0.1 级数证明

例题 0.1 设 $f\in\mathbb{R}[x]$ 是只有正实根的多项式, 求 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $x=0$ 幂级数展开和收敛域.

证明 设 $f(x)=a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n}$, 其中 $a\neq 0$, 并且

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n, k_i\in\mathbb{N}.$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\left[\ln f(x)\right]'=[\ln a+k_1\ln(x-x_1)+k_2\ln(x-x_2)+\cdots+k_n\ln(x-x_n)]'\\&=\frac{k_1}{x-x_1}+\frac{k_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{k_n}{x-x_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x-x_j}\\&=-\frac{k_j}{x_j}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{x}{x_j}}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_j}\right)^m\\&=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x^m.\end{aligned}$$

显然收敛半径就是 x_1, 注意到

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}x_1^m=\frac{k_1}{x_1}\neq 0,$$

故收敛域为 $(-x_1,x_1)$. □

例题 0.2 设 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}, a_n>0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证明 显然 $e^{b_n}=e^{a_n}-a_n\geqslant 1$, 故 $b_n\geqslant 0$, 并且由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $a_n\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}b_n&=\ln\left(e^{a_n}-a_n\right)=\ln e^{a_n}+\ln\left(1-a_ne^{-a_n}\right)\\&=a_n+O\left(a_ne^{-a_n}\right), n\to\infty.\end{aligned}$$

注意到 $O\left(a_ne^{-a_n}\right)\leqslant a_n$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}O\left(a_ne^{-a_n}\right)$ 也收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. □

例题 0.3 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1.$$

证明 由条件可知对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\leqslant a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1},$$

故 $A\leqslant 1$. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}&\geqslant\frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1-\frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\\&\geqslant 1-\frac{a_1}{\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{2}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{2}}=1-\frac{2a_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\to 1, n\to\infty.\end{aligned}$$

故 $A\geqslant 1$. 因此 $A=1$. □

命题 0.1

设 a_n 递减到 0, 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

笔记 (1)式可由 Abel 变换直接得到, 也可以采用下述证明一样的强行凑裂项的思路.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(a_k-a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n}[ka_k-(k+1)a_{k+1}]+\sum_{k=1}^{n}[(k+1)a_{k+1}-ka_{k+1}]\\ &= a_1-(n+1)a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1} a_k-(n+1)a_{n+1}.\end{aligned} \tag{1}$$

充分性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由命题??可知 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$. 再由(1)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{\infty} a_k<+\infty.$$

必要性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 则由 $\{a_n\}$ 的单调性知, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant m$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+\sum_{k=m+1}^{n} a_k\geqslant\sum_{k=1}^{m} a_k+(n-m)a_n.$$

又由(1)式和 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 收敛知, 存在 $A>0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n} a_k-na_n\leqslant A,\forall n\in\mathbb{N}.$$

故

$$A\geqslant\sum_{k=1}^{n} a_k-na_n\geqslant\sum_{k=1}^{m} a_k+(n-m)a_n-na_n=\sum_{k=1}^{m} a_k-ma_n.$$

令 $n\to+\infty$ 得 $\sum_{k=1}^{m} a_k\leqslant A$. 再由 m 的任意性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 此时由命题??可知 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$, 再由(1)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

例题 0.4 设 a_n 递减到 0, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

发散, 这里 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 可知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^n}=\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 故 $f(x)$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$. 显然 $f>0,x>0$, 且 f 在 $(0,+\infty)$ 上递增. 待定 $\{b_n\}$ 满足:$b_n\nearrow+\infty$. 从而

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x &\geqslant\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f(b_n)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln f(b_n)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\\ &\geqslant\ln\left(a_n^n b_n^n\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=n\ln(a_nb_n)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

取 $b_n = \dfrac{C}{a_n}, C > \max\{1, a_1\}$, 则

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} \mathrm{d}x \geqslant n \ln(a_n b_n) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{\ln C}{C} n (a_n - a_{n+1}).$$

由命题 0.1 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 发散. 故

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} \mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} \mathrm{d}x \geqslant \frac{\ln C}{C} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = +\infty.$$

□

例题 0.5 证明:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leqslant p, \forall p \in (1, +\infty).$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geqslant p, \forall p \in (0, 1).$$

笔记 注意强行凑裂项和熟悉 Bernoulli 不等式.

