0.1 级数一致收敛性判断

定理 0.1 (函数列一致收敛的柯西准则)

函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是: 对任给正数 ε, 总存在正数 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

证明 **必要性** 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n \to \infty), x \in D$, 即对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

于是当 $n, m > N$, 由 (2) 就有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 若条件 (1) 成立, 由数列收敛的柯西准则,$\{f_n\}$ 在 D 上任一点都收敛, 记其极限函数为 $f(x), x \in D$. 现固定 (1) 式中的 n, 让 $m \to \infty$, 于是当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

因此,$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n \to \infty), x \in D$.

□

定理 0.2

函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{3}$$

证明 **必要性** 若 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n \to \infty), x \in D$. 则对任给的正数 ε, 存在不依赖于 x 的正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ x \in D.$$

由上确界的定义, 亦有

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这就证得 (3) 式成立.

由假设, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

因为对一切 $x \in D$, 总有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|,$$

故由 (4) 式得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

□

推论 0.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上不一致收敛于 f 的充分且必要条件是: 存在 $\{x_n\} \subset D$, 使得 $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ 不收敛于 0.

定理 0.3 (一致收敛的柯西准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数 ε, 总存在某正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p, 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

推论 0.2

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

定理 0.4

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

定理 0.5 (A-D 判别法)

若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在定义域内满足下列两条件之一, 则其在定义域上一致收敛

(1) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且在定义域内一致有界;$\sum\limits_{i=1}^{n} b_n$ 一致收敛.(Abel 判别法)

(2) $\{a_n(x)\}$ 对于固定的 x 关于 n 单调, 且一致趋于 0;$\sum\limits_{i=1}^{n} b_n$ 一致有界.(Dirichlet 判别法)

定理 0.6

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在且相等.

证明 先证 $\{a_n\}$ 是收敛数列. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 一致收敛, 故有 N, 当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 和对一切 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, 有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知 $\{a_n\}$ 是收敛数列.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 再证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

由于 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 及 a_n 收敛于 A, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N, 当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别取 $n = N + 1$, 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样, 当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

□

定理 0.7 (连续性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续.

笔记 由这个定理可知, **若各项为连续函数的函数列在区间 I 上其极限函数不连续, 则此函数列在区间 I 上不一致收敛.**

证明 设 x_0 为 I 上任一点. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, 于是由定理 0.6知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 亦存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 上连续.

□

推论 0.3

若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f, 则 f 在 I 上连续.

定理 0.8 (可积性)

若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

证明 设 f 为函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上的极限函数. 由定理 0.7, f 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 与 f 在 $[a, b]$ 上都可积.

因为在 $[a, b]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$, 故对任给正数 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再根据定积分的性质, 当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

这就证明了等式 (6).

□

定理 0.9 (可微性)

设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 若 $x_0 \in [a, b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点,$\{f_n\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $\{f_n'\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x). \tag{7}$$

证明 设 $f_n(x_0) \to A$ $(n \to \infty)$,$f_n' \rightrightarrows g$ $(n \to \infty)$,$x \in [a, b]$. 我们要证明函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a, b]$ 上收敛, 且其极限

函数的导数存在且等于 g.

由定理条件, 对任一 $x \in [a,b]$, 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n \to \infty$ 时, 右边第一项极限为 A, 第二项极限为 $\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$(定理 0.8), 所以左边极限存在, 记为 f, 则有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $f(x_0) = A$. 由 g 的连续性及微积分学基本定理推得

$$f' = g.$$

这就证明了等式 (7).

□

定理 0.10 (连续性)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在 $[a,b]$ 上也连续.

笔记 这个定理指出: 在一致收敛条件下,(无限项) 求和运算与求极限运算可以交换顺序, 即

$$\sum\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right).$$

定理 0.11 (逐项求积)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 0.12 (逐项求导)

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数,$x_0 \in [a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点, 且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$\sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right).$$

例题 0.1 判断下列级数在指定区间一致收敛性:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$, $[0,+\infty)$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$, $[-a,a], a>0$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)$, $[-1,1]$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, $[0,+\infty)$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$, $(0,+\infty)$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}$, $(0,+\infty)$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$, $[0,+\infty)$.

