# 0.1 有限单群

**定义 0.1 (有限单群)**

若有限群 $G$ 无非平凡的正规子群, 则称 $G$ 为**有限单群**.

♣

**定理 0.1**

设 $G$ 为 Abel 群且 $G \neq \{e\}$,$e$ 为 $G$ 的幺元, 则 $G$ 为单群的充分必要条件是 $G$ 的阶为素数. 这时 $G$ 必为循环群.

♡

证明 由命题???? Abel 群 $G$ 的任何子群都是 $G$ 的正规子群, 故 Abel 群 $G$ 为单群当且仅当 $G$ 无非平凡子群.

若 $G$ 是有限阶的, 当 $G$ 的阶为素数时, 由推论????知 $G$ 只有平凡子群. 当 $G$ 无非平凡子群时, 若 $G$ 的阶不是素数, 又 $G \neq \{e\}$, 故 $|G|$ 是不为 1 的合数. 由因式分解定理知存在素数 $p$ 以及正整数 $m, l$, 使 $|G| = p^l m$ 且 $(p, m) = 1$. 从而 $m, l$ 不同时为 1, 否则与 $|G|$ 不为素数矛盾! 故 $|G| > p$. 由 Sylow 第一定理知 $G$ 中一定有 $p$ 阶子群 $H$, 而 $1 < p < |G|$, 故 $H$ 必是 $G$ 的非平凡子群, 矛盾! 因此 $G$ 无非平凡子群当且仅当 $G$ 的阶为素数. 此时, 由命题??知 $\forall a \in G$ 且 $a \neq e$ 有 $G = \langle a \rangle$.

若 $G$ 是无限阶的, 则 $\langle a \rangle \lhd G (\forall a \in G, a \neq e)$. 若 $\langle a \rangle$ 是有限阶的, 则 $\langle a \rangle$ 是非平凡的. 若 $\langle a \rangle$ 是无限阶的, 则 $\langle a^2 \rangle$ 是非平凡的, 因为 $a, -a \notin \langle a^2 \rangle$. 即任何无限阶的 Abel 群都有非平凡的正规子群. 故此时 $G$ 必不是单群.

□

**定理 0.2**

(1) 当 $n \geqslant 3$ 时,$A_n$ 由所有的 3 轮换生成, 即 $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$;

(2) 当 $n \geqslant 5$ 时, 任意 3 轮换 $(ijk)$ 在 $A_n$ 中的共轭类由所有的 3 轮换构成, 即

$$C_{(ijk)} = \{(i'j'k') \mid i', j', k' = 1, 2, \cdots, n\}.$$

♡

证明

(1) 由推论??知 $a \in A_n$ 当且仅当 $a$ 可表示为偶数个对换之积. 由推论??知

$$\langle \{(ijk)\} \rangle = \{(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \mid i_s, j_s, k_s \in \{1, 2, \cdots, n\}, 1 \leqslant s \leqslant m, m \in \mathbb{N}\}.$$

设 $i, j, k, l$ 且互不相等. 由

$$(ij)(ij) = \mathrm{id}, \quad (ij)(ik) = (ikj),$$

$$(ik)(jl) = (ik)(ij)(ij)(jl) = (ijk)(jli)$$

知 $A_n$ 中元素都可写成 3 轮换之积, 因此 $A_n \subseteq \langle \{(ijk)\} \rangle$.

设 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in \langle \{(ijk)\} \rangle$, 则由命题????知

$$(i_s j_s k_s) = (i_s k_s)(i_s j_s), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

故 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m)$ 可写成偶数个对换之积, 故 $(i_1 j_1 k_1) \cdots (i_m j_m k_m) \in A_n$. 因此 $\langle \{(ijk)\} \rangle \subseteq A_n$. 故 $A_n = \langle \{(ijk)\} \rangle$.