证明

1.
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leqslant p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \tag{2}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{n} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geqslant \frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leqslant 1 - \frac{1}{p(n+1)}.$$

下证 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leqslant 1 - \frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x} - \frac{x}{p}$, 则

$$f\prime(x) = -\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left[1 - (1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right] < 0.$$

故

$$f(x) \leqslant f(0) = 1 \Longleftrightarrow \sqrt[p]{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{p}.$$

令 $x = \frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leqslant 1 - \frac{1}{p(n+1)}$, 从而(2)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = p.$$

2.
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geqslant p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) \tag{3}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{n} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) = 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{p(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt[p]{1 - \frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{p(n+1)}.$$

下证 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$. 令 $f(x) \triangleq \sqrt[p]{1-x}-\frac{x}{p}$, 则

$$f'(x) = -\frac{1}{p}(1-x)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{p}-1}\right] > 0.$$

故

$$f(x) \geqslant f(0) = 1 \Longleftrightarrow \sqrt[p]{1-x} \geqslant 1-\frac{x}{p}.$$

令 $x=\frac{1}{n+1}$ 得 $\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{p(n+1)}$, 从而(3)式成立. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right) = p.$$

□

例题 0.6 对 $t\in\mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{x^{tx}}\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^{tx}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{-tx\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tx\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-tx\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=e^{-y}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^n\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^n}.
\end{aligned}$$

□

命题 0.2

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $a_n=o(A_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$a_n>0$, 则存在 A_n 使得 $A_n=o(a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 发散.

笔记 这个命题说明: **没有收敛最慢的级数, 也没有发散最慢的级数.**

证明

1. 令

$$A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}a_k}-\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_k} < +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k}+\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k}\right)}{a_n} = 0.$$

故 $a_n = o(A_n), n \to \infty$.

2. 令

$$A_1 = 1, \quad A_n \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}, \ n = 2, 3, \cdots.$$

则

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{a_1} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k} \right)} = 0.$$

故 $A_n = o(a_n), n \to \infty$.

□

例题 0.7 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} < \infty.$$

注 本题的想法就是把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}$ 放大为阶更小的量, 从而其收敛.

证明 记 $S_0 = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, 则对 $N \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 (S_n - S_{n-1})}{S_n^2} \\
&= \sum_{n=2}^{N} n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{N} n^2 \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N} n^2 \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left[\frac{n^2}{S_{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{S_n} \right] + \sum_{n=2}^{N} \frac{(n+1)^2 - n^2}{S_n} \\
&= \frac{4}{S_1} - \frac{(N+1)^2}{S_N} + \sum_{n=2}^{N} \frac{2n+1}{S_n} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + 3\sum_{n=2}^{N} \frac{n}{S_n} = \frac{4}{S_1} + 3\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{n\sqrt{p_n}}{S_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right) \\
&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant} \frac{4}{S_1} + 3\sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2} \cdot \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{p_n}} \\
&\leqslant \frac{4}{S_1} + C\sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}.
\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}} \leqslant \frac{4}{S_1} \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{n^2 p_n}{S_n^2}}} + C.$$

若 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2p_n}{S_n^2}$ 发散, 则对上式令 $N\to+\infty$ 得 $+\infty\leqslant C$ 矛盾! 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2p_n}{S_n^2}<+\infty$. □

例题 0.8

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0.$$
证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
2. 设 $\alpha\in(0,1),\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且满足
$$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$
证明: $\lim_{n\to\infty}n^ka_n=0$.

注 由 $\lim_{k\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}=0,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛可知 $\sum_{k=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 收敛, 故 $\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{k^2}\right)=O(1),\forall n\in\mathbb{N}$.

