

0.1 环的局部化

定义 0.1 (乘法子集)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $S \subset R$. 则我们称 S 是一个**乘法子集**, 若 S 是 $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 的 (乘法) 子么半群, 即

$$\begin{aligned} 0 &\notin S, 1 \in S, \\ \forall a, b \in S, ab &\in S. \end{aligned}$$

定义 0.2 ((交换) 环的局部化)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的**局部化**, 记作 $(S^{-1}R, +, \cdot)$, 定义为

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} : r \in R, s \in S \right\} / \sim$$

其中

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \iff \exists t \in S, t(rs' - r's) = 0$$

若 $r, r' \in R, s, s' \in S$, 我们定义

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} &= \frac{rs' + sr'}{ss'}, \\ \frac{r}{s} \frac{r'}{s'} &= \frac{rr'}{ss'}. \end{aligned}$$

证明 我们先证明 \sim 是个等价关系, 再证明加法和乘法是良定义的.

第一, 我们来证明 \sim 是个等价关系. $r/s \sim r/s$ 是显然的, 这是因为 $1(rs - rs) = 0 (1 \in S)$. 若 $r/s \sim r'/s'$, 则存在 $t \in S$, 使得

$$t(rs' - r's) = 0.$$

则

$$(-t)(r's - rs') = 0.$$

故 $r'/s' \sim r/s$. 最后, 如果 $r/s \sim r'/s', r'/s' \sim r''/s''$, 只须证明 $r/s \sim r''/s''$. 我们取 $t, t' \in S$, 使

$$\begin{aligned} t(rs' - r's) &= 0, \\ t'(r's'' - r''s') &= 0. \end{aligned}$$

则我们可以通过不断的尝试, 凑出一个美妙的 $t'' = tt's'$. 于是 $t''(rs'' - r''s) = 0$, 这是因为

$$(tt's')rs'' = t's''(trs') = t's''(t'r's) = ts(t'r's'') = ts(t'r''s') = (tt's')r''s.$$

由于 S 是乘法子群, 故 $t'' = tt's' \in S$. 接下来, 即使局部化中的每个元素实际上是等价类, 我们还是为了方便起见, 用等号来代替所有的等价号.

第二, 我们来证明加法和乘法是良定义的. 假设

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{s_1} &\sim \frac{r'_1}{s'_1}, \\ \frac{r_2}{s_2} &\sim \frac{r'_2}{s'_2}. \end{aligned}$$

故存在 $t, t' \in S$, 使得

$$\begin{aligned} t(r_1s'_1 - r'_1s_1) &= 0, \\ t'(r_2s'_2 - r'_2s_2) &= 0. \end{aligned}$$

我们只须证明

$$\begin{aligned}\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} &= \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \sim \frac{r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1}{s'_1 s'_2} = \frac{r'_1}{s'_1} + \frac{r'_2}{s'_2}, \\ \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} &= \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \sim \frac{r'_1 r'_2}{s'_1 s'_2} = \frac{r'_1}{s'_1} \cdot \frac{r'_2}{s'_2}.\end{aligned}$$

重新分组, 对于 $tt' \in S$, 我们有

$$\begin{aligned}& tt'((r_1 s_2 + r_2 s_1)s'_1 s'_2 - (r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1)s_1 s_2) \\ &= tt'((r_1 s'_1 - r'_1 s_1)s_2 s'_2 + (r_2 s'_2 - r'_2 s_2)s_2 s'_1) \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

根据拆项补项, 同样对于 $tt' \in S$, 我们有

$$\begin{aligned}& tt'(r_1 r_2 s'_1 s'_2 - r'_1 r'_2 s_1 s_2) \\ &= tt'(r_1 r_2 s'_1 s'_2 - r'_1 r_2 s_1 s'_2) + tt'(r'_1 r_2 s_1 s'_2 - r'_1 r'_2 s_1 s_2) \\ &= tt'(r_1 s'_1 - r'_1 s_1)r_2 s'_2 + tt'(r_2 s'_2 - r'_2 s_2)r'_1 s_1 \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

□

命题 0.1 ((交换) 环的局部化的基本性质)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的局部化, 即 $(S^{-1}R, +, \cdot)$ 满足

- (1) 若 $s \in S$, 则 $\frac{s}{s} \sim \frac{1}{1}$.
- (2) 若 $r, s, s' \in S$, 则 $\frac{rs'}{ss'} \sim \frac{r}{s}$.

