F(s) = \int_0^s f(x) dx \\ &\implies \int_0^s f(x) dx + \int_s^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \geq 2 \int_0^s f(x) dx \\ &\implies \int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 x dF(x)}{F(1)} = 1 - \frac{\int_0^1 F(x) dx}{F(1)},$$

即 $\int_0^1 F(x) dx = (1-s)F(1)$. 又由 F 的下凸性可知

$$F(x) \leq \begin{cases} \frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s), & x \in [s, 1] \\ \frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0), & x \in [0, s] \end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}(1-s)F(1) &= \int_0^1 F(x) dx \leq \int_0^s \left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s) + F(s) \right] dx + \int_s^1 \left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x + F(0) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}F(s) + \frac{1-s}{2}F(1).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1) \leq \frac{1}{2}F(s) \implies F(1) \leq \frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x) dx = F(1) - F(s) \leq \left(\frac{1}{1-s} - 1 \right) F(s) = \frac{s}{1-s} F(s) = \frac{s}{1-s} \int_0^s f(x) dx.$$

□

例题 0.3 求最小实数 C , 使得对一切满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续函数 f , 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx \leq C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x=1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是 n 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f(t)| dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2.$$

令 $f_n(t) = (n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$. 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})| dx = 2 \int_0^1 t |f_n(t)| dt = 2 \int_0^1 t(n+1)t^n dt = 2(n+1) \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty.$$

因此若 $C < 2$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})| dx > C$. 故 $C=2$ 就是最佳上界.

□

例题 0.4 设 $f \in C[0, 1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x) dx = 1, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq n^2.$$

证明 设 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2 dx \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &\geq \left[\int_0^1 f(x)(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) dx \right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^2 dx &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \right)^2 dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i x^{i+j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_j a_i \int_0^1 x^{i+j} dx = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \frac{\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2}{\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_j a_i}{i+j+1}} = \frac{a^T J a}{a^T H a},$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n \times n}$. 于是我们只需求 $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$. 设 λ 为 $\frac{a^T J a}{a^T H a}$ 的一个大于 0 的上界, 由 [例 8.18\(3\)](#) 可知 H 正定, 则

$$\begin{aligned} \lambda \text{ 为 } \frac{a^T J a}{a^T H a} \text{ 的一个上界} &\iff \lambda \geq \frac{a^T J a}{a^T H a}, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T J a \leq \lambda a^T H a, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff a^T (\lambda H - J) a \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \lambda H - J \text{ 半正定}. \end{aligned}$$

因此 $\sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a} = \min\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\}$. 设 H_k, J_k 分别为 H, J 的 k 阶顺序主子阵, 再根据 [打洞原理](#) 及 [例 2.41\(1\)](#) 可得

$$\begin{aligned} |\lambda H_k - J_k| &= |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} J_k| = |H_k| |\lambda I_k - H_k^{-1} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T| \\ &= \lambda^{k-1} |H_k| (\lambda - \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k). \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_k^T = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times k}$. 由 H 正定可知 $|H_k| > 0$, 又因为 $\lambda > 0$, 所以再由 [引理 6.3](#) 可得

$$|\lambda H_k - J_k| > 0 \iff \lambda > \mathbf{1}_k^T H_k^{-1} \mathbf{1}_k \stackrel{\text{引理 6.3}}{=} n^2.$$

因此对 $\forall \lambda > n^2$, 都有 $\lambda H - J$ 的顺序主子式都大于 0, 故此时 $\lambda H - J$ 正定. 于是对 $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 固定 a , 都有

$$a^T (\lambda H - J) a > 0, \forall \lambda > n^2.$$

令 $\lambda \rightarrow n^2$, 则由 $a^T (\lambda H - J) a$ 的连续性可知

$$a^T (n^2 H - J) a \geq 0.$$

故 $n^2 H - J$ 半正定. 因此 $n^2 = \inf\{\lambda \mid \lambda H - J \text{ 半正定}\} = \sup_{a \neq 0} \frac{a^T J a}{a^T H a}$. 结论得证. □

例 0.5 设 A, B 都是 n 级实对称矩阵, 若 B 正定, 证明

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\alpha^T A \alpha}{\alpha^T B \alpha} = \lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

证明 □

引理 0.1

设 $\alpha > 0, g \in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $g(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$, 如果

$$|g'(x) - g'(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1} \leq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha [g(x) - g(a)]^\alpha M, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

证明 不妨设 $g(a) = 0$, 否则用 $g(x) - g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M = 0$, 则不等式(7)显然成立. 当 $M \neq 0$ 可以不妨设 $M = 1$.

现在对非负函数 g , 现在我们正式开始我们的证明, 当 $g'(x_0) = 0$, 不等式(7)显然成立. 当 $g'(x_0) > 0$, 则利用(6)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geq g(x_0) - g(h) = \int_h^{x_0} g'(t) dt \\ &\geq \int_h^{x_0} [g'(x_0) - |t - x_0|^\alpha] dt \\ &= g'(x_0)(x_0 - h) - \frac{(x_0 - h)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \end{aligned}$$

取 $h = x_0 - |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha + 1} |g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(7)成立. 类似的考虑 $g'(x_0) < 0$ 可得(7).

当 $g'(x_0) < 0$, 则利用(6)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geq -g(h) + g(x_0) = - \int_{x_0}^h g'(t) dt \\ &\geq - \int_{x_0}^h [g'(x_0) + |t - x_0|^\alpha] dt \\ &= -g'(x_0)(h - x_0) - \frac{(h - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \end{aligned}$$

取 $h = x_0 + |g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0) > \frac{\alpha}{\alpha + 1} |g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(7)成立.

□

命题 0.1 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx. \quad (8)$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$

但是上述分部积分部分需要零边界条件 (即需要 $\lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 = 0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 \mathbb{R} 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 专业技术: 对一般的 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

取紧化序列 $h_n, n \in \mathbb{N}$, 则对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |(h_n f)'(x)|^2 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x) f(x) + h_n(x) f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

右边让 $n \rightarrow +\infty$, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x) f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h'_n(x) f(x) + h_n(x) f'(x)|^2 dx \right] = \left[4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 < \infty$, 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x) f(x)|^2 dx \right)^2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

从而不等式(8)成立.

