



# 高等代数

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

# 目录

<b>第一章 行列式</b>	<b>1</b>
1.1 定义、定理和命题	1
1.2 练习	20
<b>第二章 矩阵</b>	<b>49</b>
2.1 矩阵的运算	49
2.1.1 练习	64
2.2 矩阵的初等变换	68
2.2.1 相抵标准型	68
2.2.2 练习	69
2.3 伴随矩阵	71
2.3.1 练习	74
2.4 矩阵的迹	76
2.5 矩阵乘法与行列式计算	78
2.6 Cauchy-Binet 公式	81
2.7 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)	84
2.8 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)	88
2.9 摄动法	92
2.10 练习	93
<b>第三章 线性空间与线性方程组</b>	<b>96</b>
3.1 向量的线性关系	96
3.2 线性同构和几何问题代数化	102
3.3 线性同构和几何问题代数化	105
3.4 基变换与过渡矩阵	108
3.4.1 练习	112
3.5 子空间、直和与商空间	112
3.5.1 证明直和的方法	113
3.5.2 练习	117
3.6 矩阵的秩	118
3.6.1 初等变换法	118
3.6.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩	124
3.6.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩	127
3.7 相抵标准型及其应用	128
3.8 线性方程组的解及其应用	132
3.8.1 线性方程组的解的讨论	132
3.8.2 线性方程组的公共解	134
3.8.3 在解析几何上的应用	135
<b>第四章 线性映射</b>	<b>138</b>
4.1 基本定理和命题	138
4.2 线性映射及其运算	139

4.3 线性同构 . . . . .	142
4.3.1 证明线性变换可逆的方法 . . . . .	143
4.4 线性映射与矩阵 . . . . .	145
4.4.1 将矩阵问题转化为线性映射问题 . . . . .	148
4.5 像空间和核空间 . . . . .	150
4.6 不变子空间 . . . . .	155
4.7 幂等变换 . . . . .	158
<b>第五章 多项式</b> . . . . .	<b>163</b>
5.1 基本定理和命题 . . . . .	163
5.2 整除与带余除法 . . . . .	163
5.2.1 凑项法 . . . . .	165
5.3 最大公因式与互素多项式 . . . . .	166
5.4 不可约多项式与因式分解 . . . . .	173
5.4.1 多项式的标准分解 . . . . .	175
5.5 多项式函数与根 . . . . .	177
5.6 复系数多项式 . . . . .	180
5.7 实系数多项式 . . . . .	183
5.8 有理系数多项式 . . . . .	185
5.9 多元多项式 . . . . .	189
5.10 互素多项式的应用 . . . . .	192
<b>第六章 特征值</b> . . . . .	<b>195</b>
6.1 对角化 . . . . .	195
6.2 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理 . . . . .	199
6.3 特征值与特征向量 . . . . .	202
6.3.1 直接利用定义计算和证明 . . . . .	204
6.3.2 正向利用矩阵的多项式 . . . . .	206
6.3.3 反向利用矩阵的多项式 . . . . .	208
6.3.4 特征值的降价公式 . . . . .	210
6.3.5 特征值与特征多项式系数的关系 . . . . .	212

# 第一章 行列式

## 1.1 定义、定理和命题

### 命题 1.1 (行列式计算常识)

$$(1) \begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \ddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n; \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

(2) 设  $n$  阶行列式  $D = \det(a_{ij})$ , 把  $D$  上下翻转(行倒排)、或左右翻转(列倒排)分别得到  $D_1$ 、 $D_2$ ; 把  $D$  逆时针旋转  $90^\circ$ 、或顺时针旋转  $90^\circ$  分别得到  $D_3$ 、 $D_4$ ; 把  $D$  依副对角线翻转、或依主对角线翻转分别得到  $D_5$ 、 $D_6$ . 易知

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D,$$

$$D_5 = D_6 = D.$$

(3) 设  $A = (a_{i,j})$  为  $n$  阶复矩阵, 则一定有  $|A| = \overline{|A|}$ .

(4) 若  $|A|$  是  $n$  阶行列式,  $|B|$  是  $m$  阶行列式, 它们的值都不为零, 则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}.$$

**证明** (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

$$(2) D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-2]{r_i \longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{j_i \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-2]{j_i \longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2} \begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{逆时针旋转 } 90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{列倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{顺时针旋转 } 90^\circ} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行倒排}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法:  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ , 故由行列式的组合定义可得

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}} \\ &= \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} \overline{a_{k_{11}}} \cdot \overline{a_{k_{22}}} \cdots \overline{a_{k_{nn}}} = \overline{|A|}. \end{aligned}$$


(4) 将  $|A|$  的第一列依次和  $|B|$  的第  $m$  列, 第  $m-1$  列,  $\dots$ , 第一列对换, 共换了  $m$  次; 再将  $|A|$  的第二列依次和  $|B|$  的第  $m$  列, 第  $m-1$  列,  $\dots$ , 第一列对换, 又换了  $m$  次;  $\dots$  依次类推, 经过  $mn$  次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此  $|D| = (-1)^{mn} |C|$ , 于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}.$$

□

### 命题 1.2 (奇数阶反对称行列式的值等于零)

如果  $n$  阶行列式  $|A|$  的元素满足  $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 则称为反对称行列式. 求证: 奇数阶反对称行列式的值等于零.

 **笔记** 证法二的想法是将行列式按组合的定义写成  $(n-1)!$  个单项的和. 然后将其两两分组再求和 (因为一共有  $(n-1)!$  个单项, 即和式中具有偶数个单项, 所以只要使用合适的分组方式就一定能够将其两两分组再求和), 最后发现每组的和均为 0.

构造的这个映射  $\varphi$  的目的是为了更加准确、严谨地说明分组的方式. 证明这个映射  $\varphi$  是一个双射是为了保证原来的和式中的每一个单项都能与和式中另一个单项一一对应. 然后利用反证法证明了这两个一一对应的单项一定互不相同 (注: 我认为这步有些多余, 这里应该只需要说明这两个一一对应的单项是原和式中不同的单项即可, 即这两个单项的角标不完全相同就行, 其实, 这个在我们定义映射  $\varphi$  的时候就已经满足了. 满足这个条件就足以说明原和式可以按照这种方式进行分组. 并且利用反对称行列式的性质也能够证明这两个单项不仅互不相同, 还能进一步得到这两个单项互为相反数). 于是我们就可以将原和式中的每一个单项与其在双射  $\varphi$  作用下的像看成一组, 按照这种方式就可以将原和式进行分组再求和.

**证明** 证法一 (行列式的性质): 由反对称行列式的定义可知,  $|A|$  的转置  $|A'|$  与  $|A|$  的每个元素都相差一个符号, 将

$|A'|$  的每一行都提出公因子  $-1$  可得  $|A| = |A'| = (-1)^n |A| = -|A|$ , 从而  $|A| = 0$ .

**证法二 (行列式的组合定义):** 由于  $|A|$  的主对角元全为  $0$ , 故由组合定义, 只需考虑下列单项:

$$T = \{a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \mid k_i \neq i (1 \leq i \leq n)\}$$

定义映射  $\varphi: T \rightarrow T, a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \mapsto a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n}$ . 显然  $\varphi^2 = \text{Id}_T$ , 于是  $\varphi$  是一个双射. 我们断言:  $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$  和  $a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n}$  作为  $|A|$  的单项不相同, 否则  $\{1, 2, \dots, n\}$  必可分成若干对  $(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)$ , 使得  $a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = a_{i_1 j_1} a_{j_1 i_1} \cdots a_{i_t j_t} a_{j_t i_t}$ , 这与  $n$  为奇数矛盾. 将上述两个单项看成一组, 则它们在  $|A|$  中符号均为  $(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}$ . 由于  $|A|$  反对称, 故


$$a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n} = (-1)^n a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = -a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}$$

从而每组和为  $0$ , 于是  $|A| = 0$ . □

### 命题 1.3 (“爪”型行列式)

证明  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i.$$

 **笔记** 记忆“爪”型行列式的计算方法和结论.

**证明** 当  $a_i \neq 0 (\forall i \in [2, n] \cap \mathbb{N})$  时, 我们有

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(-\frac{c_i}{a_i})j_i + j_1 \\ i=2, \dots, n}]{\substack{a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0}} \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} \\ &= \left( a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) \prod_{i=2}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i. \end{aligned}$$

当  $\exists i \in [2, n] \cap \mathbb{N}$  s.t.  $a_i = 0$  时, 则  $a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^n a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i = -a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i$ . 此时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ c_{i-1} & & & a_{i-1} & & & & \\ c_i & & & & 0 & & & \\ c_{i+1} & & & & & a_{i+1} & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ c_n & & & & & & & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{按第 } i \text{ 行展开} \\ \text{(按 } c_i \text{ 所在行展开)}}]{(-1)^{i+1} c_i} \begin{vmatrix} b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ a_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & a_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$


$$\begin{array}{c} \text{按第 } i-1 \text{ 列展开} \\ \text{(按 } b_i \text{ 所在列展开)} \end{array} (-1)^{i+1} (-1)^i b_i c_i \begin{vmatrix} a_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} = -a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n b_i c_i.$$

综上所述, 原命题得证. □

#### 命题 1.4 (分块“爪”型行列式)

计算  $n$  阶行列式  $(a_{ii} \neq 0, i = k+1, k+2, \dots, n)$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 记忆分块“爪”型行列式的计算方法即可, 计算方法和“爪”型行列式的计算方法类似.  
**解**

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[i=k+1, k+2, \dots, n]{-\frac{a_{i1}}{a_{ii}} j_i + j_1, -\frac{a_{i2}}{a_{ii}} j_i + j_2, \dots, -\frac{a_{in}}{a_{ii}} j_i + j_k} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C & B \\ O & \Lambda \end{vmatrix} = |C| \cdot |\Lambda| = |C| \prod_{i=k+1}^n a_{ii}. \end{aligned}$$

其中  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} a_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ . 并且  $c_{pq} = a_{pq} - \sum_{i=k+1}^n \frac{a_{iq} a_{pi}}{a_{ii}}$ ,  $p, q = 1, 2, \dots, n$ .

## 推论 1.1 (“爪”型行列式的推广)

计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$



**笔记** 这是一个有用的模板 (即行列式除了主对角元素外, 每行都一样).

记忆该命题的计算方法即可. 即先化为“爪”型行列式, 再利用“爪”型行列式的计算结果.

**解** 当  $a_i \neq 0 (\forall i \in [2, n] \cap \mathbb{N})$  时, 我们有

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{命题 1.3}}{=} \left[ (x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^n \frac{a_1 x_i}{a_i} \right] \prod_{i=2}^n (-a_i) = (-1)^{n-1} \left[ (x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^n \frac{a_1 x_i}{a_i} \right] \prod_{i=2}^n a_i \\ &= (-1)^{n-1} \left[ (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \right]. \end{aligned}$$

当  $\exists i \in [2, n] \cap \mathbb{N}$  s.t.  $a_i = 0$  时, 我们有

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{命题 1.3}}{=} (x_1 - a_1) (-a_2) (-a_3) \cdots (-a_n) - \sum_{i=2}^n (-a_2) \cdots \widehat{(-a_i)} \cdots (-a_n) a_1 x_i \\ &= (-1)^{n-1} (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + (-1)^{n-1} \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \\ &= (-1)^{n-1} \left[ (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \right]. \end{aligned}$$


综上所述,  $|A| = (-1)^{n-1} \left[ (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i \right].$



## 命题 1.5

设  $|A| = |a_i|$  是一个  $n$  阶行列式,  $A_{ij}$  是它的第  $(i, j)$  元素的代数余子式, 求证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z|A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

 **笔记** 根据这个命题可以得到一个关于行列式  $|A|$  的所有代数余子式求和的构造:

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} A & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 \\ \beta_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_n & 1 \\ \mathbf{1}' & 0 \end{vmatrix}.$$

其中  $|A|$  的列向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $|A|$  的行向量依次为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . 并且  $\mathbf{1}$  表示元素均为 1 的列向量,  $\mathbf{1}'$  表示  $\mathbf{1}$  的转置. (令上述命题中的  $z = 0, x_i = y_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$  即可得到.)

**注** 如果需要证明的是矩阵的代数余子式的相关命题, 我们可以考虑一下这种构造, 即令上述命题中的  $z = 0$  并且待定/任取  $x_i, y_i$ .

**证明 证法一:** 将上述行列式先按最后一列展开, 展开式的第一项为

$$(-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

再将上式按最后一行展开得到

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+2} x_1 [(-1)^{n+1} (-1)^{1+1} y_1 A_{11} + (-1)^{n+2} (-1)^{1+2} y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{1+n} y_n A_{1n}] \\ & = (-1)^{n+2} x_1 (-1)^{n+1} [(-1)^2 y_1 A_{11} + (-1)^4 y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{2n} y_n A_{1n}] \\ & = -x_1 (y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \cdots + y_n A_{1n}) \\ & = -x_1 \sum_{j=1}^n y_j A_{1j}. \end{aligned}$$

同理可得原行列式展开式的第  $i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  项为

$$(-1)^{n+1+i} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

将上式按最后一行展开得到  $z|A|$ .

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n+1+i} x_i \left[ (-1)^{n+1} (-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{n+2} (-1)^{i+2} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{i+n} y_n A_{in} \right] \\
 &= (-1)^{n+1+i} x_i (-1)^{n+1} \left[ (-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{i+2+1} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n+n-1} y_n A_{in} \right] \\
 &= (-1)^{2i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{2i+3} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{2i+2n-1} y_n A_{in} \\
 &= -x_i (y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots + y_n A_{in}) \\
 &= -x_i \sum_{j=1}^n y_j A_{ij}.
 \end{aligned}$$

而展开式的最后一项为  $z|A|$ .

因此, 原行列式的值为

$$z|A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

**证法二:** 设  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ . 若  $A$  是非异阵, 则由降阶公式可得

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & z \end{vmatrix} = |A|(z - \mathbf{y}' A^{-1} \mathbf{x}) = z|A| - \mathbf{y}' A^* \mathbf{x}.$$

对于一般的方阵  $A$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & z \end{vmatrix} = z|t_k I_n + A| - \mathbf{y}' (t_k I_n + A)^* \mathbf{x}.$$

注意到上式两边都是关于  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & z \end{vmatrix} = z|A| - \mathbf{y}' A^* \mathbf{x} = z|A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

□

**例题 1.1** 设  $n$  阶行列式  $|A| = |a_{ij}|$ ,  $A_{ij}$  是元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 求证:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} - a_{1n} & 1 \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} - a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} - a_{2n} & 1 \\ a_{31} - a_{32} & a_{32} - a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} - a_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n2} & a_{n2} - a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} - a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

**证明 证法一:** 设  $|A|$  的列向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ , 并且  $\mathbf{1}$  表示元素均为 1 的列向量. 则

$$|B| = |\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \mathbf{1}| \xrightarrow{i=n-1, n-2, \cdots, 2} |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \mathbf{1}|.$$

将最后一列写成  $(\alpha_n + \mathbf{1}) - \alpha_n$ , 进行拆分可得

$$\begin{aligned}
 |B| &= |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, (\alpha_n + \mathbf{1}) - \alpha_n| \\
 &= |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n + \mathbf{1}| - |\alpha_1 - \alpha_n, \alpha_2 - \alpha_n, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n| \\
 &= |\alpha_1 + \mathbf{1}, \alpha_2 + \mathbf{1}, \cdots, \alpha_{n-1} + \mathbf{1}, \alpha_n + \mathbf{1}| - |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n|.
 \end{aligned}$$

根据行列式的性质将  $|\alpha_1 + \mathbf{1}, \alpha_2 + \mathbf{1}, \cdots, \alpha_{n-1} + \mathbf{1}, \alpha_n + \mathbf{1}|$  每一列都拆分成两列, 然后按  $\mathbf{1}$  所在的列展开得到

$$\begin{aligned}
 |B| &= |\alpha_1 + \mathbf{1}, \alpha_2 + \mathbf{1}, \cdots, \alpha_{n-1} + \mathbf{1}, \alpha_n + \mathbf{1}| - |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n| \\
 &= |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n| + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} - |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n| = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.
 \end{aligned}$$

**证法二:** 设  $|A|$  的列向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ , 并且  $\mathbf{1}$  表示元素均为 1 的列向量. 注意到

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

依次将第  $i$  列乘以  $-1$  加到第  $i-1$  列上去 ( $i=2,3,\cdots,n$ ), 再按第  $n+1$  行展开可得

$$\begin{aligned}
 -\sum_{i,j=1}^n A_{ij} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} - \alpha_n & \alpha_n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, 1| = -|B|.
 \end{aligned}$$

结论得证.  $\square$

**例题 1.2** 设  $n$  阶矩阵  $A$  的每一行、每一列的元素之和都为零, 证明:  $A$  的每个元素的代数余子式都相等.

**证明 证法一:** 设  $A = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ , 不妨设  $x_i y_j$  均不相同,  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ . 考虑如下  $n+1$  阶矩阵的行列式求值:

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' & 0 \end{pmatrix}$$

一方面, 由 **命题 1.5** 可得  $|B| = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j$ . 另一方面, 先把行列式  $|B|$  的第二行,  $\cdots$ , 第  $n$  行全部加到第一行上; 再将第二列,  $\cdots$ , 第  $n$  列全部加到第一列上, 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^n x_i \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^n x_i \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \sum_{j=1}^n y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

依次按照第一行和第一列进行展开, 可得  $|B| = -A_{11} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j$ . 比较上述两个结果, 又由于  $x_i y_j$  均不相同, 因此可得  $A$  的所有代数余子式都相等.

**证法二:** 由假设可知  $|A| = 0$  (每行元素全部加到第一行即得), 从而  $A$  是奇异矩阵. 若  $A$  的秩小于  $n-1$ , 则  $A$  的任意一个代数余子式  $A_{ij}$  都等于零, 结论显然成立. 若  $A$  的秩等于  $n-1$ , 则线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系只含一个向量. 又因为  $A$  的每一行元素之和都等于零, 所以由 **命题 2.15** 可知, 我们可以选取  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$  作为  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系. 由 **命题 3.38** 的证明可知  $A^*$  的每一列都是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 从而  $A^*$  的每一列与  $\alpha$  成比例, 特别地,  $A^*$  的每一行都相等. 对  $A'$  重复上面的讨论, 可得  $(A')^*$  的每一行都相等. 注意到  $(A')^* = (A^*)'$ , 从而  $A^*$  的每一列都相等, 于是  $A$  的所有代数余子式  $A_{ij}$  都相等.  $\square$

#### 命题 1.6 (三对角行列式)

求下列行列式的递推关系式 (空白处均为 0):

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$



**笔记** 记忆三对角行列式的计算方法和结果:  $D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2} (n \geq 2)$ ,

即按最后一列 (或行) 展开得到递推公式.

解 显然  $D_0 = 1, D_1 = a_1$ . 当  $n \geq 2$  时, 我们有

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{按最后一列展开}}{=} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & 0 & c_{n-1} \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{第二项按最后展开}}{=} a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_{n-1} c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} \\ & & & & c_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} \\
 &= a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}.
 \end{aligned}$$

### 命题 1.7 (大拆分法)


设  $t$  是一个参数,

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

求证:

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  在  $|A(0)|$  中的代数余子式.

 **笔记** 大拆分法的想法: 将行列式的每一行/列拆分成两行/列, 得到

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{j=1}^n |A_j|, \text{ 其中 } A_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

大拆分法的关键是**拆分**, 根据行列式的性质将原行列式拆分成  $2^n$  个行列式.(不一定需要公共的  $t$ ). 不仅要熟悉大拆分法的想法还要记住大拆分法的这个命题.

**注** 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 将行列式第一列拆成两列再展开得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

将上式右边第二个行列式的第一列乘-1加到后面每一列上, 得到

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对上式右边第一个行列式的第二列拆成两列展开, 不断这样做下去就可得到

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & t \\ a_{21} & a_{2n} & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & t \end{vmatrix} = |A(0)| + \sum_{j=1}^n |A_j|.$$

其中  $A_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j=1, 2, \cdots, n$ . 将  $A_j$  按第  $j$  列展开可得

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t(A_{1j} + A_{2j} + \cdots + A_{nj}) = t \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

从而

$$|A(t)| = |A(0)| + \sum_{i=1}^n A_i = |A(0)| + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

□


### 推论 1.2 (推广的大拆分法)

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A(t_1, t_2, \dots, t_n)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t_1 & a_{12} + t_2 & \cdots & a_{1n} + t_n \\ a_{21} + t_1 & a_{22} + t_2 & \cdots & a_{2n} + t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + t_1 & a_{n2} + t_2 & \cdots & a_{nn} + t_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^n \left( t_j \sum_{i=1}^n A_{ij} \right).$$

 **笔记** 记忆这种推广的大拆分法的想法 (即将行列式的每一行/列拆分成两行/列).

这里推广的大拆分法的关键也是 **要找到合适的**  $t_1, t_2, \dots, t_n$  进行拆分将原行列式拆分成更好处理的形式.

**注** 大拆分法后续计算不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 运用大拆分法的证明方法不难得到. □

### 命题 1.8 (小拆分法)


设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且  $a_{in}$  可以拆分成  $b_{in} + c_{in}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} + c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 记忆小拆分法的想法 (即拆边列/行, 再展开得到递推式).

**注** 若已知的拆分不是最后一列而是其他的某一行或某一列, 则可以通过倒排、旋转、翻转、两行或两列对换的方法将这一行或一列变成最后一列, 再按照上述方法进行拆分即可.

小拆分法后续计算也不一定要按行/列展开, 拆分的方式一般比较多, 只要拆分的方式方便后续计算即可.

**证明** 由行列式的性质可直接得到结论. □

### 命题 1.9 (行列式的求导运算)

设  $f_{ij}(t)$  是可微函数,

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

求证:  $\frac{d}{dt}F(t) = \sum_{j=1}^n F_j(t)$ , 其中

$$F_j(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$



**证明 证法一 (数学归纳法):** 对阶数  $n$  进行归纳. 当  $n=1$  时结论显然成立. 假设  $n-1$  阶时结论成立, 现证  $n$  阶的情形.

将  $F(t)$  按第一列展开得

$$F(t) = f_{11}(t)A_{11}(t) + f_{21}(t)A_{21}(t) + \cdots + f_{n1}(t)A_{n1}(t).$$

其中  $A_{i1}(t)$  是元素  $f_{i1}(t)$  的代数余子式. ( $i=1, 2, \dots, n$ )

从而由归纳假设可得

$$A'_{i1}(t) = \frac{d}{dt}A_{i1}(t) = \sum_{k=2}^n A_{i1}^k(t), i=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{其中 } A_{i1}^k(t) = \begin{vmatrix} f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1k}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{i-1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i-1,k}(t) & \cdots & f_{i-1,n}(t) \\ f_{i+1,2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{i+1,k}(t) & \cdots & f_{i+1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nk}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}, k=2, 3, \dots, n.$$

于是, 我们就有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}[f_{11}(t)A_{11}(t) + f_{21}(t)A_{21}(t) + \cdots + f_{n1}(t)A_{n1}(t)] \\ &= f'_{11}(t)A_{11}(t) + f'_{21}(t)A_{21}(t) + \cdots + f'_{n1}(t)A_{n1}(t) + f_{11}(t)A'_{11}(t) + f_{21}(t)A'_{21}(t) + \cdots + f_{n1}(t)A'_{n1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{i1}(t)A_{i1}(t) + f_{11}(t)\sum_{k=2}^n A_{11}^k(t) + f_{21}(t)\sum_{k=2}^n A_{21}^k(t) + \cdots + f_{n1}(t)\sum_{k=2}^n A_{n1}^k(t) \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{i1}(t)A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^n \left( f_{i1}(t)\sum_{k=2}^n A_{i1}^k(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{i1}(t)A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^n f_{i1}(t)(A_{i1}^2 + A_{i1}^3 + \cdots + A_{i1}^n) \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{i1}(t)A_{i1}(t) + \sum_{i=1}^n f_{i1}(t)A_{i1}^2 + \sum_{i=1}^n f_{i1}(t)A_{i1}^3 + \cdots + \sum_{i=1}^n f_{i1}(t)A_{i1}^n \\ &= F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + \cdots + F_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^n F_j(t). \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

证法二 (行列式的组合定义): 由行列式的组合定义可得

$$F(t) = \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t).$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_1 1}(t) f'_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t) \\ &\quad + \cdots + \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f'_{k_n n}(t) \\ &= F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_n(t). \end{aligned}$$


□

### 命题 1.10 (直接计算两个矩阵和的行列式)

设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$|A+B| = |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right).$$

其中  $\widehat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  是  $|B|$  的  $k$  阶子式  $B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  的代数余子式.

 **笔记** 当  $A, B$  之一是比较简单的矩阵 (例如对角矩阵或秩较小的矩阵) 时, 可利用这个命题计算  $|A+B|$ .

**解** 设  $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|, |B| = |\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n|$ , 其中  $\alpha_j, \beta_j (j = 1, 2, \dots, n)$  分别是  $A$  和  $B$  的列向量. 注意到

$$|A+B| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n|.$$

对  $|A+B|$ , 按列用行列式的性质展开, 使每个行列式的每一列或者只含有  $\alpha_j$ , 或者只含有  $\beta_j$  (即利用大拆分法按列向量将行列式完全拆分开), 则  $|A+B|$  可以表示为  $2^n$  个这样的行列式之和. 即 (并且单独把  $k=0, n$  的项分离出来, 即将  $|A|, |B|$  分离出来)

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n| \\ &= |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} \begin{matrix} 1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n \\ |\beta_1, \dots, \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_k}, \dots, \beta_n| \end{matrix}. \end{aligned}$$

再对上式右边除  $|A|, |B|$  外的每个行列式用 Laplace 定理按含有  $A$  的列向量的那些列展开得到

$$\begin{aligned} |A+B| &= |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} \begin{matrix} 1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & n \\ |\beta_1, \dots, \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_k}, \dots, \beta_n| \end{matrix} \\ &= |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \\ &= |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$



## 例题 1.3 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中  $x$  是未定元,  $a_{ij}$  是常数. 证明:  $f(x)$  是一个最高次项系数为 1 的  $n$  次多项式, 且其  $n-1$  次项的系数等于  $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ .

 **笔记** 注意  $f(x)$  的每行每列除主对角元素外, 其他元素均不相同. 因此  $f(x)$  并不是推广的“爪”型行列式.

**解** 由行列式的组合定义可知,  $f(x)$  的最高次项出现在组合定义展开式中的单项  $(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$  中, 且展开式中的其他单项作为  $x$  的多项式其次数小于等于  $n-2$ . 因此  $f(x)$  是一个最高次项系数为 1 的  $n$  次多项式, 且其  $n-1$  次项的系数等于  $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ .

**注** 将这个例题进行推广再结合直接计算两个矩阵和的行列式的结论可以得到下述推论.

## 推论 1.3


设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶方阵,  $x$  为未定元,

$$f(x) = |xI_n - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ , 其中

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$



 **笔记** 需要注意上述推论中  $a_1 = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ ,  $a_n = (-1)^n |A|$ .

**证明** 注意到  $xI_n$  非零的  $n-k$  阶主子式只有  $n-k$  阶主子式, 并且其值为  $x^{n-k}$ , 其余  $n-k$  阶主子式均为零. 记  $\widehat{xI_n} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  是  $xI_n \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  的代数余子式, 则  $\widehat{xI_n} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  是  $xI_n$  非零的  $n-k$  阶子式. 于是我们有

$$\widehat{xI_n} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = x^{n-k}.$$

再利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论就可以得到

$$\begin{aligned} f(x) = |xI_n - A| &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n}} (-A) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{xI_n} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n |A| + x^n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} (-1)^k A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \widehat{xI_n} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \cdot x^{n-k} + (-1)^n |A| \\
&= x^n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} x^{n-k} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} + (-1)^n |A|.
\end{aligned}$$

因此  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ , 其中


$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

□

### 命题 1.11

设  $f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \cdots + a_{kk}$ , 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 知道这类行列式化简的操作即可. 以后这种行列式化简操作不再作额外说明.

**解** 利用行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 + a_{11} & x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{22} & \cdots & x_1^{n-1} + a_{n-1,1}x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_1 + a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2 + a_{11} & x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{22} & \cdots & x_2^{n-1} + a_{n-1,1}x_2^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_2 + a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + a_{11} & x_n^2 + a_{21}x_n + a_{22} & \cdots & x_n^{n-1} + a_{n-1,1}x_n^{n-2} + \cdots + a_{n-1,n-2}x_n + a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \begin{matrix} -a_{ii}j_1 + j_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ -a_{i,i-1}j_2 + j_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1 \\ \dots \\ -a_{i,i-(n-3)}j_{n-2} + j_{i+1}, i = n-2, n-1 \\ -a_{n-1,1}j_{n-1} + j_n \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

### 命题 1.12 (多项式根的有限性)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

若  $f(x)$  有  $n+1$  个不同的根  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ , 即  $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$ , 求证:  $f(x)$  是零多项式, 即  $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ .

**证明** 由  $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$ , 可知  $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$  是下列线性方程组的解:

$$\begin{cases} x_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_1^{n-1} x_{n-1} + b_1^n x_n = 0, \\ x_0 + b_2 x_1 + \cdots + b_2^{n-1} x_{n-1} + b_2^n x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_0 + b_{n+1} x_1 + \cdots + b_{n+1}^{n-1} x_{n-1} + b_{n+1}^n x_n = 0. \end{cases}$$

上述线性方程组的系数行列式是一个 Vandermode 行列式, 由于  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$  互不相同, 所以系数行列式不等于零. 由 Cramer 法则可知上述方程组只有零解. 即有  $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ . □

## 命题 1.13 (Cauchy 行列式)

计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^{-1} & (a_1 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_1 + b_n)^{-1} \\ (a_2 + b_1)^{-1} & (a_2 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_2 + b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n + b_1)^{-1} & (a_n + b_2)^{-1} & \cdots & (a_n + b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 需要记忆 Cauchy 行列式的计算方法.

1. 分式分母有公共部分可以作差, 得到的分子会变得相对简便.

2. 行列式内行列做加减一般都是加减同一行 (或列). 但是在 **循环行列式** 中, 我们一般采取相邻两行 (或列) 相加减的方法.

**解**

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{-j_n + j_i \\ i=n-1, \dots, 1}}{=} \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_1 + b_2)(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1 + b_{n-1})(a_1 + b_n)} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{b_n - b_1}{(a_2 + b_1)(a_2 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_2 + b_2)(a_2 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_2 + b_{n-1})(a_2 + b_n)} & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_n + b_1)(a_n + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_n + b_2)(a_n + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_n + b_{n-1})(a_n + b_n)} & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{-r_n + r_i \\ i=n-1, \dots, 1}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_1)(a_n + b_1)} & \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_2)(a_n + b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_{n-1})(a_n + b_{n-1})} & 0 \\ \frac{a_n - a_1}{(a_2 + b_1)(a_n + b_1)} & \frac{a_n - a_1}{(a_2 + b_2)(a_n + b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_2 + b_{n-1})(a_n + b_{n-1})} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1} + b_1)(a_n + b_1)} & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1} + b_2)(a_n + b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1} + b_{n-1})(a_n + b_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \cdots & \frac{1}{1} & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{按最后一列展开} \quad \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot D_{n-1}.
\end{aligned}$$

不断递推下去即得

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot D_{n-1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_i) (a_{n-1} - a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_j + b_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_k)} \cdot D_{n-2} \\
&= \cdots = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_i) (a_{n-1} - a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_j + b_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_k)} \cdots \frac{\prod_{i=1}^2 (b_3 - b_i) (a_3 - a_i)}{\prod_{j=1}^3 (a_j + b_3) \prod_{k=1}^2 (a_3 + b_k)} \cdot D_2 \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_i) (a_{n-1} - a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_j + b_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_k)} \cdots \frac{\prod_{i=1}^2 (b_3 - b_i) (a_3 - a_i)}{\prod_{j=1}^3 (a_j + b_3) \prod_{k=1}^2 (a_3 + b_k)} \cdot \frac{(b_2 - b_1) (a_2 - a_1)}{\prod_{j=1}^2 (a_j + b_2) (a_2 + b_1)} \cdot D_1 \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} (b_{n-1} - b_i) (a_{n-1} - a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_j + b_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (a_{n-1} + b_k)} \cdots \frac{\prod_{i=1}^2 (b_3 - b_i) (a_3 - a_i)}{\prod_{j=1}^3 (a_j + b_3) \prod_{k=1}^2 (a_3 + b_k)} \cdot \frac{(b_2 - b_1) (a_2 - a_1)}{\prod_{j=1}^2 (a_j + b_2) (a_2 + b_1)} \cdot \frac{1}{a_1 + b_1} \\
&= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + b_j) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i + b_j)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) (b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}.
\end{aligned}$$

#### 命题 1.14

计算下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解 若所有的  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都不为 0, 则有

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}} & \frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}} & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_n}{a_n} & \cdots & \frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}} & \frac{b_n^{n-1}}{a_n^{n-1}} \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right) = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i b_j - a_j b_i}{a_j a_i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i).
 \end{aligned}$$

若只有一个  $a_i$  为 0, 则将原行列式按第  $i$  行展开得到具有相同类型的  $n-1$  阶行列式

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_i^{n-1} & a_i^{n-2}b_i & \cdots & a_ib_i^{n-2} & b_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{按第 } i \text{ 行展开}}{=} (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1}^{n-1} & a_{i-1}^{n-2}b_{i-1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2} \\ a_{i+1}^{n-1} & a_{i+1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i+1}b_{i+1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

此时同理可得

$$\begin{aligned}
 |A| &= (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1}^{n-1} & a_{i-1}^{n-2}b_{i-1} & \cdots & a_{i-1}b_{i-1}^{n-2} \\ a_{i+1}^{n-1} & a_{i+1}^{n-2}b_{i+1} & \cdots & a_{i+1}b_{i+1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \frac{b_1^{n-2}}{a_1^{n-2}} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_2^{n-2}}{a_2^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} & \cdots & \frac{b_{i-1}^{n-2}}{a_{i-1}^{n-2}} \\ 1 & \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} & \cdots & \frac{b_{i+1}^{n-2}}{a_{i+1}^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_n}{a_n} & \cdots & \frac{b_n^{n-2}}{a_n^{n-2}} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} \left( \frac{b_l}{a_l} - \frac{b_k}{a_k} \right) = (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} \frac{a_k b_l - a_l b_k}{a_k a_l} \\
 &= (-1)^{n+i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} (a_k b_l - a_l b_k) = (-1)^{n-i} b_i^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} (a_k b_l - a_l b_k) \\
 &= \prod_{1 \leq k < i} a_k b_i \prod_{i < l \leq n} (-a_l b_i) \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} (a_k b_l - a_l b_k)
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k). (a_i = 0).$$

若至少有两个  $a_i = a_j = 0$ , 则第  $i$  行与第  $j$  行成比例, 因此行列式的值等于 0. 经过计算发现, 后面两种情形的答案都可以统一到第一种情形的答案.

$$\text{综上所述, } |A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i).$$

**结论 连乘号计算小结论:**

$$(1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j &= \underbrace{a_2 a_1 \cdot a_3 a_2 a_3 a_1 \cdot a_4 a_3 a_4 a_2 a_4 a_1 \cdots \cdots a_k a_{k-1} a_k a_{k-2} \cdots a_k a_1 \cdots \cdots}_{n-1 \text{ 组}} \underbrace{a_n a_{n-1} a_n a_{n-2} \cdots a_n a_1}_{n-1 \text{ 对}} \\ &\stackrel{\text{从左往右按组计数}}{=} a_1^{n-1} a_2^{1+n-2} a_3^{2+n-3} a_4^{3+n-4} \cdots a_k^{k-1+n-k} \cdots a_n^{n-1} = \prod_{i=1}^n a_i^{n-1}. \end{aligned}$$

$$(2) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq k}} a_i a_j = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} a_i^{n-2}, \text{ 其中 } k \in [1, n] \cap \mathbb{N}_+.$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq k}} a_i a_j &= \underbrace{a_2 a_1 \cdot a_3 a_2 a_3 a_1 \cdots \cdots a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_{k-1} a_1}_{k-2 \text{ 对}} \underbrace{a_{k+1} a_{k-1} \cdots a_{k+1} a_1}_{k-1 \text{ 对}} \cdots \cdots \underbrace{a_n a_{n-1} \cdots a_n a_{k+1} a_n a_{k-1} \cdots a_n a_1}_{n-2 \text{ 对}} \\ &\stackrel{\text{从左往右按组计数}}{=} a_1^{n-2} a_2^{1+n-3} a_3^{2+n-4} a_4^{3+n-4} \cdots a_{k-1}^{k-2+n-k} a_{k+1}^{k-1+n-k-1} \cdots a_n^{n-2} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} a_i^{n-2}. \end{aligned}$$


注意: 从第  $k-1$  组开始, 后面每组都比原来少一对 (后面每组均缺少原本含  $a_k$  的那一对).

#### 命题 1.15 (行列式的刻画)

设  $f$  为从  $n$  阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的  $n$  阶方阵  $A$ , 任意的指标  $1 \leq i \leq n$ , 以及任意的常数  $c$ , 满足下列条件:

- (1) 设  $A$  的第  $i$  列是方阵  $B$  和  $C$  的第  $i$  列之和, 且  $A$  的其余列与  $B$  和  $C$  的对应列完全相同, 则  $f(A) = f(B) + f(C)$ ;
- (2) 将  $A$  的第  $i$  列乘以常数  $c$  得到方阵  $B$ , 则  $f(B) = c f(A)$ ;
- (3) 对换  $A$  的任意两列得到方阵  $B$ , 则  $f(B) = -f(A)$ ;
- (4)  $f(I_n) = 1$ , 其中  $I_n$  是  $n$  阶单位阵.

求证:  $f(A) = |A|$ .

 **笔记** 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵  $n$  个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

**证明** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ , 其中  $\alpha_k$  为  $A$  的第  $k$  列,  $e_1, e_2, \cdots, e_n$  为标准单位列向量, 则

$$\alpha_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \cdots + a_{nj} e_n = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = f\left(\sum_{k=1}^n a_{k1} e_k, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right) \\ &= a_{11} f(e_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + a_{21} f(e_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \cdots + a_{n1} f(e_n, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} f(\mathbf{e}_{k_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} f\left(\mathbf{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^n a_{k_2 2} \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \alpha_n\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} [a_{12} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_1, \dots, \alpha_n) + a_{22} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_2, \dots, \alpha_n) + \dots + a_{n2} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_n, \dots, \alpha_n)] \\
&= \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^n a_{k_2 2} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \alpha_n) = \dots = \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^n a_{k_2 2} \dots \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) \\
&= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}).
\end{aligned}$$

若  $k_i = k_j$ , 则  $(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n})$  的第  $i$  列和第  $j$  列对换后仍然是  $(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n})$ . 由条件 (3) 可知,  $f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = -f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n})$ , 于是  $f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = 0$ . 因此在  $f(\mathbf{A})$  的表示式中, 只剩下  $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$  互不相同的项. 通过  $\tau(k_1 k_2 \dots k_n)$  次相邻对换可将  $(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n})$  变成  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbf{I}_n$ , 故由条件 (3) 和 (4) 可得


$$f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} f(\mathbf{I}_n) = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)}.$$

于是由行列式的组合定义可知


$$f(\mathbf{A}) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} f(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \dots k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} = |\mathbf{A}|.$$

□

## 1.2 练习

 **练习 1.1** 计算  $n$  阶行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$


 **笔记** 组合数公式:  $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$ .  
于是有

$$\begin{aligned}
C_m^k &= C_{m+1}^k - C_m^{k-1} \\
C_m^{k-1} &= C_{m+1}^k - C_m^k
\end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, \dots, 2]{(-1) \cdot r_{i-1} + r_i} \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_2^1 - C_1^0 & \cdots & C_n^1 - C_{n-1}^0 \\ 0 & C_3^2 - C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^2 - C_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[i=n, \dots, 2]{(-1) \cdot j_{i-1} + j_i} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 - C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^1 - C_{n-2}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 - C_2^2 & \cdots & C_n^2 - C_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} - C_{2n-4}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$


此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分, 并具有相同的规律. 不断这样做下去, 最后可得  $|A| = 1$

 **练习 1.2** 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

 **练习 1.3** 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \cdots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \cdots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \cdots & a_3 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \cdots & a_n b_n \end{vmatrix}.$$



解

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{(-a_i)r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}]{a_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & a_3b_n - a_nb_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{按第 } n \text{ 列展开}]{(-1)^{n+1} a_1 b_n} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n - a_nb_1 & a_2b_n - a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i) \\
&= a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} b_i - a_i b_{i+1}).
\end{aligned}$$

练习 1.4 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解


$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{按第一列展开}]{a^n + (-1)^{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^n - a^{n-2}.$$

注 本题也可由命题 1.3 直接得到,  $|A| = a^n - a^{n-2}$ .练习 1.5 设  $x_1, x_2, x_3$  是方程  $x^3 + px + q = 0$  的 3 个根, 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

解 由 Vieta 定理可知,  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . 因此, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_i+r_1 \\ i=2,3}]{0} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

 **练习 1.6** 设  $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$ , 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解


$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{11} & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{21} & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n1} & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\cdots,n}]{(n-1)} \begin{vmatrix} (n-1)(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (n-1)(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = (n-1) \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{12} & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) - a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{22} & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{n2} & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) - a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{(-1)j_1+j_i \\ i=2,\cdots,n}]{(n-1)} \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\cdots,n}]{(n-1)} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**结论** 第二个等号是行列式计算中的一个常用方法**求和法**:

将除第一列外的其余列全部加到第一列上 (或将除第一行外的其余行全部加到第一行上), 使第一列 (或列) 一样或者具有相同形式. 然后根据具体情况将第一列 (或行) 的倍数加到其余列 (或行) 上, 从而将行列式化为我们熟悉的形式.

应用该方法的一般情形:

1. 行列式每行 (或列) 和相等时;
2. 行列式每行 (或列) 和有一定规律时.

 **练习 1.7** 计算  $n$  阶行列式:


$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解


$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\dots,n}]{\substack{j_i+j_1 \\ i=2,\dots,n}} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}]{\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1). \end{aligned}$$

**注** 因为  $|A|$  除对角元素外, 每行都一样, 所以本题也可以看成命题 1.1 的应用, 利用命题 1.1 的计算方法直接得到结果.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}]{\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{命题 1.2}} - \sum_{i=2}^n (-1)^{n-2} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

 **练习 1.8** 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 既可以将  $|A|$  看作命题 1.1 的应用, 利用命题 1.1 的计算方法直接得到结果. 即下述解法一.  
也可以利用求和法将  $|A|$  化为上三角形行列式. 即下述解法二.

解 解法一:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}]{\substack{-r_1+r_i \\ i=2,\dots,n}} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{命题 1.3}} (a_1+b) b^{n-1} - \sum_{i=2}^n b^{n-2} a_i (-b) = b^{n-1} \left[ (a_1+b) + \sum_{i=2}^n a_i \right] = \left( b + \sum_{i=1}^n a_i \right) b^{n-1}. \end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{j_i+j_1} (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2, \dots, n]{-a_i \cdot j_1 + j_i} (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b + \sum_{i=1}^n a_i) b^{n-1}.
 \end{aligned}$$


练习 1.9 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

笔记 求和法的经典应用.

解

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{j_i+j_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2, \dots, n]{-r_1+r_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2, \dots, n]{-j_1+j_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{n(n+1)}{2} (-n)^{n-2} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.
 \end{aligned}$$


 **练习 1.10** 计算  $D_{n+1} = \begin{vmatrix} (a_0 + b_0)^n & (a_0 + b_1)^n & \cdots & (a_0 + b_n)^n \\ (a_1 + b_0)^n & (a_1 + b_1)^n & \cdots & (a_1 + b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n + b_0)^n & (a_n + b_1)^n & \cdots & (a_n + b_n)^n \end{vmatrix}.$

**解** 由二项式定理可知

$$(a_i + b_j)^n = a_i^n + C_n^1 a_i^{n-1} b_j + \cdots + C_n^{n-1} a_i b_j^{n-1} + b_j^n, \text{ 其中 } i, j = 0, 1, \cdots, n.$$

从而

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_0 b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_0^n + C_n^1 a_0^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_0 b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_1 b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_1^n + C_n^1 a_1^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_1 b_n^{n-1} + b_n^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_{n-1}^n + C_n^1 a_{n-1}^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_{n-1} b_n^{n-1} + b_n^n \\ a_n^n + C_n^1 a_n^{n-1} b_0 + \cdots + C_n^{n-1} a_n b_0^{n-1} + b_0^n & \cdots & a_n^n + C_n^1 a_n^{n-1} b_n + \cdots + C_n^{n-1} a_n b_n^{n-1} + b_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & a_0 & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^n & a_{n-1}^{n-1} & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ C_n^1 b_0 & C_n^1 b_1 & \cdots & C_n^1 b_{n-1} & C_n^1 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} b_0^{n-1} & C_n^{n-1} b_1^{n-1} & \cdots & C_n^{n-1} b_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{列倒排}}{=} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_{n-1}^{n-1} & b_n^{n-1} \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_{n-1}^n & b_n^n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \leq j < i \leq n} (b_i - b_j) = \prod_{i=1}^{n-1} C_n^i \prod_{0 \leq j < i \leq n} (a_j - a_i) (b_i - b_j). \end{aligned}$$

 **练习 1.11** 计算  $n$  阶行列式 ( $bc \neq 0$ ):

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

**解** 由命题 1.6 可知, 递推式为  $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} (n \geq 2)$ . 又易知  $D_0 = 1, D_1 = a$ . 令  $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$ , 其中  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  是特征方程  $\lambda^2 = a\lambda - bc\lambda$  的两个复根, 则  $D_n = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} (n \geq 2)$ . 从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}).$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-1} (D_1 - \alpha D_0) = \beta^{n-1} (a - \alpha) = \beta^n,$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-1} (D_1 - \beta D_0) = \alpha^{n-1} (a - \beta) = \alpha^n.$$

因此, 若  $a^2 \neq 4bc$  (即  $\alpha \neq \beta$ ), 则联立上面两式, 解得

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若  $a^2 = 4bc$  (即  $\alpha = \beta$ ), 则由  $a = \alpha + \beta$  可知,  $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$ . 又由  $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$  可得

$$D_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2} D_{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{a}{2} \left( \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + \frac{a}{2} D_{n-2} \right) = 2 \left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 D_{n-2} = \cdots = n \left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^n D_0 = (n+1) \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

 **练习 1.12** 求证:  $n$  阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \cos nx.$$

**解 解法一:**

设  $|A| = D_n$ , 其中  $n$  表示  $|A|$  的阶数 ( $n \geq 0$ ). 易知  $D_0 = 1, D_1 = \cos x$ .

从而  $|A| = D_n \xrightarrow{\text{按最后一列展开}} 2 \cos x D_{n-1} - D_{n-2} \quad (n \geq 2)$ .

命题 1.6

其对应的特征方程为  $\lambda^2 = 2 \cos x \lambda - 1$ , 解得  $\lambda_1 = \cos x + i \sin x, \lambda_2 = \cos x - i \sin x$ .

于是当  $n \geq 2$  时, 我们有  $D_n = (\lambda_1 + \lambda_2) D_{n-1} + \lambda_1 \lambda_2 D_{n-2}$ .

进而

$$\begin{aligned} D_n - \lambda_1 D_{n-1} &= \lambda_2 (D_n - \lambda_1 D_{n-1}), \\ D_n - \lambda_2 D_{n-1} &= \lambda_1 (D_n - \lambda_2 D_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

由此可得

$$D_n - \lambda_1 D_{n-1} = \lambda_2^{n-1} (D_1 - \lambda_1 D_0) = -i \sin x \cdot \lambda_2^{n-1},$$

$$D_n - \lambda_2 D_{n-1} = \lambda_1^{n-1} (D_1 - \lambda_2 D_0) = i \sin x \cdot \lambda_1^{n-1}.$$

若  $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 则联立上面两式, 解得

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{i \sin x \cdot \lambda_1^n + i \sin x \cdot \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{i \sin x \cdot (\cos x + i \sin x)^n + i \sin x \cdot (\cos x - i \sin x)^n}{2i \sin x} \\ &\xrightarrow{\text{Euler公式}} \frac{i \sin x \cdot e^{nxi} + i \sin x \cdot e^{-nxi}}{2i \sin x} = \frac{i \sin x \cdot (\cos nx + i \sin nx) + i \sin x \cdot (\cos nx - i \sin nx)}{2i \sin x} \\ &= \frac{2i \sin x \cdot \cos nx}{2i \sin x} = \cos nx. \end{aligned}$$

若  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 则  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos k\pi$ . 从而由 (1.1) 式可得,  $D_n - \cos k\pi D_{n-1} = -i \sin x \cdot (\cos k\pi) = 0$ .

于是

$$D_n = \cos k\pi D_{n-1} = (\cos k\pi)^2 D_{n-2} = \cdots = (\cos k\pi)^n D_0 = (\cos k\pi)^n = (-1)^{kn} = \cos(nk\pi) = \cos nx.$$

**解法二:** 仿照练习 1.14 中的数学归纳法证明.

 **练习 1.13** 求下列  $n$  阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$



**笔记** 观察原行列式我们可以得到,  $D_n$  的每列和有一定的规律, 即除了第一列和最后一列, 中间每列和均为 0. 并且  $D_n$  是三对角行列式. 因此, 我们既可以直接应用三对角行列式的结论 (即命题 1.6), 又可以使用求和法进行求解. 如果我们直接应用三对角行列式的结论 (即命题 1.6), 按照对一般的三对角行列式展开的方法能得到相应递推式,

但是这样得到的递推式并不是相邻两项之间的递推, 后续求解通项并不简便. 又因为使用求和法计算行列式后续计算一般比较简便所以我们先采用求和法进行尝试.

**解 解法一:** 当  $n \geq 1$  时, 我们有

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i+r_1]{i=2,\cdots,n} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{按第一行展开}} -a_1 D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -a_1 D_{n-1} + (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \\
 &= 1 - a_1 D_{n-1}.
 \end{aligned}$$

其中  $D_{n-i}$  表示  $D_{n-i+1}$  去掉第一行和第一列得到的  $n-i$  阶行列式,  $i = 1, 2, \cdots, n-1$ . (或者称  $D_{n-i}$  表示以  $a_{i+1}, \cdots, a_n$  为未定元的  $n-i$  阶行列式,  $i = 1, 2, \cdots, n-1$ )

由递推不难得到

$$D_n = 1 - a_1 (1 - a_2 D_{n-2}) = 1 - a_1 + a_1 a_2 D_{n-2} = \cdots = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

**解法二:** 仿照练习 1.14 中的数学归纳法证明.

**练习 1.14** 设  $n$  阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$A_n = a_0 a_1 \cdots a_n \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

**笔记** 用**数学归纳法**证明与行列式有关的结论.

练习 1.12 和练习 1.13 都可同理使用数学归纳法证明 (对阶数  $n$  进行归纳即可).

**证明** (数学归纳法) 对阶数  $n$  进行归纳. 当  $n = 1, 2$  时, 结论显然成立. 假设阶数小于  $n$  结论成立.

现证明  $n$  阶的情形. 注意到


$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix} = (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1}^2 A_{n-2}.$$

将归纳假设代入上面的式子中得

$$\begin{aligned}
 A_n &= (a_{n-1} + a_n) A_{n-1} - a_{n-1}^2 A_{n-2} \\
 &= (a_{n-1} + a_n) a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) - a_{n-1}^2 a_0 a_1 \cdots a_{n-2} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 a_1 \cdots a_n \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + a_0 a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1}^2 \frac{1}{a_{n-1}} \\
&= a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \left[ a_n \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + 1 \right] \\
&= a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right).
\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论对任意正整数  $n$  都成立. □

 **练习 1.15** 设  $n(n > 2)$  阶行列式  $|A|$  的所有元素或为 1 或为 -1, 求证:  $|A|$  的绝对值小于等于  $\frac{2}{3}n!$ .

**解** 对阶数  $n$  进行归纳. 当  $n = 3$  时, 将  $|A|$  的第一列元素为 -1 的行都乘以 -1, 再将  $|A|$  的第一行元素为 1 的列都乘以 -1,  $|A|$  的绝对值不改变.

因此不妨设  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ , 其中  $a_0, b_0, c_0, d_0 = 1$  或  $-1$ .

从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a_0 & b_0 \\ 1 & c_0 & d_0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3]{\frac{j_1+j_i}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a, b, c, d = 0 \text{ 或 } 2.$$

于是

$$abs(|A|) = abs \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} \right) = abs(ad - bc) \leq 4 = \frac{2}{3} \cdot 3!$$


假设  $n-1$  阶时结论成立, 现证  $n$  阶的情形. 将  $|A|$  按第一行展开得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \text{ 其中 } a_{1i} = 1 \text{ 或 } -1 (i = 1, 2, \cdots, n).$$


从而由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
abs(|A|) &= abs(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) \leq abs(A_{11}) + abs(A_{12}) + \cdots + abs(A_{1n}) \\
&\leq \frac{2}{3}(n-1)! + \frac{2}{3}(n-1)! + \cdots + \frac{2}{3}(n-1)! \\
&= n \cdot \frac{2}{3}(n-1)! = \frac{2}{3}n!.
\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知结论对任意正整数都成立.

 **练习 1.16** 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 解法一 (大拆分法): 注意到

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b) \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n A_i = (a-b)^n + \sum_{i=1}^n A_i.$$

其中  $A_i$  是第  $i$  行元素全为  $b$ , 主对角元素除了  $(i, i)$  元外都为  $a-b$ , 其他元素都为 0 的  $n$  阶行列式.

又因为

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & a-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ i & b & \cdots & b & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & & \\ n & & & & & a-b \end{vmatrix} = b(a-b)^{n-1}, i=1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$|A| = (a-b)^n + \sum_{i=1}^n A_i = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

**解法二 (小拆分法):** 记原行列式为  $D_n$ , 其中  $n$  为原行列式的阶数. 则将原行列式按第一列拆开为两个行列式得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \cdots & b \\ b+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}. (n \geq 2) \end{aligned}$$

从而由上式递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \\ &= b(a-b)^{n-1} + (a-b)[b(a-b)^{n-2} + (a-b)D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\ &= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\ &= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\ &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

**解法三 (求和法):**

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{j_i+j_1 \\ i=2,3,\cdots,n}]{\substack{j_i+j_1 \\ i=2,3,\cdots,n}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{-r_1+r_i \\ i=2,3,\cdots,n}]{\substack{-r_1+r_i \\ i=2,3,\cdots,n}} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

解法四 (“爪”型行列式的推广):

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}]{\substack{-r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-j_1+j_i \\ i=2,3,\dots,n}]{\substack{-j_1+j_i \\ i=2,3,\dots,n}} \begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a-(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

练习 1.17 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 解法一 (大拆分法): 令

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix} = |A| + tu, u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

当  $t = -b$  时, 可得

$$|A(-b)| = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} = |A| - bu = (a-b)^n.$$

当  $t = -c$  时, 可得

$$|A(-c)| = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} = |A| - cu = (a-c)^n.$$

若  $b \neq c$ , 则联立上面两式可得

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若  $b = c$ , 则由练习 1.16 可知

$$|A| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解法二 (小拆分法): 记原行列式为  $D_n$ , 其中  $n$  为原行列式的阶数. 则将原行列式分别按第一行、第一列拆开为两个行列式得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} + (a-b) D_{n-1} \\
&= b(a-c)^{n-1} + (a-b) D_{n-1} \quad (n \geq 2) \\
D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+(a-c) & b & \cdots & b \\ c+0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & b & \cdots & b \\ 0 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= c \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} + (a-c) D_{n-1} \\
&= c(a-b)^{n-1} + (a-c) D_{n-1} \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

若  $b \neq c$ , 则联立上面两式可得


$$|A| = D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

若  $b = c$ , 则由上面式子递推可得

$$\begin{aligned}
|A| &= D_n = b(a-b)^{n-1} + (a-b) D_{n-1} \\
&= b(a-b)^{n-1} + (a-b) [b(a-b)^{n-2} + (a-b) D_{n-2}] = 2b(a-b)^{n-1} + (a-b)^2 D_{n-2} \\
&= \cdots = (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} D_1 \\
&= (n-1)b(a-b)^{n-1} + (a-b)^{n-1} a \\
&= [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

当  $b = c$  时, 也可以由练习 1.16 可知

$$|A| = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}.$$

 **练习 1.18** 设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  是次数不超过  $n-2$  的多项式, 求证: 对任意  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

**证明 证法一 (大拆分法):** 因为  $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$  的次数不超过  $n-2$ , 所以它们都是单项式  $1, x, \dots, x^{n-2}$  的线性组合. 将原行列式中每一列的多项式都按这  $n-1$  个单项式进行拆分, 最后得到至多  $(n-1)!$  个简单行列式之和, 这些行列式中每一列的多项式只是单项式. 由于每个简单行列式都有  $n$  列, 根据抽屉原理, 每个简单行列式中至少有两列是共用同一个单项式 (可能相差一个常系数), 于是这两列成比例, 从而所有这样的简单行列式都等于零, 因此原行列式也等于零.

**证法二 (多项式根的有限性):** 令  $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$ , 则将  $f(x)$  按第一列展开得到

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x).$$

其中  $k_i$  为行列式  $f(x)$  的第  $(i, 1)$  元素的代数余子式,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

注意  $k_i$  与  $x$  无关, 均为常数. 若  $f(x)$  不恒为 0, 则又因为  $f_k(x) (1 \leq k \leq n)$  的次数不超过  $n-2$ , 所以  $\deg f(x) \leq n-2$ . 但是, 注意到  $f(a_2) = f(a_3) = \dots = f(a_n) = 0$ , 即  $f(x)$  有  $n-1$  个根. 于是由余数定理可知,  $(x-a_2)\cdots(x-a_n) | f(x)$ . 从而  $n-1 = \deg(x-a_2)\cdots(x-a_n) \geq \deg f(x)$ . 这与  $\deg f(x) \leq n-2$  矛盾. 故  $f(x) \equiv 0$ , 当然也有  $f(a_1) = 0$ .

证法三:

设多项式

$$f_k(x) = c_{k,n-2}x^{n-2} + \dots + c_{k1}x + c_{k0}, 1 \leq k \leq n.$$

则有如下的矩阵分解:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdots & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1,n-2} & c_{2,n-2} & \cdots & c_{n,n-2} \end{pmatrix}.$$

注意到上式右边的两个矩阵分别是  $n \times (n-1)$  和  $(n-1) \times n$  矩阵, 故由 Cauchy - Binet 公式马上得到左边矩阵的行列式值等于零.  $\square$

### 命题 1.16

计算  $n$  阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}.$$

解 (小拆分法) 对第  $n$  列进行拆分即可得到递推式: (对第 1 或  $n$  行 (或列) 拆分都可以得到相同结果)

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y+0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y+0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y+0 \\ z & z & z & \cdots & z & y+x_n-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x_n-y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-z & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + (x_n-y) D_{n-1} = y \prod_{i=1}^{n-1} (x_i-z) + (x_n-y) D_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

将原行列式转置后, 同理可得


$$\begin{aligned}
 D_n = D_n^T &= \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z+0 \\ y & x_2 & z & \cdots & z & z+0 \\ y & y & x_3 & \cdots & z & z+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z+0 \\ y & y & y & \cdots & y & z+x_n-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & z \\ y & x_2 & z & \cdots & z & z \\ y & y & x_3 & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & z \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z & z & \cdots & z & 0 \\ y & x_2 & z & \cdots & z & 0 \\ y & y & x_3 & \cdots & z & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x_n-z \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & z \end{vmatrix} + (x_n-z) D_{n-1}^T = z \prod_{i=1}^{n-1} (x_i-y) + (x_n-z) D_{n-1}. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

若  $z \neq y$ , 则联立(1.2)(1.3)式, 解得


$$D_n = \frac{1}{z-y} \left[ z \prod_{i=1}^n (x_i-y) - y \prod_{i=1}^n (x_i-z) \right];$$

若  $z = y$ , 则由(1.2)式递推可得

$$\begin{aligned}
 D_n &= y \prod_{i=1}^{n-1} (x_i-y) + (x_n-y) D_{n-1} \\
 &= y \prod_{i=1}^{n-1} (x_i-y) + (x_n-y) \left( y \prod_{i=1}^{n-2} (x_i-y) + (x_{n-1}-y) D_{n-2} \right) \\
 &= y \prod_{j \neq n} (x_j-y) + y \prod_{j \neq n-1} (x_j-y) + (x_n-y) (x_{n-1}-y) D_{n-2} \\
 &= \cdots = y \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x_j-y) + \prod_{i=1}^n (x_i-y) D_0 \\
 &= y \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x_j-y) + \prod_{i=1}^n (x_i-y).
 \end{aligned}$$

 **练习 1.19** 求下列  $n$  阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

 **笔记** 本题行列式每行或每列求和后得到的结果不具备明显的规律性, 故不适合使用**求和法**.

本题行列式难以找到合适的  $t$  对其进行**大拆分**, 故也不适合使用大拆分法.(并且因为难以找到合适的  $t_i$ , 所以推广的**大拆分**也不行)

**解** (小拆分法) 将  $D_n$  最后一列拆成两列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & 0 \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + D_{n-1}.$$

若  $a_n \neq 0$ , 则由上式可得

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \xrightarrow[i=1,2,\dots,n]{\text{对第一个行列式: } -a_i j_n + j_i} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} = a_n^2 + D_{n-1}. \quad (n \geq 2)$$

若  $a_n = 0$ , 则上面第一个行列式等于 0, 进而  $D_n = D_{n-1} (n \geq 0)$ . 仍然满足上述递推式.

从而由上式递推可得

$$D_n = a_n^2 + D_{n-1} = a_n^2 + (a_{n-1}^2 + D_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=2}^n a_i^2 + D_1 = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

 **练习 1.20** 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos (n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos (n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos (n-1)\theta_n \end{vmatrix}.$$

**解** 由 De Moivre 公式及二项式定理, 可得

$$\begin{aligned} \cos k\theta + i \sin k\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k \\ &= \cos^k \theta + i C_k^1 \cos^{k-1} \theta \sin \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta \sin^2 \theta + i C_k^3 \cos^{k-3} \theta \sin^3 \theta - \cdots \\ &= \cos^k \theta + i C_k^1 \cos^{k-1} \theta \sin \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta (1 - \cos^2 \theta) + i C_k^3 \cos^{k-3} \theta \sin^3 \theta - \cdots \end{aligned}$$

比较实部可得

$$\begin{aligned} \cos k\theta &= \cos^k \theta (1 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots) - C_k^2 \cos^{k-2} \theta + C_k^4 \cos^{k-4} \theta - \cdots \\ &= 2^{k-1} \cos^k \theta - C_k^2 \cos^{k-2} \theta + C_k^4 \cos^{k-4} \theta - \cdots \end{aligned}$$

利用这个事实, 依次将原行列式各列表示成  $\cos \theta_j (j = 2, 3, \dots, n)$  的多项式.

再利用行列式的性质, 可依次将第 3, 4,  $\dots$ ,  $n$  列消除最高次项外的其他项, 从而得到

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & 2 \cos^2 \theta_1 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & 2 \cos^2 \theta_2 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & 2 \cos^2 \theta_n & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos^2 \theta_2 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos^2 \theta_n & \cdots & \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} \\ &= 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \end{aligned}$$

**结论** 组合式计算常用公式:

$$(1) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$(2) C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

证明:(1)

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m+m)}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \end{aligned}$$

(2)(i) 当  $n$  为奇数时, 由  $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ , 可得

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n \end{aligned}$$

由于  $C_{n-1}^n = 0$ , 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.

而上面两式相加, 得  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ .

故  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$ .

(ii) 当  $n$  为偶数时, 由  $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ , 可得


$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \cdots + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n \\ C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^{n-1} &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} \end{aligned}$$

由于  $C_{n-1}^n = 0$ , 再对比上面两式每一项可知, 上面两式相等.


而上面两式相加, 得  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ .

故  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$ .

综上所述,  $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$ .

 **练习 1.21** 求下列行列式式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$


 **笔记** 可以利用上一题类似的方法求解. 但我们给出另外一种解法, 目的是直接利用上一题的结论.

**解** 根据和差化积公式, 可得


$$\sin k\theta - \sin(k-2)\theta = 2\sin\theta \cos(k-1)\theta, k=2, 3, \cdots, n.$$

再结合上一题结论, 可得

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & 2\sin \theta_1 \cos \theta_1 & \cdots & 2\sin \theta_1 \cos(n-1)\theta_1 \\ \sin \theta_2 & 2\sin \theta_2 \cos \theta_2 & \cdots & 2\sin \theta_2 \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & 2\sin \theta_n \cos \theta_n & \cdots & 2\sin \theta_n \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\ &= 2^{n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n-1} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i) \\ &= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \end{aligned}$$

 **练习 1.22** 计算  $n$  阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 本题也可以使用大拆分法进行求解. 但我们以本题为例介绍利用升阶法计算行列式.

解 解法一升阶法:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{小拆分法}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= 2x_1x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - (x_1-1)(x_2-1) \cdots (x_n-1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= 2x_1x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - (x_1-1)(x_2-1) \cdots (x_n-1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= [2x_1x_2 \cdots x_n - (x_1-1)(x_2-1) \cdots (x_n-1)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

解法二 (大拆分法): 设  $|B(t)| = \begin{vmatrix} x_1+t & x_1^2+t & \cdots & x_1^n+t \\ x_2+t & x_2^2+t & \cdots & x_2^n+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+t & x_n^2+t & \cdots & x_n^n+t \end{vmatrix}$ , 且  $B_{ij}$  是  $|B(0)|$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式.

根据行列式的性质将  $|A|$  每一列都拆分成两列, 然后按  $t$  所在的列展开得到

$$\begin{aligned}
 |A| &= |B(1)| = |B(0)| + \sum_{i,j=1}^n B_{ij}, \\
 |B(-1)| &= |B(0)| - \sum_{i,j=1}^n B_{ij}.
 \end{aligned}$$

于是  $|A| = 2|B(0)| - |B(-1)|$ . 注意到

$$|B(0)| = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = x_1x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$



又由行列式性质可得

$$\begin{aligned}
 |B(-1)| &= \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_1^2 - 1 & \cdots & x_1^n - 1 \\ x_2 - 1 & x_2^2 - 1 & \cdots & x_2^n - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - 1 & x_n^2 - 1 & \cdots & x_n^n - 1 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + 1 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdots + x_1 + 1 \\ 1 & x_2 + 1 & \cdots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \cdots + x_2 + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + 1 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \cdots + x_n + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

故可得


$$\begin{aligned}
 |A| &= 2|B(0)| - |B(-1)| = 2x_1x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= [2x_1x_2 \cdots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

**结论 升阶法:** 将原行列式加上一行和一列使得得到新行列式的阶数比原行列式要高一阶.

**升阶法的应用:**

(1) 当原行列式每一行具有相同的结构时, 我们可以在原行列式的基础上加上一行和一列, 新加的一列和一行需要满足: 新的一列除了与新的一行交叉位置的元素为 1 外其余全为 0 (这样才能保证新的行列式按新的一行或一列展开后与原行列式相同), 并且新加上一行除 1 以外其他位置的元素就取原行列式中每一行所具有的相同结构 (这样可以利用行列式的性质将每一行中的相同的结构减去, 进而达到简化原行列式的目的). 具体例子见练习 1.22.

(2) 当原行列式是我们由熟悉的行列式去掉某一行、或某一列、或某一行和一列得到的, 我们可以在原行列式的基础上补充上缺少的那一行和一列, 再进行计算得到新行列式的式子, 再将新行列式按照新添加的一行或一列展开得到的对应元素乘与其对应的代数余子式, 而新添加的一行和一列交叉位置的元素对应的余子式就是原行列式, 最后两边式子比较系数一般就能得到原行列式的值. 具体例子见练习 1.23.

 **练习 1.23** 求下列  $n$  阶行列式的值 ( $1 \leq i \leq n-1$ ):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

**解 令**

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix} = (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (1.4)$$

而上式右边是关于  $y$  的  $n$  次多项式, 并且其  $y^i$  前的系数是

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-i} \leq n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

将  $|B|$  按最后一行展开, 得

$$|B| = A_{n1} + A_{n2}y + \cdots + A_{ni}y^i + \cdots + A_{nn}y^n,$$

其中  $A_{nk}$  为  $|B|$  的  $(n, k)$  位置元素的代数余子式,  $k = 1, 2, \cdots, n$ .


注意到  $A_{nk}$  均与  $y$  无关. 因此  $|B|$  作为关于  $y$  的  $n$  次多项式, 其  $y^i$  前的系数是

$$A_{ni} = (-1)^{n+1+i+1} |A| = (-1)^{n+i} |A|.$$


再结合(1.4)式, 可知

$$(-1)^{n+i} |A| = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-i} \leq n} (-1)^{n-i} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

$$\text{故 } |A| = x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

 **练习 1.24** 求下列  $n$  阶行列式的值, 其中  $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 解法一中不仅使用了升阶法还使用了分块“爪”型行列式的计算方法. 观察到各行各列有不同的公共项, 因此可以利用升阶法将各行各列的公共项消去.

**解** 解法一 (升阶法):

$$\begin{aligned} |A| &\xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1+r_i]{i=1,2,\cdots,n+1} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ -a_2 & 1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n & -a_n \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[j_1+j_i]{i=1,3,4,\cdots,n+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{2}j_i + j_1 \\ \frac{1}{2a_{i-2}}j_i + j_2 \\ \hline i=3,4,\dots,n+2 \end{array} \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{S}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{T}{2} & 1-\frac{n}{2} & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_n \end{vmatrix}.$$

其中  $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ,  $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ . 注意到上述行列式是分块上三角行列式, 从而可得

$$|A| = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \cdot \frac{(n-2)^2 - ST}{4} = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})].$$

解法二 (直接计算两个矩阵和的行列式):

$$\text{设 } B = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}, \text{ 则 } |A| = |B + C|.$$

从而利用直接计算两个矩阵和的行列式的结论得到

$$|A| = |B| + |C| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n}} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right) \quad (1.5)$$

其中  $\widehat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  是  $C \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  的代数余子式.

我们先来计算  $B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 拆分  $B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  的第一列得到

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{i_1} + a_{j_1} & a_{i_1} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_1} + a_{j_k} \\ a_{i_2} + a_{j_1} & a_{i_2} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_2} + a_{j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k} + a_{j_1} & a_{i_k} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_k} + a_{j_k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{i_1} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_1} + a_{j_k} \\ a_{i_2} & a_{i_2} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_2} + a_{j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k} & a_{i_k} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_k} + a_{j_k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_1} + a_{j_k} \\ a_{j_1} & a_{i_2} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_2} + a_{j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_1} & a_{i_k} + a_{j_2} & \cdots & a_{i_k} + a_{j_k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k} \\ a_{i_2} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1} & \cdots & a_{i_1} \\ a_{j_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_1} & a_{i_k} & \cdots & a_{i_k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

因此当  $k \geq 3$  时,  $B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0$ ; 当  $k = 2$  时,  $B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{j_2} \\ a_{i_2} & a_{j_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{i_1} \\ a_{j_1} & a_{i_2} \end{vmatrix} =$

$(a_{i_1}a_{j_2} - a_{i_2}a_{j_1})(a_{i_2}a_{j_1} - a_{i_1}a_{j_1})$ ; 当  $k = 1$  时,  $\mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} = a_{i_1} + a_{j_1}$ .

又注意到  $|\mathbf{C}|$  只有主子式非零, 而其主子式  $\mathbf{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = (-2)^k a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ . 于是当  $\exists m \in \{1, 2, \cdots, k\}$ , 使得  $i_m \neq j_m$  时,  $\widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0$ ; 当  $i_m = j_m, m = 1, 2, \cdots, k$  时,  $\widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = (-2)^{n-k} a_1 \cdots \hat{a}_{i_1} \cdots \hat{a}_{i_2} \cdots \hat{a}_{i_k} \cdots a_n$ .

故当  $n \geq 3$  时, (1.5) 式可化为

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n}} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right) \\
&= |\mathbf{C}| + \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ 1 \leq j_1 \leq n}} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq n}} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \\
&= |\mathbf{C}| + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} = |\mathbf{C}| + \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{B} \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \\
&= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n + \sum_{1 \leq i \leq n} 2a_i (-2)^{n-1} a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(a_i a_j - a_j^2)(a_i a_j - a_i^2)(-2)^{n-2} a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n] \\
&= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n \sum_{1 \leq i \leq n} a_1 a_2 \cdots \cdots a_n + (-2)^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [-(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n] \\
&= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n - (-2)^n n a_1 a_2 \cdots \cdots a_n - (-2)^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(a_i - a_j)^2 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_n] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i (1 - n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i [(n-2)^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i (1 - n) - (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{a_j}{a_i} + \frac{a_i}{a_j} - 2 \right) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n - \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2 \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n - \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} - n \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ 4 - 4n + n + n(n-1) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i}{a_j} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ n^2 - 4n + 4 - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ (n-2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right].
\end{aligned}$$

解法三: 令  $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}$ , 则

$$A = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = B + \Lambda I_2^{-1} \Lambda'.$$

于是由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\begin{aligned}
|A| &= |I| |B + \Lambda I_2^{-1} \Lambda'| = \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & B \end{vmatrix} = |B| |I_2 - \Lambda' B^{-1} \Lambda| \\
&= \begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix} \cdot \left| I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & & & \\ & -\frac{1}{2a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & -\frac{1}{2a_2} & \cdots & -\frac{1}{2a_n} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left| I_2 - \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \right| = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} \frac{n+2}{2} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & \frac{n+2}{2} \end{vmatrix} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[ (n+2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right].
\end{aligned}$$

**结论** 对角矩阵行列式的子式和余子式:

设  $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ , 则其  $k$  阶子式  $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  除  $k$  阶主子式  $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$  外都为零,

其中  $k = 1, 2, \dots, n$ .

