集合论

作者: 实空

组织: 无

时间:November 11, 2025

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;

去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 1.1 (集合) 具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的元素 (或元), 通常用小写字母如 a, b, c 等表示. ♣

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A, 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为空集, 用 $\emptyset$ 表示; 只含有限个元素的集合称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集.

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的幂集, 记为 2^A.

1.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合, 由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且} x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交.

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为集族, 其中 Γ 为指标集 (有限或无限),α 为指标. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为列集, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$.

1.1.2.0.1 集族的并:

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x:\exists\alpha_0\in\Gamma\ \text{使得}x\in A_{\alpha_0}\}$$

1.1.2.0.2 集族的交:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x:x\in A_\alpha,\forall\alpha\in\Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$, 即

$$A-B=\{x:x\in A\ \text{且}x\notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集,X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X-A$, 称为 A 的余集, 记为 A^c, 即

$$A^c=\{x:x\notin A\}$$

注 补集是相对概念, 若 $A\subset B$, 则 $B-A$ 称为 A 关于 B 的补集. 特别地, 余集是集合关于全集的补集.

笛卡尔积

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\}$$

$$A_1\times\cdots\times A_n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in A_i,i=1,\cdots,n\}$$

例如,n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ 个}}$.

定理 1.1 (集合的运算及性质)

(1) $A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(2) $A\cup\emptyset=A$,$A\cap\emptyset=\emptyset$;

(3) $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$,$A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$;

(6) $A\cup A^c=X$,$A\cap A^c=\emptyset$;

(7) $X^c=\emptyset$,$\emptyset^c=X$;

(8) $A-B=A\cap B^c$.

定理 1.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$;

(ii) $(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$.

证明 (i) 设 $x\in(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c$, 则 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$, 故对 $\forall\alpha\in\Gamma$,$x\notin A_\alpha$, 即 $\forall\alpha\in\Gamma$,$x\in A_\alpha^c$. 从而 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$, 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c\subset(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c$. 因此,$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$.

(ii) 类似可证.

□

定义 1.2 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \triangle B$.

♣

笔记 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 1.3 (集合对称差的性质)

(i) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(ii) $A \triangle \varnothing = A, A \triangle A = \varnothing, A \triangle A^c = X, A \triangle X = A^c$.

(iii) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$.

(iv) 结合律: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(v) 交与对称差满足分配律:$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

(vi) $A^c \triangle B^c = A \triangle B; A = A \triangle B$ 当且仅当 $B = \varnothing$.

(vii) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 E, 使得 $E \triangle A = B$(实际上 $E = B \triangle A$).

♡

证明

(i) 由对称差集的定义及集合的运算及性质 (5)可得

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \left[(A \cap B^c) \cup B\right] \cap \left[(A \cap B^c) \cup A^c\right] \\
&= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{aligned}$$

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

(vii)

□

1.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列, 若 $\{A_n\}$ 单调递增, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

定义 1.3 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, 则 $\{C_n\}$ 单调递减, 故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

称 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**上限集**, 记为 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcap_{k=2}^{\infty}A_k\subset\cdots\subset\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset\cdots$$

记 $D_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$, 则 $\{D_n\}$ 单调递增, 故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

称 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集, 记为 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

若 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$, 则称 $\{A_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

♣

命题 1.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}A_n&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\{x:x\text{ 属于无穷多个}A_n\}\\&=\{x:\ \text{对}\forall k\in\mathbb{N},\ \text{都存在}n_k\text{ 使得}x\in A_{n_k}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}A_n&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\{x:\ \text{除有限个}A_n\text{ 外, 都含有}x\}\\&=\{x:\exists n_0\in\mathbb{N},\ \text{使得}x\in A_n,\forall n\geqslant n_0\}\end{aligned}$$

♠

证明 (1) 设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, 故 $\exists n_1\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in A_{n_1}$; 对 $n=n_1+1$, 有 $x\in\bigcup_{k=n_1+1}^{\infty}A_k$, 故 $\exists n_2>n_1$, 使得 $x\in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1<n_2<\cdots$, 且 $x\in A_{n_k},\forall k$. 因此,x 属于无穷多个 A_n.

