

## 0.1 同态基本定理

### 定义 0.1 (同态核)

1. 设  $f$  是群  $G_1$  到群  $G_2$  的同态,  $G_2$  的幺元  $e_2$  的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$$

称为  $f$  的核或同态核.

$G_1$  中所有元素的像集合

$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in G_2 : \exists x \in G_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G_1\} \subseteq G_2.$$

称为  $f$  的像.

2. 设  $f$  是环  $R_1$  到环  $R_2$  的同态,  $R_2$  的零元素  $0$  的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in R_1 | f(x) = 0\}$$

称为  $f$  的核或同态核.

$G_1$  中所有元素的像集合

$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in R_2 : \exists x \in R_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in R_1\} \subseteq R_2.$$

称为  $f$  的像.

3. 设  $R$  是一个环,  $M_1, M_2$  都是  $R$  模,  $f$  是  $M_1$  到  $M_2$  的模同态.  $M_2$  的零元素  $0$  的原像集合

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in M_1 | f(x) = 0\}$$

称为  $f$  的核或同态核.

$G_1$  中所有元素的像集合

$$\operatorname{im}(f) = f(G_1) = \{y \in M_2 : \exists x \in M_1, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in M_1\} \subseteq M_2.$$

称为  $f$  的像.

### 命题 0.1

- (1) 设  $f$  是群  $G$  到群  $G'$  的同态, 则
- (i)  $\ker f$  是  $G$  的正规子群,  $f(G)$  是  $G'$  的子群.
  - (ii)  $f$  是单同态的充要条件是  $\ker f = \{1\}$ .
- (2) 设  $f$  是环  $R$  到环  $R'$  的同态, 则
- (i)  $\ker f$  是  $R$  的理想,  $f(R)$  是  $R'$  的子环.
  - (ii)  $f$  是单同态的充要条件是  $\ker f = \{0\}$ .
- (3) 设  $R$  是一个环,  $M, M'$  都是  $R$  模,  $f$  是  $M$  到  $M'$  的模同态, 则
- (i)  $\ker f$  是  $M$  的子模,  $f(M)$  是  $M'$  的子模.
  - (ii)  $f$  是单同态的充要条件是  $\ker f = \{0\}$ .

### 证明

- (1) (i) 设  $e, e'$  分别为  $G', H$  的幺元, 于是  $f(e) = e'$ , 又设  $x, y \in \ker f, z \in G'$ , 则

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e',$$

因此  $xy^{-1} \in \ker f$ , 故知  $\ker f$  是  $G'$  的子群, 而且有

$$f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1} = e',$$

即  $zxz^{-1} \in \ker f$ , 由此知  $\ker f \triangleleft G'$ .

同样由群同态与同构的基本性质知  $f(e) = e'$ , 我们有  $e' \in \operatorname{im}(f)$ . 设  $y = f(x), y' = f(x') \in \operatorname{im}(f)$ , 同样

利用同态的性质,  $yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \text{im}(f)$ . 故  $f(G)$  是  $G'$  的子群.

(ii) 设  $G'$  的幺元为  $1'$ .

**必要性:** 设  $f$  为单同态, 则对任意的  $x \in \ker f$ , 有  $f(x) = 1' = f(1)$ . 因为  $f$  为单同态, 所以  $x = 1$ , 于是  $\ker f = \{1\}$ .

**充分性:** 设  $x, y \in G$ , 如果  $f(x) = f(y)$ , 则  $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} = 1'$ , 从而  $xy^{-1} \in \ker f$ . 而  $\ker f = \{1\}$ , 所以  $xy^{-1} = 1$ , 因此  $x = y$ , 从而  $f$  为单同态.

(2) (i) 设  $x, y \in \ker f$ , 则有  $f(x - y) = 0$ , 故  $x - y \in \ker f$ . 又显然有  $\ker f$  对乘法封闭, 因此  $\ker f$  是  $R$  的子环. 又设  $a \in R$ , 则  $f(ax) = f(a)f(x) = 0, f(xa) = f(x)f(a) = 0$ , 即  $ax, xa \in \ker f$ , 故  $\ker f$  为  $R$  的理想.

