

## 0.1 复数的定义及其运算

### 定义 0.1 (复数域)

我们把复数定义为一对有序的实数  $(a, b)$ , 如果用  $\mathbb{R}$  记实数的全体,  $\mathbb{C}$  记复数的全体, 那么

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证, 加法和乘法都满足交换律和结合律;  $(0, 0)$  是零元素,  $(-a, -b)$  是  $(a, b)$  的负元素;  $(1, 0)$  是乘法的单位元素; 每个非零元素  $(a, b)$  有逆元素  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ ; 此外,  $\mathbb{C}$  中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

因此  $\mathbb{C}$  在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域, 称为复数域. 如果记

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

那么  $\tilde{\mathbb{R}}$  是  $\mathbb{C}$  的一个子域. 显然,  $(a, 0) \rightarrow a$  是  $\tilde{\mathbb{R}}$  与  $\mathbb{R}$  之间的一个同构对应, 因此实数域  $\mathbb{R}$  是  $\mathbb{C}$  的一个子域. 我们直接记  $(a, 0) = a$ . 在  $\mathbb{C}$  中,  $(0, 1)$  这个元素有其特殊性, 它满足

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

专门用  $i$  记  $(0, 1)$  这个元素, 于是有  $i^2 = -1$ . 由于  $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$ , 于是每一个复数  $(a, b)$  都可写成

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

从现在开始, 我们不再用实数对  $(a, b)$  来记复数, 而直接用  $z = a + bi$  记复数,  $a$  称为  $z$  的实部,  $b$  称为  $z$  的虚部, 分别记为  $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ . 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \left( \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

设  $z = a + bi$  是一复数, 定义

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\bar{z} = a - bi,$$

$|z|$  称为  $z$  的模或绝对值,  $\bar{z}$  称为  $z$  的共轭复数.

### 定义 0.2 (有序域)

域  $F$  称为有序域, 如果在  $F$  的元素间能确定一种关系 (记为  $a < b$ ), 其满足下列要求:

(i) 对  $F$  中任意两个元素  $a, b$ , 下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a;$$

(ii) 如果  $a < b, b < c$ , 那么  $a < c$ ;

(iii) 如果  $a < b$ , 那么对任意  $c$ , 有  $a + c < b + c$ ;

(iv) 如果  $a < b, c > 0$ , 那么  $ac < bc$ .

**笔记** 容易知道, 实数域是有序域, 而复数域则不是.

### 定理 0.1

复数域不是有序域.



**证明** 如果  $\mathbb{C}$  是有序域, 那么因为  $i \neq 0, i$  和  $0$  之间必有  $i > 0$  或  $i < 0$  的关系. 如果  $i > 0$ , 则由**有序域(iv)**得  $i \cdot i > i \cdot 0$ , 即  $-1 > 0$ , 再由**(iii)**, 两端都加  $1$ , 即得  $0 > 1$ . 另一方面, 从  $-1 > 0$  还可得  $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1)$ , 即  $1 > 0$ , 这和刚才得到的  $0 > 1$  矛盾. 如果  $i < 0$ , 两端都加  $-i$ , 得  $0 < -i$ , 再由**有序域(iv)**, 两端乘  $-i$ , 得  $-1 > 0$ . 重复上面的讨论, 即可得  $0 > 1$  和  $0 < 1$  的矛盾. 所以, 复数域不是有序域.



### 命题 0.1 (复数运算性质)

设  $z$  和  $w$  是两个复数, 那么

$$(i) \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$$

$$(ii) z\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{z} = \frac{|z|^2}{z};$$

$$(iii) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w};$$

$$(iv) |zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|};$$

$$(v) |z| = |\bar{z}|, \quad |z| = |-z|.$$



**证明**

(i)

(ii)

(iii)

(iv) 由 (ii) 可得  $|zw|^2 = (zw)(\bar{zw}) = |z|^2|w|^2$ , 进而  $|zw| = |z||w|$ .

(v)



### 命题 0.2

设  $z$  和  $w$  是两个复数, 那么

$$(i) |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|;$$

(ii)  $|z+w| \leq |z|+|w|$ , 等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $z = tw$ ;

$$(iii) |z-w| \geq ||z|-|w||.$$



**证明** (i) 从  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$  和  $|z|$  的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用**复数运算性质(ii)(i)**和这里的不等式 (i), 即得

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z+w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

由此即知 (ii) 成立. 由上面的不等式可以看出, 等式成立的充要条件是  $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$ , 这等价于  $z\bar{w} \in \mathbb{R}$  且  $z\bar{w} \geq 0$ . 不妨设  $w \neq 0$  ( $w = 0$  时, 等号显然成立), 由于  $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$ , 故  $z\bar{w} = \frac{z}{w}|w|^2 \geq 0$ . 令  $t = \left(\frac{z}{w}|w|^2\right) \frac{1}{|w|^2}$ , 则  $t \in \mathbb{R}$  且  $t \geq 0$ , 而且  $z = tw$ .

(iii) 当  $|z| = |w|$  时, 结论显然成立.

当  $|z| > |w|$  时, 由 (ii) 可得

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|,$$

移项可得  $|z - w| \geq |z| - |w| = ||z| - |w||$ . 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $z - w = tw$ , 即  $z = (t + 1)w$ .

当  $|z| < |w|$  时, 由 (ii) 可得

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|,$$

移项可得  $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z| = ||z| - |w||$ . 由 (ii) 可知, 此时等号成立当且仅当存在某个实数  $t \geq 0$ , 使得  $w - z = tz$ , 即  $w = (t + 1)z$ .

□

### 推论 0.1

设  $z_1, \dots, z_n$  是任意  $n$  个复数, 则

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

♡

**证明** 由命题 0.2(ii) 及数学归纳法易证. 等号成立当且仅当  $z_1, z_2, \dots, z_n$  线性相关.

□