0.1 直接求导法

例题 0.1

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, 证明
$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)dx,$$
并判断取等条件.
2. 设 f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \lambda, \lambda > 0$ 为常数, 证明
$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^m \geqslant \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x)dx, \tag{1}$$
并判断取等条件.

证明 因为第一题是第二题的特例了, 所以我们只证第二题. 定义
$$g(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^m - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^x f^{2m-1}(t)dt.$$
求导得
$$\begin{aligned} g'(x) &= mf(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-1}(x) \\ &= mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x)\right]. \end{aligned}$$
令 $h(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则
$$h'(x) = \left[\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda}[\lambda - f'(x)] \geqslant 0,$$
从而 $h(x) \geq h(0) = 0$. 进而
$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}} f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$
于是我们有
$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$
从而 g 递增且
$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$
这就是不等式(1). 要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者
$$\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$
令 $y = \int_0^x f(t)dt$, 则上式等价于
$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$
从而解上述微分方程得到取等条件是
$$f(x) = 0 \text{或者} f(x) = \lambda x.$$
□

例题 0.2 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明
$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)dt}^b f(x)dx. \tag{2}$$

证明 考虑

$$h(y)=\int_a^{a+\int_a^y g(t)dt} f(x)dx-\int_a^y f(x)g(x)dx.$$

则利用

$$a+\int_a^y g(x)dx\leqslant a+\int_a^y 1dx=y,$$

再结合 f 递增, 我们有

$$h'(y)=g(y)f\left(a+\int_a^y g(t)dt\right)-f(y)g(y)\leqslant 0\to h(b)\leqslant h(a)=0,$$

故不等式(2)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(2). □