0.1 像空间和核空间

命题 0.1

设 φ 是向量空间 V 上的线性变换, 则

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1} \supseteq \cdots,$$

$$\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^n \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq V.$$

证明 由像空间和核空间的定义易证. □

例题 0.1 设线性空间 V 上的线性变换 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

求 φ 的核空间与像空间 (用基的线性组合来表示).

证明 像空间通过坐标向量同构于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的子空间, 通过计算可得 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 2, 且 $\boldsymbol{A}$ 的第一、第二列向量线性无关, 于是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的基的坐标向量为 $(1,-1,1,2)', (0,2,2,-2)'$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi = k_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4) + k_2(2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4)$. 核空间通过坐标向量同构于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = 0$ 的解空间, 通过计算可得该方程组的基础解系为 $(-4,-3,2,0)', (-1,-2,0,1)'$, 此即 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基的坐标向量, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi = k_1(-4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) + k_2(-\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4)$. □

命题 0.2

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上的非零线性变换. 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant k)$.

证明 因为 $\varphi_i \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 是 V 的真子空间. 由命题??可知, 有限个真子空间 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 不能覆盖全空间 V, 故必存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 不属于任意一个 $\mathrm{Ker}\varphi_i$, 从而结论得证. □

命题 0.3

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上互不相同的线性变换. 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}), \varphi_2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi_k(\boldsymbol{\alpha})$ 互不相同.

证明 令 $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j (1 \leqslant i < j \leqslant k)$, 则 φ_{ij} 是 V 上的非零线性变换. 由命题??可知, 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, 即 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \neq \varphi_j(\boldsymbol{\alpha}) (1 \leqslant i < j \leqslant k)$, 从而结论得证. □

命题 0.4

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 求证:$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \cdots$.

证明 证法一 (代数方法): 由秩的不等式可得

$$n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) \geqslant 0.$$

上述 $n+2$ 个整数都在 $[0, n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0, n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1})$. 对任意的 $k \geqslant m$, 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k),$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$ 对任意的 $k \geqslant m$ 成立, 结论得证.

证法二 (几何方法): 令 φ 为在 n 维列向量空间上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导的线性变换, 则 φ 在标准基下的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$, 并且不难发现对 $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k$ 在标准基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}^k$. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k) = \dim \mathrm{Im}\varphi^k$, 故原命题等价于

$\dim \mathrm{Im}\varphi^n = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+2} = \cdots$. 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geqslant m$,$\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面,$\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\boldsymbol{\beta})) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geqslant m$ 成立, 取维数后即得结论. □

推论 0.1

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则一定存在整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+2}) = \cdots$.

(2) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 则必存在整数 $m \in [0,n]$, 使得

$$\dim \mathrm{Im}\varphi^m = \dim \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

♡

证明

(1) 证法一 (代数方法): 由秩的不等式可得

$$n = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) \geqslant 0.$$

上述 $n+2$ 个整数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{m+1})$. 对任意的 $k \geqslant m$, 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k-m}\boldsymbol{A}^m) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^m) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k),$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$ 对任意的 $k \geqslant m$ 成立, 结论得证.

证法二 (几何方法): 令 φ 为在 n 维列向量空间上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘法诱导的线性变换, 则 φ 在标准基下的表示矩阵就是 $\boldsymbol{A}$, 并且不难发现对 $\forall k \in \mathbb{N}$,φ^k 在标准基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}^k$. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k) = \dim \mathrm{Im}\varphi^k$, 故原命题等价于 $\dim \mathrm{Im}\varphi^n = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+1} = \dim \mathrm{Im}\varphi^{n+2} = \cdots$. 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geqslant m$,$\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面,$\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\boldsymbol{\beta})) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geqslant m$ 成立, 取维数后即得结论.

(2) 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{n+1}.$$

上述 $n+2$ 个子空间的维数都在 $[0,n]$ 之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数 $m \in [0,n]$, 使得 $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$. 现要证明对任意的 $k \geqslant m$,$\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$. 一方面,$\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$ 是显然的. 另一方面, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha} = \varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\boldsymbol{\beta})) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1},$$

故 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 对任意的 $k \geqslant m$ 成立, 取维数后即得结论.

