0.1 一般可测函数的积分

0.1.1 积分的定义与初等性质

定义 0.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x, \quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分; 当上式右端两个积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**. 在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

♣

定理 0.1

若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上可积等价于 $|f(x)|$ 在 E 上可积, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由于等式

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立, 故知在 $f(x)$ 可测的条件下,$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的, 且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.2 (积分的基本性质)

(1) 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.

(2) 若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 若 $E \in \mathscr{M}$, 且 $f(x) = 0$,a. e. $x \in E$, 则 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,$g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \leqslant g(x)$,$x \in E$($g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**控制函数**), 则 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.

(5) (i) 设 $f \in L(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

或说对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\int_{\{x:|x|\geqslant N\}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(ii) 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{x \in E : |x| \geqslant N\}$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

♡

注 (3) 反过来并不成立, 例如,$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ -1, & x \in (1,2]. \end{cases}$.

证明

(1) 不妨设 $|f(x)| \leqslant M\ (x \in E)$, 由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数, 故有

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E M \mathrm{d}x = M m(E) < +\infty.$$

因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(2) 由 $f \in L(E)$ 及定理 0.1可知, 非负可测函数 $|f(x)|$ 在 E 上也可积. 从而由定理**??**可知,$|f(x)|$ 在 E 上几乎处处有限, 即

$$m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

故 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

(3) 因为 $|f(x)| = 0$,a. e.,$x \in E$, 且 $|f(x)|$ 非负可测, 所以由命题**??**可得

$$\left|\int_E f(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

故 $\int_E f(x) \mathrm{d}x = 0$.

(4) (i) 由非负可测函数的积分性质 (1) 可知

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x) \mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(E)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(E)$.

(ii) 若 $f \in L(E)$,$e \subset E$ 是可测集, 则非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_e |f(x)| \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| \chi_e(x) \mathrm{d}x = \int_E |f(x) \chi_e(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty.$$

故 $|f| \in L(e)$, 因此由定理 0.1可知 $f \in L(e)$.

(5) (i) 记 $E_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 则 $\{|f(x)|\chi_{E_N}(x)\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

由此可知

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E_N} |f(x)| \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x \xlongequal{\text{推论??}} \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{N\to\infty} |f(x)|\chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

(ii) 由 $f \in L(E)$ 及非负可测函数的积分性质 (1)(3) 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) \chi_{E_N}(x)\right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_E(x) \mathrm{d}x = \int_E |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty.$$

因此 $f \cdot \chi_{E_N} \in L(\mathbf{R}^n)$. 又 $E_N \subset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant N\}$, 故由非负可测函数的积分性质 (3) 及 (i) 可得

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant N\}} f(x) \chi_{E_N}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

□

定理 0.3 (积分的线性性质)

若 $f, g \in L(E)$,$C \in \mathbb{R}$, 则

(i) $\int_E C f(x) \mathrm{d}x = C \int_E f(x) \mathrm{d}x$, 进而 $C f \in L(E)$;

(ii) $f + g \in L(E)$ 且 $\int_E (f(x) + g(x)) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x + \int_E g(x) \mathrm{d}x$.

(iii) 若 $f \in L(E)$,$g(x)$ 是 E 上的有界可测函数, 则 $f \cdot g \in L(E)$.

♡

注 不妨假定 f, g 都是实值函数 (即处处有限) 的原因:(i) 假设结论对处处有限的函数成立. 若 f 不是处处有限的函数, 则由 $f \in L(E)$ 及可积函数的基本性质 (ii)可知, 令 $E_1 = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$, 则 $m(E_1) = 0$, 再令 $E_2 = E \backslash E_1$, 则由假设可知

$$\int_{E_2} C f(x) \mathrm{d}x = C \int_{E_2} f(x) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

