复分析

作者: 邹文杰
组织: 无
时间:2024/10/25
版本:ElegantBook-4.5
自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的定义及其运算

定义 1.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数 (a,b), 如果用 $\mathbf{R}$ 记实数的全体,$\mathbf{C}$ 记复数的全体, 那么

$$\mathbf{C}=\{(a,b):a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;$(0,0)$ 是零元素,$(-a,-b)$ 是 (a,b) 的负元素;$(1,0)$ 是乘法的单位元素; 每个非零元素 (a,b) 有逆元素 $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$; 此外,$\mathbf{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a,b)+(c,d)](e,f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).$$

因此,$\mathbf{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为**复数域**. 如果记

$$\tilde{\mathbf{R}}=\{(a,0):a\in\mathbf{R}\},$$

那么 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 显然,$(a,0)\to a$ 是 $\tilde{\mathbf{R}}$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个同构对应, 因此, 实数域 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a,0)=a$. 在 $\mathbf{C}$ 中,$(0,1)$ 这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

专门用 i 记 $(0,1)$ 这个元素, 于是有 $\mathrm{i}^2=-1$. 由于 $(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=b\mathrm{i}$, 于是每一个复数 (a,b) 都可写成

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\mathrm{i}.$$

从现在开始, 我们不再用实数对 (a,b) 来记复数, 而直接用 $z=a+b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的实部,b 称为 z 的虚部, 分别记为 $a=\mathrm{Re}z$,$b=\mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=(a+b\mathrm{i})\left(\frac{c-d\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z=a+b\mathrm{i}$ 是一复数, 定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\bar{z}=a-b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的**模**或**绝对值**,$\bar{z}$ 称为 z 的**共轭复数**. ♣

定义 1.2 (有序域)

域 F 称为**有序域**, 如果在 F 的元素间能确定一种关系 (记为 $a<b$), 其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a,b, 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a;$$

(ii) 如果 $a<b, b<c$, 那么 $a<c$;
(iii) 如果 $a<b$, 那么对任意 c, 有 $a+c<b+c$;
(iv) 如果 $a<b, c>0$, 那么 $ac<bc$.

♣

笔记 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

定理 1.1

复数域不是有序域.

♡

证明 如果 $\mathbf{C}$ 是有序域, 那么因为 $\mathrm{i}\neq 0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i}>0$ 或 $\mathrm{i}<0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i}>0$, 则由(iv)得 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>\mathrm{i}\cdot 0$, 即 $-1>0$, 再由(iii), 两端都加 1, 即得 $0>1$. 另一方面, 从 $-1>0$ 还可得 $(-1)\cdot(-1)>0\cdot(-1)$, 即 $1>0$, 这和刚才得到的 $0>1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i}<0$, 两端都加 $-\mathrm{i}$, 得 $0<-\mathrm{i}$, 再由(iv), 两端乘 $-\mathrm{i}$, 得 $-1>0$. 重复上面的讨论, 即可得 $0>1$ 和 $0<1$ 的矛盾. 所以, 复数域不是有序域. □

命题 1.1 (复数运算性质)

设 z 和 w 是两个复数, 那么
(i) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(z+\bar z),\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar z)$;
(ii) $z\bar z=|z|^2,\bar z=\dfrac{|z|^2}{z}$;
(iii) $\overline{z+w}=\bar z+\bar w,\overline{zw}=\bar z\,\bar w$;
(iv) $|zw|=|z||w|,\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;
(v) $|z|=|\bar z|,|z|=|-z|$.

♠

证明
(i)
(ii)
(iii)
(iv) 由 (ii) 可得 $|zw|^2=(zw)(\overline{zw})=|z|^2|w|^2$, 进而 $|zw|=|z||w|$.
(v)

□

命题 1.2

设 z 和 w 是两个复数, 那么
(i) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$;
(ii) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$, 等号成立当且仅当存在某个实数 $t\geqslant 0$, 使得 $z=tw$;
(iii) $|z-w|\geqslant\big||z|-|w|\big|$.

♠

证明 (i) 从 $\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用复数运算性质 (ii)(i)和这里的不等式 (i), 即得

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\overline{z+w})=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\bar w)+|w|^2\\&\leqslant|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\bar w)=|z\bar w|$, 这等价于 $z\bar w\in\mathbb{R}$ 且 $z\bar w\geqslant 0$. 不妨设 $w\neq 0(w=0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\bar w=\dfrac{|w|^2}{w}$, 故 $z\bar w=\dfrac{z}{w}|w|^2\geqslant 0$. 令 $t=\left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$, 则 $t\in\mathbb{R}$ 且 $t\geqslant 0$,

而且 $z = tw$.

(iii) 当 $|z| = |w|$ 时, 结论显然成立.

当 $|z| > |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|z| = |(z - w) + w| \leqslant |z - w| + |w|,$$

移项可得 $|z - w| \geqslant |z| - |w| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $z - w = tw$, 即 $z = (t + 1)w$.

