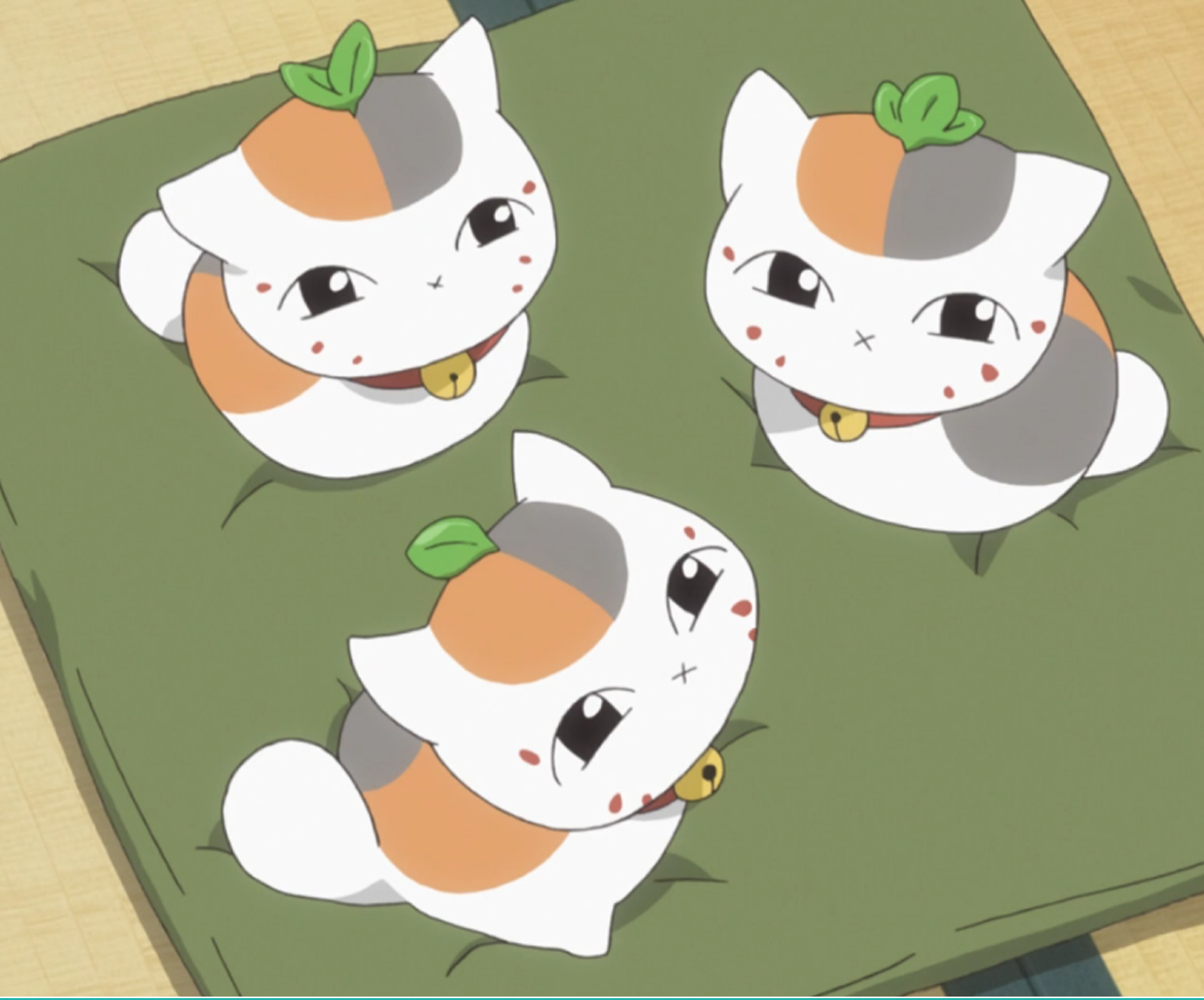

分析学技巧积累

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一部分

一元实变函数的 Lebesgue 积分

第一章 集合、映射与关系的预备知识

1.1 集合的基本概念

定义 1.1 (集合的基本概念)

1. 对于集合 A，元素 x 是 A 的成员关系记为 $x \in A$，而 x 不是 A 的成员关系记为 $x \notin A$。我们常说 A 的一个成员属于 A 且称 A 的成员是 A 中的一个点。通常集合用花括号表示，因此 $\{x|x\}$ 是使得关于 x 的陈述成立的所有元素 x 的集合。若两个集合有相同的成员，我们说它们相同.
2. 令 A 和 B 为集合。若 A 的每个成员也是 B 的成员，我们称 A 为 B 的**子集**，记之为 $A \subseteq B$，也说 A 包含于 B 或 B 包含 A。B 的子集 A 称为 B 的**真子集**.
3. 若 $A \neq B$。A 和 B 的**并**，记为 $A \cup B$，是所有或者属于 A 或者属于 B 的点的集合，即 $A \cup B = \{x|x \in Ax \in B\}$。
4. A 和 B 的**交**，记为 $A \cap B$，是所有同时属于 A 和 B 的点的集合，即 $A \cap B = \{x|x \in Ax \in B\}$。
5. A 在 B 中的**补**，记为 $B - A$，是 B 中那些不在 A 中的点的集合，即 $B - A = \{x \in Bx \notin A\}$。若在特别的讨论中所有的集合是参考集 X 的子集，我们常简单地称 $X - A$ 为 A 的补。
6. 没有任何成员的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。不等于空集的集合称为非空的。
7. 我们称只有一个成员的集合为**单点集**。
8. 给定集合 X，X 的所有子集的集合记为 $\mathcal{P}(X)$ 或 2^X，称之为 X 的**幂集**。

♣

注 为了避免考虑集合的集合时可能产生混淆，我们常用词“族”或“簇”作为“集”的同义词。我通常称集合的集合为**集族**或**集簇**.

定义 1.2 (集族的并和交)

令 $\mathcal{F}$ 为集族.

1. $\mathcal{F}$ 的并，记为 $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F$，定义为属于 $\mathcal{F}$ 中的至少一个集合的点的集合。
2. $\mathcal{F}$ 的交，记为 $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$，定义为属于 $\mathcal{F}$ 中的每个集合的点的集合。
3. 若集族 $\mathcal{F}$ 中的任何两个集合的交是空的，集族 $\mathcal{F}$ 称为是**不交的**.
4. 若集族 $\mathcal{F}$ 是不交的, 则 $\mathcal{F}$ 的并称为是**无交并**或**没交并**, 记为 $\bigsqcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F$.

♣

定理 1.1 (De Morgan 等式)

令 X 为集合,$\mathcal{F}$ 为集族, 则一定有

$$X - \left[\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} [X - F], \quad X - \left[\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F\right] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} [X - F]$$

即并的补是补的交，且交的补是补的并.

♡

定义 1.3 (指标集)

对于集合 Λ，假定对每个 $\lambda \in \Lambda$，存在已定义的 E_λ。令 $\mathcal{F}$ 为集族 $\{E_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$。我们写作 $\mathcal{F} = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 且称 Λ 中的元素为 $\mathcal{F}$ 的用**指标集** (或**参数集**)Λ 标记的**指标** (或**参数化**).

♣

1.2 集合之间的映射

定义 1.4 (映射的基本概念)

给定两个集合 A 和 B，从 A 到 B 的映射或函数意味着对 A 的每个成员指派 B 的一个成员给它。在 B 是实数集的情形下，我们总是用“函数”这个词。一般我们记这样的映射为 $f: A \to B$，而对 A 的每个成员 x，我们记 $f(x)$ 为 B 中指派给 x 的成员。

1. 对于 A 的子集 A', 我们定义 $f(A') = \{b|b = f(a), a为A'的某个成员\}$：$f(A')$ 称为 A' 在 f 下的**象**.
2. 我们称集合 A 为函数 f 的**定义域**.
3. 我们称 $f(A)$ 为 f 的**象或值域**。

♣

定义 1.5 (满射、单射和双射)

1. 若 $f(A) = B$，函数 f 称为是**映上的**或**满射**.
2. 若对 $f(A)$ 的每个成员 b 恰有 A 的一个成员 a 使得 $b = f(a)$，函数 f 称为是**一对一的**或**单射**.
3. 既是一对一又是映上的映射 $f: A \to B$ 称为是**可逆的**或**双射**, 我们说该映射建立了集合 A 与 B 之间的一一对应.

♣

定义 1.6 (可逆映射的逆)

给定一个可逆映射 $f: A \to B$，对 B 中的每个点 b，恰好存在 A 中的一个成员 a 使得 $f(a) = b$，它被记为 $f^{-1}(b)$。这个指派定义了映射 $f^{-1}: B \to A$，称之为 f 的**逆**.

♣

定义 1.7 (对等的集合)

两个集合 A 和 B 称为是**对等的**, 记为 $A \sim B$, 若存在从 A 映到 B 的可逆映射.

♣

注 从集合论的观点看，对等的两个集合是不可区分的.

命题 1.1 (可逆映射的复合是可逆的)

给定两个映射 $f: A \to B$ 和 $g: C \to D$ 使得 $f(A) \subseteq C$，则复合 $g \circ f: A \to D$ 定义为对每个 $x \in A$，$[g \circ f](x) = g(f(x))$。不难看出**可逆映射的复合是可逆的**。

♠

定义 1.8 (恒等映射)

对于集合 D，定义**恒等映射**$\mathrm{id}_D: D \to D$ 为对所有 $x \in D$，$\mathrm{id}_D(x) = x$。

♣

命题 1.2 (可逆映射的充要条件)

映射 $f: A \to B$ 是可逆的，当且仅当存在映射 $g: B \to A$ 使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_A f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

♠

定义 1.9 (原象)

即便映射 $f: A \to B$ 不是可逆的，对于集合 E，我们定义 $f^{-1}(E)$ 为集合 $\{a \in A | f(a) \in E\}$，称之为 E 在 f 下的**原象**.

♣

命题 1.3 (原像的性质)

我们有下面有用的性质：对于任何两个集合 E_1 和 E_2，

$$f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2), \quad f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$$

与
$$f^{-1}(E_1 - E_2) = f^{-1}(E_1) - f^{-1}(E_2).$$

定义 1.10 (映射的限制)

对于映射 $f : A \to B$ 和它的定义域 A 的一个子集 A',f 在 A' 上的**限制**, 记为 $f|_{A'}$，是从 A' 到 B 的映射，它将 $f(x)$ 指派给每个 $x \in A'$.

1.3 等价关系、选择公理以及 Zorn 引理

定义 1.11 (笛卡尔积)

给定两个非空集 A 和 B，A 和 B 的**笛卡尔积**, 记为 $A \times B$，定义为所有有序对 (a, b) 的族，其中 $a \in A$ 而 $b \in B$，且我们考虑 $(a, b) = (a', b')$ 当且仅当 $a = a'$ 且 $b = b'$.

定义 1.12 (关系及其自反性、对称性、传递性)

对于非空集合 X，我们称 $X \times X$ 的子集 R 为 X 上的一个**关系**，且写作 xRx'.

1. 若 (x, x') 属于 R. 关系 R 称为**自反的**, 若对所有 $x \in X$ 有 xRx;
2. 若 (x, x') 属于 R. 关系 R 称为**对称的**, 若 $x'Rx$ 则 xRx';
3. 若 (x, x') 属于 R. 关系 R 称为**传递的**, 若 xRx' 且 $x'Rx''$ 则 xRx''.

定义 1.13 (等价关系)

集合 X 上的关系 R 称为**等价关系**, 若它是自反的、对称的和传递的。

定义 1.14 (等价类)

给定集合 X 上的等价关系 R，对每个 $x \in X$，集合 $R_x = \{x' | x' \in X, xRx'\}$ 称为 x(关于 R) 的**等价类**.
集合 X 中所有元素 (关于 R) 的等价类构成的集合称为 X(关于 R) 的**等价类族**, 记为 X/R.

命题 1.4 (等价类的性质)

给定集合 X 上的等价关系 R,

(1) $R_x = R_{x'}$ 当且仅当 xRx'.
(2) 等价类族 X/R 是不交的.
(3) X/R 是 X 的非空子集的不交族, 其并是 X. 即 $X = \bigsqcup_{x \in X} R_x = \bigsqcup_{F \in X/R} F$.
(4) (反过来) 给定 X 的非空子集的不交族 $\mathcal{F}$，其并是 X，属于 $\mathcal{F}$ 中的同一个集的关系是 X 上使得 $\mathcal{F} = X/R$ 的等价关系 R.

证明

(1) 由 R 是对称的和传递的等价类的性质 (1)容易验证.
(2) 由关系 R 是自反的容易验证.
(3)

定义 1.15 (集合的势)

给定集合 X, 对等关系是 X 的所有子集组成的族 2^X 上的等价关系. 一个集合关于对等关系的等价类称为该集合的**势**或**基数**.

换句话说，设集合 A 和 B，若 $A \sim B$，就可以称 A 与 B 具有相同**势**或**基数**.

定义 1.16 (选择函数)

令 $\mathcal{F}$ 为非空集的非空簇。$\mathcal{F}$ 上的一个**选择函数** f 是从 $\mathcal{F}$ 到 $\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}} F$ 的函数，它具有以下性质：对 $\mathcal{F}$ 中的每个集合 F, $f(F)$ 是 F 的一个成员.

公理 1.1 (Zermelo 选择公理)

令 $\mathcal{F}$ 为非空集的非空族，则 $\mathcal{F}$ 上存在选择函数.

