0.1 群

定义 0.1

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群，$x \in S$。我们称 x 是**可逆的**，当且仅当

$$\exists y \in S, x\cdot y = y\cdot x = e$$

其中 y 被称为 x 的**逆元**，记作 x^{-1}。

命题 0.1 (逆元存在必唯一)

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群。假设 $x \in S$ 是可逆的，则其逆元唯一。也就是说，如果 $y, y' \in S$ 都是它的逆元，则 $y = y'$。

证明 假设 y, y' 都是 x 的逆元。则 $y\cdot x = e$，$x\cdot y' = e$. 从而

$$y = y\cdot e = y\cdot x\cdot y' = e\cdot y' = y'.$$

□

定义 0.2 (群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个幺半群, 若 G 中所有元素都是可逆的, 则我们称 $(G,\cdot)$ 是一个**群**. 换言之，若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算，则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**，或 G 对 $\cdot$ 构成群，当这个运算满足结合律，存在单位元，且每个元素具有逆元。再进一步展开来说，同样等价地，若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算，则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**，当

$$\forall x, y, z \in G, x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z,$$
$$\exists e \in G, \forall x \in G, x\cdot e = e\cdot x = x,$$
$$\forall x \in G, \exists y \in G, x\cdot y = y\cdot x = e.$$

命题 0.2

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，令 $x \in G$，则 $(x^{-1})^{-1} = x$。

证明 方便起见，我们令 $y = x^{-1}$，于是有 $x\cdot y = y\cdot x = e$。我们要证明 $y^{-1} = x$，而这就是 $y\cdot x = x\cdot y = e$，显然成立。这就证明了逆元的逆元是自身. □

命题 0.3

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，令 $x, y \in G$，则 $(x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$。

证明 我们利用定义来证明。一方面，利用广义结合律，$(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1}) = e$；另一方面，同理可以得到另一边的等式 $(y^{-1}\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot y) = e$，这就告诉我们 $(x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$。 □

定义 0.3 (Abel 群)

若 $(G,\cdot)$ 是一个群，我们称它是 **Abel 群**, 或**交换群**，当该运算满足交换律，即

$$\forall x, y \in G, x\cdot y = y\cdot x$$

例题 0.1 常见的群

1. 我们称只有一个元素的群为**平凡群**, 记作 e. 其中的二元运算是 $e\cdot e = e$.
2. 常见的加法群有 $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{C},+)$ 等. 这些加法群分别称为整数加群、有理数加群、实数加群、复数加群.
3. 常见的乘法群有 $(\mathbb{Q}^\times,+), (\mathbb{R}^\times,+), (\mathbb{C}^\times,+)$ 等, 其中 $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}\backslash 0$, 类似地定义其余两个集合. 这些乘法群分别称

为有理数乘群、实数乘群、复数称群.

4. 在向量空间中,n 维欧式空间对加法构成群即 $(\mathbb{R}^n,+)$. 类似地 $(\mathbb{C}^n,+)$, $(\mathbb{Q}^n,+)$, $(\mathbb{Z}^n,+)$ 也是群. 对于这些群, 单位元都是零向量, 加法逆元则是对每个坐标取相反数, 如 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的加法逆元是 $(-x_1,\cdots,-x_n)$.
5. 所有的 $m\times n$ 矩阵也对加法构成群, 单位元都是零矩阵, 加法逆元则是对每一项取相反数. 对于 $n\times n$ 的实矩阵加法群, 我们记作 $(M(n,\mathbb{R}),+)$, 类似地我们将 $n\times n$ 的复矩阵加法群记作 $(M(n,\mathbb{C}),+)$.

证明 证明都是显然的. □

引理 0.1

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群, 令 G 是其所有可逆元素构成的子集, 则 $(G,\cdot)$ 是个群。

注 我们称呼幺半群中的可逆元素为 **"单位"**, 因此 G 是由所有该运算下的单位构成的集合(在这里甚至是群)。

证明 首先结合律完全继承自 S, 不需要证明。而单位元是可逆的, 因此 $e\in G$。剩下要证明 G 中每个元素都有(G 中的)逆元, 而这几乎是显然的。假设 $x\in G$, 则 x 是可逆元素, 我们取 $y\in S$, 使得 $x\cdot y=y\cdot x=e$(这里要注意我们只能首先保证 y 在全集 S 中)。接下来我们要证明 $y\in G$, 即 y 可逆, 而这是显然的, 因为 x 正是它的逆。所以 $y\in G$。这样, 就证明了 $(G,\cdot)$ 是个群. □

定义 0.4 (子群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $H\subset G$。我们称 H 是 G 的**子群**, 记作 $H<G$, 当其包含了单位元, 在乘法和逆运算下都封闭, 即

$$e\in H,$$
$$\forall x,y\in H, x\cdot y\in H,$$
$$\forall x\in H, x^{-1}\in H.$$

命题 0.4 (子群也是群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个群。若 H 是 G 的子群, 则 $(H,\cdot)$ 也是个群。

证明 就二元运算的良定义性而言, 子群第一个条件(封闭性)就满足了, 这使得我们后面的谈论是有意义的。首先, 结合律肯定满足, 因为它是个子集。其次, 根据子群的第二个条件, $e\in H$ 是显然的。再次, 我们要证明每个 H 中元素有 H 中的逆元, 而这是子群的第三个条件。 □

命题 0.5 (子群的等价条件)

