0.1 其他

定理 0.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个域,$m_i, a_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\gcd(m_i, m_j) \mid (a_i - a_j), i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 则存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \pmod{m_i(x)}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

即存在 $k_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) = k_i(x)m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m \in M_n(\mathbb{K})$,$g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_1), g(\boldsymbol{A}_2), \cdots, g(\boldsymbol{A}_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_i)^{-1} = h(\boldsymbol{A}_i)$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 都成立.

证明 证法一:由命题**??**可知, 对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 存在 $h_i \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i). \tag{1}$$

记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i = 1, 2, \cdots, m$. 考虑 $\gcd(n_i, n_j)(i, j \in \{1, 2, \cdots, m\})$, 设 $x_0 \in \mathbb{C}$ 是 $\gcd(n_i, n_j)$ 的根, 则 $(x - x_0)|n_i, n_j$, 即 x_0 是 A_i 和 A_j 的公共特征值. 由命题**??**和命题**??**可知,$h_i(x_0)$ 是 $h_i(A_i)$ 的特征值,$\dfrac{1}{g(x_0)}$ 是 $g^{-1}(A_i)$ 的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i) \Longrightarrow \frac{1}{g(x_0)} = h_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是

$$h_i(x_0) - h_j(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0)} = 0.$$

因此 $(x - x_0)|(h_i - h_j)$. 故在 $\mathbb{C}$ 上就有 $\gcd(n_i, n_j)|(h_i - h_j)$. 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在 $\mathbb{K}$ 上也有 $\gcd(n_i, n_j)|(h_i(x) - h_j(x))$. 于是由中国剩余定理的推广可知, 方程

$$h(x) \equiv h_i(x) \pmod{n_i(x)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

在 $\mathbb{K}$ 上有解. 故存在 $h \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$h(A_i) = h_i(A_i) = g^{-1}(A_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

证法二:记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i = 1, 2, \cdots, m$, 由命题**??**可知

$$(n_i, g) = 1, i = 1, 2, \cdots, m.$$

从而 $(n_1 n_2 \cdots n_m, g) = 1$. 因此存在 $h, k \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$h(x)\, g(x) + n_1(x)\, n_2(x) \cdots n_m(x)\, k(x) = 1.$$

从而

$$h(A_i) = g^{-1}(A_i), i = 1, 2, \cdots, m.$$

□

命题 0.1

设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 $A \sim \widetilde{A}$, 其中 $\widetilde{A}$ 是主对角元都为 0 的上三角阵, 则 A 是幂零矩阵.

证明 由条件可知存在可逆阵 P, 使得 $A = P^{-1}\widetilde{A}P$. 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n = P^{-1}\widetilde{A}^n P = O.$$

故 A 是幂零矩阵. □

例题 0.2 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$AB+A=BA+B.$$

证明:

$$(A-B)^n=0.$$

证明 注意到

$$AB-BA=B-A.$$

由命题??知 A,B 可同时相似上三角化. 不妨设 A,B 都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知 $AB-BA$ 也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知 $A-B$ 是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1知 $A-B$ 是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A-B)^n=0.$$

□

例题 0.3 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A)\triangleq\{P^{-1}AP:P\in\mathbb{R}^{n\times n}\text{是可逆矩阵}\}.$$

证明: $S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 A 在 $\mathbb{C}$ 上一定可对角化.

