

## 0.1 矩阵的运算

### 命题 0.1 (标准单位向量和基础矩阵)

#### 1. 标准单位向量

$n$  维标准单位列向量是指下列  $n$  个  $n$  维列向量:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量组  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$  则被称为  $n$  维标准单位行向量, 容易验证标准单位向量有下列基本性质:

1. 若  $i \neq j$ , 则  $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j = 0$ , 而  $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_i = 1$ ;
2. 若  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $A\mathbf{e}_i$  是  $A$  的第  $i$  个列向量;  $\mathbf{e}'_i A$  是  $A$  的第  $i$  个行向量;
3. 若  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $\mathbf{e}'_i A \mathbf{e}_j = a_{ij}$ ;
4. **判定准则:** 设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 则  $A = B$  当且仅当  $A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n)$  成立, 也当且仅当  $\mathbf{e}'_i A = \mathbf{e}'_i B (1 \leq i \leq m)$  成立.

#### 2. 基础矩阵

$n$  阶基础矩阵 (又称初级矩阵) 是指  $n^2$  个  $n$  阶矩阵  $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ . 这里  $E_{ij}$  是一个  $n$  阶矩阵, 它的第  $(i, j)$  元素等于 1, 其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积:  $E_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_j$ . 由此不难证明基础矩阵的下列性质:

1. 若  $j \neq k$ , 则  $E_{ij} E_{kl} = 0$ ; 若  $j = k$ , 则  $E_{ij} E_{kl} = E_{il}$ . 即

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il},$$

其中  $\delta_{jk}$  为 Kronecker 符号.

2. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ ;
3. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $E_{ij} A$  的第  $i$  行是  $A$  的第  $j$  行,  $E_{ij} A$  的其他行全为零;
4. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $A E_{ij}$  的第  $j$  列是  $A$  的第  $i$  列,  $A E_{ij}$  的其他列全为零;
5. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $E_{ij} A E_{kl} = a_{jk} E_{il}$ .



**笔记** 标准单位向量和基础矩阵虽然很简单, 但如能灵活应用就可以得到意外的结果. 我们在今后将经常应用它们, 因此请读者熟记这些结论.(借助单位矩阵进行记忆)

一些常见的想法:

1. 可以将一般的矩阵写成标准单位列向量或基础矩阵的形式 (这个形式可以是和式的形式, 也可以是分块的形式).
2. 如果要证明两个矩阵相等, 那么我们就可以考虑**判定法则**.
3. 如果某种等价关系蕴含了一种递减的规律 (项数减少, 阶数降低等), 那么我们就可以考虑数学归纳法, 去尝试根据这个规律得到一些结论.


**定义 0.1 (循环矩阵)**

1. 下列形状的  $n$  阶矩阵称为  $n$  阶基础循环矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}.$$

2. 下列形状的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

 **笔记** 记  $C_n(\mathbb{K})$  为  $\mathbb{K}$  上所有  $n$  阶循环矩阵构成的集合.

**命题 0.2 (循环矩阵的性质)**

1. 若  $J$  为  $n$  阶基础循环矩阵, 则

$$J^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

2. 若  $A$  是循环矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

则循环矩阵  $A$  可以表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式:


$$A = a_1 I_n + a_2 J + a_3 J^2 + \cdots + a_n J^{n-1}.$$

反之, 若一个矩阵能表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式, 则它必是循环矩阵.

3. 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.

4. 基础循环矩阵  $J = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 的逆仍是循环矩阵, 并且

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} O & I_k \\ I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

 **笔记** 循环矩阵的性质及应用详见[谢启鸿博客](#).

**证明**

1. 将  $J$  写作  $(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$ , 其中  $e_i$  是标准单位列向量 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ). 由分块矩阵乘法并注意到  $J e_i$  就是  $J$  的第  $i$  列, 可得

$$J^2 = J(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1}) = (J e_n, J e_1, \cdots, J e_{n-1}) = (e_{n-1}, e_n, \cdots, e_{n-2}).$$

不断这样做下去就可以得到结论.

2. 由循环矩阵和基础循环矩阵的定义和循环矩阵的性质 1 容易得到证明.

3. 由循环矩阵的性质 2 可知两个循环矩阵之积可写为基础循环矩阵  $J$  的两个多项式之积. 又由循环矩阵的性质 1, 可知  $J^n = I_n$ . 因此两个循环矩阵之积可以表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式, 故由循环矩阵的性质 1 即得结论.
4. 利用矩阵初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} O & I_{n-k} & I_{n-k} & O \\ I_k & O & O & I_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_k & O & O & I_k \\ O & I_{n-k} & I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

$$\text{从而 } J^{-1} = \begin{pmatrix} O & I_k \\ I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

□

### 命题 0.3 (循环行列式关于 $n$ 次方根的计算公式)

已知下列循环矩阵  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

则  $A$  的行列式的值为:

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

其中  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根.

 **笔记** 关键是要注意到

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

然后再利用命题??就能得到分解  $AV = V\Lambda$ .

**证明** 作多项式  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ , 令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

从而  $V^{-1}AV = \Lambda$ , 又因为  $\varepsilon_i$  互不相同, 所以  $|V| \neq 0$ , 故

$$|A| = |V^{-1}AV| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

□

**命题 0.4 (b-循环矩阵)**

设  $b$  为非零常数, 下列形状的矩阵称为  $b$ -循环矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

- (1) 证明: 同阶  $b$ -循环矩阵的乘积仍然是  $b$ -循环矩阵;  
 (2) 求上述  $b$ -循环矩阵  $A$  的行列式的值.

