## 0.1 子群与商群

**定义 0.1**

设 $A, B$ 是群 $G$ 的两个子集, 约定

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}, A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

特别地, 当 $A = \{a\}$ 为单点集时, 记 $AB = aB$, $BA = Ba$. 当然这些符号对半群与幺半群可同样使用.

**命题 0.1**

设 $H$ 是有限集,$\{a\}$ 为单点集, 则

$$|H| = |aH| = |Ha| = |aHa| = |HaH|.$$

**证明** 令

$$\varphi : H \longrightarrow aH,$$
$$h \longmapsto ah, \quad \forall h \in H.$$

容易验证 $\varphi$ 是 $H$ 到 $aH$ 的双射. 故 $|H| = |aH|$. 其他同理可证.

□

**定义 0.2**

群 $G$ 的非空子集 $H$ 若对 $G$ 的运算也构成一个群, 则称为 $G$ 的**子群**, 记作 $H < G$ 或 $H \leqslant G$.

**注** 显然, $H = \{1\}$(1 为 $G$ 的幺元) 与 $H = G$ 均为 $G$ 的子群, 称为 $G$ 的**平凡子群**, 其他的子群称为**非平凡子群**.

**定义 0.3**

若半群 $S$ 的非空子集 $S_1$ 对 $S$ 的运算也是半群, 则称 $S_1$ 为 $S$ 的**子半群**.

若幺半群 $M$ 的子集 $Q$ 对 $M$ 的运算也是幺半群且 $M$ 的幺元 $1 \in Q$, 则称 $Q$ 为 $M$ 的**子幺半群**.

**定理 0.1**

设 $H$ 是群 $G$ 的非空子集, 则下列条件等价:

(1) $H$ 是 $G$ 的子群.

(2) $1 \in H$; 若 $a \in H$, 则 $a^{-1} \in H$; 若 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$.

(3) 对 $\forall a, b \in H$, 有 $ab \in H, a^{-1} \in H$.

(4) 对 $a, b \in H$, 有 $ab^{-1} \in H$.

(5) 对 $a, b \in H$, 有 $a^{-1}b \in H$.

**证明** (1) ⇒ (2). 由 $H$ 对 $G$ 的乘法构成群知 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$. 又 $H$ 有幺元 $1'$, 即有 $1' \cdot 1' = 1'$. 设 $1'$ 在 $G$ 中的逆元为 $1'^{-1}$, 则有

$$1 = 1' \cdot 1'^{-1} = (1' \cdot 1') \cdot 1'^{-1} = 1',$$

故 $1 \in H$. 设 $a$ 在 $H$ 中的逆元为 $a'$, 于是 $aa' = 1' = 1$, 即 $a' = a^{-1}$, 故 $a^{-1} \in H$. 由此知 (2) 成立, 而且 $H$ 的幺元是 $G$ 的幺元. $a \in H$, $a$ 在 $H$ 中的逆元与在 $G$ 中的逆元一致.

(2) ⇒ (3). 这是显然的.

(3) ⇒ (4). 若 $a, b \in H$, 故 $a, b^{-1} \in H$, 故 $ab^{-1}, a^{-1}b \in H$.

(4) ⇒ (1) . 由 $H \neq \varnothing$ 知 $\exists a \in H$, 因而 $1 = aa^{-1} \in H$. 又由 $1, a \in H$ 知 $a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \in H$. 又若 $a, b \in H$, 由 $b^{-1} \in H$ 得 $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. 由此可知 $G$ 的乘法也是 $H$ 的乘法. 对 $H$ 而言有幺元 1; 对 $a \in H$ 有逆元 $a^{-1}$; 结合律显然成立. 故 $H$ 是 $G$ 的子群.

(5) $\Rightarrow$ (1). 由 $H \neq \varnothing$ 知 $\exists a \in H$, 因而 $1 = aa^{-1} \in H$. 又由 $1, a \in H$ 知 $a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \in H$. 又若 $a, b \in H$, 由 $a^{-1} \in H$ 得 $ab = (a^{-1})^{-1}b \in H$. 由此可知 $G$ 的乘法也是 $H$ 的乘法. 对 $H$ 而言有幺元 1; 对 $a \in H$ 有逆元 $a^{-1}$; 结合律显然成立. 故 $H$ 是 $G$ 的子群.

□

**定理 0.2**

设 $A, B, C, H$ 是群 $G$ 的非空子集,$g, a, b \in G$, 则

(1) $A(BC) = (AB)C$.

(2) $gA = gB$或$Ag = Bg \iff A = B$.

(3) $H$ 是 $G$ 的子群 $\iff HH = H, H^{-1} = H \iff H^{-1}H = H$.

(4) $ab \in H \iff a \in Hb^{-1} \iff b \in a^{-1}H$.

(5) $x \in gH \iff x^{-1} \in H^{-1}g^{-1}, x \in Hg \iff x^{-1} \in g^{-1}H^{-1}, x \in HgK \iff x^{-1} \in K^{-1}g^{-1}H^{-1}$.

证明

(1)

(2)

(3)

(4) 只需注意到 $ab \in H \iff ab = h\,(h \in H) \iff a = hb^{-1} \in Hb^{-1} \iff b \in a^{-1}H$.

(5)

□

**命题 0.2**

(1) 设 $H$ 是群 $G$ 的非空有限子集, 则 $H$ 是 $G$ 的子群的充分必要条件是 $H$ 关于 $G$ 的运算封闭.

(2) 若 $G$ 是一个群, 则 $G$ 的任意子群的交 $\bigcap\limits_{H<G} H$ 也是 $G$ 的子群.

(3) 若 $H_1, H_2$ 都是群 $G$ 的子群且 $H_2 \subseteq H_1$, 则 $H_2$ 也是 $H_1$ 的子群.

(4) 设 $H, K$ 是群 $G$ 的两个子群. 则 $H \cup K$ 是 $G$ 的子群的充要条件是 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$. 并且群 $G$ 不能被它的两个真子群所覆盖.

(5) 设 $A$ 和 $B$ 是有限群 $G$ 的两个非空子集. 若 $|A| + |B| > |G|$, 则 $G = AB$.

