0.1 拆分法

命题 0.1 (大拆分法)

设 t 是一个参数,

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)|=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A(0)|$ 中的代数余子式.

笔记 大拆分法的想法: **将行列式的每一行/列拆分成两行/列**, 得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=|\boldsymbol{A}(0)|+t\sum_{j=1}^{n}|A_j|.\text{其中}A_j=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array},j=1,2,\cdots,n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成 2^n 个行列式.(不一定需要公共的 t). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1 加到后面每一列上, 得到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开, 不断这样做下去就可得到

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}(0)|+\sum_{j=1}^{n}|A_j|.$$

其中 $A_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 将 A_j 按第 j 列展开可得

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t\left(A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{nj}\right) = t\sum_{i=1}^{n} A_{ij}.$$

从而

$$|\boldsymbol{A}(t)| = |\boldsymbol{A}(0)| + \sum_{i=1}^{n} A_i = |\boldsymbol{A}(0)| + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = |\boldsymbol{A}(0)| + t\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

□

推论 0.1 (推广的大拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1, t_2, \cdots, t_n)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t_1 & a_{12} + t_2 & \cdots & a_{1n} + t_n \\ a_{21} + t_1 & a_{22} + t_2 & \cdots & a_{2n} + t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t_1 & a_{n2} + t_2 & \cdots & a_{nn} + t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^{n}\left(t_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\right).$$

♡

笔记 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即**将行列式的每一行/列拆分成两行/列**).

这里推广的大拆分法的关键也是**要找到合适的** $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式.

注 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 运用大拆分法的证明方法不难得到. □

命题 0.2 (小拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且 a_{in} 可以拆分成 $b_{in} + c_{in}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

笔记 记忆小拆分法的想法 (即**拆边列/行, 再展开得到递推式**).

注 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列, 则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方法将这一行或一列变成最后一列, 再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

证明 由行列式的性质可直接得到结论. □

命题 0.3

计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一 (大拆分法): (也可以直接用大拆分法的结论) 注意到 (按行拆分)

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n} A_i=(a-b)^n+\sum_{i=1}^{n} A_i.$$

其中 A_i 是第 i 行元素全为 b, 主对角元素除了 (i,i) 元外都为 $a-b$, 其他元素都为 0 的 n 阶行列式.

又因为

$$A_i=\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}\begin{vmatrix} a-b & & & & \\ & \ddots & & & \\ b & \cdots & b & \cdots & b \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=b\,(a-b)^{n-1}, i=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$|\boldsymbol{A}|=(a-b)^n+\sum_{i=1}^{n} A_i=(a-b)^n+nb\,(a-b)^{n-1}=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \cdots & b\\ b+0 & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b+0 & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b\\ 0 & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}+(a-b)\,D_{n-1}=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}.(n\geq 2)$$

从而由上式递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}\\ &= b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\left[b\,(a-b)^{n-2}+(a-b)\,D_{n-2}\right]=2b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^2\,D_{n-2}\\ &=\cdots=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,D_1\\ &=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,a\\ &=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法三 (求和法):

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{j_i+j_1}\begin{vmatrix} a+(n-1)\,b & b & \cdots & b\\ a+(n-1)\,b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a+(n-1)\,b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)\,b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b\\ 1 & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i}[a+(n-1)\,b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法四 (" 爪" 型行列式的推广):

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b-a & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-j_i+j_1}\begin{vmatrix} a-(n-1)\,b & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a-(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

□

命题 0.4

计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

注 当 $b=c$ 时, 可将 $|A|$ 看作关于 b 的连续函数, 再利用(1)式和 L'Hospital 法则得

$$|\boldsymbol{A}|=\lim_{b\to c}\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}=\left[(a-c)^n+nc\,(a-c)^{n-1}\right]$$
$$=[a+(n-1)\,c]\,(a-c)^{n-1}=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解 解法一 (大拆分法): 令

$$|\boldsymbol{A}(t)|=\begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|+tu, u=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

当 $t=-b$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-b)|=\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|-bu=(a-b)^n.$$

当 $t=-c$ 时, 可得

$$|\boldsymbol{A}(-c)|=\begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|-cu=(a-c)^n.$$

