y(哈代) 不等式 7.6244 著名积分不等式 tcb@cnt@theorem.7.6../Basis of Analytics/main.pdf y(哈代) 不等式 7.1245 著名积分不等式 tcb@cnt@corollary.7.1../Basis of Analytics/main.pdf

0.1 著名积分不等式

定理 0.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty)$,$(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty)$,$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 x_i,$i = 1,2,\cdots,n$ 相等.

笔记 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a,b \geq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, p > 1$ 有 $ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i \neq 0$,$(i = 1,2,\cdots,n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出. □

定义 0.1

(1) $d\mu = g(x)dx$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E \subset \mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu = \sum_{n\in E} f(n)$.

定理 0.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1 f(x)+c_2 g(x) = 0$.

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu = 0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu \neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu \neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu = \int_E |g(x)|^2 d\mu = 1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用 Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}d\mu = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1,c_2, 使得 $c_1 f(x)+c_2 g(x) = 0$. □

定理 0.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geqslant 0$, $\int_a^b p(x)dx > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \overset{1}{\leqslant} \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \tag{1}$$

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式 (??) 反号.

证明 令 $\mathrm{d}\mu=\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$, 则 $\int_a^b \mathrm{d}\mu=1$, 再令 $x_0\triangleq\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu>0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x\leqslant \ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0),\forall x>0.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}\mu&\leqslant\int_a^b \ln x_0\mathrm{d}\mu+\frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x)-x_0)\mathrm{d}\mu\\&=\ln x_0+\frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu-x_0\int_a^b \mathrm{d}\mu\right)\\&=\ln x_0=\ln\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

故结论得证. □

定理 0.4 (Hold 不等式)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中有体积的有界集,f 和 g 都在 V 上可积, 又设 p,q 是满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数, 且 $p>1$, 则有

$$\int_V |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_V |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).

注 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要"调幂次"的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于 $p\in(0,1)$ 的情况会有反向赫尔德不等式.

证明 不妨设 $f,g\geqslant 0$, 否则用 $|f|,|g|$ 代替 f,g. 由 Young 不等式可知

$$f(x)g(x)\leqslant\frac{f^p(x)}{p}+\frac{g^q(x)}{q}.$$

由于 f,g 在 V 上都可积, 故可不妨设 $\int_V f^p(x)\mathrm{d}x=\int_V g^q(x)\mathrm{d}x=1$, 否则用 $\frac{f}{\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}},\frac{g}{\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$ 代替 f,g. 从而

$$\int_V f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\int_V f^p(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_V g^q(x)\mathrm{d}x=1=\left(\int_V f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_V g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x)\leqslant\frac{f^p(x)}{p}+\frac{g^q(x)}{q}$$

在 V 上几乎处处取等. 根据 Young 不等式的取等条件可知, 此即 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零). □

定理 0.5 (Minkowski 不等式)

若 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的非负连续函数, 则对 $p\geqslant 1$ 有 (若 $p\in(0,1)$ 则不等式反向)

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.$$

笔记 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用赫尔德不等式.

注 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为"绝对值不等式", 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用 p 范数来写会好记并且清晰:

$$\left\|\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right\|_p\leq\int_c^d\|f(x,y)\|_p\mathrm{d}y.$$

对于 $p\in(0,1)$ 的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向赫尔德不等式.

证明 假设 $p\geq 1$, 记 $g(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 换序并利用赫尔德不等式有

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\cdot\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^{p-1}\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\int_c^d f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^b f(x,y)g^{p-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}y\\
&=\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\\
&=\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 进而 $q(p-1)=p$. 两边约掉 $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x$ 就有

$$
\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y.
$$

□

定理 0.6 (Hardy 不等式)

设 $p>1$ 或 $p<0, f(x)$ 恒正且连续, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$
\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x.
$$

♡

注 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后赫尔德 (连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再赫尔德, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外 $p<0$ 的情况证明完全类似, 利用反向赫尔德即可.

证明 假设 $p>1$, 对任意 $M>0$, 利用分部积分和赫尔德不等式有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x=-\frac{1}{p-1}\int_0^M F^p(x)d\frac{1}{x^{p-1}}=-\frac{1}{p-1}\left(\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M-\int_0^M\frac{1}{x^{p-1}}dF^p(x)\right)\\
&=-\frac{1}{p-1}\frac{F^p(M)}{M^{p-1}}+\frac{p}{p-1}\int_0^M\frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{p}{p-1}\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\int_0^M\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^M f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

其中利用了

$$
\lim_{x\to0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}=\lim_{x\to0^+}F(x)\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1},\ \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0).
$$

所以

$$
\left.\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}\right|_0^M=\frac{F^p(M)}{M^{p-1}}-\lim_{x\to0^+}\frac{F^p(x)}{x^{p-1}}=\frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.
$$

现在约掉相同的部分, 再令 $M\to\infty$ 就有

$$
\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x.
$$

□

推论 0.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列 a_n 非负, 对任意 $p > 1$ 或者 $p < 0$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

♡

注 如果 $p < 0$, 则同样使用反向赫尔德不等式即可完成

证明 记 $S_k = a_1+a_2+\cdots+a_k$, 不妨设 $p > 1$, 利用均值不等式或者 Young 不等式容易证明

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1}\frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}}a_k \leqslant \frac{1}{p-1}\left((k-1)\frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k\frac{S_k^p}{k^p}\right)$$

求和有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p \leqslant \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{p-1} a_k.$$

效果上就和前面分部积分完全一样, 然后再用赫尔德不等式即可. □