0.1 其他

例题 0.1 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s=\dfrac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$. 证明

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 看到函数复合积分就联想 Jensen 不等式 (积分形式), 不过 Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用. 因此仍需要利用函数的凸性相关不等式进行证明.

证明 令 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $F'(t)=f(t)$ 连续递增, 故 F 是下凸的. 显然 $s\in[0,1]$, 于是

$$F(x)\geq F(s)+F'(s)(x-s)=F(s)+f(s)(x-s),\quad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x&\geq\int_0^1\left[F(s)f(x)+f(s)f(x)(x-s)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\int_0^1\left[xf(x)-sf(x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+f(s)\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又注意到

$$\int_0^1 F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geq F(s)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\implies\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq F(s)=\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\implies\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x+\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geq 2\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\\&\implies\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x)}{F(1)}=1-\frac{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}{F(1)},$$

即 $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=(1-s)F(1)$. 又由 F 的下凸性可知

$$F(x)\leq\begin{cases}\dfrac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\[2mm]\dfrac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0), & x\in[0,s]\end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}(1-s)F(1)=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&\leq\int_0^s\left[\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s)\right]\,\mathrm{d}x+\int_s^1\left[\frac{F(s)-F(0)}{s}x+F(0)\right]\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1-s}{2}F(1)\leq\frac{1}{2}F(s)\implies F(1)\leq\frac{1}{1-s}F(s),$$

故

$$\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(s) \le \left(\frac{1}{1-s} - 1\right) F(s) = \frac{s}{1-s} F(s) = \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.2 求最小实数 C, 使得对一切满足 $\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 f, 都有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x \leqslant C.$$

注 这类证明最佳系数的问题, 我们一般只需要找一个函数列, 是其达到逼近取等即可.

本题将要找的函数列需要满足其积分值集中在 $x = 1$ 处, 联想到 Laplace 方法章节具有类似性质的被积函数 (即指数部分是 n 的函数), 类似进行构造函数列即可.

证明 显然有

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,dt \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,dt = 2.$$

令 $f_n(t) = (n+1)t^n$, 则 $\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$. 于是

$$\int_0^1 |f_n(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t|f(t)|\,dt = 2\int_0^1 t(n+1)t^n\,dt = 2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2, n \to \infty.$$

因此若 $C < 2$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\int_0^1 |f_N(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x > C$. 故 $C = 2$ 就是最佳上界. □

例题 0.3 设 $f \in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 证明

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant n^2.$$

证明 设 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 由 Cauchy 不等式及条件可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &\geqslant \left[\int_0^1 f(x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x\right]^2 \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_jx^j\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_ix^{i+j}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_ja_i \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_ja_i}{i+j+1}} = \frac{a^TJa}{a^THa},$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$,$H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{n\times n}$. 于是我们只需求 $\sup\limits_{a\neq 0} \frac{a^TJa}{a^THa}$. 设 λ 为 $\frac{a^TJa}{a^THa}$ 的一个大于 0

的上界，由例题 8.16(3)可知 H 正定，则

$$\begin{aligned}\lambda\text{为}\frac{a^TJa}{a^THa}\text{的一个上界} &\Longleftrightarrow \lambda \geqslant \frac{a^TJa}{a^THa}, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\Longleftrightarrow a^TJa \leqslant \lambda a^THa, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\Longleftrightarrow a^T(\lambda H-J)a\geqslant 0, \forall a\in\mathbb{R}^n\\ &\Longleftrightarrow \lambda H-J\text{半正定}.\end{aligned}$$

因此 $\sup\limits_{a\neq 0}\frac{a^TJa}{a^THa}=\min\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}$. 设 H_k,J_k 分别为 H,J 的 k 阶顺序主子阵，再根据打洞原理及例题 2.37(1)可得

$$\begin{aligned}|\lambda H_k-J_k| &= |H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}J_k|=|H_k||\lambda I_k-H_k^{-1}\mathbf{1}_k\mathbf{1}_k^T|\\ &=\lambda^{k-1}|H_k|(\lambda-\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k).\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_k^T=(1,1,\cdots,1)_{1\times k}$. 由 H 正定可知 $|H_k|>0$, 又因为 $\lambda>0$, 所以再由引理 6.4可得

$$|\lambda H_k-J_k|>0\Longleftrightarrow\lambda>\mathbf{1}_k^TH_k^{-1}\mathbf{1}_k\xlongequal{\text{引理 6.4}}n^2.$$

因此对 $\forall\lambda>n^2$, 都有 $\lambda H-J$ 的顺序主子式都大于 0, 故此时 $\lambda H-J$ 正定. 于是对 $\forall a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 固定 a, 都有

$$a^T(\lambda H-J)a>0, \forall\lambda>n^2.$$

令 $\lambda\to n^2$, 则由 $a^T(\lambda H-J)a$ 的连续性可知

$$a^T(n^2H-J)a\geqslant 0.$$

故 n^2H-J 半正定. 因此 $n^2=\inf\{\lambda\mid\lambda H-J\text{半正定}\}=\sup\limits_{a\neq 0}\frac{a^TJa}{a^THa}$. 结论得证. □

例题 0.4 设 A,B 都是 n 级实对称矩阵，若 B 正定，证明

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}=\lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

证明

□

引理 0.1

设 $\alpha>0, g\in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $g(a)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$, 如果

$$|g'(x)-g'(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha, \forall x,y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1}\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^\alpha[g(x)-g(a)]^\alpha M, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

证明 不妨设 $g(a)=0$, 否则用 $g(x)-g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M=0$, 则不等式(2)显然成立. 当 $M\neq 0$ 可以不妨设 $M=1$.

