

0.1 同态基本定理

定义 0.1 (同态核)

1. 设 f 是群 G_1 到群 G_2 的同态, G_2 的幺元 e_2 的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$$

称为 f 的核或同态核.

G_1 中所有元素的像集合

$$\text{im}(f) = f(G_1) = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G_1\} \subseteq G_2.$$

称为 f 的像.

2. 设 f 是环 R_1 到环 R_2 的同态, R_2 的零元素 0 的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in R_1 | f(x) = 0\}$$

称为 f 的核或同态核.

G_1 中所有元素的像集合

$$\text{im}(f) = f(G_1) = \{y \in R_2 : \exists x \in R_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in R_1\} \subseteq R_2.$$

称为 f 的像.

3. 设 R 是一个环, M_1, M_2 都是 R 模, f 是 M_1 到 M_2 的模同态. M_2 的零元素 0 的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in M_1 | f(x) = 0\}$$

称为 f 的核或同态核.

G_1 中所有元素的像集合

$$\text{im}(f) = f(G_1) = \{y \in M_2 : \exists x \in M_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in M_1\} \subseteq M_2.$$

称为 f 的像.

命题 0.1

- (1) 设 f 是群 G 到群 G' 的同态, 则

- (i) $\ker f$ 是 G 的正规子群, $f(G)$ 是 G' 的子群.
- (ii) f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{1\}$.

- (2) 设 f 是环 R 到环 R' 的同态, 则

- (i) $\ker f$ 是 R 的理想, $f(R)$ 是 R' 的子环.
- (ii) f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{0\}$.

- (3) 设 R 是一个环, M, M' 都是 R 模, f 是 M 到 M' 的模同态, 则

- (i) $\ker f$ 是 M 的子模, $f(M)$ 是 M' 的子模.
- (ii) f 是单同态的充要条件是 $\ker f = \{0\}$.

证明

- (1) (i) 设 e, e' 分别为 G', H 的幺元, 于是 $f(e) = e'$, 又设 $x, y \in \ker f, z \in G'$, 则

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e',$$

因此 $xy^{-1} \in \ker f$, 故知 $\ker f$ 是 G' 的子群, 而且有

$$f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1} = e',$$

即 $zxz^{-1} \in \ker f$, 由此知 $\ker f \triangleleft G'$.

同样由群同态与同构的基本性质知 $f(e) = e'$, 我们有 $e' \in \text{im}(f)$. 设 $y = f(x), y' = f(x') \in \text{im}(f)$, 同样

利用同态的性质, $yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \text{im}(f)$. 故 $f(G)$ 是 G' 的子群.

(ii) 设 G' 的幺元为 $1'$.

必要性: 设 f 为单同态, 则对任意的 $x \in \ker f$, 有 $f(x) = 1' = f(1)$. 因为 f 为单同态, 所以 $x = 1$, 于是 $\ker f = \{1\}$.

充分性: 设 $x, y \in G$, 如果 $f(x) = f(y)$, 则 $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} = 1'$, 从而 $xy^{-1} \in \ker f$. 而 $\ker f = \{1\}$, 所以 $xy^{-1} = 1$, 因此 $x = y$, 从而 f 为单同态.

- (2) (i) 设 $x, y \in \ker f$, 则有 $f(x-y) = 0$, 故 $x-y \in \ker f$. 又显然有 $\ker f$ 对乘法封闭, 因此 $\ker f$ 是 R 的子环. 又设 $a \in R$, 则 $f(ax) = f(a)f(x) = 0, f(xa) = f(x)f(a) = 0$, 即 $ax, xa \in \ker f$, 故 $\ker f$ 为 R 的理想.

(ii)

由命题 0.1(1) 知 $f(R)$ 构成 R' 的加法子群. 由 R 对加法构成 Abel 群知 $f(R)$ 对加法也构成 Abel 群. 由同态的性质易知 f 对乘法构成半群, 故 $f(R)$ 是 R' 的子环.