注 在这个命题 0.2(4)中, 群 $G$ 可能被它的三个真子群所覆盖. 例如, 群

$$U(8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}.$$

易知

$$H = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \quad J = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \quad K = \{\bar{1}, \bar{7}\}$$

都是 $U(8)$ 的真子群, 且 $U(8) = H \cup J \cup K$.

证明

(1) 必要性显然, 下证充分性. 因为 $H$ 关于 $G$ 的运算封闭, 所以 $G$ 的运算是 $H$ 的代数运算. 又因为 $G$ 的运算满足结合律, 所以 $H$ 的运算也满足结合律.

设 $H = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 对任意的 $a \in H$, 记 $Ha = \{a_1a, a_2a, \cdots, a_na\}$, 则 $Ha \subseteq H$. 于是 $a_ia \neq a_ja (i \neq j)$. 否则, 由 $a_ia = a_ja (i \neq j)$ 可得

$$a_i = a_i(aa^{-1}) = (a_ia)a^{-1} = (a_ja)a^{-1} = a_j(aa^{-1}) = a_j,$$

显然矛盾! 由此推出 $|Ha| = n = |H|$, 于是 $Ha = H$. 这样, 对任意的 $a, b \in H$, 因为 $Ha = H$, 所以必有 $a_i \in H$, 使 $a_ia = b$. 这说明, 对任意的 $a, b \in H$, 方程 $xa = b$ 在 $H$ 中必有解. 同理可证, 方程 $ay = b$ 在 $H$ 中也有解. 从而, 由定理**??**知 $H$ 为群.

(2) 设 $I$ 为任一 (有限或无限的) 指标集, $\{H_i \mid i \in I\}$ 为群 $G$ 的一些子群的集合, 令

$$J = \bigcap_{i \in I} H_i,$$

因为 $1 \in H_i (\forall i \in I)$, 所以 $1 \in \bigcap_{i \in I} H_i$, 从而 $J$ 非空; 对 $\forall a, b \in J$, 有 $a, b \in H_i (\forall i \in I)$. 由于 $H_i < G$, 因此 $ab^{-1} \in H_i (\forall i \in I)$, 于是 $ab^{-1} \in J$. 这就证明了 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 为 $G$ 的子群.

(3) 由 $H_2$ 是 $G$ 的子群知 $ab^{-1} \in H_2, \forall a, b \in H_2$. 又 $H_2 \subseteq H_1$, 故 $H_2$ 也是 $H_1$ 的子群.

(4) 充分性显然, 下证必要性. 设 $H \cup K$ 是 $G$ 的子群. 如果 $H \subseteq K$, 则结论成立. 如果 $H \nsubseteq K$, 则存在 $h \in H$, 使 $h \notin K$. 由于 $H \cup K$ 为 $G$ 的子群, 因此对任意的 $k \in K$, 有 $hk \in H \cup K$. 从而必有 $hk \in H$ 或 $hk \in K$. 如果 $hk \in K$, 则 $h = hk \cdot k^{-1} \in K$, 这与 $h$ 的选取矛盾. 从而必有 $hk \in H$, 由此推出 $k = h^{-1} \cdot hk \in H$. 由 $k$ 的任意性知 $K \subseteq H$. 这就证明了必要性.

设 $H, K$ 是群 $G$ 的两个子群. 如果 $G = H \cup K$, 由前面所证, 应有 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$, 于是有 $G = K$ 或 $G = H$. 这说明 $H, K$ 不可能都是 $G$ 的真子群. 因此群 $G$ 不能被它的两个真子群所覆盖.

(5) $\forall ab \in AB$, 则 $a, b \in G$, 由 $G$ 是群知 $ab \in G$. 故 $AB \subseteq G$. $\forall g \in G$, $|A^{-1}g| = |A|$. 因 $|A| + |B| > |G|$, 故 $A^{-1}g \cap B \neq \varnothing$, 于是有 $a \in A, b \in B$ 使得 $b = a^{-1}g$, 即 $g = ab$. 这表明 $G \subseteq AB$. 故 $G = AB$.

□

**例题 0.1** 设 $A, B$ 是群 $G$ 的两个子群且 $G = AB$. 如果子群 $C$ 包含 $A$, 则 $C = A(B \cap C)$.

**证明** 设 $c \in C$, 由 $C \subseteq G = AB$ 知存在 $a \in A, b \in B$, 使得 $c = ab$. 从而由 $C < G$ 知 $b = a^{-1}c \in C$, 故 $b \in B \cap C$. 因此 $c = ab \in A(B \cap C)$. 于是 $C \subseteq A(B \cap C)$. 又设 $a_1 b_1 \in A(B \cap C)$, 则 $a_1 \in A \subseteq C, b_1 \in C$. 由 $C < G$ 知 $a_1 b_1 \in C$. 故 $C \supseteq A(B \cap C)$. 综上 $C = A(B \cap C)$.

□

**定理 0.3**

1. 设 $V$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 $n$ 维线性空间.$S_V$ 为 $V$ 上的全变换群, $GL(V)$ 表示 $V$ 上所有可逆线性变换的集合, 则 $GL(V)$ 为 $S_V$ 的子群, 称为线性空间 $V$ 的**一般线性群**.
   又设 $SL(V)$ 为 $V$ 上所有行列式等于 1 的线性变换的集合, 则 $SL(V)$ 是 $GL(V)$(同时也是 $S_V$) 的子群, 称为**特殊线性群**.
2. 设 $V$ 是 $n$ 维 Euclid 空间. 以 $O(V)$ 表示 $V$ 上所有正交变换的集合, $SO(V)$ 表示所有行列式等于 1 的正交变换的集合, 则 $O(V)$ 是 $GL(V)$ 的子群, $SO(V)$ 是 $O(V)$ 的子群. $O(V)$ 称为 $V$ 的**正交变换群**, 简称**正交群**, $SO(V)$ 称为**转动群** (或**特殊正交变换群**、**特殊正交群**).