当 $|z| < |w|$ 时, 由 (ii) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leqslant |w - z| + |z|,$$

移项可得 $|z - w| = |w - z| \geqslant |w| - |z| = ||z| - |w||$. 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数 $t \geqslant 0$, 使得 $w - z = tz$, 即 $w = (t + 1)z$. □

推论 1.1

设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数, 则

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

证明 由命题 1.2(ii)及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 线性相关. □

1.2 复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系, 实数对 (a, b) 就表示平面上的一个点, 所以复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 可以看成平面上以 a 为横坐标、以 b 为纵坐标的一个点 (图 1.1). 这个点的极坐标设为 (r, θ), 那么

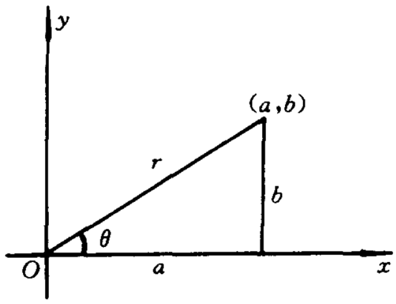

图 1.1

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta,$$

因而复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 也可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

这里,$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 就是前面定义过的 z 的模,θ 称为 z 的**辐角**, 记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$. 容易看出, 如果 θ 是 z 的辐角, 那么 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐角, 这里,k 是任意的整数, 因此 z 的**辐角有无穷多个**. 但是在 $\mathrm{Arg}z$ 中, 只有一个 θ 满足 $-\pi < \theta \leqslant \pi$, 称这个 θ 为 z 的**辐角的主值**, 把它记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z},$$

这里,$\mathbf{Z}$ 表示整数的全体. 注意,0 的辐角没有意义.

我们还可把复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 看成在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 a 和 b 的一个向量, 这时我们就把复数和向量作为同义语来使用. 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点

和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 z_2-z_1, 因而 $|z_2-z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 z_1-z_2(图 1.2). 现在再来看命题 1.2(ii)的不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

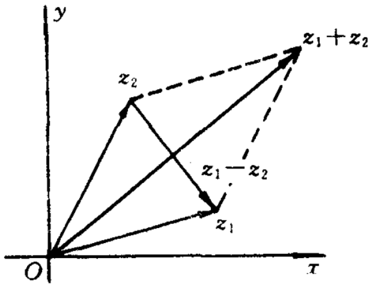

图 1.2

定理 1.2

设 z_1, z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$.

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$.

笔记 在 (1) 中, 第一个等式在命题 1.1(iv)中已经证明过; 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按反时针方向转动 $\dfrac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

(2) 再看复数的除法, 由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

□

命题 1.3

(1) 向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.
(2) 向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

证明

(1) 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\frac{\pi}{2}$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个纯虚数, 因而 $z_1\bar{z}_2=\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个纯虚数, 即 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

(2) 这是因为 z_1 与 z_2 平行就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为 $\pm\pi$, 即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\pm\pi$, 这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个实数, 因而 $z_1\bar{z}_2=\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个实数, 即 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

□

例题 1.1 在图 1.3的三角形中,$AB=AC$,$PQ=RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN\perp BC$.

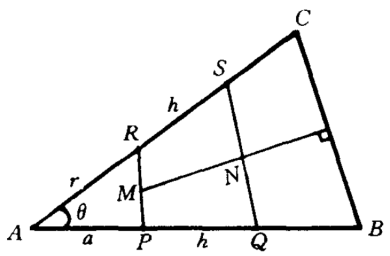

图 1.3

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M:\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N:\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1=\overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1=\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]-\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB=AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2=\overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-b=b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1)=\frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 所以由命题 1.3(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN\perp BC$. □

例题 1.2 证明: 平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\bigg/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0. \tag{1.1}$$

证明 从图 1.4可以看出,z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆的充要条件是向量 z_1-z_3 和 z_1-z_4 的夹角等于向量 z_2-z_3 和 z_2-z_4

的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 1.3(2)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0\text{ 或 }\pm\pi.$$

这说明复数 $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 在实轴上, 因而等式(1.1)成立.

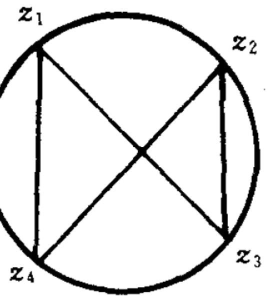

图 1.4

□

定理 1.3 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\cdots,z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n=r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1=\cdots=z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-n}&=\frac{1}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta}\\&=\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta=\cos(-n)\theta+\mathrm{i}\sin(-n)\theta.\end{aligned}$$

□

命题 1.4

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n=w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

证明 现在设 $w=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的, 要求的 $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n=w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

由此即得 $\rho=\sqrt[n]{r}$,$n\varphi=\theta+2k\pi$,$k=0,1,\cdots,n-1$. 这就是说, 共有 n 个复数满足 $z^n=w$, 它们是

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w=1$ 时, 若记 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w},\ \sqrt[n]{w}\omega,\cdots,\ \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

□

1.3 扩充平面和复数的球面表示

定义 1.3

为了今后讨论的需要,我们要在 $\mathbf{C}$ 中引进一个新的数 ∞,这个数的模是 ∞,辐角没有意义,它和其他数的运算规则规定为:

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty\ (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{z}{0} = \infty\ (z \neq 0);$$

$0 \cdot \infty$ 和 $\infty \pm \infty$ 都不规定其意义. 引进了 ∞ 的复数系记为 $\mathbf{C}_\infty$,即 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
在复平面上,没有一个点和 ∞ 相对应,但我们想像有一个**无穷远点**和 ∞ 对应,加上无穷远点的复平面称为**扩充平面**或**闭平面**,不包括无穷远点的复平面也称为**开平面**.

注 在复平面上,无穷远点和普通的点是不一样的,Riemann 首先引进了复数的球面表示,在这种表示中,∞ 和普通的复数没有什么区别.

命题 1.5

证明:扩充平面和单位球面对等,即两者之间存在一个双射.

