0.1 凸性相关题型

命题 0.1

设 f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则有
$$f(t) \leqslant \frac{1-t}{t}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{1-t}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 对于上凸函数的情况, 只需改变不等号的方向即可.

证明 设 $t \in (a,b)$, 对于 $x \in [a,b]$, 有
$$t = (b-t)(tx) + t(b-x+tx).$$
因此根据下凸函数的性质, 得
$$f(t) \leqslant (b-t)f(tx) + tf(b-x+tx).$$
上式对变量 x 在 $[a,b]$ 上积分, 得
$$\begin{aligned} f(t) &\leqslant (b-t)\int_a^b f(tx)\,\mathrm{d}x + t\int_a^b f(b-x+tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b-t}{t}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{b-t}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
□

例题 0.1 设 f 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 求证:
$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{3}\int_0^1 \left(t^3+(1-t)^3\right) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

笔记 利用凸函数积分不等式命题 0.1.

证明 设 $t \in (0,1)$, 对于 $x \in [0,1]$, 有
$$t = (1-t)(tx) + t(1-x+tx).$$
因此根据下凸函数的性质, 得
$$f(t) \le (1-t)f(tx) + tf(1-x+tx).$$
上式对变量 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得
$$\begin{aligned} f(t) &\le (1-t)\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x + t\int_0^1 f(1-x+tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-t}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{t}{1-t}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
因而
$$t(1-t)f(t) \le (1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\ t \in [0,1].$$
积分可得
$$\begin{aligned} \int_0^1 t(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 \left[(1-t)^2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t + \int_0^1\left[t^2\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\left[f(x)\int_x^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + \int_0^1\left[f(x)\int_0^x t^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3+(1-x)^3\right) f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x\in(a,b)$, 都有

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

特别的, 若 $f\in C[a,b]$, 则对 $x=a,b$, 也有(1)式成立.

注 Step2 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

笔记 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x)=f(x)-p(x)$(其中 $p(x)$ 是 f 过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

证明 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to b^-}f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f\in C[a,b]$. 不妨设 $a=0,b=1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

Step1 当

$$f(a)=f(b)=0,x_0\text{是}f(x)\text{最大值点},x_0\in(a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases}f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x\in[0,x_0]\\ f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1), & x\in[x_0,1]\end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{x_0}\frac{f(x_0)}{x_0}x\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(1).

当 $x_0=a$或b 时, 由 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 非负可知, 此时 $f(x)\equiv0$ 结论显然成立.

Step2 一般情况可设

$$g(x)=f(x)-\left[f(1)-f(0)\right]x-f(0),$$

从而 $g(0)=g(1)=0$, 于是 g 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(1)知

$$g(x)\leqslant2\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1]. \tag{2}$$

于是利用(2)知

$$f(x)-\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\leqslant2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1].$$

从而

$$f(x)-2\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1].$$

注意到对 $\forall x\in[0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}&\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]-2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))y+f(0)\right]\mathrm{d}y\leqslant0\\ \Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant2\int_0^1\left[(f(1)-f(0))x+f(0)\right]\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x+f(0)\leqslant f(1)+f(0)\\ \Leftrightarrow&\left[f(1)-f(0)\right]x\leqslant f(1)\\ \Leftrightarrow&f(1)(1-x)+f(0)x\geqslant0\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x\in[0,1],f(1),f(0)\geqslant0$ 直接得到. 于是我们完成了证明. □