记  $\widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  为  $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  的代数余子式 ( $n-k$  阶). 于是  $\widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$  除  $\widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$  外也都为零, 其中  $k = 1, 2, \dots, n$ .

并且

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k},$$

$$\widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = a_1 \cdots \widehat{a}_{i_1} \cdots \widehat{a}_{i_2} \cdots \widehat{a}_{i_k} \cdots a_n$$


其中  $k = 1, 2, \cdots, n$ .

 **练习 1.25** 若  $n$  阶行列式  $|A|$  中零元素的个数超过  $n^2 - n$  个, 证明:  $|A| = 0$ .

**解** 证明由行列式的组合定义可得

$$|A| = \sum_{1 \leq k_1 k_2 \cdots k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}}$$


由于  $|A|$  中零元素的个数超过  $n^2 - n$  个, 故  $a_{k_{11}}, a_{k_{22}}, \cdots, a_{k_{nn}}$  中至少有一个为零, 从而  $a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}} = 0$ , 因此  $|A| = 0$ . 如直接利用行列式的性质, 也可以这样来证明: 因为  $|A|$  中零元素的个数超过  $n^2 - n$  个, 由抽屉原理可知,  $|A|$  至少有一列其零元素的个数大于等于  $\left\lfloor \frac{n^2 - n}{n} \right\rfloor + 1 = n$ , 即  $|A|$  至少有一列其元素全为零, 因此  $|A| = 0$ .

 **练习 1.26** 设  $A = (a_{ij})$  是  $n(n \geq 2)$  阶非异整数方阵, 满足对任意的  $i, j, |A|$  均可整除  $a_{ij}$ , 证明:  $|A| = \pm 1$ .

**解**  $|A|$  可整除每个元素  $a_{i,j}$ , 故由行列式的组合定义

$$\sum_{1 \leq k_1, k_2, \cdots, k_n \leq n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}}$$

可知  $|A|^n$  可整除  $|A|$  中每个单项  $a_{k_{11}} a_{k_{22}} \cdots a_{k_{nn}}$ , 从而  $|A|^n$  可整除  $|A|$ , 即有  $|A|^{n-1}$  可整除 1, 于是  $|A|^{n-1} = \pm 1$ . 又由行列式的组合定义可知  $|A|$  是整数, 从而只能是  $|A| = \pm 1$ .

 **练习 1.27** 利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式:

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

**解** 显然下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix}.$$

利用 Laplace 定理按第一、二列展开得


$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

上式等价于

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' \\ d & d' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ d & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

整理可得

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

 **练习 1.28** 求  $2n$  阶行列式的值 (空缺处都是零):

$$\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix}.$$

**解** 设原行列式为  $D_{2n}$ , 其中  $2n$  为行列式的阶数. 不断用 Laplace 定理按第一行及最后一行展开, 可得


$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行及最后一行展开}} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)}.$$

进而, 由上述递推式可得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 \\ &= (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n. \end{aligned}$$

 **练习 1.29** 求下列  $n$  阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的“爪”型行列式.

**解**

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 2a_1x - x^2 & x^2 - 2a_2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1x - x^2 & 0 & \cdots & x^2 - 2a_nx \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{“爪”型行列式}} (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) - \sum_{i=2}^n a_i^2 (2a_1x - x^2) (x^2 - 2a_2x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n a_i^2 (x^2 - 2a_1x) (x^2 - 2a_2x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= (x-a_1)^2 \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= \left[ (x^2 - 2a_1x) + a_1^2 \right] \prod_{i=2}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=2}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx) \\ &= \prod_{i=1}^n (x^2 - 2a_ix) + \sum_{i=1}^n (x^2 - 2a_1x) \cdots (x^2 - 2a_{i-1}x) a_i^2 (x^2 - 2a_{i+1}x) \cdots (x^2 - 2a_nx). \end{aligned}$$

练习 1.30 求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

解 解法一:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-j_1+j_i \\ i=1,2}]{\substack{-j_1+j_i \\ i=1,2}} \begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & c^2 & 0 \\ a^2 - (b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2 - (b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2 - b^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-r_1+r_2 \\ i=1,2}]{\substack{-r_1+r_2 \\ i=1,2}} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{\frac{c}{2}j_1+j_2 \\ \frac{b}{2}j_3+j_2}]{\substack{\frac{c}{2}j_1+j_2 \\ \frac{b}{2}j_3+j_2}} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix} \\ &= 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

解法二 (求根法):

练习 1.31 证明: 若一个  $n(n > 1)$  阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数.  $\square$

练习 1.32  $n$  阶行列式  $|A|$  的值为  $c$ , 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上  $|A|$  的第  $n$  列, 求得到的新行列式  $|B|$  的值.

解

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_n, \alpha_2 + \alpha_1, \dots, \alpha_n + \alpha_{n-1}| \\ &= |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| + |\alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}| + \sum_{1 \leq k \leq n-2} \sum_{2 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} \begin{vmatrix} 1 & \dots & j_1 & \dots & j_2 & \dots & j_k & \dots & n \\ \alpha_n, \dots, \alpha_{j_1+1}, \dots, \alpha_{j_2+1}, \dots, \alpha_{j_k+1}, \dots, \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\quad + \sum_{1 \leq k \leq n-2} \sum_{2 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} \begin{vmatrix} 1 & \dots & j_1 & \dots & j_2 & \dots & j_k & \dots & n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{j_1+1}, \dots, \alpha_{j_2+1}, \dots, \alpha_{j_k+1}, \dots, \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| + |\alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}| \\ &= c + (-1)^{n-1} |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \\ &= c + (-1)^{n-1} c \\ &= \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数} \\ 2c, n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

练习 1.33 令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$



证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)}{(a_2 a_3 \cdots a_n)}.$$

**解** 假设等式对  $\forall n \leq k-1, k \in \mathbb{N}_+$  都成立. 则当  $n=k$  时, 将行列式  $(a_1 a_2, \cdots, a_k)$  按第一列展开得

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \cdots a_k) &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & \\ -1 & a_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & & \\ -1 & a_4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} \\ &= a_1 (a_2 a_3 \cdots a_k) + (a_3 a_4 \cdots a_k). \end{aligned}$$

从而

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3 a_4 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_k)}{(a_2 a_3 \cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \cdots a_k)}{(a_3 a_4 \cdots a_k)}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立.

**练习 1.34** 设  $|A|$  是  $n$  阶行列式,  $|A|$  的第  $(i, j)$  元素  $a_{ij} = \max\{i, j\}$ , 试求  $|A|$  的值.

**解**


$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-r_i + r_{i-1}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

**练习 1.35** 设  $|A|$  是  $n$  阶行列式,  $|A|$  的第  $(i, j)$  元素  $a_{ij} = |i - j|$ , 试求  $|A|$  的值.


**笔记** 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

**解**

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{-j_{i-1} + j_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[i=n-1, n-2, \cdots, 1]{r_n + r_i} \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)^{n-2} (n-1). \end{aligned}$$

 **练习 1.36** 求下列  $n$  阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 当行列式的行或列有一定的规律性时,但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整.此时我们可以尝试**升阶法**补全这个行列式行或列的规律,再对行列式进行化简.

本题若直接使用**大拆分法**会得到比较多的行列式,而且每个行列式并不是完整的 Vandermode 行列式.后续求解很繁琐,因此不采取**大拆分法**.

**解 (升阶法)** 考虑  $n+1$  阶行列式  $|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \\ 1 & y - a & y(y - a) & y^2(y - a) & \cdots & y^{n-1}(y - a) \end{vmatrix}$ , 则

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

由上式可知,  $|B|$  可以看作一个关于  $y$  的  $n$  次多项式. 将  $|B|$  按最后一行展开得到

$$|B| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i} B_{n+1,i} y^{i-1}, \text{ 其中 } B_{ni} \text{ 是 } |B| \text{ 的第 } (n+1, i) \text{ 元的余子式, } i = 1, 2, \dots, n+1.$$

从而

$$|B| = (-1)^{n+2} B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} B_{n+1,i} y^{i-2} (y - a) = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (1.6)$$

又易知  $B_{n+1,2} = |A|$ , 而当  $a = 0$  时, 由等式(1.6)可知,  $|B|$  中  $y$  前面的系数只有  $B_{n+1,2}$ . 比较等式(1.6)两边  $y$  的系数可得

$$(-1)^{n+3} |A| = (-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left( \sum_{i=1}^n (-x_1) \cdots (-x_{i-1}) (-x_{i+1}) \cdots (-x_n) \right).$$

$$\text{于是 } |A| = (-1)^{n+3} (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left( \sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left( \sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \right).$$

当  $a \neq 0$  时, 由等式(1.1)可知,  $|B|$  中  $y$  前面的系数不只有  $B_{n+1,2}$ , 但是, 我们比较等式(1.6)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2} B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3} B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k). \quad (1.7)$$

又因为


$$B_{n+1,1} = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ x_2 - a & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

所以再结合等式(1.7)可得

$$\begin{aligned} -a(-1)^{n+3}|A| &= -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^n (-x_k) - (-1)^{n+2}B_{n+1,1} \\ &= (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left[ \prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{故此时 } |A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left( \prod_{k=1}^n x_k - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right).$$

 **练习 1.37** 求下列行列式的值 ( $n$  为偶数)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

 **笔记** 应用行列式函数求导求行列式的值.

$$\text{解 令 } G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}, \text{ 则 } I = \frac{G(n)}{n} \text{ 且 } G(0) = 0. \text{ 利用行列式求导公式, 可得}$$

$$G'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = n! x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \prod_{k=0}^n (x-k).$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{G(n)}{n} = \frac{\int_0^n G'(x) dx}{n} = (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k) dx \\ &\stackrel{\text{区间再现}}{=} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (n-k-x) dx \\ &= (-1)^{n+1} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \int_0^n \prod_{k=0}^n (x-k) dx \\ &= (-1)^{n+1} I. \end{aligned}$$

由于  $n$  为偶数, 所以  $(-1)^{n+1} = -1$ . 于是  $I = -I$ . 故  $I = 0$ .

## 第二章 矩阵

### 2.1 矩阵的运算

#### 命题 2.1 (标准单位向量和基础矩阵)

##### 1. 标准单位向量

$n$  维标准单位列向量是指下列  $n$  个  $n$  维列向量:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$


向量组  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$  则被称为  $n$  维标准单位行向量, 容易验证标准单位向量有下列基本性质:

1. 若  $i \neq j$ , 则  $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j = 0$ , 而  $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_i = 1$ ;
2. 若  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $A\mathbf{e}_i$  是  $A$  的第  $i$  个列向量;  $\mathbf{e}'_i A$  是  $A$  的第  $i$  个行向量;
3. 若  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $\mathbf{e}'_i A \mathbf{e}_j = a_{ij}$ ;
4. **判定准则:** 设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 则  $A = B$  当且仅当  $A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n)$  成立, 也当且仅当  $\mathbf{e}'_i A = \mathbf{e}'_i B (1 \leq i \leq m)$  成立.

##### 2. 基础矩阵

$n$  阶基础矩阵 (又称初级矩阵) 是指  $n^2$  个  $n$  阶矩阵  $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ . 这里  $E_{ij}$  是一个  $n$  阶矩阵, 它的第  $(i, j)$  元素等于 1, 其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积:  $E_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_j$ . 由此不难证明基础矩阵的下列性质:

1. 若  $j \neq k$ , 则  $E_{ij} E_{kl} = 0$ ;
2. 若  $j = k$ , 则  $E_{ij} E_{kl} = E_{il}$ ;
3. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ ;
4. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $E_{ij} A$  的第  $i$  行是  $A$  的第  $j$  行,  $E_{ij} A$  的其他行全为零;
5. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $A E_{ij}$  的第  $j$  列是  $A$  的第  $i$  列,  $A E_{ij}$  的其他列全为零;
6. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $E_{ij} A E_{kl} = a_{jk} E_{il}$ .

 **笔记** 标准单位向量和基础矩阵虽然很简单, 但如能灵活应用就可以得到意外的结果. 我们在今后将经常应用它们, 因此请读者熟记这些结论.

一些常见的想法:

1. 可以将一般的矩阵写成标准单位列向量或基础矩阵的形式 (这个形式可以是和式的形式, 也可以是分块的形式).

2. 如果要证明两个矩阵相等, 那么我们就可以考虑**判定法则**.

3. 如果某种等价关系蕴含了一种递减的规律 (项数减少, 阶数降低等), 那么我们就可以考虑数学归纳法, 去尝试根据这个规律得到一些结论.


**定义 2.1 (循环矩阵)**

1. 下列形状的  $n$  阶矩阵称为  $n$  阶基础循环矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 下列形状的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

 **笔记** 记  $C_n(\mathbb{K})$  为  $\mathbb{K}$  上所有  $n$  阶循环矩阵构成的集合.

**命题 2.2 (循环矩阵的性质)**

1. 若  $J$  为  $n$  阶基础循环矩阵, 则

$$J^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

2. 若循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

则循环矩阵  $A$  可以表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式:


$$A = a_1 I_n + a_2 J + a_3 J^2 + \cdots + a_n J^{n-1}.$$

反之, 若一个矩阵能表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式, 则它必是循环矩阵.

3. 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.

4. 基础循环矩阵  $J = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 的逆仍是循环矩阵, 并且

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} O & I_k \\ I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

 **笔记** 循环矩阵的性质及应用详见谢启鸿博客.

**证明**

1. 将  $J$  写作  $(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$ , 其中  $e_i$  是标准单位列向量 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ). 由分块矩阵乘法并注意到  $J e_i$  就是  $J$  的第  $i$  列, 可得

$$J^2 = J(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1}) = (J e_n, J e_1, \cdots, J e_{n-1}) = (e_{n-1}, e_n, \cdots, e_{n-2}).$$

不断这样做下去就可以得到结论.

2. 由循环矩阵和基础循环矩阵的定义和循环矩阵的性质 1 容易得到证明.

3. 由循环矩阵的性质 2 可知两个循环矩阵之积可写为基础循环矩阵  $J$  的两个多项式之积. 又由循环矩阵的性质 1, 可知  $J^n = I_n$ . 因此两个循环矩阵之积可以表示为基础循环矩阵  $J$  的多项式, 故由循环矩阵的性质 1 即得结论.
4. 利用矩阵初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} O & I_{n-k} & I_{n-k} & O \\ I_k & O & O & I_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_k & O & O & I_k \\ O & I_{n-k} & I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

$$\text{从而 } J^{-1} = \begin{pmatrix} O & I_k \\ I_{n-k} & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

□

### 命题 2.3 (循环行列式计算公式)

已知下列循环矩阵  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

则  $A$  的行列式的值为:

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

其中  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根.

 **笔记** 关键是要注意到

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

然后再利用命题 2.35 就能得到分解  $AV = V\Lambda$ .

**证明** 作多项式  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ , 令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

因此

$$|A||V| = |AV| = |V\Lambda| = |V||\Lambda|.$$

因为  $\varepsilon_i$  互不相同, 所以  $|V| \neq 0$ , 从而

$$|A| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n).$$

□

#### 命题 2.4 (b-循环矩阵)

设  $b$  为非零常数, 下列形状的矩阵称为  $b$ -循环矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 同阶  $b$ -循环矩阵的乘积仍然是  $b$ -循环矩阵;

(2) 求上述  $b$ -循环矩阵  $A$  的行列式的值.

▲

#### 证明

- (1) (证明类似于循环矩阵的性质3.) 设  $J_b = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ b & O \end{pmatrix}$ , 则  $J_b^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ bI_k & O \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . 从而  $J_b^n = bI_n$  且  $A = a_1I_n + a_2J_b + a_3J_b^2 + \cdots + a_nJ_b^{n-1}$ . 因此同阶  $b$ -循环阵的乘积仍然可以写成  $J_b$  的  $n-1$  次多项式, 故同阶  $b$ -循环阵的乘积仍然是  $b$ -循环矩阵.
- (2) (证明完全类似循环行列式计算公式的证明) 作多项式  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ , 令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是  $b$  的所有  $n$  次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f(\varepsilon_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

则

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = V\Lambda$$

因此

$$|A||V| = |AV| = |V\Lambda| = |V||\Lambda|.$$

因为  $\varepsilon_i$  互不相同, 所以  $|V| \neq 0$ , 从而

$$|A| = |\Lambda| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n).$$

□

**命题 2.5 (幂零 Jordan 块)**

设  $n$  阶幂零 Jordan 块

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$A^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n.$$

▲

**证明** 将  $A$  写为  $A = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ , 其中  $\mathbf{e}_i$  是标准单位列向量. 由分块矩阵乘法并注意  $A\mathbf{e}_i$  就是  $A$  的第  $i$  列, 因此

$$A^2 = (0, A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{e}_{n-1}) = (0, 0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-2})$$

不断这样做下去就可得到结论. □


**例题 2.1** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $A$  适合  $A^n = O$  时,  $I_n - A$  必是可逆矩阵.

**证明** 注意到

$$I_n = I_n - A^n = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}).$$

故此时  $I_n - A$  必是可逆矩阵. □

**例题 2.2** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $A$  适合  $AB = B(I_n - A)$  对任意  $n$  阶矩阵  $B$  成立, 那么  $B = O$ .

 **笔记** 若已知矩阵乘法的相关等式, 可以尝试得到一些递推等式.

**证明** 假设  $A^k = O$ , 其中  $k$  为某个正整数. 由条件可得  $AB = B(I_n - A)$ , 于是  $O = A^k B = B(I_n - A)^k$ . 由上一题知  $I_n - A$  是可逆矩阵, 从而  $B = O$ . □

**命题 2.6 (多项式的友矩和 Frobenius 块)**

设首一多项式  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ,  $f(x)$  的友阵

$$C(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

则  $|xI_n - C(f(x))| = f(x)$ .

$C(f(x))$  的转置  $F(f(x))$  称为  $f(x)$  的 Frobenius 块. 即

$$C^T(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$



并且容易验证  $C(f(x))$  具有以下性质, 其中  $e_i$  是标准单位列向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$C(f(x))e_i = e_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad C(f(x))e_n = -\sum_{i=1}^n a_{n-i+1}e_i.$$

**证明**  $|xI_n - C(f(x))| = f(x)$  的证明见友矩阵的特征多项式/行列式. □

**例题 2.3** 求下列矩阵的逆矩阵 ( $a_n \neq 0$ ):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

**解** 用初等变换法不难求得

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{n-3}}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 命题 2.7

和所有  $n$  阶对角矩阵乘法可交换的矩阵必是对角矩阵. ▲

**证明** 由矩阵乘法易得. □

#### 命题 2.8 (纯量矩阵的刻画)

- (1) 和所有  $n$  阶奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
- (2) 和所有  $n$  阶非奇异阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
- (3) 和所有  $n$  阶正交阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ .
- (4) 和所有  $n$  阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵  $kI_n$ . ▲

**证明** 首先设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ .

1. 设  $E_{ij} (1 \leq i \neq j \leq n)$  为基础矩阵, 因为基础矩阵都是奇异阵, 所以由条件可知  $E_{ij}A = AE_{ij}$ . 注意到  $E_{ij}A$  是将  $A$  的第  $j$  行变为第  $i$  行而其他行都是零的  $n$  阶矩阵,  $AE_{ij}$  是将  $A$  的第  $i$  列变为第  $j$  列而其他列都是零的  $n$  阶矩阵, 于是我们有

$$i \begin{pmatrix} & & & j & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ & & & & & \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} & & & j & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{1i} & & & & & \\ a_{2i} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{ii} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{ni} & & & & & \end{pmatrix}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得  $a_{ij} = 0 (i \neq j), a_{ii} = a_{jj} (1 \leq i \neq j \leq n)$ , 因此  $A$  是纯量阵.

2. 设  $D = \text{diag}\{1, 2, \dots, n\}$  为对角阵, 因为  $D$  为非奇异阵, 所以由条件可知  $AD = DA$ . 进而

$$\begin{aligned} AD &= DA \\ \Leftrightarrow A(e_1, 2e_2, \dots, ne_n) &= (e_1, 2e_2, \dots, ne_n)A \\ \Leftrightarrow (Ae_1, 2Ae_2, \dots, nAe_n) &= (e_1A, 2e_2A, \dots, ne_nA) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得  $ja_{ij} = ia_{ij}$  ( $i \neq j$ ), 从而  $(i-j)a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ), 于是  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ). 故  $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$  也为对角阵.

设  $P_{ij}$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ) 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为非奇异阵, 所以由条件可知  $AP_{ij} = P_{ij}A$ . 进而可得

$$\begin{matrix} & i & & j \\ & & & \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots & a_{jj} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ii} & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} & & \\ j & & & \end{matrix} = \begin{matrix} & i & & j \\ & & & \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots & a_{ii} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{jj} & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} & & \\ j & & & \end{matrix}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得  $a_{ii} = a_{jj}$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ), 于是  $A$  为纯量阵.

3. 设第二类初等阵  $P_i(-1)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 因为  $P_i(-1)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都是正交阵, 所以由条件可知  $P_i(-1)A = AP_i(-1)$ . 进而可得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

比较上述等式两边矩阵的每个元素可得  $a_{ij} = -a_{ij}$  ( $i \neq j$ ), 从而  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ). 于是  $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$  为对角阵.

设  $P_{ij}$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ) 为第一类初等阵, 因为第一类初等阵均为正交阵, 所以由条件可知  $AP_{ij} = P_{ij}A$ . 进而

可得

$$\begin{matrix} & i & j \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 & \cdots & a_{jj} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & & a_{ii} & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{matrix} = \begin{matrix} & i & j \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 & \cdots & a_{ii} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & & a_{jj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{matrix}.$$

从而比较上述等式两边矩阵的每个元素可得  $a_{ii} = a_{jj} (1 \leq i \neq j \leq n)$ , 于是  $A$  为纯量阵.

4. 可以由上面 (1)(2)(3) 中任意一个证明得到. 注意如果此时用 (3) 的证明方法, 那么我们可以先考虑  $A$  与第一类初等矩阵  $P_i(c) (c \neq 1, 1 \leq i \leq n)$  的乘法交换性. 而不是像 (3) 中只能考虑  $P_i(-1) (1 \leq i \leq n)$ .

□

### 命题 2.9 (零矩阵的充要条件)

1.  $m \times n$  实矩阵  $A = O$  的充要条件是适合条件  $AA' = O$  或  $\text{tr}(AA') \geq 0$ , 等号成立;
2.  $m \times n$  复矩阵  $A = O$  的充要条件是适合条件  $A\bar{A}' = O$  或  $\text{tr}(A\bar{A}') \geq 0$ , 等号成立.

▲

证明

1. (1) 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则  $AA'$  的第  $(i, i)$  元素等于零, 即

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

又因为  $a_{ij}$  都是实数, 所以必有  $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$ . 故  $A = O$ .

- (2) 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  实矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(AA') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当  $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ , 即  $A = O$ .

2. (1) 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则  $A\bar{A}'$  的第  $(i, i)$  元素等于零, 即

$$|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

又因为  $a_{ij}$  都是复数, 所以可设  $a_{ij} = b_{ij} + ic_{ij}$ , 其中  $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$ . 于是

$$b_{i1}^2 + c_{i1}^2 + b_{i2}^2 + c_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 + c_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

再结合  $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ , 可知  $b_{ij} = c_{ij} = 0$ . 即  $a_{ij} = 0, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$ . 故  $A = O$ .

- (2) 设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  复矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(A\bar{A}') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当  $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ , 即  $A = O$ .

□

### 命题 2.10 (对称阵是零矩阵的充要条件)

设  $A$  为  $n$  阶对称阵, 则  $A$  是零矩阵的充要条件是对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有

$$\alpha' A \alpha = 0.$$

▲

证明 只要证明充分性. 设  $A = (a_{ij})$ , 令  $\alpha = e_i$ , 是第  $i$  个标准单位列向量. 因为  $e_i' A e_i$  是  $A$  的第  $(i, i)$  元素, 故

$a_{ii} = 0$ . 又令  $\alpha = e_i + e_j (i \neq j)$ , 则

$$0 = (e_i + e_j)' A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji}.$$

由于  $A$  是对称阵, 故  $a_{ij} = a_{ji}$ , 又上面已经证明  $a_{ii} = a_{jj} = 0$ , 从而  $a_{ij} = 0$ , 这就证明了  $A = O$ .  $\square$

### 命题 2.11 (反对称阵的刻画)

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  是反称阵的充要条件是对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有

$$\alpha' A \alpha = 0.$$

**证明** 必要性 ( $\Rightarrow$ ): 若  $A$  是反称阵, 则对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$ , 有  $(\alpha' A \alpha)' = -\alpha' A \alpha$ . 而  $\alpha' A \alpha$  是数, 因此  $(\alpha' A \alpha)' = \alpha' A \alpha$ . 比较上面两个式子便有  $\alpha' A \alpha = 0$ .

充分性 ( $\Leftarrow$ ): 若上式对任意的  $n$  维列向量  $\alpha$  成立, 则由  $\alpha' A \alpha$  是数, 可知  $\alpha' A \alpha = (\alpha' A \alpha)' = \alpha' A' \alpha = 0$ , 故  $\alpha' (A + A') \alpha = 0$ . 因为矩阵  $A + A'$  是对称阵, 故由对称阵是零矩阵的充要条件可得  $A + A' = O$ , 即  $A' = -A$ ,  $A$  是反称阵.  $\square$

### 命题 2.12

任一  $n$  阶方阵均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和.

**笔记** 构造思路: 设  $A = B + C$ , 且  $B$  为对称矩阵,  $C$  为反称矩阵. 则两边取转置可得

$$\begin{cases} A = B + C \\ A' = (B + C)' = B - C \end{cases}$$

解得:  $B = \frac{1}{2}(A + A')$ ,  $C = \frac{1}{2}(A - A')$ .

**证明** 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 则  $A + A'$  是对称阵,  $A - A'$  是反对称阵, 并且

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A').$$

**注** 上例中的  $\frac{1}{2}(A + A')$  称为  $A$  的对称化,  $\frac{1}{2}(A - A')$  称为  $A$  的反对称化.  $\square$

### 命题 2.13 (上三角阵性质)

(1) 设  $A$  是  $n$  阶上三角阵且主对角线上元素全为零, 则  $A^n = O$ .

(2) 设  $A$  是  $n (n \geq 2)$  阶上三角阵, 若  $i < j$ , 则  $A_{ij} = M_{ij} = 0$ .

(3) 上(下)三角阵的加减、数乘、乘积(幂)、多项式、伴随和求逆仍然是上(下)三角阵, 并且所得上(下)三角阵的主对角元是原上(下)三角阵对应主对角元的加减、数乘、乘积(幂)、多项式、伴随和求逆.

**证明** (1) **证法一 (抽屉原理)**: 设  $A = (a_{ij})$ , 当  $i \geq j$  时,  $a_{ij} = 0$ . 将  $A$  表示为基础矩阵  $E_{ij}$  之和:

$$A = \sum_{i > j} a_{ij} E_{ij}$$

因为当  $j \neq k$  时,  $E_{ij} E_{kl} = O$ , 故在  $A^n$  的乘法展开式中, 可能非零的项只能是具有形式  $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_{n-1} j_{n-1}}$ , 但足标必须满足条件  $1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots < j_{n-1} \leq n$ . 根据可知, 这样的项也不存在, 因此  $A^n = O$ .

**证法二 (数学归纳法)**: 由假设  $A e_i = a_{i1} e_1 + \cdots + a_{i, i-1} e_{i-1} (1 \leq i \leq n)$ , 我们只要用归纳法证明:  $A^k e_k = 0$  对任意的  $1 \leq k \leq n$  都成立, 则  $A^n e_i = A^{n-i} \cdot A^i e_i = A^{n-i} \cdot 0 = 0$  对任意的  $1 \leq i \leq n$  都成立, 从而由判定法则可知  $A^n = O$  成立. 显然,  $A e_1 = 0$  成立. 假设  $A^k e_k = 0$  对任意的  $1 < k < n$  都成立, 则

$$\begin{aligned} A^k e_k &= A^{k-1} (A e_k) = A^{k-1} (a_{k1} e_1 + \cdots + a_{k, k-1} e_{k-1}) \\ &= a_{k1} A^{k-1} e_1 + \cdots + a_{k, k-1} A^{k-1} e_{k-1} = 0. \end{aligned}$$

(2) 根据条件可设  $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ , 则当  $i < j$  时, 有

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

故  $A_{ij} = M_{ij} = 0$ .

(3) 只证上三角阵的情形, 下三角阵的情形完全类似. 上三角阵的加减、数乘、乘积(幂)以及多项式结论的证明是显然的. 下面我们来证明伴随和求逆的结论. 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为  $n$  阶上三角阵, 即满足  $a_{ij} = 0, (\forall i > j)$ . 由(2)可知  $\mathbf{A}$  的代数余子式  $A_{ij} = 0, \forall i < j$ . 于是

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

故  $\mathbf{A}^*$  也是上三角阵. 而对  $\forall i \in [1, n] \cap N$ , 有

我们又将  $A_{ii} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}$  这个数称为  $a_{ii}$  的伴随. 这就完成了  $\mathbf{A}^*$  结论的证明.

$$A_{ii} = (-1)^{2i} M_{ii} = M_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}.$$

由于当  $|A| \neq 0$  时, 我们有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ , 故由上三角阵的数乘结论可知,  $A^{-1}$  也是上三角阵, 其主对角元为  $\frac{1}{|A|} A_{ii} = a_{ii}^{-1}$ . 结论得证.  $\square$

#### 命题 2.14

若  $A, B$  都是由非负实数组成的矩阵且  $AB$  有一行等于零, 则或者  $A$  有一行为零, 或者  $B$  有一行为零.

**证明** 设  $A = (a_{ij})_{n \times m}, B = (b_{ij})_{m \times s}$ . 假设  $C = AB, C = (c_{ij})_{n \times s}$  的第  $i$  行全为零. 则对  $\forall j \in [1, s] \cap N$ , 都有

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = 0.$$

已知对  $\forall i \in [1, n] \cap N, j \in [1, m] \cap N$ , 有  $a_{ij} \geq 0$ ; 对  $\forall i \in [1, m] \cap N, j \in [1, s] \cap N$ , 有  $b_{ij} \geq 0$ . 从而

$$a_{i1}b_{1j} = a_{i2}b_{2j} = \cdots = a_{im}b_{mj} = 0, \forall j \in [1, s] \cap N.$$

若  $A$  的第  $i$  行不全为零, 不妨设  $a_{ik} \neq 0, k \in [1, m] \cap N$ , 则由  $a_{ik}b_{kj} = 0, \forall j \in [1, s] \cap N$  可得  $b_{kj} = 0$ , 对  $\forall j \in [1, s] \cap N$  都成立, 即  $B$  的第  $k$  行全为零.  $\square$

#### 命题 2.15 (矩阵行和和列和的一种刻画)

(1)  $n$  阶矩阵  $A$  第  $i$  行元素之和为  $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  当且仅当

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

特别地,  $n$  阶矩阵  $A$  的每一行元素之和等于  $c$  当且仅当  $A\alpha = c \cdot \alpha$ , 其中  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ .

(2)  $n$  阶矩阵  $A$  第  $i$  列元素之和为  $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  当且仅当


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

特别地,  $n$  阶矩阵  $A$  的每一列元素之和等于  $c$  当且仅当  $\alpha A = c \cdot \alpha$ , 其中  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$ .  $\blacktriangle$

**证明** 由矩阵乘法容易得到证明.  $\square$

**例题 2.4** 设  $n$  阶方阵  $A$  的每一行元素之和等于常数  $c$ , 求证:

- (1) 对任意的正整数  $k, A^k$  的每一行元素之和等于  $c^k$ ;
- (2) 若  $A$  为可逆阵, 则  $c \neq 0$  并且  $A^{-1}$  的每一行元素之和等于  $c^{-1}$ .

 **笔记** 核心想法是利用命题 2.15.

**证明** 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ , 则由矩阵乘法可知,  $A$  的每一行元素之和等于  $c$  当且仅当  $A\alpha = c \cdot \alpha$  成立.

(1) 由  $A\alpha = c \cdot \alpha$  不断递推可得  $A^k \alpha = c^k \cdot \alpha$ , 故结论成立.


(2) 若  $c = 0$ , 则由  $A$  可逆以及  $A\alpha = 0$  可得  $\alpha = 0$ , 矛盾. 在  $A\alpha = c \cdot \alpha$  的两边同时左乘  $c^{-1}A^{-1}$ , 可得  $A^{-1}\alpha = c^{-1} \cdot \alpha$ , 由此即得结论.  $\square$

**命题 2.16 (矩阵可逆的等价命题)**

- (1)  $n$  阶方阵  $A$  可逆.
- (2) 存在矩阵  $B$ , 使得  $AB = BA = I_n$  (这个等式同时也说明  $B$  可逆).
- (3)  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ .
- (4)  $A$  等价 (相抵) 于  $n$  阶单位矩阵.
- (5)  $A$  可以表示为有限个初等矩阵的积.
- (6)  $A$  的  $n$  个行向量 (列向量) 线性无关.

**命题 2.17**

- (1) 若已知  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = O$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0$ , 并且  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 = 0$  无实根 (即原等式左边不可因式分解成  $(a_1 I_n + a_2 A)(b_1 I_n + b_2 A)$ ), 则对任何  $c, d \in \mathbb{R}$ , 都有  $cA + dI_n$  可逆.
- (2) 若已知  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = (a_1 A + b_1 I_n)(a_2 A + b_2 I_n) = O$ , 其中  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $\lambda_1 = a_1 a_2, \lambda_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \lambda_3 = b_1 b_2, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ . 则对任何实数对  $(c, d) \neq (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , 都有  $cA + dI_n$  可逆.

 **笔记** 构造逆矩阵的方法: 不妨设  $k(cA + dI_n)^{-1} = (pA + qI_n)$ , 其中  $k, p, q$  为待定系数. 则

$$(cA + dI_n) \cdot k(cA + dI_n)^{-1} = (cA + dI_n)(pA + qI_n) = pcA^2 + (cq + dp)A + dqI_n = kI_n.$$

令  $pc = \lambda_1, cq + dp = \lambda_2$ , 则  $p = \frac{\lambda_1}{c}, q = \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2}$ . 于是由已知条件可得

$$(cA + dI_n)(pA + qI_n) = (cA + dI_n) \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right) = \lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + d \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n = \left( \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3 \right) I_n.$$

从而  $k = \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3$ . 因此  $(cA + dI_n)^{-1} = \frac{1}{k}(pA + qI_n) = \frac{1}{\frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3} \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right)$ .

实际做题中只需要先设  $k(cA + dI_n)^{-1} = (pA + qI_n)$ , 其中  $k, p, q$  为待定系数. 则有  $(cA + dI_n)(pA + qI_n) = kI_n$ .

然后通过比较二次项和一次项的系数得到方程组 
$$\begin{cases} pc = \lambda_1 \\ cq + dp = \lambda_2 \end{cases} \quad (\text{即要凑出合适的 } p, q, \text{ 使得 } (cA + dI_n)(pA + qI_n) = kI_n)$$

与  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n$  的二次项和一次项的系数相等), 解出  $p, q$  的值. 最后将已知条件  $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 A + \lambda_3 I_n = O$  代入  $(cA + dI_n)(pA + qI_n) = kI_n$  即可得到  $k$  的值.


熟悉这种方式之后就能快速构造出我们需要的逆矩阵.

**证明** (1) 和 (2) 的证明相同. 如下 (这里我们是利用了上述构造逆矩阵的方法直接构造出逆矩阵, 再根据逆矩阵的定义直接得到证明):

当  $c = 0$  时,  $cA + dI_n = dI_n$  显然可逆.

当  $c \neq 0$  时, 注意到  $(cA + dI_n) \left( \frac{\lambda_1}{c} A + \left( \frac{\lambda_2}{c} - \frac{\lambda_1 d}{c^2} \right) I_n \right) = \left( \frac{\lambda_2 d}{c} - \frac{\lambda_1 d^2}{c^2} - \lambda_3 \right) I_n$ , 故  $cA + dI_n$  可逆.  $\square$

**例题 2.5** 设  $n$  阶方阵  $A$  适合等式  $A^2 - 3A + 2I_n = O$ , 求证:  $A$  和  $A + I_n$  都是可逆阵, 而若  $A \neq I_n$ , 则  $A - 2I_n$  必不是可逆阵.

 **笔记** 这里构造逆矩阵利用了命题 2.17.

**证明** 由已知得  $A(A - 3I_n) = -2I_n$ , 因此  $A$  是可逆阵. 又  $A^2 - 3A - 4I_n = -6I_n$ , 于是  $(A + I_n)(A - 4I_n) = -6I_n$ , 故  $A + I_n$  也是可逆阵.

另一方面, 由已知等式可得  $(A - I_n)(A - 2I_n) = O$ , 如果  $A - 2I_n$  可逆, 则  $A - I_n = O, A = I_n$  和假设不合, 因此  $A - 2I_n$  不是可逆阵.  $\square$

**命题 2.18**

- (1) 若已知  $\lambda_1 AB + \lambda_2 A + \lambda_3 B + \lambda_4 I_n = O$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0$ , 并且  $\lambda_1 x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_4 = 0$  无实根 (即原等式左边不可因式分解成  $(a_1 I_n + a_2 A)(b_1 I_n + b_2 B)$ ), 则对任何  $c, d \in \mathbb{R}$ , 都有  $aI_n + bA, cI_n + dB$  可逆.

(2) 若已知  $\lambda_1 \mathbf{A} \mathbf{B} + \lambda_2 \mathbf{A} + \lambda_3 \mathbf{B} + \lambda_4 \mathbf{I}_n = (a_1 \mathbf{I}_n + b_1 \mathbf{A})(a_2 \mathbf{I}_n + b_2 \mathbf{B}) = \mathbf{O}$ , 其中  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , 且  $\lambda_1 = b_1 b_2, \lambda_2 = a_2 b_1, \lambda_3 = a_1 b_2, \lambda_4 = a_1 a_2, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ . 则对任何实数对  $(a, b), (c, d) \neq (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , 都有  $a \mathbf{I}_n + b \mathbf{A}, c \mathbf{I}_n + d \mathbf{B}$  可逆.

**证明** 证明方法与命题 2.17 类似, 构造逆矩阵的方法也与其类似. 这里不再赘述.  $\square$

### 例题 2.6

1. 求证: 不存在  $n$  阶奇异矩阵  $A$ , 适合条件  $A^2 + A + \mathbf{I}_n = \mathbf{O}$ .
2. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $A^2 = A$ , 求证:  $\mathbf{I}_n - 2A$  是可逆矩阵.
3. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $2A(A - \mathbf{I}_n) = A^3$ , 求证:  $\mathbf{I}_n - A$  可逆.

**笔记** 这类问题构造逆矩阵的方法 (以 3. 为例): 已知条件等价于  $A^3 - 2A^2 + 2A = \mathbf{O}$ , 设  $(\mathbf{I}_n - A)^{-1} = aA^2 + bA + c\mathbf{I}_n$ , 其中  $a, b, c$  为待定系数, 使得

$$(\mathbf{I}_n - A)(aA^2 + bA + c\mathbf{I}_n) = A^3 - 2A^2 + 2A + k\mathbf{I}_n = k\mathbf{I}_n, k \text{ 为待定常数.}$$

比较等式两边系数可得

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -2 \\ b - c = 2 \\ c = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ k = c = -1 \end{cases}$$

于是  $(\mathbf{I}_n - A)(-A^2 + A - \mathbf{I}_n) = -\mathbf{I}_n$ . 从而  $(\mathbf{I}_n - A)^{-1} = A^2 - A + \mathbf{I}_n$ .

**证明**

1. 由已知  $A^2 + A + \mathbf{I}_n = \mathbf{O}$ , 则  $(A - \mathbf{I}_n)(A^2 + A + \mathbf{I}_n) = A^3 - \mathbf{I}_n = \mathbf{O}$ , 即  $A^3 = \mathbf{I}_n$ , 于是  $A$  是可逆矩阵.
2. 因为  $(\mathbf{I}_n - 2A)^2 = \mathbf{I}_n - 4A + 4A^2 = \mathbf{I}_n$ , 故  $\mathbf{I}_n - 2A$  是可逆矩阵.
3. 由已知  $A^3 - 2A^2 + 2A - \mathbf{I}_n = -\mathbf{I}_n$ , 即  $(A - \mathbf{I}_n)(A^2 - A + \mathbf{I}_n) = -\mathbf{I}_n$ , 于是  $(\mathbf{I}_n - A)^{-1} = A^2 - A + \mathbf{I}_n$ .

$\square$

**例题 2.7** 设  $n$  阶方阵  $A$  和  $B$  满足  $A + B = AB$ , 求证:  $\mathbf{I}_n - A$  是可逆阵且  $AB = BA$ .

**证明** 因为

$$(\mathbf{I}_n - A)(\mathbf{I}_n - B) = \mathbf{I}_n - A - B + AB = \mathbf{I}_n,$$

所以  $\mathbf{I}_n - A$  是可逆阵. 另一方面, 由上式可得  $(\mathbf{I}_n - A)^{-1} = (\mathbf{I}_n - B)$ , 故

$$\mathbf{I}_n = (\mathbf{I}_n - B)(\mathbf{I}_n - A) = \mathbf{I}_n - B - A + BA,$$

从而  $BA = A + B = AB$ .  $\square$

### 命题 2.19 (矩阵转置的性质)

设矩阵  $A, B$ , 则有

1.  $(A')' = A$ ;
2.  $(A + B)' = A' + B'$ ;
3.  $(kA)' = kA'$ ;
4.  $(AB)' = B'A'$ .

**证明** 由矩阵的性质易证.  $\square$

### 命题 2.20 (矩阵的逆运算)


设矩阵  $A, B, C$  可逆, 则有  
常规逆运算:



1.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
2.  $(AC + BC)^{-1} = C^{-1}(A + B)^{-1}$ .
3.  $(A + B)^{-1}C = (C^{-1}A + C^{-1}B)^{-1}$ .
4.  $C(A + B)^{-1} = (AC^{-1} + BC^{-1})^{-1}$ .

凑因子:

1.  $A = (AB^{-1})B = (AB)B^{-1} = B(B^{-1}A) = B^{-1}(BA)$ .
2.  $A + B = (AC^{-1} + BC^{-1})C = (AC + BC)C^{-1} = C(C^{-1}A + C^{-1}B) = C^{-1}(CA + CB)$ .


 **笔记** 无需额外记忆这些公式, 只需要知道凑因子的想法, 即在矩阵可逆的条件下, 我们可以利用矩阵  $I_n = AA^{-1} = A^{-1}A$  的性质, 将原本矩阵没有的因子凑出来, 然后提取我们需要的矩阵因子到矩阵逆的外面或将其乘入矩阵逆的内部, 从而达到化简原矩阵的目的.

**证明** 由矩阵的运算性质不难证明. □

**注** 凑因子想法的应用: 例题 2.10, 例题 2.11, 例题 2.12.

**例题 2.8** 设  $A, B, A - B$  都是  $n$  阶可逆阵, 证明:

$$B^{-1} - A^{-1} = (B + B(A - B)^{-1}B)^{-1}.$$

 **笔记** 直接运用逆矩阵的定义验证即可.

**证明**

$$\begin{aligned} & (B^{-1} - A^{-1})(B + B(A - B)^{-1}B) \\ &= I_n + (A - B)^{-1}B - A^{-1}B - A^{-1}B(A - B) - 1B \\ &= I_n + (A - B)^{-1}B - A^{-1}B(I_n + (A - B) - 1B) \\ &= (I_n - A^{-1}B)(I_n + (A - B)^{-1}B) \\ &= A^{-1}(A - B)[(A - B)^{-1}(A - B)] \\ &= A^{-1}(A - B)(A - B)^{-1}A = I_n. \end{aligned}$$

□

**例题 2.9 Sherman-Morrison 公式** 设  $A$  是  $n$  阶可逆阵,  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 且  $1 + \beta'A^{-1}\alpha \neq 0$ . 求证:

$$(A + \alpha\beta')^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}.$$

 **笔记** 直接运用逆矩阵的定义验证即可, 注意  $\beta'A^{-1}\alpha$  是一个数可以提出来.


**证明**

$$\begin{aligned} & (A + \alpha\beta')\left(A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}\right) \\ &= I_n - \frac{1}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1} + \alpha\beta'A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}\alpha(\beta'A^{-1}\alpha)\beta'A^{-1} \\ &= I_n + \alpha\beta'A^{-1} - \frac{1}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1} - \frac{\beta'A^{-1}\alpha}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1} \\ &= I_n + \alpha\beta'A^{-1} - \frac{1 + \beta'A^{-1}\alpha}{1 + \beta'A^{-1}\alpha}\alpha\beta'A^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

□


## 命题 2.21 (一些矩阵等式)

1. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵. 则有  $A(I_n + BA) = (I_m + AB)A$ .
2. 设  $A, B$  均为  $n$  阶可逆矩阵, 则有  $A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B$ .
3. 若  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足  $A^2 = B^2$ , 则  $A(A + B) = A^2 + AB = B^2 + AB = (A + B)B$ .

 **笔记** 这是一些常见的矩阵等式. 可以通过反复凑因子得到.

**证明** 由矩阵的运算性质不难证明. □

**例题 2.10** 设  $A, B, AB - I_n$  都是  $n$  阶可逆阵, 证明:  $A - B^{-1}$  与  $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$  均可逆, 并求它们的逆矩阵.

 **笔记** 核心想法是利用命题 2.20 和命题 2.21.


**证明** 注意到  $A - B^{-1} = (AB - I_n)B^{-1}$ , 故  $A - B^{-1}$  是可逆矩阵, 并且  $(A - B^{-1})^{-1} = B(AB - I_n)^{-1}$ . 注意到如下变形:

$$\begin{aligned} & (A - B^{-1})^{-1} - A^{-1} \\ &= B(AB - I_n)^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(AB(AB - I_n)^{-1} - I_n) \\ &= A^{-1}(AB - (AB - I_n))(AB - I_n)^{-1} = A^{-1}(AB - I_n)^{-1}. \end{aligned}$$

故  $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$  可逆, 并且  $((A - B^{-1})^{-1} - A^{-1})^{-1} = (AB - I_n)A$ . □

## 命题 2.22

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵, 使得  $I_m + AB$  可逆, 则  $I_n + BA$  也可逆, 并且  $(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A$ .

 **笔记** 命题 2.22 的应用: 一般对于求只含有两项的矩阵和式的逆矩阵, 我们可以利用矩阵的逆运算(凑因子)的方法将原矩阵和式转化为  $C(I_n + AB)$  或  $(I_n + AB)C$  的形式, 再利用这个命题求得原矩阵的逆.

**注** 证法一只能得到  $I_n + BA$  可逆, 并不能得到具体的逆矩阵. 而证法二可以求出  $(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A$ .

**证明** **证法一(打洞原理):** 根据分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & -A \\ O & I_n + BA \end{vmatrix} = |I_n + BA|. \\ \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m + AB & O \\ B & I_n \end{vmatrix} = |I_m + AB|. \end{aligned}$$

故  $\begin{vmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{vmatrix} = |I_m + AB| = |I_n + BA|$ . 又因为  $I_m + AB$  可逆, 所以  $|I_n + BA| = |I_m + AB| \neq 0$ . 因此  $I_n + BA$  也可逆.

**证法二(矩阵的逆运算):** 注意到  $A(I_n + BA) = (I_m + AB)A$ , 故  $(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) = A$ , 于是  $B(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) = BA$ , 从而

$$\begin{aligned} I_n &= I_n + BA - BA = (I_n + BA) - B(I_m + AB)^{-1}A(I_n + BA) \\ &= (I_n - B(I_m + AB)^{-1}A)(I_n + BA). \end{aligned}$$

于是  $(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_m + AB)^{-1}A$ . □

**例题 2.11** 设  $A, B$  均为  $n$  阶可逆阵, 使得  $A^{-1} + B^{-1}$  可逆, 证明:  $A + B$  也可逆, 并且

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

**证明** 注意到  $A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B$ , 故  $A + B$  可逆. 由命题 2.22 可得

$$(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}B = I_n - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned}(A+B)^{-1} &= (A(I_n + A^{-1}B))^{-1} = (I_n + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}. \square\end{aligned}$$

□

### 例题 2.12 Sherman-Morrison-Woodbury 公式

设  $A$  为  $n$  阶可逆阵,  $C$  为  $m$  阶可逆阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $D$  为  $m \times n$  矩阵, 使得  $C^{-1} + DA^{-1}B$  可逆. 求证:  $A + BCD$  也可逆, 并且

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

**注** 若已知矩阵逆的表达式, 也可以采取利用矩阵逆的定义直接验证的方法进行证明.

**证明** 注意到  $A + BCD = A(I_n + A^{-1}BCD)$ , 将  $A^{-1}B$  和  $CD$  分别看成整体, 此时  $I_m + (CD)(A^{-1}B) = C(C^{-1} + DA^{-1}B)$  可逆, 故由命题 2.22 的结论可知  $I_n + (A^{-1}B)(CD)$  也可逆, 并且


$$\begin{aligned}(I_n + A^{-1}BCD)^{-1} &= I_n - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CD \\ &= I_n - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D.\end{aligned}$$

于是  $A + BCD = A(I_n + A^{-1}BCD)$  也可逆, 并且


$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

□

## 2.1.1 练习

 **练习 2.1** 计算下列矩阵的  $k$  次幂, 其中  $k$  为正整数:

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$


 **笔记** 第 (2) 问核心想法是利用命题 2.34.

**解** (1) 设  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A = aI_3 + J$ . 注意到  $aI_3$  和  $J$  乘法可交换,  $J$  是幂零阵并且  $J^3 = O$ , 因此我们可用二项式定理来求  $A$  的  $k$  次幂:

$$\begin{aligned}A^k &= (aI_3 + J)^k = (aI_3)^k + C_k^1(aI_3)^{k-1}J + C_k^2(aI_3)^{k-2}J^2 \\ &= a^k I_3 + C_k^1 a^{k-1} J + C_k^2 a^{k-2} J^2 = \begin{pmatrix} a^k & C_k^1 a^{k-1} & C_k^2 a^{k-2} \\ 0 & a^k & C_k^1 a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 注意到  $A$  的列向量成比例, 故可设  $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (1, 2, 4)$ , 则  $A = \alpha\beta'$ . 由矩阵乘法的结合律并注意到  $\beta\alpha' = 17$ , 可得

$$\begin{aligned}A^k &= (\alpha\beta')(\alpha\beta') \cdots (\alpha\beta') = \alpha(\beta'\alpha)(\beta'\alpha) \cdots (\beta'\alpha)\beta' \\ &= (\beta'\alpha)^{k-1} \alpha\beta' = 17^{k-1} A = \begin{pmatrix} 17^{k-1} & 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} \\ 2 \cdot 17^{k-1} & 4 \cdot 17^{k-1} & 8 \cdot 17^{k-1} \\ 3 \cdot 17^{k-1} & 6 \cdot 17^{k-1} & 12 \cdot 17^{k-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

 **练习 2.2** 设  $k$  是正整数, 计算  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k$ .

**解** 已知  $k=1$  时, 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . 假设  $k=n$  时, 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ . 则当  $k=n+1$  时, 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & \cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta \\ -(\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta) & \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos (n+1)\theta & \sin (n+1)\theta \\ -\sin (n+1)\theta & \cos (n+1)\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而由数学归纳法可知, 对任意正整数  $k$ , 有  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ .

**练习 2.3** 求矩阵  $A$  的逆阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

**解** 对  $(A \quad I_n)$  用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 再将第一行乘以  $s^{-1}$ , 其中  $s = \frac{1}{2}n(n+1)$ , 得到

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从第二行起依次减去下一行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

消去第一列除第一行外的所有元素后, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

从第二行到第  $n-1$  行分别乘以  $-\frac{1}{n}$ , 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将第一行依次减去第二行, 第三行,  $\cdots$ , 第  $n-1$  行, 得到


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & \frac{s-2}{s} \end{pmatrix}.$$

将最后一行加到第一行, 再将最后一行乘以  $-1$ , 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}.$$

 **练习 2.4** 求下列  $n$  阶矩阵的逆阵, 其中  $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

**解** 对  $(A \quad I_n)$  用初等变换法, 将第  $i$  行乘以  $a_i^{-1} (1 \leq i \leq n)$ , 有

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

将下面的行都加到第一行上, 并令  $s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ , 则上面的矩阵变为


$$\begin{pmatrix} s & s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \rightarrow$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1 a_2} & \frac{sa_2 - 1}{sa_2^2} & -\frac{sa_3 a_2}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{sa_n a_2}{sa_n^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_1 a_3} & -\frac{1}{sa_2 a_3} & \frac{sa_3 - 1}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_n a_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{sa_1 a_n} & -\frac{1}{sa_2 a_n} & -\frac{1}{sa_3 a_n} & \cdots & \frac{sa_n - 1}{sa_n^2} \end{pmatrix}.$$

再消去第一行的后  $n-1$  个 1 就得到

$$A^{-1} = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -\frac{1}{a_1 a_2} & \frac{sa_2 - 1}{a_2^2} & -\frac{1}{a_3 a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_n a_2} \\ -\frac{1}{a_1 a_3} & -\frac{1}{a_2 a_3} & \frac{sa_3 - 1}{a_3^2} & \cdots & -\frac{1}{a_n a_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_1 a_n} & -\frac{1}{a_2 a_n} & -\frac{1}{a_3 a_n} & \cdots & \frac{sa_n - 1}{a_n^2} \end{pmatrix}.$$

 **练习 2.5** 求下列  $n$  阶矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

 **笔记** 解法一和解法二的核心想法是: 先假设(猜测) 矩阵  $A$  的逆矩阵与其具有相似的结构, 再结合逆矩阵的定义, 使用待定系数法求出矩阵  $A$  的逆矩阵.

**解 解法一:** 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ , 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$ . 设  $B = cI_n + d\alpha\alpha'$ , 其中  $c, d$  为待定系数. 则  $AB = -cI_n + (c + (n-1)d)\alpha\alpha'$ . 令  $c = -1, c + (n-1)d = 0$ , 则  $d = \frac{1}{n-1}$ . 于是  $AB = I_n$ , 从而  $A^{-1} = B = -I_n + \frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$ .

**解法二(Sherman-Morrison 公式):** 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ , 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$ . 由 Sherman-Morrison 公式可得


$$A^{-1} = (-I_n + \alpha\alpha')^{-1} = (-I_n)^{-1} - \frac{1}{1 + \alpha'(-I_n)^{-1}\alpha} (-I_n)^{-1} \alpha\alpha' (-I_n)^{-1} = -I_n + \frac{1}{n-1} \alpha\alpha'.$$

**解法三(循环矩阵):** 设  $J$  为基础循环矩阵, 则  $A = J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$ . 设  $B = cI_n + J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$  (因为循环矩阵的逆仍是循环矩阵), 其中  $c$  为待定系数. 则

$$AB = (n-1)I_n + (c+n-2)(J + J^2 + \cdots + J^{n-1})$$

只要令  $c = 2 - n$ , 则  $AB = (n-1)I_n$ . 于是  $A^{-1} = \frac{1}{n-1}B = \frac{2-n}{n-1}I_n + J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$ .

**解法四(初等变换):** 本题是练习 2.4 的特例, 都利用相同的初等变换方法求逆矩阵.

 **练习 2.6** 设  $A$  是非零实矩阵且  $A^* = A'$ . 求证:  $A$  是可逆阵.

**证明** 设  $A = (a_{ij}), a_{ij}$  的代数余子式记为  $A_{ij}$ , 由已知  $a_{ij} = A_{ij}$ . 由于  $A$  是非零实矩阵, 故必有某个  $a_{rs} \neq 0$ , 将  $|A|$  按第  $r$  行展开, 可得

$$|A| = a_{r1}A_{r1} + \cdots + a_{rs}A_{rs} + \cdots + a_{rn}A_{rn} = a_{r1}^2 + \cdots + a_{rs}^2 + \cdots + a_{rn}^2 > 0.$$


特别地,  $|A| \neq 0$ , 即  $A$  是可逆阵. □

 **练习 2.7** 设  $A$  是奇数阶矩阵, 满足  $AA' = I_n$  且  $|A| > 0$ , 证明:  $I_n - A$  是奇异阵.

**证明** 由  $1 = |I_n| = |AA'| = |A||A'| = |A|^2$  以及  $|A| > 0$  可得  $|A| = 1$ . 因为

$$|I_n - A| = |AA' - A| = |A||A' - I_n| = |(A - I_n)'| = |A - I_n| = (-1)^n |I_n - A|.$$

又  $n$  是奇数, 故  $|I_n - A| = -|I_n - A|$ , 从而  $|I_n - A| = 0$ , 即  $I_n - A$  是奇异阵. □

 **练习 2.8** 设  $A, B$  为  $n$  阶可逆阵, 满足  $A^2 = B^2$  且  $|A| + |B| = 0$ , 求证:  $A + B$  是奇异阵.

**证明** 由已知  $A, B$  都是可逆阵且  $|B| = -|A|$ , 因此

$$|A||A+B| = |A^2+AB| = |B^2+AB| = |B+A||B| = -|A||A+B|.$$


于是  $|A||A+B| = 0$ . 因为  $|A| \neq 0$ , 故  $|A+B| = 0$ , 即  $A+B$  是奇异阵. □

## 2.2 矩阵的初等变换

### 2.2.1 相抵标准型

#### 定义 2.2 (矩阵相抵的定义)

设矩阵  $A, B$ , 若  $A$  经有限次初等变换后变成  $B$ , 则称  $A$  与  $B$  相抵, 记作  $A \sim B$ .

 **笔记** 容易验证相抵是  $M_{s \times n}(K)$  上的一个等价关系. 在相抵关系下, 矩阵  $A$  的等价类称为  $A$  的相抵类.

**命题 2.23 (矩阵相抵的等价命题)**

数域  $K$  上  $s \times n$  矩阵  $A$  和  $B$  相抵等价于:

1.  $A$  可以经过初等行变换和初等列变换变成  $B$ .
2. 存在  $K$  上  $s$  级初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_t$  与  $n$  级初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , 使得  $P_t \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_m = B$ .
3. 存在  $K$  上  $s$  级可逆矩阵  $P$  与  $n$  级可逆矩阵  $Q$ , 使得:  $PAQ = B$ .

**定理 2.1 (相抵标准型)**

设数域  $K$  上  $s \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r$ . 如果  $r > 0$ , 那么  $A$  相抵于下述形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

称矩阵(2.1)为  $A$  的相抵标准形; 如果  $r = 0$ , 那么  $A$  相抵于零矩阵, 此时称  $A$  的相抵标准形是零矩阵.

**推论 2.1**

1. 数域  $K$  上  $s \times n$  矩阵  $A$  和  $B$  相抵当且仅当它们的秩相等.
2. 设数域  $K$  上  $s \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r (r > 0)$ , 则存在  $K$  上的  $s$  级、 $n$  级可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ .

**命题 2.24 (奇异阵的充要条件)**

数域  $K$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异阵的充要条件有:

1. 存在数域  $K$  上不为零的同阶方阵  $B$ , 使得  $AB = O$ .
2. 存在数域  $K$  上的  $n$  维非零列向量  $x$ , 使得  $Ax = 0$ .

**证明**

1. 充分性 ( $\Leftarrow$ ): 显然若  $A$  可逆, 则从  $AB = O$  可得到  $B = O$ , 因此充分性成立.

必要性 ( $\Rightarrow$ ): 反之, 若  $A$  是奇异阵, 则存在数域  $K$  上的可逆阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $r < n$ . 令


$C = \begin{pmatrix} O & O \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ , 则  $PAQC = O$ . 又因为  $P$  可逆, 故  $AQC = O$ . 只要令  $B = QC \in K$  就得到了结论.

2. 充分性 ( $\Leftarrow$ ): 显然若  $A$  可逆, 则从  $Ax = 0$  可得到  $x = 0$ , 因此充分性成立.

必要性 ( $\Rightarrow$ ): 反之, 若  $A$  是奇异阵, 则存在数域  $K$  上的可逆阵  $P, Q$ , 使  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $r < n$ . 令  $y = (0, \dots, 0, 1)'$  为  $n$  维列向量, 则  $PAQy = 0$ . 又因为  $P$  可逆, 故  $AQy = 0$ . 只要令  $x = Qy \in K$  就得到了结论.

□

**2.2.2 练习**


 **练习 2.9** 设  $A$  为  $n$  阶实反对称阵, 证明:  $I_n - A$  是非异阵.

**证明** (反证法) 假设是  $I_n - A$  是奇异阵, 则由命题 2.24 的 2, 可知存在  $n$  维非零实列向量  $x$ , 使得  $(I_n - A)x = 0$ , 即  $Ax = x$ . 设  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ , 其中  $a_i$  都是实数, 则由  $A$  的反对称性以及命题 2.11, 可知

$$0 = x'Ax = x'x = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

从而  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ , 即  $x = 0$ , 这与已知矛盾.

□

 **练习 2.10** 设  $A$  为  $n$  阶可逆阵, 求证: 只用第三类初等变换就可以将  $A$  化为如下形状:

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, |A|\}.$$



**证明** 假设  $A$  的第  $(1, 1)$  元素等于零, 因为  $A$  可逆, 故第一行必有元素不为零. 用第三初等变换将非零元素所在的列加到第一列, 则到的矩阵中第  $(1, 1)$  元素不为零. 因此设  $A$  的第  $(1, 1)$  元素非零, 于是可用三类初等变换将  $A$  的第一行及第一列其余元素都消为零. 这就是说,  $A$  经过第三类初等变换可化为如下形状:

$$\begin{pmatrix} a & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

再对  $A_1$  同样处理, 不断做下去, 可将  $A$  化为对角阵, 并且对角元素均非零. 因此我们只要对对角阵证明结论即可. 为简化讨论, 我们先考虑二阶对角阵:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

将其第一行乘以  $(1-a)a^{-1}$  加到第二行上, 再将第二行加到第一行上得到:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix}.$$

将其第一列乘以  $-b$  加到第二列上, 再将第行乘以  $a-1$  加到第二行上得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & ab \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}.$$

从而原结论对二阶对角阵成立. 对于  $n$  阶对角阵  $B = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  而言, 按照上述方法对  $B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_1 a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

按照上述方法对再对  $B \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  所对应的子矩阵进行第三类初等变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_1 a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a_1 a_2 a_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}.$$

同理依次对  $B \begin{pmatrix} k & k+1 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, k=1, 2, \dots, n-1$  所对应的子矩阵按照上述方法进行第三类初等变换, 最后得到

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1 a_2 \cdots a_n \end{pmatrix}.$$

于是原结论对角阵也成立. 而我们所用的初等变换始终是第三类初等变换. 这就得到了结论.  $\square$

**练习 2.11** 求证: 任一  $n$  阶矩阵均可表示为形如  $I_n + a_{ij}E_{ij}$  这样的矩阵之积, 其中  $E_{ij}$  是  $n$  阶基础矩阵.

**证明** 由命题 2.1 可知任意一个  $n$  阶矩阵都可表示为有限个初等阵和具有下列形状的对角阵  $D$  之积:

$$D = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\},$$

故只要对初等阵和  $D$  证明结论即可. 对  $D$ , 假设  $D$  有  $r$  个 1, 则

$$D = (I_n - E_{r+1, r+1}) \cdots (I_n - E_{nn}).$$

第三类初等阵已经是这种形状了, 即  $P_{ij}(c) = I_n + cE_{ij}$ . 对第二类初等阵  $P_i(c)$ , 显然我们有  $P_i(c) = I_n + (c-1)E_{ii}$ . 对第一类初等阵  $P_{ij}$ , 由练习 2.10 可知, 只用第三类初等变换就可以将  $P_{ij}$  化为  $P_n(-1) = \text{diag}\{1, \dots, 1, -1\}$ , 因此对第一类初等阵结论也成立. 具体地, 我们有

$$P_{ij} \cdot P_{ij}(-1) P_j(-1) P_{ji}(-1) P_{ij}(1) = I_n.$$

由此可得

$$\begin{aligned} P_{ij} &= [P_{ij}(-1) P_j(-1) P_{ji}(-1) P_{ij}(1)]^{-1} = P_{ij}^{-1}(1) P_{ji}^{-1}(-1) P_j^{-1}(-1) P_{ij}^{-1}(-1) \\ &= P_{ij}(-1) P_{ji}(1) P_j(-1) P_{ij}(1) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - 2E_{jj})(I_n + E_{ij}). \end{aligned}$$

□

## 2.3 伴随矩阵

### 定义 2.3 (伴随矩阵定义)

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 若

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式. 则称  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵.

♣

### 定理 2.2

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

- (i)  $AA^* = A^*A = |A|I_n$ .
- (ii) 当  $A$  可逆时, 有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ .

♡

**证明** 由伴随矩阵的定义不难证明. □

### 命题 2.25

设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 满足  $A^m = I_n$ , 则  $(A^*)^m = I_n$ .

♠

**证明** 由  $A^m = I_n$  得  $|A|^m = 1 \neq 0$ , 于是矩阵  $A$  可逆. 又  $A^* = |A|A^{-1}$ , 故  $(A^*)^m = |A|^m(A^{-1})^m = (A^m)^{-1} = I_n$ . □

### 定理 2.3 (矩阵乘积的伴随)

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则  $(AB)^* = B^*A^*$ .

♡

**证明** 证法一 (Cauchy-Binet 公式推论): 设  $C = AB$ . 记  $M_{ij}, N_{ij}, P_{ij}$  分别是  $A, B, C$  中第  $(i, j)$  元素的余子式,  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  分别是  $A, B, C$  中第  $(i, j)$  元素的代数余子式. 注意到

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

$B^*A^*$  的第  $(i, j)$  元素为  $\sum_{k=1}^n B_{ki}A_{jk}$ . 而  $C^*$  的第  $(i, j)$  元素就是  $C_{ji} = (-1)^{j+i}P_{ji}$ .

由Cauchy-Binet 公式推论可得

$$\begin{aligned} C_{ji} &= (-1)^{j+i} P_{ji} = (-1)^{j+i} \sum_{k=1}^n M_{jk} N_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} M_{jk} (-1)^{i+k} N_{ki} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \end{aligned}$$

故结论成立.

**证法二 (摄动法):** 若  $A, B$  均为非异阵, 则  $A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$ , 从而

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*.$$

由命题 2.42, 可知对于一般的方阵  $A, B$ , 可取到一系列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  与  $t_k I_n + B$  均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_k I_n + A)(t_k I_n + B))^* = (t_k I_n + B)^*(t_k I_n + A)^*.$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $(AB)^* = B^*A^*$  成立.  $\square$

#### 定理 2.4 (伴随矩阵的秩)

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

$$\text{rank} A^* = \begin{cases} n, & \text{rank} A = n, \\ 1, & \text{rank} A = n-1, \\ 0, & \text{rank} A < n-1. \end{cases}$$

**证明** 当  $\text{rank} A = n$  时, 则  $|A| \neq 0, A$  可逆, 又  $AA^* = A^*A = |A|I_n$ , 两边同时取行列式, 可得  $|A^*| \cdot |A| = |A^*A| = ||A|I_n| = |A|^n$ , 于是  $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$ . 所以  $\text{rank} A^* = n$ .

当  $\text{rank} A = n-1$  时,  $A$  至少存在一个  $n-1$  阶子式不等于 0, 故  $A^* \neq 0$ , 即  $\text{rank} A^* \geq 1$ ; 由  $\text{rank} A < n$  知  $|A| = 0$ , 从而  $AA^* = |A|E = 0$ , 故由定理 3.3 可知  $\text{rank} A^* \leq n - \text{rank} A = 1$ , 于是  $\text{rank} A^* = 1$ . (另证: 若  $A$  的秩等于  $n-1$ , 则由命题 3.38 可知  $A^*$  的  $n$  个列向量都成比例且至少有一列不为零, 故  $A^*$  的秩等于 1.)

当  $\text{rank} A < n-1$  时,  $A$  的所有  $n-1$  阶子式均等于 0, 即  $A^* = 0$ , 故  $\text{rank} A^* = 0$ .  $\square$

#### 命题 2.26 (伴随矩阵的性质)

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

1.  $(A^T)^* = (A^*)^T$ .
2.  $(kA)^* = k^{n-1}A^*, k$  为常数.
3. 若  $A$  为可逆阵, 则  $A^*$  也可逆, 并且  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
4.  $(A^m)^* = (A^*)^m, m$  为正整数.
5.  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .
6.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ .

**证明**

1. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
2. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
3. 由定理 2.3 可知  $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I_n^* = I_n$ . 从而  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
4. 多次利用定理 2.3 即得.
5. **证法一:** 当  $A$  可逆时, 有  $A^* = |A|A^{-1}$ , 从而  $|A^*| = |A|^{n-1}$ ; 当  $A$  不可逆时, 有  $\text{rank} A < n$ , 由定理 2.4 知  $\text{rank} A^* < n$ . 于是  $|A^*| = |A| = 0$ , 故  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

若  $A$  是非异阵, 有  $A^* = |A|A^{-1}$ , 从而  $|A^*| = |A|^{n-1}$ . 对于一般的方阵  $A$ , 由命题 2.42 可知, 可取到一系列有理数

$t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$|(t_k I_n + A)^*| = |t_k I_n + A|^{n-1}.$$

注意到上式两边均为行列式的幂次, 其值都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限 (上式两边都是关于  $t_k$  的多项式函数), 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $|A^*| = |A|^{n-1}$  成立.

证法二: 见白皮书.

6. 证法一: 当  $A$  可逆时,  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$ , 从而由伴随矩阵的性质5.得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{1}{|A|} A = |A|^{n-2} A.$$

当  $A$  不可逆时, 则  $|A| = 0$ , 且由定理 2.4 及  $n \geq 2$  知  $\text{rank} A^* \leq 1 < n-1$ , 从而  $\text{rank}(A^*)^* = 0$ , 即  $(A^*)^* = 0$ , 因此  $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ .

若  $A$  是非异阵,  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$ , 从而由伴随矩阵的性质5.得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{1}{|A|} A = |A|^{n-2} A.$$

对于一般的方阵  $A$ , 由命题 2.42 可知, 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_k I_n + A)^*)^* = |t_k I_n + A|^{n-2} (t_k I_n + A).$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式 (上式两边的矩阵每个元素都是关于  $t_k$  的多项式函数), 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$  成立.

证法二: 见白皮书.

□

#### 命题 2.27 (伴随矩阵的继承性)

1. 对角矩阵的伴随矩阵是对角矩阵;
2. 对称矩阵的伴随矩阵是对称矩阵;
3. 上(下)三角矩阵的伴随矩阵是上(下)三角矩阵;
4. 可逆矩阵的伴随矩阵是可逆;
5. 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵;
6. 半正定(正定)矩阵的伴随矩阵是半正定(正定)矩阵;
7. 可对角化矩阵的伴随矩阵是可对角化矩阵.

#### 证明

1. 设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ ,  $n \geq 2$ .
2. 若  $A$  为对角矩阵, 则  $a_{ij} = 0 (i \neq j)$ , 从而  $i \neq j$  时,  $M_{ij}$  是对角行列式, 且主对角元必有零, 即  $M_{ij} = 0$ , 故  $A_{ij} = 0$ , 于是  $A^*$  为对角矩阵.
3. 若  $A$  为对称矩阵, 则  $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 因此  $i, j = 1, 2, \dots, n$  时,  $M_{ij}$  是对称行列式, 从而  $A_{ij} = A_{ji}$ , 即  $A^*$  为对称矩阵.
4. 若  $A$  为上三角矩阵, 则  $1 \leq j < i \leq n$  时,  $a_{ij} = 0$ , 所以  $1 \leq i < j \leq n$  时,  $M_{ij}$  是上三角行列式, 且主对角元必有零, 即  $M_{ij} = 0$ , 从而  $A_{ij} = 0$ , 所以  $A^*$  为上三角矩阵. 同理可证: 下三角矩阵的伴随矩阵是下三角矩阵.
5. 由  $|A| \neq 0$  和  $A^* = |A|A^{-1}$  即知.
6. 因为  $A$  为正交矩阵等价于  $A^{-1} = A^T$ , 所以  $|A|^{-1} = |A|$ . 从而由定理 2.2(ii), 有

$$(A^*)^{-1} = |A|^{-1} A = (|A|A^T)^T = (A^*)^T,$$

故  $A^*$  为正交矩阵.

7. 由于  $A$  为半正定矩阵等价于存在实矩阵  $C$ , 使得  $A = C^T C$ , 因此由定理 2.3 和伴随矩阵的性质1., 有

$$A^* = (C^T C)^* = C^*(C^T)^* = C^*(C^*)^T,$$

于是  $A^*$  为半正定矩阵. 当  $A$  为正定矩阵时, 同理可证  $A^*$  为正定矩阵.

8. 若  $A$  可对角化, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P\Lambda P^T$ , 其中  $\Lambda$  为对角矩阵, 从而由定理 2.3 和伴随矩阵的性质 1., 有

$$A^* = (P^T)^* \Lambda^* P^* = (P^*)^T \Lambda^* P^*,$$

再根据伴随矩阵的继承性 1. 和伴随矩阵的性质 3., 知  $\Lambda^*$  为对角矩阵,  $P^*$  为可逆矩阵, 故  $A^*$  可对角化.

