0.1 更弱定义的导数

定理 0.1 (最弱递增条件)

1. 设 $f\in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0\in(a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$
则 f 在 $[a,b]$ 递增.
2. 设 $f\in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0\in(a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\tag{1}$$
则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.
3. 设 $f\in C(a,b)$ 满足对任何 $x\in(a,b)$, 都有
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}>0.$$
证明 f 在 (a,b) 严格递增.
4. 设 $f\in C(a,b)$ 满足对任何 $x\in(a,b)$, 都有
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\geqslant 0.$$
证明 f 在 (a,b) 递增.

注 只需证明 $f(b)\geqslant f(a)$ 或 $f(b)>f(a)$ 的原因: 假设 $f(b)\geqslant f(a)$ 或 $f(b)>f(a)$ 已经成立. 任取 $c,d\in(a,b)$ 或 $[a,b]$, 则我们考虑 (c,d) 或 $[c,d]$ 这个区间, 并且已知 f 在 (c,d) 或 $[c,d]$ 上连续且满足上述条件, 于是由假设可知 $f(d)\geqslant f(c)$ 或 $f(d)>f(c)$. 故我们只需证明 $f(b)\geqslant f(a)$ 或 $f(b)>f(a)$ 即可.

证明

1. 只需证明 $f(b)\geqslant f(a)$. 由 f 的连续性和极限保号性, 我们只需证明对充分小的 $\varepsilon>0$, 有 $f(b)\geqslant f(a+\varepsilon)$. 考虑
$$F(x)=f(x)-f(a+\varepsilon)-\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon).$$
则 $F(b)=F(a+\varepsilon)=0$, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\dfrac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$, $\forall x_0\in[a+\varepsilon,b)$. 于是设 F 在 $[a+\varepsilon,b]$ 最大值点为 c,
(i) 当 $c\in[a+\varepsilon,b)$ 时, 则
$$0\geqslant\overline{\lim_{x\to c^+}}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\overline{\lim_{x\to c^+}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}\geqslant-\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}$$
故 $f(b)\geqslant f(a+\varepsilon)$.
(ii) 当 $c=b$ 时, 则对 $\forall x\in[a+\varepsilon,b]$, 都有 $0=F(b)=F(c)\geqslant F(x)$. 从而
$$\begin{aligned}&F(x)=f(x)-f(a+\varepsilon)-\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}(x-a-\varepsilon)\leqslant 0\\ \Rightarrow\ &\frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon}\leqslant\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}\\ \Rightarrow\ &\frac{f(b)-f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon}\geqslant\overline{\lim_{x\to(a+\varepsilon)^+}}\frac{f(x)-f(a+\varepsilon)}{x-a-\varepsilon}>0\\ \Rightarrow\ &f(b)>f(a+\varepsilon)\end{aligned}$$
证毕.
2. 若 f 在 $[a,b]$ 不严格增, 则存在 $[c,d]\subset[a,b]$ 使得 $f(d)=f(c)$, 注意到由第 1 问可知 f 在 $[c,d]$ 递增, 从而只能为常数, 于是 $f(x)\equiv f(c)$. 不妨设 $[c,d]\subset(a,b)$, 否则任取 $[a,b]$ 一个子区间即可. 因此
$$\overline{\lim_{x\to c^+}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=0.$$

这显然和(1)矛盾! 故我们证明了 f 在 $[a,b]$ 严格递增.

3. 对 $[c,d]\subset(a,b)$, 我们断言存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geqslant\varlimsup_{h\to0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}\tag{2}$$
现在我们用 $g(x)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)-f(x)$ 代替 f. 于是考虑 $g\in C^1[c,d]$, $g(d)=g(c)=0$, 此时要证明(2), 就只需证明存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\varlimsup_{h\to0^+}\frac{g(x_1+h)-g(x_1-h)}{2h}\geqslant0\tag{3}$$
若 $g\equiv0$, 已经得到了不等式(3).
若 $t\in(a,b)$ 是 g 的最大值点使得 $g(t)>0$. 取 $k\in(0,g(t))$, 则构造非空有界集
$$U=\{x\in[c,t]:g(x)>k\}.$$
记 $x_1=\inf U$, 则存在 $t_n\in U$, $n\in\mathbb{N}$ 使得
$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$
注意 $x_1\neq c$, 若 $g(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $g>k$, 这和 x_1 是 inf 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $g(x_1)=k$. 注意到
$$\frac{g(x_1+t_n-x_1)-g(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\frac{k-k}{2(t_n-k_1)}=0$$
这就给出了(3).
若 f 有负的最小值 $g(t)<0$. 取 $k\in(g(c),0)$, 构造非空有界集
$$V=\{x\in[t,d]:g(x)<k\}.$$
并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $g(x_1)=k$ 且 $x_1\neq d$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是由
$$\frac{g(x_1+x_1-s_n)-g(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0$$
知(3)成立.
现在由不等式(2)和题目条件就证明了 $f(d)>f(c)$, 从而 f 严格递增.