□

命题 0.5

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在整数 $m\in[0,n]$, 使得

$$\mathrm{Im}\varphi^m=\mathrm{Im}\varphi^{m+1}=\mathrm{Im}\varphi^{m+2}=\cdots,\mathrm{Ker}\varphi^m=\mathrm{Ker}\varphi^{m+1}=\mathrm{Ker}\varphi^{m+2}=\cdots,V=\mathrm{Im}\varphi^m\oplus\mathrm{Ker}\varphi^m.$$

证明 根据推论**??**(2) 可知, 存在整数 $m\in[0,n]$, 使得

$$\mathrm{Im}\varphi^m=\mathrm{Im}\varphi^{m+1}=\mathrm{Im}\varphi^{m+2}=\cdots.$$

注意到对任意的正整数 i,$\mathrm{Ker}\varphi^i\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{i+1}$. 再由维数公式可知, 对任意的 $i\geqslant m$,$\dim\mathrm{Ker}\varphi^i=\dim V-\dim\mathrm{Im}\varphi^i=n-\dim\mathrm{Im}\varphi^m$ 是一个不依赖于 i 的常数, 因此由命题**??**可得

$$\mathrm{Ker}\varphi^m=\mathrm{Ker}\varphi^{m+1}=\mathrm{Ker}\varphi^{m+2}=\cdots.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\varphi^m\cap\mathrm{Ker}\varphi^m$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi^m(\boldsymbol{\beta})$,$\varphi^m(\boldsymbol{\alpha})=0$. 于是 $0=\varphi^m(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^{2m}(\boldsymbol{\beta})$, 即 $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Ker}\varphi^{2m}=\mathrm{Ker}\varphi^m$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi^m(\boldsymbol{\beta})=0$, 这证明了 $\mathrm{Im}\varphi^m\cap\mathrm{Ker}\varphi^m=0$. 又对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 因为 $\varphi^m(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Im}\varphi^m=\mathrm{Im}\varphi^{2m}$, 所以 $\varphi^m(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^{2m}(\boldsymbol{\beta})$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V$. 我们有分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\varphi^m(\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}-\varphi^m(\boldsymbol{\beta})).$$

注意到 $\varphi^m(\boldsymbol{\alpha}-\varphi^m(\boldsymbol{\beta}))=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}-\varphi^m(\boldsymbol{\beta})\in\mathrm{Ker}\varphi^m$, 这就证明了 $V=\mathrm{Im}\varphi^m+\mathrm{Ker}\varphi^m$. 因此

$$V=\mathrm{Im}\varphi^m\oplus\mathrm{Ker}\varphi^m.$$

□

注 也可不证明 $\mathrm{Im}\varphi^m\cap\mathrm{Ker}\varphi^m=0$, 改由线性映射维数公式$\dim\mathrm{Im}\varphi^m+\dim\mathrm{Ker}\varphi^m=n$ 直接得到 $V=\mathrm{Im}\varphi^m\oplus\mathrm{Ker}\varphi^m$.

命题 0.6

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,φ 是 V 上的线性变换, 证明以下 9 个结论等价:

(1) $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Im}\varphi$;

(2) $V=\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Im}\varphi$;

(3) $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=0$;

(4) $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi^2$, 或等价地,$\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\mathrm{Ker}\varphi^2$;

(5) $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi^2=\mathrm{Ker}\varphi^3=\cdots$, 或等价地,$\dim\mathrm{Ker}\varphi=\dim\mathrm{Ker}\varphi^2=\dim\mathrm{Ker}\varphi^3=\cdots$;

(6) $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\varphi^2$, 或等价地,$\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi^2)$;

(7) $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\varphi^2=\mathrm{Im}\varphi^3=\cdots$, 或等价地,$\mathrm{r}(\varphi)=\mathrm{r}(\varphi^2)=\mathrm{r}(\varphi^3)=\cdots$;

(8) $\mathrm{Ker}\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 U, 使得 $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus U$(实际上,$U=\mathrm{Im}\varphi$);

(9) $\mathrm{Im}\varphi$ 存在 φ-不变补空间, 即存在 φ-不变子空间 W, 使得 $V=\mathrm{Im}\varphi\oplus W$(实际上,$W=\mathrm{Ker}\varphi$).

