## 0.1 数值计算的误差

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型, 它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的, 因而是近似的. 我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**. 只有实际问题提法正确, 建立数学模型时又抽象、简化得合理, 才能得到好的结果.

由于这种误差难于用数量表示, 通常都假定数学模型是合理的, 这种误差可忽略不计, 在“数值分析”中不予讨论. 在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量, 如温度、长度、电压等, 这些参量显然也包含误差. 这种由观测产生的误差称为**观测误差**, 在“数值分析”中也不讨论这种误差. 数值分析只研究用数值方法求解数学模型产生的误差.

当数学模型不能得到精确解时, 通常要用数值方法求它的近似解, 其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**.

**定义 0.1 (误差和误差限)**

设 $x$ 为准确值,$x^*$ 为 $x$ 的一个近似值, 称 $e^* = x^* - x$ 为近似值的**绝对误差**, 简称**误差**.
误差 $e^*$ 绝对值的一个上界.$\varepsilon^*$ 叫做近似值的**绝对误差限**或**误差限**, 它总是正数.
对于一般情形,$|x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$, 即

$$x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*$$

这个不等式有时也表示为 $x = x^* \pm \varepsilon^*$.

♣

**定义 0.2 (相对误差和相对误差限)**

$x$ 本身的大小. 我们把近似值的误差 $e^*$ 与准确值 $x$ 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 $x^*$ 的**相对误差**, 记作 $e_r^*$. 在实际计算中, 通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}.$$

相对误差也可正可负, 它的绝对值上界叫做**相对误差限**, 记作 $\varepsilon_r^*$, 即 $\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$.

♣

注 相对误差与相对误差限是无量纲的, 而绝对误差与误差限是有量纲的.

注 相对误差 $e_r^*$ 取 $\dfrac{e^*}{x^*}$ 的原因: 在实际计算中, 由于真值 $x$ 总是不知道的, 通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

作为 $x^*$ 的相对误差, 条件是 $e_r^* = \dfrac{e^*}{x^*}$ 较小, 此时

$$\frac{e^*}{x} - \frac{e^*}{x^*} = \frac{e^*(x^* - x)}{x^* x} = \frac{(e^*)^2}{x^*(x^* - e^*)} = \frac{(e^*/x^*)^2}{1 - (e^*/x^*)}$$

是 $e_r^*$ 的平方项级, 故可忽略不计.

**例题 0.1** 当准确值 $x$ 有多位数时, 常常按四舍五入的原则得到 $x$ 的前几位近似值 $x^*$, 例如

$$x = \pi = 3.14159265 \cdots$$

取 3 位 $x_3^* = 3.14, \varepsilon_3^* \leqslant 0.002$,

取 5 位 $x_5^* = 3.1416, \varepsilon_5^* \leqslant 0.000008$,

**定义 0.3 (有效数字)**

若近似值 $x^*$ 的误差限是某一位的半个单位, 该位到 $x^*$ 的第一位非零数字共有 $n$ 位, 就说 $x^*$ 有 $n$ 位**有效数字**. 它可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}), \tag{1}$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,$m$ 为整数, 且

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}. \tag{2}$$

♣

**例题 0.2** 按四舍五入原则写出下列各数的具有 5 位有效数字的近似数:187.9325,0.03785551,8.000033,2.7182818.

**解** 按定义, 上述各数的具有 5 位有效数字的近似数分别是

$$187.93, 0.037856, 8.0000, 2.7183$$

注意 $x = 8.000033$ 的 5 位有效数字近似数是 8.0000 而不是 8, 因为 8 只有 1 位有效数字. □

**例题 0.3** 如果以 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位, 重力常数 $g \approx 9.80\ \mathrm{m/s^2}$; 若以 $\mathrm{km/s^2}$ 为单位,$g \approx 0.00980\ \mathrm{km/s^2}$, 它们都具有 3 位有效数字, 因为按第一种写法

$$|g - 9.80| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

根据 (1) 式, 这里 $m = 0$,$n = 3$; 按第二种写法

$$|g - 0.00980| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

这里 $m = -3$,$n = 3$. 它们虽然写法不同, 但都具有 3 位有效数字. 至于绝对误差限, 由于单位不同结果也不同,$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$,$\varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}\ \mathrm{km/s^2}$. 而相对误差相同, 因为

$$\varepsilon_r^* = 0.005/9.80 = 0.000005/0.00980.$$

**笔记** 这个例题说明有效位数与小数点后有多少位数无关.

**定理 0.1**

设近似数 $x^*$ 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)})$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,$m$ 为整数. 若 $x^*$ 具有 $n$ 位有效数字, 则其绝对误差限

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

反之, 若 $x^*$ 的绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$, 则 $x^*$ 具有 $n$ 位有效数字.