4. 注意到 $f(x)+\varepsilon x$, $\varepsilon>0$ 满足第 3 问要求, 因此
$$f(y)+\varepsilon y>f(x)+\varepsilon x,\forall b>y>x>a,\varepsilon>0.$$
让 $\varepsilon\to0^+$, 我们有 $f(y)\geqslant f(x)$, 这就证明了 f 在 (a,b) 递增.

□

推论 0.1 (右可导函数非负则递增)

设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且在开区间 (a,b) 右可导. 若 $f'_+(x)\geqslant0,\forall x\in(a,b)$, 证明 f 在 $[a,b]$ 递增. ♡

定理 0.2 (右导数的 Lagrange 中值定理)

设 f 在 (a,b) 右可导且在 $[a,b]$ 上连续, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得
$$f'_+(x_2)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f'_+(x_1).\tag{4}$$
♡

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 不妨设 $f(b)=f(a)=0$, 否则用 $f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f 即可. 如果结论不对, 假设 $f'_+(x)\geqslant0$ 恒成立. 于是由推论 0.1我们知道 f 递增, 又 $f(a)=f(b)=0$, 故 $f\equiv0$, 因此此时仍然有(4)成立, 矛盾! 这就完成了证明.

□

命题 0.1 (右导数连续则原函数可导)

设 f 在 (a,b) 右可导且 f'_+ 在 (a,b) 连续, 证明 f 在 (a,b) 可导且 $f'(x)=f'_+(x), \forall x\in(a,b)$.

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 由右导数的 Lagrange 中值定理, 我们知道对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 都存在 θ_1,θ_2 在 x_1,x_2 之间, 使得

$$f^S(\theta_2)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f^S(\theta_1),$$

让 $x_2\to x_1$, 由右导数的连续性和夹逼准则即可得

$$f'(x_1)=f^S(x_1).$$

这就完成了证明.

□

0.1.1 Schwarz 导数

定义 0.1 (Schwarz 导数)

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, 我们称 f 在 $x_0\in(a,b)$Schwarz 可导, 如果存在极限

$$f^S(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}. \tag{5}$$

如果 f 在 (a,b) 处处 Schwarz 可导, 则称 f 在 (a,b)Schwarz 可导.

笔记 显然 f 在 x_0 可导则必然在 x_0Schwarz 可导且 $f'(x_0)=f^S(x_0)$, 但反之不一定成立.

定理 0.3 (Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b)Schwarz 可导, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$f^S(x_1)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f^S(x_2). \tag{6}$$

笔记 本定理是此类问题的核心定理. 其余结果都是本定理的平凡推论.

证明 和证明 Lagrange 中值定理一样, 我们只需证明 Rolle 中值定理的情况即可. 即不妨设 $f(a)=f(b)=0$, 否则用 $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f 即可.

若 $f\equiv0$, 则结论是显然的. 若 f 有正的最大值, 则设 $c\in(a,b)$ 是 f 的最大值点使得 $f(c)>0$, 取 $k\in(0,f(c))$, 构造非空有界集

$$U=\{x\in[a,c]:f(x)>k\}.$$

于是记 $x_1=\inf U$, 就有 $t_n\in U$, 使得

$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$

注意 $x_1\neq a$ 且若 $f(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $f>k$, 这和 x_1 是 $\inf U$ 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $f(x_1)=k$. 现在

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+t_n-x_1)-f(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(t_n-x_1)}=0.$$

若 f 有负的最小值 $f(c)<0$. 取 $k\in(f(c),0)$, 构造非空有界集

$$V=\{x\in[c,b]:f(x)<k\}.$$

并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $f(x_1)=k$ 且 $x_1\neq b$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+x_1-s_n)-f(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0.$$

考虑 $f(a+b-x)$ 可得 $f^S(x_2) \leqslant 0$, 这就完成了定理的证明. □

命题 0.2

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b)Schwarz 可导, 若 $f^S(x) \geqslant 0, \forall x \in (a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 递增.