(ii)

由命题 0.1(1) 知  $f(R)$  构成  $R'$  的加法子群. 由  $R$  对加法构成 Abel 群知  $f(R)$  对加法也构成 Abel 群. 由同态的性质易知  $f$  对乘法构成半群, 故  $f(R)$  是  $R'$  的子环.

(3) (i) 对  $\forall x, y \in \ker f$ , 由  $f$  是同态知  $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ . 从而  $x - y \in \ker f$ , 于是  $\ker f = N$  是加法群  $M$  的子群, 设  $a \in R, x \in N$ , 则  $f(ax) = af(x) = 0$ , 因而  $ax \in N$ , 故  $N$  是  $M$  的子模.

(ii)

□

### 命题 0.2

(1) (i) 设  $H$  是群  $G$  的正规子群.  $\pi$  是  $G$  到商群  $G/H$  的自然同态, 则有  $\ker \pi = H$ .

(ii) 设  $H, H'$  都是群  $G$  的正规子群, 且  $G/H \cong G/H'$ , 则  $H \cong H'$ .

(2) (i) 设  $I$  是环  $R$  的理想,  $\pi$  是  $R$  到商环  $R/I$  的自然同态, 则有  $\ker \pi = I$ .

(ii) 设  $I, I'$  都是环  $R$  的理想, 且  $R/I \cong R/I'$ , 则  $I = I'$ .

(3) 设  $N$  是  $R$  模  $M$  的子模,  $\pi$  是  $M$  到商模  $M/N$  的自然同态, 则有  $\ker \pi = N$ .

▲

### 证明

(1) (i)

(ii)

(2) (i)

(ii) 设  $f$  为  $R/I$  到  $R/I'$  的同构,  $\pi$  为  $R$  到  $R/I$  的自然同态,  $\pi'$  为  $R$  到  $R/I'$  的自然同态, 则

$$f \cdot \pi = \pi'.$$

注意  $I, I'$  分别是  $R/I, R/I'$  的零元. 于是对  $\forall x \in \ker(f \cdot \pi)$ , 有  $f \cdot \pi(x) = f(\pi(x)) = I'$ . 再结合命题 0.2(2)(i) 可得

$$\pi(x) \in f^{-1}(I') = I \implies x \in \ker \pi = I.$$

因此  $\ker(f \cdot \pi) \subseteq I$ . 又因为

$$f \cdot \pi(I) = f(\pi(I)) = f(I) = I',$$

所以  $I \subseteq \ker(f \cdot \pi)$ . 故  $I = \ker(f \cdot \pi)$ . 故再结合命题 0.2(2)(i) 可得

$$I = \ker(f \cdot \pi) = \ker \pi' = I'.$$

(3)

□

### 定理 0.1 (群的同态基本定理)

设  $f$  是群  $G$  到群  $H$  上的同态,  $\pi$  为  $G$  到商群  $G/\ker f$  上的自然同态, 则有  $G/\ker f$  到  $f(G)$  上的群同构映射  $\bar{f}$ , 使得

$$f = \bar{f} \cdot \pi, \quad (1)$$

进而

$$G/\ker f \cong f(G).$$

如图 1 所示.