$(H,\cdot)$ 是子群等价于

$$e\in H,$$
$$\forall x,y\in H, x\cdot y^{-1}\in H.$$

证明 假设 $(H,\cdot)$ 是子群。令 $x,y\in H$, 利用逆元封闭性得到 $y^{-1}\in H$, 再利用乘法封闭性得到 $x\cdot y^{-1}\in H$。

反过来, 假设上述条件成立. 令 $x\in H$, 则 $e\cdot x^{-1}=x^{-1}\in H$, 这证明了逆元封闭性。接下来, 令 $x,y\in H$, 则利用逆元封闭性, $y^{-1}\in H$, 故 $x\cdot(y^{-1})^{-1}=x\cdot y\in H$。这就证明了乘法封闭性。

综上, 这的确是子群的等价条件。 □

定义 0.5 (一般线性群)

我们对于那些 $n*n$ 可逆实矩阵构成的乘法群, 称为**(实数上的)n 阶一般线性群**, 记作 $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$。由于一个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零, 因此

$$GL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R}):\det(A)\neq 0\}.$$

定义 0.6 (特殊线性群)

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n*n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的)n 阶特殊线性群**，记作 $(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$，即

$$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R}):\det(A)=1\}.$$

命题 0.6

$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ 是个群。

证明 根据定义，$SL(n,\mathbb{R})$ 首先是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子集，那么只要证明它是个子群即可。首先，乘法单位元单位矩阵的行列式恰好是 1（这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因），这就证明了 $I\in SL(n,\mathbb{R})$（$I=I_n$ 指的是 n 阶单位矩阵）。另外，我们要证明 $SL(n,\mathbb{R})$ 在乘法下封闭。令 A,B 是两个行列式为 1 的 $n*n$ 实矩阵。由于行列式满足 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$，因此 AB 的行列式也是 1，也就在特殊线性群中。这就证明了特殊线性群确实是个群。至于逆元封闭性，我们利用 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$。假设 $\det(A)=1$，则 $\det(A^{-1})=1$，于是 $A^{-1}\in SL(n,\mathbb{R})$。综上，特殊线性群确实是个群。 □

定义 0.7 (群同态)

令 $(G,\cdot),(G',*)$ 是两个群，且 $f:G\to G'$ 是一个映射。我们称 f 是一个**群同态**，当其保持了乘法运算，即

$$\forall x,y\in G, f(x\cdot y)=f(x)*f(y).$$

命题 0.7

若 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态，则 $f(e)=e'$，$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。

笔记 也就是说，f 不仅把乘积映到乘积，而且把单位元映到单位元，把逆元映到逆元。在这个意义下，实际上 f 将所有群 G 的“信息”都保持到了 G' 上，包括单位元，乘法和逆元。至于结合律（或者更基础的封闭性），显然两边本来就有，就不必再提。

证明 首先，因为 $e\cdot e=e$，所以利用同态的性质，$f(e)=f(e\cdot e)=f(e)*f(e)$。这时，两边同时左乘 $f(e)^{-1}$，就可以各约掉一个 $f(e)$，得到 $e'=f(e)$，这就证明了 f 把单位元映到单位元。

另一方面，令 $x\in G$，则 $e'=f(e)=f(x\cdot x^{-1})=f(x)*f(x^{-1})$。同理 $e'=f(x^{-1})*f(x)$。于是由定义，$f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元，即 $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。这就证明了这个命题。 □

命题 0.8

$\det:GL(n,\mathbb{R})\to(\mathbb{R}^\times,\cdot)$ 是一个乘法群同态。

证明 证明都是显然的. □

定义 0.8 (群同态的核与像)

令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态，则我们定义 f 的**核与像**，记作 $\ker(f)$ 与 $\mathrm{im}(f)$，分别为

$$\ker(f)=\{x\in G: f(x)=e'\}\subset G$$
$$\mathrm{im}(f)=\{y\in G':\exists x\in G, y=f(x)\}=\{f(x):x\in G\}\subset G'$$

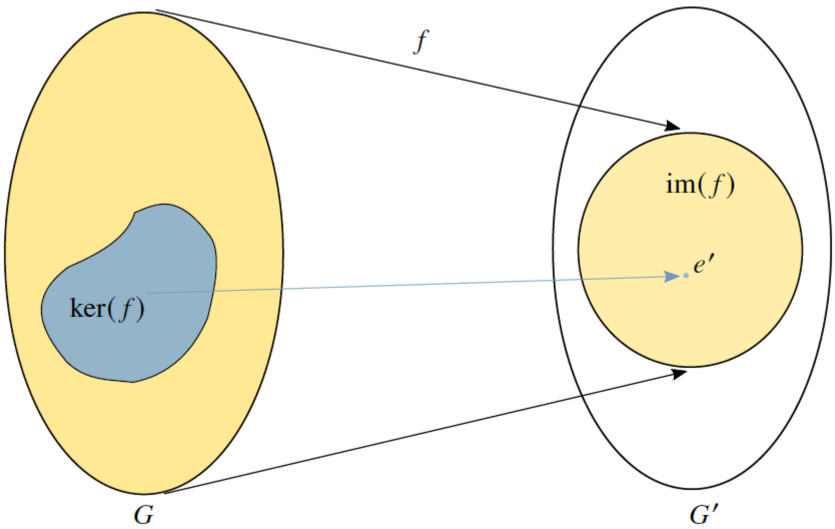

图 1: 群同态的核与像示意图