0.1 极限问题综合

例题 0.1 设二阶可微函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足

$$f''(x)\leqslant 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

求极限

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}.$$

笔记 本例非常经典,深刻体现了“拉格朗日中值定理”保持阶不变和“和式和积分”转化的思想.

证明 由条件 $f''(x)\leqslant 0$ 可知,f 是上凸函数. 而上凸函数只能在递增、递减、先增后减中发生一个. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 因此 f 一定在 $[1,+\infty)$ 上递增. 再结合 $f''(x)\leqslant 0$ 可知 $f'\geqslant 0$ 且单调递减. 下面来求极限.

由 Lagrange 中值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $\theta_n\in(2n-1,2n)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{f^s(2n)}-\frac{1}{f^s(2n-1)}\right]\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}. \tag{1}$$

由于 $\theta_n\in(2n-1,2n),\forall n\in\mathbb{N}_+$ 且 $f\geqslant 0$ 单调递增,$f'\geqslant 0$ 单调递减, 因此

$$s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)}\leqslant s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}\leqslant s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}. \tag{2}$$

又因为 $\left[\dfrac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-(s+1)f'(x)}{f^{s+2}(x)}\leqslant 0$, 所以 $\dfrac{-f'(x)}{f^{s+1}(x)}$ 单调递减. 从而一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}&\leqslant-\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-1}^{2n}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)\\
&=\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_1^{+\infty}=-\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right]=-\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}&\geqslant-\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{f'(2x)}{f^{s+1}(2x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{2}^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)\\
&=\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_2^{+\infty}=-\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(2)}\right]=-\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

于是利用(3)(4)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}=-\frac{1}{2}. \tag{5}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)}&\leqslant-\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{f'(2x-1)}{f^{s+1}(2x-1)}\mathrm{d}x\right]=-\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{2n-3}^{2n-1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\right]\\
&=-\lim_{s\to 0^+} s\left[\frac{f'(1)}{f^{s+1}(1)}+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\right]=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&=-\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)=\lim_{s\to 0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\Big|_1^{+\infty}\\
&=-\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right]=-\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\lim_{s\to0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} \geqslant -\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x$$
$$= -\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}x = -\lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{f^{s+1}(x)}\mathrm{d}f(x)$$
$$= \lim_{s\to0^+}\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(x)}\bigg|_1^{+\infty} = -\lim_{s\to0^+}\left[\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{sf^s(1)}\right] = -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

于是利用(6)(7)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)} = -\frac{1}{2}. \tag{8}$$

故结合(1)(2)(5)(8)式, 由夹逼准则可得

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \lim_{s\to0^+} s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)} = -\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sup\limits_{x\in[0,1]}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}$.

证明 根据对称性, 不妨设 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 先尝试找到最大值点. 在 $x=0,\frac{1}{2}$ 时代入, 很明显对应的极限是零, 考虑 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 根据等比数列求和公式有

$$\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} = (1-x)^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n)$$

如果 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 已经取定, 则在区间 $\left[\delta,\frac{1}{2}\right]$ 中

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} \leq n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}$$

右端是指数级趋于零的并且上式不依赖于 x, 所以函数会一致趋于零. 因此最大值点应该在 $x=0$ 附近, 近似的有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n) \approx nx(1-x)^n$$

取 $x=\frac{1}{n}$ 显然极限是 $\frac{1}{e}$, 我们猜测这就是答案, 下面开始证明. 首先取 $x=\frac{1}{n}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e}$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sup\limits_{x\in[0,1]}\sum\limits_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} \geq \frac{1}{e}$, 下面估计上极限. 根据对称性, 不妨只考虑 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 对任意 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 取定, 当 $x\in\left[\delta,\frac{1}{2}\right]$ 时总有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} \leq n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}$$

当 $x\in[0,\delta]$ 时, 结合均值不等式有

$$n\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x}((1-x)^n-x^n) \approx \frac{nx(1-x)^n}{1-2\delta} \leq \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-2\delta} \leq \frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}$$

所以可以取 $n>N$ 充分大，使得 $\dfrac{n(1-\delta)^n}{1-\frac{1}{2(1-\delta)}}<\dfrac{1}{e}$，此时便有

$$n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}\Rightarrow\varlimsup_{n\to\infty}n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{e}\frac{1}{1-2\delta}$$

最后，根据 δ 的任意性，可知结论成立. □

例题 0.3 设 $x_n>0,k$ 为正整数，证明: $\varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+k}}{x_n}\ge\dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$ 且常数是最佳的.