▲

证明

- (1) 因为 $1 \cdot (s \cdot 1 - 1 \cdot s) = 0$, 所以根据(交换)环的局部化的定义可知 $\frac{s}{s} \sim \frac{1}{1}$.
- (2) 因为 $1 \cdot (rs's - ss'r) = 0$, 所以根据(交换)环的局部化的定义可知 $\frac{rs'}{ss'} \sim \frac{r}{s}$.

□

命题 0.2 ((交换) 环的局部化还是交换环)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 S 是乘法子集. 则 R 对 S 的局部化, 即 $(S^{-1}R, +, \cdot)$, 是个交换环.

▲

证明 根据定义, 加法和乘法的封闭性和交换律是显然的. 而加法单位元是 $0/1$, 乘法单位元是 $1/1$, 因为对于任何 $r/s \in S^{-1}R$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{0}{1} + \frac{r}{s} &= \frac{0s + 1r}{1s} = \frac{r}{s}, \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{1r}{1s} = \frac{r}{s}.\end{aligned}$$

乘法的结合律是显然的, 而加法的结合律也很简单, 我们很容易检验

$$\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) + \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_1 s_2 s_3 + s_1 r_2 s_3 + s_1 s_2 r_3}{s_1 s_2 s_3} = \frac{r_1}{s_1} + \left(\frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3}\right).$$

加法的逆元也是显然的. r/s 的加法逆元当然是 $(-r)/s$.

最后, 我们只须证明乘法对加法的分配律. 令 $r_1/s_1, r_2/s_2, r_3/s_3 \in S^{-1}R$, 则我们很容易检验

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \left(\frac{r_2}{s_2} + \frac{r_3}{s_3}\right) = \frac{r_1(r_2 s_3 + r_3 s_2)}{s_1 s_2 s_3} = \frac{r_1 r_2 s_3}{s_1 s_2 s_3} + \frac{r_1 r_3 s_2}{s_1 s_2 s_3} = \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} + \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_3}{s_3}.$$

综上所述, 我们就证明了 R 对 S 的局部化 $S^{-1}R$ 是个交换环.

□

命题 0.3

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, 而 S 是一个乘法子集, 则

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0.$$

♠

证明 先证充分性. 假如 $ad - bc = 0$, 那么我们取 $s = 1$, 则 $1(ad - bc) = 1 \cdot 0 = 0$, 这就证明了

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}.$$

再证必要性. 假如 $a/b = c/d$, 则存在 $s \in S$, 使得 $s(ad - bc) = 0$. 由 S 是一个乘法子集可知, $s \neq 0$. 可是因为 R 是个整环, 所以 $ad - bc = 0$.

这就证明了这个命题. □

命题 0.4

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, 则 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集.


♠

证明 显然 $0 \notin R/\{0\}$. 因为 R 是整环, 所以 $R \neq \{0\}$, 从而由命题??可知 $0 \neq 1$, 故 $1 \in R/\{0\}$. 对 $\forall a, b \in R/\{0\}$, 都有 $a, b \neq 0$. 于是 $ab \neq 0$, 否则, 由 R 是整环可知一定有 $a = 0$ 或 $b = 0$ 矛盾! 又因为 $a, b \in R$, 而 R 对乘法封闭, 所以 $ab \in R$. 又 $ab \neq 0$, 故 $ab \in R/\{0\}$. 因此 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集. □

定义 0.3 (分式域)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, 我们定义 R 上的**分式域**, 记作 $\text{Frac}(R)$, 定义为 $(S^{-1}R, +, \cdot)$, 其中 $S = R \setminus \{0\}$.

♣

 **笔记** 由命题 0.4 可知 $R/\{0\}$ 是 R 的一个乘法子集, 从而 $\text{Frac}(R)$ 实际上就是 R 对 $R/\{0\}$ 的局部化 (最大的局部化).

命题 0.5 (分式域是域)

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, 则 R 上的分式域 $\text{Frac}(R)$ 是个域. 进而, $\text{Frac}(R)$ 是 R 的子环.

♠

证明 令 $S = R \setminus \{0\}$.