(2) $\forall \sigma \in S_n$, 由命题????知

$$\sigma(ijk)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)). \tag{1}$$

于是 $C_{(ijk)} \subseteq \{(i'j'k')\}$. 反之, 对任意 3 轮换 $(i'j'k')$, 当 $n \geqslant 5$ 时, 首先 $\exists \sigma \in S_n$, 使 $\sigma(i) = i', \sigma(j) = j', \sigma(k) = k'$. 若 $\sigma \in A_n$, 则由(1)式可得

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = \sigma(ijk)\sigma^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

若 $\sigma \notin A_n$, 由 $n \geqslant 5$ 有 $i_1, i_2 \notin \{i, j, k\}$. 故由推论??知 $\sigma(i_1 i_2) \in A_n$. 再由命题????知

$$(i'j'k') = (\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)) = ((\sigma(i_1 i_2)(i))(\sigma(i_1 i_2)(j))(\sigma(i_1 i_2)(k))) = \sigma(i_1 i_2)(ijk)(\sigma(i_1 i_2))^{-1} \in C_{(ijk)}.$$

即仍有 $(i'j'k') \in C_{(ijk)}$. 综上知 $C_{(ijk)} = \{(i'j'k')\}$.

□

**定理 0.3**

当 $n \geqslant 5$ 时,$A_n$ 是非 Abel 有限单群.

♡

**证明** 对 $\alpha \in S_n$, 令 $\bar{F}_\alpha = \{j \mid \alpha(j) \neq j\}$. 显然有

(1) $\bar{F}_\alpha = \{i, j\}$ 当且仅当 $\alpha = (ij)$;

(2) $\bar{F}_\alpha = \{i, j, k\}$ 当且仅当 $\alpha = (ijk)$或$(ijk)^{-1}$;

(3) 对 $\forall \alpha \in A_n$ 且 $\alpha \neq \mathrm{id}$, 又由推论**??**知 $\alpha$ 可写成偶数个对换之积, 从而一定有 $|\bar{F}_\alpha| \geqslant 3$.

设 $H \lhd A_n$ 且 $H \neq \{\mathrm{id}\}$. 取 $\tau \in H$, 使

$$|\bar{F}_\tau| = \min\{|\bar{F}_\alpha| \mid \alpha \in H, \alpha \neq \mathrm{id}\}. \tag{2}$$

显然 $|\bar{F}_\tau| \geqslant 3$. 若 $|\bar{F}_\tau| = 3$, 则 $\tau$ 是 3 轮换. 显然 $\tau \in H$, 由正规子群定义和定理**????**知

$$\alpha\tau\alpha^{-1} \in H,\ \forall \alpha \in A_n \implies C_\tau = \{\alpha\tau\alpha^{-1} \mid \alpha \in A_n\} \subseteq H.$$

再由定理 0.2(1)和定理 0.2(2)知

$$A_n = \langle\{(ijk)\}\rangle \subseteq \{(ijk) \mid i, j, k = 1, 2, \cdots, n\} = C_\tau \subseteq H,$$

故 $H = A_n$. 这就证明了 $A_n$ 为有限单群. 又 $A_n$ 的阶不是素数, 故由定理 0.1知 $A_n$ 不是 Abel 群.

若 $|\bar{F}_\tau| > 3$. 由定理**????**, 可将 $\tau$ 分解为不相交轮换之积, 分两种情况讨论. 一种在分解中只出现对换, 另一种在分解中有长度大于 2 的轮换.

(a) 若 $\tau$ 可分解为互不相交的对换之积, 又由最开始得到的情况 (1)知 $\tau$ 不可能是对换, 故可设 $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots$ 且 $i_1, i_2, i_3, i_4, \cdots$ 互不相同. 由 $n \geqslant 5$ 有 $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$, 令 $\phi = (i_3i_4j)$, 则由推论**??**知 $\phi \in A_n$. 由 $H \lhd A_n$ 有 $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$. 于是由命题**????**可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(i_4)\tau^{-1}(j))(i_4i_3j) = (i_4i_3\tau^{-1}(j))(i_4i_3j).$$

若 $j \notin \bar{F}_\tau$, 即 $\tau(j) = \tau^{-1}(j) = j$. 则有

$$\tau_1 = (i_4i_3j)(i_4i_3j) = (i_3i_4j),$$

这时 $|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j\}| = 3 < |\bar{F}_\tau|$, 这与(2)式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾!

