

## 0.1 同态与同构

### 定义 0.1

设  $G_1, G_2$  是两个群 (或半群、么半群),  $f$  是  $G_1$  到  $G_2$  的映射. 如果  $f$  满足

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in G_1,$$

则称  $f$  是  $G_1$  到  $G_2$  的一个**同态**.

若  $f$  还是满映射, 则称  $f$  为**满同态**, 或  $G_1$  到  $G_2$  上的同态, 这时也称  $G_1$  与  $G_2$  同态.

若  $f$  还是一一对应, 则称  $f$  为**同构**, 这时也称  $G_1$  与  $G_2$  同构, 记为  $G_1 \cong G_2$ .

### 定理 0.1

1. 设  $H$  是群  $G$  的正规子群. 记  $G$  到商群  $G/H$  的自然映射为

$$\pi : \pi(g) = gH, \quad \forall g \in G,$$

则  $\pi$  为  $G$  到  $G/H$  上的同态, 称  $\pi$  为**自然同态**.

2. 若  $G$  是一个半群 (或么半群). “ $\sim$ ” 是  $G$  中一个同余关系, 则  $G$  到商半群 (或商么半群)  $G/\sim$  的自然映射  $\pi$  是同态, 也称**自然同态**.

**注** 显然自然同态都是满同态.

**证明**

- 1.
- 2.

□

### 命题 0.1

设  $N$  是群  $G$  的子群, 记  $G$  到商集  $G/N$  的自然映射为  $\pi$ , 则

- (1) 若  $H$  是  $G$  的子群且  $H \supseteq N$ , 则  $\pi(H) = H/N$ .

**证明**

- (1) 由命题????知  $N$  也是  $H$  的子群, 故

$$H/N = \{hN : h \in H\} = \pi(H).$$

□

### 例题 0.1

- (1) 容易看出  $\{1, -1\}$  对乘法构成一个 2 阶群. 定义  $S_n$  到  $\{1, -1\}$  的映射  $f : f(\sigma) = \text{sgn}\sigma (\forall \sigma \in S_n)$ , 则  $f$  为满同态.
- (2) 设  $V$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间.  $GL(V)$  到  $P^* = P \setminus \{0\}$  的映射

$$f : f(A) = \det A, \quad \forall A \in GL(V)$$

是  $GL(V)$  到  $P^*$  上的同态.

- (3) 设  $\exp$  为实数加法群  $\mathbb{R}$  到正实数乘法群  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$  的映射,

$$\exp : \exp(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

其中,  $e$  为自然对数的底, 则  $\exp$  是同构.

- (4) 设  $V$  是数域  $P$  上的  $n$  维线性空间,  $GL(V)$  是  $V$  上一般线性群,  $GL(n, P)$  是  $P$  上所有  $n$  阶可逆方阵的集合, 则  $GL(n, P)$  对矩阵乘法构成群且  $GL(V) \cong GL(n, P)$ .  
类似地, 有

$$SL(V) \cong SL(n, P) = \{A \in GL(n, P) | \det A = 1\}.$$

又若  $V$  为  $n$  维 Euclid 空间, 则

$$O(V) \cong O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA' = I_n\},$$

其中,  $A'$  为  $A$  的转置,  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵. 还有

$$SO(V) \cong SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}.$$

证明

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

6. 事实上, 在  $V$  中取定一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 简记为  $\{\alpha\}$ . 对  $\forall A \in GL(V)$ ,  $A$  在  $\{\alpha\}$  下的矩阵  $M(A)$  是唯一确定的. 反之, 对任一  $A \in P^{n \times n}$  存在唯一的线性变换  $A$  满足  $M(A) = A$ , 而且  $A \in GL(V)$  当且仅当  $M(A) \in GL(n, P)$ , 因而  $A \rightarrow M(A)$  是  $GL(V)$  到  $GL(n, P)$  的一一对应, 又由

$$M(AB) = M(A)M(B), \quad \forall A, B \in GL(V)$$

知  $GL(V) \cong GL(n, P)$ .

□

#### 定理 0.2 (群同态与同构的基本性质)

- (1) 若  $f$  是群  $G_1$  到群  $G_2$  的同态,  $g$  是群  $G_2$  到群  $G_3$  的同态, 则

(i)  $gf$  是  $G_1$  到  $G_3$  的同态 (图 1);

(ii) 若  $f, g$  都是满同态, 则  $gf$  也是满同态;

(iii) 若  $f, g$  都是同构, 则  $gf$  也是同构.