由非负可测函数积分线性性质及定理??(3) 可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,dx &= \int_E (Cf(x))^+\,dx - \int_E (Cf(x))^-\,dx\\
&= \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,dx - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,dx\\
&= \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_1}(x)\,dx + \int_E (Cf(x))^+\chi_{E_2}(x)\,dx - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_1}(x)\,dx - \int_E (Cf(x))^-\chi_{E_2}(x)\,dx\\
&= \int_{E_1} (Cf(x))^+\,dx + \int_{E_2} (Cf(x))^+\,dx - \int_{E_1} (Cf(x))^-\,dx - \int_{E_2} (Cf(x))^-\,dx\\
&= \int_{E_2} (Cf(x))^+\,dx - \int_{E_2} (Cf(x))^-\,dx \overset{(1)\text{式}}{=} \int_{E_2} Cf(x)\,dx\\
&= C\int_{E_2} f(x)\,dx = C\int_{E_2} f^+(x)\,dx - C\int_{E_2} f^-(x)\,dx\\
&= C\left(\int_{E_1} f^+(x)\,dx + \int_{E_2} f^+(x)\,dx - \int_{E_1} f^-(x)\,dx - \int_{E_2} f^-(x)\,dx\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,dx + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,dx - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,dx - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,dx\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,dx - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,dx\right)\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx\right) = C\int_E f(x)\,dx.\end{aligned}$$

故对一般情况结论也成立.

(ii) 由 (i) 同理可证.

证明 不妨假定 f,g 都是实值函数 (即处处有限).

(i) 由公式

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},\quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \tag{2}$$

立即可知: 当 $C \geq 0$ 时,$(Cf)^+ = Cf^+$,$(Cf)^- = Cf^-$. 根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质, 可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,dx &= \int_E Cf^+(x)\,dx - \int_E Cf^-(x)\,dx\\
&= C\left(\int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx\right) = C\int_E f(x)\,dx.\end{aligned}$$

当 $C = -1$ 时, 由(2)式可知 $(-f)^+ = f^-$,$(-f)^- = f^+$. 同理可得

$$\int_E (-f(x))\,dx = \int_E f^-(x)\,dx - \int_E f^+(x)\,dx = -\int_E f(x)\,dx.$$

当 $C < 0$ 时, 由(2)式可知 $Cf(x) = -|C|f(x)$. 由上述结论可得

$$\begin{aligned}\int_E Cf(x)\,dx &= \int_E -|C|f(x)\,dx = -\int_E |C|f(x)\,dx\\
&= -|C|\int_E f(x)\,dx = C\int_E f(x)\,dx.\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_E |Cf(x)|\,dx = |C|\int_E |f(x)|\,dx < +\infty, \forall C \in \mathbb{R}.$$

故 $Cf(x) \in L(E)$.

(ii) 首先, 由于有 $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, 故可知 $f+g \in L(E)$. 其次, 注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

进而

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f+g)^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^-(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为式中每项积分值都是有限的, 所以可移项且得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) 注意到

$$|f(x)\cdot g(x)| \leq |f(x)|\cdot \sup_{x\in E}|g(x)|, \quad x\in E.$$

由 g 在 E 上有界, 故 $\sup\limits_{x\in E}|g(x)|\in\mathbb{R}$. 从而由 (i) 可得 $|f(x)|\cdot\sup\limits_{x\in E}|g(x)|\in L(E)$, 于是再由定理 0.2(4)(i)可知 $f\cdot g\in L(E)$.

□

推论 0.1

若 $f\in L(E)$, 且 $f(x)=g(x)$,a. e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 这个推论表明: **改变可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.**

证明 令 $E_1=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}, E_2=E\backslash E_1, m(E_1)=0$, 则

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E f^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E f^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_{E_1} f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} f^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_2} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(5)(ii)}} \int_{E_1} g^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} g^-(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_2} g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{定理??(3)}} \int_E g^+(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_{E_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_{E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\left[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_E g^+(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

例题 0.1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数, 且有

$$\int_{[0,1]} |f(x)|\ln(1+|f(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则 $f\in L([0,1])$.

证明 为了阐明 $f\in L([0,1])$, 自然想到去寻求可积的控制函数. 题设告诉我们 $|f(x)|\ln(1+|f(x)|)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数, 难道它能控制 $|f(x)|$ 吗? 显然, 这只是在 $\ln(1+|f(x)|)\geqslant 1$ 或 $|f(x)|\geqslant \mathrm{e}-1$ 时才行. 但注意到 $|f(x)|<\mathrm{e}-1$ 时, 由于区间 $[0,1]$ 的测度是有限的, 故常数 $\mathrm{e}-1$ 本身就是控制函数. 也就是说, 可在不同的定义区域寻求不同的控制函数.