定义 1.17 (序关系)

非空集合 X 上的关系 R 称为**偏序**，若它是自反的、传递的，且对 X 中的 x，x' 若 xRx' 且 $x'Rx$，则 $x = x'$. X 的子集 E 称为是**全序的**，若对 E 中的 x,x'，或者 xRx' 或者 $x'Rx$.

1. X 的成员 x 称为是 X 的子集 E 的一个**上界**，若对所有 $x' \in E$，都有 $x'Rx$；
2. X 的成员 x 称为**最大的**，若 X 中使得 xRx' 的唯一成员是 $x' = x$.

笔记 对于集簇 $\mathcal{F}$ 和 A，$B \in \mathcal{F}$，定义 ARB，若 $A \subseteq B$。**集合的被包含关系**是 $\mathcal{F}$ 的偏序。观察到 $\mathcal{F}$ 中的集合 F 是 $\mathcal{F}$ 的子簇 $\mathcal{F}'$ 的一个上界，若 $\mathcal{F}'$ 中的每个集合是 F 的子集；而 $\mathcal{F}$ 中的集合 F 是最大的，若它不是 $\mathcal{F}$ 中任何集合的真子集。

类似地，给定集簇 $\mathcal{F}$ 和 A，$B \in \mathcal{F}$，定义 ARB，若 $B \subseteq A$。**集合的包含关系**是 $\mathcal{F}$ 的偏序。观察到 $\mathcal{F}$ 中的集合 F 是 $\mathcal{F}$ 的子簇 $\mathcal{F}'$ 的一个上界，若 $\mathcal{F}'$ 的每个集合包含 F；而 $\mathcal{F}$ 中的集合 F 是最大的，若它不真包含 $\mathcal{F}$ 中的任何集合。

引理 1.1 (Zorn 引理)

令 X 为偏序集. 它的每个全序子集有一个上界. 则 X 有一个最大元.

我们已定义了两个集合的笛卡尔积。对一般的参数化集族定义笛卡尔积是有用的。对于由集合 Λ 参数化的集族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的笛卡尔积，记为 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$，定义为从 Λ 到 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 使得对每个 $\lambda \in \Lambda$，$f(\lambda)$ 属于 E_λ 的函数 f 的集合。显然选择公理等价于非空集的非空簇的笛卡尔积是非空的这一断言。注意到笛卡尔积是对参数化的集簇定义的，而相同的簇的两个不同的参数化将有不同的笛卡尔积。笛卡尔积的这个一般定义与对两个集合给出的定义一致。事实上，考虑两个非空集 A 和 B。定义 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，接着定义 $E_{\lambda_1} = A$ 与 $E_{\lambda_2} = B$。该映射将有序对 $(f(\lambda_1), f(\lambda_2))$ 指派给函数 $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 是一个将笛卡尔积 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 映到有序对族 $A \times B$ 的可逆映射，因此这两个集合是对等的。对于两个集合 E 和 Λ，对所有 $\lambda \in \Lambda$ 定义 $E_\lambda = E$，则笛卡尔积 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 等于由所有从 Λ 到 E 的映射组成的集合且记为 E^Λ。

第二章 实数集: 集合、序列与函数

2.1 域、正性以及完备性公理

假设给定实数集 $\mathbb{R}$，使得对于每对实数 a 和 b，存在有定义的实数 $a+b$ 和 ab，分别称为 a 和 b 的和与积。它们满足以下的域公理、正性公理与完备性公理。

公理 2.1 (域公理)

加法的交换性：对所有实数 a 和 b，

$$a+b=b+a$$

加法的结合性：对所有实数 a，b 和 c，

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

加法的单位元：存在实数，记为 0，使得对所有实数 a，

$$0+a=a+0=a$$

加法的逆元：对每个实数 a，存在实数 b 使得

$$a+b=0$$

乘法的交换性：对所有实数 a 和 b，

$$ab=ba$$

乘法的结合性：对所有实数 a，b 和 c，

$$(ab)c=a(bc)$$

乘法的单位元：存在实数，记为 1，使得对所有实数 a，$1a=a1=a$ 乘法的逆元：对每个实数 $a\neq 0$，存在实数 b 使得

$$ab=1$$

分配性：对所有实数 a，b 和 c，

$$a(b+c)=ab+ac$$

非平凡性假设:

$$1\neq 0$$

满足上述公理的任何集合称为**域**. 从加法的交换性可以得出加法的单位元 0 是唯一的，从乘法的交换性得出乘法的单位元 1 也是唯一的。加法的逆元和乘法的逆元也是唯一的。我们记 a 的加法的逆为 $-a$，且若 $a\neq 0$，记它的乘法逆为 a^{-1} 或 $1/a$.

注 若有一个域，我们能实施所有初等代数的运算，包括解线性方程组。我们不加声明地使用这些公理的多种推论.

公理 2.2 (正性公理)

存在称为正数的实数集，记为 $\mathcal{P}$。它有以下两个性质：

(1) 若 a 和 b 是正的，则 ab 和 $a+b$ 也是正的。

(2) 对于实数 a，以下三种情况恰有一种成立：

$$a\text{是正的}, \quad -a\text{是正的}, \quad a=0.$$

定义 2.1 (实数的序)

对于实数 a 和 b,

1. 定义 $a > b$ 意味着 $a - b$ 是正的.
2. 定义 $a \geqslant b$ 意味着 $a > b$ 或 $a = b$.
3. 定义 $a < b$ 意味着 $b > a$.
4. 定义 $a \leqslant b$ 意味着 $b \geqslant a$.

注 实数的序的定义是根据实数的正性公理给出的.

定义 2.2 (实数的区间)

给定实数 a 和 b 满足 $a < b$, 我们定义 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 且说 (a, b) 的点落在 a 与 b 之间.
我们称非空实数集 I 为**区间**, 若对 I 中任意两点, 所有落在这两点之间的点也属于 I。当然, 集合 (a, b) 是区间。以下集合也是区间:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}; [a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}; [a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}; (a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}. \tag{2.1}$$

笔记 所有有界区间都是(2.1)式列出的形式.

定义 2.3 (上界和下界)

1. 非空实数集 E 称为**有上界**, 若存在实数 b, 使得对所有 $x \in E$, $x \leqslant b$: 数 b 称为 E 的**上界**.
2. 非空实数集 E 称为**有下界**, 若存在实数 b, 使得对所有 $x \in E$, $x \geqslant b$: 数 b 称为 E 的**下界**.

公理 2.3 (完备性公理)

令 E 为有上界的非空实数集。则在 E 的上界的集合中有一个最小的上界。

笔记 有上界的集合未必有最大的成员。但完备性公理断言它一定有一个最小的上界.

定义 2.4 (上下确界)

1. 有上界的非空实数集 E 有**最小上界**, 记为 l.u.b. E。E 的最小上界通常称为 E 的**上确界**且记为 $\sup E$。
2. 有下界的非空实数集 E 有**最大下界**, 记为 g.l.b. E。E 的最大下界通常称为 E 的**下确界**且记为 $\inf E$。
3. 一个非空实数集称为**有界的**, 若它既有下界又有上界。

注 有上界的非空实数集 E 的最小上界和有下界的非空实数集 E 的最大下界的存在性由完备性公理保证, 因此这个定义是良定义.

定义 2.5 (实数的绝对值)

定义实数 x 的绝对值 $|x|$ 为: 若 $x \geqslant 0$ 则等于 x, 若 $x < 0$ 则等于 $-x$。

定理 2.1 (三角不等式)

对任何实数对 a 和 b, 都有

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| .$$

定义 2.6 (扩充的实数)

引入符号 ∞ 和 $-\infty$ 并对所有实数 x 写 $-\infty < x < \infty$ 是方便的。我们称集合 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 为**扩充的实数**.

笔记 我们将定义实数序列的极限, 而允许极限是扩充的实数是方便的.

定义 2.7 (扩充的实数的上下确界)

1. 若非空实数集 E 没有上界，我们定义它的上确界为 ∞ 或 $+\infty$。定义空集的上确界为 $-\infty$.
2. 若非空实数集 E 没有下界，我们定义它的下确界为 $-\infty$. 定义空集的下确界为 $+\infty$.

笔记 因此每个实数集有一个属于扩充的实数的上确界和下确界.

命题 2.1 (扩充的实数关于和与积的性质)

1. $\infty + \infty = \infty$，$-\infty - \infty = -\infty$.
2. 对每个实数 x，$x + \infty = \infty$ 而 $x - \infty = -\infty$.
3. 若 $x > 0$，$x \cdot \infty = \infty$ 而 $x \cdot (-\infty) = -\infty$.
4. 若 $x < 0$，$x \cdot \infty = -\infty$ 而 $x \cdot (-\infty) = \infty$。

注 注意到收敛到实数的实数序列的许多性质在极限是 $\pm\infty$ 时继续成立, 例如, 和的极限是极限的和且积的极限是极限的积. 因此我们容易验证这些扩充的实数关于和与积的性质.

定义 2.8 (无界区间)

定义 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$。对于 a，$b \in \mathbb{R}$，定义

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

与

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant b\}.$$

笔记 上面形式的集合是无界区间。从 $\mathbb{R}$ 的完备性可以推出所有无界区间是上述形式的一种，而所有有界区间都是(2.1)式列出的形式.

例题 2.1 令 a 和 b 为实数.

(i) 证明：若 $ab = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

(ii) 验证 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$，并从 (i) 部分推出：若 $a^2 = b^2$，则 $a = b$ 或 $a = -b$.

(iii) 令 c 为正实数. 定义 $E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < c\}$. 验证 E 是非空的且有上界. 定义 $x_0 = \sup E$. 证明 $x_0^2 = c$. 用 (ii) 部分证明存在唯一的 $x > 0$ 使得 $x^2 = c$. 记之为 $\sqrt{c}$.

证明

2.2 自然数与有理数

定义 2.9 (归纳集)

实数集 E 称为是**归纳的**，若它包含 1，且若实数 x 属于 E，则数 $x + 1$ 也属于 E。

笔记 显然全体实数集 $\mathbb{R}$ 是归纳的。从不等式 $1 > 0$ 我们容易推出集合 $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 1\}$ 是归纳的。

定义 2.10 (自然数集)

自然数集, 记为 $\mathbb{N}$, 定义为 $\mathbb{R}$ 的所有归纳子集的交, 即包含数 1 的最小归纳集.

注 集合论中的自然数集一般是从 0 开始, 但这里自然数集是从 0 开始的, 也就是说 $0 \notin \mathbb{N}$.

命题 2.2 (自然数集是归纳的)

$\mathbb{N}$ 是归纳的.

证明 观察到数 1 属于 $\mathbb{N}$，这是由于 1 属于每个归纳集。此外，若数 k 属于 $\mathbb{N}$，则 k 属于每个归纳集。因此，由归纳集的定义可知,$k+1$ 属于每个归纳集，所以 $k+1$ 属于 $\mathbb{N}$.

定理 2.2 (数学归纳法原理)
对每个自然数 n，令 $S(n)$ 为某个数学断言。假定 $S(1)$ 成立。也假定每当 k 是使得 $S(k)$ 成立的自然数，则 $S(k+1)$ 也成立。那么，对每个自然数 n，$S(n)$ 成立。

证明 定义 $A=\{k\in\mathbb{N}|S(k)$ 成立 $\}$。假设恰好意味着 A 是一个归纳集。于是 $\mathbb{N}\subseteq A$。因此对每个自然数 n，$S(n)$ 成立。

定理 2.3
每个非空自然数集有一个最小成员.

证明 令 E 为自然数的非空集。由于集合 $\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant 1\}$ 是归纳的，自然数有下界 1。因此 E 有下界 1。作为完备性公理的一个推论，E 有下确界，定义 $c=\inf E$。由于 $c+1$ 不是 E 的下界，存在 $m\in E$ 使得 $m<c+1$。我们宣称 m 是 E 的最小成员。否则，存在 $n\in E$ 使得 $n<m$。由于 $n\in E$，$c\leqslant n$。于是 $c\leqslant n<m<c+1$，且因此 $m-n<1$。因此自然数 m 属于区间 $(n,n+1)$。例题 2.3表明对每个自然数 n，$(n,n+1)\cap\mathbb{N}=\varnothing$. 这个矛盾证明了 m 是 E 的最小成员.

定理 2.4 (实数的 Archimedeas 性质)
对于每对正实数 a 和 b，存在自然数 n 使得 $na>b$。

笔记 我们经常重述 $\mathbb{R}$ 的 Archimedeas 性质: 对每个正实数 ε，存在自然数 n 使得 $1/n<\varepsilon$。⊖.

证明 定义 $c=b/a>0$。我们用反证法证明。若定理是错的，则 c 是自然数的一个上界。根据完备性公理，自然数有一个上确界，定义 $c_0=\sup\mathbb{N}$。则 c_0-1 不是自然数的上界。选取自然数 n 使得 $n>c_0-1$。因此 $n+1>c_0$。但自然数集是归纳的，因此 $n+1$ 是自然数。由于 $n+1>c_0$，而 c_0 不是自然数集的上界。这个矛盾完成了证明。

定义 2.11 (整数集、有理数集和无理数)
1. 定义**整数集** (记为 $\mathbb{Z}$) 为由自然数、它们的相反数和数 0 组成的数集。
2. **有理数集**, 记为 $\mathbb{Q}$，定义为整数的商的集合，即形如 $x=m/n$ 的数 x，其中 m 和 n 是整数且 $n\neq 0$.
3. 若一个实数不是有理的就称它为无理数.

例题 2.2 正如我们在例题 2.1(iii)证明的, 存在唯一的正数 x 使得 $x^2=2$，记之为 $\sqrt{2}$。证明:$\sqrt{2}$ 这个数不是有理的.