♡

**注** 将上述 $S_V$ 换成数域 $\mathbb{P}$ 上的全体方阵构成的乘法群, 线性变换换成方阵, 结论也成立.

**证明**

□

**定义 0.4**

设 $H, K$ 是群 $G$ 的子群, 又 $a \in G$. 集合 $aH$ 与 $Ha$ 分别称为以 $a$ 为代表的 $H$ 的**左陪集**与**右陪集**. 集合 $HaK$ 称为以 $a$ 为代表元的 $H, K$ 的**双陪集**.

♣

**定理 0.4**

设 $H, K$ 是群 $G$ 的非空子集. 则

(1) 由

$$aRb \iff a^{-1}b \in H$$

所确定的 $G$ 中的关系 $R$ 是一个等价关系的充要条件是 $H$ 是 $G$ 的子群. 并且当 $H$ 是 $G$ 的子群时, $g$

所在的等价类为 $gH$, 故 $H$ 的左陪集族 $\{gH : g \in G\}$(集合无相同元素) 是 $G$ 的一个分划. 即

$$G = \bigsqcup_{g \in G} gH,$$

其中 $a$ 取遍不同 $H$ 的左陪集的代表元.

(2) 由

$$aRb \iff ab^{-1} \in H$$

所确定的 $G$ 中的关系 $R$ 是一个等价关系的充要条件是 $H$ 是 $G$ 的子群. 并且当 $H$ 是 $G$ 的子群时, $g$ 所在的等价类为 $Hg$, 故 $H$ 的右陪集族 $\{Hg : g \in G\}$(集合无相同元素) 是 $G$ 的一个分划. 即

$$G = \bigsqcup_{g \in G} Hg,$$

其中 $g$ 取遍不同 $H$ 的右陪集的代表元.

(3) 由

$$xRy \iff x \in HyK$$

所确定的 $G$ 中的关系 $R$ 是一个等价关系的充要条件是 $H, K$ 是 $G$ 的子群. 并且当 $H, K$ 是 $G$ 的子群时, $g$ 所在的等价类为 $HgK$, 故 $H$ 的右陪集族 $\{HgK : g \in G\}$(集合无相同元素) 是 $G$ 的一个分划. 即

$$G = \bigsqcup_{g \in G} HgK,$$

其中 $g$ 取遍不同 $H, K$ 的双陪集的代表元.

♡

**证明**

(1) **充分性**: 由 $a^{-1}a \in H$ 知 $aRa(\forall a \in G)$. 又设 $aRb$, 即 $a^{-1}b \in H$, 故 $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$, 即 $bRa$. 再设 $aRb, cRb$, 即 $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$, 故 $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$, 即 $aRc$. 这样知 $R$ 是等价关系. 又由

$$gRx \iff g^{-1}x \in H \iff x = g(g^{-1}x) \in gH$$

知 $g$ 所在的等价类为 $gH$. 由定理 1.18知 $\{gH : g \in G\}$ 为 $G$ 的一个分划.

**必要性**: 由等价关系的定义和定理 0.1是显然的.

(2) **充分性**: 由 $aa^{-1} \in H$ 知 $aRa(\forall a \in G)$. 又设 $aRb$, 即 $ab^{-1} \in H$, 故 $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$, 即 $bRa$. 再设 $aRb, cRb$, 即 $ab^{-1}, cb^{-1} \in H$, 故 $ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$, 即 $aRc$. 这样知 $R$ 是等价关系. 又由

$$xRg \iff xg^{-1} \in H \iff x = (xg^{-1})g \in Hg$$

知 $g$ 所在的等价类为 $Hg$. 由定理 1.18知 $\{Hg : g \in G\}$ 为 $G$ 的一个分划.

**必要性**: 由等价关系的定义和定理 0.1是显然的.

(3) **充分性**: 对 $\forall x \in G$, 由 $x = 1 \cdot x \cdot 1 \in HxK$ 知 $xRx$. 设 $x, y \in G$ 且 $xRy$, 则 $x \in HyK$, 于是存在 $h \in H, k \in K$, 使得 $x = hyk$. 从而

$$y = h^{-1}xk^{-1} \in HxK \Longrightarrow yRx.$$

又设 $x, y, z \in G$ 且 $xRy, yRz$, 则 $x \in HyK, y \in HzK$, 于是存在 $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$, 使得

$$x = h_1yk_1 = h_1h_2zk_1k_2 \in HzK \Longrightarrow xRz.$$

综上可知 $R$ 是等价关系. 又由

$$gRx \iff g \in HxK \iff g = hxk\,(h \in H, k \in K) \iff x = h^{-1}gk^{-1} \in HgK.$$

知 $g$ 所在的等价类为 $HgK$. 由定理 1.18知 $\{HgK : g \in G\}$ 为 $G$ 的一个分划.

**必要性**: 由等价关系的定义和定理 0.1是显然的.

□

**定理 0.5**

设 $A,B,H$ 是群 $G$ 的非空子群,$a,b\in G$, 则

(1) $a\in aH$.

(2) $aH=H$ 的充分必要条件是 $a\in H$.

(3) $aH$ 为子群的充分必要条件是 $a\in H$.

(4) $aH=bH \iff a^{-1}b\in H \iff b^{-1}a\in H \iff aH\cap bH\neq\varnothing$;

$Ha=Hb \iff ab^{-1}\in H \iff ba^{-1}\in H \iff Ha\cap Hb\neq\varnothing$.

(5) $AB$ 也是群 $G$ 的子群的充分必要条件是 $AB=BA$.

**证明**

(1) 只需注意到 $a=ae\in aH$.

(2) 如果 $aH=H$, 因 $a\in aH$, 所以 $a\in H$.

反之, 如果 $a\in H$, 则 $a^{-1}\in H$. 从而

$$aH\subseteq H\cdot H=H,\quad H=(aa^{-1})H=a(a^{-1}H)\subseteq aH,$$

所以 $aH=H$.

(3) 设 $aH$ 为子群. 因为 $a\in aH$, 所以 $a^{-1}\in aH$, 于是 $e=aa^{-1}\in aH$. 从而存在 $h\in H$, 使 $e=ah$. 所以 $a=eh^{-1}=h^{-1}\in H$.

