

0.1 由乘法交换性诱导的同时性质

命题 0.1 (矩阵乘法可交换的基本性质)

若两个矩阵或线性变换 A, B 乘法可交换, 即 $AB = BA$, 则有 $(AB)^m = A^m B^m$, $f(A)g(B) = g(B)f(A)$ 以及二项式定理

$$(A + B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} B + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + B^m$$

等成立, 其中 $m \geq 1$, $f(x), g(x)$ 为多项式.

特别地, 一个矩阵或线性变换 A 一定与其自身可交换, 从而也满足 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 其中 $f(x), g(x)$ 为多项式.

证明 证明是显然的. □

0.1.1 特征子空间互为不变子空间

命题 0.2 (特征子空间互为不变子空间)

1. 设 φ, ψ 是复线性空间 V 上乘法可交换的线性变换, 即 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 求证: φ 的特征子空间是 ψ 的不变子空间, ψ 的特征子空间是 φ 的不变子空间.
2. 若 n 阶复矩阵 A, B 乘法可交换, 即 $AB = BA$, 则 A, B 的特征子空间互为不变子空间.

注 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如, $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 A, B 乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上, B 在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是 $\pm i$), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域 \mathbb{F} 上, 我们必须假设 A, B 的特征值都在 \mathbb{F} 中.

证明

1. 由代数基本定理以及线性方程组的求解理论可知, $n(n \geq 1)$ 维复线性空间上的线性变换或 n 阶复矩阵至少有一个特征值和特征向量. 任取线性变换 φ 的一个特征值 λ_0 , 设 V_0 是特征值 λ_0 的特征子空间, 则对任意的 $\alpha \in V_0$, 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即 $\psi(\alpha) \in V_0$, 因此 V_0 是 ψ 的不变子空间. 同理可证 ψ 的特征子空间是 φ 的不变子空间.

2. □

命题 0.3

设 V 为 n 维复线性空间, S 是 $\mathcal{L}(V)$ 的非空子集, 满足: S 中的全体线性变换没有非平凡的公共不变子空间. 设线性变换 φ 与 S 中任一线性变换乘法均可交换, 证明: φ 是纯量变换.

证明 任取 φ 的特征值 λ_0 及其特征子空间 V_0 . 任取 $\psi \in S$, 则 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 由命题 0.2 可知 V_0 是 ψ -不变子空间, 从而是 S 中全体线性变换的公共不变子空间. 又 $V_0 \neq 0$ (特征向量均非零), 故 $V_0 = V$, 从而 $\varphi = \lambda_0 I_V$ 为纯量变换. □

0.1.2 有公共的特征向量

命题 0.4

1. 设 φ, ψ 是复线性空间 V 上乘法可交换的线性变换, 求证: φ, ψ 至少有一个公共的 (复) 特征向量.
2. 若 n 阶复矩阵 A, B 乘法可交换, 即 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的 (复) 特征向量.



注 这个命题的结论对一般的数域是不成立的. 例如, $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 A, B 乘法可交换, 但它们在有理数域或实数域上没有公共的特征向量. 事实上, B 在有理数域或实数域上都没有特征值 (它的特征值是 $\pm i$), 从而也没有特征向量, 所以更谈不上公共的特征向量了. 为了这个命题的结论推广到数域 \mathbb{F} 上, 我们必须假设 A, B 的特征值都在 \mathbb{F} 中.

证明

1. 任取 φ 的特征值 λ_0 及其特征子空间 V_0 , 由命题 0.2 可知, V_0 是 ψ -不变子空间. 将线性变换 ψ 限制在 V_0 上, 由于 V_0 是维数大于零的复线性空间, 故由命题 ?? 可知 $\psi|_{V_0}$ 至少有一个特征值 μ_0 及其特征向量 $\alpha \in V_0$, 从而 $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$, 于是 α 就是 φ, ψ 的公共特征向量.

2.

□

命题 0.5

1. 设 φ, ψ 是数域 \mathbb{F} 上线性空间 V 上的乘法可交换的线性变换, 且 φ, ψ 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 求证: φ, ψ 的特征子空间互为不变子空间, 并且 φ, ψ 至少有一个公共的特征向量.
2. 若数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A, B 乘法可交换, 且它们的特征值都在 \mathbb{F} 中, 则 A, B 的特征子空间互为不变子空间, 并且 A, B 在 \mathbb{F}^n 中至少有一个公共的特征向量.



