


## 0.1 凸性相关积分不等式

## 命题 0.1

设  $f$  是  $[a, b]$  上的下凸函数, 则有

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{1-t}{t} \int_a^t f(x) dx + \frac{t}{1-t} \int_t^b f(x) dx \\ \iff t(1-t)f(t) &\leq (1-t)^2 \int_0^t f(x) dx + t^2 \int_t^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

 **笔记** 记忆这不等式以及这个不等式的证明!

**证明** 设  $t \in (a, b)$ , 对于  $x \in [a, b]$ , 有

$$t = (b-t)(tx) + t(b-x+tx).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leq (b-t)f(tx) + tf(b-x+tx).$$


上式对变量  $x$  在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leq (b-t) \int_a^b f(tx) dx + t \int_a^b f(b-x+tx) dx \\ &= \frac{b-t}{t} \int_a^t f(x) dx + \frac{t}{b-t} \int_t^b f(x) dx. \end{aligned}$$

□

**例题 0.1** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的下凸函数, 求证:

$$\int_0^1 t(1-t)f(t) dt \leq \frac{1}{3} \int_0^1 (t^3 + (1-t)^3) f(t) dt.$$

 **笔记** 利用凸函数积分不等式命题 0.1.

**证明** 设  $t \in (0, 1)$ , 对于  $x \in [0, 1]$ , 有

$$t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx).$$

因此根据下凸函数的性质, 得

$$f(t) \leq (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$

上式对变量  $x$  在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} f(t) &\leq (1-t) \int_0^1 f(tx) dx + t \int_0^1 f(1-x+tx) dx \\ &= \frac{1-t}{t} \int_0^t f(x) dx + \frac{t}{1-t} \int_t^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

因而

$$t(1-t)f(t) \leq (1-t)^2 \int_0^t f(x) dx + t^2 \int_t^1 f(x) dx, \quad t \in [0, 1].$$

积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 t(1-t)f(t) dt &\leq \int_0^1 \left[ (1-t)^2 \int_0^t f(x) dx \right] dt + \int_0^1 \left[ t^2 \int_t^1 f(x) dx \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[ f(x) \int_x^1 (1-t)^2 dt \right] dx + \int_0^1 \left[ f(x) \int_0^x t^2 dt \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 + (1-x)^3) f(x) dx. \end{aligned}$$

□

## 命题 0.2

设  $f$  是  $[a, b]$  上的非负上凸函数. 证明对任何  $x \in [a, b]$ , 都有

$$f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y) dy. \quad (1)$$

**注** Step2 中的  $g(x)$  的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

**笔记** 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造  $g(x) = f(x) - p(x)$  (其中  $p(x)$  是  $f$  过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

**证明 证法一:** 利用割线不等式可得, 对  $\forall x \in [a, b]$ , 都有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^x f(y) dy + \int_x^b f(y) dy \\ &\geq \int_a^x \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (y - a) + f(a) \right] dy + \int_x^b \left[ \frac{f(b) - f(x)}{b - x} (y - b) + f(b) \right] dy \\ &= \frac{f(x) + f(a)}{2} (x - a) + \frac{f(x) + f(b)}{2} (b - x) \\ &= \frac{b - a}{2} f(x) + \frac{(x - a)f(a) + (b - x)f(b)}{2} \\ &\geq \frac{b - a}{2} f(x). \end{aligned}$$

**证法二:** 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设  $f \in C[a, b]$ . 不妨设  $a = 0, b = 1$ , 否则用  $f(a + (b - a)x)$  代替  $f(x)$  即可.

**Step1** 当

$$f(a) = f(b) = 0, x_0 \text{ 是 } f(x) \text{ 最大值点}, x_0 \in (a, b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x) \geq \frac{f(x_0)}{x_0} x, & x \in [0, x_0] \\ f(x) \geq \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} (x - 1), & x \in [x_0, 1] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0} x dx + \int_{x_0}^1 \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} (x - 1) dx = \frac{1}{2} f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(1).

当  $x_0 = a$  或  $b$  时, 由  $f(a) = f(b) = 0$  且  $f$  非负可知, 此时  $f(x) \equiv 0$  结论显然成立.

**Step2** 一般情况可设

$$g(x) = f(x) - [f(1) - f(0)]x - f(0),$$

从而  $g(0) = g(1) = 0$ , 于是  $g$  就满足 Step1 中的条件. 因此由(1)知

$$g(x) \leq 2 \int_0^1 g(y) dy, \forall x \in [0, 1]. \quad (2)$$

于是利用(2)知

$$f(x) - [(f(1) - f(0))x + f(0)] \leq 2 \int_0^1 f(y) dy - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy, \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$f(x) - 2 \int_0^1 f(y) dy \leq [(f(1) - f(0))x + f(0)] - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy, \forall x \in [0, 1].$$

注意到对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有

$$\begin{aligned} & [(f(1) - f(0))x + f(0)] - 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))y + f(0)] dy \leq 0 \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x + f(0) \leq 2 \int_0^1 [(f(1) - f(0))x + f(0)] dx \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x + f(0) \leq f(1) + f(0) \\ \Leftrightarrow & [f(1) - f(0)]x \leq f(1) \\ \Leftrightarrow & f(1)(1-x) + f(0)x \geq 0 \end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由  $x \in [0, 1], f(1), f(0) \geq 0$  直接得到. 于是我们完成了证明. □

**例题 0.2** 设  $f \in C^2[0, 1]$  是下凸函数且满足  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明:

$$|f(x)| \leq \max\{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0, 1].$$

**证明** 因为  $f \in C^2[0, 1]$  且下凸, 所以由下凸函数的单调性刻画知  $f$  的单调性只可能是递增、递减、先减后增其中一种. 无论是哪种情况, 都有  $f$  的最大值一定在端点  $0, 1$  处取到. 记  $f$  的最大值点为  $c \in \{0, 1\}$ ,  $f$  的最小值点  $d \in [0, 1]$ , 则  $f(c) = \max\{f(0), f(1)\}$ . 由  $\int_0^1 f(x)dx = 0$  及积分中值定理知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ , 故  $f(c) \geq 0$ . 于是利用 **命题 0.2** 可得, 有

$$f(c) - f(d) \leq f(c) - 2 \int_0^1 f(x)dx = f(c) \implies f(d) \geq 0 \geq -f(c).$$

故对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有

$$\begin{aligned} -\max\{f(0), f(1)\} &= -f(c) \leq f(x) \leq f(c) = \max\{f(0), f(1)\} \\ \iff & |f(x)| \leq \max\{f(0), f(1)\}. \end{aligned}$$

□