证明

1. 由条件可知, 存在 $c>0,N\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N$ 有
$$b_n\leqslant\frac{c}{2}n,\quad b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>c>0.$$
不妨设 $N=1$, 则
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{c}{b_n}\Longrightarrow a_1>a_{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{b_k}\right).$$
于是
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<a_1\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{c}{b_k}}=a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{b_k}\right)}\\&\leqslant a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}=a_1e^{-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{k}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]}\\&=a_1e^{-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1)}=a_1e^{-2[\ln n+O(1)]+O(1)}\\&=a_1e^{-2\ln n+O(1)}\sim\frac{C}{n^2},n\to\infty.\end{aligned}$$
故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
2. 由条件可知, 当 n 充分大时, 有
$$n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}>1.$$
从而不妨设 $\{a_n\}$ 递减. 再根据条件可知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{\lambda}{2},\forall n\geqslant N.$$
故
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\lambda}{2n^{\alpha}},\forall n\geqslant N.$$
于是对 $\forall n\geqslant N$, 有
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<a_N\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}}=a_Ne^{-\sum_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}\right)}\\&=a_Ne^{-\sum_{k=N}^{n}\left[\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right]}\xlongequal{\text{命题??}}a_Ne^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}+O(n^{1-\alpha})+O(n^{1-2\alpha})\right]}\end{aligned}$$

$$= a_N e^{-\left[\frac{\lambda n^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}+O(n^{1-\alpha})\right]} \leqslant a_N e^{-Cn^{1-\alpha}}, n \to \infty.$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Cn^{1-\alpha}} < +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

□

命题 0.3

证明:

1. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 且 $\sum b_n$ 部分和有界.
2. 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调有界且 $\sum b_n$ 部分和收敛.

笔记 这个命题说明:A-D 判别法是级数收敛的“充要条件”. 积分版本见命题??.

证明 充分性就是由级数收敛的 A-D 判别法. 下证必要性.

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 存在 $n_i \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left|\sum_{n=k}^{k+p} u_n\right| \leqslant \frac{1}{i^3}, \forall k \geqslant n_i, p \in \mathbb{N}.$$

定义

$$a_0 = 1, \quad a_n \triangleq \begin{cases} 1, 1 \leqslant n \leqslant n_1 \\ \frac{1}{i}, n_i < n \leqslant n_{i+1} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots. \quad b_n = \frac{u_n}{a_n}.$$

显然 $a_n \searrow 0$. 当 $1 \leqslant n \leqslant n_1$ 时, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n_1} |u_k|.$$

当 $n > n_1$ 时, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, 于是

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} i u_j + k \sum_{j=n_k+1}^{n} u_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} i \left|\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} u_j\right| + k \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} u_j\right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i^3} + \frac{k}{k^3} \leqslant \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{j=1}^{n_1} |u_j| + \frac{\pi^2}{6}.$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由第 1 问可知, 存在 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$ 使得 $u_n = \alpha_n \beta_n$, 并且 $\{\alpha_n\}$ 单调递减趋于 0,$\sum \beta_n$ 部分和有界. 令

$$a_n \triangleq \sqrt{\alpha_n}, \quad b_n \triangleq \beta_n \sqrt{\alpha_n} = \beta_n a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

显然 $a_n \searrow 0$, 进而 $\{a_n\}$ 单调有界. 又 $\sum \beta_n$ 部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知,$\sum b_n$ 部分和收敛.

□

例题 0.9 设实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 条件收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t \neq s$ 是一个重排. 证明: 对任何 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|n - f(n)| > N$.

证明 若 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|n - f(n)| \leqslant N$, 那么对 $\forall m > N$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \text{中一定不包含} a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{f(1)}, a_{f(2)}, \cdots, a_{f(m-N)}.$$

$$\text{并且} \sum_{k=1}^{m+N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \text{至多含有} m + N + m - (2m - N) = 2N \text{项}.$$

故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n|\leqslant\varepsilon$. 于是对 $\forall m>N_1$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+N}a_{f(k)}-\sum_{k=1}^{m}a_k\right|\leqslant 2N\varepsilon.$$

令 $m\to+\infty$ 得 $|s-t|\leqslant 2N\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $s=t$, 矛盾! □

例题 0.10

1. 设 f 满足: 对任何绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 绝对收敛, 证明 $f(x)=O(x),x\to 0$.
2. 设 f 满足: 对任何收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 收敛, 证明存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

证明

1. 反证, 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 邻域内无界, 则 $\exists x_n\to 0$, 使得

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|>n,\ \ n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\left|x_{n_k}\right|<\frac{1}{k^2},k=1,2,\cdots.$$

从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}-\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}=\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}>1,$$

于是存在正整数 m_k, 使得

$$\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}<m_k<\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}. \tag{5}$$

令

$$a_n\triangleq x_{n_k},\quad m_{k-1}<n\leqslant m_k.$$

则由(5)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|x_{n_k}\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}<+\infty.$$

由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_n)|=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|<+\infty. \tag{6}$$

又由(4)(5)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_n)|&=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_kn_k\left|x_{n_k}\right|\\&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}km_k\left|x_{n_k}\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.\end{aligned}$$

这与(6)式矛盾!

