0.1 Hermite 插值定理

定理 0.1 (Taylor 定理)

(1) **带 Peano 余项:**

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 则 $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

(2) **带 Lagrange 余项:**

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶连续导数, 且 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导数,x_0 为 $[a,b]$ 内一定点, 则对于任意的 $x\in[a,b]$, 在 x,x_0 之间存在一个数 ξ 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(3) **带积分型余项:**

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0,\delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x\in U(x_0,\delta)$,t 在 x 与 x_0 之间, 都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

(4) **带 Cauchy 型余项:**

设 $f(x)$ 定义是在 $U(x_0,\delta)$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 对任意 $x\in U(x_0,\delta)$, 都存在 ξ 在 x 与 x_0 之间, 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

♡

证明

(1) 带 Peano 余项:

(2) 带 Lagrange 余项:

(3) 带积分型余项:

(4) 带 Cauchy 型余项:

□

定理 0.2 (Hermite 插值定理)

给定 $a<x_1<x_2<\cdots<x_m<b$ 和非负整数 $s_j,j=0,1,2,\cdots,m$. 设 $f\in C^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1}[a,b]$ 且 $f\in D^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)}(a,b)$, 设 $p(x)$ 满足条件: 对闭区间 $[a,b]$ 中的 m 个点 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant b$,$s_j\in\mathbb{N}_0,j=1,2,\cdots,m$, 都有唯一的次数不超过 $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$ 的多项式 $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, 并且

$$p^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j),i=0,1,\cdots,s_j,j=1,2,\cdots,m.$$

并称满足上述条件的多项式 $p(x)$ 为 **Hermite 插值多项式**, 则对每个 $x\in[a,b]$, 都存在 $\theta\in(\min\{x,x_1\},\max\{x,x_m\})$, 使得

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1))}(\theta)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)!}(x-x_1)^{s_1+1}(x-x_2)^{s_2+1}\cdots(x-x_m)^{s_m+1}.$$

♡

笔记 $p(x)$ 的求法: 先由各插值点的次数确定 $p(x)$ 的最高次数 (即 $\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$), 再由方程 $p^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j), i=0,1,\cdots,s_j, j=1,2,\cdots,m$. 直接解出.

证明

□

命题 0.1 (Lagrange 插值公式)

设 $f\in C[a,b]\cap D^2(a,b)$, 证明: 对 $\forall x\in[a,b]$, 存在 $\theta\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b).$$

注 考试中先用 K 值法证明, 再直接用.

笔记 K 值法: 先令要证的中值等式中的高阶导数中值点 (本题为 $f''(\theta)$) 为常数, 再构造函数由 Rolle 中值定理推出结论即可.

证明 当 $x=a$ 或 b 时, 结论显然成立.

对 $\forall x\in(a,b)$, 固定 x, 记

$$K=\frac{2\left[f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]}{(x-a)(x-b)}.$$

令 $g(y)=f(y)-\dfrac{y-b}{a-b}f(a)-\dfrac{y-a}{b-a}f(b)-\dfrac{K}{2}(y-a)(y-b)$, 则

$$g'(y)=f'(y)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}-\frac{K}{2}(2y-a-b),\quad g''(y)=f''(y)-K.$$

从而 $g(a)=g(b)=g(x)=0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1\in(a,x)$,$\theta_2\in(x,b)$, 使得

$$g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)\subset(a,b)$, 使得 $g''(\theta)=f''(\theta)-K=0$, 即 $f''(\theta)=K$. □

定理 0.3 (带积分型余项的 Lagrange 插值公式)

设 f 是 $[a,b]$ 上的二阶可微函数且 f'' 在 $[a,b]$ 可积, 则成立

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y,$$

这里

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\geqslant a,\\ \dfrac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geqslant x\geqslant y\geqslant a.\end{cases}$$

特别的, 若还有 $f(a)=f(b)=0$, 则有

$$f(x)=\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

笔记 $k(x,y)$ 也叫 Green 函数. 容易验证 $|k(x,y)|\leqslant|k(x,x)|$.

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b), x\in[a,b],$$

则有 $g''(x)=f''(x), g(a)=g(b)=0$. 因此只需对 g 证明式(1).

事实上, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_a^b g''(y)k(x,y)\mathrm{d}y&=\frac{b-x}{b-a}\int_a^x g''(y)(a-y)\mathrm{d}y+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b g''(y)(y-b)\mathrm{d}y\\&=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)g'(x)-\int_a^x g'(y)\mathrm{d}y\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)(x-b)+\int_x^b g'(y)\mathrm{d}y\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b-x}{b-a}[(a-x)g'(x)+g(x)] + \frac{x-a}{b-a}[-g'(x)(x-b)+g(x)] \\
&= g(x).
\end{aligned}
$$

这就证明了(1)式. □

例题 0.1 设 $f \in D^3[0,1]$ 满足 $f(0)=-1, f'(0)=0, f(1)=0$, 证明对任何 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6}f'''(\theta).$$

证明 当 $x=0$ 或 1 时, 结论显然.