笔记

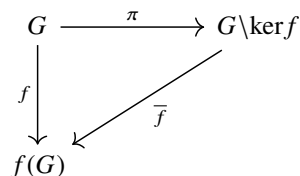


图 1

**证明** 由命题 0.1 知  $f(G)$  是  $G$  的子群. 注意到  $f$  是  $G$  到  $f(G)$  上的满映射, 故由定理 1.19 知  $f$  在  $G$  中诱导一个等价关系

$$R : xRy, \quad x, y \in G,$$

当且仅当  $f(x) = f(y)$ , 即

$$f(x) = f(y) \iff f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) = e' \iff x^{-1}y \in \ker f.$$

因而  $f$  诱导的等价关系恰好是  $G$  的正规子群  $\ker f$  诱导的同余关系, 即有商群  $G/R = G/\ker f$  且

$$\pi(x) = \pi(y) \text{ 当且仅当 } f(x) = f(y).$$

又由定理 1.19 知有  $G/\ker f$  到  $f(G)$  的一一对应  $\bar{f}$ , 使得  $\bar{f} \cdot \pi = f$ , 又  $\forall x, y \in G$  有

$$\bar{f}(\pi(x)\pi(y)) = \bar{f}(\pi(xy)) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\pi(x)) \cdot \bar{f}(\pi(y)).$$

由此知  $\bar{f}$  是  $G/\ker f$  到  $f(G)$  上的群同构.

□

### 定理 0.2

设  $f$  是群  $G$  到群  $H$  上的满同态,  $f$  的核为  $K$ , 即  $K = \ker f$ ,  $G$  中包含  $K$  的子群的集合为  $\Sigma$ ,  $H$  的子群的集合为  $\Gamma$ , 则有下列结论:

- (1)  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应;
- (2) 若  $G_1 \triangleleft G, G_1 \supseteq K$ , 则

$$f(G_1) \triangleleft H.$$

若  $H_1 \triangleleft H$ , 则

$$f^{-1}(H_1) \triangleleft G.$$

- (3) 若  $G_1 \triangleleft G, G_1 \supseteq K$ , 则

$$K \triangleleft G_1 \triangleleft G, \quad G/G_1 \cong H/f(G_1). \quad (2)$$



**证明**

- (1) 对  $\forall G_1 \in \Sigma$ , 由  $f(G_1)$  是  $G_1$  在  $f|_{G_1}$  下的像, 又  $f$  是群同态, 故  $f(G_1)$  为  $H$  的子群, 即  $f(G_1) \in \Gamma$ . 由此知  $f$  是  $\Sigma$  到  $\Gamma$  的良定义的映射. 设  $H_1 \in \Gamma, H_1$  在  $f$  下原像的集合

$$G_1 = f^{-1}(H_1) = \{x \in G | f(x) \in H_1\} \supseteq \{x \in G | f(x) = e', e' \text{ 为 } H \text{ 的么元}\} = K,$$

而且对  $\forall x, y \in G_1, f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H_1$ , 故  $xy^{-1} \in G_1$ , 因而  $G_1$  为  $G$  的子群, 故  $G_1 \in \Sigma$ , 因此  $f^{-1}$  可视为  $\Gamma$  到  $\Sigma$  的良定义的映射.

由  $f$  是  $G \rightarrow H$  上的满同态知  $f(G_1) = f(f^{-1}(H_1)) = H_1$ , 由  $H_1$  的任意性知  $ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$ . 反之, 设  $G_1 \in \Sigma$ , 显然有  $G_1 \subseteq f^{-1}(f(G_1))$ . 若  $u \in f^{-1}(f(G_1))$ , 即有  $v \in G_1$ , 使得  $f(u) = f(v)$ , 从而

$$f(uv^{-1}) = f(u)f(v)^{-1} = e'.$$

因而  $uv^{-1} \in K \subseteq G_1$ , 故  $u \in G_1$ , 即有  $f^{-1}(f(G_1)) = G_1$ , 由  $G_1$  的任意性知  $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma$ .

综上所述知  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应,  $f^{-1}$  是其逆映射. 故结论 (1) 成立.

- (2) 设  $G_1 \supset K$  且  $G_1 \triangleleft G$ , 即  $G_1 \in \Sigma$  且  $G_1 \triangleleft G$ , 则由 (1) 可知  $f(G_1)$  是  $H$  的子群. 对  $\forall g \in f(G_1), y \in H$ , 因为  $f$  是满同态, 所以存在  $a \in G_1, x \in G$ , 使得  $f(a) = g, f(x) = y$ . 从而

$$ygy^{-1} = f(x)f(a)f(x)^{-1} = f(xax^{-1}) \in f(G_1).$$

故知  $f(G_1) \triangleleft H$ .

