

## 0.1 由乘法交换性诱导的同时性质

### 命题 0.1 (矩阵乘法可交换的基本性质)

若两个矩阵或线性变换  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则有  $(AB)^m = A^m B^m$ ,  $f(A)g(B) = g(B)f(A)$  以及二项式定理

$$(A + B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} B + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + B^m$$

等成立, 其中  $m \geq 1$ ,  $f(x), g(x)$  为多项式.

特别地, 一个矩阵或线性变换  $A$  一定与其自身可交换, 从而也满足  $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ , 其中  $f(x), g(x)$  为多项式.

**证明** 证明是显然的. □

### 0.1.1 特征子空间互为不变子空间

#### 命题 0.2 (特征子空间互为不变子空间)

1. 设  $\varphi, \psi$  是复线性空间  $V$  上乘法可交换的线性变换, 即  $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 求证:  $\varphi$  的特征子空间是  $\psi$  的不变子空间,  $\psi$  的特征子空间是  $\varphi$  的不变子空间.
2. 若  $n$  阶复矩阵  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则  $A, B$  的特征子空间互为不变子空间.

**注** 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如,  $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 显然  $A, B$  乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上,  $B$  在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是  $\pm i$ ), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域  $\mathbb{F}$  上, 我们必须假设  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中.

**证明**

1. 由代数基本定理以及线性方程组的求解理论可知,  $n(n \geq 1)$  维复线性空间上的线性变换或  $n$  阶复矩阵至少有一个特征值和特征向量. 任取线性变换  $\varphi$  的一个特征值  $\lambda_0$ , 设  $V_0$  是特征值  $\lambda_0$  的特征子空间, 则对任意的  $\alpha \in V_0$ , 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即  $\psi(\alpha) \in V_0$ , 因此  $V_0$  是  $\psi$  的不变子空间. 同理可证  $\psi$  的特征子空间是  $\varphi$  的不变子空间.

2. □

#### 命题 0.3

设  $V$  为  $n$  维复线性空间,  $S$  是  $\mathcal{L}(V)$  的非空子集, 满足:  $S$  中的全体线性变换没有非平凡的公共不变子空间. 设线性变换  $\varphi$  与  $S$  中任一线性变换乘法均可交换, 证明:  $\varphi$  是纯量变换.

**证明** 任取  $\varphi$  的特征值  $\lambda_0$  及其特征子空间  $V_0$ . 任取  $\psi \in S$ , 则  $\varphi\psi = \psi\varphi$ , 由命题 0.2 可知  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间, 从而是  $S$  中全体线性变换的公共不变子空间. 又  $V_0 \neq 0$  (特征向量均非零), 故  $V_0 = V$ , 从而  $\varphi = \lambda_0 I_V$  为纯量变换. □

## 0.1.2 有公共的特征向量

## 命题 0.4

1. 设  $\varphi, \psi$  是复线性空间  $V$  上乘法可交换的线性变换, 求证:  $\varphi, \psi$  至少有一个公共的 (复) 特征向量.
2. 若  $n$  阶复矩阵  $A, B$  乘法可交换, 即  $AB = BA$ , 则  $A, B$  至少有一个公共的 (复) 特征向量.

**注** 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如,  $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 显然  $A, B$  乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上,  $B$  在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是  $\pm i$ ), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域  $\mathbb{F}$  上, 我们必须假设  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中.

**证明**

1. 任取  $\varphi$  的特征值  $\lambda_0$  及其特征子空间  $V_0$ , 由命题 0.2 可知,  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间. 将线性变换  $\psi$  限制在  $V_0$  上, 由于  $V_0$  是维数大于零的复线性空间, 故由命题 ?? 可知  $\psi|_{V_0}$  至少有一个特征值  $\mu_0$  及其特征向量  $\alpha \in V_0$ , 从而  $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$ , 于是  $\alpha$  就是  $\varphi, \psi$  的公共特征向量.
- 2.

