0.1 函数性态分析综合

命题 0.1

设 $f:(a,b)\to(a,b)$ 满足对任意的 $x,y\in(a,b)$, 当 $x\neq y$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 任取 $x_1\in(a,b)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$, 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

证明 注意到 $x_1\in(a,b)$, 假设 $x_k\in(a,b)$, 则 $x_{k+1}=f(x_k)\in(a,b)$, 故由数学归纳法可知 $x_n\in(a,b),\forall n\in\mathbb{N}$. 又由条件可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon>0$, 当 $x,y\in(a,b)$ 且 $0<|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|<\delta=\varepsilon.$$

故 f 在 (a,b) 上一致连续. 从而 $f\in C(a,b)$, 可以补充定义使 $f\in C[a,b]$. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F\in C[a,b]$. 下面我们对 F 进行分类讨论.

(1) 若 F 在 (a,b) 上不变号, 则由 $F\in C(a,b)$ 可知,F 要么恒大于零, 要么恒小于零. 不妨设 F 在 (a,b) 上恒大于零, 即 $f(x)>x,\forall x\in(a,b)$. 从而

$$x_{n+1}=f(x_n)>x_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增. 又因为 $x_n\in(a,b),\forall n\in\mathbb{N}$, 所以由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 若 F 在 (a,b) 上变号, 则由 $F\in C(a,b)$ 及介值定理可得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$. 若存在 $\xi'\in(a,b)$ 且 $\xi'\neq\xi$, 使得 $f(\xi')=\xi'$, 则由条件可得到

$$|\xi-\xi'|=|f(\xi)-f(\xi')|<|\xi-\xi'|.$$

显然矛盾! 因此存在唯一的 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$. 从而

$$|x_{n+1}-\xi|=|f(x_n)-f(\xi)|<|x_n-\xi|,\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是 $\{|x_n-\xi|\}$ 单调递减且有下界 0, 故由单调有界定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi|=A\geqslant 0$ 存在.

(i) 当 $A=0$ 时, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi|=A=0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(ii) 当 $A>0$ 时, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则结论已经成立. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则由 $x_n\in(a,b),\forall n\in\mathbb{N}$ 及聚点定理可知,$\{x_n\}$ 至少有一个聚点. 若 $\{x_n\}$ 只有一个聚点, 则 $\{x_n\}$ 收敛与假设矛盾! 因此 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点. 任取收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=B$, 则

$$A=\lim_{n\to\infty}|x_n-\xi|=\lim_{k\to\infty}|x_{n_k}-\xi|=|B-\xi|.$$

从而 $B=\xi-A$ 或 $\xi+A$. 因此 $\{x_n\}$ 最多有两个聚点 $\xi-A,\xi+A\in[a,b]$. 故 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 $\xi-A$ 和 $\xi+A$. 进而一定存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A$. 因为 $\xi-A\neq\xi$ 不是 f 的不动点, 而 $\{x_n\}$ 只有两个聚点, 所以

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f\left(\xi-A\right)\neq\xi-A\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=f(\xi-A)=\xi+A.$$

由

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A<\xi,\quad \lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\xi+A>\xi$$

知, 存在 $K\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall k>K$, 有 $x_{n_k}<\xi$,$x_{n_k+1}>\xi$. 又 $\{|x_n-\xi|\}$ 递减趋于 A, 故对 $\forall k>K$ 有

$$A\leqslant|x_{n_k}-\xi|=\xi-x_{n_k}<\xi-a\Longrightarrow\xi-A>a,$$

$$A\leqslant|x_{n_k+1}-\xi|=x_{n_k+1}-\xi<b-\xi\Longrightarrow\xi+A<b.$$

因此 $\xi-A,\xi+A\in(a,b)$,$\xi=f(\xi)$. 再由条件可得

$$A=|\xi-(\xi+A)|=|f(\xi)-f(\xi-A)|<|\xi-(\xi-A)|=A.$$

显然矛盾! 故 $A>0$ 不成立, 于是 $A=0$. 再由 (1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 即 $\{x_n\}$ 收敛, 与假设 $\{x_n\}$ 发散矛盾!

□

命题 0.2

设 f' 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

笔记 本题也有积分版本 (见命题??) 令 $F=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 就可以将这个积分版本转化为上述命题.

