0.1 Fourier 积分不等式

定理 0.1 (Fourier 型积分不等式)

若 $f(x)\in C^1[a,b]$, 则

(1)

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 若 $f(a)=f(b)$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)+c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right),c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

(3) 若 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c\in\mathbb{R}.$$

♡

注 (1) 中对 f 进行偶延拓的原因是: 使延拓后的区间端点函数值相等, 从而就能利用 Fourier 级数的逐项微分定理.

(2) 已经有区间端点函数值相等的条件了, 所以不需要进行延拓.

(3) 中对 f 进行奇延拓的原因是:f 满足 $f(a)=f(b)=0$, 此时对 f 做奇延拓后能使得 $f\in C^1[2a-b,b]$, 进而就能得到更好的结论.(如果只有 $f(a)=f(b)\neq 0$, 那么 f 奇延拓后在 $x=a$ 处间断.)

证明

(1) 把 $f(x)$ 延拓到 $[2a-b,b]$, 使得 $f(x)=f(2a-x),x\in[a,b)$, 则 $f(b)=f(2a-b),f\in C[2a-b,b]$ 且分段可微, 并且此时 f 关于 $x=a$ 轴对称. 因此设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

进而由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim-\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}[na_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)].$$

这里

$$a_n=\frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^b f(x)\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x,n\in\mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=(b-a)\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right],$$

$$\int_{2a-b}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-(b-a)\frac{a_0^2}{2}=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2=\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\iff\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_{2a-b}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

利用对称性, 就有

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)}\left(\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(2) 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim\frac{2\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+nb_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right).$$

这里

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathrm{d}x.$$

由 Parseval 恒等式, 我们有

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right],$$
$$\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

因此

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{(b-a)a_0^2}{4}=\frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leqslant\frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\iff\int_{a}^{b}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)+c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right).$$

(3) 令

$$f(x)=-f(2a-x),x\in[2a-b,a),$$

则 $f(x)\in C^1[2a-b,b]$, 并且此时 f 关于 $(a,0)$ 点中心对称. 设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

由 Fourier 级数的逐项微分定理可得

$$f'(x)\sim\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right).$$

这里

$$b_n = \frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^{b} f(x)\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}_0.$$

我们由 Parseval 恒等式可得

$$\int_{2a-b}^{b} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

$$\int_{2a-b}^{b} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^{b} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leqslant (b-a)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \int_{2a-b}^{b} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

利用对称性，我们有

$$\int_{a}^{b} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{a}^{b} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

等号成立条件是

$$f(x) = c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

□