

0.1 相抵标准型及其应用

定理 0.1 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 A , 总存在 m 阶非异阵 P 和 n 阶非异阵 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

♡

证明

□

命题 0.1 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

♣

证明 将 A 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 P 及 Q , 使得

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr})Q \\ &= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q. \end{aligned}$$

于是记 $A_1 = PE_{11}Q, A_2 = PE_{22}Q, \dots, A_r = PE_{rr}Q$, 则每个 A_i 的秩都等于 1. 故 A 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $A = B_1 + B_2 + \cdots + B_k, k < r$, 且每个 B_i 的秩都等于 1, 则由命题????可知 $r(A) \leq r(B_1) + r(B_2) + \cdots + r(B_k) = k$, 这与 $r(A) = r$ 矛盾, 故不可能.

□

定理 0.2 (Roth 定理)

设 A, B, C 分别为 $m \times n, p \times q$ 和 $m \times q$ 矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 证明: $r(M) = r(A) + r(B)$ 成立的充要条件是矩阵方程 $AX + YB = C$ 有解, 其中 X, Y 分别是 $n \times q$ 和 $m \times p$ 未知矩阵.

♡

笔记 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $A \neq \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B \neq \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 时, 记 $A_1 = P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B_1 = P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}, C_1 = P_1 C Q_2, M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\begin{aligned} r(A) &= r(P_1 A Q_1) = r \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(A_1), \quad r(B) = r(P_2 B Q_2) = r \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(B_1), \\ r(M) &= r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r \left(\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} \right) = r \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = r(M_1). \end{aligned}$$

从而

$$r(M) = r(A) + r(B) \Leftrightarrow r(M_1) = r \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(B_1).$$

于是由假设可知 $A_1 X_1 + Y_1 B_1 = C_1$ 有解 X_1, Y_1 . 记 $X = Q_1 X_1 Q_2^{-1}, Y = P_1^{-1} Y_1 P_2$, 则

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + Y_1 B_1 &= C_1 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow P_1 A Q_1 X_1 + Y_1 P_2 B Q_2 &= P_1 C Q_2 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow A Q_1 X_1 Q_2^{-1} + P_1^{-1} Y_1 P_2 B &= C \text{ 有解 } X_1, Y_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AX + YB = C \text{ 有解 } X, Y$$

故可以不妨设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $X = X_0, Y = Y_0$ 是矩阵方程 $AX + YB = C$ 的解, 则将 M 的第一分块列右乘 $-X_0$ 加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-Y_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 于是 $r(M) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$.

再证必要性. 设 $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P_1, Q_1, P_2, Q_2 为非异阵, $r = r(A), s = r(B)$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $A \mapsto P_1 A Q_1, B \mapsto P_2 B Q_2, C \mapsto P_1 C Q_2, X \mapsto Q_1^{-1} X Q_2, Y \mapsto P_1 Y P_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 M 的如下分块初等变换:

$$M = \begin{pmatrix} I_r & O & C_1 & C_2 \\ O & O & C_3 & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由于 $r(M) = r(A) + r(B) = r + s$, 故 $C_4 = O$. 于是矩阵方程 $AX + YB = C$, 即

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$$

有解, 例如 $X_1 = C_1, X_2 = C_2, Y_1 = O, Y_3 = C_3$, 其余分块取法任意. □

命题 0.2 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

- (1) 若 $r(A) = n$, 即 A 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n \times m$ 矩阵 B (行满秩), 使得 $BA = I_n$ (这样的矩阵 B 称为 A 的左逆);
- (2) 若 $r(A) = m$, 即 A 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n \times m$ 矩阵 C (列满秩), 使得 $AC = I_m$ (这样的矩阵 C 称为 A 的右逆).

证明

- (1) 设 P 为 m 阶非异阵, Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此 $(I_n, O)PAQ = I_n$, 即 $(I_n, O)PA = Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n, O)PA = I_n$. 令 $B = Q(I_n, O)P$ 即可.

- (2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论. □

推论 0.1

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD = AE$, 则 $D = E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA = EA$, 则 $D = E$. ♥

命题 0.3 (满秩分解)

设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 证明:

- (1) $A = BC$, 其中 B 是 $m \times r$ (列满秩) 矩阵且 $r(B) = r$, C 是 $r \times n$ (行满秩) 矩阵且 $r(C) = r$, 这种分解称为 A 的满秩分解;
- (2) 若 A 有两个满秩分解 $A = B_1 C_1 = B_2 C_2$, 则存在 r 阶非异阵 P , 使得 $B_2 = B_1 P, C_2 = P^{-1} C_1$.

证明

- (1) 设 P 为 m 阶非异阵, Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} (I_r, O) Q.$$

令 $B = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, C = (I_r, O) Q$, 即得结论.