证明 事实上，假定 p 和 q 是自然数使得 $(p/q)^2=2$，则 $p^2=2q^2$。素数分解定理 ⊖ 告诉我们 2 除 p^2 的次数正好是它除 p 的次数的两倍。因此 2 除 p^2 偶数次。类似地，2 除 $2q^2$ 奇数次。于是 $p^2\neq 2q^2$，且因此 $\sqrt{2}$ 是无理的。

定义 2.12 (稠密)
实数的集合 E 称为在 $\mathbb{R}$ 中**稠密**, 若任何两个实数之间有 E 的成员.

定理 2.5 (有理数的稠密性)
有理数在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

证明 令 a 和 b 为实数，满足 $a<b$。首先假定 $a>0$。根据 $\mathbb{R}$ 的 Archimedeas 性质可知，存在自然数 q 使得 $(1/q)<b-a$。再一次利用 $\mathbb{R}$ 的 Archimedeas 性质可知，自然数集 $S=\{n\in\mathbb{N}|n/q\geqslant b\}$ 非空。根据定理 2.3可知,S 具有最小成员 p。观察到 $1/q<b-a<b$，于是 $p>1$。因此 $p-1$ 是自然数（见例题 2.4），因而根据 p 的选取的最小性，$(p-1)/q<b$。我们也有

$$a=b-(b-a)<(p/q)-(1/q)=(p-1)/q$$

因此有理数 $r=(p-1)/q$ 落在 a 与 b 之间。若 $a<0$，根据$\mathbb{R}$ 的 Archimedeas 性质可知，存在自然数 n 使得 $n>-a$。

我们从考虑过的第一种情形推出：存在有理数 r 落在 $n+a$ 与 $n+b$ 之间。因此有理数 $r-n$ 落在 a 与 b 之间。

例题 2.3 用归纳法证明：对每个自然数 n，区间 $(n, n+1)$ 不含任何自然数.

证明

例题 2.4 用归纳法证明：若 $n>1$ 是自然数，则 $n-1$ 也是一个自然数。接着用归纳法证明：若 m 和 n 是满足 $n>m$ 的自然数，则 $n-m$ 是自然数。

证明

2.3 可数集与不可数集

公理 2.4 (良序原理) 自然数集的每个非空子集都有一个最小元素, 即自然数在其标准的大小关系 $<$ 下构成一良序集.

笔记 良序原理等价于选择公理.

命题 2.3 对等在集合间定义了一个等价关系，即它是自反的、对称的与传递的.

证明

定义 2.13 (自然数) 定义自然数 $\{k \in \mathbb{N} | 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 为 $\{1, \cdots, n\}$.

定理 2.6 (鸽笼原理) 对任何自然数 n 和 m, 集合 $\{1, \cdots, n+m\}$ 与集合 $\{1, \cdots, n\}$ 不对等.

证明 归纳可证.

定义 2.14 (可数集与不可数集)

1. 集合 E 称为是**有限的**或**有限集**. 若它或者是空集，或者存在自然数 n 使得 E 与 $\{1, \cdots, n\}$ 对等.
2. 我们说 E 是**可数无穷的**, 若 E 与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等.
3. 有限或可数无穷的集合称为**可数集**. 不是可数的集合称为**不可数集**.

命题 2.4 若一个集与可数集对等，则它是可数的.

证明

定理 2.7 可数集的子集是可数的。特别是，每个自然数集是可数的.

证明 令 B 为可数集而 A 是 B 的一个非空子集。首先考虑 B 是有限的情形。令 f 为 $\{1, \cdots, n\}$ 与 B 之间的一一对应。定义 $g(1)$ 为第一个使得 $f(j)$ 属于 A 的自然数 j，$1 \leqslant j \leqslant n$。由于 $f \circ g$ 是 $\{1\}$ 与 A 之间的一一对应，若 $A=\{f(g(1))\}$，证明完成。否则，定义 $g(2)$ 为使得 $f(j)$ 属于 $A-\{f(g(1))\}$ 的第一个自然数 j，$1 \leqslant j \leqslant n$。鸽笼原理告诉我们至多 N 步后该归纳选择过程终止，其中 $N \leqslant n$。因此 $f \circ g$ 是 $\{1, \cdots, N\}$ 与 A 之间的一一对应。于是 A 有限。

现在考虑 B 是可数无穷的情形。令 f 为 $\mathbb{N}$ 与 B 之间的一一对应。定义 $g(1)$ 为第一个使得 $f(j)$ 属于 A 的自然数 j。如同第一种情形的证明，我们看到若该选择过程终止，则 A 是有限的。否则，该选择过程不终止而 g 在所

有的 $\mathbb{N}$ 上恰当定义。显然 $f\circ g$ 是一一映射，其中定义域是 $\mathbb{N}$ 而象包含于 A 中。归纳论证表明对所有 $j, g(j)\geqslant j$。对每个 $x\in A$，存在某个 k 使得 $x=f(k)$。因此 x 属于集合 $\{f(g(1)),\cdots,f(g(k))\}$。因此 $f\circ g$ 的象是 A。因此 A 是可数无穷。

推论 2.1

(i) 对每个自然数 n，笛卡尔积 $\underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{n次}$ 是可数无穷的. 即自然数集与其自身的有限次笛卡尔积是可数无穷的.

(ii) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数无穷的.

证明

(i) 我们对 $n=2$ 证明 (i)，而一般情形留作归纳法的练习。定义从 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 g 为 $g(m,n)=(m+n)^2+n$。映射 g 是一对一的。事实上，若 $g(m,n)=g(m',n')$，则 $(m+n)^2-(m'+n')^2=n'-n$，因此

$$|m+n+m'+n'|\cdot|m+n-m'-n'|=|n'-n|$$

若 $n\neq n'$，则自然数 $m+n+m'+n'$ 大于自然数 $|n'-n|$，这是不可能的。于是 $n=n'$，因而 $m=m'$。因此 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 与可数集 $\mathbb{N}$ 的子集 $g(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 对等。我们从定理 2.7推出 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可数的。

(ii) 为证明 $\mathbb{Q}$ 的可数性，我们首先从素数分解定理推出每个正有理数 x 可唯一写成 $x=p/q$，其中 p 和 q 是互素的自然数。对 $x=p/q>0$ 定义从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 g 为 $g(x)=2((p+q)^2+q)$，其中 p 和 q 是互素的自然数，$g(0)=1$，而对 $x<0$，$g(x)=g(-x)+1$。我们将证明 g 是一对一的留作练习。于是 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 的一个子集对等，因此根据定理 2.7，是可数的。我们将用鸽笼原理证明 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都不是有限的留作练习。

定义 2.15 (可数无穷集的列举)

对于可数无穷集 X，我们说 $\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个**列举**, 若

$$X=\{x_n|n\in\mathbb{N}\},\ x_n\neq x_m(若n\neq m).$$

定理 2.8

非空集是可数的当且仅当它是某个定义域为非空可数集的函数的象。

证明 令 A 为非空可数集，而 f 为将 A 映上 B 的映射。假定 A 是可数无穷的，而将有限的情形留作练习。通过 A 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应的复合，我们可以假定 $A=\mathbb{N}$。定义 A 中的两点 x，x' 为等价的，若 $f(x)=f(x')$。这是一个等价关系，即它是自反的、对称的与传递的。令 E 为 A 的子集，它由每个等价类的一个成员组成。则 f 在 E 的限制是 E 与 B 之间的一一对应。但 E 是 $\mathbb{N}$ 的子集，因此，根据定理 2.7，是可数的。集合 B 与 E 对等，因此 B 是可数的。逆断言是显然的，若 B 是非空可数集，则它或者与自然数的一个初始部分对等，或者与自然数全体对等。

推论 2.2

可数集的可数族的并是可数的。

证明 令 Λ 为可数集且对每个 $\lambda\in\Lambda$，令 E_λ 为可数集。我们将证明并 $E=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 是可数的。若 E 是空集，则它是可数的。因此我们假设 $E\neq\varnothing$。我们考虑 Λ 是可数无穷的情形，而将有限的情形留作练习。令 $\{\lambda_n|n\in\mathbb{N}\}$ 为 Λ 的一个列举。固定 $n\in\mathbb{N}$。若 E_{λ_n} 是有限且非空的，选取自然数 $N(n)$ 与将 $\{1,\cdots,N(n)\}$ 映上 E_{λ_n} 的一一映射 f_n；若 E_{λ_n} 是可数无穷的，选取 $\mathbb{N}$ 映上 E_{λ_n} 的一一映射 f_n。定义

$$E'=\{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|E_{\lambda_n}\text{ 是非空的，且若}E_{\lambda_n}\text{ 也是有限的，}1\leqslant k\leqslant N(n)\}$$

定义 E' 到 E 的映射 f 为 $f(n,k)=f_n(k)$。则 f 是 E' 映上 E 的映射。然而，E' 是可数集 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 的子集，因此，根据定理 2.7，是可数的。定理 5 告诉我们 E 也是可数的。

定义 2.16 (退化的区间)

我们称实数的区间为退化的，若它是空的或包含一个单独的成员.

定理 2.9

一个非退化实数区间是不可数的。

证明 令 I 为实数的非退化区间。显然 I 不是有限的。我们用反证法证明 I 是不可数的。假定 I 是可数无穷的。令 $\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 为 I 的一个列举。令 $[a_1,b_1]$ 为 I 的不包含 x_1 的非退化的闭有界子区间。接着令 $[a_2,b_2]$ 为 $[a_1,b_1]$ 的非退化的闭有界子区间，它不包含 x_2。我们归纳地选取非退化闭有界区间的可数族 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，对每个 n，$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，并使得对每个 n，$x_n\notin[a_n,b_n]$。非空集 $E=\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ 有上界 b_1。完备性公理告诉我们 E 有上确界。定义 $x^*=\sup E$。由于 x^* 是 E 的一个上界，对所有 n，$a_n\leqslant x^*$。另一方面，由于 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是下降的，对每个 n，b_n 是 E 的上界。于是，对每个 n，$x^*\leqslant b_n$。因此对每个 n，x^* 属于 $[a_n,b_n]$。但 x^* 属于 $[a_1,b_1]\subseteq I$，因此存在自然数 n_0 使得 $x^*=x_{n_0}$。由于 $x^*=x_{n_0}$ 不属于 $[a_{n_0},b_{n_0}]$，我们得到矛盾。因此，I 是不可数的。

2.4 实数的开集、闭集和 Borel 集

定义 2.17 (实数的开集)

一个实数的集合 O 称为**开的**，若对每个 $x\in O$，存在 $r>0$ 使得区间 $(x-r,x+r)$ 包含于 O.

定理 2.10

实数的开集就是开区间.

命题 2.5 (实数的开区间)

(1) 对于 $a<b$，区间 (a,b) 是一个开集, 且每个开有界区间 (有界开集) 都是这种形式。

(2) 对于 $a,b\in\mathbb{R}$, 区间 $(a,\infty),(-\infty,b),(-\infty,\infty)$ 都是开集, 且每个开无界区间 (无界开集) 都是这三中形式之一.

证明

(1) 事实上，令 x 属于 (a,b)。定义 $r=\min\{b-x,x-a\}$。观察到 $(x-r,x+r)$ 包含于 (a,b)。因此 (a,b) 是开有界区间. 又因为实数的有界开集等价于有界开区间, 而实数的有界开区间都是这种形式, 所以每个开有界区间 (有界开集) 都是这种形式。

(2) 观察到每个这样的集合是一个开区间。此外，不难看出，由于每个实数集在扩充实数集中有下确界与上确界，因此每个开无界区间 (无界开集) 都是这三中形式之一.

命题 2.6 (实数集的开集的性质)

实数集 $\mathbb{R}$ 和空集 $\varnothing$ 是开的，任何开集的有限族的交是开的，任何开集族的并是开的。

注 然而，任何开集族的交是开的不成立。例如，对每个自然数 n，令 O_n 为开区间 $(-1/n,1/n)$。则根据实数的 Archimedeas 性质可知,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n=\{0\}$，而 $\{0\}$ 不是一个开集.

证明 显然 $\mathbb{R}$ 和 $\varnothing$ 是开的，而任何开集族的并是开的。令 $\{O_k\}_{k=1}^{n}$ 为 $\mathbb{R}$ 的开子集的有限族。若该族的交是空的，则交是空集，因此是开的。否则，令 x 属于 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}O_k$。对于 $1\leqslant k\leqslant n$，选取 $r_k>0$ 使得 $(x-r_k,x+r_k)\subseteq O_k$。定义 $r=\min\{r_1,\cdots,r_n\}$。则 $r>0$ 且 $(x-r,x+r)\subseteq\bigcap\limits_{k=1}^{n}O_k$。因此 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}O_k$ 是开的

命题 2.7

每个非空开集是可数个不交开区间族的并。

证明 令 O 为 $\mathbb{R}$ 的非空开子集。令 x 属于 O。存在 $y > x$ 使得 $(x, y) \subseteq O$，且存在 $z < x$ 使得 $(z, x) \subseteq O$。定义扩充的实数 a_x 和 b_x 为

$$a_x = \inf\{z | (z, x) \subseteq O\} \text{与} b_x = \sup\{y | (x, y) \subseteq O\}$$

则 $I_x = (a_x, b_x)$ 是包含 x 的开区间。我们宣称

$$I_x \subseteq O \text{ 但} a_x \notin O,\ b_x \notin O. \tag{2.2}$$

事实上，令 w 属于 I_x，比如 $x < w < b_x$。根据 b_x 的定义，存在数 $y > w$ 使得 $(x, y) \subseteq O$，因而 $w \in O$。此外，$b_x \notin O$，因为若 $b_x \in O$，则对某个 $r > 0$ 我们有 $(b_x - r, b_x + r) \subseteq O$。因此 $(x, b_x + r) \subseteq O$，与 b_x 的定义矛盾。类似地，$a_x \notin O$，考虑开区间族 $\{I_x\}_{x \in O}$。由于 O 中的每个 x 是 I_x 的成员，而每个 I_x 包含于 O，我们有 $O = \bigcup_{x \in O} I_x$。我们从(2.2)推出 $\{I_x\}_{x \in O}$ 是不交的。因此 O 是不交的开区间族的并。剩下来要证明该族是可数的。根据有理数的稠密性，这些开区间的每一个包含一个有理数。这建立了开区间族与有理数子集之间的一一对应。我们从定理 2.7和推论 2.1(ii)推出任何有理数集是可数的。因此 O 是可数个不交开区间族的并。

定义 2.18 (实数的闭包)

对于实数集 E，x 称为 E 的**闭包点**，若每个包含 x 的开区间也包含 E 的点。E 的全体闭包点称为 E 的**闭包**且记为 $\overline{E}$。

命题 2.8

对于实数集 E, 我们总是有 $E \subseteq \overline{E}$.

