0.1 幂级数

定义 0.1

所谓幂级数, 是指形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{1}$$

的级数, 它的通项是幂函数, 这里,$a_0, \cdots, a_n, \cdots$ 和 z_0 都是复常数.

♣

注 为讨论简便起见, 不妨假定 $z_0 = 0$, 这时级数(1) 成为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots . \tag{2}$$

通常, 只要作变换 $w = z - z_0$, 就能把级数(1)化为级数(2).

定义 0.2

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots . \tag{3}$$

如果存在常数 R, 使得当 $|z-z_0| < R$ 时, 级数 (3) 收敛; 当 $|z-z_0| > R$ 时, 级数 (3) 发散, 就称 R 为级数 (3) 的**收敛半径**,$\{z : |z-z_0| < R\}$ 称为级数(3)的**收敛圆**.

♣

定理 0.1

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

存在收敛半径

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

♡

证明 不妨设 $z_0 = 0$, 否则用 $z - z_0$ 代替 z. 我们只要证明下列三件事:

(i) 先证 (i) 当 $R = 0$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z = 0$ 处收敛;

(ii) 当 $R = \infty$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处收敛;

(iii) 当 $0 < R < \infty$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中收敛, 在 $\{z : |z| > R\}$ 中发散.

先证 (i). 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 0$ 处收敛是显然的. 现固定 $z \neq 0$, 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 故必有子列 n_k, 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z|}$, 于是 $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$. 所以, 由推论??可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散.

再证 (ii). 任取 $z \neq 0$, 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|}$, 于是 $|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$. 所以, 由 Weierstrass 一致收敛判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 一致收敛, 从而也收敛.

最后证 (iii). 取定 $z \neq 0, z \in B(0, R)$. 选取 ρ, 使得 $|z| < \rho < R$. 于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$, 因而存在 N, 当

$n>N$ 时, $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{\rho}$, 即 $|a_nz^n|<\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n<1$. 所以由 Weierstrass 一致收敛判别法可知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ 一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|<\infty$.

再设 $|z|>R$, 选取 r, 使得 $|z|>r>R$. 因而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}>\dfrac{1}{r}$, 故有 $\{n_k\}$, 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\dfrac{1}{r}$, 即 $|a_{n_k}z^{n_k}|>\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^{n_k}>1$. 故由推论??可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 发散.

□

定理 0.2 (Abel 定理)

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处收敛, 则必在 $\{z:|z-a|<|z_0-a|\}$ 中内闭绝对收敛且内闭一致收敛.

证明 不妨设 $a=0$, 否则用 $z-a$ 代替 z. 设 K 是 $\{z:|z|<|z_0|\}$ 中的一个紧集, 选取 $r<|z_0|$, 使得 $K\subseteq B(0,r)$. 于是, 当 $z\in K$ 时, 有 $|z|<r$. 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n$ 收敛, 所以由推论??可知 $|a_nz_0^n|<M$, 这里,M 是一个常数. 于是, 当 $z\in K$ 时, 有

$$|a_nz^n|=\left|a_nz_0^n\frac{z^n}{z_0^n}\right|\leqslant M\frac{|z|^n}{|z_0|^n}\leqslant M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

因为 $r<|z_0|$, 所以由 Weierstrass 一致收敛判别法, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ 在 K 中一致收敛. 从而原级数也在 K 中绝对收敛.

□

定理 0.3

幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数, 即幂级数的和函数在其收敛圆内必是全纯函数.

证明 由Abel 定理知道, 幂级数在其收敛圆内是内闭一致收敛的. 根据 Weierstrass 定理, 它的和函数是收敛圆内的全纯函数.

□

例题 0.1 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散.

例题 0.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛.

例题 0.3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 它在 $z=1$ 处是发散的, 但在收敛圆周的其他点 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0<\theta<2\pi)$ 处则是收敛的.

证明 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

由 Dirichlet 判别法知道, 实部和虚部的两个级数都是收敛的.

□

定理 0.4

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 则其和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

是圆盘 $B(z_0,R)$ 中的全纯函数, 并且

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

♡

证明 由定理 0.3, 和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

是圆盘 $B(z_0,R)$ 中的全纯函数. 命题**??**(3) 可知 $f\in C^{\infty}$. 再由 Weierstrass 定理, 得

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

□

定义 0.3

设 g 是定义在单位圆中的函数,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 是单位圆周上一点,$S_\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})$ 如图 1所示, 其中 $\alpha<\frac{\pi}{2}$. 如果当 z 在 $S_\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})$ 中趋于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 时,$g(z)$ 有极限 l, 就称 g 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 处有**非切向极限** l, 记为

$$\lim_{\substack{z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\\ z\in S_\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})}} g(z)=l.$$