□

### 命题 2.28 (分块矩阵的伴随矩阵)

设  $A$  为  $m$  阶矩阵,  $B$  为  $n$  阶矩阵, 分块对角阵  $C$  为

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

则分块对角阵  $C$  的伴随矩阵为:

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

▲

**证明 证法一:** 设  $A = (a_{ij})_{m \times m}$ , 元素  $a_{ij}$  的余子式和代数余子式分别记为  $M_{ij}$  和  $A_{ij}$ ;  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , 元素  $b_{ij}$  的余子式和代数余子式分别记为  $N_{ij}$  和  $B_{ij}$ . 利用 Laplace 定理可以容易地计算出: 当  $1 \leq i, j \leq m$  时,  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式为  $(-1)^{i+j} M_{ij} |B| = |B| A_{ij}$ ; 当  $m+1 \leq i, j \leq m+n$  时, 由 Laplace 定理, 可知  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式为  $(-1)^{i+j} N_{i-m, j-m} |A| = |A| B_{i-m, j-m}$ ; 当  $i, j$  属于其他范围时, 由 Laplace 定理, 当  $1 \leq i \leq m, m \leq j \leq m+n$  时, 将其按前  $m$  列展开, 当  $m \leq i \leq m+n, 1 \leq j \leq m$  时, 将其按前  $m$  行展开, 可得  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式等于零. 因此我们有

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

**证法二:** 若  $A, B$  均为非异阵, 则

$$C \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|AA^* & O \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A||B|I_m & O \\ O & |A||B|I_n \end{pmatrix} = |C|I_{m+n} = CC^*,$$

注意到  $C$  非异, 故由上式可得

$$C^* = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$


对于一般的方阵  $A, B$ , 由命题 2.42 可知, 可取到一系列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_m + A$  与  $t_k I_n + B$  均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{pmatrix} t_k I_m + A & O \\ O & t_k I_n + B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |t_k I_n + B|(t_k I_m + A)^* & O \\ O & |t_k I_m + A|(t_k I_n + B)^* \end{pmatrix}.$$

注意到上式两边均为  $m+n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ ,

即有  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$  成立. □

### 2.3.1 练习

 **练习 2.12** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB = BA$ , 证明:  $AB^* = B^*A$ .

**证明** 若  $B$  为非异阵, 则由  $AB = BA$  可得  $AB^{-1} = B^{-1}A$ . 又  $B^* = |B|B^{-1}$ , 于是  $AB^* = B^*A$  成立. 对于一般的方阵  $B$ , 可取到一系列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + B$  为非异阵, 此时  $A(t_k I_n + B) = (t_k I_n + B)A$  仍然成立. 由非异阵情形的证明可得

$$A(t_k I_n + B)^* = (t_k I_n + B)^* A.$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $AB^* = B^*A$  成立.  $\square$

 **练习 2.13** 设  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

求  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ .

**解 解法一:** 显然  $|A| = 2$ , 用初等变换不难求出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$A^* = 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

将  $A^*$  的所有元素加起来, 可得  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1$ .

**解法二:** 由命题 1.5 可得

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1.$$

于是  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1$ .

**解法三:** 由大拆分法可得  $|A(-1)| = |A| - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ , 且

$$|A(-1)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

故  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = |A(-1)| - |A|$ .

解法四:由例题 1.1 可得

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

## 2.4 矩阵的迹

### 命题 2.29 (矩阵迹的性质)

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 则有:

1. (线性)  $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$ ;
2. (对称性)  $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$ ;
3. (交换性)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .


证明 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证. □

### 命题 2.30 (矩阵迹的刻画)

设  $f$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵集到  $\mathbb{F}$  的一个映射, 它满足下列条件:

- (1) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A, B, f(A+B) = f(A) + f(B)$ ;
- (2) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A$  和  $\mathbb{F}$  中的数  $k, f(kA) = kf(A)$ ;
- (3) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A, B, f(AB) = f(BA)$ ;
- (4)  $f(I_n) = n$ .

求证:  $f$  就是迹, 即  $f(A) = \text{tr}(A)$  对一切  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵  $A$  成立. ▲

 **笔记** 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

**证明** 设  $E_{ij}$  是  $n$  阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n = f(I_n) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj}),$$

所以  $f(E_{ii}) = 1 (1 \leq i \leq n)$ . 另一方面, 若  $i \neq j$ , 则

$$f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(O) = f(0 \cdot I_n) = 0 \cdot f(I_n) = 0.$$

设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ , 则

$$f(A) = f\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A).$$

□

**例题 2.13** 求证: 不存在  $n$  阶矩阵  $A, B$ , 使得  $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$ .

**证明** 用反证法证明. 若存在  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足条件  $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$ , 则

$$kn = \text{tr}(kI_n) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

矛盾. □

**例题 2.14** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $P$  是同阶可逆阵, 求证:  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ , 即相似矩阵具有相同的迹.

**证明** 因为  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , 故  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$ . □

**例题 2.15** 设  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是实对称阵且  $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2 = O$ , 证明: 每个  $A_i = O$ .

**证明** 对题设中的等式两边同时取迹, 可得

$$0 = \text{tr}(O) = \text{tr}(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2) = \text{tr}(A_1 A_1') + \text{tr}(A_2 A_2') + \dots + \text{tr}(A_k A_k').$$

又由于  $\text{tr}(A_i A_i') \geq 0$ , 从而只可能是  $\text{tr}(A_i A_i') = 0 (1 \leq i \leq k)$ , 再次由零矩阵的充要条件可得  $A_i = O (1 \leq i \leq k)$ . □

### 命题 2.31

1. 设  $n$  阶实矩阵  $A$  适合  $A' = -A$ , 如果存在同阶实矩阵  $B$ , 使得  $AB = B$ , 则  $B = O$ ;
2. 设  $n$  阶复矩阵  $A$  适合  $\overline{A'} = -A$ , 如果存在同阶复矩阵  $B$ , 使得  $AB = B$ , 则  $B = O$ .

**证明**

1. 在等式  $AB = B$  两边同时左乘  $B'$  可得

$$B'AB = B'B.$$

上式两边同时转置并注意到  $A' = -A$ , 可得

$$B'B = (B'B)' = (B'AB)' = B'A'B = -B'AB = -B'B,$$

从而有  $B'B = O$ . 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得  $B = O$ .

2. 证明与 1 类似.

□

### 命题 2.32

设  $A$  为  $n$  阶实矩阵, 求证:  $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(AA')$ , 等号成立当且仅当  $A$  是对称阵.

**证明** 若已知  $\text{tr}(AA') \geq \text{tr}(A^2)$ , 则由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得

$$\begin{aligned} & \text{tr}((A - A')(A - A')') \\ &= \text{tr}((A - A')(A' - A)) = \text{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) \\ &= 2\text{tr}(AA') - 2\text{tr}(A^2) \geq 0, \end{aligned}$$

故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知  $A - A' = O$ , 即  $A$  为对称阵. 若已知  $A$  为对称阵, 则  $\text{tr}(AA') = \text{tr}(A^2)$  显然成立. □

### 命题 2.33

设  $A, B$  是两个  $n$  阶矩阵, 使得  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA)$  对任意  $n$  阶矩阵  $C$  成立, 求证:  $AB = BA$ .

**证明** 设  $AB = (d_{ij}), BA = (e_{ij})$ , 令  $C = E_{kl} (1 \leq k, l \leq n)$ , 则

$$\text{tr}(ABC) = d_{lk}, \text{tr}(CBA) = e_{lk},$$

因此  $d_{lk} = e_{lk} (1 \leq k, l \leq n)$ , 即有  $AB = BA$ . □

**注** 若  $A, B$  是实(复)矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得  $\text{tr}((AB - BA)C) = 0$ , 令  $C$  为  $AB - BA$  的转置(共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

**例题 2.16** 若  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $AA' = I_n$ , 则称为正交矩阵. 证明: 不存在  $n$  阶正交矩阵  $A, B$  满足  $A^2 = cAB + B^2$ , 其中  $c$  是非零常数.

**证明** 用反证法, 设存在  $n$  阶正交阵  $A, B$ , 使得  $A^2 = cAB + B^2 (c \neq 0)$ . 在等式两边同时左乘  $A'$ , 右乘  $B'$ , 可得  $AB' = cI_n + A'B$ , 从而  $cI_n = A'B - AB'$ . 两边同时取迹, 可得  $0 \neq nc = \text{tr}(cI_n) = \text{tr}(A'B) - \text{tr}(AB') = \text{tr}((A'B)') -$



$\text{tr}(AB') = \text{tr}(B'A) - \text{tr}(AB') = 0$ , 矛盾. □

**例题 2.17** 设  $A, B$  为  $n$  阶实对称阵, 证明:  $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2B^2)$ , 并求等号成立的充要条件.

**证明** 由命题 2.32, 再结合  $A, B$  的对称性可得

$$\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}((AB)(AB)') = \text{tr}(ABBA) = \text{tr}(A^2B^2).$$

等号成立当且仅当  $AB$  也为实对称矩阵, 即  $AB = B'A' = BA$ . □

## 2.5 矩阵乘法与行列式计算

**命题 2.34** (可以写成两个矩阵(向量)乘积的矩阵)

若已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{1n} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{1n} & \cdots & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{12} + \cdots + a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{2n} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{2n} & \cdots & a_{n1}b_{21} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} + a_{12}b_{n2} + \cdots + a_{1n}b_{nn} & a_{21}b_{n1} + a_{22}b_{n2} + \cdots + a_{2n}b_{nn} & \cdots & a_{n1}b_{n1} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

则矩阵  $A$  可以写成  $BC$ , 其中

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

即

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = BC.$$

特别地, 若矩阵  $A$  的行/列向量成比例, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{则令 } \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \text{ 就有 } A = \beta' \alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n).$$

**注** 若矩阵的列向量成比例, 则行向量也一定成比例. 反之也成立.



**笔记** 观察原矩阵  $A$  不难发现: 矩阵  $A$  的每一行沿行方向只有  $a_{ij}$  (的角标) 改变, 而  $b_{kl}$  (的角标) 并不改变; 而矩阵  $A$  的每一列沿列方向只有  $b_{kl}$  (的角标) 改变,  $a_{ij}$  (的角标) 并不改变. 因此具有这种性质的矩阵, 都可以按照这个命题将其写成两个矩阵的乘积. 特别地, 若矩阵的行/列向量成比例, 则一定可以将其写成两个向量的乘积.

记忆小技巧: 只需要记住矩阵  $B$  的形式 (沿行方向不变的项写在前面作为矩阵  $B$  的元素), 然后结合原矩阵, 利用矩阵乘法就能写出矩阵  $C$ . 即按行变化的项写左边 (作为矩阵  $B$  的元素), 按列变化的项写右边 (作为矩阵  $C$  的元素).

**注** 拆分后的矩阵  $B$  的行数与原矩阵  $A$  相同, 矩阵  $C$  的列数与原矩阵  $A$  相同. 但是矩阵  $B$  的列数与矩阵  $C$  的行数可以任意选取, 只要满足  $BC = A$  即可.

**证明** 利用矩阵乘法容易得到证明. □


**命题 2.35** (一些能写成两个向量乘积的矩阵)

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \alpha \alpha', \text{ 其中 } \alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$$

2. 若矩阵  $A$  的行/列向量成比例, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{则有 } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n).$$

 **笔记** 这里的  $a_i$  可以是行向量,  $b_i$  可以是列向量. 此时矩阵  $A$  的元素就是  $a_i b_i$  仍然是一个数. 并且此时矩阵  $A$  能够分解的条件应该改为**矩阵  $A$  的每一行都有公共的行向量  $a_i$ , 每一列都有公共的列向量  $b_i$ .**

**注** 若  $a_i, b_i$  是上述向量, 则根据矩阵乘法, 可知  $a_i$  的列数可以任意选取,  $b_i$  的行数可以任意选取. 此时只要确定每个向量  $a_i, b_i$  就可以确定矩阵  $A$  的分解式.

**例题 2.18** 设  $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$ ,

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

求  $|S|$  的值并证明若  $x_i$  是实数, 则  $|S| \geq 0$ .

**解** 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

则  $S = VV'$ , 因此

$$|S| = |V|^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \geq 0.$$

**例题 2.19** 设  $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1), s_0 = n$ , 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}.$$

**解** 将矩阵  $A$  分解为两个矩阵的乘积:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此  $|A| = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2$ .

**例题 2.20** 计算下列矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

**解 解法一:** 注意到

$$AA' = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & w & -z \\ -z & -w & x & y \\ -w & z & -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

其中  $u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ , 因此

$$|A|^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^4.$$

故

$$|A| = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2.$$

在矩阵  $A$  中令  $x = 1, y = z = w = 0$ , 显然  $|A| = 1$ .

**解法二:** 令

$$B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & -z \end{pmatrix},$$

则  $|A| = \begin{vmatrix} B & -C \\ C & B \end{vmatrix}$ . 由命题 2.41 可得

$$|A| = |B + iC||B - iC| = \begin{vmatrix} x + iz & -y + iw \\ y + iw & x - iz \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x - iz & -y - iw \\ y - iw & x + iz \end{vmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2.$$

**例题 2.21** 计算下列矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos \theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta \\ \cos(n-1)\theta & \cos n\theta & \cos \theta & \cdots & \cos(n-2)\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

解 解由上面的结论可知

$$|A| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根,  $f(x) = \cos \theta + x \cos 2\theta + \cdots + x^{n-1} \cos n\theta$ . 令

$$g(x) = \sin \theta + x \sin 2\theta + \cdots + x^{n-1} \sin n\theta,$$

则由 De Moivre 公式可得

$$\begin{aligned} f(x) + ig(x) &= (\cos \theta + i \sin \theta) + x(\cos \theta + i \sin \theta)^2 + \cdots + x^{n-1}(\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)[1 - x^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n]}{1 - x(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1 - x^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n}{\cos \theta - x - i \sin \theta} = \frac{(1 - x^n \cos n\theta + ix^n \sin n\theta)(\cos \theta - x + i \sin \theta)}{[(\cos \theta - i \sin \theta) - x][(\cos \theta + i \sin \theta) - x]} \\ &= \frac{(1 - x^n \cos n\theta + ix^n \sin n\theta)(\cos \theta - x + i \sin \theta)}{(\cos \theta - x)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{(1 - x^n \cos n\theta + ix^n \sin n\theta)(\cos \theta - x + i \sin \theta)}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} \\ &= \frac{[x^{n+1} \cos n\theta - x^n \cos(n+1)\theta - x + \cos \theta] + i[x^{n+1} \sin n\theta + x^n \sin(n-1)\theta + \sin \theta]}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}. \end{aligned}$$

再比较实部, 可得

$$f(x) = \frac{\cos n\theta \cdot x^{n+1} - \cos(n+1)\theta \cdot x^n - x + \cos \theta}{x^2 - 2 \cos \theta \cdot x + 1}.$$

对任意的  $\varepsilon_i$ , 经计算并化简, 可得

$$f(\varepsilon_i) = \frac{(\cos \theta - \cos(n+1)\theta) - \varepsilon_i(1 - \cos n\theta)}{[(\cos \theta + i \sin \theta) - \varepsilon_i][(\cos \theta - i \sin \theta) - \varepsilon_i]}.$$

注意到对任意的  $a, b$ , 有  $a^n - b^n = (a - \varepsilon_1 b)(a - \varepsilon_2 b) \cdots (a - \varepsilon_n b)$ , 因此

$$\begin{aligned} |A| &= \prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i) = \frac{(\cos \theta - \cos(n+1)\theta)^n - (1 - \cos n\theta)^n}{(\cos n\theta + i \sin n\theta - 1)(\cos n\theta - i \sin n\theta - 1)} \\ &= \frac{(\cos \theta - \cos(n+1)\theta)^n - (1 - \cos n\theta)^n}{2(1 - \cos n\theta)} \\ &= \frac{2^n \sin^n \frac{n\theta}{2} \sin^n \frac{(n-2)\theta}{2} - 2^n \sin^{2n} \frac{n\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{n\theta}{2}} \\ &= 2^{n-2} \sin^{n-2} \frac{n\theta}{2} \left( \sin^n \frac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n \frac{n\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

## 2.6 Cauchy-Binet 公式

### 定理 2.5 (Cauchy-Binet 公式)

设  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵,  $B = (b_{ij})$  是  $n \times m$  矩阵.  $A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$  表示  $A$  的一个  $s$  阶子式, 它是由  $A$  的第  $i_1, \dots, i_s$  行与第  $j_1, \dots, j_s$  列交点上的元素按原次序排列组成的行列式. 同理定义  $B$  的  $s$  阶子式.

(1) 若  $m > n$ , 则有  $|AB| = 0$ ;

(2) 若  $m \leq n$ , 则有

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

证明

(1) 若  $m > n$ , 则  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq \min\{m, n\} = n < m$ , 故  $|AB| = 0$ .

(2)

□

## 推论 2.2 (Cauchy-Binet 公式推论)

设  $A = (a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵,  $B = (b_{ij})$  是  $n \times m$  矩阵,  $r$  是一个正整数且  $r \leq m$ .

(1) 若  $r > n$ , 则  $AB$  的任意  $r$  阶子式都等于零;

(2) 若  $r \leq n$ , 则  $AB$  的  $r$  阶子式

$$AB \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}.$$



**例题 2.22** 设  $n \geq 3$ , 证明下列矩阵是奇异阵:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{pmatrix}.$$

**解** 注意到

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \alpha_n & \sin \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cdots & \cos \beta_n \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \cdots & \sin \beta_n \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy-Binet 公式, 可知  $|A| = 0$ .

**例题 2.23** 设  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 求证: 矩阵  $AA'$  的任一主子式都非负.

**证明** 若  $r \leq n$ , 则由 Cauchy-Binet 公式推论可得

$$AA' \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \left( A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \right)^2 \geq 0;$$

若  $r > n$ , 则  $AA'$  的任一  $r$  阶主子式都等于零, 结论也成立. □

**例题 2.24** 设  $A$  是  $n$  阶实方阵且  $AA' = I_n$ . 求证: 若  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ , 则

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \left( A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \right)^2 = 1.$$

**证明** 对等式  $AA' = I_n$  两边同时求  $r$  阶子式, 因为  $r \leq n$ , 所以由 Cauchy-Binet 公式即得结论成立. □

**例题 2.25** 设  $A, B$  分别是  $m \times n, n \times m$  矩阵, 求证:  $AB$  和  $BA$  的  $r$  阶主子式之和相等, 其中  $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ .

**证明** 由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} AB \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} BA \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



**引理 2.1 (Lagrange 恒等式)**证明 Lagrange 恒等式 ( $n \geq 2$ ):

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$



证明 左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy - Binet 公式可得

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

□

**定理 2.6 (Cauchy - Schwarz 不等式)**设  $a_i, b_i$  都是实数, 证明 Cauchy - Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$



证明 由Lagrange 恒等式, 恒等式右边总非负, 即得结论.

□

**例题 2.26** 设  $A, B$  都是  $m \times n$  实矩阵, 求证:

$$|AA'| |BB'| \geq |AB'|^2.$$

证明 若  $m > n$ , 则  $|AA'| = |BB'| = |AB'| = 0$ , 结论显然成立. 若  $m \leq n$ , 则由 Cauchy - Binet 公式可得

$$\begin{aligned} |AA'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} \left( A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \right)^2; \\ |BB'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} \left( B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \right)^2; \\ |AB'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

再由 Cauchy - Schwarz 不等式即得结论.

□

## 2.7 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

## 命题 2.36 (打洞原理)

(1) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $A$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么


$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $D$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

 **笔记** 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板  $\begin{vmatrix} \square & \\ & \square - \square \square^{-1} \square \end{vmatrix}$ , 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个  $\square$  填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入  $\square$  即可.

**证明** (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去  $B$  或  $C$ )

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第一行左乘  $(-CA^{-1})$  再添加到第二行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第二行左乘  $(-BD^{-1})$  再添加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$


□

## 推论 2.3 (打洞原理推论)

设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 则

$$\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|.$$

♡

 **笔记** 这个推论能将原本复杂的矩阵  $AB$  通过交换顺序变成相对简单的矩阵  $BA$ . 例如: 例题 2.35.

**注** 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

**证明** 当  $\lambda = 0$  时, 结论显然成立.

当  $\lambda \neq 0$  时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|.$$

于是  $\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|$  .. 故  $\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|$ . □

**例题 2.27** 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 令  $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$ , 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\begin{aligned} A &= -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n |I_2| \left| I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n |I_n| \left| I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \left| I_2 - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix} \right| = (-1)^n \left[ (1-n) \left( 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

**例题 2.28** 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{pmatrix}.$$



解 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

例题 2.29 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当  $n > 2$  时, 由 Cauchy-Binet 公式可知  $|A| = 0$ . 当  $n = 2$  时,  $|A| = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2$ . 当  $n = 1$  时,  $|A| = a_1 - b_1$ .

例题 2.30 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将  $A$  化为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

利用降阶公式容易求得  $|A| = (-1)^n n! (1 - n)$ .

#### 命题 2.37

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

□

**例题 2.31** 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

**解 解法一:** 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则  $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$ . 由命题 2.40 可得

$$\begin{aligned} |A| &= |B+C||B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z). \end{aligned}$$

**解法二 (求根法):**

**命题 2.38**

设  $A, B$  是  $n$  阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

◆

**证明** 将分块矩阵的第二行乘以  $i$  加到第一行上, 再将第一列乘以  $-i$  加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

□

**例题 2.32** 设  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

**解** 反复利用命题 2.40 的结论可得

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|. \end{aligned}$$

**例题 2.33** 设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$ , 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

**证明** 由命题 2.41 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB| = |(A + iB)(A - iB)| = |A^2 + B^2 - i(AB - BA)| = |A^2 + B^2|.$$

□

**例题 2.34** 设  $A, B$  是  $n$  阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

**证明** 注意到  $A, B$  都是实矩阵, 故  $\overline{|A + iB|} = |A + iB| = |A - iB|$ , 再由命题 2.41 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB| = |A + iB| \cdot \overline{|A + iB|} \geq 0.$$

□

## 2.8 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

### 命题 2.39 (打洞原理)

(1) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $A$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$


(2) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $D$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

▲

 **笔记** 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板  $|\square| = |\square| |\square - \square \square^{-1} \square|$ , 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个  $\square$  填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入  $\square$  即可.

**证明** (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去  $B$  或  $C$ )

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第一行左乘  $(-CA^{-1})$  再添加到第二行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第二行左乘  $(-BD^{-1})$  再添加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$


□

#### 推论 2.4 (打洞原理推论)

设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 则

$$\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|.$$

♡

 **笔记** 这个推论能将原本复杂的矩阵  $AB$  通过交换顺序变成相对简单的矩阵  $BA$ . 例如: 例题 2.35.

**注** 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

**证明** 当  $\lambda = 0$  时, 结论显然成立.

当  $\lambda \neq 0$  时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^n \left| I_m - \frac{1}{\lambda}BA \right| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|.$$

于是  $\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|$  .. 故  $\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|$ .

□

**例题 2.35** 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 令  $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$ , 则由降价公式(打洞原理)我们有

$$A = -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n |I_2| \left| I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \begin{vmatrix} I_2 & A' \\ A & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n |I_n| \begin{vmatrix} I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{vmatrix} I_2 - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix} \end{vmatrix} = (-1)^n \left[ (1-n) \left( 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

**例题 2.36** 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

**例题 2.37** 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

**解** 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当  $n > 2$  时, 由 Cauchy-Binet 公式可知  $|A| = 0$ . 当  $n = 2$  时,  $|A| = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2$ . 当  $n = 1$  时,  $|A| = a_1 - b_1$ .

**例题 2.38** 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将  $A$  化为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

利用降阶公式容易求得  $|A| = (-1)^n n! (1 - n)$ .

**命题 2.40**

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B|.$$

**证明** 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|.$$

□

**例题 2.39** 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

**解 解法一:** 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则  $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$ . 由命题 2.40 可得

$$\begin{aligned} |A| &= |B+C| |B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z). \end{aligned}$$

**解法二 (求根法):**

**命题 2.41**

设  $A, B$  是  $n$  阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB|.$$

**证明** 将分块矩阵的第二行乘以  $i$  加到第一行上, 再将第一列乘以  $-i$  加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

□

**例题 2.40** 设  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

**解** 反复利用 **命题 2.40** 的结论可得

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|. \end{aligned}$$

**例题 2.41** 设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵且  $AB=BA$ , 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

**证明** 由 **命题 2.41** 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB| \cdot |A-iB| = |(A+iB)(A-iB)| = |A^2 + B^2 - i(AB-BA)| = |A^2 + B^2|.$$

□

**例题 2.42** 设  $A, B$  是  $n$  阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

**证明** 注意到  $A, B$  都是实矩阵, 故  $\overline{|A+iB|} = |\overline{A+iB}| = |A-iB|$ , 再由 **命题 2.41** 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB| \cdot |A-iB| = |A+iB| \cdot \overline{|A+iB|} \geq 0.$$

□

## 2.9 摄动法

### 摄动法的原理


(1) 证明矩阵问题对非异阵成立.

(2) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A$ , 由上例可知, 存在一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  都是非异阵. 验证  $t_k I_n + A$  仍满足矩阵问题的条件, 从而该问题对  $t_k I_n + A$  成立.

(3) 若矩阵问题关于  $t_k$  连续, 则可取极限令  $t_k \rightarrow 0$ , 从而得到该问题对一般的矩阵  $A$  也成立.


**注**

1. 矩阵问题对非异阵成立以及矩阵问题关于  $t_k$  连续, 这两个要求缺一不可, 否则将不能使用摄动法进行证明.
2. 验证摄动矩阵仍然满足矩阵问题的条件是必要的. 例如, 若矩阵问题中有  $AB = -BA$  这一条, 但  $(t_k I_n + A)B \neq -B(t_k I_n + A)$ , 因此便不能使用摄动法.
3. 根据实际问题的需要, 也可以使用其他非异阵来替代  $I_n$  对  $A$  进行摄动.

 **笔记** 关于伴随矩阵的问题中经常会使用摄动法.

## 命题 2.42

设  $A$  是一个  $n$  阶方阵, 求证: 存在一个正数  $a$ , 使得对任意的  $0 < t < a$ , 矩阵  $tI_n + A$  都是非异阵.

 **笔记** 这个命题告诉我们对任意的  $n$  阶矩阵  $A$ , 经过微小的一维摄动之后,  $tI_n + A$  总能成为一个非异阵.

**证明** 通过简单的计算可得

$$|tI_n + A| = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n,$$

这是一个关于未定元  $t$  的  $n$  次多项式. 由多项式根的有限性可知上述多项式至多只有  $n$  个不同的根. 若上述多项式的根都是零, 则不妨取  $a = 1$ ; 若上述多项式有非零根, 则令  $a$  为  $|tI_n + A|$  所有非零根的模长的最小值. 因此对任意的  $0 < t_0 < a$ ,  $t_0$  都不是  $|tI_n + A|$  的根, 即  $|t_0 I_n + A| \neq 0$ , 从而  $t_0 I_n + A$  是非异阵.  $\square$

**例题 2.43** 设  $A, B, C, D$  是  $n$  阶矩阵且  $AC = CA$ , 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

 **笔记** 本题也给出了例题 2.41 的摄动法证明.

**证明** 若  $A$  为非异阵, 则由降阶公式, 再结合条件  $AC = CA$  可得


$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

对于一般的方阵  $A$ , 由命题 2.11 可知, 存在一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  是非异阵, 并且条件  $(t_k I_n + A)C = C(t_k I_n + A)$  仍然成立. 于是

$$\begin{vmatrix} t_k I_n + A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(t_k I_n + A)D - CB|.$$

上式两边都是行列式, 其值都是  $t_k$  的多项式, 从而都关于  $t_k$  连续. 上式两边同时令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$  成立.  $\square$

## 2.10 练习

 **练习 2.14** 设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶方阵, 定义函数  $f(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$ . 设  $P$  为  $n$  阶可逆矩阵, 使得对任意的  $n$  阶方阵  $A$  成

立:  $f(PAP^{-1}) = f(A)$ . 证明: 存在非零常数  $c$ , 使得  $P'P = cI_n$ .

**证明** 由假设知  $f(A) = \text{tr}(AA')$ , 因此

$$f(PAP^{-1}) = \text{tr}(PAP^{-1}(P')^{-1}A'P') = \text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA').$$

以下设  $P'P = (c_{ij})$ ,  $(P'P)^{-1} = (d_{ij})$ . 注意  $P'P$  是对称矩阵, 后面要用到. 令  $A = E_{ij}$ , 其中  $1 \leq i, j \leq n$ . 并将其代入  $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$  可得

$$(P'P)A(P'P)^{-1}A' = (P'P)E_{ij}(P'P)^{-1}E_{ji}$$



$$= \begin{pmatrix} j \\ c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{jj} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ c_{1i}d_{jj} \\ c_{2i}d_{jj} \\ \vdots \\ c_{ii}d_{jj} \\ \vdots \\ c_{ni}d_{jj} \end{pmatrix}$$

于是  $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = c_{ii}d_{jj}$ . 而  $\text{tr}(AA') = \text{tr}(E_{ij}E_{ji}) = \text{tr}(E_{ii}) = 1$ . 则由  $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA')$  可知

$$c_{ii}d_{jj} = 1. \quad (2.2)$$

再令  $A = E_{ij} + E_{kl}$ , 其中  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ . 不妨设  $k \geq i, l \geq j$ , 将其代入  $(P'P)A(P'P)^{-1}A'$  可得

$$(P'P)A(P'P)^{-1}A' = (P'P)(E_{ij} + E_{kl})(P'P)^{-1}(E_{ji} + E_{lk})$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} j \\ c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ \vdots \\ c_{ki} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{ik} \\ \vdots \\ c_{kk} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} i \\ d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{jj} \\ \vdots \\ d_{lj} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ d_{1l} \\ d_{2l} \\ \vdots \\ d_{jl} \\ \vdots \\ d_{ll} \\ \vdots \\ d_{nl} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} j & l \\ c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki} & \cdots & c_{kk} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & k \\ d_{1j} & \cdots & d_{1l} \\ d_{2j} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{jj} & \cdots & d_{jl} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{lj} & \cdots & d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{nj} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & k \\ c_{1i}d_{jj} + c_{1k}d_{lj} & \cdots & c_{1i}d_{jl} + c_{1k}d_{ll} \\ c_{2i}d_{jj} + c_{2k}d_{lj} & \cdots & c_{2i}d_{jl} + c_{2k}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ii}d_{jj} + c_{ik}d_{lj} & \cdots & c_{ii}d_{jl} + c_{ik}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ki}d_{jj} + c_{kk}d_{lj} & \cdots & c_{ki}d_{jl} + c_{kk}d_{ll} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{ni}d_{jj} + c_{nk}d_{lj} & \cdots & c_{ni}d_{jl} + c_{nk}d_{ll} \end{pmatrix}$$

从而  $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = c_{ii}d_{jj} + c_{kk}d_{ll} + c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj}$ . 而

$$\text{tr}(AA') = \text{tr}((E_{ij} + E_{kl})(E_{ji} + E_{lk})) = \text{tr}(E_{ij}E_{ji} + E_{ij}E_{lk} + E_{kl}E_{ji} + E_{kl}E_{lk}) = 2 + 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

于是由  $\text{tr}((P'P)A(P'P)^{-1}A') = \text{tr}(AA')$  可知

$$c_{ii}d_{jj} + c_{kk}d_{ll} + c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj} = 2 + 2\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.3)$$

其中  $\delta_{ik}$  是 Kronecker 符号. 由上述(2.2)(2.3)两式可得

$$c_{ki}d_{jl} + c_{ik}d_{lj} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

在上式中令  $j = l, i \neq k$ , 注意到  $d_{jj} \neq 0$ , 故有  $c_{ik} + c_{ki} = 0$ , 又因为  $P'P$  是对称矩阵, 所以  $c_{ik} = c_{ki}$ . 故  $c_{ik} = 0, \forall i \neq k$ . 于是  $P'P$  是一个对角矩阵, 从而由(2.2)式可得  $d_{jj} = c_{jj}^{-1}$ , 由此可得  $c_{ii} = c_{jj}, \forall i, j$ . 因此  $P'P = cI_n$ , 其中  $c = c_{11} \neq 0$ .

□

## 第三章 线性空间与线性方程组

### 3.1 向量的线性关系

#### 定理 3.1

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  是线性空间  $V$  中的向量.

(1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则任意一组包含这组向量的向量组必线性相关; 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则从这组向量中任意取出一组向量必线性无关.

(2) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合.

(3) 若  $\beta$  可表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m,$$

则表示唯一的充要条件是向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

证明

#### 定理 3.2

(1) 设  $A, B$  是两组向量,  $A$  含有  $r$  个向量,  $B$  含有  $s$  个向量, 且  $A$  中每个向量均可用  $B$  中向量线性表示. 若  $A$  中向量线性无关, 则  $r \leq s$ .

(2) 设  $A, B$  是两组向量,  $A$  含有  $r$  个向量,  $B$  含有  $s$  个向量, 且  $A$  中每个向量均可用  $B$  中向量线性表示. 若  $r > s$ , 则  $A$  中向量线性相关.

证明 (2) 是 (1) 的逆否命题, 因此我们只证明 (1).

#### 命题 3.1

设  $A$  是  $m \times n$  阶梯形矩阵, 证明:  $A$  的秩等于其非零行的个数, 且阶梯点所在的列向量是  $A$  的列向量的极大无关组.

证明 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rk_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

其中  $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$  是  $A$  的阶梯点. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是  $A$  的前  $r$  行, 我们先证明它们线性无关. 设

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r = \mathbf{0}$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_r$  是常数. 上式是关于  $n$  维行向量的等式, 先考察行向量的第  $k_1$  分量, 可得  $c_1a_{1k_1} = 0$ . 因为  $a_{1k_1} \neq 0$ , 故  $c_1 = 0$ ; 再依次考察行向量的第  $k_2, \dots, k_r$  分量, 最后可得  $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ . 因此  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 从而  $A$  的秩等于  $r$ , 即其非零行的个数.

再将  $r$  个阶梯点所在的列向量取出, 拼成一个新的矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rk_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

采用相同的方法可证明矩阵  $B$  的前  $r$  行线性无关, 因此  $r(B) = r$ , 从而阶梯点所在的列向量组的秩也等于  $r$ . 又因为  $r(A) = r$ , 故它们是  $A$  的列向量的极大无关组.  $\square$

### 命题 3.2

设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  是一个  $m \times n$  矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  是列向量.  $P$  是一个  $m$  阶可逆矩阵,  $B = PA = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ , 其中  $\beta_j = P\alpha_j (1 \leq j \leq n)$ . 证明: 若  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组, 则  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$  是  $B$  的列向量的极大无关组.

**证明** 先证明向量组  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$  线性无关. 设

$$c_1\beta_{i_1} + c_2\beta_{i_2} + \cdots + c_r\beta_{i_r} = \mathbf{0},$$

即

$$c_1P\alpha_{i_1} + c_2P\alpha_{i_2} + \cdots + c_rP\alpha_{i_r} = \mathbf{0}.$$

已知  $P$  是可逆矩阵, 因此

$$c_1\alpha_{i_1} + c_2\alpha_{i_2} + \cdots + c_r\alpha_{i_r} = \mathbf{0}.$$

而向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性无关, 故  $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ , 这证明了向量组  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$  线性无关. 要证这是  $B$  的列向量的极大无关组, 只需证明  $B$  的任意一个列向量都是这些向量的线性组合即可. 设  $\beta_j$  是  $B$  的任意一个列向量, 则  $\beta_j = P\alpha_j$ . 因为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组, 故  $\alpha_j$  可用  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性表示. 不妨设

$$\alpha_j = b_1\alpha_{i_1} + b_2\alpha_{i_2} + \cdots + b_r\alpha_{i_r},$$

则

$$P\alpha_j = b_1P\alpha_{i_1} + b_2P\alpha_{i_2} + \cdots + b_rP\alpha_{i_r},$$

即

$$\beta_j = b_1\beta_{i_1} + b_2\beta_{i_2} + \cdots + b_r\beta_{i_r}.$$

$\square$

### 推论 3.1

设  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关,  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 求证:  $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_m$  线性无关.

$\heartsuit$

**证明** 由命题 3.2 即得.  $\square$

### 命题 3.3

设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  是线性空间  $V$  中一组线性无关的向量,  $\beta$  是  $V$  中的向量. 求证: 或者  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关, 或者  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的线性组合.

$\heartsuit$

**证明** 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关, 则结论得证. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则存在不全为零的数  $c_1, c_2, \cdots, c_m, d$ ,

使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m + d\beta = 0.$$


若  $d=0$ , 则  $c_1, c_2, \cdots, c_m$  不全为零且  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = 0$ , 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关矛盾. 因此  $d \neq 0$ , 从而

$$\beta = -\frac{c_1}{d}\alpha_1 - \frac{c_2}{d}\alpha_2 - \cdots - \frac{c_m}{d}\alpha_m,$$

即  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的线性组合. □

### 推论 3.2

若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关且  $\beta \notin L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性无关. ♥

 **笔记** 这个推论与上一个命题 3.3 等价. 虽然这个等价命题很简单, 但后面经常会用到.

### 命题 3.4

设向量  $\beta$  可由向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性表示, 但不能由其中任何个数少于  $m$  的部分向量线性表示, 则这  $m$  个向量线性无关. ▲

**证明** 用反证法, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性相关, 则至少有一个向量是其余向量的线性组合. 不妨设  $\alpha_m$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$  的线性组合, 则由线性组合的传递性可知,  $\beta$  也是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$  的线性组合, 这与假设矛盾. □

### 命题 3.5

设线性空间  $V$  中向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关, 已知有序向量组  $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$  线性相关, 求证: 最多只有一个  $\alpha_i$  可以表示为前面向量的线性组合. ▲

**证明** 用反证法, 设存在  $1 \leq i < j \leq r$ , 使得


$$\alpha_i = b\beta + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_{i-1}\alpha_{i-1},$$

$$\alpha_j = d\beta + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{j-1}\alpha_{j-1}.$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关, 故  $b \neq 0$ . 若  $b=0$ , 则  $\alpha_i$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$  的线性组合, 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关矛盾. 将第一个等式乘以  $-\frac{d}{b}$  加到第二个等式上, 可得  $\alpha_j$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{j-1}$  的线性组合, 这与  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性无关矛盾. □

### 命题 3.6

设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 满足  $AB = I_n$ , 求证:  $B$  的  $n$  个列向量线性无关. ▲

 **笔记** 实际上, 由  $AB = I_n$  可知  $A, B$  互为逆矩阵, 从而  $A, B$  满秩, 结论得证.

**证明** 设  $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$  为列分块, 则  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$ . 由  $AB = I_n$  可得  $A\beta_i = e_i (1 \leq i \leq n)$ , 其中  $e_i$  是  $n$  维标准单位列向量. 设

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n = 0,$$

上式两边同时左乘  $A$ , 可得


$$0 = c_1A\beta_1 + c_2A\beta_2 + \cdots + c_nA\beta_n = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = (c_1, c_2, \cdots, c_n)',$$

因此  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ , 即  $B$  的  $n$  个列向量  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$  线性无关. □

### 命题 3.7 (缩短向量与延伸向量)

1. 设  $\{\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), 1 \leq i \leq m\}$  是一组  $n$  维行向量,  $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq n$  是给定的  $t (t < n)$  个指标. 定义  $\tilde{\alpha}_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \cdots, a_{ij_t})$ , 称  $\tilde{\alpha}_i$  为  $\alpha_i$  的  $t$  维缩短向量. 则

- (1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  也线性相关;  
 (2) 设  $n$  维行向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 则  $\tilde{\alpha}$  也是  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  的线性组合.  
 2. 设  $\{\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), 1 \leq i \leq m\}$  是一组  $n$  维行向量,  $j_1, j_2, \dots, j_t \geq 1$  是给定的  $t (t > n)$  个指标. 定义  $\bar{\alpha}_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_t})$ , 称  $\bar{\alpha}_i$  为  $\alpha_i$  的  $t$  维延伸向量. 则  
 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m$  也线性无关.

 **笔记** 这个命题告诉我们: 线性相关向量组的任意缩短组也是线性相关的, 线性无关向量组的任意延伸组也是线性无关的.

**证明** 1. (1) 由假设存在不全为零的数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , 使得

$$0 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{in} \right).$$

在等式两边同时取  $t$  维缩短向量, 可得

$$0 = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_t} \right) = c_1 \tilde{\alpha}_1 + c_2 \tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m \tilde{\alpha}_m,$$

从而结论成立.

(2) 设  $\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m$ , 则

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{in} \right).$$

在等式两边同时取  $t$  维缩短向量, 可得

$$\tilde{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_1}, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_2}, \dots, \sum_{i=1}^m c_i a_{ij_t} \right) = c_1 \tilde{\alpha}_1 + c_2 \tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m \tilde{\alpha}_m,$$

从而结论成立.

2. 这个命题就是 1(1) 的逆否命题, 从而结论成立. □

**例题 3.1** 设  $V$  是实数域上连续函数全体构成的实线性空间, 求证下列函数线性无关:

- (1)  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ ;
- (2)  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ ;
- (3)  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ .

**证明** **证法一:** 根据向量线性无关的基本性质, 我们只要证明 (3) 即可. 对  $n$  进行归纳, 当  $n=0$  时, 显然 1 作为一个函数线性无关. 假设命题对小于  $n$  的自然数成立, 现证明等于  $n$  的情形. 设

$$a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \dots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0,$$

其中  $a, b_i, c_i$  都是实数. 对上式两次求导, 可得

$$-b_1 \sin x - c_1 \cos x - 4b_2 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x - \dots - n^2 b_n \sin nx - n^2 c_n \cos nx = 0,$$

再将第一个式子乘以  $n^2$  加到第二个式子上, 可得

$$an^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(n^2 - i^2) \sin ix + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(n^2 - i^2) \cos ix = 0,$$

由归纳假设即得  $a = b_1 = c_1 = \dots = b_{n-1} = c_{n-1} = 0$ . 将此结论代入第一个式子可得  $b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0$ . 若  $b_n \neq 0$  ( $c_n \neq 0$ ), 则  $\tan nx = -c_n/b_n$  ( $\cot nx = -b_n/c_n$ ) 为常数 ( $\tan nx, \cot nx$  都不是常函数), 矛盾. 因此,  $b_n = c_n = 0$ .

**证法二:** 设

$$f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \dots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0,$$

其中  $a, b_i, c_i$  都是实数. 依次设  $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ , 并分别计算定积分  $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ , 可得  $a = b_1 = c_1 = \dots = b_n = c_n = 0$ . □

## 命题 3.8

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 又

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1r}\alpha_r, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2r}\alpha_r, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r. \end{cases}$$

则:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性相关的充要条件是系数矩阵  $A = (a_{ij})_{r \times r}$  的行列式为零.



**证明** 记  $A$  的行向量为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ . 若  $|A| = 0$ , 则  $A$  的行向量线性相关, 即存在不全为零的  $r$  个数  $c_1, c_2, \dots, c_r$ , 使得

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r = \mathbf{0}.$$

设  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)'$ , 则经简单计算可得

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r = c_1\gamma_1\alpha + c_1\gamma_2\alpha + \dots + c_1\gamma_r\alpha = (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r)\alpha = \mathbf{0}\alpha = \mathbf{0},$$

从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性相关.

反之, 若  $A$  可逆, 如有  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = \mathbf{0},$$

将  $\beta_i$  代入, 并利用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的线性无关性, 可得以  $k_i$  为未知数的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{r2}k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1r}k_1 + a_{2r}k_2 + \dots + a_{rr}k_r = 0. \end{cases}$$

因为  $A$  可逆, 所以该方程组只有零解, 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关. □

## 命题 3.9

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是一组线性无关的向量, 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示如下:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_k = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{km}\alpha_m. \end{cases}$$

记表示矩阵  $A = (a_{ij})_{k \times m}$ , 求证: 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  的秩等于  $r(A)$ .



**证明 证法一:** 设  $r(A) = r$ , 记  $A$  的  $k$  个行向量为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . 不失一般性, 可假设  $A$  的前  $r$  个行向量线性无关, 其余向量均可用前  $r$  个行向量线性表示. 若

$$\gamma_i = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r,$$

设  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)'$ , 则经过简单计算可得

$$\begin{aligned} \beta_i &= \gamma_i\alpha = (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r)\alpha \\ &= c_1\gamma_1\alpha + c_1\gamma_2\alpha + \dots + c_1\gamma_r\alpha \\ &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r. \end{aligned}$$

另一方面,若

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_r\beta_r = \mathbf{0},$$

则

$$c_1(a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m) + \cdots + c_r(a_{r1}\alpha_1 + \cdots + a_{rm}\alpha_m) = \mathbf{0},$$

即

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ra_{r1})\alpha_1 + \cdots + (c_1a_{1m} + \cdots + c_ra_{rm})\alpha_m = \mathbf{0}.$$

因为  $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$  线性无关,故可得

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{r1}c_r = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{r2}c_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \cdots + a_{rm}c_r = 0. \end{cases}$$

将上述方程组看成是未知数  $c_i$  的齐次线性方程组,其系数矩阵的秩为  $r$ ,未知数个数也是  $r$ ,因此只有唯一一组解,即零解.这表明  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的极大无关组,因此向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的秩等于  $r$ .

**证法二:**令  $V$  是由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  生成的向量空间.因为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关,故它们组成  $V$  的一组基, $V$  的维数等于  $m$ .注意到  $\beta_i$  在这组基下的坐标向量为  $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})'$ ,故由这些列向量组成的矩阵就是  $A'$ ,从而

$$r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) = r(A') = r(A).$$

□

### 命题 3.10

设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  是向量空间  $V$  中一组向量,向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性表出,求证:向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的秩小于等于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的秩.

▲

**注** 如果将向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  称为原向量组,将向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  称为表出向量组,则例 3.19 可简述为:“表出向量组的秩不超过原向量组的秩.”从几何上看,这是一个自然的结果.因为每个  $\beta_i$  都属于由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  生成的子空间,故它们的秩不会超过该子空间的维数.

**证明** 不失一般性,可设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  的极大无关组,  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的极大无关组.因为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性表出,所以  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  也可用  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$  线性表出,从而由定理 3.2(1)可知  $s \leq r$ ,结论成立. □

### 命题 3.11

设  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  是向量空间  $V$  中一组向量且其秩等于  $r$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  是其中  $r$  个向量.若下列条件之一成立:

- (1)  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性无关;
- (2) 任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性表示.

则  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  是向量组的极大无关组.

▲

**证明** (1) 设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性无关,又设  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$  是向量组的极大无关组.对任意的  $1 \leq i \leq m$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$  均可由  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$  线性表示,由定理 3.2(2)可知  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$  必线性相关.再由命题 3.3 可知  $\alpha_i$  可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性表示,从而  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  也是向量组的极大无关组.

(2) 设任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  线性表示.不失一般性,可设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$  是向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  的极大无关组.因此,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$  线性无关.再由线性组合的传递性可知,任一  $\alpha_i$  均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$  线性表示,故  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$  是原向量组的极大无关组,从而  $s = r$ ,即  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$  是原向量组的极大无关组. □



## 命题 3.12

若  $A$  是对称矩阵或反称矩阵, 并且  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行是  $A$  的行向量的极大无关组, 则它的第  $i_1, \dots, i_r$  列也是  $A$  的列向量的极大无关组.

**证明** 设  $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为矩阵  $A$  的行分块和列分块, 则由条件可知,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关. 从而

存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , 使得

$$k_1 \alpha_{i_1} + k_2 \alpha_{i_2} + \dots + k_r \alpha_{i_r} = 0.$$

又因为  $A$  为对称或反称矩阵, 所以  $\alpha_i = \pm \beta'_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 代入上式可得

$$k_1 \beta'_{i_1} + k_2 \beta'_{i_2} + \dots + k_r \beta'_{i_r} = 0.$$

再对上式两边同时取转置可得

$$k_1 \beta_{i_1} + k_2 \beta_{i_2} + \dots + k_r \beta_{i_r} = 0.$$

故  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  线性无关. □

## 命题 3.13 (向量组等价的充要条件)

设有两个向量组  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  和  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ . 求证: 它们等价的充要条件是它们的秩相等且其中一组向量可以用另外一组向量线性表示.



**笔记** 遇到向量组相关的问题, 一般都会先设出各个向量组的极大无关组.

**证明** 必要性由向量组等价的定义和命题 3.10 即得, 下证充分性. 假设向量组  $A$  可用向量组  $B$  线性表示, 且它们的秩都等于  $r$ . 不失一般性, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是向量组  $A$  的极大无关组,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  是向量组  $B$  的极大无关组. 考虑向量组  $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ . 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可用  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表示, 故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  是向量组  $C$  的极大无关组, 从而向量组  $C$  的秩等于  $r$ . 又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 故由命题 3.10(1) 可知,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  也是向量组  $C$  的极大无关组, 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 于是向量组  $B$  也可用向量组  $A$  线性表示. 因此, 向量组  $A$  与向量组  $B$  等价. □

## 3.2 线性同构和几何问题代数化

我们有一类特别重要的线性同构. 设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组基并固定次序. 对任一向量  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ , 则映射  $\eta: V \rightarrow \mathbb{K}^n$  定义为:  $\eta(\alpha) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$ , 即  $\eta$  将  $V$  中的向量映射到它在给定基下的坐标向量. 容易验证  $\eta: V \rightarrow \mathbb{K}^n$  是一个线性同构. 因此, 通过这个线性同构, 我们可将抽象的线性空间  $V$  和具体的列向量空间  $\mathbb{K}^n$  等同起来.

## 定理 3.3

- (1) 同构关系是一种等价关系;
- (2) 线性同构不仅将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组, 而且将线性无关的向量组映射为线性无关的向量组;
- (3) 同一个数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

**证明**

□

## 定理 3.4

定理假设和记号同上, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  是  $V$  中向量, 它们在给定基下的坐标向量记为  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}$ , 则

- (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  线性无关.
- (2)  $\beta$  可以用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示的充要条件是  $\tilde{\beta}$  可以用  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  线性表示, 并且线性表示的系数不变. 即

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m \Leftrightarrow \tilde{\beta} = c_1\tilde{\alpha}_1 + c_2\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m\tilde{\alpha}_m.$$

- (3)  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的极大无关组的充要条件是  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  是向量组  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  的极大无关组. 特别地, 我们有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m).$$



**笔记** 由上述定理, 我们可以将抽象线性空间  $V$  中向量组线性关系的判定和秩的计算, 转化为具体列向量空间  $\mathbb{K}^n$  中由它们的坐标向量构成的列向量组线性关系的判定和秩的计算. 由于后者通常可以通过矩阵的方法来处理, 故上述过程被称为“几何问题代数化”.

**证明** 将定理 3.5 运用到线性同构  $\eta$  上就能得到证明. □

## 命题 3.14

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  是向量空间  $V$  中的向量, 且满足:

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1k}\alpha_k, \\ \beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{2k}\alpha_k, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_m = c_{m1}\alpha_1 + c_{m2}\alpha_2 + \dots + c_{mk}\alpha_k. \end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为  $C = (c_{ij})_{m \times k}$ , 则

- (1) 若  $r(C) = k$ , 则这两组向量等价.
- (2) 若  $r(C) = r$ , 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的秩不超过  $r$ .



**证明**

- (1) 在  $V$  中取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 假设在这组基下  $\alpha_i$  的坐标向量是  $\tilde{\alpha}_i (1 \leq i \leq k)$ ,  $\beta_j$  的坐标向量是  $\tilde{\beta}_j (1 \leq j \leq m)$ , 则

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = c_{11}\tilde{\alpha}_1 + c_{12}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{1k}\tilde{\alpha}_k, \\ \tilde{\beta}_2 = c_{21}\tilde{\alpha}_1 + c_{22}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{2k}\tilde{\alpha}_k, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\beta}_m = c_{m1}\tilde{\alpha}_1 + c_{m2}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{mk}\tilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C'.$$

因为  $C'$  是一个行满秩  $k \times m$  矩阵, 故由行满秩矩阵性质可知, 存在  $m \times k$  矩阵  $T$ , 使得  $C'T = I_k$ , 于是

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m)T = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k).$$

这表明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可用  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  来线性表示, 于是这两组向量等价.

- (2) 在  $V$  中取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 假设在这组基下  $\alpha_i$  的坐标向量是  $\tilde{\alpha}_i (1 \leq i \leq k)$ ,  $\beta_j$  的坐标向量是  $\tilde{\beta}_j (1 \leq j \leq m)$ , 则

$j \leq m$ ), 则

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = c_{11}\tilde{\alpha}_1 + c_{12}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{1k}\tilde{\alpha}_k, \\ \tilde{\beta}_2 = c_{21}\tilde{\alpha}_1 + c_{22}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{2k}\tilde{\alpha}_k, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\beta}_m = c_{m1}\tilde{\alpha}_1 + c_{m2}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{mk}\tilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C'.$$

由于两个矩阵乘积的秩不超过每个矩阵的秩, 因此

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = r(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = r((\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C') \leq r(C') = r(C) = r.$$


□

### 命题 3.15

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  中的  $m$  个向量, 且已知它们的秩等于  $r$ . 求证: 全体满足  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$  的列向量  $(x_1, x_2, \dots, x_m)'$  ( $x_i \in \mathbb{F}$ ) 构成数域  $\mathbb{F}$  上  $m$  维列向量空间  $\mathbb{F}^m$  的  $m-r$  维子空间.

**证明** 在  $V$  中引进基以后, 记  $\tilde{\alpha}_i$  是  $\alpha_i$  的坐标向量, 则  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$  等价于  $x_1\tilde{\alpha}_1 + x_2\tilde{\alpha}_2 + \cdots + x_m\tilde{\alpha}_m = \mathbf{0}$ . 而后者是一个齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩等于  $r$  (将  $x_i$  视为未知数), 故其解构成  $\mathbb{F}^m$  的  $m-r$  维子空间. □

**例题 3.2** 设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 问:  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  是否也是  $V$  的基?


 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然  $|A| = 1$ , 从而  $A$  是满秩阵, 于是  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  也是  $V$  的一组基.

**例题 3.3** 已知向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  ( $s > 1$ ) 是线性空间  $V$  的一组基, 设  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$ . 讨论向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的线性相关性.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

经计算可得  $|A| = 1 + (-1)^{s+1}$ . 因此当  $s$  为偶数时,  $|A| = 0$ , 从而向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关; 当  $s$  为奇数时,  $|A| = 2$ , 从而向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关.

**例题 3.4** 设  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 已知

$$\begin{cases} \alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4, \\ \alpha_2 = -e_1 - 3e_2 + 5e_3 + e_4, \\ \alpha_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + 4e_4, \\ \alpha_4 = -2e_1 - 6e_2 + 10e_3 + 2e_4, \end{cases}$$

求  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  对应的坐标向量拼成如下矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:


$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 矩阵  $A$  的第一列、第二列和第三列是坐标向量组的极大无关组, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组.

**例题 3.5** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个不同的数,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 已知

$$\begin{cases} \alpha_1 = e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_1^{n-1} e_n, \\ \alpha_2 = e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_2^{n-1} e_n, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = e_1 + a_n e_2 + \dots + a_n^{n-1} e_n, \end{cases}$$

求证:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  也是  $V$  的一组基.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**证明** 将  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

显然,  $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$ , 故  $A$  是满秩阵, 从而  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  也是  $V$  的一组基. □

### 3.3 线性同构和几何问题代数化

我们有一类特别重要的线性同构. 设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组基并固定次序. 对任一向量  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ , 则映射  $\eta: V \rightarrow \mathbb{K}^n$  定义为:  $\eta(\alpha) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$ , 即  $\eta$  将  $V$  中的向量映射到它在给定基下的坐标向量. 容易验证  $\eta: V \rightarrow \mathbb{K}^n$  是一个线性同构. 因此, 通过这个线性同构, 我们可将抽象的线性空间  $V$  和具体的列向量空间  $\mathbb{K}^n$  等同起来.

#### 定理 3.5

- (1) 同构关系是一种等价关系;
- (2) 线性同构不仅将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组, 而且将线性无关的向量组映射为线性无关的向量组;
- (3) 同一个数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

**证明**

□

**定理 3.6**

定理假设和记号同上, 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  是  $V$  中向量, 它们在给定基下的坐标向量记为  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}$ , 则


- (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  线性无关.
- (2)  $\beta$  可以用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示的充要条件是  $\tilde{\beta}$  可以用  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  线性表示, 并且线性表示的系数不变. 即

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m \Leftrightarrow \tilde{\beta} = c_1\tilde{\alpha}_1 + c_2\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_m\tilde{\alpha}_m.$$

- (3)  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的极大无关组的充要条件是  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  是向量组  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$  的极大无关组. 特别地, 我们有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m).$$

♥

 **笔记** 由上述定理, 我们可以将抽象线性空间  $V$  中向量组线性关系的判定和秩的计算, 转化为具体列向量空间  $\mathbb{K}^n$  中由它们的坐标向量构成的列向量组线性关系的判定和秩的计算. 由于后者通常可以通过矩阵的方法来处理, 故上述过程被称为“几何问题代数化”.

**证明** 将定理 3.5 运用到线性同构  $\eta$  上就能得到证明. □

**命题 3.16**

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  是向量空间  $V$  中的向量, 且满足:

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1k}\alpha_k, \\ \beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{2k}\alpha_k, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_m = c_{m1}\alpha_1 + c_{m2}\alpha_2 + \dots + c_{mk}\alpha_k. \end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为  $C = (c_{ij})_{m \times k}$ , 则

- (1) 若  $r(C) = k$ , 则这两组向量等价.
- (2) 若  $r(C) = r$ , 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的秩不超过  $r$ .

♠

**证明**

- (1) 在  $V$  中取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 假设在这组基下  $\alpha_i$  的坐标向量是  $\tilde{\alpha}_i (1 \leq i \leq k)$ ,  $\beta_j$  的坐标向量是  $\tilde{\beta}_j (1 \leq j \leq m)$ , 则

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = c_{11}\tilde{\alpha}_1 + c_{12}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{1k}\tilde{\alpha}_k, \\ \tilde{\beta}_2 = c_{21}\tilde{\alpha}_1 + c_{22}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{2k}\tilde{\alpha}_k, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\beta}_m = c_{m1}\tilde{\alpha}_1 + c_{m2}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{mk}\tilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C'.$$

因为  $C'$  是一个行满秩  $k \times m$  矩阵, 故由行满秩矩阵性质可知, 存在  $m \times k$  矩阵  $T$ , 使得  $C'T = I_k$ , 于是

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m)T = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k).$$

这表明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可用  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  来线性表示, 于是这两组向量等价.

- (2) 在  $V$  中取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 假设在这组基下  $\alpha_i$  的坐标向量是  $\tilde{\alpha}_i (1 \leq i \leq k)$ ,  $\beta_j$  的坐标向量是  $\tilde{\beta}_j (1 \leq j \leq m)$ , 则

$j \leq m$ ), 则

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = c_{11}\tilde{\alpha}_1 + c_{12}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{1k}\tilde{\alpha}_k, \\ \tilde{\beta}_2 = c_{21}\tilde{\alpha}_1 + c_{22}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{2k}\tilde{\alpha}_k, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\beta}_m = c_{m1}\tilde{\alpha}_1 + c_{m2}\tilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{mk}\tilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C'.$$

由于两个矩阵乘积的秩不超过每个矩阵的秩, 因此

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = r(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = r((\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)C') \leq r(C') = r(C) = r.$$


□

### 命题 3.17

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  中的  $m$  个向量, 且已知它们的秩等于  $r$ . 求证: 全体满足  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$  的列向量  $(x_1, x_2, \dots, x_m)'$  ( $x_i \in \mathbb{F}$ ) 构成数域  $\mathbb{F}$  上  $m$  维列向量空间  $\mathbb{F}^m$  的  $m-r$  维子空间.

**证明** 在  $V$  中引进基以后, 记  $\tilde{\alpha}_i$  是  $\alpha_i$  的坐标向量, 则  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$  等价于  $x_1\tilde{\alpha}_1 + x_2\tilde{\alpha}_2 + \cdots + x_m\tilde{\alpha}_m = \mathbf{0}$ . 而后者是一个齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩等于  $r$  (将  $x_i$  视为未知数), 故其解构成  $\mathbb{F}^m$  的  $m-r$  维子空间. □

**例题 3.6** 设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 问:  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  是否也是  $V$  的基?


 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然  $|A| = 1$ , 从而  $A$  是满秩阵, 于是  $\{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$  也是  $V$  的一组基.

**例题 3.7** 已知向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  ( $s > 1$ ) 是线性空间  $V$  的一组基, 设  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$ . 讨论向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的线性相关性.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

经计算可得  $|A| = 1 + (-1)^{s+1}$ . 因此当  $s$  为偶数时,  $|A| = 0$ , 从而向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关; 当  $s$  为奇数时,  $|A| = 2$ , 从而向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关.

**例题 3.8** 设  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 已知

$$\begin{cases} \alpha_1 = e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4, \\ \alpha_2 = -e_1 - 3e_2 + 5e_3 + e_4, \\ \alpha_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + 4e_4, \\ \alpha_4 = -2e_1 - 6e_2 + 10e_3 + 2e_4, \end{cases}$$

求  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**解** 将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  对应的坐标向量拼成如下矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:


$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 矩阵  $A$  的第一列、第二列和第三列是坐标向量组的极大无关组, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组.

**例题 3.9** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个不同的数,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 已知

$$\begin{cases} \alpha_1 = e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_1^{n-1} e_n, \\ \alpha_2 = e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_2^{n-1} e_n, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = e_1 + a_n e_2 + \dots + a_n^{n-1} e_n, \end{cases}$$

求证:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  也是  $V$  的一组基.

 **笔记** 利用定理 3.5 即可.

**证明** 将  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

显然,  $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$ , 故  $A$  是满秩阵, 从而  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  也是  $V$  的一组基. □

## 3.4 基变换与过渡矩阵

### 定义 3.1 (过渡矩阵)

设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  是  $n$  维线性空间  $V$  的两组基, 若

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ f_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots \\ f_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n, \end{cases}$$

则矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为从基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵. 并且  $(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) A$ .

### 定理 3.7 (同一向量在不同基下坐标向量的关系)

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间, 从基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵为  $A = (a_{ij})$ . 若  $V$  中向量  $\alpha$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的坐标向量是  $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  下的坐标向量是  $(y_1, y_2, \dots, y_n)'$ , 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

**证明** 由过渡矩阵定义可得

$$\alpha = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

又因为  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

□

### 定理 3.8

矩阵  $A$  是  $n$  维线性空间  $V$  的基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵, 则  $A$  是可逆矩阵且从基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  到基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  的过渡矩阵为  $A^{-1}$ . 又若  $B$  是从基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  到基  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  的过渡矩阵, 则从基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  的过渡矩阵为  $AB$ .

♥


**例题 3.10** 设  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  是向量空间  $V$  的 3 组基. 若从  $u_1, u_2, \dots, u_n$  到  $e_1, e_2, \dots, e_n$  的过渡矩阵是  $A$ , 从  $u_1, u_2, \dots, u_n$  到  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵是  $B$ , 求从  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵.

**解** 从  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到  $u_1, u_2, \dots, u_n$  的过渡矩阵为  $A^{-1}$ , 故从  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵为  $A^{-1}B$ .

**例题 3.11** 在四维行向量空间中求从基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵, 其中

$$e_1 = (1, 1, 0, 1), e_2 = (2, 1, 2, 0), e_3 = (1, 1, 0, 0), e_4 = (0, 1, -1, -1),$$

$$f_1 = (1, 0, 0, 1), f_2 = (0, 0, 1, -1), f_3 = (2, 1, 0, 3), f_4 = (-1, 0, 1, 2).$$

 **笔记** 这类题如用求解线性方程组的方法比较繁, 可采用下列方法.



**解** 设该向量空间的标准基为

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1),$$

则由条件可知从  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  到  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  的过渡矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是就有

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \mathbf{A}^{-1}. \quad (3.1)$$

又由条件可知从  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  到  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$  的过渡矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是就有

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

从而由(3.1)(3.2)式可得

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \mathbf{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

故从基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  到  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$  的过渡矩阵为  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ . 它可以用初等变换和求逆矩阵类似的方法直接求得(对矩阵  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  进行初等行变换, 将  $\mathbf{A}$  化为单位矩阵, 则右边一块就化为了  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ ) 因此, 所求之过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -10 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**例题 3.12** 设  $a$  为常数, 求向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  在基  $\{\mathbf{f}_1 = (a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1), \mathbf{f}_2 = (a^{n-2}, a^{n-3}, \dots, 1, 0), \dots, \mathbf{f}_n = (1, 0, \dots, 0, 0)\}$  下的坐标.

**证明** 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  是标准单位行向量, 则  $\alpha$  在  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  下的坐标向量就是  $\alpha'$ , 并且从  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  到  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$  的过渡矩阵是

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

设  $\alpha$  在  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$  下的坐标向量为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系有  $\mathbf{A}\mathbf{x}' = \alpha'$ . 这是一个非齐次线性方程组, 可由初等行变换求出方程组的解:

$$\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1 \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a^{n-2} & \cdots & 1 & a_1 - a^{n-1}a_n \\ 0 & a^{n-3} & \cdots & 0 & a_2 - a^{n-2}a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1} - aa_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 - aa_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 - aa_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1} - aa_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-1} - aa_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 - aa_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 - aa_2 \end{pmatrix},$$

因此  $x = (a_n, a_{n-1} - aa_n, \cdots, a_2 - aa_3, a_1 - aa_2)$ .  $\square$

**例题 3.13** 设  $V$  是次数不超过  $n$  的实系数多项式全体组成的线性空间, 求从基  $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$  到基  $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$  的过渡矩阵, 并以此证明多项式的 Taylor 公式:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

其中  $f^{(n)}(x)$  表示  $f(x)$  的  $n$  次导数.

**解** 从基  $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$  到基  $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$  的过渡矩阵 ( $n+1$  阶) 利用二项式定理容易求出为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^n a^n \\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{n-1} n a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

注意  $P$  的逆矩阵实际上就是从基  $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$  到基  $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$  的过渡矩阵, 结合  $x^n = [(x-a)+a]^n$ , 再利用二项式定理可以马上得到 (不必用初等变换法求逆矩阵):

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

设  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ , 则  $f(x)$  在基  $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$  下的坐标向量为  $(a_0, a_1, \cdots, a_n)'$ . 设  $f(x)$  在基  $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$  下的坐标向量为  $(y_0, y_1, \cdots, y_n)'$ . 则由同一向量在不同基下坐标向量的关系可知

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$


于是

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ \frac{f'(a)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$f(x) = \left(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\right) \begin{pmatrix} \frac{f(a)}{1!} \\ \frac{f'(a)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

### 3.4.1 练习

 **练习 3.1** 验证下列映射是线性同构:

- (1) 一维实向量空间  $\mathbb{R}$ , 例题 3.1.1 中的实线性空间  $\mathbb{R}^+$ , 映射  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  定义为  $\varphi(x) = e^x$ ;
- (2) 二维实向量空间  $\mathbb{R}_2$ , 例题 3.1.2 中的实线性空间  $V$ , 映射  $\varphi: \mathbb{R}_2 \rightarrow V$  定义为  $\varphi(a, b) = (a, b + \frac{1}{2}a^2)$ .

**解**

- (1)  $\varphi$  的逆映射是  $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \psi(y) = \ln y$ , 故  $\varphi$  是一一对应的. 根据加法和数乘的定义可得


$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x) \oplus \varphi(y), \varphi(kx) = e^{kx} = (e^x)^k = k \circ \varphi(x),$$

因此  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  是线性同构.

- (2)  $\varphi$  的逆映射是  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}_2, \psi(x, y) = (x, y - \frac{x^2}{2})$ , 故  $\varphi$  是一一对应的. 根据具体的计算可得

$$\varphi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \varphi(a_1, b_1) \oplus \varphi(a_2, b_2), \varphi(ka, kb) = k \circ \varphi(a, b),$$

因此  $\varphi: \mathbb{R}_2 \rightarrow V$  是线性同构.

 **练习 3.2** 构造下列线性空间之间的线性同构:

- (1)  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶上三角矩阵构成的线性空间,  $U$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶对称矩阵构成的线性空间 (例题 3.1.3);
- (2)  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上主对角元全为零的  $n$  阶上三角矩阵构成的线性空间,  $U$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶反对称矩阵构成的线性空间 (例题 3.1.4);
- (3)  $V$  是  $n$  阶 Hermite 矩阵构成的实线性空间,  $U$  是  $n$  阶斜 Hermite 矩阵构成的实线性空间 (例题 3.1.5).

**解**

- (1)  $\varphi: V \rightarrow U$  定义为: 对任意的  $A = (a_{ij}) \in V$ , 当  $i \leq j$  时, 矩阵  $\varphi(A)$  的第  $(i, j)$  元素为  $a_{ij}$ ; 当  $i > j$  时, 矩阵  $\varphi(A)$  的第  $(i, j)$  元素为  $a_{ji}$ . 容易验证  $\varphi: V \rightarrow U$  是定义好的映射, 并且是数域  $\mathbb{K}$  上的线性同构.
- (2)  $\varphi: V \rightarrow U$  定义为: 对任意的  $A = (a_{ij}) \in V, \varphi(A) = A - A'$ . 容易验证  $\varphi: V \rightarrow U$  是定义好的映射, 并且是数域  $\mathbb{K}$  上的线性同构.
- (3)  $\varphi: V \rightarrow U$  定义为: 对任意的  $A = (a_{ij}) \in V, \varphi(A) = iA$ . 容易验证  $\varphi: V \rightarrow U$  是定义好的映射, 并且是实数域上的线性同构. 注意到  $\varphi$  的逆映射  $\psi: U \rightarrow V$  为:  $\psi(B) = -iB$ .

## 3.5 子空间、直和与商空间

### 定义 3.2 (直和)

设  $V_1, V_2, \dots, V_k$  是线性空间  $V$  的子空间, 若对任意的  $i (1 \leq i \leq k)$ , 均有

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = 0,$$

则称和  $V_1 + V_2 + \dots + V_k$  是直接和, 简称直和, 记为  $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ .



**定理 3.9 (直和的等价条件)**

设  $V_1, V_2, \dots, V_k$  是线性空间  $V_0$  的子空间,  $V_0 = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ , 则下列命题等价:

- (1)  $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ ;
- (2) 对任意的  $2 \leq i \leq k$ , 有  $V_i \cap (V_1 + V_2 + \dots + V_{i-1}) = 0$ ;
- (3)  $\dim V_0 = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_k$ ;
- (4)  $V_1, V_2, \dots, V_k$  的一组基可以拼成  $V_0$  的一组基;
- (5)  $V_0$  中的向量表示为  $V_1, V_2, \dots, V_k$  中的向量之和时其表示唯一.
- (6) 零向量表示唯一.

**证明**

□

**定理 3.10 (维数公式)**

设  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的两个子空间, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

**证明**

□

**3.5.1 证明直和的方法**


证明直和的方法大致有两种:

第一种: 先证和, 再证直和.

第二种: 对于给定的  $V, V_1, V_2$ , 求证  $V = V_1 \oplus V_2$  的题目, 如果“和”不好证明的话, 可以记  $W = V_1 + V_2$ , 先证  $W = V_1 \oplus V_2$ , 再证  $V = W$  (证明  $V = W$  通常会利用命题??). 具体例子见例题 3.16


**命题 3.18**

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵组成的向量空间,  $V_1$  和  $V_2$  分别是  $\mathbb{F}$  上对称矩阵和反对称矩阵组成的子集. 求证:  $V_1$  和  $V_2$  都是  $V$  的子空间且  $V = V_1 \oplus V_2$ .

 **笔记** 要证明向量空间  $V$  是其子空间  $V_1, V_2$  的直和, 只需证明两件事: 一是证明  $V$  中任一向量均可表示为  $V_1$  与  $V_2$  中向量之和, 即  $V = V_1 + V_2$ ; 二是证明  $V_1$  与  $V_2$  的交等于零.

**证明** 由于对称矩阵之和仍是对称矩阵, 一个数乘以对称矩阵仍是对称矩阵, 因此  $V_1$  是  $V$  的子空间. 同理  $V_2$  也是  $V$  的子空间. 又由命题 2.12 可知, 任一  $n$  阶矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 故  $V = V_1 + V_2$ . 若一个矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵, 则它一定是零矩阵. 这就是说  $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$ . 于是  $V = V_1 \oplus V_2$ . □

**例题 3.14** 设  $V_1, V_2$  分别是数域  $\mathbb{F}$  上的齐次线性方程组  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  与  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  的解空间, 求证:  $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ .

 **笔记** 要证明向量空间  $V$  是其子空间  $V_1, V_2$  的直和, 只需证明两件事: 一是证明  $V$  中任一向量均可表示为  $V_1$  与  $V_2$  中向量之和, 即  $V = V_1 + V_2$ ; 二是证明  $V_1$  与  $V_2$  的交等于零.

**证明** 由线性方程组解的定理知,  $V_1$  的维数是 1,  $V_2$  的维数是  $n-1$ . 若列向量  $\alpha \in V_1 \cap V_2$ , 则  $\alpha$  既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出  $\alpha$  只能等于零向量, 因此  $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$ . 又因为

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 1 + (n-1) = n = \dim \mathbb{F}^n,$$

故  $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ . □

**例题 3.15** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的两个线性空间,  $W = U \times V$  是  $U$  和  $V$  的积集合, 即  $W = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}$ . 现在  $W$  上定义加法和数乘:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), k(u, v) = (ku, kv).$$

验证:  $W$  是  $\mathbb{K}$  上的线性空间 (这个线性空间称为  $U$  和  $V$  的外直和).

又若设  $U' = \{(u, 0) | u \in U\}$ ,  $V' = \{(0, v) | v \in V\}$ , 求证:  $U', V'$  是  $W$  的子空间,  $U'$  和  $U$  同构,  $V'$  和  $V$  同构, 并且  $W = U' \oplus V'$ .