注 第 4 问可以通过裂项算出级数的和函数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}&=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\\&=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\right]\\&=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}=1-\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}.\end{aligned}$$

但 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 的一致收敛性不好判断 (这个方法比较复杂), 因此我们不采取这个方法.

证明

1. 显然 $\left|\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 单调递减. 又
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\to 0, n\to\infty,$$
我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

2. 显然 $\left|\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[-a,a]$ 都有 $\frac{n+x^2}{n^2}$ 单调递减. 又
$$\frac{n+x^2}{n^2}\leqslant\frac{n+a^2}{n^2}\to 0, n\to\infty,$$
我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$ 在 $[-a,a]$ 一致收敛.

3. 注意到
$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)\right|=\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\frac{x^m}{m+1}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}=0,$$
我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛.

4. 一方面, 对 $x\in[1,+\infty), n\in\mathbb{N}$, 我们有
$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},\forall x\in[1,+\infty).$$
另外一方面, 对 $n\geqslant 2, x\in[0,1)$, 我们有
$$\begin{aligned}\frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})}&\leqslant\frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})}\\&\leqslant\frac{x^{2n}}{\underbrace{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}_{n\text{个}}}\leqslant\frac{x^{2n}}{C_n^2x^{2n}}=\frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$
即由 Weierstrass 判别法和
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<\infty,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}<\infty,$$
我们知道原级数一致收敛.

5. 首先

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}},\forall x>0,n\in\mathbb{N}.$$

然后

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\right)'=\frac{\sqrt{x}(3-nx^2)}{2n(1+x^2n)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\leqslant\left.\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\right|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}}=\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{x}{1+nx^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}<+\infty.$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

6. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{2n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}\leqslant\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{\sin^2 x}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

7. 因为

$$\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)'=\frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2},$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)^2<\infty,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

□

例题 0.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是否一致收敛.

笔记 连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 一致收敛, 则在 $\overline{I}$ 也一致收敛, 这是因为有等式

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|=\sup_{x\in\overline{I}}|f_n(x)-f_m(x)|.$$

我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\frac{e^{inx}}{n}\right)=\Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\Im(-\ln(1-e^{ix}))=-\arg(1-e^{ix})\\&=-\arg(1-\cos x-i\sin x)=-\arctan\frac{-\sin x}{1-\cos x}=\arctan\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\arctan\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}-\arctan\tan\frac{x}{2}=\frac{\pi-x}{2},\end{aligned}$$

然后对 $\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi,\pi]$ 展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi).$$

这个级数结果应当记忆. 注意到上述和函数与 x 有关, 故原级数一定不一致收敛, 下面将证明严格化.

证明 对 $\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi,\pi]$ 展开为傅立叶级数, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 一致收敛, 则在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot 0)}{n}=0\neq\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

这就和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $x=0$ 应该连续矛盾! 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 不一致收敛.

□

例题 0.3 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 令

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],n=1,2,\cdots.$$

试证明对任给区间 $[a,b]$ 都有 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f'(x)$.

证明 由 Cantor 定理及 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 可知 f' 内闭一致连续性, 于是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in[a,b]$,$t\in[0,\delta]$, 我们有

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant\varepsilon.$$

当 $n>\frac{1}{\delta}$, 我们对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f'(x)|&=n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}}f'(y)-f'(x)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant n\int_x^{x+\frac{1}{n}}|f'(y)-f'(x)|\mathrm{d}y=n\int_0^{\frac{1}{n}}|f'(x+t)-f'(x)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\varepsilon n\int_0^{\frac{1}{n}}1\mathrm{d}t=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f'(x)$.

□

例题 0.4 讨论下列函数在给定区间可微性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$, $(0,+\infty)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$, $(-\infty,+\infty)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$, $(-\infty,+\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$, $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

证明

1. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 显然收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n^2\pi x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2\pi e^{-n^2\pi x}.$$

对任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-n^2\pi e^{-n^2\pi x}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi e^{-n^2\pi a}<\infty,$$

即内闭一致收敛, 因此由定理 0.12可知 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 在 $(0,+\infty)$ 可微.

2. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\rightrightarrows 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$$

注意到

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\right|\leqslant 1,\left|\frac{1}{n+x^2}\right|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},$$

以及对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\frac{1}{n+x^2}$ 递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

4. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)$$

在任何 $[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 一致收敛.
显然存在 $c_{a,b}\in(0,1)$ 使得

$$|\tan x|\leqslant c_{a,b},\forall x\in[a,b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)\right|\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}c_{a,b}^{n-1}<\infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2 x+1\right)$$

在 $[a,b]$ 一致收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 可微.

□

例题 0.5 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 的一致收敛性.

证明 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\left[\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right],n=2,3,\cdots.$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$

现在

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

于是由级数和函数不连续知其在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 不一致收敛.

□

例题 0.6 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 和 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性.

证明 首先注意到

$$\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]'=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\geqslant 0,$$

我们有

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n=e^b\left[1-e^{n\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)-b}\right]=e^b\left[1-e^{n\left[\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-b}\right]$$
$$=e^b\left[1-e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}\right]=O\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty,$$

(实际上我们可以写出具体的等价量 $e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\sim\frac{e^bb^2}{2n},n\to\infty$) 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right]<\infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 一致收敛. 注意到

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\right|=+\infty,$$

我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

□

例题 0.7 对 $\alpha>0$, 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$(x^\alpha e^{-nx})'=(\alpha-nx)x^{\alpha-1}e^{-nx}=0\Rightarrow x=\frac{\alpha}{n}.$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx}\leqslant\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha>1$, 我们由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty$ 知原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

当 $\alpha\in[0,1)$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha}{e^x-1}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

如果原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 那么上述和函数在 $x=0$ 应该连续. 但是

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{e^x-1}\neq 0,$$

故原级数在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

□

例题 0.8 求 α 的范围, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

笔记 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}=+\infty$$

时一定有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对 x 赋值往往能实现这一点.

证明 当 $\alpha>1$, 首先由

$$\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}\right]'=\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}\left[n+\frac{\alpha}{n}-(n+\alpha)x\right]=0\Rightarrow x=\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}\text{ 为函数列通项最大值点.}$$

知

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}&=\left(\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}\right)^{\alpha}=\left(\frac{n^3-n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^{n}\left(\frac{\alpha n-\alpha}{n^2+\alpha n}\right)^{\alpha}\\&\sim\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}}\left(\frac{n^3-n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^{n}=\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}}\left(1-\frac{(1+\alpha)n^2}{n^3+\alpha n^2}\right)^{n}\\&\sim\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}}e^{-\frac{(1+\alpha)n^3}{n^3+\alpha n^2}}\sim\frac{e^{-(1+\alpha)}\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}},n\to\infty.\end{aligned}$$

故由 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

当 $\alpha\leqslant 0$, 原级数在 $x=1$ 时通项极限不等于 0, 故此时级数在 $x=1$ 时发散.

当 $0<\alpha\leqslant 1$, 当 $N\to+\infty$, 取 $x=n+\frac{\alpha}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^{\alpha}&\geqslant\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{N}\right)^{n}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^{\alpha}=\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{n}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^{\alpha}\\&\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^{\alpha}\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(\frac{\alpha-\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^{\alpha}\\&\sim Ne^{-\frac{(1+\alpha)(2N-1)}{N+\alpha}}\cdot\frac{\alpha^{\alpha}}{N^{\alpha}}\sim\frac{\alpha^{\alpha}e^{-2(1+\alpha)}}{N^{\alpha-1}}\to+\infty,\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n}(1-x)^{\alpha}$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛.

□

例题 0.9 设 $f_1\in C[a,b],x_0\in[a,b]$. 考虑函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_{x_0}^{x}f_n(t)\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

讨论 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛性.

笔记 注意到

$$\begin{aligned}&|f_1(x)|\leqslant M\Rightarrow|f_2(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}M\mathrm{d}x=M|x-x_0|\\&\Rightarrow|f_3(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}M|x-x_0|\mathrm{d}x=\frac{M}{2}|x-x_0|^2\Rightarrow\cdots\cdots\end{aligned}$$

于是就有下述归纳.

注 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 因此我们放缩时在积分号外面再加了一个绝对值 (当然也可以分类讨论).