证明 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面,即

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

把 $\mathbf{C}$ 等同于平面:

$$\mathbf{C} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

固定 S 的北极 N,即 $N = (0,0,1)$,对于 $\mathbf{C}$ 上的任意点 z,联结 N 和 z 的直线必和 S 交于一点 P(图 1.5). 若 $|z| > 1$,则 P 在北半球上;若 $|z| < 1$,则 P 在南半球上;若 $|z| = 1$,则 P 就是 z. 容易看出,当 z 趋向 ∞ 时,球面上对应的点 P 趋向于北极 N,自然地,我们就把 $\mathbf{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来,$\mathbf{C}_\infty$ 中的所有点(包括无穷远点在内)都被移植到球面上去了,这样我们就找到了一个扩充平面到单位球面的双射. 而在球面上,N 和其他的点是一视同仁的.

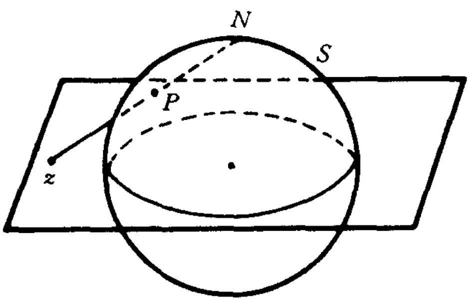

图 1.5

现在给出这种对应的具体表达式. 设 $z = x + \mathrm{i}y$,容易算出 zN 和球面 S 的交点的坐标为

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

直接用复数 z,可表示为

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{\mathrm{i}(1 + |z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

这样, 从 z 便可算出它在球面上对应点的坐标. 反过来, 从球面上的点 (x_1,x_2,x_3) 也可算出它在平面上的对应点 z. 事实上, 从上面的表达式得

$$\begin{cases} x_1+\mathrm{i}x_2=\dfrac{2z}{1+|z|^2}, \\ 1-x_3=\dfrac{2}{1+|z|^2}, \end{cases}$$

由此即得

$$z=\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}.$$

这就是所需的计算公式. 现在我们可以具体地写出扩充平面到单位球面的双射

$$f:C_\infty\longrightarrow\mathbf{R}^3, z\longmapsto\left(\frac{z+\bar z}{1+|z|^2},\frac{z-\bar z}{\mathrm{i}(1+|z|^2)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

$$f^{-1}:\mathbf{R}^3\longrightarrow C_\infty,(x_1,x_2,x_3)\longmapsto\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}.$$

□

1.4 复数列的极限

定义 1.4

对于 $a\in\mathbf{C},r>0$, 称

$$B(a,r)=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<r\}$$

为以 a 为中心、以 r 为半径的**圆盘**. 特别当 $a=0,r=1$ 时,$B(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 称为**单位圆盘**.$B(a,r)$ 也称为 a 点的一个r **邻域**, 或简称为 a 点的**邻域**. 无穷远点 $z=\infty$ 的邻域是指集合 $\{z\in\mathbf{C}:|z|>R\}$, 记为 $B(\infty,R)$.

♣

定义 1.5

我们说 $\mathbf{C}$ 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 $\mathbf{C}$ 中的点 z_0, 是指对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,$|z_n-z_0|<\varepsilon$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$. 或者从几何上来说, 对任给的 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时,$z_n\in B(z_0,\varepsilon)$.

我们称复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 ∞, 是指对任给的正数 $M>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,$|z_n|>M$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$. 或者从几何上来说, 对任给的 $M>0$, 当 n 充分大时,$z_n\in B(\infty,M)$.

♣

定理 1.4

设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n,z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

♡

证明 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n,z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 从等式

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$$

马上可以得到: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ 的充分必要条件是 $\{z_n\}$ 的实部和虚部分别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$. □

定义 1.6

复数列 $\{z_n\}$ 称为 **Cauchy 列**, 如果对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

♣

定理 1.5

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列.

♡

证明 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, z_m = x_m + \mathrm{i}y_m$, 那么从等式

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

知道,$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列的充分必要条件是它的实部 $\{x_n\}$ 和虚部 $\{y_n\}$ 都是实的 Cauchy 列. □

定理 1.6 (复数域的 Cauchy 收敛准则)

$\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 为 Cauchy 列.

笔记 由此知道复数域 $\mathbf{C}$ 是**完备的**.

证明 由定理 1.4和定理 1.5, 再结合实数域中的 Cauchy 收敛准则立刻得到复数域的 Cauchy 收敛准则. □

1.5 开集、闭集和紧集

定义 1.7

设 E 是一平面点集,$\mathbf{C}$ 中的点对 E 而言可以分为三类:

(i) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E$, 就称 a 为 E 的**内点**;

(ii) 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) \subset E^c$, 就称 a 为 E 的外点, 这里,E^c 是由所有不属于 E 的点构成的集, 称为 E 的**余集**或**补集**;

(iii) 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中既有 E 的点, 也有 E^c 的点, 就称 a 为 E 的**边界点**.

定义 1.8

E 的内点的全体称为 E 的**内部**, 记为 E°;

E 的外点的全体称为 E 的**外部**, 它就是 E 的余集 E^c 的内部, 即 $(E^c)^\circ$;

E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E.

笔记 由上面的定义可知, 集 E 把复平面分成三个互不相交的部分:$\mathbf{C} = E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E$, 即

$$(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ. \tag{1.2}$$

例题 1.3 邻域的内部和边界 $B(a,r)$ 中的所有点都是它的内点, 即 $B(a,r) = (B(a,r))^\circ$,$B(a,r)$ 的边界 $\partial B = \{z : |z-a| = r\}$, 即是圆周, 满足条件 $|z-a| > r$ 的点 z 都是 $B(a,r)$ 的外点.