反之, 若  $H_1 \triangleleft H$  且对  $\forall b \in f^{-1}(H_1), y \in G$ , 由

$$f(yby^{-1}) = f(y)f(b)f(y)^{-1} \in H_1$$

知  $yby^{-1} \in f^{-1}(H_1)$ , 故知  $f^{-1}(H_1) \triangleleft G$ , 即结论 (2) 成立.

- (3) 由 **命题 0.1(1)** 知  $\ker f \triangleleft G_1$ , 再由 **命题 0.1(2)** 知  $K \triangleleft G_1$ , 再结合条件可得

$$K \triangleleft G_1 \triangleleft G.$$

由结论 (2) 的证明知  $f(G_1) \triangleleft H$ . 令  $\pi'$  是  $H$  到商群  $H/f(G_1)$  的自然同态, 由此可知有  $G$  到  $H/f(G_1)$  上的同态映射  $\pi' \cdot f$ , 注意到  $H/f(G_1)$  的么元为  $f(G_1)$ , 则知

$$\begin{aligned} \ker(\pi' f) &= \{x \in G \mid \pi' f(x) = f(G_1)\} \\ &= \{x \in G \mid f(x) \in f(G_1)\} \\ &= f^{-1}(f(G_1)) = G_1. \end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应. 设  $\pi$  为  $G$  到  $G/G_1$  的自然同态, 又因为自然同态  $\pi'$  是满同态且  $f$  也是满同态, 所以由 **群的同态基本定理** 知有  $G/G_1$  到  $H/f(G_1)$  的群同构  $\bar{f}$ , 使得  $\pi' f = \bar{f} \cdot \pi$ , 亦使 **图 2** 为交换图, 即式 (2) 成立.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' f & \downarrow \pi' \\ G/G_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & H/f(G_1) \end{array}$$

图 2

□

### 推论 0.1

设  $N$  为群  $G$  的正规子群,  $\pi$  为  $G$  到商群  $G/N$  上的自然同态,  $G$  中包含  $N$  的子群的集合为  $\Sigma$ ,  $G/N$  的子群的集合为  $\Gamma$ , 则

- (1)  $\pi$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应;
- (2) 若  $H \triangleleft G, H \supseteq N$ , 则

$$\pi(H) = H/N \triangleleft G/N.$$

若  $H' \triangleleft G/N$ , 则

$$\pi^{-1}(H') \triangleleft G.$$

(3) 若  $H \triangleleft G, H \supseteq N$ , 则

$$N \triangleleft H \triangleleft G, \quad G/H \cong (G/N)/(H/N).$$



**证明** 事实上, 由于自然同态必是满同态, 故只要在定理 0.2 中将  $H$  换成  $G/N$ ,  $f$  换成  $\pi$ , 即得本推论. 对于 (3), 由命题 0.2.2 知  $\pi(H) = H/N$ , 故由定理 0.2 可得

$$N \triangleleft H \triangleleft G,$$

以及如下交换图.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \pi'' \downarrow & \searrow \pi' \pi & \downarrow \pi' \\ G/H & \xrightarrow{\bar{\pi}} & (G/N)/(H/N) \end{array}$$

图 3

□

### 定理 0.3

设  $N$  是群  $G$  的正规子群,  $\pi$  是  $G$  到商群  $G/N$  上的自然同态,  $H$  是  $G$  的一个子群, 则有下列结论:

(1)  $HN$  是  $G$  中包含  $N$  的子群且

$$N \triangleleft HN = \pi^{-1}(\pi(H)). \quad (3)$$

(2)  $H \cap N \triangleleft H$  且  $H \cap N = \ker(\pi|_H)$ ,  $\pi|_H$  表示  $\pi$  在  $H$  上的限制;

(3)

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$



**证明**

(1) 显然,  $HN \supseteq N$ . 设  $h_i n_i \in HN (i = 1, 2)$ , 则由  $N \triangleleft G$  有

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} = h_1 h_2^{-1} (h_2 (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in HN.$$

故  $HN$  是  $G$  中含  $N$  的子群且  $\pi(h_1 n_1) = \pi(h_1) \pi(n_1) = \pi(h_1) \in \pi(H)$ , 故  $HN \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$ .