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x\in A_{n_k},k=1,2,\cdots$, 且 $n_1<n_2<\cdots$, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都存在 $n_k>n$. 从而 $x\in A_{n_k}\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 因此,$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

(2) $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\iff\exists n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\iff x\in A_n,\forall n\geqslant n_0$.

□

例题 1.1 设 $A_{2n+1}=[0,2-1/(2n+1)],n=0,1,2,\cdots,A_{2n}=[0,1+1/2n],n=1,2,\cdots$, 求 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 与 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

解 注意到

$$[0,1]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2)$$

故只需考察 $(1,2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1,2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1+\frac{1}{2n}<x<2-\frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能"除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x \notin \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0,1]$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0,2)$.

□

例题 1.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则 "$f_n(x) \nrightarrow f(x)$", 即 $\exists \varepsilon_0>0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0>0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0=1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant \frac{1}{k}\}.$$

□

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德 摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}$$

1.2 映射与集合的基数

1.2.1 映射

定义 1.4 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f, 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f: A \to B$, 其表达形式为 $y=f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f)=f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

集合 $B_0 \subset B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0)=\{x\in A: f(x)\in B_0\}$$

♣

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) 对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应; 并且 f 的一个像可以存在多个原像.

(2) $f(A) \subset B$, 不一定有 $f(A)=B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y=|x|, x\in\mathbb{R} \quad 和 \quad y=\sqrt{x^2}, x\in\mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A=\mathbb{N}, B=\{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n)=B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D}\subset 2^A$, 定义 $\phi:\mathcal{D}\to\{0\}\cup\mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0)=A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0\in\mathcal{D}.$$

定义 1.5 (单射、满射和双射)

设 $f : A \to B$, 则

1. 若 B 中每个元素最多只有一个原像, 即对 $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ 所含元素个数为 0 或 1, 则称 f 为**单射**或**一一映射**.
2. 若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \varnothing, \forall y \in B$, 则称 f 为**满射**或**映上的**.
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**或**一一对应**.

♣

定义 1.6 (逆映射)

设 $f : A \to B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \to A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的**逆映射**. 自然 f 也是 f^{-1} 的逆映射, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$.

♣

笔记 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

定理 1.4

设 $f : A \to B$, 则

1. f 为单射的充要条件是
$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$
也即
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$
亦即
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$
2. f 为双射的充要条件是存在 $g : B \to A$, 使得
$$gf = \mathrm{id}_A, \quad fg = \mathrm{id}_B.$$
此时必有 $f = f^{-1}$. 即有两个交换图, 如图 1.1所示.

♡

笔记

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[dl, "f^{-1}"] \\ A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ B & \end{tikzcd}$$

图 1.1

证明

□

定义 1.7 (映射的乘积)

设映射 $f : A \to B, g : B \to C$, 定义 $g \circ f : A \to C$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 g 与 f 的**复合映射**或**乘积**. $g \circ f$ 也常简记为 gf.

♣

定义 1.8

设映射 $f: A \to B$, $A_0 \subseteq A$, 定义映射 $i: A_0 \to A$ 满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称 i 为 A_0 到 A 中的**嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射 $f: A \to B$ 与映射 $g: A_0 \to B$ 满足 $gi = f$, 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的**限制**, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**或**开拓**. 即图 1.2为交换图.

笔记

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

图 1.2

命题 1.2

设一列映射 $f_i: A_i \to A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.

(2) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.

(3) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

证明

(1)

(2)

(3)

□

定义 1.9 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数** (**示性函数**) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 1.3 (特征函数的基本性质)

(1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$;

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$;

(3) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

证明 证明都是显然的.

□

命题 1.4 (映射的基本性质)

对于映射 $f: C \to D, A \subset C, B \subset D$, 下列事实成立:

(i) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$;

(ii) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$;

(iii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时, "=" 成立;

(iv) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$, 当且仅当 f 为满射时, "=" 成立;

$A \subset f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时, "=" 成立;

(v) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

笔记 (iv) 中第一条的直观理解是:B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是:$C - A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$(即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subset f(f^{-1}(B))$, 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subset A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾.

□

1.2.2 集合的对等

定义 1.10 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$. 规定 $\varnothing \sim \varnothing$.

