## 0.1 其他

**定理 0.1**

设 $\mathbb{F}$ 是一个域,$m_i, a_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\gcd\left(m_i, m_j\right) \mid \left(a_i - a_j\right), i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 则存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \pmod{m_i(x)}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

即存在 $k_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) = k_i(x)m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明

□

**例题 0.1** 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m \in M_n(\mathbb{K})$,$g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_1), g(\boldsymbol{A}_2), \cdots, g(\boldsymbol{A}_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_i)^{-1} = h(\boldsymbol{A}_i)$ 对所有的 $1 \le i \le m$ 都成立.

证明 证法一:由命题**??**可知, 对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 存在 $h_i \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i). \tag{1}$$

记 $A_i$ 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i = 1, 2, \cdots, m$. 考虑 $\gcd(n_i, n_j)(i, j \in \{1, 2, \cdots, m\})$, 设 $x_0 \in \mathbb{C}$ 是 $\gcd(n_i, n_j)$ 的根, 则 $(x - x_0)|n_i, n_j$, 即 $x_0$ 是 $A_i$ 和 $A_j$ 的公共特征值. 由命题**??**和命题**??**可知,$h_i(x_0)$ 是 $h_i(A_i)$ 的特征值,$\dfrac{1}{g(x_0)}$ 是 $g^{-1}(A_i)$ 的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i) \Longrightarrow \frac{1}{g(x_0)} = h_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是

$$h_i(x_0) - h_j(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0)} = 0.$$

因此 $(x - x_0)|(h_i - h_j)$. 故在 $\mathbb{C}$ 上就有 $\gcd(n_i, n_j)|(h_i - h_j)$. 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在 $\mathbb{K}$ 上也有 $\gcd(n_i, n_j)|(h_i(x) - h_j(x))$. 于是由中国剩余定理的推广可知, 方程

$$h(x) \equiv h_i(x) \pmod{n_i(x)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

在 $\mathbb{K}$ 上有解. 故存在 $h \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$h(A_i) = h_i(A_i) = g^{-1}(A_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

证法二:记 $A_i$ 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i = 1, 2, \cdots, m$, 由命题**??**可知

$$(n_i, g) = 1, i = 1, 2, \cdots, m.$$

从而 $(n_1 n_2 \cdots n_m, g) = 1$. 因此存在 $h, k \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$h(x)\, g(x) + n_1(x)\, n_2(x) \cdots n_m(x)\, k(x) = 1.$$

从而

$$h(A_i) = g^{-1}(A_i), i = 1, 2, \cdots, m.$$

□

**命题 0.1**

设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 $A \sim \widetilde{A}$, 其中 $\widetilde{A}$ 是主对角元都为 0 的上三角阵, 则 $A$ 是幂零矩阵.

证明 由条件可知存在可逆阵 $P$, 使得 $A = P^{-1}\widetilde{A}P$. 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n = P^{-1}\widetilde{A}^n P = O.$$

故 $A$ 是幂零矩阵. □

**例题 0.2** 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$AB+A=BA+B.$$

证明:

$$(A-B)^n=0.$$

**证明** 注意到

$$AB-BA=B-A.$$

由命题??知 $A,B$ 可同时相似上三角化. 不妨设 $A,B$ 都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知 $AB-BA$ 也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知 $A-B$ 是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1知 $A-B$ 是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A-B)^n=0.$$

□

**例题 0.3** 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A)\triangleq\{P^{-1}AP:P\in\mathbb{R}^{n\times n}\text{是可逆矩阵}\}.$$

证明: $S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 $A$ 在 $\mathbb{C}$ 上一定可对角化.

**证明** 设 $A$ 的极小多项式为 $m$, 特征多项式为 $p$, 则由知 $m$ 无重根. 设 $A_k\in S(A),k=1,2,\cdots$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A})=\lim_{k\to\infty}m(A_k)=0,$$

$$\left|\lambda I-\tilde{A}\right|=\left|\lambda I-\lim_{k\to\infty}A_k\right|=\lim_{k\to\infty}|\lambda I-A_k|=\lim_{k\to\infty}|\lambda I-A|=|\lambda I-A|=p(\lambda).$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征多项式也是 $p$,$\tilde{A}$ 极小多项式整除 $m$, 从而 $\tilde{A}$ 极小多项式也无重根. 因此 $\tilde{A}$ 和 $A$ 有相同的特征值且可对角化, 故 $\tilde{A}\in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知,$A$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于下列分块对角矩阵:

$$\widetilde{J}=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1),\cdots,J_{r_k}(\lambda_k),\widetilde{J}_{s_1}(a_1,b_1),\cdots,\widetilde{J}_{s_l}(a_l,b_l)\},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k,a_1,b_1,\cdots,a_l,b_l$ 都是实数,$b_1,\cdots,b_l$ 都非零, 且 $\lambda_j$ 都是 $A$ 的实特征值,$a_j\pm\mathrm{i}b_j$ 都是 $A$ 的复特征值,$J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示以 $\lambda_i$ 为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j=-2a_j,d_j=a_j^2+b_j^2,\quad R_j=\begin{pmatrix}0&-d_j\\1&-c_j\end{pmatrix},C_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_{s_j}(a_j,b_j)=\begin{pmatrix}R_j&C_2&&&\\&R_j&C_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&R_j&C_2\\&&&&R_j\end{pmatrix}.$$

对于 $J_{r_j}(\lambda_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}(\lambda_j)\sim\begin{pmatrix}\lambda_j&\frac{1}{n}&&\\&\lambda_j&\ddots&\\&&\ddots&\frac{1}{n}\\&&&\lambda_j\end{pmatrix}\triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j),\forall n\in\mathbb{N}.$$

对于 $\widetilde{J}_{s_j}(a_j,b_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}\left(a_j,b_j\right)\sim\begin{pmatrix}0&-d_j&&&&&&&&\\1&-c_j&\frac{1}{n}&&&&&&&\\&&0&-d_j&&&&&&\\&&1&-c_j&\frac{1}{n}&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&0&-d_j&&&\\&&&&&1&-c_j&\frac{1}{n}&&\\&&&&&&&0&-d_j\\&&&&&&&1&-c_j\end{pmatrix}\triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j,b_j),\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A\sim\widetilde{J}\sim\operatorname{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}\triangleq\widetilde{J}^{(n)},\forall n\in\mathbb{N}.$$

故 $\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$. 因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$. 不难发现

$$\lim_{n\to+\infty}J_{r_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}\lambda_j&&&\\&\lambda_j&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_j\end{pmatrix},$$

$$\lim_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}0&-d_j&&&&&\\1&-c_j&&&&&\\&&0&-d_j&&&\\&&1&-c_j&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&0&-d_j\\&&&&&1&-c_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_j&&&\\&R_j&&\\&&\ddots&\\&&&R_j\end{pmatrix},$$

注意到 $R_j$ 的极小多项式等于

$$x^2+c_jx+d_j=(x-a_j)^2+b_j^2=\left(x-a_j-\mathrm{i}b_j\right)\left(x-a_j+\mathrm{i}b_j\right)$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上无重根, 故 $R_j$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上也可对角化. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}=\operatorname{diag}\{\lim_{n\to+\infty}J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$, 故 $A$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}$. 因此 $A$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. □

**例题 0.4** 设 $n\geq 2, A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称矩阵, $v\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$. 证明:

$$\operatorname{tr}(A^TA)\geq\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2}-\frac{1}{n-1}[\operatorname{tr}(A)]^2.$$

**证明** 不妨设 $A$ 为实对角矩阵, 即

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n.$$

现在再设 $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\geq\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^nv_i^2}-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2.$$

不妨设 $\lambda_1$ 是 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\right)\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow&\frac{1}{2n-2}\lambda_1^2+\frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2+\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\geqslant 0\\
\Longleftrightarrow&\lambda_1^2+2n\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2+4\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\geqslant 0.
\end{aligned}\tag{2}$$

上述关于 $\lambda_i$ 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2\\2&2n&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&2n\end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-2\\-2&\lambda-2n&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2&-2&\cdots&\lambda-2n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-2\\-\lambda-1&\lambda-2n+2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\lambda-1&0&\cdots&\lambda-2n+2\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{\text{“爪”型行列式}}(\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1}-2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2}\\
&=(\lambda-2n+2)^{n-2}\left[(\lambda-1)(\lambda-2n+2)-2(n-1)(\lambda+1)\right]\\
&=(\lambda-2n+2)^{n-2}\lambda(\lambda-4n+3).
\end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0,4n-3,\underbrace{2n-2,2n-2,\cdots,2n-2}_{n-2\text{个}}.\quad(n\geqslant 2)$$

故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2).

□

**例题 0.5**

**证明**

□

**例题 0.6**

**证明**

□

**例题 0.7**

**证明**

□

**例题 0.8**

证明

□

**例题 0.9**

证明

□