定义 2.19 (实数的闭集)

若 E 包含它的所有闭包点, 即 $E = \overline{E}$，则集合 E 称为**闭的**或**闭集**.

命题 2.9

对于实数集 E，它的闭包 $\overline{E}$ 是闭的。此外，$\overline{E}$ 在以下意义下是包含 E 的最小闭集：若 F 是闭的且 $E \subseteq F$，则 $\overline{E} \subseteq F$.

证明 集合 $\overline{E}$ 是闭的，若它包含所有闭包点。令 x 为 $\overline{E}$ 的闭包点。考虑包含 x 的开区间 I_x。存在一个点 $x' \in \overline{E} \cap I_x$。由于 x' 是 E 的闭包点，且开区间 I_x 包含 x'，存在点 $x'' \in E \cap I_x$。因此每个包含 x 的开区间也包含 E 的点，且因此 $x \in \overline{E}$。所以集合 $\overline{E}$ 是闭的。显然，若 $A \subseteq B$，则 $\overline{A} \subseteq \overline{B}$，因此，若 F 是闭的且包含 E，则 $\overline{E} \subseteq \overline{F} = F$。

命题 2.10

实数集是开的当且仅当它在 $\mathbb{R}$ 中的补是闭的。

证明 首先假定 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个开子集。令 x 为 $\mathbb{R} - E$ 的闭包点。则 x 不属于 E，因为否则就会有一个包含 x 且包含于 E 的开区间，因而与 $\mathbb{R} - E$ 不交。于是 x 属于 $\mathbb{R} - E$ 且因此 $\mathbb{R} - E$ 是闭的。现在假定 $\mathbb{R} - E$ 是闭的。令 x 属于 E。则必有包含 x 且包含于 E 的开区间，否则每个包含 x 的开区间包含 $\mathbb{R} - E$ 的点，且因此 x 是 $\mathbb{R} - E$ 的闭包点。由于 $\mathbb{R} - E$ 是闭的，x 也属于 $\mathbb{R} - E$。这是一个矛盾。

命题 2.11 (实数集的闭集的性质)

空集 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 是闭的，任何闭集的有限族的并是闭的，任何闭集族的交是闭的.

注 空集 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 是既开又闭的.

证明 由于 $\mathbb{R}-[\mathbb{R}-E]=E$，从命题 2.9得出一个集合是闭的当且仅当它的补是开的。因此，根据De Morgan 等式和命题 2.6立得.

定义 2.20 (覆盖)

1. 集族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 称为是集合 E 的**覆盖**, 若 $E\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$。
2. 若 E 的覆盖的子族自身也是 E 的一个覆盖，我们称为 E 的覆盖的**子覆盖**。
3. 若覆盖中的每个集合 E_λ 是开的，我们称 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 E 的一个**开覆盖**。
4. 若覆盖 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 仅包含有限个集合，我们称它为**有限覆盖**.

♣

笔记 该术语是不一致的：“开覆盖”中的“开”指的是该覆盖的集合；“有限覆盖”中的“有限”指的是族而不是隐含该族中的集合是有限集。因此，术语“开覆盖”是语言的误用，而恰当的说法应该是“用开集覆盖”。遗憾的是，前一个术语已在数学中广泛使用.

定理 2.11 (Heine - Borel 定理)

令 F 为闭有界实数集。则 F 的每个开覆盖有一个有限子覆盖。

♡

证明 我们首先考虑 F 是闭有界区间 $[a,b]$ 的情形。令 $\mathcal{F}$ 为 $[a,b]$ 的开覆盖。定义 E 为具有如下性质的区间 $[a,x]$，即可被 $\mathcal{F}$ 的有限个集合覆盖的数 $x\in[a,b]$ 的集合。由于 $a\in E$，E 是非空的。由于 E 有上界 b，根据 $\mathbb{R}$ 的完备性，E 有上确界。定义 $c=\sup E$。由于 c 属于 $[a,b]$，存在 $O\in\mathcal{F}$ 包含 c。由于 O 是开的，存在 $\varepsilon>0$，使得区间 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 包含于 O。现在 $c-\varepsilon$ 不是 E 的上界，因而必有 $x\in E$ 满足 $x>c-\varepsilon$。由于 $x\in E$，存在覆盖 $[a,x]$ 的 $\mathcal{F}$ 中的集合的有限族 $\{O_1,\cdots,O_k\}$。因此，有限族 $\{O_1,\cdots,O_k,O\}$ 覆盖区间 $[a,c+\varepsilon)$。于是 $c=b$，否则 $c<b$ 且 c 不是 E 的上界。因此 $[a,b]$ 可被 $\mathcal{F}$ 中的有限个集合覆盖，这证明了我们考虑的特殊情形。

现在令 F 为任何闭有界集，而 $\mathcal{F}$ 是 F 的一个开覆盖。由于 F 是有界的，它包含于某个有界闭区间 $[a,b]$。命题 2.10告诉我们集合 $O=\mathbb{R}-F$ 是开的，因为 F 是闭的。令 $\mathcal{F}^*$ 为添加 O 到 $\mathcal{F}$ 后得到的开集族，即 $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}\cup O$。由于 $\mathcal{F}$ 覆盖 F，$\mathcal{F}^*$ 覆盖 $[a,b]$。根据我们刚考虑的情形，存在 $\mathcal{F}^*$ 的有限子族覆盖 $[a,b]$，因此也覆盖 F。通过从 F 的这个有限子覆盖去掉 O，若 O 属于该有限子覆盖，我们得到 $\mathcal{F}$ 中覆盖 F 的有限族。

定义 2.21 (集族的下降与上升)

1. 我们说集合的可数族 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 是**下降的**，若对每个自然数 n，$E_{n+1}\subseteq E_n$。
2. 我们说集合的可数族 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 是**上升的**，若对每个自然数 n，$E_n\subseteq E_{n+1}$。

♣

定理 2.12 (集套定理)

令 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 为下降的非空闭实数集的可数族，其中 F_1 有界。则

$$\bigcap_{n=1}^\infty F_n\neq\varnothing.$$

♡

证明 我们用反证法。假定交集是空的。则对每个实数 x，存在自然数 n 使得 $x\notin F_n$，即 $x\in O_n=\mathbb{R}-F_n$。因此 $\bigcup_{n=1}^\infty O_n=\mathbb{R}$。根据命题 2.10，由于每个 F_n 是闭的，每个 O_n 是开的。因此 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个开覆盖，从而也是 F_1 的开覆盖。Heine - Borel 定理告诉我们存在自然数 N 使得 $F_1\subseteq\bigcup_{n=1}^N O_n$。由于 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 是下降的，补集族 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$ 是上升的。因此 $\bigcup_{n=1}^N O_n=O_N=\mathbb{R}-F_N$。因此 $F_1\subseteq\mathbb{R}-F_N$，这与 F_N 是 F_1 的非空子集的假设矛盾。

定义 2.22 (σ 代数)

给定集合 X，X 的子集族 $\mathcal{A}$ 称为（X 的子集的）σ **代数**，若:

(i) 空集 $\varnothing$ 属于 $\mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ 中的集合在 X 中的补也属于 $\mathcal{A}$;

(iii) $\mathcal{A}$ 中集合的可数族的并也属于 $\mathcal{A}$。

笔记

(1) 给定集合 X，族 $\{\varnothing, X\}$ 是一个 σ 代数，它有两个成员且它包含于每个 X 的子集的 σ 代数。

(2) 另一个极端情形是 X 的所有子集组成的集族且包含每个 X 的子集的 σ 代数 2^X。

命题 2.12 (σ 代数的基本性质)

对任何 σ 代数 $\mathcal{A}$,

(1) $\mathcal{A}$ 关于属于 $\mathcal{A}$ 的集合的可数族的交封闭。

(2) $\mathcal{A}$ 关于属于 $\mathcal{A}$ 的集合的有限并与有限交封闭。

(3) $\mathcal{A}$ 关于属于 $\mathcal{A}$ 的集合的相对补封闭, 即若 A_1 和 A_2 属于 $\mathcal{A}$, 则 $A_1 - A_2$ 也属于 $\mathcal{A}$。

证明

(1) 从 De Morgan 等式容易推出.

(2) 由空集属于 $\mathcal{A}$ 易得.

(3) 由 $A_1 - A_2 = A_1 \cap [X - A_2]$ 易得.

命题 2.13

令 $\mathcal{F}$ 为集合 X 的子集族。则所有包含 $\mathcal{F}$ 的 X 的子集的 σ 代数的交 $\mathcal{A}$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的 σ 代数。此外，在任何包含 $\mathcal{F}$ 的 σ 代数也包含 $\mathcal{A}$ 的意义下，$\mathcal{A}$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 X 的子集的 σ 代数。

证明 这个命题的证明可直接从σ 代数的定义得到。

命题 2.14

令 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为属于 σ 代数 $\mathcal{A}$ 的集合的可数族。以下两个集合属于 $\mathcal{A}$:

$$\limsup\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right] \text{ 与 } \liminf\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right]$$

集合 $\limsup\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是对可数无穷多个指标 n 属于 A_n 的点的集合，而集合 $\liminf\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是除指定至多有限多个指标 n 外属于 A_n 的点的集合。

证明 由 $\mathcal{A}$ 关于可数交与并封闭立得.

定义 2.23 (实数的 Borel 集)

实数的 Borel 集族 $\mathcal{B}$ 是包含所有实数的开集的实数集的最小 σ 代数.

定义 2.24 (G_δ 集与 F_σ 集)

开集的可数交称为 G_δ 集。闭集的可数并称为 F_σ 集。

命题 2.15 (Borel 集的基本性质)

(1) 每个开集和闭集都是 Borel 集.

(2) 每个单点集都是 Borel 集.

(3) 每个可数集都是 Borel 集.

(4) 每个 G_δ 集和每个 F_σ 集是 Borel 集。
(5) 每个开的或者闭的实数集的可数族的 lim inf 和 lim sup 都是 Borel 集.

证明
(1) 显然每个开集都是 Borel 集, 由于 σ 代数关于补是封闭的，我们从命题 2.10推出每个闭集是 Borel 集.
(2) 由每个单点集是闭的结合 (1) 立得.
(3)
(4) 由 σ 代数关于可数并与可数交封闭立得.
(5)

2.5 实数序列

定义 2.25 (实数序列/实数列)

实数序列是一个实值函数，其定义域是自然数集。习惯上我们不用标准的函数记号如 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 表示序列，而用下标 a_n 代替 $f(n)$，将一个序列记为 $\{a_n\}$。自然数 n 称为该序列的指标，对应于指标 n 的数 a_n 称为序列的第 n 项。
正如同我们说实值函数是有界的，若它的象是有界实数集；我们说序列是有界的，若存在某个 $c \geqslant 0$ 使得对所有 n，$|a_n| \leqslant c$。
若对所有 n，$a_n \leqslant a_{n+1}$，序列 $\{a_n\}$ 称为是递增的；若 $\{-a_n\}$ 是**递增的**，序列 $\{a_n\}$ 称为是**递减的**；若它是递增的或者递减的，序列 $\{a_n\}$ 则称为是**单调的**。

定义 2.26

我们说序列 $\{a_n\}$ 收敛到数 a，若对每个 $\varepsilon > 0$，存在指标 N，使得当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$|a - a_n| < \varepsilon.$$

我们称 a 为序列的极限且用

$$\{a_n\} \to a \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

表示 $\{a_n\}$ 的收敛性。

命题 2.16 (收敛的实数列的性质)

令实数序列 $\{a_n\}$ 收敛到实数 a。则极限是唯一的，该序列是有界的，且对实数 c，若对所有 n，$a_n \leqslant c$，则 $a \leqslant c$.

定理 2.13 (实数序列的单调收敛准则)

单调的实数序列收敛当且仅当它是有界的。

证明 令 $\{a_n\}$ 为递增序列。若该序列收敛，则根据前一个命题，它是有界的。现在假设 $\{a_n\}$ 是有界的，根据完备性公理，集合 $S = \{a_n | n \in N\}$ 有上确界：定义 $a = \sup S$。我们宣称 $\{a_n\} \to a$。事实上，令 $\varepsilon > 0$。由于 a 是 S 的上界，对所有 n，$a_n \leqslant a$。由于 $a - \varepsilon$ 不是 S 的上界，存在指标 N，使得 $a_N > a - \varepsilon$。由于该序列是递增的，对所有 $n \geqslant N$，$a_n > a - \varepsilon$。因此，若 $n \geqslant N$，则 $|a - a_n| < \varepsilon$。因此 $\{a_n\} \to a$。序列递减情形的证明是相同的。

定义 2.27 (子序列)

对于序列 $\{a_n\}$ 和严格递增的自然数序列 $\{n_k\}$，序列 $\{a_{n_k}\}$ 的第 k 项是 a_{n_k} 并被称为 $\{a_n\}$ 的一个**子序列**.

