

0.1 覆盖定理

定理 0.1 (覆盖定理)

1. 数域上 n 维线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间之并.
2. 域 \mathbb{F} 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间之并.
3. 域 \mathbb{F} 上无限维线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间之并.



注 全空间和空集称作平方子空间, 不是平凡子空间的线性空间称为非平凡子空间.



笔记 对于数域上的有限维线性空间, 我们给一个简单的方法, 比丘维声等更简单.

证明

1. 设 $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, 其中 $n \geq 2, V_i$ 都是非平凡子空间. 考虑 V 的基 e_1, e_2, \dots, e_n 和一组向量

$$\alpha_i = e_1 + ie_2 + i^2e_3 + \dots + i^{n-1}e_n, i = 1, 2, \dots.$$

从而

$$(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_1^{n-1} & i_2^{n-1} & \dots & i_n^{n-1} \end{pmatrix}, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}.$$

由 Vandermonde 行列式的性质, 上面这组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ 中任何 n 个都线性无关. 而其中必有无限个 α_i 落入某个题设 V 的某个非平凡子空间 V_i 中, 从而这个子空间至少是 n 维的, 这和它是非平凡子空间矛盾!

2. 设 $V = V_1 \cup V_2$, V_1, V_2 都是 V 的非平凡不变子空间. 则存在 $v_1 \in V_1 \setminus V_2, v_2 \in V_2 \setminus V_1$. 注意到

$$v_1 + v_2 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_1, v_1 + v_2 \in V_2 \Rightarrow v_1 \in V_2,$$

从而

$$v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了域 \mathbb{F} 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间之并.

3. 若 $V_i \subset V, i = 1, 2, \dots, n$ 是非平凡子空间. 我们归纳证明

$$V \neq \bigcup_{i=1}^n V_i. \quad (1)$$

当 $n = 1$ 显然有 (1) 成立. 假设对 n 有 (1) 成立, 当 $n + 1$ 时, 由归纳假设取 $\alpha \in V \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right)$.

如果 $\alpha \notin V_{n+1}$, 则 (1) 对 $n + 1$ 已经成立. - 若 $\alpha \in V_{n+1}$, 由 V_{n+1} 非平凡, 存在 $\beta \in V \setminus V_{n+1}$. 注意到

$$S = \{t\alpha + \beta : t \in \mathbb{F}\} \subset V \setminus V_{n+1},$$

这是因为若某个 $t\alpha + \beta \in V_{n+1}$ 可推出 $\beta \in V_{n+1}$ 而矛盾!. 现在若有 $t_1\alpha + \beta, t_2\alpha + \beta$ 属于同一个 $V_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则

$$t_1\alpha + \beta - (t_2\alpha + \beta) = (t_1 - t_2)\alpha \in V_j,$$

即 $t_1 = t_2$. 现在 S 中向量有无穷多个, 所以必然有一个不落在 $\bigcup_{j=1}^n V_j$, 自然也不落在 $\bigcup_{j=1}^{n+1} V_j$, 这就证明了 (1) 对 $n + 1$ 也成立!. 至此我们完成了证明.

□

例题 0.1 设 V 是有限维线性空间, A_1, A_2, \dots, A_s 是 V 上两两不同线性变换, 则 $\exists \alpha \in V$, 使 $A_1\alpha, A_2\alpha, \dots, A_s\alpha$ 两两不同.

证明 考虑 $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker}(A_j - A_i)$, 显然 $\text{Ker}(A_j - A_i) \neq V, \emptyset$. 故由覆盖定理知, 我们有 $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker}(A_j - A_i) \neq V$. 因此 $\exists \alpha \in V \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker}(A_j - A_i)$, 此时

$$(A_j - A_i)\alpha \neq 0 \iff A_i\alpha \neq A_j\alpha, 1 \leq i < j \leq n.$$

□

例题 0.2 设 T 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的线性变换且 $T(AB) = T(A)T(B), T(AB) = T(B)T(A)$ 必有一个成立. 证明: 要么对所有 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都有 $T(AB) = T(A)T(B)$, 要么对所有 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都有 $T(AB) = T(B)T(A)$.

证明 对 $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 考虑

$$V_A = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : T(AB) = T(B)T(A)\};$$

$$V'_A = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : T(AB) = T(A)T(B)\},$$

则有 $\mathbb{R}^{n \times n} = V_A \cup V'_A$. 由覆盖定理, 我们有 $\mathbb{R}^{n \times n} = V_A$ 或者 $\mathbb{R}^{n \times n} = V'_A$. 再由 A 的任意性可知结论成立.

□

定义 0.1

设 V 是域 \mathbb{F} 上的有限维线性空间, $v \in V, A$ 是 V 上线性变换. 记 $m_v \in \mathbb{F}[x]$ 是 $m_v(A)v = 0$ 成立的最低次的首一多项式, 我们叫 m_v 为 v 的极小多项式.

♣

命题 0.1

设 V 是域 \mathbb{F} 上的有限维线性空间, $v \in V, A$ 是 V 上线性变换, m_v 为 v 的极小多项式. 若 $m \in \mathbb{F}[x]$, 且 $m(A)v = 0$, 则必有 $m_v \mid m$.

♠

证明 由带余除法可知, 存在 $q, r \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg r < \deg m_v$, 使得 $m = qm_v + r$. 从而

$$0 = m(A)v = q(A)m_v(A)v + r(A)v = r(A)v.$$

于是 $r \equiv 0$, 否则与 m_v 是 v 的极小多项式矛盾! 故 $m_v \mid m$.