□

## 命题 0.5

1. 设  $\varphi, \psi$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的乘法可交换的线性变换, 且  $\varphi, \psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $\varphi, \psi$  的特征子空间互为不变子空间, 并且  $\varphi, \psi$  至少有一个公共的特征向量.
2. 若数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A, B$  乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则  $A, B$  的特征子空间互为不变子空间, 并且  $A, B$  在  $\mathbb{F}^n$  中至少有一个公共的特征向量.

**证明**

1. 由线性方程组的求解理论可知, 若数域  $\mathbb{F}$  上的线性变换或  $\mathbb{F}$  上的矩阵在  $\mathbb{F}$  中有一个特征值, 则在  $\mathbb{F}$  上的线性空间或  $\mathbb{F}$  上的列向量空间中必存在对应的特征向量. 任取线性变换  $\varphi$  的一个特征值  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ , 设  $V_0$  是特征值  $\lambda_0$  的特征子空间, 则对任意的  $\alpha \in V_0$ , 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即  $\psi(\alpha) \in V_0$ , 因此  $V_0$  是  $\psi$ -不变子空间. 取  $V_0$  的一组基并扩张为  $V$  的一组基, 则  $\psi$  在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  是  $\psi|_{V_0}$  在给定基下的表示矩阵, 于是  $|\lambda I_V - \psi| = |\lambda I - A||\lambda I - B|$ . 因为  $\psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故  $A$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 于是  $\psi|_{V_0}$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中. 任取  $\psi|_{V_0}$  的一个特征值  $\mu_0 \in \mathbb{F}$  及其特征向量  $\alpha \in V_0$ , 则  $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$ , 于是  $\alpha$  就是  $\varphi, \psi$  的公共特征向量.

2.

□

## 0.1.3 可同时上三角化

## 命题 0.6 (矩阵的上三角化)

1. 设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $A$  在  $\mathbb{F}$  上可上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  是上三角矩阵.
2. 设数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是上三角矩阵.

**证明**

1. 对阶数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对  $n - 1$  阶矩阵结论成立, 现对  $n$  阶矩阵  $A$  进行证明. 设  $\lambda_1 \in \mathbb{F}$  是  $A$  的一个特征值, 则由线性方程组的求解理论可知, 存在特征向量  $e_1 \in \mathbb{F}^n$ , 使得  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ . 由基扩张定理, 可将  $e_1$  扩张为  $\mathbb{F}^n$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 于是

$$(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix},$$

其中  $A_1$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶矩阵. 令  $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 则  $P$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且由上式可得  $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ , 即  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ . 由此可得  $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I_{n-1} - A_1|$ , 又  $A$  的特征值全在  $\mathbb{F}$  中, 从而  $A_1$  的特征值也全在  $\mathbb{F}$  中, 故由归纳假设, 存在  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}A_1Q$  是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则  $R$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵.

2.

□

#### 命题 0.7

1. 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 满足:  $AB = BA$  且  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证:  $A, B$  在  $\mathbb{F}$  上可同时上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.
2. 设数域  $\mathbb{F}$  上线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi, \psi$  乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是上三角矩阵.

#### 证明

1. 对阶数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对  $n - 1$  阶矩阵结论成立, 现对  $n$  阶矩阵进行证明. 因为  $AB = BA$  且  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故由命题 0.5 可知,  $A, B$  有公共的特征向量  $e_1 \in \mathbb{F}^n$ , 不妨设

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_1 = \mu_1 e_1,$$

其中  $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{F}$  分别是  $A, B$  的特征值. 由基扩张定理, 可将  $e_1$  扩张为  $\mathbb{F}^n$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . 令  $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 则  $P$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 从而有

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \\ B(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow BP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $A_1, B_1$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n - 1$  阶矩阵. 由  $AB = BA$  及 (1) 式可得到

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) &= P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 A_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而  $A_1 B_1 = B_1 A_1$ . 又由 (1) 式可得

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - A_1|, \quad |\lambda I_n - B| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - B_1|.$$

因此  $A_1, B_1$  的特征值也是  $A, B$  的特征值. 又由于  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故  $A_1, B_1$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中. 故由归纳假设, 存在  $\mathbb{F}$  上的  $n-1$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}A_1Q$  和  $Q^{-1}B_1Q$  都是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则  $R$  是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶可逆矩阵, 且

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}, \\ R^{-1}BR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

都是上三角矩阵.

