

0.1 豌豆讲义题

引理 0.1

设 u_1, \dots, u_m 和 v_1, \dots, v_n 是两组给定的非零复数, 若对任意正整数 k 都有 $u_1^k + \dots + u_m^k = v_1^k + \dots + v_n^k$, 则 u_1, \dots, u_m 是 v_1, \dots, v_n 的一个排列, 进而 $m = n$.



证明 反证, 若 u_1, \dots, u_m 不是 v_1, \dots, v_n 的一个排列, 则若 $u_i = v_j (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$, 则将这样的 u_i^k, v_j^k 从上式中消去得到新式不妨设为

$$u_1^k + \dots + u_{m'}^k = v_1^k + \dots + v_{n'}^k, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

其中 $u_i \neq v_j (i = 1, 2, \dots, m', j = 1, 2, \dots, n')$.

(i) 当 $m = n$ 时, 就有 $m' = n' \geq 1$, 否则 $m' = n' = 0$, 即 u_1, \dots, u_m 是 v_1, \dots, v_n 的一个排列, 矛盾! (ii) 当 $m \neq n$ 时, 就有 $m' \geq 1$ 或 $n' \geq 1$. 无论 (i) 还是 (ii), 都有 $m' + n' \geq 1$. 于是我们可以将 (1) 式中相同的项合并得到新的等式不妨设为

$$c_1 u_1^k + \dots + c_{m''} u_{m''}^k = d_1 v_1^k + \dots + d_{n''} v_{n''}^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

其中 u_i, v_j 两两互不相同, $c_i, d_j \in \mathbb{N}_1$. 取 $k = 1, 2, \dots, m'' + n''$, 就有

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_1 & \cdots & u_{m''} & v_1 & \cdots & v_{n''} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{m''+n''} & \cdots & u_{m''}^{m''+n''} & v_1^{m''+n''} & \cdots & v_{n''}^{m''+n''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m''} \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_{n''} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_{m''} = d_1 = \dots = d_{n''} = 0.$$

这与 $c_i, d_j \in \mathbb{N}_1$ 矛盾! 故 u_1, \dots, u_m 就是 v_1, \dots, v_n 的一个排列, 进而 $m = n$. □

命题 0.1

设 A, B 是 n 阶复方阵, 且对任意正整数 k 有

$$\text{tr}((A+B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k),$$

记 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0, B$ 全体特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$, 这里 λ_i, μ_j 都非零 (可以相同), 则 $A+B$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$. 换句话说, $A+B$ 的全体非零特征值, 就是把 A 的和 B 的全体非零特征值拼起来.



证明 设 $A+B$ 的特征值为 $x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0$, 则

$$\text{tr}((A+B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k), \forall k \in \mathbb{N} \iff x_1^k + \dots + x_m^k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_s^k + \mu_1^k + \dots + \mu_t^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是由引理 0.1 可知, x_1, \dots, x_m 就是 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t$ 的一个排列. 这就完成了证明. □

例题 0.1 设 A, B 是实对称矩阵且对任意正整数 k 有 $\text{tr}((A+B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k)$, 证明: $AB = BA = 0$.

证明 记 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0, B$ 全体特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$, 这里 λ_i, μ_j 都非零 (可以相同), $s, t \in [0, n] \cap \mathbb{N}$. 由实对称矩阵的正交相似标准型可知, 存在可逆矩阵 W , 使得

$$B = P^T \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} P, D_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_t \end{pmatrix}.$$

显然条件与结论在正交相似变换 $B \rightarrow U^T B U$ 下不变, 故可以不妨设 $B = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. 于是

$$AB = O \iff \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} = O \Rightarrow XD_0 = ZD_0 = O \Rightarrow X = Z = O.$$

又因为 A 是对称阵, 所以 $A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & W \end{pmatrix}$. 从而

$$BA = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & W \end{pmatrix} = O = AB.$$

因此只需证明 $AB = O$. 由命题 0.1 可知, $A + B$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$. 显然 $s + t = r(A + B) \leq n$.

