

## 0.1 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

### 命题 0.1

数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  一定适合数域  $\mathbb{K}$  上的一个非零多项式.

**证明** 我们已经知道, 数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵全体组成了  $\mathbb{K}$  上的线性空间, 其维数等于  $n^2$ . 因此对任一  $n$  阶矩阵  $A$ , 下列  $n^2 + 1$  个矩阵必线性相关:  $A^{n^2}, A^{n^2-1}, \dots, A, I_n$ .

也就是说, 存在  $\mathbb{K}$  中不全为零的数  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, c_{n^2})$ , 使

$$c_{n^2}A^{n^2} + c_{n^2-1}A^{n^2-1} + \dots + c_1A + c_0I_n = O.$$

这表明矩阵  $A$  适合数域  $\mathbb{K}$  上的一个非零多项式. □

### 定义 0.1 (矩阵的极小多项式)

若  $n$  阶矩阵  $A$  (或  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\varphi$ ) 适合一个非零首一多项式  $m(x)$ , 且  $m(x)$  是  $A$  (或  $\varphi$ ) 所适合的非零多项式中次数最小者, 则称  $m(x)$  是  $A$  (或  $\varphi$ ) 的一个**极小多项式**或**最小多项式**.

**注** 由命题 0.1 可知矩阵  $A$  的极小多项式  $m(x)$  一定存在, 故极小多项式是良定义的.

### 定理 0.1 (Cayley-Hamilton 定理)

1. **代数形式:** 设  $A$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵,  $f(x)$  是  $A$  的特征多项式, 则  $f(A) = O$ .
2. **几何形式:** 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $f(x)$  是  $\varphi$  的特征多项式, 则  $f(\varphi) = O$ .

**证明**

1. **代数形式:** 因为复数域是最大数域, 所以可将  $A$  看作一个复矩阵. 由复方阵必相似于上三角阵知  $A$  复相似于一个上三角阵, 也就是说存在的可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$  是一个上三角阵, 其中  $P$  与  $B$  都是复矩阵, 由相似矩阵有相同特征多项式可知  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式  $f(x)$ . 记

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

则  $f(B) = O$ . 而

$$\begin{aligned} f(A) &= A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI_n \\ &= (PBP^{-1})^n + a_1(PBP^{-1})^{n-1} + \dots + a_nI_n \\ &= PB^nP^{-1} + a_1PB^{n-1}P^{-1} + \dots + a_nI_n \\ &= P(B^n + a_1B^{n-1} + \dots + a_nI_n)P^{-1} \\ &= Pf(B)P^{-1} = O. \end{aligned}$$

2. **几何形式:** 设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $V$  的一组标准基,  $\varphi$  在这组基下的矩阵为  $A$ , 则由  $f(x)$  是  $\varphi$  的特征多项式可知,  $f(x)$  也是  $A$  的特征多项式. 从而由代数形式的结论可知  $f(A) = O$ . 于是对  $\forall \alpha \in V$ , 都存在  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得

$$\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

两边同时作用  $\varphi$  得到

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= k_1\varphi(e_1) + k_2\varphi(e_2) + \cdots + k_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A(e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A\alpha.\end{aligned}$$

因此  $f(\varphi)(\alpha) = f(A)(\alpha) = 0$ . 故由  $\alpha$  的任意性可知  $f(\varphi) = O$ .

□

### 0.1.1 极小多项式的性质

#### 命题 0.2 (极小多项式的性质)

- (1) 若  $f(x)$  是  $A$  适合的一个多项式, 则  $A$  的极小多项式  $m(x)$  整除  $f(x)$ . 即极小多项式整除  $A$  的任意零化多项式.
- (2) 任一  $n$  阶矩阵的极小多项式必唯一.
- (3) 相似的矩阵具有相同的极小多项式.
- (4) 矩阵及其转置有相同的极小多项式.
- (5) 设  $m(x)$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式,  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值, 则  $(x - \lambda_0) \mid m(x)$ .
- (6) 设  $A$  是一个分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

其中  $A_i$  都是方阵, 则  $A$  的极小多项式等于诸  $A_i$  的极小多项式之最小公倍式.