♡

**笔记** 这个定理说明, 在 $m$ 相同的情况下,$n$ 越大则 $10^{m-n+1}$ 越小, 故有效位数越多, 绝对误差限越小.

**证明** 从 (2) 式可得到具有 $n$ 位有效数字的近似数 $x^*$, 其绝对误差限为

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

反之, 若 $x^*$ 的绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$, 则

$$|x - x^*| = \varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

故 $x^*$ 具有 $n$ 位有效数字. □

**定理 0.2**

设近似数 $x^*$ 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}), \tag{3}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,$m$ 为整数. 若 $x^*$ 具有 $n$ 位有效数字, 则其相对误差限

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}.$$

反之, 若 $x^*$ 的相对误差限 $\varepsilon_r^* \leqslant \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$, 则 $x^*$ 至少具有 $n$ 位有效数字.

**笔记** 这个定理说明, 有效位数越多, 相对误差限越小.

**证明** 由 (3) 式可得

$$a_1 \times 10^m \leqslant |x^*| < (a_1+1) \times 10^m$$

当 $x^*$ 具有 $n$ 位有效数字时

$$\varepsilon_r^* = \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leqslant \frac{0.5 \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

反之, 由

$$|x-x^*| = |x^*|\varepsilon_r^* < (a_1+1) \times 10^m \times \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1} = 0.5 \times 10^{m-n+1}$$

故 $x^*$ 至少具有 $n$ 位有效数字. 证毕. □

**定理 0.3**

设两个近似数 $x_1^*$ 与 $x_2^*$ 的误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$, 则它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别满足不等式

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \leqslant \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*),$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \leqslant |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*),$$

$$\varepsilon(x_1^*/x_2^*) \leqslant \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}, \quad x_2^* \neq 0.$$

**证明**

□

**定理 0.4**

1. 设 $f(x)$ 是一元可微函数,$x$ 的近似值为 $x^*$, 以 $f(x^*)$ 近似 $f(x)$, 其误差界记作 $\varepsilon(f(x^*))$, 则函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

2. 设 $f$ 为多元函数时, 令 $A = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值为 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$, 记 $A$ 的近似值为 $A^* = f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, 则 $A^*$ 的误差 $e(A^*)$ 为

$$e(A^*) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^* e_k^*.$$

$A^*$ 的误差限

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right| \varepsilon(x_k^*). \tag{4}$$

而 $A^*$ 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right| \frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

**证明**

1. 由泰勒展开

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x-x^*) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2, \quad \xi \text{ 介于} x, x^* \text{ 之间},$$

取绝对值得

$$|f(x)-f(x^*)| \leqslant |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}\varepsilon^2(x^*).$$

假定 $f'(x^*)$ 与 $f''(x^*)$ 的比值不太大, 可忽略 $\varepsilon(x^*)$ 的高阶项, 于是可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

2. 由泰勒展开得函数值 $A^*$ 的误差 $e(A^*)$ 为

$$\begin{aligned} e(A^*) &= A^*-A = f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &\approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)(x_k^*-x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^* e_k^*, \end{aligned}$$

于是误差限

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*),$$

而 $A^*$ 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

□

**例题 0.4** 已测得某场地长 $l$ 的值为 $l^*=110$ m, 宽 $d$ 的值为 $d^*=80$ m, 已知 $|l-l^*|\leqslant 0.2$ m,$|d-d^*|\leqslant 0.1$ m. 试求面积 $s=ld$ 的绝对误差限与相对误差限.

**解** 因 $s=ld, \dfrac{\partial s}{\partial l}=d, \dfrac{\partial s}{\partial d}=l$, 由 (4) 式知

$$\varepsilon(s^*) \approx \left|\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^*\right|\varepsilon(l^*)+\left|\left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^*\right|\varepsilon(d^*),$$

其中

$$\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^* = d^* = 80 \text{ m}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^* = l^* = 110 \text{ m}.$$

而 $\varepsilon(l^*)=0.2$ m,$\varepsilon(d^*)=0.1$ m, 于是绝对误差限

$$\varepsilon(s^*) \approx 80\times(0.2)+110\times(0.1) = 27\ (\text{m}^2),$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(s^*) = \frac{\varepsilon(s^*)}{|s^*|} = \frac{\varepsilon(s^*)}{l^*d^*} \approx \frac{27}{8800} = 0.31\%.$$

□