笔记 A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 1.5

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

(1) (反身性)$A \sim A$;

(2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

证明 证明是显然的.

□

命题 1.5

(1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$.

证明

(1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f : A \to C$ 和 $g : B \to D$. 于是令

$$\varphi : A \times B \to C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall (a, b) \in A \times B$, 由 $f(a) \in C, g(b) \in D$ 可知 $(f(a), g(b)) \in C \times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f, g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 1.3 自然数集 $\mathbb{N} \sim$ 正偶数集 $\sim$ 正奇数集 $\sim$ 整数集 $\mathbb{Z}$.

证明 正偶数集 $= \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; 正奇数集 $= \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z} = \{(-1)^{n+1}[n/2] : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

例题 1.4 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

证明 $f(x) = \tan \dfrac{\pi}{2} x$.

□

例题 1.5 {去掉一点的圆周} $\sim \mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 1.3, 设圆周为 C, 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点 P) 的直线表示实轴 $\mathbb{R}$. 对于 $C - \{P\}$ 上的每一点 c, 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x. 建立一一对应: $s : \mathbb{R} \to C - \{P\}$ 为 $s(x) = c$. (点 P 对应 ∞)

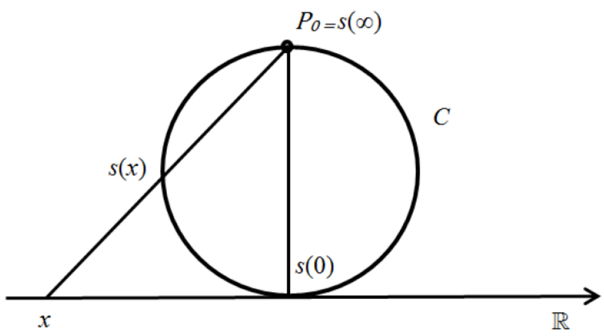

图 1.3: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 1.1

设 A, B 为非空集, 若 $f : A \to B, g : B \to A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

(i) $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$;

(ii) $A_1 \cap A_2 = \varnothing, B_1 \cap B_2 = \varnothing$;

(iii) $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$.

♡

证明 作集族

$$\Gamma = \{E \subset A : E \cap g(B - f(E)) = \varnothing\}$$

Γ 中的元称为 A 中的隔离集. 令 $A_1 = \bigcup\limits_{E\in\Gamma} E$, 则 $A_1 \in \Gamma$. 实际上, 对任意的 $E \in \Gamma$, 都有 $E \subset A_1$, 再由 $E\cap g(B-f(E)) = \varnothing$ 知

$$E \cap g(B - f(A_1)) = \varnothing$$

从而

$$A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \bigcup_{E\in\Gamma}[E \cap g(B - f(E))] = \varnothing$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1 = f(A_1), B_2 = B - B_1, A_2 = g(B_2)$, 则

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap g(B - f(A_1)) = \varnothing$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$, 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾.

□

1.2.3 集合的基数 (势)

定义 1.11 (集合的基数 (势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的**基数或势相同**, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

笔记 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 1.6

(1) 自反性:$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$.
(2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.
(3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$,$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$.

证明 由定理 1.5及集合的基数 (势) 的定义可直接得到.

□

定义 1.12

对于集合 A, B, 若有 $B_0 \subset B$,$A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. 同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.

命题 1.6 (映射与基数之间的关系)

(1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;
(2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$;
(3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1)
(2)
(3)

□

定理 1.7 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:
(1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.
(2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1) 由题设存在单射 $f : A \to B$, $g : B \to A$, 利用引理 1.1可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$
$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 注意到 $f : A_1 \to B_1$, $g^{-1} : A_2 \to B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F : A \to B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$.

(2) 由定义 1.11和定义 1.12可知 (2)⇔(1).

□

例题 1.6 $[-1,1]\sim\mathbb{R}$.

证明 由例题 1.4可知, $\mathbb{R}\sim(-1,1)\subset[-1,1]$; 又 $[-1,1]\sim[-1,1]\subset\mathbb{R}$. 由Bernstein 定理 (1)可知, $[-1,1]\sim\mathbb{R}$.

□

定理 1.8

对于集合 $A,B,\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立.

