0.1 Cauchy 积分公式

定理 0.1 (Cauchy 积分公式)

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域, 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么对任意 $z \in D$, 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{1}$$

等式(1)称为 **Cauchy 积分公式**.

笔记 上述定理表明全纯函数在区域中的值由它在边界上的值所完全确定. (**??**)式是全纯函数的一种积分表示, 通过这种表示, 我们可以证明全纯函数有任意阶导数.

证明 任取 $z \in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, 有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $\rho < \delta$, 使得 $B(z, \rho) \subset D$. 记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, 由 γ 和 γ_ρ 围成的二连通区域记为 D'(图 1), 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 D' 中全纯, 在 $\overline{D'}$ 上连续. 于是, 由推论**??**得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

又由命题**??**可知 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 1$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3}$$

于是, 由(2)式、(3)式及长大不等式即得

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon. \end{aligned}$$

让 $\varepsilon \to 0$, 即得所要证的等式 (**??**).

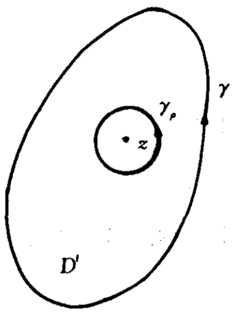

图 1

□

定理 0.2 (解析函数的平均值定理)

如果函数 $f(z)$ 在圆 $|\zeta - z_0| < R$ 内解析, 在闭圆 $|\zeta - z_0| \leqslant R$ 上连续, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \mathrm{d}\varphi,$$

即 $f(z)$ 在圆心 z_0 的值等于它在圆周上的值的算术平均数.

证明 设 C 表示圆周 $|\zeta - z_0| = R$(如图??), 则

$$\zeta - z_0 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

或

$$\zeta = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

由此

$$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

根据Cauchy 积分公式可得

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \cdot \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

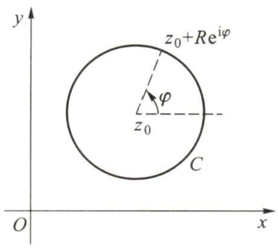

图 2

□

定义 0.1

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线 (不一定是闭的),g 是 γ 上的连续函数, 如果 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 那么由定理??可知积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

是存在的, 它定义了 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上的一个函数 $G(z)$, 即

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

称它为 **Cauchy 型积分**.

♣

笔记 由 Cauchy 型积分确定的函数有很好的性质.

定理 0.3

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线,g 是 γ 上的连续函数, 那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上有任意阶导数, 而且

$$G^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

♡

笔记 这个定理实际上证明了在现在的情况下, 微分运算和积分运算可以交换, 公式很便于记忆.

证明 我们用数学归纳法来证明等式 (4). 先设 $n = 1$, 我们要证明

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta,\ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \tag{5}$$

任意取定 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 记 $\rho = \inf\limits_{\zeta \in \gamma} |\zeta - z_0| > 0, \delta = \min\left(1, \dfrac{\rho}{2}\right)$, 则当 $\zeta \in \gamma, z \in B(z_0, \delta)$ 时, 有 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < \dfrac{1}{2}$. 于是由 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + h(z, \zeta)\right), \tag{6}$$

其中 $h(z, \zeta) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$, 从而

$$|h(z, \zeta)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^n = \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^n < \frac{|z - z_0|^2}{\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{\rho^2} |z - z_0|^2. \tag{7}$$

这样, 由 (6)式便得

$$G(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta + \frac{z - z_0}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta) h(z, \zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta,$$

又注意到 $h(z_0, \zeta) = 0$, 因而有

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z - z_0)} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta) h(z, \zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta. \tag{8}$$

若记 $M = \sup\limits_{\zeta \in \gamma} |g(\zeta)|$, 由 (7)式便知(8)式右端的绝对值不超过

$$\frac{M|\gamma|}{\pi \rho^3 |z - z_0|} \cdot |z - z_0|^2 = \frac{M|\gamma|}{\pi \rho^3} |z - z_0|.$$

在 (8)式两端令 $z \to z_0$, 即得

$$G'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\zeta.$$

现设 $n = k$ 时 (4)式成立, 即

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

要证明

$$G^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} \mathrm{d}\zeta.$$

由 (6)式和二项式定理, 可得

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + h(z, \zeta)\right)^{k+1} = \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \left(1 + (k+1)\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + H(z, \zeta)\right),$$

由 (7)式便得

$$|H(z, \zeta)| \leqslant C |z - z_0|^2, \tag{9}$$

这里,C 是一个常数. 于是

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta + \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} \mathrm{d}\zeta + \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta) H(z, \zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

即

$$\frac{G^{(k)}(z) - G^{(k)}(z_0)}{z - z_0} - \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} \mathrm{d}\zeta = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}(z - z_0)} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta) H(z, \zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta. \tag{10}$$

由 (9)式便知 (10)式右端的绝对值不超过 $K|z - z_0|$, 这里,K 是一个常数. 在 (10) 式中令 $z \to z_0$, 即得

$$G^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 z_0 是 D 中的任意点, 归纳法证明完毕.

