0.1 集合及其运算

定义 0.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的**元素** (或**元**).

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a **属于** A, 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a **不属于** A, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$. ♣

注 集合的表示方法:

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}.$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

定义 0.2

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$.

集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的**幂集**, 记为 2^A 或 $\mathcal{P}(A)$. ♣

注 $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

由 n 个元素形成的集合 E 的幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

定义 0.3

设 $\forall \alpha \in \Gamma, A_\alpha$ 都是集合, 则 $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为**集族**或集合族, 称 Γ 为**指标集**,α 为**指标**. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为**集列**或**集合列**, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$. ♣

定义 0.4

设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, \text{ s.t. } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

设 A, B 为两个集合, 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B **互不相交**. ♣

定义 0.5

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的 “大” 集合 X 的子集, 我们称 X 为**全集**. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的**补集**或**余集**, 并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$, 即

$$B^c = X \setminus B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集.

于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

♣

定义 0.6 (笛卡尔积/直积集)

设 $n \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^n$ 为集族, 称

$$\{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡尔积**, 记为 $A_1 \times \cdots \times A_n$.

若 $(x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots, x_n') \in A_1 \times \cdots \times A_n$, 则 $(x_1, \cdots, x_n) = (x_1', \cdots, x_n')$ 当且仅当 $x_i = x_i', i = 1, 2, \cdots, n$.

特别地, 记 $\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{n\text{个}} = A_1^n$.

♣

定理 0.1 (集合的运算及性质)

(1) **广义交换律和结合律**: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) $A \cup A = A, A \cap A = A$.

(3) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha), A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_\alpha), A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing$.

(7) $X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$.

(8) $A \setminus B = A \cap B^c$.

(9) 若 $A \supseteq B$, 则 $A^c \subseteq B^c$; 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subseteq B^c$.

(10) $A \setminus B^c = B \setminus A^c$.

(11) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$.

♡

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10) $x \in A \setminus B^c \iff x \in A \text{且} x \notin B^c \iff x \in A \text{且} x \in B \iff x \in B \text{且} x \notin A^c \iff x \in B \setminus A^c$.

(11) 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$, 存在 $\alpha_x \in I$, 使 $x \in A_{\alpha_x}$, 并且 $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I$. 从而 $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$. 故 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$.

(12) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in I$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, 即 $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$. 故 $\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$.

□

定理 0.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$; (ii) $(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

♡

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall\alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$, 即 $\forall\alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$, 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$. 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证.

□

定义 0.7 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A\triangle B$.

♣

笔记 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 0.3 (集合对称差的性质)

(i) $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(ii) $A\triangle\varnothing = A, A\triangle A = \varnothing, A\triangle A^c = X, A\triangle X = A^c$.

(iii) $A\triangle B = B\triangle A$.

(iv) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

(v) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$.

(vi) $A^c\triangle B^c = A\triangle B; A = A\triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.

(vii) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E\triangle A = B$(实际上 $E = B\triangle A$).

♡

证明

(i) 由对称差集的定义及定理 0.1(6)可得

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \left[(A \cap B^c) \cup B\right] \cap \left[(A \cap B^c) \cup A^c\right] \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

(vii)

□

定义 0.8 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

命题 0.1

1. 当 $\{A_k\}$ 为递减集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.
2. 当 $\{A_k\}$ 为递增集合列时, $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.

证明

1. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递减集合列可得
$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \cdots.$$
因此 $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$.
2. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递增集合列可得
$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$
因此 $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$.

□

定义 0.9 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

命题 0.2

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列, 我们有

1. 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$, 则
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty} A_k.$$
2. 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$, 则
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty} A_k.$$

证明

1. 由于 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 故
$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$
又由命题 0.1可知
$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$
于是
$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k.$$
$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$
2. 由于 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 故
$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$
又由命题 0.1可知
$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$
于是
$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j\to\infty} A_j.$$
$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

□

命题 0.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列,E 是一个集合则
$$\text{(i)}E \setminus \varlimsup_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} (E \setminus A_k); \quad \text{(ii)}E \setminus \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty} (E \setminus A_k).$$

证明

□

定理 0.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个} A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant j \text{且} k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$

(ii) $\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x : \text{ 除有限个} A_k \text{ 外, 都含有} x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant j_0 \text{且} k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 (i) 设 $x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此 x 属于无穷多个 A_n.

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x \in A_{n_k}, k = 1,2,\cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k$.

(ii) 若 $x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k$, 则存在自然数 j_0, 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 自然除了 $A_1, \cdots, A_{j_0-1}$ 这有限个集合外, 其他 $A_k (k \geqslant j_0)$ 都含有 x.

反之, 若除有限个 A_k 外, 都含有 x, 则存在自然数 j_0, 当 $k \geqslant j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 从而得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k$.

由 (i)(ii) 可知,$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的;$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

□

例题 0.1 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n = 0,1,2,\cdots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n = 1,2,\cdots$, 求 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ 与 $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

解 注意到

$$[0,1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,2)$$

故只需考察 $(1,2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1,2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能 "除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n\to\infty} A_n = [0,1]$, $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,2)$.

□

例题 0.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}$$

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由De Morgan 定律, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则 "$f_n(x) \nrightarrow f(x)$", 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}.$$

□