

## 0.1 Jordan-Hölder 定理

### 定义 0.1

群  $G$  的两个次正规(正规)序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

$$G = H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_s = \{1\}$$

称为同构的, 如果这两个序列的因子集  $\{G_i/G_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r-1\}, \{H_j/H_{j+1} \mid 1 \leq j \leq s-1\}$  之间有一一对应关系, 并且对应的因子是同构的.



**注** 显然, 若两个次正规(正规)序列同构, 则它们有相同的长度.

### 引理 0.1 (Zassenhaus 定理)

设  $H, K$  是群  $G$  的子群, 又  $H^*, K^*$  分别是  $H, K$  的正规子群, 则

$$H^*(H \cap K^*) \triangleleft H^*(H \cap K), \quad K^*(H^* \cap K) \triangleleft K^*(H \cap K),$$

$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K).$$

$$(H \cap K^*)H^* \triangleleft (H \cap K)H^*, \quad (H^* \cap K)K^* \triangleleft (H \cap K)K^*,$$

$$(H \cap K)H^*/(H \cap K^*)H^* \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong (H \cap K)K^*/(H^* \cap K)K^*.$$



**证明** 因为  $H^*$  是  $H$  的正规子群,  $H \cap K, H \cap K^*$  都是  $H$  的子群, 故由定理????知  $H^*(H \cap K), H^*(H \cap K^*)$  都是  $H$  的子群. 同样  $K^*(H \cap K), K^*(H^* \cap K)$  都是  $K$  的子群, 而且  $H^*(H \cap K^*) \subseteq H^*(H \cap K), K^*(H^* \cap K) \subseteq K^*(H \cap K)$ . 对  $\forall a \in H^* \cap K, b \in H \cap K^*, x \in H \cap K$ , 有

$$xax^{-1} \in H^* \cap K, \quad xbx^{-1} \in H \cap K^*.$$

故  $H^* \cap K, H \cap K^* \triangleleft H \cap K$ . 再由推论????知  $(H \cap K^*)(H^* \cap K) = L$  也是  $H \cap K$  的正规子群.

作  $H^*(H \cap K)$  到  $(H \cap K)/L$  上的映射  $\phi$ ,

$$\phi(hx) = xL, \quad \forall h \in H^*, x \in H \cap K.$$

若  $h_1x_1 = h_2x_2 (h_i \in H^*, x_i \in H \cap K, i = 1, 2)$ , 则

$$h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L \implies x_2L = x_1L,$$

因而  $\phi(h_1x_1) = \phi(h_2x_2)$ , 故  $\phi$  是良定义的.

再证明  $\phi$  是同态, 由于  $H^* \triangleleft H, x_1h_2x_1^{-1} \in H^*$ , 故

$$\phi((h_1x_1)(h_2x_2)) = \phi(h_1(x_1h_2x_1^{-1})x_1x_2) = x_1x_2L = (x_1L) \cdot (x_2L) = \phi(h_1x_1) \cdot \phi(h_2x_2),$$

故  $\phi$  是  $H^*(H \cap K)$  到  $(H \cap K)/L$  上的同态, 显然  $\phi$  还是满同态. 注意到

$$hx \in \ker \phi \iff \phi(hx) = xL = L \iff x \in L \iff hx \in H^*L = H^*(H^* \cap K)(H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*),$$

故  $\ker \phi = H^*(H \cap K^*)$ . 因而由群的同态基本定理得

$$H^*(H \cap K^*) \triangleleft H^*(H \cap K),$$

$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K).$$

同理可得

$$K^*(H^* \cap K) \triangleleft K^*(H \cap K),$$

$$K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K).$$

故

$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K).$$

综上, 同理可得

$$(H \cap K^*)H^* \triangleleft (H \cap K)H^*, \quad (H^* \cap K)K^* \triangleleft (H \cap K)K^*,$$

$$(H \cap K)H^*/(H \cap K^*)H^* \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong (H \cap K)K^*/(H^* \cap K)K^*.$$

□

### 定理 0.1 (Schreier 定理)

群  $G$  的两个次正规 (正规) 序列有同构的加细.

