0.1 点群

定义 0.1

以 $O(3)$ 表示三维 Euclid 空间的正交变换群.

而以 $SO(3)$ 表示三维 Euclid 空间的特殊正交变换群, 即行列式为 1 的正交变换构成的群.

♣

注 显然 $SO(3)$ 中元素都是绕原点的转动, 而 $O(3)$ 除转动外, 还有镜面反射.

命题 0.1

$SO(3) \lhd O(3), \quad [O(3) : SO(3)] = 2.$

♠

证明 由线性代数理论易知.

□

定义 0.2

$O(3)$ 的有限子群 G 称为**点群**.

如果点群 G 满足 $G \subseteq SO(3)$, 则称为**第一类点群**, 否则称为**第二类点群**.

♣

定理 0.1

设 G 是一个第二类点群. 令 $I = -I_3$, 其中 I_3 为三阶单位阵, 则有以下结果:

(1) $G \cap SO(3) = K$ 是 G 的正规子群且 $[G : K] = 2$;

(2) 若 $I \in G$, 则有 G 内直积分解 $G = K \otimes \langle I \rangle$;

(3) 若 $I \notin G$, 令 $K^+ = \{Ig \mid g \in G \setminus K\}$, 则 $G^+ = K \cup K^+$ 是第一类点群且 $G \cong G^+$.

♡

证明

(1) 由命题 0.1知 $SO(3) \lhd O(3)$, 故 $\forall g \in K, h \in G$ 有 $hgh^{-1} \in SO(3)$, 即有

$$hgh^{-1} \in G \cap SO(3) = K.$$

这说明 $K \lhd G$, 又 $g_1, g_2 \in G \setminus K$, 则由

$$\det(g_1 g_2^{-1}) = \det(g_1)\det(g_2^{-1}) = (-1)\cdot(-1) = 1 \Longrightarrow g_1 g_2^{-1} \in K$$

知 $g_1 K = g_2 K$, 因此任取 $g' \in G \setminus K$, 则 $g'K = g''K, \forall g'' \in G \setminus K$. 而 $gK = K, \forall g \in K$.

$$G/K = \{gK \mid g \in G = K \cup (G \setminus K)\} = \{K, g'K\}.$$

故 $[G : K] = 2$.

(2) 若 $I \in G$, 则对 $\forall A \in G \setminus K$, 有 $\det A = -1$, 从而 $\det(IA) = 1$ 且 $IA \in G$, 故 $IA \in K$, 因此存在 $A' \in K$, 使得

$$IA = A' \Longrightarrow A = IA' \in IK.$$

故 $G \setminus K \subseteq IK$. 对 $\forall IB \in IK$, 有 $\det(IB) = -1$, 故 $IB \notin K$, 但 $IB \in G$, 故 $IB \in G \setminus K$, 因此 $IK \subseteq G \setminus K$. 综上 $IK = G \setminus K$. 于是

$$G = K \cup (G \backslash K) = K \cup IK = (-IK) \cup (IK) = \{-Ik, Ik \mid k \in K\} = K\{I, -I\}.$$

又 $\langle I \rangle = \{I, -I\}$ 为二阶群且 $K \cap \langle I \rangle = \{-I\}$. 由 $(\pm I)g = g(\pm I)(\forall g \in G)$ 知 $\langle I \rangle \lhd G$. 故

$$G = K \otimes \langle I \rangle.$$

(3) 若 $I \notin G$, 由于 $g \in G \setminus K$, 故 $Ig \in SO(3)$, 即

$$G^+ = K \cup K^+ \subseteq SO(3).$$

令

$$\varepsilon(g)=\frac{1}{2}(1-\det g)=\begin{cases}0, & g\in K,\\ 1, & g\in G\setminus K.\end{cases}$$

再作 G 到 G^+ 的映射 σ 如下:

$$\sigma(g)=I^{\varepsilon(g)}g,\ g\in G.$$

显然 σ 是 G 到 G^+ 上的双射, 而且对 $\forall g_1,g_2\in G$, 注意到 $I^2=I^0$, 故

$$\varepsilon(g_1)+\varepsilon(g_2)=1-\frac{\det g_1+\det g_2}{2}=\begin{cases}0, & g_1g_2\in K,\\ 1, & g_1g_2\in G\setminus K\end{cases}=\varepsilon(g_1g_2).$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma(g_1)\sigma(g_2)&=I^{\varepsilon(g_1)}g_1I^{\varepsilon(g_2)}g_2=I^{\varepsilon(g_1)+\varepsilon(g_2)}g_1g_2\\&=I^{\varepsilon(g_1g_2)}g_1g_2=\sigma(g_1g_2)\in G^+,\end{aligned}$$

