0.1 伴随矩阵

定义 0.1 (伴随矩阵定义)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 则称 A^* 为 A 的**伴随矩阵**.

定理 0.1

设 A 为 n 阶矩阵,$n\geqslant 2$, 则

(i) $AA^*=A^*A=|A|\,I_n$.

(ii) 当 A 可逆时, 有 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$,$A^*=|A|A^{-1}$.

证明 由伴随矩阵的定义不难证明. □

命题 0.1

设 A 为 n 阶矩阵, 满足 $A^m=I_n$, 则 $(A^*)^m=I_n$.

证明 由 $A^m=I_n$ 得 $|A|^m=1\neq 0$, 于是矩阵 A 可逆. 又 $A^*=|A|A^{-1}$, 故 $(A^*)^m=|A|^m(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}=I_n$. □

定理 0.2 (矩阵乘积的伴随)

设 A,B 为 n 阶矩阵,$n\geqslant 2$, 则 $(AB)^*=B^*A^*$.

证明 证法一 (Cauchy-Binet 公式推论):设 $C=AB$. 记 M_{ij},N_{ij},P_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 元素的余子式,A_{ij},B_{ij},C_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 元素的代数余子式. 注意到

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},\quad B^*=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

B^*A^* 的第 (i,j) 元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}B_{ki}A_{jk}$. 而 C^* 的第 (i,j) 元素就是 $C_{ji}=(-1)^{j+i}P_{ji}$.

由 Cauchy-Binet 公式推论可得

$$\begin{aligned} C_{ji}&=(-1)^{j+i}P_{ji}=(-1)^{j+i}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}N_{ki} \\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{i+k}N_{ki}=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}B_{ki} \end{aligned}$$

故结论成立.

证法二 (摄动法):若 A,B 均为非异阵, 则 $A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1}$, 从而

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|(B^{-1}A^{-1})=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*.$$

由命题**??**, 可知对于一般的方阵 A,B, 可取到一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 t_kI_n+A 与 t_kI_n+B 均为非异阵. 由非

异阵情形的证明可得

$$((t_kI_n + A)(t_kI_n + B))^* = (t_kI_n + B)^*(t_kI_n + A)^*.$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有 $(AB)^* = B^*A^*$ 成立. □

定理 0.3 (伴随矩阵的秩)

设 A 为 n 阶矩阵,$n \geqslant 2$, 则

$$\operatorname{rank}A^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}A = n, \\ 1, & \operatorname{rank}A = n-1, \\ 0, & \operatorname{rank}A < n-1. \end{cases}$$

证明 当 $\operatorname{rank}A = n$ 时, 则 $|A| \neq 0$,A 可逆, 又 $AA^* = A^*A = |A|\,I_n$, 两边同时取行列式, 可得 $|A^*| \cdot |A| = |A^*A| = ||A|\,I_n| = |A|^n$, 于是 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$. 所以 $\operatorname{rank}A^* = n$.

当 $\operatorname{rank}A = n-1$ 时,A 至少存在一个 $n-1$ 阶子式不等于 0, 故 $A^* \neq 0$, 即 $\operatorname{rank}A^* \geqslant 1$; 由 $\operatorname{rank}A < n$ 知 $|A| = 0$, 从而 $AA^* = |A|E = 0$, 故由定理**??**可知 $\operatorname{rank}A^* \leqslant n - \operatorname{rank}A = 1$, 于是 $\operatorname{rank}A^* = 1$. (另证: 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 则由命题**??**可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n 个列向量都成比例且至少有一列不为零, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩等于 1.)