证明 反证, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0$, 则可以不妨设存在 $\delta>0,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$x_n\to+\infty \text{且} f'(x_n)\geqslant\delta,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由 f' 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\eta>0$, 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f'(x)\geqslant f'(x_n)-\frac{\delta}{2}\geqslant\frac{\delta}{2},\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f(x_n+\eta)-f(x_n)=\int_{x_n}^{x_n+\eta} f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_n+\eta}\frac{\delta}{2}\mathrm{d}x=\frac{\delta\eta}{2}>0,\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

令 $n\to\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $0\geqslant\frac{\delta\eta}{2}>0$, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

□

命题 0.3 (时滞方程)

设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1,\quad f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

证明 由 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 及 $f\in D(\mathbb{R})$ 可知 $f'\in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_1\in\mathbb{R}$, 固定 x_1, 记

$$A=\{z>x_1\mid f'(z)=f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可知

$$\exists x_2\in(x_1,x_1+1)\text{ s.t. } f'(x_1)=f(x_1+1)-f(x_1)=f'(x_2).$$

故 $x_2\in A$, 从而 A 非空. 现在考虑 $y\triangleq\sup A\in(x_1,+\infty)$, 下证 $y=+\infty$. 若 $y<+\infty$, 则存在 $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n'\to y \text{且} f'(z_n')=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n')=f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可得

$$\exists y'\in(y,y+1)\text{ s.t. } f'(y)=f(y+1)-f(y)=f'(y').$$

从而 $y'\in A$ 且 $y'>y$, 这与 $y=\sup A$ 矛盾! 故 $y=+\infty$. 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n\to+\infty \text{且} f'(z_n)=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty} f'(z_n)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=1.$$

因此由 x_1 的任意性得, 存在 C 为常数, 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

□

例题 0.1 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)\leqslant 0$ 以及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0. \tag{12.27}$$

证明: (1) 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

(2) 存在 $\eta\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta)=0$.

证明 (1) 如果对任何 $x\in(1,+\infty)$, 都有 $f'(x)\leqslant 1$, 那么 $[f(x)-x]'\leqslant 0$ 知 $f(x)-x$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1\geqslant f(1)-1\geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何 $x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f''(x)\neq 0$. 从而 $f''(x)$ 要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取 $\xi\in\mathbb{R}$.

当 $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x)\geqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x>\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]\geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)-1)x]=+\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x)\leqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x<\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]\leqslant \lim_{x\to-\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)+1)x]=-\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2).

□

例题 0.2 设 f 在 $[a,b]$ 上每一个点极限都存在, 证明:f 在 $[a,b]$ 有界.

笔记 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即**局部的性质等价于在所有紧集上的性质**. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对 $\forall c\in[a,b]$, 由 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在可知, 存在 c 的邻域 U_c 和 $M>0$, 使得

$$\sup_{x\in U_c\cap[a,b]}|f(x)|\leqslant M_c.$$

注意 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{c\in[a,b]}U_c$, 由有限覆盖定理得, 存在 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in[a,b]$, 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n}U_{c_k}.$$

故 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}M_k$.

□

例题 0.3 设 f 是 $(a,+\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T, 存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

注 因为 $|f(x+T)-f(x)|\geqslant 0$, 所以

$$0\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|.$$

原结论的反面只用考虑 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|$ 即可. 若 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|=0$, 则一定存在子列 $x_n\to+\infty$, 使得结论成立. 因此原结论等价于 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|=0$. 故原结论的反面就是 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|>0$.

笔记 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画 $f(x)$ 的大致走势图), 就容易找到矛盾.

