0.1 基本定理

常见的反例:$f(x)=x^m sin\frac{1}{x^n}$.

定理 0.1 (Leibniz 公式)

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

例题 0.1 设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 中且 $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$.

笔记 将极限定义中的 ε,δ 适当地替换成 $\frac{1}{n},\frac{1}{N}$ 往往更方便我们分析问题和书写过程.

证明 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 则 $x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=x\left\{\frac{1}{x}\right\}$.

对任意 $\varepsilon>0$, 依据极限定义, 存在 $\delta>0$ 使得任意 $x\in(0,\delta)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

取充分大的正整数 N 使得 $\frac{1}{N}<\delta$, 则任意 $x\in\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

考虑函数 $x\left\{\frac{1}{x}\right\}$ 在区间 $\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)$ 中的值域, 也就是连续函数

$$g(u)=\frac{u-[u]}{u}=\frac{u-N}{u},u\in(N,N+1)$$

的值域, 考虑端点处的极限可知 $g(u)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 且严格单调递增. 所以对任意 $y\in\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 都存在 $x\in\left(\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}\right)\subset(0,\delta)$ 使得 $\frac{1}{x}=g^{-1}(y)\in(N,N+1)$, 即 $y=g(\frac{1}{x})=x\left\{\frac{1}{x}\right\}$, 故 $|f(y)|=\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right|<\varepsilon$.

也就是说, 任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得任意 $y\in\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$, 都有 $|f(y)|<\varepsilon$, 结论得证. □

例题 0.2

证明

□