- (2) 设  $f$  是群  $G_1$  到群  $G_2$  的同态,  $e_1, e_2$  分别为  $G_1, G_2$  的么元, 则

$$f(e_1) = e_2, \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1}, \quad \forall a \in G_1.$$

- (3) 设  $f$  是群  $G_1$  到群  $G_2$  的同态, 则  $f(G_1)$  是  $G_2$  的子群, 因而  $f$  可看成  $G_1$  到  $f(G_1)$  上的同态.

- (4) 群的同构关系是一个等价关系, 即对任何群  $G$  有  $G \cong G$ ; 若  $G_1 \cong G_2$ , 则  $G_2 \cong G_1$ ; 若  $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3$ , 则  $G_1 \cong G_3$ .

♡

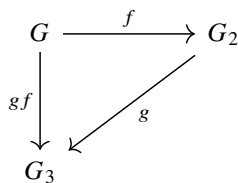


图 1

证明

- (1) 事实上,  $\forall a, b \in G_1$  有  $gf(a), gf(b) \in G_3$  且

$$gf(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = gf(a)gf(b).$$

故  $gf$  为  $G_1$  到  $G_3$  的同态. 又由  $f(G_1) = G_2, g(G_2) = G_3$ , 即得  $gf(G_1) = G_3$ . 又由  $g, f$  为一一对应, 则  $gf$  也是一一对应.

- (2) 事实上,  $f(e_1) = f(e_1^2) = f(e_1)f(e_1)$ , 故有

$$f(e_1) = f(e_1)f(e_1)^{-1} = e_2.$$

又  $a \in G_1$  有  $f(e_1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$ , 故

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}f(e_1) = f(a)^{-1}.$$

(3) 事实上, 由性质 (2) 知  $e_2 = f(e_1) \in f(G_1)$ , 又  $f(a), f(b) \in f(G_1)$  有  $f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(G_1)$ , 故  $f(G_1)$  是  $G_2$  的子群.

(4) 对任何群  $G$  有  $G \cong G$  (只要取  $f = \text{id}_G$ ); 若  $G_1 \cong G_2$ , 则  $G_2 \cong G_1$  (若  $f: G_1 \rightarrow G_2$  为同构映射, 则  $f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$  也是同构映射); 若  $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3$ , 则  $G_1 \cong G_3$  (参见性质 (1)).

□

### 定义 0.2

设  $G$  是群. 对于  $a \in G$ , 可定义  $G$  的两个变换  $L_a, R_a$  如下:

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = xa, \quad \forall x \in G.$$

$L_a, R_a$  分别称为由  $a$  决定的左平移与右平移. 定义

$$L_G \triangleq \{L_a | a \in G\}, \quad R_G \triangleq \{R_a | a \in G\}.$$

♣

### 命题 0.2

$G$  上由  $a$  决定的左平移, 右平移  $L_a, R_a$  都是  $G$  的一一对应, 即为  $S_G$  中元素且有

$$L_a L_b = L_{ab}, \quad R_a R_b = R_{ba}, \quad L_1 = R_1 = \text{id}_G,$$

$$L_{a^{-1}} = L_a^{-1}, \quad R_{a^{-1}} = R_a^{-1}, \quad L_a R_b = R_b L_a, \quad \forall a, b \in G,$$

1 为  $G$  的么元. 从这些等式可知  $L_G = \{L_a | a \in G\}$  与  $R_G = \{R_a | a \in G\}$  都是  $S_G$  的子群.

♠

证明

□

### 定理 0.3 (Cayley 定理)

设  $G$  是一个群, 则

$$G \cong L_G \cong R_G.$$

♥

**注** 左平移与右平移的概念对半群与么半群也是适用的. 但应注意, 此时左右平移不一定是一一对应. Cayley 定理对半群是不成立的, 但对么半群  $G$  仍有  $G \cong L_G$ , 这时  $L_G$  是  $M(G)$  的子么半群 ( $M(G)$  的定义见例题??).

**证明** 记  $G$  到  $L_G$  的映射  $L: L(a) = L_a$ . 显然  $L$  是满映射. 又若  $L(a) = L(b)$ , 即  $L_a = L_b$ , 则有  $a = a \cdot 1 = L_a(1) = L_b(1) = b$ , 因而  $L$  还是一一映射, 故  $L$  为一一对应. 又对  $\forall a, b \in G$  有

$$L(ab) = L_{ab} = L_a L_b = L(a)L(b),$$

故  $L$  是  $G$  到  $L_G$  上的同构, 即  $G \cong L_G$ .