- (3) (i) 对 $\forall x, y \in \ker f$, 由 f 是摸同态知 $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. 从而 $x-y \in \ker f$, 于是 $\ker f = N$ 是加法群 M 的子群, 设 $a \in R, x \in N$, 则 $f(ax) = af(x) = 0$, 因而 $ax \in N$, 故 N 是 M 的子模.

(ii)

□

命题 0.2

- (1) (i) 设 H 是群 G 的正规子群. π 是 G 到商群 G/H 的自然同态, 则有 $\ker \pi = H$.
- (ii) 设 H, H' 都是群 G 的正规子群, 且 $G/H \cong G/H'$, 则 $H \cong H'$.
- (2) (i) 设 I 是环 R 的理想, π 是 R 到商环 R/I 的自然同态, 则有 $\ker \pi = I$.
- (ii) 设 I, I' 都是环 R 的理想, 且 $R/I \cong R/I'$, 则 $I = I'$.
- (3) 设 N 是 R 模 M 的子模, π 是 M 到商模 M/N 的自然同态, 则有 $\ker \pi = N$.



证明

- (1) (i)
- (ii)
- (2) (i)
- (ii) 设 f 为 R/I 到 R/I' 的同构, π 为 R 到 R/I 的自然同态, π' 为 R 到 R/I' 的自然同态, 则

$$f \cdot \pi = \pi'.$$

注意 I, I' 分别是 $R/I, R/I'$ 的零元. 于是对 $\forall x \in \ker(f \cdot \pi)$, 有 $f \cdot \pi(x) = f(\pi(x)) = I'$. 再结合命题 0.2(2)(i) 可得

$$\pi(x) \in f^{-1}(I') = I \implies x \in \ker \pi = I.$$

因此 $\ker(f \cdot \pi) \subseteq I$. 又因为

$$f \cdot \pi(I) = f(\pi(I)) = f(I) = I',$$

所以 $I \subseteq \ker(f \cdot \pi)$. 故 $I = \ker(f \cdot \pi)$. 故再结合命题 0.2(2)(i) 可得

$$I = \ker(f \cdot \pi) = \ker \pi' = I'.$$

(3)

□

定理 0.1 (群的同态基本定理)

设 f 是群 G 到群 H 上的同态, π 为 G 到商群 $G/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 上的群同构映射 \bar{f} , 使得

$$f = \bar{f} \cdot \pi, \quad (1)$$

进而

$$G \setminus \ker f \cong f(G).$$

如图 1 所示.



笔记

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G \setminus \ker f \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ f(G) & & \end{array}$$

图 1

证明 由命题 0.1 知 $f(G)$ 是 G 的子群. 注意到 f 是 G 到 $f(G)$ 上的满映射, 故由定理 1.19 知 f 在 G 中诱导一个等价关系

$$R : xRy, \quad x, y \in G,$$

当且仅当 $f(x) = f(y)$, 即

$$f(x) = f(y) \iff f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) = e' \iff x^{-1}y \in \ker f.$$

因而 f 诱导的等价关系恰好是 G 的正规子群 $\ker f$ 诱导的同余关系, 即有商群 $G/R = G/\ker f$ 且

$$\pi(x) = \pi(y) \text{ 当且仅当 } f(x) = f(y).$$

又由定理 1.19 知有 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 的一一对应 \bar{f} , 使得 $\bar{f} \cdot \pi = f$, 又 $\forall x, y \in G$ 有

$$\bar{f}(\pi(x)\pi(y)) = \bar{f}(\pi(xy)) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\pi(x)) \cdot \bar{f}(\pi(y)).$$

由此知 \bar{f} 是 $G/\ker f$ 到 $f(G)$ 上的群同构.

