

## 0.1 内积的表示和正交基

### 定义 0.1 (Gram 矩阵和度量矩阵)

设  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是内积空间的一个向量组, 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\beta_1, \beta_1) & \cdots & (\beta_1, \beta_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\beta_s, \beta_1) & \cdots & (\beta_s, \beta_s) \end{pmatrix}$$

称为向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的 **Gram 矩阵**. 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是一组基, 则将 Gram 矩阵称为该基的 **度量矩阵**.

### 命题 0.1 (欧氏空间中 Gram 阵的性质)

设  $v_1, v_2, \dots, v_m$  是欧氏空间  $V$  中  $m$  个向量, 则向量  $v_1, v_2, \dots, v_m$  的 Gram 矩阵为

$$G = G(v_1, v_2, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_m) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_2, v_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_m, v_1) & (v_m, v_2) & \cdots & (v_m, v_m) \end{pmatrix}.$$

求证:

(1)  $G$  是半正定实对称矩阵;

(2) 向量组  $v_1, v_2, \dots, v_m$  线性无关当且仅当  $G$  是正定阵, 也当且仅当  $G$  是可逆矩阵.

**注** 向量组  $v_1, v_2, \dots, v_m$  的 Gram 矩阵的几何意义是, 这  $m$  个向量张成的平行  $2m$  面体的体积等于其 Gram 矩阵的行列式的算术平方根 (证明可参考命题??):

$$V(v_1, v_2, \dots, v_m) = |G(v_1, v_2, \dots, v_m)|^{\frac{1}{2}}.$$

特别地, 设  $V = \mathbb{R}^n$  (取标准内积),  $n$  阶实矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  为其列分块, 则  $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A'A$ , 于是  $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = |A'A|^{\frac{1}{2}} = \text{abs}(|A|)$ . 因此,  $n$  阶行列式的绝对值等于其  $n$  个列向量张成的平行  $2n$  面体的体积, 这就是  $n$  阶行列式的几何意义.

**证明** (1) 由内积的对称性可知  $G$  是实对称矩阵. 对任意的实列向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)'$ , 令  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$ , 则有

$$\alpha'G\alpha = \sum_{i,j=1}^m a_i a_j (v_i, v_j) = \left( \sum_{i=1}^m a_i v_i, \sum_{j=1}^m a_j v_j \right) = (v, v) \geq 0,$$

因此  $G$  是半正定阵.

(2) 注意到半正定阵  $G$  是正定阵当且仅当  $G$  是非异阵, 故两个充要条件只要证明其中一个即可. 我们用两种方法来证明它们.

**证法一:** 先证必要性, 若  $v_1, v_2, \dots, v_m$  线性无关, 则对任意的非零实列向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)'$ ,  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \neq 0$ , 从而  $\alpha'G\alpha = (v, v) > 0$ , 故  $G$  是正定阵.

再证充分性, 反证, 若  $v_1, v_2, \dots, v_m$  线性相关, 则存在非零实列向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)'$ , 使得  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$ , 从而  $\alpha'G\alpha = (v, v) = 0$ , 故  $G$  不是正定阵.

**证法二:** 先证充分性, 反证, 假设  $v_1, v_2, \dots, v_m$  线性相关, 则存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得  $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m = 0$ . 将  $k_i$  乘以  $G$  的第  $i$  行后求和得到

$$(k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m, v_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1)$$

即  $G$  的  $m$  个行向量线性相关, 因此  $G$  不是可逆矩阵.

再证必要性, 反证, 若  $G$  不可逆, 则  $G$  的  $m$  个行向量线性相关, 即存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得 (1)

式成立. 于是

$$(k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m, k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m) = 0,$$

从而  $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m = 0$ , 因此  $v_1, v_2, \cdots, v_m$  线性相关. □

### 定理 0.1

1. 若  $V$  是一个  $n$  维欧式空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  是它的一组基, 对  $V$  中任意向量  $\alpha, \beta$ , 其中

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$$\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n.$$

则

$$(\alpha, \beta) = X^T G Y, \quad (2)$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

此时,  $G$  就是基  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的度量矩阵. 并且  $G$  是一个  $n$  阶正定实对称阵.

由此可知, 若给定了  $n$  维实线性空间  $V$  的一组基, 则  $V$  上的内积结构和  $n$  阶正定实对称阵之间存在着一个一一对应.

2. 若  $V$  是一个  $n$  维酉空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  是它的一组基, 对  $V$  中任意向量  $\alpha, \beta$ , 其中

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$$\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n.$$

则

$$(\alpha, \beta) = X^T H \bar{Y},$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

此时,  $H$  就是基  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的度量矩阵. 并且  $H$  是一个  $n$  阶正定 Hermite 阵.

由此可知, 若给定了  $n$  维复线性空间  $V$  的一组基, 则  $V$  上的内积结构和  $n$  阶正定 Hermite 阵之间存在着一个一一对应. ♥

### 证明

1. 利用内积的线性性容易得到  $(\alpha, \beta) = X^T G Y$ .