为此, 作点集

$$E_1 = \{x \in [0,1] : |f(x)| \leqslant \mathrm{e}\}, \quad E_2 = [0,1] \setminus E_1,$$

则我们有

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}, \quad x \in E_1;$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x)| \ln(1 + |f(x)|), \quad x \in E_2.$$

这就是说 $f \in L(E_1)$ 且 $f \in L(E_2)$, 从而

$$f \in L(E_1 \cup E_2) = L([0,1]).$$

□

定理 0.4

设 $f \in L(E), f_n \in L(E)(n \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (x \in E), \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)\ (n \in \mathbf{N}, x \in E),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $F_n(x) = f(x) - f_n(x)(n \in \mathbf{N}, x \in E)$, 则 $\{F_n(x)\}$ 是 E 上非负渐降收敛于 0 的可积函数列, 从而由非负渐降函数列积分定理可知

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_E F_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

即得所证. □

命题 0.1

设 $g \in L(E), f_n \in L(E)(n \in \mathbf{N})$. 若 $f_n(x) \geqslant g(x)$,a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 Fatou 引理, 我们有

$$\begin{aligned}
& \int_E \varliminf_{n\to\infty} \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_E \left[f_n(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \right) \\
\Longleftrightarrow & \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_E g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow & \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

证毕. □

定理 0.5 (Jensen 不等式)

设 $w(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上的正值可测函数, 且

$$\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

$\varphi(x)$ 是区间 $I = [a,b]$ 上的 (下) 凸函数;$f(x)$ 在 E 上可测, 且值域 $R(f) \subset I$. 若 $fw \in L(E)$, 则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \right) \leqslant \int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 因为 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸, 所以由定理 6.7可知 $\varphi \in C([a,b])$. 从而由定理**??**可知 $\varphi(f(x))$ 在 E 上也可测.

证明 注意到 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 我们有

$$a = \int_E a w(x)\,\mathrm{d}x \leqslant y_0 = \int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E b w(x)\,\mathrm{d}x = b.$$

故 $y_0 \in [a, b]$.

(i) 设 $y_0 \in (a, b)$, 由 $\varphi(x)$ 之 (下) 凸性可知有

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(y_0) + k(y - y_0), \quad y \in [a, b].$$

(其中由定理 6.7及下凸函数的切线放缩可知 $k = \varphi'_+(y_0)$) 以 $f(x)$ 代 y 得

$$\varphi(f(x)) \geqslant \varphi(y_0) + k(f(x) - y_0), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

在上式两端乘以 $w(x)$, 并在 E 上作积分, 则

$$\begin{aligned}\int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_E \varphi(y_0)w(x)\,\mathrm{d}x + k\int_E (f(x) - y_0)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi(y_0) + k\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - y_0\right) \\ &= \varphi(y_0) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

(ii) 若 $y_0 = b$(或 a), 易知此时有

$$\int_E (b - f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

由非负可测函数积分的性质 (5)(i) 可知 $f(x) = b$,a. e. $x \in E$, 从而

$$\int_E \varphi(f(x))w(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \varphi(b)w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b)\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) = \varphi\left(\int_E f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证毕. □

注 Jensen 不等式在 $\mathbf{R}^n$ 上也成立, 只需将区间 I 用凸集代替. 下面是一个特例:

设 $E \subset \mathbf{R}$, 且 $m(E) = 1, f(x)$ 在 E 上正值可积, 且记 $A = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\sqrt{1 + A^2} \leqslant \int_E \sqrt{1 + f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + A.$$

实际上, 考查 $\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/2}$, 易知 $\varphi(x)$ 是 (下) 凸函数. 根据 Jensen 不等式 $(w(x) \equiv 1)$, 有 $\left(A^2 \leqslant \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + A^2} &\leqslant \left(1 + \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_E (1 + f^2(x))\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant \int_E \sqrt{1 + f^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E (1 + f(x))\,\mathrm{d}x = 1 + A.\end{aligned}$$

定理 0.6 (积分对定义域的可数可加性)

设 $E_k \in \mathscr{M}(k = 1, 2, \cdots), E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 $f \in L(E)$ 以及非负可测函数积分的可数可加性, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{E_k} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_k} f^-(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定理 0.7 (可积函数几乎处处为零的一种判别法)

设函数 $f(x) \in L([a,b])$. 若对任意的 $c \in [a,b]$, 有

$$\int_{[a,c]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x) = 0$,a. e. $x \in [a,b]$.