证明 设 $M \triangleq \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_1(x)|$, 我们归纳证明

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1}. \tag{8}$$

现在(8)对 $n=1$ 已经成立. 假设 n 时成立, 我们对 $x_0 \in [a,b]$ 有

$$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_{x_0}^x f_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\int_{x_0}^x |x-x_0|^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{M}{n!}|x-x_0|^n.$$

现在由数学归纳法知对一切 $n\in\mathbb{N}$ 都有(8)成立, 故

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1} \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\max\left\{|b-x_0|^{n-1}, |x_0-a|^{n-1}\right\},$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 0.

□

例题 0.10 设 $[0,1]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 满足 $f_n \geqslant 0$, 且

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+f_n(t)}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

证明:$\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并求出极限函数

笔记 极限函数的求法: 设 $\{f_n\}$ 的极限函数为 f, 则对条件等式两边同时求导并令 $n\to\infty$ 得

$$f'(x) = \frac{1}{1+f(x)} \Longrightarrow f(x) = \sqrt{2x+1}-1.$$

证明 记 $f(x)=\sqrt{2x+1}-1$, 则

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+f(t)}.$$

由 $f_1\in C[0,1]$ 知, 存在 $M>0$, 使得

$$|f_1(x)-f(x)| \leqslant M, \quad \forall x\in[0,1].$$

假设 $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \dfrac{Mx^{n-1}}{n!}, \forall x\in[0,1]$. 则

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x)-f(x)| &\leqslant \int_0^x \left|\frac{1}{1+f_n(t)} - \frac{1}{1+f(t)}\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{|f_n(t)-f(t)|}{(1+f_n(t))(1+f(t))}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x \frac{Mt^{n-1}}{n!}\mathrm{d}t = \frac{Mx^n}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

故由数学归纳法知

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{Mx^{n-1}}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}, \quad \forall x\in[0,1].$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{M}{n!} = 0.$$

故 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)=\sqrt{2x+1}-1$.

□

例题 0.11

1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数, 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n|\sin nx|$, 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L>0$, 使对任意实数 x,y, 都有 $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛.

2. 设 $b_n \geqslant 0$, 且 $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 证明 $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 的充要条件为 $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$ 收敛.

注 第 2 问中不能与第 1 问一样直接得到

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \geqslant \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{m} b_n \sin nx,$$

这个放缩是错误的. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 不是正项级数, 第 1 问中有绝对值, 从而是正项级数才能这样放缩.

证明

1. 注意到 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 故对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left|\sin \frac{n}{m}\right|}{\frac{1}{m}} \geqslant \sum_{n=1}^{m} na_n \frac{\left|\sin \frac{n}{m}\right|}{\frac{n}{m}} \\ &= \sum_{n=1}^{m} na_n \frac{\sin \frac{n}{m}}{\frac{n}{m}} \geqslant \sum_{n=1}^{m} na_n \frac{\sin 1}{1} \\ &= \sin 1 \sum_{n=1}^{m} na_n.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{m} na_n \leqslant \frac{1}{\sin 1} mf\left(\frac{1}{m}\right), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件且 $f(0)=0$, 所以

$$\sum_{n=1}^{m} na_n \leqslant \frac{1}{\sin 1} m \cdot L \cdot \frac{1}{m} = \frac{L}{\sin 1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

令 $m \to +\infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant \frac{L}{\sin 1} < +\infty.$$

2. 由条件和函数项级数连续性定理可知 $\phi(x) \in C(\mathbb{R})$.

充分性: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n < +\infty.$$

故由函数项级数逐项求导定理知

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx.$$

由函数项级数连续性定理知 $\phi'(x) \in C(\mathbb{R})$. 因此 $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

必要性: 任取 $x > 0$, 由函数项级数逐项求积定理知

$$\frac{\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(1-\cos nx)}{n} \geqslant \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n(1-\cos nx)}{n}, \quad \forall m \geqslant 1.$$

上式中令 $x \to 0^+$ 再结合 L'Hospital 法则得到

$$\frac{1}{2}\phi'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} \geqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n(1-\cos nx)}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} nb_n.$$

因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$ 收敛.

□