♥

**证明** 设群  $G$  有次正规 (正规) 序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}, \quad (1)$$

$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s = \{1\}. \quad (2)$$

令

$$G_{i,k} = (G_i \cap H_k)G_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1, 1 \leq k \leq s,$$

$$G_{r,s} = \{1\},$$

$$H_{i,k} = (H_i \cap G_k)H_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1, 1 \leq k \leq r,$$

$$H_{s,r} = \{1\}.$$

由  $G_{k+1} \triangleleft G_k (1 \leq k \leq r-1), H_{k+1} \triangleleft H_k (1 \leq k \leq s-1)$  及 Zassenhaus 定理可得

$$G_{i,k+1} \triangleleft G_{i,k}, \quad 1 \leq i \leq r-1, 1 \leq k \leq s-1,$$

$$H_{i,k+1} \triangleleft H_{i,k}, \quad 1 \leq i \leq s-1, 1 \leq k \leq r-1.$$

从而

$$G_{i+1,1} = (G_{i+1} \cap G)G_{i+2} = G_{i+1} = (G_i \cap H_s)G_{i+1} = G_{i,s} \triangleleft G_{i,s-1}, \quad 1 \leq i \leq r-1,$$

$$H_{i+1,1} = (H_{i+1} \cap G)H_{i+2} = H_{i+1} = (H_i \cap G_r)H_{i+1} = H_{i,r} \triangleleft H_{i,r-1}, \quad 1 \leq i \leq s-1.$$

又若序列(1), 序列(2)都是正规序列, 即  $G_i, H_j (1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$  均为  $G$  的正规子群, 则由命题????知  $G_{i,k}, H_{j,k}$  也是  $G$  的正规子群. 这样, 即得序列(1), 序列(2)的加细的次正规 (正规) 序列

$$\begin{aligned} G &= G_{1,1} \supseteq G_{1,2} \supseteq \cdots \supseteq G_{1,s-1} \\ &\supseteq G_{2,1} \supseteq G_{2,2} \supseteq \cdots \supseteq G_{2,s-1} \\ &\supseteq \cdots \\ &\supseteq G_{r-1,1} \supseteq G_{r-1,2} \supseteq \cdots \supseteq G_{r-1,s-1} \supseteq G_{r,s} = \{1\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} G &= H_{1,1} \supseteq H_{1,2} \supseteq \cdots \supseteq H_{1,r-1} \\ &\supseteq H_{2,1} \supseteq H_{2,2} \supseteq \cdots \supseteq H_{2,r-1} \\ &\supseteq \cdots \\ &\supseteq H_{s-1,1} \supseteq H_{s-1,2} \supseteq \cdots \supseteq H_{s-1,r-1} \supseteq H_{s,r} = \{1\}. \end{aligned} \quad (4)$$

由 Zassenhaus 定理有

$$\frac{G_{i,k}}{G_{i,k+1}} = \frac{(G_i \cap H_k)G_{i+1}}{(G_i \cap H_{k+1})G_{i+1}} \cong \frac{(G_i \cap H_k)H_{k+1}}{(G_{i+1} \cap H_k)H_{k+1}} = \frac{H_{k,i}}{H_{k,i+1}},$$

$$H_{s-1,r-1} = H_{s-1} \cap G_{r-1} = G_{r-1,s-1}$$

故序列(3), (4)是  $G$  的同构的次正规 (正规) 序列.

□

**定义 0.2**1. 群  $G$  的次正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$$

的因子  $G_i/G_{i+1} (1 \leq i \leq r-1)$  如果都是单群, 那么称此序列为  $G$  的合成序列.

2. 群  $G$  的正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$$

的因子  $G_i/G_{i+1} (1 \leq i \leq r-1)$  如果都是单群, 那么称此序列为  $G$  的主序列.

♣

**注** 显然群  $G$  的主序列必是合成序列.

**命题 0.1**

若  $G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$  为  $G$  的合成序列, 则  $G_{i+1}$  是  $G_i$  的极大正规子群.

♦

**证明**

□

**例题 0.1** 设  $G = \langle a \rangle$  为 15 阶循环群, 则

$$\begin{aligned} G &\supseteq \langle a^3 \rangle \supseteq \{1\}, \\ G &\supseteq \langle a^5 \rangle \supseteq \{1\} \end{aligned}$$

是两个同构的正规序列. 并且这两个序列都是  $G$  的主序列, 也是合成序列.

**证明**

□

**例题 0.2** 设  $n \geq 5$ , 则  $S_n \supseteq A_n \supseteq \{1\}$  是  $S_n$  的主序列, 也是  $S_n$  的合成序列.

**例题 0.3** 序列  $S_4 \supseteq A_4 \supseteq K_4 \supseteq \langle(12)(34)\rangle \supseteq \{1\}$  是  $S_4$  的合成序列, 但不是  $S_4$  的主序列.

**证明**

□

**例题 0.4** 无限循环群  $G = \langle a \rangle$  无合成序列.

**证明** 事实上, 若  $G$  有合成序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{r-1} \supseteq G_r = \{1\},$$

则  $G_{r-1}/G_r = G_{r-1} = \langle a^k \rangle$  为单群, 但  $\langle a^k \rangle$  是无限循环群, 而由命题??知无限循环群非单群, 矛盾!