 **笔记** 性质 (5) 告诉我们: **矩阵的特征值一定是其极小多项式的根.**

**证明**

- (1) 由多项式的带余除法知道

$$f(x) = m(x)q(x) + r(x),$$

且  $\deg r(x) < \deg m(x)$ . 将  $x = A$  代入上式得  $r(A) = O$ , 若  $r(x) \neq 0$ , 则  $A$  适合一个比  $m(x)$  次数更小的非零多项式, 矛盾. 故  $r(x) = 0$ , 即  $m(x) \mid f(x)$ .

- (2) 若  $m(x), g(x)$  都是矩阵  $A$  的极小多项式, 则由 **矩阵极小多项式的性质 (1)** 知道  $m(x)$  能够整除  $g(x)$ ,  $g(x)$  也能够整除  $m(x)$ . 因此  $m(x)$  与  $g(x)$  只差一个常数因子, 又极小多项式必须首项系数为 1, 故  $g(x) = m(x)$ .
- (3) 设矩阵  $A$  和  $B$  相似, 即存在可逆矩阵  $P$ , 使  $B = P^{-1}AP$ . 设  $A, B$  的极小多项式分别为  $m(x), g(x)$ , 注意到

$$m(B) = m(P^{-1}AP) = P^{-1}m(A)P = O,$$

因此  $g(x) \mid m(x)$ . 同理,  $m(x) \mid g(x)$ , 故  $m(x) = g(x)$ .

- (4) 设  $A$  的极小多项式是  $m(x)$ , 转置  $A'$  的极小多项式是  $n(x)$ . 将  $m(A) = O$  转置可得  $m(A') = O$ , 因此  $n(x) \mid m(x)$ . 同理可证  $m(x) \mid n(x)$ , 故  $m(x) = n(x)$ .
- (5) 由  $m(A) = O$  及 **命题??** 可得  $m(\lambda_0) = 0$ , 再由余数定理得  $(x - \lambda_0) \mid m(x)$ .

(6) 设  $A$  的极小多项式为  $m(x)$ ,  $A_i$  的极小多项式为  $m_i(x)$ , 诸  $m_i(x)$  的最小公倍式为  $g(x)$ , 则  $g(A_i) = O$ , 于是

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

从而  $m(x) \mid g(x)$ . 又因为

$$m(A) = \begin{pmatrix} m(A_1) & & & \\ & m(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m(A_k) \end{pmatrix} = O,$$

所以对每个  $i$  有  $m(A_i) = O$ , 从而  $m_i(x) \mid m(x)$ , 即  $m(x)$  是  $m_i(x)$  的公倍式. 又  $g(x)$  是诸  $m_i(x)$  的最小公倍式, 故  $g(x) \mid m(x)$ . 综上所述,  $m(x) = g(x)$ .

□

### 命题 0.3

设数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式为  $m(x)$ , 求证:  $\mathbb{F}[A] = \{f(A) \mid f(x) \in \mathbb{F}[x]\}$  是  $M_n(\mathbb{F})$  的子空间, 且  $\dim \mathbb{F}[A] = \deg m(x)$ .

▲

**证明** 容易验证  $\mathbb{F}[A]$  在矩阵的加法和数乘下封闭, 从而是  $M_n(\mathbb{F})$  的子空间. 对任一  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 由多项式的带余除法可知, 存在  $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 使得  $f(x) = m(x)q(x) + r(x)$ , 其中  $\deg r(x) < \deg m(x) = d$ , 于是  $f(A) = m(A)q(A) + r(A) = r(A)$  是  $I_n, A, \dots, A^{d-1}$  的线性组合. 另一方面, 若设  $c_0, c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{F}$ , 使得