对 $\forall x\in(0,1)$, 固定 x, 记 $K=\dfrac{6[f(x)+1-x^2]}{x^2(x-1)}$. 令 $g(y)=f(y)+1-y^2-\dfrac{y^2(y-1)}{6}K$, 则

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= f'(y)-2y-\frac{y(y-1)}{3}K-\frac{y^2}{6}K, \\
g''(y) &= f''(y)-2-\frac{2y-1}{3}K-\frac{y}{3}K, \\
g'''(y) &= f'''(y)-K.
\end{aligned}
$$

从而 $g(0)=g(1)=g(x)=0$, 由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\theta_1\in(0,x)$,$\theta_2\in(x,1)$, 使得

$$g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

又由 $f'(0)=0$ 可知

$$g'(0)=g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1\in(0,\theta_1)$,$\xi_2\in(\theta_1,\theta_2)$, 使得

$$g''(\xi_1)=g''(\xi_2)=0.$$

于是再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\theta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$, 使得 $g'''(\theta)=f'''(\theta)-K$. 即 $f'''(\theta)=K$. □

例题 0.2 设 $f\in C[0,2]\cap D(0,2)$ 满足 $f(0)=f(2)=0,|f'(x)|\leqslant M,\forall x\in(0,2)$. 证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M.$$

笔记 靠近哪个点就用哪个点的插值多项式.(原因是: 越靠近插值点, 拟合的效果越好)

证明 当 $x\in[0,1]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(\theta(x))}{1!}(x-0)=f'(\theta(x))x,$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f'(\theta(x))|\cdot x\leqslant Mx. \tag{2}$$

当 $x\in[1,2]$, 由 Lagrange 中值定理 (插值定理), 我们有

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(\zeta(x))}{1!}(x-2)=f'(\zeta(x))(x-2),$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f'(\zeta(x))|\cdot|x-2|\leqslant M(2-x). \tag{3}$$

结合(2) 和(3), 我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 (Mx)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (M(2-x))\,\mathrm{d}x = M.
\end{aligned}
$$

□

例题 0.3 设 $f \in D^2[0,1], f(0)=f(1)=0, |f''(x)| \leqslant M$, 证明
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{12}.$$

笔记 最多可以拟合 $f(0), f(1)$ 两个条件, 需要插值一次多项式, 余项需要 2 阶导数, 条件完美符合. 因此先由 Hermite 插值定理 (Lagrange 插值公式) 直接写出插值多项式和余项: 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得
$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1].$$
但是注意考试时, 需要先用 K 值法证明上式再使用.

证明 由 Hermite 插值定理可知, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得
$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1].$$
积分并取绝对值就有
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1\left|\frac{f''(\theta(x))}{2}\right||x(x-1)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{12}.$$

□

例题 0.4 设 $f \in D^2[a,b]$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

笔记 题目并没有明确给出插值点的相关条件, 需要我们自己选取合适的插值点.(一般插值点都是特殊点, 比如: 端点、中点、极值点等)

我们观察到需要证明的等式中含有 a, b 两点并且 f2 阶可导, 因此直接选取这两点作为插值点即可.

注 考试中下述证明中的 Lagrange 插值公式也需要先用 K 值法证明才能使用.

本题也可以直接用 K 值法证明. 只需令 $g(y)=\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x=(y-a)\frac{f(a)+f(y)}{2}-\frac{(y-a)^3}{12}K$ 即可.

证明 由Lagrange 插值公式(或Hermite 插值定理) 可知, 对 $\forall x \in [a,b]$, 存在 $\theta(x) \in (a,b)$ 使得
$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{f''(\theta(x))}{2}(x-a)(x-b). \tag{4}$$
两边同时积分得到
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b \frac{x-a}{b-a}f(b)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))(x-a)(x-b)\mathrm{d}x. \tag{5}$$
由(4)式可得
$$f''(\theta(x))=\frac{2\left[f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]}{(x-a)(x-b)} \in C(a,b).$$
又由 L'Hospital 法则可得
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} f''(\theta(x)) &= \lim_{x\to a^+}\frac{2\left(f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right)}{(x-a)(x-b)}=\frac{2}{a-b}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)}{x-a}\\
&=\frac{2}{a-b}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}}{1}=\frac{2}{b-a}\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\right],
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b^-} f''(\theta(x)) &= \lim_{x\to b^-}\frac{2\left(f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right)}{(x-a)(x-b)}=\frac{2}{b-a}\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)}{x-a}\\
&=\frac{2}{b-a}\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}}{1}=\frac{2\left[f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]}{b-a}.
\end{aligned}$$
从而 $f''(\theta(x))$ 可以连续延拓到 $[a,b]$ 上, 又因为改变有限个点的函数值后, 其积分结果不变, 所以可以不妨设 $f''(\theta(x)) \in C[a,b]$. 于是由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得
$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(\theta(x))(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

利用(5)和(6)式可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x\\ &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 0.5 设 $f\in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

笔记 本题需要我们选取合适的插值点和插值条件, 这里我们应该选 $f(\frac{a+b}{2}), f'(\frac{a+b}{2})$ 作为插值条件, 插值多项式为 1 次, 余项需要 2 阶导数.