Method 2 正常方法: 对一般的 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 = 0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty > \sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \stackrel{\text{Cauchy 不等式}}{\geq} \int_x^\infty y |f'(y) f(y)| dy \geq x \int_x^\infty |f'(y) f(y)| dy, \quad (9)$$

于是 $\int_x^\infty f(y) f'(y) dy = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2 - \frac{1}{2} |f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty$, 因此由积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在 $x_n \rightarrow \infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n |f(x_n)| = 0$, 于是再结合 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0.$$

现在继续用(9), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \geq x \int_x^\infty f'(y) f(y) dy = \frac{x}{2} |f(x)|^2,$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^\infty y^2 f^2(y) dy \cdot \int_x^\infty |f'(y)|^2 dy} \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)|^2 = 0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2 \stackrel{\text{分部积分}}{=} 4 \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx,$$

即不等式(8)成立. □

例题 0.6 设 $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ 是内闭 Riemann 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx. \quad (10)$$

证明 记 $a = \int_0^\infty f(x) dx > 0$, 待定 $s > 0$, 则不等式(10)等价于

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^s x f(x) dx + \int_s^\infty x f(x) dx > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^s x f(x) dx + s \int_s^\infty f(x) dx &\geq \frac{a^2}{2} \iff \int_0^s x f(x) dx + s \left(a - \int_0^s f(x) dx \right) \geq \frac{a^2}{2} \\ \iff \frac{a^2}{2} - sa + s \int_0^s f(x) dx - \int_0^s x f(x) dx &\leq 0 \iff \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x) f(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

利用 $f < 1$, 取 $s = a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x) f(x) dx = -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x) f(x) dx < -\frac{a^2}{2} + \int_0^a (a-x) dx = 0.$$

从而

$$\int_0^a x f(x) dx + a \int_a^\infty f(x) dx > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^a x f(x) dx + \int_a^\infty x f(x) dx \geq \int_0^a x f(x) dx + a \int_a^\infty f(x) dx > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(10). □

命题 0.2

设 f 是 $[0, 1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 a 有

$$\int_0^1 |f(x) - a| dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx. \quad (11)$$



证明 不妨设 f 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (11) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - a| dx. \end{aligned}$$

故式 (11) 成立. □

例题 0.7 若 $[a, b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 f , 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证明 由已知条件, 对任意正数 ε , 存在正整数 k 使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad x \in [a, b].$$

因为 $f_k \in R([a, b])$, 所以存在 $[a, b]$ 的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\omega_j(f_k)$ 是 f_k 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的振幅. 因为

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_k(x) - f_k(y)|, \end{aligned}$$

所以

$$\omega_j(f) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \omega_j(f_k).$$

于是

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(f)(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \omega_j(f_k)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon.$$

故 f 在 $[a, b]$ 上可积. □

例题 0.8 设 f 在 $[a, b]$ 上非负可积. 求证: 数列 $I_n = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

注 当 f 是连续函数时, 可以进一步证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ (见例题??).

证明 要比较 I_n 与 I_{n+1} 的大小, 就要比较 f^n 的积分与 f^{n+1} 之间的关系. 这可以利用 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^n(x) dx &= \int_a^b 1 \cdot f^n(x) dx \\ &\leq \left(\int_a^b 1^{n+1} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{n}{n+1}},\end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故 $\{I_n\}$ 是单调递增数列.

□

例题 0.9 设 f 在 $[a, b]$ 上连续可导, 且 $f(a) = 0$. 求证: 对 $p \geq 1$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx.$$

证明 为了建立 $|f|^p$ 的积分与 $|f'|^p$ 的积分之间的关系, 先建立 $|f|$ 与 $|f'|$ 的积分的关系. 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

所以对于 $p > 1$ 应用 Hölder 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \left(\int_a^x 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (x-a)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 因而

$$|f(x)|^p \leq (x-a)^{p-1} \int_a^x |f'(t)|^p dt, \quad x \in [a, b].$$

注意到上式对 $p = 1$ 也是成立的. 上式两边在 $[a, b]$ 上积分, 可得

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \int_a^b (x-a)^{p-1} \left(\int_a^x |f'(t)|^p dt \right) dx.$$

注意到 $\int_a^x |f'(t)|^p dt$ 是 $|f'|^p$ 的一个原函数. 对上式右端分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p dx &\leq \frac{1}{p} (x-a)^p \int_a^x |f'(t)|^p dt \Big|_a^b - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} (b-a)^p \int_a^b |f'(t)|^p dt - \frac{1}{p} \int_a^b (x-a)^p |f'(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b [(b-a)^p - (x-a)^p] |f'(x)|^p dx.\end{aligned}$$

□

例题 0.10 设 f 是 $[0, a]$ 上的连续函数, 且存在正常数 M, c 使得

$$|f(x)| \leq M + c \int_0^x |f(t)| dt,$$

求证: $|f(x)| \leq M e^{cx} \quad (\forall x \in [0, a])$.

证明 证明注意对于包含变上限积分的不等式常可以转化为微分的不等式. 令

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt,$$

则条件中的不等式就是

$$F'(x) \leq M + cF(x).$$

令

$$G(x) = F(x)e^{-cx} + \frac{M}{c}e^{-cx},$$

则有

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x)e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &= |f(x)|e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &\leq (M + cF(x))e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} = 0. \end{aligned}$$

这说明 G 在 $[0, a]$ 上单调递减. 因为 $G(0) = \frac{M}{c}$, 所以 $G \leq \frac{M}{c}$. 因而

$$F(x) + \frac{M}{c} \leq \frac{M}{c}e^{cx}.$$

再结合条件可得 $|f(x)| \leq M + cF(x) \leq Me^{cx}$.

□

例题 0.11 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上连续且对任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

求证: $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$.