再看矩阵  $G$ . 因为  $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_j, \alpha_i)$ , 所以  $G$  是实对称阵. 又因为对任意的非零向量  $\alpha$ , 总有  $(\alpha, \alpha) > 0$ , 所以  $x' G x > 0$  对一切  $n$  维非零实列向量  $x$  成立. 这表明  $G$  是一个正定阵.

反之, 若给定  $n$  阶正定实对称阵  $G$ , 利用 (2) 式也可以定义  $V$  上的内积 (参考例题 2.(1)). 由此我们可以看出, 若给定了  $n$  维实线性空间  $V$  的一组基, 则  $V$  上的内积结构和  $n$  阶正定实对称阵之间存在着一个一一对应.

2. 由 1 类似可证. □

## 定义 0.2

设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $n$  维内积空间  $V$  的一组基. 若  $e_i \perp e_j$  对一切  $i \neq j$  成立, 则称这组基是  $V$  的一组**正交基**. 又若  $V$  的一组正交基中每个基向量的长度都等于 1, 则称这组正交基为**标准正交基**.  
显然在标准正交基下, 度量矩阵就是单位矩阵.

## 引理 0.1

内积空间  $V$  中的任意一组两两正交的非零向量必线性无关.

**证明** 设  $v_1, v_2, \dots, v_m$  是  $V$  中两两正交的非零向量, 若

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m = \mathbf{0},$$

则对任一  $1 \leq i \leq m$ , 有

$$(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m, v_i) = 0.$$

由于  $v_i \perp v_j (i \neq j)$ , 故由上式可得  $k_i(v_i, v_i) = 0$ , 又  $v_i \neq \mathbf{0}$ , 从而  $k_i = 0$ . □

## 引理 0.2

设向量  $\alpha$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  都正交, 则  $\alpha$  和  $L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  中的每个向量都正交.

**证明** 任取  $\beta = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_k \beta_k \in L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ , 则

$$(\beta, \alpha) = (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_k \beta_k, \alpha) = \sum_{i=1}^k b_i (\beta_i, \alpha) = 0,$$

结论得证. □

## 推论 0.1

$n$  维内积空间中任意一个正交非零向量组的向量个数不超过  $n$ .

**证明** 假设  $n$  维内积空间  $V$  中有  $n+1$  个正交非零的向量, 则由引理 0.1 可知, 这  $n+1$  个正交非零的向量一定线性无关, 这与  $\dim V = n$  矛盾! □

## 定理 0.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设  $V$  是内积空间,  $u_1, u_2, \dots, u_m$  是  $V$  中  $m$  个线性无关的向量, 则在  $V$  中存在  $m$  个两两正交的非零向量  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , 使由  $v_1, v_2, \dots, v_m$  张成的子空间恰好为由  $u_1, u_2, \dots, u_m$  张成的子空间, 即  $v_1, v_2, \dots, v_m$  是该子空间的一组正交基.

**证明** 设  $v_1 = u_1$ , 其余  $v_i$  可用数学归纳法定义如下: 假设  $v_1, \dots, v_k (k < m)$  已定义好, 这时  $v_1, \dots, v_k$  两两正交非零且  $L(v_1, \dots, v_k) = L(u_1, \dots, u_k)$ . 令

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} v_j. \quad (3)$$

注意  $v_{k+1} \neq \mathbf{0}$ , 否则  $u_{k+1}$  将是  $v_1, \dots, v_k$  的线性组合, 从而也是  $u_1, \dots, u_k$  的线性组合, 此与  $u_1, u_2, \dots, u_m$  线性无关矛盾. 又对任意的  $1 \leq i \leq k$ , 有

$$\begin{aligned} (v_{k+1}, v_i) &= (u_{k+1}, v_i) - \sum_{j=1}^k \frac{(u_{k+1}, v_j)}{\|v_j\|^2} (v_j, v_i) \\ &= (u_{k+1}, v_i) - (u_{k+1}, v_i) = 0, \end{aligned}$$

因此  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$  两两正交. 由(3)式可知

$$u_{k+1} \in L(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) \text{ 及 } v_{k+1} \in L(v_1, \dots, v_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_{k+1}),$$

于是  $L(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = L(u_1, \dots, u_k, u_{k+1})$ , 这就证明了结论.  $\square$

**注** 上述定理证明中的正交化过程通常称为 Gram - Schmidt (格列姆-施密特) 方法.

### 推论 0.2

任一有限维内积空间均有标准正交基.

### 定义 0.3 (正交和)

设  $V$  是  $n$  维内积空间,  $V_1, V_2, \dots, V_k$  是  $V$  的子空间. 如果对任意的  $\alpha \in V_i$  和任意的  $\beta \in V_j$  均有  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称子空间  $V_i$  和  $V_j$  正交. 若  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$  且  $V_i$  两两正交, 则称  $V$  是  $V_1, V_2, \dots, V_k$  的正交和, 记为

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

**注** 由于引理 0.3, 正交和通常也称为正交直和.

### 引理 0.3

正交和必为直和且任一  $V_i$  和其余子空间的和正交.