证明

1. 由线性方程组的求解理论可知, 若数域 \mathbb{F} 上的线性变换或 \mathbb{F} 上的矩阵在 \mathbb{F} 中有一个特征值, 则在 \mathbb{F} 上的线性空间或 \mathbb{F} 上的列向量空间中必存在对应的特征向量. 任取线性变换 φ 的一个特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, 设 V_0 是特征值 λ_0 的特征子空间, 则对任意的 $\alpha \in V_0$, 有

$$\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = \psi(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\psi(\alpha),$$

即 $\psi(\alpha) \in V_0$, 因此 V_0 是 ψ -不变子空间. 取 V_0 的一组基并扩张为 V 的一组基, 则 ψ 在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 其中 A 是 $\psi|_{V_0}$ 在给定基下的表示矩阵, 于是 $|\lambda I_V - \psi| = |\lambda I - A||\lambda I - B|$. 因为 ψ 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 故 A 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 于是 $\psi|_{V_0}$ 的特征值都在 \mathbb{F} 中. 任取 $\psi|_{V_0}$ 的一个特征值 $\mu_0 \in \mathbb{F}$ 及其特征向量 $\alpha \in V_0$, 则 $\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha, \psi(\alpha) = \mu_0\alpha$, 于是 α 就是 φ, ψ 的公共特征向量.

2.

□

0.1.3 可同时相似上三角化

命题 0.6 (矩阵的上三角化)

1. 设数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 求证: A 在 \mathbb{F} 上可上三角化, 即存在 \mathbb{F} 上的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.
2. 设数域 \mathbb{F} 上线性空间 V 上的线性变换 φ 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 则存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵是上三角矩阵.



证明

1. 对阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时结论显然成立, 设对 $n - 1$ 阶矩阵结论成立, 现对 n 阶矩阵 A 进行证明. 设 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ 是 A 的一个特征值, 则由线性方程组的求解理论可知, 存在特征向量 $e_1 \in \mathbb{F}^n$, 使得 $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. 由基扩张定理, 可将 e_1 扩张为 \mathbb{F}^n 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 于是

$$(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 \mathbb{F} 上的 $n - 1$ 阶矩阵. 令 $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, 则 P 是 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆矩阵, 且由上式可得 $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$, 即 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$. 由此可得 $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I_{n-1} - A_1|$, 又 A 的特征值全在 \mathbb{F} 中, 从而 A_1 的特征值也全在 \mathbb{F} 中, 故由归纳假设, 存在 \mathbb{F} 上的 $n - 1$ 阶可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则 R 是 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆矩阵, 且

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵.

2.

□

命题 0.7

1. 设 A, B 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵, 满足: $AB = BA$ 且 A, B 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 求证: A, B 在 \mathbb{F} 上可同时上三角化, 即存在 \mathbb{F} 上的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
2. 设数域 \mathbb{F} 上线性空间 V 上的线性变换 φ, ψ 乘法可交换, 且它们的特征值都在 \mathbb{F} 中, 则存在 V 的一组基, 使得 φ, ψ 在这组基下的表示矩阵都是上三角矩阵.

证明

1. 对阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时结论显然成立, 设对 $n - 1$ 阶矩阵结论成立, 现对 n 阶矩阵进行证明. 因为 $AB = BA$ 且 A, B 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 故由命题 0.5 可知, A, B 有公共的特征向量 $e_1 \in \mathbb{F}^n$, 不妨设

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_1 = \mu_1 e_1,$$

其中 $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{F}$ 分别是 A, B 的特征值. 由基扩张定理, 可将 e_1 扩张为 \mathbb{F}^n 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 令 $P = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, 则 P 是 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆矩阵, 从而有

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \\ B(e_1, e_2, \dots, e_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow BP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 A_1, B_1 是 \mathbb{F} 上的 $n - 1$ 阶矩阵. 由 $AB = BA$ 及 (1) 式可得到

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) &= P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B_1 A_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而 $A_1 B_1 = B_1 A_1$. 又由 (1) 式可得

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - A_1|, \quad |\lambda I_n - B| = |\lambda - \lambda_1| |\lambda I_{n-1} - B_1|.$$

因此 A_1, B_1 的特征值也是 A, B 的特征值. 又由于 A, B 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 故 A_1, B_1 的特征值都在 \mathbb{F} 中. 故由归纳假设, 存在 \mathbb{F} 上的 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 和 $Q^{-1}B_1Q$ 都是上三角矩阵. 令

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

则 R 是 \mathbb{F} 上的 n 阶可逆矩阵, 且

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}, \\ R^{-1}BR &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ O & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

都是上三角矩阵.