又设  $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$ , 则  $\pi(x) \in \pi(H)$ , 从而存在  $h \in H$ , 使得

$$\pi(x) = \pi(h) \iff xN = hN \iff x^{-1}h \in N.$$

于是存在  $n \in N$ , 使得  $x^{-1}h = n$ . 故  $x = hn^{-1} \in HN$ . 因此  $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq HN$ . 综上所述可知  $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$ . 因为  $H$  是  $G$  的包含  $N$  的子群且  $N \triangleleft G$ , 所以由命题 0.2.2 知  $N \triangleleft HN$ .

(2) 由于  $N \triangleleft G$ , 对  $\forall h \in H, a \in N \cap H$  有  $hah^{-1} \in N \cap H$ , 故  $N \cap H \triangleleft H$ . 又  $\pi|_H(h) = \pi(h)$  且  $\ker \pi = N$ , 于是  $\ker(\pi|_H) = H \cap N$ .

(3) 由 (1) 的结论知  $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$ , 再由自然同态是满同态知

$$\pi(HN) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H).$$

由群的同态基本定理知

$$HN/\ker \pi|_{HN} \cong \pi(HN) = \pi(H) \cong H/\ker \pi|_H.$$

又注意到  $\ker(\pi|_{HN}) = HN \cap N = N, \ker \pi|_H = H \cap N$ , 故

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$

□

**定理 0.4 (环的同态基本定理)**

设  $f$  是环  $R$  到环  $R'$  上的同态,  $\pi$  是  $R$  到商环  $R/\ker f$  上的自然同态, 则有  $R/\ker f$  到  $f(R)$  上的环同构映射  $\bar{f}$ , 使得

$$f = \bar{f} \cdot \pi. \quad (4)$$

即

$$R/\ker f \cong f(R).$$



**证明** 由命题 0.1 知  $f(R)$  是  $R'$  的子环. 又  $f$  为环同态, 故也是加法群  $R$  到加法群  $f(R)$  上的同态,  $\pi$  也是加法群  $R$  到商群  $R/\ker f$  上的自然同态, 于是由群的同态基本定理知有加法群  $R/\ker f$  到加法群  $f(R)$  上的同构  $\bar{f}$ , 使  $f = \bar{f} \cdot \pi$ . 另外,  $\forall a, b \in R$  有

$$\begin{aligned} \bar{f}(\pi(a)\pi(b)) &= \bar{f}(\pi(ab)) = f(ab) = f(a)f(b) \\ &= \bar{f}(\pi(a))\bar{f}(\pi(b)), \end{aligned}$$

因而  $\bar{f}$  也是环  $R/\ker f$  到环  $f(R)$  上的环同构.

□

**定理 0.5**

设  $f$  是环  $R$  到环  $R'$  上的满同态, 又  $K = \ker f$ ,  $R$  中包含  $K$  的子环集合为  $\Sigma$ ,  $R'$  的子环集合为  $\Gamma$ , 则有下列结论:

- (1)  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应;
- (2) 若  $H$  为  $R$  的理想且  $H \supseteq K$ , 则  $f(H)$  为  $R'$  的理想;  
若  $H'$  为  $R'$  的理想, 则  $f^{-1}(H')$  为  $R$  的理想;
- (3) 若  $I$  是  $R$  的理想且  $I \supseteq K$ , 则

$$R/I \cong R'/f(I). \quad (5)$$



**证明**

- (1) 设  $H$  为  $R$  的子环且  $H \supseteq K$ , 由环同态的基本性质知  $f(H)$  为  $R'$  的子环. 故  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  上的良定义的映射. 反之, 若  $H'$  为  $R'$  的子环, 则  $H'$  也是  $R'$  的加法子群, 由定理 0.2(1) 知  $f$  建立了加法群  $R$  中包含  $K$  的子群与加法群  $R'$  的子群间的一一对应, 故  $f^{-1}(H')$  是  $R$  中唯一包含  $K$  的加法子群. 又若  $a, b \in f^{-1}(H')$ , 则有  $f(ab) = f(a)f(b) \in H'$ , 即  $ab \in f^{-1}(H')$ , 故  $f^{-1}(H')$  对乘法构成半群. 再设  $c \in f^{-1}(H')$ , 则

$$f((a+b)c) = f(a+b)f(c) = f(a)f(c) + f(b)f(c) \in H',$$

$$f(c(a+b)) = f(c)f(a+b) = f(c)f(a) + f(c)f(b) \in H'.$$

因而  $f^{-1}(H')$  是  $R$  中包含  $K$  的子环, 故  $f^{-1}$  可视为  $\Gamma \rightarrow \Sigma$  上的良定义的映射.

对  $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$ , 注意到  $H$  也是  $R$  中包含  $K$  的加法子群,  $H'$  也是  $R'$  的加法子群, 由定理 0.2(1) 知  $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$ . 由  $H$  的任意性知  $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma, ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$ . 故  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应,  $f^{-1}$  是其逆映射. 即结论 (1) 成立.

- (2) 对  $\forall a', b' \in R', h \in H$ , 由环同态都是满同态知存在  $a, b \in R$ , 使得  $f(a) = a', f(b) = b'$ . 于是再由  $H$  是  $R$  的理想知

$$a'f(a)b' = f(a)f(h)f(b) = f(ahb) \in f(H).$$

故  $f(H)$  为  $R'$  的理想.

反之, 设  $H'$  为  $R'$  的理想. 对  $\forall b \in R, x \in f^{-1}(H')$ , 由  $H'$  是  $R'$  的理想知

$$f(bx) = f(b)f(x) \in H', f(xb) = f(x)f(b) \in H'.$$

即  $bx, xb \in f^{-1}(H')$ , 故  $f^{-1}(H')$  为  $R$  的理想. 由此知结论 (2) 成立.

- (3) 设  $\pi$  是  $R$  到  $R/I$  的自然同态,  $\pi'$  是  $R'$  到  $R'/f(I)$  的自然同态. 由命题????知  $\pi'f$  是  $R$  到  $R'/f(I)$  上的环同态. 注意到

$$\begin{aligned}\ker(\pi'f) &= \{x \in R : \pi'f(x) = f(I)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(I)\} \\ &= f^{-1}(f(I)) = I.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为由 (1) 知  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应. 于是由环的同态基本定理得式(5)成立. □

### 推论 0.2

设  $A, B$  均为环  $R$  的理想且  $A \subseteq B$ , 则有  $B/A$  是  $R/A$  的理想且

$$R/B \cong (R/A)/(B/A).$$

♡

**证明** 事实上, 只要在定理 0.5 中取  $R' = R/A$ ,  $f$  为  $R$  到  $R/A$  的自然同态, 并且由定理????知  $f(B) = B/A$ , 再由定理 0.5(2) 知  $f(B) = B/A$  是  $R' = R/A$  的理想. 因此即得本推论. □

### 定理 0.6

设  $H$  为环  $R$  的子环,  $K$  为  $R$  的理想,  $\pi$  是环  $R$  到商环  $R/K$  上的自然同态, 则有

- (1)  $H + K$  为  $R$  中包含  $K$  的子环,  $K$  是  $H + K$  的理想, 并且

$$H + K = \pi^{-1}(\pi(H)).$$

- (2)  $H \cap K$  为  $H$  的理想且  $H \cap K = \ker \pi|_H$ .