2.

□

**命题 0.8 (一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化)**

给定域  $\mathbb{F}$  和指标集  $\Lambda$ , 设  $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$  且两两可交换且特征值都属于  $\mathbb{F}$ , 则存在可逆矩阵  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是上三角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

▲

**证明** 若  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 都有  $A_\lambda$  是数量矩阵, 此时结论显然成立.

任取一个非数量矩阵  $A_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 再任取  $A_1$  的一个特征子空间  $V_1$ , 则  $1 \leq \dim V_1 < n$ , 否则  $A_1$  就是纯量阵. 由命题 0.2 可知,  $V_1$  是  $A_\lambda$ -不变子空间,  $\forall \lambda \in \Lambda$ . 因此可考虑线性变换  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ . 下对矩阵阶数进行归纳证明.

当  $n=1$  时, 结论显然成立. 假设命题对小于等于  $n-1$  的情况都成立, 考虑  $n$  的情形.

注意到  $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换, 故由归纳假设可知, 存在  $V_1$  的一组基, 使  $A_\lambda|_{V_1}$  在这组基下有上三角表示矩阵  $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ . 将这组基扩充为  $V$  的一组基, 于是在新的基下,  $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$  有表示矩阵  $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$ .

又由于  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换, 故对  $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ , 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda \tilde{A}_\mu & * \\ O & \tilde{C}_\lambda \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\lambda & * \\ O & \tilde{C}_\mu \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即  $\tilde{A}_\lambda, \tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$  两两乘法可交换. 从而由归纳假设可知, 对  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 存在可逆阵  $\tilde{P}_\lambda$ , 使得  $(\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$  是上三角阵.

取  $P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 则此时对  $\forall \lambda \in \Lambda$ , 就有

$$P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix}.$$

而  $\tilde{A}_\lambda, (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$  都是上三角阵, 故  $P^{-1}A_\lambda P$  也是上三角阵. 因此由数学归纳法可知, 结论成立.

□

## 0.1.4 可同时对角化

## 命题 0.9

1. 设  $\varphi, \psi$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 满足:  $\varphi\psi = \psi\varphi$  且  $\varphi, \psi$  都可对角化, 求证:  $\varphi, \psi$  可同时对角化, 即存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵.
2. 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 满足:  $AB = BA$  且  $A, B$  都在  $\mathbb{F}$  上可对角化, 则  $A, B$  在  $\mathbb{F}$  上可同时对角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  都是对角矩阵.

## 证明

1. 对空间维数进行归纳. 当  $n = 1$  时结论显然成立, 设对维数小于  $n$  的线性空间结论成立, 现对  $n$  维线性空间进行证明. 设  $\varphi$  的全体不同特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ , 对应的特征子空间分别为  $V_1, \dots, V_s$ , 则由  $\varphi$  可对角化可知

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

若  $s = 1$ , 则  $\varphi = \lambda_1 I_V$  为纯量变换, 此时只要取  $V$  的一组基, 使得  $\psi$  在这组基下的表示矩阵为对角矩阵, 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵为  $\lambda_1 I_n$ , 结论成立. 若  $s > 1$ , 则  $\dim V_i < n$ . 注意到  $\varphi\psi = \psi\varphi$  且  $\varphi, \psi$  的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 由命题 0.2 可知  $V_i$  都是  $\psi$ -不变子空间. 考虑线性变换的限制  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ : 它们乘法可交换, 且由可对角化线性变换的性质可知它们都可对角化, 故由归纳假设可知,  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$  可同时对角化, 即存在  $V_i$  的一组基, 使得  $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵. 将  $V_i$  的基拼成  $V$  的一组基, 则  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵, 即  $\varphi, \psi$  可同时对角化.