注 结论中的 $\frac{\pi}{4}$ 是最佳的, 这只要取 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 即可验证.

证明 结论中出现 π 且条件中要求 $x, y \in [0, 1]$. 因此将条件中的 x, y 分别换成 $\sin t$ 和 $\cos t$, 有

$$f(\cos t)\sin t + f(\sin t)\cos t \leq 1, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

将此式在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

由区间再现恒等式可知上式左端的两个积分相等. 因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t dt \leq \frac{\pi}{4}.$$

作变换 $\sin t = x$ 即得 $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$.

□

例题 0.12 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上有可积的导函数且满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 求证: 对任意 $a \geq 0$ 有

$$\int_0^1 |af(x) + f'(x)|dx \geq 1.$$

证明 因为 $e^{-ax} \geq e^{-a}$ ($0 \leq x \leq 1$), 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 |af(x) + f'(x)|dx &= \int_0^1 |(e^{ax}f(x))'e^{-ax}|dx \geq e^{-a} \int_0^1 |(e^{ax}f(x))'|dx \\ &\geq e^{-a} \left| \int_0^1 (e^{ax}f(x))'dx \right| = e^{-a} |e^a f(1) - f(0)| = 1. \end{aligned}$$

□

例题 0.13 设 f 在 $[0, 2]$ 上可导且 $|f'| \leq 1, f(0) = f(2) = 1$. 求证:

$$1 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 3$$

证明 由 Taylor 中值定理可知, 存在 $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [1, 2]$, 使得

$$f(x) = 1 + f'(\xi_1)x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$f(x) = 1 + f'(\xi_2)(x - 2), \forall x \in [1, 2].$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 [1 + f'(\xi_1)x] dx + \int_1^2 [1 + f'(\xi_2)(x - 2)] dx \\ &= 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2). \end{aligned}$$

由 $|f'| \leq 1$ 可知

$$1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2 + \frac{f'(\xi_1)}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2) \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

故


$$1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3.$$

□

例题 0.14 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上连续可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当 $f(x) = Ax(1-x)$, 其中 A 是常数.

 **笔记** 对于在两个端点取零值的连续可导函数, 可以考虑 $(ax+b)f'(x)$ 的积分, 并利用分部积分公式得到一些结果.

证明 设 t 是任意常数, 有

$$\int_0^1 (x+t)f'(x) dx = (x+t)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

于是利用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 &= \left(\int_0^1 (x+t)f'(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_0^1 (x+t)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{3} + t + t^2 \right) \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

取 $t = -\frac{1}{2}$, 即得所证不等式. 当所证不等式成为等式时, 上面所用的 Cauchy 不等式应为等式. 因此, 存在常数 C 使得 $f'(x) = C \left(x - \frac{1}{2} \right)$. 注意到 $f(0) = f(1) = 0$, 可得 $f(x) = Ax(1-x)$, 这里 A 为任意常数.

□

例题 0.15 设 f, g 是区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 使得对 $[0, 1]$ 上任意满足 $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ 的连续可导函数 φ 有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

求证: f 可导, 且 $f' = g$.

证明 设

$$c = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt$$

考察函数

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt + c$$

显然 G 可导且 $G'(x) = g(x)$, $G(1) = \int_0^1 g(t)dt + c$. 只需证明 $f = G$. 令

$$\varphi(x) = \int_0^x [f(t) - G(t)] dt$$

则 φ 可导, 且 $\varphi(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 G(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt - \left[tG(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 t g(t)dt \right] \\ &= \int_0^1 f(t)dt - G(1) + \int_0^1 t g(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt - c + \int_0^1 t g(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

根据条件有

$$\int_0^1 [f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)] dx = 0$$

因为

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = G(x)\varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^1 G(x)\varphi'(x)dx$$

所以

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)] \varphi'(x)dx = 0$$

注意到 $\varphi' = f - G$. 我们有

$$\int_0^1 [f(x) - G(x)]^2 dx = 0$$

于是 $f = G$.

□

命题 0.3

设 f 是区间 $[a, b]$ 上的严格单调递减连续函数, $f(a) = b, f(b) = a, g$ 是 f 的反函数. 求证:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

特别地, 对 $p > 0, q > 0$ 取 $f(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{p}}, g(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{q}}$, 可得

$$\int_0^1 (1 - x^p)^{\frac{1}{q}} dx = \int_0^1 (1 - x^q)^{\frac{1}{p}} dx.$$

◆

证明 因为可以用在 a, b 分别插值于 $f(a), f(b)$ 的严格单调递减的多项式 (也可以用 Bernstein 多项式) 在 $[a, b]$ 上一致逼近 $f(x)$, 所以只需对 f 是连续可微函数的情况证明.

作变换 $x = f(t)$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x) dx &= \int_b^a g(f(t))f'(t) dt = \int_b^a t f'(t) dt \\ &= t f(t) \Big|_b^a - \int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt\end{aligned}$$

故所证等式成立.

□

例题 0.16 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的连续可微函数. 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

证明 由于有限闭区间上连续函数可取到最大值, 可设 $\max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(y)$. 因此对任意 $x \in [a, b]$, 有

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) - f(x) = f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt$$

关于 x 在 $[a, b]$ 上积分, 即得

$$(b-a) \max_{a \leq x \leq b} f(x) - \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)| dt.$$

两边除以 $b-a$ 即得所证.