即 σ 保持乘法且 G^+ 对乘法封闭. 又因为

$$\sigma(g_1)^{-1}=\left(I^{\varepsilon(g_1)}g_1\right)^{-1}=I^{\varepsilon(g_1)}g_1^{-1}=\sigma\left(g_1^{-1}\right)\in G^+.$$

所以 G^+ 对逆元封闭. 因此 G^+ 为群. 故 σ 是 G 到 G^+ 上的群同构, 即 $G\cong G^+$.

□

定义 0.3

三维 Euclid 空间可视为 $\mathbf{R}^3$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$, x 的长度为

$$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

设 $r\in\mathbf{R}$ 且 $r>0$, 则 $S_r=\{x\in\mathbf{R}^3\mid |x|=r\}$ 为半径为 r 的球面.

♣

注 显然 $\forall g\in O(3), x\in S_r$ 有 $gx\in S_r$.

定义 0.4

设 G 为第一类点群, 若 $x\in S_r$ 有 $g\in G, g\neq \mathrm{id}$, 使得

$$gx=x,$$

称 x 为 g 的**极点**, 也称为 G 的**极点**.

♣

引理 0.1

设 P 是第一类点群 G 的所有极点的集合, 则有以下结果:

(1) P 是有限集, $g\in G, g\neq\mathrm{id}$, g 有且仅有两个极点;

(2) $\forall g\in G, x\in P$ 有 $gx\in P$, 即 G 把极点映为极点.

♡

证明

(1) 若 x 为 g 的极点, 即 $gx=x$. 于是 $-x\in S_r, g(-x)=-x$. 因此,$-x$ 亦为 g 的极点. 此时 $x,-x$ 是 g 的转动轴与 S_r 的交点, 因而对 $\forall g\in G, g\neq\mathrm{id}$,$g$ 有且仅有两点极点, 故 P 是有限集.

(2) 设 x 是 g_1 的极点, $g\in G$, 由

$$(gg_1g^{-1})(gx)=gx$$

知 gx 是 gg_1g^{-1} 的极点.

□

推论 0.1

由引理 0.1(2)知 G 把极点映为极点, 故可视 G 作用于极点集 P 上, 因而由定理????知 P 在 G 作用下分成一些 G 的轨道,

$$P=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_k,\ i\neq j,\ P_i\cap P_j=\varnothing.$$

设 x 是一个极点,$G_x=\{g\in G\mid gx=x\}$ 是 x 的迷向子群, 则 $|G_x|\geqslant 2$, 并且

$$G_{gx}=gG_xg^{-1},\ g\in G.$$

若 $x\in P_i$,$P_i=\{gx\mid g\in G\}$, 则由推论??知 $|P_i|=[G:G_x]$.

证明 由极点定义知, 必存在 $g_x\in G\setminus\{\mathrm{id}\}$, 使 $g_xx=x$. 从而 $G_x\supseteq\{\mathrm{id},g_x\}$, 故 $|G_x|\geqslant 2$.

又由定理????知

$$G_{gx}=gG_xg^{-1},\ g\in G.$$

□

定理 0.2

第一类点群 G 的极点集 P 只能分成两个或三个轨道.

证明 根据推论 0.1, 可设极点集可分解成 k 个轨道,

$$P=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_k,\ x_i\in P_i.$$

又设 $|G|=n$, $n_i=|G_{x_i}|$, $p_i=|P_i|$, 其中 G_{x_i} 是 x_i 的迷向子群. 于是由推论 0.1和推论??知

$$p_i=|P_i|=[G:G_{x_i}]=\frac{n}{n_i},\quad n_i\geqslant 2.$$

于是 G_{x_i} 中非恒等元数为 $n_i-1=\dfrac{n}{p_i}-1$. 于是对于第 i 个轨道,G 中以 P_i 中某点为极点的非恒等元的变换数目为

$$\sum_{x\in P_i}|G_x\setminus\{\mathrm{id}\}|=p_i(n_i-1)=n-p_i.$$

将每个轨道并起来得到

$$\sum_{x\in P}|G_x\setminus\{\mathrm{id}\}|=\sum_{i=1}^k p_i(n_i-1)=\sum_{i=1}^k(n-p_i).$$

