0.1 惯性定理

0.1.1 实二次型

定理 0.1 (实二次型的规范标准型)

设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2,$$

这个实二次型对应的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定合同于下列对角阵:

$$\operatorname{diag}\{1,\cdots,1;-1,\cdots,-1;0,\cdots,0\}, \tag{1}$$

其中有 p 个 1,q 个 -1,$n-r$ 个零. 进而,f 一定可作变量替换得到

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2. \tag{2}$$

我们将(2)式中的二次型称为 f 的**规范标准型**.

证明 由定理**??**, 任意一个实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 必合同于一个对角阵:

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\},$$

其中 $d_i\neq 0(i=1,\cdots,r)$. 注意到 $\boldsymbol{C}$ 是可逆阵, 故 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 即秩 r 是矩阵合同关系下的一个不变量. 于是我们不妨设实对称阵已具有下列对角阵的形状:

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}.$$

由初等合同变换不难知道, 任意调换 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素得到的矩阵仍与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 因此我们可把零放在一起, 把正项与负项放在一起, 即可设 $d_1>0,\cdots,d_p>0;\ d_{p+1}<0,\cdots,d_r<0$. $\boldsymbol{A}$ 所代表的二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_rx_r^2. \tag{3}$$

再对上述二次型作变量替换, 令

$$\begin{cases} y_1=\sqrt{d_1}x_1,\cdots,y_p=\sqrt{d_p}x_p;\\ y_{p+1}=\sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1},\cdots,y_r=\sqrt{-d_r}x_r;\\ y_j=x_j(j=r+1,\cdots,n), \end{cases}$$

则 (3) 式变为

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

这一事实等价于说 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\operatorname{diag}\{1,\cdots,1;-1,\cdots,-1;0,\cdots,0\}.$$

其中有 p 个 1,q 个 -1,$n-r$ 个零. □

定理 0.2 (惯性定理)

证明(2)式中的数 p 及 $q=r-p$ 是两个合同不变量. 这等价于证明下面的结论.

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元实二次型, 且 f 可化为两个标准型:

$$c_1y_1^2+\cdots+c_py_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ry_r^2,$$
$$d_1z_1^2+\cdots+d_kz_k^2-d_{k+1}z_{k+1}^2-\cdots-d_rz_r^2,$$

其中 $c_i>0,\ d_i>0$, 则必有 $p=k$.

证明 用反证法, 设 $p>k$. 由前面的说明不妨设 c_i 及 d_i 均为 1, 因此

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2. \tag{4}$$

又设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z},$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$. 令

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases}z_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\z_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\cdots\cdots\cdots\\z_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n.\end{cases}$$

因为 $p>k$, 故齐次线性方程组

$$\begin{cases}c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\\c_{k1}y_1+c_{k2}y_2+\cdots+c_{kn}y_n=0,\\y_{p+1}=0,\\\cdots\cdots\cdots\\y_n=0\end{cases}$$

必有非零解 (n 个未知数,$n-(p-k)$ 个方程式). 令其中一个非零解为 $y_1=a_1,\cdots,y_p=a_p,y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$, 把这组解代入 (4) 式左边得到

$$a_1^2+\cdots+a_p^2>0.$$

但这时 $z_1=\cdots=z_k=0$, 故 (4) 式右边将小于等于零, 引出了矛盾. 同理可证 $p<k$ 也不可能. □

定义 0.1

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个实二次型, 若它能化为形如 (2) 式的形状, 则称 r 是该二次型的秩,p 是它的**正惯性指数**,$q=r-p$ 是它的**负惯性指数**,$s=p-q$ 称为 f 的**符号差**.

注 显然, 若已知秩 r 与符号差 s, 则 $p=\dfrac{1}{2}(r+s)$, $q=\dfrac{1}{2}(r-s)$. 事实上, 在 p,q,r,s 中只需知道其中两个数, 其余两个数也就知道了. 由于实对称阵与实二次型之间的等价关系, 我们将实二次型的秩、惯性指数及符号差也称为相应的实对称阵的秩、惯性指数及符号差.

定理 0.3

秩与符号差 (或正负惯性指数) 是实对称阵在合同关系下的全系不变量.

证明 由惯性定理知道, 秩 r 与符号差 s 是实对称阵合同关系的不变量. 反之, 若 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩都为 r, 符

号差都是 s, 则它们都合同于

$$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1;-1,\cdots,-1;0,\cdots,0\},$$

其中有 $p=\frac{1}{2}(r+s)$ 个 1,$q=\frac{1}{2}(r-s)$ 个 -1 及 $n-r$ 个零, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 对正负惯性指数的结论也同样成立. □

0.1.2 复二次型

定理 0.4 (复二次型的规范标准型)

设复二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_rx_r^2,$$

这个复二次型对应的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定合同于下列对角阵:

$$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1;0,\cdots,0\}, \tag{5}$$

其中有 r 个 1, 并且 $r=\mathrm{r}(A)$. 进而,f 一定可作变量替换得到

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2. \tag{6}$$

我们将(6)式中的二次型称为 f 的**规范标准型**.

证明 因为复二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_rx_r^2$$

必可化为

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2,$$

其中 $z_i=\sqrt{d_i}x_i(i=1,2,\cdots,r)$, $z_j=x_j(j=r+1,\cdots,n)$. 所以结论得证. 故复对称阵的合同关系只有一个全系不变量, 那就是秩 r. □