证明 设 A 的极小多项式为 m, 特征多项式为 p, 则由知 m 无重根. 设 $A_k\in S(A),k=1,2,\cdots$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A})=\lim_{k\to\infty}m(A_k)=0,$$

$$\left|\lambda I-\tilde{A}\right|=\left|\lambda I-\lim_{k\to\infty}A_k\right|=\lim_{k\to\infty}|\lambda I-A_k|=\lim_{k\to\infty}|\lambda I-A|=|\lambda I-A|=p\left(\lambda\right).$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征多项式也是 p,$\tilde{A}$ 极小多项式整除 m, 从而 $\tilde{A}$ 极小多项式也无重根. 因此 $\tilde{A}$ 和 A 有相同的特征值且可对角化, 故 $\tilde{A}\in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知,A 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于下列分块对角矩阵:

$$\widetilde{J}=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1),\cdots,J_{r_k}(\lambda_k),\widetilde{J}_{s_1}(a_1,b_1),\cdots,\widetilde{J}_{s_l}(a_l,b_l)\},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k,a_1,b_1,\cdots,a_l,b_l$ 都是实数,$b_1,\cdots,b_l$ 都非零, 且 λ_j 都是 A 的实特征值,$a_j\pm \mathrm{i}b_j$ 都是 A 的复特征值,$J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示以 λ_i 为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j=-2a_j,d_j=a_j^2+b_j^2,\quad R_j=\begin{pmatrix}0&-d_j\\1&-c_j\end{pmatrix},C_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_{s_j}(a_j,b_j)=\begin{pmatrix}R_j&C_2&&&\\&R_j&C_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&R_j&C_2\\&&&&R_j\end{pmatrix}.$$

对于 $J_{r_j}(\lambda_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}\left(\lambda_j\right)\sim\begin{pmatrix}\lambda_j&\frac{1}{n}&&\\&\lambda_j&\ddots&\\&&\ddots&\frac{1}{n}\\&&&\lambda_j\end{pmatrix}\triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j),\forall n\in\mathbb{N}.$$

对于 $\widetilde{J}_{s_j}(a_j,b_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}\left(a_j,b_j\right)\sim\begin{pmatrix}0 & -d_j & & & & & & & & \\ 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & & & & \\ & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -d_j & & & \\ & & & & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & \\ & & & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & & & 1 & -c_j\end{pmatrix}\triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j,b_j),\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A\sim\widetilde{J}\sim\mathrm{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}\triangleq\widetilde{J}^{(n)},\forall n\in\mathbb{N}.$$

故 $\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$. 因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S\left(A\right)$. 不难发现

$$\lim_{n\to+\infty}J_{r_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}\lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j\end{pmatrix},$$

$$\lim_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}0 & -d_j & & & & & \\ 1 & -c_j & & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & \\ & & 1 & -c_j & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_j & & & \\ & R_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_j\end{pmatrix},$$

注意到 R_j 的极小多项式等于

$$x^2+c_jx+d_j=(x-a_j)^2+b_j^2=\left(x-a_j-\mathrm{i}b_j\right)\left(x-a_j+\mathrm{i}b_j\right)$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上无重根, 故 R_j 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上也可对角化. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}=\mathrm{diag}\{\lim_{n\to+\infty}J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S\left(A\right)$, 故 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}$. 因此 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. □

例题 0.4 设 $n\geq 2,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称矩阵, $v\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$. 证明:

$$\mathrm{tr}(A^TA)\geq\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2}-\frac{1}{n-1}[\mathrm{tr}(A)]^2.$$

证明 不妨设 A 为实对角矩阵, 即

$$A=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n.$$

现在再设 $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\geq\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^nv_i^2}-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2.$$

不妨设 λ_1 是 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant 0\\ \Longleftrightarrow&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\right)\geqslant 0\\ \Longleftrightarrow&\frac{1}{2n-2}\lambda_1^2+\frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2+\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\geqslant 0\\ \Longleftrightarrow&\lambda_1^2+2n\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2+4\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2}$$