证明 由定义 1.12可知, 若 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 则 A 与 B 对等, 另外两个不会成立; 假设 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 同时成立, 则存在 $B_0\subset B,A_0\subset A$, 使得 $A\sim B_0,B\sim A_0$. 使用Bernstein 定理 (1)得出 $A\subset B$, 进而 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 显然矛盾, 证毕.

□

定义 1.13 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n, 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}}=n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\varnothing}}=0$.

笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 1.9

设 A 是非空集合, 则

(1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.

(2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.

笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设 $\overline{\overline{A}}=n$, 用数学归纳法证明, $n=1$, 显然. 假设 $n=k$ 时, 结论成立.

当 $n=k+1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A\sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi:A\to A_0$. 下面分两种情况:

(i) $\exists a\in A$, 使得 $\varphi(a)=a$.

令 $A_1=A-\{a\}$, $A_2=A_0-\{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}}=k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1\sim A_2$. 这与假设矛盾.

(ii) $\forall a\in A$, 都有 $\varphi(a)\neq a$.

A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0\in A$, $x_0\notin A_0$. 令

$$A_3=A-\{x_0\},\quad A_4=A_0-\{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0\notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0)\in A_0\subset A,\quad \varphi(x_0)\neq x_0$$

故 $\varphi(x_0)\in A-\{x_0\}=A_3$, 而 $\varphi(x_0)\notin A_0-\{\varphi(x_0)\}=A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}}=k$, $\varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3\sim A_4$. 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$. 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1. 因为 A 是无限集, 集 $A-\{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A-\{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样, $A-\{a_1,a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 $a_1,a_2,\cdots$, 记余集为 $\hat{A}=A-\{a_n|n=1,2,\cdots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2,a_3,\cdots\}\cup\hat{A}=\tilde{A}$$

现作 A 与 $\tilde{A}$ 之间的映射 φ:

$$\varphi(a_i)=a_{i+1},\quad i=1,2,\cdots$$

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 $\tilde{A}$ 上的一一对应, 证毕.

再证 (1)(2) 的充分性.

(1) 的充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 的充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 是不是有限集. 故 A 一定是无限集.

□

1.3 可列集与不可列集

1.3.1 可列集

定义 1.14 (可列集)

与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集合称为**可列集**, 其基数记为 $\aleph_0$(读作阿列夫零). 有限集和可列集统称为**可数集**.

命题 1.7

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 A 可列, 则存在 $\mathbb{N}$ 到 A 的一一映射 φ, 记为 $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 $\mathbb{N}$ 对等, 从而是可列集

□

命题 1.8 (可列集的性质)

(1) 任何无限集必包含一个可列子集.

(2) 可列集的任何无限子集都是可列集.

(3) 有限集与可列集的并集是可列集.

(4) 有限个可列集的并集是可列集.

(5) 可列个可列集的并集是可列集.

(6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.

(7) 设 A, B 为可列集, 则 $A \times B$ 是可列集.

(8) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 可列, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 可列.

笔记 (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 $\aleph_0$.

证明

(1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1; 由于 $A - \{a_1\} \neq \varnothing$, 取 $a_2 \in A - \{a_1\}$; 又 $A - \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, 取 $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$; $\cdots\cdots$, 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$, 则 $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$ 为可列集.

(3) 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. 不妨设 $A \cap B = \varnothing$, 则

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\}$$

可列.

(4) 设 $A_k=\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},a_3^{(k)},\cdots\},k=1,2,\cdots,n$ 为可列集，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \quad a_2^{(1)} \quad a_3^{(1)} \quad \cdots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad \cdots\} \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上，取集合后就自动删去了重复元，因为集合内不含重复元)，可得到

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{a_1^{(1)},\cdots,a_1^{(n)},a_2^{(1)},\cdots,a_2^{(n)},a_3^{(1)},\cdots\}$$

可列.

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可列集，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)} \to a_2^{(1)} \to a_3^{(1)} \to a_4^{(1)} \cdots\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\ A_3 &= \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)} \quad a_2^{(n)} \quad a_3^{(n)} \quad a_4^{(n)} \cdots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上，取集合后就自动删去了重复元，因为集合内不含重复元)，可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{a_1^{(1)},a_1^{(2)},a_2^{(1)},\cdots,a_{2n+1}^{(1)},a_{2n}^{(2)},\cdots,a_{2n+1}^{(n)},\cdots\}$$

(依次是下标之和等于 $2,3,\cdots,2n+2,\cdots$) 可列.