□

例题 0.17 设 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f \in C^1[0, 1]$ 且满足 $f(1) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

证明 设 $\alpha \in [0, 1)$ 且 $\alpha \neq \frac{1}{2}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式, 对 $x \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_x^1 f'(t) dt \right)^2 = \left(\int_x^1 t^{-\alpha} \cdot t^{\alpha} f'(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int_x^1 t^{-2\alpha} dt \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{1-2\alpha} (1-x^{1-2\alpha}) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

因此, 由分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &\leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 (1-x^{1-2\alpha}) \left(\int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right) dx \\ &= \frac{1}{1-2\alpha} \left[\left(x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) \int_x^1 t^{2\alpha} |f'(t)|^2 dt \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left(x - \frac{x^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right) x^{2\alpha} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{1-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx - \frac{1}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (12)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \left| \int_1^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left(\int_x^1 |f'(t)| dt \right) dx \\ &= x \left(\int_x^1 |f'(t)| dt \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 x |f'(x)| dx \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 x |f'(x)| dx. \quad (13)$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 &\leq \left(\int_0^1 x^{\frac{1-2\alpha}{2}} \cdot x^{\frac{2\alpha+1}{2}} |f'(x)| dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 x^{1-2\alpha} dx \right) \left(\int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2-2\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx$$

结合式 (12), 可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{1}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx - \frac{3-4\alpha}{(2\alpha-1)(2-2\alpha)} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx \quad (14)$$

在上式中取 $\alpha = \frac{3}{4}$, 即得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq 4 \int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx. \quad (15)$$

对 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, 将式 (14) 两边乘以 $4(1-2\alpha)(2-2\alpha)$ 再与式 (15) 相加可得

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{4}{3-4\alpha} \int_0^1 x^{2\alpha+1} |f'(x)|^2 dx.$$

□

例题 0.18 设 f 在 $[0, 1]$ 上非负且连续可导. 求证:

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

证明 记 $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$, 则有

$$-Mf(x) \leq f(x)f'(x) \leq Mf(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

因此

$$-M \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f^2(0) \leq M \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

上式两边乘以 f 得

$$-Mf(x) \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{2} f^3(x) - \frac{1}{2} f^2(0)f(x) \leq Mf(x) \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

将上式关于变量 x 在 $[0, 1]$ 上积分, 得

$$-M \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \leq M \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

结论得证.

□

例题 0.19 设 f 在 $[0, 1]$ 上非负单调递增连续函数, $0 < \alpha < \beta < 1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

并且 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

注 当函数具有单调性时, 小区间上的积分与整体区间上的积分可比较大小.

证明 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

因而由 f 的递增性, 有

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \leq (\beta - \alpha)f(\beta)$$

于是

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^1 f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^1 f(\beta) dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + (1-\beta)f(\beta) \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \frac{1-\beta}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\
&= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.
\end{aligned}$$

取正整数 n 使得 $\alpha + \frac{1}{n} < \beta$. 构造函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ n(x-\alpha), & \alpha < x \leq \alpha + \frac{1}{n}, \\ 1, & \alpha + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \alpha - \frac{1}{2n}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \beta - \alpha - \frac{1}{2n}.$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 f_n(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx} = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

故题中 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换成更大的数.

□

例题 0.20 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续的二阶导函数, $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$. 求证:

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

并求上式成为等式的 f .

注 当 f 在端点的值为零, f' 在端点的值确定时, 可以考虑 f'' 与线性函数的乘积的积分.

证明 根据分部积分, Newton-Leibniz 公式和题设条件, 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 x(f''(x) - a)^2 dx = \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \int_0^1 x f''(x) dx + a^2 \int_0^1 x dx \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a \left(x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \right) + \frac{a^2}{2} \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - 2a (f'(1) - f(1) + f(0)) + \frac{a^2}{2} \\
&= \int_0^1 x(f''(x))^2 dx - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 x(f''(x))^2 dx \geq \frac{a^2}{2}$$

等式成立时, 有

$$f''(x) = a$$

即 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$. 因为 $f(0) = f(1) = 0, f'(1) = \frac{a}{2}$, 所以 $c = 0, b = -\frac{a}{2}$. 因此

$$f(x) = \frac{1}{2}ax(x-1).$$

□

例题 0.21 设 n 是正整数, 且 $m > 2$. 求证:

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left(\frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

注 当利用积分的可加性把区间 $[a, b]$ 上的积分分为区间 $[a, c]$ 和区间 $[c, b]$ 上的积分之和时, 为了得到较好的估计, 可以根据情况选择适当的 c .

证明 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leq n \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leq 1, \quad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

设 $a \in (0, \frac{\pi}{2})$. 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt &= \int_0^a t \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^m dt \\ &\leq \int_0^a t n^m dt + \int_a^{\pi/2} t \left(\frac{1}{2t/\pi} \right)^m dt \\ &= \frac{1}{2} n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^m \left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{(\pi/2)^{m-2}} \right). \end{aligned}$$

易知函数 $g(a) = \frac{1}{2} n^m a^2 + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^m \frac{1}{a^{m-2}}$ 当 $a = \frac{\pi}{2n}$ 时取最小值. 于是将上面的 a 换成 $\frac{\pi}{2n}$ 可得

$$\int_0^{\pi/2} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^m dt \leq \left(\frac{m \cdot n^{m-2}}{8(m-2)} - \frac{1}{4(m-2)} \right) \pi^2.$$

□

例题 0.22 设 $n \geq 1$ 是自然数. 求证:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

证明 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt + \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt.$$

因为当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, 所以

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{1}{2t/\pi} dt = \frac{\pi}{2} \ln n.$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

用数学归纳法容易证明当 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 有 $|\sin nt| \leq n \sin t$. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt &= \int_0^{\pi/(2n+1)} \left(\frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt = \int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \int_0^{\pi/(2n+1)} 2n \cos t dt + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} < 2n \sin \frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n} \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \left(2n + \frac{1}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1}, \\ - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt &= - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \left(\frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} + \cos 2nt \right) dt < - \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2n} \cos 2nt dt = \frac{1}{2n} \sin \frac{\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi/2n} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \left(2n + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} < \left(2n + \frac{1}{n} \right) \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n^2+1}{2n^2+n} \pi.$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n}\pi + \frac{\pi}{2} \ln n.$$

两边同时除以 π 得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt < \frac{2n^2+1}{2n^2+n} + \frac{1}{2} \ln n.$$

□

命题 0.4

设 f 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, 满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且 $f''(x) > 0$ ($0 < x < a$). 求证: 对任意 $x \in (0, a)$, 有

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2} dt < x + \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2+1}}. \quad (16)$$

▲

注 式 (16) 左端是弧长计算公式, 不等式 (16) 的几何意义是: 光滑下凸曲线段的起点 A 和终点 B 处的切线在曲线凸出的一侧相交于 C 点, 则直线段 AC 与 BC 的长度之和大于这条曲线段的长度.