□

定理 0.2

设 f 是群 G 到群 H 上的满同态, f 的核为 K , 即 $K = \ker f, G$ 中包含 K 的子群的集合为 Σ, H 的子群的集合为 Γ , 则有下列结论:

- (1) f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应;
- (2) 若 $G_1 \triangleleft G, G_1 \supseteq K$, 则

$$f(G_1) \triangleleft H.$$

若 $H_1 \triangleleft H$, 则

$$f^{-1}(H_1) \triangleleft G.$$

- (3) 若 $G_1 \triangleleft G, G_1 \supseteq K$, 则

$$K \triangleleft G_1 \triangleleft G, \quad G/G_1 \cong H/f(G_1). \tag{2}$$



证明

- (1) 对 $\forall G_1 \in \Sigma$, 由 $f(G_1)$ 是 G_1 在 $f|_{G_1}$ 下的像, 又 f 是群同态, 故 $f(G_1)$ 为 H 的子群, 即 $f(G_1) \in \Gamma$. 由此知 f 是 Σ 到 Γ 的良定义的映射. 设 $H_1 \in \Gamma, H_1$ 在 f 下原像的集合

$$G_1 = f^{-1}(H_1) = \{x \in G | f(x) \in H_1\} \supseteq \{x \in G | f(x) = e', e' \text{ 为 } H \text{ 的幺元}\} = K,$$

而且对 $\forall x, y \in G_1, f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H_1$, 故 $xy^{-1} \in G_1$, 因而 G_1 为 G 的子群, 故 $G_1 \in \Sigma$, 因此 f^{-1} 可视为 Γ 到 Σ 的良定义的映射.

由 f 是 $G \rightarrow H$ 上的满同态知 $f(G_1) = f(f^{-1}(H_1)) = H_1$, 由 H_1 的任意性知 $ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$. 反之, 设 $G_1 \in \Sigma$, 显然有 $G_1 \subseteq f^{-1}(f(G_1))$. 若 $u \in f^{-1}(f(G_1))$, 即有 $v \in G_1$, 使得 $f(u) = f(v)$, 从而

$$f(uv^{-1}) = f(u)f(v)^{-1} = e'.$$

因而 $uv^{-1} \in K \subseteq G_1$, 故 $u \in G_1$, 即有 $f^{-1}(f(G_1)) = G_1$, 由 G_1 的任意性知 $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma$.

综上所述知 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应, f^{-1} 是其逆映射. 故结论(1)成立.

- (2) 设 $G_1 \supseteq K$ 且 $G_1 \triangleleft G$, 即 $G_1 \in \Sigma$ 且 $G_1 \triangleleft G$, 则由(1)可知 $f(G_1)$ 是 H 的子群. 对 $\forall g \in f(G_1), y \in H$, 因为 f 是满同态, 所以存在 $a \in G_1, x \in G$, 使得 $f(a) = g, f(x) = y$. 从而

$$ygy^{-1} = f(x)f(a)f(x)^{-1} = f(xax^{-1}) \in f(G_1).$$

故知 $f(G_1) \triangleleft H$.

反之, 若 $H_1 \triangleleft H$ 且对 $\forall b \in f^{-1}(H_1), y \in G$, 由

$$f(yby^{-1}) = f(y)f(b)f(y)^{-1} \in H_1$$

知 $yby^{-1} \in f^{-1}(H_1)$, 故知 $f^{-1}(H_1) \triangleleft G$, 即结论(2)成立.

- (3) 由命题0.1(1)知 $\ker f \triangleleft G_1$, 再由命题????知 $K \triangleleft G_1$, 再结合条件可得

$$K \triangleleft G_1 \triangleleft G.$$

由结论(2)的证明知 $f(G_1) \triangleleft H$. 令 π' 是 H 到商群 $H/f(G_1)$ 的自然同态, 由此可知有 G 到 $H/f(G_1)$ 上的同态映射 $\pi' \cdot f$, 注意到 $H/f(G_1)$ 的么元为 $f(G_1)$, 则知

$$\begin{aligned}\ker(\pi' \cdot f) &= \{x \in G \mid \pi' \cdot f(x) = f(G_1)\} \\ &= \{x \in G \mid f(x) \in f(G_1)\} \\ &= f^{-1}(f(G_1)) = G_1.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由(1)知 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应. 设 π 为 G 到 G/G_1 的自然同态, 又因为自然同态 π' 是满同态且 f 也是满同态, 所以由群的同态基本定理知有 G/G_1 到 $H/f(G_1)$ 的群同构 \bar{f} , 使得 $\pi' \cdot f = \bar{f} \cdot \pi$, 亦使图2为交换图, 即式(2)成立.