- (3)

$$(H + K)/K \cong H/(H \cap K). \quad (6)$$

♡

### 证明

- (1) 显然  $H + K \supseteq K$ . 设  $h_i + k_i \in H + K (i = 1, 2), r \in R$ , 则  $(h_1 + k_1) - (h_2 + k_2) = h_1 - h_2 + k_1 - k_2 \in H + K$ . 于是  $H + K$  是  $R$  的加法子群. 由  $H + K \subseteq R$  知  $H + K$  对乘法满足结合律且加法与乘法间满足左右分配律. 故  $H + K$  是  $R$  中含  $K$  的子环. 又注意到  $\pi(h_1 + k_1) = h_1 + k_1 + K = h_1 + K \in \pi(H)$ . 故  $h_1 + k_1 \in \pi^{-1}(\pi(H))$ , 因此  $H + K \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$ .

反之, 设  $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$ , 则  $\pi(x) \in \pi(H)$ . 从而存在  $h' \in H$ , 使得  $\pi(x) = \pi(h') \iff x + K = h' + K \iff -x + h' \in K$ . 于是存在  $k' \in K$ , 使得  $-x + h' = k'$ , 从而  $x = h' - k' \in H + K$ . 故  $\pi^{-1}(\pi(H)) \subseteq H + K$ . 综上所述可知  $H + K = \pi^{-1}(\pi(H))$ .

因为  $H$  为环  $R$  的子环,  $K$  为  $R$  的理想且  $H + K \supseteq K$ , 所以由定理????知  $K$  是  $H + K$  的理想.

- (2) 由  $H, K$  都是  $R$  的子环知  $H \cap K$  是  $R$  的子环. 又因为  $H \supseteq H \cap K$ , 所以  $H \cap K$  也是  $H$  的子环. 对  $\forall x \in H \cap K, h \in H$ , 由  $K$  是  $R$  的理想知  $hx, xh \in H \cap K$ . 故  $H \cap K$  是  $H$  的理想. 又  $\pi|_H(h) = \pi(h)$  且  $\ker \pi = K$ , 故  $\ker \pi|_H = H \cap K$ .

- (3) 由结论 (1) 知  $H + K = \pi^{-1}(\pi(H))$ , 再由自然同态都是满同态知

$$\pi(H + K) = \pi(\pi^{-1}(\pi(H))) = \pi(H).$$

于是由环的同态基本定理知

$$(H + K)/\ker \pi|_{H+K} \cong \pi(H + K) = \pi(H) \cong H/\ker \pi|_H.$$

注意到  $\ker \pi|_{H+K} = (H + K) \cap K = K, \ker \pi|_H = H \cap K$ , 故

$$(H + K)/K \cong H/(H \cap K).$$

□

**定理 0.7 (模同态的基本定理)**

设  $M, M'$  都是幺环  $R$  上的模,  $f$  是模  $M$  到模  $M'$  上的同态,  $M$  中包含  $N$  的子模集合为  $\Sigma$ ,  $M'$  中子模集合为  $\Gamma$ ,  $\pi$  是  $M$  到  $M/N$  上的自然模同态, 则有  $M/N$  到  $f(M)$  的模同构  $\bar{f}$ , 使得

$$\bar{f} \cdot \pi = f \quad (7)$$

即

$$M/N \cong f(M).$$

♡

**证明** 由命题 0.1 知  $f(M)$  是  $M'$  的子模. 由群的同态基本定理知有加法群  $M/N$  到加法群  $f(M)$  上的同构  $\bar{f}$ , 使  $\bar{f} \cdot \pi = f$ . 现只需证  $\bar{f}$  是模同构. 又设  $a \in R, x \in M$ , 于是有

$$\bar{f}(a\pi(x)) = \bar{f}(\pi(ax)) = f(ax) = af(x) = a\bar{f}(\pi(x)),$$

即  $\bar{f}$  为模同构.