证明 将式 (16) 右端第一项 x 移到左端, 有

$$\int_0^x \left(\sqrt{1+(f'(t))^2} - 1 \right) dt = \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2+1}} \cdot f'(t) dt.$$

因为 $f'(t)$ 和 $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$ 都是单调递增函数, 所以 $\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2+1}}$ 是单调递增函数. 因此

$$\int_0^x \left(\sqrt{1+(f'(t))^2} - 1 \right) dt < \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2+1}} \cdot \int_0^x f'(t) dt = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2+1}}.$$

□

例题 0.23 f 是区间 $[0, 1]$ 上的正连续函数, $k \geq 1$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} dx \int_0^1 \frac{1}{f^k(x)} dx, \quad (17)$$

并讨论等号成立的条件.

证明 当 $k \geq 1$ 时, 函数 $\frac{t^k}{1+t}$ 和 t^{k+1} 都是单调递增的. 因此对于任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$\frac{1}{f^k(x)f^k(y)} \left(\frac{f^k(x)}{1+f(x)} - \frac{f^k(y)}{1+f(y)} \right) (f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)) \geq 0, \quad (18)$$

即

$$\frac{f(x)}{1+f(y)} + \frac{f(y)}{1+f(x)} \leq \frac{f^{k+1}(x)}{1+f(x)} \cdot \frac{1}{f^k(y)} + \frac{f^{k+1}(y)}{1+f(y)} \cdot \frac{1}{f^k(x)}.$$

在上式两端分别关于变量 x, y 在区间 $[0, 1]$ 上积分, 即得所证.

要使式 (17) 成为等式, 必须式 (18) 成为等式. 因此对任意 $x, y \in [0, 1]$, 有 $f(x) = f(y)$, 即 f 在 $[0, 1]$ 上为常数.

□

例题 0.24 设 $b \geq a+2$. 函数 f 在 $[a, b]$ 上为正连续函数, 且

$$\int_a^b \frac{1}{1+f(x)} dx = 1.$$

求证:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx \leq 1. \quad (19)$$

并求式 (19) 成为等式的条件.

证明 令 $g(x) = \frac{b-a}{1+f(x)}$, 则 g 在 $[a, b]$ 上连续且 $\int_a^b g(x) dx = b-a$. 从 g 的定义可得 $f(x) = \frac{b-a-g(x)}{g(x)}$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} &= \frac{\frac{b-a-g(x)}{g(x)}}{b-a-1+\left(\frac{b-a-g(x)}{g(x)}\right)^2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{g(x)(b-a-g(x))}{g^2(x)-2g(x)+b-a} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[-1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{(g(x)-1)^2+b-a-1} \right] \leq \frac{1}{b-a} \left[-1 + \frac{(b-a-2)g(x)+b-a}{b-a-1} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx &\leq \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)g(x)+1}{b-a-1} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a-2)(b-a)+b-a}{b-a-1} = 1. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $g(x) = 1$, 即 $f(x) = b-a-1$ 时成立.

□

例题 0.25 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续函数, 且在 $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ 上等于零. 又设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \quad (h > 0).$$

求证:

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

证明 作变换 $u = t - x$, 得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt = \int_{-h}^h |f(u+x)| du.$$

因此

$$\int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du.$$

作变换 $v = u + x$, 得

$$\int_a^b |f(u+x)| dx = \int_{a+u}^{b+u} |f(v)| dv = \begin{cases} \int_a^b |f(v)| dv, & u \geq 0, \\ \int_a^{b+u} |f(v)| dv, & u < 0 \end{cases} \leq \int_a^b |f(v)| dv.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b |\varphi(x)| dx &= \int_a^b \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \right| dx \leq \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt dx \\ &= \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{-h}^h |f(u+x)| du dx = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(u+x)| dx du \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_a^b |f(v)| dv du = \int_a^b |f(v)| dv. \end{aligned}$$

□

例题 0.26 设 f 在区间 $[1, +\infty)$ 上连续并满足

$$x \int_1^x f(t) dt = (x+1) \int_1^x t f(t) dt. \quad (20)$$

求 f .

解 假设 f 是满足条件的连续函数, 则对式 (20) 两边求导得

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x t f(t) dt + x^2 f(x). \quad (21)$$

由此可知, $f(1) = 0$, 且当 $x \geq 1$ 时, f 可导. 对式 (21) 两边求导得

$$f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x),$$

即

$$f'(x) = \frac{1-3x}{x^2} f(x), \quad x \geq 1. \quad (22)$$

所以

$$|f'(x)| \leq 2|f(x)|. \quad (23)$$

令 $g(x) = e^{-4x} f^2(x)$, 则有

$$g'(x) = 2e^{-4x} (f(x)f'(x) - 2f^2(x)).$$

结合式 (23) 可知 $g' \leq 0$, 这说明 g 单调递减. 因为 $g(1) = 0$, 所以 $g \leq 0$. 但从 g 的定义知 $g \geq 0$. 于是 $g = 0$, 从而 $f = 0$.

实际上, 由 (22) 可解得 $f(x) = Ce^{\int_1^x \frac{1-3t}{t^2} dt} = Ce^{1-\frac{1}{x}-3\ln x}$, 再将 $f(1) = 0$ 代入得 $C = 0$. 故 $f \equiv 0$.

总之, 原方程 (20) 的解只有 $f \equiv 0$.

□

例题 0.27 设 f 在任意有限区间上可积, 且对任意 x 及任意 $a \neq 0$ 满足

$$\frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = f(x).$$

试求函数 f .