定义 1.9

如果 E 的所有点都是它的内点, 即 $E = E^\circ$, 就称 E 为**开集**.

如果 E^c 是开集, 就称 E 为**闭集**.

例题 1.4 $B(a,r)$ 是开集, 闭圆盘 $\{z : |z-a| \leqslant r\}$ 是闭集,$B(a,r)$ 和它的上半圆周的并集既不是开集也不是闭集.

定义 1.10

点 a 称为集 E 的**极限点**或**聚点**, 如果对任意 $r > 0$,$B(a,r)$ 中除 a 外总有 E 中的点.

集 E 的所有极限点构成的集称为 E 的**导集**, 记为 E'.

E 中不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**.

E 和它的导集 E' 的并称为 E 的**闭包**, 记为 $\bar{E}$, 即 $\bar{E} = E \cup E'$.

命题 1.6

对于任意集 E, 有

(i) $a \in \bar{E}$ 的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$B(a,r) \cap E \neq \varnothing, \forall r > 0. \tag{1.3}$$

这里,$\varnothing$ 表示空集;

(ii) $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ, \overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

证明 (i) 若 $a \in \bar{E}$, 则 $a \in E$ 或 $a \in E'$, 不论何者发生, 总有 $B(a,r) \cap E \neq \varnothing$. 反之, 若等式(1.3)成立, 这说明 a 或是 E 的极限点, 或是 E 的孤立点, 因而 $a \in \bar{E}$.

(ii) 由 (i) 知,$a \in (\bar{E})^c$ 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,r) \cap E = \varnothing$, 这说明 a 是 E^c 的内点, 即 $a \in (E^c)^\circ$, 因而 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$. 再看第二个等式,$a \in (E^\circ)^c$ 意味着 a 不是 E 的内点, 即 a 是 E 的外点或边界点, 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $B(a,r) \cap E^c \neq \varnothing$, 由 (i) 知 $a \in \overline{E^c}$. 因而 $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$. □

命题 1.7

(i) E° 是开集,∂E 和 $\bar{E}$ 是闭集;

(ii) E 是闭集的充要条件是 $E = \bar{E}$;

(iii) E 是闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

证明 (i) 任取 $a \in E^\circ$, 则由定义知道, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \subset E$. 显然,$B(a,\varepsilon)$ 中的每一点都是 E 的内点, 因而 $B(a,\varepsilon) \subset E^\circ$, 即 a 是 E° 的内点. 由于 a 是任意取的, 所以 E° 是开集. 由刚才所证,E° 和 $(E^c)^\circ$ 都是开集, 两个开集的并当然也是开集, 由等式(1.2)知 $(\partial E)^c$ 是开集, 因而 ∂E 是闭集. 由于 $(E^c)^\circ$ 是开集, 由命题 1.6(ii)知,$(\bar{E})^c$ 是开集, 所以 $\bar{E}$ 是闭集.

(ii) 如果 $E = \bar{E}$, 则由 (i) 知 $\bar{E}$ 是闭集, 所以 E 是闭集. 反之, 如果 E 是闭集, 那么 E^c 是开集, 因而 $E^c = (E^c)^\circ$. 另外, 由命题 1.6(ii)得 $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$, 因而 $E^c = (\bar{E})^c$, 即 $E = \bar{E}$.

(iii) 从 (ii) 立刻可得. □

定义 1.11

点集 E 的**直径**定义为 E 中任意两点间距离的上确界, 记为 $\operatorname{diam}E$, 即

$$\operatorname{diam}E = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

定理 1.7 (Cantor 闭集套定理)

若非空闭集序列 $\{F_n\}$ 满足

(i) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$;

(ii) $\operatorname{diam}F_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时),

那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 是一个独点集.

笔记 这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

证明 在每一个 F_n 中任取一点 z_n, 我们证明 $\{z_n\}$ 是一个 Cauchy 点列. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}F_n = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N, 使得 $\operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 今取 $m, n > N$, 由条件 (i),$z_m, z_n \in F_N$, 所以 $|z_n - z_m| \leqslant \operatorname{diam}F_N < \varepsilon$. 因而 $\{z_n\}$ 是一 Cauchy 序列, 设其收敛于 z_0. 我们证明 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 事实上, 任取 F_k, 则当 $n > k$ 时,z_n 便全部落入 F_k 中, 因为 F_k 是闭的, 由命题 1.7(iii),$\{z_n\}$ 的极限 $z_0 \in F_k$, 所以 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 如果还有另一点 z_1 也属于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 那么必有 $|z_0 - z_1| \leqslant \operatorname{diam}F_n \to 0 (n \to \infty)$, 因而 $z_1 = z_0$. □

定义 1.12

设 E 是一个集,$\mathscr{F}=\{G\}$ 是一个**开集族**, 即 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素都是开集.
如果 E 中每一点至少属于 $\mathscr{F}$ 中的一个开集, 就说 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

例题 1.5 E 是任一点集,ε 是一个给定的正数, 那么

$$\mathscr{F}=\{B(a,\varepsilon):a\in E\}$$

便是 E 的一个开覆盖.

定义 1.13

我们说点集 E 具有**有限覆盖性质**, 是指从 E 的任一个开覆盖中必能选出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$, 使得这有限个开集的并就能覆盖 E, 即

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{n}G_j.$$

具有有限覆盖性质的集称为**紧集**.

例题 1.6 空集和有限集都是紧集, 但单位圆盘 $B(0,1)=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 却不是紧集, 因为 $G_n=\left\{z:|z|<1-\dfrac{1}{n}\right\}$,$n=2,3,\cdots$, 这一串同心圆构成 $B(0,1)$ 的一个开覆盖, 但从中找不出有限个集覆盖 $B(0,1)$.