证明 若结论不成立, 则存在 $E \subset [a,b]$,$m(E) > 0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零. 不妨假定在 E 上 $f(x) > 0$. 由定理**??**, 可作闭集 F,$F \subset E$, 且 $m(F) > 0$, 并令 $G = (a,b) \setminus F$, 则 G 为开集. 于是由开集构造定理可知,$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, 其中 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间. 由积分对定义域的可数可加性, 我们有

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x + \int_F f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 所以

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_{[a_n,b_n]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_F f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \neq 0,$$

从而存在 n_0, 使得

$$\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

又由积分对定义域的可数可加性可知

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,a_{n_0}]\cup[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \Rightarrow \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知

$$\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad 或 \quad \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

这与假设矛盾. □

命题 0.2

设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L(E)$, 都有 $fg \in L(E)$, 则除一个零测集 Z 外,$g(x)$ 是 $E \setminus Z$ 上的有界函数.

注 比较命题**??**.

证明 如果结论不成立, 那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : k_i \leqslant |g(x)| < k_{i+1}\}) = m(E_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

现在作函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sign}g(x)}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

因为

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}m(E_i) < +\infty,\end{aligned}$$

所以 $f \in L^1(E)$, 但我们有

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i^{1+(1/2)} m(E_i)} m(E_i) = +\infty,$$

这说明 $fg \notin L(E)$, 矛盾. □

定理 0.8 (积分的绝对连续性)

若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e) < \delta$ 时, 有

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

♡

证明 不妨假定 $f(x) \geqslant 0$, 否则用 $|f(x)|$ 代替 $f(x)$. 根据简单函数逼近定理可知, 存在非负简单可测函数渐升列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. 再由 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_E \left(f(x) - \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在可测简单函数 $\varphi(x)$,$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)(x \in E)$, 使得

$$\int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在设 $\varphi(x) \leqslant M$, 取 $\delta = \varepsilon/(2M)$, 则当 $e \subset E$, 且 $m(e) < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_e f(x)\,\mathrm{d}x - \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x + \int_e \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + Mm(e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

推论 0.2

设 $f \in L(E)(E \subset \mathbf{R})$, 且

$$0 < A = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

则存在 E 中可测子集 e, 使得

$$\int_e f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

♡

证明 设 $E_t = E \cap (-\infty, t)$,$t \in \mathbf{R}$, 并记

$$g(t) = \int_{E_t} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则由积分的绝对连续性可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta t| < \delta$, 由积分对定义域的可数可加性, 就有

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| = \left|\int_{E\cap[t,t+\Delta t)} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{E\cap[t,t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[t,t+\Delta t)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这说明 $g \in C(\mathbf{R})$. 因为 $g(x)$ 是递增函数, 且有

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = g(-\infty) = \int_{\varnothing} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = g(+\infty) = A,$$

而 $0 < A/3 < A$, 所以根据连续函数介值定理可知, 存在 t_0:$-\infty < t_0 < +\infty$, 使得 $g(t_0) = A/3$:

$$g(t_0) = \int_{E\cap(-\infty,t_0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{3}.$$

令 $e = E \cap (-\infty, t_0)$, 即得所证. □

定理 0.9 (积分变量的平移变换定理)

若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$, 则对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^n$,$f(x+y_0)\in L(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 $E-\{y_0\}=\{x-y_0:x\in E\}$ 是向量差集, 不是集合的差.