♣

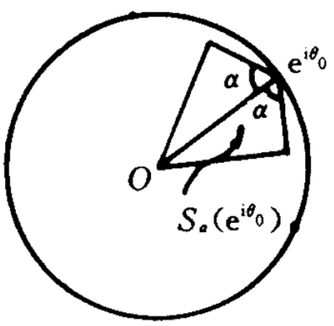

图 1

定理 0.5 (Abel 第二定理)

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R=1$, 且级数在 $z=1$ 处收敛于 S, 那么 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S, 即

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S_\alpha(1)}} f(z)=S. \tag{4}$$

证明 如图 2所示, 只要能证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$(这里,$\delta=\cos\alpha$) 的闭包上一致收敛, 那么由 Weierstrass 定理可知 $f(z)$ 便在 $z=1$ 处连续, 因而 (4) 式成立.

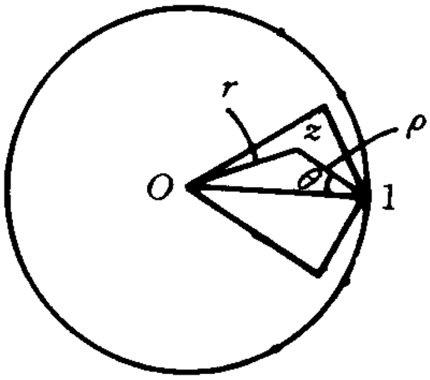

图 2

记

$$\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p},$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=1$ 处收敛, 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,$|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$ 对任意自然数 p 成立. 注意

$$\begin{aligned}a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}&=\sigma_{n,1}z^{n+1}+(\sigma_{n,2}-\sigma_{n,1})z^{n+2}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}\\&=\sigma_{n,1}z^{n+1}(1-z)+\sigma_{n,2}z^{n+2}(1-z)+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\&=z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1}+\sigma_{n,2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{p-2})+\sigma_{n,p}z^{n+p}.\end{aligned}$$

因而当 $|z|<1$,$p=1,2,\cdots$,$n>N$ 时, 便有

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|<\varepsilon|1-z|(1+|z|+\cdots)+\varepsilon \xlongequal{\text{Taylor 公式}} \varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right). \tag{5}$$

现在任取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$, 记 $|z|=r$,$|1-z|=\rho$, 那么

$$r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta.$$

故有

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\leqslant\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta-\rho}.$$

因为 $z\in B(1,\delta)$, 所以 $\rho=|1-z|<\delta=\cos\alpha$. 又因 $\theta<\alpha$, 所以

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{2\cos\alpha-\rho}<\frac{2}{\cos\alpha}$$

由 (5) 式便可得

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{2}{\cos\alpha}+1\right)$$

又当 $z=1$ 时，有

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|=|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$$

这样，我们就证明了级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 的闭包上一致收敛，因而 (4) 式成立.

□

命题 0.1

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\quad |z|<1.$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}=-\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|-\mathrm{i}\arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),\quad 0<\theta<2\pi. \tag{6}$$

证明 容易知道该级数的收敛半径为 1，所以它的和 $f(z)$ 是定义在单位圆盘中的单值全纯函数，因而有

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z},\ |z|<1.$$

由复积分的微分学基本定理和命题??得

$$f(z)=\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\frac{1}{1-\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\int_1^{1-z}\frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\mathrm{Ln}(1-z),\ |z|<1.$$

又因为 f 是单位圆盘上的单值全纯函数，所以 $f(z)$ 是 $-\mathrm{Ln}(1-z)$ 定义在单位圆盘上的一个单值全纯分支. 注意到 $f(0)=0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\ |z|<1.$$

这个级数在收敛圆周上除了点 $z=1$ 外都收敛，故由Abel 第二定理，当 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 1(0<\theta<2\pi)$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}=-\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|-\mathrm{i}\arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

□

注

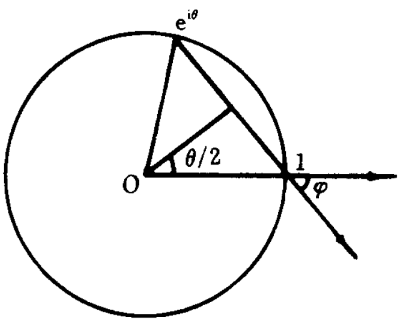

图 3

从图 3容易看出

$$|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\sin\frac{\theta}{2},\quad \arg(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\varphi,$$

但 $2\varphi = \pi - \theta, \varphi = \dfrac{\pi - \theta}{2}$. 这样, 由(6)式便可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

上面两个等式都在 $0 < \theta < 2\pi$ 中成立. 特别地, 当 $\theta = \pi$ 时, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2;$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时, 由于

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases}$$

所以得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$