2.

□

## 0.1.5 个数的推广

## 命题 0.10

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证: 它们在  $\mathbb{F}^n$  中至少有一个公共的特征向量.

**证明** 对  $m$  进行归纳,  $m = 2$  时就是命题 0.4. 设矩阵个数小于  $m$  时结论成立, 现证  $m$  个矩阵的情形. 将所有的  $A_i$  都看成是列向量空间  $\mathbb{F}^n$  上的线性变换, 任取  $A_1$  的一个特征值  $\lambda_1 \in \mathbb{F}$  及其特征子空间  $V_1 \subseteq \mathbb{F}^n$ . 注意到  $A_1 A_i = A_i A_1$ , 故由命题 0.2 可知,  $V_1$  是  $A_2, \dots, A_m$  的不变子空间. 将  $A_2, \dots, A_m$  限制在  $V_1$  上, 它们仍然两两乘法可交换且特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 故由归纳假设可得  $A_2|_{V_1}, \dots, A_m|_{V_1}$  有公共的特征向量  $\alpha \in V_1$ . 注意到  $\alpha$  也是  $A_1$  的特征向量, 于是  $\alpha$  是  $A_1, A_2, \dots, A_m$  的公共特征向量.

□

## 命题 0.11

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们的特征值都在  $\mathbb{F}$  中, 求证: 它们在  $\mathbb{F}$  上可同时上三角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}A_i P (1 \leq i \leq m)$  都是上三角矩阵.

**证明** 完全类似于命题 0.7 的证明, 其中利用命题 0.10 得到  $A_1, A_2, \dots, A_m$  的公共特征向量, 请读者自行补充相关的细节.

□

## 命题 0.12

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_m$  两两乘法可交换, 且它们都在  $\mathbb{F}$  上可对角化, 求证: 它们在  $\mathbb{F}$  上可同时对角化, 即存在  $\mathbb{F}$  上的可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}A_i P (1 \leq i \leq m)$  都是对角矩阵.

**证明** 若  $A_i$  都是纯量矩阵, 则结论显然成立. 以下不妨设  $A_1$  不是纯量矩阵, 余下的证明完全类似于命题 0.9 的证

明, 请读者自行补充相关的细节. □

**例题 0.1** 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$ . 若  $A$  是幂零矩阵, 求证:  $|A + B| = |B|$ .

**证明 证法一:** 由命题 0.7 可知,  $A, B$  可同时上三角化, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  和  $P^{-1}BP$  都是上三角矩阵. 因为上三角矩阵的主对角元是矩阵的特征值, 而幂零矩阵的特征值全为零, 所以  $|P^{-1}AP + P^{-1}BP| = |P^{-1}BP|$ , 即有  $|A + B| = |B|$ .

**证法二:** 先假设  $B$  是可逆矩阵, 则  $|A + B| = |I_n + AB^{-1}||B|$ , 只要证明  $|I_n + AB^{-1}| = 1$  即可. 由  $AB = BA$  可知  $AB^{-1} = B^{-1}A$ , 再由  $A$  是幂零矩阵容易验证  $AB^{-1}$  也是幂零矩阵, 从而其特征值全为零. 因此  $I_n + AB^{-1}$  的特征值全为 1, 故  $|I_n + AB^{-1}| = 1$ .

对于一般的矩阵  $B$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + B$  是可逆矩阵. 由可逆情形的证明可得  $|A + t_k I_n + B| = |t_k I_n + B|$ . 注意到上式两边都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 将上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即得结论. □