定义 1.14

集 E 称为是**有界的**, 如果存在 $R>0$, 使得 $E\subset B(0,R)$.

定理 1.8 (Heine-Borel 定理)

在 $\mathbf{C}$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是有界闭集; 在 $\mathbf{C}_\infty$ 中,E 是紧集的充要条件为 E 是闭集.

证明 我们先证明, 如果 E 是 $\mathbf{C}_\infty$ 中的闭集或 $\mathbf{C}$ 中的有界闭集, 那么 E 是紧集, 即从 E 的任一开覆盖 $\mathscr{F}$ 中, 可以选出有限个开集覆盖 E. 先设 E 是 $\mathbf{C}_\infty$ 中的闭集, 如果 $z=\infty\notin E$, 则因 E 是闭集, 有 $E=\bar{E}$, 即 $\infty\notin\bar{E}$, 由命题 1.6(i), 存在 $R>0$, 使得 $B(\infty,R)\cap E=\varnothing$, 即 $E\subset\overline{B(0,R)}$, 因而 E 是有界闭集. 如果 $z=\infty\in E$, 由开覆盖的定义,∞ 属于 $\mathscr{F}$ 中的某一个开集, 而 E 在这个开集之外的部分是一有界闭集, 只要再证明这个有界闭集的部分被有限个开集覆盖即可. 总之, 不论何种情况发生, 只要考虑 E 是有界闭集的情形就够了.

现设 E 是有界闭集, 如果它不是紧集, 那么从 E 的开覆盖 $\mathscr{F}$ 中不能取出有限个开集来覆盖 E. 因为 E 是有界的, 它一定包含在一个充分大的闭正方形 Q 中:

$$Q=\{(x,y):|x|\leqslant M,|y|\leqslant M\}.$$

把这个正方形分成相等的四个小正方形, 则其中必有一个小正方形 Q_1, 使得 $Q_1\cap E$ 是有界闭集且不具有有限覆盖性质. 再把 Q_1 分成四个相等的小正方形, 其中必有一个小正方形 Q_2 具有上述同样的性质. 这个过程可以无限地进行下去, 得到一列闭正方形 $\{Q_n\}$. 如果记 $F_n=Q_n\cap E$, 那么 F_n 满足下列条件:

(i) F_n 是有界闭集;

(ii) $F_n\supset F_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$;

(iii) 不能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集来覆盖 F_n;

(iv) 当 $n\to\infty$ 时,$\operatorname{diam}F_n\leqslant\dfrac{M}{2^n}\sqrt{2}\to 0$.

由 (i),(ii),(iv) 知道 $\{F_n\}$ 满足 Cantor 闭集套定理的条件, 因而存在复数 z_0, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\{z_0\}$. 由于 $z_0\in F_n\subset E$, 故在 $\mathscr{F}$ 中必有一个开集 G_0, 使得 $z_0\in G_0$. 由于 z_0 是 G_0 的内点, 故有 z_0 的邻域 $B(z_0,\varepsilon)\subset G_0$. 由于 $\operatorname{diam}F_n\to 0$, 故当 n 充分大时 $F_n\subset B(z_0,\varepsilon)\subset G_0$, 这就是说 G_0 覆盖了 F_n, 这与 (iii) 矛盾. 因而 E 是紧集.

现在证明必要性. 只要对扩充平面的情形来证明就够了, 因为如果一个集对扩充平面是闭的, 它又不包含无穷远点, 那么它必然是有界的. 设 E 是一个紧集, 我们要证明它是闭集, 只要证明 E^c 是开集即可. 为此, 任取 $a\in E^c$,

只要证明 a 是 E^c 的内点就行了. 取这样的开集族 $\mathscr{F}$: 凡是闭包不包含 a 点的开集都属于 $\mathscr{F}$. 因为 $a \in E^c$, 因此对 E 中每一点 z, 都能找到它的邻域 $B(z,\varepsilon)$, 使得 $a \notin \overline{B(z,\varepsilon)}$, 所以 $B(z,\varepsilon) \in \mathscr{F}$. 这就是说,$\mathscr{F}$ 是 E 的一个开覆盖. 由于 E 是紧集, 故能从 $\mathscr{F}$ 中取出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$, 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$. 但 $a \notin \overline{G_j}, j=1,\cdots,n$, 所以 $a \in \bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c$. 显然,$\bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c$ 是一个开集, 于是由开集和内点的定义可知, 存在 $r>0$, 使得 $B(a,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c$. 而且从命题 1.6(ii)得

$$B(a,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n} (\overline{G_j})^c = \bigcap_{j=1}^{n} (G_j^c)^\circ \subset \bigcap_{j=1}^{n} G_j^c = \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\right)^c \subset E^c,$$

这就证明了 a 是 E^c 的内点, 即 E^c 是开集. □

定义 1.15

设 E,F 是任意两个集,E,F 间的距离定义为

$$d(E,F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\}.$$

如果 $E=\{a\}$ 是由一个点所构成的集, 那么 a 和 F 间的距离为

$$d(a,F) = \inf\{|a - z| : z \in F\}.$$

♣

命题 1.8

(1) 如果 F 是闭集,$a \notin F$, 那么 $d(a,F)>0$.

(2) 如果 E 是有限点集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 当然也有 $d(E,F)>0$.

♠

证明

(1) 此时必有 $\varepsilon>0$, 使得 $B(a,\varepsilon) \cap F = \varnothing$, 因而 $d(a,F) \geqslant \varepsilon > 0$.