2.

□

命题 0.8 (一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化)

给定域 \mathbb{F} 和指标集 Λ , 设 $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$ 且两两可交换且特征值都属于 \mathbb{F} , 则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是上三角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

 **笔记** 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵降阶. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法.

注 因为数量矩阵的特征子空间就是全空间, 将其限制在特征子空间上, 维数并未下降, 所以需要分类讨论.

证明 Step 1 若 $\forall \lambda \in \Lambda$, 都有 A_λ 是数量矩阵, 此时结论显然成立.

Step 2 任取一个非数量矩阵 $A_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 再任取 A_1 的一个特征子空间 V_1 , 则 $1 \leq \dim V_1 < n$, 否则 A_1 就是纯量阵. 由命题 0.2 可知, V_1 是 A_λ -不变子空间, $\forall \lambda \in \Lambda$. 因此可考虑线性变换 $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$. 下对矩阵阶数进行归纳证明.

当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设命题对小于等于 $n-1$ 的情况都成立, 考虑 n 的情形.

注意到 $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ 两两乘法可交换, 故由归纳假设可知, 存在 V_1 的一组基, 使 $A_\lambda|_{V_1}$ 在这组基下有上三角表示矩阵 $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$. 将这组基扩充为 V 的一组基, 于是在新的基下, $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$.

又由于 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 两两乘法可交换, 故对 $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$, 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ O & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda \tilde{A}_\mu & * \\ O & \tilde{C}_\lambda \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\lambda & * \\ O & \tilde{C}_\mu \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即 $\tilde{A}_\lambda, \tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 两两乘法可交换. 从而由归纳假设可知, 对 $\forall \lambda \in \Lambda$, 存在可逆阵 \tilde{P}_λ , 使得 $(\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$ 是上三角阵.

取 $P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则此时对 $\forall \lambda \in \Lambda$, 就有

$$P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ O & (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda \end{pmatrix}.$$

而 $\tilde{A}_\lambda, (\tilde{P}_\lambda)^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}_\lambda$ 都是上三角阵, 故 $P^{-1}A_\lambda P$ 也是上三角阵. 因此由数学归纳法可知, 结论成立. □

命题 0.9 (一族两两可交换的复数 (实数) 域上的矩阵可同时酉 (正交) 上三角化)

1. 给定指标集 Λ , 设 $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$ 且两两可交换, 则存在酉矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使得 $P^{-1}A_\lambda P$ 是上三角矩阵, $\forall \lambda \in \Lambda$.

2. 给定指标集 Λ , 设 $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$ 且两两可交换且特征值都是实数. 则存在正交矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得 $P^{-1}A_\lambda P$ 是上三角矩阵, $\forall \lambda \in \Lambda$.

 **笔记** 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵降阶. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法.

注 因为数量矩阵的特征子空间就是全空间, 将其限制在特征子空间上, 维数并未下降, 所以需要分类讨论.

证明

1. 设 $V = \mathbb{C}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 和一个特征子空间 V_1 且 $1 \leq \dim V_1 < n$. 由交换性知 V_1 是所有 A_λ 不变子空间, 因此 $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ 也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当 $n = 1$, 命题显然成立, 假设命题对小于等于 $n - 1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ 也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在 V_1 的一族标准正交基, 使得在这组基下 $A_\lambda|_{V_1}$ 有上三角的表示矩阵 $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$. 将这组基扩充到 \mathbb{C}^n 使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下, A_λ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$. 由

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \mu, \lambda \in \Lambda.$$

知 $\tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 也是两两可交换的矩阵. 因此存在酉矩阵 \tilde{P} , 使得每一个 $(\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}$ 都是上三角的. 然后我们取酉矩阵 $P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 就有 $P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & (\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P} \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \Lambda$ 都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 和一个特征子空间 V_1 且 $1 \leq \dim V_1 < n$. 由交换性知 V_1 是所有 A_λ 不变子空间, 因此 $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ 也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当 $n = 1$, 命题显然成立, 假设命题对小于等于 $n - 1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, $A_\lambda|_{V_1}, \lambda \in \Lambda$ 也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在 V_1 的一族标准正交基, 使得在这组基下 $A_\lambda|_{V_1}$ 有上三角的表示矩阵 $\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$. 将这组基扩充到 \mathbb{R}^n 使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下, A_λ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Lambda$. 由

