0.1 相抵标准型及其应用

定理 0.1 (矩阵的相抵标准型)

对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

♡

证明

□

命题 0.1 (矩阵的秩 1 分解)

求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

♠

证明 将 $\boldsymbol{A}$ 化为相抵标准型, 即存在非异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr}\right)\boldsymbol{Q}\\ &=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q}+\cdots+\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}.\end{aligned}$$

于是记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q},\cdots,\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}$, 则每个 $\boldsymbol{A}_i$ 的秩都等于 1. 故 $\boldsymbol{A}$ 可以化为 r 个秩等于 1 的矩阵之和.

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_k, k<r$, 且每个 $\boldsymbol{B}_i$ 的秩都等于 1, 则由命题????可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_2)+\cdots+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_k)=k$, 这与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾, 故不可能. □

命题 0.2 (对称矩阵的秩 1 分解)

秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

♠

证明 设 A 是一个秩为 r 的对称矩阵, 则存在一个可逆矩阵 C, 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix}I_r & \\ & O\end{pmatrix}=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr}.$$

从而

$$\begin{aligned}A&=(C^T)^{-1}(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})C^{-1}\\ &=(C^T)^{-1}E_{11}C^{-1}+(C^T)^{-1}E_{22}C^{-1}+\cdots+(C^T)^{-1}E_{nn}C^{-1}.\end{aligned}$$

因为 E_{ii} 的秩为 1, 且 $(C^T)^{-1}$,C^{-1} 均可逆, 所以 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 的秩也为 1. 又由于

$$((C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1})^T=(C^{-1})^TE_{ii}^TC^{-1}=(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}.$$

因此 $(C^T)^{-1}E_{ii}C^{-1}$ 也是对称矩阵. 故 A 可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和. □

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n,p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵,$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 证明:$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立的充要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵.

笔记 证明必要性时不妨设的原因: 假设当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 结论成立. 则当 $\boldsymbol{A}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}\neq\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 时, 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2$,$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$.

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1),$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1).$$

从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{M}_1)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1).$$

于是由假设可知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1$ 有解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1$. 记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2$, 则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}+\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\\ \Leftrightarrow&\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{有解}\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

故可以不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

证明 先证充分性. 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_0$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 的解, 则将 $\boldsymbol{M}$ 的第一分块列右乘 $-\boldsymbol{X}_0$ 加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘 $-\boldsymbol{Y}_0$ 加到第一分块行上, 可得分块对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

再证必要性. 设 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$ 为非异阵,$r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),s=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 注意到问题的条件和结论在相抵变换: $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{C}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Y}\mapsto\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 都是相抵标准型. 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}_2\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{Y}_4\end{pmatrix}$ 为对应的分块. 考虑 $\boldsymbol{M}$ 的如下分块初等变换:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_4\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r+s$, 故 $\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{O}$. 于是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

有解, 例如 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{O},\boldsymbol{Y}_3=\boldsymbol{C}_3$, 其余分块取法任意. □

命题 0.3 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩阵, 则必存在秩等于 n 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$(行满秩), 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$(这样的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的左逆);

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩阵, 则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$(列满秩), 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_m$(这样的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的右逆).

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此 $(I_n, O)PAQ = I_n$, 即 $(I_n, O)PA = Q^{-1}$, 于是 $Q(I_n, O)PA = I_n$. 令 $B = Q(I_n, O)P$ 即可.

(2) 同理可证, 或者考虑 A' 并利用 (1) 的结论.

□

推论 0.1

列满秩矩阵适合左消去律, 即若 A 列满秩且 $AD = AE$, 则 $D = E$. 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若 A 行满秩且 $DA = EA$, 则 $D = E$.