**证明** 易验证  $W$  在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 从而是  $\mathbb{K}$  上的线性空间. 任取  $(u_1, 0), (u_2, 0) \in U', k \in \mathbb{K}$ , 则  $(u_1, 0) + (u_2, 0) = (u_1 + u_2, 0) \in U', k(u_1, 0) = (ku_1, 0) \in U'$ , 因此  $U'$  是  $W$  的子空间. 同理可证  $V'$  是  $W$  的子空间. 构造映射  $\varphi: U \rightarrow U', \varphi(u) = (u, 0)$ , 容易验证  $\varphi$  是一一对应并且保持加法和数乘运算, 所以  $\varphi: U \rightarrow U'$  是一个线性同构. 构造映射  $\psi: V \rightarrow V', \psi(v) = (0, v)$ , 同理可证  $\psi: V \rightarrow V'$  是一个线性同构. 显然  $U' \cap V' = 0$ , 又对  $W$  中任一向量  $(u, v)$ , 有  $(u, v) = (u, 0) + (0, v) \in U' + V'$ , 因此  $W = U' \oplus V'$ .  $\square$

**例题 3.16** 给定数域  $P$ , 设  $A$  是数域  $P$  上的一个  $n$  级可逆方阵,  $A$  的前  $r$  个行向量组成的矩阵为  $B$ , 后  $n-r$  个行向量组成的矩阵为  $C$ ,  $n$  元线性方程组  $BX = 0$  与  $CX = 0$  的解空间分别为  $V_1, V_2$ , 证  $P^n = V_1 \oplus V_2$ .

**证明** 先记  $W = V_1 + V_2$ . 若  $\alpha \in V_1 \cap V_2$ , 则  $B\alpha = C\alpha = 0$ , 所以

$$A\alpha = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \alpha = 0.$$

由于  $A$  可逆, 知  $\alpha = 0$ , 所以  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ , 即  $W = V_1 \oplus V_2$ .

最后说  $W = P^n$ : 显然  $r(B) = r, r(C) = n - r$ , 则  $\dim V_1 = n - r, \dim V_2 = n - (n - r) = r$ . 所以

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim P^n.$$

又  $W = V_1 \oplus V_2 \subseteq P^n$ , 从而  $W = P^n$ , 即

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$

$\square$

#### 命题 3.19 (任意子空间一定存在相应的补空间)

设  $U$  是  $V$  的子空间, 则一定存在  $V$  的子空间  $W$ , 使得  $V = U \oplus W$ . 这样的子空间  $W$  称为子空间  $U$  在  $V$  中的补空间.

$\blacktriangle$

**注** 在这个命题中  $U \cap W = \{0\}$ , 而不是  $U \cap W = \emptyset$ ; 同时  $V = U + W$  是子空间的和, 而不是  $V = U \cup W$ . 因此, 补空间绝不是补集, 请读者务必注意! 一般来说, 补空间并不唯一. 例如下面证明中, 取  $U$  中不同的基, 再将基扩张得到的补空间也不相同. 还例如, 若  $\dim V - \dim U \geq 1$  且  $\dim U \geq 1$ , 则  $U$  有无限个补空间.

**证明** 取子空间  $U$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , 由基扩张定理可将其扩张为  $V$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ . 令  $W = L(e_{m+1}, \dots, e_n)$ , 则  $V = U + W$ . 由于  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  是  $W$  的一组基, 故  $\dim V = \dim U + \dim W$ , 从而  $V = U \oplus W$ .

$\square$

#### 命题 3.20

若  $V = U \oplus W$  且  $U = U_1 \oplus U_2$ , 求证:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus W$ .

$\blacktriangle$

**证明** 由  $U = U_1 \oplus U_2$  可得  $U_1 \cap U_2 = 0$ ; 由  $V = U \oplus W$  可得  $(U_1 + U_2) \cap W = U \cap W = 0$ , 因此由定理 3.9(2) 可得  $U_1 + U_2 + W$  是直和, 从而  $V = U_1 + U_2 + W = U_1 \oplus U_2 \oplus W$ .  $\square$

#### 命题 3.21

每一个  $n$  维线性空间均可表示为  $n$  个一维子空间的直和.

$\blacktriangle$

**证明** 设  $V$  是  $n$  维线性空间, 取其一组基为  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . 设  $V_i = L(e_i) (1 \leq i \leq n)$ , 则  $V_i$  是  $V$  的一维子空间. 任取  $\alpha \in V$ , 存在唯一一组常数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得  $\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n$ , 而  $k_i e_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 因此  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ . 注意到  $\dim V = n = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$ , 故由定理 3.9(3) 可知,  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ .

(注意到  $V_i$  的基是  $\{e_i\}$ , 因此  $V_i (1 \leq i \leq n)$  的基能拼成  $V$  的基, 故由定理 3.9(4) 也可得到结论. 再注意到  $V$  中任一向量写成基向量  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  的线性组合时, 其表示是唯一的. 这就是说,  $V$  中任一向量写成  $V_i$  中的向量之和时, 其表示是唯一的, 故由定理 3.9(5) 同样可得结论.)  $\square$

**命题 3.22**

设  $V_0$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维向量空间  $V$  的真子空间, 则  $V_0$  至多包含  $n-1$  个  $V$  中的基向量.

**证明** 反证法, 若  $V_0$  包含  $n$  个  $V$  中的基向量, 则  $V_0$  就包含了  $V$  的一组基. 不妨设  $V_0$  中的这组基向量为  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 则  $\forall \alpha \in V$ , 有  $\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \in V_0$ , 其中  $k_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \dots, n$ . 故  $V_0 \supset V$ , 又  $V_0 \subset V$ , 因此  $V_0 = V$ . 这与  $V_0$  是  $V$  的真子空间矛盾.  $\square$

**命题 3.23**

设  $V_1, V_2, \dots, V_m$  是数域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  的  $m$  个真子空间, 证明: 在  $V$  中必存在一个向量  $\alpha$ , 它不属于任何一个  $V_i$ .

 **笔记** 这个命题表明: 有限个真子空间不能覆盖全空间.

**证明 证法一:** 对个数  $m$  进行归纳, 当  $m = 1$  时结论显然成立. 设  $m = k$  时结论成立, 现要证明  $m = k+1$  时结论也成立. 由归纳假设, 存在向量  $\alpha$ , 它不属于任何一个  $V_i (1 \leq i \leq k)$ . 若  $\alpha$  也不属于  $V_{k+1}$ , 则结论已成立, 因此可设  $\alpha \in V_{k+1}$ . 在  $V_{k+1}$  外选一个向量  $\beta$ , 作集合

$$M = \{t\alpha + \beta | t \in \mathbb{F}\}.$$

事实上, 我们可将  $M$  看成是通过  $\beta$  的终点且平行于  $\alpha$  的一根“直线”, 现要证明它和每个  $V_i$  最多只有一个交点. 首先,  $M$  和  $V_{k+1}$  无交点, 因为若  $t\alpha + \beta \in V_{k+1}$ , 则从  $t\alpha \in V_{k+1}$  可推出  $\beta \in V_{k+1}$ , 与假设矛盾. 又若对某个  $V_i (i < k+1)$ , 存在  $t_1 \neq t_2$ , 使得  $t_1\alpha + \beta \in V_i, t_2\alpha + \beta \in V_i$ , 则  $(t_1 - t_2)\alpha \in V_i$ , 从而导致  $\alpha \in V_i$ , 与假设矛盾. 因此,  $M$  和每个  $V_i$  最多只有一个交点, 从而  $M$  中只有有限个向量属于  $V_i$  的并集, 而  $t$  有无穷多个选择, 由此即得结论.

**证法二:** 任取  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . 对任意的正整数  $k$ , 构造  $V$  中向量  $\alpha_k = e_1 + ke_2 + \dots + k^{n-1}e_n$ , 设向量族  $S = \{\alpha_k | k = 1, 2, \dots\}$ . 由例 3.9 可知,  $S$  中任意  $n$  个不同的向量都构成  $V$  的一组基. 因为  $V_i$  都是  $V$  的真子空间, 所以每个  $V_i$  至多包含  $S$  中  $n-1$  个向量. 因此  $\bigcup_{i=1}^m V_i$  至多包含  $S$  中  $m(n-1)$  个向量. 又由于  $S$  是无限集合, 故存在某个向量  $\alpha_k$ , 使得  $\alpha_k$  不属于任何一个  $V_i$ .  $\square$

**注** 上述证明要用到任意一个数域都有无穷个元素这一事实. 因此, 对于有限域 (读者以后可能会学到) 上的向量空间, 上例结论不一定成立.

**命题 3.24**

设  $V_1, V_2, \dots, V_m$  是数域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  的  $m$  个真子空间, 证明:  $V$  中必有一组基, 使得每个基向量都不在诸  $V_i$  的并中.

**证明 证法一:** 由命题 3.23 可知, 存在非零向量  $e_1 \in V$ , 使得  $e_1 \notin \bigcup_{i=1}^m V_i$ . 定义  $V_{m+1} = L(e_1)$ , 再由命题 3.23 可知, 存在向量  $e_2 \in V$ , 使得  $e_2 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$ . 由推论 3.2 可知,  $e_2 \notin L(e_1)$  意味着  $e_1, e_2$  线性无关. 重新定义  $V_{m+1} = L(e_1, e_2)$ , 再由命题 3.23 可知, 存在向量  $e_3 \in V$ , 使得  $e_3 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$ . 再由推论 3.2 可知,  $e_3 \notin L(e_1, e_2)$  意味着  $e_1, e_2, e_3$  线性无关. 不断重复上述讨论, 即添加线性无关的向量重新定义  $V_{m+1}$ , 并反复利用命题 3.23 和推论 3.2 的结论, 最后可以得到  $n$  个线性无关的向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 它们构成  $V$  的一组基, 且满足  $e_j \notin \bigcup_{i=1}^m V_i (1 \leq j \leq n)$ .

**证法二:** 任取  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . 对任意的正整数  $k$ , 构造  $V$  中向量  $\alpha_k = e_1 + ke_2 + \dots + k^{n-1}e_n$ , 设向量族  $S = \{\alpha_k | k = 1, 2, \dots\}$ . 由例 3.9 可知,  $S$  中任意  $n$  个不同的向量都构成  $V$  的一组基. 因为  $V_i$  都是  $V$  的真子空间, 所以每个  $V_i$  至多包含  $S$  中  $n-1$  个向量. 因此  $\bigcup_{i=1}^m V_i$  至多包含  $S$  中  $m(n-1)$  个向量. 又由于  $S$  是无限集合, 故存在某个向量  $\alpha_k$ , 使得  $\alpha_k$  不属于任何一个  $V_i$ . 进一步, 在  $S$  中一定还存在  $n$  个不同的向量  $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}$ , 使得每个  $\alpha_{k_j}$  都不属于任何一个  $V_i$ , 此时  $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}\}$  就构成了  $V$  的一组基.  $\square$

**定义 3.3 ( $U$ -陪集与商空间)**

设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的线性空间,  $U$  是  $V$  的子空间. 对任意的  $v \in V$ , 集合  $v + U := \{v + u | u \in U\}$  称为  $v$  的  $U$ -陪集. 在所有  $U$ -陪集构成的集合  $S = \{v + U | v \in V\}$  中, 定义加法和数乘如下, 其中  $v_1, v_2 \in V, k \in \mathbb{K}$ :

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad k \cdot (v_1 + U) := k \cdot v_1 + U.$$

$S$  在上述加法和数乘下成为数域  $\mathbb{K}$  上的线性空间, 称为  $V$  关于子空间  $U$  的商空间, 记为  $V/U$ .

**笔记** 容易验证  $S$  在上述加法和数乘下满足线性空间的 8 条公理, 因此商空间是良定义的. 故任意  $V$  的子空间  $U$  都存在相应的商空间.

**注** 商空间的向量是  $U$ -陪集. 商空间的零向量就是  $0 + U = U$ .

**命题 3.25 ( $U$ -陪集的性质)**

- (1)  $U$ -陪集之间的关系是: 作为集合或者相等, 或者不相交;
- (2)  $v_1 + U = v_2 + U$  (作为集合相等) 当且仅当  $v_1 - v_2 \in U$ . 特别地,  $v + U$  是  $V$  的子空间当且仅当  $v \in U$ ;
- (3)  $S$  中的加法以及  $\mathbb{K}$  关于  $S$  的数乘不依赖于代表元的选取, 即若  $v_1 + U = v'_1 + U$  以及  $v_2 + U = v'_2 + U$ , 则  $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v'_1 + U) + (v'_2 + U)$ , 以及  $k \cdot (v_1 + U) = k \cdot (v'_1 + U)$ ;

**证明**

- (1) 设  $(v_1 + U) \cap (v_2 + U) \neq \emptyset$ , 即存在  $u_1, u_2 \in U$ , 使得  $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$ , 从而  $v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \in U$ , 于是

$$v_1 + U = v_2 + (v_1 - v_2) + U \subseteq v_2 + U, \quad v_2 + U = v_1 + (v_2 - v_1) + U \subseteq v_1 + U,$$

因此  $v_1 + U = v_2 + U$ .

- (2) 由 (1) 的证明过程即得. 特别地,  $v + U$  是  $V$  的子空间  $\Rightarrow 0 \in v + U \Rightarrow$  存在  $u \in U$ , 使得  $0 = v + u \Rightarrow v = -u \in U$ . 若  $v \in U$ , 则一方面,  $\forall \alpha \in v + U$ , 存在  $u' \in U$ , 使得  $\alpha = v + u'$ . 又  $v \in U$ , 因此  $\alpha = v + u' \in U$ . 故  $v + U \subseteq U$ . 另一方面,  $\forall \beta \in U$ , 有  $\beta = v + \beta - v$ . 又由  $v \in U$  可知  $\beta - v \in U$ , 于是  $\beta = v + \beta - v \in v + U$ . 故  $v + U \supseteq U$ . 因此  $v + U = U$  是  $V$  的子空间.

(实际上, 若  $v \in U$ , 则因为  $v \in U$  并且  $v \in v + U$ , 所以  $v + U \cap U \neq \emptyset$ . 故由 (1) 可知  $v + U = U$  是  $V$  的子空间. 这样也能得到证明.)

- (3) 若  $v_1 + U = v'_1 + U$  以及  $v_2 + U = v'_2 + U$ , 则存在  $u_1, u_2 \in U$ , 使得  $v_1 - v'_1 = u_1, v_2 - v'_2 = u_2$ , 从而  $(v_1 + v_2) - (v'_1 + v'_2) = u_1 + u_2 \in U, k \cdot v_1 - k \cdot v'_1 = k \cdot u_1 \in U$ , 于是由 (2) 可得

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U = (v'_1 + v'_2) + U = (v'_1 + U) + (v'_2 + U),$$

$$k \cdot (v_1 + U) = k \cdot v_1 + U = k \cdot v'_1 + U = k \cdot (v'_1 + U).$$

□

**注** 若  $v_1 + U = v'_1 + U$  以及  $v_2 + U = v'_2 + U$ , 则  $\forall u'_1 \in U$ , 有  $v_1 + u'_1 \in v_1 + U = v'_1 + U$ . 从而存在  $u''_1 \in U$ , 使得  $v_1 + u'_1 = v'_1 + u''_1$ . 于是  $v_1 - v'_1 = u''_1 - u'_1$ . 再令  $u_1 = u''_1 - u'_1$ , 则  $v_1 - v'_1 = u_1 \in U$ . 同理可得, 存在  $u_2 \in U$ , 使得  $v_2 - v'_2 = u_2 \in U$ .

**命题 3.26 (商空间的维数公式和商空间与补空间同构)**

设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $U$  是  $V$  的子空间,  $W$  是  $U$  的补空间, 证明:  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ , 并且存在线性同构  $\varphi: W \rightarrow V/U$ .

**证明** 取子空间  $U$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , 补空间  $W$  的一组基  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ , 则  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组基. 我们断言  $\{e_{m+1} + U, \dots, e_n + U\}$  是商空间  $V/U$  的一组基. 一方面, 对任意的  $v \in V$ , 设  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , 则

$$v + U = \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) + U = \left( \sum_{i=m+1}^n a_i e_i \right) + U = \sum_{i=m+1}^n a_i (e_i + U).$$



另一方面, 设  $a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , 使得  $\sum_{i=m+1}^n a_i(e_i + U) = \mathbf{0} + U$ , 即  $\left(\sum_{i=m+1}^n a_i e_i\right) + U = U$ , 从而  $\sum_{i=m+1}^n a_i e_i \in U$ . 于是存在  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ , 使得  $\sum_{i=m+1}^n a_i e_i = -\sum_{i=1}^m a_i e_i$ , 即  $\sum_{i=1}^n a_i e_i = \mathbf{0}$ , 从而  $a_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ . 于是  $\{e_{m+1} + U, \dots, e_n + U\}$  线性无关. 因此,  $\dim V/U = n - m = \dim V - \dim U$ .

对任意的  $w \in W$ , 设  $w = \sum_{i=m+1}^n a_i e_i$ , 定义映射  $\varphi: W \rightarrow V/U$  为

$$\varphi(w) = w + U = \sum_{i=m+1}^n a_i(e_i + U).$$

容易验证  $\varphi$  保持加法和数乘, 并且是一一对应 ( $W$  的基  $e_i$  映射过去得到  $\varphi(e_i)$  仍是  $V/U$  的基,  $i = m+1, \dots, n$ ), 从而是线性同构.  $\square$

### 3.5.2 练习

**练习 3.3** 设  $V = M_n(\mathbb{K})$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵全体组成的线性空间,  $A \in V$ , 求证: 与  $A$  乘法可交换的矩阵全体  $C(A)$  组成  $V$  的子空间且其维数不为零. 又若  $T$  是  $V$  的非空子集, 求证: 与  $T$  中任一矩阵乘法可交换的矩阵全体  $C(T)$  也构成  $V$  的子空间且其维数不为零.

**证明** 由于纯量阵  $cI_n$  与任一  $n$  阶矩阵  $A$  乘法可交换, 故  $L(I_n) \subseteq C(A)$ . 任取  $B, C \in C(A), k \in \mathbb{K}$ , 容易验证  $B + C \in C(A), kB \in C(A)$ , 故  $C(A)$  是  $M_n(\mathbb{K})$  的子空间且其维数不为零.  $C(T)$  的结论同理可证.  $\square$

**练习 3.4** 设  $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 2, 1), \alpha_3 = (2, 1, 0, 1)$  是四维实向量空间  $V$  中的向量, 它们生成的子空间为  $V_1$ , 又向量  $\beta_1 = (-1, 1, 1, 1), \beta_2 = (1, -1, -3, -1), \beta_3 = (-1, 1, -1, 1)$  生成的子空间为  $V_2$ , 求子空间  $V_1 + V_2$  和  $V_1 \cap V_2$  的基.

**解 解法一:**  $V_1 + V_2$  是由  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  生成的, 因此只要求出这 6 个向量的极大无关组即可. 将这 6 个向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可取  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  为  $V_1 + V_2$  的基 (不唯一).

再来求  $V_1 \cap V_2$  的基. 首先注意到  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $V_1$  的基 (从上面的矩阵即可看出), 又不难验证  $\beta_1, \beta_2$  是  $V_2$  的基,  $V_2$  中的向量可以表示为  $\beta_1, \beta_2$  的线性组合. 假设  $t_1\beta_1 + t_2\beta_2$  属于  $V_1$ , 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, t_1\beta_1 + t_2\beta_2$  和向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  的秩相等 (因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $V_1$  的基). 因此, 我们可以用矩阵方法来求出参数  $t_1, t_2$ . 注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 + t_2 \\ 0 & 1 & t_1 - t_2 \\ -1 & 2 & t_1 - 3t_2 \\ 0 & 1 & t_1 - t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 + t_2 \\ 0 & 1 & t_1 - t_2 \\ 0 & 2 & -2t_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 + t_2 \\ 0 & 1 & t_1 - t_2 \\ 0 & 0 & -2t_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可得  $t_1 = 0$ , 所以  $V_1 \cap V_2$  的基可取为  $\beta_2$ .

**解法二:** 求  $V_1 + V_2$  的基同解法 1, 现用解线性方程组的方法来求  $V_1 \cap V_2$  的基. 因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $V_1$  的基,  $\beta_1, \beta_2$  是  $V_2$  的基, 故对任一向量  $\gamma \in V_1 \cap V_2, \gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = (-x_3)\beta_1 + (-x_4)\beta_2$ . 因此, 求向量  $\gamma$  等价于求解线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = \mathbf{0}.$$



通过初等行变换将其系数矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  进行化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故上述线性方程组的通解为  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(-1, 1, 0, 1)$ , 从而  $\gamma = -k(\alpha_1 - \alpha_2) = -k\beta_2 (k \in \mathbb{R})$ , 于是  $\beta_2$  是  $V_1 \cap V_2$  的基.

## 3.6 矩阵的秩

### 3.6.1 初等变换法

矩阵的秩在初等变换或分块初等变换下不变.

想法: 遇到关于秩不等式的问题, 可以考虑构造分块矩阵, 对其做适当的初等变换, 再利用秩的基本公式.

#### 定理 3.11

矩阵  $A$  的秩等于  $r$  的充要条件是  $A$  有一个  $r$  阶子式不等于零, 而  $A$  的所有  $r+1$  阶子式都等于零.

#### 命题 3.27 (矩阵秩的基本公式)

- (1) 若  $k \neq 0, r(kA) = r(A)$ ;
- (2)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ;
- (3)  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ ;
- (4)  $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B), r \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$ ;
- (5)  $r \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B), r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B)$ ;
- (6)  $r(A+B) \leq r(A) + r(B), r(A-B) \leq r(A) + r(B)$ ;
- (7)  $r(A-B) \geq |r(A) - r(B)|$ .

#### 证明

- (1) 由于  $kA = P_1(k)P_2(k) \cdots P_m(k)A$ , 故  $r(kA) = r(A)$ .
- (2) 证法一: 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵. 将矩阵  $B$  按列分块,  $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ , 则  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$ . 若  $B$  列向量的极大无关组为  $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}\}$ , 则  $B$  的任一列向量  $\beta_j$  均可用  $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}\}$  线性表示. 于是任一  $A\beta_j$  也可用  $\{A\beta_{j_1}, A\beta_{j_2}, \cdots, A\beta_{j_r}\}$  来线性表示. 因此, 向量组  $\{A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s\}$  的秩不超过  $r$ , 即  $r(AB) \leq r(B)$ . 同理, 对矩阵  $A$  用行分块的方法可以证明  $r(AB) \leq r(A)$ .

证法二: 见例题 4.15.

- (3) 设  $A, B$  的秩分别为  $r_1, r_2$ , 则存在非异阵  $P_1, Q_1$  和非异阵  $P_2, Q_2$ , 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & O \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

因此,  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$ .

- (4) 证法一: 我们只证明第一个不等式, 第二个不等式同理可证. 设  $A, B$  的秩分别为  $r_1, r_2$ , 则存在非异阵  $P_1, Q_1$  和非异阵  $P_2, Q_2$ , 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

在上面的分块矩阵中实施第三类分块初等变换, 用  $I_{r_1}$  消去同行的矩阵; 用  $I_{r_2}$  消去同列的矩阵, 再将  $C_{22}$  对换到第 (2, 2) 位置:

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & C_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & C_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

最后由 (3) 的结论可得

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r(I_{r_1}) + r(C_{22}) + r(I_{r_2}) \geq r_1 + r_2 = r(A) + r(B).$$

**证法二:** 我们也可用子式法来证明. 设  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r$ , 则由 [定理 3.11](#) 可知,  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  有一个  $r$  阶子式不为零,

不妨设为  $\begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix}$ , 其中  $A_1, B_1$  分别是  $A, B$  的子阵. 注意  $A_1$  或  $B_1$  允许是零阶矩阵, 这对应于该子式完全包含在  $B$  或  $A$  中, 但若  $A_1, B_1$  的阶数都大于零, 则通过该子式非零, 再结合由 Laplace 定理容易验证  $A_1, B_1$  都是方阵. 设在矩阵  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  中对应的  $r$  阶子式是  $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix}$ , 则由 Laplace 定理可得  $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix} = |A_1| |B_1| = \begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 再次由 [定理 3.11](#) 可得

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

**证法三:** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是  $A$  的列分块,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组; 设  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ ,  $C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$  是  $B, C$  的列分块,  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_s}$  是  $B$  的列向量的极大无关组, 则  $r(A) = r$  且  $r(B) = s$ . 我们接下来证明: 作为  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  的列向量,  $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$  线性无关. 设

$$c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_r \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix} + \dots + d_s \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$c_1 \alpha_{i_1} + \dots + c_r \alpha_{i_r} + d_1 \gamma_{j_1} + \dots + d_s \gamma_{j_s} = 0, d_1 \beta_{j_1} + \dots + d_s \beta_{j_s} = 0.$$

由上面的假设即得  $c_1 = \dots = c_r = d_1 = \dots = d_s = 0$ , 于是上述结论得证. 因为  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  的列向量中有  $r + s$

个线性无关, 故  $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r + s = r(A) + r(B)$ .

(5) 注意到

$$\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

故由 (2) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} &= r\left(\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B), \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(6) 注意到

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = A + B, \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} = A - B.$$

故由 (2) 和 (5) 可得

$$\begin{aligned} r(A + B) &= r\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B), \\ r(A - B) &= r\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}\right) \leq r\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(7) 由于  $r(A - B) = r(B - A)$ , 故不妨设  $r(A) \geq r(B)$ , 则由 (6) 可得  $r(A - B) + r(B) \geq r(A - B + B) = r(A)$ , 即  $r(A - B) \geq r(A) - r(B)$ .

□

**例题 3.17** 设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ . 求证:  $r(A) = r(B)$ .

**证明** 将  $A$  的第  $i$  行乘以  $(-1)^i$ , 又将第  $j$  列乘以  $(-1)^j$ , 即得矩阵  $B$ , 因此  $A$  和  $B$  相抵, 故结论成立.

□

### 命题 3.28 (Sylvester 不等式)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times t$  矩阵, 求证:

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

▲

**证明** 证法一: 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix},$$

由矩阵秩的基本公式 (3) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(AB) + n = r\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B),$$

即  $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ .

证法二: 见例题 4.15.

□

### 推论 3.3

若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times t$  矩阵且  $AB = O$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ .

♥

### 命题 3.29 (Sylvester 不等式的推广)

设  $A_1, A_2, \dots, A_m$  为  $n$  阶方阵, 求证:

$$r(A_1) + r(A_2) + \dots + r(A_m) \leq (m-1)n + r(A_1 A_2 \cdots A_m).$$

特别地, 若  $A_1 A_2 \cdots A_m = O$ , 则  $r(A_1) + r(A_2) + \dots + r(A_m) \leq (m-1)n$ .

▲

**证明** 反复利用 Sylvester 不等式可得

$$\begin{aligned} & r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \dots + r(A_m) \\ & \leq n + r(A_1 A_2) + r(A_3) + \dots + r(A_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2n + r(A_1 A_2 A_3) + \cdots + r(A_m) \\ &\leq \cdots \leq (m-1)n + r(A_1 A_2 \cdots A_m). \end{aligned}$$

□

**例题 3.18** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB = O$ . 证明: 若  $n$  是奇数, 则  $AB' + A'B$  必为奇异阵; 若  $n$  为偶数, 举例说明上述结论一般不成立.

**证明** 由推论 3.3 可知,  $r(A) + r(B) \leq n$ . 若  $n$  为奇数, 则  $r(A), r(B)$  中至少有一个小于等于  $\frac{n}{2}$ , 从而小于等于  $\frac{n-1}{2}$ . 不妨设  $r(A) \leq \frac{n-1}{2}$ , 于是

$$r(AB' + A'B) \leq r(AB') + r(A'B) \leq r(A) + r(A') = 2r(A) \leq n-1,$$

从而  $AB' + A'B$  为奇异阵. 例如, 当  $n=2$  时, 令  $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $AB = O$ , 但  $AB' + A'B = I_2$  为非异阵. □

### 命题 3.30 (Frobenius 不等式)

**证明:**  $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$ .

**证明 证法一:** 考虑下列分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (3) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(ABC) + r(B) = r \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(BC),$$

由此即得结论.

**证法二 (几何方法):** 将问题转化成几何的语言即为: 设  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \psi: V_2 \rightarrow V_3, \theta: V_3 \rightarrow V_4$  是线性映射, 证明:  $r(\theta\psi\varphi) \geq r(\theta\psi) + r(\psi\varphi) - r(\psi)$ .

下面考虑通过定义域的限制得到的线性映射. 将  $\theta$  的定义域限制在  $\text{Im}\psi\varphi$  上可得线性映射  $\theta_1: \text{Im}\psi\varphi \rightarrow V_4$ , 它的像空间是  $\text{Im}\theta\psi\varphi$ , 核空间是  $\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi$ ; 将  $\theta$  的定义域限制在  $\text{Im}\psi$  上可得线性映射  $\theta_2: \text{Im}\psi \rightarrow V_4$ , 它的像空间是  $\text{Im}\theta\psi$ , 核空间是  $\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi$ , 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim(\text{Im}\psi\varphi) = \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) + \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi), \quad (3.3)$$

$$\dim(\text{Im}\psi) = \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi) + \dim(\text{Im}\theta\psi). \quad (3.4)$$

注意到  $\text{Im}\psi\varphi \subseteq \text{Im}\psi$ , 故  $\dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) \leq \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi)$ , 从而由 (3.3) 式和 (3.4) 式可得

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}\psi\varphi) - \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi) &= \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi\varphi) \\ &\leq \dim(\text{Ker}\theta \cap \text{Im}\psi) = \dim(\text{Im}\psi) - \dim(\text{Im}\theta\psi). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}\psi\varphi) - \dim(\text{Im}\theta\psi\varphi) &\leq \dim(\text{Im}\psi) - \dim(\text{Im}\theta\psi) \\ &\Leftrightarrow r(\psi\varphi) - r(\theta\psi\varphi) \leq r(\psi) - r(\theta\psi), \end{aligned}$$

结论得证. □

### 命题 3.31 (幂等矩阵关于秩的判定准则)

**求证:**  $n$  阶矩阵  $A$  是幂等矩阵 (即  $A^2 = A$ ) 的充要条件是:

$$r(A) + r(I_n - A) = n.$$

**证明** 在下列矩阵的分块初等变换中矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ O & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A-A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A-A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \begin{pmatrix} A & O \\ O & I-A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A-A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

即  $r(A) + r(I-A) = r(A-A^2) + n$ , 由此即得结论.  $\square$

**命题 3.32 (对合矩阵关于秩的判定准则)**

求证:  $n$  阶矩阵  $A$  是对合矩阵 (即  $A^2 = I_n$ ) 的充要条件是:

$$r(I_n + A) + r(I_n - A) = n.$$

**证明** 在下列矩阵的分块初等变换中, 矩阵的秩保持不变:

$$\begin{pmatrix} I_n + A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n + A & I_n + A \\ O & I_n - A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n + A & I_n + A \\ I_n + A & 2I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & I_n + A \\ O & 2I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \begin{pmatrix} I_n + A & O \\ O & I_n - A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix},$$

即  $r(I_n + A) + r(I_n - A) = r(I_n - A^2) + n$ , 由此即得结论.  $\square$

**例题 3.19** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 求证:  $r(A) + r(I_n + A) \geq n$ .

**证明 证法一:** 由下列分块初等变换即得结论

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I+A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ O & I+A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ -A & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

**证法二:**  $r(A) + r(I+A) = r(-A) + r(I+A) \geq r(-A+I+A) = r(I) = n$ .  $\square$

**命题 3.33 (秩的降阶公式)**

设有分块矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 证明:

- (1) 若  $A$  可逆, 则  $r(M) = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$ ;
- (2) 若  $D$  可逆, 则  $r(M) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$ ;
- (3) 若  $A, D$  都可逆, 则  $r(A) + r(D - CA^{-1}B) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$ .

**证明**

(1) 由分块初等变换可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

由此即得结论.

(2) 同理可证明.

(3) 由 (1) 和 (2) 即得.

□

**例题 3.20** 设

$$M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

证明:  $r(M) \geq n-1$ , 等号成立当且仅当  $|M| = 0$ .**证明** 若  $n=1$ , 结论显然成立. 下设  $n \geq 2$ . 取  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ , 则

$$M = -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = -I_n + A' I_2^{-1} A = -(I_n - A' I_2^{-1} A).$$

由秩的降阶公式可得

$$2 + r(M) = 2 + r(-M) = r(I_2) + r(I_n - A' I_2^{-1} A) = r(I_n) + r(I_2 - A' I_n^{-1} A) = n + r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n-1 \end{pmatrix}.$$

而  $r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n-1 \end{pmatrix} \geq 1$ , 于是  $r(M) = n - 2 + r \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n-1 \end{pmatrix} \geq n-1$ , 等号成立当且仅当  $M$  不满秩, 即  $|M| = 0$ . □

**命题 3.34**设  $A, B$  都是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$ , 证明:

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B) - r(AB).$$

▲

**注 证法一:** 这里乘的不只是初等变换矩阵. 记住这个分块矩阵乘法和构造.**证法二:** 和 **证法三:** 思路分析: 将秩不等式转化为维数公式就能自然得到证明的想法.**证明 证法一:** 考虑如下分块矩阵的乘法:

$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}.$$

由矩阵秩的基本公式 (2) 和矩阵秩的基本公式 (4) 可得

$$r(A) + r(B) = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & BA \end{pmatrix} \geq r(A+B) + r(AB),$$

由此即得结论.

**证法二:** 设  $V_A$  是方程组  $Ax = 0$  的解空间,  $V_B, V_{AB}, V_{A+B}$  的意义同理. 若列向量  $\alpha \in V_A \cap V_B$ , 即  $\alpha$  满足  $A\alpha = 0$  且  $B\alpha = 0$ , 于是  $(A+B)\alpha = 0$ , 即  $\alpha \in V_{A+B}$ , 从而  $V_A \cap V_B \subseteq V_{A+B}$ . 同理可证  $V_A \subseteq V_{BA}, V_B \subseteq V_{AB}$ . 因为  $AB = BA$ , 所以  $V_{BA} = V_{AB}$ , 从而  $V_A + V_B \subseteq V_{AB}$ . 因此, 我们有

$$\dim(V_A \cap V_B) \leq \dim V_{A+B} = n - r(A+B), \quad \dim(V_A + V_B) \leq \dim V_{AB} = n - r(AB).$$

将上面两个不等式相加, 再由交和空间维数公式可得

$$n - r(A+B) + n - r(AB) \geq \dim(V_A \cap V_B) + \dim(V_A + V_B)$$

$$= \dim V_A + \dim V_B = n - r(A) + n - r(B),$$

因此  $r(A+B) + r(AB) \leq r(A) + r(B)$ , 结论得证.

**证法三:** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  为  $A$  的列分块,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为  $B$  的列分块. 记  $U_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  为  $A$  的列向量生成的  $\mathbb{R}^n$  的子空间,  $U_B, U_{AB}, U_{A+B}$  的意义同理. 因为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的极大无关组就是  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  的一组基, 故  $r(A) = \dim U_A$ . 关于  $B, AB, A+B$  的等式同理可得. 显然, 我们有  $U_{A+B} \subseteq U_A + U_B$ . 注意到  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n)$ , 若设  $\beta_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})'$ , 则  $AB$  的列向量  $A\beta_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \dots + b_{nj}\alpha_n \in U_A$ , 从而  $U_{AB} \subseteq U_A$ . 同理可得  $U_{BA} \subseteq U_B$ . 又因为  $AB = BA$ , 故  $U_{AB} \subseteq U_A \cap U_B$ . 最后, 由上述包含关系以及交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned} r(A+B) + r(AB) &= \dim U_{A+B} + \dim U_{AB} \leq \dim(U_A + U_B) + \dim(U_A \cap U_B) \\ &= \dim U_A + \dim U_B = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

□

### 3.6.2 利用线性方程组的求解理论讨论矩阵的秩

#### 定理 3.12

设  $A$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $m \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解集  $V_A$  是  $n$  维列向量空间  $\mathbb{K}^n$  的子空间. 根据线性方程组的求解理论, 我们有

$$\dim V_A + r(A) = n,$$

♡



**笔记** 即齐次线性方程组解空间的维数与系数矩阵的秩之和等于未知数的个数. 根据上述公式, 由矩阵的秩可以讨论线性方程组解的性质; 反过来, 也可以由线性方程组解的性质讨论矩阵的秩.

#### 推论 3.4

线性方程组  $Ax = 0$  只有零解的充要条件是  $A$  为列满秩阵. 特别地, 若  $A$  是方阵, 则线性方程组  $Ax = 0$  只有零解的充要条件是  $A$  为非异阵.

♡

**证明** 由定理 3.12 中的公式  $\dim V_A + r(A) = n$  即可得到证明.

□

#### 命题 3.35

- (1) 设  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 求证:  $r(A'A) = r(AA') = r(A)$ .
- (2) 若  $A$  是  $m \times n$  复矩阵, 则  $r(\overline{A'}A) = r(A\overline{A'}) = r(A)$ .

♠

**证明**

- (1) 首先证明  $r(A'A) = r(A)$ , 为此我们将证明齐次线性方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解. 显然  $Ax = 0$  的解都是  $A'Ax = 0$  的解. 反之, 任取方程组  $A'Ax = 0$  的解  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 则  $\alpha'A'A\alpha = 0$ , 即  $(A\alpha)'(A\alpha) = 0$ . 记  $A\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_m)' \in \mathbb{R}^m$ , 则

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2 = 0.$$

因为  $b_i$  是实数, 故每个  $b_i = 0$ , 即  $A\alpha = 0$ , 也即  $\alpha$  是  $Ax = 0$  的解. 这就证明了方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解, 即  $V_A = V_{A'A}$ , 于是由定理 3.12 可得  $r(A'A) = r(A)$ . 在上述等式中用  $A'$  替代  $A$  可得  $r(AA') = r(A')$ , 又因为  $r(A) = r(A')$ , 故结论得证.

- (2) 由 (1) 类似的方法可以证明.

□

**例题 3.21** 设  $A$  和  $B$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解, 且每个方程组的基础解系含  $m$  个线性无关的向量, 求证:  $r(A-B) \leq n-m$ .



**证明** 由方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解可知,  $Ax = 0$  的解都是  $(A - B)x = 0$  的解, 即  $V_A \subseteq V_{A-B}$ , 从而  $\dim V_{A-B} \geq \dim V_A = m$ , 于是由定理 3.12 可得  $r(A - B) = n - \dim V_{A-B} \leq n - m$ .  $\square$

**命题 3.36**

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵, 证明: 方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ .  $\clubsuit$

**证明** 显然方程组  $Bx = 0$  的解都是方程组  $ABx = 0$  的解, 即  $V_B \subseteq V_{AB}$ , 于是两个线性方程组同解, 即  $V_B = V_{AB}$  的充要条件是  $\dim V_B = \dim V_{AB}$ . 又由定理 3.12 可知  $\dim V_B = k - r(B)$ ,  $\dim V_{AB} = k - r(AB)$ , 因此上述两个方程组同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ .  $\square$

**命题 3.37**

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵. 若  $AB$  和  $B$  有相同的秩, 求证: 对任意的  $k \times l$  矩阵  $C$ , 矩阵  $ABC$  和矩阵  $BC$  也有相同的秩.  $\clubsuit$

**证明 证法一:** 由假设和命题 3.36 可知, 方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解. 要证明  $r(ABC) = r(BC)$ , 我们只要证明方程组  $ABCx = 0$  和方程组  $BCx = 0$  同解即可. 显然方程组  $BCx = 0$  的解都是方程组  $ABCx = 0$  的解. 反之, 若列向量  $\alpha$  是方程组  $ABCx = 0$  的解, 则  $C\alpha$  是方程组  $ABx = 0$  的解, 因此  $C\alpha$  也是方程组  $Bx = 0$  的解, 即  $BC\alpha = 0$ , 于是  $\alpha$  也是方程组  $BCx = 0$  的解. 这就证明了方程组  $ABCx = 0$  和方程组  $BCx = 0$  同解, 从而结论得证.

**证法二:** 由 Frobenius 不等式可得

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) = r(BC),$$

又由矩阵秩的基本公式 (2) 可知  $r(ABC) \leq r(BC)$ , 故结论得证.  $\square$

**命题 3.38**

设数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足:  $|A| = 0$  且某个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} \neq 0$ . 求证: 齐次线性方程组  $Ax = 0$  的所有解都可写为下列形式:

$$k \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{K}.$$

**证明** 由条件和定理 3.11 可知  $A$  的秩等于  $n-1$ , 因此线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系只含一个向量. 注意到  $|A| = 0$ , 故  $AA^* = |A|I_n = O$ , 于是伴随矩阵  $A^*$  的任一列向量都是  $Ax = 0$  的解. 又已知  $A_{ij} \neq 0$ , 因此  $A^*$  的第  $i$  个列向量  $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})'$  (不是零向量) 是  $Ax = 0$  的基础解系.  $\square$

**定义 3.4 (严格对角占优阵)**

如果  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n,$$

则称  $A$  是严格对角占优阵.  $\clubsuit$

**命题 3.39 (严格对角占优阵必是非异阵)**

如果  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  是严格对角占优阵, 则  $A$  必是非异阵.  $\clubsuit$

**证明 证法一:** 只需证明线性方程组  $Ax = 0$  只有零解. 若有非零解, 设为  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , 假设  $c_k$  是其中绝对值最

大者. 将解代入该方程组的第  $k$  个方程式, 得

$$a_{k1}c_1 + \cdots + a_{kk}c_k + \cdots + a_{kn}c_n = 0,$$

即有

$$-a_{kk}c_k = a_{k1}c_1 + \cdots + a_{k,k-1}c_{k-1} + a_{k,k+1}c_{k+1} + \cdots + a_{kn}c_n.$$

上式两边取绝对值, 由三角不等式以及  $c_k$  是绝对值最大的假设可得

$$|a_{kk}||c_k| \leq |a_{k1}||c_1| + \cdots + |a_{k,k-1}||c_{k-1}| + |a_{k,k+1}||c_{k+1}| + \cdots + |a_{kn}||c_n| \leq \left( \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \right) |c_k|,$$

从而有

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|,$$

得到矛盾. 因此, 方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  只有零解.

**证法二:** 由第一圆盘定理,  $A$  的特征值落在下列戈氏圆盘中:

$$|z - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$A$  的严格对角占优条件保证了复平面的原点不落在这些戈氏圆盘中, 因此  $A$  的特征值全不为零, 从而  $A$  是非异阵.

□

#### 命题 3.40

若  $n$  阶实方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n,$$

求证:  $|A| > 0$ .

**证明 证法一:** 考虑矩阵  $tI_n + A$ , 当  $t \geq 0$  时, 这是一个严格对角占优阵, 因此由上一个命题可知其行列式  $f(t) = |tI_n + A|$  不为零. 又  $f(t)$  是关于  $t$  的多项式且首项系数为 1, 所以当  $t$  充分大时,  $f(t) > 0$ . 注意到  $f(t)$  是  $[0, +\infty)$  上处处不为零的连续函数, 并且当  $t$  充分大时取值为正, 因此  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  上取值恒为正 (原因见: 命题??). 特别地,  $f(0) = |A| > 0$ .

**证法二:** 由第一圆盘定理,  $A$  的特征值落在下列戈氏圆盘中:


$$|z - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

由条件可知  $a_{ii} > R_i (1 \leq i \leq n)$ , 从而这些戈氏圆盘全部位于虚轴的右侧, 因此  $A$  的特征值  $\lambda_i$  或者是正实数, 或者是实部为正的共轭虚数, 从而  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n > 0$ . □

#### 命题 3.41

(1) 设  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 则  $I_n + iA$  和  $I_n - iA$  都是非异阵.

(2) 设  $A$  是  $n$  阶实反对称阵,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是同阶对角阵且主对角元素全大于零, 求证:  $|A + D| > 0$ . 特别地,  $|I_n \pm A| > 0$ , 从而  $I_n \pm A$  都是非异阵.

 **笔记** (2) 的证明思路: 利用行列式构造连续的多项式函数, 再利用函数连续的性质证明.

**证明**

(1) **证法一:** 只需证明  $(I_n + iA)x = \mathbf{0}$  只有零解. 由  $\bar{x}'(I_n + iA)x = 0$  共轭转置可得  $\bar{x}'(I_n - iA)x = 0$ . 上述两式相加, 可得  $\bar{x}'I_n x = 0$ , 因此  $x = \mathbf{0}$ .

**证法二:** 设  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  是  $A$  的任一特征值,  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$  是对应的特征向量, 即  $A\alpha = \lambda_0\alpha$ . 此式两边

同时左乘  $\bar{\alpha}'$ , 则有

$$\bar{\alpha}' A \alpha = \lambda_0 \bar{\alpha}' \alpha.$$

注意到  $\alpha$  是非零向量, 故  $\bar{\alpha}' \alpha = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0$ . 注意到  $A$  为实对称矩阵, 故

$$\overline{(\bar{\alpha}' A \alpha)}' = \bar{\alpha}' A \alpha,$$

即  $\bar{\alpha}' A \alpha$  是一个实数, 从而  $\lambda_0 = \bar{\alpha}' A \alpha / \bar{\alpha}' \alpha$  也是实数. 于是  $I_n \pm iA$  的任一特征值为  $1 \pm i\lambda_0 \neq 0$ . 因此由特征值与特征多项式系数的关系可知  $I_n \pm iA$  是非异阵.

- (2) 证法一: 先证明  $|A+D| \neq 0$ , 只需证明  $(A+D)x = 0$  只有零解. 因为  $x'(A+D)x = 0$ , 转置可得  $x'(-A+D)x = 0$ , 上述两式相加即得  $x'Dx = 0$ . 若设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 则有  $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2 = 0$ . 由于  $d_i$  都大于零并且  $x_i$  都是实数, 故只能是  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , 即有  $x = 0$ .

再证明 (2) 的结论. 设  $f(t) = |tA + D|$ , 则  $f(t)$  是关于  $t$  的多项式, 从而是关于  $t$  的连续函数. 注意到对任意的实数  $t$ ,  $tA$  仍是实反对称阵, 故由上面的讨论可得  $f(t) = |tA + D| \neq 0$ , 即  $f(t)$  是  $\mathbb{R}$  上处处不为零的连续函数. 注意到当  $t = 0$  时,  $f(0) = |D| > 0$ , 因此  $f(t)$  只能是  $\mathbb{R}$  上取值恒为正数的连续函数 (原因见: 命题??). 特别地,  $f(1) = |A + D| > 0$ .

证法二: 设  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  是  $A$  的任一特征值,  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$  是对应的特征向量, 即  $A\alpha = \lambda_0\alpha$ . 此式两边同时左乘  $\bar{\alpha}'$ , 则有

$$\bar{\alpha}' A \alpha = \lambda_0 \bar{\alpha}' \alpha.$$

注意到  $\alpha$  是非零向量, 故  $\bar{\alpha}' \alpha = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0$ . 注意到  $A$  为实反称矩阵, 故

$$\overline{(\bar{\alpha}' A \alpha)}' = -\bar{\alpha}' A \alpha,$$

即  $\bar{\alpha}' A \alpha$  是零或纯虚数, 从而  $\lambda_0 = \bar{\alpha}' A \alpha / \bar{\alpha}' \alpha$  也是零或纯虚数. 设  $\lambda = ci$ , 其中  $c \in \mathbb{R}$ . 于是  $I_n \pm A$  的任一特征值为  $1 \pm \lambda_0 = 1 \pm ci \neq 0 \neq 0$ , 由特征值与特征多项式系数的关系可知  $I_n \pm A$  是非异阵. □

### 3.6.3 利用线性空间理论讨论矩阵的秩

按照最初的定义, 矩阵的秩就是矩阵的行 (列) 向量组的秩, 因此通过线性空间理论去讨论矩阵的秩是十分自然的事情.

#### 命题 3.42

求证: 矩阵  $A$  的秩等于  $r$  的充要条件是  $A$  存在一个  $r$  阶子式  $|D|$  不等于零, 而  $|D|$  的所有  $r+1$  阶加边子式全等于零.

证明 必要性由定理 3.11 可直接得到, 只需证明充分性. 不失一般性, 我们可设  $|D|$  是由  $A$  的前  $r$  行和前  $r$  列构成的  $r$  阶子式. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

为矩阵  $A$  的行分块和列分块, 记  $\tau_{\leq r}\alpha_i$  为行向量  $\alpha_i$  关于前  $r$  列的缩短向量,  $\tau_{\leq r}\beta_j$  为列向量  $\beta_j$  关于前  $r$  行的缩短向量. 由  $|D| \neq 0$  可得  $\tau_{\leq r}\alpha_1, \dots, \tau_{\leq r}\alpha_r$  线性无关, 由命题 3.7 可知  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关.

我们只要证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是  $A$  的行向量的极大无关组即可得到  $r(A) = r$ . 用反证法证明, 若它们不是极大无关组, 则可以添加一个行向量, 不妨设为  $\alpha_{r+1}$ , 使得  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$  线性无关. 设  $A_1$  是  $A$  的前  $r+1$  行构成的矩

阵, 则  $A_1 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \tau_{\leq r+1}\beta_2, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_n)$  且  $r(A_1) = r+1$ . 由  $|D| \neq 0$  可得  $\tau_{\leq r}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r}\beta_r$  线性无关, 由命题 3.7 可知  $\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r$  线性无关. 因为  $r(A_1) = r+1$ , 故存在  $A_1$  的一个列向量, 不妨设为  $\tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$ , 使得  $\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$  线性无关. 设  $A_2 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1})$ , 即  $A_2$  是  $A$  的前  $r+1$  行和前  $r+1$  列构成的方阵, 则  $r(A_2) = r+1$ . 因此,  $|A_2| \neq 0$  是包含  $|D|$  的  $r+1$  阶加边子式, 这与假设矛盾.  $\square$

**命题 3.43**

设  $m \times n$  矩阵  $A$  的  $m$  个行向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 且  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是其极大无关组, 又设  $A$  的  $n$  个列向量为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , 且  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  是其极大无关组. 证明:  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  和  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  交叉点上的元素组成的子矩阵  $D$  的行列式  $|D| \neq 0$ .

**证明** 因为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是极大无关组, 故  $A$  的任一行向量  $\alpha_s$  均可表示为  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  的线性组合. 记  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}, \tilde{\alpha}_s$  分别是  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_s$  在  $j_1, j_2, \dots, j_r$  列处的缩短向量, 由命题 3.7 可知,  $\tilde{\alpha}_s$  均可表示为  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  的线性组合.

考虑由列向量  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$  组成的矩阵  $B = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r})$ , 这是一个  $m \times r$  矩阵且秩等于  $r$ . 由于矩阵  $B$  的任一行向量  $\tilde{\alpha}_s$  均可用  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  线性表示, 并且  $B$  的行秩等于  $r$ , 故由命题 3.11 可知,  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$  是  $B$  的行向量的极大无关组, 从而它们线性无关. 注意到  $r$  阶方阵  $D$  的行向量恰好是  $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ , 因此  $D$  是满秩阵, 从而  $|D| \neq 0$ .  $\square$

**命题 3.44**

设  $A$  是一个  $n$  阶方阵,  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行和第  $j_1, \dots, j_r$  列交叉点上的元素组成的子式称为  $A$  的主子式. 若  $A$  是对称阵或反对称阵且秩等于  $r$ , 求证:  $A$  必有一个  $r$  阶主子式不等于零.

**证明** 由对称性或反对称性, 设  $A$  的第  $i_1, \dots, i_r$  行是  $A$  的行向量的极大无关组, 则由命题 3.12 它的第  $i_1, \dots, i_r$  列也是  $A$  的列向量的极大无关组, 因此由命题 3.43 可知, 它们交叉点上的元素组成的  $r$  阶主子式不等于零.  $\square$

**命题 3.45 (反对称阵的秩必为偶数)**

证明: 反对称阵的秩必为偶数.

**证明** 用反证法, 设反对称阵  $A$  的秩等于  $2r+1$ , 则由命题 3.44 可知,  $A$  有一个  $2r+1$  阶主子式  $|D|$  不等于零. 注意到反对称阵的主子式是反对称行列式, 而由命题 1.2 奇数阶反对称行列式的值等于零, 从而  $|D| = 0$ , 矛盾.  $\square$

## 3.7 相抵标准型及其应用

**定理 3.13 (矩阵的相抵标准型)**

对任意一个秩为  $r$  的  $m \times n$  矩阵  $A$ , 总存在  $m$  阶非异阵  $P$  和  $n$  阶非异阵  $Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

**证明**

**命题 3.46 (矩阵的秩 1 分解)**

求证: 秩等于  $r$  的矩阵可以表示为  $r$  个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于  $r$  个秩为 1 的矩阵之和.

**证明** 将  $A$  化为相抵标准型, 即存在非异矩阵  $P$  及  $Q$ , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P(E_{11} + E_{22} + \dots + E_{rr})Q$$

$$= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q.$$

于是记  $A_1 = PE_{11}Q, A_2 = PE_{22}Q, \cdots, A_r = PE_{rr}Q$ , 则每个  $A_i$  的秩都等于 1. 故  $A$  可以化为  $r$  个秩等于 1 的矩阵之和.

若  $A = B_1 + B_2 + \cdots + B_k, k < r$ , 且每个  $B_i$  的秩都等于 1, 则由命题 3.27(6) 可知  $r(A) \leq r(B_1) + r(B_2) + \cdots + r(B_k) = k$ , 这与  $r(A) = r$  矛盾, 故不可能.  $\square$

**命题 3.47 (对称矩阵的秩 1 分解)**

秩等于  $r$  的对称矩阵可以表成  $r$  个秩等于 1 的对称矩阵之和.

**证明** 设  $A$  是一个秩为  $r$  的对称矩阵, 则存在一个可逆矩阵  $C$ , 使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix} = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr}.$$

从而

$$\begin{aligned} A &= (C^T)^{-1} (E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr}) C^{-1} \\ &= (C^T)^{-1} E_{11} C^{-1} + (C^T)^{-1} E_{22} C^{-1} + \cdots + (C^T)^{-1} E_{rr} C^{-1}. \end{aligned}$$

因为  $E_{ii}$  的秩为 1, 且  $(C^T)^{-1}, C^{-1}$  均可逆, 所以  $(C^T)^{-1} E_{ii} C^{-1}$  的秩也为 1. 又由于

$$((C^T)^{-1} E_{ii} C^{-1})^T = (C^{-1})^T E_{ii}^T C^{-1} = (C^T)^{-1} E_{ii} C^{-1}.$$

因此  $(C^T)^{-1} E_{ii} C^{-1}$  也是对称矩阵. 故  $A$  可以表成  $r$  个秩等于 1 的对称矩阵之和.  $\square$

**例题 3.22** 设  $A, B, C$  分别为  $m \times n, p \times q$  和  $m \times q$  矩阵,  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ . 证明:  $r(M) = r(A) + r(B)$  成立的充要条件是矩阵方程  $AX + YB = C$  有解, 其中  $X, Y$  分别是  $n \times q$  和  $m \times p$  未知矩阵.

**笔记** 证明必要性时不妨设的原因: 假设当  $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$  时, 结论成立. 则当  $A \neq \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B \neq \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$  时, 记  $A_1 = P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B_1 = P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}, C_1 = P_1 C Q_2, M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix}$ .

由于矩阵乘可逆矩阵不改变其秩, 因此

$$r(A) = r(P_1 A Q_1) = r \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(A_1),$$

$$r(B) = r(P_2 B Q_2) = r \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = r(B_1),$$

$$r(M) = r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r \left( \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} \right) = r \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = r(M_1).$$

从而

$$r(M) = r(A) + r(B) \Leftrightarrow r(M_1) = r \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(B_1).$$

于是由假设可知  $A_1 X_1 + Y_1 B_1 = C_1$  有解  $X_1, Y_1$ . 记  $X = Q_1 X_1 Q_2^{-1}, Y = P_1^{-1} Y_1 P_2$ , 则

$$\begin{aligned} &A_1 X_1 + Y_1 B_1 = C_1 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow &P_1 A Q_1 X_1 + Y_1 P_2 B Q_2 = P_1 C Q_2 \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow &A Q_1 X_1 Q_2^{-1} + P_1^{-1} Y_1 P_2 B = C \text{ 有解 } X_1, Y_1 \\ \Leftrightarrow &AX + YB = C \text{ 有解 } X, Y \end{aligned}$$

故可以不妨设  $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .

**证明** 先证充分性. 设  $X = X_0, Y = Y_0$  是矩阵方程  $AX + YB = C$  的解, 则将  $M$  的第一分块列右乘  $-X_0$  加到第二分块列上, 再将第二分块行左乘  $-Y_0$  加到第一分块行上, 可得分块对角阵  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ , 于是  $r(M) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ .

再证必要性. 设  $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  为非异阵,  $r = r(A), s = r(B)$ . 注意到问题的条件和结论在相抵变换:  $A \mapsto P_1AQ_1, B \mapsto P_2BQ_2, C \mapsto P_1CQ_2, X \mapsto Q_1^{-1}XQ_2, Y \mapsto P_1YP_2^{-1}$  下保持不变, 故不妨从一开始就假设  $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$  都是相抵标准型. 设  $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$  为对应的分块. 考虑  $M$  的如下分块初等变换:

$$M = \begin{pmatrix} I_r & O & C_1 & C_2 \\ O & O & C_3 & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由于  $r(M) = r(A) + r(B) = r + s$ , 故  $C_4 = O$ . 于是矩阵方程  $AX + YB = C$ , 即

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$$

有解, 例如  $X_1 = C_1, X_2 = C_2, Y_1 = O, Y_3 = C_3$ , 其余分块取法任意. □

#### 命题 3.48 (行/列满秩矩阵性质)

由矩阵的相抵标准型可设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则

- (1) 若  $r(A) = n$ , 即  $A$  是列满秩阵, 则必存在秩等于  $n$  的  $n \times m$  矩阵  $B$  (行满秩), 使得  $BA = I_n$  (这样的矩阵  $B$  称为  $A$  的左逆);
- (2) 若  $r(A) = m$ , 即  $A$  是行满秩阵, 则必存在秩等于  $m$  的  $n \times m$  矩阵  $C$  (列满秩), 使得  $AC = I_m$  (这样的矩阵  $C$  称为  $A$  的右逆).

**证明**

- (1) 设  $P$  为  $m$  阶非异阵,  $Q$  为  $n$  阶非异阵, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix},$$

因此  $(I_n, O)PAQ = I_n$ , 即  $(I_n, O)PA = Q^{-1}$ , 于是  $Q(I_n, O)PA = I_n$ . 令  $B = Q(I_n, O)P$  即可.

- (2) 同理可证, 或者考虑  $A'$  并利用 (1) 的结论. □

#### 推论 3.5

列满秩矩阵适合左消去律, 即若  $A$  列满秩且  $AD = AE$ , 则  $D = E$ . 同理, 行满秩矩阵适合右消去律, 即若  $A$  行满秩且  $DA = EA$ , 则  $D = E$ . ♥

#### 命题 3.49 (满秩分解)

设  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 证明:

- (1)  $A = BC$ , 其中  $B$  是  $m \times r$  (列满秩) 矩阵且  $r(B) = r, C$  是  $r \times n$  (行满秩) 矩阵且  $r(C) = r$ , 这种分解称为  $A$  的满秩分解;
- (2) 若  $A$  有两个满秩分解  $A = B_1C_1 = B_2C_2$ , 则存在  $r$  阶非异阵  $P$ , 使得  $B_2 = B_1P, C_2 = P^{-1}C_1$ . ♥

**证明**

(1) 设  $P$  为  $m$  阶非异阵,  $Q$  为  $n$  阶非异阵, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} (I_r, O) Q.$$

令  $B = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, C = (I_r, O)Q$ , 即得结论.

(2) 由行/列满秩矩阵性质可知, 存在  $r \times m$  行满秩阵  $S_2, n \times r$  列满秩阵  $T_2$ , 使得  $S_2 B_2 = I_r, C_2 T_2 = I_r$ , 于是

$$B_2 = B_2 (C_2 T_2) = (B_2 C_2) T_2 = (B_1 C_1) T_2 = B_1 (C_1 T_2),$$

$$C_2 = (S_2 B_2) C_2 = S_2 (B_2 C_2) = S_2 (B_1 C_1) = (S_2 B_1) C_1,$$

$$(S_2 B_1) (C_1 T_2) = S_2 (B_1 C_1) T_2 = S_2 (B_2 C_2) T_2 = (S_2 B_2) (C_2 T_2) = I_r.$$

令  $P = C_1 T_2$ , 即得结论.

□

### 命题 3.50


$A = BC$  是满秩分解当且仅当  $B$  的  $r$  个列向量是  $A$  的  $n$  个列向量张成线性空间的一组基, 也当且仅当  $C$  的  $r$  个行向量是  $A$  的  $m$  个行向量张成线性空间的一组基.

▲

证明

□

**例题 3.23** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明: 存在  $n \times m$  矩阵  $B$ , 使得  $ABA = A$ .

 **笔记** 证法一的不妨设原因与例题 3.22 类似.

**证明** 证法一: 设  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $P$  是  $m$  阶非异阵,  $Q$  是  $n$  阶非异阵. 注意到问题的条件和结论在相抵变换

换:  $A \mapsto PAQ, B \mapsto Q^{-1}BP^{-1}$  下保持不变, 故不妨从一开始就假设  $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  是相抵标准型. 设  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$

为对应的分块, 由  $ABA = A$  可得  $B_1 = I_r$ , 其余分块取法任意.

证法二: 设  $A = CD$  为  $A$  的满秩分解,  $E$  为列满秩阵  $C$  的左逆,  $F$  是行满秩阵  $D$  的右逆. 令  $B = FE$ , 则

$$ABA = (CD)(FE)(CD) = C(DF)(EC)D = CD = A.$$

□

**例题 3.24** 设  $A, B$  分别是  $3 \times 2, 2 \times 3$  矩阵且满足

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

试求  $BA$ .

**证明** 解法一: 通过简单的计算可得  $r(AB) = 2$ , 从而  $r(A) \geq 2, r(B) \geq 2$ . 又因为矩阵的秩不超过行数和列数的最小值, 故  $r(A) = r(B) = 2$ , 即  $A$  是列满秩阵,  $B$  是行满秩阵. 又注意到  $(AB)^2 = 9AB$ , 经整理可得  $A(BA - 9I_2)B = O$ . 根据推论 3.5, 可以在上式的左边消去  $A$ , 右边消去  $B$ , 从而可得  $BA = 9I_2$ .

解法二: 由解法一中矩阵秩的计算可知,  $AB$  是题中 3 阶矩阵  $C$  的满秩分解. 注意到  $C$  的后两列线性无关, 因此可取另一种满秩分解为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 B_1.$$

由矩阵的满秩分解 (2) 可知, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A_1 = AP, B_1 = P^{-1}B$ . 于是  $B_1 A_1 = P^{-1}BAP$ , 故  $BA$  相似于  $B_1 A_1 = 9I_2$ , 从而  $BA = P^{-1}(9I_2)P = 9I_2$ .

□



**命题 3.51 (幂等矩阵关于满秩分解的刻画)**

设  $A$  是  $n$  阶方阵且  $r(A) = r$ , 求证:  $A^2 = A$  的充要条件是存在秩等于  $r$  的  $n \times r$  矩阵  $S$  和秩等于  $r$  的  $r \times n$  矩阵  $T$ , 使得  $A = ST, TS = I_r$ .

**证明** 充分性显然, 现证必要性. 设  $P, Q$  为  $n$  阶非异阵, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

代入  $A^2 = A$  消去两侧的非异阵  $P$  和  $Q$ , 可得

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

只需令

$$S = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, T = (I_r, O) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,$$

则  $S$  列满秩,  $T$  行满秩, 经简单计算即得结论. □

**推论 3.6 (幂等矩阵的迹和秩相等)**

设  $A$  为  $n$  阶幂等矩阵, 则  $\text{tr}(A) = r(A)$ .

**证明** 证法一: 由命题 3.51 可知,  $\text{tr}(A) = \text{tr}(ST) = \text{tr}(TS) = \text{tr}(I_r) = r = r(A)$ .

证法二 (相似标准型): 事实上, 由  $A^2 = A$  可知, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} (I_r, O) P^{-1},$$

令  $S = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, T = (I_r, O) P^{-1}$ , 可得  $\text{tr}(A) = \text{tr}(ST) = \text{tr}(TS) = \text{tr}(I_r) = r = r(A)$ . □

## 3.8 线性方程组的解及其应用

### 3.8.1 线性方程组的解的讨论

**命题 3.52**

线性方程组  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解当且仅当  $r(A) = r(B)$ .

**证明** □

**例题 3.25** 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵, 记  $\alpha_i$  是  $A$  的第  $i$  个行向量,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . 求证: 若齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解全是方程  $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0$  的解, 则  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合.

**证明** 令  $B = \begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}$ , 由已知, 方程组  $Ax = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解, 故  $r(A) = r(B)$ , 从而  $A$  的行向量的极大无关组也是  $B$  的行向量的极大无关组. 因此,  $\beta$  可表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合. □

**例题 3.26** 设  $Ax = \beta$  是  $m$  个方程式  $n$  个未知数的线性方程组, 求证: 它有解的充要条件是方程组  $A'y = 0$  的任一解  $\alpha$  均适合等式  $\alpha'\beta = 0$ .

**证明** 方程组  $Ax = \beta$  有解当且仅当  $r(A|\beta) = r(A)$ , 当且仅当  $r \begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix} = r(A')$ , 当且仅当方程组  $\begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix} y = 0$  与



$A'y = 0$  同解, 而这当且仅当  $A'y = 0$  的任一解  $\alpha$  均适合等式  $\beta'\alpha = 0$ , 即  $\alpha'\beta = 0$ . □

**例题 3.27** 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

求证: 方程组(3.5)有解的充要条件是方程组(3.6)无解.

**证明** 设第一个线性方程组的系数矩阵为  $A$ , 常数向量为  $\beta$ , 则第二个线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} A' & O \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 由矩阵初等变换可知, 我们有  $r(\tilde{B}) = r(A') + 1 = r(A) + 1$ .

若方程组(3.5)有解, 则  $r(A|\beta) = r(A)$ , 故  $r(B) = r(B') = r(A|\beta) = r(A) \neq r(\tilde{B})$ . 因此, 方程组(3.6)无解.

反之, 若方程组(3.5)无解, 则  $r(A|\beta) = r(A) + 1$ , 故  $r(B) = r(B') = r(A|\beta) = r(A) + 1 = r(\tilde{B})$ . 因此, 方程组(3.6)有解. □

### 命题 3.53

设  $A$  是秩为  $r$  的  $m \times n$  矩阵, 求证: 必存在秩为  $n-r$  的  $n \times (n-r)$  矩阵  $B$ , 使得  $AB = O$ . ▲

**证明** 考虑线性方程组  $Ax = 0$ , 它有  $n-r$  个基础解系, 不妨设为  $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ . 令  $B = (\beta_1, \dots, \beta_{n-r})$ , 则  $AB = (A\beta_1, \dots, A\beta_{n-r}) = O$ , 结论得证. □

**例题 3.28** 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m < n),$$

已知  $Ax = 0$  的基础解系为  $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})' (1 \leq i \leq n-m)$ , 试求齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}y_j = 0 (i = 1, 2, \dots, n-m)$$

的基础解系.

**解** 令  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m})$ , 则  $AB = O, B'A' = O$ . 因为  $Ax = 0$  有  $n-m$  个基础解系, 所以  $A$  的秩为  $m$ . 又由于  $r(B) = r(B) = n-m$ , 因此  $B'y = 0$  的基础解系有  $m$  个. 故  $B'y = 0$  的基础解系为  $A'$  的全部列向量, 即  $A$  的所有行向量.

### 命题 3.54

设  $V_0$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维列向量空间的真子空间, 求证: 必存在矩阵  $A$ , 使得  $V_0$  是  $n$  元齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解空间. ▲

**证明** 设  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是子空间  $V_0$  的一组基. 令  $B = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ , 这是一个  $n \times r$  矩阵. 考虑齐次线性方程组  $B'x = 0$ , 因为  $B$  的秩等于  $r$ , 故其基础解系含  $n-r$  个向量, 记为  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ . 令  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})'$ , 这是个  $(n-r) \times n$  矩阵且秩为  $n-r$ . 由  $B'A' = O$  可得  $AB = O$ , 因此齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系是  $\beta_1, \dots, \beta_r$ , 其解空间就是  $V_0$ .  $\square$

**注** 设  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是子空间  $V_0$  的一组基. 令  $B = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ , 这是一个  $n \times r$  矩阵. 也可以由命题 3.53 直接得到存在矩阵  $A$ , 使得  $AB = O$ , 因此齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系是  $\beta_1, \dots, \beta_r$ , 其解空间就是  $V_0$ .

**例题 3.29** 设  $A$  是秩为  $r$  的  $m \times n$  矩阵,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  与  $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的两个基础解系. 求证: 必存在  $n-r$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})P.$$

**证明** 设  $U$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解空间, 则向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  与  $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$  是  $U$  的两组基. 令  $P$  是这两组基之间的过渡矩阵, 则

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})P.$$

 $\square$ 

### 定理 3.14

设  $A, B$  为  $m \times n$  和  $m \times p$  矩阵,  $X$  为  $n \times p$  未知矩阵, 证明: 矩阵方程  $AX = B$  有解的充要条件是  $r(A|B) = r(A)$ .

**证明** 设  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ ,  $X = (x_1, \dots, x_p)$  为对应的列分块. 设  $r(A) = r$  且  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的列向量的极大无关组. 注意到矩阵方程  $AX = B$  有解当且仅当  $p$  个线性方程组  $Ax_i = \beta_i (1 \leq i \leq p)$  都有解. 因此, 若  $AX = B$  有解, 则每个  $\beta_i$  都是  $A$  的列向量的线性组合, 从而是  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  的线性组合, 于是  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $(A|B)$  的列向量的极大无关组, 故  $r(A|B) = r$ . 反之, 若  $r(A|B) = r$ , 则由命题 3.10 可知,  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $(A|B)$  的列向量的极大无关组, 于是每个  $\beta_i$  都是  $A$  的列向量的线性组合, 从而  $AX = B$  有解.  $\square$

### 命题 3.55

矩阵方程  $AX = B$  有解当且仅当  $p$  个线性方程组  $Ax_i = \beta_i (1 \leq i \leq p)$  都有解. 从而每个  $\beta_i$  都是  $A$  的列向量的线性组合.

**证明** 证明是显然的.  $\square$

### 命题 3.56

设  $A, B$  为  $m \times n$  和  $n \times p$  矩阵, 证明: 存在  $p \times n$  矩阵  $C$ , 使得  $ABC = A$  的充要条件是  $r(A) = r(AB)$ .

**证明** 必要性由秩的不等式  $r(A) \geq r(AB) \geq r(ABC) = r(A)$  即得.

充分性由秩的不等式可知  $r(A) = r(AB) \leq r(AB|B) = r(A(B|I_n)) \leq r(A)$ . 故  $r(A) = r(AB|B)$ . 于是由定理 3.14 可知, 矩阵方程  $ABX = A$  有解. 即存在  $p \times n$  矩阵  $C$ , 使得  $ABC = A$  的充要条件是  $r(A) = r(AB)$ .  $\square$

## 3.8.2 线性方程组的公共解

对两个非齐次线性方程组, 若只已知它们的通解, 而不知道方程组本身, 要求它们的公共解, 我们可以这样来做: 设  $Ax = \beta_1, Bx = \beta_2$  是两个含  $n$  个未知数的非齐次线性方程组. 方程组  $Ax = \beta_1$  有特解  $\gamma$  且  $Ax = 0$  的基础解系为  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ . 方程组  $Bx = \beta_2$  有特解  $\delta$  且  $Bx = 0$  的基础解系为  $\xi_1, \dots, \xi_{n-s}$ .

**方法一:** 假设它们的公共解为  $\gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r}$ , 则  $\gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} - \delta$  是  $Bx = 0$  的解, 因此可以表示为  $\xi_1, \dots, \xi_{n-s}$  的线性组合. 于是矩阵  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-s}, \gamma + t_1\eta_1 + \dots + t_{n-r}\eta_{n-r} - \delta)$  的秩等于  $n-s$ . 由此可以求出  $t_1, \dots, t_{n-r}$ , 从而求出公共解.

方法二:假设它们的公共解为  $\zeta$ , 则

$$\zeta = \gamma + t_1\eta_1 + \cdots + t_{n-r}\eta_{n-r} = \delta + (-u_1)\xi_1 + \cdots + (-u_{n-s})\xi_{n-s}.$$

要求公共解  $\zeta$  等价于求解下列关于未定元  $t_1, \cdots, t_{n-r}; u_1, \cdots, u_{n-s}$  的线性方程组:

$$t_1\eta_1 + \cdots + t_{n-r}\eta_{n-r} + u_1\xi_1 + \cdots + u_{n-s}\xi_{n-s} = \delta - \gamma.$$

例题 3.30 设有两个非齐次线性方程组 (I), (II), 它们的通解分别为

$$\gamma + t_1\eta_1 + t_2\eta_2; \delta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

其中  $\gamma = (5, -3, 0, 0)'$ ,  $\eta_1 = (-6, 5, 1, 0)'$ ,  $\eta_2 = (-5, 4, 0, 1)'$ ;  $\delta = (-11, 3, 0, 0)'$ ,  $\xi_1 = (8, -1, 1, 0)'$ ,  $\xi_2 = (10, -2, 0, 1)'$ . 求这两个方程组的公共解.

证明 解法一: 设公共解为

$$\gamma + t_1\eta_1 + t_2\eta_2 = \begin{pmatrix} 5 - 6t_1 - 5t_2 \\ -3 + 5t_1 + 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

注意矩阵  $(\xi_1, \xi_2, \gamma - \delta + t_1\eta_1 + t_2\eta_2)$  的秩等于 2, 对此矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 16 - 6t_1 - 5t_2 \\ -1 & -2 & -6 + 5t_1 + 4t_2 \\ 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 8 & 10 & 16 - 6t_1 - 5t_2 \\ -1 & -2 & -6 + 5t_1 + 4t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 16 - 14t_1 - 15t_2 \\ 0 & 0 & -6 + 6t_1 + 6t_2 \end{pmatrix}$$

可得关于  $t_1, t_2$  的方程组

$$\begin{cases} 14t_1 + 15t_2 = 16, \\ 6t_1 + 6t_2 = 6. \end{cases}$$

解得  $t_1 = -1, t_2 = 2$ , 所以公共解为 (只有一个向量)  $\gamma - \eta_1 + 2\eta_2 = (1, 0, -1, 2)'$ .

