0.1 组合类问题

例题 0.1 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵, 其中元素 $A(i,j)\in\{-1,1\}$, 且 A 的行向量两两正交. 若对任意的 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$,$j\in\{1,2,\ldots,l\}$, 都有 $A(i,j)=1$, 证明:$kl\leqslant n$.

证明 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ 是矩阵 A 的前 k 个行向量. 根据题意, 这些向量两两正交. 即对于任意 $i\neq j$ 且 $1\leq i,j\leq k$, 我们有:

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j=\sum_{p=1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0.$$

我们可以将这个求和式分解为两部分: 前 l 个分量和后 $n-l$ 个分量.

$$\sum_{p=1}^{l}A(i,p)A(j,p)+\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0$$

根据题设, 对于 $1\leq i\leq k$ 和 $1\leq p\leq l$, 都有 $A(i,p)=1$. 所以, 对于任意 $1\leq i,j\leq k$ 且 $i\neq j$, 上式的第一部分为:

$$\sum_{p=1}^{l}A(i,p)A(j,p)=\sum_{p=1}^{l}(1)(1)=l$$

将此结果代入, 我们得到:

$$l+\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=0\implies\sum_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=-l$$

现在, 我们定义 k 个新的向量 $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots,\mathbf{c}_k\in\mathbb{R}^{n-l}$, 其中每个向量 $\mathbf{c}_i$ 由对应行向量 $\mathbf{a}_i$ 的后 $n-l$ 个分量构成:

$$\mathbf{c}_i=(A(i,l+1),A(i,l+2),\ldots,A(i,n)).$$

对于这些新向量, 我们有如下的点积关系:

(i) 对于 $i\neq j$,$\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j=\sum\limits_{p=l+1}^{n}A(i,p)A(j,p)=-l$.

(ii) 对于 $i=j$,$\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_i=\sum\limits_{p=l+1}^{n}(A(i,p))^2=\sum\limits_{p=l+1}^{n}1^2=n-l$, 因为 $A(i,p)\in\{-1,1\}$.

考虑这些向量的和向量 $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^{k}\mathbf{c}_i$. 我们来计算其模的平方 $\|\mathbf{v}\|^2$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}&=\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{c}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\mathbf{c}_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j)=\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_i)+\sum_{1\leq i\neq j\leq k}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j).\end{aligned}$$

在上式中, 对角线上的项 $(i=j)$ 有 k 个, 非对角线上的项 $(i\neq j)$ 有 $k(k-1)$ 个. 代入我们之前计算的点积值:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2&=k\cdot(n-l)+k(k-1)\cdot(-l)=kn-kl-k^2l+kl\\&=kn-k^2l=k(n-kl)\end{aligned}$$

因为向量模的平方必须是非负的, 所以 $\|\mathbf{v}\|^2\geq 0$.

$$k(n-kl)\geqslant 0$$

根据题意,k 是行数, 所以 $k\geq 1$(如果 $k=0$ 或 $l=0$, 则 $kl=0\leq n$ 显然成立). 故

$$n-kl\geqslant 0.$$

这直接导出了我们要证明的结论:

$$kl\leq n$$

证明完毕. □