另一方面, 如果 $a\in H$, 则 $aH=H$ 为子群.

(4) 如果 $aH=bH$, 则

$$a^{-1}bH=a^{-1}aH=H,$$

从而由定理 0.5(2)知,$a^{-1}b\in H$.

反之, 如果 $a^{-1}b\in H$, 则又由定理 0.5(2)得 $a^{-1}bH=H$, 于是

$$aH=a(a^{-1}bH)=(aa^{-1})bH=ebH=bH.$$

故 $aH=bH \iff a^{-1}b\in H$. 交换 $a,b$ 位置即得 $bH=aH \iff b^{-1}a\in H$.

若 $aH=bH$, 则显然有 $aH\cap bH\neq\varnothing$. 假设 $aH\cap bH\neq\varnothing$. 任取 $g\in aH\cap bH$, 则存在 $h_1,h_2\in H$, 使

$$ah_1=g=bh_2.$$

从而

$$aH=a(h_1H)=(ah_1)H=(bh_2)H=b(h_2H)=bH.$$

故 $aH=bH \iff aH\cap bH\neq\varnothing$.

$Ha=Hb$ 的等价条件同理可证.

(5) **必要性**: 设 $AB$ 为 $G$ 的子群. 对任意的 $ab\in AB$, 其中 $a\in A,b\in B$, 有 $(ab)^{-1}\in AB$. 因而存在 $a_1\in A,b_1\in B$, 使 $a_1b_1=(ab)^{-1}$. 从而

$$ab=(a_1b_1)^{-1}=b_1^{-1}a_1^{-1}\in BA,$$

所以

$$AB\subseteq BA.$$

反之, 对任意的 $ba\in BA$, 其中 $b\in B,a\in A$, 有 $(ba)^{-1}=a^{-1}b^{-1}\in AB$. 于是

$$ba=(a^{-1}b^{-1})^{-1}\in AB,$$

所以

$$BA\subseteq AB.$$

这就证明了 $AB=BA$.

**充分性**: 对任意的 $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$, 其中 $a_i \in A, b_i \in B\ (i = 1, 2)$, 由于 $AB = BA$, 因此由定理 0.2(1)和定理 0.2(3)有

$$a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1} \in ABA = A(BA) = A(AB) = (AA)B = AB,$$

由此知 $AB$ 是 $G$ 的子群.

□

**定义 0.5**

设 $H, K$ 是群 $G$ 的子群.

(1) 由定理 0.4(1)定义 $G$ 中的等价关系 $R$ 为

$$aRb \iff a^{-1}b \in H.$$

将 $G$ 对等价关系 $R$ 的商集合, 即以左陪集 $gH, g \in G$ 为元素的集合记为 $G/H = \{gH : g \in G\}$, 称为 $G$ 对 $H$ 的**左陪集空间**. $G/H$ 中元素个数 $|G/H|$ 称为 $H$ (在 $G$ 中) 的**指数**, 记为 $[G : H]$.

这个等价关系 $R$ 的完全代表系就称为关于 $H$ 的**左陪集代表元系**或**左陪集代表系**. 显然左陪集代表系的阶就是 $[G : H]$.

(2) 由定理 0.4(2)定义 $G$ 中的等价关系 $R$ 为

$$aRb \iff ab^{-1} \in H.$$

将 $G$ 对等价关系 $R$ 的商集合, 即以右陪集 $Hg, g \in G$ 为元素的集合记为 $G/H = \{Hg : g \in G\}$, 称为 $G$ 对 $H$ 的**右陪集空间**.

这个等价关系 $R$ 的完全代表系就称为关于 $H$ 的**右陪集代表元系**或**右陪集代表系**. 显然右陪集代表系的阶就是 $[G : H]$.

(3) 由定理 0.4(3)定义 $G$ 中的等价关系 $R$ 为

$$xRy \iff x \in HyK.$$

将 $G$ 对等价关系 $R$ 的商集合, 即以双陪集 $HgK, g \in G$ 为元素的集合记为 $G/R = \{HgK : g \in G\}$, 称为 $G$ 对 $H$ 的**双陪集空间**.

这个等价关系 $R$ 的完全代表系就称为关于 $(H, K)$– **双陪集代表元系**或**双陪集代表系**. 显然双陪集代表系的阶就是 $|G/R|$.

♣

注 $\{1\}$ 作为 $G$ 的子群, 在 $G$ 中指数显然为 $|G|$. 故也记 $|G| = [G : 1]$.

**例题 0.2** 设 $V$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 $n$ 维线性空间, $GL(V)$ 有子群 $SL(V)$. 在 $V$ 中取定一组基, 任何一个线性变换由它在这组基下的矩阵完全确定, 可把它们等同起来.$\forall \lambda \in \mathbb{P}, \lambda \neq 0$, 令 $D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \cdots, 1)$, 于是 $D(\lambda) \in GL(V)$, 对于 $A \in GL(V)$ 有

$$ASL(V) = D(\lambda)SL(V) \iff \det A = \lambda.$$

于是

$$GL(V) = \bigcup_{\lambda \neq 0} D(\lambda)SL(V),$$

因而

$$[GL(V) : SL(V)] = +\infty.$$

证明

□

**例题 0.3** 设 $V$ 是 $n$ 维 Euclid 空间. 由 $A \in O(V)$ 有 $\det A = \pm 1$, 令 $D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \cdots, 1)$, 于是

$$O(V) = SO(V) \bigcup D(-1)SO(V), \quad [O(V) : SO(V)] = 2.$$

证明

□

**定理 0.6**

设 $H$ 是群 $G$ 的子群, 则 $G$ 中由

$$aRb,\ 若\ a^{-1}b \in H$$

所定义的关系 $R$ 为同余关系的充分必要条件是

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H.$$

此时称 $H$ 为 $G$ 的**正规子群**, 记为 $H \lhd G$. 同时, 商集合 $G/H$ 对同余关系 $R$ 导出的运算

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G$$

也构成一个群, 称为 $G$ 对 $H$ 的**商群**. 商群 $G/H$ 的幺元为 $1 \cdot H = H$. 为方便计, 常将商群 $G/H$ 中元素记为 $\overline{g} = gH$. 有时也将商群 $G/H$ 记作 $\dfrac{G}{H}$. 并且 $H$ 为 $G/H$ 的幺元,$aH$ 的逆元为 $a^{-1}H$.