证明 当 $T=0$ 时, 显然存在这样的数列. 不妨设 $T>0$, 假设 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|>0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, $X>0$, 使得

$$|f(x+T)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0>0,\quad\forall x\geqslant X\tag{1}$$

令 $g(x) \triangleq f(x+T)-f(x)$, 则若存在 $x_1,x_2 \geqslant X$, 使得

$$g(x_1)=f(x_1+T)-f(x_1)\geqslant \varepsilon_0>0,\quad g(x_2)=f(x_2+T)-f(x_2)\leqslant -\varepsilon_0<0.$$

不妨设 $x_1<x_2$, 由 g 连续及介值定理可知, 存在 $x_3\in(x_1,x_2)$, 使得

$$g(x_3)=f(x_3+T)-f(x_3)=0$$

与(1) 式矛盾! 故 $g(x)\triangleq f(x+T)-f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 ε_0 , 要么恒小于 ε_0 . 于是不妨设

$$f(x+T)-f(x)\geqslant \varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant X. \tag{2}$$

从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 当 $x\geqslant X$ 时, 有 $x+(k-1)T>X$. 于是由(2)式可得

$$f(x+kT)-f(x+(k-1)T)\geqslant \varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant X.$$

进而对上式求和可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x+kT)-f(x+(k-1)T)]=f(x+nT)-f(x)\geqslant n\varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant X.$$

任取 $x_0\geqslant X$, 则

$$f(x_0+nT)-f(x_0)\geqslant n\varepsilon_0,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 这与 f 在 $(a,+\infty)$ 上有界矛盾!

□

命题 0.4

1. 设 $f_n\in C[a,b]$ 且关于 $[a,b]$ 一致的有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$
证明: 对 $\{x_n\}\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$, 有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(c).$$
2. 设 $f_n(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0\in\mathbb{R}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 都有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0),$$
证明: $f\in C(\mathbb{R})$.

♠

证明

1. 由 f_n 一致收敛到 $f(x)$ 可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall N\geqslant N_0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 对 $\forall x\in[a,b]$, 都有
$$|f_n(x)-f_N(x)|<\varepsilon.$$
从而由上式可得
$$\begin{aligned}|f_n(x_n)-f(c)|&\leqslant|f_n(x_n)-f_N(x_n)|+|f_N(x_n)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)|\\&\leqslant\varepsilon+|f_N(x_n)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)|.\end{aligned}$$
令 $n\to+\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ 可得
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant\varepsilon+|f_N(c)-f(c)|.$$
再令 $N\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$ 可知
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant\varepsilon.$$
令 $\varepsilon\to0^+$, 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(c)$.

2. 反证, 若 f 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得 $\forall m\in\mathbb{N}$, 存在 $y_m\in(x_0-\frac{1}{m},x_0+\frac{1}{m})$, 使得
$$|f(y_m)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3}$$
令条件中的 $x_n=y_m,\forall n\in\mathbb{N}$, 从而由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(y_m)-f(y_m)|=0,\ m=1,2,\cdots$, 故对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 存在严格递增的数列 $n_m\to+\infty$, 使得
$$|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{4}$$
从而由(3)(4)式可知, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有
$$|f(y_{n_m})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0, \tag{5}$$
$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{6}$$
因此由(5)(6)式可得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有
$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(x_0)|\geqslant|f(y_{n_m})-f(x_0)|-|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{7}$$
注意到 $y_m\to x_0$, 于是 $y_{n_m}\to x_0$. 从而由已知条件可知 $\lim\limits_{m\to\infty}f_{n_m}(y_{n_m})=f(x_0)$, 这与(7)式矛盾! 故 $f\in C(\mathbb{R})$.

□

例题 0.4 设 $g\in C(\mathbb{R})$ 且以 $T>0$ 为周期, 且有
$$f(f(x))=-x^3+g(x). \tag{8}$$
证明: 不存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(8)式成立.

证明 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在 $M>0$, 使得 $|g(x)|\leqslant M$. 反证, 假设存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(8)式成立. 则
$$\lim_{x\to+\infty}f\left(f\left(x\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+g\left(x\right)\right)=-\infty, \tag{9}$$
$$\lim_{x\to-\infty}f\left(f\left(x\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+g\left(x\right)\right)=+\infty. \tag{10}$$
假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$, 则存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $f(x_n)\to A$. 从而由(8)式可得
$$f(A)=\lim_{n\to\infty}f(f(x_n))=\lim_{n\to\infty}(-x_n^3+g(x_n))=-\infty.$$
上式显然矛盾! 又因为 $f\in C(\mathbb{R})$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$. 否则, 当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 振荡 (上下极限不相等, 取 K 为上下极限和的一半即可), 则由介值定理可知, 存在 $K>0$,$y_n\to+\infty$, 使得 $f(y_n)=K,n=1,2,\cdots$. 从而由(9)式可知
$$-\infty=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{n\to\infty}f(f(y_n))=f(K).$$
显然矛盾!