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ 0 & \tilde{C}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & \tilde{C}_\lambda \end{pmatrix}$$

知 $\tilde{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 也是两两可交换的矩阵. 因此存在正交矩阵 \tilde{P} , 使得每一个 $(\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P}$ 都是上三角的. 然后我们取正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 就有 $P^{-1}A_\lambda P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\lambda & \tilde{B}_\lambda \\ 0 & (\tilde{P})^{-1} \tilde{C}_\lambda \tilde{P} \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \Lambda$ 都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

□

0.1.4 可同时相似对角化

命题 0.10

1. 设 φ, ψ 是数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足: $\varphi\psi = \psi\varphi$ 且 φ, ψ 都可对角化, 求证: φ, ψ 可同时对角化, 即存在 V 的一组基, 使得 φ, ψ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵.
2. 设 A, B 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵, 满足: $AB = BA$ 且 A, B 都在 \mathbb{F} 上可对角化, 则 A, B 在 \mathbb{F} 上可同时对角化, 即存在 \mathbb{F} 上的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵.

证明

1. 对空间维数进行归纳. 当 $n = 1$ 时结论显然成立, 设对维数小于 n 的线性空间结论成立, 现对 n 维线性空间进行证明. 设 φ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$, 对应的特征子空间分别为 V_1, \dots, V_s , 则由 φ 可对角化可知

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

若 $s = 1$, 则 $\varphi = \lambda_1 I_V$ 为纯量变换, 此时只要取 V 的一组基, 使得 ψ 在这组基下的表示矩阵为对角矩阵, 则 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\lambda_1 I_n$, 结论成立. 若 $s > 1$, 则 $\dim V_i < n$. 注意到 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 且 φ, ψ 的特征值都在 \mathbb{F} 中, 由命题 0.2 可知 V_i 都是 ψ -不变子空间. 考虑线性变换的限制 $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$: 它们乘法可交换, 且由可对角化线性变换的性质可知它们都可对角化, 故由归纳假设可知, $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 可同时对角化, 即存在 V_i 的一组基, 使得 $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵. 将 V_i 的基拼成 V 的一组基, 则 φ, ψ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵, 即 φ, ψ 可同时对角化.

2.

□

引理 0.1

任何域上的可对角化矩阵限制到不变子空间上仍然是可对角化矩阵.

♥

证明 注意到矩阵可对角化等价于极小多项式可以分解为一次式的积. 设 A 的极小多项式是 p , W 是矩阵 A 一个不变子空间且 p_W 是 $A|_W$ 极小多项式. 注意到 $p(A|_W) = 0$, 故 $p_W|p$. 从而 p_W 也是一次式的积, 故 $A|_W$ 可对角化. □

命题 0.11 (一族两两可交换的可对角化矩阵可同时相似对角化)

给定域 \mathbb{F} , 设 $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$ 且两两可交换. 若每一个 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 都可以在 \mathbb{F} 上相似对角化, 则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

♣

证明 设 $V = \mathbb{F}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 , 于是有 $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$, 这里 $s \geq 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, V_i 是所有 A_λ 不变子空间, 且 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 是一族两两可交换的矩阵, 由引理 0.1 知它们也是可对角化的. 注意到 $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$, 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当 $n = 1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leq n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, 存在 V_i 的一个基使得 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 于是把这些基合起来构成一个新的基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 都是对角矩阵. □


命题 0.12 (一族两两可交换的复正规 (实对称) 矩阵可同时酉 (正交) 相似对角化)

1. 给定指标集 Λ , 设 $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \Lambda$ 且两两可交换且复正规, 则存在酉矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

2. 给定指标集 Λ , 设 $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \Lambda$ 且两两可交换且实对称, 则存在正交矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P \text{ 是对角矩阵, } \forall \lambda \in \Lambda.$$

 **笔记** 注意到 $(Ax, y) = (x, A^T y)$, $(Ax, y) = (x, A^* y)$ 在全空间成立则在子空间也成立, 所以 $A^T|_V = (A|_V)^T$, $A^*|_V = (A|_V)^*$, 所以一个实对称变换限制在不变子空间也是实对称的, 一个复正规变换限制在不变子空间也是复正规的.