□

**定理 0.2 (Jordan-Hölder 定理)**

若群  $G$  有合成(主)序列, 则  $G$  的任两个合成(主)序列是同构的.

♡

**注** 这个定理表明: 任意群的合成(主)序列的因子在同构意义下唯一.

**证明** 设  $G$  有两合成(主)序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}, \tag{5}$$

$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s = \{1\}. \tag{6}$$

由于  $G_i/G_{i+1} (1 \leq i \leq r-1), H_j/H_{j+1} (1 \leq j \leq s-1)$  都是单群, 因而序列(5)和序列(6)都可能再加细. 否则, 存在  $k_1 \in \{1, 2, \dots, r\}, k_2 \in \{1, 2, \dots, s\}$  以及群  $K_1, K_2$ , 使得

$$G_{k_1+1} \subset K_1 \subset G_{k_1}, \quad H_{k_2+1} \subset K_2 \subset H_{k_2}; \tag{7}$$

$$G_{k_1+1} \triangleleft K_1 \triangleleft G_{k_1}, \quad H_{k_2+1} \triangleleft K_2 \triangleleft H_{k_2}.$$

由推论????知

$$K_1/G_{k_1+1} \triangleleft G_{k_1}/G_{k_1+1}, \quad K_2/G_{k_2+1} \triangleleft H_{k_2}/H_{k_2+1}.$$

又因为  $G_{k_1}/G_{k_1+1}, H_{k_2}/H_{k_2+1}$  都是单群, 所以

$$K_1/G_{k_1+1} = G_{k_1+1} \text{ 或 } G_{k_1}/G_{k_1+1}, \quad K_2/H_{k_2+1} = H_{k_2+1} \text{ 或 } H_{k_2}/H_{k_2+1}.$$

即

$$K_1 = G_{k_1+1} \text{ 或 } G_{k_1}, \quad K_2 = H_{k_2+1} \text{ 或 } H_{k_2}.$$

这与(7)式矛盾!

另外, 由 Schreier 定理知序列(5)和序列(6)可加细为同构的次正规(正规)序列, 分别记为序列  $S$  和序列  $T$ , 则序列  $S$  与序列  $T$  同构. 而已经证明序列(5)和序列(6)不可加细, 故序列  $S$  等于序列(5), 序列  $T$  等于序列(6). 因而序列(5)和序列(6)必然同构.  $\square$

### 定义 0.3

设  $G$  是群,  $\Omega$  为一集合, 如果有  $\Omega \times G$  到  $G$  的映射  $(\sigma, a) \rightarrow \sigma(a)$  ( $\forall \sigma \in \Omega, a \in G$ ) 满足

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \forall \sigma \in \Omega, a, b \in G,$$

那么称  $G$  为带算子集  $\Omega$  的群, 简称  $\Omega$  群.  $\Omega$  的元素称为  $G$  的算子.

**注** 事实上, 由  $\Omega$  群的定义又知  $\Omega$  中每个元素  $\sigma$  都是群  $G$  的自同态.

**例题 0.5** 设  $G$  是 Abel 群, 运算为加法, 则  $G$  是一个  $\mathbb{Z}$  群.

**证明** 事实上,  $(n, a) \rightarrow na$  ( $n \in \mathbb{Z}, a \in G$ ) 为  $\mathbb{Z} \times G$  到  $G$  的映射. 并且

$$n(a + b) = n \cdot (a + b) = na + nb = n(a) + n(b), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, a, b \in G.$$

$\square$

**例题 0.6** 设  $M$  是环  $R$  上的左模, 则  $M$  是  $R$  群. 特别地, 域  $F$  上的线性空间可看成  $F$  群.

**证明** 事实上,  $R \times M$  到  $M$  的映射为  $(a, x) \rightarrow ax$  ( $a \in R, x \in M$ ).  $\square$

### 定义 0.4

设  $G$  为  $\Omega$  群,  $H$  是  $G$  的子群, 且满足

$$\sigma(H) \subseteq H, \quad \forall \sigma \in \Omega,$$

则称为  $H$  为  $G$  的  $\Omega$  子群. 又若  $H \triangleleft G$ , 即  $H \subseteq G$  且  $H \triangleleft G$ , 则称  $H$  为  $G$  的  $\Omega$  正规子群.