◆

**证明**

- (1) (证明类似于循环矩阵的性质3.) 设  $J_b = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ b & O \end{pmatrix}$ , 则  $J_b^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ bI_k & O \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . 从而  $J_b^n = bI_n$  且  $A = a_1I_n + a_2J_b + a_3J_b^2 + \cdots + a_nJ_b^{n-1}$ . 因此同阶  $b$ -循环阵的乘积仍然可以写成  $J_b$  的  $n-1$  次多项式, 故同阶  $b$ -循环阵的乘积仍然是  $b$ -循环矩阵.  
 (2) (证明完全类似循环行列式计算公式的证明) 作多项式  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ , 令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是  $b$  的所有  $n$  次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

从而  $V^{-1}AV = \Lambda$ , 又因为  $\varepsilon_i$  互不相同, 所以  $|V| \neq 0$ , 故

$$|A| = |V^{-1}AV| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

□

**命题 0.5 (基础幂零 Jordan 块)**

设  $n$  阶基础幂零 Jordan 块

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

**证明** 将  $A$  写为  $A = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ , 其中  $\mathbf{e}_i$  是标准单位列向量. 由分块矩阵乘法并注意  $A\mathbf{e}_i$  就是  $A$  的第  $i$  列, 因此

$$A^2 = (0, A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{e}_{n-1}) = (0, 0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-2})$$

不断这样做下去就可得到结论. □

#### 命题 0.6

设  $A$  为  $n$  阶幂零矩阵, 则存在  $k \in \mathbb{N}$  且  $k \leq n$ , 使得  $A^k = O$ . ▲

**证明** 由幂零矩阵的定义知, 存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $A^k = O$ . 由于幂零矩阵的秩都为 0, 因此  $A$  的特征多项式为  $x^n$ , 由 Cayley-Hamilton 定理知  $A^n = O$ , 故  $k \leq n$ . □


**例题 0.1** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $A$  适合  $A^n = O$  时,  $I_n - A$  必是可逆矩阵.

**证明** 注意到

$$I_n = I_n - A^n = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}).$$

故此时  $I_n - A$  必是可逆矩阵. □

**例题 0.2** 设  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵,  $A$  适合  $AB + BA = B$  对任意  $n$  阶矩阵  $B$  成立, 那么  $B = O$ .

 **笔记** 若已知矩阵乘法的相关等式, 可以尝试得到一些递推等式.

**证明** 假设  $A^k = O$ , 其中  $k$  为某个正整数. 由条件可得  $AB = B(I_n - A)$ , 于是

$$O = A^k B = A^{k-1} B(I_n - A) = A^{k-2} B(I_n - A)^2 = \dots = B(I_n - A)^k.$$

由 **例题 0.1** 知  $I_n - A$  是可逆矩阵, 从而  $B = O$ . □

#### 命题 0.7 (多项式的友矩阵和 Frobenius 块)

设首一多项式  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ,  $f(x)$  的友阵

$$C(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

则  $|xI_n - C(f(x))| = f(x)$ .

$C(f(x))$  的转置  $F(f(x))$  称为  $f(x)$  的 Frobenius 块. 即

$$C^T(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

并且容易验证  $C(f(x))$  具有以下性质, 其中  $e_i$  是标准单位列向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$C(f(x))e_i = e_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad C(f(x))e_n = -\sum_{i=1}^n a_{n-i+1}e_i.$$



**证明**  $|xI_n - C(f(x))| = f(x)$  的证明见友矩阵的特征多项式.

□

**例题 0.3** 求下列矩阵的逆矩阵 ( $a_n \neq 0$ ):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

**解** 用初等变换法不难求得

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

□

#### 命题 0.8

和所有  $n$  阶对角矩阵乘法可交换的矩阵必是对角矩阵.



**证明** 由矩阵乘法易得.

□

#### 命题 0.9 (纯量矩阵的刻画)

1. 和所有  $n$  阶奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
2. 和所有  $n$  阶非奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
3. 和所有  $n$  阶正交阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
4. 和所有  $n$  阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .



**证明** 首先设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ .

1. 设  $E_{ij} (1 \leq i \neq j \leq n)$  为基础矩阵, 因为基础矩阵都是奇异阵, 所以由条件可知  $E_{ij}A = AE_{ij}$ . 注意到  $E_{ij}A$  是将  $A$  的第  $j$  行变为第  $i$  行而其他行都是零的  $n$  阶矩阵,  $AE_{ij}$  是将  $A$  的第  $i$  列变为第  $j$  列而其他列都是零的







**命题 0.11 (对称阵是零矩阵的充要条件)**

设  $A$  为  $n$  阶对称阵, 则  $A$  是零矩阵的充要条件是对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有

$$\alpha' A \alpha = 0.$$

◆

**证明** 只要证明充分性. 设  $A = (a_{ij})$ , 令  $\alpha = e_i$ , 是第  $i$  个标准单位列向量. 因为  $e_i' A e_i$  是  $A$  的第  $(i, i)$  元素, 故  $a_{ii} = 0$ . 又令  $\alpha = e_i + e_j (i \neq j)$ , 则

$$0 = (e_i + e_j)' A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji}.$$

由于  $A$  是对称阵, 故  $a_{ij} = a_{ji}$ , 又上面已经证明  $a_{ii} = a_{jj} = 0$ , 从而  $a_{ij} = 0$ , 这就证明了  $A = O$ .

