0.1 整数

定理 0.1 (逆归定理)

假设 S 是一个集合,$a \in S$, 并且对于每个 $n \in N$,$f_n : S \to S$ 均是函数, 则存在唯一的函数 $\varphi : N \to S$, 使得 $\varphi(0) = a$ 并且 $\varphi(n+1) = f_n(\varphi(n))(\forall n \in N)$.

证明 我们将构作 $N \times S$ 上的一个关系 R, 使得它是满足上述性质的函数 $\varphi : N \to S$ 的图象, 令

$$\mathcal{F} = \{Y \subset N \times S \mid (0, a) \in Y, \text{并且}(n, x) \in Y \Rightarrow (n+1, f_n(x)) \in Y(\forall n \in N)\}$$

由于 $N \times S \in \mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F} \neq \varnothing$. 令 $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$, 则 $R \in \mathcal{F}$. 又设 M 为子集合

$$\{n \in N \mid \text{存在唯一的} x_n \in S, \text{使得}(n, x_n) \in R\}$$

我们归纳证明 $M = N$. 如果 $0 \notin M$, 则有 $(0, b) \in R$, 其中 $b \neq a$, 并且集合 $R - \{(0, b)\} \subset N \times S$ 属于 $\mathcal{F}$. 从而 $R = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \subset R - \{(0, b)\}$, 这就导致矛盾. 因此 $0 \in M$. 现在假定 $n \in M$(即有唯一的 $x_n \in S$, 使得 $(n, x_n) \in R$), 则 $(n+1, f_n(x_n)) \in R$. 如果又有 $(n+1, c) \in R$, 而 $c \neq f_n(x_n)$, 则 $R - \{(n+1, c)\} \in \mathcal{F}$(验证!), 由此又可象上面那样导致矛盾. 因此 $x_{n+1} = f_n(x_n)$ 是 S 中唯一的元素, 使得 $(n+1, x_{n+1}) \in R$. 于是由归纳法 (定理 6.1) 可知 $N = M$, 即 $n \longmapsto x_n$ 定义了一个函数 $\varphi : N \to S$, 它的图象为 R. 由于 $(0, a) \in R$, 从而 $\varphi(0) = a$. 对于每个 $n \in N$,$(n, x_n) = (n, \varphi(n)) \in R$. 由于 $R \in \mathcal{F}$, 从而 $(n+1, f_n(\varphi(n))) \in R$. 但是 $(n+1, x_{n+1}) \in R$. 由 x_{n+1} 的唯一性推出 $\varphi(n+1) = x_{n+1} = f_n(\varphi(n))$. □

注 如果 A 是非空集合,A 中的序列是一个函数 $N \to A$. 一个序列通常表示成 $\{a_0, a_1, \ldots\}$,$\{a_i\}_{i \in N}$ 或者 $\{a_i\}$, 其中 $a_i \in A$ 是 $i \in N$ 的象. 类似地, 函数 $N^* \to A$ 也称作序列, 并且表示成 $\{a_1, a_2, \ldots\}$,$\{a_i\}_{i \in N^*}$ 或者 $\{a_i\}$, 这些符号在课文中不会引起混乱.