0.1 Cauchy 不等式的应用

例题 0.1 设 $f \in C^1[0,1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0)=0$, 证明:
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$
2. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明:
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

注 牛顿莱布尼兹公式也可以看作带积分余项的插值公式 (插一个点).

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式可知
$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(y)dy=\int_0^x f'(y)dy.$$
从而
$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)dy\right|^2 \leqslant \int_0^x 1^2 dy\int_0^x |f'(y)|^2 dy = x\int_0^x |f'(y)|^2 dy \leqslant x\int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$
于是对上式两边同时积分可得
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 x dx \int_0^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$
2. 由牛顿莱布尼兹公式（带积分型余项的插值公式）可得
$$f(x)=\int_0^x f(y)dy, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\quad f(x)=\int_x^1 f'(y)dy, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$
从而
$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)dy\right|^2 \leqslant \int_0^x 1^2 dy\int_0^x |f'(y)|^2 dy = x\int_0^x |f'(y)|^2 dy \leqslant x\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$
$$|f(x)|^2=\left|\int_x^1 f'(y)dy\right|^2 \leqslant \int_0^x 1^2 dy\int_x^1 |f'(y)|^2 dy \leqslant (1-x)\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$
于是对上面两式两边同时积分可得
$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x dx\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy.$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(y)|^2 dy = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 dy.$$
将上面两式相加得
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 |f'(y)|^2 dy.$$

□

例题 0.2 opial 不等式

特例:

1. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明
$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$
2. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0, f(b)=0$, 证明
$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

一般情况:

1. 设 $f\in C^1[a,b], p\geqslant 0, q\geqslant 1$ 且 $f(a)=0$. 证明
$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant \frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}dx. \tag{1}$$
2. 若还有 $f(b)=0$. 证明
$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}dx. \tag{2}$$

笔记 说明了证明的想法就是注意变限积分为整体凑微分.

证明 特例:

1. 令 $F(x)\triangleq\int_a^x |f'(y)|dy$, 则 $F'(x)=|f'(x)|,F(a)=0$. 从而
$$f(x)=\int_0^x f'(y)dy\Rightarrow |f(x)|\leqslant\int_a^x |f'(y)|dy=F(x).$$
于是
$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx\leqslant\int_a^b F(x)F'(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}F^2(b)=\frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(y)|dx\right)^2$$
$$\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\frac{1}{2}\int_a^b 1^2dx\int_a^b |f'(y)|^2dx=\frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(y)|^2dx.$$
2. 由第 1 问可知
$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(y)|^2dy=\frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(y)|^2dy.$$
$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(y)|^2dy=\frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(y)|^2dy.$$
将上面两式相加可得
$$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(y)|^2dy.$$

一般情况:

1. 只证 $q>1$. $q=1$ 可类似得到. 考虑
$$f(x)=\int_a^x f'(y)dy, F(x)=\int_a^x |f'(y)|^q dy.$$
则由 Holder 不等式, 我们知道
$$|f(x)|^p\leqslant\left(\int_a^x|f'(y)|dy\right)^p\leqslant\left(\int_a^x|f'(y)|^qdy\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_a^x 1^{\frac{q}{q-1}}dy\right)^{\frac{p(q-1)}{q}}=F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}},$$
这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 于是
$$\int_a^b|f(x)|^p|f'(x)|^qdx\leqslant\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}|f'(x)|^qdx=\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}dF(x)$$
$$\leqslant(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)dF(x)=\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}F^{\frac{p+q}{q}}(b)$$
$$=\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b|f'(y)|^qdy\right)^{\frac{p+q}{q}}$$
$$\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leqslant}\frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p(q-1)}{q}}\left(\int_a^b|f'(y)|^{q(\frac{p+q}{q})}dy\right)^{\frac{q}{q+p}}\left(\int_a^b 1^{(\frac{p+q}{q-1})}dy\right)^{\frac{q-1}{q+p}}$$
$$=\frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b|f'(y)|^{p+q}dy,$$
这就证明了不等式(1).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q} dx,$$

对称得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(p+q)2^p} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q} dx.$$

故上面两式相加得到(??)式.

□

例题 0.3 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\left(\int_0^1 x f(x) dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

笔记 从条件 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 来看, 我们待定 $a \in \mathbb{R}$, 一定有

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 (x-a) f(x) dx.$$

然后利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x-a) f(x) dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_0^1 (x-a)^2 dx$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a = \frac{1}{2}$ 就是达到最小值的 a.

证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \int_0^1 f^2(x) dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 x f(x) dx\right)^2,
\end{aligned}$$

这就证明了(??)式.

□

例题 0.4 设 $f \in C^1[0,1]$, $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 0$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geqslant 27 \left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2.$$

笔记 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0) = g(1) = 0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x) = \begin{cases} x-1, & c \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant c \end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c = c - 1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-2x, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}.$$

证明 令

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}\end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\int_0^1 |f'(x)|^2dx\int_0^1 |g(x)|^2dx\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)dx\right)^2\xlongequal{\text{分部积分}}\left(\int_0^1 f(x)g'(x)dx\right)^2$$
$$=\left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx-2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx\right)^2$$
$$=\left(\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2,$$

结合 $\int_0^1 |g(x)|^2dx=\frac{1}{27}$, 这就完成了证明. □

例题 0.5 设 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

注 不妨设 $\int_a^b f(x)dx>0$ 的原因: 若 $\int_a^b f(x)dx<0$ 则用 $-f$ 代替 f, $\int_a^b f(x)dx=0$ 是平凡的.

证明 反证, 若 $|f'(x)|\leqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)dx\right|\triangleq M$, 则不妨设 $\int_a^b f(x)dx>0$, 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta_1\in(a,x)$,$\theta_2\in(x,b)$, 使得

$$f(x)=f(a)+f'(\theta_1)(x-a)\leqslant M(x-a),\forall x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right].$$

$$f(x)=f(b)+f'(\theta_2)(x-b)\leqslant -M(x-b)=M(b-x),\forall x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].$$

从而

$$\int_a^b |f(x)|dx\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx=\frac{M(b-a)^2}{4}=\int_a^b |f(x)|dx.$$

于是结合 f 的连续性可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)dx\Rightarrow f(x)=M(x-a),\forall x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right].$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx\Rightarrow f(x)=M(b-x),\forall x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right].$$

故 f 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处不可导, 这与 $f\in D(a,b)$ 矛盾! □