

0.1 内积的表示和正交基

定义 0.1 (Gram 矩阵和度量矩阵)

设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是内积空间的一个向量组, 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\beta_1, \beta_1) & \cdots & (\beta_1, \beta_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\beta_s, \beta_1) & \cdots & (\beta_s, \beta_s) \end{pmatrix}$$

称为向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的 **Gram 矩阵**. 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是一组基, 则将 Gram 矩阵称为该基的**度量矩阵**. 

定理 0.1

1. 若 V 是一个 n 维欧式空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是它的一组基, 对 V 中任意向量 α, β , 其中

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_n \alpha_n,$$

$$\beta = y_1 \alpha_1 + \cdots + y_n \alpha_n.$$

则

$$(\alpha, \beta) = X^T G Y, \quad (1)$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

此时, G 就是基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵. 并且 G 是一个 n 阶正定实对称阵.

由此可知, 若给定了 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定实对称阵之间存在一个一一对应.

2. 若 V 是一个 n 维酉空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是它的一组基, 对 V 中任意向量 α, β , 其中

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_n \alpha_n,$$

$$\beta = y_1 \alpha_1 + \cdots + y_n \alpha_n.$$


则

$$(\alpha, \beta) = X^T H \bar{Y},$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

此时, H 就是基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵. 并且 H 是一个 n 阶正定 Hermite 阵.

由此可知, 若给定了 n 维复线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定 Hermite 阵之间存在一个一一对应. 

证明

1. 利用内积的线性性容易得到 $(\alpha, \beta) = X^T G Y$.

再来看矩阵 G . 因为 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_j, \alpha_i)$, 所以 G 是实对称阵. 又因为对任意的非零向量 α , 总有 $(\alpha, \alpha) > 0$, 所以 $x' G x > 0$ 对一切 n 维非零实列向量 x 成立. 这表明 G 是一个正定阵.

反之, 若给定 n 阶正定实对称阵 G , 利用 (1) 式也可以定义 V 上的内积 (参考例题 2.(1)). 由此我们可以看出,

若给定了 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定实对称阵之间存在着一一对应.

2. 由 1 类似可证.

□

定义 0.2

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 若 $e_i \perp e_j$ 对一切 $i \neq j$ 成立, 则称这组基是 V 的一组**正交基**. 又若 V 的一组正交基中每个基向量的长度都等于 1, 则称这组正交基为**标准正交基**.

显然在标准正交基下, 度量矩阵就是单位矩阵.

♣

引理 0.1

内积空间 V 中的任意一组两两正交的非零向量必线性无关.

♡

证明 设 v_1, v_2, \dots, v_m 是 V 中两两正交的非零向量, 若

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m = \mathbf{0},$$

则对任一 $1 \leq i \leq m$, 有

$$(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m, v_i) = 0.$$

由于 $v_i \perp v_j (i \neq j)$, 故由上式可得 $k_i(v_i, v_i) = 0$, 又 $v_i \neq \mathbf{0}$, 从而 $k_i = 0$.

□

引理 0.2

设向量 α 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 都正交, 则 α 和 $L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 中的每个向量都正交.

♡

证明 任取 $\beta = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_k \beta_k \in L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, 则

$$(\beta, \alpha) = (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_k \beta_k, \alpha) = \sum_{i=1}^k b_i (\beta_i, \alpha) = 0,$$

结论得证.

□

推论 0.1

n 维内积空间中任意一个正交非零向量组的向量个数不超过 n .

♡

证明 假设 n 维内积空间 V 中有 $n+1$ 个正交非零的向量, 则由引理 0.1 可知, 这 $n+1$ 个正交非零的向量一定线性无关, 这与 $\dim V = n$ 矛盾!

□

定理 0.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设 V 是内积空间, u_1, u_2, \dots, u_m 是 V 中 m 个线性无关的向量, 则在 V 中存在 m 个两两正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_m , 使由 v_1, v_2, \dots, v_m 张成的子空间恰好为由 u_1, u_2, \dots, u_m 张成的子空间, 即 v_1, v_2, \dots, v_m 是该子空间的一组正交基.

♡

证明 设 $v_1 = u_1$, 其余 v_i 可用数学归纳法定义如下: 假设 $v_1, \dots, v_k (k < m)$ 已定义好, 这时 v_1, \dots, v_k 两两正交非零且 $L(v_1, \dots, v_k) = L(u_1, \dots, u_k)$. 令

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} v_j. \quad (2)$$

注意 $v_{k+1} \neq \mathbf{0}$, 否则 u_{k+1} 将是 v_1, \dots, v_k 的线性组合, 从而也是 u_1, \dots, u_k 的线性组合, 此与 u_1, u_2, \dots, u_m 线性无关矛盾. 又对任意的 $1 \leq i \leq k$, 有

$$\begin{aligned} (v_{k+1}, v_i) &= (u_{k+1}, v_i) - \sum_{j=1}^k \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} (v_j, v_i) \\ &= (u_{k+1}, v_i) - (u_{k+1}, v_i) = 0, \end{aligned}$$

因此 v_1, \dots, v_k, v_{k+1} 两两正交. 由(2)式可知

$$u_{k+1} \in L(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) \text{ 及 } v_{k+1} \in L(v_1, \dots, v_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}),$$

于是 $L(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_k, u_{k+1})$, 这就证明了结论. \square

注 上述定理证明中的正交化过程通常称为 Gram - Schmidt (格列姆-施密特) 方法.