证明 对 $\forall [c,d] \subset [a,b]$, 由Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理知存在 $\theta \in (c,d)$ 使得

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} \geqslant f^S(\theta) \geqslant 0,$$

故

$$f(d) \geqslant f(c).$$

这就完成了证明. □

命题 0.3

若 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 有连续的 Schwarz 导数, 则 f 在 (a,b) 可微且

$$f'(x) = f^S(x), \forall x \in (a,b).$$

证明 由Schwarz 导数的 Lagrange 中值定理, 我们知道对 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 都存在 θ_1, θ_2 在 x_1, x_2 之间, 使得

$$f^S(\theta_2) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant f^S(\theta_1),$$

让 $x_2 \to x_1$, 由 Schwarz 导数连续性和夹逼准则即可得

$$f'(x_1) = f^S(x_1).$$

这就完成了证明.

□

例题 0.1 设 $f \in C(a,b)$ 且存在极限:

$$f^{[2]}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}. \tag{7}$$

1. 若 f 在 $x_0 \in (a,b)$ 二阶可导, 则 $f''(x_0) = f^{[2]}(x_0)$.
2. 若 $f^{[2]}(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, 证明 f 为 (a,b) 上的严格上凸函数.
3. 若 $f^{[2]}(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ 且 f 在 (a,b) 是有下界函数, 证明 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在.
4. 若 $f^{[2]}(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, 则 $f(x)$ 为线性函数.

证明

1. 因为 f 在 $x_0 \in (a,b)$ 二阶可导, 所以 f 在 x_0 邻域一阶可导, 所以
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)}{4h^2} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{h\to 0^+} \frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0)}{8h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{2f'(x_0)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\ &= \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{f''(x_0)}{2} = f''(x_0).\end{aligned}$$
2. 对任何 $x \in (a,b)$, 存在充分小的 $\eta > 0$, 只要 $h \in (0,\eta)$, 就有
$$f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h) < 0,$$
即
$$\frac{f(x+2h)+f(x-2h)}{2} < f(x).$$
现在对 $x \in (a,b), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \delta > 0$, 取 $0 < h < \min\left\{\delta, \frac{2\delta}{|y|}\right\}$, 就有
$$f(x) > \frac{f(x+hy)+f(x-hy)}{2}.$$

由定理??知 f 是 (a,b) 上的严格上凸函数.

3. 由命题??和第二问我们知道 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在.
4. **Method 1** 由第二问我们知道 f 在 (a,b) 即凹又凸. 则由命题??知 f 是线性函数.

   Method 2 标准的摄动法, 保持二阶导且不破坏边界条件的最好的振动函数是 $-(x-a)(x-b)$.

   不妨先一般性, 假设 $f\in C[a,b]$, 否则用内闭考虑即可. 我们用 $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f, 从而不妨设 $f(a)=f(b)=0$. 若某个 $x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)>0$, 考虑

$$f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b),$$

   这里 $\varepsilon>0$, 使得

$$f(x_0)+\varepsilon(x_0-a)(x_0-b)>0.$$

   不妨设 x_0 是 f_ε 的最大值点, 现在

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(a)=f_\varepsilon(b)=0,\ f_\varepsilon(x_0)&=\max_{x\in[a,b]}f_\varepsilon(x),\\ f_\varepsilon^{[2]}(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f_\varepsilon(x_0+2h)-2f_\varepsilon(x_0)+f_\varepsilon(x_0-2h)}{4h^2}\\ =\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)+8\varepsilon h^2}{4h^2}\\ =\lim_{h\to0^+}\frac{8\varepsilon h^2}{4h^2}=2\varepsilon>0.\end{aligned}$$

   但是

$$f_\varepsilon^{[2]}(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f_\varepsilon(x_0+2h)-2f_\varepsilon(x_0)+f_\varepsilon(x_0-2h)}{4h^2}\leqslant0.$$

   这就是一个矛盾! 于是我们证明了 $f\leqslant0$. 考虑 $-f$ 可得 $f\equiv0$. 证毕!