□

**命题 0.12 (反对称阵的充要条件)**

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  是反称阵的充要条件是对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有

$$\alpha' A \alpha = 0.$$

◆

**证明** 必要性 ( $\Rightarrow$ ): 若  $A$  是反称阵, 则对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有  $(\alpha' A \alpha)' = -\alpha' A \alpha$ . 而  $\alpha' A \alpha$  是数, 因此  $(\alpha' A \alpha)' = \alpha' A \alpha$ . 比较上面两个式子便有  $\alpha' A \alpha = 0$ .


充分性 ( $\Leftarrow$ ): 若上式对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$  成立, 则由  $\alpha' A \alpha$  是数, 可知  $\alpha' A \alpha = (\alpha' A \alpha)' = \alpha' A' \alpha = 0$ , 故  $\alpha' (A + A') \alpha = 0$ . 因为矩阵  $A + A'$  是对称阵, 故由对称阵是零矩阵的充要条件可得  $A + A' = O$ , 即  $A' = -A$ ,  $A$  是反称阵.

□

**命题 0.13**

任一  $n$  阶方阵均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和.

◆

 **笔记** 构造思路: 设  $A = B + C$ , 且  $B$  为对称矩阵,  $C$  为反称矩阵. 则两边取转置可得

$$\begin{cases} A = B + C \\ A' = (B + C)' = B - C \end{cases}$$

解得:  $B = \frac{1}{2}(A + A')$ ,  $C = \frac{1}{2}(A - A')$ .

**证明** 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 则  $A + A'$  是对称阵,  $A - A'$  是反对称阵, 并且

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A').$$

□

**注** 上例中的  $\frac{1}{2}(A + A')$  称为  $A$  的对称化,  $\frac{1}{2}(A - A')$  称为  $A$  的反对称化.

**命题 0.14 (上三角阵性质)**

(1) 设  $A$  是  $n$  阶上三角阵且主对角线上元素全为零, 则  $A^n = O$ .

(2) 设  $A$  是  $n (n \geq 2)$  阶上三角阵, 若  $i < j$ , 则  $A_{ij} = M_{ij} = 0$ .

(3) 上 (下) 三角阵的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆仍然是上 (下) 三角阵, 并且所得上 (下) 三角阵的主对角元是原上 (下) 三角阵对应主对角元的加减、数乘、乘积 (幂)、多项式、伴随和求逆.

◆

**证明** (1) **证法一 (抽屉原理)**: 设  $A = (a_{ij})$ , 当  $i \geq j$  时,  $a_{ij} = 0$ . 将  $A$  表示为基础矩阵  $E_{ij}$  之和:

$$A = \sum_{i>j} a_{ij} E_{ij}$$

因为当  $j \neq k$  时,  $E_{ij} E_{kl} = O$ , 故在  $A^n$  的乘法展开式中, 可能非零的项只能是具有形式  $E_{i_1 j_1} E_{j_1 j_2} \cdots E_{j_{n-1} j_n}$ , 但足标必须满足条件  $1 \leq i < j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1} < j_n \leq n$ . 根据抽屉原理可知, 这样的项也不存在, 因此  $A^n = O$ .

**证法二 (数学归纳法):** 由假设  $Ae_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,i-1}e_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 我们只要用归纳法证明:  $A^k e_k = 0$  对任意的  $1 \leq k \leq n$  都成立, 则  $A^n e_i = A^{n-i} \cdot A^i e_i = A^{n-i} \cdot 0 = 0$  对任意的  $1 \leq i \leq n$  都成立, 从而由判定法则可知  $A^n = O$  成立. 显然,  $Ae_1 = 0$  成立. 假设  $A^k e_k = 0$  对任意的  $1 < k < n$  都成立, 则

$$\begin{aligned} A^k e_k &= A^{k-1}(Ae_k) = A^{k-1}(a_{k1}e_1 + \cdots + a_{k,k-1}e_{k-1}) \\ &= a_{k1}A^{k-1}e_1 + \cdots + a_{k,k-1}A^{k-1}e_{k-1} = 0. \end{aligned}$$

(2) 根据条件可设  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ , 则当  $i < j$  时, 有

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

故  $A_{ij} = M_{ij} = 0$ .

(3) 只证上三角阵的情形, 下三角阵的情形完全类似. 上三角阵的加减、数乘、乘积 (幂) 以及多项式结论的证明是显然的. 下面我们来证明伴随和求逆的结论. 设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶上三角阵, 即满足  $a_{ij} = 0, (\forall i > j)$ . 由(2)可知  $A$  的代数余子式  $A_{ij} = 0, \forall i < j$ . 于是

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

故  $A^*$  也是上三角阵. 而对  $\forall i \in [1, n] \cap N$ , 有

我们再将  $A_{ii} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}$  这个数称为  $a_{ii}$  的伴随. 这就完成了  $A^*$  结论的证明.

$$A_{ii} = (-1)^{2i} M_{ii} = M_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}.$$

由于当  $|A| \neq 0$  时, 我们有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ , 故由上三角阵的数乘结论可知,  $A^{-1}$  也是上三角阵, 其主对角元为  $\frac{1}{|A|} A_{ii} = a_{ii}^{-1}$ . 结论得证. □

#### 命题 0.15

若  $A, B$  都是由非负实数组成的矩阵且  $AB$  有一行等于零, 则或者  $A$  有一行为零, 或者  $B$  有一行为零. ◆

**证明** 设  $A = (a_{ij})_{n \times m}, B = (b_{ij})_{m \times s}$ . 假设  $C = AB, C = (c_{ij})_{n \times s}$  的第  $i$  行全为零. 则对  $\forall j \in [1, s] \cap N$ , 都有