当 $\operatorname{rank}A < n-1$ 时,A 的所有 $n-1$ 阶子式均等于 0, 即 $A^* = 0$, 故 $\operatorname{rank}A^* = 0$. □

命题 0.2 (伴随矩阵的性质)

设 A 为 n 阶矩阵,$n \geqslant 2$, 则

1. $(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$.
2. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$,k 为常数.
3. 若 A 为可逆阵, 则 A^* 也可逆, 并且 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
4. $(A^m)^* = (A^*)^m$,m 为正整数.
5. 若 A 可逆, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$.
6. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证明

1. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
2. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
3. 由定理 0.2可知 $A^*\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}A\right)^* = I_n^* = I_n$. 从而 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
4. 多次利用定理 0.2即得.
5. 证法一:当 A 可逆时, 有 $A^* = |A|A^{-1}$, 从而 $|A^*| = |A|^{n-1}$; 当 A 不可逆时, 有 $\operatorname{rank}A < n$, 由定理 0.3知 $\operatorname{rank}A^* < n$. 于是 $|A^*| = |A| = 0$, 故 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

   证法二:若 A 是非异阵, 有 $A^* = |A|A^{-1}$, 从而 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 对于一般的方阵 A, 由命题**??**可知, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + A$ 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

   $$|(t_kI_n + A)^*| = |t_kI_n + A|^{n-1}.$$

   注意到上式两边均为行列式的幂次, 其值都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限 (上式两边都是关于 t_k 的多项式函数), 令 $t_k \to 0$, 即有 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 成立.
6. 证法一:当 A 可逆时,A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$, 从而由 伴随矩阵的性质5.得

   $$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A.$$

   当 A 不可逆时, 则 $|A| = 0$, 且由定理 0.3及 $n \geqslant 2$ 知 $\operatorname{rank}A^* \leqslant 1 < n-1$, 从而 $\operatorname{rank}(A^*)^* = 0$, 即 $(A^*)^* = 0$, 因此 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证法二:若 A 是非异阵,A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$, 从而由 伴随矩阵的性质5.得

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

对于一般的方阵 A, 由命题??可知, 可取到一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 t_kI_n+A 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_kI_n+A)^*)^*=|t_kI_n+A|^{n-2}(t_kI_n+A).$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式 (上式两边的矩阵每个元素都是关于 t_k 的多项式函数), 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k\to 0$, 即有 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ 成立.

□

命题 0.3 (伴随矩阵的继承性)

1. 对角矩阵的伴随矩阵是对角矩阵;
2. 对称矩阵的伴随矩阵是对称矩阵;
3. 上 (下) 三角矩阵的伴随矩阵是上 (下) 三角矩阵;
4. 可逆矩阵的伴随矩阵是可逆;
5. 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵;
6. 半正定 (正定) 矩阵的伴随矩阵是半正定 (正定) 矩阵;
7. 可对角化矩阵的伴随矩阵是可对角化矩阵.

证明

1. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, $n\geqslant 2$.
2. 若 A 为对角矩阵, 则 $a_{ij}=0(i\neq j)$, 从而 $i\neq j$ 时,M_{ij} 是对角行列式, 且主对角元必有零, 即 $M_{ij}=0$, 故 $A_{ij}=0$, 于是 A^* 为对角矩阵.
3. 若 A 为对称矩阵, 则 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 因此 $i,j=1,2,\cdots,n$ 时,M_{ij} 是对称行列式, 从而 $A_{ij}=A_{ji}$, 即 A^* 为对称矩阵.
4. 若 A 为上三角矩阵, 则 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 时,$a_{ij}=0$, 所以 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时,M_{ij} 是上三角行列式, 且主对角元必有零, 即 $M_{ij}=0$, 从而 $A_{ij}=0$, 所以 A^* 为上三角矩阵. 同理可证: 下三角矩阵的伴随矩阵是下三角矩阵.
5. 由 $|A|\neq 0$ 和 $A^*=|A|A^{-1}$ 即知.
6. 因为 A 为正交矩阵等价于 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$, 所以 $|A|^{-1}=|A|$. 从而由定理 0.1(ii), 有
$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=(|A|A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(A^*)^{\mathrm{T}},$$
故 A^* 为正交矩阵.
7. 由于 A 为半正定矩阵等价于存在实矩阵 C, 使得 $A=C^{\mathrm{T}}C$, 因此由定理 0.2和伴随矩阵的性质1., 有
$$A^*=(C^{\mathrm{T}}C)^*=C^*(C^{\mathrm{T}})^*=C^*(C^*)^{\mathrm{T}},$$
于是 A^* 为半正定矩阵. 当 A 为正定矩阵时, 同理可证 A^* 为正定矩阵.
8. 若 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}$, 其中 Λ 为对角矩阵, 从而由定理 0.2和伴随矩阵的性质1., 有
$$A^*=(P^{\mathrm{T}})^*\Lambda^*P^*=(P^*)^{\mathrm{T}}\Lambda^*P^*,$$
再根据伴随矩阵的继承性1.和伴随矩阵的性质3., 知 Λ^* 为对角矩阵,P^* 为可逆矩阵, 故 A^* 可对角化.