笔记 此类问题反证法将会带来一个恒成立的不等式，有很强的效果，所以一般都用反证法，证明的灵感来源于 $k=1$ 时的情况.

证明 设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，采用反证法，则存在 N 使得 $n\ge N$ 时恒成立

$$S_{n+k}\le\lambda(S_n-S_{n-1}),\lambda\in\left[1,\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right)$$

显然 S_n 是单调递增的，如果 S_n 有界，则在不等式两端取极限可知 S_n 收敛到零，矛盾，所以 S_n 严格单调递增趋于正无穷，因此对任意 $n\ge N$ 有 $S_n>S_{n-1}$. 如果已经得到了 $S_n>cS_{n-1}$ 对任意 $n\ge N$ 恒成立，这里 c 是正数，则对任意 $n\ge N$ 有

$$S_{n+k}>cS_{n+k-1},S_{n+k-1}>cS_{n+k-2},\cdots,S_{n+1}>cS_n\Rightarrow S_{n+k}>c^kS_n$$

$$0<S_{n+k}-c^kS_n\le(\lambda-c^k)S_n-\lambda S_{n-1}\Rightarrow S_n>\frac{\lambda}{\lambda-c^k}S_{n-1}$$

这样不等式就加强了，记 $c'=\dfrac{\lambda}{\lambda-c^k}$，我们得到 $S_n>c'S_{n-1}$ 对任意 $n\ge N$ 恒成立. 定义数列 u_n 为 $u_1=1,u_{n+1}=\dfrac{\lambda}{\lambda-u_n^k}$，则重复以上过程可知 $S_n>u_mS_{n-1}$ 对任意 m 以及 $n\ge N$ 都恒成立，所以 u_m 这个数列必须是有界的，下面我们就由此导出矛盾. 因为 $u_{n+1}>u_n\Leftrightarrow(\lambda-u_n^k)u_n<\lambda\Leftrightarrow(\lambda-u_n^k)^ku_n^k<\lambda^k$，由均值不等式有

$$kx^k(\lambda-x^k)^k\le\left(\frac{k\lambda}{k+1}\right)^{k+1}<k\lambda^k\Leftrightarrow\lambda<\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

显然成立，所以 u_m 单调递增，而如果极限存在，则极限点满足方程 $x=\dfrac{\lambda}{\lambda-x^k}\Leftrightarrow x(\lambda-x^k)=\lambda$，这与前面均值不等式导出的结果矛盾，所以 u_m 单调递增趋于正无穷，又与有界性矛盾. 综上结论得证. □

例题 0.4 设 $x_n>0,x_n\to0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=a<0$，证明: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{\ln n}=-1$.

证明 不妨设 $a=-1$，否则将 x_n 换成 x_n^k 即可，取 k 将 a 变成 -1.

设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则 $S_n>0$ 严格单调递增，如果 S_n 收敛，则 $\ln x_n\to-\infty$ 与条件矛盾，所以 S_n 单调递增趋于正无穷.

因为 $\dfrac{\ln x_n}{\ln n}=\dfrac{\ln x_n}{S_n}\dfrac{S_n}{\ln n},\dfrac{\ln x_n}{S_n}\to-1$，所以等价的只要证明 $\dfrac{S_n}{\ln n}\to1$.

条件为 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{S_n}=-1$，设想作为等式，对应着 $S_n-S_{n-1}=e^{-S_n}$ 是一个隐函数类型的递推式，不方便使用，所以考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_{n+1}}{S_{n+1}}\frac{S_{n+1}}{S_n}=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}}{S_n}\right)=-1$$

现在等价的，已知 S_n 单调递增趋于无穷且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln(S_{n+1}-S_n)}{S_n}=-1$，要证明 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}=1$. 由极限定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得任意 $n>N$ 都有 $(-1-\varepsilon)S_n<\ln(S_{n+1}-S_n)<(-1+\varepsilon)S_n$ 也即

$$\left(\frac{1}{e}-\varepsilon\right)^{S_n}+S_n<S_{n+1}<\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^{S_n}+S_n,\forall n\ge N$$

不妨要求 $S_N>1$，考虑

$$f(x)=\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x+x,f'(x)=1+\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x\ln\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)>1-\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)^x>0$$