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = 0.$$

已知对  $\forall i \in [1, n] \cap N, j \in [1, m] \cap N$ , 有  $a_{ij} \geq 0$ ; 对  $\forall i \in [1, m] \cap N, j \in [1, s] \cap N$ , 有  $b_{ij} \geq 0$ . 从而

$$a_{i1}b_{1j} = a_{i2}b_{2j} = \cdots = a_{im}b_{mj} = 0, \forall j \in [1, s] \cap N.$$

若  $A$  的第  $i$  行不全为零, 不妨设  $a_{ik} \neq 0, k \in [1, m] \cap N$ , 则由  $a_{ik}b_{kj} = 0, \forall j \in [1, s] \cap N$  可得  $b_{kj} = 0$ , 对  $\forall j \in [1, s] \cap N$  都成立, 即  $B$  的第  $k$  行全为零. □

#### 命题 0.16 (矩阵行和和列和的一种刻画)

(1)  $n$  阶矩阵  $A$  第  $i$  行元素之和为  $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  当且仅当

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

特别地,  $n$  阶矩阵  $A$  的每一行元素之和等于  $c$  当且仅当  $A\alpha = c \cdot \alpha$ , 其中  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ .

(2)  $n$  阶矩阵  $A$  第  $i$  列元素之和为  $a_i (i=1, 2, \dots, n)$  当且仅当

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$


特别地,  $n$  阶矩阵  $A$  的每一列元素之和等于  $c$  当且仅当  $\alpha A = c \cdot \alpha$ , 其中  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ .

**证明** 由矩阵乘法容易得到证明. □

**例题 0.4** 设  $n$  阶方阵  $A$  的每一行元素之和等于常数  $c$ , 求证:

(1) 对任意的正整数  $k, A^k$  的每一行元素之和等于  $c^k$ ;

(2) 若  $A$  为可逆阵, 则  $c \neq 0$  并且  $A^{-1}$  的每一行元素之和等于  $c^{-1}$ .

 **笔记** 核心想法是利用命题 0.16.

**证明** 设  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)'$ , 则由矩阵乘法可知,  $A$  的每一行元素之和等于  $c$  当且仅当  $A\alpha = c \cdot \alpha$  成立.

(1) 由  $A\alpha = c \cdot \alpha$  不断递推可得  $A^k \alpha = c^k \cdot \alpha$ , 故结论成立.

(2) 若  $c = 0$ , 则由  $A$  可逆以及  $A\alpha = 0$  可得  $\alpha = 0$ , 矛盾. 在  $A\alpha = c \cdot \alpha$  的两边同时左乘  $c^{-1}A^{-1}$ , 可得  $A^{-1}\alpha = c^{-1} \cdot \alpha$ , 由此即得结论. □

#### 命题 0.17 (矩阵可逆的等价命题)

(1)  $n$  阶方阵  $A$  可逆.

(2) 存在矩阵  $B$ , 使得  $AB = BA = I_n$  (这个等式同时也说明  $B$  可逆).

(3)  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ .

(4)  $A$  等价 (相抵) 于  $n$  阶单位矩阵.


(5)  $A$  可以表示为有限个初等矩阵的积.

(6)  $A$  的  $n$  个行向量 (列向量) 线性无关.

#### 命题 0.18

(1) 若已知  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = O$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0$ , 并且  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 = 0$  无实根 (即原等式左边不可因式分解成  $(a_1 I_n + a_2 A)(b_1 I_n + b_2 A)$ ), 则对任何  $c, d \in \mathbb{R}$ , 都有  $cA + dI_n$  可逆.

(2) 若已知  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = (a_1 A + b_1 I_n)(a_2 A + b_2 I_n) = O$ , 其中  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $\lambda_1 = a_1 a_2, \lambda_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \lambda_3 = b_1 b_2, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ . 则对任何实数对  $(c, d) \neq (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , 都有  $cA + dI_n$  可逆.

 **笔记** 构造逆矩阵的方法: 不妨设  $k(cA + dI_n)^{-1} = (pA + qI_n)$ , 其中  $k, p, q$  为待定系数. 则

$$(cA + dI_n) \cdot k(cA + dI_n)^{-1} = (cA + dI_n)(pA + qI_n) = pcA^2 + (cq + dp)A + dqI_n = kI_n.$$

令  $pc = \lambda_1, cq + dp = \lambda_2$ , 则  $p = \frac{\lambda_1}{c}, q = \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2}$ . 于是由已知条件可得

$$(cA + dI_n)(pA + qI_n) = (cA + dI_n) \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right) = \lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + d \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n = \left( \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3 \right) I_n.$$

从而  $k = \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3$ . 因此  $(cA + dI_n)^{-1} = \frac{1}{k}(pA + qI_n) = \frac{1}{\frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3} \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right)$ .

实际做题中只需要先设  $k(cA + dI_n)^{-1} = (pA + qI_n)$ , 其中  $k, p, q$  为待定系数. 则有  $(cA + dI_n)(pA + qI_n) = kI_n$ .

然后通过比较二次项和一次项的系数得到方程组  $\begin{cases} pc = \lambda_1 \\ cq + dp = \lambda_2 \end{cases}$  (即要凑出合适的  $p, q$ , 使得  $(cA + dI_n)(pA + qI_n)$  与  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n$  的二次项和一次项的系数相等), 解出  $p, q$  的值. 最后将已知条件  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = O$  代入  $(cA + dI_n)(pA + qI_n) = kI_n$  即可得到  $k$  的值.


