## 0.1 二元运算与同余关系

**定义 0.1**

设 $A$ 是一个集合. $A\times A$ 到 $A$ 的一个映射 $\varphi$, 称为 $A$ 的一个**二元运算**.
若记 $\varphi(a,b)=ab$, 则称 $ab$ 为 $a$ 与 $b$ 的**积**. 若记 $\varphi(a,b)=a+b$, 则称 $a+b$ 为 $a$ 与 $b$ 的**和**.
若 $A$ 上的二元运算 $\varphi(a,b)=ab$ 满足结合律

$$(ab)c=a(bc),\quad \forall a,b,c\in A,$$

则此二元运算称为**结合的**.
若 $A$ 上的二元运算 $\varphi(a,b)=ab$ 满足交换律

$$ab=ba,\quad \forall a,b\in A,$$

则此二元运算称为**交换的**. 一般地, 若 $c,d\in A$ 有 $cd=dc$, 则称 $c$ 与 $d$ 是**交换的**.

**定义 0.2**

设集合 $A$ 有二元运算 $(a,b)\to ab$ 且满足结合律, 则对 $\forall n\in\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ 表示自然数, 即正整数的集合), 定义

$$a^1=a,\quad a^{n+1}=a^n\cdot a,\quad \forall a\in A,$$

$a^n$ 称为 $a$ 的 ***n* 次乘幂**, 也简称 ***n* 次幂**.
在 $A$ 中也可以定义**连乘积**

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_i\right)a_n,\quad a_i\in A, i=1,2,\cdots,n.$$

**命题 0.1**

1. $a^na^m=a^{n+m},(a^m)^n=a^{nm}(\forall a\in A,m,n\in\mathbf{N})$.
2. 若 $a,b\in A$ 且 $ab=ba$, 则 $(ab)^n=a^nb^n(\forall n\in\mathbf{N})$.
3. 若有

$$0=n_0<n_1<\cdots<n_r=n,$$

则

$$\prod_{j=1}^{r}\left(\prod_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}a_k\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

**证明** 证明是显然的.

□

**定义 0.3**

如果将二元运算记为加法且满足结合律, 于是可定义**倍数**与**连加**如下:

$$1\cdot a=a,\quad (n+1)a=na+a,$$
$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)+a_n.$$

**命题 0.2**

1. $na+ma=(n+m)a,\quad n(ma)=(nm)a,\quad \forall a\in A,m,n\in\mathbf{N}$.

2. 若 $a+b=b+a$, 则

$$n(a+b)=na+nb, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

3. 若有

$$0=n_0<n_1<\cdots<n_r=n,$$

则

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

**证明** 证明是显然的.

□

**定义 0.4 ((二元) 关系)**

所谓在集合 $A$ 中定义了二元素间的一个 **(二元) 关系** $R$, 也就是给出了集合 $A\times A$ 中元素的一个性质 $R$, 若 $a,b\in A$, $(a,b)$ 有性质 $R$, 则称 $a$ 与 $b$ 有关系 $R$, 记为 $aRb$.

**笔记** 事实上, 集合 $A$ 中关系 $R$ 可由 $A\times A$ 中子集

$$S \triangleq \{(a,b) \mid a,b\in A, aRb\}$$

来刻画. 即若 $aRb$, 则 $(a,b)\in S$.

反之, 由 $A\times A$ 的一个子集 $S$, 也可确定 $A$ 一个关系 $R$. 即若 $(a,b)\in S$, 则 $aRb$.

**定义 0.5 (等价关系)**

1. 集合 $A$ 中关系若满足以下条件:
   (1) **自反性** $aRa, \forall a\in A$;
   (2) **对称性**若 $aRb$, 则 $bRa$;
   (3) **传递性**若 $aRb, bRc$, 则 $aRc$,
   则称 $R$ 为 $A$ 的一个**等价关系**.
2. 若仍以 $R$ 表示 $A$ 中关系所确定的 $A\times A$ 的子集, 则 $R$ 为等价关系当且仅当下列三个条件同时成立:
   (1) $(a,a)\in R, \forall a\in A$;
   (2) 若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$;
   (3) 若 $(a,b)\in R, (b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$.