上述关于 λ_i 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2\\2&2n&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&2n\end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-2\\-2&\lambda-2n&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2&-2&\cdots&\lambda-2n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-2\\-\lambda-1&\lambda-2n+2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\lambda-1&0&\cdots&\lambda-2n+2\end{vmatrix}\\ &\xlongequal{\text{“爪”型行列式}}(\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1}-2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2}\\ &=(\lambda-2n+2)^{n-2}\left[(\lambda-1)(\lambda-2n+2)-2(n-1)(\lambda+1)\right]\\ &=(\lambda-2n+2)^{n-2}\lambda(\lambda-4n+3).\end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0,4n-3,\underbrace{2n-2,2n-2,\cdots,2n-2}_{n-2\text{个}}.\quad(n\geqslant 2)$$

故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2).
□

命题 0.2

设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^3$ 且 $\alpha\neq 0$. 若 $A\in\mathbb{Q}^{3\times 3}$ 满足

$$A\alpha=\beta,A\beta=-\gamma,A\gamma=\alpha-\beta\Longleftrightarrow A\alpha=\beta,A\beta=\gamma,A\gamma=\alpha+\beta.$$

证明:α,β,γ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

证明 若 α,β 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关, 则存在 $k\in\mathbb{Q}$, 使得 $\beta=k\alpha$. 从而由条件可得

$$A\alpha=\beta=k\alpha\Longrightarrow A\beta=kA\alpha=k^2\alpha=-\gamma\Longrightarrow A\gamma=\alpha-\beta=(1-k)\alpha=-k^2A\alpha=-k^3\alpha.$$

于是就有 $\left(k^3-k+1\right)\alpha=0$. 又 $\alpha\neq 0$, 故 $k^3-k+1=0$. 但这个方程没有有理根, 矛盾! 故 α,β 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

若 α,β,γ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关, 则存在 $a,b\in\mathbb{Q}$, 使得 $\gamma=a\alpha+b\beta$. 由条件可得

$$A\gamma=\alpha-\beta=aA\alpha+bA\beta=a\beta-b\gamma=a\beta-b\left(a\alpha+b\beta\right)=-ab\alpha+\left(a+b^2\right)\beta.$$

因此

$$ab=1,\quad a+b^2=-1\Longrightarrow a+\frac{1}{a^2}=-1\Longrightarrow a^3-a^2+1=0,$$

而上式无有理根, 矛盾! 故 α,β,γ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. □

例题 0.5 设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上 4 维空间,φ 是 V 上的线性变换. 若

$$\alpha_i\in V, i=1,2,3,4,5.$$

且满足

$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_4\neq\alpha_1+\alpha_2,\quad \varphi\alpha_1=\alpha_2,\quad \varphi\alpha_2=\alpha_3,$$
$$\varphi\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\quad \varphi\alpha_4=\alpha_5,\quad \varphi\alpha_5=\alpha_3+\alpha_4.$$

求 $\det\varphi$.

证明 由命题 0.2可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 若 $\alpha_4\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 设 $\alpha_4=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3,\quad a,b,c\in\mathbb{Q}$. 由条件可得

$$\varphi\alpha_4=\alpha_5\Longrightarrow\varphi^2\alpha_4=\varphi\alpha_5=\alpha_3+\alpha_4=a\alpha_1+b\alpha_2+(c+1)\alpha_3,$$

$$\varphi^2\alpha_4=\varphi^2(a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3)=\varphi\left(c\alpha_1+(a+c)\alpha_2+b\alpha_3\right)=b\alpha_1+(b+c)\alpha_2+(a+c)\alpha_3.$$

从而

$$a=b\quad,b=b+c,\quad c+1=a+c\Longrightarrow a=b=1,\quad c=0.$$

故 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$ 与条件矛盾! 因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 又因为 V 是 $\mathbb{Q}$ 上 4 维空间, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 就是 V 的一组基. 从而

$$\varphi\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)\begin{pmatrix}0&0&1&x\\1&0&1&y\\0&1&0&z\\0&0&0&m\end{pmatrix},$$

其中 $x,y,z,m\in\mathbb{Q}$. 由条件可知

$$\varphi^2\alpha_4=\varphi\alpha_5=\alpha_3+\alpha_4.$$

于是 $\varphi^2\alpha_4$ 的在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标就是

$$\begin{pmatrix}0&0&1&x\\1&0&1&y\\0&1&0&z\\0&0&0&m\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}z+xm\\x+z+ym\\y+zm\\m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

解得 $(x,y,z,m)^T=(-1,0,1,1)^T$ 或 $(1,2,1,-1)^T$. 故

$$\det\varphi=\begin{vmatrix}0&0&1&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-1\text{或}\begin{vmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=1.$$

□

例题 0.6 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且满足对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $|A^k+I_n|=1$. 证明 A 是幂零矩阵.