(6) 不妨设 $A\cap B=\varnothing$，否则用 $B-A$ 代替 B 即可. A 为无限集，由 (1) 可知，A 包含一个可列子集 A_1. 由于 $A_1\cup B$ 是可列集，故 $A_1\cup B\sim A_1$. 注意到 $(A-A_1)\cap(A_1\cup B)=\varnothing$，则有

$$A\cup B=(A-A_1)\cup A_1\cup B=(A-A_1)\cup(A_1\cup B)\sim(A-A_1)\cup A_1=A.$$

因此，$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.

(7) 由命题 1.7可设 $A=\{x_i\}_{i=1}^{\infty},B=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$，则

$$\begin{aligned} A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\} &= \bigcup_{x\in A}\{(x,y):y\in B\} \\ &= \bigcup_{x\in A}\bigcup_{y\in B}(x,y)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_i,y_j). \end{aligned}$$

由(5)可知，对 $\forall i\in\mathbb{N},\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_i,y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_i,y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明.

□

例题 1.7 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明 $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^-$，其中 $\mathbb{Q}^+,\mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及可列集的性质 (3)和可列集的性质 (4)，只需证明 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots\right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$(除去重复元), 由可列集性质 (5)知 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

□

命题 1.9

实轴 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间至多有可列个.

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 $\mathbb{Q}$ 的一个子集. 又 $\mathbb{Q}$ 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个.

□

例题 1.8 整系数多项式的全体 $\mathbf{P}$ 是可列集.

证明 对每个 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, 令

$$P_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n : a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \cdots, n, a_0 \neq 0\}$$

则

$$P_n \sim \mathbb{Z} - \{0\} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$$

由命题 1.8(8)知 P_n 可列. 又 $\mathbf{P} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$, 由可列集性质知 $\mathbf{P}$ 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集.

□

命题 1.10

$\mathbb{R}$ 上单调函数的间断点至多有可列个.

证明 不妨只讨论 f 是开区间 (a, b) 上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若 $x_0 \in (a, b)$ 是 f 的一个间断点, 则有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 这时 f 在点 x_0 的函数值满足不等式 $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$. 称 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间. 对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设 x_1 是 f 的另一个间断点, 且 $x_0 < x_1$. 我们要证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \varnothing. \tag{1.1}$$

为此在 x_0 和 x_1 之间插入 x, x' 如下:

$$x_0 < x < x' < x_1$$

则有不等式

$$f(x) \leqslant f(x')$$

固定 x', 令 $x \to x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的保不等式性, 得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x')$$

再令 $x' \to x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-)$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-) < f(x_1^+)$$

即所要证明的 (1.1). 这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 而由命题 1.9可知这些跳跃区间至多有可列个. 这就证明了单调函数的间断点至多有可列个.

□

1.3.2 不可列集

定义 1.15 (不可列集)

不是可列集的无限集称为**不可列集**.

定理 1.10

$[0,1]$ 是不可列集.

证明 假设 $[0,1]$ 可列, 则可表示为 $[0,1]=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0,1]$ 三等分为: $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1, 记该区间为 I_1, 则 $x_1 \notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2, 记该区间为 I_2, 则 $x_2 \notin I_2$, $I_2 \subset I_1$; ……, 依次做下去, 可得到一列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \notin I_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) I_n 的长度为 $1/3^n \to 0$, $n \to \infty$.

由闭区间套定理, 存在 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0,1]=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾.

□

定义 1.16

若 $A \sim [0,1]$, 则称 A 具有**连续基数**, 记 $\overline{\overline{A}}=\aleph$.

定理 1.11

对 $\forall a,b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a,b]}}=\overline{\overline{(a,b)}}=\overline{\overline{(a,b]}}=\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\aleph$.

证明 对 $\forall a,b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x)=a+(b-a)x$ 建立了 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a,b]}}=\aleph$. 又 (a,b) 和 $(a,b]$ 与 $[a,b]$ 分别只差一个点和两个点, 由可列集的性质 (6)知 $\overline{\overline{(a,b)}}=\overline{\overline{(a,b]}}=\overline{\overline{[a,b]}}=\aleph$. 最后, 由 § 与 R 对等] 例题1.6以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\overline{\overline{[-1,1]}}=\aleph$.