2. 目标证明 f 在 $x=0$ 邻域满足 Cauchy 方程. 考虑 $g(x,y)=f(x+y)+f(-x)+f(-y)$. 如果对任何 0 的开邻域 U 都有 g 在 $U\times U$ 上不恒为 0, 那么存在 $(x_n,y_n)\to(0,0)$ 使得 $g(x_n,y_n)\neq 0$.
考虑

$$\underbrace{(x_1+y_1)-x_1-y_1,(x_1+y_1)-x_1-y_1,\cdots,(x_1+y_1)-x_1-y_1}_{m_1}+$$
$$\underbrace{(x_2+y_2)-x_2-y_2,(x_2+y_2)-x_2-y_2,\cdots,(x_2+y_2)-x_2-y_2}_{m_2}+$$
$$\vdots$$

上述级数的部分和只可能出现 $x_n+y_n, y_n, 0$, 而当 $n\to+\infty$ 时它们都趋于 0, 因此上述级数收敛. 由题目条件, 我们有

$$\underbrace{(f(x_1)+f(y_1))+f(-x_1)+f(-y_1),\cdots,(f(x_1)+f(y_1))+f(-x_1)+f(-y_1)}_{m_1}+$$
$$\underbrace{(f(x_2)+f(y_2))+f(-x_2)+f(-y_2),\cdots,(f(x_2)+f(y_2))+f(-x_2)+f(-y_2)}_{m_2}+$$
$$\vdots$$

收敛. 由收敛级数加括号也收敛, 我们知道对任何一组 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m_n g(x_n,y_n)$ 收敛. 这显然不可能! 因此我们证明了 $f(x+y)+f(-x)+f(-y)$ 在某个 $U\times U$ 上恒为 0, 这里 U 是一个开区间. 现在由

$$f(0)+f(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

知

$$f(x-x)+f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f\text{是奇函数},$$

即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

再证明 f 在 $x=0$ 连续. 设 $x_n\to 0$, 我们考虑收敛级数 $x_1-x_1+x_2-x_2+\cdots$, 故级数

$$f(x_1)-f(x_1)+f(x_2)-f(x_2)+\cdots$$

收敛. 考虑上述级数部分和可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$, 从而 f 在 $x=0$ 连续. 现在由定理**??**知存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

□

例题 0.11 给定 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-1,1).$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=+\infty(-\infty),$$

证明

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty(-\infty),$$

并指出

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right|=+\infty\not\Rightarrow\lim_{x\to1^-}|f(x)|=+\infty.$$

笔记 熟记命题**??**.

证明 记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, 不妨设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

于是对任意 $C>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n>N$, 成立 $S_n\geqslant C$. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{f(x)}{1-x}\xlongequal{\text{命题??}}\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n\right]\\&=\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}S_nx^n\right]\\&\geqslant\lim_{x\to1^-}(1-x)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+C\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\right]\\&=C\lim_{x\to1^-}(1-x)\frac{x^{N+1}}{1-x}=C,\end{aligned}$$

由 C 任意性, 我们证明了

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty.$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f(x)=\frac{x-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n+1)x^n.$$

□

命题 0.4

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是两两不同的实数,$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为复数. 证明:
$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_jx}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,n.$$
2. 设 $m\geqslant2,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R},C_1,C_2,\cdots,C_m\in\mathbb{C}$. 若
$$\lambda_j-\lambda_k\neq2\ell\pi,\forall1\leqslant j<k\leqslant m,\ell\in\mathbb{Z},$$
证明:
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,m.$$

笔记 想法即类比傅立叶系数, 做积分使得系数暴露出来. 离散版本可以类似连续版本证明, 连续的处理方式核心是乘上某个 $e^{-i\lambda x}$ 均值形式的积分取极限, 从而离散的时候应该是乘上某个 $e^{-i\lambda y}$ 均值的取和.