定理 2.14 (Bolzano - Weierstrass 定理)

每个有界实数序列有一个收敛的子序列。

证明 令 $\{a_n\}$ 为有界实数序列。选取 $M \geqslant 0$ 使得对所有 n，$|a_n| \leqslant M$。令 n 为自然数。定义 $E_n = \overline{\{a_j | j \geqslant n\}}$。则 $E_n \subseteq [-M, M]$ 且 E_n 是闭的，因为它是集合的闭包。因此，$\{E_n\}$ 是下降的 $\mathbb{R}$ 的非空闭有界子集序列。集套定理告诉我们 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \varnothing$，选取 $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$。对于每个自然数 k，a 是 $\{a_j | j \geqslant k\}$ 的闭包点。因此，对于无穷多个指标 $j \geqslant n$，a_j 属于 $(a - 1/k, a + 1/k)$。根据归纳法，选取严格递增的自然数序列 $\{n_k\}$ 使得对所有 k，$|a - a_{n_k}| < 1/k$。我们从 $\mathbb{R}$ 的 Archimedeas 性质推出子序列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛到 a。

定义 2.28

实数序列 $\{a_n\}$ 称为是 **Cauchy 的**或 **Cauchy 列**，若对每个 $\varepsilon > 0$，存在指标 N 使得当 $n, m \geqslant N$ 时，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

定理 2.15 (实数序列的 Cauchy 收敛准则)

实数序列收敛当且仅当它是 Cauchy 的。

证明 首先假定 $\{a_n\} \to a$。观察到对所有自然数 n 和 m，

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| \tag{2.3}$$

令 $\varepsilon > 0$。由于 $\{a_n\} \to a$，我们可以选取一个自然数 N 使得若 $n \geqslant N$，则 $|a_n - a| < \varepsilon/2$。我们从(2.3)推出若 n，$m \geqslant N$，则 $|a_m - a_n| < \varepsilon$。因此序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 的。

为证明反命题，令 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列。我们宣称它是有界的。事实上，对 $\varepsilon = 1$，选取 N 使得若 n，$m \geqslant N$，则 $|a_m - a_n| < 1$。因此，对所有 $n \geqslant N$，

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| \leqslant |a_n - a_N| + |a_N| \leqslant 1 + |a_N|.$$

定义 $M = 1 + \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|\}$。则对所有 n，$|a_n| \leqslant M$。因此 $\{a_n\}$ 是有界的。Bolzano - Weierstrass 定理告诉我们存在收敛于 a 的子序列 $\{a_{n_k}\}$。我们宣称整个序列收敛于 a。事实上，令 $\varepsilon > 0$。由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 的，我们可以选取自然数 N，使得若 $n, m \geqslant N$，则 $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ 另外，由于 $\{a_{n_k}\} \to a$，我们可以选取自然数 n_k，使得对 $n_k \geqslant N$，$|a - a_{n_k}| < \varepsilon/2$。因此，对所有 $n \geqslant N$，

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

定理 2.16 (实序列收敛的线性与单调性)

令 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为收敛的实数序列。则对每对实数 α 和 β，序列 $\{\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n] = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.4}$$

此外，若对所有 $n, a_n \leqslant b_n$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$

证明 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 与 } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

观察到对所有 n，

$$|[\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n] - [\alpha \cdot a + \beta \cdot b]| \leqslant |\alpha| \cdot |a_n - a| + |\beta| \cdot |b_n - b| \tag{2.5}$$

令 $\varepsilon > 0$。选取自然数 N 使得对所有 $n \geqslant N$，

$$|a_n - a| < \varepsilon/[2 + 2|\alpha|] \text{ 且} |b_n - b| < \varepsilon/[2 + 2|\beta|]$$

我们从(2.5)推出对所有 $n \geqslant N$，

$$|[\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n] - [\alpha \cdot a + \beta \cdot b]| < \varepsilon$$

因此(2.4)成立。为了验证 $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$，对所有 n，设 $c_n = b_n - a_n$ 与 $c = b - a$。则对所有 n，$c_n \geqslant 0$，根据收敛的线性，$\{c_n\} \to c$。我们必须证明 $c \geqslant 0$。令 $\varepsilon > 0$。存在 N 使得对所有 $n \geqslant N$，

$$-\varepsilon < c - c_n < \varepsilon$$

特别地，$0 \leqslant c_N < c + \varepsilon$。由于对每个正数 ε，$c > -\varepsilon$，所以 $c \geqslant 0$。

定义 2.29 (实数列扩充的收敛)

对每个实数 c，存在指标 N 使得 $n \geqslant N$ 时有 $a_n \geqslant c$，我们就说序列 $\{a_n\}$ **收敛到无穷**，称 ∞ 为 $\{a_n\}$ 的极限且记作 $\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \infty$。收敛到 $-\infty$ 可做出类似的定义。 ♣

笔记 有了这个扩充的收敛的概念，我们可以断言任何单调实数序列 $\{a_n\}$（有界或无界）且一定会收敛到某个扩充的实数，且因此 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 是良定义的。

定义 2.30 (实数序列的上下极限)

令 $\{a_n\}$ 为实数序列。$\{a_n\}$ 的**上极限**，记为 $\limsup\{a_n\}$，定义为

$$\limsup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} [\sup\{a_k | k \geqslant n\}]$$

$\{a_n\}$ 的**下极限**，记为 $\liminf\{a_n\}$，定义为

$$\liminf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} [\inf\{a_k | k \geqslant n\}]$$ ♣

命题 2.17 (实数序列的上下极限的等价命题)

令 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为实数序列。

(i) $\liminf\{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$ 当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个指标 n 使得 $a_n > \ell - \varepsilon$，且仅有有限多个指标 n 使得 $a_n > \ell + \varepsilon$。

(ii) $\limsup\{a_n\} = \infty$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 没有上界。

(iii) $\limsup\{a_n\} = -\liminf\{-a_n\}$.

(iv) 实数序列 $\{a_n\}$ 收敛到扩充的实数 a 当且仅当

$$\liminf\{a_n\} = \limsup\{a_n\} = a$$

(v) 若对所有 n，$a_n \leqslant b_n$，则

$$\limsup\{a_n\} \leqslant \limsup\{b_n\}$$ ♠

定义 2.31 (级数的部分和与可和)

对每个实数序列 $\{a_k\}$，对每个指标 n 对应着定义为 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 的**部分和序列**$\{s_n\}$。我们说级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **可和于实数** s，若 $\{s_n\} \to s$ 且写作 $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$。 ♣

命题 2.18 (级数收敛/可和的充要条件)

令 $\{a_n\}$ 为实数序列。

(i) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 可和当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在指标 N 使得对 $n \geqslant N$ 和任何自然数 m，

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

(ii) 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 可和，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 也是可和的。

(iii) 若每项 a_k 非负，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 可和当且仅当部分和序列是有界的。

证明

2.6 实变量的连续函数实值函数

定义 2.32 (实值函数在一点连续)
令 f 为定义在实数集 E 上的实值函数。我们说 f 在 E 中的点 x **连续**, 若对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $x' \in E$ 且 $|x' - x| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$

定义 2.33 (实值函数在定义域上连续)
称函数 f（在 E 上）连续，若它在其定义域 E 的每一点是连续的。

定义 2.34 (Lipschitz 连续)
函数 f 称为是 **Lipschitz 的**或 **Lipschitz 连续**或 **Lipschitz 函数**, 若存在 $c \geqslant 0$，使得对所有 $x', x \in E$，$|f(x') - f(x)| \leqslant c|x' - x|$

命题 2.19
一个 Lipschitz 函数是连续的。

笔记 这个命题反过来是不对的, 不是所有连续函数都是 Lipschitz 的。例如，若对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$f(x) = \sqrt{x}$，则 f 在 $[0, 1]$ 上是连续的，但不是 Lipschitz 的。

证明 事实上，对于数 $x \in E$ 和任何 $\varepsilon > 0$，$\delta = \varepsilon / c$ 对应关于 f 在 x 连续的准则的 ε 条件。

命题 2.20 (序列的收敛性对函数在一个点的连续性的刻画)
定义在实数集 E 上的实值函数 f 在点 $x_* \in E$ 连续，当且仅当 E 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_*，它的象序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_*)$。

命题 2.21 (函数在其定义域上连续的刻画)
令 f 为定义在实数集 E 上的实值函数。则 f 在 E 上连续当且仅当对每个开集 $\mathcal{O}$，

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = E \cap \mathcal{U}, \text{ 其中} \mathcal{U} \text{ 是开集.} \tag{2.6}$$

证明 首先假设任何开集在 f 的原象是定义域与一个开集的交。令 x 属于 E。为证明 f 在 x 连续，令 $\varepsilon > 0$。区间 $I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ 是一个开集。因此，存在开集 $\mathcal{U}$ 使得

$$f^{-1}(I) = \{x' \in E | f(x) - \varepsilon < f(x') < f(x) + \varepsilon\} = E \cap \mathcal{U}$$

特别地，$f(E\cap\mathcal{U})\subseteq I$ 且 x 属于 $E\cap\mathcal{U}$。由于 $\mathcal{U}$ 是开的，存在 $\delta>0$ 使得 $(x-\delta,x+\delta)\subseteq\mathcal{U}$。于是，若 $x'\in E$ 且 $|x'-x|<\delta$，则 $|f(x')-f(x)|\leqslant\varepsilon$。因此 f 在 x 连续。

假定现在 f 是连续的。令 $\mathcal{O}$ 为开集而 x 属于 $f^{-1}(\mathcal{O})$。则 $f(x)$ 属于开集 $\mathcal{O}$，使得存在 $\varepsilon>0$，满足 $(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\subseteq\mathcal{O}$。由于 f 在 x 连续，存在 $\delta>0$ 使得若 x' 属于 E 且 $|x'-x|<\delta$，则 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$。定义 $I_x=(x-\delta,x+\delta)$。则 $f(E\cap I_x)\subseteq\mathcal{O}$。定义

$$\mathcal{U}=\bigcup_{x\in f^{-1}(\mathcal{O})}I_x$$

由于 $\mathcal{U}$ 是开集的并，它是开的。它已被构造使得(2.6)成立。

定理 2.17 (极值定理)

在非空闭有界实数集上的连续实值函数一定能取得最小值与最大值。

证明 令 f 为非空闭有界实数集 E 上的连续实值函数。我们首先证明 f 在 E 上有界，即存在实数 M，使得对所有 $x\in E$，都有

$$|f(x)|\leqslant M \tag{2.7}$$

令 x 属于 E。令 $\delta>0$ 对应关于 f 在 x 连续的准则的 $\varepsilon=1$ 挑战。定义 $I_x=(x-\delta,x+\delta)$。因此，若 x' 属于 $E\cap I_x$，则 $|f(x')-f(x)|<1$，因而 $|f(x')|\leqslant|f(x)|+1$。集族 $\{I_x\}_{x\in E}$ 是 E 的开覆盖。Heine - Borel 定理告诉我们 E 中存在有限个点 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 使得 $\{I_{x_k}\}_{k=1}^n$ 也覆盖 E。定义 $M=1+\max\{|f(x_1)|,\cdots,|f(x_n)|\}$。我们宣称(2.7)对 E 的这个选取成立。事实上，令 x 属于 E。存在指标 k 使得 x 属于 I_{x_k}，因此 $|f(x)|\leqslant 1+|f(x_k)|\leqslant M$。为看到 f 在 E 上取到最大值，定义 $m=\sup f(E)$。若 f 在 E 上取不到值 m，则函数 $x\mapsto 1/(f(x)-m)(x\in E)$ 是 E 上的无界连续函数。这与我们刚证明的矛盾。因此，f 取到 E 的最大值。由于 $-f$ 是连续的，$-f$ 取得最大值，即 f 在 E 上取到最小值。

定理 2.18 (介值定理)

令 f 为闭有界区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数，使得 $f(a)<c<f(b)$。则存在 (a,b) 中的点 x_0 使得 $f(x_0)=c$。

证明 我们将归纳地定义一个下降的闭区间的可数族 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，其交由单点 $x_0\in(a,b)$ 构成，在该点 $f(x_0)=c$。定义 $a_1=a$ 与 $b_1=b$。考虑 $[a_1,b_1]$ 的中点 m_1。若 $c<f(m_1)$，定义 $a_2=a_1$ 与 $b_2=m_1$。若 $f(m_1)\geqslant c$，定义 $a_2=m_1$ 与 $b_2=b_1$。因此 $f(a_2)\leqslant c\leqslant f(b_2)$ 且 $b_2-a_2=[b_1-a_1]/2$。我们归纳地继续这个二分过程，以得到一个下降的闭区间族 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，使得对所有 n

$$f(a_n)\leqslant c\leqslant f(b_n)\text{ 且}b_n-a_n=[b-a]/2^{n-1}$$

根据集套定理，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 是非空的。选取 x_0 属于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。观察到对所有 n,

$$|a_n-x_0|\leqslant b_n-a_n=[b-a]/2^{n-1}$$

因此 $\{a_n\}\to x_0$。根据 f 在 x_0 的连续性，$\{f(a_n)\}\to f(x_0)$。由于对所有 n，$f(a_n)\leqslant c$，且集合 $(-\infty,c]$ 是闭的，$f(x_0)\leqslant c$。用类似的方法，$f(x_0)\geqslant c$。因此 $f(x_0)=c$。