(2)

□

定理 1.9

设 E 是紧集,F 是闭集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 则 $d(E,F)>0$.

♡

注 若 E 是无穷闭集,F 也是闭集, 但 E 不是紧集, 且 $E \cap F = \varnothing$, 这时 $d(E,F)>0$ 未必成立.

例如,E 是整个实轴,$F=\{z=x+\mathrm{i}e^x : -\infty<x<\infty\}$, 则 E 和 F 都是 $\mathbf{C}$ 中的闭集, 而且 $E \cap F = \varnothing$, 但 $d(E,F)=0$.

笔记 从这个定理可以看出, 紧集之所以重要, 在于它保留了大部分有限集的性质.

证明 任取 $a \in E$, 则 $a \notin F$, 所以 $d(a,F)>0$. 今以 a 为中心、$\frac{1}{2}d(a,F)$ 为半径作一圆盘, 当 a 跑遍集 E 时, 这些圆盘所组成的开集族就是 E 的一个开覆盖. 因为 E 是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$ 来覆盖 E, 其中,$G_j = B\left(a_j, \frac{1}{2}d(a_j,F)\right), j=1,\cdots,n$. 记

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}d(a_1,F),\cdots,\frac{1}{2}d(a_n,F)\right\}.$$

今任取 $z_1 \in E$, 则必有某个 G_j, 使得 $z_1 \in G_j$, 因而

$$|z_1 - a_j| < \frac{1}{2}d(a_j,F).$$

任取 $z_2 \in F$, 当然 $|z_2 - a_j| \geqslant d(a_j,F)$, 于是

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_2 - a_j| - |z_1 - a_j| \geqslant d(a_j,F) - \frac{1}{2}d(a_j,F) = \frac{1}{2}d(a_j,F) \geqslant \delta.$$

所以

$$d(E,F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\} \geqslant \delta > 0.$$

□

定理 1.10 (Bolzano-Weierstrass 定理)

任一无穷点集至少有一个极限点.

注 这个定理也可以用证明Cantor 闭集套定理的方法给出另一个证明.

证明 设 E 是一个无穷点集, 如果 E 是无界集, 那么无穷远点便是它的极限点. 今设 E 是有界集, 如果它没有极限点, 那么它是一个闭集. 任取 $z \in E$, 由于它不是 E 的极限点, 故必存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z, \varepsilon)$ 中除 z 外不再有 E 中的点.z 取遍整个 E, 由这种 $B(z, \varepsilon)$ 构成的开集族便是 E 的一个开覆盖, 由Heine-Borel 定理, 能从中选出有限个来覆盖 E. 因为每个开集只包含 E 的一个点, 这说明 E 是一个有限集, 与 E 是无穷点集的假定矛盾, 因而 E 必有极限点. □

1.6 曲线和域

定义 1.16 (连续曲线)

所谓**连续曲线**, 是指定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个复值连续函数 $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$, 写为

$$z = \gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \ a \leqslant t \leqslant b,$$

这里,$x(t)$,$y(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数.

如果用 γ^* 记 γ 的像点所成的集合:

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\},$$

那么 γ^* 是 $\mathbf{C}$ 上的紧集. 曲线 γ 的方向就是参数 t 增加的方向, 在这个意义下,$\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 分别称为 γ 的**起点**和**终点**.

如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即起点和终点重合, 就称 γ 为**闭曲线**.

如果曲线 γ 仅当 $t_1 = t_2$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**.

如果只有当 $t_1 = a$,$t_2 = b$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单闭曲线**或 **Jordan 闭曲线**, 或简称**围道**.

定义 1.17

设 $z = \gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是一条曲线. 对区间 $[a, b]$ 作分割 $T : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 得到以 $z_k = \gamma(t_k)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为顶点的折线 P, 那么 P 的长度为

$$|P| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果不论如何分割区间 $[a, b]$, 所得折线的长度都是有界的, 就称曲线 γ 是**可求长的**,γ 的长度定义为 $|P|$ 的上确界, 即

$$\sup_T \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果 $\gamma'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$ 存在, 且 $\gamma'(t) \neq 0$, 那么 γ 在每一点都有切线,$\gamma'(t)$ 就是曲线 γ 在 $\gamma(t)$ 处的切向量, 它与正实轴的夹角为 $\operatorname{Arg}\gamma'(t)$. 如果 $\gamma'(t)$ 是连续函数, 那么 γ 的切线随 t 而连续变动, 这时称 γ 为**光滑曲线**. 在这种情况下,γ 的长度为

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t = \int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t.$$

曲线 γ 称为**逐段光滑的**, 如果存在 $t_0, t_1, \cdots, t_n$, 使得 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,$\gamma$ 在每个参数区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 上是光滑的, 在每个分点 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 处 γ 的左右导数存在.