证明

1. 设 $V = \mathbb{C}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 , 于是有 $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$, 这里 $s \geq 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, V_i 是所有 A_λ 不变子空间, 从而 V_i 两两正交, 且 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 是一族两两可交换的正规矩阵, 于是可酉对角化的. 注意到 $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$. 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当 $n = 1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leq n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, 存在 V_i 的一个标准正交基使得 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 由于 V_i 两两正交, 于是把这些基合起来构成一个新的正交基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 都是对角矩阵.

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 , 于是有 $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$, 这里 $s \geq 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, V_i 是所有 A_λ 不变子空间, 从而 V_i 两两正交, 且 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 是一族两两可交换的实对称矩阵, 由引理 0.1 知它们也是可正交相似对角化的. 注意到 $1 \leq \dim V_i < n, i = 1, 2, \dots, s$, 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当 $n = 1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leq n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, 存在 V_i 的一个标准正交基使得 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda \in \Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 由于 V_i 两两正交, 于是把这些基合起来构成一个新的正交基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 都是对角矩阵.

□

引理 0.2 (根子空间维数)

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 且 \mathbb{F} 是域. 若 $\lambda \in \mathbb{F}$ 是 A 的 r 重特征值, 则我们有

$$\dim \operatorname{Ker} (\lambda E - A)^m = r, \forall m \geq r. \quad (2)$$

♥

证明 注意到

$$\dim \operatorname{Ker} (\lambda E - A)^r = n - \operatorname{rank} ((\lambda E - A)^r).$$

而秩不随域扩张而改变, 故不妨设 \mathbb{F} 是代数闭域. 则不妨设 A 为 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = r,$$

这里 J 没有特征值 λ . 于是直接计算有

$$(A - \lambda E)^r = \begin{pmatrix} J_{n_1}^r(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}^r(0) & \\ & & & (J - \lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & (J - \lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix},$$

$$\det(J - \lambda E_{n-r})^r \neq 0.$$

现在知 $\text{rank}(A - \lambda E)^r = n - r$, 这就得到了 (2) 的 $m = r$ 的情况. 注意到当 $m > r$ 时, 上述矩阵 0 块在次方时不会继续丢失阶数, 而 $(A - \lambda E)^m$ 仍可逆, 因此秩不会再次减少, 所以 (2) 对任何 $m \geq r$ 都成立, 这就完成了证明. \square

定理 0.1 (公共特征值)

给定域 \mathbb{F} , 指标集 Λ 和 $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n \times n}, \lambda \in \Lambda$.

1. 若 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 两两可交换;

2. 若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, n$ 为奇数.

则 A_λ 在 \mathbb{F} 上有公共特征向量.



笔记 某种角度上说, 存在公共特征向量和可同时相似上三角化是等价的.

1. 由一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化, 不妨设 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 都是上三角矩阵, 注意观察第一列知他们有公共的特征向量 e_1 .

2. 证明的关键在于奇数次实多项式必有实根, 从而奇数矩阵必有实特征值.

证明 Step 1 取 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的极大无关组 A_1, A_2, \dots, A_k . 如果能找到 A_1, A_2, \dots, A_k 的公共特征向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 则对任何 $A_\lambda = \sum_{i=1}^k c_i A_i$, 都有

$$A_\lambda \alpha = \sum_{i=1}^k c_i A_i \alpha = \left(\sum_{i=1}^k c_i \lambda_i \right) \alpha,$$

这里 λ_i 是 $A_i, 1 \leq i \leq k$ 关于特征向量 α 的特征值. 于是问题变成只需要对有限个矩阵讨论.

Step 2 对于两两可交换的实矩阵 A_1, A_2, \dots, A_k . 取 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的极大无关组 A_1, A_2, \dots, A_k . 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 A_1 的奇数重特征值, 记重数为 $r \in \mathbb{N}$ 并设 $W = \text{Ker}((\lambda E - A_1)^r)$. 由引理 0.2 知 $\dim W = r$ 且显然有 $A_j|_W, j = 2, 3, \dots, k$ 两两可交换.

