0.1 分部积分

分析学里流传着一句话: "遇事不决分部积分".

分部积分在渐近分析中的用法:

(1) 有时候分部积分不能计算出某一积分的具体值, 但是我们可以利用分部积分去估计原积分 (或原含参积分) 的范围. 并且我们可以通过不断分部积分来提高估计的精确程度.

(2) 分部积分也可以转移被积函数的导数.

(3) 分部积分可以改善阶. 通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计. 并且可以通过反复分部积分得到更加精细的估计.

定理 0.1 (Newton-Leibniz 公式)

1. 若 $f \in \mathbf{R}[a,b]$, 且有原函数 F, 则有
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$
2. 若函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分收敛, 且有原函数 F, 则有
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a).$$
若函数 f 在 $(-\infty,a]$ 上无穷积分收敛, 且有原函数 F, 则有
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(-\infty).$$
若函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分收敛, 且有原函数 F, 则有
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty).$$

定理 0.2 (分部积分公式)

1. 设函数 u,v 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则
$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. 设函数 u,v 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ 存在. 若 $u'v$ 和 uv' 中有一个在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分收敛, 则另一个在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分也收敛, 且
$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 广义积分的分部积分公式形式上与常义积分的分部积分公式一样, 既可用来计算 (已知收敛的) 广义积分, 也能用来证明广义积分收敛.

例题 0.1
$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 \mathrm{d}t.$$
证明 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}, x > 0.$

笔记 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (1).

证明 由分部积分可得, 对 $\forall x > 0$, 都有
$$|f(x)| = \left|\int_x^{x+1} \sin t^2 \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right| = \left|-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}}\cos u\,\mathrm{d}u - \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\right| + \left|\frac{\cos x}{2x} - \frac{\cos(x+1)}{2(x+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(x+1)}{(x+1)}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x[\cos x - \cos(x+1)] + \cos x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{2x+1}{2} + \cos x}{2x(x+1)} \\
&\leqslant \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x+1}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.2 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b],\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x &= b\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\leqslant b\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.3 设 $f(x) = \int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y$, 求 $f'(0)$.

笔记 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (3).

解 注意到

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}}\sin y\mathrm{d}\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y}{x} \xlongequal{令t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y, \tag{1}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}}\sin y\mathrm{d}\frac{1}{y}}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y}{x} \xlongequal{令t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to-\infty} t\int_t^{-\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y. \tag{2}$$

由分部积分可得

$$\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y = -\int_t^{+\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}\cos y = \frac{\cos y}{y^2}\Big|_{+\infty}^{t} + \int_t^{+\infty}\cos y\mathrm{d}\frac{1}{y^2} = \frac{\cos t}{t^2} - 2\int_t^{+\infty}\frac{\cos y}{y^3}\mathrm{d}y.$$

故对 $\forall t>0$, 我们有

$$\left|\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{\cos t}{t^2} - 2\int_t^{+\infty}\frac{\cos y}{y^3}\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{t^2} + 2\int_t^{+\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y = \frac{2}{t^2}.$$

即 $\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \forall t>0$. 再结合(1)式可知

$$f'_+(0) = \lim_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y = 0.$$

同理可得 $f'_-(0) = \lim_{t\to-\infty} t\int_t^{-\infty}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y = 0$. 故 $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$.

□

例题 0.4 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}e^{-n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

证明 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}e^{-n^2x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,\mathrm{d}e^{-x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{\left[1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{\left[1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{\left[1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \left.\frac{e^{-x^2}}{2}\right|_{+\infty}^{0} = \frac{1}{2},$$

故

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_0^{+\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}e^{-n^2x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{\left[1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2} = 0.$$

□

例题 0.5 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数并满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

并且上式成为等式当且仅当 $f(x) = x$.

证明 证法一: 设 f 是连续函数满足所给的条件, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F' = f$. 由 $0 < f(x) \leqslant x$ 得 $F(x) \leqslant \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$. 因而

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x = F^2(x)\Big|_0^1 = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x &= x^2F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2xF(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - F^2(x)\Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.
\end{aligned}$$

由证明过程可知只有当 $f(x) = x$ 时, 所证不等式成为等式.

证法二 (直接求导法):令

$$F(x) = \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

则

$$F'(x) = x^2 f(x) - 2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant x^2 f(x) - 2f(x)\int_0^x t\mathrm{d}t = 0.$$

故

$$\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = F(1) \geqslant F(0) = 0.$$

令 $h(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x) = h'(x)$, 从而

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 h'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 xh(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \Longleftrightarrow 2\int_0^1 xh(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{3}$$

再令
$$G(x)=2\int_0^x th(t)\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$
则
$$G'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0.$$
故
$$2\int_0^1 xh(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=G(1)\geqslant G(0)=0.$$
因此(3)式成立.

$\square$