(i) 若 $s + t = n$, 则利用正交相似标准型, 不妨设

$$A = U^T \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} U, B = \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_t \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

其中 U 是正交阵. 从而

$$A + B = \begin{pmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_3^T & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T D_1 U_1 & U_1^T D_1 U_2 \\ U_2^T D_1 U_1 & U_2^T D_1 U_2 + D_2 \end{pmatrix}.$$

注意到此时 $|A + B| = |D_1| |D_2|$, 于是

$$\begin{aligned} |A + B| &= |U_1^T D_1 U_1| \left| U_2^T D_1 U_2 + D_2 - U_2^T D_1 U_1 U_1^{-1} D_1^{-1} U_1^{-T} U_1^T D_1 U_2 \right| \\ &= |U_1^T D_1 U_1| |D_2| = |U_1^T U_1| |D_1| |D_2| = |D_1| |D_2|. \end{aligned}$$

由此可知 $|U_1^T U_1| = 1$. 由 U 是正交阵可知

$$\begin{pmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_3^T & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = I_n \Rightarrow U_1^T U_1 + U_3^T U_3 = I \Rightarrow |U_1^T U_1| = |I - U_3^T U_3| = 1. \quad (2)$$

由命题 ??(2) 可知 $U_3^T U_3$ 是半正定阵, 因此设 $U_3^T U_3$ 的全体特征值为 $t_1, \dots, t_s \geq 0$, 则由 (2) 式可知

$$(1 - t_1) \cdots (1 - t_s) = 1 \Rightarrow t_1 = \cdots = t_s = 0.$$

于是由半正定矩阵的合同标准型知, 存在可逆阵 C , 使得

$$C^T U_3^T U_3 C = O \Rightarrow U_3^T U_3 = O \xrightarrow{r(U_3)=r(U_3^T U_3)=0} U_3 = O.$$

同理可得 $U_2 = O$. 因此

$$A = \begin{pmatrix} U_1^T & \\ & U_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & \\ & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T D_1 U_1 & \\ & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} O & O \\ O & D_2 \end{pmatrix}.$$

故 $AB = BA = O$.

(ii) 若 $s + t < n$, 则由实对称阵可相似对角化, 再结合特征值可知 $r(A + B) = r(A) + r(B)$. 由命题 ??(6) 可知

$$r(A + B) \leq r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) \implies r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) = s + t.$$

故 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = O$ 的解空间 V 的维数等于 $n - (s + t)$. 取 V 的一组标准正交基 $e_1, \dots, e_{n-(s+t)}$, 并扩充为全空间的标准正交基 $e_1, \dots, e_{n-(s+t)}, \dots, e_n$. 于是可设

$$A(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}, B(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix}.$$

其中 A_2, B_2 都是 $s+t$ 阶方阵. 又因为 A, B 为对称阵, 所以

$$A(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

$$B(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_2 \end{pmatrix},$$

$$(A+B)(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2+B_2 \end{pmatrix}.$$

从而由 $A, B, A+B$ 的特征值可知, A_2 的 B_2 的全体特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_t, 0, \dots, 0$ 和 $\mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$. A_2+B_2 一定含有特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_t, \mu_1, \dots, \mu_t$. 而 A_2+B_2 就是 $s+t$ 阶方阵, 故 A_2+B_2 的全体特征值就是 $\lambda_1, \dots, \lambda_t, \mu_1, \dots, \mu_t$. 此时, 由 (i) 同理可证 $A_2B_2 = B_2A_2 = O$. 于是

$$AB(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix} = O \Rightarrow AB = O.$$

这就完成了证明. □

推论 0.1

设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 相似当且仅当 $AB = BA = O$.

证明 必要性: 设 A 和 B 的全部特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0$ 和 $\mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$ ($s, t \in [0, n], \lambda_i, \mu_j \neq 0$), 则由 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 相似可知, $A+B$ 的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$. 从而存在可逆矩阵 P , 使得

$$\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_t \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} P.$$

进而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{pmatrix} (A+B)^k & \\ & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^k & \\ & B^k \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s^k & & & \\ & & & \mu_1^k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_t^k \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} P.$$

于是对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\text{tr}((A+B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_s^k + \mu_1^k + \dots + \mu_t^k.$$

因此, 再由 **例题 0.1** 可知 $AB = BA = O$.