□

例题 0.3 设 V 是域 \mathbb{F} 上的有限维线性空间, $v \in V, A$ 是 V 上线性变换. 记 $m_v \in \mathbb{F}[x]$ 是 $m_v(A)v = 0$ 成立的最低次的首一多项式, 我们叫 m_v 为 v 的极小多项式. 证明: 存在 $v \in V$ 使得 v 的极小多项式恰好是 A 的极小多项式.

证明 设 $m \in \mathbb{F}[x]$ 是 A 的极小多项式, 那么

$$m(A)v = 0, \forall v \in V$$

证法一: 反证, 假设对 $\forall v \in V$, 都有 $m_v(x) \neq m(x)$. 又由命题 0.1 知 $m_v \mid m$. 因此 $m_v(x)(v \in V)$ 都是 $m(x)$ 的首一真因式. 考虑 m 的所有首一真因式

$$m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{F}[x], N \in \mathbb{N},$$

则对 $\forall v \in V$, 都有 $m_v \in \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$. 考虑

$$V_i \triangleq \{v \in V : m_i(A)v = 0\}, i = 1, 2, \dots, N.$$

对 $\forall v_0 \in V$, 由于 $m_{v_0}(x)$ 都是 $m(x)$ 的首一真因式, 故存在 $i_0 \in [1, N] \cap \mathbb{N}$, 使得 $m_{v_0} = m_{i_0}$. 从而 $m_{i_0}(A)v_0 = 0$, 于是 $v_0 \in V_{i_0}$. 因此 $V \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$. 故 $V = \bigcup_{i=1}^N V_i$, 于是由覆盖定理, 我们有某个 i 使得 $V_i = V$, 故

$$m_i(A)v = 0, \forall v \in V.$$

因此 $m_i(A) = 0$. 这意味着 $m \mid m_i$, 故 $m = m_i$. 这与 m_i 是 m 的真因式矛盾!

□

命题 0.2

设 V 是域 \mathbb{F} 上的有限维线性空间, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 V 的子空间. 证明存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

♣

证明 若 $|\Lambda| < \infty$, 则已经得证明. 若 $|\Lambda| = \infty$, 取 V_{α_1} , 若

$$\dim V_{\alpha_1} = \dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

这已经得证.

若

$$\dim V_{\alpha_1} > \dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

先证存在 $\alpha_2 \in \Lambda \setminus \{\alpha_1\}$, 使得

$$V_{\alpha_1} \bigcap V_{\alpha_2} \subset V_{\alpha_1}.$$

假设对任何 $\alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_1\}$, 我们有

$$V_{\alpha_1} \bigcap V_\alpha = V_{\alpha_1} \implies \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = V_{\alpha_1} \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_1\}} V_\alpha \right) = V_{\alpha_1}.$$

则

$$\dim V_{\alpha_1} = \dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

矛盾! 故存在 $\alpha_2 \in \Lambda \setminus \{\alpha_1\}$, 使得

$$V_{\alpha_1} \bigcap V_{\alpha_2} \subset V_{\alpha_1}.$$

从而

$$\dim(V_{\alpha_1} \bigcap V_{\alpha_2}) < \dim(V_{\alpha_1})$$

此时要么

$$\dim(V_{\alpha_1} \bigcap V_{\alpha_2}) > \dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

要么

$$\dim(V_{\alpha_1} \bigcap V_{\alpha_2}) = \dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

因此我们可以继续讨论 $\alpha_3 \in \Lambda \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, 依次下去. 可以得到一个严格递减正整数列 $\left\{ \dim \bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i} \right\}$, 满足

$$\dim \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \leq \dim \bigcap_{i=1}^m V_{\alpha_i} \leq \dim V_{\alpha_1}, \dim \bigcap_{i=1}^m V_{\alpha_i} \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.$$

因此严格递减正整数列 $\left\{ \dim \bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i} \right\}$ 只能有限项, 因此这样的操作会经过有限次而停止. 于是我们知道存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha.$$

□

例题 0.4 设 P 为数域, τ 为 $P^{n \times n}$ 上的线性变换, 满足条件: 对任意固定的 $A, B \in P^{n \times n}$, $\tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$ 或 $\tau(AB) = \tau(B)\tau(A)$ 至少有一个成立, 证明: 要么对所有的 $A, B \in P^{n \times n}$, $\tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$, 要么对所有的 $A, B \in P^{n \times n}$, $\tau(AB) =$

$\tau(B)\tau(A)$.

证明 对 $\forall A \in P^{n \times n}$, 记

$$U_A \triangleq \{X : \tau(AX) = \tau(A)\tau(X)\}, \quad U'_A \triangleq \{X : \tau(AX) = \tau(X)\tau(A)\},$$

则由条件知

$$P^{n \times n} = U_A \cup U'_A.$$

从而 U_A, U'_A 都不是非平凡子空间, 否则与覆盖定理矛盾! 因此对 $\forall A \in P^{n \times n}$, 要么 $U_A = P^{n \times n}$, 要么 $U'_A = P^{n \times n}$. 再记

$$W_1 = \{A : U_A = P^{n \times n}\}, \quad W_2 = \{A : U'_A = P^{n \times n}\},$$

则

$$P^{n \times n} = W_1 \cup W_2.$$

于是 W_1, W_2 都不是非平凡子空间, 否则与覆盖定理矛盾! 故要么 $W_1 = P^{n \times n}$, 要么 $W_2 = P^{n \times n}$. 即

要么对 $\forall A \in P^{n \times n}$, 都有 $U_A = P^{n \times n}$;

要么对 $\forall A \in P^{n \times n}$, 都有 $U'_A = P^{n \times n}$.

也即

要么对 $\forall A, B \in P^{n \times n}$, 都有 $\tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$;

要么对 $\forall A, B \in P^{n \times n}$, 都有 $\tau(AB) = \tau(B)\tau(A)$.

□