(i) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则
$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty.$$
显然矛盾!

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 则
$$f(-\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty. \tag{11}$$
从而对上式两边同时作用 f 可得
$$f(-\infty)=f(f(-\infty))=\lim_{x\to-\infty}[-x^3+g(x)]=+\infty. \tag{12}$$
于是(11)式与(12)式显然矛盾! 综上,$f\in C(\mathbb{R})$ 的解不存在.

□

例题 0.5

1. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.
2. 设 $f\in C(\mathbb{R})$,n 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y\in\mathbb{R}$, 都有 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存

在.

证明

1. 反证, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在, 由 f 有界, 可设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=A>B=\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)$. 任取 $C\in(B,A)$, 则由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_1\geqslant 0$, 使得 $f(x_1)>C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_2>x_1+1$, 使得 $f(x_2)<C$. 于是再由 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_3>x_2+1$, 使得 $f(x_3)>C$. 又由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_4>x_3+1$, 使得 $f(x_4)<C$. 依此类推, 可得递增数列 $\{x_n\}$, 使得
$$x_{n+1}>x_n+1,\quad f(x_{2n-1})>C,\quad f(x_{2n})<C,\quad n=1,2,\cdots.$$
从而由 $f\in C[0,+\infty)$ 及介值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $y_n\in(x_{2n-1},x_{2n})$, 使得 $f(y_n)=C$, 矛盾!
2. 设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是 f 的所有零点, 记 $x_0=-\infty,x_{n+1}=+\infty$, 则由 f 的连续性及介值定理可知,f 在 (x_{i-1},x_i) 上不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 现在考虑 $(x_{i-1},x_i),i=2,3,\cdots,n$, 这 $n-1$ 个区间. 于是由抽屉原理可知, 这 $n-1$ 个区间中必存在 $\frac{n}{2}$ 区间, 使 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内都同号.
不妨设 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内恒大于 0, 记 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值记为 $f(m_i)\triangleq M_i>0$, 其中 $m_i\in(x_{i-1},x_i),i=2,3,\cdots,n$. 由介值定理知, 至少存在 $c_i\in(x_{i-1},m_i),c_i'\in(m_i,x_i)$, 使得
$$f(c_i)=f(c_i')=\frac{1}{2}\min_{2\leqslant i\leqslant n}M_i>0,i=2,3,\cdots,n.$$
注意到在 $(x_0,x_1),(x_n,x_{n+1})$ 上 f 必不同号. 否则, 不妨设在 $(x_0,x_1),(x_n,x_{n+1})$ 上 f 恒大于 0, 则由 $f\in C(\mathbb{R})$ 可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|<M,\forall x\in[x_1,x_{n+1}]$. 从而 $f(x)\geqslant -M,\forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R},f(x)=y$ 都有根矛盾!
不妨设 f 在 (x_0,x_1) 上恒小于 0, 在 (x_n,x_{n+1}) 上恒大于 0, 则 f 在 (x_n,x_{n+1}) 上无上界. 否则, 存在 $K>\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i>0$, 使得 $f(x)<K,\forall x\in(x_n,x_{n+1})$. 又因为
$$f(x)<0<K,\forall x\in(x_0,x_1),\quad f(x)\leqslant\max_{2\leqslant i\leqslant n}M_i<K,\forall x\in(x_1,x_n).$$
所以 $f(x)<K,\forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R},f(x)=y$ 都有根矛盾!
又 $f(x_n)=0$, 故至少存在一个 $c\in(x_n,x_{n+1})$, 使得 $f(c)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i>0$. 综上, 至少有 $n+1$ 个点使得 $f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i>0$. 这与 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i\}$ 是 n 元集矛盾!

□

例题 0.6 设 $a,b>1$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 邻域有界. 若
$$f(ax)=bf(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$
证明:f 在 $x=0$ 连续.