**证明** 对任意的  $v_i \in V_i$  和  $\sum_{j \neq i} v_j (v_j \in V_j)$ , 有

$$(v_i, \sum_{j \neq i} v_j) = \sum_{j \neq i} (v_i, v_j) = 0,$$

因此后一个结论成立. 任取  $v \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j)$ , 则由上述论证可得  $(v, v) = 0$ , 故  $v = \mathbf{0}$ , 从而  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ , 即正交和必为直和.  $\square$

### 定义 0.4 (正交补空间)

设  $U$  是内积空间  $V$  的子空间, 令

$$U^\perp = \{v \in V | (v, u) = 0\},$$

这里  $(v, U) = 0$  表示对一切  $u \in U$ , 均有  $(v, u) = 0$ . 容易验证  $U^\perp$  是  $V$  的子空间, 称为  $U$  的正交补空间.

### 定理 0.3

设  $V$  是  $n$  维内积空间,  $U$  是  $V$  的子空间, 则

- (1)  $V = U \oplus U^\perp = U \perp U^\perp$ ;
- (2)  $U$  的任一组标准正交基均可扩张为  $V$  的一组标准正交基.

**证明** (1) 若  $x \in U \cap U^\perp$ , 则  $(x, x) = 0$ , 因此  $x = \mathbf{0}$ , 即  $U \cap U^\perp = \{0\}$ . 另一方面, 由推论 0.2 可知, 存在  $U$  的一组标准正交基  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . 对任意的  $v \in V$ , 令

$$u = (v, e_1)e_1 + (v, e_2)e_2 + \dots + (v, e_m)e_m,$$

则  $u \in U$ . 又令  $w = v - u$ , 则对任一  $e_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 有

$$(w, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = (v, e_i) - (v, e_i) = 0.$$

因此  $w \in U^\perp$ , 又  $v = u + w$ , 这就证明了  $V = U \oplus U^\perp$ .

(2) 设  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  是  $U$  的任一组标准正交基,  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  是  $U^\perp$  的任一组标准正交基, 则显然  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组标准正交基.  $\square$

**定义 0.5 (正交投影)**

设  $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$ , 定义  $V$  上的线性变换  $E_i (i = 1, 2, \cdots, k)$  如下: 若  $v = v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_k (v_i \in V_i)$ , 令  $E_i(v) = v_i$ . 容易验证  $E_i$  是  $V$  上的线性变换, 且满足

$$E_i^2 = E_i, E_i E_j = 0 (i \neq j), E_1 + E_2 + \cdots + E_k = I_V.$$

线性变换  $E_i$  称为  $V$  到  $V_i$  上的**正交投影** (简称投影).

**命题 0.2**

设  $U$  是内积空间  $V$  的子空间,  $V = U \perp U^\perp$ . 设  $E$  是  $V$  到  $U$  上的正交投影, 则对任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 有

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

**证明** 设  $\alpha = u_1 + w_1, \beta = u_2 + w_2$ , 其中  $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in U^\perp$ , 则  $E(\alpha) = u_1, E(\beta) = u_2$ , 于是

$$(E(\alpha), \beta) = (u_1, u_2 + w_2) = (u_1, u_2) + (u_1, w_2) = (u_1, u_2),$$

$$(\alpha, E(\beta)) = (u_1 + w_1, u_2) = (u_1, u_2) + (w_1, u_2) = (u_1, u_2).$$

由此即得结论. □

**命题 0.3 (Bessel (贝塞尔) 不等式)**

设  $v_1, v_2, \cdots, v_m$  是内积空间  $V$  中的正交非零向量组,  $y$  是  $V$  中任一向量, 则

$$\sum_{k=1}^m \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|y\|^2,$$

且等号成立的充分必要条件是  $y$  属于由  $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$  张成的子空间.

**注** Bessel (贝塞尔) 不等式是“斜边大于直角边”这一几何命题在内积空间中的推广.

**证明** 令

$$x = \sum_{k=1}^m \frac{(y, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k,$$

则  $x$  属于由  $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$  张成的子空间. 容易验证

$$(y - x, v_k) = 0, k = 1, 2, \cdots, m,$$

因此  $(y - x, x) = 0$ . 由勾股定理可得

$$\|y\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x\|^2,$$

故

$$\|x\|^2 \leq \|y\|^2.$$

又由  $v_1, v_2, \cdots, v_m$  两两正交不难算出

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^m \frac{|(y, v_k)|^2}{\|v_k\|^2}.$$

若  $y$  属于由  $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$  张成的子空间, 则  $y = x$ , 故等号成立. 反之, 若等号成立, 则  $\|y - x\|^2 = 0$ , 故  $y = x$ , 即  $y$  属于由  $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$  张成的子空间. □