0.1 将多项式分式分解为其部分因式的和

例题 0.1

1. 分解 $a>0,\dfrac{1}{(1+x^2)(1+ax)}$.
2. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x)^2}$.
3. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)^2(1+x)}$.
4. 分解 $\dfrac{1}{(1+x^2)^2(1+x)^2}$.

解

1. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+ax}. \tag{1}$$

其中 A,B,C 均为常数.

解法一 (待定系数法):

将(1)式右边通分得到

$$\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+ax}=\frac{(Ax+B)(1+ax)+C\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{(Aa+C)x^2+(A+Ba)x+B+C}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} Aa+C=0 \\ A+Ba=0 \\ B+C=1 \end{cases}$$

解得:$A=-\dfrac{a}{1+a^2},B=\dfrac{1}{1+a^2},C=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{-\frac{a}{1+a^2}x+\frac{1}{1+a^2}}{1+x^2}+\frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法二 (留数法):

(1)式两边同时乘 $1+ax$, 得到 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+ax)+C$. 再令 $x\to-\dfrac{1}{a}$, 得 $C=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a^2}}=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

(1)式两边同时乘 $1+x^2$, 得到 $\dfrac{1}{1+ax}=Ax+B+\dfrac{C}{1+ax}\cdot\left(1+x^2\right)$. 再分别令 $x\to\pm i$, 可得

$$\begin{cases} A\mathrm{i}+B=\dfrac{1}{1+a\mathrm{i}} \\ -A\mathrm{i}+B=\dfrac{1}{1-ai} \end{cases}$$

解得:$A=-\dfrac{a}{1+a^2},B=\dfrac{1}{1+a^2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)}=\frac{-\frac{a}{1+a^2}x+\frac{1}{1+a^2}}{1+x^2}+\frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法三 (留数法 + 待定系数法):

(1)式两边同时乘 $1+ax$, 得到 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}\cdot(1+ax)+C$. 再令 $x\to-\dfrac{1}{a}$, 得 $C=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a^2}}=\dfrac{a^2}{1+a^2}$.

容易直接观察出(1)式右边通分后分子的最高次项系数为 $Aa+C$, 常数项为 $B+C$. 并将其与(1)式左边的分子

对比, 可以得到

$$\begin{cases} Aa + C = 0 \\ B + C = 1 \end{cases}$$

解得:$A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}$.
于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

2. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}. \tag{2}$$

其中 A, B, C, D 均为常数.
(2)式两边同时乘 $(1+x)^2$, 得到

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2 + C(1+x) + D. \tag{3}$$

再令 $x \to -1$, 可得 $D = \frac{1}{2}$. 对(3)式两边同时求导得到

$$\left.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x\to-1} = \left.\left[\frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2\right]'\right|_{x\to-1} + C = C.$$

从而 $C = \frac{1}{2}$. 令(2)中的 $x = 0$, 得到 $1 = B + C + D$, 将 $C = D = \frac{1}{2}$ 代入解得:$B = 0$. 再令(2)中的 $x = 1$, 得到 $\frac{1}{8} = \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4}$, 将 $C = D = \frac{1}{2}, B = 0$ 代入解得:$A = -\frac{1}{2}$.
于是原式可分解为

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2} = \frac{-x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2(1+x)^2}.$$

3.

4.

□

例题 0.2 分解 $\frac{1}{1+x^4}$.

解 首先我们注意到

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{\left(1+x^2\right) - 2x^2} = \frac{1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)}.$$

然后根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \tag{4}$$

其中 A, B, C, D 均为常数. 将上式右边通分可得

$$\frac{1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)} = \frac{(Ax+B)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) + (Cx+D)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0 \\ A + C = 0 \end{cases}$$

解得:$A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{\sqrt{2}}{4}, D = \frac{1}{2}$.

于是原式可分解为

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

□

例题 0.3 分解 $\dfrac{x^4}{(1+x)(1+x^2)}$.

解 先利用多项式除法用 x^4 除以 $(1+x)(1+x^2)$ 得到 $x^4=(x-1)(1+x)\left(1+x^2\right)+1$. 从而

$$\frac{x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=\frac{(x-1)(1+x)\left(1+x^2\right)+1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=x-1+\frac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}.$$

然后再利用多项式分式的分解方法 (待定系数法和留数法) 将 $\dfrac{1}{(1+x)\left(1+x^2\right)}$ 分解为部分因式的和. 最后我们可将原式分解为

$$\frac{x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)}=x-1+\frac{1}{2+2x}+\frac{-x+1}{2+2x^2}.$$

□