解法二: 求公共解等价于求解下列线性方程组:

$$t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + u_1\xi_1 + u_2\xi_2 = \delta - \gamma.$$

对其增广矩阵实施初等行变换, 可得

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 8 & 10 & -16 \\ 5 & 4 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

故  $(t_1, t_2, u_1, u_2)$  只有唯一解  $(-1, 2, 1, -2)$ . 因此, 公共解为  $\gamma - \eta_1 + 2\eta_2 = \delta - \xi_1 + 2\xi_2 = (1, 0, -1, 2)'$ . □

例题 3.31 设有非齐次线性方程组 (I):

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = b, \\ 8x_1 - 9x_2 + ax_4 = 7. \end{cases}$$

又已知方程组 (II) 的通解为

$$(1, 1, 1, 0)' + t_1(1, 0, -1, 0)' + t_2(2, 3, 0, 1)'.$$

若这两个方程组有无穷多组公共解, 求出  $a, b$  的值并求出公共解.

证明 将 (II) 的通解写为  $(1 + t_1 + 2t_2, 1 + 3t_2, -t_1, t_2)'$ , 代入方程组 (I) 化简得到

$$\begin{cases} 4t_1 - 4t_2 = b - 1, \\ 8t_1 + (a - 11)t_2 = 8. \end{cases}$$

要使这两个方程组有无穷多组公共解,  $t_1, t_2$  必须有无穷多组解, 于是上面方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都应该等于 1, 从而  $a=3, b=5$ . 解出方程组得到  $t_1 = t_2 + 1$ , 因此方程组 (I), (II) 的公共解为

$$(1 + t_1 + 2t_2, 1 + 3t_2, -t_1, t_2)' = (2, 1, -1, 0)' + t_2(3, 3, -1, 1)',$$

其中  $t_2$  为任意数. □

### 3.8.3 在解析几何上的应用

#### 命题 3.57

求平面上  $n$  个点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  位于同一条直线上的充要条件.

**证明** 充要条件为第一个点和其余点代表的向量之差属于一个一维子空间, 即  $(x_i - x_1, y_i - y_1)$  都成比例. 写成矩阵形式为

$$r \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \cdots & y_n - y_1 \end{pmatrix} \leq 1,$$

或

$$r \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leq 2.$$

□

#### 命题 3.58

求三维空间中 4 点  $(x_i, y_i, z_i) (1 \leq i \leq 4)$  共面的充要条件.

**证明** 设 4 点的向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , 则 4 点共面的充要条件是: 向量组  $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_4 - \alpha_1$  的秩不超过 2. 不难将此写成矩阵形式:

$$r \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \leq 2,$$

或

$$r \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq 3.$$

□

**例题 3.32** 证明: 通过平面内不在一条直线上的 3 点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  的圆方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**证明** 圆方程可设为

$$u_1(x^2 + y^2) + u_2x + u_3y + u_4 = 0,$$

于是得到未知数  $u_1, u_2, u_3, u_4$  的方程组为

$$\begin{cases} (x_1^2 + y_1^2)u_1 + x_1u_2 + y_1u_3 + u_4 = 0, \\ (x_2^2 + y_2^2)u_1 + x_2u_2 + y_2u_3 + u_4 = 0, \\ (x_3^2 + y_3^2)u_1 + x_3u_2 + y_3u_3 + u_4 = 0. \end{cases}$$

上述方程组加上原方程组成一个含 4 个未知数、4 个方程式的齐次线性方程组, 它有非零解的充要条件是系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由命题 3.57 可知 3 点不在一条直线上意味着

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故圆方程不退化. □

#### 命题 3.59

求平面上不在一条直线上的 4 个点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$  位于同一个圆上的充要条件.

**证明** 由例 3.32 可得充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

**例题 3.33** 已知平面上两条不同的二次曲线  $a_ix^2 + b_ixy + c_iy^2 + d_ix + e_iy + f_i = 0 (i = 1, 2)$  交于 4 个不同的点  $(x_i, y_i) (1 \leq i \leq 4)$ . 求证: 过这 4 个点的二次曲线均可写为如下形状:

$$\lambda_1(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1) + \lambda_2(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0.$$

**证明** 显然上述曲线过这 4 个交点. 现设  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  是过这 4 个交点的二次曲线, 则有

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0, \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f = 0, \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f = 0, \\ ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + ey_4 + f = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

视  $a, b, c, d, e, f$  为未知数, 则线性方程组 (3.7) 有线性无关的解  $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)', (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2)'$ . 如果能证明方程组 (3.7) 的系数矩阵的秩等于 4, 则这两个解就构成了基础解系, 从而即得结论.

容易验证 4 个交点中的任意 3 个点都不共线, 而且经过坐标轴适当的旋转, 可以假设这 4 个交点的横坐标  $x_1, x_2, x_3, x_4$  互不相同. 用反证法证明结论, 设方程组 (3.7) 系数矩阵  $A$  的秩小于 4. 由任意 3 个交点不共线以及命题 3.57 知,  $(x_1, x_2, x_3, x_4)', (y_1, y_2, y_3, y_4)', (1, 1, 1, 1)'$  线性无关, 从而它们是  $A$  的列向量的极大无关组, 于是  $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)'$  是它们的线性组合, 故可设  $x_i^2 = rx_i + sy_i + t (1 \leq i \leq 4)$ , 其中  $r, s, t$  是实数. 由于  $x_1, x_2, x_3, x_4$  互不相同, 故  $s \neq 0$ , 于是  $y_i = \frac{1}{s}x_i^2 - \frac{r}{s}x_i - \frac{t}{s} (1 \leq i \leq 4)$ . 考虑  $A$  的第一列、第二列、第四列和第六列构成的四阶行列式  $|B|$ , 利用 Vander - monde 行列式容易算出  $|B| = -\frac{1}{s} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j) \neq 0$ , 于是  $A$  的秩等于 4, 这与假设矛盾. 因此

方程组 (3.7) 的系数矩阵的秩只能等于 4.

□

## 第四章 线性映射

### 4.1 基本定理和命题

#### 命题 4.1 (满射的复合仍是满射)

若  $f, g$  均为满射, 则  $f \circ g$  也是满射.

**注** 单射的复合不一定是单射.

**证明** 设  $f: V_1 \rightarrow V_2, g: V_2 \rightarrow V_3$ , 则对  $\forall \alpha \in V_3$ , 由  $g$  为满射可知, 存在  $\beta \in V_2$ , 使得  $\alpha = g(\beta)$ . 又由  $f$  为满射可知, 存在  $\gamma \in V_1$ , 使得  $\beta = f(\gamma)$ . 从而  $(g \circ f)(\gamma) = g(f(\gamma)) = g(\beta) = \alpha$ . 故  $g \circ f$  也是满射.  $\square$

#### 定义 4.1 (线性映射的表示矩阵)

设  $\varphi$  是  $V \rightarrow U$  的线性映射, 分别取  $V$  和  $U$  的基如下:

$$V: e_1, e_2, \dots, e_n; \quad U: f_1, f_2, \dots, f_m.$$

假设有

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m, \\ \varphi(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m, \end{cases}$$

则矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为线性映射  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  下的表示矩阵.

**注** 若  $\varphi$  是向量空间  $V$  上的线性变换, 则取  $V$  的一组基, 而不取两组基.

#### 推论 4.1

设  $\varphi$  是  $V \rightarrow U$  的线性映射, 分别取  $V$  和  $U$  的基如下:

$$V: e_1, e_2, \dots, e_n; \quad U: f_1, f_2, \dots, f_m.$$

并且设  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  下的表示矩阵为  $A$ . 则有

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, f_2, \dots, f_m)A.$$

$\forall \alpha \in V$ , 设  $\alpha$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的坐标向量为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 则

$$\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\alpha) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, f_2, \cdots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

即  $\varphi(\alpha)$  在基  $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$  下的坐标向量为  $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ .

#### 定理 4.1

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维向量空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换,  $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$  是  $V$  的两组基, 从第一组基到第二组基的过渡矩阵为  $P$ . 假设  $\varphi$  在第一组基下的表示矩阵为  $A$ , 在第二组基下的表示矩阵为  $B$ , 则  $B = P^{-1}AP$ , 即向量空间上同一个线性变换在不同基下的表示矩阵必相似.

## 4.2 线性映射及其运算

在许多问题中, 常常需要定义向量空间之间的线性映射 (或某一向量空间上的线性变换). 一般来说, 无须对向量空间中的每个元素进行定义, 我们可采用下列两种方法来简化定义: 第一, 只要对向量空间的基向量进行定义即可; 第二, 若向量空间可分解为两个 (或多个) 子空间的直和, 则只要对每个子空间进行定义即可. 这两点可由下面两个定理 (定理 4.2 和定理 4.3) 得到.

#### 定理 4.2 (线性扩张定理)

设  $V$  和  $U$  是数域  $\mathbb{F}$  上的向量空间,  $e_1, e_2, \cdots, e_n$  是  $V$  的一组基,  $u_1, u_2, \cdots, u_n$  是  $U$  中  $n$  个向量, 求证: 存在唯一的  $V$  到  $U$  的线性映射  $\varphi$ , 使得  $\varphi(e_i) = u_i$ .

**注** 这个线性扩张定理表明只要选定  $V$  的一组基和  $U$  中  $n$  个向量, 则有且仅有一个线性映射将基向量映到对应的向量. 后面我们将经常采用线性扩张定理来构造线性映射以及判定两个线性映射是否相等.



**笔记** 这个线性扩张定理表明:

1. 在向量空间上定义线性映射只要对向量空间的基向量进行定义即可.
2. 判定两个线性映射是否相等只要判断这个两个线性映射原像空间的基向量的像是否相等即可.

**证明** 先证存在性. 对任意的  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ , 则  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  被  $\alpha$  唯一确定. 令

$$\varphi(\alpha) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n,$$

则  $\varphi$  是  $V$  到  $U$  的映射. 若另有  $\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n$ , 则

$$\varphi(\alpha + \beta) = (a_1 + b_1)u_1 + (a_2 + b_2)u_2 + \cdots + (a_n + b_n)u_n = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

又对  $\mathbb{F}$  中的任意元素  $k$ , 有

$$\varphi(k\alpha) = ka_1 u_1 + ka_2 u_2 + \cdots + ka_n u_n = k\varphi(\alpha).$$

因此  $\varphi$  是线性映射, 显然它满足  $\varphi(e_i) = u_i$ .

设另有  $V$  到  $U$  的线性映射  $\psi$  满足  $\psi(e_i) = u_i$ , 则对任意的  $\alpha \in V$ , 有

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \psi(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n) \\ &= a_1 \psi(e_1) + a_2 \psi(e_2) + \cdots + a_n \psi(e_n) \\ &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

因此  $\psi = \varphi$ , 这就证明了唯一性. □



**定理 4.3**

设线性空间  $V = V_1 \oplus V_2$ , 并且  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  分别是  $V_1, V_2$  到  $U$  的线性映射, 求证: 存在唯一的从  $V$  到  $U$  的线性映射  $\varphi$ , 当  $\varphi$  限制在  $V_i$  上时等于  $\varphi_i$ .



**注** 定理 4.3 可以推广到多个子空间的情形: 设  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ , 给定线性映射  $\varphi_i: V_i \rightarrow U (1 \leq i \leq m)$ , 则存在唯一的线性映射  $\varphi: V \rightarrow U$ , 使得  $\varphi|_{V_i} = \varphi_i (1 \leq i \leq m)$ . 我们可以把这样的线性映射  $\varphi$  简记为  $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_m$ .

**笔记** 这个定理表明: 在向量空间上定义线性映射, 若这个向量空间可分解为两个 (或多个) 子空间的直和, 则只要对每个子空间进行定义即可.

**证明** 因为  $V = V_1 \oplus V_2$ , 故对任意的  $\alpha \in V$ ,  $\alpha$  可唯一地写为  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ , 其中  $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ . 令  $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2)$ , 则  $\varphi$  是  $V$  到  $U$  的映射. 不难验证  $\varphi$  保持加法和数乘, 因此  $\varphi$  是线性映射. 若另有线性映射  $\psi$ , 它在  $V_i$  上的限制等于  $\varphi_i$ , 则

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2) = \varphi(\alpha).$$

因此  $\psi = \varphi$ , 唯一性得证. □

**例题 4.1** 设  $\varphi$  是有限维线性空间  $V$  到  $U$  的线性映射, 求证: 必存在  $U$  到  $V$  的线性映射  $\psi$ , 使得  $\varphi\psi\varphi = \varphi$ .

**笔记** 可以直接定义  $\psi$  是  $U$  到  $V$  的线性映射的原因: 由 **线性扩张定理** 可知存在唯一的线性映射  $\psi$ , 使得它在基上的作用为

$$\psi(f_i) = e_i, 1 \leq i \leq r; \psi(f_j) = 0, r+1 \leq j \leq m.$$

以后这种利用 **线性扩张定理** 得到线性映射的存在性不再额外说明, 而是直接定义.

**证明 证法一:** 设  $V$  和  $U$  的维数分别是  $n$  和  $m$ . 由 **命题 4.11** 可知, 存在  $V$  和  $U$  的基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , 使得  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

这就是  $\varphi(e_i) = f_i, 1 \leq i \leq r; \varphi(e_j) = 0, r+1 \leq j \leq n$ . 定义  $\psi$  是  $U$  到  $V$  的线性映射, 它在基上的作用为

$$\psi(f_i) = e_i, 1 \leq i \leq r; \psi(f_j) = 0, r+1 \leq j \leq m,$$

则在  $V$  的基上, 有

$$\varphi\psi\varphi(e_i) = \varphi\psi(f_i) = \varphi(e_i), 1 \leq i \leq r;$$

$$\varphi\psi\varphi(e_j) = \varphi\psi(0) = 0 = \varphi(e_j), r+1 \leq j \leq n.$$

于是  $\varphi\psi\varphi = \varphi$ .

**证法二 (代数方法):** 取定  $V$  和  $U$  的两组基, 设  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为  $m \times n$  矩阵  $A$ , 则由 **例题 3.23** 可知, 存在  $n \times m$  矩阵  $B$ , 使得  $ABA = A$ . 由矩阵  $B$  可定义从  $U$  到  $V$  的线性映射  $\psi$ , 它适合  $\varphi\psi\varphi = \varphi$ . □

**命题 4.2**

设有数域  $\mathbb{F}$  上的有限维线性空间  $V, V'$ , 又  $U$  是  $V$  的子空间,  $\varphi$  是  $U$  到  $V'$  的线性映射. 求证: 必存在  $V$  到  $V'$  的线性映射  $\psi$ , 它在  $U$  上的限制就是  $\varphi$ .



**笔记** 可以直接定义  $\psi$  为  $V$  到  $V'$  的线性映射的原因: 由 **定理 4.3** 可知, 存在唯一的从  $V$  到  $V'$  的线性映射  $\psi$ , 使得它在  $U$  上的限制是  $\varphi$ , 它在  $W$  上的限制是零线性映射.

以后这种利用 **定理 4.3** 得到线性映射的存在性不再额外说明, 而是直接定义.

**证明** 令  $W$  是子空间  $U$  在  $V$  中的补空间, 即  $V = U \oplus W$ . 定义  $\psi$  为  $V$  到  $V'$  的线性映射, 它在  $U$  上的限制是  $\varphi$ , 它在  $W$  上的限制是零线性映射, 这样的  $\psi$  即为所求. □

## 命题 4.3

设  $V, U$  是  $\mathbb{F}$  上的有限维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  到  $U$  的线性映射, 求证:

- (1)  $\varphi$  是单映射的充要条件是存在  $U$  到  $V$  的线性映射  $\psi$ , 使  $\psi\varphi = \text{Id}_V$ , 这里  $\text{Id}_V$  表示  $V$  上的恒等映射;
- (2)  $\varphi$  是满映射的充要条件是存在  $U$  到  $V$  的线性映射  $\eta$ , 使  $\varphi\eta = \text{Id}_U$ , 这里  $\text{Id}_U$  表示  $U$  上的恒等映射.

证明 证法一:

- (1) 若  $\psi\varphi = \text{Id}_V$ , 则对任意的  $v \in \text{Ker}\varphi$ ,  $v = \psi(\varphi(v)) = \mathbf{0}$ , 即  $\text{Ker}\varphi = \mathbf{0}$ , 从而  $\varphi$  是单映射.

反之, 若  $\varphi$  是单映射, 则定义映射  $\varphi_1: V \rightarrow \text{Im}\varphi$ , 它与  $\varphi$  有相同的映射法则, 但值域变为  $\text{Im}\varphi$ . 因为  $\varphi_1$  与  $\varphi$  有相同的映射法则, 所以对  $\forall \alpha \in \text{Ker}\varphi_1$ , 有  $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) = \mathbf{0}$ . 于是  $\alpha \in \text{Ker}\varphi$ , 故  $\text{Ker}\varphi_1 \subset \text{Ker}\varphi$ . 又由  $\varphi$  是单射可知,  $\text{Ker}\varphi = \mathbf{0}$ . 因此  $\text{Ker}\varphi_1 = \mathbf{0}$ , 即  $\varphi_1$  也是单射. 因为  $\varphi_1$  与  $\varphi$  有相同的映射法则, 所以对  $\forall \beta \in \text{Im}\varphi$ , 存在  $b \in V$ , 使得  $\beta = \varphi(b) = \varphi_1(b) \in \text{Im}\varphi_1$ . 故  $\text{Im}\varphi \subset \text{Im}\varphi_1$ . 又根据  $\varphi_1$  的定义可知,  $\text{Im}\varphi_1 \subset \text{Im}\varphi$ . 因此  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi_1$ , 即  $\varphi_1$  是满射. 故  $\varphi_1$  是双射. 由于  $\varphi_1$  与  $\varphi$  有相同的映射法则, 因此容易验证  $\varphi_1$  是线性映射. 综上,  $\varphi_1$  是线性同构.

设  $U_0$  是  $\text{Im}\varphi$  在  $U$  中的补空间, 即  $U = \text{Im}\varphi \oplus U_0$ . 定义  $\psi$  为  $U$  到  $V$  的线性映射, 它在  $\text{Im}\varphi$  上的限制为  $\varphi_1^{-1}$ , 它在  $U_0$  上的限制是零线性映射, 则容易验证  $\psi\varphi = \text{Id}_V$  成立.

- (2) 若  $\varphi\eta = \text{Id}_U$ , 则对任意的  $u \in U$ ,  $u = \varphi(\eta(u))$ , 从而  $\varphi$  是满映射.

反之, 若  $\varphi$  是满映射, 则可取  $U$  的一组基  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , 一定存在  $V$  中的向量  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , 使得  $\varphi(v_i) = f_i (1 \leq i \leq m)$ . 定义  $\eta$  为  $U$  到  $V$  的线性映射, 它在基上的作用为  $\eta(f_i) = v_i (1 \leq i \leq m)$ , 则容易验证  $\varphi\eta = \text{Id}_U$  成立.

证法二 (代数方法):

充分性同证法一, 现只证必要性. 取定  $V$  和  $U$  的两组基, 设  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为  $m \times n$  矩阵  $A$ .

- (1) 若  $\varphi$  是单映射, 则由命题 4.13 可知  $A$  是列满秩矩阵. 再由命题 3.48(1) 可知, 存在  $n \times m$  矩阵  $B$ , 使得  $BA = I_n$ . 由矩阵  $B$  可定义从  $U$  到  $V$  的线性映射  $\psi$ , 它适合  $\psi\varphi = \text{Id}_V$ .
- (2) 若  $\varphi$  是满映射, 则由命题 4.13 可知  $A$  是行满秩矩阵. 再由命题 3.48(2) 可知, 存在  $n \times m$  矩阵  $C$ , 使得  $AC = I_m$ . 由矩阵  $C$  可定义从  $U$  到  $V$  的线性映射  $\eta$ , 它适合  $\varphi\eta = \text{Id}_U$ .

□

## 命题 4.4

- (1) 设  $V, U$  是数域  $\mathbb{F}$  上的有限维线性空间,  $\varphi, \psi: V \rightarrow U$  是两个线性映射, 证明: 存在  $U$  上的线性变换  $\xi$ , 使得  $\psi = \xi\varphi$  成立的充要条件是  $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$ .
- (2) 设  $V, U$  是数域  $\mathbb{F}$  上的有限维线性空间,  $\varphi, \psi: V \rightarrow U$  是两个线性映射, 证明: 存在  $V$  上的线性变换  $\xi$ , 使得  $\psi = \varphi\xi$  成立的充要条件是  $\text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$ .

◆

证明

- (1) 先证必要性: 任取  $v \in \text{Ker}\varphi$ , 则  $\psi(v) = \xi\varphi(v) = \mathbf{0}$ , 即有  $v \in \text{Ker}\psi$ , 从而  $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$ .

再证充分性: 设  $\dim V = n, \dim U = m, \dim \text{Ker}\varphi = n - r$ . 取  $\text{Ker}\varphi$  的一组基  $e_{r+1}, \dots, e_n$ , 扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ . 由推论 4.4 可知,  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$  是  $\text{Im}\varphi$  的一组基, 将其扩张为  $U$  的一组基  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r), g_{r+1}, \dots, g_m$ . 定义  $\xi$  为  $U$  上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\xi(\varphi(e_i)) = \psi(e_i) (1 \leq i \leq r), \xi(g_j) = \mathbf{0} (r+1 \leq j \leq m)$ . 由于  $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$ , 故容易验证  $\psi(e_i) = \xi\varphi(e_i) (1 \leq i \leq n)$  成立, 从而  $\psi = \xi\varphi$ .

- (2) 先证必要性: 任取  $v \in V$ , 则  $\psi(v) = \varphi(\xi(v)) \in \text{Im}\varphi$ , 从而  $\text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$ .

再证充分性: 取  $V$  的一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 则  $\psi(e_i) \in \text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$ , 从而存在  $f_i \in V$ , 使得  $\varphi(f_i) = \psi(e_i) (1 \leq i \leq n)$ . 定义  $\xi$  为  $V$  上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\xi(e_i) = f_i (1 \leq i \leq n)$ . 容易验证  $\psi(e_i) = \varphi\xi(e_i) (1 \leq i \leq n)$  成立, 从而  $\psi = \varphi\xi$ .

□

## 命题 4.5

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\alpha \in V$ . 若  $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 而  $\varphi^m(\alpha) = 0$ , 求证:  $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)$  线性无关.

**证明** 设有  $m$  个数  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ , 使得

$$a_0\alpha + a_1\varphi(\alpha) + \dots + a_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha) = 0.$$

上式两边同时作用  $\varphi^{m-1}$ , 则有  $a_0\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$ , 由于  $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 故  $a_0 = 0$ . 上式两边同时作用  $\varphi^{m-2}$ , 则有  $a_1\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$ , 由于  $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 故  $a_1 = 0$ . 不断这样做下去, 最后可得  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ , 于是  $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)$  线性无关.  $\square$

## 推论 4.2

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的幂零线性变换, 满足  $r(\varphi) = n - 1$ . 求证: 存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**证明** 由假设存在正整数  $m$ , 使得  $\varphi^m = 0, \varphi^{m-1} \neq 0$ , 从而存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\varphi^m(\alpha) = 0, \varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ . 由命题 4.5 可知,  $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)$  线性无关, 于是  $m \leq \dim V = n$ . 另一方面, 由 Sylvester 不等式以及  $r(\varphi) = n - 1$  可知,  $r(\varphi^2) \geq 2r(\varphi) - n = n - 2$ . 不断这样讨论下去, 最终可得  $0 = r(\varphi^m) \geq n - m$ , 即有  $m \geq n$ , 从而  $m = n$ . 于是  $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{n-1}(\alpha)$  是  $V$  的一组基,  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为  $A$ .  $\square$

## 4.3 线性同构

线性同构刻画了不同线性空间之间的相同本质, 即同构的线性空间具有相同的线性结构 (或从线性结构的观点来看没有任何区别). 要证明线性映射  $\varphi: V \rightarrow U$  是线性同构, 通常一方面需要验证  $\varphi$  是单映射 (或等价地验证  $\text{Ker}\varphi = 0$ ), 另一方面需要验证  $\varphi$  是满映射 (或等价地验证  $\text{Im}\varphi = U$ ). 但若已知前后两个线性空间的维数相等, 则由线性映射的维数公式容易证明,  $\varphi$  是线性同构当且仅当  $\varphi$  是单映射, 也当且仅当  $\varphi$  是满映射, 从而只需验证  $\varphi$  是单映射或满映射即可得到  $\varphi$  是线性同构.

## 命题 4.6

设  $V, U$  为两个线性空间, 若  $\dim V = \dim U$ , 则线性映射  $\varphi: V \rightarrow U$  是线性同构当且仅当  $\varphi$  是单映射, 也当且仅当  $\varphi$  是满映射.

**证明** 由线性映射的维数公式容易证明.  $\square$

## 推论 4.3

设  $V$  为线性空间, 则线性变换  $\varphi: V \rightarrow V$  是自同构当且仅当  $\varphi$  是单映射, 也当且仅当  $\varphi$  是满映射.  $\square$

**证明** 由命题 4.6 立得.  $\square$

## 引理 4.1

设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是数域  $\mathbb{F}$  中  $n+1$  个不同的数,  $V$  是  $\mathbb{F}$  上次数不超过  $n$  的多项式全体组成的线性空间. 设  $\varphi$  是  $V$  到  $n+1$  维行向量空间  $U$  的映射:

$$\varphi(f) = (f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)),$$

求证:  $\varphi$  是线性同构.



**证明** 不难验证  $\varphi$  是一个线性映射. 若  $f(x) \in \text{Ker}\varphi$ , 则  $f(a_i) = 0 (0 \leq i \leq n)$ . 因为  $f(x)$  的次数不超过  $n$ , 故由多项式根的有限性可知  $f(x) = 0$ , 即  $\text{Ker}\varphi = 0$ , 这证明了映射  $\varphi$  是单映射. 注意到线性空间  $V$  和  $U$  的维数都等于  $n+1$ , 因此由命题 4.6 可知  $\varphi$  是线性同构.  $\square$

## 定理 4.4 (Lagrange 插值公式)

设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是数域  $\mathbb{F}$  中  $n+1$  个不同的数,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  是  $\mathbb{F}$  中任意  $n+1$  个数, 求证: 必存在  $\mathbb{F}$  上次数不超过  $n$  的多项式  $f(x)$ , 使得  $f(a_i) = b_i (0 \leq i \leq n)$ , 并将  $f(x)$  构造出来.



**证明** 由引理 4.1 可知映射  $\varphi$  是映上的 (满射), 因此存在性已经证明. 现来构造  $f(x)$ . 设  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) (1 \leq i \leq n+1)$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n+1$  维标准单位行向量. 对任意的  $0 \leq i \leq n$ , 令

$$f_i(x) = \frac{(x-a_0) \cdots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \cdots (x-a_n)}{(a_i-a_0) \cdots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \cdots (a_i-a_n)},$$

则  $f_i(a_i) = 1, f_i(a_j) = 0 (j \neq i)$ , 于是  $\varphi(f_i) = e_{i+1} (0 \leq i \leq n)$ . 再令

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \cdots + b_n f_n(x),$$

则容易验证  $\varphi(f) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ , 即  $f(a_i) = b_i (0 \leq i \leq n)$  成立.  $\square$

## 4.3.1 证明线性变换可逆的方法

要证明某个有限维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  是自同构 (可逆线性变换), 通常有 3 种方法. 一是可尝试直接构造出  $\varphi$  的逆变换. 二是证明  $\varphi$  是单映射或者  $\varphi$  是满映射 (两者只需其一) (命题 4.6). 三是用矩阵方法, 即选取  $V$  的一组基, 设  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为  $A$ , 设法证明  $A$  是可逆矩阵.

对于无限维线性空间之间的线性映射, 我们并没有定义表示矩阵这一概念, 也没有维数公式等结论, 因此研究线性映射或线性变换, 无限维线性空间的情形远比有限维线性空间的情形难得多, 也常出现对有限维线性空间成立的结论在无限维线性空间却不成立的情况. 例如, 要证明无限维线性空间上的线性变换是自同构, 只能按照定义证明它既是单映射又是满映射, 而不能像有限维线性空间上的线性变换那样, 只验证它是单映射或满映射即可.

**例题 4.2** 设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的线性变换, 若存在正整数  $n$  以及  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ , 使得

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \varphi + a_n I_V = 0,$$

其中  $I_V$  表示恒等变换并且  $a_n \neq 0$ , 求证:  $\varphi$  是  $V$  上的自同构.

**证明** 由条件可得

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \varphi = -a_n I_V,$$

从而

$$\varphi \left( -\frac{1}{a_n} (\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} I_V) \right) = I_V,$$

于是

$$\varphi^{-1} = -\frac{1}{a_n} (\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} I_V).$$



## 命题 4.7

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 证明:  $\varphi$  是可逆变换的充要条件是  $\varphi$  将  $V$  的基变为基.

**证明** 若  $\varphi$  是可逆变换, 则显然  $\varphi$  将  $V$  的基变为基.

反之, **证法一**: 若  $e_1, e_2, \dots, e_n$  和  $f_1, f_2, \dots, f_n$  是  $V$  的两组基, 使得  $\varphi(e_i) = f_i (1 \leq i \leq n)$ , 则对任意  $\alpha \in V, \alpha = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ , 有  $\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \alpha$ , 即  $\varphi$  是满映射, 从而是自同构. (我们也可以证明  $\varphi$  是单映射, 从而是自同构.)

**证法二**: 若  $e_1, e_2, \dots, e_n$  和  $f_1, f_2, \dots, f_n$  是  $V$  的两组基, 使得  $\varphi(e_i) = f_i (1 \leq i \leq n)$ . 设从基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到基  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵为  $P$ , 则  $\varphi$  在基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  下的表示矩阵就是  $P$ , 这是一个可逆矩阵, 从而  $\varphi$  是可逆变换.  $\square$

## 命题 4.8

设  $U_1, U_2$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间, 假设它们维数相同. 求证: 存在  $V$  上的可逆线性变换  $\varphi$ , 使得  $U_2 = \varphi(U_1)$ .

**证明** 取  $U_1$  的一组基  $e_1, \dots, e_m$ , 并扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ ; 取  $U_2$  的一组基  $f_1, \dots, f_m$ , 并扩张为  $V$  的一组基  $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ . 定义  $\varphi$  为  $V$  上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\varphi(e_i) = f_i (1 \leq i \leq n)$ , 则由命题 4.7 可知,  $\varphi$  是可逆线性变换, 再由定义容易验证  $\varphi(U_1) = U_2$  成立.  $\square$

**例题 4.3** 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 若对  $V$  中任一向量  $\alpha$ , 总存在正整数  $m$  ( $m$  可能和  $\alpha$  有关), 使得  $\varphi^m(\alpha) = 0$ . 求证:  $I_V - \varphi$  是自同构.

**证明** **证法一**: 首先证明线性变换  $\varphi$  是幂零的. 设  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是线性空间  $V$  的一组基. 对每个  $e_i$ , 都有  $m_i$ , 使得  $\varphi^{m_i}(e_i) = 0$ , 令  $m$  为诸  $m_i$  中最大者. 对  $V$  中任一向量  $v$ , 设  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ , 则有

$$\varphi^m(v) = a_1 \varphi^m(e_1) + a_2 \varphi^m(e_2) + \dots + a_n \varphi^m(e_n) = 0.$$

因此  $\varphi^m = 0$ .

注意到下列等式:

$$(I_V - \varphi)(I_V + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{m-1}) = I_V - \varphi^m = I_V.$$

由此即知  $I_V - \varphi$  是自同构.

**证法二**: 只要证明  $I_V - \varphi$  是单映射即可. 任取  $\alpha \in \text{Ker}(I_V - \varphi)$ , 即  $(I_V - \varphi)(\alpha) = 0$ , 则  $\varphi(\alpha) = \alpha$ . 设  $m$  为正整数, 使得  $\varphi^m(\alpha) = 0$ , 则  $0 = \varphi^m(\alpha) = \varphi^{m-1}(\alpha) = \dots = \varphi(\alpha) = \alpha$ , 故  $\text{Ker}(I_V - \varphi) = 0$ , 即  $I_V - \varphi$  是单映射.  $\square$

**例题 4.4** 设  $V = M_n(\mathbb{F})$  是  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵全体组成的线性空间,  $A, B$  是两个  $n$  阶矩阵, 定义  $V$  上的变换:  $\varphi(X) = AXB$ . 求证:  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换,  $\varphi$  是可逆变换的充要条件是  $A$  和  $B$  都是可逆矩阵.

**注** 用命题 4.9 的结论来看这个例题, 就能发现  $D$  之所以不是可逆变换, 是因为它的右逆变换除了  $S$  之外, 还有无穷多个.

**证明** 容易验证  $\varphi$  是线性变换. 若  $A, B$  都是可逆矩阵, 则  $\psi(X) = A^{-1}XB^{-1}$  是  $\varphi$  的逆线性变换. 下面用两种方法来证明必要性.

**证法一**: 若  $A$  是不可逆矩阵, 则我们可证明  $\varphi$  不是单映射, 即存在  $X \neq O$ , 使得  $\varphi(X) = AXB = O$ , 从而  $\varphi$  不是可逆变换. 事实上, 若  $A$  的秩等于  $r < n$ , 则存在可逆矩阵  $P$  和  $Q$ , 使得  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ . 令  $C = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$ , 则  $PAQC = O$ , 而  $P$  是可逆矩阵, 故  $AQC = O$ , 再令  $X = QC$  即可. 同理, 若  $B$  的秩小于  $n$ , 也可以证明  $\varphi$  不是可逆变换.

**证法二**: 若  $A$  是不可逆矩阵, 则对任意的  $n$  阶矩阵  $X$ ,  $\varphi(X) = AXB$  总是不可逆矩阵 (行列式一定为零). 因此  $\varphi$  不可能是映上的 (可逆矩阵不在值域里但是在像空间中). 同理, 若  $B$  是不可逆矩阵,  $\varphi$  也不是映上的.  $\square$

**例题 4.5** 设  $V$  是实系数多项式全体构成的实线性空间, 定义  $V$  上的变换  $D, S$  如下:

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x), \quad S(f(x)) = \int_0^x f(t) dt.$$


证明:  $D, S$  均为  $V$  上的线性变换且  $DS = I_V$ , 但  $SD \neq I_V$ .

**证明** 简单验证即得结论. 由  $DS = I_V$  可知,  $S$  是单线性映射,  $D$  是满线性映射. 又容易看出  $S$  不是满映射 (值域不包含常数),  $D$  不是单映射, 从而它们都不是自同构.  $\square$

#### 命题 4.9

设  $V$  是  $\mathbb{K}$  上的无限维线性空间,  $\varphi, \psi$  是  $V$  上的线性变换.

- (1) 证明:  $\varphi$  和  $\psi$  都是可逆变换的充要条件是  $\varphi\psi$  和  $\psi\varphi$  都是可逆变换;
- (2) 若  $\psi\varphi = I_V$ , 则称  $\psi$  是  $\varphi$  的左逆变换,  $\varphi$  是  $\psi$  的右逆变换. 证明:  $\varphi$  是可逆变换的充要条件是  $\varphi$  有且仅有一个左逆变换 (右逆变换).

 **笔记** 这个命题对有限维空间仍成立.

**证明**

- (1) 若  $\varphi$  和  $\psi$  都是可逆变换, 则  $(\psi^{-1}\varphi^{-1})(\varphi\psi) = (\varphi\psi)(\psi^{-1}\varphi^{-1}) = I_V, (\varphi^{-1}\psi^{-1})(\psi\varphi) = (\psi\varphi)(\varphi^{-1}\psi^{-1}) = I_V$ , 因此  $\varphi\psi$  和  $\psi\varphi$  都是可逆变换. 反之, 若  $\varphi\psi$  和  $\psi\varphi$  都是可逆变换, 则存在  $V$  上的线性变换  $\xi, \eta$ , 使得  $\varphi\psi\xi = \xi\varphi\psi = I_V, \psi\varphi\eta = \eta\psi\varphi = I_V$ . 由  $\varphi\psi\xi = I_V$  及 **命题 4.12(2)** 可得  $\varphi$  是满映射, 由  $\eta\psi\varphi = I_V$  及 **命题 4.12(1)** 可得  $\varphi$  是单映射, 从而  $\varphi$  是可逆变换. 同理可证  $\psi$  也是可逆变换.
- (2) 若  $\varphi$  是可逆变换, 任取  $\varphi$  的一个左逆变换  $\psi$ , 则

$$\psi = \psi I_V = \psi\varphi\varphi^{-1} = I_V\varphi^{-1} = \varphi^{-1},$$

即  $\varphi$  的任一左逆变换都是逆变换  $\varphi^{-1}$ . 由逆变换的唯一性可知,  $\varphi$  有且仅有一个左逆变换. 反之, 若  $\varphi$  有且仅有一个左逆变换  $\psi$ , 则  $\psi\varphi = I_V$ , 且有

$$(\psi + \varphi\psi - I_V)\varphi = \psi\varphi + \varphi\psi\varphi - \varphi = I_V + \varphi - \varphi = I_V,$$

即  $\psi + \varphi\psi - I_V$  也是  $\varphi$  的左逆变换, 从而  $\psi + \varphi\psi - I_V = \psi$ , 即  $\varphi\psi = I_V$ . 因此  $\psi$  也是  $\varphi$  的右逆变换, 从而  $\varphi$  是可逆变换. 同理可证关于右逆变换的结论.  $\square$

**例题 4.6** 试构造无限维线性空间  $V$  以及  $V$  上的线性变换  $\varphi, \psi$ , 使得  $\varphi\psi - \psi\varphi = I_V$ .

**解** 设  $V$  是实系数多项式全体构成的实线性空间, 线性变换  $\varphi, \psi$  定义为: 对任一  $f(x) \in V, \varphi(f(x)) = f'(x), \psi(f(x)) = xf(x)$ . 容易验证  $\varphi\psi - \psi\varphi = I_V$  成立.

**注** 事实上, 满足上述性质的线性变换  $\varphi, \psi$  绝不可能存在于有限维线性空间  $V$  上. 若存在, 取  $V$  的一组基并设  $\varphi, \psi$  的表示矩阵为  $A, B$ , 则有  $AB - BA = I$  成立. 上式两边同时取迹, 可得

$$0 = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I) = \dim V,$$

导出矛盾.

## 4.4 线性映射与矩阵

线性映射与矩阵的关系是这一章的核心. 线性映射是一个几何概念, 矩阵是一个代数概念, 它们之间的关系需要掌握以下几点:

- (1) 记数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维向量空间  $V$  到  $m$  维向量空间  $U$  的线性映射全体为  $\mathcal{L}(V, U)$ ,  $\mathbb{F}$  上  $m \times n$  矩阵全体为  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . 各自取定  $V$  和  $U$  的一组基, 设  $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$  在给定基下的表示矩阵为  $A$ , 则  $\varphi \mapsto A$  定义了从  $\mathcal{L}(V, U)$  到  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$  的一一对应, 这个对应还是一个线性同构. 若  $m = n$ , 则在这个对应下, 线性同构 (可逆线性映射) 对应于可逆矩阵. 特别地, 若  $V = U$ , 上述对应还定义了一个代数同构, 即除了保持加法与数乘外, 还保持乘法. 因此, 两个向量空间之间线性映射的运算完全可以归结为矩阵的运算.
- (2) 设线性映射  $\varphi$  在给定基下的表示矩阵为  $A$ , 则  $\text{Ker}\varphi$  和齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解空间同构,  $\text{Im}\varphi$  和  $A$  的全体列向量张成的向量空间同构. 因此  $\dim \text{Im}\varphi = r(\varphi) = r(A), \dim \text{Ker}\varphi = n - r(\varphi) = n - r(A)$ .

这两点由 **定理 4.5** 的结论即得.



## 定理 4.5

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  到  $m$  维线性空间  $U$  的线性映射. 令  $\mathbb{F}^n$  和  $\mathbb{F}^m$  分别是  $\mathbb{F}$  上  $n$  维和  $m$  维列向量空间. 又设  $e_1, e_2, \dots, e_n$  和  $f_1, f_2, \dots, f_m$  分别是  $V$  和  $U$  的基,  $\varphi$  在给定基下的表示矩阵为  $A$ . 记  $\eta_1: V \rightarrow \mathbb{F}^n$  为  $V$  中向量映射到它在基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  下的坐标向量的线性同构,  $\eta_2: U \rightarrow \mathbb{F}^m$  为  $U$  中向量映射到它在基  $f_1, f_2, \dots, f_m$  下的坐标向量的线性同构,  $A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  为矩阵乘法诱导的线性映射, 即  $A(\alpha) = A\alpha$ . 求证:  $\eta_2\varphi = A\eta_1$ , 即下列图交换, 并且  $\eta_1: \text{Ker}\varphi \rightarrow \text{Ker}A$ ,  $\eta_2: \text{Im}\varphi \rightarrow \text{Im}A$  都是线性同构.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

证明

□

## 命题 4.10

设  $\varphi$  是线性空间  $V$  到  $U$  的线性映射,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  是  $V$  的两组基,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵为  $P$ .  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  和  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  是  $U$  的两组基,  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  到  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  的过渡矩阵为  $Q$ . 又设  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和基  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  下的表示矩阵为  $A$ , 在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  和基  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  下的表示矩阵为  $B$ . 求证:  $B = Q^{-1}AP$ .

特别地, 若  $\varphi$  是线性空间  $V$  上的线性变换,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  和  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  是  $V$  的两组基,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵为  $P$ , 又设  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵为  $A$ , 则  $\varphi$  在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  下的表示矩阵  $B = P^{-1}AP$ .

▲

**证明** 任取  $v \in V$ , 设它在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的坐标向量为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 则它在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  下的坐标向量为  $P^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ .  $\varphi(v)$  在基  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  下的坐标向量为  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , 在基  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  下的坐标向量为  $B P^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ . 由于从  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  到  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  的过渡矩阵为  $Q$ , 故

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n)' = Q B P^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)'.$$

因为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$  是任意的, 故  $A = Q B P^{-1}$ , 即  $B = Q^{-1}AP$ .

□

## 命题 4.11

设  $\varphi$  是有限维线性空间  $V$  到  $U$  的线性映射, 求证: 必存在  $V$  和  $U$  的两组基, 使线性映射  $\varphi$  在两组基下的表示矩阵为  $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .

▲

**证明** 设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组基,  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  是  $U$  的一组基,  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为  $A$ . 由相抵标准型理论可知, 存在  $m$  阶非异阵  $Q$ ,  $n$  阶非异阵  $P$ , 使得  $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ . 设  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  是  $V$  的一组新基, 使得从  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵为  $P$ ; 设  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  是  $U$  的一组新基, 使得从  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  到  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  的过渡矩阵为  $Q$ , 则由命题 4.10 可知,  $\varphi$  在两组新基下的表示矩阵为  $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .

□

**注** 利用这个命题可以得到  $\text{Ker}\varphi = L(f_{r+1}, \dots, f_n)$ ,  $\text{Im}\varphi = L(h_1, \dots, h_r)$ , 由此即得线性映射的维数公式.

## 命题 4.12 (线性映射维数公式)

设  $V, U$  是数域  $\mathbb{F}$  上的有限维线性空间,  $\varphi: V \rightarrow U$  是线性映射, 求证:

$$\dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi = \dim V.$$

▲

**证明 证法一:** 设  $\dim V = n, \dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ , 我们只要证明  $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$  即可. 取  $\operatorname{Ker} \varphi$  的一组基  $e_1, \dots, e_k$ , 并将其扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ . 任取  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k + c_{k+1} e_{k+1} + \dots + c_n e_n$ , 则  $\varphi(\alpha) = c_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + c_n \varphi(e_n)$ , 即  $\operatorname{Im} \varphi$  中任一向量都是  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  的线性组合. 下证  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  线性无关. 设  $\lambda_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0$ , 则  $\varphi(\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ , 即  $\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi$ , 故可设  $\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ , 再由  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  线性无关可知  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ . 因此  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  是  $\operatorname{Im} \varphi$  的一组基, 从而  $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$ , 结论得证.

**证法二 (从商空间的角度):** 设由  $\varphi$  诱导的线性映射  $\bar{\varphi}: V/\operatorname{Ker} \varphi \rightarrow \operatorname{Im} \varphi, \bar{\varphi}(v + \operatorname{Ker} \varphi) = \varphi(v)$ . 先证是  $\bar{\varphi}$  线性同构的.

首先,  $\bar{\varphi}$  的定义不依赖于  $\operatorname{Ker} \varphi$ -陪集代表元的选取. 事实上, 若  $v_1 + \operatorname{Ker} \varphi = v_2 + \operatorname{Ker} \varphi$ , 即  $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$ , 则  $0 = \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$ , 即  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ . 其次, 容易验证  $\bar{\varphi}$  是一个线性映射. 再次, 由  $\bar{\varphi}$  的定义不难看出它是满射. 最后, 由  $\bar{\varphi}$  的定义可知  $\operatorname{Ker} \bar{\varphi} = \{0 + \operatorname{Ker} \varphi\}$  是商空间  $V/\operatorname{Ker} \varphi$  的零子空间, 故为单射, 从而  $\bar{\varphi}: V/\operatorname{Ker} \varphi \rightarrow \operatorname{Im} \varphi$  是线性同构. 由商空间的维数公式可得

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim(V/\operatorname{Ker} \varphi) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi,$$

由此即得线性映射的维数公式. □

#### 推论 4.4

设  $\varphi: V \rightarrow U$  为线性映射,  $\operatorname{Ker} \varphi$  的一组基为  $e_{r+1}, \dots, e_n$ , 并将其扩张为  $V$  的一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . 则  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$  一定是  $\operatorname{Im} \varphi$  的一组基. ♥

**证明** 由命题 4.12 的证法一立得. □

#### 命题 4.13

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  到  $m$  维线性空间  $U$  的线性映射,  $\varphi$  在给定基下的表示矩阵为  $A_{m \times n}$ . 求证:  $\varphi$  是满射的充要条件是  $r(A) = m$  ( $A$  行满秩),  $\varphi$  是单射的充要条件是  $r(A) = n$  ( $A$  列满秩). ♠



**笔记**  $\dim \operatorname{Im} \varphi = r(A)$  和  $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r(A)$  的原因见线性映射与矩阵基本结论 (2).

**证明** 注意到  $\dim \operatorname{Im} \varphi = r(A)$ , 并且  $\varphi$  是满射的充要条件是  $\operatorname{Im} \varphi = U$ , 这也等价于  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim U = m$ , 故第一个结论成立.

注意到  $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r(A)$ , 并且  $\varphi$  是单射的充要条件是  $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ , 这也等价于  $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$ , 故第二个结论成立. □

#### 命题 4.14

设  $\varphi: V \rightarrow U$  为线性映射且  $\varphi$  的秩为  $r$ , 证明: 存在  $r$  个秩为 1 的线性映射  $\varphi_i: V \rightarrow U (1 \leq i \leq r)$ , 使得  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_r$ . ♠

**证明** 取定  $V$  和  $U$  的两组基, 设  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为  $A$ , 则  $r(A) = r(\varphi) = r$ . 由矩阵的秩 1 分解可知, 存在  $r$  个秩为 1 的矩阵  $A_i (1 \leq i \leq r)$ , 使得  $A = A_1 + \dots + A_r$ . 由于线性映射和表示矩阵之间一一对应, 故存在线性映射  $\varphi_i: V \rightarrow U (1 \leq i \leq r)$ , 使得  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_r$ , 且  $r(\varphi_i) = r(A_i) = 1$ . □

#### 命题 4.15

设  $\varphi$  是线性空间  $V$  上的线性变换, 若它在  $V$  的任一组基下的表示矩阵都相同, 求证:  $\varphi$  是纯量变换, 即存在常数  $k$ , 使得  $\varphi(\alpha) = k\alpha$  对一切  $\alpha \in V$  都成立. ♠

**证明** 取定  $V$  的一组基, 设  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是  $A$ . 由已知条件可知, 对任意一个同阶可逆矩阵  $P, A = P^{-1}AP$ , 即  $PA = AP$ . 因此矩阵  $A$  和任意一个可逆矩阵乘法可交换, 于是由命题 2.8 可知  $A = kI_n$ , 由此即知  $\varphi$  是纯量变换. □



## 4.4.1 将矩阵问题转化为线性映射问题

我们将线性映射的问题转化为矩阵问题来处理. 反之, 我们也可将矩阵问题转化为线性映射 (线性变换) 问题来处理. 一般的处理方式如下:

设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m \times n$  矩阵, 定义列向量空间  $\mathbb{F}^n$  到  $\mathbb{F}^m$  的线性映射:  $\varphi(\alpha) = A\alpha$ , 容易验证在  $\mathbb{F}^n$  和  $\mathbb{F}^m$  的标准单位列向量构成的基下,  $\varphi$  的表示矩阵就是  $A$ . 同理, 若  $A$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 定义  $\mathbb{F}^n$  上的线性变换:  $\varphi(\alpha) = A\alpha$ , 容易验证在  $\mathbb{F}^n$  的标准单位列向量构成的基下,  $\varphi$  的表示矩阵就是  $A$ .

因此, 我们有时就把这个线性映射 (线性变换) 写为  $A$ . 上述把代数问题转化成几何问题的语言表述, 在后面的章节中一直会用到. 某些矩阵问题采用这种方式转化为线性映射 (线性变换) 问题后, 往往变得比较容易解决或者可以充分利用几何直观去得到解题思路.

**例题 4.7** 设  $A, B$  都是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m \times n$  矩阵, 求证: 方程组  $Ax = 0, Bx = 0$  同解的充要条件是存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $B = PA$ .

**证明** 因为  $P$  是可逆矩阵, 充分性是显然的. 现通过两种方法来证明必要性.

**证法一 (代数方法):** 由条件可得方程组  $Ax = 0, Bx = 0, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$  都同解, 从而有

$$r(A) = r(B) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

注意到结论  $B = PA$  就是说  $A, B$  可以通过初等行变换相互转化, 因此在证明的过程中, 对  $A$  或  $B$  实施初等行变换不影响结论的证明. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

分别为  $A, B$  的行分块. 不妨对  $A, B$  都进行行对换, 故可设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是  $A$  的行向量的极大无关组,  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是  $B$  的行向量的极大无关组. 由于  $r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r$ , 故由 **命题 3.10** 可知,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  和  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$

的两组极大无关组. 设  $\beta_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} \alpha_j (1 \leq i \leq r)$ , 则容易验证  $r$  阶方阵  $C = (c_{ij})$  是非异阵. 设  $\beta_i - \alpha_i =$

$\sum_{j=1}^r d_{ij} \alpha_j (r+1 \leq i \leq m), D = (d_{ij})$  是  $(m-r) \times r$  矩阵, 则容易验证  $P = \begin{pmatrix} C & O \\ D & I_{m-r} \end{pmatrix}$  是  $m$  阶非异阵, 并且满足  $B = PA$ .

**证法二 (几何方法):** 将问题转化成几何的语言即为: 设  $V$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维线性空间,  $U$  是  $\mathbb{F}$  上的  $m$  维线性空间,  $\varphi, \psi: V \rightarrow U$  是两个线性映射. 求证: 若  $\text{Ker} \varphi = \text{Ker} \psi$ , 则存在  $U$  上的自同构  $\sigma$ , 使得  $\psi = \sigma \varphi$ .


设  $r(\varphi) = r$ , 则  $\dim \text{Ker} \varphi = \dim \text{Ker} \psi = n - r$ . 取  $\text{Ker} \varphi = \text{Ker} \psi$  的一组基  $e_{r+1}, \dots, e_n$ , 并将其扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ . 根据 **推论 4.4** 可知,  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$  是  $\text{Im} \varphi$  的一组基, 故可将其扩张为  $U$  的一组基  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r), f_{r+1}, \dots, f_m$ . 同理可知,  $\psi(e_1), \dots, \psi(e_r)$  是  $\text{Im} \psi$  的一组基, 故可将其扩张为  $U$  的一组基  $\psi(e_1), \dots, \psi(e_r), g_{r+1}, \dots, g_m$ . 定义  $U$  上的线性变换  $\sigma$  如下:

$$\sigma(\varphi(e_i)) = \psi(e_i), 1 \leq i \leq r; \sigma(f_j) = g_j, r+1 \leq j \leq m.$$

因为  $\sigma$  把  $U$  的一组基映射为  $U$  的另一组基, 故  $\sigma$  是  $U$  的自同构. 又对  $r+1 \leq j \leq n, \sigma(\varphi(e_j)) = 0 = \psi(e_j)$ , 故  $\sigma \varphi = \psi$  成立.  $\square$

**命题 4.16**

若数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶方阵  $A$  和  $B$  相似, 求证: 它们可以看成是某个线性空间上同一个线性变换在不同基下的表示矩阵.

 **笔记** 由下面的证明可知这个线性变换  $\varphi$  就是由矩阵  $A$  的乘法诱导的线性变换. 两组不同的基就是标准基与可逆矩阵  $P$  的列向量.

**证明** 令  $V = \mathbb{F}^n$  是  $n$  维列向量空间,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是由  $n$  维标准单位列向量构成的基,  $\varphi$  是由矩阵  $A$  的乘法诱导的线性变换, 容易验证  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵就是  $A$ . 已知  $A$  和  $B$  相似, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $B = P^{-1}AP$ . 令  $P = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  为其列分块, 由于  $P$  可逆, 故  $f_1, f_2, \dots, f_n$  线性无关, 从而是  $V$  的一组基. 注意到从基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵就是  $P$ , 因此线性变换  $\varphi$  在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  下的表示矩阵为  $P^{-1}AP = B$ .  $\square$

**例题 4.8** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵全体构成的线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换:  $\varphi(A) = A'$ . 证明: 存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是一个对角矩阵且主对角元素全是 1 或  $-1$ , 并求出 1 和  $-1$  的个数.

**证明** 设  $V_1$  是由  $n$  阶对称矩阵组成的子空间,  $V_2$  是由反对称矩阵组成的子空间, 则由命题 3.18 可得

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

取  $V_1$  的一组基和  $V_2$  的一组基拼成  $V$  的一组基, 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是对角矩阵且主对角元素或为 1 或为  $-1$ . 因为  $\dim V_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $\dim V_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ , 故 1 的个数为  $\frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $-1$  的个数为  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .  $\square$

**例题 4.9** 设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi, \psi$  是  $V$  上的线性变换且  $\varphi^2 = 0, \psi^2 = 0, \varphi\psi + \psi\varphi = I, I$  是  $V$  上的恒等变换. 求证:

(1)  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$ ;

(2) 若  $V$  是二维空间, 则存在  $V$  的基  $e_1, e_2$ , 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(3)  $V$  必是偶数维空间且若  $V$  是  $2k$  维空间, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵分别为下列分块对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & O & \cdots & O \\ O & B & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & B \end{pmatrix},$$

其中主对角线上分别有  $k$  个  $A$  和  $k$  个  $B$ .

**证明**

(1) 任取  $\alpha \in V$ , 则由  $I = \varphi\psi + \psi\varphi$  得到  $\alpha = \varphi\psi(\alpha) + \psi\varphi(\alpha)$ . 注意到  $\varphi\psi(\alpha) \in \text{Ker}\varphi, \psi\varphi(\alpha) \in \text{Ker}\psi$ , 因此  $V = \text{Ker}\varphi + \text{Ker}\psi$ . 又若  $\beta \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi$ , 则  $\beta = \varphi\psi(\beta) + \psi\varphi(\beta) = 0$ , 即  $\text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi = 0$ . 于是  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$ .

(2) 取  $0 \neq e_1 \in \text{Ker}\psi, e_2 = \varphi(e_1)$ , 则  $\varphi(e_2) = \varphi^2(e_1) = 0$ , 即  $e_2 \in \text{Ker}\varphi$ . 又若  $e_2 = 0$ , 则  $e_1 \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi = 0$ , 和假设矛盾, 于是  $e_2 \neq 0$ . 因此  $e_1, e_2$  组成  $V$  的一组基, 不难验证在这组基下,  $\varphi, \psi$  的表示矩阵符合要求 ( $\psi(e_2) = \psi(\varphi(e_1)) = \psi\varphi(e_1) = I(e_1) - \varphi\psi(e_1) = e_1$ ).

(3) 设  $\dim \text{Ker}\psi = k$ , 并取  $\text{Ker}\psi$  的一组基  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . 令  $e_{k+1} = \varphi(e_1), e_{k+2} = \varphi(e_2), \dots, e_{2k} = \varphi(e_k)$ , 则由  $\varphi^2 = 0$  可得  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  都属于  $\text{Ker}\varphi$ . 我们先证明向量组  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  是线性无关的. 设有

$$c_1 e_{k+1} + c_2 e_{k+2} + \cdots + c_k e_{2k} = 0,$$

两边作用  $\psi$ , 可得

$$c_1 \psi(e_{k+1}) + c_2 \psi(e_{k+2}) + \cdots + c_k \psi(e_{2k}) = 0.$$

注意到  $e_1 = \varphi\psi(e_1) + \psi\varphi(e_1) = \psi(e_{k+1})$ , 同理  $e_2 = \psi(e_{k+2}), \dots, e_k = \psi(e_{2k})$ . 因此上式就是

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_k e_k = 0.$$

而  $e_1, e_2, \dots, e_k$  线性无关, 故  $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ , 即向量组  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  线性无关. 特别地, 我们有  $\dim \text{Ker}\varphi \geq k = \dim \text{Ker}\psi$ . 由于  $\varphi, \psi$  的地位是对称的, 故同理可证  $\dim \text{Ker}\psi \geq \dim \text{Ker}\varphi$ , 从而  $\dim \text{Ker}\varphi = \dim \text{Ker}\psi = k$ , 并且  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  是  $\text{Ker}\varphi$  的一组基. 因为  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$ , 故  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k}$

组成  $V$  的一组基. 现将基向量排列如下:

$$e_1, e_{k+1}, e_2, e_{k+2}, \dots, e_k, e_{2k}.$$

不难验证, 在这组基下  $\varphi, \psi$  的表示矩阵即为所求. □

## 4.5 像空间和核空间

### 命题 4.17

设  $\varphi$  是向量空间  $V$  上的线性变换, 则

$$\begin{aligned} V &\supseteq \operatorname{Im} \varphi \supseteq \operatorname{Im} \varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} \varphi^n \supseteq \operatorname{Im} \varphi^{n+1} \supseteq \cdots, \\ \operatorname{Ker} \varphi &\subseteq \operatorname{Ker} \varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^n \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq V. \end{aligned}$$

**证明** 由像空间和核空间的定义易证. □

**例 4.10** 设线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

求  $\varphi$  的核空间与像空间 (用基的线性组合来表示).

**证明** 像空间通过坐标向量同构于  $A$  的列向量生成的子空间, 通过计算可得  $A$  的秩等于 2, 且  $A$  的第一、第二列向量线性无关, 于是  $\operatorname{Im} \varphi$  的基的坐标向量为  $(1, -1, 1, 2)'$ ,  $(0, 2, 2, -2)'$ , 从而  $\operatorname{Im} \varphi = k_1(e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4) + k_2(2e_2 + 2e_3 - 2e_4)$ . 核空间通过坐标向量同构于齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解空间, 通过计算可得该方程组的基础解系为  $(-4, -3, 2, 0)'$ ,  $(-1, -2, 0, 1)'$ , 此即  $\operatorname{Ker} \varphi$  的基的坐标向量, 于是  $\operatorname{Ker} \varphi = k_1(-4e_1 - 3e_2 + 2e_3) + k_2(-e_1 - 2e_2 + e_4)$ . □

### 命题 4.18

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  是  $V$  上的非零线性变换. 求证: 存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\varphi_i(\alpha) \neq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

**证明** 因为  $\varphi_i \neq 0$ , 所以  $\operatorname{Ker} \varphi_i$  是  $V$  的真子空间. 由命题 3.23 可知, 有限个真子空间  $\operatorname{Ker} \varphi_i$  不能覆盖全空间  $V$ , 故必存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\alpha$  不属于任意一个  $\operatorname{Ker} \varphi_i$ , 从而结论得证. □

### 命题 4.19

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  是  $V$  上互不相同的线性变换. 求证: 存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \dots, \varphi_k(\alpha)$  互不相同.

**证明** 令  $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$  ( $1 \leq i < j \leq k$ ), 则  $\varphi_{ij}$  是  $V$  上的非零线性变换. 由命题 4.18 可知, 存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\varphi_{ij}(\alpha) \neq 0$ , 即  $\varphi_i(\alpha) \neq \varphi_j(\alpha)$  ( $1 \leq i < j \leq k$ ), 从而结论得证. □

### 命题 4.20

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 求证:  $r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$ .

**证明** 证法一 (代数方法): 由秩的不等式可得

$$n = r(I_n) \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \cdots \geq r(A^n) \geq r(A^{n+1}) \geq 0.$$

上述  $n+2$  个整数都在  $[0, n]$  之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $r(A^m) = r(A^{m+1})$ . 对任意的

$k \geq m$ , 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$r(A^{k+1}) = r(A^{k-m}A^mA) \geq r(A^{k-m}A^m) + r(A^mA) - r(A^m) = r(A^k),$$

又  $r(A^{k+1}) \leq r(A^k)$ , 故  $r(A^{k+1}) = r(A^k)$  对任意的  $k \geq m$  成立, 结论得证.

**证法二 (几何方法):** 令  $\varphi$  为在  $n$  维列向量空间上由矩阵  $A$  乘法诱导的线性变换, 则  $\varphi$  在标准基下的表示矩阵就是  $A$ , 并且不难发现对  $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k$  在标准基下的表示矩阵是  $A^k$ . 因此  $r(A^k) = \dim \operatorname{Im} \varphi^k$ , 故原命题等价于  $\dim \operatorname{Im} \varphi^n = \dim \operatorname{Im} \varphi^{n+1} = \dim \operatorname{Im} \varphi^{n+2} = \dots$ . 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \operatorname{Im} \varphi \supseteq \operatorname{Im} \varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} \varphi^n \supseteq \operatorname{Im} \varphi^{n+1}.$$

上述  $n+2$  个子空间的维数都在  $[0, n]$  之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $\operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ . 现要证明对任意的  $k \geq m, \operatorname{Im} \varphi^k = \operatorname{Im} \varphi^{k+1}$ . 一方面,  $\operatorname{Im} \varphi^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} \varphi^k$  是显然的. 另一方面, 任取  $\alpha \in \operatorname{Im} \varphi^k$ , 则存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \varphi^k(\beta)$ . 由于  $\varphi^m(\beta) \in \operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ , 故存在  $\gamma \in V$ , 使得  $\varphi^m(\beta) = \varphi^{m+1}(\gamma)$ , 从而

$$\alpha = \varphi^k(\beta) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\gamma)) = \varphi^{k+1}(\gamma) \in \operatorname{Im} \varphi^{k+1},$$

故  $\operatorname{Im} \varphi^k = \operatorname{Im} \varphi^{k+1}$  对任意的  $k \geq m$  成立, 取维数后即得结论.  $\square$

#### 推论 4.5

- (1) 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 则一定存在整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $r(A^m) = r(A^{m+1}) = r(A^{m+2}) = \dots$ .
- (2) 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则必存在整数  $m \in [0, n]$ , 使得

$$\dim \operatorname{Im} \varphi^m = \dim \operatorname{Im} \varphi^{m+1} = \dim \operatorname{Im} \varphi^{m+2} = \dots$$

#### 证明

- (1) **证法一 (代数方法):** 由秩的不等式可得

$$n = r(I_n) \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \dots \geq r(A^n) \geq r(A^{n+1}) \geq 0.$$

上述  $n+2$  个整数都在  $[0, n]$  之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $r(A^m) = r(A^{m+1})$ . 对任意的  $k \geq m$ , 由矩阵秩的 Frobenius 不等式可得

$$r(A^{k+1}) = r(A^{k-m}A^mA) \geq r(A^{k-m}A^m) + r(A^mA) - r(A^m) = r(A^k),$$

又  $r(A^{k+1}) \leq r(A^k)$ , 故  $r(A^{k+1}) = r(A^k)$  对任意的  $k \geq m$  成立, 结论得证.

**证法二 (几何方法):** 令  $\varphi$  为在  $n$  维列向量空间上由矩阵  $A$  乘法诱导的线性变换, 则  $\varphi$  在标准基下的表示矩阵就是  $A$ , 并且不难发现对  $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k$  在标准基下的表示矩阵是  $A^k$ . 因此  $r(A^k) = \dim \operatorname{Im} \varphi^k$ , 故原命题等价于  $\dim \operatorname{Im} \varphi^n = \dim \operatorname{Im} \varphi^{n+1} = \dim \operatorname{Im} \varphi^{n+2} = \dots$ . 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \operatorname{Im} \varphi \supseteq \operatorname{Im} \varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} \varphi^n \supseteq \operatorname{Im} \varphi^{n+1}.$$

上述  $n+2$  个子空间的维数都在  $[0, n]$  之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $\operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ . 现要证明对任意的  $k \geq m, \operatorname{Im} \varphi^k = \operatorname{Im} \varphi^{k+1}$ . 一方面,  $\operatorname{Im} \varphi^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} \varphi^k$  是显然的. 另一方面, 任取  $\alpha \in \operatorname{Im} \varphi^k$ , 则存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \varphi^k(\beta)$ . 由于  $\varphi^m(\beta) \in \operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ , 故存在  $\gamma \in V$ , 使得  $\varphi^m(\beta) = \varphi^{m+1}(\gamma)$ , 从而

$$\alpha = \varphi^k(\beta) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\gamma)) = \varphi^{k+1}(\gamma) \in \operatorname{Im} \varphi^{k+1},$$

故  $\operatorname{Im} \varphi^k = \operatorname{Im} \varphi^{k+1}$  对任意的  $k \geq m$  成立, 取维数后即得结论.

- (2) 注意下列子空间链:

$$V \supseteq \operatorname{Im} \varphi \supseteq \operatorname{Im} \varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} \varphi^n \supseteq \operatorname{Im} \varphi^{n+1}.$$

上述  $n+2$  个子空间的维数都在  $[0, n]$  之间, 故由抽屉原理可知, 存在某个整数  $m \in [0, n]$ , 使得  $\operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ . 现要证明对任意的  $k \geq m, \operatorname{Im} \varphi^k = \operatorname{Im} \varphi^{k+1}$ . 一方面,  $\operatorname{Im} \varphi^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} \varphi^k$  是显然的. 另一方面, 任取  $\alpha \in \operatorname{Im} \varphi^k$ , 则存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \varphi^k(\beta)$ . 由于  $\varphi^m(\beta) \in \operatorname{Im} \varphi^m = \operatorname{Im} \varphi^{m+1}$ , 故存在  $\gamma \in V$ , 使得  $\varphi^m(\beta) = \varphi^{m+1}(\gamma)$ ,

从而

$$\alpha = \varphi^k(\beta) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\gamma)) = \varphi^{k+1}(\gamma) \in \text{Im}\varphi^{k+1},$$

故  $\text{Im}\varphi^k = \text{Im}\varphi^{k+1}$  对任意的  $k \geq m$  成立, 取维数后即得结论.  $\square$

#### 命题 4.21

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 求证: 必存在整数  $m \in [0, n]$ , 使得

$$\text{Im}\varphi^m = \text{Im}\varphi^{m+1} = \text{Im}\varphi^{m+2} = \cdots, \text{Ker}\varphi^m = \text{Ker}\varphi^{m+1} = \text{Ker}\varphi^{m+2} = \cdots, V = \text{Im}\varphi^m \oplus \text{Ker}\varphi^m.$$

**证明** 根据推论 4.5(2) 可知, 存在整数  $m \in [0, n]$ , 使得

$$\text{Im}\varphi^m = \text{Im}\varphi^{m+1} = \text{Im}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

注意到对任意的正整数  $i$ ,  $\text{Ker}\varphi^i \subseteq \text{Ker}\varphi^{i+1}$ . 再由维数公式可知, 对任意的  $i \geq m$ ,  $\dim \text{Ker}\varphi^i = \dim V - \dim \text{Im}\varphi^i = n - \dim \text{Im}\varphi^m$  是一个不依赖于  $i$  的常数, 因此由命题 ?? 可得

$$\text{Ker}\varphi^m = \text{Ker}\varphi^{m+1} = \text{Ker}\varphi^{m+2} = \cdots.$$

若  $\alpha \in \text{Im}\varphi^m \cap \text{Ker}\varphi^m$ , 则  $\alpha = \varphi^m(\beta)$ ,  $\varphi^m(\alpha) = 0$ . 于是  $0 = \varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$ , 即  $\beta \in \text{Ker}\varphi^{2m} = \text{Ker}\varphi^m$ , 从而  $\alpha = \varphi^m(\beta) = 0$ , 这证明了  $\text{Im}\varphi^m \cap \text{Ker}\varphi^m = 0$ . 又对  $V$  中任一向量  $\alpha$ , 因为  $\varphi^m(\alpha) \in \text{Im}\varphi^m = \text{Im}\varphi^{2m}$ , 所以  $\varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$ , 其中  $\beta \in V$ . 我们有分解式

$$\alpha = \varphi^m(\beta) + (\alpha - \varphi^m(\beta)).$$

注意到  $\varphi^m(\alpha - \varphi^m(\beta)) = 0$ , 即  $\alpha - \varphi^m(\beta) \in \text{Ker}\varphi^m$ , 这就证明了  $V = \text{Im}\varphi^m + \text{Ker}\varphi^m$ . 因此

$$V = \text{Im}\varphi^m \oplus \text{Ker}\varphi^m.$$

$\square$

**注** 也可不证明  $\text{Im}\varphi^m \cap \text{Ker}\varphi^m = 0$ , 改由线性映射维数公式  $\dim \text{Im}\varphi^m + \dim \text{Ker}\varphi^m = n$  直接得到  $V = \text{Im}\varphi^m \oplus \text{Ker}\varphi^m$ .

#### 命题 4.22

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 证明以下 9 个结论等价:

- (1)  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Im}\varphi$ ;
- (2)  $V = \text{Ker}\varphi + \text{Im}\varphi$ ;
- (3)  $\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi = 0$ ;
- (4)  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi^2$ , 或等价地,  $\dim \text{Ker}\varphi = \dim \text{Ker}\varphi^2$ ;
- (5)  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi^2 = \text{Ker}\varphi^3 = \cdots$ , 或等价地,  $\dim \text{Ker}\varphi = \dim \text{Ker}\varphi^2 = \dim \text{Ker}\varphi^3 = \cdots$ ;
- (6)  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi^2$ , 或等价地,  $r(\varphi) = r(\varphi^2)$ ;
- (7)  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi^2 = \text{Im}\varphi^3 = \cdots$ , 或等价地,  $r(\varphi) = r(\varphi^2) = r(\varphi^3) = \cdots$ ;
- (8)  $\text{Ker}\varphi$  存在  $\varphi$ -不变补空间, 即存在  $\varphi$ -不变子空间  $U$ , 使得  $V = \text{Ker}\varphi \oplus U$  (实际上,  $U = \text{Im}\varphi$ );
- (9)  $\text{Im}\varphi$  存在  $\varphi$ -不变补空间, 即存在  $\varphi$ -不变子空间  $W$ , 使得  $V = \text{Im}\varphi \oplus W$  (实际上,  $W = \text{Ker}\varphi$ ).

**证明** 由直和的定义可知 (1)  $\Leftrightarrow$  (2) + (3), 于是 (1)  $\Rightarrow$  (2) 和 (1)  $\Rightarrow$  (3) 都是显然的. 根据交空间维数公式和线性映射维数公式可知

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}\varphi + \text{Im}\varphi) &= \dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi - \dim(\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi) \\ &= \dim V - \dim(\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi), \end{aligned}$$

于是 (2)  $\Leftrightarrow$  (3) 成立, 从而前 3 个结论两两等价.

(3)  $\Rightarrow$  (4): 显然  $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\varphi^2$  成立. 任取  $\alpha \in \text{Ker}\varphi^2$ , 则  $\varphi(\alpha) \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi = 0$ , 于是  $\varphi(\alpha) = 0$ , 即  $\alpha \in \text{Ker}\varphi$ , 从而  $\text{Ker}\varphi^2 \subseteq \text{Ker}\varphi$  也成立, 故 (4) 成立.

(4)  $\Rightarrow$  (3): 任取  $\alpha \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi$ , 则存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \varphi(\beta)$ , 于是  $0 = \varphi(\alpha) = \varphi^2(\beta)$ , 即  $\beta \in \text{Ker}\varphi^2 = \text{Ker}\varphi$ ,

从而  $\alpha = \varphi(\beta) = 0$ , (3) 成立.

(5)  $\Rightarrow$  (4) 是显然的, 下证 (4)  $\Rightarrow$  (5): 设  $\text{Ker}\varphi^k = \text{Ker}\varphi^{k+1}$  已对正整数  $k$  成立, 先证  $\text{Ker}\varphi^{k+1} = \text{Ker}\varphi^{k+2}$  也成立, 然后用归纳法即得结论.  $\text{Ker}\varphi^{k+1} \subseteq \text{Ker}\varphi^{k+2}$  是显然的. 任取  $\alpha \in \text{Ker}\varphi^{k+2}$ , 即  $0 = \varphi^{k+2}(\alpha) = \varphi^{k+1}(\varphi(\alpha))$ , 于是  $\varphi(\alpha) \in \text{Ker}\varphi^{k+1} = \text{Ker}\varphi^k$ , 从而  $\varphi^{k+1}(\alpha) = \varphi^k(\varphi(\alpha)) = 0$ , 即  $\alpha \in \text{Ker}\varphi^{k+1}$ , 于是  $\text{Ker}\varphi^{k+2} \subseteq \text{Ker}\varphi^{k+1}$  也成立.