由(交换)环的局部化还是交换环可知 $\text{Frac}(R) = S^{-1}R$ 是个交换环, 因此只须证明对任意非零元素

$$\frac{r}{s} \in S^{-1}R$$

我们都能找到逆元即可.

而这是因为由

$$\frac{r}{s} \neq 0$$

我们可以得知 $r \neq 0$.

因此,

$$\frac{s}{r} \in S^{-1}R$$

而且

$$\frac{r}{s} \frac{s}{r} = \frac{s}{r} \frac{r}{s} = \frac{sr}{sr} = \frac{1}{1} = 1$$

这就证明了 $\text{Frac}(R)$ 是个域. 进而, $\text{Frac}(R)$ 对单位元、加法、乘法和逆元都封闭. 又因为 $S \subset R$, 所以 $S^{-1}R \subset R$, 故 $\text{Frac}(R)$ 就是 R 的一个子环. □

引理 0.1

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, $s \in R/\{0\}$, 则由 s 生成的乘法子幺半群 $\langle s \rangle$ 是 R 的一个乘法子集.

♥

证明 由命题??可知 $\langle s \rangle = \{1, s, s^2, \dots\}$. 由于 $\langle s \rangle$ 是 (R, \cdot) 的子幺半群, 因此我们只需证 $0 \notin \langle s \rangle = \{1, s, s^2, \dots\}$ (即

证 s 不是幂零的). 已知 $s \neq 0$, 假设 $s^n \neq 0$, 则由 R 是整环可知

$$s^{n+1} = s \cdot s^n \neq 0.$$

故由数学归纳法可知 $s^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. 因此 $0 \notin \langle s \rangle$. 于是 $\langle s \rangle$ 是 R 的一个乘法子集. □

推论 0.1


整环中的任意非零元素都不是幂零的. ♥

证明 设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, $s \in R \setminus \{0\}$, 则由引理 0.1 的证明可知 $s^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. 因此结论得证. □

定义 0.4

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个整环, $s \in R \setminus \{0\}$, 则我们称 $(\langle s \rangle^{-1}R, +, \cdot)$ 是 R 对 s 的局部化. ♣

注 由引理 0.1 可知 $\langle s \rangle$ 是 R 的一个乘法子集, 故上述定义是良定义的.

 **笔记** 整数环 \mathbb{Z} 对 3 的局部化就是 $\langle 3 \rangle^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{m}{3^n} : n \in \mathbb{N}_0\}$.

引理 0.2

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $\mathfrak{p} \triangleleft R$ 是一个素理想, 则 $S = R \setminus \mathfrak{p}$ 是一个乘法子集. ♥

证明 首先, 由 $\mathfrak{p} \triangleleft R$ 是一个素理想可知 $(\mathfrak{p}, +) < (R, +)$, 从而 $0 \in \mathfrak{p}$, 于是 $0 \notin R/\mathfrak{p} = S$.

其次, 若 $1 \in \mathfrak{p}$, 则由命题 ?? 可知 $\mathfrak{p} = R$, 可是素理想根据定义是不能等于整个环的. 因此 $1 \in R/\mathfrak{p} = S$.

接着, 设 $s_1, s_2 \in S = R/\mathfrak{p}$, 我们只须证明 $s_1 s_2 \in S$.

因为 $s_1 \notin \mathfrak{p}, s_2 \notin \mathfrak{p}$, 所以根据 $\mathfrak{p} \triangleleft R$ 是一个素理想及素理想 (第一条性质) 的逆否命题,

$$s_1 s_2 \notin \mathfrak{p}$$

也就是说,


$$s_1 s_2 \in R/\mathfrak{p} = S$$

这就证明了素理想的补集是一个乘法子集. □

定义 0.5

设 $(R, +, \cdot)$ 是一个交换环, 而 $\mathfrak{p} \triangleleft R$ 是一个素理想, 则我们称 $((R/\mathfrak{p})^{-1}R, +, \cdot)$ 是 R 在素理想 \mathfrak{p} 上的局部化, 记作 $R_{\mathfrak{p}}$. ♣

注 由引理 0.2 可知 R/\mathfrak{p} 是 R 的一个乘法子集, 故上述定义是良定义的.

 **笔记** 整数环 \mathbb{Z} 在其素理想 $3\mathbb{Z}$ 上的局部化就是 $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z}\}$.