0.1 幺半群 群

定义 0.1 ((幺) 半群)

设 S 是非空集合. 在 S 中定义了二元运算称为乘法, 满足结合律, 即

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in S,$$

则称 S 为**半群**.

如果在半群 M 中存在元素 1, 使得

$$1a = a1 = a, \quad \forall a \in M, \tag{1}$$

则称 M 为幺半群, 1 称为**幺元素**或**幺元**.

如果一个幺半群 M(或半群 S) 的乘法还满足交换律, 即

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in M\,(\text{或}S),$$

则称 M(或 S) 为**交换幺半群** (或**交换半群**), 也简单地称 M(或 S) 为**可换的**.

对于交换幺半群, 有时把二元运算记为加法, 此时幺元素记为 0, 改称**零元素**或**零**.

例题 0.1

1. $\mathbf{N}$ 对乘法是幺半群, 对加法是半群而不是幺半群. 非负整数集对加法与乘法均为幺半群.
2. 令 $M(X)$ 为非空集 X 的所有变换 (即 X 到 X 的映射) 的集合, 则对于变换的乘法, $M(X)$ 是一个幺半群, id_X 是一个幺元素. 当 $|X| \geq 2$ 时, $M(X)$ 不是可换的.
3. 设 $P(X)$ 为非空集合 X 的所有子集的集合. 空集 $\varnothing$ 也是 X 的一个子集, 则 $P(X)$ 对集合的并的运算是一个幺半群, $\varnothing$ 为幺元素. 同样, $P(X)$ 对集合的交的运算是一个幺半群, X 为幺元素, 这两种幺半群都是可换的.

命题 0.1

幺半群中的幺元素是唯一的.

证明 如果 1 与 $1'$ 都是幺半群 M 的幺元素, 则由条件 (1)可知 $1 = 1'$. □

定义 0.2 (群)

在非空集合 G 中定义了二元运算, 称为乘法. 若满足下列条件:

(1) 结合律成立, 即 $(ab)c = a(bc)(\forall a, b, c \in G)$;

(2) 存在**左幺元**, 即 $\exists e \in G$, 使 $ea = a(\forall a \in G)$;

(3) 对 $\forall a \in G$ 有**左逆元**, 即有 $b \in G$, 使 $ba = e$,

则称 G 是一个**群**. 若 G 的乘法还满足交换律, 则称 G 为**交换群**或 **Abel 群**.

定义 0.3 (全变换群/置换群)

设 X 是非空集合. 以 S_X 表示 X 的所有可逆变换 (即 X 到 X 的一一对应) 的集合, 则 S_X 对变换的乘法构成一个群, id_X 为左幺元, f^{-1} 为 f 的左逆元. S_X 称 X 的**全变换群**.

如果集合 X 所含元素的个数 $|X| = n < +\infty$. 此时 S_X 记为 S_n, 称为 n 个文字的**对称群**或 n 个文字的**置换群**, 其元素称为**置换**.

注 假定集合 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$, 记 S_n 为 X 的对称群, 设 $\sigma \in S_n$, 则 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 常用下面记法:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

更一般地, 若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 则可记

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$$

易知 S_n 中有 $n!$ 个元素, S_n 中一个元素可以有 $n!$ 种表示法.

例如, $\sigma \in S_3$, 满足 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$, 则可记

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

定义 0.4

♣

定理 0.1

♡

证明

□