解 易知线性函数满足上面的式子. 下面证明满足上式的函数必是线性函数. 由条件知, 对任意 x 和 a , 有

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = 2af(x).$$

因此

$$2af(x+y) = \int_{x+y-a}^{x+y+a} f(t) dt = \int_{y+x-a}^{y+a-x} f(t) dt + \int_{y+a-x}^{x+y+a} f(t) dt = 2(a-x)f(y) + 2xf(y+a).$$

取 $a = 1, y = 0$ 就得

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0),$$

即 f 是线性函数.

□

例题 0.28 设 f 是 \mathbb{R} 上有下界的连续函数. 若存在常数 $a \in (0, 1]$ 使得

$$f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt$$

为常数, 则 f 无穷可微且它的任意阶导函数都是非负的.

证明 不妨设 $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ (不然将 f 换为 $f - m$ 之后再证明). 此时 $f \geq 0$. 记

$$A = f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt, \quad (24)$$

则 $f \geq A$. 因此, $A \leq 0$. 由式 (24) 知 f 无穷可微, 且

$$f'(x) = af(x+1) - af(x). \quad (25)$$

记 $a_1 = a$, 则

$$f'(x) + a_1 f(x) \geq 0.$$

假设存在 $a_n > 0$ 使得

$$f'(x) + a_n f(x) \geq 0. \quad (26)$$

则 $(e^{a_n x} f(x))' \geq 0$. 这说明函数 $e^{a_n x} f(x)$ 是递增的. 由式 (24) 可得

$$\begin{aligned} f(x) &\leq a \int_x^{x+1} f(t) dt = a \int_x^{x+1} e^{a_n t} f(t) e^{-a_n t} dt \\ &\leq a e^{a_n(x+1)} f(x+1) \int_x^{x+1} e^{-a_n t} dt \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} a f(x+1) \\ &= \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} (f'(x) + a f(x)). \end{aligned}$$

由此可得

$$f'(x) + a_{n+1} f(x) \geq 0, \quad (27)$$

其中

$$a_{n+1} = a - \frac{a_n}{e^{a_n} - 1}.$$

若 $a_{n+1} \leq 0$, 则由 (27) 得 $f' \geq 0$. 若 $a_{n+1} > 0$, 则接着可构造 a_{n+2} . 若 $\{a_n\}$ 均为正的, 则 $\{a_n\}$ 为递减正数列, 设其极限为 $r \geq 0$. 若 $r > 0$, 则从上式得 $r = a - \frac{r}{e^r - 1}$, 即 $a = \frac{r e^r}{e^r - 1} > 1$. 这与条件不符, 因此必有 $r = 0$. 在式 (26) 中令 $n \rightarrow +\infty$, 即得对一切 x 有 $f'(x) \geq 0$. 注意到

$$f^{(n)}(x) - a \int_x^{x+1} f^{(n)}(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

因而将前面的 f 换为 f' , 可以得到 $f''(x) \geq 0$, 依次可以证明 $f^{(n)}(x) \geq 0$.

□

例题 0.29 求所有连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和任意正整数 n , 有

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt = n f(x) + \frac{1}{2}.$$

解 设 f 是要求的一个连续函数, 则 f 是可导的且

$$n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (28)$$

由此知 f 二阶可导, 且

$$n \left[f'\left(x + \frac{1}{n}\right) - f'(x) \right] = f''(x). \quad (29)$$

将 (28) 中的 n 换成 $2n$, 得

$$2n \left[f\left(x + \frac{1}{2n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (30)$$

将上式中的 x 换成 $x + \frac{1}{2n}$ 得

$$2n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right). \quad (31)$$

将式 (28) 两边乘以 2 再减去式 (30) 两边, 得

$$2n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] = f'(x). \quad (32)$$

从式 (31) 和式 (32) 得

$$f'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{R}.$$

由 (29) 式可知 $f'' = 0$. 因而存在常数 a, b 使得 $f(x) = ax + b$. 代入题设条件可得 $a = 1$. 于是 $f(x) = x + b$, 这里 b 是任意常数.

□

例题 0.30 设 $f \in C[-1, 1]$ 且对任意整数 n 满足

$$\int_0^1 f(\sin(nx)) dx = 0. \quad (33)$$

求证: 对任意 $x \in [-1, 1]$ 有 $f(x) = 0$.

证明 在式 (33) 中取 $n = 0$, 可得 $f(0) = 0$. 对任意非零整数 n , 将式 (33) 中的积分作变换 $t = nx$ 可得

$$\int_0^n f(\sin t) dt = 0.$$

令

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(\sin t) dt,$$

则 F 可导, 且 $F(n) = 0$. 对整数 k 有

$$\begin{aligned} F(x + 2k\pi) &= \int_{x+2k\pi}^{x+2k\pi+1} f(\sin t) dt = \int_x^{x+1} f(\sin(t + 2k\pi)) dt \\ &= \int_x^{x+1} f(\sin t) dt = F(x). \end{aligned}$$

因而 $F(n + 2k\pi) = F(n) = 0$. 这说明 F 在集合 $A = \{n + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$ 上取值为 0. 由于集合 A 在 \mathbb{R} 上是稠密的, 由 F 的连续性可知 $F(x) = 0 (x \in \mathbb{R})$. 于是

$$F'(x) = f(\sin(x+1)) - f(\sin x) = 0.$$

这说明 $f(\sin x)$ 是以 1 和 2π 为周期的连续函数. 仍由集合 A 的稠密性可知 $f(\sin x)$ 是常数. 因此 f 在 $[-1, 1]$ 上是常数. 故 $f(x) = f(0) = 0$. □

例题 0.31 设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上可导的凸函数, f' 有界, 试证

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \geq 0.$$

证明 因为 f 是可导的凸函数, 所以 f' 是单调递增的函数. 由 f' 的单调有界性, 知 f' 在 $[0, 2\pi]$ 上可积. 根据分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left(x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin((k-1)\pi + x) dx \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi/n} f' \left(x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) (-1)^{k-1} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} f' \left(x + \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \sin x dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^n \left(f' \left(x + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) - f' \left(x + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) \right) \sin x dx. \end{aligned}$$

注意到 f' 是单调递增的, 即知 $a_n \geq 0$. □

例题 0.32 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续可微, $f(0) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^1 (f'(x))^2 dx, \quad (34)$$

且右边的系数 4 是最佳的.