证明

1. 充分性显然, 只需证明必要性. 考虑 $f(x)\triangleq\sum_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}$, 其中 i 是虚数单位. 对 $T>0,k=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=1}^{n}C_j\int_T^{2T}e^{i(\lambda_j-\lambda_k)x}\,\mathrm{d}x=TC_k+\sum_{j\neq k}C_j\frac{e^{i(\lambda_j-\lambda_k)2T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|C_k|&=\frac{\left|\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x-\sum\limits_{j\neq k}C_j\frac{e^{i(\lambda_j-\lambda_k)2T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k}\right|}{T}\\&\leqslant\frac{\int_T^{2T}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T}=\frac{|f(\theta_T)|T+\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T},\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自积分中值定理且 $\theta_T \in (T, 2T)$. 现在由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 可知

$$\lim_{T\to+\infty} C_k = 0, k = 1, 2, \cdots, n,$$

这就证明了 $C_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 必要性得证.

2. 充分性显然, 只需证明必要性. 对 $k = 1, 2, \cdots, m$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_k + \sum_{j\neq k} C_j e^{in(\lambda_j-\lambda_k)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-in\lambda_k}\sum_{j=1}^{m} C_j e^{in\lambda_j}\right) = 0.$$

现在由 Stolz 定理我们有

$$C_k = -\lim_{n\to\infty}\sum_{j\neq k} C_j e^{in(\lambda_j-\lambda_k)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{n}\sum\limits_{j\neq k} C_j e^{i\ell(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1}$$
$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}\sum\limits_{\ell=0}^{n} C_j e^{i\ell(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}}{n+1}.$$

结合

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sum\limits_{j\neq k} C_j \frac{1-e^{i(n+1)(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}\right|}{n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{|1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}|}}{n+1} = 0,$$

我们知道 $C_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 这就证明了必要性!

□

例题 0.12 设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{m}\sin(n\alpha_i) = 0.$$

证明: 必有一个 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得 $\frac{\alpha_i}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

笔记 本题是命题 0.4的一个应用.

证明 由 Euler 公式得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}}{2i} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}(e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}) = 0.$$

打开括号得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|}e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)} = 0. \tag{7}$$

注意到若有

$$\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m = \varepsilon_1\prime\alpha_1+\varepsilon_2\prime\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\prime\alpha_m+2\ell\pi, \ell\in\mathbb{Z}, \tag{8}$$

则

$$e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)} = e^{in(\varepsilon_1\prime\alpha_1+\varepsilon_2\prime\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\prime\alpha_m)}.$$

因此将(7)式中满足(8)式的项合并, 得到新的和式的任意两项中的 $\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m$ 的差值都不等于 $2\ell\pi, \ell\in\mathbb{Z}$. 于是由命题 0.4知

$$\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|}e^{in(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\cdots+\varepsilon_m\alpha_m)}$$

恒为 0. 否则, 上式每项系数 $(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\varepsilon_i=-1\}|} = 0$ 矛盾! 故现在就有 $\prod\limits_{j=1}^{m}(e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}) = 0, \forall n\in\mathbb{N}$, 取 $n = 1$, 则必存在一个 $j\in\{1, 2, \cdots, m\}$, 使得

$$e^{i\alpha_j}-e^{-i\alpha_j} = 0 \Longrightarrow e^{2i\alpha_j} = 0 \Longrightarrow 2\alpha_j = 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow \frac{\alpha_j}{\pi} = k\in\mathbb{Z}.$$

□

例题 0.13 设对 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$u_n = \lim_{m\to\infty} (u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{n+m}^2).$$

证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ 存在, 则 $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

注 题目条件中写了极限等于 u_n 就是默认这个极限存在.

证明 注意到

$$u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+4u_n}-1}{2}, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 存在知, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 若 $u_n \neq 0\,(n \in \mathbb{N})$, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nu_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{1+4u_n}-1} - \frac{1}{u_n}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{\sqrt{1+4x}-1} - \frac{1}{x}\right) = 1.\end{aligned}$$

故 $u_n \sim \frac{1}{n}$, 从而 $\sum u_n$ 发散, 矛盾! 故存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $u_{n_0} = 0$. 于是由(9)式, 利用数学归纳法可知

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+4u_n}-1}{2} = \cdots = 0, \ \forall n > n_0.$$

$$u_n = u_{n+1}^2 + u_{n+1} = \cdots = u_{n_0}^2 + u_{n_0} = 0, \ \forall n < n_0.$$

故此时 $u_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. □

例题 0.14 设 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}, n \in \mathbb{N}$. 证明: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛并求值.

