

## 0.1 复变函数的积分

### 定义 0.1

设  $z = \gamma(t) (a \leq t \leq b)$  是一条可求长曲线,  $f$  是定义在  $\gamma$  上的函数, 沿  $\gamma$  的正方向取分点  $\gamma(a) = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = \gamma(b)$ , 在  $\gamma$  中从  $z_{k-1}$  到  $z_k$  的弧段上任取点  $\zeta_k, k = 1, \dots, n$  (见图 1), 作 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (1)$$

用  $s_k$  记弧段  $\widehat{z_{k-1}z_k}$  的长度, 如果当  $\lambda = \max\{s_k : 1 \leq k \leq n\} \rightarrow 0$  时, 不论  $\zeta_k$  的取法如何, 和式 (1) 总有一确定的极限, 就称此极限为  $f$  沿  $\gamma$  的积分, 记为  $\int_{\gamma} f(z)dz$ , 即

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

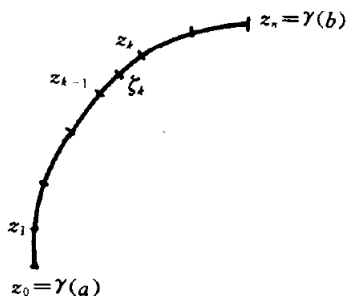


图 1

### 命题 0.1

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在可求长曲线  $\gamma$  上连续, 则  $f$  沿  $\gamma$  的积分必存在, 并且

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy.$$

**证明** 记  $z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$ , 于是  $f$  的 Riemann 和可写成

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \{u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\} + i \sum_{k=1}^n \{v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\}, \end{aligned}$$

这里,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ . 当  $u, v$  在  $\gamma$  上连续时, 上述和式当  $\lambda \rightarrow 0$  时趋于曲线积分

$$\int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy.$$

□

### 命题 0.2

如果  $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t) (a \leq t \leq b)$  是光滑曲线,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $\gamma$  上连续, 那么  $f$  沿  $\gamma$  的积分必存在, 并且

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b \{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](x'(t) + iy'(t))\} dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

**证明** 在所设的条件下, 有

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} u dx - v dy &= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt, \\ \int_{\gamma} v dx + u dy &= \int_a^b \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\} dt.\end{aligned}$$

由命题 0.1 可知, 第二式乘  $i$  后与第一式相加, 即得

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](x'(t) + iy'(t))\} dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

□

### 命题 0.3

如果  $f, g$  在可求长曲线  $\gamma$  上连续, 那么

- (i)  $\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$ , 这里,  $\gamma^-$  是指与  $\gamma$  方向相反的曲线;
- (ii)  $\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$ , 这里,  $\alpha, \beta$  是两个复常数;
- (iii)  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ , 这里,  $\gamma$  是由  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  组成的曲线.

◆

**证明** 由命题 0.1 和实变函数第二型曲面积分的性质不难证明.

□

**例题 0.1** 设可求长曲线  $z = \gamma(t) (a \leq t \leq b)$  的起点为  $\alpha$ , 终点为  $\beta$ , 证明

$$\int_{\gamma} dz = \beta - \alpha, \quad \int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

**证明** 若  $\gamma$  是光滑曲线, 由命题 0.2, 得

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} dz &= \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \beta - \alpha, \\ \int_{\gamma} z dz &= \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t) dt = \frac{1}{2}\gamma^2(t) \Big|_a^b = \frac{1}{2}(\gamma^2(b) - \gamma^2(a)) = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).\end{aligned}$$

如果  $\gamma$  不是光滑曲线, 可直接按积分的定义计算:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = \beta - \alpha, \\ \int_{\gamma} z dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_k (z_k - z_{k-1}), \quad \int_{\gamma} z dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_{k-1} (z_k - z_{k-1}),\end{aligned}$$

把两式加起来, 得

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

□

### 命题 0.4

**证明**

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi i, & n = 1. \end{cases}$$

这里  $n$  是任意整数,  $\gamma$  是以  $a$  为中心、以  $r$  为半径的圆周.

◆

**证明**  $\gamma$  的参数方程为  $z = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ . 由 **命题 0.2**, 得

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}} dt = r^{1-n} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

所以, 上述积分当  $n \neq 1$  时为零, 当  $n = 1$  时为  $2\pi i$ , 即

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi i, & n = 1. \end{cases}$$

□

#### 命题 0.5 (长大不等式)

如果  $\gamma$  的长度为  $L, M = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$ , 那么

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML. \quad (4)$$

▲

**注** 这个不等式很简单, 但很重要, 是我们今后估计积分的主要工具, 可简称为**长大不等式**.

**证明**  $f$  在  $\gamma$  上的 Riemann 和有不等式

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq ML,$$

令  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} s_k \rightarrow 0$ , 即得所要的不等式.

□