$$c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_{d-1} A^{d-1} = O,$$

则  $A$  适合多项式  $g(x) = c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1x + c_0$ , 由矩阵极小多项式的性质 (1) 可知  $m(x) \mid g(x)$ , 又因为  $d-1 = \deg g(x) < \deg m(x) = d$ , 所以  $g(x) = 0$ , 即  $c_0 = c_1 = \dots = c_{d-1} = 0$ , 于是  $I_n, A, \dots, A^{d-1}$  在  $\mathbb{F}$  上线性无关. 因此,  $\{I_n, A, \dots, A^{d-1}\}$  是  $\mathbb{F}[A]$  的一组基, 特别地,  $\dim \mathbb{F}[A] = d = \deg m(x)$ .

□

### 命题 0.4

$n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式是其特征多项式的因式. 特别,  $A$  的极小多项式的次数不超过  $n$ .

▲

**证明** 设  $A$  的极小多项式和特征多项式分别为  $m(x)$  和  $f(x)$ , 则由 Cayley-Hamilton 定理可知  $f(A) = O$ , 于是再由矩阵极小多项式的基本性质 (1) 可知  $m(x) \mid f(x)$ . 又因为特征多项式  $f(x)$  一定不是零多项式, 所以  $\deg m(x) \leq \deg f(x) = n$ .

□

### 推论 0.1

$n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式和特征多项式有相同的根 (不计重数).

♥

**证明** 设  $m(x)$  和  $f(x)$  分别是  $n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式和特征多项式, 由极小多项式的性质 (5) 可知,  $f(x)$  的根 (即特征值) 都是  $m(x)$  的根. 又由推论 0.4 可知,  $m(x) \mid f(x)$ , 从而  $m(x)$  的根也都是  $f(x)$  的根. 因此若不计重数,  $m(x)$  和  $f(x)$  有相同的根.

□

**例题 0.1** 设  $m(x)$  和  $f(x)$  分别是  $n$  阶矩阵  $A$  的极小多项式和特征多项式, 求证:  $f(x) \mid m(x)^n$ .

**证明** 由于  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值最多是  $n$  重的, 因此设  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值为  $x_i (1 \leq i \leq n)$ , 即  $f(x)$  为  $x_i (1 \leq i \leq n)$ , 并且

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

又由推论 0.1 可知  $x_i (1 \leq i \leq n)$  也都是  $m(x)$  的根. 从而由余数定理可知  $(x - x_i) \mid m(x), i = 1, 2, \dots, n$ . 于是由整除

的基本性质 (6) 归纳可得

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \mid m^n(x).$$

即  $f(x) \mid m^n(x)$ . □

#### 命题 0.5 (常见矩阵的极小多项式)

- (1) 若  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个不同的特征值, 则极小多项式等于特征多项式. 特别地,  $n$  阶基础循环矩阵的极小多项式等于  $x^n - 1$ .
- (2) 设  $n$  阶矩阵  $A$  可对角化,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $A$  的全体不同的特征值, 则  $A$  的极小多项式为  $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$ .
- (3)  $n$  阶幂零 Jordan 块的极小多项式是  $x^n$ .
- (4) 设  $n(n > 1)$  阶矩阵  $A$  的秩为 1, 求证:  $A$  的极小多项式为  $x^2 - \text{tr}(A)x$ . ▲

#### 证明

- (1) 设  $A$  的极小多项式和特征多项式分别为  $m(x)$  和  $f(x)$ ,  $A$  的  $n$  个不同的特征值为  $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ , 则  $f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ . 由推论 0.1 可知,  $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$  也是  $m(x)$  的根. 从而

$$(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \mid m(x).$$

即  $f(x) \mid m(x)$ , 又由推论 0.4 可知  $m(x) \mid f(x)$ , 故  $m(x) = f(x)$ .