注 $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \cdots, \}$.

注 级数可求值的情况只有两种:

1. 级数通项可求.
2. 级数通项可以写成裂项形式.

证明 归纳易得 $a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$. 注意到

$$a_{n+1} + (n+1)\,a_n a_{n+1} = na_n^2 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = na_n - (n+1)\,a_{n+1} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故 $\{na_n\}$ 递减且有下界 0. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1}{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} [ka_k - (k+1)\,a_{k+1}] = \frac{1}{2} + a_1 - \lim_{n\to\infty} na_n = 1 - a < +\infty.$$

由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < +\infty$ 知, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$, 从而存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} a_k, \forall k \geqslant N.$$

于是对 $n \geqslant N$, 有

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} a_n \leqslant \frac{1}{2^2} a_n \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-N+1}} a_N.$$

因此

$$na_n \leqslant \frac{n}{2^{n-N+1}} a_N \to 0, n \to \infty.$$

故 $a=0$, 从而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$. □

例题 0.15 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减的正数列并且满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=+\infty$, 并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_ne^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}=+\infty$$

笔记 利用分组判别的想法.

证明 任取 $M>1$, 定义

$$A_M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}\mid\frac{x_n}{x_{n+1}}\leqslant M\right\}.$$

则

$$+\infty=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n\in A_M}x_n+\sum_{n\in\mathbb{N}\backslash A_M}x_n.$$

若 $\sum\limits_{n\in A_M}x_n=+\infty$, 则

$$\sum_{n\in A_M}x_ne^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}\geqslant\sum_{n\in A_M}x_ne^{-M}=+\infty.$$

若 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\backslash A_M}x_n=+\infty$, 显然 $\mathbb{N}\setminus A_M$ 中有无穷项, 记 $\mathbb{N}\setminus A_M=\{n_k\}$, 且满足 $n_k\nearrow+\infty$, 则

$$x_{n_{k+1}}\leqslant x_{n_k+1}<\frac{1}{M}x_{n_k}.$$

从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有

$$x_{n_k}\leqslant\frac{1}{M}x_{n_{k-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{M^{k-1}}x_{n_1}\to 0.$$

故

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\backslash A_M}x_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_{n_k}\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M^{k-1}}x_{n_1}<+\infty,$$

这与 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\backslash A_M}x_n=+\infty$ 矛盾! 综上可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_ne^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}\geqslant\sum_{n\in A_M}x_ne^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}=+\infty.$$

□

例题 0.16 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\ln\frac{1}{a_n}}{\ln(1+n)}$ 收敛.

笔记 利用分组判别的想法.

证明

□

例题 0.17 设 $\{\lambda_n\},\{a_n\}\subset\mathbb{R}$.

1. 如果对任何收敛于 0 的数列 $\{\lambda_n\}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$ 收敛, 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.
2. 设 $p>1$, 如果对任何 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p<\infty$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$ 收敛, 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q<\infty$, 这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$, 取 $\lambda_n=\frac{\text{sgn}a_n}{S_n}$, 故由命题??可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}=+\infty$$

矛盾!

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^q=+\infty$, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q$, 取 $\lambda_n=\frac{|a_n|^{q-1}\text{sgn}a_n}{S_n}$, 则由 $p>1$ 和命题??可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^q}{S_n^p}<+\infty.$$

再由命题??可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^q}{S_n}=+\infty.$$

矛盾!

□

例题 0.18 设 a_n 递减到 0 且 $b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\geqslant 0, n=1,2,\cdots$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛并计算值.

证明 注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}nb_n&=\sum_{n=1}^{m}n\left(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{m}n\left[\left(a_n-a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)\right]\\
&\xlongequal{\text{Abel 变换}}\sum_{j=1}^{m-1}(j-(j+1))\sum_{i=1}^{j}\left[\left(a_i-a_{i+1}\right)+\left(a_{i+1}-a_{i+2}\right)\right]+m\sum_{i=1}^{m}\left[\left(a_i-a_{i+1}\right)-\left(a_{i+1}-a_{i+2}\right)\right]\\
&=-\sum_{j=1}^{m-1}\left[\left(a_1-a_2\right)-\left(a_{j+1}-a_{j+2}\right)\right]+m\left[\left(a_1-a_2\right)-\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)\right]\\
&=a_1-a_2+a_2-a_{m+1}-m\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)\\
&=a_1-(m+1)a_{m+1}+ma_{m+2}\\
&=a_1-(m+1)\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)-a_{m+2}.
\end{aligned}$$