(3)  $\Leftrightarrow$  (6): 考虑  $\varphi$  在不变子空间  $\text{Im}\varphi$  上的限制变换  $\varphi|_{\text{Im}\varphi} : \text{Im}\varphi \rightarrow \text{Im}\varphi$ , 由限制的定义可知它的核等于  $\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi$ , 它的像等于  $\text{Im}\varphi^2$ . 由于有限维线性空间上的线性变换是单射当且仅当它是满射, 当且仅当它是同构, 故 (3)  $\Leftrightarrow$  (6) 成立.

(7)  $\Rightarrow$  (6) 是显然的, 下证 (6)  $\Rightarrow$  (7): 设  $\text{Im}\varphi^k = \text{Im}\varphi^{k+1}$  已对正整数  $k$  成立, 先证  $\text{Im}\varphi^{k+1} = \text{Im}\varphi^{k+2}$  也成立, 然后用归纳法即得结论.  $\text{Im}\varphi^{k+2} \subseteq \text{Im}\varphi^{k+1}$  是显然的. 任取  $\alpha \in \text{Im}\varphi^{k+1}$ , 即存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \varphi^{k+1}(\beta)$ . 由于  $\varphi^k(\beta) \in \text{Im}\varphi^k = \text{Im}\varphi^{k+1}$ , 故存在  $\gamma \in V$ , 使得  $\varphi^k(\beta) = \varphi^{k+1}(\gamma)$ , 于是  $\alpha = \varphi^{k+1}(\beta) = \varphi(\varphi^k(\beta)) = \varphi(\varphi^{k+1}(\gamma)) = \varphi^{k+2}(\gamma) \in \text{Im}\varphi^{k+2}$ , 从而  $\text{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \text{Im}\varphi^{k+2}$  也成立.

(1)  $\Rightarrow$  (8) 是显然的, 下证 (8)  $\Rightarrow$  (1). 我们先证  $\text{Im}\varphi \subseteq U$ : 任取  $\varphi(v) \in \text{Im}\varphi$ , 由直和分解可设  $v = v_1 + u$ , 其中  $v_1 \in \text{Ker}\varphi, u \in U$ , 则由  $U$  的  $\varphi$ -不变性可得  $\varphi(v) = \varphi(v_1) + \varphi(u) = \varphi(u) \in U$ . 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\text{Ker}\varphi \oplus U) = \dim \text{Ker}\varphi + \dim U \geq \dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi = \dim V,$$

从而只能是  $U = \text{Im}\varphi$ , 于是 (1) 成立.

(1)  $\Rightarrow$  (9) 是显然的, 下证 (9)  $\Rightarrow$  (1). 我们先证  $W \subseteq \text{Ker}\varphi$ : 任取  $w \in W$ , 则由  $W$  的  $\varphi$ -不变性可得  $\varphi(w) \in \text{Im}\varphi \cap W = 0$ , 即有  $w \in \text{Ker}\varphi$ . 考虑不等式

$$\dim V = \dim(\text{Im}\varphi \oplus W) = \dim \text{Im}\varphi + \dim W \leq \dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim V,$$

从而只能是  $W = \text{Ker}\varphi$ , 于是 (1) 成立. □

#### 命题 4.23

设  $U, W$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间且  $\dim U + \dim W = \dim V$ . 求证: 存在  $V$  上的线性变换  $\varphi$ , 使得  $\text{Ker}\varphi = U, \text{Im}\varphi = W$ . ▲

**证明** 取  $U$  的一组基  $e_1, \dots, e_m$ , 并将其扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ , 再取  $W$  的一组基  $f_{m+1}, \dots, f_n$ . 定义  $\varphi$  为  $V$  上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\varphi(e_i) = 0 (1 \leq i \leq m), \varphi(e_j) = f_j (m+1 \leq j \leq n)$ . 注意到  $f_{m+1}, \dots, f_n$  是  $W$  的一组基, 故通过简单的验证可得  $\text{Ker}\varphi = U, \text{Im}\varphi = W$ . □

**例题 4.11** 设  $V = M_n(\mathbb{F})$  是  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵全体构成的线性空间,  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$  是迹函数, 即对任意的  $A = (a_{ij}) \in V$ ,

$$\varphi(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

求证:  $\varphi$  是  $V$  到一维空间  $\mathbb{F}$  上的线性映射, 并求  $\text{Ker}\varphi$  的维数及其一组基.

**证明** 容易验证  $\varphi$  是线性映射且是映上的. 注意到  $V$  是  $n^2$  维线性空间, 由线性映射的维数公式可知

$$\dim \text{Ker}\varphi = \dim V - \dim \text{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathbb{F} = n^2 - 1.$$

记  $E_{ij}$  为  $n$  阶基础矩阵, 即第  $(i, j)$  元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵. 容易验证下列  $n^2 - 1$  个矩阵迹为零且线性无关, 因此它们组成了  $\text{Ker}\varphi$  的一组基:

$$E_{ij} (i \neq j), E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, \dots, E_{n-1, n-1} - E_{nn}.$$

□

**例题 4.12** 设  $\varphi$  是有限维线性空间  $V$  到  $U$  的线性映射, 且  $V$  的维数大于  $U$  的维数, 求证:  $\text{Ker}\varphi \neq 0$ .

**证明** 由线性映射的维数公式

$$\dim V = \dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi,$$

以及  $\dim \text{Im}\varphi \leq \dim U < \dim V$  可得  $\dim \text{Ker}\varphi > 0$ , 即  $\text{Ker}\varphi \neq 0$ . □

**例题 4.13** 设  $\varphi$  是有限维线性空间  $V$  到  $U$  的满线性映射, 求证: 必存在  $V$  的子空间  $W$ , 使得  $V = W \oplus \text{Ker}\varphi$ , 且  $\varphi$  在  $W$  上的限制是  $W$  到  $U$  上的线性同构.




**证明 证法一:** 取  $\text{Ker}\varphi$  的一组基  $e_1, \dots, e_k$ , 并将其扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ . 令  $W = L(e_{k+1}, \dots, e_n)$ , 则显然  $V = W \oplus \text{Ker}\varphi$ . 由推论 4.4 可知,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  是  $\text{Im}\varphi = U$  的一组基, 故  $\varphi$  在  $W$  上的限制将  $W$  的一组基  $e_{k+1}, \dots, e_n$  映射为  $U$  的一组基  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ , 从而由命题 4.7 可知  $\varphi|_W$  必为线性同构.

**证法二:** 取  $W$  为  $\text{Ker}\varphi$  在  $V$  中的补空间. 对任意的  $u \in U$ , 由于  $\varphi$  是映上的, 故存在  $v = w + v_1$ , 其中  $w \in W, v_1 \in \text{Ker}\varphi$ , 使得  $u = \varphi(v) = \varphi(w)$ , 于是  $\varphi$  在  $W$  上的限制也是映上的, 故  $\dim U = \dim \text{Im}\varphi|_W$ . 另一方面, 由维数公式可知,  $\dim W = \dim V - \dim \text{Ker}\varphi = \dim \text{Im}\varphi = \dim U$ . 再对  $\varphi$  在  $W$  上的限制用线性映射维数公式可知,  $\dim \text{Ker}\varphi|_W = \dim W - \dim \text{Im}\varphi|_W = \dim U - \dim \text{Im}\varphi|_W = 0$ . 从而它必是单映射, 于是  $\varphi$  在  $W$  上的限制是  $W$  到  $U$  上的线性同构.  $\square$

**例题 4.14** 设  $\varphi$  是有限维线性空间  $V$  到  $V'$  的线性映射,  $U$  是  $V'$  的子空间且  $U \subseteq \text{Im}\varphi$ , 求证:  $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V | \varphi(v) \in U\}$  是  $V$  的子空间, 且

$$\dim U + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \varphi^{-1}(U).$$

 **笔记** 注意对线性映射做限制这个操作.

**证明** 容易验证  $\varphi^{-1}(U)$  是  $V$  的子空间. 将  $\varphi$  限制在  $\varphi^{-1}(U)$  上, 它是到  $U$  上的线性映射. 因为  $0 \in U$ , 故  $\text{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$ . 从而  $\text{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \text{Ker}\varphi \cap \varphi^{-1}(U) = \text{Ker}\varphi$ , 又显然  $\text{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = U$ . 再对  $\varphi$  在  $\varphi^{-1}(U)$  上的限制用线性映射维数公式即得

$$\dim \varphi^{-1}(U) = \dim \text{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} + \dim \text{Ker}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \dim U + \dim \text{Ker}\varphi.$$

$\square$

**注**  $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V | \varphi(v) \in U\}$  称为  $U$  在线性映射  $\varphi$  下的原像集.

#### 命题 4.24

设  $U$  是有限维线性空间  $V$  的子空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 求证:

- (1)  $\dim U - \dim \text{Ker}\varphi \leq \dim \varphi(U) \leq \dim U$ ;
- (2)  $\dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \text{Ker}\varphi$ .

**证明**

- (1) 注意到当  $\varphi$  限制在  $U$  上时,  $\text{Ker}(\varphi|_U) = U \cap \text{Ker}\varphi$ , 故由线性映射的维数公式可得

$$\dim U = \dim(U \cap \text{Ker}\varphi) + \dim \varphi(U) \leq \dim \text{Ker}\varphi + \dim \varphi(U).$$

于是

$$\dim U - \dim \text{Ker}\varphi \leq \dim \varphi(U),$$

而由线性映射维数公式, 可知  $\dim U = \dim \text{Ker}\varphi|_U + \dim \varphi(U)$ . 进而  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$ .

- (2) 设  $\bar{\varphi}$  是线性变换  $\varphi$  在子空间  $\varphi^{-1}(U)$  上的限制, 则  $\text{Im}\bar{\varphi} = U \cap \text{Im}\varphi$ . 因为  $0 \in U$ , 故  $\text{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$ . 从而  $\text{Ker}\bar{\varphi} = \text{Ker}\varphi \cap \varphi^{-1}(U) = \text{Ker}\varphi$ . 由线性映射的维数公式可得

$$\dim \varphi^{-1}(U) = \dim(U \cap \text{Im}\varphi) + \dim \text{Ker}\varphi.$$

显然, 由  $\dim(U \cap \text{Im}\varphi) \leq \dim U$  可推出

$$\dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \text{Ker}\varphi.$$

$\square$

**例题 4.15** 证明: 若  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上两个  $n$  阶方阵, 则

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

**证明** 令  $V$  是  $\mathbb{F}$  上  $n$  维列向量空间, 则将  $A$  和  $B$  看成是  $V$  上由矩阵  $A$  和  $B$  乘法诱导的线性变换. 又令  $U = B(V)$ , 注意到  $A(U) = AB(V)$ , 故  $\dim A(U) = \dim AB(V) = r(AB)$ ,  $\dim \text{Ker}A = n - r(A)$ , 即线性方程组  $Ax = 0$  的解空间维数. 而  $\dim U = \dim B(V) = r(B)$ , 由命题 4.24(1) 的结论, 可得

$$r(A) + r(B) - n = \dim U - \dim \text{Ker}A \leq \dim A(U) = r(AB) \leq \dim U = r(B).$$

又显然有  $\dim A(U) \leq \dim A(V)$ , 故得  $r(AB) \leq r(A)$ . □

## 4.6 不变子空间

**例题 4.16** 设线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  在基  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求证:  $U = L(e_1 + 2e_2, e_3 + e_4, e_1 + e_2)$  和  $W = L(e_2 + e_3 + 2e_4)$  都是  $\varphi$  的不变子空间.

**证明** 要证明由若干个向量生成的子空间是某个线性变换的不变子空间, 通常只需证明这些向量在线性变换的作用下仍在这个子空间中即可. 因此只需证明这些子空间的一组基在线性变换的作用下仍在这个子空间中即可. 注意到  $\varphi(e_1 + 2e_2)$  的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即  $\varphi(e_1 + 2e_2) = e_1 + 2e_2 \in U$ . 同理可计算出

$$\varphi(e_3 + e_4) = (e_1 + 2e_2) + (e_3 + e_4) \in U,$$

$$\varphi(e_1 + e_2) = (e_1 + e_2) + (e_3 + e_4) \in U,$$

$$\varphi(e_2 + e_3 + 2e_4) = e_2 + e_3 + 2e_4 \in W,$$

因此结论成立. □

### 命题 4.25

设  $V_1, V_2$  是  $V$  上线性变换  $\varphi$  的不变子空间, 任取  $V_0 \subset V$ , 求证:  $V_0, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$  也是  $\varphi$  的不变子空间. ▲

**证明**  $V_0$  是  $\varphi$ -不变子空间是显然的.

任取  $v \in V_1 \cap V_2$ , 则由  $v \in V_i$  可得  $\varphi(v) \in V_i (i = 1, 2)$ , 于是  $\varphi(v) \in V_1 \cap V_2$ , 从而  $V_1 \cap V_2$  是  $\varphi$ -不变子空间.

任取  $v \in V_1 + V_2$ , 则  $v = v_1 + v_2$ , 其中  $v_i \in V_i$ , 故  $\varphi(v_i) \in V_i (i = 1, 2)$ , 于是  $\varphi(v) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in V_1 + V_2$ , 从而  $V_1 + V_2$  是  $\varphi$ -不变子空间. □

### 命题 4.26

设  $\varphi$  是  $n (n \geq 2)$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 证明以下  $n+1$  个结论等价:

(1)  $V$  的任一 1 维子空间都是  $\varphi$ -不变子空间;

.....

(r)  $V$  的任一  $r$  维子空间都是  $\varphi$ -不变子空间;

.....

(n-1)  $V$  的任一  $n-1$  维子空间都是  $\varphi$ -不变子空间;

(n)  $V$  本身就是  $\varphi$ -不变子空间;

(n+1)  $\varphi$  是纯量变换. ▲

**证明**  $(n+1) \Rightarrow (n)$  是显然的. 注意到当  $1 \leq i \leq n-2$  时, 任一  $i$  维子空间  $V_0$  都可表示为两个  $i+1$  维子空间  $V_1, V_2$  的交; 而  $V$  的任意  $n-1$  维子空间都是  $V$  的子空间. 于是由命题 4.25 可知:  $(n) \Rightarrow (n-1) \Rightarrow (n-2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (1)$  显然成立, 剩下只要证明  $(1) \Rightarrow (n+1)$  即可. 取  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ , 由 (1) 可知  $L(e_1), L(e_2), \cdots, L(e_n)$  都是  $\varphi$ -不变子空间, 设  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i (1 \leq i \leq n)$ . 只要证明  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$  即可得到  $\varphi$  为纯量变换. 用反证法, 不妨



设  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 则由  $L(e_1 + e_2)$  也是  $\varphi$ -不变子空间可设  $\varphi(e_1 + e_2) = \lambda_0(e_1 + e_2)$ , 于是  $(\lambda_1 - \lambda_0)e_1 + (\lambda_2 - \lambda_0)e_2 = 0$ , 从而由  $e_1, e_2$  线性无关可知  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , 矛盾.  $\square$

**命题 4.27**

设  $\varphi, \psi$  是线性空间  $V$  上的线性变换且  $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 求证:  $\text{Im}\varphi$  及  $\text{Ker}\varphi$  都是  $\psi$  的不变子空间. 同理,  $\text{Im}\psi$  及  $\text{Ker}\psi$  也都是  $\varphi$  的不变子空间.

**笔记** 显然  $\text{Im}\varphi$  及  $\text{Ker}\varphi$  都是  $\varphi$  自身的不变子空间,  $\text{Im}\psi$  及  $\text{Ker}\psi$  也都是  $\psi$  自身的不变子空间.

**证明** 任取  $v \in \text{Im}\varphi$ , 即  $v = \varphi(u)$ , 则  $\psi(v) = \psi\varphi(u) = \varphi\psi(u) \in \text{Im}\varphi$ , 即  $\text{Im}\varphi$  是  $\psi$  的不变子空间.

任取  $v \in \text{Ker}\varphi$ , 即  $\varphi(v) = 0$ , 则  $\varphi\psi(v) = \psi\varphi(v) = 0$ . 因此,  $\psi(v) \in \text{Ker}\varphi$ , 即  $\text{Ker}\varphi$  是  $\psi$  的不变子空间.  $\square$

**命题 4.28**

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $W$  为  $\varphi$ -不变子空间,  $\varphi$  在  $W$  上的限制为  $\varphi|_W$ , 则  $\varphi|_W$  的像集与原像集相同且均为  $W$ , 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(\varphi|_W)^k$  有意义并且  $\varphi^k|_W = (\varphi|_W)^k$ .

**证明** 因为  $W$  为  $\varphi$ -不变子空间, 所以  $\varphi|_W$  的像集与原像集相同且均为  $W$  是显然的. 并且对  $\forall \alpha \in W$ , 有  $\varphi|_W(\alpha) \in W$ . 因此对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $(\varphi|_W)^k(\alpha) \in W$ . 故  $(\varphi|_W)^k$  有意义. 下证  $\varphi^k|_W = (\varphi|_W)^k$ .

对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 显然  $\varphi^k|_W$  和  $(\varphi|_W)^k$  的定义域都是  $W$ . 从而对  $\forall a \in W$ , 有

$$\varphi^k|_W(a) = \varphi^k(a),$$

$$(\varphi|_W)^k(a) = (\varphi|_W)^{k-1}\varphi|_W(a) = (\varphi|_W)^{k-1}\varphi(a) = \cdots = \varphi^k(a).$$

因此  $\varphi^k|_W(a) = (\varphi|_W)^k(a) = \varphi^k(a)$ . 故  $\varphi^k|_W = (\varphi|_W)^k$ .  $\square$

**命题 4.29**

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的自同构,  $W$  为  $\varphi$ -不变子空间,  $\varphi$  在  $W$  上的限制为  $\varphi|_W$ , 则  $\varphi|_W$  的像集与原像集相同且均为  $W$ ,  $\varphi|_W$  是  $W$  上的自同构并且  $(\varphi|_W)^{-1} = \varphi^{-1}|_W$ .

**证明**

**例题 4.17** 设  $A$  为数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶幂零阵,  $B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB = BA$  且  $r(AB) = r(B)$ . 求证:  $B = O$ .

**注** 因为  $\text{Im}B$  是  $A$ -不变子空间, 所以  $A|_{\text{Im}B}(\text{Im}B) \in \text{Im}B$ . 因此  $(A|_{\text{Im}B})^k$  有意义. 对于一般的限制  $W$ ,  $(A|_W)^k$  不一定有意义. 见命题 4.28.

**证明** 将  $A, B$  都看成是  $\mathbb{K}^n$  上 (由矩阵  $A, B$  乘法诱导) 的线性变换, 设  $A^k = O$ , 其中  $k$  为正整数. 由  $AB = BA$  以及命题 4.27 可知  $\text{Im}B$  是  $A$ -不变子空间. 考虑  $A$  在  $\text{Im}B$  上的限制  $A|_{\text{Im}B}$ , 其像空间的维数  $\dim AB(\mathbb{K}^n) = r(AB) = r(B) = \dim \text{Im}B$ , 故  $A|_{\text{Im}B}$  是  $\text{Im}B$  上的满线性变换. 于是由命题 4.28 和满射的复合仍是满射可知  $(A|_{\text{Im}B})^k = A^k|_{\text{Im}B} = O|_{\text{Im}B}$  也是  $\text{Im}B$  上的满线性变换, 从而只能是  $\text{Im}B = O$ , 即  $B = O$ .  $\square$

**命题 4.30**

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的自同构, 若  $W$  是  $\varphi$  的不变子空间, 求证:  $W$  也是  $\varphi^{-1}$  的不变子空间.

**证明** 将  $\varphi$  限制在  $W$  上, 得到  $\varphi: W \rightarrow W$ . 它是  $W$  上的线性变换. 由于  $\varphi$  是单映射, 故它在  $W$  上的限制也是单映射, 从而由推论 4.3 可知,  $\varphi$  在  $W$  上的限制也是满映射, 即它是  $W$  上的自同构, 于是结合命题 4.29 可知  $W = \varphi|_W(W) = \varphi(W)$ , 对其两边同时取  $\varphi^{-1}$  可得  $\varphi^{-1}(W) = W$ . 故结论得证.  $\square$

**注** 如果  $V$  是无限维线性空间, 则这个命题的结论一般并不成立. 例如,  $V = \mathbb{K}[x^{-1}, x]$  是由数域  $\mathbb{K}$  上的 Laurent 多项式  $f(x) = \sum_{i=-m}^n a_i x^i$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 构成的线性空间,  $V$  上的线性变换  $\varphi, \psi$  定义为  $\varphi(f(x)) = xf(x), \psi(f(x)) = x^{-1}f(x)$ . 显然,  $\varphi, \psi$  互为逆映射, 从而都是自同构. 注意到  $W = \mathbb{K}[x]$  是  $V$  的  $\varphi$ -不变子空间, 但  $W$  显然不是  $\varphi^{-1}$ -不变子空

间.

**例 4.18** 设  $V$  是次数小于  $n$  的实系数多项式组成的线性空间,  $D$  是  $V$  上的求导变换. 求证:  $D$  的任一  $k(k \geq 1)$  维不变子空间必是由  $\{1, x, \dots, x^{k-1}\}$  生成的子空间. 特别地, 向量  $1$  包含在  $D$  的任一非零不变子空间中.

**证明** 任取  $D$  的一个  $k(k \geq 1)$  维不变子空间  $V_0$ , 再取出  $V_0$  中次数最高的一个多项式 (不唯一)  $f(x) = a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , 其中  $a_l \neq 0$ . 注意到  $V_0$  是  $D$ -不变子空间, 由  $D^l f(x) = a_l l! \in V_0$  可得  $1 \in V_0$ ; 由  $D^{l-1} f(x) = a_l l! x + a_{l-1} (l-1)! \in V_0$  可得  $x \in V_0$ ;  $\dots$ ; 由  $D f(x) = a_l l x^{l-1} + a_{l-1} (l-1) x^{l-2} + \dots + a_1 \in V_0$  可得  $x^{l-1} \in V_0$ ; 最后由  $f(x) \in V_0$  可得  $x^l \in V_0$ . 因为  $V_0$  中所有多项式的次数都小于等于  $l$ , 所以  $\{1, x, \dots, x^l\}$  构成了  $V_0$  的一组基, 于是  $k = \dim V_0 = l + 1$ , 即  $l = k - 1$ , 从而结论得证.  $\square$

**例 4.19** 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\varphi$  在  $V$  的一组基下的表示矩阵为对角阵且主对角线上的元素互不相同, 求  $\varphi$  的所有不变子空间.

**证明** 设  $\varphi$  在基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  下的表示矩阵为  $\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , 其中  $d_1, d_2, \dots, d_n$  互不相同, 则  $\varphi(e_i) = d_i e_i$ . 对任意的指标集  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ , 容易验证  $U = L(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r})$  是  $\varphi$  的不变子空间. 注意到  $1, 2, \dots, n$  的子集共有  $2^n$  个 (空集对应于零子空间), 故上述形式的  $\varphi$ -不变子空间共有  $2^n$  个. 下面我们证明  $\varphi$  的任一不变子空间都是上述不变子空间之一.

任取  $\varphi$  的非零不变子空间  $U$ , 设指标集

$$I = \{i \in [1, n] \mid \text{存在某个 } \alpha \in U, \text{ 使得 } \alpha = c e_i + \dots, \text{ 其中 } c \neq 0\}.$$

因为  $U \neq 0$ , 故  $I \neq \emptyset$ , 不妨设  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ . 由指标集  $I$  的定义可知,  $U \subseteq L(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r})$ . 下面我们证明  $e_{i_j} \in U (j = 1, 2, \dots, r)$  成立. 不失一般性, 我们只需证明  $e_{i_1} \in U$  即可. 由指标集  $I$  的定义可知, 存在  $\alpha \in U$ , 使得

$$\alpha = c_1 e_{i_1} + c_2 e_{i_2} + \dots + c_k e_{i_k},$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_k$  都是非零常数. 将上式作用  $\varphi^l$ , 可得

$$\varphi^l(\alpha) = c_1 d_{i_1}^l e_{i_1} + c_2 d_{i_2}^l e_{i_2} + \dots + c_k d_{i_k}^l e_{i_k}, l = 1, 2, \dots, k-1.$$

因此, 我们有

$$(\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)) = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \begin{pmatrix} c_1 & c_1 d_{i_1} & \dots & c_1 d_{i_1}^{k-1} \\ c_2 & c_2 d_{i_2} & \dots & c_2 d_{i_2}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_k & c_k d_{i_k} & \dots & c_k d_{i_k}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

上式右边的矩阵记为  $A$ , 由于  $|A| = c_1 c_2 \dots c_k \prod_{1 \leq r < s \leq k} (d_{i_s} - d_{i_r}) \neq 0$ , 故  $A$  为可逆矩阵, 从而

$$(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = (\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)) A^{-1},$$

特别地,  $e_{i_1}$  可以表示为  $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)$  的线性组合. 因为  $U$  是  $\varphi$  的不变子空间, 故  $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)$  都是  $U$  中的向量, 从而  $e_{i_1} \in U$ , 因此  $U = L(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r})$ . 综上所述,  $\varphi$  的不变子空间共有  $2^n$  个.  $\square$

#### 定理 4.6

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  上的线性变换,  $W$  是  $\varphi$  的不变子空间. 若取  $W$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_r\}$ , 再扩张为  $V$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ , 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵具有下列分块上三角矩阵的形状:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{11}$  是一个  $r$  阶矩阵.

#### 定理 4.7

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  上的线性变换,  $V_1, V_2, \dots, V_m$  是  $\varphi$  的不变子空间且  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ . 若

取  $V_i$  的基拼成  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵具有下列分块对角矩阵的形状:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{mm} \end{pmatrix}.$$

#### 命题 4.31

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $U$  是  $r$  维  $\varphi$ -不变子空间. 取  $U$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_r\}$ , 并扩张为  $V$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ . 设  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$  为分块上三角阵, 其中  $A_{11}$  是  $\varphi$  在不变子空间  $U$  上的限制  $\varphi|_U$  在基  $\{e_1, \dots, e_r\}$  下的表示矩阵. 证明:  $\varphi$  诱导的变换  $\bar{\varphi}(v+U) = \varphi(v) + U$  是商空间  $V/U$  上的线性变换, 并且在  $V/U$  的一组基  $\{e_{r+1}+U, \dots, e_n+U\}$  下的表示矩阵为  $A_{22}$ .

**证明** 由  $U$  是  $\varphi$ -不变子空间容易验证  $\bar{\varphi}$  的定义不依赖于  $U$ -陪集代表元的选取, 从而是定义好的变换.  $\bar{\varphi}$  的线性由  $\varphi$  的线性即得. 由  $\varphi$  的表示矩阵为  $A$ , 再结合  $e_1, e_2, \dots, e_r \in U$  及 **U-陪集的性质 (2)** 和 **商空间的加法和数乘的定义** 可得

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(e_{r+1}+U) &= \varphi(e_{r+1})+U = a_{1,r+1}e_1 + \dots + a_{r,r+1}e_r + a_{r+1,r+1}e_{r+1} + \dots + a_{n,r+1}e_n + U \\ &= a_{r+1,r+1}e_{r+1} + \dots + a_{n,r+1}e_n + U = a_{r+1,r+1}(e_{r+1}+U) + \dots + a_{n,r+1}(e_n+U), \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{\varphi}(e_n+U) &= a_{r+1,n}(e_{r+1}+U) + \dots + a_{n,n}(e_n+U), \end{aligned}$$

故  $\bar{\varphi}$  在基  $\{e_{r+1}+U, \dots, e_n+U\}$  下的表示矩阵为  $A_{22}$ . □

## 4.7 幂等变换

### 定义 4.2 (幂等变换)

线性变换  $\varphi$  若满足  $\varphi^2 = \varphi$ , 则称为 **幂等变换**.

### 定义 4.3 (投影变换)


设  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$  为线性空间  $V$  关于子空间  $V_i (1 \leq i \leq m)$  的直和分解, 则  $V$  中任一向量  $v$  可唯一地分解为  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_m$ , 其中  $v_i \in V_i$ . 定义  $\varphi_i: V \rightarrow V, \varphi_i(v) = v_i (1 \leq i \leq m)$ , 容易验证  $\varphi_i$  是  $V$  上的线性变换, 称为  $V$  到  $V_i$  上的 **投影变换**.

### 命题 4.32 (投影变换的性质)

设  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$  为线性空间  $V$  关于子空间  $V_i (1 \leq i \leq m)$  的直和分解,  $\varphi_i$  为  $V$  到  $V_i$  上的投影变换. 投影变换  $\varphi_i$  满足如下性质:

- (1)  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i \varphi_j = 0 (i \neq j), I_V = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m$ ;
- (2)  $\text{Im} \varphi_i = V_i, \text{Ker} \varphi_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j, V = \text{Im} \varphi_i \oplus \text{Ker} \varphi_i$ .
- (3) 投影变换  $\varphi_i$  都是幂等变换;
- (4) 若取  $V_i$  的一组基拼成  $V$  的一组基, 则  $\varphi_i$  在这组基下的表示矩阵为  $\text{diag}\{0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$ , 其中有  $\dim V_i$  个 1;

- (5)  $V = \text{Im}\varphi_1 \oplus \text{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \text{Im}\varphi_m$ ;  
 (6)  $\text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \text{Ker}\varphi_m = 0$ .

 **笔记** 提示: 两个集合相等等价于这两个集合相互包含.

**证明**

- (1) 证明是显然的.  
 (2) 证明是显然的.  
 (3) 由 (1) 易得.  
 (4) 由 (2) 易得.  
 (5) 由 (2) 易知  $V = \text{Im}\varphi_1 \oplus \text{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \text{Im}\varphi_m$ .  
 (6) 任取  $\alpha \in \text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \text{Ker}\varphi_m$ . 由投影变换性质 (2), 可知  $\text{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j$ . 于是对任意整数  $i, j \in [1, m]$

且  $i \neq j$ , 有  $\alpha \in \text{Ker}\varphi_i \cap \text{Ker}\varphi_j = \bigoplus_{k \neq i} V_k \cap \bigoplus_{k \neq j} V_k$ . 从而

$$\alpha = v_1 + \cdots + v_{i-1} + v_{i+1} + \cdots + v_m = u_1 + \cdots + u_{j-1} + u_{j+1} + \cdots + u_m,$$

其中  $v_k, u_k \in V_k$ . 上式经整理可得  $v_j - u_i = \sum_{k \neq i, j} (u_k - v_k) \in \bigoplus_{k \neq i, j} V_k$ . 又  $v_j - u_i \in V_i \oplus V_j$ . 故  $v_j - u_i \in$

$(V_i \oplus V_j) \cap \bigoplus_{k \neq i, j} V_k$ . 而由于  $V = \bigoplus_{k=1}^m V_k$ , 因此  $(V_i \oplus V_j) \cap \bigoplus_{k \neq i, j} V_k = 0$ . 故  $v_j - u_i = 0$ , 从而  $v_j = u_i \in V_i \cap V_j$ . 又因为  $V_i \cap V_j = 0$ , 所以  $V_i \cap V_j = 0$ . 故  $v_j = u_i = 0$ . 再由  $i, j$  的任意性可知,  $v_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m$ . 因此  $\alpha = \sum_{k \neq i} v_k = 0$ .


故  $\text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2 \cap \cdots \cap \text{Ker}\varphi_m = 0$ .

□

#### 命题 4.33

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的幂等变换, 证明:  $V = U \oplus W$ , 其中  $U = \text{Im}\varphi = \text{Ker}(I_V - \varphi), W = \text{Im}(I_V - \varphi) = \text{Ker}\varphi$ , 且  $\varphi$  就是  $V$  到  $U$  上的投影变换.

□

 **笔记** 由上述命题可知  $n$  维线性空间  $V$  上的幂等变换  $\varphi$  也是  $V$  到  $\text{Im}\varphi$  上的投影变换. 于是由命题 4.33 和命题 4.32 可知, 投影变换可以看作幂等变换, 幂等变换也可以看作投影变换. (即幂等变换和投影变换等价)

**证明** 因为  $\varphi^2 = \varphi$ , 故  $\text{Im}\varphi \subseteq \text{Ker}(I - \varphi), \text{Im}(I - \varphi) \subseteq \text{Ker}\varphi$ . 对任意的  $\alpha \in V, \varphi(\alpha) \in \text{Ker}(I - \varphi), (I - \varphi)(\alpha) \in \text{Ker}\varphi$ , 于是  $\alpha = (I - \varphi)(\alpha) + \varphi(\alpha) \in \text{Ker}\varphi + \text{Ker}(I - \varphi)$ , 从而  $V = \text{Ker}\varphi + \text{Ker}(I - \varphi)$ . 任取  $\beta \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}(I - \varphi)$ , 则  $\beta = (I - \varphi)(\beta) + \varphi(\beta) = 0$ , 即  $\text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}(I - \varphi) = 0$ . 因此,  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}(I - \varphi)$ . 特别地, 由维数公式可得  $\dim \text{Im}\varphi = \dim \text{Ker}(I - \varphi), \dim \text{Im}(I - \varphi) = \dim \text{Ker}\varphi$ , 从而  $\text{Im}\varphi = \text{Ker}(I - \varphi), \text{Im}(I - \varphi) = \text{Ker}\varphi$ .

令  $U = \text{Im}\varphi = \text{Ker}(I - \varphi), W = \text{Im}(I - \varphi) = \text{Ker}\varphi$ , 则  $V = U \oplus W$ . 注意到对任意的  $\alpha \in V, \alpha = \varphi(\alpha) + (I - \varphi)(\alpha)$ , 其中  $\varphi(\alpha) \in U, (I - \varphi)(\alpha) \in W$ , 故  $\varphi$  就是  $V$  到  $U$  上的投影变换. □

#### 推论 4.6

对线性空间  $V$  上的幂等变换  $\varphi$ , 总存在  $V$  的一组基 (它由  $\text{Im}\varphi$  的基和  $\text{Ker}\varphi$  的基拼成), 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为下列对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $I_r$  为  $r$  阶单位矩阵,  $r$  等于  $\dim \text{Im}\varphi$ , 即  $\varphi$  的像空间的维数.

□

**证明** 由这个命题 4.33 和投影变换的性质容易证明. □

**命题 4.34**

设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶幂等矩阵, 求证:

- (1) 存在  $n$  阶非异阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $r = r(A)$ ;  
 (2)  $r(A) = \text{tr}(A)$ .

▲

**证明** 将  $A$  看成是  $n$  维列向量空间  $\mathbb{F}^n$  上 (由矩阵  $A$  乘法诱导) 的线性变换, 则它是幂等变换, 因此由推论 4.6 即得 (1).

注意到  $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = r = r(A)$ , 故 (2) 也成立. □

**例题 4.20** 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶幂等矩阵, 且  $A$  和  $B$  的秩相同, 求证: 必存在  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵  $C$ , 使得  $CB = AC$ .


**证明** 由命题 4.34 可知,  $A$  和  $B$  均相似于矩阵  $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 于是  $A$  和  $B$  相似, 即存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $B = C^{-1}AC$ , 即  $CB = AC$ . □

**命题 4.35**

设  $\varphi, \psi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的幂等线性变换, 求证:

- (1)  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\psi$  的充要条件是  $\varphi\psi = \psi, \psi\varphi = \varphi$ ;  
 (2)  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$  的充要条件是  $\varphi\psi = \varphi, \psi\varphi = \psi$ .

▲

 **笔记** 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

**证明** (1) 由  $\psi = \varphi\psi$  可得  $\text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$ . 同理由  $\varphi = \psi\varphi$  可得  $\text{Im}\varphi \subseteq \text{Im}\psi$ . 因此  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\psi$ .

反之, 若  $\text{Im}\varphi = \text{Im}\psi$ , 则对任意的  $\alpha \in V, \psi(\alpha) \in \text{Im}\psi = \text{Im}\varphi$ , 故存在  $\beta \in V$ , 使得  $\psi(\alpha) = \varphi(\beta)$ . 注意到  $\varphi^2 = \varphi$ , 故  $\varphi\psi(\alpha) = \varphi^2(\beta) = \varphi(\beta) = \psi(\alpha)$ , 于是  $\varphi\psi = \psi$ . 同理可证  $\psi\varphi = \varphi$ .

(2) 设  $\varphi\psi = \varphi, \psi\varphi = \psi$ . 对任意的  $\alpha \in \text{Ker}\varphi$ , 即  $\varphi(\alpha) = 0$ , 有  $\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = 0$ , 即  $\alpha \in \text{Ker}\psi$ , 于是  $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$ . 同理可证  $\text{Ker}\psi \subseteq \text{Ker}\varphi$ , 因此  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$ .


反之, 设  $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$ . 对任意的  $\alpha \in V$ , 有  $\psi(\alpha - \psi(\alpha)) = \psi(\alpha) - \psi^2(\alpha) = 0$ , 因此  $\alpha - \psi(\alpha) \in \text{Ker}\psi = \text{Ker}\varphi$ , 从而  $\varphi(\alpha - \psi(\alpha)) = 0$ , 即  $\varphi(\alpha) = \varphi\psi(\alpha)$ , 于是  $\varphi = \varphi\psi$ . 同理可证  $\psi\varphi = \psi$ . □

**命题 4.36**

设  $\varphi, \psi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的幂等线性变换, 求证:

- (1)  $\varphi + \psi$  是幂等变换的充要条件是  $\varphi\psi = \psi\varphi = 0$ ;  
 (2)  $\varphi - \psi$  是幂等变换的充要条件是  $\varphi\psi = \psi\varphi = \psi$ .

▲

 **笔记** 也可由幂等变换等价于投影变换来给出直观的几何证明.

**证明** 充分性容易验证, 下面证明必要性.

(1) 若  $(\varphi + \psi)^2 = \varphi + \psi$ , 则  $\varphi\psi + \psi\varphi = 0$ , 即  $\varphi\psi = -\psi\varphi$ . 将上式两边分别左乘及右乘  $\varphi$ , 可得  $\varphi\psi\varphi = -\varphi\psi = -\psi\varphi$ . 因此  $\varphi\psi = \psi\varphi = 0$ .

(2) 若  $(\varphi - \psi)^2 = \varphi - \psi$ , 则  $\varphi\psi + \psi\varphi = 2\psi$ . 将上式两边分别左乘及右乘  $\varphi$ , 可得  $\varphi\psi\varphi = \varphi\psi = \psi\varphi$ . 因此  $\varphi\psi = \psi\varphi = \psi$ . □

**命题 4.37**

设  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0 \ (i \neq j), \text{Ker}\varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker}\varphi_m = 0.$$

求证:  $V = \text{Im}\varphi_1 \oplus \text{Im}\varphi_2 \oplus \dots \oplus \text{Im}\varphi_m$ .

▲

**证明** 任取  $\alpha \in \text{Im}\varphi_i \cap (\sum_{j \neq i} \text{Im}\varphi_j)$ , 设  $\alpha = \varphi_i(\beta)$ , 其中  $\beta \in V$ , 则  $\varphi_i(\alpha) = \varphi_i^2(\beta) = \varphi_i(\beta) = \alpha$ . 又可设

$$\alpha = \varphi_1(\alpha_1) + \cdots + \varphi_{i-1}(\alpha_{i-1}) + \varphi_{i+1}(\alpha_{i+1}) + \cdots + \varphi_m(\alpha_m),$$

于是

$$\alpha = \varphi_i(\alpha) = \varphi_i(\varphi_1(\alpha_1) + \cdots + \varphi_{i-1}(\alpha_{i-1}) + \varphi_{i+1}(\alpha_{i+1}) + \cdots + \varphi_m(\alpha_m)) = 0.$$

因此  $\text{Im}\varphi_i \cap (\sum_{j \neq i} \text{Im}\varphi_j) = 0$ .

对  $V$  中任一向量  $\alpha$  以及任意的  $i$ , 有

$$\varphi_i(\alpha - (\varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha))) = \varphi_i(\alpha) - \varphi_i^2(\alpha) = 0,$$


因此

$$\alpha - (\varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha)) \in \text{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \text{Ker}\varphi_m = 0,$$

从而  $\alpha - (\varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha)) = 0$ , 即  $\alpha = \varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha)$ , 于是  $V = \text{Im}\varphi_1 + \cdots + \text{Im}\varphi_m$ . 这就证明了  $V$  是  $\text{Im}\varphi_1, \cdots, \text{Im}\varphi_m$  的直和.  $\square$

#### 命题 4.38

设  $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 满足:  $\varphi^2 = \varphi$  且  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$ . 求证:  $\text{r}(\varphi) = \text{r}(\varphi_1) + \text{r}(\varphi_2) + \cdots + \text{r}(\varphi_m)$  成立的充要条件是  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0 (i \neq j)$ .

 **笔记**  $\text{r}(\varphi) = \text{r}(\varphi_1) + \text{r}(\varphi_2) + \cdots + \text{r}(\varphi_m)$  等价于  $\dim \text{Im}\varphi = \dim \text{Im}\varphi_1 + \dim \text{Im}\varphi_2 + \cdots + \dim \text{Im}\varphi_m$ .

**证明** **证法一 (几何方法):** 令  $V_0 = \text{Im}\varphi, V_i = \text{Im}\varphi_i$ , 则由  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$  可得  $V_0 \subseteq V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ .

先证充分性. 由  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0 (i \neq j)$  可得  $\varphi_i = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i = \varphi\varphi_i$ , 故  $V_i \subseteq V_0$ , 从而  $V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ . 要证上述和为直和, 只要证明零向量表示唯一即可. 设

$$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m, \alpha_i = \varphi_i(v_i) \in V_i (1 \leq i \leq m),$$

则  $0 = \varphi_i(\varphi_1(v_1)) + \varphi_i(\varphi_2(v_2)) + \cdots + \varphi_i(\varphi_m(v_m)) = \varphi_i^2(v_i) = \varphi_i(v_i) = \alpha_i$ . 因此  $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ . 两边同取维数即得  $\text{r}(\varphi) = \text{r}(\varphi_1) + \text{r}(\varphi_2) + \cdots + \text{r}(\varphi_m)$ .

再证必要性. 由于  $V_0 \subseteq V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ , 于是

$$\dim V_0 \leq \dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_m) \leq \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m,$$

故由  $\text{r}(\varphi) = \text{r}(\varphi_1) + \text{r}(\varphi_2) + \cdots + \text{r}(\varphi_m)$  可得  $\dim V_0 = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m$ , 从而上式中的不等号只能取等号. 由命题 4.34 及直和的充要条件可知,  $V_1 + V_2 + \cdots + V_m$  是直和, 并且

$$V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

因为  $\text{Im}\varphi_i = V_i \subseteq V_0 = \text{Im}\varphi$ , 故对  $V$  中任一向量  $\alpha$ , 存在  $\beta \in V$ , 使得  $\varphi_i(\alpha) = \varphi(\beta)$ , 从而

$$\begin{aligned} \varphi_i(\alpha) &= \varphi(\beta) = \varphi^2(\beta) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi(\beta) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i(\alpha) \\ &= \varphi_1\varphi_i(\alpha) + \varphi_2\varphi_i(\alpha) + \cdots + \varphi_m\varphi_i(\alpha). \end{aligned}$$

由直和表示的唯一性可知

$$\varphi_i^2(\alpha) = \varphi_i(\alpha), \varphi_j\varphi_i(\alpha) = 0 (j \neq i),$$

于是  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0 (i \neq j)$ .

**证法二 (代数方法):** 把问题转换成代数的语言: 设  $A, A_1, A_2, \cdots, A_m$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $A^2 = A$  且  $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ , 求证:  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) + \cdots + \text{tr}(A_m)$  成立的充要条件是  $A_i^2 = A_i, A_iA_j = O (i \neq j)$ .

先证充分性. 若  $A_i^2 = A_i$ , 则由命题 4.34 可知  $\text{r}(A_i) = \text{tr}(A_i)$ , 从而

$$\text{r}(A) = \text{tr}(A) = \text{tr}(A_1 + A_2 + \cdots + A_m)$$

$$= \text{tr}(\mathbf{A}_1) + \text{tr}(\mathbf{A}_2) + \cdots + \text{tr}(\mathbf{A}_m) = r(\mathbf{A}_1) + r(\mathbf{A}_2) + \cdots + r(\mathbf{A}_m).$$

再证必要性. 因为  $\mathbf{A}$  是幂等矩阵, 故由命题 3.31 可得  $n = r(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) + r(\mathbf{A})$ , 从而  $n = r(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) + r(\mathbf{A}_1) + r(\mathbf{A}_2) + \cdots + r(\mathbf{A}_m)$ . 构造如下分块对角矩阵并对其进行分块初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & & & & \\ & \mathbf{A}_1 & & & \\ & & \mathbf{A}_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & & & & \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & & & \\ \mathbf{A}_2 & & \mathbf{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{A}_m & & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & & & \\ \mathbf{A}_2 & & \mathbf{A}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{A}_m & & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^2 & -\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 & \cdots & -\mathbf{A}_1\mathbf{A}_m \\ \mathbf{O} & -\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2^2 & \cdots & -\mathbf{A}_2\mathbf{A}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & -\mathbf{A}_m\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_m\mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_m - \mathbf{A}_m^2 \end{pmatrix}.$$

由  $n = r(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) + r(\mathbf{A}_1) + r(\mathbf{A}_2) + \cdots + r(\mathbf{A}_m)$  可得最后一个矩阵的右下角部分必为零矩阵, 从而  $\mathbf{A}_i^2 = \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{O} (i \neq j)$ .  $\square$

#### 推论 4.7

若取  $\mathbf{I}_V$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的恒等变换, 并且此时线性变换  $\varphi_i$  满足  $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m = \mathbf{I}_n$ . 如果下列条件之一成立:

(1)  $\dim V = \dim \text{Im}\varphi_1 + \dim \text{Im}\varphi_2 + \cdots + \dim \text{Im}\varphi_m$ ;

(2)  $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0 (i \neq j)$ ,

则  $V = \text{Im}\varphi_1 \oplus \text{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \text{Im}\varphi_m$ , 并且  $\varphi_i$  就是  $V$  到  $\text{Im}\varphi_i$  上的投影变换.



**证明** 由命题 4.38 可知条件 (1)(2) 等价, 并且由命题 4.38 证法一的必要性证明过程可直接由条件 (1) 推出  $V = \text{Im}\varphi_1 \oplus \text{Im}\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \text{Im}\varphi_m$  (直和的证明也可由条件 (2) 及投影变换的性质直接得到). 又因为幂等变换和投影变换等价, 故由条件 (2) 可直接得到  $\varphi_i$  就是  $V$  到  $\text{Im}\varphi_i$  上的投影变换. 因此结论得证.  $\square$

## 第五章 多项式

### 5.1 基本定理和命题

#### 命题 5.1 (多项式次数的性质)

设  $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ . 则

1.  $\deg(cf(x)) = \deg f(x), 0 \neq c \in \mathbb{K}$ .
2.  $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$ .
3.  $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$ .

### 5.2 整除与带余除法

#### 定义 5.1 (整除的定义)

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式, 若存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $h(x)$ , 使得

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称  $g(x)$  是  $f(x)$  的因式, 或称  $g(x)$  可整除  $f(x)$  (也称  $f(x)$  可被  $g(x)$  整除), 记为  $g(x) \mid f(x)$ .

#### 命题 5.2 (整除的基本性质)

设  $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x], 0 \neq c \in \mathbb{K}$ , 则

- (1) 若  $f(x) \mid g(x)$ , 则  $cf(x) \mid g(x)$ , 因此非零常数多项式  $c$  是任一非零多项式的因式;
- (2)  $f(x) \mid f(x)$ ;
- (3) 若  $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$ , 则  $f(x) \mid h(x)$ ;
- (4) 若  $f(x) \mid g(x), f(x) \mid h(x)$ , 则对任意的多项式  $u(x), v(x)$ , 有

$$f(x) \mid g(x)u(x) + h(x)v(x);$$

- (5) 设  $f(x) \mid g(x), g(x) \mid f(x)$  且  $f(x), g(x)$  都是非零多项式, 则存在  $\mathbb{K}$  中非零元  $c$ , 使

$$f(x) = cg(x).$$

#### 证明

- (1) 若  $g(x) = f(x)p(x)$ , 则

$$g(x) = (cf(x))(c^{-1}p(x)).$$

此即  $cf(x) \mid g(x)$ .

特别地, 任取  $a \in \mathbb{K}$ , 令  $g(x) = a$ , 则  $a \mid a$ , 从而  $ca \mid a$ , 故  $c$  是  $a$  的因式.

- (2) 显然.

- (3) 若  $g(x) = f(x)p(x), h(x) = g(x)q(x)$ , 则

$$h(x) = (f(x)p(x))q(x) = f(x)(p(x)q(x)).$$

- (4) 若  $g(x) = f(x)p(x), h(x) = f(x)q(x)$ , 则

$$g(x)u(x) + h(x)v(x) = f(x)(p(x)u(x) + q(x)v(x)).$$

- (5) 设  $g(x) = f(x)p(x), f(x) = g(x)q(x)$ , 则

$$f(x) = f(x)(p(x)q(x)).$$



由此即得

$$\deg f(x) = \deg f(x) + \deg(p(x)q(x)),$$

从而

$$\deg(p(x)q(x)) = 0,$$

于是

$$\deg p(x) = \deg q(x) = 0.$$


因此  $p(x)$  及  $q(x)$  均为非零常数多项式, 即  $f(x)$  和  $g(x)$  相差一个非零常数倍.

□

### 定义 5.2 (相伴多项式)

若  $f(x) \mid g(x), g(x) \mid f(x)$  且  $f(x), g(x)$  都是非零多项式, 则  $f(x), g(x)$  (即可以互相整除的两个多项式) 称为**相伴多项式**, 记为  $f(x) \sim g(x)$ .

♣

 **笔记** 由整除的基本性质 (5) 可知, 相伴的多项式只相差一个非零常数倍.

### 命题 5.3 (相伴多项式的基本性质)

若  $f(x) \sim g(x)$ , 则任意的多项式  $u(x)$  都有  $f(x)u(x) \sim g(x)u(x)$ .

♣

**证明** 由  $f(x) \sim g(x)$  及整除的基本性质 (4) 可知, 任意的多项式  $u(x)$  都有  $f(x)u(x) \mid g(x)u(x), g(x)u(x) \mid f(x)u(x)$ . 故  $f(x)u(x) \sim g(x)u(x)$ . □

### 定理 5.1 (多项式的带余除法)

设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], g(x) \neq 0$ , 则必存在唯一的  $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

且  $\deg r(x) < \deg g(x)$ .

♥

**证明** 若  $\deg f(x) < \deg g(x)$ , 只需令  $q(x) = 0, r(x) = f(x)$  即可. 现设  $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ , 对  $f(x)$  的次数用数学归纳法. 若  $\deg f(x) = 0$ , 则  $\deg g(x) = 0$ . 因此可设  $f(x) = a, g(x) = b (a \neq 0, b \neq 0)$ . 这时令  $q(x) = ab^{-1}, r(x) = 0$  即可. 作为归纳假设, 我们设结论对小于  $n$  次的多项式均成立. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0,$$

由于  $n \geq m$ , 可令

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x),$$

则  $\deg f_1(x) < n$ . 由归纳假设, 有

$$f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x),$$

且  $\deg r(x) < \deg g(x)$ , 于是

$$f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) = g(x)q_1(x) + r(x).$$

因此

$$f(x) = g(x)(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)) + r(x).$$

令

$$q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x),$$

即得  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ .

再证明唯一性. 设另有  $p(x), t(x)$ , 使

$$f(x) = g(x)p(x) + t(x),$$

且  $\deg t(x) < \deg g(x)$ , 则

$$g(x)(q(x) - p(x)) = t(x) - r(x).$$

注意上式左边若  $q(x) - p(x) \neq 0$ , 便有

$$\deg g(x)(q(x) - p(x)) \geq \deg g(x) > \deg (t(x) - r(x)),$$

引出矛盾. 因此只可能  $p(x) = q(x), t(x) = r(x)$ . □

### 推论 5.1

设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], g(x) \neq 0$ , 必存在唯一的  $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 使得  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ . 则  $g(x) \mid f(x)$  的充要条件是  $r(x) = 0$ . ♥

**例题 5.1** 设  $g(x) = ax + b \in \mathbb{F}[x]$  且  $a \neq 0$ , 又  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 求证:  $g(x) \mid f(x)^2$  的充要条件是  $g(x) \mid f(x)$ .

**证明** 充分性显然, 只需证明必要性.

**证法一:** 设  $f(x) = g(x)q(x) + r$ , 则

$$f(x)^2 = g(x)^2 q(x)^2 + 2rg(x)q(x) + r^2.$$

由  $g(x) \mid f(x)^2$  可得  $g(x) \mid r^2$ , 故  $r^2 = 0$ , 即  $r = 0$ , 从而  $g(x) \mid f(x)$ .

**证法二:** 由余数定理,  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ , 故  $f\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 0$ , 从而  $g(x) \mid f(x)$ . □

**例题 5.2** 设  $g(x) = ax^2 + bx + c (abc \neq 0)$ ,  $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ , 满足  $g(x) \mid f(x)$ , 求证:

$$\frac{ap-b}{a} = \frac{aq-c}{b} = \frac{ar}{c}.$$

**证明** 用待定系数法, 设

$$x^3 + px^2 + qx + r = (ax^2 + bx + c)(mx + n) = amx^3 + (an + bm)x^2 + (bn + cm)x + cn.$$

比较系数得

$$am = 1, an + bm = p, bn + cm = q, cn = r.$$

由此即可得到所需等式. □

## 5.2.1 凑项法

“凑项法”是指在要证明的等式中添加若干项再减去若干项来证明结论的方法.

### 命题 5.4

$(x^d - a^d) \mid (x^n - a^n)$  的充要条件是  $d \mid n$ , 其中  $a \neq 0$ . ♣

**证明** ( $\Leftarrow$ ): 由  $d \mid n$  可设  $n = kd$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . 从而

$$x^n - a^n = (x^d)^k - (a^d)^k = (x^d - a^d)(x^{d(k-1)} + x^{d(k-2)}a^d + \cdots + a^{d(k-1)}).$$

故  $(x^d - a^d) \mid (x^n - a^n)$ .

( $\Rightarrow$ ): 假设  $d \nmid n$ , 则由带余除法可知, 存在  $q, r \in \mathbb{N}_+$  且  $0 \leq r < d$ , 使得  $n = qd + r$ . 于是

$$x^n - a^n = x^{dq+r} - a^{dq+r} = (x^{dq} - a^{dq})x^r + x^r a^{dq} - a^{dq+r} = (x^{dq} - a^{dq})x^r + a^{dq}(x^r - a^r).$$

注意到  $(x^{dq} - a^{dq}) \mid (x^d - a^d)$ , 但由  $0 \leq r < d$  可知,  $(x^d - a^d) \nmid (x^r - a^r)$ . 故  $(x^d - a^d) \nmid (x^n - a^n)$  矛盾! □

**例题 5.3** 设  $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ , 其中  $m, n, p$  为自然数, 又  $g(x) = x^2 + x + 1$ , 求证:  $g(x) \mid f(x)$ .

**证明** 由命题 5.4 可知,  $(x^3 - 1) | (x^{3k} - 1)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ . 又因为  $(x^2 + x + 1) | (x^3 - 1)$ , 所以  $(x^2 + x + 1) | (x^{3k} - 1)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ . 注意到

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = (x^{3m} - 1) + x(x^{3n} - 1) + x^2(x^{3p} - 1) + (x^2 + x + 1).$$

再结合  $(x^2 + x + 1) | (x^{3m} - 1)$ ,  $(x^{3n} - 1)$ ,  $(x^{3p} - 1)$  可得  $g(x) | f(x)$ . □

## 5.3 最大公因式与互素多项式

### 定义 5.3 (最大公因式和互素)

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式,  $d(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的首 1 多项式, 若  $d(x)$  满足

(i)  $d(x)$  是  $f(x), g(x)$  的公因式,

(ii) 对  $f(x), g(x)$  的任一公因式  $h(x)$ , 都有  $h(x) | d(x)$ ,

则称  $d(x)$  为  $f(x), g(x)$  的**最大公因式** (或称  $d(x)$  为  $f(x), g(x)$  的 g.c.d.), 记为  $d(x) = (f(x), g(x))$ . 特别地, 若  $d(x) = 1$ , 则称  $f(x), g(x)$  互素.

### 命题 5.5

(1) 若  $\mathbb{F}$  上的多项式  $d_0(x)$  (但不一定是首 1 多项式) 也满足

(i)  $d_0(x)$  是  $f(x), g(x)$  的公因式,

(ii) 对  $f(x), g(x)$  的任一公因式  $h(x)$ , 都有  $h(x) | d_0(x)$ ,

则  $d_0(x) \sim d(x)$ , 即  $d_0(x)$  与  $d(x)$  相差一个非零常数倍.

(2) 对  $\forall a, b \in \mathbb{F}, (af(x), bg(x)) = (f(x), g(x)) = d(x)$ .

**证明**

(1) 证明是显然的.

(2) 证明是显然的. □

### 定义 5.4 (最小公倍式)

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式,  $m(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的首 1 多项式, 若  $d(x)$  满足

(i)  $m(x)$  是  $f(x)$  与  $g(x)$  的公倍式,

(ii) 对  $f(x)$  与  $g(x)$  的任一公倍式  $l(x)$  均有  $m(x) | l(x)$ ,

则称  $m(x)$  为  $f(x)$  与  $g(x)$  的**最小公倍式** (或称  $m(x)$  为  $f(x), g(x)$  的 l.c.m.), 记为  $m(x) = [f(x), g(x)]$ .

### 命题 5.6

(1) 若  $\mathbb{F}$  上的多项式  $m_0(x)$  (但不一定是首 1 多项式) 也满足

(i)  $m(x)$  是  $f(x)$  与  $g(x)$  的公倍式,

(ii) 对  $f(x)$  与  $g(x)$  的任一公倍式  $l(x)$  均有  $m(x) | l(x)$ ,

则  $m_0(x) \sim m(x)$ , 即  $m_0(x)$  与  $m(x)$  相差一个非零常数倍.

(2) 对  $\forall a, b \in \mathbb{F}, [af(x), bg(x)] = [f(x), g(x)] = m(x)$ .

**证明**

(1) 证明是显然的.

(2) 证明是显然的. □

**定理 5.2 (最大公因式的必要条件)**

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式,  $d(x)$  是它们的最大公因式, 则必存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$



**注** 设  $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ , 则  $d(x)$  不一定是  $f(x)$  和  $g(x)$  的最大公因式.

**证明** 若  $f(x) = 0$ , 则显然  $(f(x), g(x)) = g(x)$ ; 若  $g(x) = 0$ , 则  $(f(x), g(x)) = f(x)$ . 故不妨设  $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ . 由带余除法, 我们有下列等式:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)q_1(x) + r_1(x), \\ g(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\ r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ r_{s-2}(x) &= r_{s-1}(x)q_s(x) + r_s(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

余式的次数是严格递减的, 因此经过有限步后, 必有一个等式其余式为零. 不妨设  $r_{s+1}(x) = 0$ , 于是

$$r_{s-1}(x) = r_s(x)q_{s+1}(x). \quad (5.1)$$

现在要证明  $r_s(x)$  即为  $f(x)$  与  $g(x)$  的最大公因式. 由上式知  $r_s(x) \mid r_{s-1}(x)$ , 但

$$r_{s-2}(x) = r_{s-1}(x)q_s(x) + r_s(x), \quad (5.2)$$

因此  $r_s(x) \mid r_{s-2}(x)$ . 这样可一直推下去, 得到  $r_s(x) \mid g(x), r_s(x) \mid f(x)$ . 这表明  $r_s(x)$  是  $f(x)$  与  $g(x)$  的公因式. 又设  $h(x)$  是  $f(x)$  与  $g(x)$  的公因式, 则  $h(x) \mid r_1(x)$ , 于是  $h(x) \mid r_2(x)$ , 不断往下推, 容易看出有  $h(x) \mid r_s(x)$ . 因此  $r_s(x)$  是最大公因式.

再证明(5.1)式. 从(5.2)式得

$$r_s(x) = r_{s-2}(x) - r_{s-1}(x)q_s(x), \quad (5.3)$$

但我们有

$$r_{s-3}(x) = r_{s-2}(x)q_{s-1}(x) + r_{s-1}(x), \quad (5.4)$$

从(5.4)式中解出  $r_{s-1}(x)$  代入(5.3)式, 得

$$r_s(x) = r_{s-2}(x)(1 + q_{s-1}(x)q_s(x)) - r_{s-3}(x)q_s(x).$$

用类似的方法逐步将  $r_i(x)$  用  $r_{i-1}(x), r_{i-2}(x)$  代入, 最后得到

$$r_s(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

显然  $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$ . □

**定理 5.3 (最大公因式的充分条件)**

设  $f(x), g(x), d(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式. 若  $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$  并且存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得  $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ , 则  $d(x)$  必是  $f(x)$  和  $g(x)$  的最大公因式.



**证明** 如果同时  $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$ , 则  $d(x)$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  的公因式. 若  $h(x)$  也是  $f(x), g(x)$  的公因式, 则由  $h(x) \mid f(x), h(x) \mid g(x)$  可推出  $h(x) \mid (f(x)u(x) + g(x)v(x)) = d(x)$ , 因此  $d(x)$  是最大公因式. □

**例题 5.4** 设  $(f(x), g(x)) = d(x)$ , 求证: 对任意的正整数  $n$ ,

$$(f(x)^n, f(x)^{n-1}g(x), \dots, g(x)^n) = d(x)^n.$$

**证明** 显然  $d(x)^n$  是  $f(x)^{n-k}g(x)^k (0 \leq k \leq n)$  的公因式. 又假设

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x),$$

两边同时  $n$  次方得到

$$f^n(x)u^n(x) + f^{n-1}(x)g(x)u^{n-1}(x)v(x) + \cdots + g^n(x)v^n(x) = d^n(x).$$

于是由最大公因式的充分条件可知  $d(x)^n$  是  $f(x)^{n-k}g(x)^k (0 \leq k \leq n)$  的最大公因式。□

#### 推论 5.2 (次数不小于 1 的多项式互素的充要条件)

设  $f(x), g(x)$  是次数不小于 1 的多项式互素的充要条件是必唯一地存在两个多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且  $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$ .

**证明** 充分性由多项式互素的充要条件可直接得到. 下面证明必要性.

先证存在性. 因为  $(f(x), g(x)) = 1$  且  $\deg f(x), \deg g(x) > 1$ , 所以由多项式互素的充要条件可知, 必存在非零多项式  $h(x), k(x)$ , 使得

$$f(x)h(x) + g(x)k(x) = 1. \quad (5.5)$$

由带余除法可知, 存在  $q(x), u(x)$ , 使得

$$h(x) = g(x)q(x) + u(x), \quad \deg u(x) < \deg g(x).$$

代入(5.5)式可得

$$f(x)[g(x)q(x) + u(x)] + g(x)k(x) = 1.$$

即有

$$f(x)u(x) + g(x)[f(x)q(x) + k(x)] = 1. \quad (5.6)$$

令  $v(x) = f(x)q(x) + k(x)$ , 则  $\deg v(x) < \deg f(x)$ . 否则, 若  $\deg v(x) \geq \deg f(x)$ , 则由(5.6)式可知

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \quad (5.7)$$

从而由  $\deg v(x) \geq \deg f(x)$  及  $\deg u(x) < \deg g(x)$  可得

$$\deg(f(x)u(x)) = \deg f(x) + \deg u(x) < \deg v(x) + \deg g(x) = \deg(g(x)v(x)).$$

而由(5.7)式可知  $\deg(f(x)u(x)) = \deg(1 - g(x)v(x)) = \deg(g(x)v(x))$  矛盾!

再证唯一性, 设另有  $u_1(x), v_1(x)$  适合条件, 即

$$f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

从而

$$f(x)(u(x) - u_1(x)) = g(x)(v(x) - v_1(x)).$$

上式表明  $g(x) \mid f(x)(u(x) - u_1(x))$ , 又由于  $(f(x), g(x)) = 1$ , 因此  $g(x) \mid (u(x) - u_1(x))$ . 而  $\deg(u(x) - u_1(x)) < \deg g(x)$ , 故  $u(x) - u_1(x) = 0$ , 即  $u(x) = u_1(x)$ . 同理可得  $v(x) = v_1(x)$ . □

#### 定理 5.4 (多项式互素的充要条件)

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式. 则

(1)  $(f(x), g(x)) = 1$  的充要条件是存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得  $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$ .

(2)  $(f(x), g(x)) = 1$  的充要条件是对任意给定的正整数  $m, n$ ,  $(f(x)^m, g(x)^n) = 1$ .

**证明**

1. 必要性: 由最大公因式的必要条件立得.

充分性: 设  $(f(x), g(x)) = d(x)$ , 则由  $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$  可知,  $d(x) \mid 1$ , 因此  $d(x) = 1$ .

2. 必要性由命题 5.8 即得. 反过来, 若  $d(x) \neq 1$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  的公因式, 则它也是  $f(x)^m$  和  $g(x)^n$  的公因式, 因此  $f(x)^m$  和  $g(x)^n$  不可能互素.

□

**命题 5.7 (互素多项式和最大公因式的基本性质)**

设  $f(x), g(x), f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 则

- (1) 若  $f_1(x) \mid g(x), f_2(x) \mid g(x)$ , 且  $(f_1(x), f_2(x)) = 1$ , 则  $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$ .
- (2) 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 且  $f(x) \mid g(x)h(x)$ , 则  $f(x) \mid h(x)$ .
- (3) 若  $(f(x), g(x)) = d(x), f(x) = f_1(x)d(x), g(x) = g_1(x)d(x)$ , 则  $(f_1(x), g_1(x)) = 1$ .
- (4) 若  $(f(x), g(x)) = d(x)$ , 则  $(t(x)f(x), t(x)g(x)) = t(x)d(x)$ .
- (5) 若  $(f_1(x), g(x)) = 1, (f_2(x), g(x)) = 1$ , 则  $(f_1(x)f_2(x), g(x)) = 1$ .
- (6) 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 则  $(f(x^m), g(x^m)) = 1$ , 其中  $m$  为任一正整数.
- (7) 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 则  $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$ .

**证明**

- (1) 由多项式互素的充要条件 (1) 可知, 存在  $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使

$$f_1(x)u(x) + f_2(x)v(x) = 1.$$

设  $g(x) = f_1(x)s(x) = f_2(x)t(x)$ , 则

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x)(f_1(x)u(x) + f_2(x)v(x)) \\ &= f_2(x)t(x)f_1(x)u(x) + f_1(x)s(x)f_2(x)v(x) \\ &= f_1(x)f_2(x)(t(x)u(x) + s(x)v(x)), \end{aligned}$$

即  $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$ .

- (2) 由多项式互素的充要条件可知, 存在  $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

则

$$f(x)u(x)h(x) + g(x)v(x)h(x) = h(x).$$

因上式左边可被  $f(x)$  整除, 故  $f(x) \mid h(x)$ .

- (3) 由多项式互素的充要条件可知, 存在  $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x),$$

即

$$f_1(x)d(x)u(x) + g_1(x)d(x)v(x) = d(x),$$

两边消去  $d(x)$  即得

$$f_1(x)u(x) + g_1(x)v(x) = 1,$$

因此  $f_1(x), g_1(x)$  互素.

- (4)  $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x),$$

则

$$t(x)f(x)u(x) + t(x)g(x)v(x) = t(x)d(x).$$

因此, 若  $h(x) \mid t(x)f(x), h(x) \mid t(x)g(x)$ , 则必有  $h(x) \mid t(x)d(x)$ . 又  $t(x)d(x)$  是  $t(x)f(x), t(x)g(x)$  的公因式, 因此  $t(x)d(x)$  是  $t(x)f(x)$  与  $t(x)g(x)$  的最大公因式.

- (5) 由多项式互素的充要条件可知, 存在  $u_1(x), v_1(x), u_2(x), v_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ , 使

$$f_1(x)u_1(x) + g(x)v_1(x) = 1,$$

$$f_2(x)u_2(x) + g(x)v_2(x) = 1,$$

将上两式两边分别相乘得

$$(f_1(x)f_2(x))u_1(x)u_2(x) + g(x)(v_1(x)f_2(x)u_2(x) + g(x)v_1(x)v_2(x) + v_2(x)f_1(x)u_1(x)) = 1.$$

这就是说  $f_1(x)f_2(x)$  和  $g(x)$  互素.

(6) 因为  $f(x)$  和  $g(x)$  互素, 故存在多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

从而有

$$f(x^m)u(x^m) + g(x^m)v(x^m) = 1,$$

于是  $f(x^m)$  和  $g(x^m)$  互素.

(7) 由互素多项式的充要条件 (1) 可知, 存在  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

从而

$$f(x)[u(x) - v(x)] + [f(x) + g(x)]v(x) = 1.$$

故由互素多项式的充要条件 (1) 可知,  $(f(x), f(x) + g(x)) = 1$ . 同理可得,  $(f(x), f(x) + g(x)) = 1$ . 再由互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 即得  $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$ .

□

#### 定理 5.5 (多个多项式的最大公因式的必要条件)

设  $d(x)$  是  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  的最大公因式, 求证: 必存在多项式  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ , 使得

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_m(x)g_m(x) = d(x).$$

♡

**证明** 用数学归纳法. 对  $m = 2$ , 结论已成立. 设结论对  $m - 1$  成立. 设  $h(x)$  是  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x)$  的最大公因式, 则有  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{m-1}(x)$ , 使得

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_{m-1}(x)g_{m-1}(x) = h(x).$$

结合上式由条件可知  $d(x)$  是  $h(x)$  和  $f_m(x)$  的最大公因式, 故存在  $u(x), v(x)$ , 使得

$$h(x)u(x) + f_m(x)v(x) = d(x).$$

将  $h(x)$  代入可得

$$f_1(x)g_1(x)u(x) + f_2(x)g_2(x)u(x) + \dots + f_{m-1}(x)g_{m-1}(x)u(x) + f_m(x)v(x) = d(x),$$

即知结论成立.

□

#### 推论 5.3 (多个多项式互素的充要条件)

数域  $\mathbb{F}$  上的多项式  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  互素的充要条件是存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ , 使得

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_m(x)g_m(x) = 1.$$

♡

**证明** 必要性: 由多个多项式的最大公因式的必要条件立即得到.

充分性: 设存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ , 使得

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_m(x)g_m(x) = 1.$$

设  $d(x)$  是  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  的最大公因式, 则由上式可知,  $d(x) \mid 1$ , 从而  $d(x) = 1$ .

□

**命题 5.8 (两两互素的多项式组的乘积也互素)**

设  $f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$  为多项式, 且

$$(f_i(x), g_j(x)) = 1, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n,$$

求证:

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)) = 1.$$

**证明** 利用互素多项式和最大公因式的基本性质 (5) 以及数学归纳法即得结论.  $\square$

**推论 5.4**

设  $f(x), g(x)$  为多项式, 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 则  $(f(x), g^n(x)) = 1$ .

**证明** 在命题 5.8 (上一个命题) 中取  $f_1(x) = f(x), f_i(x) = 1 (i = 2, 3, \dots, n), g_j(x) = g(x) (j = 1, 2, \dots, n)$  即可得到结论.  $\square$

**定理 5.6 (中国剩余定理)**

设  $g_1(x), \dots, g_n(x)$  是两两互素的多项式,  $r_1(x), \dots, r_n(x)$  是  $n$  个多项式, 则存在多项式  $f(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ , 使

$$f(x) = g_i(x)q_i(x) + r_i(x), i = 1, \dots, n.$$

**证明** 先证明存在多项式  $f_i(x)$ , 使对任意的  $i$ , 有

$$f_i(x) = g_i(x)p_i(x) + 1, g_j(x) \mid f_i(x) (j \neq i).$$

一旦得证, 只需令  $f(x) = r_1(x)f_1(x) + \dots + r_n(x)f_n(x)$  即可. 现构造  $f_1(x)$  如下. 因为  $g_1(x)$  和  $g_j(x) (j \neq 1)$  互素, 故存在  $u_j(x), v_j(x)$ , 使  $g_1(x)u_j(x) + g_j(x)v_j(x) = 1$ . 令

$$f_1(x) = g_2(x)v_2(x) \cdots g_n(x)v_n(x) = (1 - g_1(x)u_2(x)) \cdots (1 - g_1(x)u_n(x)),$$

显然  $f_1(x)$  符合要求. 同理可构造  $f_i(x)$ .  $\square$

**命题 5.9 (两个多项式的乘积与其最大公因式和最小公倍式的乘积相伴)**

设  $f(x), g(x)$  是非零多项式, 则

$$f(x)g(x) \sim (f(x), g(x))[f(x), g(x)].$$

**证明** 证法一: 设  $d(x) = (f(x), g(x))$  且  $f(x) = f_0(x)d(x), g(x) = g_0(x)d(x)$ , 则由互素多项式和最大公因式的基本性质 (3) 可知  $f_0(x), g_0(x)$  互素. 设  $l(x)$  是  $f(x), g(x)$  的公倍式且

$$l(x) = f(x)u(x) = g(x)v(x),$$

则  $f_0(x)d(x)u(x) = g_0(x)d(x)v(x)$ , 消去  $d(x)$  得

$$f_0(x)u(x) = g_0(x)v(x).$$

上式表明  $f_0(x) \mid g_0(x)v(x), g_0(x) \mid f_0(x)u(x)$ , 又因为  $f_0(x), g_0(x)$  互素, 所以由互素多项式和最大公因式的基本性质 (2) 可知,  $f_0(x) \mid v(x), g_0(x) \mid u(x)$ . 设  $u(x) = g_0(x)p(x)$ , 则

$$l(x) = f_0(x)d(x)g_0(x)p(x),$$

即  $f_0(x)d(x)g_0(x) \mid l(x)$ . 显然  $f_0(x)d(x)g_0(x)$  是  $f(x), g(x)$  的公倍式, 因此由命题 5.5(1) 可知

$$\frac{f(x)g(x)}{d(x)} = f_0(x)d(x)g_0(x) \sim [f(x), g(x)].$$

故由相伴多项式的基本性质可知

$$f(x)g(x) \sim (f(x), g(x))[f(x), g(x)].$$



证法二: 设  $f(x), g(x)$  的公共标准分解为

$$f(x) = c_1 p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_k(x)^{e_k}, \quad g(x) = c_2 p_1(x)^{f_1} p_2(x)^{f_2} \cdots p_k(x)^{f_k},$$

其中  $p_i(x)$  为互不相同的首一不可约多项式,  $c, d$  是非零常数, 则

$$d(x) = p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_k(x)^{r_k}, \quad h(x) = p_1(x)^{s_1} p_2(x)^{s_2} \cdots p_k(x)^{s_k},$$

其中  $r_i = \min\{e_i, f_i\}, s_i = \max\{e_i, f_i\}$ . 注意到

$$f(x)g(x) = c_1 c_2 p_1(x)^{e_1+f_1} p_2(x)^{e_2+f_2} \cdots p_k(x)^{e_k+f_k},$$

并且

$$(f(x), g(x)) = p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_k(x)^{r_k}, \quad [f(x), g(x)] = p_1(x)^{s_1} p_2(x)^{s_2} \cdots p_k(x)^{s_k},$$

其中  $r_i = \min\{e_i, f_i\}, s_i = \max\{e_i, f_i\}$ . 令  $c = c_1 c_2$ , 则有

$$f(x)g(x) = cd(x)h(x).$$

□

#### 命题 5.10 (最大公因式与最小公倍式在开方下不变)

设  $(f(x), g(x)) = d(x), [f(x), g(x)] = h(x)$ , 求证:

$$(f(x)^n, g(x)^n) = d(x)^n, [f(x)^n, g(x)^n] = h(x)^n.$$

◆

**注** 不妨设  $f(x), g(x)$  都是首一多项式的原因: 若  $f(x), g(x)$  的首项系数分别为  $a, b$ , 则用  $\frac{f(x)}{a}, \frac{g(x)}{b}$  代替, 再结合命题 5.5(2) 和命题 5.6(2) 即可得到结论.