笔记 证明的想法类似于定理**??**.

注 实际上, 由知(6)式只需要对 $k=1,2,\cdots,2^n-1$ 成立, 就可以得到结论成立. 见例题 0.7.

证明 事实上设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j^k)=1,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

实际上有

$$1=\prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j)=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{4}$$

展开(3)得

$$1=\prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j^k)=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i^k\lambda_j^k+\cdots+\lambda_1^k\lambda_2^k\cdots\lambda_n^k. \tag{5}$$

将(4)中右边除 1 以外的每项看成 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$, 由(5)(3)得

$$y_1^k+y_2^k+\cdots+y_{2^n-1}^k=0,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

由 Netwon 公式得 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 所有初等对称多项式为 0. 从而由 Vieta 定理知 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 是多项式 $y^{2^n-1}=0$ 的全部根. 这就给出了

$$y_i=0,i=1,2,\cdots,2^n-1\Rightarrow\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,n,$$

因此由命题**??**知 A 是幂零矩阵. □

例题 0.7 设 A 是 3 阶复矩阵, 对 $k=1,2,\cdots,7$, 我们有

$$|I+A^k|=1,$$

证明 A 是幂零矩阵, 并问 k 是否可只取 $1,2,\cdots,6$.

笔记 反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

证明 事实上, 设 $\lambda_i,i=1,2,3$ 是 A 的特征值, 那么

$$(1+\lambda_1^k)(1+\lambda_2^k)(1+\lambda_3^k)=1,k=1,2,\cdots,7.$$

于是我们有

$$(1+\lambda_1^k)(1+\lambda_2^k)(1+\lambda_3^k)=1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k=0,k=1,2,\cdots,7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由 Netwon 公式他们是 $\lambda^7=0$ 的七个根 (类似例题 0.6), 因此我们推出了

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

这就说明了 A 幂零.

如果 k 只能取 $1,2,3\cdots,6$, 反例可取

$$A=\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{7}} & 0 & 0\\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{7}} & 0\\ 0 & 0 & e^{\frac{8\pi i}{7}}\end{pmatrix}.$$

□

例题 0.8 设 f,g 是互素多项式且 A 是一个 n 阶矩阵, 证明 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n.

笔记 这题也可以用 Jordan 标准型解决, 可以得到 $f(A),g(A)$ 的 0 特征值的个数即代数重数之和为 n, 从而 $n-r(f(A))+n-r(g(A))=n$, 故结论得证.

证明 由裴蜀等式, 存在多项式 a,b 使得 $af+bg=1$. 于是

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} f(A) & b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A) & a(A)f(A)+b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

即 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n. □

例题 0.9 设 A 是 n 阶幂零矩阵,B 是 n 阶方阵满足 $AB=BA$ 且 $r(AB)=r(B)$, 证明 $B=0$.