充分性: 设 A 和 B 的全部特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0$ 和 $\mu_1, \dots, \mu_t, 0, \dots, 0$ ($s, t \in [0, n], \lambda_i, \mu_j \neq 0$), 因

为 A, B 为实对称阵且 $AB = BA$, 所以由命题??可知, 存在正交阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = A_1, \quad P^{-1}BP = B_1,$$

其中 A_1 和 B_1 都是对角阵, 且主对角元分别是 A 和 B 的特征值. 不妨设

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

由 $AB = BA = O$ 可知 $A_1B_1 = O$. 因此

$$B_1 = \begin{pmatrix} & & & s & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ s & & & 0 & & \\ & & & & \mu_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu_t \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & \\ & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & \mu_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mu_t \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & B_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & \mu_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mu_t \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & O \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 相似. □

例题 0.2 设 A, B 是 n 阶复方阵, 若 $AB = O$, 则对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{tr}((A+B)^k) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k).$$

证明 不妨设 B 既不是零矩阵也不是可逆矩阵, 否则结论显然成立. 取 $\operatorname{Ker} A$ 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 并扩充成 \mathbb{C}^n 的

一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 从而可设

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

其中 A_1, A_2 是列满秩矩阵. 于是

$$\begin{aligned} AB(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= O \\ \iff (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} &= O \\ \iff \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} &= O \\ \implies A_1 B_3 = O, A_1 B_4 = O, A_2 B_3 = O, A_2 B_4 = O \\ \implies \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B_3 = O, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B_4 = O. \end{aligned}$$

又因为 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 列满秩, 所以上述方程只有零解, 即 $B_3 = B_4 = O$. 故

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因此 A 与 $\begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ 相似, B 与 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}$ 相似. 从而 $A+B$ 与 $\begin{pmatrix} B_1 & A_1+B_2 \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ 相似. 进而对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} A^k &\sim \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} O & * \\ O & A_2^k \end{pmatrix}, \quad B^k \sim \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} B_1^k & * \\ O & O \end{pmatrix}, \\ (A+B)^k &\sim \begin{pmatrix} B_1 & A_1+B_2 \\ O & A_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} B_1^k & * \\ O & A_2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\text{tr}((A+B)^k) = \text{tr}(A_2^k) + \text{tr}(B_1^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k).$$

□

例题 0.3 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 计算 A 的特征值, 并求出其相似标准型与对应的过渡矩阵.

证明 答案见豌豆讲义.

□

例题 0.4 设 A 是 n 阶复方阵, 证明: $A\bar{A}$ 的特征值中, 虚数和负实数 (如果存在) 都是成对出现的, 进而成立: $|\lambda I + A\bar{A}| \geq 0, \forall \lambda \geq 0$.

证明 对 $A\bar{A}$ 的任一特征值 λ , 存在特征向量 α , 使得 $A\bar{A}\alpha = \lambda\alpha$. 令 $W = \text{span}(\alpha, A\bar{\alpha})$, 则 $\dim W = 1$ 或 2 .

若 $\dim W = 1$, 则 $A\bar{\alpha} = \mu\alpha, \mu \in \mathbb{C}$. 将 α 扩充为全空间的基 $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 这组基都取共轭后仍是全空间的基, 则

$$A(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = (\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

这里 A_1 是 $n-1$ 阶方阵. 记 $P = (\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是可逆阵, 则 $A = P \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \overline{P}^{-1}$, 并且

$$A\overline{A} = P \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}} P^{-1} = P \begin{pmatrix} |\mu|^2 & * \\ 0 & A_1 \overline{A_1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

若 $\dim W = 2$, 则 $\alpha, A\overline{\alpha}$ 线性无关, 将 $\alpha, A\overline{\alpha}$ 扩充为全空间的基 $\alpha, A\overline{\alpha}, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, 这组基都取共轭后仍是全空间的基. 又注意到 $A\overline{A}\alpha = \lambda\alpha$, 故

$$A(\overline{\alpha}, \overline{A\alpha}, \alpha_3, \dots, \overline{\alpha_n}) = (\alpha, A\overline{\alpha}, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & \lambda & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

这里 A_1 是 $n-2$ 阶方阵. 记 $P = (\alpha, A\overline{\alpha}, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, 则 $A = P \begin{pmatrix} 0 & \lambda & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} P^{-1}$, 并且

$$A\overline{A} = P \begin{pmatrix} 0 & \lambda & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \overline{\lambda} & * \\ 0 & 0 & A_1 \overline{A_1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

因此由数学归纳法可知, 存在可逆复方阵 P , 使得 $A = PDP^{-1}$, 这里 D 是分块上三角阵, 对角块为 1 阶非负实数或形如 $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的二阶块. 进而, $A\overline{A}$ 可相似上三角化, 其中主对角元素即全体特征值满足: 或者是非负实数, 或者是成对出现的共轭虚数, 或者是成对出现的负数.