由 $b_n=\left(a_n-a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)\geqslant 0$ 可知,$\{a_n-a_{n+1}\}$ 单调递减. 又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(a_n-a_{n+1}\right)=a_1-\lim_{m\to\infty}a_m=a_1<+\infty.$$

因此由命题??可知

$$\lim_{m\to\infty}(m+1)\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)=0.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{m}nb_n=a_1-(m+1)\left(a_{m+1}-a_{m+2}\right)-a_{m+2}\to a_1, m\to\infty.$$

□

例题 0.19 设 $\{a_n\},\{b_n\}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$b_{n+1}-b_n\geqslant\delta>0,\ n=1,2,\cdots.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}}<+\infty.$$

证明 由均值不等式可知

$$\begin{aligned}
\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}} &\leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_jb_j}{b_nb_{n+1}}=\frac{\delta}{\delta}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_jb_j}{b_nb_{n+1}}\\
&\leqslant \frac{b_{n+1}-b_n}{\delta b_nb_{n+1}}\sum_{j=1}^{n}a_jb_j=\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)\sum_{j=1}^{n}a_jb_j.
\end{aligned}$$

由 $b_{n+1}-b_n>\delta>0$ 可得

$$b_n\geqslant b_1+(n-1)\delta\Longrightarrow b_n\to+\infty.$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}} &\leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)a_jb_j\leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)a_jb_j\\
&=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}a_jb_j\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}a_jb_j\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\right)\\
&=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}a_j<+\infty.
\end{aligned}$$

□

例题 0.20 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k,\ n=1,2,\cdots$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|S_k-T_k|^2<\infty$, 证明:$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$.

证明 注意到

$$T_n=S_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k,$$

故由条件可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n-T_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right)^2}{(n+1)^2}<+\infty. \tag{10}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}ka_k\\
&\xlongequal{\text{Abel 变换}}\sum_{j=1}^{m-1}\left(-(j+1)a_{j+1}\right)\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\sum_{j=1}^{m}ja_j\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\
&=-\sum_{j=1}^{m-1}ja_{j+1}+\frac{m}{m+1}\sum_{j=1}^{m}ja_j\\
&=\frac{m}{m+1}a_1+\frac{m}{m+1}\sum_{j=2}^{m}ja_j-\sum_{j=2}^{m}(j-1)a_j\\
&=\frac{m}{m+1}a_1+\sum_{j=2}^{m}a_j-\frac{1}{m+1}\sum_{j=2}^{m}ja_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}a_j-\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m}ja_j
\end{aligned}$$

$$= S_m - \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} ja_j. \tag{11}$$

由 (10) 式得

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k\right)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k\right)^2}{n^2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} = 0.$$

因此只须证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n(n+1)} < +\infty$, 即可由 (11) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n(n+1)} + \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} ja_j = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n(n+1)} < +\infty.$$

下证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n(n+1)} < +\infty$. 由均值不等式和 (10) 式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k\right)^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right] < +\infty.$$

故结论得证. □

例题 0.21 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n-1}} = 1$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n^2} \leqslant 2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2} < 1.$$

证明

□

例题 0.22 设 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$ 满足

(1)$a_n - a_{n+1}$ 递减;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty$$

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0 \Longrightarrow a_n - a_{n+1} \geqslant 0.$$

从而 $\{a_n\} \searrow 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2}.$$

注意到

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2 - a_{k+1}^2\right) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1}) \\ &\leqslant (a_n - a_{n+1})\sum_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1}), \end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 故 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2} \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})} = +\infty.$$

□

例题 0.23 设 $\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k}, x>0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)$ 收敛的充要条件是 $a_0=a_1=0$.

证明 令 $g(x)=\phi\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, 则 $g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. 于是

$$g(x)=a_0+a_1x+O\left(x^2\right), x\to 0.$$

从而

$$\phi(n)=g\left(\frac{1}{n}\right)=a_0+\frac{a_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), n\to\infty.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)<+\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{n}\right)<+\infty \Longleftrightarrow a_0=a_1=0.$$

□