证明 由直和的定义可知 (1) $\Leftrightarrow$ (2) + (3), 于是 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) 都是显然的. 根据交空间维数公式和线性映射维数公式可知

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Im}\varphi)&=\dim\mathrm{Ker}\varphi+\dim\mathrm{Im}\varphi-\dim(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)\\&=\dim V-\dim(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi),\end{aligned}$$

于是 (2) $\Leftrightarrow$ (3) 成立, 从而前 3 个结论两两等价.

(3) $\Rightarrow$ (4): 显然 $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^2$ 成立. 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi^2$, 则 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=0$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\mathrm{Ker}\varphi^2\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$ 也成立, 故 (4) 成立.

(4) $\Rightarrow$ (3): 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi$, 则存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi(\boldsymbol{\beta})$, 于是 $0=\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^2(\boldsymbol{\beta})$, 即 $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Ker}\varphi^2=\mathrm{Ker}\varphi$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}=\varphi(\boldsymbol{\beta})=0$,(3) 成立.

(5) $\Rightarrow$ (4) 是显然的, 下证 (4) $\Rightarrow$ (5): 设 $\mathrm{Ker}\varphi^k=\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ 已对正整数 k 成立, 先证 $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}=\mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ 也成立, 然后用归纳法即得结论. $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ 是显然的. 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$, 即 $0=\varphi^{k+2}(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^{k+1}(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))$, 于是 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}=\mathrm{Ker}\varphi^k$, 从而 $\varphi^{k+1}(\boldsymbol{\alpha})=\varphi^k(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))=0$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$, 于是 $\mathrm{Ker}\varphi^{k+2}\subseteq\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ 也成立.

(3) $\Leftrightarrow$ (6): 考虑 φ 在不变子空间 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的限制变换 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi}$: $\mathrm{Im}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi$, 由限制的定义可知它的核等于 $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi$, 它的像等于 $\mathrm{Im}\varphi^2$. 由于有限维线性空间上的线性变换是单射当且仅当它是满射, 当且仅当它是同构, 故 (3) $\Leftrightarrow$ (6) 成立.

(7) $\Rightarrow$ (6) 是显然的, 下证 (6) $\Rightarrow$ (7): 设 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 已对正整数 k 成立, 先证 $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$ 也成立, 然后用归纳法即得结论. $\mathrm{Im}\varphi^{k+2} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ 是显然的. 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$, 即存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\varphi^k(\boldsymbol{\beta}) \in \mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$, 故存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\varphi^k(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma})$, 于是 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi^{k+1}(\boldsymbol{\beta}) = \varphi(\varphi^k(\boldsymbol{\beta})) = \varphi(\varphi^{k+1}(\boldsymbol{\gamma})) = \varphi^{k+2}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$, 从而 $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$ 也成立.

(1) $\Rightarrow$ (8) 是显然的, 下证 (8) $\Rightarrow$ (1). 我们先证 $\mathrm{Im}\varphi \subseteq U$: 任取 $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\varphi$, 由直和分解可设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}$, 其中 $\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}\varphi, \boldsymbol{u} \in U$, 则由 U 的 $\varphi-$ 不变性可得 $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) + \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}) \in U$. 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\varphi \oplus U) = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim U \geqslant \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V,$$

从而只能是 $U = \mathrm{Im}\varphi$, 于是 (1) 成立.