注意到 $r = n$ 是可能的, 真正降下去的是矩阵个数, 所以我们对矩阵个数归纳. 命题对 $k = 1$ 显然成立, 假设命题对 $\leq k - 1$ 成立, 当 k 时我们运用归纳假设知 $A_j|_W, j = 2, 3, \dots, k$ 有公共特征向量, 即存在实数 $\lambda_i, 2 \leq i \leq k$, 使得

$$W' = \bigcap_{i=2}^k \text{Ker}(\lambda_i I - A_i|_W) \neq \{0\}.$$

Step 3 由可交换性知 W' 是 A_1 不变子空间, 所以断言 $A_1|_{W'}$ 在 \mathbb{C} 上特征值只有 λ . 事实上由 Step 1, 显然 $W' \subset W$. 又设在复数域上 $A_1 \beta = \mu \beta, \beta \neq 0, \mu \in \mathbb{C}$, 则

$$0 = (\lambda E - A_1)^r \beta = (\lambda E - A_1)^{r-1} (\lambda \beta - A_1 \beta) = (\lambda - \mu)(\lambda E - A_1)^{r-1} \beta = \dots = (\lambda - \mu)^r \beta,$$

故 $\mu = \lambda$.

Step 4 取 W' 中 A_1 一个特征向量 γ , 则 γ 是 A_1, A_2, \dots, A_k 公共特征向量, 这就完成了证明. \square

引理 0.3 (Netwon 公式)

设

$$s_j = \sum_{i=1}^n x_i^j, \quad \sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

我们有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0, 1 \leq k \leq n;$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0, k > n.$$



证明

□

定理 0.2

对域 \mathbb{F} , 设 $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 且 $\text{tr}(C^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, 则 C 是幂零矩阵.



证明 不妨设 \mathbb{F} 是代数闭的, 设 C 的全部特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 这里可能相同. 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

即 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的一切幂和为 0. 由 **Newton 公式**, 我们有 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 构成的所有初等对称多项式为 0. 由 **Vieta 定理**, 我们有 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是 $\lambda^n = 0$ 的根, 这就证明了 C 的全部特征值都是 0, 故 C 是幂零矩阵. □

命题 0.13

给定数域 \mathbb{F} , $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, A, B 特征值都在 \mathbb{F} 中.

1. 若 $AB = 0$, 证明存在可逆 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
2. 若 $\text{rank}(AB - BA) \leq 1$, 证明存在可逆 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
3. 若存在 $a, b \in \mathbb{F}$ 使得 $AB - BA = aA + bB$, 证明存在可逆 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.



笔记 此类问题, 我们可以先找一个公共的非平凡的不变子空间 (或公共特征向量), 从而可以从这个不变子空间中取一组基, 再扩充为全空间的基. 于是原矩阵在这组基下的表示矩阵就可同时上三角化, 并且表示矩阵的 $(1, 1)$ 元可以确定, 接下来只需考虑表示矩阵的其余的 $n-1$ 阶矩阵即可, 这样就对原矩阵进行了降阶. 最后再利用数学归纳法就能立刻得到证明.

证明

1. 若 A 可逆, 则 $B = 0$. 此时因为 $AB = BA = 0$. 运用 **可交换矩阵可同时上三角化** 即证, 当然, 由 **定理 0.1**, 此时 A, B 有公共特征向量. 若 A 不可逆, 于是我们不难证明 $\text{Ker} A$ 是 B 的不变子空间 (当然也是 A 的不变子空间), 所以存在 $B|_{\text{Ker} A}$ 的特征向量 $\alpha \in \text{Ker} A$. 此时 α 也是 A 的特征向量 (特征值为 0), 于是 A, B 总有公共特征向量.

那么我们运用归纳法, 当 $n=1$ 显然, 假定命题对 $n-1$ 时成立, 当 n 时, 设 α 是 A, B 公共特征向量, 将其扩充为 \mathbb{F}^n 一组基, 在这组基下, A, B 分别有表示矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c_1 & \beta^T \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} c_2 & \gamma^T \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{F}.$$