设 $A\overline{A}$ 的全体特征值为 x_1, \dots, x_n , 则 x_1, \dots, x_n 中的虚数和负实数 (如果存在) 都是成对出现的. 于是由命题可知 $\lambda I + A\overline{A}$ 的全体特征值为 $\lambda + x_1, \dots, \lambda + x_n$, 则

$$|\lambda I + A\overline{A}| = \prod_{i=1}^n (\lambda + x_i) \geq 0, \forall \lambda \geq 0.$$

□

例题 0.5 设实数 a, b, c, d, e 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 = 1$, 设 A 是 5×3 矩阵, 每行都是 a, b, c 的排列, B 是 5×2 矩阵, 每行都是 d, e 的排列, 记矩阵 $M = (A, B)$, 证明: $(\text{tr}(M))^2 \leq (5 + 2\sqrt{6}) \text{r}(M)$, 并且 M 有实特征值 λ 满足 $|\lambda| \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

证明 显然有 $|a|, |b|, |c|, |d|, |e| \leq 1$, 则

$$(\text{tr}(M))^2 \leq 5^2 = 25.$$

注意到 $1 \leq \text{r}(M) \leq 5$, 故当 $\text{r}(M) \geq 3$ 时, 恒有

$$(5 + 2\sqrt{6}) \text{tr}(M) \geq 25 \geq (\text{tr}(M))^2.$$

因此我们只需考虑 $\text{r}(M) = 1, 2$ 的情形.

(1) 当 $\text{r}(M) = 1$ 时, 我们有

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ k_1 a & k_1 b & k_1 c & k_1 d & k_1 e \\ k_2 a & k_2 b & k_2 c & k_2 d & k_2 e \\ k_3 a & k_3 b & k_3 c & k_3 d & k_3 e \\ k_4 a & k_4 b & k_4 c & k_4 d & k_4 e \end{pmatrix},$$

因为 $k_i a, k_i b, k_i c$ 是 a, b, c 的排列, 所以

$$k_i^2 (a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow k_i = \pm 1, i = 1, 2, 3, 4.$$

再利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(M) \leq |a| + |b| + |c| + |d| + |e||a| + |b| + |c| + \sqrt{2}.$$

因此

$$(\operatorname{tr}(M))^2 = 5 + 2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6}) \operatorname{tr}(M).$$

(2) 当 $\operatorname{r}(M) = 2$ 时, 设 $M = \begin{pmatrix} U & P \\ Q & N \end{pmatrix}$, 其中 U 为 3 阶方阵, N 为 2 阶方阵. 由 $d^2 + e^2 = 1$ 可得 $\operatorname{tr}(N) \leq 2$.

现在讨论 $\operatorname{tr}(U)$.

(i) 若 U 的主对角元互不相同, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a, b, c . 此时利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(U) \leq |a| + |b| + |c| \leq \sqrt{3} < \sqrt{6}.$$

(ii) 若 U 的主对角只出现 a, b, c 中两个, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a, a, b . 此时利用 Cauchy 不等式可得

$$\operatorname{tr}(U) \leq 2|a| + |b| \leq \sqrt{5} < \sqrt{6}.$$

(iii) 若 U 的主对角只出现 a, b, c 中 1 个, 则不妨设 U 的主对角元分别为 a, a, a . 此时 M 只可能有 4 种不同的形式:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

由 $\operatorname{r}(M) = 2$ 可知这 4 个矩阵行列式全为 0, 即

$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = a^3 + b^2c + bc^2 - ac^2 - ab^2 - abc = (a-b)(a-c)(a+b+c),$$

$$|M_4| = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

再结合 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 经计算可得无论 M 是上述哪个矩阵, 要么 $a = b$, 要么 $a = c$, 要么 $a + b + c = 0$.

若 $a = b$ 或 $a = c$, 则由 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 可知

$$2a^2 + b^2 = 1 \text{ 或 } 2a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow 2a^2 \leq 1 \Rightarrow |a| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

若 $a + b + c = 0$, 则由 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 可知

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 1 &\Rightarrow a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{3}{4}a^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |a| \leq \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

从而此时

$$\operatorname{tr}(M) = 3a \leq 3|a| = \sqrt{6}.$$

于是

$$\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(U) + \operatorname{tr}(N) \leq 2 + \sqrt{6}.$$

故

$$(\operatorname{tr}(M))^2 \leq (2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6}) \operatorname{r}(M).$$

□