□

推论 1.1

无理数的基数为 $\aleph$.

证明 记无理数集为 $\mathbb{I}$, 注意到 $\mathbb{I}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$, 且 $\mathbb{Q}$ 可列, 由可列集的性质 (6)可得 $\overline{\overline{\mathbb{I}}}=\overline{\overline{\mathbb{I}\cup\mathbb{Q}}}=\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\aleph$.

□

定理 1.12

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}}=\aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}}=\aleph$.

证明 不妨设 $A_i \cap A_j = \varnothing$. 由于 $\overline{\overline{A_n}}=\aleph$, 则 $A_n \sim (n,n+1]$, 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1,\infty) \sim \mathbb{R}$.

□

定义 1.17

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, ······, C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=(1+1)^n=2^n=2^{\overline{\overline{A}}}$$

更一般地, 设 $\overline{\overline{A}}=\mu$, 定义 $\overline{\overline{2^A}}=2^\mu$.

命题 1.11

设 A,B 都是非空集合, 则 $A\sim B$ 的充要条件是 $2^A\sim 2^B$.

证明 必要性: 由 $A\sim B$ 可知 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 于是 $\overline{\overline{2^A}}=2^{\overline{\overline{A}}}=2^{\overline{\overline{B}}}=\overline{\overline{2^B}}$. 故 $2^A\sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{2^A}}=2^{\overline{\overline{A}}}>2^{\overline{\overline{B}}}=\overline{\overline{2^B}}$, 这与 $2^A\sim 2^B$ 矛盾! 故 $A\sim B$.

□

引理 1.2

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A\sim 2^A$. 进而 $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}}=\overline{\overline{2^A}}=2^{\overline{\overline{A}}}$.

证明 对于每个 $E\in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\in A-E\end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等.

□

定理 1.13

$\aleph=2^{\aleph_0}$.

证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{N}$ 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0,1]$ 对等.

对任意的 $\varphi\in\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f:\varphi\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{3^n},\varphi(n)\in\{0,1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0,1]$ 的单射, 故命题 1.12可知 $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}\leqslant\overline{\overline{(0,1]}}$.

另一方面, 对每一个 $x\in(0,1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},a_n\in\{0,1\}.$$

定义映射

$$g:x\to\varphi\in\mathcal{F}_{\mathbb{N}},\quad \varphi(n)=a_n,\quad n=1,2,\cdots$$

易知, g 是从 $(0,1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由命题 1.12可知 $\overline{\overline{(0,1]}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$.

由Bernstein 定理可知 $\overline{\overline{(0,1]}}=\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$. 再由引理 1.2可得 $\aleph=\overline{\overline{(0,1]}}=\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}=\overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}}=2^{\aleph_0}$.

□

例题 1.9 $\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$.

证明 由定理 1.13及命题 1.11和 $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R}\sim 2^{\mathbb{N}}\sim 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$, 故再由命题 1.5可得 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\sim 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}\sim 2^{\mathbb{Z}}\sim 2^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}$.

□

例题 1.10 用 M 表示 $[0,1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{\overline{M}}=2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0,1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\in[0,1]-E\end{cases}$$

显然, $\chi_E\in M$. 故 $\overline{\overline{M}}\geqslant\overline{\overline{2^{[0,1]}}}=2^{\aleph}$.

另一方面, 对每一个 $f\in M$, 其图像 $\{(x,f(x)):x\in[0,1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{\overline{M}}\leqslant\overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}}=\overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}}=2^{\aleph}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{\overline{M}}=2^{\aleph}$.

□

定理 1.14 (无最大基数定理)

设 A 为非空集, 则 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{2^A}}$.

证明 由于 2^A 中的单元素集与 A 对等, 故 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{2^A}}$.

若存在集合 A 满足 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{2^A}}$, 则存在 $f:A\to 2^A$ 为一一映射. 令

$$B=\{x\in A:x\notin f(x)\}$$

注意到 $\varnothing\in 2^A$, 则存在 $x_0\in A$ 使得 $f(x_0)=\varnothing$, 故 $x_0\notin f(x_0)$. 这说明 $x_0\in B$, 从而 $B\neq\varnothing$.