熟悉这种方式之后就能快速构造出我们需要的逆矩阵.

**证明** (1) 和 (2) 的证明相同. 如下 (这里我们是利用了上述构造逆矩阵的方法直接构造出逆矩阵, 再根据逆矩阵的定义直接得到证明):

当  $c = 0$  时,  $cA + dI_n = dI_n$  显然可逆.

当  $c \neq 0$  时, 注意到  $(cA + dI_n) \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right) = \left( \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3 \right) I_n$ , 故  $cA + dI_n$  可逆. □

**例题 0.5** 设  $n$  阶方阵  $A$  适合等式  $A^2 - 3A + 2I_n = O$ , 求证:  $A$  和  $A + I_n$  都是可逆阵, 而若  $A \neq I_n$ , 则  $A - 2I_n$  必不是可逆阵.

 **笔记** 这里构造逆矩阵利用了命题 0.18.

**证明** 由已知得  $A(A - 3I_n) = -2I_n$ , 因此  $A$  是可逆阵. 又  $A^2 - 3A - 4I_n = -6I_n$ , 于是  $(A + I_n)(A - 4I_n) = -6I_n$ , 故  $A + I_n$  也是可逆阵.

另一方面, 由已知等式可得  $(A - I_n)(A - 2I_n) = O$ , 如果  $A - 2I_n$  可逆, 则  $A - I_n = O, A = I_n$  和假设不合, 因此  $A - 2I_n$  不是可逆阵. □

#### 命题 0.19

(1) 若已知  $\lambda_1 AB + \lambda_2 A + \lambda_3 B + \lambda_4 I_n = O$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0$ , 并且  $\lambda_1 x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_4 = 0$  无实根 (即原等式左边不可因式分解成  $(a_1 I_n + a_2 A)(b_1 I_n + b_2 B)$ ), 则对任何  $c, d \in \mathbb{R}$ , 都有  $aI_n + bA, cI_n + dB$  可逆.

(2) 若已知  $\lambda_1 AB + \lambda_2 A + \lambda_3 B + \lambda_4 I_n = (a_1 I_n + b_1 A)(a_2 I_n + b_2 B) = O$ , 其中  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $\lambda_1 = b_1 b_2, \lambda_2 = a_2 b_1, \lambda_3 = a_1 b_2, \lambda_4 = a_1 a_2, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ . 则对任何实数对  $(a, b), (c, d) \neq (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , 都有  $aI_n + bA, cI_n + dB$  可逆. ▲


**证明** 证明方法与命题 0.18 类似, 构造逆矩阵的方法也与其类似. 这里不再赘述. □

#### 例题 0.6

1. 求证: 不存在  $n$  阶奇异矩阵  $A$ , 适合条件  $A^2 + A + I_n = O$ .

2. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $A^2 = A$ , 求证:  $I_n - 2A$  是可逆矩阵.

3. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $2A(A - I_n) = A^3$ , 求证:  $I_n - A$  可逆.

 **笔记** 这类问题构造逆矩阵的方法 (以 3. 为例): 已知条件等价于  $A^3 - 2A^2 + 2A = O$ , 设  $(I_n - A)^{-1} = aA^2 + bA + cI_n$ , 其中  $a, b, c$  为待定系数, 使得

$$(I_n - A)(aA^2 + bA + cI_n) = A^3 - 2A^2 + 2A + kI_n = kI_n, k \text{ 为待定常数.}$$

比较等式两边系数可得

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -2 \\ b - c = 2 \\ c = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ k = c = -1 \end{cases}$$

于是  $(I_n - A)(-A^2 + A - I_n) = -I_n$ . 从而  $(I_n - A)^{-1} = A^2 - A + I_n$ .

**证明**

1. (反证也可以) 由已知  $A^2 + A + I_n = O$ , 则  $(A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A^3 - I_n = O$ , 即  $A^3 = I_n$ , 于是  $A$  是可逆矩阵.

2. 因为  $(I_n - 2A)^2 = I_n - 4A + 4A^2 = I_n$ , 故  $I_n - 2A$  是可逆矩阵.

3. 由已知  $A^3 - 2A^2 + 2A - I_n = -I_n$ , 即  $(A - I_n)(A^2 - A + I_n) = -I_n$ , 于是  $(I_n - A)^{-1} = A^2 - A + I_n$ . □

**命题 0.20**

设  $n$  阶方阵  $A$  和  $B$  满足  $A + B = AB$ , 求证:  $I_n - A$  是可逆阵且  $AB = BA$ .

**证明** 因为

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n,$$

所以  $I_n - A$  是可逆阵. 另一方面, 由上式可得  $(I_n - A)^{-1} = (I_n - B)$ , 故

$$I_n = (I_n - B)(I_n - A) = I_n - B - A + BA,$$

从而  $BA = A + B = AB$ .

□

**命题 0.21 (矩阵转置的性质)**

设矩阵  $A, B$ , 则有

1.  $(A')' = A$ ;
2.  $(A + B)' = A' + B'$ ;
3.  $(kA)' = kA'$ ;
4.  $(AB)' = B'A'$ .