推论 0.2

任一有限维内积空间均有标准正交基.

定义 0.3 (正交和)

设 V 是 n 维内积空间, V_1, V_2, \dots, V_k 是 V 的子空间. 如果对任意的 $\alpha \in V_i$ 和任意的 $\beta \in V_j$ 均有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 V_1, V_2, \dots, V_k 的正交和, 记为

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

注 由于引理 0.3, 正交和通常也称为正交直和.

引理 0.3

正交和必为直和且任一 V_i 和其余子空间的和正交.

证明 对任意的 $v_i \in V_i$ 和 $\sum_{j \neq i} v_j (v_j \in V_j)$, 有

$$(v_i, \sum_{j \neq i} v_j) = \sum_{j \neq i} (v_i, v_j) = 0,$$

因此后一个结论成立. 任取 $v \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j)$, 则由上述论证可得 $(v, v) = 0$, 故 $v = \mathbf{0}$, 从而 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$, 即正交和必为直和. \square

定义 0.4 (正交补空间)

设 U 是内积空间 V 的子空间, 令

$$U^\perp = \{v \in V | (v, u) = 0\},$$

这里 $(v, u) = 0$ 表示对一切 $u \in U$, 均有 $(v, u) = 0$. 容易验证 U^\perp 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

定理 0.3

设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间, 则

- (1) $V = U \oplus U^\perp = U \perp U^\perp$;
- (2) U 的任一组标准正交基均可扩张为 V 的一组标准正交基.

证明 (1) 若 $x \in U \cap U^\perp$, 则 $(x, x) = 0$, 因此 $x = \mathbf{0}$, 即 $U \cap U^\perp = \{0\}$. 另一方面, 由推论 0.2 可知, 存在 U 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. 对任意的 $v \in V$, 令

$$u = (v, e_1)e_1 + (v, e_2)e_2 + \dots + (v, e_m)e_m,$$

则 $u \in U$. 又令 $w = v - u$, 则对任一 $e_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 有

$$(w, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = (v, e_i) - (v, e_i) = 0.$$

因此 $w \in U^\perp$, 又 $v = u + w$, 这就证明了 $V = U \oplus U^\perp$.

(2) 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是 U 的任一组标准正交基, $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ 是 U^\perp 的任一组标准正交基, 则显然 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. \square

定义 0.5 (正交投影)

设 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$, 定义 V 上的线性变换 $E_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 如下: 若 $v = v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_k (v_i \in V_i)$, 令 $E_i(v) = v_i$. 容易验证 E_i 是 V 上的线性变换, 且满足

$$E_i^2 = E_i, E_i E_j = 0 (i \neq j), E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I_V.$$

线性变换 E_i 称为 V 到 V_i 上的**正交投影** (简称投影).

命题 0.1

设 U 是内积空间 V 的子空间, $V = U \perp U^\perp$. 设 E 是 V 到 U 上的正交投影, 则对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

证明 设 $\alpha = u_1 + w_1, \beta = u_2 + w_2$, 其中 $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in U^\perp$, 则 $E(\alpha) = u_1, E(\beta) = u_2$, 于是

$$(E(\alpha), \beta) = (u_1, u_2 + w_2) = (u_1, u_2) + (u_1, w_2) = (u_1, u_2),$$

$$(\alpha, E(\beta)) = (u_1 + w_1, u_2) = (u_1, u_2) + (w_1, u_2) = (u_1, u_2).$$

由此即得结论. □

命题 0.2 (Bessel (贝塞尔) 不等式)

设 v_1, v_2, \cdots, v_m 是内积空间 V 中的正交非零向量组, y 是 V 中任一向量, 则

$$\sum_{k=1}^m \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|y\|^2,$$

且等号成立的充分必要条件是 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间.

注 Bessel (贝塞尔) 不等式是“斜边大于直角边”这一几何命题在内积空间中的推广.

证明 令

$$x = \sum_{k=1}^m \frac{(y, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k,$$

则 x 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间. 容易验证

$$(y - x, v_k) = 0, k = 1, 2, \cdots, m,$$

因此 $(y - x, x) = 0$. 由勾股定理可得

$$\|y\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x\|^2,$$

故

$$\|x\|^2 \leq \|y\|^2.$$

又由 v_1, v_2, \cdots, v_m 两两正交不难算出

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^m \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2}.$$

若 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间, 则 $y = x$, 故等号成立. 反之, 若等号成立, 则 $\|y - x\|^2 = 0$, 故 $y = x$, 即 y 属于由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 张成的子空间. □