证明 注意到
$$f(0)=bf(0)\Rightarrow f(0)=0.$$
由条件可得
$$f(ax)=bf(x)\Rightarrow f(x)=\frac{f(ax)}{b}=\frac{f(a^2x)}{b^2}=\cdots=\frac{f(a^nx)}{b^n},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{13}$$
因为 f 在 $x=0$ 邻域有界, 所以存在 $\delta>0$, 使得
$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in(-\delta,\delta).\tag{14}$$
从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$\frac{M}{b^N}<\varepsilon.\tag{15}$$
于是当 $x\in\left(-\frac{\delta}{a^N},\frac{\delta}{a^N}\right)$ 时, 结合(13)(14)(15)式, 我们有
$$|f(x)|=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|\leqslant\frac{M}{b^N}<\varepsilon.$$

故 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

□

例题 0.7 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x), f(x^2)$ 都是周期函数, 证明:f 为常值函数.

证明 由连续周期函数必一致连续可知,$f(x), f(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 于是对任意满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$ 的数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$, 都有

$$|f(x_n') - f(x_n'')|, |f((x_n')^2) - f((x_n'')^2)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

设 $f(x)$ 的周期为 $T > 0$, 则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, 取 $x_n' = \sqrt{nT + c}, x_n'' = \sqrt{nT}$, 显然 $x_n' - x_n'' = \frac{c}{\sqrt{nT+c} + \sqrt{nT}} \to 0$. 从而由 (16) 式可得

$$|f((x_n')^2) - f((x_n'')^2)| = f(nT + c) - f(nT) = f(c) - f(0) \to 0.$$

故 $f(c) = f(0), \forall c \in \mathbb{R}$. 故 f 为常值函数.

□

例题 0.8 计算函数方程 $f(\log_2 x) = f(\log_3 x) + \log_5 x$ 所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

笔记 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5}, x > 0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n \in \mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3}, \qquad \frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\frac{\ln 3}{\ln 2} > 1$, 后者公比 $\frac{\ln 2}{\ln 3} < 1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 取 $a_1 = x, \ln a_n = \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1} \cdot \ln x, n \in \mathbb{N}$. 则 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0$. 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n = 1, 2, \cdots$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_n}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0).$$

故

$$\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}} = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0) \overset{y = \frac{\ln x}{\ln 2}}{\Longrightarrow} f(y) = f(0) + \frac{y \ln 2 \ln 3}{\ln 5 \ln \frac{3}{2}}.$$

□

例题 0.9 设 $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 满足对任何 $x, h \in \mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 对 $\forall x, h \in \mathbb{R}$, 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x+\theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2 h^2}{n!}h^n, \end{aligned} \tag{17}$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2}. \tag{18}$$

比较(17)式和(18)式得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!}\right] f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} - \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\right] h. \tag{19}$$

当 $\theta = \dfrac{1}{n+1}$ 时, 我们有

$$\frac{\theta^2 f^{(n+2)}(\xi)}{2n!} = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令 $h \to 0$, 则 $\xi, \eta \to x$, 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2} = \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} \Rightarrow f^{(n+2)}(x) = 0.$$

当 $\theta \neq \dfrac{1}{n+1}$ 时, 对(19)式令 $h \to 0$, 则 $\xi, \eta \to x$, 故此时就有

$$\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{\theta}{n!}\right] f^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0.$$

因此, 无论如何都有 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

□

例题 0.10

1. 设

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{20}$$

   证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1, 1)$.
2. 设 $g(x) = e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$, 证明 g 是只有实根的多项式.

笔记 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式, 且 ± 1 是 $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n$ 的 $n-k$ 重根 $(0 \leqslant k \leqslant n)$. 由 Rolle 定理可知,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知,$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得,$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 有 n 个不同实根. 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 故 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1, 1)$ 上.
2. 设 $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}) = P_k(x)e^{-x^2}$,$P_k$ 是 k 次多项式,$k \in \mathbb{N}$, 显然 $P_0(x) = 1$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}(e^{-x^2}) = \left[P_k'(x) - 2xP_k(x)\right] e^{-x^2}.$$

令 $P_{k+1}(x)=P_k'(x)-2xP_k(x)$, 则由 P_k 是 k 次多项式可知 $P_{k+1}(x)$ 是 $k+1$ 次多项式. 故由数学归纳法可知

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})=P_n(x)e^{-x^2},\quad P_n\in\mathbb{R}[x],\quad n\in\mathbb{N}.$$

因此 $g(x)=e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})=P_n(x)$ 是 n 次多项式 $(n\in\mathbb{N})$.