♡

**证明** 设 $R$ 为同余关系. 又 $g \in G, h \in H$, 于是有

$$gRgh, \quad g^{-1}Rg^{-1},$$

因而 $gg^{-1}R(ghg^{-1})$, 即 $1Rghg^{-1}$, 亦即 $ghg^{-1} \in H$.

反之, 设 $\forall g \in G, h \in H$ 有 $ghg^{-1} \in H$. 设 $aRb, cRd$, 则 $a^{-1}b, c^{-1}d \in H$, 即 $\exists h_1, h_2 \in H$, 使 $b = ah_1, d = ch_2$, 从而 $c^{-1} = h_2d^{-1}$. 因而 $(ac)^{-1}(bd) = c^{-1}a^{-1}ah_1d = h_2\left(d^{-1}h_1d\right) \in H$, 则有 $(ac)R(bd)$, 即 $R$ 为同余关系.

设 $R$ 为同余关系. 因 $a$ 所在等价类为 $aH$, 由定理 1.20 知 $G/H$ 中的乘法为

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G. \tag{1}$$

显然有 $(aH \cdot bH)cH = abcH = aH(bH \cdot cH), 1H \cdot aH = aH, a^{-1}H \cdot aH = 1 \cdot H$, 故 $G/H$ 为群.

□

**定义 0.6 (极大正规子群)**

设 $G$ 是一个群,$H \lhd G$, 如果 $H$ 满足以下两个条件:

(1) $H \subset G$, 即 $H \neq G$.

(2) 若 $K \lhd G$ 且 $H \subseteq K \subseteq G$, 则必有 $K = H$ 或 $K = G$.

则称 $H$ 是 $G$ 的**极大正规子群**.

♣

**定理 0.7**

如果关系 $\sim$ 是幺半群 (或半群)$G$ 中的同余关系, 那么商集合 $G/\sim$ 对导出的运算 (见定理 1.20) 也是幺半群 (或半群), 称之为**商幺半群** (或**商半群**).

若 $G$ 是交换幺半群 (或交换半群), 则商集合 $G/\sim$ 对导出的运算也是交换幺半群 (或交换半群).

♡

**证明**

□

**定理 0.8**

设 $H$ 是群 $G$ 的子群, 则下列条件等价:

(1) $H \lhd G$;

(2) 对 $\forall a, b \in G$, 如果 $ab \in H$, 则 $ba \in H$;

(3) $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H \iff gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$;

(4) $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$;

(5) $gH = Hg, \forall g \in G \iff GH = HG$;

(6) $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \forall g_1, g_2 \in G$.

♡

注 由这个定理 0.8(4)可知**一个群的任意正规子群都是 Abel 群.**

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $H$ 是 $G$ 的正规子群, 则对任意的 $a,b \in G$, 如果 $ab \in H$, 则

$$ba = b(ab)b^{-1} \in H.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). 对 $\forall a,b \in G$, 如果由 $ab \in H$, 可推出 $ba \in H$, 则对任意的 $a \in G, h \in H$, 由于 $a^{-1}(ah) = h \in H$, 因此

$$aha^{-1} = (ah)a^{-1} \in H,$$

(3) $\Rightarrow$ (4). 对 $\forall g \in G$, 由 $gHg^{-1} \subseteq H$ 知, 对 $\forall h \in H$, 有 $g^{-1}hg = \left(g^{-1}\right)^{-1} hg^{-1} \in H$. 从而 $h = g\left(g^{-1}hg\right)g^{-1} \in gHg^{-1}$. 故由 $h$ 的任意性知 $H \subseteq gHg^{-1}$. 因此 $gHg^{-1} = H,\forall g \in G$.

(4) $\Rightarrow$ (5). $\forall g \in G, h \in H$ 有 $gh = ghg^{-1}g \in Hg, hg = gg^{-1}hg \in gH$, 故 $gH = Hg$.

(5) $\Rightarrow$ (6). 设 $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2, h \in H$. 由 $gH = Hg$ 知 $\exists h_1', h' \in H$, 使 $h_1g_2 = g_2h_1'$, $g_2h = h'g_2$. 于是 $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_1'h_2 \in g_1g_2H, g_1g_2h = g_1h'g_2 \cdot 1 \in g_1H \cdot g_2H$, 故 $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$.

(6) $\Rightarrow$ (1). 设 $g \in G, h \in H$, 故有 $ghg^{-1} \in gHg^{-1}H = gg^{-1}H = H$, 则 $H \lhd G$.

□

**命题 0.3**

(1) Abel 群 $G$ 的任一子群 $H$ 都是正规子群, 商群 $G/H$ 也是 Abel 群.

(2) 若 $H$ 是群 $G$ 的子群且 $H \supseteq N$, $N \lhd G$, 则 $N \lhd H$.

(3) 设 $H$ 和 $N$ 分别是群 $G$ 的子群和正规子群. 证明:$HN$ 是 $G$ 的子群.

(4) 若 $G$ 是一个群, 则 $G$ 的任意正规子群的交 $\bigcap\limits_{H \lhd G} H \lhd G$.

(5) 设 $G$ 是一个群, 且 $N_1, N_2, \cdots, N_k \lhd G$, 则 $N_1N_2\cdots N_k \lhd G$.

(6) 设 $G$ 是一个群,$N_1, N_2, \cdots N_k \lhd G$, 且 $N_i \cap \prod\limits_{j=1}^{i-1} N_j = \{1\}(i \neq j)$, 则对 $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 有

$$n_in_j = n_jn_i,\ \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

并且

$$N_j \subseteq C_G(N_i) \triangleq \{g \in G \mid gn_i = n_ig, \forall n_i \in N_i\},\ \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

证明

(1) 因为

$$aH = \{ah \mid h \in H\} = \{ha \mid h \in H\} = Ha, \quad \forall a \in G,$$

所以 $H$ 是 $G$ 的正规子群.