□

命题 0.4 (分块矩阵的伴随矩阵)

设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 分块对角阵 C 为

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

则分块对角阵 C 的伴随矩阵为:

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

证明 证法一: 设 $A = (a_{ij})_{m\times m}$, 元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式分别记为 M_{ij} 和 A_{ij};$B = (b_{ij})_{n\times n}$, 元素 b_{ij} 的余子式和代数余子式分别记为 N_{ij} 和 B_{ij}. 利用 Laplace 定理可以容易地计算出: 当 $1 \leqslant i, j \leqslant m$ 时,C 的第 (i, j) 元素的代数余子式为 $(-1)^{i+j}M_{ij}|B| = |B|A_{ij}$; 当 $m+1 \leqslant i, j \leqslant m+n$ 时, 由 Laplace 定理, 可知 C 的第 (i, j) 元素的代数余子式为 $(-1)^{i+j}N_{i-m,j-m}|A| = |A|B_{i-m,j-m}$; 当 i, j 属于其他范围时, 由 Laplace 定理, 当 $1 \leqslant i \leqslant m, m \leqslant j \leqslant m+n$ 时, 将其按前 m 列展开, 当 $m \leqslant i \leqslant m+n, 1 \leqslant j \leqslant m$ 时, 将其按前 m 行展开, 可得 C 的第 (i, j) 元素的代数余子式等于零. 因此我们有

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

证法二:若 A, B 均为非异阵, 则

$$C^* = |C|\,C^{-1} = |A|\,|B| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|\,|A|\,A^{-1} & O \\ O & |A|\,|B|\,B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

对于一般的方阵 A, B, 由命题**??**可知, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_m + A$ 与 $t_kI_n + B$ 均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{pmatrix} t_kI_m + A & O \\ O & t_kI_n + B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |t_kI_n + B|(t_kI_m + A)^* & O \\ O & |t_kI_m + A|(t_kI_n + B)^* \end{pmatrix}.$$

注意到上式两边均为 $m+n$ 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ 成立. □

例题 0.1 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $AB = BA$, 证明:$AB^* = B^*A$.

证明 若 B 为非异阵, 则由 $AB = BA$ 可得 $AB^{-1} = B^{-1}A$. 又 $B^* = |B|B^{-1}$, 于是 $AB^* = B^*A$ 成立. 对于一般的方阵 B, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + B$ 为非异阵, 此时 $A(t_kI_n + B) = (t_kI_n + B)A$ 仍然成立. 由非异阵情形的证明可得

$$A(t_kI_n + B)^* = (t_kI_n + B)^*A.$$

注意到上式两边均为 n 阶方阵, 其元素都是 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有 $AB^* = B^*A$ 成立. □

例题 0.2 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

解 解法一:显然 $|A|=2$, 用初等变换不难求出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$A^*=2A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

将 A^* 的所有元素加起来, 可得 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=1$.

解法二:由命题??可得

$$-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1.$$

于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=1$.

解法三:由大拆分法可得 $|A(-1)|=|A|-\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$, 且

$$|A(-1)|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1\end{vmatrix}=1.$$

故 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=|A(-1)|-|A|$.

解法四:由例题??可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}=1.$$

□