命题 0.4 (满秩分解)

设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 证明:

(1) $A = BC$, 其中 B 是 $m \times r$(列满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(B) = r$,C 是 $r \times n$(行满秩) 矩阵且 $\mathrm{r}(C) = r$, 这种分解称为 A 的满秩分解;

(2) 若 A 有两个满秩分解 $A = B_1C_1 = B_2C_2$, 则存在 r 阶非异阵 P, 使得 $B_2 = B_1P$,$C_2 = P^{-1}C_1$.

证明

(1) 设 P 为 m 阶非异阵,Q 为 n 阶非异阵, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r, O)Q.$$

令 $B = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$,$C = (I_r, O)Q$, 即得结论.

(2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在 $r \times m$ 行满秩阵 S_2,$n \times r$ 列满秩阵 T_2, 使得 $S_2B_2 = I_r$,$C_2T_2 = I_r$, 于是

$$B_2 = B_2(C_2T_2) = (B_2C_2)T_2 = (B_1C_1)T_2 = B_1(C_1T_2),$$
$$C_2 = (S_2B_2)C_2 = S_2(B_2C_2) = S_2(B_1C_1) = (S_2B_1)C_1,$$
$$(S_2B_1)(C_1T_2) = S_2(B_1C_1)T_2 = S_2(B_2C_2)T_2 = (S_2B_2)(C_2T_2) = I_r.$$

令 $P = C_1T_2$, 即得结论.

□

命题 0.5

$A = BC$ 是满秩分解当且仅当 B 的 r 个列向量是 A 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当 C 的 r 个行向量是 A 的 m 个行向量张成线性空间的一组基.

证明

□

例题 0.2 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times m$ 矩阵 B, 使得 $ABA = A$.

笔记 证法一的不妨设原因与例题 0.1 类似.

证明 证法一: 设 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 P 是 m 阶非异阵,Q 是 n 阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵变换:$A \mapsto PAQ, B \mapsto Q^{-1}BP^{-1}$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是相抵标准型. 设 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块, 由 $ABA = A$ 可得 $B_1 = I_r$, 其余分块取法任意.

证法二:设 $A = CD$ 为 A 的满秩分解,E 为列满秩阵 C 的左逆,F 是行满秩阵 D 的右逆. 令 $B = FE$, 则

$$ABA = (CD)(FE)(CD) = C(DF)(EC)D = CD = A.$$

□

例题 0.3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $3\times 2, 2\times 3$ 矩阵且满足

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{BA}$.

证明 解法一: 通过简单的计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=2$, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq 2, \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geq 2$. 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩阵,$\boldsymbol{B}$ 是行满秩阵. 又注意到 $(\boldsymbol{AB})^2=9\boldsymbol{AB}$, 经整理可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA}-9\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 根据推论 0.1, 可以在上式的左边消去 $\boldsymbol{A}$, 右边消去 $\boldsymbol{B}$, 从而可得 $\boldsymbol{BA}=9\boldsymbol{I}_2$.

解法二:由解法一中矩阵秩的计算可知,$\boldsymbol{AB}$ 是题中 3 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的满秩分解. 注意到 $\boldsymbol{C}$ 的后两列线性无关, 因此可取另一种满秩分解为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-2\\5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2)可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{AP},\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$. 于是 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BAP}$, 故 $\boldsymbol{BA}$ 相似于 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=9\boldsymbol{I}_2$, 从而 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{P}^{-1}(9\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{P}=9\boldsymbol{I}_2$. □

命题 0.6 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 求证:$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和秩等于 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ST},\boldsymbol{TS}=\boldsymbol{I}_r$.

证明 充分性显然, 现证必要性. 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

代入 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 消去两侧的非异阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{QP}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

只需令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 列满秩,$\boldsymbol{I}$ 行满秩, 经简单计算即得结论. □

推论 0.2 (幂等矩阵的迹和秩相等)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证明 证法一:由命题 0.6可知,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{ST})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{TS})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

证法二 (相似标准型):事实上, 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1},$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}^{-1}$, 可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{ST})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{TS})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_r)=r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. □