对 $\forall g_1H, g_2H \in G/H$, 由定理 0.8(6)有

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H = g_2g_1H = g_2Hg_1H.$$

故 $G/H$ 也是 Abel 群.

(2) 由命题 0.2(3)知 $N$ 是 $H$ 的子群. 又由 $N \lhd G$ 知

$$gng^{-1} \in N \subseteq H,\ \forall n \in N,\ g \in H.$$

故 $N \lhd H$.

(3) 由于 $N$ 是 $G$ 的正规子群, 因此对任意的 $h \in H$, 有 $hN = Nh$. 由此推出,$HN = NH$, 从而由定理 0.5(5)知,$HN$ 为 $G$ 的子群.

(4) 设 $I$ 为任意指标集,$H_i \lhd G$,$\forall i \in I$. 则对 $\forall g \in G$, 有

$$gH_ig^{-1} \subseteq H_i, \quad \forall i \in I.$$

对 $\forall h \in \bigcap_{i\in I} H_i$, 有 $h \in H_i, \forall i \in I$. 从而由上式可得

$$ghg^{-1} \in H_i, \quad \forall i \in I \Longrightarrow ghg^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i.$$

进而 $g\bigcap_{i\in I} H_i g^{-1} \subseteq \bigcap_{i\in I} H_i$. 故由定理 0.8(2)知 $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$.

(5) 由 $N_i \lhd G, i = 1, 2, \cdots, k$ 知

$$gn_ig^{-1} \in N_i, \quad \forall n_i \in N_i, g \in G.$$

于是对 $\forall n_1n_2\cdots n_k \in N_1N_2\cdots N_k, g \in G$, 有

$$g(n_1n_2\cdots n_k)g^{-1} = \left(gn_1g^{-1}\right)\left(gn_2g^{-1}\right)\cdots\left(gn_kg^{-1}\right) \in N_1N_2\cdots N_k.$$

故 $N_1N_2\cdots N_k \lhd G$.

(6) 设 $n_i \in N_i, n_j \in N_j$, 不妨设 $i < j$, 则

$$n_in_jn_i^{-1}n_j^{-1} = n_i(n_jn_i^{-1}n_j^{-1}) \in N_i \subseteq N_1N_2\cdots N_{j-1};$$

$$n_in_jn_i^{-1}n_j^{-1} = (n_in_jn_i^{-1})n_j^{-1} \in N_j,$$

所以

$$n_in_jn_i^{-1}n_j^{-1} \in (N_1N_2\cdots N_{j-1}) \cap N_j = \{1\},$$

从而 $n_in_jn_i^{-1}n_j^{-1} = 1$, 由此得 $n_in_j = n_jn_i$. 进而

$$n_j \in C_G(N_i),$$

再由 $n_j$ 的任意性知

$$N_j \subseteq C_G(N_i).$$

再由 $i, j$ 的任意性知结论成立.

□

**例题 0.4** 将商群 $G/H$ 中元素记为 $\overline{g} = gH$, 则

(1) $SL(V) \lhd GL(V), GL(V)/SL(V) = \{\overline{D(\lambda)} | \lambda \neq 0\}$ 且 $\overline{D(\lambda)D(\mu)} = \overline{D(\lambda\mu)}$;

(2) $SO(V) \lhd O(V), O(V)/SO(V) = \{\overline{D(1)}, \overline{D(-1)}\}$;

(3) $A_n \lhd S_n, S_n/A_n = \{\overline{1}, \overline{\sigma} | \sigma$ 奇置换$\}$ 且

$$\overline{1} \cdot \overline{\sigma} = \overline{\sigma} \cdot \overline{1} = \overline{\sigma}, \quad \overline{\sigma} \cdot \overline{\sigma} = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}.$$

(4) 对任意的 $a \in G$, 由已知条件知, 存在 $b \in G$, 使 $aH = Hb$, 则 $a \in aH = Hb$, 从而 $a \in Ha \cap Hb$, 即 $Ha \cap Hb$ 非空, 因此 $Ha = Hb$, 于是 $aH = Ha$. 所以由定理 0.8知 $H$ 是 $G$ 的正规子群.

证明

□

**例题 0.5** 令 $G$ 是 $n$ 阶有限群, $S$ 是 $G$ 的一个子集, $|S| > \frac{n}{2}$. 试证对任意 $g \in G$, 存在 $a, b \in S$ 使得 $g = ab$.

证明 由命题 0.1知, 对任一 $g \in G$, $gS^{-1}$ 含有 $|S|$ 个元, 这里 $S^{-1}$ 是 $S$ 中元的所有逆元组成的集合. 因为 $|S| > \frac{|G|}{2}$, 故 $gS^{-1} \cap S \neq \varnothing$. 从而存在 $a, b \in S$, 使得 $gb^{-1} = a$, 即 $g = ab$.

□

**定理 0.9 (Lagrange 定理)**

设 $H$ 是有限群 $G$ 的子群, 记 1 为 $G, H$ 的幺元, 则有

$$[G:1] = [G:H][H:1] \tag{2}$$

即

$$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}.$$

因而子群 $H$ 的阶是群 $G$ 的阶的因子.

♡

注 这个结论对无限群 $G$ 也正确, 此时等式两边都是 $+\infty$.

证明 设 $a \in G$. 显然, 映射 $h \to ah$ 是 $H$ 到 $aH$ 上的一一对应, 因而 $|aH| = |H| = [H : 1]$. 又由定理 0.4知 $G = \bigcup_{a\in G} aH$ 为不相交的并, $\{aH : a \in G\}$ 的不同左陪集个数为 $[G : H]$, 故式 (2) 成立.

□

**推论 0.1**

(1) 设 $H$ 是有限群 $G$ 的子群,$K$ 是 $H$ 的子群, 则 $[G:K]=[G:H][H:K]$, 进而 $[G:H]=\dfrac{[G:K]}{[H:K]}$.

(2) 设 $G$ 为有限群, $H \lhd G$, 则商群 $G/H$ 的阶 $[G/H:H]=[G:H]=\dfrac{[G:1]}{[H:1]}$.