证明 只需考虑 $f(x)\geqslant 0$ 的情形. 首先看 $f(x)$ 是非负可测简单函数的情形:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

显然有

$$f(x+y_0)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{E_i}(x+y_0)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{E_i-\{y_0\}}(x),$$

它仍是非负可测简单函数. 注意到 $E-\{y_0\}=E+\{-y_0\}$, 故由外测度的平移不变性知

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}c_i m(E_i-\{y_0\})=\sum_{i=1}^{k}c_i m(E_i)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其次, 考虑一般非负可测函数 $f(x)$. 此时根据简单函数逼近定理可知, 存在非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$,$x\in\mathbf{R}^n$. 显然,$\{\varphi_k(x+y_0)\}$ 仍为渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x+y_0)=f(x+y_0),\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

从而先前的讨论及 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y_0)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_k(x+y_0)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.2 设 $f\in L([0,+\infty))$, 则

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad \text{a. e. } x\in\mathbf{R}.$$

证明 因为 $f(x+n)=f(x+1+(n-1))$, 所以只需考查 $[0,1]$ 中的点即可. 为证此, 又只需指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛即可. 应用积分的手段, 由于

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}|f(x+n)|\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{[1,\infty)}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty,\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 作为 x 的函数是在 $[0,1]$ 上可积的, 因而是几乎处处有限的, 即级数是几乎处处收敛的. □

命题 0.3

设 $I\subset\mathbf{R}$ 是区间,$f\in L(I)$,$a\neq 0$, 记 $J=\{x/a:x\in I\}$,$g(x)=f(ax)(x\in J)$, 则 $g\in L(J)$, 且有

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x=|a|\int_J g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 这只是积分变量替换的一个特殊情形.

笔记 对 $f\in L(\mathbf{R}^n)$,$a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 (i) 若 $f(x)=\chi_E(x)$,E 是 I 中的可测集, 则 $a^{-1}E\subset J$. 由于 $\chi_E(ax)=\chi_{a^{-1}E}(x)$, 故有

$$\int_J g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|}m(E)=\frac{1}{|a|}\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知当 $f(x)$ 是简单可测函数时, 结论也真.

(ii) 对 $f\in L(I)$, 设简单可测函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\varphi_n(x)\to f(x)(n\to\infty,x\in I)$, 且 $|\varphi_n(x)|\leqslant|f(x)|(n=1,2,\cdots,x\in I)$, 则令 $\psi_n(x)=\varphi_n(ax)(x\in J,n=1,2,\cdots)$,$\psi_n(x)\to g(x)(n\to\infty,x\in J)$, 我们有

$$|a|\int_J g(x)\,\mathrm{d}x=|a|\lim_{n\to\infty}\int_J\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_I\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

0.1.2 控制收敛定理

定理 0.10 (控制收敛定理)

设 $f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \text{a. e. } x\in E.$$

若存在 E 上的可积函数 $F(x)$, 使得

$$|f_k(x)|\leqslant F(x),\quad \text{a. e. } x\in E\ (k=1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(通常称 $F(x)$ 为函数列 $\{f_k(x)\}$ 的**控制函数**.)

证明 显然,$f(x)$ 是 E 上的可测函数, 且由 $|f_k(x)|\leqslant F(x)$(a. e. $x\in E$) 可知 $|f(x)|\leqslant F(x)$,a. e. $x\in E$. 因此,$f(x)$ 也是 E 上的可积函数. 作函数列

$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|\quad(k=1,2,\cdots),$$

则 $g_k\in L(E)$, 且 $0\leqslant g_k(x)\leqslant 2F(x)$,a. e. $x\in E(k=1,2,\cdots)$.

根据 Fatou 引理, 我们有

$$\int_E\lim_{k\to\infty}(2F(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E(2F(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x.$$

因为 $F(x)$ 以及每个 $g_k(x)$ 都是可积的, 所以得到

$$\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x-\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

消去 $\int_E 2F(x)\,\mathrm{d}x$, 并注意到 $\lim_{k\to\infty}g_k(x)=0$,a. e. $x\in E$, 可得

$$\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

最后, 从不等式 $(k=1,2,\cdots)$

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_E(f_k(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

立即可知, 定理的结论成立. □

定理 0.11

证明

□

定理 0.12

♡

证明

□