## 0.1 函数逼近的基本概念

**定义 0.1**

设集合 $S$ 是数域 $P$ 上的线性空间, 元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$, 如果存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in P$, 使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \tag{1}$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关. 否则, 若等式 (1) 只对 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ 成立, 则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **线性无关**.

若线性空间 $S$ 是由 $n$ 个线性无关元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的, 即对 $\forall x \in S$ 都有

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为空间 $S$ 的一组**基**, 记为 $S = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 并称空间 $S$ 为 $n$ 维空间, 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为 $x$ 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的**坐标**, 记作 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 如果 $S$ 中有无限个线性无关元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 则称 $S$ 为**无限维线性空间**.

♣

**定理 0.1**

设 $f(x) \in C[a,b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 总存在一个代数多项式 $p(x)$, 使

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

在 $[a,b]$ 上一致成立.

♡

证明 见定理??. □

注 这个定理有多种证明方法. 这里需要说明的是在许多证明方法中,Bernstein(伯恩斯坦)1912 年给出的证明是一种构造性证明 (即上述证明). 他根据函数整体逼近的特性构造出 Bernstein 多项式

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x), \tag{2}$$

其中

$$P_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 为二项式展开系数, 并证明了 (见 Bernstein 多项式的性质) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致成立; 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $m$ 阶导数连续, 则

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(m)}(f,x) = f^{(m)}(x).$$

由(2)式给出的 $B_n(f,x)$ 也是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个逼近多项式, 但它收敛太慢, 实际中很少使用.

更一般地, 可用一组在 $C[a,b]$ 上线性无关的函数集合 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ 来逼近 $f(x) \in C[a,b]$, 元素 $\varphi(x) \in \Phi = \operatorname{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\} \subset C[a,b]$, 表示为

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x). \tag{3}$$

函数逼近问题就是对任何 $f \in C[a,b]$, 在子空间 $\Phi$ 中找一个元素 $\varphi^*(x) \in \Phi$, 使 $f(x) - \varphi^*(x)$ 在某种意义下最小.

**定义 0.2 (范数)**

设 $S$ 为线性空间,$x \in S$, 若存在唯一实数 $\|\cdot\|$, 满足条件:

(1) $\|x\| \geqslant 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时,$\|x\| = 0$;(正定性)

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$;(齐次性)

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, x, y \in S$. (三角不等式)

则称 $\|\cdot\|$ 为线性空间 $S$ 上的**范数**,$S$ 与 $\|\cdot\|$ 一起称为**赋范线性空间**, 记为 $X$.

♣

笔记 例如, 对于在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 有三种常用范数:

$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, 称为 **∞-范数或最大范数**,

$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, 称为 **1-范数**,

$\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 称为 **2-范数**.

类似地对连续函数空间 $C[a,b]$, 若 $f\in C[a,b]$ 可定义三种常用范数如下:

$\|f\|_\infty=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, 称为 **∞-范数**,

$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$, 称为 **1-范数**,

$\|f\|_2=\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$, 称为 **2-范数**.

可以验证这样定义的范数均满足定义 2 中的三个条件.

**定义 0.3**

设 $X$ 是数域 $K$($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的线性空间, 对 $\forall u,v\in X$, 有 $K$ 中一个数与之对应, 记为 $(u,v)$, 它满足以下条件:

(1) $(u,v)=\overline{(v,u)},\forall u,v\in X$;

(2) $(\alpha u,v)=\alpha(u,v),\alpha\in K,u,v\in X$;

(3) $(u+v,w)=(u,w)+(v,w),\forall u,v,w\in X$;

(4) $(u,u)\geqslant 0$, 当且仅当 $u=0$ 时,$(u,u)=0$.

则称 $(u,v)$ 为 $X$ 上 $u$ 与 $v$ 的**内积**. 定义了内积的线性空间称为**内积空间**. 定义中条件 (1) 的右端 $\overline{(u,v)}$ 称为 $(u,v)$ 的**共轭**, 当 $K$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 时, 条件 (1) 为 $(u,v)=(v,u)$.

如果 $(u,v)=0$, 则称 $u$ 与 $v$ **正交**, 这是向量相互垂直概念的推广.

**定理 0.2**

设 $X$ 为一个内积空间, 对 $\forall u,v\in X$, 有

$$|(u,v)|^2\leqslant(u,u)(v,v). \tag{4}$$

称其为柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式.

证明 当 $v=0$ 时,(4)式显然成立. 现设 $v\neq 0$, 则 $(v,v)>0$, 且对任何数 $\lambda$ 有

$$0\leqslant(u+\lambda v,u+\lambda v)=(u,u)+2\lambda(u,v)+\lambda^2(v,v).$$

取 $\lambda=-(u,v)/(v,v)$, 代入上式右端, 得

$$(u,u)-2\frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}+\frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}\geqslant 0,$$

由此即得 $v\neq 0$ 时

$$|(u,v)|^2\leqslant(u,u)(v,v).$$

证毕. □

注 在内积空间 $X$ 上可以由内积导出一种范数, 即对于 $u\in X$, 记

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}, \tag{5}$$

容易验证它满足范数定义的三条性质, 其中三角不等式

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\| \tag{6}$$

可由定理 0.2直接得出, 即

$$\begin{aligned}(\| u \| + \| v \|)^2 &= \| u \|^2 + 2 \| u \| \| v \| + \| v \|^2 \\ &\geqslant (u, u) + 2(u, v) + (v, v) \\ &= (u + v, u + v) = \| u + v \|^2,\end{aligned}$$

两端开方即得(6)式.