由 $AB = 0$ 知 $A_{n-1}B_{n-1} = 0$. 故可对 A_{n-1}, B_{n-1} 用归纳假设, 即存在可逆 $P_{n-1} \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$ 使得 $P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1}, P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1}$ 是上三角矩阵. 于是取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 就有

$$P^{-1}\tilde{A}P = \begin{pmatrix} c_1 & \beta^T P_{n-1} \\ 0 & P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1} \end{pmatrix}, P^{-1}\tilde{B}P = \begin{pmatrix} c_2 & \gamma^T P_{n-1} \\ 0 & P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1} \end{pmatrix}$$

都是上三角矩阵. 这就证明了存在可逆 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

2. 若 $\text{rank}(AB - BA) = 0$, 这是 **可交换矩阵可同时上三角化** 的直接结果. 若 $\text{rank}(AB - BA) = 1$, 我们假定 A 是不可逆的, 否则用 $A - \lambda I, \lambda \in \mathbb{F}$ (这里 λ 是此时 A 的特征值) 代替 A . 下证 $\text{Ker} A, \text{Im} A$ 必有一个是 B 的不变子空

间.

Step 1 若 $\text{Ker}A \subset \text{Ker}(AB - BA)$, 则设 $x \in \text{Ker}A$, 我们有 $ABx = BAx = 0$, 这就证明了 $\text{Ker}A$ 是 B 不变子空间.

Step 2 若 $\text{Ker}A \not\subset \text{Ker}(AB - BA)$ 不成立, 取 $x \in \text{Ker}A$ 使得 $y = (AB - BA)x \neq 0$. 注意到 $\text{rank}(AB - BA) = 1$, 故 $\text{Im}(AB - BA) = \text{span}\{y\}$. 但是

$$y = (AB - BA)x = ABx - BAx = ABx \in \text{Im}A,$$

这就说明 $\text{Im}(AB - BA) \subset \text{Im}A$. 于是对 $u = Av \in \text{Im}A$, 我们有

$$Bu = BAv = ABv - (AB - BA)v \in \text{Im}A,$$

从而确实了 $\text{Im}A$ 是 B 不变子空间.

注意到 A, B 有一个公共非平凡不变子空间. 所以取这个不变子空间一组基扩充为全空间的基, 则 A, B 有表示矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{aligned} r(AB - BA) &= r \begin{pmatrix} A_1B_1 - B_1A_1 & * \\ 0 & A_2B_2 - B_2A_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{矩阵秩的基本公式 (3)}}{\geq} r \begin{pmatrix} A_1B_1 - B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 - B_2A_2 \end{pmatrix} \\ &= r(A_1B_1 - B_1A_1) + r(A_2B_2 - B_2A_2), \end{aligned}$$

我们有

$$r(A_1B_1 - B_1A_1) \leq 1, r(A_2B_2 - B_2A_2) \leq 1,$$

现在阶降下去了, 类似我们前面的归纳证明我们知道 A, B 可同时相似上三角化.

3. 如果 $a = b = 0$, 那么这是可交换矩阵可同时上三角化的直接结果. 不失一般性, 不妨设 $a \neq 0$. 我们可以用 $\frac{1}{a}B$ 代替 B 来不妨设 $a = 1$. 那么记 $C = AB - BA = A + bB$, 则成立等式 $CB - BC = C$. 显然只需证明 C, B 可同时相似上三角化即可, 因为此时 A 也就被相似上角化. 注意到

$$\begin{aligned} \text{tr}(CB - BC) &= \text{tr}(C) = 0, \text{tr}(CCB - CBC) = \text{tr}(C^2) = 0, \\ \text{tr}(CCCB - CCBC) &= \text{tr}(C^3) = 0, \text{tr}(CCCCB - CCCBC) = \text{tr}(C^4) = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

于是我们证明了 $\text{tr}(C^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. 由定理 0.2, 我们知道 C 是幂零矩阵.

假设 B, C 没有公共特征向量且 $Bx = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $Cx \neq 0$ 且

$$CBx - BCx = Cx \Rightarrow (B - (\lambda - 1)I)Cx = 0,$$

因此 B 有特征值 $\lambda - 1$. 这样 B 也应该有特征值 $\lambda - 2$, 如此下去 B 会有无穷多个特征值, 这不可能! 所以 B, C 应该有公共特征向量 α . 将 α 扩充为全空间的一组基, B, C 在这组基下有表示矩阵

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F}, C_1 \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)},$$

则 $C_1B_1 - B_1C_1 = C_1$. 这样阶数就降下去了. 所以可以类似前面归纳完成证明.