证明 由命题**??**知 $AB=BA$ 表明 $\operatorname{Im}B$ 是 A 不变子空间. 于是可以考虑 $A|_{\operatorname{Im}B}$, 显然 $\operatorname{Im}A\mid_{\operatorname{Im}B}=\operatorname{Im}AB$. 由维数公式有

$$\dim\operatorname{Im}B=\dim\ker A|_{\operatorname{Im}B}+\dim\operatorname{Im}AB=\dim\ker A|_{\operatorname{Im}B}+\dim\operatorname{Im}B,$$

即 $\ker A|_{\operatorname{Im}B}=0$. 现在 $A|_{\operatorname{Im}B}$ 也是 $\operatorname{Im}B$ 上的单射. 由推论**??**知 $A|_{\operatorname{Im}B}$ 是双射. 又因为双射的复合还是双射, 所以 $(A|_{\operatorname{Im}B})^n=A^n|_{\operatorname{Im}B}=0$ 也是双射. 从而可知 $\operatorname{Im}B=0$, 这就完成了证明. □

例题 0.10 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(AB-BA+I)=1$, 证明

$$\operatorname{tr}(ABAB)-\operatorname{tr}(A^2B^2)=\frac{n(n-1)}{2}. \tag{7}$$

证明 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 使得 $AB-BA+I=\alpha\beta^T$, 于是我们有

$$n=\operatorname{tr}(AB-BA+I)=\operatorname{tr}(\alpha\beta^T)=\operatorname{tr}(\beta^T\alpha)$$

现在

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left((AB-BA)^2\right)&=\operatorname{tr}(ABAB-AB^2A-BA^2B+BABA)\\
&=\operatorname{tr}(ABAB-A^2B^2-A^2B^2+ABAB)\\
&=2\operatorname{tr}(ABAB-A^2B^2)=\operatorname{tr}\left((\alpha\beta^T-I)^2\right)
\end{aligned}
$$

利用定理**??**, 我们有 $\alpha\beta^T$ 特征值为 $\beta^T\alpha,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1}$. 故 $(\alpha\beta^T-I)^2$ 特征值为 $(\beta^T\alpha-1)^2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1}$. 于是

$$\operatorname{tr}(ABAB)-\operatorname{tr}(A^2B^2)=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

□

例题 0.11 设 n 为奇数, 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

不为 0.

笔记 行列式 $\bmod p$ 技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

注 行列式左上角元素不变的原因:(1) 对行列式整体做 mod2 运算, 左上角元素无论变化还是不变都不影响行列式

的值, 因为此时行列式是个对角阵, 其值只与对角元有关.

(2) 我们在有限域 $\mathbb{Z}_w$ 上考虑行列式 D, 这样 $3=5=\cdots=1, 2=4=\cdots=0$, 因此无论各个元素的形式如何, 最终的结果是一样的, 都等于 1. 故 D 的值不可能是 0!

证明 我们将行列式 D 的元素 mod2, 因为 $(n+1)^n$ 是偶数, 所以

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

这个行列式当然就是对角线之积 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n\cdot n^2\cdots n^n$ 还是奇数, 故 $D=2k+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n\cdot n^2\cdots n^n (k\in\mathbb{Z})$, 奇数加偶数当然还是奇数. 因此行列式 D 也是奇数, 所以 D 不为 0. 证毕! □

例题 0.12 设 $n\geqslant 3$ 阶矩阵 $A=(a_{ij}), a_{ij}=\begin{cases} 3i, & i=j \\ 3i+1, & i<j \\ 2-3j, & i>j \end{cases}$ 证明 $\det A$ 是 3 的倍数当且仅当 n 是奇数.

笔记 mod$p$ 技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

证明 我们在有限域 $\mathbb{Z}_3$ 上考虑矩阵 A, 即

$$A=(a_{ij}), a_{ij}=\begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i<j \\ 2, & i>j \end{cases},$$

故 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}$.(行列式 A 的计算可见命题**??**, 下面计算用的是大拆分法) 现在定义

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x+1 & \cdots & x+1 \\ x+2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+1 \\ x+2 & \cdots & x+2 & x \end{vmatrix},$$