但注意 G 中除恒等变换外有 $n-1$ 个变换, 并且除恒等变换外的每个变换 g 都有两个极点, 即若 $gx=x$, 则 $g\in G_x\cap G_{-x}$, 故上述计数中每个 g 都重复计数了一次. 因而有

$$\sum_{i=1}^k p_i(n_i-1)=2(n-1).$$

以 n 除两边, 则有

$$\sum_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{n}\right),\tag{1}$$

其中

$$n\geqslant n_i\geqslant 2.$$

若 $k=1$, 则由式(1)知 $n_1=n$, 于是 $1-\dfrac{1}{n}=2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, 矛盾.

若 $k\geqslant 4$, 则由式(1)知

$$\sum_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=k-\sum_{i=1}^k\frac{1}{n_i}\geqslant k-\frac{k}{2}=\frac{k}{2}\geqslant 2,$$

但是 $2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<2$, 这就导出矛盾, 故 $k=2$ 或 $k=3$.

□

定理 0.3

如果第一类点群 G 的极点分成两个轨道, 则 G 只有两个极点 $x,-x$. 此时 $G_x = G_{-x} = G$ 为 n 阶循环群.

注 对于群 G, 有一个简单的几何解释. 可以把 g 看成在平面直角坐标系中绕原点旋转 $2\pi/n$ 角, 即有

$$g = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

证明 设 G 的极点集 P 可分解为如下两个轨道:

$$P = P_1 \cup P_2,\ x_i \in P_i.$$

其中 $p_1 = |P_1| \geqslant 1, p_2 = |P_2| \geqslant 1$. 又设 $|G| = n,\ n_i = |G_{x_i}|, G_{x_i}$ 是 x_i 的迷向子群. 由式(1)有

$$2(1-n^{-1}) = 1 - n_1^{-1} + 1 - n_2^{-1},$$
$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n},$$

因此

$$p_1 = p_2 = 1,\ n_1 = n_2 = n,$$

故 G 只有两个极点 $x,-x$, 因而 G 中每个元素转动轴都是通过 x 与 $-x$ 的直线. 设 G 中 n 个元素 $\mathrm{id}, g_1, \cdots, g_{n-1}$ 的旋转角分别为

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} (< 2\pi).$$

由带余除法, 对 $i \geqslant 2$ 有 $m_i \in \mathbb{N}$, 使得

$$\theta_i = m_i\theta_1 + \phi_i,\ 0 \leqslant \phi_i < \theta_1.$$

于是 $g_i g_1^{-m_i} \in G$ 的旋转角为 $\theta_i - m_i\theta_i = \phi_i$. 若 $\phi_i \neq 0$, 则 $g_i g_1^{-m_i}$ 的旋转角与 G 中所有元素都不同, 即 $g_i g_1^{-m_i} \notin G$ 矛盾! 故 $\phi_i = 0$, 即 $g_i = g_1^{m_i}$, 从而 G 为循环群且 $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{n}$.

□

定理 0.4

如果第一类点群 G 的极点分成三个轨道, 在方程(1)中, 设 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, 则有以下情形:

(1) $n_1 = n_2 = 2,\ n_3 = \dfrac{n}{2},\ n$ 为偶数,$n \geqslant 4$;

(2) $n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 3,\ n = 12$;

(3) $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ n = 24$;

(4) $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ n = 60$.

证明 设 G 的极点集 P 可分解为如下三个轨道:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3,\ x_i \in P_i,\ i = 1,2,3.$$

其中 $p_i = |P_i| \geqslant 1$. 又设 $|G| = n,\ n_i = |G_{x_i}|, G_{x_i}$ 是 x_i 的迷向子群. 方程(1)可化简为

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3},\ n \geqslant n_i \geqslant 2.$$

由 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, 故 $n_1 \geqslant 3$ 时无解. 于是有

$$n_1 = 2,$$

此时有

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

若 $n_2 \geqslant 4$, 此时有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1<1+\frac{2}{n},$$

矛盾. 故 $n_2 \geqslant 4$ 方程时无解. 因此 $2 \leqslant n_2 \leqslant 3$, 即 $n_2=2$或3.