- (2) 设  $A$  的极小多项式为  $m(x)$ . 由  $A$  可对角化知存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_k\},$$

其中  $B_i = \lambda_i I$  为纯量矩阵. 显然  $B_i$  的极小多项式为  $x - \lambda_i$ , 故由极小多项式的性质 (3) 和 (6) 可得

$$m(x) = m(B) = [x - \lambda_1, x - \lambda_2, \dots, x - \lambda_k] = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k).$$

- (3) 设  $n$  阶幂零 Jordan 块为  $A$ , 则由命题 ?? 可知  $A^k \neq O (k = 1, 2, \dots, n-1)$ , 但  $A^n = O$ . 故  $n$  阶幂零 Jordan 块  $A$  的极小多项式为  $x^n$ .
- (4) 由命题 ?? 证法二可知,  $A$  适合多项式  $x^2 - \text{tr}(A)x$ . 显然  $A$  不可能适合多项式  $x$ . 若  $A$  适合多项式  $x - \text{tr}(A)$ , 则  $A = \text{tr}(A)I_n$  为纯量矩阵, 其秩等于 0 或  $n$ , 这与  $\text{r}(A) = 1$  矛盾. 因此,  $A$  的极小多项式为  $x^2 - \text{tr}(A)x$ . □

#### 命题 0.6

设  $f(x)$  和  $m(x)$  分别是  $m$  阶矩阵  $A$  的特征多项式和极小多项式,  $g(x)$  和  $n(x)$  分别是  $n$  阶矩阵  $B$  的特征多项式和极小多项式, 证明以下结论等价:

- (1)  $A, B$  没有公共的特征值;
- (2)  $(f(x), g(x)) = 1$  或  $(f(x), n(x)) = 1$  或  $(m(x), g(x)) = 1$  或  $(m(x), n(x)) = 1$ ;
- (3)  $f(B)$  或  $m(B)$  或  $g(A)$  或  $n(A)$  是可逆矩阵. ▲

**证明** (1)  $\Leftrightarrow$  (2): 由推论 0.1 可知, (2) 中所有的条件都等价. 显然 (1) 与  $(f(x), g(x)) = 1$  等价, 故 (1) 与 (2) 等价.

(2)  $\Rightarrow$  (3): 例如, 若  $(f(x), n(x)) = 1$ , 则存在  $u(x), v(x)$ , 使得  $f(x)u(x) + n(x)v(x) = 1$ . 将  $x = B$  代入上式并注意到  $n(B) = O$ , 故可得  $f(B)u(B) = I_n$ , 这表明  $f(B)$  是可逆矩阵. 将  $x = A$  代入上式并注意到  $f(A) = O$  (Cayley-Hamilton 定理), 故可得  $n(A)v(A) = I_n$ , 这表明  $n(A)$  是可逆矩阵. 同理可证其他的情形.

(3)  $\Rightarrow$  (1): 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $A$  的特征值, 则  $n(\lambda_1), \dots, n(\lambda_m)$  是  $n(A)$  的特征值. 例如, 若  $n(A)$  是可逆矩阵, 则  $n(\lambda_i) \neq 0$ , 即  $\lambda_i$  都不是  $n(x)$  的根. 由推论 0.1 可知,  $\lambda_i$  都不是  $g(x)$  的根, 即  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  都不是  $B$  的特征值, 从而  $A, B$  没有公共的特征值. 同理可证其他的情形. □

**命题 0.7**

设  $f(x)$  和  $m(x)$  分别是  $n$  阶矩阵  $A$  的特征多项式和极小多项式,  $g(x)$  是一个多项式, 求证:  $g(A)$  是可逆矩阵的充要条件是  $(f(x), g(x)) = 1$  或  $(m(x), g(x)) = 1$ .

**证明** 先证充分性, 若  $(f(x), g(x)) = 1$ , 则存在多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

又由 Cayley-Hamilton 定理可知,  $f(A) = O$ . 从而将  $x = A$  代入上式得  $v(A)g(A) = I_n$ , 故  $g(A)$  可逆.