**定理 0.3**

设 $X$ 为一个内积空间,$u_1, u_2, \cdots, u_n \in X$, 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \cdots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_n, u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \cdots & (u_n, u_n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

称为**格拉姆 (Gram) 矩阵**. 矩阵 $G$ 非奇异的充分必要条件是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关.

证明 $G$ 非奇异等价于 $\det G \neq 0$, 其充分必要条件是关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的齐次线性方程组

$$\left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_k \right) = \sum_{j=1}^{n} (u_j, u_k) \alpha_j = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

只有零解; 而

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_k \right) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

从以上等价关系可知,$\det G \neq 0$ 等价于从方程(8)推出 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, 而后者等价于从方程 (9) 推出 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关. 证毕. □

**定义 0.4 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{C}^n$ 的内积)**

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$,$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$, 则其内积定义为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{10}$$

由此导出的向量 2-范数为

$$\|x\|_2 = (x, x)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

若给定实数 $\omega_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 称 $\{\omega_i\}$ 为**权系数**, 则在 $\mathbb{R}^n$ 上可定义**加权内积**为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i y_i, \tag{11}$$

相应的范数为

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $x,y\in\mathbb{C}^n$, **带权内积**定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i\overline{y}_i, \tag{12}$$

这里 $\{\omega_i\}$ 仍为正实数序列,$\overline{y}_i$ 为 $y_i$ 的共轭复数.

♣

注 不难验证 (11) 式给出的 $(x,y)$ 满足内积定义的四条性质. 当 $\omega_i=1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时,(11) 式就是 (10) 式.

**定义 0.5 (权函数)**

设 $[a,b]$ 是有限或无限区间, 在 $[a,b]$ 上的非负函数 $\rho(x)$ 满足条件:

(1) $\int_a^b x^k\rho(x)\,\mathrm{d}x$ 存在且为有限值 $(k=0,1,\cdots)$;

(2) 对 $[a,b]$ 上的非负连续函数 $g(x)$, 如果 $\int_a^b g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则 $g(x)\equiv 0$.

则称 $\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个**权函数**.

♣

**定义 0.6 ($C[a,b]$ 上的内积)**

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$,$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上给定的权函数, 则可定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

由此内积导出的范数为

$$\|f(x)\|_2=(f(x),f(x))^{\frac{1}{2}}=\left[\int_a^b\rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

称 (13) 式和 (14) 式分别为**带权 $\rho(x)$ 的内积和范数**, 特别常用的是 $\rho(x)\equiv 1$ 的情形, 即

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\|f(x)\|_2=\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

♣

注 容易验证(13)式满足内积定义的四条性质

**例题 0.1**

若 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 $C[a,b]$ 中的线性无关函数族, 记 $\varphi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, 它的格拉姆矩阵为

$$G=G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}, \tag{15}$$

则 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 线性无关的充要条件是 $\det G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\neq 0$.

证明 根据定理 0.3立得. □

**定义 0.7**

若 $P^*(x)\in H_n$ 使误差

$$\|f(x)-P^*(x)\|=\min_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|,$$

则称 $P^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最佳逼近多项式**. 如果 $P(x)\in\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, 则称相应的 $P^*(x)$

为**最佳逼近函数**．通常范数 $\|\cdot\|$ 取为 $\|\cdot\|_\infty$ 或 $\|\cdot\|_2$．若取 $\|\cdot\|_\infty$, 即

$$\|f(x)-P^*(x)\|_\infty = \min_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_\infty = \min_{P\in H_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|, \tag{16}$$

则称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最优 (最佳) 一致逼近多项式**．这时求 $P^*(x)$ 就是求 $[a,b]$ 上使最大误差 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|$ 最小的多项式．

如果范数 $\|\cdot\|$ 取为 $\|\cdot\|_2$, 即

$$\|f(x)-P^*(x)\|_2^2 = \min_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_2^2 = \min_{P\in H_n}\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

则称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最佳平方逼近多项式**.

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个列表函数, 在 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_m\leqslant b$ 上给出 $f(x_i)(i=0,1,\cdots,m)$, 要求 $P^*\in\Phi$ 使

$$\|f-P^*\|_2 = \min_{P\in\Phi}\|f-P\|_2 = \min_{P\in\Phi}\sum_{i=0}^m [f(x_i)-P(x_i)]^2, \tag{18}$$

则称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最小二乘拟合**.

♣