则显然 f 是关于 x 的一次函数且

$$f(-1)=(-1)^n, f(-2)=(-2)^n \Rightarrow f(x)=((-1)^n-(-2)^n)(x+1)+(-1)^n.$$

现在

$$|A|=f(0)=2(-1)^n-(-2)^n=\begin{cases} 2-4^m, & n=2m \\ -2+2^{2m-1}, & n=2m-1 \end{cases},$$

注意到

$$4\equiv 1 \ (\mathrm{mod}3) \Rightarrow 4^m\equiv 1 \ (\mathrm{mod}3) \Rightarrow 2-4^m\equiv 1 \ (\mathrm{mod}3),$$

以及

$$4\equiv 1 \ (\mathrm{mod}3) \Rightarrow 2^{2m-2}\equiv 1 \ (\mathrm{mod}3) \Rightarrow 2(2^{2m-2}-1)\equiv 0 \ (\mathrm{mod}3) \Rightarrow -2+2^{2m-1}\equiv 0 \ (\mathrm{mod}3),$$

这就完成了证明. □

例题 0.13 设 A, B 为正定矩阵, 证明关于 X 的矩阵方程 $AX+XA=B$ 有唯一解, 且解也为正定矩阵.

证明 考虑映射 $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}, X\mapsto AX+XA$. 由推论**??**知 A 特征值为正, $-A$ 特征值为负. 于是由命题**??**, 我们

知道 $AX=X(-A)$ 只有 0 解, 即 $\ker T=\{0\}$. 因此 T 为单射, 从而由推论??知 T 也是满射. 故矩阵方程 $AX+XA=B$ 有唯一解 X. 此外

$$A^TX^T+X^TA^T=B^T \implies AX^T+X^TA=B,$$

故解 X 是实对称的. 设 $X\alpha=\lambda\alpha,\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\lambda\in\mathbb{R}$. 我们有

$$2\lambda\alpha^TA\alpha=\alpha^TAX\alpha+\alpha^TXA\alpha=\alpha^TB\alpha>0 \implies \lambda=\frac{\alpha^TB\alpha}{2\alpha^TA\alpha}>0,$$

从而由推论??知 X 是正定矩阵. □

例题 0.14 设 $\mathbb{F}$ 是一数域且 $AB=BA$. 设方程组 $ABX=0,AX=0,BX=0$ 的解空间分别是 V,V_1,V_2. 证明 $V=V_1\oplus V_2$ 的充要条件是存在 $C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $CA+DB=I_n$.

证明 初等变换得

$$\begin{pmatrix}A^T & B^T & I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & I_n\end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned}
&\exists C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}, \text{使得} CA+DB=I_n \iff \exists C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}, \text{使得} \begin{pmatrix}C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=I_n\\
&\iff \begin{pmatrix}A^T & B^T\end{pmatrix}X=I_n \text{在} \mathbb{F}^{2n\times n} \text{有解} \iff r\left(\begin{pmatrix}A^T & B^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A^T & B^T & I_n\end{pmatrix}\right)\\
&\iff r\left(\begin{pmatrix}A^T & B^T\end{pmatrix}\right)=n \iff r\left(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right)=n \iff AX=0,BX=0 \text{公共解只有} 0 \text{解}\\
&\iff V_1\bigcap V_2=\{0\}.
\end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道 V_1+V_2 是直和. 由 $AB=BA$ 我们知道 $V_1\oplus V_2\subset V\Rightarrow$, 于是

$$n-r(AB)\geqslant n-r(A)+n-r(B)\Rightarrow r(AB)\leqslant r(A)+r(B)-n.$$

由 Sylvester(西尔维斯特) 不等式我们得

$$n-r(AB)=n-r(A)+n-r(B),$$

即 $V=V_1\oplus V_2$. □

例题 0.15 在 n 维欧式空间 V 中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 $n+1$ 个.