若  $(m(x), g(x)) = 1$ , 则存在多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$u(x)m(x) + v(x)g(x) = 1.$$

又注意到  $m(A) = O$ . 从而将  $x = A$  代入上式得  $v(A)g(A) = I_n$ , 故  $g(A)$  可逆.

再证必要性, 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  为  $A$  的所有特征值, 则  $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_m)$  为  $g(A)$  的所有特征值. 又因为  $g(A)$  可逆, 所以其特征值  $g(\lambda_i) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ , 即  $\lambda_i$  都不是  $g(x)$  的根. 而由推论 0.1 可知,  $\lambda_i$  是  $f(x), m(x)$  的全部根. 因此  $f(x), m(x)$  与  $g(x)$  没有公共根, 故  $(f(x), g(x)) = 1, (m(x), g(x)) = 1$ .  $\square$

**命题 0.8**

证明:  $n$  阶方阵  $A$  为可逆矩阵的充要条件是  $A$  的极小多项式的常数项不为零.

 **笔记** 也可利用推论 0.1 和 Vieta 定理来证明.

**证明** 设  $f(x)$  和  $m(x)$  分别是  $A$  的特征多项式和极小多项式, 则  $m(x) \mid f(x)$ . 若  $A$  可逆, 则  $f(x)$  的常数项  $(-1)^n |A|$  不等于零, 因此  $m(x)$  的常数项也不为零.

反之, 设  $m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$ , 其中  $b_0 \neq 0$ , 则

$$m(A) = A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \dots + b_0I_n = O,$$

于是

$$A(A^{m-1} + b_{m-1}A^{m-2} + \dots + b_1I_n) = -b_0I_n.$$

由  $b_0 \neq 0$  即知  $A$  可逆.  $\square$

**0.1.2 Cayley-Hamilton 定理的应用: 逆矩阵和伴随矩阵的多项式表示****命题 0.9**

设  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 求证:  $A^{-1} = g(A)$ , 其中  $g(x)$  是一个  $n-1$  次多项式.

**证明** 设  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  是  $A$  的特征多项式, 因为  $A$  可逆, 故  $a_n = (-1)^n |A| \neq 0$ . 由 Cayley-Hamilton 定理可得  $f(A) = O$ , 于是

$$A \left( -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I_n) \right) = I_n.$$

因此

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I_n).$$

$\square$

**命题 0.10**

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 求证: 伴随矩阵  $A^* = h(A)$ , 其中  $h(x)$  是一个  $n-1$  次多项式.

**证明** 证法一: 我们用摄动法来证明结论. 设  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  是  $A$  的特征多项式, 其中

$a_n = (-1)^n |A|$ . 若  $A$  是可逆矩阵, 则由命题 0.9 可得

$$A^* = |A|A^{-1} = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n).$$

令  $h(x) = (-1)^{n-1}(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$ , 则  $A^* = h(A)$ , 并且  $h(x)$  的系数由特征多项式  $f(x)$  的系数唯一确定.

对于一般的方阵  $A$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为可逆矩阵. 设

$$f_{t_k}(x) = |xI_n - (t_k I_n + A)| = x^n + a_1(t_k)x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t_k)x + a_n(t_k)$$

为  $t_k I_n + A$  的特征多项式, 则  $a_i(t_k)$  都是  $t_k$  的多项式且  $a_i(0) = a_i (1 \leq i \leq n)$ . 由可逆矩阵情形的证明可得

$$(t_k I_n + A)^* = (-1)^{n-1} ((t_k I_n + A)^{n-1} + a_1(t_k)(t_k I_n + A)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(t_k)I_n).$$

注意到上式两边的矩阵中的元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即得

$$A^* = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n).$$

因此无论  $A$  是否可逆, 我们都有  $A^* = h(A)$  成立.