□

定理 0.4

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域, 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么 f 在 D 上有任意阶导数, 而且对任意 $z \in D$, 有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \; n = 1, 2, \cdots.$$

证明 证法一: 由定理 0.1,f 可写为 Cauchy 型积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 f 在 γ 上连续, 故由定理 0.3即得所要证的结果.

证法二: 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 则由定理**??**知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

$f'(z) = U(x, y) + \mathrm{i}V(x, y)$, 其中 $U(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$,$V(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. 又由命题**??**(3) 知,$f$ 有任意阶的连续偏导数. 从而 $u(x, y)$,$v(x, y)$ 任意阶可微, 并且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

因此 f' 满足 Cauchy-Riemann 方程. 故由定理**??**知 $f' \in H(D)$. 再利用数学归纳法易知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $f^{(n)} \in H(D)$.

□

定理 0.5

如果 f 是区域 D 上的全纯函数, 那么 f 在 D 上有任意阶导数.

证明 任取 $z_0 \in D$, 取充分小的 δ, 使得 $\overline{B(z_0, \delta)} \subset D$. 由定理 0.4,$f$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中有任意阶导数, 又由于 z_0 是任意的, 所以 f 在 D 中有任意阶导数.

□

例题 0.1 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2 + 16)}.$$

解 令 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 16}$, 则 f 在 $\{z : |z| \leqslant 2\}$ 中全纯, 根据定理 0.4, 有

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2 + 16)} = 2\pi \mathrm{i} \left(\frac{1}{z^2 + 16} \right)' \Big|_{z=0} = 0.$$

也可以这样计算:

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2 + 16)} = \frac{1}{16} \left\{ \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} - \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 16} \right\} = 0.$$

这是因为, 由命题**??**, 第一个积分为零; 由 Cauchy 积分定理, 第二个积分为零.

□

定理 0.6

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 中的每一条都在其他 $k-1$ 条的外部,D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的区域,D 的边界 γ 由 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 所组成. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则对任意 $z \in D$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

f 在 D 内有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

♡

证明 定理的证明和前面的一样, 不再重复. 根据定理 0.3的结论, 再利用定理??的证明思路进行证明即可.

□

例题 0.2 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.$$

解 注意到 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 在 $1,e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}$ 处不解析. 作一个中心在原点、半径为 $R(R>4)$ 的大圆 (图 3), 则在闭圆环

$$\{z:2\leqslant|z|\leqslant R\}$$

上,$f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ 是全纯的. 于是, 由定理 0.6 得

$$\int_{\gamma_1^-}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\bigg|_{z=-4}=-\frac{32}{1323}\pi\mathrm{i},$$

其中 $\gamma_1=\{z:|z|=2\}$,$\gamma_2=\{z:|z|=R\}$. 所以

$$\begin{aligned}&-\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=-\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}\\ \Longleftrightarrow&\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}.\end{aligned}\tag{11}$$

由于当 $|z|=R$ 时, 有

$$|(z^3-1)(z+4)^2|\geqslant(R^3-1)(R-4)^2,$$

所以由长大不等式得

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\right|\leqslant\frac{2\pi R}{(R^3-1)(R-4)^2}\to0\,(R\to\infty).$$

故在(11)式中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32\pi\mathrm{i}}{1323}.$$

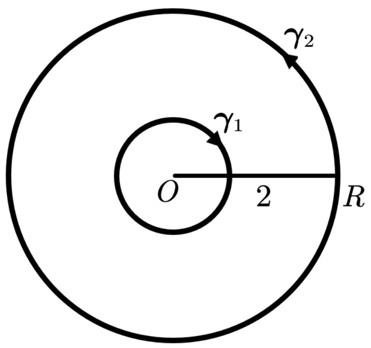

图 3

□

定理 0.7 (Schwarz 积分公式)

设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$,$f=u+\mathrm{i}v$. 证明:$f$ 可用实部表示为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\mathrm{i}\theta}+z}{Re^{\mathrm{i}\theta}-z}u(Re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}v(0).$$

♡

证明

□