类似地, 不难验证, 由  $R'(a) = R_{a^{-1}}$  确定的  $G$  到  $R_G$  的映射  $R'$  也是一个同构, 即有  $G \cong L_G \cong R_G$ .

□

### 定义 0.3

群  $G$  到自身的同构称为  $G$  的自同构, 群  $G$  的自同构的集合记为  $\text{Aut}G$ .

♣

### 定理 0.4

设  $G$  是一个群, 则有

- (1)  $\text{Aut}G$  对变换的乘法也是一个群, 称为  $G$  的自同构群;
- (2)  $\forall g \in G, G$  的变换  $\text{ad}g = L_g R_{g^{-1}}$  是  $G$  的一个自同构, 称为由  $g$  决定的内自同构;
- (3)  $G$  的内自同构的集合  $\text{Int}G$  (也记成  $\text{ad}G$ ) 是  $\text{Aut}G$  的正规子群, 称为  $G$  的内自同构群;

(4)  $\text{ad} : g \rightarrow \text{ad}g$  是群  $G$  到  $\text{Int}G$  上的同态.

**证明**

(1) 显然有  $\text{id}_G \in \text{Aut}G \subseteq S_G$ , 任取  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Aut}G$ , 于是  $\theta_1\theta_2^{-1} \in S_G$  且对  $\forall x, y \in G$ ,

$$\begin{aligned}\theta_1\theta_2^{-1}(xy) &= \theta_1(\theta_2^{-1}(xy)) = \theta_1(\theta_2^{-1}(\theta_2\theta_2^{-1}(x) \cdot \theta_2\theta_2^{-1}(y))) \\ &= \theta_1(\theta_2^{-1}\theta_2(\theta_2^{-1}(x)\theta_2^{-1}(y))) = \theta_1(\theta_2^{-1}(x)\theta_2^{-1}(y)) \\ &= \theta_1\theta_2^{-1}(x) \cdot \theta_1\theta_2^{-1}(y),\end{aligned}$$

即有  $\theta_1\theta_2^{-1} \in \text{Aut}G$ . 故  $\text{Aut}G$  是群.

(2) 对  $\forall g \in G$  有  $L_g, R_{g^{-1}} \in S_G$ , 因而  $\text{ad}g = L_g R_{g^{-1}} \in S_G$ , 又对  $\forall x, y \in G$ , 有

$$\text{ad}g(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \text{ad}g(x) \cdot \text{ad}g(y).$$

故  $\text{ad}g \in \text{Aut}G$ , 即  $\text{ad}g$  是  $G$  的自同构.

(3) 对  $\forall g_1, g_2 \in G$ , 有

$$\begin{aligned}(\text{ad}g_1)(\text{ad}g_2)^{-1} &= L_{g_1} R_{g_1^{-1}} (L_{g_2} R_{g_2^{-1}})^{-1} \\ &= L_{g_1} R_{g_1^{-1}} R_{g_2} L_{g_2^{-1}} = L_{g_1} L_{g_2^{-1}} R_{g_1^{-1}} R_{g_2} \\ &= L_{(g_1 g_2^{-1})} R_{(g_2 g_1^{-1})} = \text{ad}g_1 g_2^{-1}.\end{aligned}\tag{1}$$

故  $\text{Int}G$  是  $\text{Aut}G$  的子群.

又对  $\forall g, a \in G, \forall \theta \in \text{Aut}G$ ,

$$\theta(\text{ad}g)\theta^{-1}(a) = \theta(g\theta^{-1}(a)g^{-1}) = \theta(g)a\theta(g)^{-1} = \text{ad}\theta(g)(a),$$

因而

$$\theta(\text{ad}g)\theta^{-1} = \text{ad}\theta(g), \quad \forall g \in G, \theta \in \text{Aut}G.$$

由此知  $\text{Int}G$  是  $\text{Aut}G$  的正规子群.

(4) 在式 (1) 中, 取  $g_1 = 1$ , 则有

$$(\text{ad}g_2)^{-1} = \text{ad}g_2^{-1}.$$

一般由式 (1) 知

$$\text{ad}g_1 \cdot \text{ad}g_2 = (\text{ad}g_1)(\text{ad}g_2)^{-1})^{-1} = \text{ad}g_1(g_2^{-1})^{-1} = \text{ad}g_1 g_2.$$

由此知  $\text{ad} : G \rightarrow \text{Int}G$  为  $G$  到  $\text{Int}G$  上的同态映射.