**证法二:** 若  $r(A) = n$ , 则由 Cayley - Hamilton 定理易证结论成立; 若  $r(A) \leq n-2$ , 则  $A^* = O$ , 结论显然成立; 若  $r(A) = n-1$ , 则  $A^* \neq O$  且  $AA^* = A^*A = O$ , 由命题??可知结论也成立.  $\square$

### 0.1.3 Cayley - Hamilton 定理的应用: $AX = XB$ 型矩阵方程的求解及其应用

#### 命题 0.11 ( $AX = XB$ 经典结论)

设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , 则矩阵方程  $AX = XB$  有非 0 解  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  的充分必要条件是  $A, B$  至少有一个相同的特征值.

**证明 必要性:** 反证, 若  $A, B$  没有公共的特征值, 则

**证法一:** 设  $f(\lambda) = |\lambda I_m - A|$  为  $A$  的特征多项式, 则由 Cayley-Hamilton 定理可知  $f(A) = O$ , 再由  $AX = XB$  可得

$$O = f(A)X = Xf(B).$$

因为  $A, B$  没有公共的特征值, 故由命题 0.6 可知,  $f(B)$  是可逆矩阵, 从而由上式即得  $X = O$ , 矛盾!

**证法二:** 任取矩阵方程的一个解  $X = C$ , 若  $C \neq O$ , 则  $r(C) = r \geq 1$ . 由例题??可知,  $A, B$  至少有  $r$  个相同的特征值, 这与  $A, B$  没有公共的特征值相矛盾. 因此  $C = O$ , 即矩阵方程只有零解, 矛盾!

**充分性:** 设  $\lambda \in \mathbb{C}$  是  $A, B$  的相同的特征值, 则  $\lambda \in \mathbb{C}$  是  $A, B^T$  的相同的特征值. 于是存在非 0 的  $\alpha \in \mathbb{C}^n, \beta \in \mathbb{C}^m$  使得

$$A\alpha = \lambda\alpha, B^T\beta = \lambda\beta.$$

于是取  $X = \alpha\beta^T \neq 0$ , 就有

$$A\alpha\beta^T = \lambda\alpha\beta^T = \alpha\beta^T(B^T)^T = \alpha\beta^TB.$$

$\square$

**例题 0.2** 设  $n$  阶方阵  $A, B$  的特征值全部大于零且满足  $A^2 = B^2$ , 求证:  $A = B$ .

**证明** 由  $A^2 = B^2$  可得  $A(A - B) = (A - B)(-B)$ , 即  $A - B$  是矩阵方程  $AX = X(-B)$  的解. 注意到  $A$  的特征值全部大于零,  $-B$  的特征值全部小于零, 故它们没有公共的特征值, 由命题 0.11 可得  $A - B = O$ , 即  $A = B$ .  $\square$

**例题 0.3** 设  $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$  为  $n$  阶分块对角矩阵, 其中  $A_i$  是  $n_i$  阶矩阵且两两没有公共的特征值. 设  $B$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $AB = BA$ , 求证:  $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ , 其中  $B_i$  也是  $n_i$  阶矩阵.

**证明** 按照  $A$  的分块方式对  $B$  进行分块, 可设  $B = (B_{ij})$ , 其中  $B_{ij}$  是  $n_i \times n_j$  矩阵. 由  $AB = BA$  可知, 对任意的  $i, j$ , 有  $A_i B_{ij} = B_{ij} A_j$ . 因为  $A_i, A_j (i \neq j)$  没有公共的特征值, 故由命题 0.11 可得  $B_{ij} = O (i \neq j)$ , 从而  $B = \text{diag}\{B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{mm}\}$  也是分块对角矩阵.  $\square$

## 命题 0.12

设  $A, B$  分别为  $m, n$  阶矩阵,  $V$  为  $m \times n$  矩阵全体构成的线性空间,  $V$  上的线性变换  $\varphi$  定义为:  $\varphi(X) = AX - XB$ . 求证:  $\varphi$  是线性自同构的充要条件是  $A, B$  没有公共的特征值. 此时, 对任一  $m \times n$  矩阵  $C$ , 矩阵方程  $AX - XB = C$  存在唯一解.