□

引理 0.4 (Hilbert 矩阵逆矩阵元素和)

设

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

, 这里 H 是 n 阶矩阵. 证明 H^{-1} 所有元素和为 n^2 .



笔记 这里涉及经典技巧, 即分解 $J = AH + HB$, 需要积累.

证明 取 n 阶矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

, 则 $AH + HB = J = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T$. 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_n^T H^{-1} \mathbf{1}_n &= \text{tr}(\mathbf{1}_n^T H^{-1} \mathbf{1}_n) = \text{tr}(H^{-1} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) = \text{tr}(H^{-1} J) = \text{tr}(H^{-1}(AH + HB)) \\ &= \text{tr}(H^{-1} AH + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2. \end{aligned}$$

□

0.1.5 个数的推广**命题 0.14**

设数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 两两乘法可交换, 且它们的特征值都在 \mathbb{F} 中, 求证: 它们在 \mathbb{F}^n 中至少有一个公共的特征向量.



证明 对 m 进行归纳, $m=2$ 时就是 **命题 0.4**. 设矩阵个数小于 m 时结论成立, 现证 m 个矩阵的情形. 将所有的 A_i 都看成是列向量空间 \mathbb{F}^n 上的线性变换, 任取 A_1 的一个特征值 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ 及其特征子空间 $V_1 \subseteq \mathbb{F}^n$. 注意到 $A_1 A_i = A_i A_1$, 故由 **命题 0.2** 可知, V_1 是 A_2, \dots, A_m 的不变子空间. 将 A_2, \dots, A_m 限制在 V_1 上, 它们仍然两两乘法可交换且特征值都在 \mathbb{F} 中, 故由归纳假设可得 $A_2|_{V_1}, \dots, A_m|_{V_1}$ 有公共的特征向量 $\alpha \in V_1$. 注意到 α 也是 A_1 的特征向量, 于是 α 是 A_1, A_2, \dots, A_m 的公共特征向量.

□

命题 0.15

设数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 两两乘法可交换, 且它们的特征值都在 \mathbb{F} 中, 求证: 它们在 \mathbb{F} 上可同时上三角化, 即存在 \mathbb{F} 上的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1} A_i P (1 \leq i \leq m)$ 都是上三角矩阵.



证明 完全类似于 **命题 0.7** 的证明, 其中利用 **命题 0.14** 得到 A_1, A_2, \dots, A_m 的公共特征向量, 请读者自行补充相关的细节.

□

命题 0.16

设数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 两两乘法可交换, 且它们都在 \mathbb{F} 上可对角化, 求证: 它们在 \mathbb{F} 上可同时对角化, 即存在 \mathbb{F} 上的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1} A_i P (1 \leq i \leq m)$ 都是对角矩阵.



证明 若 A_i 都是纯量矩阵, 则结论显然成立. 以下不妨设 A_1 不是纯量矩阵, 余下的证明完全类似于 **命题 0.10** 的证

明, 请读者自行补充相关的细节. □

例题 0.1 设 A, B 都是 n 阶矩阵且 $AB = BA$. 若 A 是幂零矩阵, 求证: $|A + B| = |B|$.

证明 证法一: 由命题 0.7 可知, A, B 可同时上三角化, 即存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵. 因为上三角矩阵的主对角元是矩阵的特征值, 而幂零矩阵的特征值全为零, 所以 $|P^{-1}AP + P^{-1}BP| = |P^{-1}BP|$, 即有 $|A + B| = |B|$.

证法二: 先假设 B 是可逆矩阵, 则 $|A + B| = |I_n + AB^{-1}||B|$, 只要证明 $|I_n + AB^{-1}| = 1$ 即可. 由 $AB = BA$ 可知 $AB^{-1} = B^{-1}A$, 再由 A 是幂零矩阵容易验证 AB^{-1} 也是幂零矩阵, 从而其特征值全为零. 因此 $I_n + AB^{-1}$ 的特征值全为 1, 故 $|I_n + AB^{-1}| = 1$.

对于一般的矩阵 B , 可取到一列有理数 $t_k \rightarrow 0$, 使得 $t_k I_n + B$ 是可逆矩阵. 由可逆情形的证明可得 $|A + t_k I_n + B| = |t_k I_n + B|$. 注意到上式两边都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 将上式两边同时取极限, 令 $t_k \rightarrow 0$, 即得结论. □