(3) 设 $G$ 为无限群, $H \lhd G$, 则商群 $G/H$ 的阶 $[G/H:H]=[G:H]$.

(4) 设 $A,B$ 是群 $G$ 的有限子群, 则 $|A|\cdot|B|=|AB|\cdot|A\cap B|$.

♡

证明

(1) 这是Lagrange 定理的直接推论.

(2) 这是Lagrange 定理的直接推论.

(3) 这是Lagrange 定理的直接推论.

(4) 易知 $AB=\bigcup_{a\in A} aB$. 记 $\Sigma=\{aB \mid a\in A\}$, 则 $|AB|=|\Sigma|\cdot|B|$. 令

$$\begin{aligned}\phi: A/A\cap B &\longrightarrow \Sigma\\ x(A\cap B) &\longmapsto xB,\quad \forall x\in A.\end{aligned}$$

(i) 如果 $x(A\cap B)=y(A\cap B)(x,y\in A)$, 则 $y^{-1}x\in A\cap B\subseteq B$, 从而 $xB=yB$, 所以 $\phi$ 为 $A/A\cap B$ 到 $\Sigma$ 的良定义的映射.

(ii) 设 $x(A\cap B), y(A\cap B)\in A/A\cap B$, 有 $\phi(x(A\cap B))=\phi(y(A\cap B))$, 即 $xB=yB$, 则 $y^{-1}x\in B$. 又因为 $x,y\in A$, 而 $A$ 为群, 所以 $y^{-1}x\in A$, 于是 $y^{-1}x\in A\cap B$. 从而 $x(A\cap B)=y(A\cap B)$. 所以 $\phi$ 为单映射.

(iii) 对任意的 $x\in A$, 有 $x(A\cap B)\in A/A\cap B$, 且 $\phi(x(A\cap B))=xB$, 所以 $\phi$ 为满映射.

由此得 $|A/A\cap B|=|\Sigma|$, 所以再利用Lagrange 定理可得

$$|AB|\cdot|A\cap B|=|B|\cdot|\Sigma|\cdot|A\cap B|=|B|\cdot|A/A\cap B|\cdot|A\cap B|=|A|\cdot|B|.$$

□

**命题 0.4**

(1) 设 $A$ 和 $B$ 均为群 $G$ 的子群, 则

(i) $g(A\cap B)=gA\cap gB, \forall g\in G$.

(ii) 若 $A$ 和 $B$ 均有有限的指数, 即 $[G:A],[G:B]$ 有限, 则 $A\cap B$ 也有有限的指数, 即 $[G:A\cap B]$ 有限.

(2) 如果 $R$ 是群 $G$ 对于子群 $A$ 的右陪集代表元系, 则 $R^{-1}$ 是群 $G$ 对于 $A$ 的左陪集代表元系.

(3) 设 $A<G, B<G$. 如果存在 $a,b\in G$, 使得 $Aa=Bb$, 则 $A=B$.

(4) 设 $H$ 和 $K$ 分别是有限群 $G$ 的两个子群, $g\in G$, 则存在 $k_1,k_2,\cdots,k_t\in K$ 和 $h_1,h_2,\cdots,h_s\in H$, 其中

$t=[K:K\cap g^{-1}Hg], s=[H:H\cap gKg^{-1}]$, 使得

$$HgK=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}Hgk_i,\quad HgK=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant s}h_igK.$$

并且

$$|HgK|=|H|[K:K\cap g^{-1}Hg]=|K|[H:H\cap gKg^{-1}],$$
$$[K:K\cap g^{-1}Hg]=[H:H\cap gKg^{-1}].$$

(5) 设 $A$ 是群 $G$ 的具有有限指数的子群, 则存在 $G$ 的一组元 $g_1,g_2,\cdots,g_m$, 它们既可以作为 $A$ 在 $G$ 中的右陪集代表元系, 又可以作为 $A$ 在 $G$ 中的左陪集代表元系.

**证明**

(1) (i) $g(A\cap B)\subseteq gA$, $g(A\cap B)\subseteq gB$, 故 $g(A\cap B)\subseteq gA\cap gB$. 反之, $\forall x=gh\in gA\cap gB$, 则 $h\in A\cap B$, 从而 $x=gh\in g(A\cap B)$. 于是 $g(A\cap B)=gA\cap gB, \forall g\in G$.

(ii) 证法一:命题 0.4(1)(i)表明 $A\cap B$ 的任一左陪集是 $A$ 的一个左陪集和 $B$ 的一个左陪集之交. 若 $A$ 和 $B$ 均有有限个左陪集, 则 $A\cap B$ 也只有有限个左陪集. 由此即得证.

证法二:用 $\langle AB\rangle$ 表示 $G$ 的由 $AB$ 生成的子群. 则 $|\langle AB\rangle|\geqslant|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\cap B|}$. 两边同乘 $\dfrac{|G|}{|A||B|}$, 再利用Lagrange 定理得到

$$[G:A\cap B]=\frac{|G|}{|A\cap B|}\leqslant\frac{|G|}{|A|}\cdot\frac{|\langle AB\rangle|}{|B|}\leqslant\frac{|G|}{|A|}\cdot\frac{|G|}{|B|}<+\infty.$$

(2) 由题设知 $G=\bigcup\limits_{g\in R}Ag$, 并且满足 $Ag\cap Ah=\varnothing,\forall g\neq h,\ g,h\in R$. 需要验证 $G=\bigcup\limits_{x\in R^{-1}}xA$, 并且满足 $xA\cap yA=\varnothing,\ \forall x\neq y,\ x,y\in R^{-1}$.

显然 $G\supseteq\bigcup\limits_{x\in R^{-1}}xA$.$\forall z\in G$, 由题设 $z^{-1}\in Ag$, 对某一 $g\in R$, 于是 $z\in g^{-1}A^{-1}=g^{-1}A$. 故 $G\subseteq\bigcup\limits_{x\in R^{-1}}xA$. 因此 $G=\bigcup\limits_{x\in R^{-1}}xA$. 若 $z\in xA\cap yA$, 其中 $x,y\in R^{-1}$ 且 $x\neq y$, 即 $z=xa=yb$, $a,b\in A$, 从而

$$Ax^{-1}\cap Ay^{-1}=A(az^{-1})\cap A(bz^{-1})=Az^{-1}\neq\varnothing$$

其中 $x^{-1},y^{-1}\in R$. 从而由题设 $x^{-1}=y^{-1}$, 进而 $x=y$ 矛盾!