(1) 当 $n_1=n_2=2$ 时, 此时有

$$\frac{1}{n_3}=\frac{2}{n},$$

即 $n=2n_3$ 为偶数. 由 $n_3 \geqslant 2$, 故 $n \geqslant 4$.

(2) 当 $n_1=2,\ n_2=3$ 时有

$$1+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n_3},$$

再结合 $n>n_1+n_2=5$ 可得

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{n}=\frac{1}{n_3} \Longrightarrow n_3=6-\frac{72}{n+12} \in (6-\frac{72}{5+12},6),$$

再结合 $n_3 \geqslant n_2=3$ 可得

$$3 \leqslant n_3 \leqslant 5.$$

(i) 当 $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=3$ 时有 $n=12$.

(ii) 当 $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=4$ 时有 $n=24$.

(iii) 当 $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=5$ 时有 $n=60$.

□

设第一类点群 G 的极点集 P 分解为如下三个轨道:

$$P=P_1 \cup P_2 \cup P_3,\ x_i \in P_i,\ i=1,2,3.$$

其中 $p_i=|P_i| \geqslant 1$. 又设 $|G|=n,\ n_i=|G_{x_i}|$,G_{x_i} 是 x_i 的迷向子群. 由定理 0.4知 n_1,n_2,n_3 的取值只有四种情况.

(1) 当 $n_1=n_2,\ n=2n_3$ 时,G 称为**二面体群**, 记为 D_{n_3}. 设 T 是平面上一个正 n_3 边形, 以 T 的中心 O 为原点, 通过 O 垂直 T 的平面的直线为 Oz 轴.r 为绕 Oz 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 角. 显然 r 使正 n_3 边形不变,$r^k(k=0,1,\cdots,n_3-1)$ 也使正 n_3 边形不变.T 有 n_3 条对称轴, 绕对称轴旋转 $180°$ 也保持 T 不变. 所有保持 T 不变的空间转动构成的群就是 G, 极点集 P 为这些转动轴与 S_r 的交点, 在 G 的作用下分为三个轨道.

(2) 当 $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=3,\ n=12$ 时, 群 G 称为**正四面体群** (tetrahedral group), 记为 T. 设 T 为正四面体, 以一个顶点与中心的连线为轴旋转 $120°, 240°$ 都使 T 不变. 以中心与一边的中点的连线为轴旋转 $180°$ 也使 T 不变. 所有保持 T 不变的空间转动构成的群就是 G, 极点集 P 为这些转动轴与 S_r 的交点, 在 G 的作用下分为三个轨道.

一个正四面体是由 4 个正三角形围成的多面体. 取它的中心为坐标原点, 并使其 4 个顶点的坐标为

$$A_1(-1,-1,1),\ A_2(1,1,1),\ A_3(1,-1,-1),\ A_4(-1,1,-1),$$

如图 1所示.

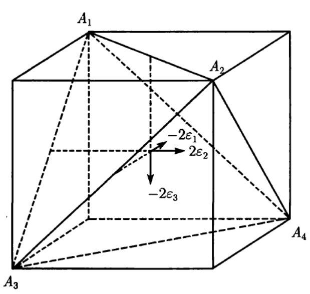

图 1

以 T 表示空间正四面体群, 这是使正四面体不变的旋转构成的群.

现在来看看 T 的元素. 首先, 保持 A_1 不动的变换, 除单位变换外, 还有绕过 A_1 与 $\triangle A_2A_3A_4$ 中心的直线旋转 $120°$ 与 $240°$. 这两个变换有对称群的表示法:(A_2, A_3, A_4) 与 (A_2, A_4, A_3).

同样, 可以求出保持 A_2, A_3, A_4 的变换的对称群的表示法

$$(A_1, A_3, A_4),\ (A_1, A_4, A_3),\ (A_1, A_2, A_4),\ (A_1, A_4, A_2),\ (A_1, A_2, A_3),\ (A_1, A_3, A_2).$$

此外, 绕三个坐标轴旋转 $180°$ 也使正四面体不变, 这样又有三个元素, 它们的对称群的表示法为

$$(A_2, A_3)(A_1, A_4),\ (A_1, A_3)(A_2, A_4),\ (A_1, A_2)(A_3, A_4).$$

不难看出 $|T| = 12$, 而且与 4 个文字的交错群 A_4 同构.