定义 2.35 (一致连续)

定义在实数集 E 上的实值函数 f 称为是**一致连续的**, 若对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对 E 中的所有 x, x', 若 $|x-x'|<\delta$, 则 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

定理 2.19

闭有界实数集上的连续实值函数是一致连续的。

证明 令 f 为闭有界实数集 E 上的连续实值函数。令 $\varepsilon>0$。对每个 $x\in E$，存在 $\delta_x>0$ 使得若 $x'\in E$ 且

$|x'-x|<\delta_x$，则 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon/2$。定义 I_x 为开区间 $(x-\delta_x/2, x+\delta_x/2)$。则 $\{I_x\}_{x\in E}$ 是 E 的开覆盖。根据 Heine - Borel 定理，存在覆盖 E 的有限子族 $\{I_{x_1},\cdots,I_{x_n}\}$。定义

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1},\cdots,\delta_{x_n}\}$$

我们宣称该 $\delta>0$ 对应关于 f 在 E 上一致连续的准则的 $\varepsilon>0$ 挑战。事实上，令 x 和 x' 属于 E 满足 $|x-x'|<\delta$。由于 $\{I_{x_1},\cdots,I_{x_n}\}$ 覆盖 E，存在指标 k 使得 $|x-x_k|<\delta_{x_k}/2$。由于 $|x-x'|<\delta\leqslant\delta_{x_k}/2$，因此

$$|x'-x_k|\leqslant|x'-x|+|x-x_k|<\delta_{x_k}/2+\delta_{x_k}/2=\delta_{x_k}$$

根据 δ_{x_k} 的定义，由于 $|x-x_k|<\delta_{x_k}$ 且 $|x'-x_k|<\delta_{x_k}$，我们有 $|f(x)-f(x_k)|<\varepsilon/2$ 与 $|f(x')-f(x_k)|<\varepsilon/2$。因此

$$|f(x)-f(x')|\leqslant|f(x)-f(x_k)|+|f(x')-f(x_k)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

定义 2.36 (实值函数的单调性)

定义在实数集 E 上的实值函数 f 称为是**递增的**，若 x，x' 属于 E 且 $x\leqslant x'$ 时，$f(x)\leqslant f(x')$；称为是**递减的**，若 $-f$ 是递增的；称为是**单调的**，若它是递增的或递减的。 ♣

第三章 集合与点集

3.1 集合之间的运算

定理 3.1

设有集合 A, B 与 C，则

(i) 交换律：

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律：

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

♡

定义 3.1 (集族的并和交)

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$，我们定义其并集与交集如下：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{存在}\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \ s.t \ \ x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{对一切}\alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

♣

定理 3.2

1. 交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时，那么先作子集合族中各集合的并集，然后再作各并集的并集，仍然得到原集合族的并，而且作并集时与原有的顺序无关。当然，对于交的运算也是如此。
2. 分配律:

   (i) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;

   (ii) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$。

♡

定义 3.2

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A - B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集，我们称 X 为全集。此时，集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集，并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$，即

$$B^c = X - B.$$

今后，凡没有明显标出全集 X 时，都表示取补集运算的全集 X 预先已知，而所讨论的一切集合皆为其子集。于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

命题 3.1 (集合的差与补的基本性质)

1. $A \cup A^c = X$，$A \cap A^c = \varnothing$，$(A^c)^c = A$，$X^c = \varnothing$，$\varnothing^c = X$。
2. $A - B = A \cap B^c$。
3. 若 $A \supset B$，则 $A^c \subset B^c$；若 $A \cap B = \varnothing$，则 $A \subset B^c$。

定理 3.3 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$;　(ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$。

证明 以 (i) 为例。若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$，则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，即对一切 $\alpha \in I$，有 $x \notin A_\alpha$。这就是说，对一切 $\alpha \in I$，有 $x \in A_\alpha^c$。故得 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$。

反之，若 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$，则对一切 $\alpha \in I$，有 $x \in A_\alpha^c$，即对一切 $\alpha \in I$，有 $x \notin A_\alpha$。这就是说，

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha,\quad x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

定义 3.3 (集合的对称差)

设 A, B 为两个集合，称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

命题 3.2 (集合的对称差的基本性质)

(i) $A \triangle \varnothing = A$，$A \triangle A = \varnothing$，$A \triangle A^c = X$，$A \triangle X = A^c$。
(ii) 交换律：$A \triangle B = B \triangle A$。
(iii) 结合律：$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。
(iv) 交与对称差满足分配律：

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(v) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$；$A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$。
(vi) 对任意的集合 A 与 B，存在唯一的集合 E，使得 $E \triangle A = B$（实际上 $E = B \triangle A$）。

定义 3.4 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列。若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**，此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$；若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**，此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k \to \infty} A_k$。

定义 3.5 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列，令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j=1,2,\cdots)$。我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**，简称为**上限集**，记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地，称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**，简称为**下限集**，记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等，则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$。

命题 3.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则

$$(i)E \setminus \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} (E\setminus A_k); \quad (ii)E \setminus \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} (E\setminus A_k).$$

定理 3.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列，则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x: 对任一自然数 j, 存在 k(k\geqslant j), x\in A_k\} = \{x: \forall j\in\mathbb{N}, \exists k\geqslant j 且 k\in\mathbb{N}\ s.t.\ x\in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \{x: 存在自然数 j_0, 当 k\geqslant j_0 时, x\in A_k\} = \{x: \exists j_0\in\mathbb{N}, \forall k\geqslant j_0 且 k\in\mathbb{N}, x\in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 以 (ii) 为例。若 $x\in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$，则存在自然数 j_0，使得

$$x\in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k\geqslant j_0$ 时，有 $x\in A_k$。反之，若存在自然数 j_0，当 $k\geqslant j_0$ 时，有 $x\in A_k$，则得到

$$x\in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x\in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$。

由 (i) (ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的；$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的。从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

定义 3.6 (直积集)

设 X,Y 是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)（其中 $x \in X, y \in Y$）形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**, 记为 $X \times Y$，即

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\},$$

其中 $(x,y) = (x',y')$ 是指 $x = x', y = y'$。$X \times X$ 也记为 X^2。

3.2 映射与基数

定义 3.7 (单射)

定义 3.8 (映射的像集)

对于 $f : X \to Y$ 以及 $A \subset X$，我们记

$$f(A) = \{y \in Y x \in A, y = f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的 **(映) 像集**（$f(\varnothing) = \varnothing$）.

命题 3.4 (映射的像集的基本性质)

对于 $f : X \to Y$，我们有

(i) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)\ (A_\alpha \in X, \alpha \in I)$;

(ii) $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)\ (A_\alpha \in X, \alpha \in I)$。

定义 3.9 (映射的原像集)

对于 $f : X \to Y$ 以及 $B \subset Y$，我们记

$$f^{-1}(B) = \{x \in X f(x) \in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**.

命题 3.5 (映射的原像集的基本性质)

对于 $f : X \to Y$，我们有

(i) 若 $B_1 \subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$（$A \subset Y$）;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha \subset Y, \alpha \in I$）;

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$（$B_\alpha \subset Y, \alpha \in I$）;

(iv) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$（$B \subset Y$）。

定义 3.10 (示性函数)

一般地，对于 X 中的子集 A，我们作

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

且称 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**或**示性函数**.

命题 3.6 (示性函数的基本性质)

对于 X 中的子集 A, B，我们有

(i) $A \neq B$ 等价于 $\chi_A \neq \chi_B$.

(ii) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

(iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(v) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$.

(vi) $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

定义 3.11 (幂集)

设 X 是一个非空集合，由 X 的一切子集（包括 $\varnothing$,X 自身）为元素形成的集合称为 X 的**幂集**，记为 $\mathcal{P}(X)$。

笔记 例如，由 n 个元素形成的集合 E 之幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素。

例题 3.1 单调映射的不动点 设 X 是一个非空集合，且有 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$。若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A \subset B$ 的任意 A, B，必有 $f(A) \subset f(B)$，则存在 $T \subset \mathcal{P}(X)$，使得 $f(T) = T$。

证明 作集合 S, T:

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X)\ \text{且} A \subset f(A)\},$$
$$T = \bigcup_{A\in S} A(\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上，因为由 $A \in S$ 可知 $A \subset f(A)$，从而由 $A \subset T$ 可得 $f(A) \subset f(T)$。根据 $A \in S$ 推出 $A \subset f(T)$，这就导致

$$\bigcup_{A\in S} A \subset f(T), \quad T \subset f(T).$$

另一方面，又从 $T \subset f(T)$ 可知 $f(T) \subset f(f(T))$。这说明 $f(T) \in S$，我们又有 $f(T) \subset T$。

定义 3.12 (集合之间的对等关系)

设有集合 A 与 B。若存在一个从 A 到 B 上的一一映射，则称集合 A 与 B **对等**，记为 $A \sim B$。

命题 3.7 (对等关系的基本性质)

设有集合 A 与 B, 则

(i) $A \sim A$;

(ii) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;

(iii) 若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$。

引理 3.1 (映射分解定理)

若有 $f : X \to Y$，$g : Y \to X$，则存在分解

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim},$$

其中 $f(A) = B$，$g(B^{\sim}) = A^{\sim}$，$A \cap A^{\sim} = \varnothing$ 以及 $B \cap B^{\sim} = \varnothing$。

证明 对于 X 中的子集 E（不妨假定 $Y \setminus f(E) \neq \varnothing$），若满足

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing,$$

则称 E 为 X 中的分离集。现将 X 中的分离集的全体记为 Γ，且作其并集

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E.$$

我们有 $A \in \Gamma$。事实上，对于任意的 $E \in \Gamma$，由于 $A \supset E$，故从

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing$$

可知 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$，从而有 $A \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$。这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元。

现在令 $f(A) = B$，$Y \setminus B = B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim}) = A^{\sim}$。首先知道

$$Y = B \cup B^{\sim}.$$

其次，由于 $A \cap A^{\sim} = \varnothing$，故又易得 $A \cup A^{\sim} = X$。事实上，若不然，那么存在 $x_0 \in X$，使得 $x_0 \notin A \cup A^{\sim}$。现在作 $A_0 = A \cup \{x_0\}$，我们有

$$B = f(A) \subset f(A_0), \quad B^{\sim} \supset Y \setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim} \supset g(Y \setminus f(A_0))$。这就是说，$A$ 与 $g(Y \setminus f(A_0))$ 不相交。由此可得

$$A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾。

定理 3.5 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等，Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X \sim Y$。

笔记 特例: 设集合 A, B, C 满足下述关系：

$$C \subset A \subset B.$$

若 $B \sim C$，则 $B \sim A$。

证明 由题设知存在单射 $f: X \to Y$ 与单射 $g: Y \to X$，根据映射分解定理知

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim}, \quad f(A) = B, \quad g(B^{\sim}) = A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f: A \to B$ 以及 $g^{-1}: A^{\sim} \to B^{\sim}$ 是一一映射，因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F：

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in A^{\sim}. \end{cases}$$

这说明 $X \sim Y$。

定义 3.13 (集合的基数 (或势))

设 A, B 是两个集合，如果 $A \sim B$，那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的，记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。可见，凡是互相对等的集合均具有相同的基数。

如果用 α 表示这一相同的基数，那么 $\overline{\overline{A}} = \alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族。对于两个集合 A 与 B，记 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$。若 A 与 B 的一个子集对等，则称 α 不大于 β，记为

$$\alpha \leqslant \beta.$$

若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$，则称 α 小于 β（或 β 大于 α），记为

$$\alpha < \beta \quad (\text{或}\beta > \alpha).$$

显然，若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$，则由Cantor - Bernstein 定理可知 $\alpha = \beta$.

定义 3.14 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合。如果存在自然数 n，使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$，则称 A 为**有限集**，且用同一符号 n 记 A 的基数。由此可见，对于有限集来说，其基数可以看作集合中元素的数目。若一个集合不是有限集，则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数。

定义 3.15 (自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数 · 可列集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$（读作阿列夫（Aleph，希伯来文）零）。若集合 A 的基数为 $\aleph_0$，则 A 叫作**可列集**. 这是由于 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，而 $A \sim \mathbb{N}$，故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来，附以下标，就有

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

定理 3.6

任一无限集 E 必包含一个可列子集。

笔记 这个定理说明，在众多的无限集中，最小的基数是 $\aleph_0$。

证明 任取 E 中一元，记为 a_1；再从 $E \setminus \{a_1\}$ 中取一元，记为 a_2，$\cdots$。设已选出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。因为 E 是无限集，所以

$$E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing.$$

于是又从 $E \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中可再选一元，记为 a_{n+1}。这样，我们就得到一个集合

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集。

定理 3.7

设 A 是无限集且其基数为 α。若 B 是至多可列集，则 $A \cup B$ 的基数仍为 α。

证明 不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$，$A \cap B = \varnothing$，且

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

我们作映射 f 如下：

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad a_i \in A_1;$$
$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad b_i \in B;$$
$$f(x) = x, \quad x \in A_2.$$

显然，f 是 $A \cup B$ 到 A 上的一一映射。

定理 3.8

集合 A 为无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等。

证明 因为有限集是不与其真子集对等的，所以充分性是成立的。现在取 A 中一个非空有限子集 B，则由定理 3.7立即可知

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{((A \setminus B) \cup B)}} = \overline{\overline{(A \setminus B)}}.$$

故 $A \sim (A \setminus B)$.

定理 3.9

$[0, 1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 不是可数集.

