0.1 重要不等式

定理 0.1 (Cauchy 不等式)

对任何 $n \in \mathbb{N}, (a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{1}$$

且等号成立条件为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关.

证明 (i) 当 b_i 全为零时,(1)式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 注意到 $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)\right)^2 \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$. 等价于

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0$.

从而 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$. 下证(1)式等号成立的充要条件.

若(1)式等号成立, 则

(i) 当 b_i 全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 此时我们有 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$. 根据一元二次方程根的存在性定理, 可知存在 $t_0 \in \mathbb{R}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)\right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0.$$

于是 $a_i + t_0 b_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 即 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关.

反之, 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 使得

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

不妨设 $\lambda \neq 0$, 则 $a_i = -\frac{\mu}{\lambda} b_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 从而当 $t = \frac{\mu}{\lambda}$ 时, $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)\right)^2 = 0$.

即一元二次方程 $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)\right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ 有实根 $\frac{\mu}{\lambda}$.

因此 $\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$. 即(1)式等号成立. □

例题 0.1 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n > 0.$$

证明 对 $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, 由Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_i}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 = n^2.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$ □

例题 0.2 求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 在定义域内的最大值和最小值.

笔记 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后我们通过简单的放缩就能得到 $y(0)$ 就是最小值. 再利用Cauchy 不等式我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设 $A,B,C>0$, 则由 *Cauchy* 不等式可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax+27A}+\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{13B-Bx}+\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{Cx}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)[(A+C-B)x+27A+13B]$$

并且当且仅当 $\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}$ 时, 等号成立.

令 $A+C-B=0$(因为要求解 y 的最大值, 我们需要将 y 放大成一个不含 x 的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases}\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}\\ A+C-B=0\end{cases}$$

解得:$A=1,B=3,C=2,x=9$.

从而得到我们需要构造的 *Cauchy* 不等式为

$$\left(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}\right)^2\leqslant\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)(x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立.

解 由题可知, 函数 y 的定义域就是:$0\leqslant x\leqslant 13$. 而

$$\begin{aligned}y(x)&=\sqrt{x+27}+\sqrt{[\sqrt{13-x}+\sqrt{x}]^2}\\&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\\&\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}=y(0)\end{aligned}$$

于是 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$. 由 *Cauchy* 不等式可得

$$\begin{aligned}y^2(x)&=(\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2\\&=(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x})^2\\&\leqslant(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x)\\&=121=y^2(9)\end{aligned}$$

即 $y(x)\leqslant y(9)=11$. 并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立. 故 y 的最大值为 11.

□

定理 0.2 (均值不等式)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r)=\begin{cases}\left(\dfrac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}&,r\neq 0\\ \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},&r=0\end{cases}. \tag{2}$$

其中若 $r_1\neq r_2$, 则 $f(r_1)=f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

笔记 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

定理 0.3 (均值不等式常用形式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

例题 0.3 设 $f(x)=4x(x-1)^2, x\in(0,1)$, 求 f 的最大值.

解 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2\cdot 2x(1-x)(1-x)\\
&= 2\cdot\left[\sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)}\right]^3\\
&\leqslant 2\cdot\left[\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right]^3\\
&= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

并且当且仅当 $2x=1-x$, 即 $x=\frac{1}{3}$ 时等号成立. □

定理 0.4 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq -1$ 且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明 当 $n=1$ 时, 我们有 $1+x_1 \geq 1+x_1$, 结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时, 结论成立. 则当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\
&= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}\\
&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}
\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立. □

定理 0.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)

设 $x \geq -1, n \geq 0$, 则

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

定理 0.6 (Jesen 不等式)

设 $\lambda_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, 则对下凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

定理 0.7 (Young 不等式)

对任何 $a, b \geq 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p > 1$ 有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.

笔记 若 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则我们称 p 与 q **共轭**.

注 这个 Young 不等式不等式和加权均值不等式等价.

证明 (i) 当 a, b 至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a, b 均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} ab &\leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\ \Leftrightarrow \ln a + \ln b &\leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q &\leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \end{aligned}$$

由Jesen 不等式和 $f(x) = \ln x$ 函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由Jesen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立. □

定理 0.8 (Hold 不等式)

设 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p > 1, a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0, b_1, b_2, \cdots, b_n \geq 0$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}.$$

证明 (i) 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零时, 令

$$a_k' = \frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}}, b_k' = \frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

从而只需证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k' b_k' \leqslant 1$. 由Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k' b_k' &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(a_k')^p}{p} + \frac{(b_k')^q}{q}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}\right) \\ &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^p}{q\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

故原结论成立. □

定理 0.9 (排序和不等式)

设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ 满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 是 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

且等号成立的充要条件是 $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$ 或者 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$.

♡

笔记 简单记为倒序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 同序和.

定理 0.10 (Chebeshev 不等式)

设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ 满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 是 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

且等号成立的充要条件是 $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$ 或者 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$.

♡