若 $j \in \bar{F}_\tau$, 则 $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots\left(j\tau^{-1}(j)\right)\cdots$ 且 $i_1, i_2, i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)$ 互不相同. 由 $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$ 知 $|\bar{F}_\tau| \geqslant 5$, 又 $\tau$ 可写成对换之积, 故 $|\bar{F}_\tau|$ 必为偶数, 因此 $|\bar{F}_\tau| \geqslant 6$. 此时由命题**????**可得

$$(i_4i_3\tau^{-1}(j))(i_4i_3j) = \left(i_4\tau^{-1}(j)\right)(i_4i_3)(i_4i_3j) = \left(i_4\tau^{-1}(j)\right)(i_4)(i_3j) = \left(i_4\tau^{-1}(j)\right)(i_3j).$$

于是

$$|\bar{F}_{\tau_1}| = |\{i_3, i_4, j, \tau^{-1}(j)\}| = 4 < |\bar{F}_\tau|.$$

这也(2)式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾! 因而 $\tau = (i_1i_2)(i_3i_4)\cdots$ 是不可能的.

(b) 设 $\tau$ 的分解中有长度大于 2 的轮换, 即

$$\tau = (i_1i_2i_3\cdots)\cdots.$$

因为 $(i_1i_2i_3i_4)$ 为奇置换, 故 $\tau \neq (i_1i_2i_3i_4)$, 由此知 $|\bar{F}_\tau| > 4$, 即 $|\bar{F}_\tau| \geqslant 5$. 因而存在 $j, k \neq i_1, i_2, i_3$, 使 $j, k \in \bar{F}_\tau$. 令 $\phi = (i_3jk)$,$\tau_1 = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}$, 由 $H \lhd A_n$ 有 $\tau_1 = \tau^{-1}(\phi\tau\phi^{-1}) \in H$. 于是由命题**????**可得

$$\tau_1 = (\tau^{-1}\phi\tau)\phi^{-1} = (\tau^{-1}(i_3)\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(ji_3k) = (i_2\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k))(ji_3k).$$

由 $i_1, i_2, i_3, j, k \in \bar{F}_\tau$ 知

$$\bar{F}_{\tau_1} = \left\{i_2, i_3, j, k, \tau^{-1}(j), \tau^{-1}(k)\right\} \subseteq \bar{F}_\tau.$$

(注意上式中 $\tau^{-1}(j), \tau^{-1}(k)$ 可能等于 $i_1, i_2, i_3$) 又注意到

$$\tau_1(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau\phi^{-1}(i_1) = \tau^{-1}\phi\tau(i_1) = \tau^{-1}\phi(i_2) = \tau^{-1}(i_2) = i_1,$$

即 $i_1 \notin \bar{F}_{\tau_1}$, 但 $i_1 \in \bar{F}_\tau$, 则有 $\bar{F}_{\tau_1} \subset \bar{F}_\tau$, 亦即 $|\bar{F}_{\tau_1}| < |\bar{F}_\tau|$. 这也与(2)式中 $|\bar{F}_\tau|$ 的最小值定义矛盾! 故 $|\bar{F}_\tau| = 3$. 综上可知 $H = A_n$, 即 $A_n$ 为单群.

□

**命题 0.1**

对于 $n \leqslant 4, A_n$ 的结构为

(1) $A_1 = A_2 = \{\mathrm{id}\}$;

(2) $A_3 = \langle(123)\rangle$ 为三阶循环群;

(3) $A_4$ 的阶为 12, $A_4$ 含有一个非平凡的正规子群

$$\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

此群与 **Klein 四元数群**同构, 也记为 $K_4$, 而且 $K_4$ 也是 $S_4$ 的正规子群. ♠

证明

□