$$\begin{array}{ccc}G & \xrightarrow{f} & H \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' \cdot f & \downarrow \pi' \\ G/G_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & H/f(G_1)\end{array}$$

图2

□

推论 0.1

设 N 为群 G 的正规子群, π 为 G 到商群 G/N 上的自然同态, G 中包含 N 的子群的集合为 $\Sigma, G/N$ 的子群的集合为 Γ , 则

- (1) π 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应;
- (2) 若 $H \triangleleft G, H \supseteq N$, 则

$$\pi(H) = H/N \triangleleft G/N.$$

若 $H' \triangleleft G/N$, 则

$$\pi^{-1}(H') \triangleleft G.$$

(3) 若 $H \triangleleft G, H \supseteq N$, 则

$$N \triangleleft H \triangleleft G, \quad G/H \cong (G/N)/(H/N).$$



证明 事实上, 由于自然同态必是满同态, 故只要在定理 0.2 中将 H 换成 $G/N, f$ 换成 π , 即得本推论. 对于 (3), 由命题????知 $\pi(H) = H/N$, 故由定理 0.2 可得

$$N \triangleleft H \triangleleft G,$$

以及如下交换图.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \pi'' \downarrow & \searrow \pi' \pi & \downarrow \pi' \\ G/H & \xrightarrow[\bar{\pi}]{} & (G/N)/(H/N) \end{array}$$

图 3



定理 0.3

设 N 是群 G 的正规子群, π 是 G 到商群 G/N 上的自然同态, H 是 G 的一个子群, 则有下列结论:

(1) HN 是 G 中包含 N 的子群且

$$N \triangleleft HN = \pi^{-1}(\pi(H)). \quad (3)$$

(2) $H \cap N \triangleleft H$ 且 $H \cap N = \ker(\pi|_H), \pi|_H$ 表示 π 在 H 上的限制;

(3)

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$



证明

(1) 显然, $HN \supseteq N$. 设 $h_i n_i \in HN (i = 1, 2)$, 则由 $N \triangleleft G$ 有

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 h_2^{-1} (h_2 (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in HN.$$

故 HN 是 G 中含 N 的子群且 $\pi(h_1 n_1) = \pi(h_1) \pi(n_1) = \pi(h_1) \in \pi(H)$, 故 $HN \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$.

又设 $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$, 则 $\pi(x) \in \pi(H)$, 从而存在 $h \in H$, 使得

$$\pi(x) = \pi(h) \iff xN = hN \iff x^{-1}h \in N.$$

于是存在 $n \in N$, 使得 $x^{-1}h = n$. 故 $x = hn^{-1} \in HN$. 因此 $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$. 综上可知 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$. 因为 H 是 G 的包含 N 的子群且 $N \triangleleft G$, 所以由命题????知 $N \triangleleft HN$.

(2) 由于 $N \triangleleft G$, 对 $\forall h \in H, a \in N \cap H$ 有 $hah^{-1} \in N \cap H$, 故 $N \cap H \triangleleft H$. 又 $\pi|_H(h) = \pi(h)$ 且 $\ker \pi = N$, 于是 $\ker(\pi|_H) = H \cap N$.