**证明** 由矩阵的性质易证.

□

**命题 0.22 (矩阵的逆运算)**

设矩阵  $A, B, C$  可逆, 则有


常规逆运算:

1.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
2.  $(AC + BC)^{-1} = C^{-1}(A + B)^{-1}$ .
3.  $(A + B)^{-1}C = (C^{-1}A + C^{-1}B)^{-1}$ .
4.  $C(A + B)^{-1} = (AC^{-1} + BC^{-1})^{-1}$ .

凑因子:

1.  $A = (AB^{-1})B = (AB)B^{-1} = B(B^{-1}A) = B^{-1}(BA)$ .
2.  $A + B = (AC^{-1} + BC^{-1})C = (AC + BC)C^{-1} = C(C^{-1}A + C^{-1}B) = C^{-1}(CA + CB)$ .

▲

 **笔记** 无需额外记忆这些公式, 只需要知道凑因子的想法, 即在矩阵可逆的条件下, 我们可以利用矩阵  $I_n = AA^{-1} = A^{-1}A$  的性质, 将原本矩阵没有的因子凑出来, 然后提取我们需要的矩阵因子到矩阵逆的外面或将其乘入矩阵逆的内部, 从而达到化简原矩阵的目的.

**证明** 由矩阵的运算性质不难证明.

□

**注** 凑因子想法的应用: 例题 0.7, 例题 0.8, 例题 0.27.

**命题 0.23**

设  $A, B, A - B$  都是  $n$  阶可逆阵, 证明:

$$B^{-1} - A^{-1} = (B + B(A - B)^{-1}B)^{-1}.$$

▲

 **笔记** 直接运用逆矩阵的定义验证即可.

**证明**

$$(B^{-1} - A^{-1})(B + B(A - B)^{-1}B)$$

$$\begin{aligned}
&= I_n + (A - B)^{-1} B - A^{-1} B - A^{-1} B (A - B)^{-1} B \\
&= I_n + (A - B)^{-1} B - A^{-1} B (I_n + (A - B)^{-1} B) \\
&= (I_n - A^{-1} B) (I_n + (A - B)^{-1} B) \\
&= A^{-1} (A - B) [(A - B)^{-1} (A - B + B)] \\
&= A^{-1} (A - B) (A - B)^{-1} A = I_n.
\end{aligned}$$

□

**命题 0.24 (Sherman-Morrison 公式)**

设  $A$  是  $n$  阶可逆阵,  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 且  $1 + \beta' A^{-1} \alpha \neq 0$ . 求证:

$$(A + \alpha \beta')^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} A^{-1} \alpha \beta' A^{-1}.$$

◆

 **笔记** 直接运用逆矩阵的定义验证即可, 注意  $\beta' A^{-1} \alpha$  是一个数可以提出来.

**证明**


$$\begin{aligned}
&(A + \alpha \beta') \left( A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} A^{-1} \alpha \beta' A^{-1} \right) \\
&= I_n - \frac{1}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} \alpha \beta' A^{-1} + \alpha \beta' A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} \alpha (\beta' A^{-1} \alpha) \beta' A^{-1} \\
&= I_n + \alpha \beta' A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} \alpha \beta' A^{-1} - \frac{\beta' A^{-1} \alpha}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} \alpha \beta' A^{-1} \\
&= I_n + \alpha \beta' A^{-1} - \frac{1 + \beta' A^{-1} \alpha}{1 + \beta' A^{-1} \alpha} \alpha \beta' A^{-1} = I_n.
\end{aligned}$$

□

**命题 0.25 (一些矩阵等式)**

1. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵. 则有  $A(I_n + BA) = (I_m + AB)A$ .
2. 设  $A, B$  均为  $n$  阶可逆矩阵, 则有  $A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B$ .
3. 若  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足  $A^2 = B^2$ , 则  $A(A + B) = A^2 + AB = B^2 + AB = (A + B)B$ .


◆

 **笔记** 这是一些常见的矩阵等式. 可以通过反复凑因子得到.

**证明** 由矩阵的运算性质不难证明.

□

**例题 0.7** 设  $A, B, AB - I_n$  都是  $n$  阶可逆阵, 证明:  $A - B^{-1}$  与  $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$  均可逆, 并求它们的逆矩阵.

 **笔记** 核心想法是利用命题 0.22 和命题 0.25.

**证明** 注意到  $A - B^{-1} = (AB - I_n)B^{-1}$ , 故  $A - B^{-1}$  是可逆矩阵, 并且  $(A - B^{-1})^{-1} = B(AB - I_n)^{-1}$ . 注意到如下变形:

$$\begin{aligned}
&(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1} \\
&= B(AB - I_n)^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(AB(AB - I_n)^{-1} - I_n) \\
&= A^{-1}(AB - (AB - I_n))(AB - I_n)^{-1} = A^{-1}(AB - I_n)^{-1}.
\end{aligned}$$

故  $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$  可逆, 并且  $((A - B^{-1})^{-1} - A^{-1})^{-1} = (AB - I_n)A$ .


□

**命题 0.26**

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵, 使得  $I_m + AB$  可逆, 则  $I_n + BA$  也可逆, 并且

$$(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A.$$

◆

 **笔记** 命题 0.26 的应用: 一般对于求只含有两项的矩阵和式的逆矩阵, 我们可以利用矩阵的逆运算 (凑因子) 的方法将原矩阵和式转化为  $C(I_n + AB)$  或  $(I_n + AB)C$  的形式, 再利用这个命题求得原矩阵的逆.