**注** 在等价关系定义中的三个条件是互相独立的, 缺一不可.

**定义 0.6 (等价类和代表元素)**

若 $R$ 是集合 $A$ 的一个等价关系且 $a\in A$, 则 $A$ 中所有与 $a$ 有关系 $R$ 的元素集合

$$K_a=\{b\in A \mid bRa\}$$

称为 $a$ 所在的**等价类**, $a$ 称为这个等价类的**代表元素**.

**定义 0.7 (分划/分类)**

集合 $A$ 的一个子集族 $\{A_\alpha\}$ 称为 $A$ 的一个**分划**或**分类**, 如果满足

$$A=\bigcup_{\alpha} A_\alpha, \quad A_\alpha \bigcap A_\beta=\varnothing, \quad 若 \alpha\neq\beta.$$

也称 $A$ 是 $\{A_\alpha\}$ 中**所有不相交的集合的并**或**无交并**.

**定理 0.1**

设 $R$ 是集合 $A$ 的等价关系, 则由所有不同的等价类构成的子集族 $\{K_a\}$ 是 $A$ 的分划.
反之, 若 $\{A_a\}$ 是 $A$ 的分划, 则可在 $A$ 中定义等价关系 $R$,

$$aRb, \quad 若\exists A_\alpha, 使 a, b \in A_\alpha.$$

并且使得每个 $A_a$ 是一等价类.

**证明** 设 $R$ 是 $A$ 的等价关系. 由 $\forall a \in A, aRa$ 知 $a \in K_a$, 于是 $A = \bigcup\limits_a K_a$. 设 $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, 即 $\exists c \in K_a \cap K_b$, 对 $\forall x \in K_a$ 有 $cRa, xRa$, 因而 $xRc$. 又 $cRb$, 故 $xRb$, 即 $x \in K_b$, 从而得 $K_a \subseteq K_b$. 同样可得 $K_b \subseteq K_a$, 故 $K_a = K_b$, 亦即若 $K_a \neq K_b$, 则 $K_a \cap K_b = \varnothing$. 这样就证明了 $\{K_a\}$ 是 $A$ 的分划.

反之, 设 $\{A_\alpha\}$ 是 $A$ 的一个分划. 在 $A$ 中定义关系 $R$,

$$aRb, \quad 若\exists A_\alpha, 使 a, b \in A_\alpha.$$

因 $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, 故对 $\forall a \in A, \exists A_\alpha$, 使 $a \in A_\alpha$, 因此 $a, a \in A_\alpha$, 即 $aRa$. 其次, 若 $aRb$, 即 $\exists A_\alpha$, 使 $a, b \in A_\alpha$. 自然 $b, a \in A_\alpha$, 故 $bRa$. 再次, 若 $aRb, bRc$, 即有 $A_\alpha, A_\beta$, 使 $a, b \in A_\alpha$ 且 $b, c \in A_\beta$, 故 $b \in A_\alpha \cap A_\beta$. 由 $\{A_\alpha\}$ 为 $A$ 的分划知 $A_\alpha = A_\beta$, 因而 $aRc$. 这样就证明了 $R$ 是等价关系. 由 $R$ 的定义知若 $a \in A_\alpha$, 则 $a$ 所在的等价类 $K_a = A_\alpha$. □

**定义 0.8 (商集和自然映射)**

设 $R$ 是集合 $A$ 的等价关系. 以关于 $R$ 的等价类为元素的集合 $\{K_a\}$ 称为 $A$ 对 $R$ 的**商集合**或**商集**. 记为 $A/R$. 由

$$\pi(a) = K_a, \quad \forall a \in A$$

定义的 $A$ 到 $A/R$ 上的映射 $\pi$ 称为 $A$ 到 $A/R$ 上的**自然映射**.