证明 只需讨论 $(0,1]$。为此，采用二进位制小数表示法：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_n 等于 0 或 1，且在表示式中有无穷多个 a_n 等于 1。显然，$(0,1]$ 与全体二进位制小数一一对应。

若在上述表示式中把 $a_n = 0$ 的项舍去，则得到 $x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$，这里的 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数列。再令

$$k_1 = n_1, \quad k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 是自然数子列。把由自然数构成的数列的全体记为 $\mathscr{H}$，则 $(0,1]$ 与 $\mathscr{H}$ 一一对应。

现在假定 $(0,1]$ 是可数的，则 $\mathscr{H}$ 是可数的，不妨将其全体排列如下：

$$\begin{gathered}
(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \cdots, k_i^{(1)}, \cdots), \\
(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \cdots, k_i^{(2)}, \cdots), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \cdots, k_i^{(i)}, \cdots), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

但这是不可能的，因为 $(k_1^{(1)} + 1, k_2^{(2)} + 1, \cdots, k_i^{(i)} + 1, \cdots)$ 属于 $\mathscr{H}$，而它并没有被排列出来。这说明 $\mathscr{H}$ 是不可数的，也就是说 $(0,1]$ 是不可数集。

定义 3.16 ($\mathbb{R}$ 的基数 · 不可数集)

我们称 $(0,1]$ 的基数为**连续基数**, 记为 c(或 $\aleph_1$).

笔记 易知 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c = \aleph_1$.

定理 3.10

设有集合列 $\{A_k\}$。若每个 A_k 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数。

证明 不妨假定 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，且 $A_k \sim [k, k+1)$，我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

定理 3.11 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合，则 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$（由 A 的一切子集所构成的集合族）不对等。

笔记 易知集合 A 的基数小于其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 的基数.

证明 假定 A 与其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 对等，即存在一一映射 $f: A \to \mathcal{P}(A)$。我们作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

于是有 $y \in A$，使得 $f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$。现在分析一下 y 与 B 的关系：

(i) 若 $y \in B$，则由 B 的定义可知 $y \notin f(y) = B$；

(ii) 若 $y \notin B$，则由 B 的定义可知 $y \in f(y) = B$。

这些矛盾说明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间并不存在一一映射，即 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 并不是对等的。

3.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

3.3.1 点集的直径、点的 (球) 邻域、矩体

定义 3.17 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的运算)

记一切有序数组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的全体为 $\mathbb{R}^n$，其中 $\xi_i\in\mathbb{R}$（$i=1,2,\cdots,n$）是实数，称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标，并定义运算如下：

(i) 加法：对于 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 以及 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，令

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n);$$

(ii) 数乘：对于 $\lambda\in\mathbb{R}$，令 $\lambda x=(\lambda\xi_1,\cdots,\lambda\xi_n)\in\mathbb{R}^n$。

在上述两种运算下构成一个向量空间。对于 $1\leqslant i\leqslant n$，记

$$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),$$

其中除第 i 个坐标为 1，外其余皆为 0。$e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_n$ 组成 $\mathbb{R}^n$ 的基底，从而 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的 n 维向量空间，并称 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**向量**或**点**. 当每个 ξ_i 均为有理数时，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 称为**有理点**.

定义 3.18

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$，令

$$|x|=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $|x|$ 为向量 x 的**模**或**长度**.

命题 3.8 (向量的模的性质)

设 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

(i) $|x|\geqslant 0$，$|x|=0$ 当且仅当 $x=(0,\cdots,0)$；

(ii) 对任意的 $a\in\mathbb{R}$，有 $|ax|=|a||x|$；

(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(iv) 设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，则有

$$(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)^2\leqslant(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2).$$

证明 (i),(ii) 的结论是明显的；(iii) 是 (iv) 的推论. 因此我们只证明 (iv).

只需注意到函数

$$f(\lambda)=(\xi_1+\lambda\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n+\lambda\eta_n)^2$$

是非负的（对一切 λ），由 λ 的二次方程 $f(\lambda)$ 的判别式小于或等于零即得。(iv) 就是著名的 Cauchy - Schwarz 不等式。

定义 3.19 (距离空间)

一般地说，设 X 是一个集合。若对 X 中任意两个元素 x 与 y，有一个确定的实数与之对应，记为 $d(x,y)$，它满足下述三条性质：

(i) $d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$；

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，

则认为在 X 中定义了距离 d，并称 (X,d) 为**距离空间**.

笔记 因而 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间，其中 $d(x,y) = |x-y|$。我们称 $\mathbb{R}^n$ 为 **n 维欧氏空间**。

定义 3.20 (点集的直径与有界集)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合，令

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\},$$

称为点集 E 的**直径**。若 $\operatorname{diam}(E) < +\infty$，则称 E 为**有界集**.

命题 3.9 (有界集的充要条件)

E 是有界集的充要条件是，存在 $M > 0$，使得 $\forall x \in E$ 都满足 $|x| \leqslant M$。

证明 由有界集的定义易得.

定义 3.21 (点的 (球) 邻域)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$，称点集

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心，以 δ 为半径的**开球**，也称为 x_0 的 **(球) 邻域**，记为 $B(x_0, \delta)$，从而称

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

为**闭球**，记为 $C(x_0, \delta)$。$\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心，以 δ 为半径的球面是

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \delta\}.$$

定义 3.22 (矩体)

设 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆为实数，且 $a_i < b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，称点集

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : a_i < \xi_i < b_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开矩体**（$n = 2$ 时为矩形，$n = 1$ 时为区间），即直积集

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

类似地，$\mathbb{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],$$

称 $b_i - a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为**矩体的边长**。若各边长都相等，则称矩体为**方体**。
矩体也常用符号 I, J 等表示，其**体积**用 $|I|$，$|J|$ 等表示。

命题 3.10 (矩体的直径与体积)

若 $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$，则

$$\operatorname{diam}(I) = [(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

定义 3.23

设 $x_k \in \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$。若存在 $x \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - x| = 0,$$

则称 $x_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**收敛（于 x 的）点列**，称 x 为它的**极限**，并简记为

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

定义 3.24 (Cauchy 列)

称 $\{x_k\}$ 为 **Cauchy 列**或**基本列**, 若 $\lim\limits_{l,m\to\infty}|x_l - x_m| = 0$. 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $k, l > N$ 时, 有

$$|x_k - x_l| < \varepsilon.$$

定理 3.12

$x_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是收敛列的充分必要条件是 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 即

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l - x_m| = 0.$$

证明 若令 $x_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}\}$, $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i| \leqslant |x_k - x| \leqslant |\xi_1^{(k)} - \xi_1| + \cdots + |\xi_n^{(k)} - \xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立。故可知 $x_k(k = 1, 2, \cdots)$ 收敛于 x 的充分必要条件是, 对每个 i, 实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i。由此根据实数列收敛的 Cauchy 收敛准则可知结论成立.

3.3.2 点集的极限点

定义 3.25 (极限点与导集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$。若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k - x| = 0,$$

则称 x 为 E 的**极限点**或**聚点**.E 的极限点全体记为 E', 称为 E 的**导集**。

笔记 显然, 有限集是不存在极限点的.

定理 3.13 (一个点是极限点的充要条件)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $x \in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 有

$$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing.$$

证明 若 $x \in E'$, 则存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$|x_k - x| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

从而对任意的 $\delta > 0$, 存在 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $|x_k - x| < \delta$, 即

$$x_k \in B(x,\delta) \quad (k \geqslant k_0).$$

反之, 若对任意的 $\delta > 0$, 有 $(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$, 则令 $\delta_1 = 1$, 可取 $x_1 \in E$, $x_1 \neq x$ 且 $|x - x_1| < 1$。令

$$\delta_2 = \min\left(|x - x_1|, \frac{1}{2}\right),$$

可取 $x_2 \in E$, $x_2 \neq x$ 且 $|x - x_2| < \delta_2$。继续这一过程, 就可得到 E 中互异点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x - x_k| < \delta_k$, 即

$$\lim_{k\to\infty}|x - x_k| = 0.$$

这说明 $x \in E'$。

定义 3.26 (孤立点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$。若 E 中的点 x 不是 E 的极限点, 即存在 $\delta > 0$, 使得

$$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E = \varnothing,$$

则称 x 为 E 的**孤立点**, 即 $x \in E \setminus E'$。

定理 3.14 (导集的性质)

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$，则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$。

证明 因为 $E_1 \subset E_1 \cup E_2$，$E_2 \subset E_1 \cup E_2$，所以

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)',$$

从而有 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$。反之，若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$，则存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{x_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

显然，在 $\{x_k\}$ 中必有互异点列 $\{x_{k_i}\}$ 属于 E_1 或属于 E_2，而且

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x.$$

在 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 时，有 $x \in E_1'$，否则 $x \in E_2'$。这说明

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'.$$

定理 3.15 (Bolzano - Weierstrass 定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点。

证明 首先从 E 中取出互异点列 $\{x_k\}$。显然，$\{x_k\}$ 仍是有界的，而且 $\{x_k\}$ 的第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个坐标所形成的实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是有界数列。其次，根据 $\mathbb{R}^1$ 的 Bolzano - Weierstrass 定理可知，从 $\{x_k\}$ 中可选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$，使得 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第一个坐标形成的数列是收敛列；再考查 $\{x_k^{(1)}\}$ 的第二个坐标形成的数列，同理可从中选出 $\{x_k^{(2)}\}$，使其第二个坐标形成的数列成为收敛列，此时其第一坐标数列仍为收敛列（注意，收敛数列的任一子列必收敛于同一极限），……至第 n 步，可得到 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_k^{(n)}\}$，其一切坐标数列皆收敛，从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是收敛点列，设其极限为 x。由于 $\{x_k^{(n)}\}$ 是互异点列，故 x 为 E 的极限点。

3.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

3.4.1 闭集

定义 3.27 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$。若 $E \supset E'$（即 E 包含 E 的一切极限点），则称 E 为**闭集**（这里规定空集为闭集）。记 $\overline{E} = E \cup E'$，并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**（E 为闭集就是 $E = \overline{E}$）。

定义 3.28 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$，则称 A 在 B 中**稠密**，或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 3.16 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集，从而有限多个闭集的并集是闭集；
(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族，则其交集 $F = \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集。
(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n(\alpha \in I)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集。例如，令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = (0,1]$。此例还说明

$$[0,1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0,1]\,.$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}\end{aligned}$$

可知，若 F_1, F_2 为闭集，则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$。即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集。

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$，有 $F \subset F_\alpha$，所以对一切 $\alpha \in I$，有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$，从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$，故 $F = \overline{F}$。这说明 F 是闭集。

定理 3.17 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列，且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$，则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$。

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合，则存在自然数 k_0，当 $k \geqslant k_0$ 时，有 $F_k = F_{k_0}$。此时，$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$。现在不妨假定对一切 k，F_{k+1} 是 F_k 的真子集，即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切}k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$，则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列。根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知，存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $\lim_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0$。由于每个 F_k 都是闭集，故知 $x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$，即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

3.4.2 开集

定义 3.29 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$。若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集，则称 G 为**开集**。

笔记 由此定义立即可知，$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集；$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集；闭集的补集是开集。

定理 3.18 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族，则其并集 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集；

(ii) 若 $G_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则其交集 $G = \bigcap_{k=1}^{m} G_k$ 是开集（有限个开集的交集是开集）；

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集，则 G 是开集的充分必要条件是，对于 G 中任一点 x，存在 $\delta > 0$，使得 $B(x, \delta) \subset G$。

证明 (i) 由定义知 $G_\alpha^c (\alpha \in I)$ 是闭集，且有 $G^c = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha^c$。根据闭集的性质可知 G^c 是闭集，即 G 是开集。

(ii) 由定义知 $G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集，且有 $G^c=\bigcup_{k=1}^{m}G_k^c$。根据闭集的性质可知 G^c 是闭集，即 G 是开集。

(iii) 若 G 是开集且 $x\in G$，则由于 G^c 是闭集以及 $x\notin G^c$，可知存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset G$。

反之，若对 G 中的任一点 x，存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset G$，则

$$B(x,\delta)\cap G^c=\varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点，即 G^c 的极限点含于 G^c。这说明 G^c 是闭集，即 G 是开集。

定义 3.30 (内点与边界点)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$。对 $x\in E$，若存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset E$，则称 x 为 E 的**内点**。E 的内点全体记为 $\mathring{E}$，称为 E 的**内核**。若 $x\in\overline{E}$ 但 $x\notin\mathring{E}$，则称 x 为 E 的**边界点**。边界点全体记为 ∂E。

笔记 显然，内核一定为开集。开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合。

定理 3.19 ($\mathbb{R}^n$ 中的非空开集的性质)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间（这里也包括 $(-\infty,a)$，$(b,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$）的并集；

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集。

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集。对于 G 中的任一点 a，由于 a 是 G 的内点，故存在 $\delta>0$，使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset G$。现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

（这里 a' 可以是 $-\infty$，a'' 可以是 $+\infty$），显然 $a'<a<a''$ 且 $(a',a'')\subset G$。这是因为对区间 (a',a'') 中的任一点 z，不妨设 $a'<z\leqslant a$，必存在 x，使得 $a'<x<z$ 且 $(x,a)\subset G$，即 $z\in G$。我们称这样的开区间 (a',a'') 为 G（关于点 a）的构成区间 I_a。

如果 $I_a=(a',a'')$，$I_b=(b',b'')$ 是 G 的构成区间，那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的。为此，不妨设 $a<b$。若

$$I_a\cap I_b\neq\varnothing,$$

则有 $b'<a''$。于是令 $\min\{a',b'\}=c$，$\max\{a'',b''\}=d$，则有 $(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$。取 $x\in I_a\cap I_b$，则 $I_x=(c,d)$ 是构成区间，且