证明 先构造 $n+1$ 个两两夹角为钝角的单位向量. $n=1$ 是显然的, 假定对维数小于 n 为空间, 的确是存在的, 则对 n, 在 V 的一个 $n-1$ 维子空间中取 n 个两两夹角为钝角的向量, 记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量 β. 待定 λ, 使得 $n+1$ 个不同向量

$$\alpha_1-\lambda\beta,\alpha_2-\lambda\beta,\cdots,\alpha_n-\lambda\beta,\beta. \tag{8}$$

两两夹角为钝角. 从而现在我们有

$$\begin{aligned}
&(\alpha_i-\lambda\beta,\beta)=-\lambda<0,\forall i=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow\lambda>0;\\
&(\alpha_i-\lambda\beta,\alpha_j-\lambda\beta)=(\alpha_i,\alpha_j)+\lambda^2<0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n\Leftrightarrow\lambda^2<\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{-(\alpha_i,\alpha_j)\}.
\end{aligned}$$

于是这样的 λ 肯定存在. 又若 $\alpha_i-\lambda\beta=\beta$, 则 $\beta=\dfrac{\alpha_i}{1+\lambda}\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, 矛盾! $\alpha_i-\lambda\beta=\alpha_j-\lambda\beta\Leftrightarrow\alpha_i=\alpha_j$, 这也是矛盾! 于是我们证明了 (8) 中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过 $n+1$ 个. $n=1$ 显然, 假定对维数小于 n 为空间, 的确成立, 在 n 时, 假定有 $n+2$ 个不同的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+2}$ 两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i=\alpha_i-(\alpha_i,\alpha_{n+2})\alpha_{n+2},i=1,2,\cdots,n+1.$$

注意到

$$(\beta_i,\alpha_{n+2})=0, i=1,2,\cdots,n+1;$$
$$(\beta_i,\beta_j)=(\alpha_i,\alpha_j)-(\alpha_i,\alpha_{n+2})(\alpha_j,\alpha_{n+2})<0, 1\leqslant i<j\leqslant n+1,$$

我们有两两夹角为钝角的向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n+1}$ 张成的空间至多是 $n-1$ 维, 由归纳假设, 他应该至多只有 n 个向量两两夹角为钝角, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明. □

例题 0.16 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$ 使得

$$A+t_iB, i=1,2,\cdots,n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A,B 都是幂零矩阵.

证明 定义 $p(\lambda,\mu)\triangleq|\lambda I-A-\mu B|$. 由 $A+t_iB, i=1,2,\cdots,n+1$ 都是幂零矩阵及命题**??**得

$$p(\lambda,t_i)=\lambda^n, i=1,2,\cdots,n+1.$$

对固定的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 注意到不超过 n 次的多项式 $p(\lambda,\mu)-\lambda^n$ 有 $n+1$ 个不同实根 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$, 于是 $p(\lambda,\mu)-\lambda^n\equiv 0$, 即

$$|\lambda I-A-\mu B|=\lambda^n, \forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}.$$

让 $\mu=0$ 得 $|\lambda I-A|=\lambda^n,\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 即 A 是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n\left|\frac{\lambda}{\mu}I-\frac{A}{\mu}-B\right|=\lambda^n,\ \forall\mu>0,\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

把 λ 用 $\mu\lambda$ 替换得

$$\left|\lambda I-\frac{A}{\mu}-B\right|=\lambda^n.$$

让 $\mu\to+\infty$ 得 $|\lambda I-B|=\lambda^n$, 即 B 也是幂零矩阵. □

例题 0.17 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A-E$ 幂零且对某个 $k\in\mathbb{N}$ 有 $A^kB=BA^k$, 证明: $AB=BA$.

