0.1 行列式综合问题

例题 0.1 设 a, n 是给定互素正整数，按 Build 除法，存在唯一确定的整数对 (s, t) 使得 $a = sn + t, 0 \le t \le n-1$。令

$$u_i = \begin{cases} s+1, & 0 \le i < t \\ s, & t \le i \le n-1 \end{cases}$$

若 t 与 n 互素，计算

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_0 & \cdots & u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_0 \end{vmatrix}$$

证明 记 $f(x) \triangleq \sum_{i=1}^{n} u_i x^i, w_j \triangleq e^{\frac{2\pi j i}{n}}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 则由命题??可知

$$D_n = \prod_{k=0}^{n} f(w_k) = f(1) \prod_{k=0}^{n-1} f(w_k).$$

由条件可知

$$f(1) = \sum_{i=0}^{t-1}(s+1) + \sum_{i=t}^{n-1} s = (s+1)t + (n-t)s = ns + t = a.$$

从而

$$\begin{aligned} D_n &= a \prod_{i=0}^{n-1} f(w_k) = a \prod_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1}(s+1)w_k^i + \sum_{i=t}^{n-1} s w_k^i \right] \\ &= a \prod_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{t-1} w_k^i + s \sum_{i=0}^{n-1} w_k^i \right] = a \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1-w_k^t}{1-w_k} + s\frac{1-w_k^n}{1-w_k} \right). \end{aligned}$$

由 $w_k^n = 1, w_k = w_1^k$ 可知

$$D_n = a \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k}.$$

由群论可知 $\{1, w_1, \cdots, w_1^{n-1}\}$ 是一个循环群且 w_1 的阶为 n, 再根据群论的 Lagrange 定理及 $(t, n) = 1$ 可知, w_1^t 的阶为 $\frac{n}{(n,t)} = n$。因此 $w_1^k = w_1$, 故 $\{w_1, w_1^2, \cdots, w_1^{n-1}\} = \{w_1^t, w_2^{2t}, \cdots, w_1^{(n-1)t}\}$。于是 $w_1^k = w_1^{tk}$, 故

$$D_n = a \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-w_1^{kt}}{1-w_1^k} = a.$$

□

例题 0.2 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的" 爪" 型行列式.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}(x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ 2a_1x-x^2 & x^2-2a_2x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2a_1x-x^2 & 0 & \cdots & x^2-2a_nx\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{"爪"型行列式}}(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(2a_1x-x^2\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(x^2-2a_1x\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=\left[\left(x^2-2a_1x\right)+a_1^2\right]\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right).$$

□

例题 0.3 求下列行列式式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}.$$

解 *解法一:*

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-j_1+j_i}\begin{vmatrix}(a+b)^2-c^2 & c^2 & 0\\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-r_i+r_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ -2b & 2bc & -2c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2} & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=2abc(a+b+c)^3.$$

解法二 (求根法): □

例题 0.4 证明: 若一个 $n(n>1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数. □

例题 0.5 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|$$

$$= |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n| + |\alpha_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}| + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\sum_{2\le j_1\le j_2\le\cdots\le j_k\le n} \begin{array}{c} \begin{matrix}1&\cdots&j_1&\cdots&j_2&\cdots&j_k&\cdots&n\end{matrix}\\ |\alpha_n,\cdots,\alpha_{j_1+1},\cdots,\alpha_{j_2+1},\cdots,\alpha_{j_k+1},\cdots,\alpha_{n-1}|\end{array}$$

$$+ \sum_{1\leqslant k\leqslant n-2}\sum_{2\le j_1\le j_2\le\cdots\le j_k\le n} \begin{array}{c} \begin{matrix}1&\cdots&j_1&\cdots&j_2&\cdots&j_k&\cdots&n\end{matrix}\\ |\alpha_1,\cdots,\alpha_{j_1+1},\cdots,\alpha_{j_2+1},\cdots,\alpha_{j_k+1},\cdots,\alpha_{n-1}|\end{array}.$$

$$\begin{aligned}
&= |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n| + |\alpha_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}| \\
&= c + (-1)^{n-1}|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n| \\
&= c + (-1)^{n-1}c \\
&= \begin{cases} 0\ , n\text{为偶数} \\ 2c, n\text{为奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