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'').$$

最后，我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的。

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为 1 的半开闭方体，其全体记为 Γ_0。再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分，则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体，记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1。继续按此方法二分下去，可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$，这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}，且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集。我们称如此分成的方体为二进方体。

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来，记其全体为 H_0。再把 Γ_1 中含于

$$G\setminus\bigcup_{J\in H_0}J$$

（J 表示半开闭二进方体）内的方体取出来，记其全体为 H_1。依此类推，H_k 为 Γ_k 中含于

$$G\setminus\bigcup_{i=0}^{k-1}\bigcup_{J\in H_i}J$$

内的方体的全体。显然，一切由 $H_k(k=0,1,2,\cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的。因为 G 是开集，所以对任意的 $x\in G$，存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset G$。而 Γ_k 中的方体的直径当 $k\to\infty$ 时是趋于零的，从而可知 x 最终必落

入某个 Γ_k 中的方体。这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实，即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ，使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集。事实上，Γ 可取为

$$\left\{B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x\mathbb{R}^n, k\right\}.$$

首先，Γ 是可列集。其次，对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x，必存在 $\delta > 0$，使得 $B(x,\delta) \subset G$。现在取有理点 x'，使得 $d(x,x') < 1/k$，其中 $k > 2/\delta$，从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x,\delta) \subset G,$$

显然，一切如此做成的 $B(x', 1/k)$ 的并集就是 G。

定义 3.31 (开覆盖)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$，Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族。若对任意的 $x \in E$，存在 $G \in \Gamma$，使得 $x \in G$，则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**。

设 Γ 是 E 的一个开覆盖。若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖，则称 Γ' 为 Γ（关于 E）的一个**子覆盖**. ♣

引理 3.2

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖。♡

定理 3.20 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖。♡

注 在上述定理中，有界的条件是不能缺的。例如，在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆盖。同样，闭集的条件也是不能缺的。例如，在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

就不存在有限子覆盖。

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，Γ 是 F 的一个开覆盖。由引理 3.2，可以假定 Γ 由可列个开集组成：

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然，H_k 是开集，L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$。分两种情况：

(i) 存在 k_0，使得 L_{k_0} 是空集，即 H_{k_0} 中不含 F 的点，从而知 $F \subset H_{k_0}$，定理得证；

(ii) 一切 L_k 皆非空集，则由Cantor 闭集套定理可知，存在点 $x_0 \in L_k (k = 1, 2, \cdots)$，即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c (k = 1, 2, \cdots)$。这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k，与原设矛盾，故第 (ii) 种情况不存在。

定理 3.21

设 $E \subset \mathbb{R}^n$。若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则 E 是有界闭集。♡

证明 设 $y \in E^c$，则对于每一个 $x \in E$，存在 $\delta_x > 0$，使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing.$$

显然，$\{B(x,\delta_x) : x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖，由题设知存在有限子覆盖，设为

$$B(x_1,\delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m,\delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集。现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1},\cdots,\delta_{x_m}\},$$

则 $B(y,\delta_0) \cap E = \varnothing$，即 $y \notin E'$。这说明 $E' \subset E$，即 E 是闭集。有界性显然。

定义 3.32 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖，我们就称 E 为**紧集**.

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 3.21表明，$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 3.33 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，$x_0 \in E$。如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in E \cap B(x_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**，称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0 \notin E'$ 的情形，即 x_0 是 E 的孤立点时，$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续）。若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点，则称 $f(x)$ **在 E 上连续**。记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$。

命题 3.11 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，$f \in C(F)$，则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数，即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$，$y_0 \in F$，使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的，即对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外，若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数。

3.4.3 Borel 集

定义 3.34

第四章 Lebesgue 测度

4.1 Lebesgue 外测度

定义 4.1 (区间的长度)

设 I 为实数的非空区间, 若 I 是无界的, 则定义它的长度 $\ell(I)$ 为 ∞, 否则定义它的长度为端点的差.

笔记 设 I 为实数的非空区间, 显然 I 的长度满足

(1) $\ell(I) \geqslant 0$.

(2) $\ell(I)$ 满足平移不变性, 即 $\ell(I) = \ell(I+y), \forall y \in \mathbb{R}$.

定义 4.2 (Lebesgue 外测度)

设覆盖 A 的非空开有界区间的可数集族 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, 即使得 $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. 定义 A 的 **Lebesgue 外测度** $m^*(A)$ 为这些区间长度之和的下确界, 即

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \middle| A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

命题 4.1 (常见集合的 Lebesgue 外测度)

(1) 外测度是非负的.

(2) 空集的外测度为 0.

(3) 由可数个点构成的集合的外测度等于 0.

(4) 区间的外测度等于区间的长度.

证明

(1) 由区间长度的非负性立得.

(2) 注意到 $(0, \frac{1}{n}) \supset \varnothing$，则

$$0 \le m^*(\varnothing) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$$

因此 $m^*(\varnothing) = 0$。

(3) 设 $a_1, \cdots, a_m, \cdots \in \mathbb{R}, A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$。任取 $n \in \mathbb{N}$，则

$$\bigcup_{1\le m\le n}\left(a_i - \frac{1}{2n2^m}, a_i + \frac{1}{2n2^m}\right) \supset A$$

于是

$$m^*(A) \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n2^m} = \frac{1}{n}$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$0 \le m^*(A) \le 0.$$

因此 $m^*(A) = 0$.

(4) 我们从闭有界区间 $[a, b]$ 的情形开始。令 $\varepsilon > 0$。由于开区间 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 包含 $[a, b]$，我们有 $m^*([a, b]) \leqslant \ell((a-\varepsilon, b+\varepsilon)) = b-a+2\varepsilon$。这对任何 $\varepsilon > 0$ 成立。因此 $m^*([a, b]) \leqslant b-a$。接下来要证明 $m^*([a, b]) \geqslant b-a$。

而这等价于证明：若 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任何覆盖 $[a,b]$ 的可数开有界区间族，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \geqslant b-a \tag{4.1}$$

根据Heine - Borel 定理，任何覆盖 $[a,b]$ 的开区间族有一个覆盖 $[a,b]$ 的有限子族。选取自然数 n 使得 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 覆盖 $[a,b]$。我们将证明

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant b-a \tag{4.2}$$

从而(4.1)成立。由于 a 属于 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$，这些 I_k 中必有一个包含 a。选取这样的一个区间且记为 (a_1,b_1)。我们有 $a_1<a<b_1$。若 $b_1 \geqslant b$，不等式(4.2)得证，这是因为

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant b_1-a_1 > b-a$$

否则，$b_1 \in [a,b]$，且由于 $b_1 \notin (a_1,b_1)$，族 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 中存在一个区间，记为 (a_2,b_2) 以区分于 (a_1,b_1)，使得 $b_1 \in (a_2,b_2)$，即 $a_2<b_1<b_2$。若 $b_2 \geqslant b$，不等式(4.2)得证，这是因为

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geqslant (b_1-a_1)+(b_2-a_2) = b_2-(a_2-b_1)-a_1 > b_2-a_1 > b-a$$

我们继续这一选取程序直至它终止，而它必须终止，因为族 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 中仅有 n 个区间。因此我们得到 $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ 的一个子族 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{N}$ 使得

$$a_1<a$$

而对 $1 \leqslant k \leqslant N-1$，

$$a_{k+1}<b_k$$

且由于选取过程终止，

$$b_N>b$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) &\geqslant (b_N-a_N)+(b_{N-1}-a_{N-1})+\cdots+(b_1-a_1)\\ &= b_N-(a_N-b_{N-1})-\cdots-(a_2-b_1)-a_1\\ &> b_N-a_1>b-a\end{aligned}$$

因而不等式(4.2)成立。

若 I 是任意有界区间，则给定 $\varepsilon>0$，存在两个闭有界区间 J_1 和 J_2 使得

$$J_1 \subseteq I \subseteq J_2$$

而

$$\ell(I)-\varepsilon<\ell(J_1) \text{ 且} \ell(J_2)<\ell(I)+\varepsilon$$

根据对闭有界区间的外测度与长度的相等性，以及外测度的单调性，有

$$\ell(I)-\varepsilon<\ell(J_1)=m^*(J_1) \leqslant m^*(I) \leqslant m^*(J_2)=\ell(J_2)<\ell(I)+\varepsilon$$

这对每个 $\varepsilon>0$ 成立。因此 $\ell(I)=m^*(I)$。

若 I 是无界区间，则对每个自然数 n，存在区间 $J \subseteq I$ 满足 $\ell(J)=n$。因此 $m^*(I) \geqslant m^*(J)=\ell(J)=n$。这对每个自然数 n 成立，因此 $m^*(I)=\infty$。

命题 4.2 (Lebesgue 外测度的平移不变性)

外测度是平移不变的，即对任意集合 A 与数 y,

$$m^*(A+y)=m^*(A)$$

证明 观察到若 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任意可数集族，则 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 A 当且仅当 $\{I_k+y\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 $A+y$。此外，若每个 I_k 是一个开区间，则每个 I_k+y 是一个相同长度的开区间，因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k+y)$$

结论从这两个观察可以得到。

命题 4.3 (Lebesgue 外测度的可数次可加性)

外测度是可数次可加的，即若 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是任意可数集族，互不相交或相交，则

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$$

注 外测度不是可数可加的, 它甚至不是有限可加的.

证明 若这些 E_k 中的一个有无穷的外测度，则不等式平凡地成立。我们因此假定每个 E_k 有有限的外测度。令 $\varepsilon>0$。对每个自然数 k，存在开有界区间的可数族 $\{I_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$E_k\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{k,i}\text{ 且 }\sum_{i=1}^{\infty}l(I_{k,i})<m^*(E_k)+\varepsilon/2^k$$

现在 $\{I_{k,i}\}_{1\leqslant k,i\leqslant\infty}$ 是一个覆盖 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 的开有界区间的可数族：由于该族是可数族组成的可数族，它是可数的。因此，根据外测度的定义，

$$\begin{aligned}m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)&\leqslant\sum_{1\leqslant k,i<\infty}\ell(I_{k,i})=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\ell(I_{k,i})\right]\\&<\sum_{k=1}^{\infty}\left[m^*(E_k)+\varepsilon/2^k\right]=\left[\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)\right]+\varepsilon\end{aligned}$$

由于这对每个 $\varepsilon>0$ 成立，它对 $\varepsilon=0$ 也成立。证明完毕。

若 $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ 是任何有限集族，互不相交或相交，则

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}m^*(E_k)$$

通过对 $k>n$ 设 $E_k=\varnothing$，有限次可加性从可数次可加性得到。

4.2 Lebesgue 可测集的 σ 代数

定义 4.3 (可测)

集合 E 称为在 $\mathbb{R}$ 中是**可测的**或是 $\mathbb{R}$ 中的一个**可测集**, 或称 E 满足卡拉西奥多里 (Carathéodory) 条件, 若对任意集合 A,

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)=m^*(A\cap E)+m^*(A-E).$$

命题 4.4 (可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}$，则 E 是可测集当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}$ 有

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E).$$

证明 由可测的定义可知，我们只须证明小于等于号的关系恒成立. 注意到 $A = (A \cap E) \cup (A - E)$，由于Lebesgue 外测度的可数次可加性，我们有

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A - E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

此即得证.

命题 4.5 (可测集的性质)

(1) 空集与 $\mathbb{R}$ 是可测的.
(2) 可测集的补是可测的.
(3) 任何外测度为零的集合是可测的。特别地，任何可数集是可测的。
(4) 可数个可测集的并是可测的.

证明

(1) 由可测的定义易得.
(2) 由可测的定义易得.
(3) 令集合 E 的外测度为零. 令 A 为任意集合。由于

$$A \cap E \subseteq E \text{ 且} A \cap E^C \subseteq A$$

根据外测度的单调性，

$$m^*(A \cap E) \leqslant m^*(E) = 0 \text{ 且} m^*(A \cap E^C) \leqslant m^*(A)$$

因此

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geqslant m^*(A \cap E^C) = 0 + m^*(A \cap E^C) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) \end{aligned}$$

从而由可测的充要条件可知,E 是可测的。

(4)

4.3 Lebesgue 可测集的外逼近和内逼近

4.4 可数可加性、连续性以及 Borel-Cantelli 引理

4.5 不可测集

4.6 Cantor 集和 Cantor-Lebesgue 函数

第五章 Lebesgue 可测函数

5.1 和、积与复合

5.2 序列的逐点连续与简单逼近

5.3 Littlewood 的三个原理、Egoroff 定理以及 Lusin 定理

第六章 Lebesgue 积分

6.1 Riemann 积分

6.2 有限测度集上的有界可测函数的 Lebesgue 积分

6.3 非负可测函数的 Lebesgue 积分

6.4 一般的 Lebesgue 积分

6.5 积分的可数可加性与连续性

6.6 一致可积性:Vitali 收敛定理

6.7 一致可积性和紧性: 一般的 Vitali 收敛定理

6.8 依测度收敛

6.9 Riemann 可积与 Lebesgue 可积的刻画

第七章 微分与积分

7.1 单调函数的连续性

7.2 单调函数的可微性:Lebesgue 定理

7.3 有界变差函数:Jordan 定理

7.4 绝对连续函数

7.5 导数的积分: 微分不定积分

7.6 凸函数

第八章 L^p 空间: 完备性与逼近

8.1 赋范线性空间

8.2 Young、Hölder 与 Minkowski 不等式

8.3 L^p 是完备的:Riesz-Fischer 定理

8.4 逼近与可分性

第九章 L^p 空间: 对偶与弱收敛

9.1 关于 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 的对偶的 Riesz 表示定理

9.2 L^p 中的弱序列收敛

9.3 弱序列紧性

9.4 凸泛函的最小化