再定义 $u_N=S_N,u_{n+1}=\left(\dfrac{1}{e}+\varepsilon\right)^{u_n}+u_n$，于是若有 $u_n\le S_n$ 则结合单调性可知 $u_{n+1}=f(u_n)\le f(S_n)=S_{n+1}$，这说

明 $S_n \le u_n$ 对任意 $n \ge N$ 恒成立. 同样考虑

$$g(x) = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x + x, g'(x) = 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^x \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \ge 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) \ln\left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right) > 0$$

再定义 $v_N = S_N, v_{n+1} = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^{v_n} + v_n$, 同样道理 $S_n \ge v_n$ 恒成立, 于是 $\frac{v_n}{\ln n} \le \frac{S_n}{\ln n} \le \frac{u_n}{\ln n}, n \ge N$.

注意 u_n, v_n 具备完全一样的形式, 所以统一的考虑 $a_1 > 1, a_{n+1} = a_n + e^{ca_n}$, 其中 c 在 $\frac{1}{e}$ 附近, 显然这个数列是单调递增趋于正无穷的, 我们用 stolz 公式来计算相应的极限, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-ca_n}}{c^{-a_n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-ca_n}(c^{-(a_{n+1}-a_n)} - 1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{ca_n}}{c^{-e^{ca_n}} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{cx}}{e^{-x\ln c} - 1} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{-x\ln c} - 1} = \frac{1}{-\ln c}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} + \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{e} - \varepsilon)} = \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}$$

这意味着

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} \le \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} \ge \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}, \forall \varepsilon > 0$$

由此可知结论成立. □

例题 0.5 设 $n \in \mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos(2x)} \cdot \sqrt[3]{\cos(3x)} \cdot \cdots \cdot \sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}.$$

解 由 Taylor 公式知

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0.$$

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{x}{k} + o(x), x \to 0.$$

于是

$$\sqrt[k]{\cos x} = \sqrt[k]{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{k} + o(x^2) = 1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2), x \to 0.$$

从而

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\cos kx} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}\right) x^2 + o(x^2), x \to 0.$$

故

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\cos kx}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}\right) x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

□

例题 0.6 计算

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{i}}\right).$$

笔记 注意到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}},$$

对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有

$$\frac{\sqrt{i}}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}$ 中的每一项 $\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}$ 都可以 Taylor 展开.

解 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{i}}{n}+\frac{i}{n^2}+O\left(\frac{i\sqrt{i}}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left[n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i}{n^2}+nO\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]\\&=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n^2}+\frac{n+1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

□

例题 0.7 设 $f\in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

笔记 注意 $\frac{2k}{2n-1},\frac{2k-1}{2n-1}\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right)&=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{2n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right)\\&\to\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,n\to\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n-1}\right)&=\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{2k}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right)\\&=\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{2k}{2n-1}\right)-\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n-1}\right)\\&\to\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,n\to\infty.\end{aligned}$$

故由子列极限命题 (b) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

□

例题 0.8 设 $x_{n+1}=x_n-x_n^3, x_1\in\mathbb{R}$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛性.

笔记 因为递推函数 $g(x)=x(1-x^2)$ 关于原点对称, 而 $\{x_n\}$ 的敛散性只由 x_1 决定, 所以我们只需要考虑 $x_1>0$ 的情况即可, 由于 $g(x)$ 关于原点对称, 故 $x_1<0$ 的情况和 $x_1>0$ 的情况类似. 因此我们可以直接考虑数列 $\{|x_n|\}$. 这

样能避免很多分类讨论. 注意这个递推函数 $g(x)$ 只有一个不动点 $x=0$.

如果不加绝对值, 原递推函数的蛛网图会比较杂乱, 加上绝对值后讨论会比较清晰. 实际上, 通过蛛网图分析, 也能得到使得 $\{x_n\}$ 发散的 x_1 的临界点满足 $g(x_1)=x_2, g(x_2)=x_1$, 即 $g(g(x_1))=x_1$. 于是就有

$$-x_1^6+3x_1^4-3x_1^2+2=0. \tag{9}$$

但是当 $x_1=\pm1,\pm2$ 上式不成立, 故上述方程没有有理根. 令 $t=x_1^2$, 则上式可化为

$$-t^3+3t^2-3t+2=0.$$

当 $t=2$ 时, 上式成立. 故上式可化为

$$(t-2)(-t^2+t-1)=0.$$

因此上式只有一个实根 $t=2$, 即(9)式只有当 $x_1^2=2$ 时才有实根. 故(9)式只有两个实根 $x_1=\pm\sqrt{2}$.