证明 由 $A-E$ 幂零可知 A 的特征值为 1, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}J_{n_1}(1)&&&\\&J_{n_2}(1)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{n_s}(1)\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1s}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{ss}\end{pmatrix},$$

其中 $B_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$, $i=1,2,\cdots,s$. 由命题**??**(1) 可知

$$f\left(J_{n_i}^k(1)\right)=J_{n_i}(1),\quad i=1,2,\cdots,s. \tag{9}$$

这里 $J_{n_i}(1)$ 是 n_i 阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 于是由 $A^kB=BA^k$ 及(9)式得, 对 $\forall i,j\in[1,s]\cap\mathbb{N}$, 都有

$$J_{n_i}^k(1)B_{ij}=B_{ij}J_{n_j}^k(1)\Longrightarrow f\left(J_{n_i}^k(1)\right)B_{ij}=B_{ij}f\left(J_{n_j}^k(1)\right)\Longrightarrow J_{n_i}(1)B_{ij}=B_{ij}J_{n_j}(1),$$

故 $AB=BA$. □

例题 0.18 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 A 的不同特征值模长互不相同且 $r(A)=r(A^2)$. 若对某个 $k\in\mathbb{N}$ 有 $A^kB=BA^k$, 证明 $AB=BA$.

证明 由 $r(A)=r(A^2)$ 及定理**??**知,A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 1 阶 Jordan 块的个数有

$$r(A^2)+r(A^0)-2r(A)=n-r(A).$$

因为 $n-r(A)$ 就是 0 特征值的几何重数, 即 A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 Jordan 块只有 $n-r(A)$ 个, 所以 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的. 因此可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}C&O\\O&O\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},$$

其中 C 是 A 的所有非零特征值对应的 Jordan 块组成的分块对角阵. 由条件可得

$$A^kB=BA^k \iff \begin{pmatrix} C^kB_1 & C^kB_2 \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1C^k & O \\ B_3C^k & O \end{pmatrix}.$$

从而 $B_2=B_3=O, C^kB_1=B_1C^k$, 即

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix},\quad C^kB_1=B_1C^k.$$

于是

$$AB=BA \iff \begin{pmatrix} CB_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1C & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff CB_1=B_1C.$$

因此只需证 $CB_1=B_1C$. 现设

$$C=\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},\quad B_1=(B_{ij}),$$

这里 J_{λ_i} 是属于 A 的特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵,λ_i 互不相同. 从而我们有

$$C^kB_1=B_1C^k \iff J_{\lambda_i}^kB_{ij}=B_{ij}J_{\lambda_j}^k,\quad \forall i,j\in[1,s]\cap\mathbb{N}. \tag{10}$$

由条件知 λ_i 的模长互不相同, 从而 $\lambda_i^k\neq\lambda_j^k, \forall i\neq j$. 于是由命题??可知 $J_{\lambda_i}^kX=XJ_{\lambda_j}^k, \forall i\neq j$ 只有零解. 因此再结合(10)式知 $B_{ij}=O, \forall i\neq j$. 故

$$C^kB_1=B_1C^k \iff J_{\lambda_i}^kB_{ii}=B_{ii}J_{\lambda_i}^k,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

由命题??(2) 知, 对 $\forall i\in[1,s]\cap\mathbb{N}$, 都存在次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式 f, 使得

$$f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right)=\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}.$$

进而

$$\begin{aligned} C^kB_1=B_1C^k &\iff J_{\lambda_i}^kB_{ii}=B_{ii}J_{\lambda_i}^k \iff \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right)B_{ii}=B_{ii}\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \\ &\iff f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right)B_{ii}=B_{ii}f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \iff \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}B_{ii}=B_{ii}\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} \iff J_{\lambda_i}B_{ii}=B_{ii}J_{\lambda_i}\quad i=1,2,\cdots,s. \end{aligned}$$

因此 $CB_1=B_1C$, 从而结论得证. □

例题 0.19

证明

□

例题 0.20

证明

□

例题 0.21

证明

□

例题 0.22

证明

□

例题 0.23

证明

□

例题 0.24

证明

□

例题 0.25

证明

□

例题 0.26

证明

□

例题 0.27

证明

□

例题 0.28

证明

□

例题 0.29

证明

□

例题 0.30

证明

□