

0.1 正定型与正定矩阵

定义 0.1

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 是 n 元实二次型, \mathbf{A} 是相伴矩阵.

- (1) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'\mathbf{A}\alpha > 0$, 则称 f 是正定二次型 (简称正定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为正定矩阵 (简称正定阵);
- (2) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'\mathbf{A}\alpha < 0$, 则称 f 是负定二次型 (简称负定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为负定矩阵 (简称负定阵);
- (3) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'\mathbf{A}\alpha \geq 0$, 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为半正定矩阵 (简称半正定阵);
- (4) 若对任意 n 维非零列向量 α 均有 $\alpha'\mathbf{A}\alpha \leq 0$, 则称 f 是半负定二次型 (简称半负定型), 矩阵 \mathbf{A} 称为半负定矩阵 (简称半负定阵);
- (5) 若存在 α , 使 $\alpha'\mathbf{A}\alpha > 0$; 又存在 β , 使 $\beta'\mathbf{A}\beta < 0$, 则称 f 是不定型.

注 显然

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

是正定型, 而

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

是负定型.

定理 0.1

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元实二次型, 则

- (1) f 是正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n ;
- (2) f 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n ;
- (3) f 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r ;
- (4) f 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩 r .

证明 只证明 (1), 其余结论的证明类似.

若 f 的正惯性指数等于 n , 则 f 可化为下列标准型:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

显然 f 是正定型. 反之, 若 f 是正定型, 如果 f 的正惯性指数 $p < n$, 则 f 可化为如下标准型:

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - c_{p+1}y_{p+1}^2 - \dots - c_n y_n^2, \quad (1)$$

其中 $c_j \geq 0 (j = p+1, \dots, n)$. 这时令 $b_1 = \dots = b_p = 0, b_{p+1} = \dots = b_n = 1$, 则 b_1, b_2, \dots, b_n 不全为零. 假设这时 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

\mathbf{C} 是非异阵, 则从 $y_i = b_i (i = 1, \dots, n)$ 可得 $x_i = a_i (i = 1, \dots, n)$ 是一组不全为零的实数. 于是

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 0,$$

这与 f 是正定型矛盾. □

定理 0.2

- (1) n 阶实对称阵 A 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 I_n ;
 (2) A 是负定阵当且仅当它合同于 $-I_n$;
 (3) A 是半正定阵当且仅当 A 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

- (4) A 是半负定阵当且仅当 A 合同于下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$



证明 由定理 0.1 可立即得到证明. □

定义 0.2 (顺序主子式)

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, A 的 n 个子式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 A 的顺序主子式.

**定理 0.3**

n 阶实对称阵 A 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.



证明 先证必要性. 设 n 阶实对称阵 $A = (a_{ij})$ 为正定阵, 则对应的实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

为正定型. 令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k a_{ij} x_i x_j,$$

则对任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \cdots, c_k , 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

因此 f_k 是一个正定二次型, 从而它的相伴矩阵 A_k (由 A 的前 k 行及前 k 列组成) 是一个正定阵. 由于 A_k 合同于 I_k , 故存在 k 阶非异阵 B , 使

$$B' A_k B = I_k,$$

于是

$$\det(B' A_k B) = \det(B)^2 \det(A_k) = 1,$$

即有 $\det(A_k) > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$.

再证充分性. 对 A 的阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a), a > 0$, 于是 $f = ax_1^2$ 是正定型, 从而 A 是正定阵. 设结论对 $n-1$ 成立, 现证明对 n 阶实对称阵 A , 若它的 n 个顺序主子式全大于零, 则 A 必是正定阵. 记 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式所在的矩阵, 则 A 可写为

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 A 的顺序主子式全大于零, 故 A_{n-1} 的顺序主子式也全大于零, 由归纳假设, A_{n-1} 是正定阵. 于是 A_{n-1} 合同于 $n-1$ 阶单位阵, 即存在 $n-1$ 阶非异阵 B , 使

$$B' A_{n-1} B = I_{n-1}.$$

令 C 是下列分块矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} B & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$C' A C = \begin{pmatrix} B' & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & B' \alpha \\ \alpha' B & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是一个实对称阵, 其形式为

$$C' A C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

用第三类初等行及列变换可将上述矩阵化为对角阵. 这相当于对 $C' A C$ 右乘一个非异阵 Q 后, 再左乘 Q' 得到一个对角阵, 亦即 $Q' C' A C Q$ 等于

$$\text{diag}\{1, \cdots, 1, c\}.$$

由于 $|A| > 0$, 故 $c > 0$, 这就证明了 A 是一个正定阵. □

命题 0.1

若 A 是正定阵, 证明:

- (1) A 的任一 k 阶主子阵, 即由 A 的第 i_1, i_2, \cdots, i_k 行及 A 的第 i_1, i_2, \cdots, i_k 列交点上元素组成的矩阵, 必是正定阵;
- (2) A 的所有主子式全大于零, 特别, A 的主对角元素全大于零;
- (3) A 中绝对值最大的元素仅在主对角线上.

证明

- (1) 设 A_k 是矩阵 A 的第 k 个顺序主子式所在的矩阵, 则 A_k 是实对称阵且其顺序主子式都大于零, 因此 A_k 是正定阵.

经过若干次行对换以及相同的列对换, 我们不难将 A 的第 i_1, i_2, \cdots, i_k 行及 i_1, i_2, \cdots, i_k 列分别换成第 $1, 2, \cdots, k$ 行和第 $1, 2, \cdots, k$ 列. 利用上面的结论即知 (1) 成立.

- (2) 由 (1) 的结论, A 的所有主子式都是正定阵. 又 A 的每个主子式都是其自身的顺序主子式, 故由定理 0.3 可知 A 的所有主子式都大于零. 因此 (2) 成立.

- (3) 用反证法. 假设 $a_{ij} (i \neq j)$ 是 A 的绝对值最大的元素. 根据 (1), 我们只需证明由第 i, j 行与第 i, j 列交点上元素组成的矩阵不是正定阵即可. 考虑矩阵 (由 A 的对称性不妨设 $i < j$)

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

注意到 $a_{ij} = a_{ji}$ 且 $|a_{ij}| \geq a_{ii}$, $|a_{ij}| \geq a_{jj}$, 上述矩阵的行列式值 $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \leq 0$, 所以这个矩阵一定不是正定阵. □