考虑 $|x_{n+1}|=|x_n-x_n^3|=|x_n||1-x_n^2|$, 记 $f(x)=x|1-x^2|$, 则 $f(x)$ 有两个不动点 $x=\pm\sqrt{2}$.

证明 考虑 $|x_{n+1}|=|x_n-x_n^3|=|x_n||1-x_n^2|$, 则

(1) 当 $|x_1|>\sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}|=|x_n||x_n^2-1|\geqslant|x_n|>\sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递增, 且有下界 $\sqrt{2}$. 而 f 没有大于 $\sqrt{2}$ 的不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$.

(2) 当 $|x_1|\leqslant\sqrt{2}$ 时, 则 $|x_{n+1}|=|x_n||x_n^2-1|\leqslant|x_n|\leqslant\sqrt{2}$. 故此时 $\{|x_n|\}$ 递减, 且有下界 $\sqrt{2}$. 于是 $A\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在. 对 $|x_{n+1}|=|x_n||x_n^2-1|$ 两边同时取极限得 $A=0$ 或 $\sqrt{2}$.

(i) 若 $A=0$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=A=0$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(ii) 若 $A=\sqrt{2}$, 则由 $\{|x_n|\}$ 递减, 且 $|x_n|\leqslant\sqrt{2}$ 知 $\sqrt{2}=\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|\leqslant|x_n|\leqslant\sqrt{2}\Rightarrow|x_n|=\sqrt{2}, n=1,2,\cdots$. 此时 $x_1=\pm\sqrt{2}$, 再代入 $x_{n+1}=x_n-x_n^3$ 得 $x_n=(-1)^n x_1, n=2,3,\cdots$. 故此时 $\{x_n\}$ 发散.

综上

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\text{发散} & ,|x_1|\geqslant\sqrt{2}\\ 0 & ,|x_1|<\sqrt{2}\end{cases}.$$

□

例题 0.9 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$$

设递推

$$x_1\in[a,b], x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n)), n=1,2,\cdots$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明 由于 $a\leqslant f(x)\leqslant b$, 因此归纳易得 $a\leqslant x_n\leqslant b$. 令 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{2}$, 则

$$g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(y)-f(x)]}{2}\geqslant0,\forall y\geqslant x.$$

由命题可知递增递推数列 $\{x_n\}$ 一定单调, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. □

例题 0.10 设 $f(x)\in C[0,1], f(x)>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx}=\max_{[0,1]}f.$$

笔记 回顾例题??和 命题??. 因此我们只需证明命题??的反向, 再结合例题??就能得证. 但是反向 Stolz 定理一般不会直接应用, 因此我们可以尝试利用单调有界定理证明比值极限存在, 再利用命题??就能直接得证.

实际上, 只要证明了单调性, 就能利用反向 Stolz 定理证明命题??的反向也成立, 再利用例题??就能得到结论.

证明 注意到

$$\frac{\int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}\Longleftrightarrow\int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{10}$$

由 Cauchy 不等式知

$$\int_0^1 f^{n+2}(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f^{\frac{n+2}{2}}(x) f^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

故(10)式成立, 即 $\left\{\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 单调递增. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 由例题**??**可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}=\max_{[0,1]} f.$$

再根据命题**??**可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x}=\max_{[0,1]} f.$$

□

例题 0.11

1. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足
$$x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<2,\ n=1,2,\cdots$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.
2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足
$$a_{n+1}+\frac{4}{a_n}<4,\ n=1,2,\cdots$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求极限.
3. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足
$$x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}<3,\ n=1,2,\cdots$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.
4. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足
$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1,\ n=1,2,\cdots$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.

笔记 此类问题其实就是把 x_{n+1},x_n 部分全部换成 x, 数字部分往往是 x 部分的一个最值, 从把这个数字用不等式放缩为数列来得到估计.

证明

1. 由均值不等式可知 $x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<2\leqslant x_{n+1}+\frac{1}{x_{n+1}}\Rightarrow x_{n+1}\geqslant x_n$. 并且 $x_n<2-\frac{1}{x_{n+1}}<2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\triangleq x$ 存在. 于是 $2\leqslant x+\frac{1}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\right)\leqslant 2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=1$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.
2.
3.
4.

□

例题 0.12

证明

□