(3) 由 (1) 的结论知 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$, 再由自然同态是满同态知

$$\pi(HN) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H).$$

由群的同态基本定理知

$$HN/\ker \pi|_{HN} \cong \pi(HN) = \pi(H) \cong H/\ker \pi|_H.$$

又注意到 $\ker(\pi|_{HN}) = HN \cap N = N, \ker \pi|_H = H \cap N$, 故

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$



定理 0.4 (环的同态基本定理)

设 f 是环 R 到环 R' 上的同态, π 是 R 到商环 $R/\ker f$ 上的自然同态, 则有 $R/\ker f$ 到 $f(R)$ 上的环同构映射 \bar{f} , 使得

$$f = \bar{f} \cdot \pi. \quad (4)$$

即

$$R/\ker f \cong f(R).$$



证明 由命题 0.1 知 $f(R)$ 是 R' 的子环. 又 f 为环同态, 故也是加法群 R 到加法群 $f(R)$ 上的同态, π 也是加法群 R 到商群 $R/\ker f$ 上的自然同态, 于是由群的同态基本定理知有加法群 $R/\ker f$ 到加法群 $f(R)$ 上的同构 \bar{f} , 使 $f = \bar{f} \cdot \pi$.

另外, $\forall a, b \in R$ 有

$$\begin{aligned} \bar{f}(\pi(a)\pi(b)) &= \bar{f}(\pi(ab)) = f(ab) = f(a)f(b) \\ &= \bar{f}(\pi(a))\bar{f}(\pi(b)), \end{aligned}$$

因而 \bar{f} 也是环 $R/\ker f$ 到环 $f(R)$ 上的环同构.

**定理 0.5**

设 f 是环 R 到环 R' 上的满同态, 又 $K = \ker f, R$ 中包含 K 的子环集合为 Σ, R' 的子环集合为 Γ , 则有下列结论:

- (1) f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应;
- (2) 若 H 为 R 的理想且 $H \supseteq K$, 则 $f(H)$ 为 R' 的理想;
若 H' 为 R' 的理想, 则 $f^{-1}(H')$ 为 R 的理想;
- (3) 若 I 是 R 的理想且 $I \supseteq K$, 则

$$R/I \cong R'/f(I). \quad (5)$$

**证明**

- (1) 设 H 为 R 的子环且 $H \supseteq K$, 由环同态的基本性质??知 $f(H)$ 为 R' 的子环. 故 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 上的良定义的映射. 反之, 若 H' 为 R' 的子环, 则 H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1) 知 f 建立了加法群 R 中包含 K 的子群与加法群 R' 的子群间的一一对应, 故 $f^{-1}(H')$ 是 R 中唯一包含 K 的加法子群. 又若 $a, b \in f^{-1}(H')$, 则有 $f(ab) = f(a)f(b) \in H'$, 即 $ab \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 对乘法构成半群. 再设 $c \in f^{-1}(H')$, 则

$$\begin{aligned} f((a+b)c) &= f(a+b)f(c) = f(a)f(c) + f(b)f(c) \in H', \\ f(c(a+b)) &= f(c)f(a+b) = f(c)f(a) + f(c)f(b) \in H'. \end{aligned}$$

因而 $f^{-1}(H')$ 是 R 中包含 K 的子环, 故 f^{-1} 可视为 $\Gamma \rightarrow \Sigma$ 上的良定义的映射.

对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 H 也是 R 中包含 K 的加法子群, H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1) 知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 H 的任意性知 $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma, ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$. 故 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应, f^{-1} 是其逆映射. 即结论(1)成立.

- (2) 对 $\forall a', b' \in R', h \in H$, 由环同态都是满同态知存在 $a, b \in R$, 使得 $f(a) = a', f(b) = b'$. 于是再由 H 是 R 的理想知

$$a'f(a)b' = f(a)f(h)f(b) = f(ahb) \in f(H).$$

故 $f(H)$ 为 R' 的理想.

反之, 设 H' 为 R' 的理想. 对 $\forall b \in R, x \in f^{-1}(H')$, 由 H' 是 R' 的理想知

$$f(bx) = f(b)f(x) \in H', f(xb) = f(x)f(b) \in H'.$$

即 $bx, xb \in f^{-1}(H')$, 故 $f^{-1}(H')$ 为 R 的理想. 由此知结论(2)成立.