例题 0.6 令

$$(a_1a_2\cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_2a_3\cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n \le k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n = k$ 时, 将行列式 $(a_1a_2,\cdots,a_k)$ 按第一列展开得

$$(a_1a_2\cdots a_k) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & & \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 1 & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_2a_3\cdots a_k) + (a_3a_4\cdots a_k).$$

从而

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \frac{(a_3a_4\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立.

□

例题 0.7 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij} = \max\{i,j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-r_i+r_{i-1}}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&-1&0&\cdots&0\\3&3&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n.$$

□

例题 0.8 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&1&1\\2&-1&-1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix}n-1&0&0&\cdots&0&0\\n&-2&0&\cdots&0&0\\n+1&-2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)^{n-2}(n-1).$$

□

例题 0.9 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时, 但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整. 此时我们可以尝试用升阶法补全这个行列式行或列的规律, 再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式, 而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式. 后续求解很繁琐, 因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|B|=\begin{vmatrix}1&x_1-a&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2-a&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n-a&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\\1&y-a&y(y-a)&y^2(y-a)&\cdots&y^{n-1}(y-a)\end{vmatrix}$, 则

$$|B|=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&x_2^3&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&x_n^3&\cdots&x_n^n\\1&y&y^2&y^3&\cdots&y^n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由上式可知,$|\boldsymbol{B}|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开得到

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}B_{n+1,i}y^{i-1}, \text{其中} B_{ni} \text{是} |\boldsymbol{B}| \text{的第} (n+1,i) \text{元的余子式}, i=1,2,\cdots,n+1.$$

从而

$$|\boldsymbol{B}|=(-1)^{n+2}B_{n+1,1}+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i+1}B_{n+1,i}y^{i-2}(y-a)=\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{1}$$

又易知 $B_{n+1,2}=|\boldsymbol{A}|$, 而当 $a=0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(1)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_1)\cdots(-x_{i-1})(-x_{i+1})\cdots(-x_n)\right).$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right).$

当 $a\neq 0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(1)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1}-a(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k). \tag{2}$$

又因为

$$\begin{aligned}B_{n+1,1}&=\begin{vmatrix}x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a)\\ x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}\\ &=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).\end{aligned}$$

所以再结合等式(2)可得

$$\begin{aligned}-a(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}|=-a(-1)^{n+3}B_{n+1,2}&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k)-(-1)^{n+2}B_{n+1,1}\\ &=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\\ &=(-1)^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left[\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right].\end{aligned}$$

故此时 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)\right).$ □

例题 0.10 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1}\\ \dfrac{n}{2} & \dfrac{n^2}{3} & \cdots & \dfrac{n^n}{n+1} & \dfrac{n^{n+1}}{n+2}\end{vmatrix}.$$

笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{x^2}{2}&\frac{x^3}{3}&\cdots&\frac{x^{n+1}}{n+1}&\frac{x^{n+2}}{n+2}\end{vmatrix}$, 则 $I=\frac{G(n)}{n}$ 且 $G(0)=0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$G'(x)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\x&x^2&\cdots&x^n&x^{n+1}\end{vmatrix}=n!x\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\1&x&\cdots&x^{n-1}&x^n\end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\prod_{k=0}^{n}(x-k).$$

因此

$$\begin{aligned}I=\frac{G(n)}{n}&=\frac{\int_0^n G'(x)dx}{n}=(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\&\overset{\text{区间再现}}{=}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(n-k-x)dx\\&=(-1)^{n+1}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)dx\\&=(-1)^{n+1}I.\end{aligned}$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1}=-1$. 于是 $I=-I$. 故 $I=0$. □