证明 证法一: 因为

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f(x)}{2x},$$

所以

$$(f'(x))^2 = \left[x^{\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' \right]^2 + \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2} \geq \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right) \left(x^{-\frac{1}{2}} f(x) \right)' + \frac{f^2(x)}{4x^2}.$$

因而

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2} f^2(1) + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{f^2(x)}{4x^2} dx,$$

即所证不等式 (34) 成立.

若存在常数 $c \in (0, 4)$ 使得

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq c \int_0^1 (f'(x))^2 dx \quad (35)$$

对任意满足条件的 f 成立, 则对 $\delta \in (0, 1)$ 取

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [\delta, 1], \\ \frac{3}{2\sqrt{\delta}}x - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x^2, & x \in [0, \delta]. \end{cases}$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx &= \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{2\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^{\delta} \left(\frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{4\delta^3} \right) dx + \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{19}{12} + \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx, \\ \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}}x \right)^2 dx + \int_{\delta}^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int_0^{\delta} \left(\frac{9}{4\delta} - \frac{3x}{\delta^2} + \frac{x^2}{\delta^3} \right) dx + \frac{1}{4} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{13}{12} + \frac{1}{4} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

因此式(35)导致

$$\left(1 - \frac{c}{4}\right) \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{13}{12}c - \frac{19}{12}.$$

此式当 δ 充分小时是不成立的. 这个矛盾说明 4 是最佳的.

证法二: 利用 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 f'(xt) dt \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \stackrel{\text{换元}}{=} \int_0^1 \left(\frac{\int_0^t |f'(x)|^2 dx}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从上式推导可以看出, 对于不恒为零的 f , 严格不等号成立.

为说明相关常数不可改进, 任取 $\varepsilon \in (0, 1)$, 考察不恒为零的 $\bar{f} \in C[\varepsilon, 1]$ 使得

$$\frac{\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\bar{f}(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} = \lambda \equiv \sup_{\substack{f \in C[\varepsilon, 1] \\ f \neq 0}} \frac{\int_{\varepsilon}^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx}{\int_{\varepsilon}^1 |f'(x)|^2 dx}.$$

这样的 \bar{f} 的存在性一般需要用泛函分析. 这里只作形式推导. 任取 $\varphi \in C_c^1(\varepsilon, 1)$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \frac{\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\bar{f}(x) + s\varphi(x)|^2}{x^2} dx}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x) + s\varphi'(x)|^2 dx} \bigg|_{s=0} \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\bar{f}(x)\varphi(x)}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^1 \bar{f}'(x)\varphi'(x) dx \right) \\ &= \frac{2\lambda}{\int_{\varepsilon}^1 |\bar{f}'(x)|^2 dx} \int_{\varepsilon}^1 \left(\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{(x+\varepsilon)^2} \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

因此, 尝试寻找 \bar{f} 满足

$$\bar{f}''(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{f}(x)}{x^2} = 0, \quad x \in [\varepsilon, 1].$$

若取 $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\bar{f}(x) = x^\alpha$ 满足上述方程. 对应的 $\lambda = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$, 为使得 λ 最大, 取 $\alpha = \frac{1}{2}$.

以上讨论启发我们考虑

$$f'_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

则

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, & x \in [0, \varepsilon], \\ \sqrt{x} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, & x \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

直接计算得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 \frac{|f_\varepsilon(x)|^2}{x^2} dx}{\int_0^1 |f'_\varepsilon(x)|^2 dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{4} - \ln \varepsilon - \frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{\ln \varepsilon}{4}} = 4.$$

这就表明不等式中的常数 4 是最佳的.

□

例题 0.33 设 $f, g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ 都是连续函数, 且 $f \neq g$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. 定义数列

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

求证: $\{I_n\}$ 严格单调递增, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

证明 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \cdot \sqrt{g(x)} dx \leq \left(\int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \frac{f^2(x)}{g(x)} dx$$

即 $I_0 \leq I_1$, 等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = c\sqrt{g(x)}$, 即 $f(x) = cg(x)$. 再由条件 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

可得 $c = 1$. 这与 $f \neq g$ 矛盾, 故 $I_0 < I_1$.

假设 $I_0 < I_1 < \dots < I_n$, 根据 Hölder 不等式, 有

$$I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \cdot g^{\frac{(n+1)^2}{n+2} - n}(x) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_a^b \left(\frac{f^{n+1}(x)}{g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}}(x)} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}} \left(\int_a^b \left(g^{\frac{(n+1)^2}{n+2}-n}(x) \right)^{n+2} dx \right)^{\frac{1}{n+2}} \\ &= I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_0^{\frac{1}{n+2}} < I_{n+1}^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot I_n^{\frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

因而 $I_n < I_{n+1}$, 这样, 根据数学归纳法原理, 就证明了 $\{I_n\}$ 严格单调递增.

若对任意 $x \in (a, b)$, 有 $g(x) \geq f(x)$, 则 $g(x) - f(x) \geq 0$. 根据条件 $g(x) - f(x)$ 连续且满足 $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = 0$, 这可推出 $f = g$, 与条件矛盾! 因此必存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) > g(x_0)$, 因而存在正数 $\delta < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ 使得

$$f(x) > g(x), \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

记 $m = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $m > 1$, 因此

$$I_n \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^n f(x) dx \geq m^n \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$. □

例题 0.34 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ ($x \in \mathbb{R}$). 如果 g 是 \mathbb{R} 上的递减函数, 求证: $f \equiv 0$.