(1) $\Rightarrow$ (9) 是显然的, 下证 (9) $\Rightarrow$ (1). 我们先证 $W \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$: 任取 $\boldsymbol{w} \in W$, 则由 W 的 $\varphi-$ 不变性可得 $\varphi(\boldsymbol{w}) \in \mathrm{Im}\varphi \cap W = 0$, 即有 $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\varphi$. 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\varphi \oplus W) = \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim W \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V,$$

从而只能是 $W = \mathrm{Ker}\varphi$, 于是 (1) 成立. □

命题 0.7

设 U, W 是 n 维线性空间 V 的子空间且 $\dim U + \dim W = \dim V$. 求证: 存在 V 上的线性变换 φ, 使得 $\mathrm{Ker}\varphi = U, \mathrm{Im}\varphi = W$.

证明 取 U 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 再取 W 的一组基 $\boldsymbol{f}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_n$. 定义 φ 为 V 上的线性变换, 它在基上的作用为:$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}(1 \leqslant i \leqslant m), \varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{f}_j(m+1 \leqslant j \leqslant n)$. 注意到 $\boldsymbol{f}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 是 W 的一组基, 故通过简单的验证可得 $\mathrm{Ker}\varphi = U, \mathrm{Im}\varphi = W$. □

例题 0.2 设 $V = M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵全体构成的线性空间,$\varphi : V \to \mathbb{F}$ 是迹函数, 即对任意的 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in V$,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

求证:φ 是 V 到一维空间 $\mathbb{F}$ 上的线性映射, 并求 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的维数及其一组基.

证明 容易验证 φ 是线性映射且是映上的. 注意到 V 是 n^2 维线性空间, 由线性映射的维数公式可知

$$\dim\mathrm{Ker}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathbb{F} = n^2 - 1.$$

记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 n 阶基础矩阵, 即第 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵. 容易验证下列 $n^2 - 1$ 个矩阵迹为零且线性无关, 因此它们组成了 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基:

$$\boldsymbol{E}_{ij}(i \neq j), \boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{22} - \boldsymbol{E}_{33}, \cdots, \boldsymbol{E}_{n-1,n-1} - \boldsymbol{E}_{nn}.$$

□

例题 0.3 设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的线性映射, 且 V 的维数大于 U 的维数, 求证:$\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$.

证明 由线性映射的维数公式

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi,$$

以及 $\dim \mathrm{Im}\varphi \leqslant \dim U < \dim V$ 可得 $\dim \mathrm{Ker}\varphi > 0$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$. □

例题 0.4 设 φ 是有限维线性空间 V 到 U 的满线性映射, 求证: 必存在 V 的子空间 W, 使得 $V = W \oplus \mathrm{Ker}\varphi$, 且 φ 在 W 上的限制是 W 到 U 上的线性同构.

证明 证法一:取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. 令 $W = L(\boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$, 则显然 $V = W \oplus \mathrm{Ker}\varphi$. 由推论**??**可知,$\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi = U$ 的一组基, 故 φ 在 W 上的限制将 W 的一组基 $\boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 映射为 U 的一组基 $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$, 从而由命题**??**可知 $\varphi|_W$ 必为线性同构.

证法二: 取 W 为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 在 V 中的补空间. 对任意的 $\boldsymbol{u} \in U$, 由于 φ 是映上的, 故存在 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_1$, 其中 $\boldsymbol{w} \in$

$W, \boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}\varphi$, 使得 $\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{w})$, 于是 φ 在 W 上的限制也是映上的, 故 $\dim U = \dim \mathrm{Im}\varphi|_W$. 另一方面, 由维数公式可知,$\dim W = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim U$. 再对 φ 在 W 上的限制用线性映射维数公式可知,$\dim \mathrm{Ker}\varphi|_W = \dim W - \dim \mathrm{Im}\varphi|_W = \dim U - \dim \mathrm{Im}\varphi|_W = 0$. 从而它必是单映射, 于是 φ 在 W 上的限制是 W 到 U 上的线性同构. □

例题 0.5 设 φ 是有限维线性空间 V 到 V' 的线性映射,U 是 V' 的子空间且 $U \subseteq \mathrm{Im}\varphi$, 求证:$\varphi^{-1}(U) = \{\boldsymbol{v} \in V | \varphi(\boldsymbol{v}) \in U\}$ 是 V 的子空间, 且

$$\dim U + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \varphi^{-1}(U).$$

笔记 注意对线性映射做限制这个操作.

