0.1 矩阵的初等变换

0.1.1 相抵标准型

定义 0.1 (矩阵相抵的定义)

设矩阵 A, B, 若 A 经有限次初等变换后变成 B, 则称 A 与 B **相抵**, 记作 $A \sim B$.

笔记 容易验证相抵是 $M_{s\times n}(K)$ 上的一个等价关系. 在相抵关系下, 矩阵 A 的等价类称为 A 的相抵类.

命题 0.1 (矩阵相抵的等价命题)

数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 和 B 相抵等价于:

1. A可以经过初等行变换和初等列变换变成B.
2. 存在K上s级初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_t$与n级初等矩阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$,使得 $P_t \cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_m = B$.
3. 存在K上s级可逆矩阵P与n级可逆矩阵Q,使得: $PAQ = B$.

定理 0.1 (相抵标准型)

设数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 r. 如果 $r > 0$, 那么 A 相抵于下述形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

称矩阵(??)为 A 的相抵标准形; 如果 $r = 0$, 那么 A 相抵于零矩阵, 此时称 A 的相抵标准形是零矩阵.

推论 0.1

1. 数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 和 B 相抵当且仅当它们的秩相等.
2. 设数域 K 上 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r > 0)$, 则存在 K 上的 s 级、n 级可逆矩阵 P、Q, 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

命题 0.2 (奇异阵的充要条件)

数域 K 上的 n 阶矩阵 A 是奇异阵的充要条件有:

1. 存在数域 K 上不为零的同阶方阵 B, 使得 $AB = O$.
2. 存在数域 K 上的 n 维非零列向量 x, 使得 $Ax = 0$.

证明

1. 充分性 ($\Leftarrow$): 显然若 A 可逆, 则从 $AB = O$ 可得到 $B = O$, 因此充分性成立.

   必要性 ($\Rightarrow$): 反之, 若 A 是奇异阵, 则存在数域 K 上的可逆阵 P, Q, 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r < n$. 令 $C = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 $PAQC = O$. 又因为 P 可逆, 故 $AQC = O$. 只要令 $B = QC \in K$ 就得到了结论.
2. 充分性 ($\Leftarrow$): 显然若 A 可逆, 则从 $Ax = 0$ 可得到 $x = 0$, 因此充分性成立.

   必要性 ($\Rightarrow$): 反之, 若 A 是奇异阵, 则存在数域 K 上的可逆阵 P, Q, 使 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $r < n$. 令 $y = (0, \cdots, 0, 1)'$ 为 n 维列向量, 则 $PAQy = 0$. 又因为 P 可逆, 故 $AQy = 0$. 只要令 $x = Qy \in K$ 就得到了结论.

0.1.2 练习

✍ **练习 0.1** 设 A 为 n 阶实反对称阵, 证明:$I_n - A$ 是非异阵.

证明 (反证法) 假设是 $I_n - A$ 是奇异阵, 则由命题**??**的 2, 可知存在 n 维非零实列向量 x, 使得 $(I_n - A)x = 0$, 即 $Ax = x$. 设 $x = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 其中 a_i 都是实数, 则由 A 的反对称性以及命题**??**, 可知

$$0 = x'Ax = x'x = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

从而 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, 即 $x = 0$, 这与已知矛盾.

✍ **练习 0.2** 设 A 为 n 阶可逆阵, 求证: 只用第三类初等变换就可以将 A 化为如下形状:

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, |A|\}.$$

证明 假设 A 的第 $(1,1)$ 元素等于零, 因为 A 可逆, 故第一行必有元素不为零. 用第三初等变换将非零元素所在的列加到第一列, 则到的矩阵中第 $(1,1)$ 元素不为零. 因此不设 A 的第 $(1,1)$ 元素非零, 于是可用三类初等变换将 A 的第一行及第一列其余素都消为零. 这就是说,A 经过第三类初变换可化为如下形状:

$$\begin{pmatrix} a & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

再对 A_1 同样处理, 不断做下去, 可将 A 化为对角阵, 并且对角元素均非零. 因此我们只要对对角阵证明结论即可. 为简化讨论, 我们先考虑二阶对角阵:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

将其第一行乘以 $(1-a)a^{-1}$ 加到第行上, 再将第二行加到第一行上得到:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix}.$$

将其第一列乘以 $-b$ 加到第二列上, 再将第行乘以 $a-1$ 加到第二行上得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}.$$

从而原结论对二阶对角阵成立. 对于 n 阶对角阵 $B = diag\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 而言, 按照上述方法对 $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_1a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

按照上述方法对再对 $B\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a_1a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & a_1a_2a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}.$$

同理依次对 $B\begin{pmatrix}k & k+1\\ k & k+1\end{pmatrix}, k=1,2\cdots,n-1$ 所对应的子矩阵按照上述方法进行第三类初等变换, 最后得到

$$B=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1a_2\cdots a_n\end{pmatrix}.$$

于是原结论对对角阵也成立. 而我们所用的初等变换始终是第三类初等变换. 这就得到了结论.

练习 0.3 求证: 任一 n 阶矩阵均可表示为形如 $I_n+a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵之积, 其中 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵.

证明 由命题**??**可知任意一个 n 阶矩阵都可表示为有限个初等阵和具有下列形状的对角阵 D 之积:

$$D=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\},$$

故只要对初等阵和 D 证明结论即可. 对 D, 假设 D 有 r 个 1, 则

$$D=(I_n-E_{r+1,r+1})\cdots(I_n-E_{nn}).$$

第三类初等阵已经是这种形状了, 即 $P_{ij}(c)=I_n+cE_{ij}$. 对第二类初等阵 $P_i(c)$, 显然我们有 $P_i(c)=I_n+(c-1)E_{ii}$. 对第一类初等阵 P_{ij}, 由练习**??**可知, 只用第三类初等变换就可以将 P_{ij} 化为 $P_n(-1)=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1\}$, 因此对第一类初等阵结论也成立. 具体地, 我们有

$$P_{ij}\cdot P_{ij}(-1)P_j(-1)P_{ji}(-1)P_{ij}(1)=I_n.$$

由此可得

$$\begin{aligned}P_{ij}&=\left[P_{ij}(-1)P_j(-1)P_{ji}(-1)P_{ij}(1)\right]^{-1}=P_{ij}^{-1}(1)P_{ji}^{-1}(-1)P_j^{-1}(-1)P_{ij}^{-1}(-1)\\&=P_{ij}(-1)P_{ji}(1)P_j(-1)P_{ij}(1)=\left(I_n-E_{ij}\right)\left(I_n+E_{ji}\right)\left(I_n-2E_{jj}\right)\left(I_n+E_{ij}\right).\end{aligned}$$