证明 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 F 可导且 $F' = f$. 由条件知

$$(F^2(x))' = 2F'(x)F(x) = 2g(x)$$

是单调递减函数. 注意到 $F(0) = 0$. 有 $(F^2(x))' \leq 0$ ($x > 0$), $(F^2(x))' \geq 0$ ($x < 0$). 这说明 $F^2(x)$ 当 $x \geq 0$ 时单调递减, 当 $x \leq 0$ 时单调递增. 因此 F^2 的最大值为 $F^2(0) = 0$. 但显然 $F^2 \geq 0$. 故 $F = 0$, 于是 $f = F' = 0$. □

例题 0.35 设 $f \in C[0, 1]$. 如果对任意 $x \in [0, 1]$ 有

$$\int_0^x f(t) dt \geq f(x) \geq 0,$$

求证: $f(x) \equiv 0$.


证明 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则 F 可导且 $F' = f$. 由条件知 $F(x) \geq F'(x)$. 因此 $(e^x F(x))' \leq 0$, 即 $e^x F(x)$ 单调递减. 由 $F(0) = 0$, 得 $F(x) \leq 0$. 但由条件 $F(x) \geq f(x) \geq 0$, 故 $F(x) = 0$, 于是 $f(x) = F'(x) = 0$. □

命题 0.5

设 $g(x) \in C^2[0, 1]$ 是递增的下凸函数, 则有

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 |g'(x)|^2 dx, \quad (36)$$

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 |g'(x)|^2 dx. \quad (37)$$

 **笔记** 这题的下确界 \inf 可以改成最小值 \min , 因为可取到等号.

证明 我们令

$$F(x) = \int_x^1 f(y) dy + g(x),$$

则 $F(x^2) \geq F(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, 因此由 F 连续性, 就有

$$F(x) \geq F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \geq F\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \geq \cdots \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = F(1), \quad \forall x \in (0, 1],$$

于是我们有 $F(x) \geq F(1), \forall x \in [0, 1]$, 现在就有

$$\int_x^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x), \forall x \in [0, 1],$$

因此

$$\left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx : f \in C[0, 1], \int_{x^2}^x f(y)dy \geq g(x) - g(x^2) \right\} \subset \left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx : f \in C[0, 1], \int_{x^2}^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x^2) \right\}.$$

故

$$\inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y)dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

取 $f(y) = g'(y)$, 可以知道(36)(37)式等号都成立. 从而

$$\int_0^1 |g'(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y)dy \geq g(x) - g(x^2)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

故只须证明

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{f \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x)}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \\ \iff & \text{对 } \forall f \in C[0, 1] \text{ 且 } \int_x^1 f(y)dy \geq g(1) - g(x), \text{ 都有 } \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

于是设 $f \in C[0, 1]$ 且 $\int_x^1 f(y)dy$, 由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \int_0^1 |f(x)|^2 dx & \geq \left(\int_0^1 f(x)g'(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^1 g'(x)d \int_x^1 f(y)dy \right)^2 \\ & = \left(-g'(0) \int_0^1 f(y)dy - \int_0^1 \left(\int_x^1 f(y)dy \right) g''(x)dx \right)^2 \\ & = \left(g'(0) \int_0^1 f(y)dy + \int_0^1 \left(\int_x^1 f(y)dy \right) g''(x)dx \right)^2 \\ & \geq \left(g'(0) \int_0^1 f(y)dy + \int_0^1 (g(1) - g(x))g''(x)dx \right)^2 \\ & = \left(g'(0) \int_0^1 f(y)dy - g'(0)(g(1) - g(0)) + \int_0^1 |g'(x)|^2 dx \right)^2 \\ & \geq \left(\int_0^1 |g'(x)|^2 dx \right)^2 \end{aligned}$$

因此 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |g'(x)|^2 dx$. 这样我们就完成了证明. □

例题 0.36 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足对任意 $x \in [0, 1]$, 都有

1. $\int_{x^2}^x f(t)dt \geq \frac{x^2 - x^4}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{10}$.
2. $\int_{x^2}^x f(t)dt \geq \frac{x^3 - x^6}{2}$. 证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{9}{20}$.

证明

1. **证法一:** 由命题 0.5 可得

$$\inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_{x^2}^x f(y)dy \geq \frac{x^2 - x^4}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \inf_{\substack{f(x) \in C[0, 1], \\ \int_x^1 f(y)dy \geq \frac{1 - x^2}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{3}$$

证法二:注意到

$$\int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) dt = \int_0^1 \left(\int_t^{\sqrt{t}} f(t) dx \right) dt = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(t) dt \right) dx \geq \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2} dx = \frac{1}{15}.$$

从而待定 $a > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 [af(x) - (\sqrt{t}-t)]^2 dx \\ &= a^2 \int_0^1 f^2(x) dx - 2a \int_0^1 (\sqrt{t}-t) f(t) dt + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt \\ &\leq a^2 \int_0^1 f^2(x) dx - \frac{2}{15}a + \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{15a} - \frac{1}{30a^2}.$$

当 $a = 2$ 时, 上式右边取到最大值 $\frac{2}{15}$. 故

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

证法三: 条件可得, 对 $\forall a \in (0, 1)$, 都有

$$\int_{a^{2^n}}^a f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{a^{2^k}}^{a^{2^{k-1}}} f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{a^{2^k} - a^{2^{k+1}}}{2} = \frac{a^2 - a^{2^{n+1}}}{2}.$$

于是

$$\int_0^a f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a^{2^n}}^a f(t) dt \geq \frac{a^2}{2}.$$

进而

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a f(t) dt \geq \frac{1}{2}.$$

故由 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

2. 由命题 0.5 可得

$$\inf_{\substack{f(x) \in C[0,1], \\ \int_{x^2}^x f(y) dy \geq \frac{x^3-x^6}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \inf_{\substack{f(x) \in C[0,1], \\ \int_x^1 f(y) dy \geq \frac{1-x^3}{2} - 0}} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{9}{20}$$

□

例题 0.37 设 f_1, f_2, \dots, f_n 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

证明 记 $a_k = \int_0^1 f_k(x) dx, k = 1, 2, \dots, n$. 若存在 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_k = 0$, 则结论显然成立. 下设 $a_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$.

于是由均值不等式可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\int_0^1 f_k(x) dx}{a_k} = 1.$$

故由积分不等式知, 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1 \iff \prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

□