显然 $P_1(x)=-2x$ 只有一个实根 $x=0$. 设 P_k 是有 k 个不同实根的多项式, 这 k 个根为

$$x_1<x_2<\cdots<x_k.$$

从而这 k 个根也是 $P_k(x)e^{-x^2}$ 的根. 由 Rolle 定理可知

$$P_{k+1}(x)=e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2})=e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_k(x)e^{-x^2}\right)$$

在 $(x_{j-1},x_j),j=2,3,\cdots,k$ 有实根. 而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_k(x)e^{-x^2}=0$, 故由加强的 Rolle 中值定理可知 $P_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_k,+\infty)$ 上还各有一个实根. 因此 $P_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个根. 故由数学归纳法可知 $P_n(x)$ 有 n 个实根 $(n\in\mathbb{N})$. 又因为 $g(x)=P_n(x)$ 是 n 次多项式, 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 所以 $g(x)=P_n(x)$ 是只有实根的多项式.

□

例题 0.11 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g\in C(\mathbb{R})$ 且 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{|g(x)|}{x}=+\infty$, 证明: $f\circ g$ 不是周期函数.

笔记 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

证明 若 $f\circ g$ 是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知 $f\circ g$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 设 f 的周期为 $T>0$, 记 $a\triangleq\max f-\min f>0$, 则存在 $\delta>0$, 使

$$|f(g(x))-f(g(y))|<a,\forall|x-y|\leqslant\delta.\tag{21}$$

先证 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 若 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|g(x+\delta)-g(x)|\neq+\infty$, 则存在 $A>0$, 使 $|g(x+\delta)-g(x)|\leqslant A,\forall x\geqslant0$. 对 $x\in[n\delta,(n+1)\delta),n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|g(x-n\delta)|}{n\delta}+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{g(x-k\delta)-g(x-(k+1)\delta)}{n\delta}\right|\leqslant\frac{1}{n\delta}\sup_{x\in[0,\delta]}|g(x)|+\frac{A}{\delta}.$$

故 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{A}{\delta}$ 矛盾! 因此 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty$. 于是存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $|g(x_0+\delta)-g(x_0)|\geqslant T$. 由介值定理可知, 存在 $s,t\in[x_0,x_0+\delta]$, 使得 $f(g(s))=\max f,\quad f(g(t))=\min f$. 从而由 (21) 式可知

$$a=|f(g(s))-f(g(t))|<a$$

矛盾! 故 $f\circ g$ 不是周期函数 ($f\circ g$ 甚至不是一致连续函数).

□

例题 0.12 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0,\quad\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t=0.\tag{22}$$

证明:

(i)

$$\lim_{x\to+\infty}xF(x)=0;\tag{23}$$

(ii)

$$\lim_{x\to0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0.\tag{24}$$

证明

(i) 由(22)知 F 非负. 由 A-D 判别法知本题涉及的积分都收敛. 注意到

$$\int_0^{\infty}F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{\infty}F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\
&\geqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{\infty} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+2)\pi}^{(2k+3)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

从而

$$
0 \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t. \tag{25}
$$

上式取 $x = \dfrac{1}{n}$ 并结合

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t &\geqslant n\int_0^{2\pi} F(nu)\sin u\mathrm{d}u \xlongequal{\text{区间再现}} n\int_0^{\pi}[F(nu) - F(2\pi n - nu)]\sin u\mathrm{d}u\\
&\geqslant n\int_0^{\frac{\pi}{2}}[F(nu) - F(2\pi n - nu)]\sin u\mathrm{d}u \geqslant n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\
&= n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

和(22)知

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] = 0.
$$

现在对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任何 $n \geqslant N$ 都有

$$
n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] \leqslant \varepsilon. \tag{26}
$$

当正整数 k 充分大, 我们考虑

$$
b_n \triangleq k3^{n-1}\left[F\left(\frac{\pi k3^{n-1}}{2}\right) - F\left(\frac{\pi k3^n}{2}\right)\right] \leqslant \varepsilon,
$$