定义 1.18

平面点集 E 称为是**连通的**, 如果对任意两个不相交的非空集 E_1 和 E_2, 满足

$$E = E_1 \cup E_2,$$

那么 E_1 必含有 E_2 的极限点, 或者 E_2 必含有 E_1 的极限点. 也就是说,$E_1 \cap \bar{E}_2$ 和 $\bar{E}_1 \cap E_2$ 至少有一个非空. ♣

命题 1.9

$\mathbf{C}$ 中的开集 E 是连通的充分必要条件是 E 不能表示为两个不相交的非空开集的并. ♠

证明 设开集 E 是连通的, 如果存在不相交的非空开集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 由于 E_1 中的点都是 E_1 的内点,E_2 中的点都是 E_2 的内点, 因此 E_1 中没有 E_2 的极限点,E_2 中也没有 E_1 的极限点, 这与 E 的连通性相矛盾. 这就证明了条件的必要性. 反之, 如果开集 E 是不连通的, 则必存在不相交的非空集 E_1 和 E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$, 且 E_1 中无 E_2 的极限点,E_2 中无 E_1 的极限点. 由此可见,E_1 和 E_2 均为开集. 这就证明了条件的充分性. □

定理 1.11

平面上的非空开集 E 是连通的充分必要条件是:E 中任意两点可用位于 E 中的折线连接起来. ♡

证明 先证必要性. 设 E 是平面上一个非空的连通的开集, 任取 $a \in E$, 定义 E 的子集 E_1,E_2 如下:

$$E_1 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 可用位于} E \text{ 中的折线连接}\},$$

$$E_2 = \{z \in E : z \text{ 和} a \text{ 不能用位于} E \text{ 中的折线连接}\}.$$

显然,$E = E_1 \cup E_2$, 而且 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 现在证明 E_1 和 E_2 都是开集. 任取 $z_0 \in E_1$, 因 E 是开集, 故必有 z_0 的邻域 $B(z_0, \delta) \subset E$. 这一邻域中的所有点当然可用一条线段与 z_0 相连, 因而可用位于 E 中的折线与 a 相连, 即 $B(z_0, \delta) \subset E_1$, 所以 E_1 是开集. 再任取 $z_0' \in E_2$, 则必有 z_0' 的邻域 $B(z_0', \delta') \subset E$, 如果此邻域中有一点能用一条折线与 a 点相连, 那么 z_0' 能用线段与该点相连, 因而 z_0' 能用折线与 a 点相连, 这与 z_0' 的定义矛盾. 因而 $B(z_0', \delta') \subset E_2$, 即 E_2 也是开集. 由 E 的连通性知道,E_1,E_2 中必有一个是空集. 由于 $a \in E_1$, 故 E_2 是空集. 因而 E 中所有点都能用折线与 a 相连, 而 E 中任意两点可以用经过 a 的折线相连, 这就证明了必要性.

再证条件的充分性. 如果存在两个不相交的非空开集 E_1,E_2, 使得 $E = E_1 \cup E_2$. 任取 $z_1 \in E_1$,$z_2 \in E_2$, 由假定, 这两点可用 E 中的折线连接, 因而折线中必有一条线段把 E_1 中的一点与 E_2 中的一点连接起来. 不妨设这条线段连接的就是 z_1 和 z_2, 该线段的参数表示为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

其中,$t \in [0, 1]$. 今设

$$T_1 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_1\},$$

$$T_2 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_2\}.$$

则 T_1,T_2 是非空的不相交的开集, 而且 $T_1 \cup T_2 = (0, 1)$, 这与区间的连通性相矛盾. □

定义 1.19

非空的连通开集称为**域**. ♣

笔记 从定理 1.11知道, 域中任意两点必可用位于域中的折线连接起来.

从几何上来看, 一个域就是平面上连成一片的开集. 例如, 单位圆的内部、上半平面、下半平面等都是域的例子.

定理 1.12 (Jordan 定理)

一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个域, 其中一个是有界的, 称为 γ 的内部; 另一个是无界的, 称为 γ 的外部, 而 γ 是这两个域的共同的边界.

笔记 单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$ 和圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 都是域, 但它们从函数论的角度来看有很大的差别, 原因是前者是单连通的, 而后者则不是.

证明

□

定义 1.20

域 D 称为是**单连通的**, 如果 D 内任意简单闭曲线的内部仍在 D 内. 不是单连通的域称为是**多连通的**.

定义 1.21

如果域 D 是由 n 条简单闭曲线围成的, 就称 D 是 n **连通的**, 简单闭曲线中也可以有退化成一条简单曲线或一点的.

例题 1.7 单位圆盘是单连通的, 圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 是二连通的, 除去圆心的单位圆盘也是二连通的, 除去圆心和线段 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 的单位圆盘则是一个三连通域.

1.7 复变函数的极限和连续性

定义 1.22

设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z \in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个**单值复变函数**, 记为 $w = f(z)$ 或 $f : E \to \mathbb{C}$.E 称为 f 的定义域, 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 称为 f 的值域.

如果对于 $z \in E$, 对应的 w 有几个或无穷多个, 则称在 E 上确定了一个**多值函数**.

笔记 例如,$w = |z|^2$,$w = z^3 + 1$ 都是确定在整个平面上的单值函数; 而 $w = \sqrt[n]{z}$,$w = \operatorname{Arg} z$ 则是多值函数. 今后若非特别说明, 我们所讲的函数都是指单值函数.

注 复变函数是定义在平面点集上的, 它的值域也是一个平面点集, 因此复变函数也称为**映射**, 它把一个平面点集映成另一个平面点集. 与 $z \in E$ 对应的点 $w = f(z)$ 称为 z 在映射 f 下的像点,z 就称为 w 的原像. 点集 $\{f(z) : z \in E\}$ 也称为 E 在映射 f 下的像, 记为 $f(E)$. 如果 $f(E) \subset F$, 就说 f 把 E 映入 F, 或者说 f 是 E 到 F 中的映射. 如果 $f(E) = F$, 就说 f 把 E 映为 F, 或者说 f 是 E 到 F 上的映射.

定理 1.13

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 用 u 和 v 记 $w = f(z)$ 的实部和虚部, 则有

$$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

这就是说, 一个复变函数等价于两个二元的实变函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$.