(3) 因 $A=Bba^{-1}$, 故 $ba^{-1}=1\cdot ba^{-1}\in Bba^{-1}=A$, 但 $A$ 是子群, 故 $(ba^{-1})^{-1}=ab^{-1}\in A$. 于是 $A=Aab^{-1}=Bbb^{-1}=B$.

(4) 定义 $K$ 上的一个关系 $\sim$:

$$k\sim k'\Longleftrightarrow Hgk=Hgk'.$$

显然这个关系是等价关系. 设这个等价关系的完全代表系为 $\{k_1,k_2,\cdots,k_t\}$, 则由定理 1.18知

$$K=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}[k_i],\ \text{其中}\ [k_i]=\{k'\in K\mid Hgk_i=Hgk'\}. \tag{3}$$

从而 $[k_i]\cap[k_j]=\varnothing, i\neq j$. 于是 $Hgk_i\neq Hgk_j, i\neq j$, 故由定理 0.5(4)知 $Hgk_i\cap Hgk_j=\varnothing, i\neq j$.

对 $\forall hgk\in HgK$, 有 $h\in H, k\in K$, 则由(3)式知, 存在 $i\in[1,t]\cap\mathbb{N}$, 使得 $k\in[k_i]$, 即 $Hgk=Hgk_i$. 从而 $hgk\in Hgk=Hgk_i$. 故 $HgK\subseteq\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant t}Hgk_i$. 又显然 $HgK\supseteq\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant t}Hgk_i$. 因此

$$HgK=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}Hgk_i.$$

因此由命题 0.1知

$$|HgK|=\sum_{i=1}^{t}|Hgk_i|=|H|\cdot t.$$

注意到对 $\forall k,k'\in K$, 有

$$k\sim k'\iff Hgk=Hgk'\iff gkk'^{-1}g^{-1}\in H\iff kk'^{-1}\in K\cap g^{-1}Hg.$$

故由定理 0.4(2)知

$$[k]=\{k'\in K\mid Hgk=Hgk'\}=(K\cap g^{-1}Hg)k,\quad \forall k\in K.$$

因此由(3)式可得

$$K=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}[k_i]=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}(K\cap g^{-1}Hg)k_i.$$

于是 $t=[K:K\cap g^{-1}Hg]$. 从而由推论 0.1(1)可得

$$|HgK|=|H|\cdot[K:K\cap g^{-1}Hg].$$

同理可得

$$HgK=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant s}h_igK,\ \text{其中}s=[H:H\cap gKg^{-1}].$$

故由命题 0.1知

$$|HgK|=\sum_{i=1}^{s}|h_igK|=|K|\cdot[H:H\cap gKg^{-1}].$$

另外, 考虑映射

$$\begin{aligned}\varphi:&K\cap g^{-1}Hg\longrightarrow H\cap gKg^{-1},\\ &x\longmapsto gxg^{-1},\ \forall x\in K\cap g^{-1}Hg.\end{aligned}$$

设 $x\in K\cap g^{-1}Hg$, 则存在 $k\in K,h\in H$, 使得 $x=g^{-1}hg=k$. 从而

$$\varphi(x)=gxg^{-1}=h=gkg^{-1}\in H\cap gKg^{-1},$$

即 $\varphi(K\cap g^{-1}Hg)\subseteq H\cap gKg^{-1}$. 又显然当 $x_1,x_2\in K\cap g^{-1}Hg$ 且 $x_1=x_2$ 时, 有 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 故 $\varphi$ 是良定义的映射. 设 $h_1=gk_1g^{-1}\in H\cap gKg^{-1}$, 则令 $x_1=g^{-1}h_1g=k_1\in K\cap g^{-1}Hg$, 则 $\varphi(x_1)=h_1=gk_1g^{-1}$. 故 $\varphi$ 是满射. 若 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$, 则 $gx_1g^{-1}=gx_2g^{-1}$, 从而 $x_1=x_2$. 故 $\varphi$ 是单射. 因此 $\varphi$ 是 $K\cap g^{-1}Hg$ 到 $H\cap gKg^{-1}$ 的双射, 故

$$|K\cap g^{-1}Hg|=|H\cap gKg^{-1}|.$$

(5) 由定理 0.4(3), 可将 $G$ 写成双陪集的无交并: $G=\bigsqcup_{g\in R}AgA$, 其中 $R$ 是 $(A,A)$-的双陪集代表系. 对 $\forall g\in G$, 由命题 0.4(4)知每个双陪集 $AgA$ 既是 $[A:A\cap gAg^{-1}]$ 个互不相交右陪集之并, 也是 $[A:A\cap gAg^{-1}]$ 个互不相交左陪集之并. 记 $t=[A:A\cap gAg^{-1}]$, 则有无交并

$$AgA=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}Aga_i=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}b_igA,$$

其中 $a_i,b_i\in A$. 于是 $A=Ab_i=a_iA$, 故有无交并

$$AgA=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}Ab_iga_i,\quad AgA=\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t}b_iga_iA.$$

因为 $a_i,b_i,t$ 与 $g$ 有关, 所以记 $b_i=b_i(g),a_i=a_i(g),t=t(g)$, 于是

$$G=\bigsqcup_{g\in R}AgA=\bigsqcup_{g\in R}\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t(g)}Ab_i(g)ga_i(g)=\bigsqcup_{g\in R}\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant t(g)}b_i(g)ga_i(g)A.$$

因此

$$\bigcup_{g\in R}\{b_i(g)ga_i(g)\mid 1\leqslant i\leqslant t(g)\}$$

既是 $G$ 关于 $A$ 的右陪集的一个代表元系, 也是 $G$ 关于 $A$ 的左陪集的一个代表元系.

□