**证明** 根据分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n + BA \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & O \\ B & I_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

故  $\begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = |I_m + AB| = |I_n + BA|$ . 又因为  $I_m + AB$  可逆, 所以  $|I_n + BA| = |I_m + AB| \neq 0$ . 因此  $I_n + BA$  也可逆. 下面给出两种求矩阵逆的方法.

**证法一 (矩阵的逆运算):** 注意到  $A(I_n + BA) = (I_m + AB)A$ , 故  $(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) = A$ , 于是  $B(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) = BA$ , 从而

$$\begin{aligned} I_n &= I_n + BA - BA = (I_n + BA) - B(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) \\ &= (I_n - B(I_m + AB)^{-1}A)(I_n + BA). \end{aligned}$$

于是  $(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A$ .

**证法二 (打洞原理):** 对(1)(2)两式两边分别取逆, 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & (I_m - BA)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_n - AB)^{-1} & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对右边直接计算得

$$\begin{pmatrix} I_n + A(I_m - BA)^{-1}B & A(I_m - BA)^{-1} \\ -(I_m - BA)^{-1}B & (I_m - BA)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_n - AB)^{-1} & -(I_n - AB)^{-1}A \\ -B(I_n - AB)^{-1} & I_m + B(I_n - AB)^{-1}A \end{pmatrix},$$

所以

$$(I_n - AB)^{-1} = I_n + A(I_m - BA)^{-1}B.$$

□

**例题 0.8** 设  $A, B$  均为  $n$  阶可逆阵, 使得  $A^{-1} + B^{-1}$  可逆, 证明:  $A + B$  也可逆, 并且

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

**证明** 注意到  $A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B$ , 故  $A + B$  可逆. 由命题 0.26 可得

$$(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}B = I_n - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned} (A + B)^{-1} &= (A(I_n + A^{-1}B))^{-1} = (I_n + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

□

#### 命题 0.27 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式)

设  $A$  为  $n$  阶可逆阵,  $C$  为  $m$  阶可逆阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $D$  为  $m \times n$  矩阵, 使得  $C^{-1} + DA^{-1}B$  可逆. 求证:  $A + BCD$  也可逆, 并且

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

◆

**注** 若已知矩阵逆的表达式, 也可以采取利用矩阵逆的定义直接验证的方法进行证明.



**证明** 注意到  $A + BCD = A(I_n + A^{-1}BCD)$ , 将  $A^{-1}B$  和  $CD$  分别看成整体, 此时  $I_m + (CD)(A^{-1}B) = C(C^{-1} + DA^{-1}B)$  可逆, 故由命题 0.26 的结论可知  $I_n + (A^{-1}B)(CD)$  也可逆, 并且

$$\begin{aligned}(I_n + A^{-1}BCD)^{-1} &= I_n - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CD \\ &= I_n - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D.\end{aligned}$$


于是  $A + BCD = A(I_n + A^{-1}BCD)$  也可逆, 并且

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

□

**例题 0.9** 计算下列矩阵的  $k$  次幂, 其中  $k$  为正整数:

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

 **笔记** 第 (2) 问核心想法是利用命题??.

**解** (1) 设  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A = aI_3 + J$ . 注意到  $aI_3$  和  $J$  乘法可交换,  $J$  是幂零阵并且  $J^3 = O$ , 因此我们可用二项式定理来求  $A$  的  $k$  次幂:

$$\begin{aligned}A^k &= (aI_3 + J)^k = (aI_3)^k + C_k^1(aI_3)^{k-1}J + C_k^2(aI_3)^{k-2}J^2 \\ &= a^k I_3 + C_k^1 a^{k-1} J + C_k^2 a^{k-2} J^2 = \begin{pmatrix} a^k & C_k^1 a^{k-1} & C_k^2 a^{k-2} \\ 0 & a^k & C_k^1 a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 注意到  $A$  的列向量成比例, 故可设  $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (1, 2, 4)$ , 则  $A = \alpha\beta'$ . 由矩阵乘法的结合律并注意到  $\beta\alpha' = 17$ , 可得

$$\begin{aligned}A^k &= (\alpha\beta')(\alpha\beta') \cdots (\alpha\beta') = \alpha(\beta'\alpha)(\beta'\alpha) \cdots (\beta'\alpha)\beta' \\ &= (\beta'\alpha)^{k-1} \alpha\beta' = 17^{k-1} A = \begin{pmatrix} 17^{k-1} & 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} \\ 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} & 8 \cdot 17^{k-1} \\ 3 \cdot 17^{k-1} & 6 \cdot 17^{k-1} & 12 \cdot 17^{k-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

**例题 0.10** 设  $k$  是正整数, 计算  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k$ .

**解** 已知  $k = 1$  时, 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . 假设  $k = n$  时, 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ . 则当  $k = n + 1$  时, 有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & \cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta \\ -(\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta) & \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而由数学归纳法可知, 对任意正整数  $k$ , 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ .

□

**例题 0.11** 求矩阵  $A$  的逆阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

**解** 对  $(A \ I_n)$  用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 再将第一行乘以  $s^{-1}$ , 其中  $s = \frac{1}{2}n(n+1)$ , 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从第二行起依次减去下一行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

消去第一列除第一行外的所有元素后, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

从第二行到第  $n-1$  行分别乘以  $-\frac{1}{n}$ , 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将第一行依次减去第二行, 第三行, ..., 第  $n-1$  行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{1-s} & \frac{2}{s+1} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1-s} & \frac{ns}{s+1} & \cdots & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将最后一行加到第一行, 再将最后一行乘以  $-1$ , 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{1-s} & \frac{1}{s+1} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1-s} & \frac{ns}{s+1} & \cdots & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{ns}{1} & \frac{ns}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}.$$

□

**例题 0.12** 求下列  $n$  阶矩阵的逆阵, 其中  $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

**解** 对  $(A \quad I_n)$  用初等变换法, 将第  $i$  行乘以  $a_i^{-1} (1 \leq i \leq n)$ , 有

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

将下面的行都加到第一行上, 并令  $s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ , 则上面的矩阵变为

$$\begin{pmatrix} s & s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{sa_2-1}{sa_2^2} & -\frac{sa_3}{1} & \cdots & -\frac{sa_n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1a_3} & -\frac{1}{sa_2a_3} & \frac{sa_3-1}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & -\frac{1}{sa_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{sa_n^2} \end{pmatrix}.$$


再消去第一行的后  $n-1$  个 1 就得到

$$A^{-1} = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -\frac{1}{a_1a_2} & \frac{sa_2-1}{a_2^2} & -\frac{sa_3}{1} & \cdots & -\frac{sa_n}{1} \\ -\frac{1}{a_1a_3} & -\frac{1}{a_2a_3} & \frac{sa_3-1}{a_3^2} & \cdots & -\frac{1}{a_na_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_1a_n} & -\frac{1}{a_2a_n} & -\frac{1}{a_3a_n} & \cdots & \frac{sa_n-1}{a_n^2} \end{pmatrix}.$$

□

**例题 0.13** 求下列  $n$  阶矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

 **笔记** 解法一和解法三的核心想法是: 先假设(猜测)矩阵  $A$  的逆矩阵与其具有相似的结构, 再结合逆矩阵的定义, 使用待定系数法求出矩阵  $A$  的逆矩阵.

**解 解法一:** 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ , 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$ . 设  $B = cI_n + d\alpha\alpha'$ , 其中  $c, d$  为待定系数. 则  $AB = -cI_n + (c + (n-1)d)\alpha\alpha'$ . 令  $c = -1, c + (n-1)d = 0$ , 则  $d = \frac{1}{n-1}$ . 于是  $AB = I_n$ , 从而  $A^{-1} = B = -I_n + \frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$ .

**解法二(Sherman-Morrison 公式):** 设  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)'$ , 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$ . 由 Sherman-Morrison 公式可得

$$A^{-1} = (-I_n + \alpha\alpha')^{-1} = (-I_n)^{-1} - \frac{1}{1 + \alpha'(-I_n)^{-1}\alpha} (-I_n)^{-1} \alpha\alpha' (-I_n)^{-1} = -I_n + \frac{1}{n-1} \alpha\alpha'.$$

**解法三(循环矩阵):** 设  $J$  为基础循环矩阵, 则  $A = J + J^2 + \dots + J^{n-1}$ . 设  $B = cI_n + J + J^2 + \dots + J^{n-1}$  (因为循环矩阵的逆仍是循环矩阵), 其中  $c$  为待定系数. 则

$$AB = (n-1)I_n + (c+n-2)(J + J^2 + \dots + J^{n-1})$$

只要令  $c = 2 - n$ , 则  $AB = (n-1)I_n$ . 于是  $A^{-1} = \frac{1}{n-1}B = \frac{2-n}{n-1}I_n + J + J^2 + \dots + J^{n-1}$ .

**解法四(初等变换):** 本题是练习 0.12 的特例, 都利用相同的初等变换方法求逆矩阵.

□

**例题 0.14** 设  $A$  是非零实矩阵且  $A^* = A'$ . 求证:  $A$  是可逆阵.

**证明** 设  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij}$  的代数余子式记为  $A_{ij}$ , 由已知,  $a_{ij} = A_{ij}$ . 由于  $A$  是非零实矩阵, 故必有某个  $a_{rs} \neq 0$ , 将  $|A|$  按第  $r$  行展开, 可得

$$|A| = a_{r1}A_{r1} + \dots + a_{rs}A_{rs} + \dots + a_{rn}A_{rn} = a_{r1}^2 + \dots + a_{rs}^2 + \dots + a_{rn}^2 > 0.$$

特别地,  $|A| \neq 0$ , 即  $A$  是可逆阵.

□

**例题 0.15** 设  $A$  是奇数阶矩阵, 满足  $AA' = I_n$  且  $|A| > 0$ , 证明:  $I_n - A$  是奇异阵.

**证明** 由  $1 = |I_n| = |AA'| = |A||A'| = |A|^2$  以及  $|A| > 0$  可得  $|A| = 1$ . 因为

$$|I_n - A| = |AA' - A| = |A||A' - I_n| = |(A - I_n)'| = |A - I_n| = (-1)^n |I_n - A|.$$

又  $n$  是奇数, 故  $|I_n - A| = -|I_n - A|$ , 从而  $|I_n - A| = 0$ , 即  $I_n - A$  是奇异阵.

□

**例题 0.16** 设  $A, B$  为  $n$  阶可逆阵, 满足  $A^2 = B^2$  且  $|A| + |B| = 0$ , 求证:  $A + B$  是奇异阵.

**证明** 由已知  $A, B$  都是可逆阵且  $|B| = -|A|$ , 因此

$$|A||A+B| = |A^2+AB| = |B^2+AB| = |B+A||B| = -|A||A+B|.$$

于是  $|A||A+B| = 0$ . 因为  $|A| \neq 0$ , 故  $|A+B| = 0$ , 即  $A+B$  是奇异阵.

□