(3) 设 π 是 R 到 R/I 的自然同态, π' 是 R' 到 $R'/f(I)$ 的自然同态. 由命题????知 $\pi'f$ 是 R 到 $R'/f(I)$ 上的环同态. 注意到

$$\begin{aligned}\ker(\pi'f) &= \{x \in R : \pi'f(x) = f(I)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(I)\} \\ &= f^{-1}(f(I)) = I.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由(1)知 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应. 于是由环的同态基本定理得式(5)成立.

□

推论 0.2

设 A, B 均为环 R 的理想且 $A \subseteq B$, 则有 B/A 是 R/A 的理想且

$$R/B \cong (R/A)/(B/A).$$

♡

证明 事实上, 只要在定理 0.5 中取 $R' = R/A, f$ 为 R 到 R/A 的自然同态, 并且由定理????知 $f(B) = B/A$, 再由定理 0.5(2) 知 $f(B) = B/A$ 是 $R' = R/A$ 的理想. 因此即得本推论.

□

定理 0.6

设 H 为环 R 的子环, K 为 R 的理想, π 是环 R 到商环 R/K 上的自然同态, 则有

(1) $H+K$ 为 R 中包含 K 的子环, K 是 $H+K$ 的理想, 并且

$$H+K = \pi^{-1}(\pi(H)).$$

(2) $H \cap K$ 为 H 的理想且 $H \cap K = \ker \pi|_H$.

(3)

$$(H+K)/K \cong H/(H \cap K). \quad (6)$$

♡

证明

(1) 显然 $H+K \supseteq K$. 设 $h_i + k_i \in H+K$ ($i = 1, 2$), $r \in R$, 则 $(h_1 + k_1) - (h_2 + k_2) = h_1 - h_2 + k_1 - k_2 \in H+K$. 于是 $H+K$ 是 R 的加法子群. 由 $H+K \subseteq R$ 知 $H+K$ 对乘法满足结合律且加法与乘法间满足左右分配律. 故 $H+K$ 是 R 中含 K 的子环. 又注意到 $\pi(h_1 + k_1) = h_1 + k_1 + K = h_1 + K \in \pi(H)$. 故 $h_1 + k_1 \in \pi^{-1}(\pi(H))$, 因此 $H+K \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$.

反之, 设 $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$, 则 $\pi(x) \in \pi(H)$. 从而存在 $h' \in H$, 使得 $\pi(x) = \pi(h') \iff x + K = h' + K \iff -x + h' \in K$. 于是存在 $k' \in K$, 使得 $-x + h' = k'$, 从而 $x = h' - k' \in H+K$. 故 $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq H+K$. 综上可知 $H+K = \pi^{-1}(\pi(H))$.

因为 H 为环 R 的子环, K 为 R 的理想且 $H+K \supseteq K$, 所以由定理????知 K 是 $H+K$ 的理想.

(2) 由 H, K 都是 R 的子环知 $H \cap K$ 是 R 的子环. 又因为 $H \supseteq H \cap K$, 所以 $H \cap K$ 也是 H 的子环. 对 $\forall x \in H \cap K, h \in H$, 由 K 是 R 的理想知 $hx, xh \in H \cap K$. 故 $H \cap K$ 是 H 的理想. 又 $\pi|_H(h) = \pi(h)$ 且 $\ker \pi = K$, 故 $\ker \pi|_H = H \cap K$.

(3) 由结论(1)知 $H+K = \pi^{-1}(\pi(H))$, 再由自然同态都是满同态知

$$\pi(H+K) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H).$$

于是由环的同态基本定理知

$$(H+K)/\ker \pi|_{H+K} \cong \pi(H+K) = \pi(H) \cong H/\ker \pi|_H.$$

注意到 $\ker \pi|_{H+K} = (H+K) \cap K = K, \ker \pi|_H = H \cap K$, 故

$$(H+K)/K \cong H/(H \cap K).$$

□

定理 0.7 (模同态的基本定理)