笔记 例如 $w = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, 它等价于 $u = x^2 - y^2$ 和 $v = 2xy$ 两个二元函数;
再如 $w = |z|$, 它等价于 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $v = 0$ 这两个二元函数.

定义 1.23

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得当 $z \in E$ 且 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - a| < \varepsilon$, 就说当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 有极限 a, 记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

上述极限的定义也可用邻域的语言叙述为: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在与 ε 有关的正数 δ, 使得当 $z \in B(z_0, \delta) \cap E$ 且 $z \neq z_0$ 时有 $f(z) \in B(a, \varepsilon)$, 这后一种说法也适用于 $z = \infty$ 的情形.

♣

定理 1.14

设 f 是定义在点集 E 上的一个复变函数,z_0 是 E 的一个极限点,a 是给定的一个复数. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

♡

笔记 由此可知, 实变函数中有关极限的一些运算法则在复变函数中也成立.

证明 设 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta, z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0, f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 由下面的不等式

$$|u(x, y) - \alpha| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|,$$

$$|v(x, y) - \beta| \leqslant |f(z) - a| \leqslant |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta|$$

知道, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta.$$

□

定义 1.24

我们说 f 在点 $z_0 \in E$ 连续, 如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

如果 f 在集 E 中每点都连续, 就说 f 在集 E 上连续.

♣

定理 1.15

复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0) 处连续.

♡

证明 由定理 1.14易得. □

定义 1.25

f 在 E 上**一致连续**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$, 对 E 上任意的 z_1, z_2, 只要 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

♣

定理 1.16

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集,$f : E \to \mathbb{C}$ 在 E 上连续, 那么

(i) f 在 E 上有界;

(ii) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值, 即存在 $a, b \in E$, 使得对每个 $z \in E$, 都有

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(b)|;$$

(iii) f 在 E 上一致连续.

♡

证明 (i)

(ii) 记 $M = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$, 于是对每一自然数 n, 必有 $z_n \in E$, 使得

$$M - \frac{1}{n} \leqslant |f(z_n)| \leqslant M. \tag{1.4}$$

因为 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, 由Heine-Borel 定理,E 为有界闭集. 再由Bolzano-Weierstrass 定理,$\{z_n\}$ 必有极限点, 即有一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 设其极限为 a, 则 $a \in E$. 把(1.4)式写成

$$M - \frac{1}{n_k} \leqslant |f(z_{n_k})| \leqslant M,$$

让 $k \to \infty$, 并注意到 f 在 a 处的连续性, 即得 $|f(a)| = M$.

同理可证, 存在 $b \in E$, 使得 $|f(b)| = \inf\{|f(z)| : z \in E\}$.

(iii) □

第 2 章 全纯函数

2.1 复变函数的导数

定义 2.1

设 $f : D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2.1}$$

存在, 就说 f 在 z_0 处**复可微**或**可微**, 这个极限称为 f 在 z_0 处的**导数**或**微商**, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在 D 中每点都可微, 就称 f 是域 D 中的**全纯函数**或**解析函数**. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处**全纯**. ♣

命题 2.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续. ♠

注 但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

证明 设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (2.1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{2.2}$$

由此即得 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. □

例题 2.1 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

笔记 但容易看出这个函数在 $\mathbb{C}$ 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z) = \mathrm{Re} z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

证明 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbb{C}$ 中处处不可导. □

命题 2.2

(1) 若 f 和 g 在域 D 中全纯, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 D 中全纯, 而且

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

如果对每一点 $z \in D, g(z) \neq 0$, 那么 $\dfrac{f}{g}$ 也是 D 中的全纯函数, 而且

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}.$$

(2) 设 D_1, D_2 是 $\mathbb{C}$ 中的两个域, 且

$$f : D_1 \to D_2,$$

$$g : D_2 \to \mathbb{C}$$

都是全纯函数, 那么 $h = g \circ f$ 是 $D_1 \to \mathbb{C}$ 的全纯函数, 而且 $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$. 这里,$g \circ f$ 记 f 和 g 的复合函数:$g \circ f(z) = g(f(z))$.

证明

(1)

(2)

□

2.2 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.2

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. 我们说 f 在 z_0 处**实可微**, 是指 u 和 v 作为 x, y 的二元函数在 (x_0, y_0) 处可微.

今设 f 在 z_0 处实可微, 由二元实值函数可微的定义, 有

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|), \tag{2.3}$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|), \tag{2.4}$$

这里,$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 于是

$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + \mathrm{i}(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\Delta y + o(|\Delta z|) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|\Delta z|).
\end{aligned}$$

把 $\Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z})$,$\Delta y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Delta z - \overline{\Delta z})$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta z + \overline{\Delta z}) - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|).
\end{aligned}$$

引进算子

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

则上式可写为

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|). \tag{2.6}$$

容易看出,(2.6)式和(2.3),(2.4)两式等价.

命题 2.3

设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数,$z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处实可微的充分必要条件是 (4) 式成立, 其中,$\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 是由 (3) 式定义的算子.

证明 为什么要像 (3) 式那样来定义算子 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 呢？这是因为如果把复变函数 $f(z)$ 写成

$$f(x,y)=f\left(\frac{z+\overline{z}}{2},-\mathrm{i}\frac{z-\overline{z}}{2}\right),$$

把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量，分别对 z 和 $\overline{z}$ 求偏导数，则得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

这就是表达式 (3) 的来源. 这说明在进行微分运算时，可以把 $z,\overline{z}$ 看成独立的变量.

现在很容易得到 f 在 z_0 处可微的条件了. □

2.3 导数的几何意义

2.4 初等全纯函数

2.5 分式线性变换