0.1 可积函数与连续函数的关系

引理 0.1

设 $f(x)$ 在 E 上可积, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 都存在 E 上的简单函数 $\varphi(x)$ 使得

$$\int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

此时称 $f(x)$ 可由 $\varphi(x)$ **平均逼近**.

证明 记 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$. 由非负可测函数积分的定义 (上确界的定义) 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在非负简单函数 $\varphi^+\leqslant f^+,\varphi^-\leqslant f^-$ 使得

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E\varphi^+(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x-\int_E\varphi^-(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$, 则 $\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数, 且

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x&=\int_E\left|\left[f^+(x)-f^-(x)\right]-\left[\varphi^+(x)-\varphi^-(x)\right]\right|\\&\leqslant\int_E|f^+(x)-\varphi^+(x)|\mathrm{d}x+\int_E|f^-(x)-\varphi^-(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_E[f^+(x)-\varphi^+(x)]\mathrm{d}x+\int_E[f^-(x)-\varphi^-(x)]\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故引理得证. □

定理 0.1

若 $f\in L(E)$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

注 上述事实表明, 若 $f\in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 f 的分解:

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x),\quad x\in E,$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$|f_2(x)|$ 在 E 上的积分小于 ε. 即**可积函数可以被 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数逼近.**

证明 由于 $f\in L(E)$, 故由引理 0.1可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $|\varphi(x)|\leqslant M$, 根据推论**??**可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得 $|g(x)|\leqslant M(x\in\mathbb{R}^n)$, 且有

$$m(\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{4M},$$

从而可得

$$\begin{aligned}\int_E|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x&=\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|=0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\{x\in E:|\varphi(x)-g(x)|>0\}}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant 2Mm(\{x:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

最后, 我们有

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x + \int_E |\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

推论 0.1

设 $f \in L(E)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

(i)

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x = 0;$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

♡

证明

□

推论 0.2

设 $f \in L([a,b])$, 则存在其支集在 (a,b) 内的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

(i)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} |f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x = 0;$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

♡

证明

□

例题 0.1 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$. 若对一切 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x)=0$,a. e. $x \in \mathbb{R}^n$.

证明 采用反证法. 不妨假设 $f(x)$ 在有界正测集 E 上有 $0<f(x)$, 则可作具有紧支集的连续函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x = 0,$$
$$|\varphi_k(x)| \leqslant 1 \quad (k=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \chi_E(x), \quad \text{a. e. } x \in E.$$

由于 $|f(x)\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|, x \in E$, 故知

$$\begin{aligned} 0 < \int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

矛盾. □

例题 0.2 设 $f \in L([a,b])$. 若对其支集在 (a,b) 内且可微的任一函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_{[a,b]} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x)=c$(常数),a. e. $x \in [a,b]$.

证明 对任意的支集在 (a,b) 内的连续函数 $g(x)$, 作 $h(x)$: 支集在 (a,b) 内的连续函数, 且满足 $\int_{[a,b]} h(x)\mathrm{d}x = 1$. 令

$$\varphi(x) = \int_{[a,x]} g(t)\mathrm{d}t - \int_{[a,x]} h(t)\mathrm{d}t \cdot \int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

易知 $\varphi(x)$ 的支集在 (a,b) 内, 且有

$$\varphi'(x) = g(x) - h(x) \int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

从而由题设可得

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{[a,b]} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x) \left(g(x) - h(x) \int_{[a,b]} g(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{[a,b]} f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_{[a,b]} f(x)h(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{[a,b]} \left(f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)\mathrm{d}t \right) g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{a. e. } x \in [a,b],$$

即得所证. □