则利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ 和(26)得

$$
0 \leqslant kF\left(\frac{k\pi}{2}\right) = k\sum_{n=1}^{\infty}\left[F\left(\frac{\pi k3^{n-1}}{2}\right) - F\left(\frac{\pi k3^n}{2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^{n-1}} \leqslant \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}\varepsilon.
$$

现在我们有 $\lim\limits_{k\to+\infty} kF\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = 0$. 对 $x \in [0, +\infty)$, 存在唯一的 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in \left[\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{k+1}{2}\pi\right)$, 于是

$$
0 \leqslant xF(x) \leqslant \frac{(k+1)\pi}{2}F\left(\frac{k\pi}{2}\right) \to 0, k \to +\infty,
$$

因此我们证明了(23).

(ii) 我们由(25)知

$$\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t \geqslant 0 \Rightarrow \varliminf_{x\to 0^+}\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{27}$$

以及对任何 $\eta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{x\to 0^+}\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t &\leqslant \varlimsup_{x\to 0^+}\int_0^{\pi}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\
&\leqslant \varlimsup_{x\to 0^+}\int_0^{\eta}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\varlimsup_{x\to 0^+}\int_{\eta}^{\pi}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\
&\leqslant \sup_{y\in[0,+\infty)} yF(y)\cdot\int_0^{\eta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\varlimsup_{x\to 0^+}\sup_{y\in[\frac{\eta}{x},\frac{\pi}{x}]} yF(y)\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\
&= \sup_{y\in[0,+\infty)} yF(y)\cdot\int_0^{\eta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了(23). 由 η 任意性得

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

结合(27)即得(24).

□

命题 0.5

设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

证明 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x.

(i) 若 $f'(x)=0$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $f'(x)<0$, 则令 $h=\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h}f'(t)\mathrm{d}t=f(x)+\int_x^{x+h}\left[f'(t)-f'(x)\right]\mathrm{d}t+f'(x)h\\
&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f'(x)h=f(x)+\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f'(x)h\\
&=f(x)+\frac{(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1}+f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left[f'(x)-\frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<f(x)\\
\Longleftrightarrow\ & f'(x)\left(-f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).
\end{aligned}$$

从而

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(iii) 若 $f'(x)>0$, 则令 $h=\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}
0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x}f'(t)\mathrm{d}t+f(x)=\int_{x-h}^{x}\left[f'(x)-f'(t)\right]\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h\\
&\leqslant\int_{x-h}^{x}(x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t+f(x)-f'(x)h=\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}+f(x)-f'(x)h
\end{aligned}$$

$$
= \frac{(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha+1} + f(x) - f'(x)\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
$$

于是

$$
\left[f'(x) - \frac{1}{\alpha+1}f'(x)\right]\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < f(x)
$$

$$
\Longleftrightarrow \left(f'(x)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).
$$

从而

$$
|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).
$$

□

例题 0.13 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数的非负函数, 且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$
|f'(x)-f'(y)| \leqslant M|x-y|.
$$

证明: 对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x)$.

证明 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 固定 x. 由 $f\geqslant 0$ 可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$
\int_{x-h}^{x}[f'(x)-f'(t)]\mathrm{d}t = f'(x)h - [f(x)-f(x-h)] \geqslant f'(x)h - f(x).
$$

又由条件可得, 对 $\forall h>0$, 有

$$
\int_{x-h}^{x}|f'(x)-f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant M\int_{x-h}^{x}|x-t|\mathrm{d}t = \frac{M}{2}h^2.
$$

于是对 $\forall h>0$, 有

$$
f'(x)h - f(x) \leqslant \int_{x-h}^{x}[f'(x)-f'(t)]\mathrm{d}t \leqslant \int_{x-h}^{x}|f'(x)-f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{2}h^2.
$$

故对 $\forall h>0$, 都有

$$
\frac{M}{2}h^2 - f'(x)h + f(x) \geqslant 0.
$$

因此

$$
\Delta = (f'(x))^2 - 2Mf(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow (f'(x))^2 \leqslant 2Mf(x).
$$

再由 x 的任意性可知结论成立.

□