(3) 当 $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ n = 24$ 时, 群 G 称为**正八面体群** (octahedral group), 记为 O. 设 T 为正八面体, 以一个顶点与中心的连线为轴旋转 $90°, 180°, 270°$ 都使 T 不变. 以中心与一边的中点的连线为轴旋转 $180°$ 也使 T 不变. 以中心与一个面的中心的连线为轴旋转 $120°, 240°$ 也使 T 不变. 所有保持 T 不变的空间转动构成的群就是 G, 极点集 P 为这些转动轴与 S_r 的交点, 在 G 的作用下分为三个轨道.

一个正八面体是由 8 个正三角形围成的多面体. 取正八面体的中心为坐标原点, 并使正八面体的 6 个顶点坐标为

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1),$$

如图 2所示.

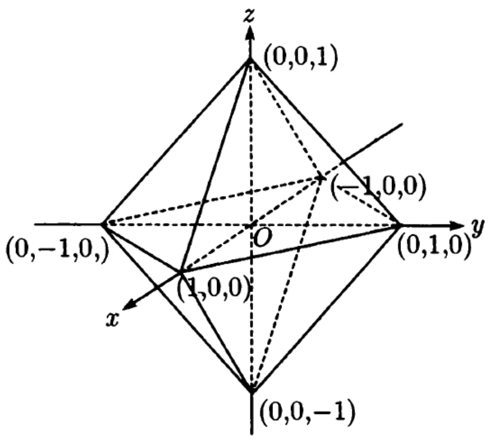

图 2

显然

$$x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ z = \pm 1$$

这 6 个平面围成一个立方体. 此立方体 6 个面的中心恰为正八面体的 6 个顶点, 称为正八面体的外接立方体, 而

$$x = \pm\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{2},\ z = \pm\frac{1}{2}$$

这 6 个面围成一个立方体, 它的 8 个顶点恰好是正八面体 8 条棱的中点, 称为正八面体的内接立方体.

所谓正八面体群 O 即保持正八面体不变的旋转构成的群. 由于正八面体与立方体的关系, 因而 O 也是使立方体不变的旋转构成的群.

上面正八面体外接立方体的 8 个顶点的坐标为 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. 记通过点 $(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1)$ 与 $(1, -1, 1)$ 的 4 条对角线为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 α_4.

显然,O 中任一元素引起 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 α_4 的一个置换. 由于立方体的位置完全由这 4 条对角线决定, 故 O 中不同元素引起 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 α_4 的不同置换. 因此, 可视 $O \subseteq S_4$. 另一方面,S_4 可由 $(12), (143)$ 两个元素生成. 事实上记 $x = (12), y = (143)$. 于是

$$xyx^{-1} = (243),\ \ yxy^{-1} = (24),$$

$$(243)x(243)^{-1} = (14),\ (243)^2x(243)^{-2} = (13).$$

由此可知 (12), (143) 生成 S_4.

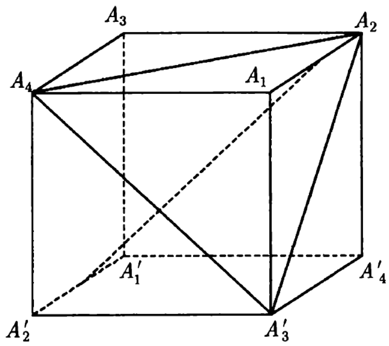

图 3

如图 3所示. 通过 A_1A_2 的中点与 $S'_1A'_2$ 的中点的轴在 $\square A_1A_2A'_1A'_2$ 所在的平面内, 与 $\square A_4A_3A'_4A'_3$ 垂直且过其中心. 绕此轴旋转 180°, 则有 $A_3 \to A'_3, A_4 \to A'_4, A_1 \to A_2, A'_1 \to A'_2$, 因而恰好对应变换 $(\alpha_1\alpha_2)$. 同样能求出其他变换, 因而 $O \cong S_4$, 故以 S_4 代替 O.

又对角线 $\alpha_1 = A_1A'_1$ 垂直于 $\triangle A_2A_4A'_3$, 于是绕 α_1 旋转 120°, 240° 也使立方体不变, 而 120° 的旋转恰为 $(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$.

O 也是使立方体保持不变的群.

