0.1 行列式基本性质

命题 0.1 (行列式计算常识)

(1) $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$; $\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$.

(2) 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转 (**行倒排**)、或左右翻转 (**列倒排**) 分别得到 D_1、D_2; 把 D **逆时针旋转** $90°$、或**顺时针旋转** $90°$ 分别得到 D_3、D_4; 把 D **依副对角线翻转**、或**依主对角线翻转**分别得到 D_5、D_6. 易知

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_5=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}, D_6=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

则一定有

$$D_1=D_2=D_3=D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D,$$
$$D_5=D_6=D.$$

(3) 设 $A=(a_{i,j})$ 为 n 阶复矩阵, 则一定有 $\left|\overline{A}\right|=\overline{|A|}=\overline{\det A}$.

(4) 若 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|B|$ 是 m 阶行列式, 它们的值都不为零, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}.$$

注 实际上, 令 $e_i, i=1,2,\cdots,n$ 分别为第 i 行元素为 1, 其余元素为零的列向量. 则由基本矩阵乘法, 不难发现

$$D_1=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)D, \quad D_2=D(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1).$$

证明 (1) 运用行列式的定义即可得到结论.

(2) $D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{r_i\longleftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\cdots=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{1,n-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-2]{j_i\longleftrightarrow j_{i+1}} (-1)^{n-1+n-2}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}a_{n1}&\cdots&a_{11}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{nn}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_5=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{逆时针旋转}90^\circ}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{11}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{nn}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{列倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

$$D_6=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{顺时针旋转}90^\circ}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行倒排}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

(3) 复数的共轭保持加法和乘法:$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$,$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, 故由行列式的组合定义可得

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}\right|&=\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}\overline{a_{k_11}}\cdot\overline{a_{k_22}}\cdots\overline{a_{k_nn}}\\&=\overline{\sum_{1\le k_1,k_2,\cdots,k_n\le n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}}\\&=\overline{|A|}=\overline{\det A}.\end{aligned}$$

(4) 将 $|A|$ 的第一列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 共换了 m 次; 再将 $|A|$ 的第二列依次和 $|B|$ 的第 m 列, 第 $m-1$ 列,$\cdots$, 第一列对换, 又换了 m 次;$\cdots$. 依次类推, 经过 mn 次对换可将第二个行列式变为第一个行列式. 因此 $|D|=(-1)^{mn}|C|$, 于是由行列式的基本性质可得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}.$$

□

命题 0.2 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 任意的指标 $1\le i\le n$, 以及任意的常数 c, 满足下列条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列是方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列之和, 且 $\boldsymbol{A}$ 的其余列与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对应列完全相同, 则 $f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{B})+f(\boldsymbol{C})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B})=cf(\boldsymbol{A})$;

(3) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{B})=-f(\boldsymbol{A})$;

(4) $f(\boldsymbol{I}_n)=1$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位阵.

求证:$f(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|$.

笔记 这个命题给出了**行列式的刻画**: 在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性, 以及正规性 (即单位矩阵处的取值为 1), 唯一确定了行列式这个函数.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标准单位列向量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\boldsymbol{e}_k,\ j=1,2,\cdots,n.$$

从而由条件 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=f\left(\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_11}\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&=a_{11}f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+a_{21}f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+a_{n1}f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_11}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_11}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_22}\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_11}\left[a_{12}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+a_{22}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)+\cdots+a_{n2}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)\right]\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_11}\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_22}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)=\cdots=\sum_{k_1=1}^{n}a_{k1}\sum_{k_2=1}^{n}a_{k_22}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_nn}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right)\\
&=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{k1}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right)=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}f\left(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n}\right).
\end{aligned}$$

若 $k_i=k_j$,则 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 的第 i 列和第 j 列对换后仍然是 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$. 由条件 (3) 可知,$f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=-f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$, 于是 $f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=0$. 因此在 $f(\boldsymbol{A})$ 的表示式中, 只剩下 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同的项. 通过 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 次相邻对换可将 $(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})$ 变成 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{I}_n$, 故由条件 (3) 和 (4) 可得

$$f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}f(\boldsymbol{I}_n)=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

于是由行列式的组合定义可知

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}f(\boldsymbol{e}_{k_1},\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_n})=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}=|\boldsymbol{A}|.$$

□