

## 0.1 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

## 命题 0.1 (打洞原理)

(1) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $A$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么


$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m) \times (n+m)}$$

是一个方阵, 并且  $D$  为  $n$  阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

 **笔记** 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板  $|\square| = |\square| \left| \square - \square \square^{-1} \square \right|$ , 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个  $\square$  填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入  $\square$  即可.

**证明** (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去  $B$  或  $C$ )

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第一行左乘  $(-CA^{-1})$  再加入到第二行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对  $M$  的第二行左乘  $(-BD^{-1})$  再加入到第一行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$


□

## 推论 0.1 (打洞原理推论)

设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , 则

$$\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|.$$

♥

 **笔记** 这个推论能将原本复杂的矩阵  $AB$  通过交换顺序变成相对简单的矩阵  $BA$ . 例如: 例题 0.1.

**注** 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

**证明** 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & O \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & I_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ O & I_m - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix} = \lambda^n \left| I_m - \frac{1}{\lambda}BA \right| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|.$$

于是  $\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|$  .. 故  $\lambda^m |\lambda I_n - AB| = \lambda^n |\lambda I_m - BA|$ . □

### 推论 0.2

设  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 则  $AB$  和  $BA$  有完全一样的非 0 特征值且重数也相同.



**证明** 由推论 0.1 立得. □

**例题 0.1** 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 令  $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$ , 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\begin{aligned} A &= -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n |I_2| \left| I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} I_2 & \Lambda' \\ \Lambda & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n |I_n| \left| I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^n \left| I_2 - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix} \right| = (-1)^n \left[ (1-n) \left( 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

□

**例题 0.2** 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}.$$

**解** 注意到

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n).$$

从而由降价公式可得

$$|A| = \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \right| = |I_n| \left| 1 + (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) I_n^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

□

**例题 0.3** 计算矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

**解** 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

当  $n > 2$  时, 由 Cauchy-Binet 公式可知  $|A| = 0$ . 当  $n = 2$  时,  $|A| = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - b_1a_2$ . 当  $n = 1$  时,  $|A| = a_1 - b_1$ .

□

**例题 0.4** 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**解** 将  $A$  化为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

利用降阶公式容易求得  $|A| = (-1)^n n!(1-n)$ .

□

**命题 0.2**

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$



**证明** 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

□

**例题 0.5** 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

**解** 解法一: 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则  $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$ . 由命题 0.2 可得

$$\begin{aligned} |A| &= |B+C||B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z). \end{aligned}$$

解法二 (求根法):

□

**命题 0.3**

设  $A, B$  是  $n$  阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$



**证明** 将分块矩阵的第二行乘以  $i$  加到第一行上, 再将第一列乘以  $-i$  加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|.$$

□

**例题 0.6** 设  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

**解** 反复利用 **命题 0.2** 的结论可得

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|. \end{aligned}$$

□

**例题 0.7** 设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵且  $AB=BA$ , 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

**证明** 由 **命题 0.3** 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB| \cdot |A-iB| = |(A+iB)(A-iB)| = |A^2 + B^2 - i(AB-BA)| = |A^2 + B^2|.$$

□

**例题 0.8** 设  $A, B$  是  $n$  阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

**证明** 注意到  $A, B$  都是实矩阵, 故  $\overline{|A+iB|} = |\overline{A+iB}| = |A-iB|$ , 再由 **命题 0.3** 的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB| \cdot |A-iB| = |A+iB| \cdot \overline{|A+iB|} \geq 0.$$

□