现在对非负函数 g, 现在我们正式开始我们的证明，当 $g'(x_0)=0$, 不等式(2)显然成立. 当 $g'(x_0)>0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned}g(x_0)\geqslant g(x_0)-g(h) &= \int_h^{x_0}g'(t)dt\\ &\geqslant\int_h^{x_0}[g'(x_0)-|t-x_0|^\alpha]dt\\ &=g'(x_0)(x_0-h)-\frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h=x_0-|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立. 类似的考虑 $g'(x_0)<0$ 可得(2).

当 $g'(x_0)<0$, 则利用(1)有

$$\begin{aligned}
g(x_0) &\geqslant -g(h)+g(x_0) = -\int_{x_0}^{h} g'(t)dt \\
&\geqslant -\int_{x_0}^{h}[g'(x_0)+|t-x_0|^{\alpha}]dt \\
&= -g'(x_0)(h-x_0)-\frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1},
\end{aligned}$$

取 $h=x_0+|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\dfrac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(2)成立. □

命题 0.1 (Heisenberg(海森堡) 不等式)

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{3}$$

注 直观上, 直接 Cauchy 不等式, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

但是上述**分部积分**部分需要零边界条件 (即需要 $\lim\limits_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0$ 上式才成立). 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 Method 1 **专业技术**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

取紧化序列 $h_n, n\in\mathbb{N}$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|(h_nf)'(x)|^2\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

右边让 $n\to+\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|h_n'(x)f(x)+h_n(x)f'(x)|^2\mathrm{d}x\right]=\left[4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right].$$

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2<\infty$, 因此不能直接换序. 但是 Fatou 引理告诉我们

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

从而不等式(3)成立.

Method 2 **正常方法**: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\infty>\sqrt{\int_x^{\infty}y^2f^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_x^{\infty}|f'(y)|^2\mathrm{d}y}\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant}\int_x^{\infty}y|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y\geqslant x\int_x^{\infty}|f'(y)f(y)|\mathrm{d}y, \tag{4}$$

于是 $\int_x^{\infty}f(y)f'(y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2-\frac{1}{2}|f(x)|^2$ 收敛. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在. 注意 $\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$, 因此由

积分收敛必有子列趋于 0 可知, 存在 $x_n \to \infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n|f(x_n)| = 0$, 于是再结合 $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{2}|f(y)|^2$ 存在可得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} f(y) = 0.$$

现在继续用(4), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2\mathrm{d}y} \geqslant x\int_x^{\infty} f'(y)f(y)\mathrm{d}y = \frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

令 $x \to +\infty$, 由 Cauchy 收敛准则即得 $\sqrt{\int_x^{\infty} y^2 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_x^{\infty} |f'(y)|^2\mathrm{d}y} \to 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x|f(x)|^2 = 0$, 这就完成了证明. 于是由分部积分和 Cauchy 不等式可知, 对 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \xlongequal{\text{分部积分}} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

即不等式(3)成立. □

例题 0.5 设 $f : [0, +\infty) \to (0, 1)$ 是内闭 Riemman 可积函数, 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 < 2\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证明 记 $a = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 0$, 待定 $s > 0$, 则不等式(5)等价于

$$\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + \int_s^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

于是

$$\int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + s\int_s^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + s\left(a - \int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{a^2}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + s\int_0^{s} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x)f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

利用 $f < 1$, 取 $s = a$, 则我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^{s} (s-x)f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x)f(x)\mathrm{d}x < -\frac{a^2}{2} + \int_0^{a} (a-x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而

$$\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}$$

成立. 因此

$$\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{s} xf(x)\mathrm{d}x + \int_s^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x + a\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > \frac{a^2}{2}.$$

这就证明了不等式(5). □

例题 0.6 设 f 是 $[0, 1]$ 上的单调函数. 求证: 对任意实数 a 有

$$\int_0^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}x. \tag{6}$$

证明 不妨设 f 是单调递增函数. 注意到 $\frac{1}{2}$ 是积分区间的中点, 将式 (6) 右端的积分从 $\frac{1}{2}$ 处分成两部分来处理.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x)\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (a - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - a)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |a - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(x) - a|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

故式 (6) 成立. □

例题 0.7

证明

□