注 本题也可以直接用 K 值法证明.

证明 由 Taylor 定理 (Hermite 插值定理) 可知, 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\theta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边同时积分, 并由积分中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int_a^b\frac{f''(\theta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).\end{aligned}$$

□

例题 0.6 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4.$$

证明 由带积分余项的 Lagrange 插值定理可知, 我们有

$$f(x)=\int_0^1 f''(y)k(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad \text{其中}\quad k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-0}{1-0}(y-1), & 1\geq y\geq x\geq 0,\\ \frac{1-x}{1-0}(0-y), & 1\geq x\geq y\geq 0.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant \int_0^1 |f''(y)||k(x,y)|\,\mathrm{d}y\leqslant |k(x,x)|\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y\\ &= x(1-x)\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac14\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\frac{|f''(x)|}{\frac14\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}x=\frac{4}{\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x=4.$$

但实际上, 我们可以得到

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\frac{|f''(x)|}{x(1-x)\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}x=\frac{1}{\int_0^1|f''(y)|\,\mathrm{d}y}\int_0^1\frac{|f''(x)|}{x(1-x)}\mathrm{d}x.$$

□

命题 0.2 (导数内插)

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且

$$|f(x)|\leqslant M_0,\ |f''(x)|\leqslant M_2,\ \forall x\geqslant 0.\tag{7}$$

证明

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2},\ \forall x > 0. \tag{8}$$

2. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 二阶可微且不等式 (7) 对 $x \in \mathbb{R}$ 都成立, 则可以改进估计 (8) 为

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

3. 设 $m \geqslant 2$, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上 m 阶可导, 且记

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| = M_k,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

证明

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}},\ k = 1, 2, \cdots, m-1. \tag{10}$$

笔记 涉及任意点相关性质时, 我们可以用 Taylor 公式的另外一种写法:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}h^n.$$

证明

1. 不妨设 $M_0, M_2 > 0$, 因为其余情况是平凡的. 待定 $h > 0$, 然后由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\theta)}{2}h^2,\ \theta \in [x, x+h]. \tag{11}$$

于是由 (11) 得

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\theta)}{2}h.$$

于是运用条件 (7) 得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{|f''(\theta)|}{2}h \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h.$$

为了使上式得到的估计尽可能小, 因此我们需要求上式右边的最小值, 即

$$\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h \geqslant 2\sqrt{\frac{2M_0}{h} \cdot \frac{M_2}{2}h} = 2\sqrt{M_0M_2},$$

当且仅当 $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} > 0$ 时等号成立. 于是我们得到不等式 (8) 成立.

2. 不妨设 $M_0, M_2 > 0$, 其余情况是平凡的. 因为定义域的扩大, 于是我们可以进一步加强不等式 (8) 为不等式 (9). 使用的标准技巧, 即式 (11) 的对偶式:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,\ \theta \in [x, x+h]. \tag{12}$$

将式 (11) 减去 (12) 得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \left[f''(\theta) - f''(\xi)\right]\frac{h^2}{2}.$$

现在

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \left[f''(\theta) - f''(\xi)\right]\frac{h}{4}.$$

于是利用不等式 (7) 得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{2h} + \frac{2M_2h}{4} = \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}.$$

同样的为了上式右边尽可能小, 我们取最小值得

$$\frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{h} \cdot \frac{M_2h}{2}} = \sqrt{2M_0M_2},$$

当且仅当 $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} > 0$ 时等号成立. 这就证明了不等式 (9).

3. 当 $m=2$, 由本题第二问知不等式 (10) 成立. 现在假定对 $m\geqslant 2$ 有不等式 (10) 成立. 考虑 $k=1$ 即得

$$M_1 \leqslant 2^{\frac{m-1}{2}} M_0^{1-\frac{1}{m}} M_m^{\frac{1}{m}}. \tag{13}$$

把 f' 看成 f 用不等式 (10) 得

$$M_{k+1} \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_1^{1-\frac{k}{m}} M_{m+1}^{\frac{k}{m}},\ k=1,2,\cdots,m-1. \tag{14}$$

在 (14) 代入 $k=m-1$ 得

$$M_m \leqslant 2^{\frac{m-1}{2}} M_1^{\frac{1}{m}} M_{m+1}^{1-\frac{1}{m}}.$$

继续运用不等式 (13) 得

$$M_m \leqslant 2^{\frac{m-1}{2}} \left(2^{\frac{m-1}{2}} M_0^{1-\frac{1}{m}} M_m^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m}} M_{m+1}^{1-\frac{1}{m}} \Rightarrow M_m \leqslant 2^{\frac{m}{2}} M_0^{\frac{1}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{m}{m+1}}.$$

由上式和归纳假设 (10), 对 $k=1,2,\cdots,m$, 我们有

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}} \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} \left(2^{\frac{m}{2}} M_0^{\frac{1}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{k}{m}} = 2^{\frac{k(m+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{k}{m+1}},$$

这就证明了对任何 $m\geqslant 2$, 都有不等式(10)成立, 我们完成了证明.

□