**证明 证法一:** 不妨设  $f(x), g(x)$  都是首 1 多项式,  $f(x) = f_1(x)d(x), g(x) = g_1(x)d(x)$ , 则  $f_1(x), g_1(x), d(x)$  都是首 1 多项式. 由互素多项式和最大公因式的基本性质 (3) 可知  $(f_1(x), g_1(x)) = 1$ . 由命题 5.9 可知  $h(x) \sim f_1(x)g_1(x)d(x)$ , 又因为  $h(x), f_1(x), g_1(x), d(x)$  均为首 1 多项式, 所以  $h(x) = f_1(x)g_1(x)d(x)$ . 由命题 5.8 可知,  $(f_1(x)^n, g_1(x)^n) = 1$ , 从而由互素多项式和最大公因式的基本性质 (4) 可知

$$(f(x)^n, g(x)^n) = (f_1(x)^n d(x)^n, g_1(x)^n d(x)^n) = d(x)^n.$$

由命题 5.9 可知  $f(x)^n g(x)^n \sim (f(x)^n, g(x)^n)[f(x)^n, g(x)^n]$ , 又因为  $f(x), g(x)$  都是首 1 多项式, 所以  $f(x)^n g(x)^n = (f(x)^n, g(x)^n)[f(x)^n, g(x)^n] = d(x)^n [f(x)^n, g(x)^n]$ . 于是可得

$$[f(x)^n, g(x)^n] = f_1(x)^n g_1(x)^n d(x)^n = h(x)^n.$$

证法二: 设  $f(x), g(x)$  的公共标准分解为

$$f(x) = c p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_k(x)^{e_k}, \quad g(x) = d p_1(x)^{f_1} p_2(x)^{f_2} \cdots p_k(x)^{f_k},$$

其中  $p_i(x)$  为互不相同的首一不可约多项式,  $c, d$  是非零常数, 则

$$d(x) = p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_k(x)^{r_k}, \quad h(x) = p_1(x)^{s_1} p_2(x)^{s_2} \cdots p_k(x)^{s_k},$$

其中  $r_i = \min\{e_i, f_i\}, s_i = \max\{e_i, f_i\}$ . 注意到

$$f(x)^n = c^n p_1(x)^{ne_1} p_2(x)^{ne_2} \cdots p_k(x)^{ne_k}, \quad g(x)^n = d^n p_1(x)^{nf_1} p_2(x)^{nf_2} \cdots p_k(x)^{nf_k},$$

并且  $\min\{ne_i, nf_i\} = nr_i, \max\{ne_i, nf_i\} = ns_i$ , 因此

$$(f(x)^n, g(x)^n) = p_1(x)^{nr_1} p_2(x)^{nr_2} \cdots p_k(x)^{nr_k} = d(x)^n,$$

$$[f(x)^n, g(x)^n] = p_1(x)^{ns_1} p_2(x)^{ns_2} \cdots p_k(x)^{ns_k} = h(x)^n.$$

□

#### 命题 5.11

设  $f(x) = x^m - 1, g(x) = x^n - 1$ , 求证:  $(f(x), g(x)) = x^d - 1$ , 其中  $d$  是  $m, n$  的最大公因子.

◆

**证明 证法一:** 不妨设  $m \geq n, m = nq + r$ , 先证明  $(x^m - 1, x^n - 1) = (x^r - 1, x^n - 1)$ . 假设  $d_1(x) = (x^m - 1, x^n - 1), d_2(x) = (x^r - 1, x^n - 1)$ . 注意到

$$x^m - 1 = x^{nq+r} - 1 = x^r(x^{nq} - 1) + (x^r - 1),$$

$(x^n - 1) \mid (x^{nq} - 1)$ , 故  $d_1(x) \mid (x^r - 1)$ , 从而  $d_1(x) \mid d_2(x)$ . 从上式也可以看出  $d_2(x) \mid (x^m - 1)$ , 从而  $d_2(x) \mid d_1(x)$ , 因此  $d_1(x) = d_2(x)$ . 又设  $n = q_1 r + r_1$ , 则  $(x^m - 1, x^n - 1) = (x^n - 1, x^r - 1) = (x^r - 1, x^{r_1} - 1)$ . 再由辗转相除, 有某个  $r_{s-1} = q_{s+1} r_s$ , 其中  $r_s = d$  是  $m, n$  的最大公因子, 于是  $(x^m - 1, x^n - 1) = (x^{r_{s-1}} - 1, x^{r_s} - 1) = x^d - 1$ .

**证法二:** 只需求出  $f(x), g(x)$  的公根.  $f(x)$  的根为

$$\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, 1 \leq k \leq m,$$

$g(x)$  的根为

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, 1 \leq k \leq n,$$

则公根为

$$\cos \frac{2k\pi}{d} + i \sin \frac{2k\pi}{d}, 1 \leq k \leq d.$$

这就是  $x^d - 1$  的全部根, 于是结论成立. □


## 5.4 不可约多项式与因式分解

### 定义 5.5 (不可约多项式的定义)

设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的多项式, 若  $f(x)$  可以分解为两个次数小于  $f(x)$  的  $\mathbb{F}$  上多项式之积, 则称  $f(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的可约多项式, 否则称  $f(x)$  为  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式. ✿

### 命题 5.12 (不可约多项式的基本性质)

- (1) 设  $p(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式, 则对  $\mathbb{F}$  上任一多项式  $f(x)$ , 或者  $p(x) \mid f(x)$ , 或者  $(p(x), f(x)) = 1$ .
- (2) 设  $p(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式,  $f(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的多项式. 证明: 若  $p(x)$  的某个复根  $a$  也是  $f(x)$  的根, 则  $p(x) \mid f(x)$ . 特别地,  $p(x)$  的任一复根都是  $f(x)$  的根. ♠

 **笔记** 不可约多项式的基本性质 (2) 表明: 不可约多项式也满足极小多项式的基本性质.

**证明**

- (1) 设  $d(x) = (p(x), f(x))$ . 因为  $p(x)$  不可约, 故  $f(x)$  的因式只能是非零常数多项式或  $cp(x) (c \neq 0)$ , 从而或者  $d(x) = 1$  或者  $d(x) = cp(x)$  (首一多项式), 故得结论.
- (2) 若  $(p(x), f(x)) = 1$ , 则存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得  $p(x)u(x) + f(x)v(x) = 1$ . 令  $x = a$  可得  $1 = p(a)u(a) + f(a)v(a) = 0$ , 矛盾. 因此  $p(x)$  与  $f(x)$  不互素, 从而只能是  $p(x) \mid f(x)$ , 结论得证. □

### 定理 5.7 (不可约多项式的“素性”)

设  $p(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的非常数多项式, 则  $p(x)$  为  $\mathbb{F}$  上不可约多项式的充要条件是对  $\mathbb{F}$  上任意适合  $p(x) \mid f(x)g(x)$  的多项式  $f(x)$  与  $g(x)$ , 或者  $p(x) \mid f(x)$ , 或者  $p(x) \mid g(x)$ . ♥

**证明** 必要性: 设  $p(x)$  是  $\mathbb{F}[x]$  中的不可约多项式, 且  $p(x) \mid f(x)g(x)$ . 若  $p(x) \mid f(x)$ , 则结论成立. 若  $p(x) \nmid f(x)$ , 则由定理可知  $(p(x), f(x)) = 1$ , 从而由互素多项式与最大公因式的基本性质可知  $p(x) \mid g(x)$ .

充分性: (反证法) 假设  $p(x)$  可约, 则必存在次数小于  $\deg(p(x))$  的多项式  $f(x), g(x)$ , 使得  $p(x) = f(x)g(x)$ . 从而  $p(x) \mid f(x)g(x)$ , 于是由条件可知  $p(x) \mid f(x)$  或  $p(x) \mid g(x)$ . 因此  $\deg(p(x)) \leq \deg(f(x))$  或  $\deg(p(x)) \leq \deg(g(x))$ . 这与  $\deg(p(x)) > \deg(f(x)), \deg(g(x))$  矛盾. □

**推论 5.5**

设  $p(x)$  为不可约多项式且

$$p(x) \mid f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x),$$

则  $p(x)$  必可整除其中某个  $f_i(x)$ .



**证明** 由不可约多项式的“素性”归纳可得. □

**命题 5.13**

设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的非常数多项式, 求证:  $f(x)$  等于某个不可约多项式的幂的充要条件是对任意的非常数多项式  $g(x)$ , 或者  $f(x)$  和  $g(x)$  互素, 或者  $f(x)$  可以整除  $g(x)$  的某个幂.



**证明** 设  $f(x) = p(x)^k$ ,  $p(x)$  在  $\mathbb{F}$  上不可约, 且  $f(x)$  和  $g(x)$  不互素, 则  $p(x)$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  的公因式, 故  $f(x)$  可以整除  $g(x)^k$ .

反之, 由因式分解定理, 可设  $f(x) = p(x)^m h(x)$ ,  $p(x)$  在  $\mathbb{F}$  上不可约,  $\deg h(x) > 0$ , 且  $p(x)$  不能整除  $h(x)$ , 则  $f(x) \nmid h(x)$ , 故  $f(x)$  不和  $h(x)$  互素. 由于  $\deg h(x) < \deg f(x)$ , 因此  $f(x)$  也不能整除  $h(x)$ , 矛盾! □

**定义 5.6 (代数数)**

设  $u$  是复数域中某个数, 若  $u$  适合某个非零有理系数多项式 (或整系数多项式)  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 则称  $u$  是一个代数数.

**定义 5.7 (极小多项式 (最小多项式))**

对任一代数数  $u$ , 存在唯一一个  $u$  适合的首一有理系数多项式  $g(x)$ , 使得  $g(x)$  是  $u$  适合的所有非零有理系数多项式中次数最小者. 这样的  $g(x)$  称为  $u$  的极小多项式或最小多项式.



**证明** 现在证明这个定义是良定义的, 只须证明对任一代数数所对应的极小多项式的存在性和唯一性.

先证存在性. 在  $u$  适合的所有非零有理系数多项式构成的集合中 (由假设这个集合非空, 否则  $u$  就不是一个代数数), 由良序公理可知, 存在一个次数最小的多项式, 然后将其首一化, 即可得到  $u$  的极小多项式  $g(x)$ .

再证唯一性. 为了证明极小多项式的唯一性, 我们先证明极小多项式的一个基本性质, 即极小多项式可以整除  $u$  适合的任一多项式  $f(x)$ . 假设

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x),$$

则由  $f(u) = g(u) = 0$  可知  $r(u) = 0$ . 若  $r(x) \neq 0$ , 则  $u$  适合一个比  $g(x)$  的次数更小的多项式  $r(x)$ , 这和  $g(x)$  是极小多项式矛盾. 因此  $r(x) = 0$ , 即  $g(x) \mid f(x)$ . 设  $h(x)$  也是  $u$  的极小多项式, 则由上述性质可得  $g(x) \mid h(x)$ ,  $h(x) \mid g(x)$ , 从而  $g(x)$  和  $h(x)$  只差一个非零常数, 又它们都是首一的, 故只能相等, 唯一性得证. □

**命题 5.14 (极小多项式的基本性质)**

(1) 设  $g(x)$  为  $u$  的极小多项式, 则  $g(x)$  一定整除  $u$  适合的任一多项式  $f(x)$ .



**证明**

(1) 假设

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x),$$

则由  $f(u) = g(u) = 0$  可知  $r(u) = 0$ . 若  $r(x) \neq 0$ , 则  $u$  适合一个比  $g(x)$  的次数更小的多项式  $r(x)$ , 这和  $g(x)$  是极小多项式矛盾. 因此  $r(x) = 0$ , 即  $g(x) \mid f(x)$ . □

**命题 5.15 (极小多项式的充要条件)**

设  $g(x)$  是一个  $u$  适合的首一有理系数多项式, 则  $g(x)$  是  $u$  的极小多项式的充要条件是  $g(x)$  是有理数域上的不可约多项式.

**证明** 先证必要性. 若极小多项式  $g(x)$  在有理数域上可约, 则  $g(x) = g_1(x)g_2(x)$  可分解为两个比  $g(x)$  的次数更小的多项式的乘积. 由  $0 = g(u) = g_1(u)g_2(u)$  可知  $g_1(u)$  和  $g_2(u)$  中至少有一个等于零. 不妨设  $g_1(u) = 0$ , 则  $u$  适合一个比  $g(x)$  的次数更小的多项式  $g_1(x)$ , 这和  $g(x)$  是极小多项式矛盾.

再证充分性. 设  $g(x)$  是  $u$  适合的有理数域上的首一不可约多项式,  $h(x)$  是  $u$  的极小多项式. 由极小多项式的基本性质 (1) 可知  $h(x) \mid g(x)$ . 因为  $g(u) = h(u) = 0$ , 所以  $g(x)$  和  $h(x)$  有公共根, 从而  $x - u$  一定是  $g(x), h(x)$  的公因式, 于是  $g(x)$  和  $h(x)$  不互素. 又  $g(x)$  是不可约多项式, 因此  $g(x) \mid h(x)$ . 于是  $g(x) \sim h(x)$ , 即  $g(x)$  和  $h(x)$  只差一个非零常数, 而它们又都是首一的, 故只能相等. 因此  $g(x)$  就是  $u$  的极小多项式.  $\square$

**5.4.1 多项式的标准分解**

多项式的标准分解是证明某些问题的有力工具.

**定理 5.8 (因式分解定理)**

设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的多项式且  $\deg f(x) \geq 1$ , 则

- (1)  $f(x)$  可分解为有限个  $\mathbb{K}$  上的不可约多项式之积;
- (2) 若

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x). \quad (5.8)$$

是  $f(x)$  的两个不可约分解, 即  $p_i(x), q_j(x)$  都是  $\mathbb{K}$  上的次数大于零的不可约多项式, 则  $s = t$ , 且经过适当调换因式的次序以后, 有

$$q_i(x) \sim p_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

**笔记**

1. 这个定理表明, 任一多项式可唯一地分解为若干个不可约多项式之积. 这里唯一是在相伴意义下的唯一, 即相应的多项式可以差一个常数因子. 如果把分解式中相同或仅差一个常数的因式合并在一起, 就得到了一个 **标准分解式**:

$$f(x) = cp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2} \cdots p_m(x)^{e_m}, \quad (5.9)$$

其中  $c \neq 0, p_i(x)$  是互异的首一不可约多项式,  $e_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, m)$ .

若  $e_i > 1 (e_i = 1)$ , 我们称 (5.9) 式中的因式  $p_i(x)$  为  $f(x)$  的  $e_i$  **重因式 (单因式)**. 显然这时  $p_i(x)^{e_i} \mid f(x)$ , 但  $p_i(x)^{e_i+1}$  不能整除  $f(x)$ .

2. 设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{K}$  上的两个多项式, 在它们的标准分解式中适当添加零次项, 就能得到公共的标准分解. 故对  $\mathbb{K}$  上任意的两个多项式  $f(x), g(x)$ , 都可以不妨设它们有如下的 **公共的标准分解式**:

$$f(x) = c_1p_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2} \cdots p_n(x)^{e_n};$$

$$g(x) = c_2p_1(x)^{f_1}p_2(x)^{f_2} \cdots p_n(x)^{f_n},$$

其中  $e_i \geq 0, f_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ .

**证明** (1) 对多项式  $f(x)$  的次数用数学归纳法. 若  $\deg f(x) = 1$ , 结论显然成立. 设次数小于  $n$  的多项式都可以分解为  $\mathbb{K}$  上的不可约多项式之积而  $\deg f(x) = n$ . 若  $f(x)$  不可约, 结论自然成立. 若  $f(x)$  可约, 则

$$f(x) = f_1(x)f_2(x),$$

其中  $f_1(x), f_2(x)$  的次数小于  $n$ , 由归纳假设它们可以分解为有限个  $\mathbb{K}$  上的不可约多项式之积. 所有这些多项式之积就是  $f(x)$ .

(2) 对(5.8)式中的  $s$  用数学归纳法. 若  $s = 1$ , 则  $f(x) = p_1(x)$ , 因此  $f(x)$  是不可约多项式, 于是  $t = 1, q_1(x) = p_1(x)$ . 现假设对不可约因式个数小于  $s$  的多项式结论正确. 由(5.8)式, 有

$$p_1(x) \mid q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x),$$

由推论 5.5 可知, 必存在某个  $i$ , 不妨设  $i = 1$ , 使

$$p_1(x) \mid q_1(x).$$

但是  $p_1(x), q_1(x)$  都是不可约多项式, 因此存在  $0 \neq c_1 \in \mathbb{K}$ , 使

$$q_1(x) = c_1 p_1(x),$$

此即  $p_1(x) \sim q_1(x)$ . 将上式代入(5.8)式并消去  $p_1(x)$ , 得到

$$p_2(x) \cdots p_s(x) = c_1 q_2(x) \cdots q_t(x).$$

这时左边为  $s - 1$  个不可约多项式之积, 由归纳假设,  $s - 1 = t - 1$ , 即  $s = t$ . 另一方面, 存在  $0 \neq c_i \in \mathbb{K}$ , 使  $q_i(x) = c_i p_i(x)$ . □

### 推论 5.6

设  $f(x), g(x)$  是  $\mathbb{K}$  上的两个多项式, 不妨设它们有如下的公共的标准分解式:

$$f(x) = c_1 p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_n(x)^{e_n};$$

$$g(x) = c_2 p_1(x)^{f_1} p_2(x)^{f_2} \cdots p_n(x)^{f_n},$$

其中  $e_i \geq 0, f_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 则  $f(x), g(x)$  的最大公因式

$$(f(x), g(x)) = p_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \cdots p_n(x)^{k_n},$$

其中  $k_i = \min\{e_i, f_i\} (i = 1, 2, \cdots, n)$ .

类似地,  $f(x), g(x)$  的最小公倍式

$$[f(x), g(x)] = p_1(x)^{h_1} p_2(x)^{h_2} \cdots p_n(x)^{h_n},$$

其中  $h_i = \max\{e_i, f_i\} (i = 1, 2, \cdots, n)$ . ♥

**证明** 利用最大公因式和最小公倍式的定义容易证明. □

### 命题 5.16 (整除关系在平方下不变)

证明:  $g(x)^2 \mid f(x)^2$  的充要条件是  $g(x) \mid f(x)$ . ♣

**证明** 充分性是显然的, 只需证明必要性. 设  $f(x), g(x)$  的公共标准分解为

$$f(x) = c p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_k(x)^{e_k}, \quad g(x) = d p_1(x)^{f_1} p_2(x)^{f_2} \cdots p_k(x)^{f_k},$$

其中  $p_i(x)$  为互不相同的首一不可约多项式,  $c, d$  是非零常数, 则

$$f(x)^2 = c^2 p_1(x)^{2e_1} p_2(x)^{2e_2} \cdots p_k(x)^{2e_k}, \quad g(x)^2 = d^2 p_1(x)^{2f_1} p_2(x)^{2f_2} \cdots p_k(x)^{2f_k}.$$

若  $g(x)^2 \mid f(x)^2$ , 则  $2f_i \leq 2e_i$ , 从而  $f_i \leq e_i (1 \leq i \leq k)$ . 因此  $g(x) \mid f(x)$ . □

## 5.5 多项式函数与根

### 定义 5.8 (多项式的重根)

设  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ ,  $b \in \mathbb{K}$ , 若存在正整数  $k$ , 使  $(x-b)^k \mid f(x)$ , 但  $(x-b)^{k+1}$  不能整除  $f(x)$ , 则称  $b$  是  $f(x)$  的一个  $k$  重根. 若  $k=1$ , 则称  $b$  为单根.

### 定理 5.9 (多项式没有重因式的充要条件)

数域  $\mathbb{K}$  上的多项式  $f(x)$  没有重因式的充分必要条件是  $f(x)$  与  $f'(x)$  互素.

**证明** 设多项式  $p(x)$  是  $f(x)$  的  $m(m > 1)$  重因式, 则  $f(x) = p(x)^m g(x)$ , 故

$$f'(x) = mp(x)^{m-1}p'(x)g(x) + p(x)^m g'(x).$$

于是  $p(x)^{m-1} \mid f'(x)$ , 这表明  $f(x)$  与  $f'(x)$  有公因式  $p(x)^{m-1}$ . 反之, 若不可约多项式  $p(x)$  是  $f(x)$  的单因式, 可设  $f(x) = p(x)g(x)$ ,  $p(x)$  不能整除  $g(x)$ . 于是

$$f'(x) = p'(x)g(x) + p(x)g'(x).$$

若  $p(x)$  是  $f'(x)$  的因式, 则  $p(x) \mid p'(x)g(x)$ . 但  $p(x)$  不能整除  $g(x)$  且  $p(x)$  不可约, 故  $p(x) \mid p'(x)$ . 而  $p'(x) \neq 0$  且  $\deg p'(x) < \deg p(x)$ , 这是不可能的. 若  $f(x)$  无重因式, 则在  $f(x)$  的标准分解式(5.9)中,  $e_i = 1$  对一切  $i = 1, 2, \dots, m$  成立, 于是  $p_i(x)$  都不能整除  $f'(x)$ . 由于  $p_i(x)$  为不可约多项式, 故  $(p_i(x), f'(x)) = 1$ , 由互素多项式和最大公因式的基本性质(5)可知

$$(p_1(x)p_2(x) \cdots p_m(x), f'(x)) = 1,$$

即  $(f(x), f'(x)) = 1$ . □

### 定理 5.10

设  $d(x) = (f(x), f'(x))$ , 则  $f(x)/d(x)$  是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与  $f(x)$  的不可约因式相同 (不计重数).

**证明** 设  $f(x)$  有如(5.9)式的标准分解式, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= ce_1 p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_s(x)^{e_s} p_1'(x) \\ &\quad + ce_2 p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s} p_2'(x) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + ce_s p_1(x)^{e_1} p_2(x)^{e_2} \cdots p_s(x)^{e_s-1} p_s'(x). \end{aligned}$$

因此  $p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1}$  是  $f(x)$  与  $f'(x)$  的公因式. 注意到  $f(x)$  的因式一定具有  $p_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \cdots p_s(x)^{k_s}$  的形状. 不妨设  $h(x)$  是  $f(x), f'(x)$  的公因式. 注意到  $p_1(x)^{e_1}$  可以整除(??)式中右边除第一项外的所有项, 但不能整除第一项, 因此  $p_1(x)^{e_1}$  不能整除  $f'(x)$ . 同理,  $p_i(x)^{e_i}$  不能整除  $f'(x)$ . 由此我们不难看出

$$h(x) \mid p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1},$$

即  $p_1(x)^{e_1-1} p_2(x)^{e_2-1} \cdots p_s(x)^{e_s-1} = d(x)$ . 显然  $f(x)/d(x)$  没有重因式且与  $f(x)$  含有相同的不可约因式. □

### 命题 5.17 (多项式有 $k$ 重根的充要条件)

求证:  $a$  是多项式  $f(x)$  的  $k$  重根的充要条件是:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

**证明** 若  $a$  是  $f(x)$  的  $k$  重根, 可设  $f(x) = (x-a)^k g(x)$ ,  $g(x)$  不含因式  $x-a$ . 通过对  $f(x)$  求导可发现,  $x-a$  可整

除  $f^{(j)}(x) (1 \leq j \leq k-1)$ 。因此

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

而  $f^{(k)}(a) = k!g(a) \neq 0$ , 故必要性得证。

反之, 若  $a$  是  $f(x)$  的  $m$  重根, 若  $m > k$ , 则由必要性的证明可知, 将有  $f^{(k)}(a) = 0$ , 这与已知矛盾。同样, 若  $m < k$ , 则由必要性的证明可知, 将有  $f^{(m)}(a) \neq 0$ , 这也与已知矛盾, 于是只能  $m = k$ 。□

#### 命题 5.18

设  $\deg f(x) = n \geq 1$ , 若  $f'(x) \mid f(x)$ , 证明:  $f(x)$  有  $n$  重根。

**证明 证法一:** 设  $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$ , 现证明  $a$  是  $f(x)$  的  $n$  重根。假设  $a$  是  $f(x)$  的  $k$  重根,  $f(x) = (x-a)^k g(x)$ ,  $k < n$  且  $g(x)$  不含因式  $x-a$ , 则

$$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x) + (x-a)^k g'(x) = n(x-a)^{k-1}g(x).$$

于是  $g(x) \mid (x-a)g'(x)$ , 而  $g(x)$  与  $x-a$  互素, 故将有  $g(x) \mid g'(x)$ 。引出矛盾。

**证法二:** 设  $f(x) = \frac{1}{n}(x-a)f'(x)$ , 则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = b(x-a), \quad b \neq 0.$$

由定理 5.10 可知,  $x-a$  是  $f(x)$  唯一的不可约因式, 因此  $f(x) = b(x-a)^n$ 。□

#### 命题 5.19

数域  $\mathbb{F}$  上任意一个不可约多项式在复数域  $\mathbb{C}$  中无重根。

**证明** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式, 则  $\deg f(x) < \deg f'(x)$ 。从而  $f(x) \nmid f'(x)$ , 于是  $(f(x), f'(x)) = 1$ 。故由多项式没有重因式的充要条件可知  $f(x)$  复数域  $\mathbb{C}$  中无重根。□

#### 引理 5.1 (次数不为 1 得到不可约多项式没有根)

设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式且  $\deg f(x) \geq 2$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{F}$  中没有根。

**证明** 用反证法, 设  $b \in \mathbb{F}$  是  $f(x)$  的根, 由余数定理知  $(x-b) \mid f(x)$ , 即  $f(x) = (x-b)g(x)$  可分解为两个低次多项式之积, 这与  $f(x)$  不可约矛盾。□

#### 定理 5.11 (多项式根的有限性)

设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  次多项式, 则  $f(x)$  在  $\mathbb{F}$  中最多只有  $n$  个根。

**笔记** 由命题 1.12 可知, 若一个  $n$  次多项式的根超过  $n$  个, 则这个多项式一定恒为零。

**证明** 将  $f(x)$  作标准因式分解, 则由次数不为 1 得到不可约多项式没有根知  $f(x)$  在  $\mathbb{F}$  中根的个数等于该分解式中一次因式的个数, 它不会超过  $n$ 。□

#### 推论 5.7 (两个多项式相等的判定准则)

设  $f(x)$  与  $g(x)$  是  $\mathbb{F}$  上的次数不超过  $n$  的两个多项式, 若存在  $\mathbb{F}$  上  $n+1$  个不同的数  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ , 使

$$f(b_i) = g(b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

则  $f(x) = g(x)$ 。

**证明** 作  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 显然  $h(x)$  次数不超过  $n$ 。但它有  $n+1$  个不同的根, 因此只可能  $h(x) = 0$ , 即  $f(x) = g(x)$ 。□

**例题 5.5** 求证:  $f(x) = \sin x$  在实数域内不能表示为  $x$  的多项式。

**证明** 注意到  $f(x) = \sin x$  在实数域内有无穷多个根, 而任一非零多项式只能有有限个根, 因此  $f(x) = \sin x$  在实



数域内不能表示为  $x$  的多项式。  $\square$

**例题 5.6** 设  $f(x)$  是数域  $\mathbb{F}$  上的多项式, 若对  $\mathbb{F}$  中某个非零常数  $a$ , 有  $f(x+a) = f(x)$ , 求证:  $f(x)$  必是常数多项式。

**证明** 假设  $f(x)$  不是常数多项式, 则  $f(x) - f(a)$  也不是常数多项式, 但由  $f(x+a) = f(x)$  可知,  $ka$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是  $f(x) - f(a)$  的无穷多个根, 矛盾。  $\square$

**例题 5.7** 设  $f(x)$  是非常数多项式且  $f(x)$  可以整除  $f(x^m)$  ( $m \in \mathbb{N}_+$ ), 求证:  $f(x)$  的根只能是 0 或 1 的某个方根。

**证明** 将  $f(x)$  看成复数域上的多项式, 则  $f(x^m) = f(x)g(x)$ 。假设  $c$  是  $f(x)$  的一个复根, 即  $f(c) = 0$ , 则  $f(c^m) = 0$ , 即  $c^m$  也是  $f(x)$  的根。由此可知  $c^m, c^{m^2}, c^{m^3}, \dots$  也都是  $f(x)$  的根。由于  $f(x)$  只有有限个不同的复根, 故存在正整数  $k > t$ , 使得  $c^{m^k} = c^{m^t}$ 。因此若  $c \neq 0$ , 取  $n = m^k - m^t \in \mathbb{N}_+$ , 则有  $c^n = 1$ 。  $\square$

#### 定理 5.12 (余数定理)

设  $f(x) \in \mathbb{F}[x], b \in \mathbb{F}$ , 则存在  $\mathbb{F}$  上的多项式  $g(x)$ , 使得

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

特别地,  $b$  是  $f(x)$  的根的充要条件是  $(x - b) \mid f(x)$ 。



**笔记** 利用余数定理可以实现求根与判断整除性之间的相互转换。

**证明** 由带余除法知

$$f(x) = (x - b)g(x) + r(x),$$

其中  $\deg r(x) < 1$ , 因此  $r(x)$  为常数多项式。在上式中用  $b$  代替  $x$ , 即得  $r(x) = f(b)$ 。  $\square$

**例题 5.8** 设  $n$  是奇数, 求证:  $(x+y)(y+z)(x+z)$  可整除  $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ 。

**证明** 将多项式  $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$  看成是未定元  $x$  的多项式。当  $x = -y$  时,  $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n = 0$ , 因此由余数定理可知  $x+y$  是  $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$  的因式。同理  $x+z, y+z$  也是因式。又这 3 个因式互素, 故  $(x+y)(y+z)(x+z)$  可整除  $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ 。  $\square$

**例题 5.9** 设  $f(x)$  是一个  $n$  次多项式, 若当  $k = 0, 1, \dots, n$  时有  $f(k) = \frac{k}{k+1}$ , 求  $f(n+1)$ 。

**证明** 解今  $g(x) = (x+1)f(x) - x$ , 则  $0, 1, \dots, n$  是  $g(x)$  的根, 因此

$$g(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

即

$$(x+1)f(x) - x = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

其中  $c$  是一个常数。令  $x = -1$ , 可求出  $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ 。从而

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \left( \frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!} + x \right),$$

故

$$f(n+1) = \frac{1}{n+2} \left( \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} + n+1 \right).$$

当  $n$  是奇数时,  $f(n+1) = 1$ ; 当  $n$  是偶数时,  $f(n+1) = \frac{n}{n+2}$ 。  $\square$

**例题 5.10** 设  $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \mid (x^3 f_1(x^5) + x^2 f_2(x^5) + x f_3(x^5) + f_4(x^5))$ , 这里  $f_i(x)$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 都是实系数多项式, 求证:  $f_i(1) = 0$  ( $1 \leq i \leq 4$ )。

**证明** 设  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 是 1 的五次虚根, 则  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 都适合  $x^5 - 1$ , 从而由余数定理可知

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

故

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$



因此  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 都是  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  的根. 由条件可得

$$\varepsilon_i^3 f_1(1) + \varepsilon_i^2 f_2(1) + \varepsilon_i f_3(1) + f_4(1) = 0 \quad (1 \leq i \leq 4)$$

这是一个由 4 个未知数、4 个方程式组成的线性方程组 (将  $f_i(1)$  看成是未知数), 其系数行列式是一个 Vandermonde 行列式, 显然其值不等于零, 因此  $f_i(1) = 0$ .  $\square$

## 5.6 复系数多项式

### 定理 5.13 (代数基本定理)

次数大于零的复数域上的一元多项式至少有一个复数根.

**证明** 设复数域上的  $n$  次多项式为

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (5.10)$$

首先证明, 必存在一个复数  $z_0$ , 使对一切复数  $z$ , 有

$$|f(z)| \geq |f(z_0)|$$

令  $z = x + iy$ , 其中  $x, y$  是实变量. 展开  $f(x + iy)$  并分开实部和虚部, 则

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中  $u(x, y)$  及  $v(x, y)$  为实系数二元多项式函数. 又

$$|f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$$

是一个二元连续函数, 但

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |z|^n \left( |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| - \left| \frac{a_{n-2}}{z^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right), \end{aligned}$$

因此当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $|f(z)| \rightarrow \infty$ . 于是必存在一个实常数  $R$ , 当  $|z| \geq R$  时,  $|f(z)|$  充分大, 因此  $|f(z)|$  的最小值必含于圆圈  $|z| \leq R$  中. 但这是平面上的一个闭区域, 因此必存在  $z_0$  使  $|f(z_0)|$  为最小.

接下来要证明  $f(z_0) = 0$ . 用反证法, 即若  $f(z_0) \neq 0$ , 则必可找到  $z_1$ , 使  $|f(z_1)| < |f(z_0)|$ , 这样就与  $|f(z_0)|$  是最小值相矛盾. 将  $z = z_0 + h$  代入 (5.10) 式便可得到一个关于  $h$  的  $n$  次多项式:

$$f(z_0 + h) = b_n h^n + b_{n-1} h^{n-1} + \cdots + b_1 h + b_0. \quad (5.11)$$

当  $h = 0$  时,  $f(z_0) = b_0$ , 由假设  $f(z_0) \neq 0$ , 故

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = \frac{b_n}{f(z_0)} h^n + \frac{b_{n-1}}{f(z_0)} h^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{f(z_0)} h + 1$$

$b_1, b_2, \dots, b_n$  中有些可能为零, 但绝不全为零. 设  $b_k$  是第一个不为零的复数, 则

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = 1 + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + \cdots + c_n h^n \quad (5.12)$$

其中  $c_j = \frac{b_j}{f(z_0)}$ . 令  $d = \sqrt[k]{\frac{1}{|c_k|}}$ ,  $h = ed$  代入 (5.12) 式得

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = 1 - e^k + e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1} + c_{k+2}d^{k+2}e + \cdots)$$

取充分小的正实数  $e$  (至少小于 1), 使

$$e(|c_{k+1}d^{k+1}| + |c_{k+2}d^{k+2}| + \cdots) < \frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| &\leq |1 - e^k| + |e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1} + c_{k+2}d^{k+2}e + \cdots)| \\ &\leq 1 - e^k + e^{k+1}(|c_{k+1}d^{k+1}| + |c_{k+2}d^{k+2}| + \cdots) \\ &< 1 - e^k + \frac{1}{2}e^k \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^k < 1 \end{aligned}$$

将这样的  $e$  代入  $h = ed$ , 得

$$|f(z_0 + ed)| < |f(z_0)|$$

这就推出了矛盾。 □

### 推论 5.8

1. 复数域上的一元  $n$  次多项式恰有  $n$  个复根 (包括重根)。
2. 复数域上的不可约多项式都是一次多项式。
3. 复数域上的一元  $n$  次多项式必可分解为一次因式的乘积。

### 定理 5.14 (Vieta 定理)

若数域  $\mathbb{F}$  上的多项式  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$  在  $\mathbb{F}$  中有  $n$  个根  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j &= x_1 x_2 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}$$

**证明**  $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ , 将这个式子的右边展开与  $f(x)$  比较系数即得结论。 □

### 例题 5.11

- (1) 设三次方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的 3 个根成等差数列, 求证:

$$2p^3 - 9pq + 27r = 0$$

- (2) 设三次方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  ( $r \neq 0$ ) 的 3 个根成等比数列, 求证:

$$rp^3 = q^3$$

- (3) 设多项式  $x^3 + 3x^2 + mx + n$  的 3 个根成等差数列, 多项式  $x^3 - (m-2)x^2 + (n-3)x + 8$  的 3 个根成等比数列, 求  $m$  和  $n$ 。

**证明**

- (1) 设方程的 3 个根为  $c-d, c, c+d$ , 则由 Vieta 定理可得

$$\begin{cases} 3c = -p, \\ 3c^2 - d^2 = q, \\ c(c^2 - d^2) = -r \end{cases}$$

由此可得  $2p^3 - 9pq + 27r = 0$

(2) 设方程的 3 个根为  $\frac{c}{d}, c, cd$ , 则由 Vieta 定理可得

$$\begin{cases} \frac{c}{d} + c + cd = -p, \\ \frac{c^2}{d} + c^2 + c^2d = q, \\ \frac{c^3}{d} = -r \end{cases}$$

由此可得  $rp^3 = q^3$

(3) 由 (1)(2) 可知,  $m, n$  应满足如下关系:

$$\begin{cases} m = n + 2, \\ -8(m - 2)^3 = (n - 3)^3 \end{cases}$$

若  $n - 3 = -2(m - 2)$ , 则可联立求得  $m = 3, n = 1$ .

若  $n - 3 = -2\omega(m - 2)$ , 其中  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , 则可联立求得  $m = 2 - \sqrt{3}i, n = -\sqrt{3}i$ .

若  $n - 3 = -2\omega^2(m - 2)$ , 则可联立求得  $m = 2 + \sqrt{3}i, n = \sqrt{3}i$

□

**例题 5.12** 设  $x_1, x_2, x_3$  是三次方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  ( $r \neq 0$ ) 的 3 个根, 求这 3 个根倒数的平方和。

**证明** 由 Vieta 定理可得

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2} = \frac{q^2 - 2pr}{r^2}$$

□

**例题 5.13** 已知方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的 3 个根为  $x_1, x_2, x_3$ , 求一个三次方程使其根为  $x_1^3, x_2^3, x_3^3$ 。

**笔记** 利用代数恒等式:  $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ac) + 3abc$  得到

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 3x_1x_2x_3.$$

$$x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)^3 - 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 3x_1^3x_3^3x_2^3x_3^3.$$

即可由 Vieta 定理得到结果。

**证明** 由 Vieta 定理经计算可得

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p^3 + 3pq - 3r, \\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2, \\ x_1^3x_2^3x_3^3 = -r^3 \end{cases}$$

因此, 以  $x_1^3, x_2^3, x_3^3$  为根的三次方程为

$$x^3 + (p^3 - 3pq + 3r)x^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)x + r^3 = 0$$

□

**例题 5.14** 设多项式  $x^3 + px^2 + qx + r$  的 3 个根都是实数, 求证:  $p^2 \geq 3q$ 。

**证明** 设多项式的 3 个根为  $x_1, x_2, x_3$ , 由已知条件可知:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 \geq 0$$

用 Vieta 定理可计算出

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 &= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 2(p^2 - 3q). \end{aligned}$$

因此结论为真。

□

**例题 5.15** 设  $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  的  $n$  个根  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  皆不等于零, 求以  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$  为根的多项式。

**证明** 令

$$g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

则

$$x^n g\left(\frac{1}{x_i}\right) = a_0 + a_1x_i + \cdots + a_{n-1}x_i^{n-1} + a_nx_i^n = f(x_i) = 0$$

因为  $x_i \neq 0$ , 故  $g\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$ , 即  $g(x)$  的根为  $f(x)$  根之倒数。□

**例题 5.16** 设  $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) 是数域  $\mathbb{F}$  上的可约多项式, 求证: 多项式  $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$  在  $\mathbb{F}$  上也可约。

**证明** 设  $f(x) = p(x)q(x)$ , 其中  $\deg p(x) = m, \deg q(x) = n - m, 0 < m < n$ , 则

$$g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right) q\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^m p\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(x^{n-m} q\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

因此  $g(x)$  也可约。□

## 5.7 实系数多项式

### 定理 5.15 (实系数多项式的复根成对出现)

设  $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  是实系数多项式, 若复数  $a + bi$  ( $b \neq 0$ ) 是其根, 则  $a - bi$  也是它的根。

**证明** 令  $z = a + bi$ , 其共轭复数为  $\bar{z} = a - bi$ , 则

$$f(\bar{z}) = a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 = \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = 0.$$

由此即得结论。□

### 推论 5.9

实数域上的不可约多项式为一次多项式或下列二次多项式:

$$ax^2 + bx + c, \quad \text{其中 } b^2 - 4ac < 0$$

**证明** 一次多项式显然为不可约。当  $b^2 - 4ac < 0$  时,  $ax^2 + bx + c$  没有实根, 故不可约。

反过来, 任一高于二次的实系数多项式  $f(x)$  如有实根, 则  $f(x)$  可约; 如有一复根  $a + bi$  ( $b \neq 0$ ), 则  $a - bi$  也是它的根, 从而

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

是  $f(x)$  的因式, 故任一高于二次的实系数多项式  $f(x)$  都可约。从而我们只需考虑一次和二次多项式的情况。

(i) 当  $f(x)$  为一次实系数多项式时, 显然  $f(x)$  一定不可约。

(ii) 当  $f(x)$  为二次多项式时, 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 则当  $f(x)$  有实根, 即  $b^2 - 4ac \geq 0$  时, 设  $f(x)$  的两个实根分别为  $x_1, x_2$ , 则  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ , 此时  $f(x)$  可约。当  $f(x)$  无实根, 即  $b^2 - 4ac < 0$  时, 此时  $f(x)$  在实数域上不可约。□

### 推论 5.10

实数域上的多项式  $f(x)$  必可分解为有限个一次因式及不可约二次因式的乘积。

### 命题 5.20

设  $f(x)$  是复数域上的多项式, 若对任意的实数  $c$ ,  $f(c)$  总是实数, 求证:  $f(x)$  是实系数多项式。

**证明** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 分别令  $x = 0, 1, 2, \cdots, n$ , 得到一个以  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$  为未知数, 由  $n+1$  个方程组成的实系数线性方程组。该方程组的系数行列式是一个非零的 Vandermonde 行列式, 故方程组必有唯一解, 且解为实数。因此  $f(x)$  是实系数多项式。□

**例题 5.17** 证明: 奇数次实系数多项式必有实数根。

**证明** 实系数多项式的虚根总是成对出现的, 因此奇数次实系数多项式必有实数根。□

### 命题 5.21

设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是实系数多项式, 求证:

- (1) 若  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 全是正数或全是负数, 则  $f(x)$  没有非负实根, 即只有负实根。
- (2) 若  $(-1)^i a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 全是正数或全是负数, 则  $f(x)$  没有非正实根, 即只有正实根。
- (3) 若  $a_n > 0$  且  $(-1)^{n-i} a_i > 0$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), 则  $f(x)$  没有非正实根, 即只有正实根; 若  $a_n > 0$  且  $(-1)^{n-i} a_i \geq 0$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), 则  $f(x)$  没有负实根, 即只有正实数和零能作为根。

**证明** (1) 若  $a_i$  全是正数且  $f(x)$  有非负实根  $c \geq 0$ , 代入后可得

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \geq a_0 > 0,$$

这和  $c$  是根矛盾, 因此  $f(x)$  没有非负实根。同理可证  $a_i$  全是负数的情形。

(2) 和 (3) 同理可证。□

**例题 5.18** 求证: 实系数方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的根的实部全是负数的充要条件是

$$p > 0, \quad r > 0, \quad pq > r$$

**证明** 先证必要性: 设原方程的 3 个根为  $x_1, x_2, x_3$ , 其中  $x_1$  是实数根,  $x_1 < 0$ 。另假设  $x_2 = a + bi, x_3 = a - bi, a < 0$ , 则由 Vieta 定理可得

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(x_1 + 2a) > 0,$$

$$r = -x_1 x_2 x_3 = -x_1 (a^2 + b^2) > 0$$

$$\begin{aligned} pq - r &= -(x_1 + 2a)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + x_1 (a^2 + b^2) \\ &= -(x_1 + 2a)(2x_1 a + a^2 + b^2) + x_1 (a^2 + b^2) \\ &= -2a((x_1 + a)^2 + b^2) > 0 \end{aligned}$$

又假设  $x_1, x_2, x_3$  全是负实数, 则显然  $p > 0, q > 0, r > 0$ , 而

$$\begin{aligned} pq - r &= -(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3 \\ &= -((x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3) > 0 \end{aligned}$$

再证充分性: 由  $p > 0, r > 0, pq - r > 0$  可知  $q > 0$ , 若方程的根是实数, 则由命题 5.21(1) 可知, 此根必是负数。现假设方程有根  $x_1 < 0, x_2 = a + bi, x_3 = a - bi$ , 因为

$$pq - r = -2a((x_1 + a)^2 + b^2) > 0$$

故得  $a < 0$ , 结论得证。□

**例题 5.19** 设  $\varepsilon$  是 1 的  $n$  次根:

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

求证:  $\varepsilon^{mi}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是  $x^n - 1 = 0$  的全部根的充要条件是  $(m, n) = 1$ 。

**证明** 若  $(m, n) = 1$ , 只要证明  $\varepsilon^{mi}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 互不相同即可。若不然, 有  $\varepsilon^{ms} = \varepsilon^{mt}$  ( $1 \leq s < t \leq n$ ), 便有  $\varepsilon^{m(t-s)} = 1, n \mid m(t-s)$ 。因为  $m, n$  互素, 故  $n \mid (t-s)$ , 而  $0 < t-s < n$ , 矛盾。

反之, 若  $(m, n) = d > 1$ , 则  $\varepsilon^{m\frac{n}{d}} = \varepsilon^{n\frac{m}{d}} = 1$ , 而  $\frac{n}{d} \in \mathbb{N}_+$  且  $\frac{n}{d} < n$ , 故  $\varepsilon^{mj} = \varepsilon^{m(j-\frac{n}{d})+m\frac{n}{d}} = \varepsilon^{m(j-\frac{n}{d})}, j = \frac{n}{d} + 1, \cdots, n$ 。于是  $\varepsilon^{mi}$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 只生成了  $\frac{n}{d} < n$  个不同根。而  $x^n - 1$  有  $n$  个不同根, 故  $\varepsilon^{mi}$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 无法覆盖所有  $x^n - 1$  的所有  $n$  个不同根。从而  $\varepsilon^{mi}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 不可能是  $x^n - 1 = 0$  的全部根。□

## 命题 5.22

设  $f(x)$  是实系数首一多项式且无实数根, 求证:  $f(x)$  可以表示为两个实系数多项式的平方和。

**证明** 因为实系数多项式的虚根成对出现, 故  $f(x)$  是偶数次多项式, 不妨设它的根为

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}.$$

令

$$u(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n); \quad v(x) = (x - \overline{x_1})(x - \overline{x_2}) \cdots (x - \overline{x_n}),$$

则  $v(x) = \overline{u(x)}$ ,  $f(x) = u(x)v(x)$ 。又将  $u(x), v(x)$  的实部和虚部分开, 可设

$$u(x) = g(x) + ih(x), \quad v(x) = g(x) - ih(x),$$

即有

$$f(x) = g(x)^2 + h(x)^2.$$

□

## 5.8 有理系数多项式

## 定理 5.16 (整数系数多项式有有理根的必要条件)

设有  $n$  次整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (5.13)$$

则有理数  $\frac{q}{p}$  是  $f(x)$  的根的必要条件是  $p \mid a_n, q \mid a_0$ , 其中  $p, q$  是互素的整数。

♥

**证明** 将  $\frac{q}{p}$  代入(5.13)式得

$$a_n \left(\frac{q}{p}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{q}{p}\right) + a_0 = 0,$$

将上式两边乘以  $p^n$  得

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} p + \cdots + a_1 q p^{n-1} + a_0 p^n = 0.$$

从而

$$q \left( a_n q^{n-1} + a_{n-1} q^{n-2} p + \cdots + a_1 p^{n-1} \right) = -a_0 p^n.$$

于是  $q \mid a_0 p^n$ , 又因为  $(q, p) = 1$ , 所以  $q \mid a_0$ . 同理可得  $p \mid a_n$ .

□

## 定义 5.9 (本原多项式)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式, 若  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  的最大公约数等于 1, 则称  $f(x)$  为本原多项式。

♣

## 引理 5.2 (Gauss 引理)

两个本原多项式之积仍是本原多项式。

♥

**证明** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

是两个本原多项式。若

$$f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

不是本原多项式, 则  $c_0, c_1, \cdots, c_{m+n}$  必有一个公约素因子  $p$ 。因为  $f(x)$  是本原多项式, 故  $p$  不能整除  $f(x)$  的所有系数, 可设  $p \nmid a_0, p \nmid a_1, \cdots, p \nmid a_{i-1}$ , 但  $p \mid a_i$ 。同理, 可设  $p \nmid b_0, p \nmid b_1, \cdots, p \nmid b_{j-1}$ , 但  $p \mid b_j$ 。注意到

$$c_{i+j} = \cdots + a_{i-2}b_{j+2} + a_{i-1}b_{j+1} + a_i b_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots,$$

$p$  可整除  $c_{i+j}$ ,  $p$  也能整除右式除  $a_i b_j$  以外的所有项。但  $p$  不能整除  $a_i$  和  $b_j$ , 故  $p$  不能整除  $a_i b_j$ , 引出矛盾。□

### 定理 5.17

若整系数多项式  $f(x)$  在有理数域上可约, 则它必可分解为两个次数较低的整系数多项式之积。

**证明** 假设整系数多项式  $f(x)$  可以分解为两个次数较低的有理系数多项式之积:

$$f(x) = g(x)h(x),$$

$g(x)$  的各项系数为有理数, 必有一个公分母记为  $c$ , 于是  $g(x) = \frac{1}{c}(cg(x))$ , 其中  $cg(x)$  为整系数多项式。若把  $cg(x)$  中所有系数的最大公因数  $d$  提出来, 则

$$g(x) = \frac{d}{c} \left( \frac{c}{d} g(x) \right),$$

$\frac{c}{d}g(x)$  是一个本原多项式。这表明  $g(x) = ag_1(x)$ ,  $a$  为有理数,  $g_1(x)$  为本原多项式。同理,  $h(x) = bh_1(x)$ , 其中  $b$  为有理数,  $h_1(x)$  为本原多项式。于是我们得到

$$f(x) = g(x)h(x) = abg_1(x)h_1(x).$$

由 Gauss 引理知,  $g_1(x)h_1(x)$  是本原多项式。若  $ab$  不是一个整数, 则  $abg_1(x)h_1(x)$  将不是整系数多项式, 这与  $f(x)$  是整系数多项式相矛盾。因此  $ab$  必须是整数, 于是  $f(x)$  可以分解为两个次数较小的整系数多项式之积。□

### 定义 5.10 (整系数多项式在整数环上可约)

我们通常称一个整系数多项式  $f(x)$  在整数环上可约, 若它可以分解为两个次数较低的整系数多项式之积。

### 命题 5.23

整系数多项式  $f(x)$  若在整数环上不可约, 则在有理数域上也不可约。

**证明** 由定理 5.17 即得。□

**例题 5.20**  $f(x)$  是次数大于零的首一整系数多项式, 若  $f(0), f(1)$  都是奇数, 求证:  $f(x)$  没有有理根。

**证明** 若  $c$  是偶数, 则上述左边为奇数, 不可能等于零。若  $c$  是奇数, 令  $c = 2b + 1$ , 其中  $b$  是整数, 可得

$$(2b+1)^n + a_{n-1}(2b+1)^{n-1} + \cdots + a_1(2b+1) + a_0 = 0.$$

用二项式定理展开后将看到, 上式左边是一个偶数加上  $1 + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ , 故必是奇数, 也不可能等于零。因此  $f(x)$  没有有理根。□

### 命题 5.24

设  $f(x)$  是实系数多项式, 若对任意的有理数  $c$ ,  $f(c)$  总是有理数, 求证:  $f(x)$  是有理系数多项式。

**注** 证明与命题 5.20

**证明** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 分别令  $x = 0, 1, 2, \cdots, n$ , 得到一个以  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$  为未知数, 由  $n+1$  个方程式组成的实系数线性方程组。该方程组的系数行列式是一个非零的 Vandermonde 行列式, 故

方程组必有唯一解, 且解为有理数。因此  $f(x)$  是有理系数多项式。□

**例题 5.21** 设  $f(x)$  是有理系数多项式,  $a, b, c$  是有理数, 但  $\sqrt{c}$  是无理数。求证: 若  $a + b\sqrt{c}$  是  $f(x)$  的根, 则  $a - b\sqrt{c}$  也是  $f(x)$  的根。

**证明** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 则

$$f(a + b\sqrt{c}) = a_n(a + b\sqrt{c})^n + a_{n-1}(a + b\sqrt{c})^{n-1} + \cdots + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 = 0$$

将  $(a + b\sqrt{c})^k$  用二项式定理展开, 可设

$$f(a + b\sqrt{c}) = A + B\sqrt{c} = 0,$$

其中  $A, B$  都是有理数。因为  $\sqrt{c}$  是无理数, 故  $A = B = 0$ 。因此

$$f(a - b\sqrt{c}) = A - B\sqrt{c} = 0,$$

即  $a - b\sqrt{c}$  也是  $f(x)$  的根。□

**例题 5.22** 设  $f(x)$  是有理系数多项式,  $a, b, c, d$  是有理数, 但  $\sqrt{c}, \sqrt{d}, \sqrt{cd}$  都是无理数。求证: 若  $a\sqrt{c} + b\sqrt{d}$  是  $f(x)$  的根, 则下列数也是  $f(x)$  的根:

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{d}, -a\sqrt{c} + b\sqrt{d}, -a\sqrt{c} - b\sqrt{d}.$$

**证明** 令

$$g(x) = (x - (a\sqrt{c} + b\sqrt{d}))(x - (a\sqrt{c} - b\sqrt{d}))(x - (-a\sqrt{c} + b\sqrt{d}))(x - (-a\sqrt{c} - b\sqrt{d})),$$

则经计算可得

$$g(x) = x^4 - 2(a^2c + b^2d)x^2 + (a^2c - b^2d)^2.$$

注意到  $g(x)$  是一个有理数首一多项式, 只要证明它不可约, 便可由极小多项式的充要条件得到  $g(x)$  是  $a\sqrt{c} + b\sqrt{d}$  的极小多项式, 从而由极小多项式的基本性质可知  $g(x) \mid f(x)$ , 于是结论成立。显然  $g(x)$  没有有理系数的一次因式, 只要证明它没有有理系数的二次因式即可。经过简单的计算可知, 在  $g(x)$  的一个一次因式中任取一个一次因式相乘都不是有理系数多项式, 因此  $g(x)$  没有有理系数的二次因式。□

**例题 5.23** 求以  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  为根的次数最小的首一有理系数多项式。

**注** 确定  $f(x)$  的 6 个根的方法: 原方程  $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$  的解为  $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 。但三次方程  $y^3 = 3$  的所有根为  $y = \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\omega, \sqrt[3]{3}\omega^2$  (其中  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  是三次单位根), 因此原方程对应三个解:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega, \quad \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega^2.$$

在消去  $\sqrt{2}$  的平方步骤中, 方程  $x^3 + 6x - 3 = (3x^2 + 2)\sqrt{2}$  的两边平方后, 原方程中的  $\sqrt{2}$  可以被替换为  $-\sqrt{2}$ , 从而产生另一组解:

$$x = -\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \quad -\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega, \quad -\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega^2.$$

**解** 本题即求  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  的极小多项式。令  $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$ , 两边立方得到  $(x - \sqrt{2})^3 = 3$ 。整理可得  $x^3 + 6x - 3 = (3x^2 + 2)\sqrt{2}$ , 再两边平方可得,  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  适合下列多项式:

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

由  $f(x)$  的构造过程, 不难看出  $f(x)$  的 6 个根分别为  $\pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega, \pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\omega^2$ 。其中  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。因此, 我们有

$$f(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt[3]{3})(x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\omega)(x + \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\omega)(x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\omega^2)(x + \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\omega^2).$$

通过简单的验证可知, 任取  $f(x)$  的 2 个一次因式相乘都不是有理系数多项式; 任取  $f(x)$  的 3 个一次因式相乘也都不是有理系数多项式, 因此  $f(x)$  是有理数域上的不可约多项式, 从而由极小多项式的充要条件可知,  $f(x)$  是  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  的极小多项式。

**例题 5.24** 求证: 有理系数多项式  $x^4 + px^2 + q$  在有理数域上可约的充要条件是或者  $p^2 - 4q = k^2$ , 其中  $k$  是一个



有理数; 或者  $q$  是某个有理数的平方, 且  $\pm 2\sqrt{q} - p$  也是有理数的平方。

**证明** 必要性: 若多项式  $x^4 + px^2 + q$  在有理数域上可约, 考虑下列两种情况:

(1)  $x^4 + px^2 + q$  有有理数根  $t$ , 这时  $t^2$  是  $x^2 + px + q$  的有理根, 因此其判别式  $p^2 - 4q$  必是一个有理数的完全平方。

(2)  $x^4 + px^2 + q$  无有理数根, 则  $x^4 + px^2 + q$  在有理数域上可分解为两个二次多项式的积。设  $x^4 + px^2 + q = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ , 展开后比较系数可得

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

若  $a = 0$ , 则  $c = 0$ , 这时将有  $p = b + d$ ,  $q = bd$ , 因此  $p^2 - 4q = (b - d)^2$ 。若  $a \neq 0$ , 则  $b = d$ , 比较系数后可知  $p = 2b - a^2$ ,  $q = b^2$ , 因此  $\pm 2\sqrt{q} - p = a^2$ 。

充分性: 若  $p^2 - 4q = k^2$ , 则

$$x^4 + px^2 + q = x^4 + px^2 + \frac{1}{4}(p + k)(p - k) = \left(x^2 + \frac{1}{2}(p + k)\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}(p - k)\right).$$

因此多项式可约。

若  $q = b^2$ ,  $\pm 2\sqrt{q} - p = \pm 2b - p = a^2$ , 则  $p = -a^2 \pm 2b$ 。于是

$$x^4 + px^2 + q = x^4 + (-a^2 \pm 2b)x^2 + b^2 = (x^2 \pm b)^2 - a^2x^2$$

也可约。 □

#### 定理 5.18 (Eisenstein 判别法)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式,  $a_n \neq 0, n \geq 1, p$  是一个素数。若  $p \mid a_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ , 但  $p \nmid a_n$  且  $p^2 \nmid a_0$ , 则  $f(x)$  在有理数域上不可约。 ♥

**证明** 只需证明  $f(x)$  在整数环上不可约即可。设  $f(x)$  可分解为两个次数较低的整系数多项式之积:

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0)(c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_0),$$

其中  $m + t = n$ 。显然  $a_0 = b_0 c_0, a_n = b_m c_t$ 。由假设  $p \mid a_0$ , 故  $p \mid b_0$  或  $p \mid c_0$ 。又  $p^2 \nmid a_0$ , 故  $p$  不能同时整除  $b_0$  及  $c_0$ 。不妨设  $p \mid b_0$  但  $p \nmid c_0$ 。又由假设,  $p$  不能整除  $a_n = b_m c_t$ , 故  $p$  既不能整除  $b_m$  又不能整除  $c_t$ 。因此不妨设  $p \mid b_0, p \mid b_1, \cdots, p \mid b_{j-1}$  但  $p$  不能整除  $b_j$ , 其中  $0 < j \leq m < n$ 。而

$$a_j = b_j c_0 + b_{j-1} c_1 + \cdots + b_0 c_j,$$

根据假设,  $p \mid a_j$ , 又  $p$  可整除上述右端除  $b_j c_0$  外的其余项, 而不能整除  $b_j c_0$  这一项, 引出矛盾。 □

**例题 5.25** 设  $p_1, \cdots, p_m$  是  $m$  个互不相同的素数, 求证: 对任意的  $n \geq 1$ , 下列多项式在有理数域上不可约:

$$f(x) = x^n - p_1 \cdots p_m.$$

**证明** 用 Eisenstein 判别法即可证明。(取  $p = p_i$  即可) □

**例题 5.26** 证明:  $x^8 + 1$  在有理数域上不可约。

**证明** 作代换  $x = y + 1$ , 得

$$x^8 + 1 = (y + 1)^8 + 1 = y^8 + 8y^7 + 28y^6 + 56y^5 + 70y^4 + 56y^3 + 28y^2 + 8y + 2.$$

显然 2 可整除除第一项外的所有系数, 但 4 不能整除常数项。用 Eisenstein 判别法可知  $(y + 1)^8 + 1$  不可约, 故  $x^8 + 1$  也不可约。 □

**例题 5.27** 设  $f(x)$  是有理系数多项式, 已知  $\sqrt{2}$  是  $f(x)$  的根, 证明:  $\sqrt{2}\varepsilon, \sqrt{2}\varepsilon^2, \cdots, \sqrt{2}\varepsilon^{n-1}$  也是  $f(x)$  的根, 其

中  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  是 1 的  $n$  次根。

**证明** 显然  $\sqrt{2}$  适合多项式  $x^n - 2$ , 由 Eisenstein 判别法可知,  $x^n - 2$  在有理数域上不可约, 因此它是  $\sqrt{2}$  的极小多项式。最后由极小多项式的基本性质可得  $(x^n - 2) \mid f(x)$ , 从而结论得证。□

**例题 5.28** 设  $f(x)$  是次数大于 1 的奇数次有理系数不可约多项式, 求证: 若  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  在复数域内两个不同的根, 则  $x_1 + x_2$  必不是有理数。

**证明** 不妨设  $f(x)$  为首一多项式, 我们用反证法来证明结论。设  $x_1 + x_2 = r$  为有理数, 则有有理系数多项式  $f(x)$  与  $f(r - x)$  有公共根  $x_1$ 。因为  $f(x)$  在有理数域上不可约, 故  $f(x)$  是  $x_1$  的极小多项式, 从而由极小多项式的基本性质可得  $f(x) \mid f(r - x)$ 。注意到  $f(x)$  与  $f(r - x)$  次数相同, 首项系数相同, 从而有  $f(r - x) = -f(x)$ 。令  $x = \frac{r}{2}$ , 则可得  $f\left(\frac{r}{2}\right) = 0$ , 即  $\frac{r}{2}$  是  $f(x)$  的一个有理根, 这与  $f(x)$  在有理数域上不可约相矛盾。□

**例题 5.29** 设  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ , 其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是  $n$  个不同的整数, 求证:  $f(x)$  在有理数域上不可约。

**证明** 由命题 5.23 可知, 只要证明  $f(x)$  在整数环上不可约即可。用反证法, 设  $f(x) = g(x)h(x)$ , 其中  $g(x), h(x)$  都是次数小于  $n$  的首一整数系数多项式。注意到

$$g(a_i)h(a_i) = -1,$$

因为  $g(x), h(x)$  是整数系数多项式, 故  $g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$  或  $g(a_i) = -1, h(a_i) = 1$ 。无论是哪种情况, 都有

$$g(a_i) + h(a_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

即次数小于  $n$  的多项式  $g(x) + h(x)$  有  $n$  个不同的根, 故  $g(x) + h(x) = 0$ 。因此  $f(x) = -g(x)^2$ , 但  $f(x)$  是首一多项式, 而  $-g(x)^2$  的首项系数为  $-1$ , 矛盾。□

**例题 5.30** 设  $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ , 其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是  $n$  个不同的整数, 求证:  $f(x)$  在有理数域上不可约。

**证明** 由命题 5.23 可知, 只要证明  $f(x)$  在整数环上不可约即可。用反证法, 设  $f(x) = u(x)v(x)$ , 其中  $u(x), v(x)$  都是次数小于  $2n$  的首一整数系数多项式。注意到  $f(x)$  没有实根, 故  $u(x), v(x)$  也都没有实根, 从而由实系数多项式虚根成对可知,  $u(x), v(x)$  作为实数域上的函数都恒大于零。由于  $f(x)$  是  $2n$  次多项式, 故  $u(x)$  和  $v(x)$  的次数至少有一个不超过  $n$ , 不妨设  $u(x)$  的次数不超过  $n$ 。

若  $u(x)$  的次数小于  $n$ , 则由  $f(a_i) = 1$  可得  $u(a_i)v(a_i) = 1$ , 因此  $u(a_i) = 1$ 。考虑非零多项式  $u(x) - 1$ , 由上面的分析可知它有  $n$  个不同的根  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ , 这与它的次数小于  $n$  矛盾。

因此  $u(x)$  只能是  $n$  次首一多项式, 于是  $v(x)$  也是  $n$  次首一多项式。另一方面, 由于  $u(a_i)v(a_i) = 1$ , 故  $u(a_i) = v(a_i) = \pm 1 (1 \leq i \leq n)$ 。注意到  $u(x) - v(x)$  的次数小于  $n$  并且它有  $n$  个不同的根  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ , 因此  $u(x) = v(x)$  或  $u(x) = -v(x)$ 。今设  $u(x) = v(x)$ , 则  $f(x) = u(x)^2 + 1$ , 即

$$(u(x) + h(x))(u(x) - h(x)) = 1.$$

因为  $u(x), h(x)$  都是整数系数多项式, 故或者  $u(x) + h(x) = 1, u(x) - h(x) = 1$ ; 或者  $u(x) + h(x) = -1, u(x) - h(x) = -1$ , 于是作差可得  $h(x) = 0$ , 矛盾。因此结论得证。□

## 5.9 多元多项式

因式分解定理对多元多项式仍成立。(证明见抽象代数内容)

### 引理 5.3

若  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  及  $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  都是  $K$  上非零的  $n$  元多项式, 则按字典排列法排列后乘积的首项等于  $f$  的首项与  $g$  的首项之积。

**证明** 设  $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$  和  $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$  分别是  $f$  和  $g$  的首项(按字典排列法), 它们的乘积为  $abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$ 。其他任意两个单项式  $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$  和  $dx_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$  之积为  $cdx_1^{k_1+r_1}x_2^{k_2+r_2}\cdots x_n^{k_n+r_n}$ 。设  $i_1 = k_1, \cdots, i_{t-1} = k_{t-1}, i_t >$

$k_t; j_1 = r_1, \dots, j_{s-1} = r_{s-1}, j_s > r_s$ 。不妨设  $t \leq s$ ，显然

$$i_1 + j_1 = k_1 + r_1, \dots, i_{t-1} + j_{t-1} = k_{t-1} + r_{t-1}, i_t + j_t > k_t + r_t.$$

因此  $abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\dots x_n^{i_n+j_n}$  先于  $cdx_1^{k_1+r_1}x_2^{k_2+r_2}\dots x_n^{k_n+r_n}$ 。

同理可证明： $abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\dots x_n^{i_n+j_n}$  先于  $adx_1^{i_1+r_1}x_2^{i_2+r_2}\dots x_n^{i_n+r_n}$  和  $cbx_1^{k_1+j_1}x_2^{k_2+j_2}\dots x_n^{k_n+j_n}$ 。因此它确是  $fg$  的首项。□

#### 命题 5.25 (多元多项式的整性)

若  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ，则

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0.$$

**证明** 由  $f$  和  $g$  的首项不为零及引理 5.3 可知  $fg$  的首项不为零，于是  $fg \neq 0$ 。□

#### 推论 5.11

若  $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ，且

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)h(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**证明** 由条件可得

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

又因为  $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ， $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ，则由命题 5.25 可知

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]h(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$$

矛盾！故  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

□

#### 定义 5.11 (齐次多项式)

若一个多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的每个单项式都是  $k$  次式，则称之为  $k$  次齐次多项式或  $k$  次型。

#### 命题 5.26 (齐次多项式的基本性质)

- (1) 两个次数相同的齐次多项式之和若不为零，则必仍是同次齐次多项式。任意两个齐次多项式之积仍为齐次多项式。
- (2) 任一  $n$  元多项式均可表示为若干个齐次多项式之和，

**证明**

- (1) 显然。
- (2) 这只需要将各次数相等的项放在一起即可。

□

#### 引理 5.4 (多元多项式的非零性)

设  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $K$  上非零的  $n$  元多项式，则必存在  $K$  中的数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，使  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ 。

**证明** 对未定元个数  $n$  用数学归纳法。当  $n = 1$  时，多项式  $f(x)$  只有有限个零点，故总有  $a \in K$  使  $f(a) \neq 0$ 。现

设对有  $n-1$  个未定元的多项式结论成立, 将  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  写成未定元  $x_n$  的多项式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 + b_1 x_n + \dots + b_m x_n^m,$$

其中  $b_i = b_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  是  $n-1$  元多项式. 因为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , 故可设  $b_m \neq 0$ . 由归纳假设, 存在  $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ , 使

$$b_m(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0.$$

因而

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) = b_0(a_1, \dots, a_{n-1}) + b_1(a_1, \dots, a_{n-1})x_n + \dots + b_m(a_1, \dots, a_{n-1})x_n^m$$

是一个非零的以  $x_n$  为未定元的一元多项式, 故存在  $a_n \in K$ , 使

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0.$$

□

### 命题 5.27 (多元多项式相等的充要条件)

数域  $K$  上的两个  $n$  元多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  相等的充分必要条件是对一切  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ , 均有

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

▲

**证明** 只需证明充分性. 作

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

若  $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , 则由多元多项式的非零性可知必有  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ , 使

$$h(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0,$$

这与假设矛盾. □

**例题 5.31** 设  $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  是  $K$  上的多元多项式. 假设对一切使  $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  的  $a_1, \dots, a_n \in K$ , 均有  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , 求证:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

**证明** 用反证法, 假设  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , 则由多元多项式的整性可知

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n) \neq 0,$$

于是由多元多项式的非零性存在  $a_1, \dots, a_n \in K$ , 使得  $h(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , 从而  $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  并且  $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , 这与条件矛盾. □

### 命题 5.28

设  $A(x_1, x_2, \dots, x_m) = (a_{ij})$  为  $n$  阶方阵, 其元素  $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  都是  $\mathbb{K}$  上的多元多项式. 设  $g(x_1, x_2, \dots, x_m), h_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 都是  $\mathbb{K}$  上的多元多项式,

$$U = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m \mid h_i(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq 0 (1 \leq i \leq k)\}.$$

若对所有的  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in U$ , 都成立

$$|A(a_1, a_2, \dots, a_m)| = g(a_1, a_2, \dots, a_m),$$

证明:  $|A(x_1, x_2, \dots, x_m)| = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

▲

**笔记** 这个命题告诉我们: 在元素为多元多项式的文字行列式的求值过程中, 在假设某些非零条件下成立的情形下得到的结果, 其实就是所求行列式的值. 因此, 在求行列式的过程中, 可以暂不考虑未定元取特殊值的情形, 而把主要精力放在一般的情形进行计算即可.