**注** 显然自然映射 $\pi$ 都是满射.

**定理 0.2**

设 $f : A \to B$ 是满映射. 在 $A$ 中定义关系 $R$,

$$aRb, \quad 若 f(a) = f(b),$$

则 $R$ 是 $A$ 的等价关系. 又设 $\pi : A \to A/R$ 为自然映射, 则有 $A/R$ 到 $B$ 上的一一对应 $g$ 满足

$$g\pi = f. \tag{1}$$

即图 1是交换图.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A/R \arrow[dl, "g"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

图 1

**证明** 考虑 $y \in B$ 的原像 $f^{-1}(y)$ 构成的子集族. 显然, $A = \bigcup\limits_{y \in B} f^{-1}(y)$. 又若 $y, z \in B$, $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$, 即 $\exists a \in A$, 使 $f(a) = y, f(a) = z$, 即 $y = z$. 故 $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$, 从而 $\{f^{-1}(y)\}$ 是 $A$ 的一个分划. 于是由定理??知, 在 $A$ 中可定义等价关系 $R : aRb$, 若 $\exists f^{-1}(y)$, 使 $a, b \in f^{-1}(y)$, 即 $f(a) = f(b)$. 由此知定理的第一部分成立.

定义 $A/R$ 到 $B$ 的映射 $g$,

$$g(K_a) = f(a), \quad \forall a \in A.$$

注意到 $A$ 中元素 $a$ 所在等价类 $K_a = f^{-1}(f(a))$, 由于 $K_a = K_b$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$, 故 $g$ 是单射. 又 $f(A) = B$, 故 $g$ 是满射. 因此 $g$ 是一一对应. 由 $\pi$ 的定义知式 (1) 成立.

□

**定义 0.9 (同余关系和同余类)**

设集合中 $A$ 的二元运算, 记作乘法. 若 $A$ 的一个等价关系 $\sim$ 满足

$$\text{若} a \sim b, c \sim d,\ \text{则} ac \sim bd, \forall a, b, c, d \in A.$$

则称 $\sim$ 为 $A$ 的一个**同余关系**. $a \in A$ 的等价类 $K_a$ 此时也称为 $a$ 的**同余类**.

♣

**例题 0.1**

1. 设 $m \in \mathbf{Z}$( 所有整数的集合), $m \neq 0$. 在 $\mathbf{Z}$ 中定义关系

$$a \sim b, \quad \text{若} a \equiv b \pmod m.$$

   易证 $\sim$ 是等价关系且由 $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$ 可得 $a + c \equiv b + d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$. 因而 $\sim$ 对于 $\mathbf{Z}$ 中的加法与乘法都是同余关系.
2. 设 $\mathbf{P}[x]$ 是数域 $\mathbf{P}$ 上一元多项式的集合. 设 $f(x) \in \mathbf{P}[x]$, $f(x) \neq 0$. 在 $\mathbf{P}[x]$ 中定义关系 $\sim$: $g(x) \sim h(x)$, 若 $f(x) \mid (g(x) - h(x))$. 与第一问类似可证 $\sim$ 对 $\mathbf{P}[x]$ 中的加法与乘法都是同余关系.
3. 以 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 表示数域 $\mathbf{P}$ 上所有 $n$ 阶方阵的集合. 方阵的加法与乘法都是 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中的二元运算. 对 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{P}^{n\times n}$, 用 $\mathrm{ent}_{ij}\boldsymbol{A}$, $\mathrm{row}_i\boldsymbol{A}$, $\mathrm{col}_j\boldsymbol{A}$ 和 $\det\boldsymbol{A}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素、$\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行、$\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列和 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中由 $\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{B}$ 确定的关系, 对乘法是同余关系, 但对加法除 $n = 1$ 的情形外不是同余关系.

**定理 0.3**

设集合 $A$ 有二元运算乘法, $\sim$ 是 $A$ 的一个同余关系. 又 $\pi : A \to A/\sim$ 是自然映射, 则在商集合 $A/\sim$ 中可定义二元运算

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in A.$$

♡

**证明** 要证明这个二元运算的良定义性, 只需证由 $\pi(a) = \pi(a_1), \pi(b) = \pi(b_1)$ 可得 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$, 其中, $a, b, a_1, b_1 \in A$. 事实上, 由 $\pi$ 的定义知 $\pi(a) = \pi(a_1)$, 即 $a \sim a_1$, $\pi(b) = \pi(b_1)$, 即 $b \sim b_1$. 因 $\sim$ 是同余关系, 故 $ab \sim a_1b_1$, 所以 $\pi(ab) = \pi(a_1b_1)$.

□