□

命题 0.4 (数列内插)

给定实数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 设

$$\sup_{n\geqslant0}|x_n|=M,\ \sup_{n\geqslant0}|x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n|=K,$$

我们断言

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant2\sqrt{MK},\forall n\in\mathbb{N}.$$

证明 事实上当 M 或者 K 为 0 时命题显然成立 ($K=0$ 意味着 x_n 是有界的等差数列, 必然常数列), 因此不妨假设 $M,K>0$. 注意到对 $\forall n\geqslant2$, 我们有

$$\begin{aligned} M\geqslant x_n&=x_0+\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})=x_0+(x_1-x_0)+\sum_{k=2}^n(x_k-x_{k-1})\\ &=x_0+(x_1-x_0)+\sum_{k=2}^n\left[(x_1-x_0)+\sum_{j=1}^{k-1}\left(x_{j+1}-x_j\right)-\left(x_j-x_{j-1}\right)\right]\\ &=x_0+(x_1-x_0)n+\sum_{k=2}^n\sum_{j=1}^{k-1}(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1})\\ &\geqslant-M+(x_1-x_0)n-\sum_{k=2}^n\sum_{j=1}^{k-1}K\\ &=-M+(x_1-x_0)n-\frac{(n-1)n}{2}K,\end{aligned}$$

因此容易看见

$$x_1 - x_0 \leqslant \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K, \forall n \geqslant 1.$$

另外一方面对 $n \geqslant 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
-M \leqslant x_n &= x_0 + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_0 + (x_1 - x_0) + \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= x_0 + (x_1 - x_0) + \sum_{k=2}^{n}\left[(x_1 - x_0) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(x_{j+1} - x_j\right) - \left(x_j - x_{j-1}\right)\right] \\
&= x_0 + (x_1 - x_0)n + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) \\
&\leqslant M + (x_1 - x_0)n + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}K = M + (x_1 - x_0)n + \frac{n(n-1)}{2}K,
\end{aligned}$$

因此

$$-\frac{2M}{n} - \frac{n-1}{2}K \leqslant x_1 - x_0, \forall n \geqslant 1.$$

所以

$$|x_1 - x_0| \leqslant \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K, \forall n \geqslant 1.$$

注意到

$$\frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K - 2\sqrt{MK} = \frac{Kn^2 - (4\sqrt{KM} + K)n + 4M}{2n}. \tag{8}$$

记

$$f(x) \triangleq Kx^2 - (4\sqrt{KM} + K)x + 4M,$$

则 $f(0) = 4M > 0, f(x)$ 的对称轴为 $\frac{4\sqrt{MK} + K}{2K} = 2\sqrt{\frac{M}{K}} + \frac{1}{2} > 0$. 并且 $f(x)$ 的两个零点之差的绝对值为

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{2K} = \frac{\sqrt{K^2 + 8\sqrt{KM}}}{K} = \sqrt{1 + 8\sqrt{\frac{M}{K}}} > 1.$$

故必存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $f(n) \leqslant 0$. 由(8)式知

$$f(n) \leqslant 0 \iff \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K - 2\sqrt{MK} \leqslant 0 \iff \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K \leqslant 2\sqrt{MK}.$$

因此

$$|x_1 - x_0| \leqslant \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K \leqslant 2\sqrt{MK}.$$

类似可证

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant 2\sqrt{MK}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

例题 0.2 若有界函数 f 满足

$$\lim_{h\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0,$$

证明 f 一致连续.

证明 由条件知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, h \in [-\delta, \delta].$$

现在对固定的 $h \in [-\delta, \delta]$, 考虑 $\{f(x+nh)\}_{n=0}^{\infty}$, 我们有

$$\sup_{n\geqslant 0}|f(x+nh)| \leqslant \sup|f|, \quad \sup_{n\geqslant 0}|f(x+(n+2)h) - 2f(x+(n+1)h) + f(x+nh)| \leqslant \varepsilon.$$

由前面的数列内插, 我们有

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon \cdot \sup|f|}, \forall x \in \mathbb{R}, h \in [-\delta, \delta],$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

□