□

#### 定义 0.4

设  $G$  是一个群,  $\text{Aut}G, \text{Int}G$  分别为  $G$  的自同构群与内自同构群, 称商群  $\text{Aut}G/\text{Int}G$  为  $G$  的**外自同构群**.

#### 定义 0.5

设  $R, R_1$  是两个环,  $\varphi$  是  $R$  到  $R_1$  的映射, 如果对  $\forall a, b \in R$ ,

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

那么称  $\varphi$  是  $R$  到  $R_1$  的一个**同态**.

若  $\varphi$  是满映射, 则称  $\varphi$  为**满同态**, 或称  $\varphi$  为  $R$  到  $R_1$  上的同态.

若  $\varphi$  还是一一对应, 则称  $\varphi$  为**同构**. 这时也称  $R$  与  $R_1$  同构, 记为  $R \cong R_1$ .

**命题 0.3**

- (1) 若  $\varphi$  是  $R$  到  $R'$  的同态, 则  $\varphi(R)$  是  $R'$  的子环. 进而若  $R_1$  是  $R$  的子环, 则  $\varphi(R_1)$  也是  $R'$  的子环.
- (2) 环的同态的积还是环同态.
- (3) 环的同构关系是等价关系, 即  $R \cong R; R \cong R_1 \Rightarrow R_1 \cong R; R_1 \cong R_2, R_2 \cong R_3 \Rightarrow R_1 \cong R_3$ .

**证明**

- (1) 注意到  $\varphi|_{R_1}$  是  $R_1 \rightarrow R'$  的环同态, 故由前面的结论知  $\varphi(R_1)$  也是  $R'$  的子环.
- (2)
- (3)

□

**定理 0.5**

1. 设  $R, R_1$  是两个环. 定义  $R$  到  $R_1$  的映射  $\varphi: \varphi(x) = 0 (\forall x \in R)$ , 则  $\varphi$  为  $R$  到  $R_1$  的同态, 这样的同态称为**零同态**.
2. 设  $I$  是环  $R$  的一个理想.  $R$  到商环  $R/I$  的自然映射  $\pi: \pi(x) = x + I (\forall x \in R)$  是  $R$  到  $R/I$  上的同态, 称为**自然同态**.

♥

**证明**

- 1.
- 2.

□

**命题 0.4**

设  $A$  是环  $R$  的子环, 记  $R$  到商集  $R/A$  的自然映射为  $\pi$ , 则

- (1) 若  $B$  是环  $R$  的子环且  $B \supseteq A$ , 则  $\pi(B) = B/A$ .

♥

**证明**

- (1)

□

**例题 0.2** 设  $V$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间, 用  $\text{End}V$  表示  $V$  上线性变换的集合, 显然,  $\text{End}V$  对线性变换的加法与乘法构成一环, 设  $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V$  的一组基, 则映射

$$\mathcal{A} \rightarrow M(\mathcal{A}), \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}V$$

是  $\text{End}V$  到  $P^{n \times n}$  上的同构. 这里  $M(\mathcal{A})$  表示线性变换基  $\{\alpha\}$  下的矩阵.

**证明**

□

**定义 0.6**

设  $R, R'$  是两个环, 若  $R$  到  $R'$  的映射  $\varphi$ , 对  $\forall a, b \in R$  满足

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a),$$

则称  $\varphi$  是从  $R$  到  $R'$  的**反同态**. 又若  $\varphi$  还是一一对应, 则称  $\varphi$  为从  $R$  到  $R'$  的**反同构**.

一个环  $R$  到自身的反同构称为**反自同构**. 若环  $R$  的反自同构  $\eta$  满足  $\eta^2 = \text{id}_R$ , 则称  $\eta$  为  $R$  的一个**对合**.

♣

**定理 0.6**

对任一环  $R$ , 一定有一个环  $R'$  与它反同构.

♥

**证明** 事实上, 只需作一个与  $R$  一一对应的集合  $R'$ , 设映射  $x \rightarrow x'$  为这个对应关系. 在  $R'$  中定义加法与乘法如下:

$$x' + y' = (x + y)', \quad x' y' = (yx)', \quad \forall x', y' \in R',$$

则  $R'$  成环且与  $R$  反同构.

□

**例题 0.3** 设  $P$  是一个数域, 在环  $P^{n \times n}$  中定义映射  $\tau: A \rightarrow A'$ , 则  $\tau$  是  $P^{n \times n}$  的对合.

**证明**

□