若 $b\neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}. \tag{1}$$

若 $b=c$, 则由命题 0.3可知

$$|\boldsymbol{A}|=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为 D_n, 其中 n 为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$
$$=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-b)\,D_{n-1}=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}+(a-b)\,D_{n-1}$$
$$=b\,(a-c)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c+(a-c)&b&\cdots&b\\c+0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c+0&c&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c&b&\cdots&b\\c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&\cdots&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a-c&b&\cdots&b\\0&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&c&\cdots&a\end{vmatrix}$$
$$=c\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b\\1&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c&\cdots&a\end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}=c\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c-b&\cdots&a-b\end{vmatrix}+(a-c)\,D_{n-1}$$
$$=c\,(a-b)^{n-1}+(a-c)\,D_{n-1}.\,(n\geq 2)$$

若 $b\neq c$, 则联立上面两式可得

$$|\boldsymbol{A}|=D_n=\frac{b\,(a-c)^n-c\,(a-b)^n}{b-c}.$$

若 $b=c$, 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|=D_n&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\,D_{n-1}\\&=b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)\left[b\,(a-b)^{n-2}+(a-b)\,D_{n-2}\right]=2b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^2\,D_{n-2}\\&=\cdots=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,D_1\\&=(n-1)\,b\,(a-b)^{n-1}+(a-b)^{n-1}\,a\\&=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.\end{aligned}$$

当 $b=c$ 时, 也可以由命题 0.3可知

$$|\boldsymbol{A}|=[a+(n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

□

命题 0.5

设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式, 求证: 对任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 均有

$$\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_2(a_1)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

♠

证明 证法一 (大拆分法): 因为 $f_k(x)(1\leqslant k\leqslant n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以它们都是单项式 $1,x,\cdots,x^{n-2}$ 的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这 $n-1$ 个单项式进行拆分, 最后得到至多 $(n-1)!$ 个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有 n 列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

证法二 (多项式根的有限性): 令 $f\,(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)&f_1(x)&\cdots&f_1(x)\\f_2(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_2(a_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_n(a_1)&f_n(a_2)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}$, 则将 $f(x)$ 按第一行展开得到

$$f\,(x)=k_1f_1\,(x)+k_2f_2\,(x)+\cdots+k_nf_n\,(x)\,.$$

其中 k_i 为行列式 $f\,(x)$ 的第 $(1,i)$ 元素的代数余子式,$i=1,2,\cdots,n$.

注意 k_i 与 x 无关, 均为常数. 若 $f(x)$ 不恒为 0, 则又因为 $f_k(x)(1\leqslant k\leqslant n)$ 的次数不超过 $n-2$, 所以 $\deg f(x)\leq n-2$. 但是, 注意到 $f(a_2)=f(a_3)=\cdots=f(a_n)=0$, 即 $f(x)$ 有 $n-1$ 个根. 于是由余数定理可

知,$(x-a_2)\cdots(x-a_n)\,|\,f(x)$. 从而 $n-1=\deg(x-a_2)\cdots(x-a_n)\geq \deg f(x)$. 这与 $\deg f(x)\leq n-2$ 矛盾. 故 $f(x)\equiv 0$, 当然也有 $f(a_1)=0$.

证法三: 设多项式

$$f_k(x)=c_{k,n-2}x^{n-2}+\cdots+c_{k1}x+c_{k0}, 1\leqslant k\leqslant n.$$

则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2} \end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是 $n\times(n-1)$ 和 $(n-1)\times n$ 矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零. □

例题 0.1 求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

笔记 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用求和法.

本题行列式难以找到合适的 t 对其进行大拆分, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的 t_i, 所以推广的大拆分也不行)

解 解法一 (小拆分法): 将 D_n 最后一列拆成两列得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}+D_{n-1}.$$

若 $a_n\neq 0$, 则由上式可得

$$D_n=a_n\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+D_{n-1}\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{\text{对第一个行列式}:-a_ij_n+j_i}a_n\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+D_{n-1}=a_n^2+D_{n-1}.\ (n\geq 2)$$

若 $a_n=0$, 则上面第一个行列式等于 0, 进而 $D_n=D_{n-1}(n\geq 0)$. 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n=a_n^2+D_{n-1}=a_n^2+\left(a_{n-1}^2+D_{n-2}\right)=\cdots=\sum_{i=2}^{n}a_i^2+D_1=1+\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

解法二 (打洞原理):注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式 (打洞原理) 可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

□