

## 0.1 导数的几何意义

### 命题 0.1

过  $z_0$  作一条光滑曲线  $\gamma$ , 它的方程为

$$z = \gamma(t), a \leq t \leq b.$$

设  $\gamma(a) = z_0$ , 且  $\gamma'(a) \neq 0$ . 设  $w = f(z)$  把曲线  $\gamma$  映为  $\sigma$ , 它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)), a \leq t \leq b.$$

则  $\sigma$  在  $w_0 = f(z_0)$  处的切线与正实轴的夹角为

$$\operatorname{Arg}\sigma'(a) = \operatorname{Arg}f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma'(a),$$

或者写为

$$\operatorname{Arg}\sigma'(a) - \operatorname{Arg}\gamma'(a) = \operatorname{Arg}f'(z_0). \quad (1)$$

$\operatorname{Arg}f'(z_0)$  就称为映射  $w = f(z)$  在点  $z_0$  处的转动角.



**笔记** 这说明像曲线  $\sigma$  在  $w_0$  处的切线与正实轴的夹角与原曲线  $\gamma$  在  $z_0$  处的切线与正实轴的夹角之差总是  $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ , 而与曲线  $\gamma$  无关.

**证明** 由定义??可知,  $\gamma$  在点  $z_0$  处的切线与正实轴的夹角为  $\operatorname{Arg}\gamma'(a)$ . 由于  $\sigma'(a) = f'(\gamma(a))\gamma'(a) = f'(z_0)\gamma'(a) \neq 0$ , 所以再结合定理??(1) 可得  $\sigma$  在  $w_0 = f(z_0)$  处的切线与正实轴的夹角为

$$\operatorname{Arg}\sigma'(a) = \operatorname{Arg}f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma'(a),$$

□

### 定义 0.1

若  $w = f(z)$  是定义域为  $D$  的复变函数, 并且在  $z_0$  处满足: 过  $z_0$  的任意两条曲线  $C_1, C_2$  经映射后得到的曲线  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , 其夹角(包括大小和方向)与原曲线  $C_1, C_2$  的夹角相等. 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的保角点, 也称  $f$  在  $z_0$  点是保角的. 若  $f(z)$  在  $D$  内所有点都是保角的, 则称  $f(z)$  是  $D$  上的保角变换.

♣

**注** 夹角的“方向”指从曲线  $C_1$  到  $C_2$  的旋转方向, 与映射后从  $\Gamma_1$  到  $\Gamma_2$  的旋转方向一致, 即保持“定向”.

### 定理 0.1

全纯函数在其导数不为零的点处是保角的.

♥

**证明** 如果过  $z_0$  点作两条光滑曲线  $\gamma_1, \gamma_2$ , 它们的方程分别为

$$z = \gamma_1(t), a \leq t \leq b \text{ 和 } z = \gamma_2(t), a \leq t \leq b,$$

且  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_0$ (图 1(a)). 映射  $w = f(z)$  把它们分别映为过  $w_0$  点的两条光滑曲线  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ (图 1(b)), 它们的方程分别为

$$w = \sigma_1(t) = f(\gamma_1(t)), a \leq t \leq b \text{ 和 } w = \sigma_2(t) = f(\gamma_2(t)), a \leq t \leq b.$$

由 (1)式可得

$$\operatorname{Arg}\sigma'_1(a) - \operatorname{Arg}\gamma'_1(a) = \operatorname{Arg}f'(z_0) = \operatorname{Arg}\sigma'_2(a) - \operatorname{Arg}\gamma'_2(a),$$

即

$$\operatorname{Arg}\sigma'_2(a) - \operatorname{Arg}\sigma'_1(a) = \operatorname{Arg}\gamma'_2(a) - \operatorname{Arg}\gamma'_1(a). \quad (2)$$

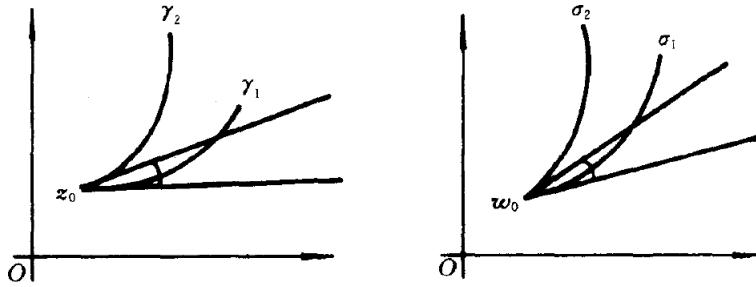


图 1

上式左端是曲线  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  在  $w_0$  处的夹角(两条曲线在某点的夹角定义为这两条曲线在该点的切线的夹角),右端是曲线  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  在  $z_0$  处的夹角.(2)式说明,如果  $f'(z_0) \neq 0$ ,那么在映射  $w = f(z)$  的作用下,过  $z_0$  点的任意两条光滑曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的.

□

**推论 0.1**

设  $w = f(z)$  是定义域为  $D$  的复变函数,则  $f$  在  $z_0$  上是保角的充要条件是  $f(z)$  在  $D$  上全纯且  $f'(z_0) \neq 0$ .

♡

**证明** 由定理 0.1 立得.

□

**定义 0.2 (伸缩率)**

过  $z_0$  作一条光滑曲线  $\gamma$ ,它的方程为

$$z = \gamma(t), a \leq t \leq b.$$

设  $\gamma(a) = z_0$ ,且  $\gamma'(a) \neq 0$ .设  $w = f(z)$  把曲线  $\gamma$  映为  $\sigma$ (图 2),它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)), a \leq t \leq b.$$

称  $|f'(z_0)|$  为  $f$  在  $z_0$  处的伸缩率.

♣

**笔记** 由于

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

所以,当  $z$  沿着  $\gamma$  趋于  $z_0$  时,有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

这说明像点之间的距离与原像之间的距离之比只与  $z_0$  有关,而与曲线  $\gamma$  无关.

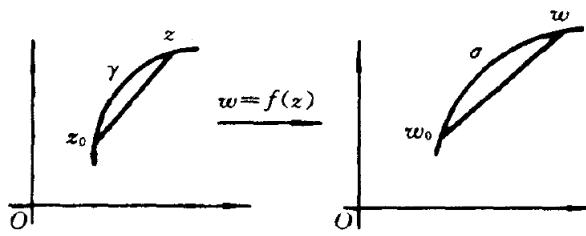


图 2