- (2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在 $r \times m$ 行满秩阵 $S_2, n \times r$ 列满秩阵 T_2 , 使得 $S_2 B_2 = I_r, C_2 T_2 = I_r$, 于是

$$B_2 = B_2 (C_2 T_2) = (B_2 C_2) T_2 = (B_1 C_1) T_2 = B_1 (C_1 T_2),$$

$$C_2 = (S_2 B_2) C_2 = S_2 (B_2 C_2) = S_2 (B_1 C_1) = (S_2 B_1) C_1,$$

$$(S_2 B_1) (C_1 T_2) = S_2 (B_1 C_1) T_2 = S_2 (B_2 C_2) T_2 = (S_2 B_2) (C_2 T_2) = I_r.$$

令 $P = C_1 T_2$, 即得结论.

□

命题 0.4

$A = BC$ 是满秩分解当且仅当 B 的 r 个列向量是 A 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当 C 的 r 个行向量是 A 的 m 个行向量张成线性空间的一组基.

▲

证明

□

例题 0.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times m$ 矩阵 B , 使得 $ABA = A$.



笔记 证法一的不妨设原因与定理 0.2 类似.

证明 证法一: 设 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P 是 m 阶非异阵, Q 是 n 阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵

变换: $A \mapsto PAQ, B \mapsto Q^{-1}BP^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是相抵标准型. 设 $B =$

$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块, 由 $ABA = A$ 可得 $B_1 = I_r$, 其余分块取法任意.

证法二: 设 $A = CD$ 为 A 的满秩分解, E 为列满秩阵 C 的左逆, F 是行满秩阵 D 的右逆. 令 $B = FE$, 则

$$ABA = (CD)(FE)(CD) = C(DF)(EC)D = CD = A.$$

□

例题 0.2 设 A, B 分别是 $3 \times 2, 2 \times 3$ 矩阵且满足

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

试求 BA .

证明 解法一: 通过简单的计算可得 $r(AB) = 2$, 从而 $r(A) \geq 2, r(B) \geq 2$. 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故 $r(A) = r(B) = 2$, 即 A 是列满秩阵, B 是行满秩阵. 又注意到 $(AB)^2 = 9AB$, 经整理可得 $A(BA - 9I_2)B = O$. 根据推论 0.1, 可以在上式的左边消去 A , 右边消去 B , 从而可得 $BA = 9I_2$.

解法二:由解法一中矩阵秩的计算可知, AB 是题中 3 阶矩阵 C 的满秩分解. 注意到 C 的后两列线性无关, 因此可取另一种满秩分解为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 B_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2) 可知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $A_1 = AP, B_1 = P^{-1}B$. 于是 $B_1 A_1 = P^{-1}BAP$, 故 BA 相似于 $B_1 A_1 = 9I_2$, 从而 $BA = P^{-1}(9I_2)P = 9I_2$.

解法三:经简单的计算可得 $|\lambda I_3 - AB| = \lambda(\lambda - 9)^2$, 且特征值 9 的几何重数也等于 2, 因此 AB 可对角化. 由特征值的降价公式可得 $|\lambda I_2 - BA| = (\lambda - 9)^2$, 从而 BA 的两个特征值都是 9, 于是 BA 是可逆矩阵 (特征值都非零). 因此由命题 ?? 可知 BA 也可对角化, 于是 BA 相似于 $9I_2$, 即存在可逆矩阵 P , 使得 $BA = P^{-1}(9I_2)P = 9I_2$. □

命题 0.5 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)

设 A 是 n 阶方阵且 $r(A) = r$, 求证: $A^2 = A$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n \times r$ 矩阵 S 和秩等于 r 的 $r \times n$ 矩阵 T , 使得 $A = ST, TS = I_r$. ♣

证明 充分性显然, 现证必要性. 设 P, Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

代入 $A^2 = A$ 消去两侧的非异阵 P 和 Q , 可得

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

只需令

$$S = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, T = (I_r, O) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,$$

则 S 列满秩, T 行满秩, 经简单计算即得结论. □

推论 0.2 (幂等矩阵的迹和秩相等)

设 A 为 n 阶幂等矩阵, 则 $\text{tr}(A) = r(A)$. ♥

证明 证法一: 由命题 0.5 可知, $\text{tr}(A) = \text{tr}(ST) = \text{tr}(TS) = \text{tr}(I_r) = r = r(A)$.

证法二 (相似标准型): 事实上, 由 $A^2 = A$ 可知, 存在可逆矩阵 P , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} (I_r, O) P^{-1},$$

令 $S = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, T = (I_r, O) P^{-1}$, 可得 $\text{tr}(A) = \text{tr}(ST) = \text{tr}(TS) = \text{tr}(I_r) = r = r(A)$. □

命题 0.6

设 $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, 满足 $r(A+B) = r(A) + r(B)$, 证明: 存在 m 阶非异阵 P, n 阶非异阵 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

其中 $r = r(A), s = r(B)$.