设 M, M' 都是么环 R 上的模, f 是模 M 到模 M' 上的同态, M 中包含 N 的子模集合为 Σ , M' 中子模集合为 Γ , π 是 M 到 M/N 上的自然模同态, 则有 M/N 到 $f(M)$ 的模同构 \bar{f} , 使得

$$\bar{f} \cdot \pi = f \quad (7)$$

即

$$M/N \cong f(M).$$



证明 由命题 0.1 知 $f(M)$ 是 M' 的子模. 由群的同态基本定理知有加法群 M/N 到加法群 $f(M)$ 上的同构 \bar{f} , 使 $\bar{f} \cdot \pi = f$. 现只需证 \bar{f} 是模同构. 又设 $a \in R, x \in M$, 于是有

$$\bar{f}(a\pi(x)) = \bar{f}(\pi(ax)) = f(ax) = af(x) = a\bar{f}(\pi(x)),$$

即 \bar{f} 为模同构.

**定理 0.8**

设 M, M' 都是么环 R 上的模, f 是模 M 到模 M' 上的满同态, M 中包含 N 的子模集合为 Σ , M' 中子模集合为 Γ , 则有下面结论:

- (1) f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应.
- (2) 若 M_1 是 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$, 则

$$M/M_1 \cong M'/f(M_1) \quad (8)$$

**证明**

- (1) 若 M_1 为 M 的子模, 则由定理????知 $f(M_1)$ 为 M' 的子模. 故 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 上的良定义的映射.

反之, 若 M'_1 为 M' 的子模, 则 M'_1 也是 M' 的加法子群. 从而由定理 0.2(1) 知 $f^{-1}(M'_1)$ 是 M 中唯一包含 N 的加法子群. 又设 $a \in R, x \in f^{-1}(M'_1)$. 由 $f(ax) = af(x) \in M'_1$ 知 $ax \in f^{-1}(M'_1)$, 即 $f^{-1}(M')$ 是 M 的子模. 故 f^{-1} 可视为 $\Gamma \rightarrow \Sigma$ 上的良定义的映射.

对 $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$, 注意到 H 也是 R 中包含 K 的加法子群, H' 也是 R' 的加法子群, 由定理 0.2(1) 知 $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$. 由 H 的任意性知 $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma, ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$. 故 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应, f^{-1} 是其逆映射, 即结论(1)成立.

- (2) 设 M_1 为 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$. 又设 π_1 是 M 到 M/M_1 的自然同态, π' 是 M' 到 $M'/f(M_1)$ 的自然同态. 于是 $\pi'f$ 是 M 到 $M'/f(M_1)$ 上的同态, 而且

$$\begin{aligned} \ker(\pi'f) &= \{x \in R : \pi'f(x) = f(M_1)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(M_1)\} \\ &= f^{-1}(f(M_1)) = M_1. \end{aligned}$$

最后一个等号是因为由结论(1)知 f 是 $\Sigma \rightarrow \Gamma$ 的一一对应. 故由模同态的基本定理可知式(8)成立.

**推论 0.3**

设 M_1, N 都是 R 模 M 的子模, 而且 $M_1 \supseteq N$, 则有模同构

$$M/M_1 \cong (M/N)/(M_1/N).$$



证明 事实上, 只要在定理 0.8(2) 中取 $M' = M/N, f$ 为 M 到 $M' = M/N$ 的自然同态, 再由命题????知 $f(M_1) = M_1/N$, 即得本推论.



定理 0.9

设 H, N 为 R 模 M 的子模, 则有模同构

$$(H + N)/N \cong H/(H \cap N) \quad (9)$$



证明 设 π 为模 M 到商模 M/N 的自然模同态, 由于 N 为商群 M/N 中的加法幺元, 即商模 M/N 中的零元, 于是有 $\pi(H + N) = \pi(H) + N = \pi(H)$, 因而由**命题 0.1(3)**知

$$H + N/\ker(\pi|_{H+N}) \cong \pi(H + N) = \pi(H) \cong H/\ker(\pi|_H).$$

由 $\ker(\pi|_{H+N}) = (H + N) \cap N = N, \ker(\pi|_H) = H \cap N$, 即得式(9)成立.