(4) 当 $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ n = 60$ 时, 群 G 称为**正二十面体群** (icoshedral group), 记为 I. 设 T 是正二十面体, 是由 20 个正三角形组成. 通过 T 的中心与棱的中点的连线有 15 条直线, 绕这些直线的每一条线旋转 180° 都保持 T 不变. 因此,I 有 15 个二阶元. 这些直线与 S_r 的交点为 I 的极点, 并构成一个轨道 $P_1, |P_1| = 30$, 其中一点的迷向子群的阶 $n_1 = 2$.

通过 T 的中心与各面中心的连线有 10 条, 正好是长对角线所在直线. 绕这些直线的每一条线旋转 120°, 240° 都保持 T 不变. 因此,I 有 20 个三阶元. 这些直线与 S_r 的交点为 I 的极点, 并构成一个轨道 $P_2, |P_2| = 20$, 其中一点的迷向子群的阶 $n_2 = 3$.

通过 T 的中心与各顶点的连线有 6 条, 正好是长对角线所在直线. 绕这些直线的每一条线旋转 72°,144°,216°, 288° 都保持 T 不变. 因此,I 有 24 个 5 阶元. 这些直线与 S_r 的交点为 I 的极点, 并构成一个轨道 $P_3, |P_3| = 12$, 其中一点的迷向子群的阶 $n_3 = 5$.

因此,I 是 60 阶群,I 的极点集 P 分成三个轨道,$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. 保持 T 不变的转动群称为正二十面体群, 记为 I.

以正二十面体的各面的中心为顶点, 相邻两面的中心的连线为棱, 于是构成一个以 12 个正五边形为面的正十二面体, 称为 T 的内接正十二面体 (图 4),I 也保持内接正十二面体不变.

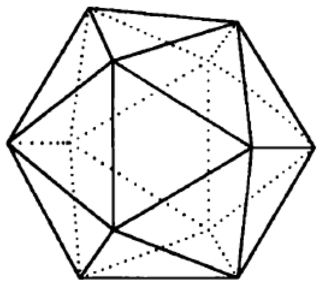

图 4

定理 0.5

$\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}), \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

$\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ 称为**黄金分割数**.

证明 设在 $\triangle ABC$ 中,

$$AB = AC = 1,\ \angle A = 36^\circ,\ \angle B = \angle C = 72^\circ.$$

作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 E. 于是

(1) $\triangle EAB$ 为等腰三角形且 $AE = EB$.

(2) $\triangle BCE$ 为顶角为 36° 的等腰三角形,$EB = BC$, 因此 $\triangle ABC \sim \triangle BCE$,

从而

$$AC : AE = AC : BC = BC : EC = AE : (AC - AE).$$

由 $AC = 1$ 有 $BC = AE = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, 再由正弦定理即得结论.

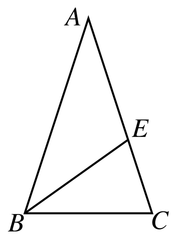

图 5

□

定理 0.6

I 是单群, 与 A_5 同构.

证明 因为 I 的二阶元彼此共轭, 构成一个共轭类 C_2, $c_2 = 15$; 三阶元彼此共轭, 构成一个共轭类 C_3, $c_3 = 20$; 旋转 $72^\circ, 288^\circ$ 的元素彼此共轭, 构成一个共轭类 C_4, $c_4 = 12$; 旋转 $144^\circ, 216^\circ$ 的元素彼此共轭, 构成一个共轭类 C_5, $c_5 = 12$. 又 $C_1 = \{\mathrm{id}\}$, $c_1 = 1$. 由此可知 I 是 60 阶单群.

I 的 Sylow 2 子群的个数 $2t+1 \mid 15$,I 中无 4 阶元,2 的个数为 20, 因此 $2t+1 = 5$.

设 I 的 5 个 Sylow 2 子群为 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 和 Y_5. $\forall g \in C$, 定义 g 在 $X = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}$ 上的作用 $\Phi(g)$,

$$\Phi(g)Y_i = gY_iG^{-1},\ Y_i \in X.$$

于是 $\Phi(g) \in S_X \cong S_5$ 且

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h),\ \forall g, h \in I.$$

因此,Φ 是 I 到 S_5 的同态映射,$\Phi(I)$ 有 3 阶元与 5 阶元, 因此 $\Phi(I) \supseteq A_5$. 又因 I 为 60 阶的单群, 故 $I \cong A_5$.

□