□

**定理 0.8**

设  $M, M'$  都是幺环  $R$  上的模,  $f$  是模  $M$  到模  $M'$  上的满同态,  $M$  中包含  $N$  的子模集合为  $\Sigma$ ,  $M'$  中子模集合为  $\Gamma$ , 则有下面结论:

- (1)  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应.
- (2) 若  $M_1$  是  $M$  的子模且  $M_1 \supseteq N$ , 则

$$M/M_1 \cong M'/f(M_1) \quad (8)$$

♡

**证明**

- (1) 若  $M_1$  为  $M$  的子模, 则由定理 0.7 知  $f(M_1)$  为  $M'$  的子模. 故  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  上的良定义的映射. 反之, 若  $M'_1$  为  $M'$  的子模, 则  $M'_1$  也是  $M'$  的加法子群. 从而由定理 0.2(1) 知  $f^{-1}(M'_1)$  是  $M$  中唯一包含  $N$  的加法子群. 又设  $a \in R, x \in f^{-1}(M'_1)$ . 由  $f(ax) = af(x) \in M'_1$  知  $ax \in f^{-1}(M'_1)$ , 即  $f^{-1}(M'_1)$  是  $M$  的子模. 故  $f^{-1}$  可视为  $\Gamma \rightarrow \Sigma$  上的良定义的映射. 对  $\forall H \in \Sigma, H' \in \Gamma$ , 注意到  $H$  也是  $R$  中包含  $K$  的加法子群,  $H'$  也是  $R'$  的加法子群, 由定理 0.2(1) 知  $f^{-1}f(H) = H, ff^{-1}(H') = H'$ . 由  $H$  的任意性知  $f^{-1}f = \text{id}_\Sigma, ff^{-1} = \text{id}_\Gamma$ . 故  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应,  $f^{-1}$  是其逆映射, 即结论 (1) 成立.
- (2) 设  $M_1$  为  $M$  的子模且  $M_1 \supseteq N$ . 又设  $\pi_1$  是  $M$  到  $M/M_1$  的自然同态,  $\pi'$  是  $M'$  到  $M'/f(M_1)$  的自然同态. 于是  $\pi'f$  是  $M$  到  $M'/f(M_1)$  上的同态, 而且

$$\begin{aligned} \ker(\pi'f) &= \{x \in R : \pi'f(x) = f(M_1)\} \\ &= \{x \in R : f(x) \in f(M_1)\} \\ &= f^{-1}(f(M_1)) = M_1. \end{aligned}$$

最后一个等号是因为由结论 (1) 知  $f$  是  $\Sigma \rightarrow \Gamma$  的一一对应. 故由模同态的基本定理可知式 (8) 成立.

□

**推论 0.3**

设  $M_1, N$  都是  $R$  模  $M$  的子模, 而且  $M_1 \supseteq N$ , 则有模同构

$$M/M_1 \cong (M/N)/(M_1/N).$$

♡

**证明** 事实上, 只要在定理 0.8(2) 中取  $M' = M/N, f$  为  $M$  到  $M' = M/N$  的自然同态, 再由命题 0.7 知  $f(M_1) = M_1/N$ , 即得本推论.

□



**定理 0.9**

设  $H, N$  为  $R$  模  $M$  的子模, 则有模同构

$$(H + N)/N \cong H/(H \cap N) \quad (9)$$



**证明** 设  $\pi$  为模  $M$  到商模  $M/N$  的自然模同态, 由于  $N$  为商群  $M/N$  中的加法幺元, 即商模  $M/N$  中的零元, 于是有  $\pi(H + N) = \pi(H) + N = \pi(H)$ , 因而由命题 0.1(3) 知

$$H + N/\ker(\pi|_{H+N}) \cong \pi(H + N) = \pi(H) \cong H/\ker(\pi|_H).$$

由  $\ker(\pi|_{H+N}) = (H + N) \cap N = N, \ker(\pi|_H) = H \cap N$ , 即得式(9)成立.

□