**证明** 用反证法, 设  $(|A| - g)(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ , 则由多元多项式的整性可知

$$(|A| - g)h_1 \cdots h_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0,$$

于是存在  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ , 使得  $(|A| - g)h_1 \cdots h_k(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$ , 从而  $h_i(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ), 即  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in U$ , 并且  $(|A| - g)(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$ , 即  $|A(a_1, a_2, \dots, a_m)| \neq g(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , 这与条件矛盾。□

#### 定理 5.19 (行列式的求根法)

设  $A(x_1, x_2, \dots, x_m) = (a_{ij})$  为  $n$  阶方阵, 其元素  $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_m)$  都是  $\mathbb{K}$  上的多元多项式, 于是  $|A|$  也是  $\mathbb{K}$  上的多元多项式。若把  $x_1$  看成未定元, 则可将  $|A|$  整理成关于  $x_1$  的一元多项式:

$$|A| = c_0(x_2, \dots, x_m)x_1^d + c_1(x_2, \dots, x_m)x_1^{d-1} + \cdots + c_d(x_2, \dots, x_m), \quad (5.14)$$

其中  $c_0(x_2, \dots, x_m) \neq 0, d \geq 1$  为次数。假设存在互异的多项式  $g_1(x_2, \dots, x_m), \dots, g_d(x_2, \dots, x_m)$ , 使得当  $x_1 = g_i(x_2, \dots, x_m)$  ( $1 \leq i \leq d$ ) 时  $|A| = 0$ , 证明:

$$|A| = c_0(x_2, \dots, x_m)(x_1 - g_1(x_2, \dots, x_m)) \cdots (x_1 - g_d(x_2, \dots, x_m))$$

**证明** 由假设  $0 = c_0(x_2, \dots, x_m)g_1^d + \cdots + c_{d-1}(x_2, \dots, x_m)g_1 + c_d(x_2, \dots, x_m)$ , 故有

$$|A| = c_0(x_2, \dots, x_m)(x_1^d - g_1^d) + \cdots + c_{d-1}(x_2, \dots, x_m)(x_1 - g_1)R_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

在上述式中令  $x_1 = g_2(x_2, \dots, x_m)$ , 则有  $0 = (g_2 - g_1)R_1(g_2, x_2, \dots, x_m)$ 。注意到  $g_2 - g_1 \neq 0$ , 故由多元多项式的整性可得  $R_1(g_2, x_2, \dots, x_m) = 0$ 。再由相同的讨论可知,  $x_1 - g_2$  是  $R_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$  的因式, 从而

$$|A| = (x_1 - g_1)(x_1 - g_2)R_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

不断地这样做下去, 可得

$$|A| = (x_1 - g_1) \cdots (x_1 - g_d)R_d(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

最后与(5.14)式比较  $x_1$  的首项系数可得  $R_d(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_0(x_2, \dots, x_m)$ 。□

## 5.10 互素多项式的应用

#### 命题 5.29

设  $f(x), g(x)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的互素多项式,  $A$  是  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶方阵, 满足  $f(A) = O$ , 证明:  $g(A)$  是可逆矩阵。◆

**证明** 根据假设, 存在  $\mathbb{K}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

在上述式中代入  $x = A$ , 可得恒等式

$$f(A)u(A) + g(A)v(A) = I_n$$

因为  $f(A) = O$ , 故有  $g(A)v(A) = I_n$ , 从而  $g(A)$  是非零矩阵且  $g(A)^{-1} = v(A)$ 。□

#### 命题 5.30

设  $f(x), g(x)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的互素多项式,  $A$  是  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶方阵, 证明:  $f(A)g(A) = O$  的充要条件是  $r(f(A)) + r(g(A)) = n$ 。◆

**证明** 根据假设, 存在  $\mathbb{K}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

在上述式中代入  $x = A$ , 可得恒等式

$$f(A)u(A) + g(A)v(A) = I_n$$


考虑如下分块矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} f(A) & O \\ O & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & f(A)u(A) \\ O & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ O & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ -f(A)g(A) & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & I_n \\ -f(A)g(A) & O \end{pmatrix},$$

故有  $r(f(A)) + r(g(A)) = r(f(A)g(A)) + n$ , 从而结论得证。□

### 命题 5.31

设  $f(x), g(x)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的互素多项式,  $\varphi$  是  $\mathbb{K}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 满足  $f(\varphi)g(\varphi) = 0$ , 证明:  $V = V_1 \oplus V_2$ , 其中  $V_1 = \text{Ker} f(\varphi), V_2 = \text{Ker} g(\varphi)$ 。

 **笔记** 这个命题告诉我们: 多项式的互素因式分解可以诱导出空间的直和分解, 从几何层面上看, 这就是相似标准型理论原始的除法点。

**证明** 根据假设, 存在  $\mathbb{K}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

在上述式中代入  $x = \varphi$ , 可得恒等式

$$f(\varphi)u(\varphi) + g(\varphi)v(\varphi) = I_V$$

对任意的  $\alpha \in V$ , 由上述可得

$$\alpha = f(\varphi)u(\varphi)(\alpha) + g(\varphi)v(\varphi)(\alpha),$$

注意到

$$g(\varphi)(f(\varphi)u(\varphi)(\alpha)) = g(\varphi)f(\varphi)u(\varphi)(\alpha) = u(\varphi)f(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = 0,$$

$$f(\varphi)(g(\varphi)v(\varphi)(\alpha)) = f(\varphi)g(\varphi)v(\varphi)(\alpha) = v(\varphi)f(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = 0.$$

于是  $f(\varphi)u(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker} g(\varphi), g(\varphi)v(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker} f(\varphi)$ , 故有  $V = V_1 + V_2$ 。任取  $\beta \in V_1 \cap V_2$ , 由上述可得

$$\beta = u(\varphi)f(\varphi)(\beta) + v(\varphi)g(\varphi)(\beta) = 0,$$

故有  $V_1 \cap V_2 = 0$ , 因此  $V = V_1 \oplus V_2$ 。□

**例题 5.32** 设  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + a_2\sqrt[n]{4} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n-1\}$ , 证明:  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  是一个数域, 并求  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  作为  $\mathbb{Q}$  上线性空间的一组基。

**证明** 设  $f(x) = x^n - 2$ , 由 Eisenstein 判别法可知  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上不可约, 从而  $f(x)$  是  $\sqrt[n]{2}$  的极小多项式。我们先证明:  $a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0$  的充要条件是  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 。充分性是显然的, 现证必要性: 令  $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ , 则  $g(\sqrt[n]{2}) = 0$ , 由极小多项式的基本性质可得  $f(x) \mid g(x)$ 。因为  $g(x)$  的次数小于  $n$ , 故只能是  $g(x) = 0$ , 即  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 。

利用  $\sqrt[n]{2}^n = 2$  容易验证,  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  中任意两个数的加法、减法和乘法都是封闭的。要证明  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  是数域, 只要证明除法或者取倒数封闭即可。任取  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  中的非零数  $\alpha = a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \neq 0$ , 由上面的讨论可知  $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$  不全为零。令  $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ , 则  $g(\sqrt[n]{2}) \neq 0$ 。因为  $f(x)$  不可约且  $g(x) \neq 0$  的次数小于  $n$ , 故  $f(x)$  与  $g(x)$  互素, 由多项式互素的充要条件可知, 存在有理系数多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

在上述中代入  $x = \sqrt[n]{2}$ , 可得  $\sqrt[n]{2}v(\sqrt[n]{2}) = 1$ , 于是  $\alpha^{-1} = v(\sqrt[n]{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 。因此,  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  是数域。

由  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  的定义可知,  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  中任一元都是  $1, \sqrt[n]{2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$  的  $\mathbb{Q}$ -线性组合; 又由开始的讨论可知,  $1, \sqrt[n]{2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$  是  $\mathbb{Q}$ -线性无关的, 因此它们构成了  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  作为  $\mathbb{Q}$  上线性空间的一组基。特别地,  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = n$ 。□

## 命题 5.32

设  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$  是数域  $\mathbb{K}$  上的不可约多项式,  $\varphi$  是  $\mathbb{K}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  是  $V$  中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_1) = \alpha_2, \varphi(\alpha_2) = \alpha_3, \cdots, \varphi(\alpha_{n-1}) = \alpha_n, \varphi(\alpha_n) = -a_n\alpha_1 - a_{n-1}\alpha_2 - \cdots - a_1\alpha_n.$$

证明:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  是  $V$  的一组基。



**证明** 我们只要证明  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关即可。用反证法, 设存在不全为零的  $n$  个数  $c_1, c_2, \cdots, c_n$ , 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = 0,$$

则有

$$(c_1I_V + c_2\varphi + \cdots + c_n\varphi^{n-1})(\alpha_1) = 0$$

令  $g(x) = c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}$ , 则  $g(x) \neq 0$  且  $g(\varphi)(\alpha_1) = 0$ 。另一方面, 由假设容易验证  $f(\varphi)(\alpha_1) = 0$ 。因为  $f(x)$  不可约且  $g(x)$  的次数小于  $n$ , 故  $f(x)$  与  $g(x)$  互素, 从而存在  $\mathbb{K}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

在上述中代入  $x = \varphi$ , 可得恒等式

$$f(\varphi)u(\varphi) + g(\varphi)v(\varphi) = I_V$$

上式两边同时作用  $\alpha_1$  可得

$$\alpha_1 = u(\varphi)f(\varphi)(\alpha_1) + v(\varphi)g(\varphi)(\alpha_1) = 0,$$

这与条件  $\alpha_1 \neq 0$  矛盾, 从而结论得证。

□

## 第六章 特征值

**注** 代数基本定理保证了任一  $n(n \geq 1)$  阶复矩阵  $A$  或  $n$  维复线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  至少有一个复特征值  $\lambda_0$ , 线性方程组的求解理论保证了  $\lambda_0$  至少有一个复特征向量。如果是在数域  $\mathbb{F}$  上, 则需要  $A$  或  $\varphi$  的特征值  $\lambda_0$  属于  $\mathbb{F}$ , 然后线性方程组的求解理论才能保证  $\lambda_0$  在  $\mathbb{F}^n$  或  $V$  中有对应的特征向量。因此, 后面如无特殊说明, 总是假设在复数域  $\mathbb{C}$  上考虑问题。

### 6.1 对角化

#### 定义 6.1 (可对角化线性变换)

若  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  在某组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵为对角阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则称  $\varphi$  为**可对角化线性变换**。

#### 定理 6.1 (线性变换可对角化的充要条件)

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则  $\varphi$  可对角化的充分必要条件是  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

**证明** 若  $\varphi$  是  $V$  上可对角化线性变换, 则可设  $\varphi$  在某组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵为对角阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

此时  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ , 即  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $\varphi$  的特征向量, 于是  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

反过来, 若  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 则这组向量构成了  $V$  的一组基, 且  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵显然是一个对角阵。□

#### 定义 6.2 (可对角化矩阵)

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 若  $A$  相似于对角阵, 即存在可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角阵, 则称  $A$  为**可对角化矩阵**。

#### 引理 6.1

设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\varphi$  是线性空间  $V$  上由矩阵  $A$  乘法诱导的线性变换, 即  $\varphi(\alpha) = A\alpha, \forall \alpha \in V$ 。设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组标准基, 则  $\varphi$  在这组基下的矩阵就是  $A$ 。证明:

- (1) 矩阵  $A$  与线性变换  $\varphi$  的特征值相同;
- (2) 矩阵  $A$  可对角化等价于线性变换  $\varphi$  可对角化。

**证明**

- (1) 若  $\lambda$  为矩阵  $A$  的特征值, 则存在  $\xi \in V$ , 使得  $\varphi(\xi) = A\xi = \lambda\xi$ , 因此矩阵  $A$  的特征值也是线性变换  $\varphi$  的特征值。

若  $\lambda$  为线性变换  $\varphi$  的特征值, 则存在  $\eta \in V$ , 使得  $\varphi(\eta) = A\eta = \lambda\eta$ , 因此线性变换  $\varphi$  的特征值也是矩阵  $A$  的特征值。



故矩阵  $A$  与线性变换  $\varphi$  的特征值相同。

(2) 若矩阵  $A$  可对角化, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵。

从而  $(e_1, e_2, \dots, e_n)P$  的列向量也是  $V$  的一组基, 于是由命题 4.10 可知  $\varphi$  在这组基下的矩阵为  $P^{-1}AP$  是对角矩阵, 故  $\varphi$  也可对角化。

若线性变换  $\varphi$  可对角化, 则存在  $V$  的一组基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , 使得  $\varphi$  在这组基下的矩阵  $B$  为对角矩阵。设基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵为  $G$ , 则由命题 4.10 可知  $B = G^{-1}AG$ 。因此矩阵  $A$  也可对角化。

故矩阵  $A$  可对角化等价于线性变换  $\varphi$  可对角化。

□

### 定理 6.2 (矩阵可对角化的充要条件)

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $A$  可对角化的充分必要条件是  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

♥

**证明** 设  $\varphi$  是线性空间  $V$  上由矩阵  $A$  乘法诱导的线性变换。

若矩阵  $A$  有  $n$  个线性无关的特征值, 则由引理 6.1(1) 可知线性变换  $\varphi$  也有相同的  $n$  个线性无关的特征值, 于是由定理 6.1 可知线性变换  $\varphi$  可对角化, 从而再由引理 6.1(2) 可知矩阵  $A$  也可对角化。

若矩阵  $A$  可对角化, 则由引理 6.1(2) 可知线性变换  $\varphi$  也可对角化, 从而由定理 6.1 可知  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征值, 于是由引理 6.1(1) 可知矩阵  $A$  也有相同的  $n$  个线性无关的特征值。

□

### 定理 6.3

若  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  的不同的特征值, 记  $\lambda_i$  的特征子空间为  $V_i (1 \leq i \leq k)$ , 则

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

♥

**证明** 对  $k$  用数学归纳法. 若  $k=1$ , 结论显然成立. 现设对  $k-1$  个不同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ , 它们相应的特征子空间  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$  之和是直和. 我们要证明  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V_k$  之和为直和, 这只需证明:

$$V_k \cap (V_1 + V_2 + \dots + V_{k-1}) = 0. \quad (6.1)$$

即可. 设  $v \in V_k \cap (V_1 + V_2 + \dots + V_{k-1})$ , 则

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1}, \quad (6.2)$$

其中  $v_i \in V_i (i=1, 2, \dots, k-1)$ . 在(6.2)式两边作用  $\varphi$ , 得

$$\varphi(v) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \dots + \varphi(v_{k-1}). \quad (6.3)$$

但  $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  都是  $\varphi$  的特征向量或零向量, 因此

$$\lambda_k v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}. \quad (6.4)$$

在(6.3)式两边乘以  $\lambda_k$  减去(6.4)式得

$$0 = (\lambda_k - \lambda_1)v_1 + (\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1}.$$

由于  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  是直和, 因此  $(\lambda_k - \lambda_i)v_i = 0$ , 而  $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ , 从而  $v_i = 0 (i=1, 2, \dots, k-1)$ . 这就证明了(6.1)式.

□

### 推论 6.1

线性变换  $\varphi$  属于不同特征值的特征向量必线性无关。

♥

**证明** 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是线性变换  $\varphi$  的  $k$  个不同特征值, 由定理 6.3 可知  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ . 于是任取  $\alpha_i \in V_{\lambda_i} (1 \leq i \leq k)$  且  $\alpha_i \neq 0$ , 假设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  线性无关, 则存在一组不全为零的数  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , 使得

$$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots + b_k \alpha_k = 0.$$

不妨设  $b_1 \neq 0$ , 则

$$\alpha_1 = \frac{b_2}{b_1}\alpha_2 + \frac{b_3}{b_1}\alpha_3 + \cdots + \frac{b_k}{b_1}\alpha_k \in V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}).$$


又由  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$  及直和的等价条件可知,

$$V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}) = \{0\},$$

从而  $\alpha_1 = 0$ , 这与  $\alpha_i \neq 0 (1 \leq i \leq k)$  矛盾! □

### 推论 6.2

若  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  有  $n$  个不同的特征值, 则  $\varphi$  必可对角化. ♥

 **笔记** 注意这个推论只是可对角化的充分条件而非必要条件, 比如说纯量变换  $\varphi = cI_V$  当然可对角化, 但  $\varphi$  的  $n$  个特征值都是  $c$ .

**证明** 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是线性变换  $\varphi$  的  $n$  个不同特征值, 则任取  $\alpha_i \in V_{\lambda_i} (1 \leq i \leq n)$ , 由推论 6.1 可知  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  一定线性无关. 从而由定理 6.1 可知,  $\varphi$  一定可对角化. □

### 定理 6.4 (线性变换可对角化的充要条件)

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $\varphi$  的全部不同的特征值,  $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是特征值  $\lambda_i$  的特征子空间, 则  $\varphi$  可对角化的充要条件是

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$
♥

**证明** 先证充分性. 设

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k,$$


分别取  $V_i$  的一组基  $\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{it_i}\} (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则由直和的等价条件 (4) 知这些向量拼成了  $V$  的一组基, 并且它们都是  $\varphi$  的特征向量. 因此  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量, 从而定理 6.1 可知  $\varphi$  可对角化.

再证必要性. 设  $\varphi$  可对角化, 则由定理 6.1 可知  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 它们构成了  $V$  的一组基. 不失一般性, 可设这组基中前  $t_1$  个是关于特征值  $\lambda_1$  的特征向量; 接下去的  $t_2$  个是关于特征值  $\lambda_2$  的特征向量;  $\dots$ ; 最后  $t_k$  个是关于特征值  $\lambda_k$  的特征向量. 对任一  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ , 则  $\alpha$  可写成  $V_1, V_2, \dots, V_k$  中向量之和, 因此由定理 6.3 可知

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$
□


### 定义 6.3 (线性变换的几何重数与代数重数)

设  $\lambda_0$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  的一个特征值,  $V_0$  是属于  $\lambda_0$  的特征子空间, 称  $\dim V_0$  为  $\lambda_0$  的**度数或几何重数**.  $\lambda_0$  作为  $\varphi$  的特征多项式根的重数称为  $\lambda_0$  的**重数或代数重数**. ♣

 **笔记** 由线性映射的维数公式可知, 特征值  $\lambda_0$  的度数  $\dim V_0 = \dim \text{Ker}(\lambda_0 I_V - \varphi) = n - r(\lambda_0 I_V - \varphi)$ , 而特征值  $\lambda_0$  的重数则由特征多项式  $|\lambda I_V - \varphi|$  的因式分解决定.

### 定义 6.4 (矩阵的几何重数与代数重数)

设  $\lambda_0$  是  $n$  阶方阵的  $A$  的一个特征值,  $V_0$  是属于  $\lambda_0$  的特征子空间, 称  $\dim V_0$  为  $\lambda_0$  的**度数或几何重数**.  $\lambda_0$  作为  $A$  的特征多项式根的重数称为  $\lambda_0$  的**重数或代数重数**. ♣

 **笔记** 由线性方程组的理论可知, 特征值  $\lambda_0$  的度数  $\dim V_0 = n - r(\lambda_0 I_n - A)$ , 若将  $A$  看作由矩阵  $A$  乘法诱导的  $V$  上的线性变换, 则由线性变换的维数公式可知  $\dim V_0 = \dim \text{Ker}(\lambda_0 I_V - A) = n - r(\lambda_0 I_V - A)$ . 而特征值  $\lambda_0$  的重数则由特征多项式  $|\lambda I_n - A|$  的因式分解决定.

## 引理 6.2

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\lambda_0$  是  $\varphi$  的一个特征值, 则  $\lambda_0$  的度数总是小于等于  $\lambda_0$  的重数.

**证明** 设特征值  $\lambda_0$  的重数为  $m$ , 度数为  $t$ , 又  $V_0$  是属于  $\lambda_0$  的特征子空间, 则  $\dim V_0 = t$ . 设  $\{e_1, \dots, e_t\}$  是  $V_0$  的一组基. 由于  $V_0$  中的非零向量都是  $\varphi$  关于  $\lambda_0$  的特征向量, 故

$$\varphi(e_i) = \lambda_0 e_i, \quad i = 1, \dots, t.$$

将  $\{e_1, \dots, e_t\}$  扩充为  $V$  的一组基, 记为  $\{e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_n\}$ , 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_t & * \\ O & B \end{pmatrix},$$

其中  $B$  是一个  $n-t$  阶方阵. 因此, 线性变换  $\varphi$  的特征多项式具有如下形式:

$$|\lambda I_V - \varphi| = |\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_0)^t |\lambda I_{n-t} - B|,$$

这表明  $\lambda_0$  的重数至少为  $t$ , 即  $t \leq m$ . □

## 定义 6.5 (完全的特征向量系)

设  $\lambda_0$  是  $\varphi$  (或  $A$ ) 的  $m$  重特征值, 即它是  $\varphi$  (或  $A$ ) 的特征多项式的  $m$  重根. 此时若有  $m = \dim V_{\lambda_0}$ , 即  $\lambda_0$  的代数重数和几何重数相等, 则称  $\lambda_0$  有**完全的特征向量系**. 若对  $\varphi$  (或  $A$ ) 的任一特征值, 其代数重数和几何重数都相等, 则称  $\varphi$  (或  $A$ ) 有**完全的特征向量系**. ♣

## 定理 6.5 (线性变换可对角化的充要条件)

设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则  $\varphi$  可对角化的充分必要条件是  $\varphi$  有完全的特征向量系. ♥

**证明** 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $\varphi$  的全部不同的特征值, 它们对应的特征子空间、重数和度数分别记为  $V_i, m_i, t_i (i = 1, 2, \dots, k)$ . 由重数的定义以及引理 6.2 可知  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n, t_i \leq m_i, i = 1, 2, \dots, k$ .

由定理 6.4 可知, 我们只要证明  $\varphi$  有完全的特征向量系当且仅当  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ .

若  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ , 则

$$\begin{aligned} n = \dim V &= \dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k) \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_k \\ &= \sum_{i=1}^k t_i \leq \sum_{i=1}^k m_i = n, \end{aligned}$$

因此  $t_i = m_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 即  $\varphi$  有完全的特征向量系. 反过来, 若  $\varphi$  有完全的特征向量系, 则

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k) = \sum_{i=1}^k t_i = \sum_{i=1}^k m_i = n = \dim V,$$

又  $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \subset V$ , 故  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$  成立. □

## 定理 6.6 (线性变换可对角化的充要条件汇总)

**几何形式:**

- (1) 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则  $\varphi$  可对角化的充分必要条件是  $\varphi$  有  $n$  个线性无关的特征向量.
- (2) 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $\varphi$  的全部不同的特征值,  $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是特征值  $\lambda_i$  的特征子空间, 则  $\varphi$  可对角化的充要条件是

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

- (3) 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则  $\varphi$  可对角化的充分必要条件是  $\varphi$  有完全的特征向量系.

**代数形式:**

- (1) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $A$  可对角化的充分必要条件是  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.
- (2) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $A$  的全部不同的特征值,  $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是特征值  $\lambda_i$  的特征子空间, 则  $A$  可对角化的充要条件是

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

- (3) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $\varphi$  可对角化的充分必要条件是  $A$  有完全的特征向量系.

**证明 几何形式:**

- (1) 证明见定理 6.1.
- (2) 证明见定理 6.4.
- (3) 证明见定理 6.5.

代数形式: 由几何形式的结论及引理 6.1 立即得到证明.



## 6.2 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

**命题 6.1**

数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  一定适合数域  $\mathbb{K}$  上的一个 nonzero 多项式.



**证明** 我们已经知道, 数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵全体组成了  $\mathbb{K}$  上的线性空间, 其维数等于  $n^2$ . 因此对任一  $n$  阶矩阵  $A$ , 下列  $n^2 + 1$  个矩阵必线性相关:  $A^{n^2}, A^{n^2-1}, \dots, A, I_n$ .

也就是说, 存在  $\mathbb{K}$  中不全为零的数  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, c_{n^2})$ , 使

$$c_{n^2} A^{n^2} + c_{n^2-1} A^{n^2-1} + \dots + c_1 A + c_0 I_n = O.$$

这表明矩阵  $A$  适合数域  $\mathbb{K}$  上的一个 nonzero 多项式.

**定义 6.6 (矩阵的极小多项式)**

若  $n$  阶矩阵  $A$  (或  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$ ) 适合一个 nonzero 首一多项式  $m(x)$ , 且  $m(x)$  是  $A$  (或  $\varphi$ ) 所适合的 nonzero 多项式中次数最小者, 则称  $m(x)$  是  $A$  (或  $\varphi$ ) 的一个极小多项式或最小多项式.



**注** 由命题 6.1 可知矩阵  $A$  的极小多项式  $m(x)$  一定存在, 故极小多项式是良定义的.

**引理 6.3 (矩阵极小多项式的基本性质)**

若  $f(x)$  是  $A$  适合的一个多项式, 则  $A$  的极小多项式  $m(x)$  整除  $f(x)$ .



**证明** 由多项式的带余除法知道

$$f(x) = m(x)q(x) + r(x),$$

且  $\deg r(x) < \deg m(x)$ . 将  $x = A$  代入上式得  $r(A) = O$ , 若  $r(x) \neq 0$ , 则  $A$  适合一个比  $m(x)$  次数更小的 nonzero 多项式, 矛盾. 故  $r(x) = 0$ , 即  $m(x) \mid f(x)$ .

**命题 6.2 (矩阵的极小多项式必唯一)**

任一  $n$  阶矩阵的极小多项式必唯一.



**证明** 若  $m(x), g(x)$  都是矩阵  $A$  的极小多项式, 则由矩阵极小多项式的基本性质知道  $m(x)$  能够整除  $g(x)$ ,  $g(x)$  也能够整除  $m(x)$ . 因此  $m(x)$  与  $g(x)$  只差一个常数因子, 又极小多项式必须首项系数为 1, 故  $g(x) = m(x)$ .



**命题 6.3 (相似的矩阵具有相同的极小多项式)**

相似的矩阵具有相同的极小多项式.

**证明** 设矩阵  $A$  和  $B$  相似, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使  $B = P^{-1}AP$ . 设  $A, B$  的极小多项式分别为  $m(x), g(x)$ , 注意到

$$m(B) = m(P^{-1}AP) = P^{-1}m(A)P = O,$$

因此  $g(x) \mid m(x)$ . 同理,  $m(x) \mid g(x)$ , 故  $m(x) = g(x)$ . □**命题 6.4**设  $A$  是一个分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

其中  $A_i$  都是方阵, 则  $A$  的极小多项式等于诸  $A_i$  的极小多项式之最小公倍式.**证明** 设  $A$  的极小多项式为  $m(x)$ ,  $A_i$  的极小多项式为  $m_i(x)$ , 诸  $m_i(x)$  的最小公倍式为  $g(x)$ , 则  $g(A_i) = O$ , 于是


$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & g(A_2) & \\ & & \ddots \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

从而  $m(x) \mid g(x)$ . 又因为

$$m(A) = \begin{pmatrix} m(A_1) & & \\ & m(A_2) & \\ & & \ddots \\ & & & m(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

从而  $m(x) \mid g(x)$ . 又因为

$$m(A) = \begin{pmatrix} m(A_1) & & \\ & m(A_2) & \\ & & \ddots \\ & & & m(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

所以对每个  $i$  有  $m(A_i) = O$ , 从而  $m_i(x) \mid m(x)$ , 即  $m(x)$  是  $m_i(x)$  的公倍式. 又  $g(x)$  是诸  $m_i(x)$  的最小公倍式, 故  $g(x) \mid m(x)$ . 综上所述,  $m(x) = g(x)$ . □**命题 6.5**设  $m(x)$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式,  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值, 则  $(x - \lambda_0) \mid m(x)$ . ◆ **笔记** 这个命题告诉我们: 矩阵的特征值一定是其极小多项式的根.**证明** 由  $m(A) = O$  及 **命题 6.11** 可得  $m(\lambda_0) = 0$ , 故结论成立. □**定理 6.7 (Cayley-Hamilton 定理)**

1. **代数形式:** 设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵,  $f(x)$  是  $A$  的特征多项式, 则  $f(A) = O$ .
  2. **几何形式:** 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $f(x)$  是  $\varphi$  的特征多项式, 则  $f(\varphi) = O$ .
- ♥

**证明**

1. **代数形式:** 因为复数域是最大数域, 所以可将  $A$  看作一个复矩阵. 由复方阵必相似于上三角阵知  $A$  复相似于一个上三角阵, 也就是说存在的可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$  是一个上三角阵, 其中  $P$  与  $B$  都是复矩阵, 由相似矩阵有相同特征多项式可知  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式  $f(x)$ . 记

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

则  $f(B) = O$ . 而

$$\begin{aligned} f(A) &= A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI_n \\ &= (PBP^{-1})^n + a_1(PBP^{-1})^{n-1} + \cdots + a_nI_n \\ &= PB^nP^{-1} + a_1PB^{n-1}P^{-1} + \cdots + a_nI_n \\ &= P(B^n + a_1B^{n-1} + \cdots + a_nI_n)P^{-1} \\ &= Pf(B)P^{-1} = O. \end{aligned}$$

2. **几何形式:** 设  $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$  是  $V$  的一组标准基,  $\varphi$  在这组基下的矩阵为  $A$ , 则由  $f(x)$  是  $\varphi$  的特征多项式可知,  $f(x)$  也是  $A$  的特征多项式. 从而由代数形式的结论可知  $f(A) = O$ . 于是对  $\forall \alpha \in V$ , 都存在  $k_1, k_2, \cdots, k_n$ , 使得

$$\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

两边同时作用  $\varphi$  得到

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= k_1\varphi(e_1) + k_2\varphi(e_2) + \cdots + k_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A(e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A\alpha. \end{aligned}$$

因此  $f(\varphi)(\alpha) = f(A)(\alpha) = O$ . 故由  $\alpha$  的任意性可知  $f(\varphi) = O$ .

□

#### 推论 6.3

$n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式是其特征多项式的因式. 特别,  $A$  的极小多项式的次数不超过  $n$ .

♡

**证明** 由 Cayley-Hamilton 定理及矩阵极小多项式的基本性质即得结论.

□

#### 推论 6.4

$n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式和特征多项式有相同的根 (不计重数).

♡

**证明** 由命题 6.5 和推论 6.3 即得结论.

□


## 6.3 特征值与特征向量

### 定义 6.7 (线性变换的特征值和特征向量)

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{K}$  上线性空间  $V$  上的线性变换, 若  $\lambda_0 \in \mathbb{K}, x \in V$  且  $x \neq 0$ , 使

$$\varphi(x) = \lambda_0 x,$$

则称  $\lambda_0$  是线性变换  $\varphi$  的一个**特征值**, 向量  $x$  称为  $\varphi$  关于特征值  $\lambda_0$  的**特征向量**.


 **笔记** 显然  $\varphi$  的关于特征值  $\lambda_0$  的全体特征向量加上零向量构成  $V$  的子空间.

### 定义 6.8 (线性变换的特征子空间)

设  $\lambda_0$  是线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  的特征值, 令

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha\} = \{\alpha \in V \mid \alpha \text{ 是 } \varphi \text{ 的属于 } \lambda_0 \text{ 的特征向量}\} \cup \{0\},$$

则显然  $V_{\lambda_0}$  是  $V$  的子空间, 称为  $\varphi$  的属于特征值  $\lambda_0$  的**特征子空间**.

 **笔记** 显然  $V_{\lambda_0}$  是  $\varphi$  的不变子空间.

### 定义 6.9 (矩阵的特征值和特征向量)

设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶方阵, 若存在  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  及  $n$  维非零列向量  $\alpha$ , 使

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha$$

式成立, 则称  $\lambda_0$  为矩阵  $A$  的一个**特征值**,  $\alpha$  为  $A$  关于特征值  $\lambda_0$  的**特征向量**.

### 定义 6.10 (矩阵的特征子空间)

设  $\lambda_0$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值, 令

$$V_{\lambda_0} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \lambda_0 x\} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid x \text{ 是 } A \text{ 的属于 } \lambda_0 \text{ 的特征向量}\} \cup \{0\},$$

则  $V_{\lambda_0}$  是线性方程组  $(\lambda_0 I_n - A)x = 0$  的解空间, 从而是  $\mathbb{F}^n$  的子空间, 称为  $A$  的属于特征值  $\lambda_0$  的**特征子空间**.

### 定义 6.11 (特征多项式)

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 称  $|\lambda I_n - A|$  为  $A$  的**特征多项式**.

### 定理 6.8 (特征值的和与积)

矩阵  $A$  的  $n$  个特征值的和与积分别为

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr}(A),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

**证明** 设

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n). \end{aligned}$$

由 Vieta 定理知  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -a_1, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n a_n$ . 由 **例题 1.3** 可知  $a_1 = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\text{tr}(A), a_n = (-1)^n |A|$ . 因此矩阵  $A$  的  $n$  个特征值的和与积分别为

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr}(A),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

□

**定义 6.12 (特征多项式)**

设  $\varphi$  是线性空间  $V$  上的线性变换,  $\varphi$  在  $V$  的某组基下的表示矩阵为  $A$ , 由相似矩阵有相同特征值知  $|\lambda I_n - A|$  与基或表示矩阵的选取无关, 称  $|\lambda I_n - A|$  为  $\varphi$  的**特征多项式**, 记为  $|\lambda I_V - \varphi|$ .

♣

**定理 6.9 (复方阵必相似于上三角阵)**

任何复方阵必相似于一个上三角阵, 并且对角元素都是其特征值.

♡

**注** 一般数域  $\mathbb{K}$  上的矩阵未必相似于上三角阵.

**证明** 设  $A$  是  $n$  阶复方阵, 现对  $n$  用数学归纳法. 当  $n = 1$  时结论显然成立. 假设对  $n - 1$  阶矩阵结论成立, 现对  $n$  阶矩阵  $A$  来证明. 设  $\lambda_1$  是  $A$  的一个特征值, 则存在非零列向量  $\alpha_1$ , 使

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1.$$

将  $\alpha_1$  作为  $C_n$  的一个基向量, 并扩展为  $C_n$  的一组基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ . 将这些基向量按照列分块方式拼成矩阵  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ , 则  $P$  为  $n$  阶非异阵, 且

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $A_1$  是一个  $n - 1$  阶方阵. 注意到  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  非异, 上式即为

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

因为  $A_1$  是一个  $n - 1$  阶方阵, 所以由归纳假设可知, 存在  $n - 1$  阶非异阵  $Q$ , 使  $Q^{-1}A_1Q$  是一个上三角阵. 令

$$R = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则  $R$  是  $n$  阶非异阵, 且

$$\begin{aligned} R^{-1}P^{-1}APR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这是一个上三角阵, 它与  $A$  相似, 并且对角元素都是其特征值.

□

**推论 6.5**

若数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶方阵  $A$  的特征值全在  $\mathbb{K}$  中, 则存在  $\mathbb{K}$  上的非异阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  是一个上三角阵.

♡

**证明** 由复方阵必相似于上三角阵的证明类似可得.

□

**命题 6.6**

1. 设  $\varphi$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 则  $\varphi$  在  $V$  上至少存在一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  及其特征向量  $\alpha_0 \in V$ .
2. 设  $A$  为  $n$  阶复矩阵, 则  $A$  在复数域上至少存在一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  及其特征向量  $\alpha_0 \in \mathbb{C}^n$ .

♣

**证明**



1. 任取  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 设  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为  $A$ , 由代数学基本定理可知, 特征多项式  $|\lambda I_n - \varphi| = |\lambda I_n - A|$  在复数域上至少有一个根  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ . 又由线性方程组理论可知,  $(\lambda_0 I_n - A)x = 0$  一定有非

零解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 即  $\lambda_0 I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . 记  $\alpha_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_0) &= \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \lambda_0 I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \alpha_0. \end{aligned}$$

故  $\varphi$  在  $V$  上至少存在一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  及其特征向量  $\alpha_0 \in V$ .

2. 由代数学基本定理可知, 特征多项式  $|\lambda I_n - A|$  在复数域上至少有一个根  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ . 又由线性方程组理论可知,  $(\lambda_0 I_n - A)x = 0$  一定有非零解  $\alpha_0 \in \mathbb{C}^n$ . 故  $A$  在复数域上至少存在一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  及其特征向量  $\alpha_0 \in \mathbb{C}^n$ .  $\square$

### 6.3.1 直接利用定义计算和证明

**例题 6.1** 设  $V$  是  $n$  阶矩阵全体组成的线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换:  $\varphi(X) = AX$ , 其中  $A$  是一个  $n$  阶矩阵. 求证:  $\varphi$  和  $A$  具有相同的特征值 (重数可能不同).

**证明** 设  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值,  $x_0$  是对应的特征向量, 即  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ . 令  $X = (x_0, 0, \dots, 0)$ , 则  $\varphi(X) = AX = \lambda_0 X$  且  $X \neq 0$ , 因此  $\lambda_0$  也是  $\varphi$  的特征值.

反之, 设  $\lambda_0$  是  $\varphi$  的特征值,  $X$  是对应的特征向量, 即  $\varphi(X) = AX = \lambda_0 X$ . 令  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为列分块, 设第  $i$  个列向量  $x_i \neq 0$ , 则  $Ax_i = \lambda_0 x_i$ , 因此  $\lambda_0$  也是  $A$  的特征值.  $\square$

**例题 6.2** 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个不同的特征值,  $\alpha_1, \alpha_2$  分别是  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 求证:  $\alpha_1 + \alpha_2$  必不是  $A$  的特征向量.

**证明** 用反证法, 设  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \mu(\alpha_1 + \alpha_2)$ , 又

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2,$$

于是  $(\lambda_1 - \mu)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu)\alpha_2 = 0$ . 由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 故有  $\lambda_1 = \mu, \lambda_2 = \mu$ , 从而  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 引出矛盾.  $\square$

#### 命题 6.7

设  $\varphi$  是线性空间  $V$  上的线性变换,  $V$  有一个直和分解:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m,$$

其中  $V_i$  都是  $\varphi$ -不变子空间.

- (1) 设  $\varphi$  限制在  $V_i$  上的特征多项式为  $f_i(\lambda)$ , 求证:  $\varphi$  的特征多项式

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_m(\lambda).$$

- (2) 设  $\lambda_0$  是  $\varphi$  的特征值,  $V_0 = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$  为特征子空间,  $V_{i,0} = V_i \cap V_0 = \{v \in V_i \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$ ,

求证:

$$V_0 = V_{1,0} \oplus V_{2,0} \oplus \cdots \oplus V_{m,0}.$$

**证明**

- (1) 取  $V_i$  的一组基, 将它们拼成  $V$  的一组基. 记  $A_i$  是  $\varphi$  在  $V_i$  上的限制在  $V_i$  所取基下的表示矩阵, 则由定理 4.6 可知  $\varphi$  在  $V$  的这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵  $A = \text{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ , 于是

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = |\lambda I - A_1| |\lambda I - A_2| \cdots |\lambda I - A_m|,$$

即  $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) \cdots f_m(\lambda)$ .

- (2) 任取  $\alpha \in V_0$ , 设  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ , 其中  $\alpha_i \in V_i$ , 则

$$\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \cdots + \varphi(\alpha_m) = \varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha = \lambda_0 \alpha_1 + \lambda_0 \alpha_2 + \cdots + \lambda_0 \alpha_m.$$

注意到  $\varphi(\alpha_i) \in V_i, \varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha \in V$ , 故由直和的等价条件 (5) 可得  $\varphi(\alpha_i) = \lambda_0 \alpha_i$ , 即  $\alpha_i \in V_{i,0}$ , 从而  $V_0 = V_{1,0} \oplus V_{2,0} \oplus \cdots \oplus V_{m,0}$ . 注意到  $V_{i,0} \subseteq V_i$ , 故

$$V_{i,0} \cap (V_{1,0} + \cdots + V_{i-1,0}) \subseteq V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \{0\}, \quad 2 \leq i \leq m,$$

于是由直和的等价条件 (2) 可知上述为直和.

□

#### 推论 6.6

对分块对角矩阵  $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$  的任一特征值  $\lambda_0$ , 其代数重数等于每个分块的代数重数之和, 其几何重数等于每个分块的几何重数之和.

♥

**证明** 将命题 6.6 的条件和结论代数化之后, 即可得到结论.

□

#### 命题 6.8 (特征向量的延拓)

设  $n$  阶分块对角矩阵  $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ , 其中  $A_i$  是  $n_i$  阶矩阵.

- (1) 任取  $A_i$  的特征值  $\lambda_i$  及其特征向量  $x_i \in \mathbb{C}^{n_i}$ , 求证: 可在  $x_i$  的上下添加适当多的零, 得到非零向量  $\tilde{x}_i \in \mathbb{C}^n$ , 使得  $A\tilde{x}_i = \lambda_i \tilde{x}_i$ , 即  $\tilde{x}_i$  是  $A$  关于特征值  $\lambda_i$  的特征向量, 称为  $x_i$  的延拓.
- (2) 任取  $A$  的特征值  $\lambda_0$ , 并设  $\lambda_0$  是  $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$  的特征值, 但不是其他  $A_j$  ( $1 \leq j \leq m, j \neq i_1, \cdots, i_r$ ) 的特征值, 求证:  $A$  关于特征值  $\lambda_0$  的特征子空间的一组基可取为  $A_{i_k}$  ( $1 \leq k \leq r$ ) 关于特征值  $\lambda_0$  的特征子空间的一组基的延拓的并集.

♥

**证明**

- (1) 令  $\tilde{x}_i = (0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)'$ , 即  $\tilde{x}_i$  的第  $i$  块为  $x_i$ , 其余块均为 0, 显然  $\tilde{x}_i \neq 0$ . 容易验证  $A\tilde{x}_i = \lambda_i \tilde{x}_i$ , 故结论成立.
- (2) 由命题 6.6(2) 以及直和的等价条件 (5) 即得.

□

**例题 6.3** 设  $A$  是  $n$  阶整数矩阵,  $p, q$  为互素的整数且  $q > 1$ . 求证: 矩阵方程  $Ax = \frac{p}{q}x$  必无非零解.

**证明** 用反证法. 设上述矩阵方程有非零解, 则  $\frac{p}{q}$  为  $A$  的特征值, 即为特征多项式  $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$  的根. 由于  $A$  是整数矩阵, 故  $f(\lambda)$  为整数系数多项式. 由整数系数多项式有有理根的必要条件可知  $q \mid 1$ , 从而

$q = \pm 1$ , 于是  $q \mid p$ , 这与  $p, q$  互素矛盾。 □

**例题 6.4** 求下列  $n$  阶矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & 0 & a \\ b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}.$$

**解** 若  $a = 0$  或  $b = 0$ , 则  $A$  是主对角元全为零的下三角或上三角矩阵, 故  $A$  的特征值全为零. 设  $a \neq 0, b \neq 0$ , 则由 **命题 1.16** 可知: 若  $a \neq b$ , 则  $|\lambda I_n - A| = \frac{a(\lambda+b)^n - b(\lambda+a)^n}{a-b}$ . 设  $\frac{b}{a}$  的  $n$  次方根为  $\omega_i (1 \leq i \leq n)$ , 则

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= \frac{a(\lambda+b)^n - b(\lambda+a)^n}{a-b} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\lambda+b}{\lambda+a} \right)^n = \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \frac{\lambda+b}{\lambda+a} &= \omega_i (1 \leq i \leq n) \Rightarrow \lambda = \frac{a\omega_i - b}{1 - \omega_i} (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

从而  $A$  的特征值为  $\frac{a\omega_i - b}{1 - \omega_i} (1 \leq i \leq n)$ .

若  $a = b$ , 则  $|\lambda I_n - A| = (\lambda - (n-1)a)(\lambda + a)^{n-1}$ , 从而  $A$  的特征值为  $(n-1)a$  (1 重),  $-a$  ( $n-1$  重).

### 6.3.2 正向利用矩阵的多项式

#### 定义 6.13 (矩阵多项式)

若  $A$  是一个  $n$  阶矩阵,  $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是一个多项式, 记

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

#### 命题 6.9

设  $n$  阶矩阵  $A$  的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ,  $f(x)$  是一个多项式, 则  $f(A)$  的全部特征值为  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ .

**注** 这个命题告诉我们: 如果能够将一个复杂矩阵写成一个简单矩阵的多项式, 那么就可以由简单矩阵的特征值得到复杂矩阵的特征值.

**证明** 因为任一  $n$  阶矩阵均复相似于上三角阵, 可设

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

因为上三角阵的和、数乘及乘方仍是上三角阵, 经计算不难得到

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

因此  $f(A)$  的全部特征值为  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ . □

**例题 6.5** 设  $n$  阶矩阵  $A$  的全体特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 求  $2n$  阶矩阵

$$\begin{pmatrix} A^2 & A \\ A^2 & A \end{pmatrix}$$

的全体特征值。

**证明** 由命题 2.40 可知

$$\left| \lambda I_{2n} - \begin{pmatrix} A^2 & A \\ A^2 & A \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda I_n - A & -A^2 \\ -A^2 & \lambda I_n - A \end{pmatrix} \right| = |\lambda I_n - A - A^2| |\lambda I_n - A + A^2|.$$

由命题 6.8 可知  $A + A^2$  的全体特征值为  $\lambda_i + \lambda_i^2 (1 \leq i \leq n)$ ,  $A - A^2$  的全体特征值为  $\lambda_i - \lambda_i^2 (1 \leq i \leq n)$ , 因此所求矩阵的全体特征值为

$$\lambda_1 + \lambda_1^2, \lambda_1 - \lambda_1^2, \lambda_2 + \lambda_2^2, \lambda_2 - \lambda_2^2, \dots, \lambda_n + \lambda_n^2, \lambda_n - \lambda_n^2.$$

□

#### 命题 6.10 (循环矩阵的特征值)

求下列循环矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

♣

**解** 设  $J = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ , 则由循环矩阵的性质 2 可知  $A = f(J)$ 。经简单计算可得

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - J| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + (-1)^{n+2} (-1)^{n-1} = \lambda^n - 1, \end{aligned}$$

于是  $J$  的特征值为

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

因此  $A$  的特征值为  $f(1), f(\omega_1), \dots, f(\omega_{n-1})$ 。

#### 定义 6.14 (友矩阵)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

称为多项式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  的友矩阵。

♣

**命题 6.11 (友矩阵的特征多项式及特征值)**

设首一多项式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ,  $f(x)$  的友矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(1) 求证: 矩阵  $C$  的特征多项式就是  $f(\lambda)$ 。

(2) 设  $f(x)$  的根为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ,  $g(x)$  为任一多项式, 求以  $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$  为根的  $n$  次多项式。

**证明**

(1)

$$\begin{aligned} |xE - A| &= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=n, n-1, \cdots, 2]{x r_i + r_{i-1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_3x + a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{按第一行展开}} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = f(x). \end{aligned}$$

(2) 由假设及 (1) 的结论可知  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  是  $C$  的全体特征值, 故由命题 6.8 可知  $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$  是  $g(C)$  的全体特征值, 从而  $h(x) = |xI_n - g(C)|$  即为所求的多项式。

□

### 6.3.3 反向利用矩阵的多项式

#### 命题 6.12

设  $n$  阶矩阵  $A$  适合一个多项式  $g(x)$ , 即  $g(A) = O$ , 则  $A$  的任一特征值  $\lambda_0$  也必适合  $g(x)$ , 即  $g(\lambda_0) = 0$ .

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  关于特征值  $\lambda_0$  的特征向量, 经简单计算得

$$g(\lambda_0)\alpha = g(A)\alpha = 0.$$

而  $\alpha \neq 0$ , 因此  $g(\lambda_0) = 0$ .

□

#### 命题 6.13 (幂零矩阵关于特征值的充要条件)

求证:  $n$  阶矩阵  $A$  为幂零矩阵的充要条件是  $A$  的特征值全为零。

**证明** 若  $A$  为幂零矩阵, 即存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = O$ , 则由命题 6.11 可知  $A$  的任一特征值  $\lambda_0$  也适合  $x^k$ , 于是  $\lambda_0 = 0$ .

反之, **证法一**: 若  $A$  的特征值全为零, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$  为上三角矩阵且主对角元素全为零。由上三角阵性质 (1) 可知  $B^n = O$ , 于是  $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = O$ , 即  $A$  为幂零矩阵。

**证法二**: 也可以利用 **Cayley-Hamilton 定理** 来证明, 由于  $A$  的特征值全为零, 故其特征多项式为  $\lambda^n$ , 从而  $A^n = O$ .  $\square$

**例题 6.6** 设  $V$  是数域  $F$  上的  $n$  阶方阵全体构成的线性空间,  $n$  阶方阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$V$  上的线性变换  $\eta$  定义为  $\eta(X) = PX'P$ . 试求  $\eta$  的全体特征值及其特征向量。

**笔记** 任意  $n$  阶矩阵  $A$  左乘  $P$  相当于行倒排, 右乘  $P$  矩阵相当于列倒排。

**解** 由  $P = P'$ ,  $P^2 = I_n$  容易验证  $\eta^2(X) = P(PX'P)P = X$ , 即  $\eta^2 = I_V$ , 于是  $\eta$  的特征值也适合多项式  $x^2 - 1$ , 从而特征值只能是  $\pm 1$ .

设  $\eta(X_0) = PX_0'P = \pm X_0$ , 这等价于  $(PX_0')P = \pm PX_0$ , 即  $PX_0$  为对称矩阵或反对称矩阵。

令  $PX_0 = E_{ii}, E_{ij} + E_{ji}$  (对称矩阵空间的基向量), 容易证明  $\eta$  关于特征值 1 的线性无关的特征向量为  $X_0 = PE_{ii}$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $P(E_{ij} + E_{ji})$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ).

令  $PX_0 = E_{ij} - E_{ji}$  (反对称矩阵空间的基向量), 容易证明  $\eta$  关于特征值 -1 的线性无关的特征向量为  $X_0 = P(E_{ij} - E_{ji})$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ). 注意到这些特征向量恰好构成  $V$  的一组基, 故  $\eta$  的特征值为 1  $\frac{n(n+1)}{2}$  重, -1  $\frac{n(n-1)}{2}$  重.

**例题 6.7** 设  $n$  阶方阵  $A$  的每行每列只有一个元素非零, 并且那些非零元素为 1 或 -1, 证明:  $A$  的特征值都是单位根。

**证明** 设  $S$  为由每行每列只有一个元素非零, 并且那些非零元素为 1 或 -1 的所有  $n$  阶方阵构成的集合, 由排列组合可得  $\bar{S} = 2^n n!$ , 即  $S$  是一个有限集合. 注意到矩阵  $M \in S$  当且仅当  $M = P_1 P_2 \cdots P_r$ , 其中  $P_k$  是初等矩阵  $P_{ij}$  或  $P_i(-1)$ , 因此对任意的  $M, N \in S$ ,  $MN \in S$ . 特别地, 由  $A \in S$  可知  $A^k \in S$  ( $k \geq 1$ ), 即  $\{A, A^2, A^3, \cdots\} \subseteq S$ , 于是存在正整数  $k > l$ , 使得  $A^k = A^l$ . 注意到  $|A| = \pm 1$ , 故  $A$  可逆, 于是  $A^{k-l} = I_n$ , 从而  $A$  的特征值适合多项式  $x^{k-l} - 1$ , 即为单位根.  $\square$

**例题 6.8** 设  $A$  是  $n$  阶实方阵, 又  $I_n - A$  的特征值的模长都小于 1, 求证:  $0 < |A| < 2^n$ .

**证明** 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ , 则  $I_n - A$  的特征值为  $1 - \lambda_1, \cdots, 1 - \lambda_n$ . 由假设  $|1 - \lambda_i| < 1$ , 若  $\lambda_i$  是实数, 则  $0 < \lambda_i < 2$ ; 若  $\lambda_i$  是虚数, 则  $\bar{\lambda}_i$  也是  $A$  的特征值, 此时  $1 - \bar{\lambda}_i$  也是  $I_n - A$  的特征值. 从而  $|1 - \lambda_i| < 1, |1 - \bar{\lambda}_i| < 1$ , 于是

$$|1 - \lambda_i^2| = |(1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda}_i)| = |1 - \lambda_i||1 - \bar{\lambda}_i| < 1.$$

因此  $0 < \lambda_i^2 < 2$ , 故此时  $0 < \lambda_i < \sqrt{2}$ .

综上, 无论  $\lambda_i$  是实数还是虚数, 都有  $0 < |\lambda_i| < 2$ . 由于  $|A|$  等于所有特征值之积, 故  $0 < |A| < 2^n$ .  $\square$

#### 命题 6.14 (逆矩阵的特征值)

设  $n$  阶矩阵  $A$  是可逆矩阵, 且  $A$  的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 则  $A^{-1}$  的全部特征值为  $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ .  $\blacktriangle$

**证明** 首先注意到  $A$  是可逆矩阵,  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A| \neq 0$ , 因此每个  $\lambda_i \neq 0$  (事实上,  $A$  可逆的充分必要条件是它的特征值全不为零). 由复方阵必相似于上三角阵可设

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

因为上三角矩阵的逆矩阵仍然是上三角矩阵, 经过计算不难得到

$$P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此  $A^{-1}$  的全部特征值为  $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ . □

#### 命题 6.15 (伴随矩阵的特征值)

设  $n$  阶矩阵  $A$  的全体特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 求证:  $A^*$  的全体特征值为

$$\prod_{i \neq 1} \lambda_i, \prod_{i \neq 2} \lambda_i, \dots, \prod_{i \neq n} \lambda_i.$$

**证明** 因为任一  $n$  阶矩阵均复相似于上三角矩阵, 故可设

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

注意到上三角矩阵的伴随矩阵仍是上三角矩阵, 经计算可得

$$P^{-1}A^*P = P^*A^*(P^{-1})^* = (P^{-1}AP)^* = \begin{pmatrix} \prod_{i \neq 1} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \prod_{i \neq 2} \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod_{i \neq n} \lambda_i \end{pmatrix}.$$

因此  $A^*$  的全部特征值为

$$\prod_{i \neq 1} \lambda_i, \prod_{i \neq 2} \lambda_i, \dots, \prod_{i \neq n} \lambda_i.$$

□


### 6.3.4 特征值的降价公式

#### 定理 6.10 (特征值的降价公式)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 且  $m \geq n$ . 求证:

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|.$$

特别地, 若  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 则  $AB$  与  $BA$  有相同的特征多项式. ♥

 **笔记** 本质上就是打洞原理.

**证明** 证法一 (打洞原理): 当  $\lambda \neq 0$  时, 考虑下列分块矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

因为  $\lambda I_m, I_n$  都是可逆矩阵, 故由行列式的降价公式可得

$$|I_n| \cdot |\lambda I_m - A(I_n)^{-1}B| = |\lambda I_m| \cdot |I_n - B(\lambda I_m)^{-1}A|,$$

即有

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$$

成立.

当  $\lambda = 0$  时, 若  $m > n$ , 则  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq \min\{m, n\} = n < m$ , 故  $|-AB| = 0$ , 结论成立; 若  $m = n$ , 则  $|-AB| = (-1)^n |A||B| = |-BA|$ , 结论也成立.

事实上,  $\lambda = 0$  的情形也可以用 **Cauchy-Binet 公式** 来处理, 还可以通过 **摄动法** 由  $\lambda \neq 0$  的情形来得到.

**证法二 (相抵标准型):** 设  $A$  的秩等于  $r$ , 则存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中  $B_{11}$  是  $r \times r$  矩阵, 则

$$PABP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BAQ = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & O \end{pmatrix}.$$

因此

$$|\lambda I_m - AB| = \left| \begin{pmatrix} \lambda I_r - B_{11} & -B_{12} \\ O & \lambda I_{m-r} \end{pmatrix} \right| = \lambda^{m-r} |\lambda I_r - B_{11}|,$$

同理

$$|\lambda I_n - BA| = \left| \begin{pmatrix} \lambda I_r - B_{11} & O \\ -B_{21} & \lambda I_{n-r} \end{pmatrix} \right| = \lambda^{n-r} |\lambda I_r - B_{11}|.$$

比较上面两个式子即可得出结论。

**证法三 (摄动法):** 先证明  $m = n$  的情形. 若  $A$  可逆, 则  $BA = A^{-1}(AB)A$ , 即  $AB$  和  $BA$  相似, 因此它们的特征多项式相等. 对于一般的方阵  $A$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  是可逆矩阵. 由可逆情形的证明可得

$$|\lambda I_n - (t_k I_n + A)B| = |\lambda I_n - B(t_k I_n + A)|.$$

注意到上述两边的行列式都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $|\lambda I_n - AB| = |\lambda I_n - BA|$  成立.

再证明  $m > n$  的情形. 令

$$C = \begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix},$$

其中  $C, D$  均为  $m \times m$  分块矩阵, 则

$$CD = AB, \quad DC = \begin{pmatrix} BA & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因此由方阵的情形可得

$$|\lambda I_m - AB| = |\lambda I_m - CD| = |\lambda I_m - DC| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|.$$

□

**例题 6.9** 设  $\alpha$  是  $n$  维实列向量且  $\alpha' \alpha = 1$ , 试求矩阵  $I_n - 2\alpha \alpha'$  的特征值.

**解** 设  $A = I_n - 2\alpha \alpha'$ , 则由 **特征值的降价公式** 可得

$$|\lambda I_n - A| = |(\lambda - 1)I_n + 2\alpha \alpha'| = (\lambda - 1)^{n-1} (\lambda - 1 + 2\alpha' \alpha) = (\lambda - 1)^{n-1} (\lambda + 1).$$

因此, 矩阵  $A$  的特征值为  $1(n-1)$  重,  $-1(1)$  重.

**例题 6.10** 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $\alpha, \beta$  为  $n$  维列向量, 试求矩阵  $A\alpha\beta'$  的特征值.



**解** 设  $B = A\alpha\beta'$ , 则由特征值的降价公式可得

$$|\lambda I_n - B| = |I_n - (A\alpha)\beta'| = \lambda^{n-1}(\lambda - \beta'A\alpha).$$

若  $\beta'A\alpha \neq 0$ , 则  $B$  的特征值为  $0$  ( $n-1$  重),  $\beta'A\alpha$  ( $1$  重); 若  $\beta'A\alpha = 0$ , 则  $B$  的特征值为  $0$  ( $n$  重).

**例题 6.11** 设  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都是实数, 且  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ , 试求下列矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 矩阵  $A$  可以分解为  $A = -I_n + BC$ , 其中

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由特征值的降价公式得

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= |(\lambda + 1)I_n - BC| \\ &= (\lambda + 1)^{n-2}|(\lambda + 1)I_2 - CB|. \end{aligned}$$

注意到  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ , 故有

$$CB = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

因此  $A$  的特征值为  $-1$  ( $n-2$  重),  $n-1$ ,  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 1$ .

**例题 6.12** 设  $A, B, C$  分别是  $m \times m, n \times n, m \times n$  矩阵, 满足:  $AC = CB$ ,  $r(C) = r$ . 求证:  $A$  和  $B$  至少有  $r$  个相同的特征值.

**注** 不妨设  $C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  的原因: 假设当  $C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  时, 结论已经成立, 则对于一般的满足条件的矩阵  $C$ , 由条件我们有

$$r(C) = r, \quad AC = BC.$$

由  $r(C) = r$  可知, 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得

$$PCQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

从而对  $AC = BC$  两边同时左乘  $P$ , 右乘  $Q$  得到

$$(PAP^{-1})(PCQ) = (PCQ)(Q^{-1}BQ).$$

于是由假设可知  $PAP^{-1}$  和  $Q^{-1}BQ$  都至少有  $r$  个相同的特征值. 又因为相似矩阵有相同的特征值, 所以  $A, B$  也至少有  $r$  个相同的特征值. 故不妨设成立.

**证明** 设  $P$  为  $m$  阶非异阵,  $Q$  为  $n$  阶非异阵, 使得

$$PCQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

注意到问题的条件和结论在相抵变换  $C \mapsto PCQ, A \mapsto PAP^{-1}, B \mapsto Q^{-1}BQ$  下保持不变, 故不妨从一开始就假设

$C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  是相抵标准型. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

为对应的分块, 则

$$AC = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

由  $AC = CB$  可得  $A_{11} = B_{11}, A_{21} = 0, B_{12} = 0$ . 于是

$$|\lambda I_m - A| = |\lambda I_r - A_{11}| \cdot |\lambda I_{m-r} - A_{22}|,$$

$$|\lambda I_n - B| = |\lambda I_r - B_{11}| \cdot |\lambda I_{n-r} - B_{22}|.$$

从而  $A, B$  至少有  $r$  个相同的特征值 (即  $A_{11} = B_{11}$  的特征值). □

### 6.3.5 特征值与特征多项式系数的关系

#### 命题 6.16 (特征值与特征多项式系数的关系)

设  $n$  阶矩阵  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

求证:  $a_r$  等于  $(-1)^r$  乘以  $A$  的所有  $r$  阶主子式之和, 即

$$a_r = (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

进一步, 若设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_r} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

**注** 上述结论中最常用的是  $r = 1$  和  $r = n$  的情形:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr}(A), \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

特别地,  $A$  是非异阵的充要条件是  $A$  的特征值全不为零. 因此, 特征值的计算是判断矩阵是否非异阵的重要依据.

**证明** 第一种结论是推论 1.3.

由 **Vieta 定理** 可得


$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_r} &= (-1)^r a_r = (-1)^r (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq n. \end{aligned}$$

因此第二种结论也成立. □

**例题 6.13** 设  $n$  阶方阵  $A$  满足

$$A^2 - A - 3I_n = O,$$

求证:  $A - 2I_n$  是非奇异阵.

 **笔记** 用特征值判断矩阵非异性.

**证明** 用反证法. 设  $A - 2I_n$  为奇异阵, 则 2 是  $A$  的特征值. 注意到  $A$  适合

$$f(x) = x^2 - x - 3,$$

但特征值 2 却不适合  $f(x)$ , 这与 **命题 6.11** 矛盾. □

**例题 6.14** 设  $P$  是可逆矩阵,  $B = PAP^{-1} - P^{-1}AP$ , 求证:  $B$  的特征值之和为零.

**证明** 由特征值与特征多项式系数的关系可知, 只要证  $\text{tr}(B) = 0$  即可. 由迹的线性和交换性即得

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(PAP^{-1}) - \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A) - \text{tr}(A) = 0.$$

□

**例题 6.15** 设  $n$  阶实方阵  $A$  的特征值全是实数, 且  $A$  的一阶主子式之和与二阶主子式之和都等于零. 求证:  $A$  是零矩阵.

**证明** 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 由条件和特征值与特征多项式系数的关系可知

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0,$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = 0.$$

由于  $\lambda_i$  都是实数, 故  $\lambda_i = 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 成立, 再由命题 6.12 可知  $A$  为零矩阵. □

**例题 6.16** 设  $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶非异实方阵  $A$  的特征值都是实数, 且  $A$  的  $n-1$  阶主子式之和等于零. 证明: 存在  $A$  的一个  $n-2$  阶主子式, 其符号与  $|A|$  的符号相反.

**证明** 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 由  $A$  非异可知它们都是非零实数. 再由条件和例 6.24 可知

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{n-1}} = 0. \quad (6.5)$$

将(??)式左边除以  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = 0, \quad (6.6)$$

将(??)式左边平方, 并将平方项移到等式的右边可得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 < 0, \quad (6.7)$$

将(??)式两边同时乘以  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  可得

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-2} \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{n-2}} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \right) |A|. \quad (6.8)$$

由(??)式和特征值与特征多项式系数的关系可得

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-2} \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{n-2} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \right) |A|,$$

于是  $A$  的  $n-2$  阶主子式之和与  $|A|$  的符号相反, 从而至少存在  $A$  的一个  $n-2$  阶主子式, 其符号与  $|A|$  的符号相反. □

**结论** 设  $n$  阶方阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则对任意的正整数  $k$ ,  $A^k$  的特征值为  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ , 于是特征值的  $k$  次幂和

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = \text{tr}(A^k), \quad k \geq 1.$$

若已知  $n$  阶方阵  $A$  的迹  $\text{tr}(A^k)$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 则由 Newton 公式可以计算出特征值的初等对称多项式

$$\sigma_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n,$$

从而可以确定特征多项式的系数, 最后便可计算出  $A$  的所有特征值.

**例题 6.17** 设  $A$  是  $n$  阶对合矩阵, 即  $A^2 = I_n$ , 证明:  $n - \text{tr}(A)$  为偶数, 并且  $\text{tr}(A) = n$  的充要条件是  $A = I_n$ .

**证明** 由  $A^2 = I_n$  可知  $A$  的特征值也适合  $x^2 - 1$ , 从而只能是  $\pm 1$ . 设  $A$  的特征值为  $1$  ( $p$  重),  $-1$  ( $q$  重), 则  $p + q = n$ . 且  $\text{tr}(A) = p - q$ , 于是  $n - \text{tr}(A) = 2q$  为偶数. 若  $A = I_n$ , 则  $\text{tr}(A) = n$ . 反之, 若  $\text{tr}(A) = n$ , 则由上述讨论可知  $p = n$ ,

$q=0$ , 从而  $-1$  不是  $A$  的特征值, 即  $A+I_n$  是非奇阵. 最后由  $A^2=I_n$  可得

$$(A-I_n)(A+I_n)=O \Rightarrow A-I_n=O \Rightarrow A=I_n.$$

□

**例 6.18** 设 4 阶方阵  $A$  满足:  $\text{tr}(A^k)=k$  ( $1 \leq k \leq 4$ ), 试求  $A$  的行列式.

**证明** 题目条件即为  $s_k=k$  ( $1 \leq k \leq 4$ ), 要求  $|A|=\sigma_4$ . 根据 Newton 公式 (白皮书这一部分还没看)

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + \cdots + (-1)^k k \sigma_k = 0 \quad (1 \leq k \leq 4)$$

可依次算出  $\sigma_1=1, \sigma_2=-\frac{1}{2}, \sigma_3=\frac{1}{6}, \sigma_4=\frac{1}{24}$ . 故  $|A|=\frac{1}{24}$ . 也可以直接利用例 5.64 (白皮书这一部分还没看) 来计算  $\sigma_4$ . □

#### 命题 6.17 (幂零矩阵关于迹的充要条件)

求证:  $n$  阶矩阵  $A$  是零矩阵的充要条件是  $\text{tr}(A^k)=0$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

▲

**证明** 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 若  $A$  是零矩阵, 则  $A$  的特征值全为零, 从而  $\text{tr}(A^k)=s_k=0$  ( $k \geq 1$ ). 若  $s_k=\text{tr}(A^k)=0$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 则由 Newton 公式 (白皮书这一部分还没看) 或直接利用例 5.64 (白皮书这一部分还没看) 可计算出  $\sigma_r=0$  ( $1 \leq r \leq n$ ), 于是  $A$  的特征多项式为  $\lambda^n$ , 从而  $A$  的特征值全为零, 再由 **幂零矩阵关于特征值的充要条件** 可知  $A$  为零矩阵. □

#### 定义 6.15 (线性变换的迹)

线性变换的迹定义为它在任一组基下的表示矩阵的迹.

♣

**笔记** 因为矩阵的迹在相似变换下保持不变, 并且同一线性变换在不同基下的表示矩阵必相似, 所以同一线性变换在任意一组基下的表示矩阵的迹都相同, 故线性变换的迹是良定义的.

#### 命题 6.18

设  $\varphi$  为  $n$  维线性空间,  $\lambda_0$  为  $\varphi$  的一个特征值,  $V_0$  为特征值  $\lambda_0$  的特征子空间, 则存在  $V_0$  上的一组基, 使得  $\varphi$  在  $V_0$  上的限制  $\varphi|_{V_0}$  在这组基下的表示矩阵为  $\dim V_0$  阶的对角阵  $\text{diag}\{\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0\}$ , 从而  $\text{tr}(\varphi|_{V_0}) = \lambda_0 \dim V_0$ .

▲

**注** 因为线性变换的特征子空间一定是不变子空间, 所以线性变换在其特征子空间上做限制后仍是线性变换, 因此线性变换在其特征子空间上的限制是良定义的.

**证明** 设  $x_1$  是  $\varphi$  属于  $\lambda_0$  的特征向量, 将其扩充成  $V_0$  的一组基  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , 则  $r = \dim V_0$ . 注意到  $x_1, x_2, \dots, x_r$  也是  $\varphi|_{V_0}$  属于  $\lambda_0$  的特征向量, 从而

$$\varphi|_{V_0}(x_1, x_2, \dots, x_r) = (\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \dots, \lambda_0 x_r) = (x_1, x_2, \dots, x_r) \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

故  $\varphi|_{V_0}$  在  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  下的表示矩阵为  $\dim V_0$  阶对角阵  $\text{diag}\{\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0\}$ . □

#### 命题 6.19

设  $A, B, C$  是  $n$  阶矩阵, 其中  $C = AB - BA$ . 若它们满足条件  $AC = CA, BC = CB$ , 求证:  $C$  的特征值全为零.

▲

**注** 若将条件减弱为  $ABC = CAB, BAC = CBA$ , 则上述结论不再成立. 原因如下:

如将条件减弱为如题所述, 则结论不再成立, 可参考下面的反例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由计算可得  $C = AB - BA$ ,  $ABC = CAB$ ,  $CBA = BAC$ , 但  $C$  的特征值为 1 和 -1。

**笔记** 从下述的证法一不难看出: 只需要  $AC = CA$  和  $BC = CB$  这两个条件中的一个就能证明本题的结论。

**证明 证法一:** 由  $AC = CA$  可知, 对任意的正整数  $k$ ,

$$C^k = C^{k-1}AB - C^{k-1}BA = A(C^{k-1}B) - (C^{k-1}B)A.$$

由迹的线性和交换性可得  $\text{tr}(C^k) = 0$  ( $k \geq 1$ ), 再由幂零矩阵关于迹的充要条件可知  $C$  为幂零矩阵, 从而  $C$  的特征值全为零。

**证法二:** 将  $A, B, C$  看成是  $n$  维复列向量空间  $V$  上的线性变换. 任取  $C$  的特征值  $\lambda_0$  及其特征子空间  $V_0$ , 由  $AC = CA$ ,  $BC = CB$  以及命题??可知,  $V_0$  是  $A$ -不变子空间, 也是  $B$ -不变子空间. 将等式  $C = AB - BA$  两边的线性变换同时限制在  $V_0$  上, 可得  $V_0$  上线性变换的等式  $C|_{V_0} = A|_{V_0}B|_{V_0} - B|_{V_0}A|_{V_0}$ . 两边同时取迹, 由迹的线性和交换性及命题??可知

$$\lambda_0 \dim V_0 = \text{tr}(C|_{V_0}) = \text{tr}(A|_{V_0}B|_{V_0}) - \text{tr}(B|_{V_0}A|_{V_0}) = 0,$$

从而  $\lambda_0 = 0$ , 结论得证. □

**注** 上述证法二中,  $A, B, C$  在不变子空间  $V_0$  上的限制只能理解成线性变换在不变子空间上的限制, 而不是矩阵在不变子空间上的限制。

#### 推论 6.7

设  $A, B, C$  是  $n$  阶矩阵, 其中  $C = AB - BA$ . 若它们满足条件  $AC = CA$ ,  $BC = CB$ , 求证:  $A, B, C$  可同时上三角化.

**证明** 对阶数进行归纳. 由命题??证法二可知,  $C$  的特征值全为 0, 其特征子空间  $V_0$  满足

$$A|_{V_0}B|_{V_0} - B|_{V_0}A|_{V_0} = C|_{V_0} = 0,$$

即  $A|_{V_0}, B|_{V_0}$  乘法可交换. 由命题??可知  $A|_{V_0}, B|_{V_0}$  有公共的特征向量, 即存在  $0 \neq e_1 \in V_0$ , 使得

$$Ae_1 = A|_{V_0}(e_1) = \lambda_1 e_1, Be_1 = B|_{V_0}(e_1) = \mu_1 e_1, Ce_1 = 0.$$

余下的证明完全类似于命题??的证明, 请读者自行补充相关的细节. □

### 6.3.6 特征值的估计

#### 定理 6.11 (第一圆盘定理)

设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶矩阵, 则  $A$  的特征值在复平面的下列圆盘中:

$$|z - a_{ii}| \leq R_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中  $R_i = |a_{i1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|$ .

**注** 该定理又称为 Gerschgorin 圆盘第一定理, 即戈氏圆盘第一定理. 上述圆盘称为戈氏圆盘.

**证明** □

#### 定理 6.12 (第二圆盘定理)

若  $n$  阶矩阵  $A$  的  $n$  个戈氏圆盘分成若干个连通区域, 其中某个连通区域恰含  $k$  个戈氏圆盘, 则有且仅有  $k$  个特征值落在该连通区域内 (若两个圆盘重合应计算重数, 若特征值为重根也要计算重数).

**证明** □

**例题 6.19** 如果圆盘定理中有一个连通分支由两个圆盘外切组成, 证明: 每个圆盘除去切点的区域不可能同时包含两个特征值.

**证明** 设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶矩阵,  $D_i: |z - a_{ii}| \leq R_i (1 \leq i \leq n)$  是  $A$  的  $n$  个戈氏圆盘. 不妨设  $A$  的两个戈氏圆盘  $D_1, D_2$  外切并组成一个连通分支. 令

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

由第一圆盘定理,  $A(t)$  的特征值落在下列圆盘中:

$$tD_i: |z - a_{ii}| \leq tR_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

由于当  $0 \leq t < 1$  时,  $A(t)$  的特征值是关于  $t$  的连续函数, 故  $A(t)$  的特征值  $\lambda_i(t)$  从  $D_i$  的圆心开始, 始终在圆盘  $tD_i (1 \leq i \leq n)$  中连续变动. 注意此时  $tD_1, tD_2$  不相交, 它们是两个连通分支, 于是特征值  $\lambda_i(t)$  落在  $tD_i (i = 1, 2)$  中. 最后当  $t = 1$  时,  $A$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_1(1)$  落在  $D_1$  中, 特征值  $\lambda_2 = \lambda_2(1)$  落在  $D_2$  中. 因此,  $\lambda_1, \lambda_2$  不可能同时落在  $D_1$  或  $D_2$  除去切点的区域中.  $\square$

**例题 6.20** 设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶矩阵, 证明: 存在正数  $\delta$ , 使得对任意的  $s \in (0, \delta)$ , 下列矩阵均有  $n$  个不同的特征值:

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{11} + s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + s^2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + s^n \end{pmatrix}.$$

**证明** 先证当  $s$  充分大时,  $A(s)$  有  $n$  个不同的特征值. 由第一圆盘定理,  $A(s)$  的特征值落在下列戈氏圆盘中:

$$D_i: |z - a_{ii} - s^i| \leq R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

取  $s$  充分大, 使得  $s^n \gg s^{n-1} \gg \cdots \gg s$ . 注意到  $R_i$  的值固定, 故  $D_i$  的圆心之间的距离大于半径  $R_i$ , 从而  $D_i$  互不相交, 各自构成了一个连通分支. 再由第二圆盘定理, 每个连通分支  $D_i$  中有且仅有一个特征值, 于是  $A(s)$  有  $n$  个不同的特征值.

设  $f_s(\lambda) = |\lambda I_n - A(s)|$  是  $A(s)$  的特征多项式, 则其判别式  $\Delta(f_s(\lambda))$  是关于  $s$  的多项式. 由前面的讨论可知, 当  $s$  充分大时,  $f_s(\lambda)$  无重根, 从而  $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$ , 即  $\Delta(f_s(\lambda))$  是关于  $s$  的非零多项式. 若  $\Delta(f_s(\lambda))$  的所有复根都是零, 则任取一个正数  $\delta$ ; 若  $\Delta(f_s(\lambda))$  的复根不全为零, 则可取  $\delta$  为  $\Delta(f_s(\lambda))$  的非零复根的模长的最小值. 于是对任意的  $s \in (0, \delta)$ ,  $s$  都不是  $\Delta(f_s(\lambda))$  的根, 即  $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$ , 从而  $f_s(\lambda)$  都无重根, 即  $A(s)$  都有  $n$  个不同的特征值.  $\square$