笔记 这个命题中的 I_r 和 I_s 都可以替换为主对角元都为相应矩阵特征值的对角阵 (两边同乘主对角元为对应特征值根式的对角阵和其逆矩阵即可).

证明 证法一 (代数方法): 设 $r(A) = r, r(B) = s$, 则 $r(A+B) = r+s$, 且存在 m 阶非异阵 S, n 阶非异阵 T , 使得

$$SAT = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad SBT = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad S(A+B)T = \begin{pmatrix} I_r + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

因为 $r(A+B) = r+s$, 故删去 $S(A+B)T$ 的前 r 行, 可得后 $m-r$ 行的秩必大于等于 s , 即 $r(B_{21}, B_{22}) \geq s$. 另一方面, 我们还有 $r(B_{21}, B_{22}) \leq r(B) = s$, 故 $r(B_{21}, B_{22}) = r(B) = s$, 从而 (B_{21}, B_{22}) 的行向量的极大无关组也是 SBT 的行向量组的极大无关组. 因此利用 SBT 的后 $m-r$ 行的初等行变换可以消去 SBT 的前 r 行. 同理可证利用 SBT 的后 $n-r$ 列的初等列变换可以消去 SBT 的前 r 列, 即存在 m 阶非异阵 U, n 阶非异阵 V , 使得

$$USATV = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad USBTV = \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix}.$$

此时存在 $m-r$ 阶非异阵 $C, n-r$ 阶非异阵 D , 使得 $CB_{22}D = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 令 $P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & C \end{pmatrix} US, Q = TV \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & D \end{pmatrix}$, 则 P 为 m 阶非异阵, Q 为 n 阶非异阵, 且满足结论.

证法二 (几何方法): 设 $V = \mathbb{K}^n$ 为 n 维列向量空间, $U = \mathbb{K}^m$ 为 m 维列向量空间, $\varphi_A, \varphi_B: V \rightarrow U$ 分别是矩阵 A, B 左乘诱导的线性映射, 满足 $r(\varphi_A + \varphi_B) = r(\varphi_A) + r(\varphi_B)$, 只需证明: 存在 V 的一组基, U 的一组基, 使得 φ_A, φ_B 在这两组基下的表示矩阵分别是题中的两个矩阵.

设 $r(A) = r, r(B) = s$, 则 $r(A+B) = r+s$. 由命题??(5) 知

$$r(A+B) \leq r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B),$$

因此 $r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r+s$, 从而 $\dim(\text{Ker}\varphi_A \cap \text{Ker}\varphi_B) = n - (r+s)$. 由交和空间的维数公式可得

$$\dim(\text{Ker}\varphi_A + \text{Ker}\varphi_B) = (n-r) + (n-s) - (n-r-s) = n,$$

又显然有 $V \supset \text{Ker}\varphi_A + \text{Ker}\varphi_B$, 故有 $V = \text{Ker}\varphi_A + \text{Ker}\varphi_B$. 另一方面, 注意到

$$r(A+B) = \dim \text{Im}(\varphi_A + \varphi_B) \leq \dim(\text{Im}\varphi_A + \text{Im}\varphi_B) \leq \dim \text{Im}\varphi_A + \dim \text{Im}\varphi_B = r(A) + r(B),$$

因此 $\text{Im}(\varphi_A + \varphi_B) = \text{Im}\varphi_A \oplus \text{Im}\varphi_B$.

设 $\text{Ker}\varphi_A \cap \text{Ker}\varphi_B$ 的一组基为 $\{e_{r+s+1}, \dots, e_n\}$, 将其扩张为 $\text{Ker}\varphi_A$ 的一组基 $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$, 再将其扩张为 $\text{Ker}\varphi_B$ 的一组基 $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+s+1}, \dots, e_n\}$. 根据推论??可知, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 恰好是 $V = \text{Ker}\varphi_A + \text{Ker}\varphi_B$ 的一组基. 又由推论??可知, Ae_1, \dots, Ae_r 是 $\text{Im}\varphi_A$ 的一组基, $Be_{r+1}, \dots, Be_{r+s}$ 是 $\text{Im}\varphi_B$ 的一组基. 因为 $\text{Im}(\varphi_A + \varphi_B) = \text{Im}\varphi_A \oplus \text{Im}\varphi_B$, 所以 $Ae_1, \dots, Ae_r, Be_{r+1}, \dots, Be_{r+s}$ 线性无关, 从而可扩张为 U 的一组基

$$\{Ae_1, \dots, Ae_r, Be_{r+1}, \dots, Be_{r+s}, f_{r+s+1}, \dots, f_m\}.$$

最后容易验证 φ_A, φ_B 在 V 的一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, U 的一组基 $\{Ae_1, \dots, Ae_r, Be_{r+1}, \dots, Be_{r+s}, f_{r+s+1}, \dots, f_m\}$ 下的表示矩阵即为所要求的矩阵.

□