**注** 由证法二不难看出, 这个命题的结论在数域  $\mathbb{F}$  上也成立.

**证明** 证法一: 若  $A, B$  没有公共的特征值, 则由命题 0.11 可知,  $\varphi(X) = AX - XB = 0$  只有零解, 即  $\text{Ker} \varphi = 0$ . 从而  $\varphi$  是  $V$  上的单映射, 从而是线性自同构. 若  $A, B$  有公共的特征值  $\lambda_0$ , 则  $\lambda_0$  也是  $B'$  的特征值. 设  $\alpha, \beta$  为对应的特征向量, 即  $A\alpha = \lambda_0\alpha, B'\beta = \lambda_0\beta$ , 则  $\alpha\beta' \neq 0$  且

$$\varphi(\alpha\beta') = (A\alpha)\beta' - \alpha(B'\beta) = \lambda_0\alpha\beta' - \lambda_0\alpha\beta' = 0,$$

于是  $\text{Ker} \varphi \neq 0$ , 从而  $\varphi$  不是线性自同构.

证法二: 由命题??知,  $\varphi$  的表示矩阵为  $A \otimes I_n - I_m \otimes B'$ , 其特征值为  $\lambda_i - \mu_j (1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$ , 其中  $\lambda_i, \mu_j$  分别为  $A, B$  的特征值. 因此  $\varphi$  是  $V$  上的线性自同构当且仅当其表示矩阵  $A \otimes I_n - I_m \otimes B'$  是可逆矩阵, 这当且仅当  $\varphi$  的特征值  $\lambda_i - \mu_j (1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$  全都非零. 这也当且仅当  $A, B$  在复数域中没有公共的特征值.  $\square$

**例题 0.4** 设  $n$  阶实矩阵  $A$  的所有特征值都是正实数, 证明: 对任一实对称矩阵  $C$ , 存在唯一的实对称矩阵  $B$ , 满足  $A'B + BA = C$ .

**证明** 考虑矩阵方程  $A'X - X(-A) = C$ , 注意到  $A'$  的特征值全部大于零,  $-A$  的特征值全部小于零, 它们没有公共的特征值, 故由命题 0.12 可得上述矩阵方程存在唯一解  $X = B$ . 容易验证  $X = \overline{B}, B'$  也都是上述矩阵方程的解, 故由解的唯一性可知  $B = \overline{B}$  且  $B = B'$ , 即  $B$  为实对称矩阵, 结论得证.  $\square$

## 0.1.4 Cayley-Hamilton 定理的应用: 特征多项式诱导的直和分解

**例题 0.5** 设  $\varphi$  是复线性空间  $V$  上的线性变换, 又有两个复系数多项式:

$$f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad g(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

设  $\sigma = f(\varphi), \tau = g(\varphi)$ , 矩阵  $C$  是  $f(x)$  的友阵, 即

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

若  $g(C)$  是可逆矩阵, 求证:  $\text{Ker} \sigma \tau = \text{Ker} \sigma \oplus \text{Ker} \tau$ .

**笔记**  $(f(x), g(x)) = 1$  之后的证明类似命题??.

**证明** 由命题??可知  $C$  的特征多项式就是  $f(x)$ . 由命题 0.7 可知  $(f(x), g(x)) = 1$ . 由  $(f(x), g(x)) = 1$  可知, 存在多项式  $u(x), v(x)$ , 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