### 命题 0.2

左  $R$  模  $M$  可看成  $R$  群, 其  $R$  子群  $M_1$  就是  $M$  的子模, 特别是一个环  $R$ , 即可看成左  $R$  模, 因而也可看成  $R$  模. 这时,  $R$  子群为  $R$  的左理想, 环  $R$  也可看成右  $R$  模、 $R$  群, 这时  $R$  子群为右理想, 环  $R$  也可看成  $R$  双模, 相应的  $R$  子群为  $R$  的理想.

**注** 这个命题表明: 环与模都是特殊的  $\Omega$  群.

**证明**

$\square$

**例题 0.7** 设  $G$  是群, 若  $\Omega = \text{Int}G(G$  的内自同构的集合), 则  $G$  的  $\Omega$  子群就是  $G$  的正规子群.

**证明**

$\square$

**定义 0.5**

设  $G$  是群.

1. 若  $\Omega = \text{Aut}G(G$  的自同构的集合), 则  $G$  的  $\Omega$  子群称为  $G$  的**特征子群**;
2. 若  $\Omega = \text{End}G(G$  的自同态的集合), 则  $G$  的  $\Omega$  子群称为  $G$  的**完全不变子群**.

**定理 0.3**

设  $H$  是  $\Omega$  群  $G$  的  $\Omega$  正规子群,  $\pi$  为  $G$  到  $G/H$  的自然同态, 则  $\Omega \times G/H$  到  $G/H$  上的映射  $(\sigma, \pi(a)) \rightarrow \pi(\sigma(a)) (\sigma \in \Omega, \pi(a) \in G/H)$  使得  $G/H$  也是  $\Omega$  群, 称为  $G$  对  $H$  的 **$\Omega$  商群**.



**证明** 若  $(\sigma, \pi(a)) = (\sigma', \pi(b)) \in \Omega \times G/H$ , 则  $\sigma = \sigma', \pi(a) = \pi(b) (a, b \in G)$ , 于是  $ab^{-1} \in H$ , 从而有  $\sigma(a)\sigma'(b)^{-1} = \sigma(a)\sigma(b)^{-1} = \sigma(ab^{-1}) \in H$ , 故  $\pi(\sigma(a)) = \pi(\sigma'(b))$ . 故  $\Omega \times G/H$  到  $G/H$  的映射  $(\sigma, \pi(a)) \rightarrow \pi(\sigma(a))$  是良定义的.

又  $\forall a, b \in G, \sigma \in \Omega$  有

$$\begin{aligned}\sigma(\pi(a)\pi(b)) &= \sigma(\pi(ab)) = \pi(\sigma(ab)) = \pi(\sigma(a)\sigma(b)) \\ &= \pi(\sigma(a))\pi(\sigma(b)) = \sigma(\pi(a))\sigma(\pi(b)),\end{aligned}$$

于是  $G/H$  是  $\Omega$  群.

**定义 0.6**

设  $G, G_1$  都是  $\Omega$  群,  $\phi$  是群  $G$  到群  $G_1$  的同态且满足  $\phi\sigma = \sigma\phi (\forall \sigma \in \Omega)$ , 则称  $\phi$  是 **$\Omega$  同态**. 若  $\phi$  还是群的同构, 则称  $\phi$  是 **$\Omega$  同构**.



**注** 与通常的群的同态基本定理一样, 可证  $\Omega$  群的同态基本定理及其他一些定理, 如 Zassenhaus 引理. 同样, 也可以引入  $\Omega$  群的次正规(正规)序列、合成序列和主序列等概念, 并能证明 Schreier 定理与 Jordan-Hölder 定理. 由于环与模均可看成特殊的  $\Omega$  群, 因而就可将 Jordan-Hölder 定理用于环与模的研究.

**命题 0.3**

若  $H$  为  $\Omega$  群  $G$  的  $\Omega$  正规子群, 则  $G$  到  $G/H$  的自然同态  $\pi$  是  $\Omega$  同态.

**证明****定义 0.7**

$R$  模  $M$  的有限子模序列

$$M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_r = 0$$

满足  $M_i/M_{i+1} (i = 1, 2, \dots, r-1)$  为单模, 则该序列称为  $M$  的一个**合成序列**,  $M_i/M_{i+1}$  称为**合成因子**.

**定理 0.4 (模的 Jordan-Hölder 定理)**

若  $R$  模  $M$  有合成序列, 则  $M$  的任两合成序列是同构的, 即它们的合成因子在同构意义下唯一.



**注** 若将  $M$  看成带算子集  $R$  的  $R$  群, 则这个定理就是群的 Jordan-Hölder 定理的特殊情形. 与群的 Jordan-Hölder 定理同样证明.

**证明**