又 $B\in 2^A$, 则存在 $x_B\in A$ 使得 $f(x_B)=B$. 下面考察 x_B 与 B 的关系: 若 $x_B\in B$, 则 $x_B\notin f(x_B)=B$, 矛盾; 若 $x_B\notin B$, 即 $x_B\notin f(x_B)$, 这又蕴涵 $x_B\in B$, 矛盾.

□

1.4 整数

定理 1.15 (逆归定理)

假设 S 是一个集合,$a\in S$, 并且对于每个 $n\in \boldsymbol{N}$,$f_n:S\to S$ 均是函数, 则存在唯一的函数 $\varphi:\boldsymbol{N}\to S$, 使得 $\varphi(0)=a$ 并且 $\varphi(n+1)=f_n(\varphi(n))(\forall n\in\boldsymbol{N})$.

证明 我们将构作 $\boldsymbol{N}\times S$ 上的一个关系 R, 使得它是满足上述性质的函数 $\varphi:\boldsymbol{N}\to S$ 的图象, 令

$$\mathcal{F}=\{Y\subset\boldsymbol{N}\times S\mid(0,a)\in Y,\text{并且}(n,x)\in Y\Rightarrow(n+1,f_n(x))\in Y(\forall n\in\boldsymbol{N})\}$$

由于 $\boldsymbol{N}\times S\in\mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F}\neq\varnothing$. 令 $R=\bigcap\limits_{Y\in\mathcal{F}}Y$, 则 $R\in\mathcal{F}$. 又设 M 为子集合

$$\{n\in\boldsymbol{N}\mid\text{存在唯一的}x_n\in S,\text{使得}(n,x_n)\in R\}$$

我们归纳证明 $M=\boldsymbol{N}$. 如果 $0\notin M$, 则有 $(0,b)\in R$, 其中 $b\neq a$, 并且集合 $R-\{(0,b)\}\subset\boldsymbol{N}\times S$ 属于 $\mathcal{F}$. 从而 $R=\bigcap\limits_{Y\in\mathcal{F}}Y\subset R-\{(0,b)\}$, 这就导致矛盾. 因此 $0\in M$. 现在假定 $n\in M$(即有唯一的 $x_n\in S$, 使得 $(n,x_n)\in R$), 则 $(n+1,f_n(x_n))\in R$. 如果又有 $(n+1,c)\in R$, 而 $c\neq f_n(x_n)$, 则 $R-\{(n+1,c)\}\in\mathcal{F}$(验证!), 由此又可象上面那样导致矛盾. 因此 $x_{n+1}=f_n(x_n)$ 是 S 中唯一的元素, 使得 $(n+1,x_{n+1})\in R$. 于是由归纳法 (定理 6.1) 可知 $\boldsymbol{N}=M$, 即 $n\longmapsto x_n$ 定义了一个函数 $\varphi:\boldsymbol{N}\to S$, 它的图象为 R. 由于 $(0,a)\in R$, 从而 $\varphi(0)=a$. 对于每个 $n\in\boldsymbol{N}$,$(n,x_n)=(n,\varphi(n))\in R$. 由于 $R\in\mathcal{F}$, 从而 $(n+1,f_n(\varphi(n)))\in R$. 但是 $(n+1,x_{n+1})\in R$. 由 x_{n+1} 的唯一性推出 $\varphi(n+1)=x_{n+1}=f_n(\varphi(n))$.

□

注 如果 A 是非空集合,A 中的序列是一个函数 $\boldsymbol{N}\to A$. 一个序列通常表示成 $\{a_0,a_1,\dots\}$,$\{a_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ 或者 $\{a_i\}$, 其中 $a_i\in A$ 是 $i\in\boldsymbol{N}$ 的象. 类似地, 函数 $\boldsymbol{N}^*\to A$ 也称作序列, 并且表示成 $\{a_1,a_2,\dots\}$,$\{a_i\}_{i\in\boldsymbol{N}^*}$ 或者 $\{a_i\}$, 这些符号在课文中不会引起混乱.