0.1 复数的定义及其运算

定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a, b), 如果用 $\mathbf{R}$ 记实数的全体,$\mathbf{C}$ 记复数的全体, 那么

$$\mathbf{C} = \{(a, b) : a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;$(0, 0)$ 是零元素,$(-a, -b)$ 是 (a, b) 的负元素;$(1, 0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a, b) 有逆元素 $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$; 此外,$\mathbf{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此,$\mathbf{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbf{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbf{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 显然,$(a, 0) \to a$ 是 $\tilde{\mathbf{R}}$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个同构对应, 因此, 实数域 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a, 0) = a$. 在 $\mathbf{C}$ 中,$(0, 1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用 i 记 $(0, 1)$ 这个元素, 于是有 $\mathrm{i}^2 = -1$. 由于 $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b\mathrm{i}$, 于是每一个复数 (a, b) 都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\mathrm{i}.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a, b) 来记复数, 而直接用 $z = a + b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的实部,b 称为 z 的虚部, 分别记为 $a = \mathrm{Re}z$,$b = \mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = (a + b\mathrm{i})\left(\frac{c - d\mathrm{i}}{c^2 + d^2}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z = a + b\mathrm{i}$ 是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**,$\bar{z}$ 称为 z 的**共轭复数**.

♣

定义 0.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a < b$), 其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a, b, 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果 $a < b, b < c$, 那么 $a < c$;

(iii) 如果 $a < b$, 那么对任意 c, 有 $a + c < b + c$;

(iv) 如果 $a < b, c > 0$, 那么 $ac < bc$.

笔记 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 0.1

复数域不是有序域.

证明 如果 $\mathbf{C}$ 是有序域, 那么因为 $\mathrm{i} \neq 0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i} > 0$ 或 $\mathrm{i} < 0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i} > 0$, 则由(iv)得 $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > \mathrm{i} \cdot 0$, 即 $-1 > 0$, 再由(iii), 两端都加 1, 即得 $0 > 1$. 另一方面, 从 $-1 > 0$ 还可得 $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$, 即 $1 > 0$, 这和刚才得到的 $0 > 1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i} < 0$, 两端都加 $-\mathrm{i}$, 得 $0 < -\mathrm{i}$, 再由(iv), 两端乘 $-\mathrm{i}$, 得 $-1 > 0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0 > 1$ 和 $0 < 1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域. □

命题 0.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$;

(ii) $z\bar{z} = |z|^2, \bar{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$;

(iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$;

(iv) $|zw| = |z||w|, \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$;

(v) $|z| = |\bar{z}|, |z| = |-z|$.

证明

(i)

(ii)

(iii)

(iv) 由 (ii) 可得 $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = |z|^2|w|^2$, 进而 $|zw| = |z||w|$.

(v)

□

命题 0.2

设 z 和 w 是两个复数, 那么

(i) $|\mathrm{Re}z| \leqslant |z|, |\mathrm{Im}z| \leqslant |z|$;

(ii) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z = tw$;

(iii) $|z - w| \geqslant \big||z| - |w|\big|$.

证明 (i) 从 $\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用复数运算性质 (ii)(i)和这里的不等式 (i), 即得

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$
$$\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, 这等价于 $z\bar{w} \in \mathbb{R}$ 且 $z\bar{w} \geqslant 0$. 不妨设 $w \neq 0$($w = 0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\bar{w} = \dfrac{|w|^2}{w}$, 故 $z\bar{w} = \dfrac{z}{w}|w|^2 \geqslant 0$. 令 $t = \left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$, 则 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \geqslant 0$, 而且 $z = tw$.

(iii) 当 $|z| = |w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z| > |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|z| = |(z - w) + w| \leqslant |z - w| + |w|,$$

移项可得 $|z-w| \geqslant |z|-|w| = ||z|-|w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z-w=tw$, 即 $z=(t+1)w$.

当 $|z|<|w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|w| = |(w-z)+z| \leqslant |w-z|+|z|,$$

移项可得 $|z-w| = |w-z| \geqslant |w|-|z| = ||z|-|w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $w-z=tz$, 即 $w=(t+1)z$. □

推论 0.1

设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

♡

证明 由命题 0.2(ii)及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 线性相关. □