证明 容易验证 $\varphi^{-1}(U)$ 是 φ 的不变子空间. 将 φ 限制在 $\varphi^{-1}(U)$ 上, 它是到 U 上的线性映射. 因为 $\mathbf{0} \in U$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$. 从而 $\mathrm{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \mathrm{Ker}\varphi \cap \varphi^{-1}(U) = \mathrm{Ker}\varphi$, 又显然 $\mathrm{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = U$. 再对 φ 在 $\varphi^{-1}(U)$ 上的限制用线性映射维数公式即得

$$\dim\varphi^{-1}(U) = \dim \mathrm{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} + \dim \mathrm{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \dim U + \dim\mathrm{Ker}\varphi.$$

□

注 $\varphi^{-1}(U) = \{\boldsymbol{v} \in V | \varphi(\boldsymbol{v}) \in U\}$ 称为 U 在线性映射 φ 下的原像集.

命题 0.8

设 U 是有限维线性空间 V 的子空间,φ 是 V 上的线性变换, 求证:

(1) $\dim U - \dim \mathrm{Ker}\varphi \leqslant \dim \varphi(U) \leqslant \dim U$;

(2) $\dim \varphi^{-1}(U) \leqslant \dim U + \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

笔记 线性变换可以在任意的一个子空间上作限制, 但这样得到的只是一个线性映射, 不一定是线性变换; 如果限制在其不变子空间上, 则得到的一定是线性变换.

例如, 给定线性变换 $T: V \to V$ 和子空间 $W \subseteq V$, 可以定义

$$T|_W : W \to V,\ T|_W(w) = T(w).$$

此时 $T|_W$ 是一个 W 到 V 的线性映射, 但不一定是 W 到自身的线性变换.

证明

(1) 注意到当 φ 限制在 U 上时,$\mathrm{Ker}(\varphi|_U) = U \cap \mathrm{Ker}\varphi$, 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim U = \dim(U \cap \mathrm{Ker}\varphi) + \dim\varphi(U) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim\varphi(U).$$

于是

$$\dim U - \dim \mathrm{Ker}\varphi \leqslant \dim \varphi(U),$$

而由线性映射维数公式, 可知 $\dim U = \dim \mathrm{Ker}\varphi|_U + \dim\varphi(U)$. 进而 $\dim \varphi(U) \leqslant \dim U$.

(2) 设 $\overline{\varphi}$ 是线性变换 φ 在子空间 $\varphi^{-1}(U)$ 上的限制, 则 $\mathrm{Im}\overline{\varphi} = U \cap \mathrm{Im}\varphi$. 因为 $\mathbf{0} \in U$, 故 $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$. 从而 $\mathrm{Ker}\overline{\varphi} = \mathrm{Ker}\varphi \cap \varphi^{-1}(U) = \mathrm{Ker}\varphi$. 由线性映射的维数公式可得

$$\dim \varphi^{-1}(U) = \dim(U \cap \mathrm{Im}\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi.$$

显然, 由 $\dim(U \cap \mathrm{Im}\varphi) \leqslant \dim U$ 可推出

$$\dim \varphi^{-1}(U) \leqslant \dim U + \dim \mathrm{Ker}\varphi.$$

□

例题 0.6 证明: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶方阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

证明 令 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维列向量空间, 则将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 看成是 V 上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 乘法诱导的线性变换. 又令 $U = \boldsymbol{B}(V)$, 注意到 $\boldsymbol{A}(U) = \boldsymbol{AB}(V)$, 故 $\dim\boldsymbol{A}(U) = \dim\boldsymbol{AB}(V) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$,$\dim \mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 即线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间维

数. 而 $\dim U = \dim \boldsymbol{B}(V) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 由命题**??**(1) 的结论, 可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n = \dim U - \dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \leqslant \dim \boldsymbol{A}\,(U) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \dim U = \mathrm{r}\,(\boldsymbol{B})\,.$$

又显然有 $\dim \boldsymbol{A}(U) \leqslant \dim \boldsymbol{A}(V)$, 故得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. □