从而

$$u(\varphi)f(\varphi) + v(\varphi)g(\varphi) = I_V. \quad (1)$$

于是对  $\forall \alpha \in \text{Ker} \sigma \tau$ , 由 (1) 式可得

$$\alpha = u(\varphi)f(\varphi)(\alpha) + v(\varphi)g(\varphi)(\alpha).$$

又因为  $\alpha \in \text{Ker} \sigma \tau$ , 所以  $f(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = g(\varphi)f(\varphi)(\alpha) = 0$ . 因此  $u(\varphi)f(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker} g(\varphi), v(\varphi)g(\varphi)(\alpha) \in \text{Ker} f(\varphi)$ . 故有  $\text{Ker} \sigma \tau = \text{Ker} \sigma + \text{Ker} \tau$ . 任取  $\beta \in \text{Ker} \sigma \cap \text{Ker} \tau$ , 则  $\sigma(\beta) = f(\varphi)(\beta) = 0, \tau(\beta) = g(\varphi)(\beta) = 0$ . 由 (1) 式可得

$$\beta = u(\varphi)f(\varphi)(\beta) + v(\varphi)g(\varphi)(\beta) = 0.$$




故  $\text{Ker } \sigma \cap \text{Ker } \tau = 0$ , 因此  $\text{Ker } \sigma\tau = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$ . □

### 命题 0.13

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{K}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 其特征多项式是  $f(\lambda)$  且  $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ , 其中  $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$  是互素的首一多项式. 令  $V_1 = \text{Ker } f_1(\varphi), V_2 = \text{Ker } f_2(\varphi)$ , 求证:

- (1)  $V_1, V_2$  是  $\varphi$ -不变子空间且  $V = V_1 \oplus V_2$ ;
- (2)  $V_1 = \text{Im } f_2(\varphi), V_2 = \text{Im } f_1(\varphi)$ ;
- (3)  $\varphi|_{V_1}$  的特征多项式是  $f_1(\lambda), \varphi|_{V_2}$  的特征多项式是  $f_2(\lambda)$ .

 **笔记** 这个命题是命题??的推广.

**注** (3) 中  $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$  的原因: 由于  $f_i(\lambda)$  与  $g_i(\lambda)$  的根相同, 且  $f_1(\lambda)$  与  $f_2(\lambda)$  没有公共根, 因此不妨设

$$f_1(\lambda) = (\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}, \quad (2)$$

$$g_1(\lambda) = (\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}, \quad g_2(\lambda) = (\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}. \quad (3)$$

其中  $x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_l$  互不相同. 则

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = [(\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}][(\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}],$$

$$g_1(\lambda)g_2(\lambda) = [(\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}][(\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}].$$

又由  $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda)$  可得

$$[(\lambda - x_1)^{i_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i_s}][(\lambda - y_1)^{j_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j_l}] = [(\lambda - x_1)^{i'_1} \cdots (\lambda - x_s)^{i'_s}][(\lambda - y_1)^{j'_1} \cdots (\lambda - y_l)^{j'_l}].$$

比较上式两边的常数项可得

$$x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} y_1^{j_1} \cdots y_l^{j_l} = x_1^{i'_1} \cdots x_s^{i'_s} y_1^{j'_1} \cdots y_l^{j'_l}.$$

又因为  $x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_l$  互不相同, 所以

$$i_1 = i'_1, \cdots, i_s = i'_s, j_1 = j'_1, \cdots, j_l = j'_l.$$

再由(2)和(3)式可知  $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$ .

**证明**

- (1) 对  $\forall \alpha \in V_1$ , 都有  $f_1(\varphi)(\alpha) = 0$ . 从而

$$f_1(\varphi)(\varphi(\alpha)) = (f_1(\varphi)\varphi)(\alpha) = (\varphi f_1(\varphi))(\alpha) = \varphi(f_1(\varphi)(\alpha)) = \varphi(0) = 0.$$

故  $V_1$  是  $\varphi$ -不变子空间, 同理可得  $V_2$  也是  $\varphi$ -不变子空间. 由 **Cayley - Hamilton 定理** 可得  $f(\varphi) = f_1(\varphi)f_2(\varphi) = 0$ , 故由命题??可知  $V = V_1 \oplus V_2$ .

- (2) 由  $f_1(\varphi)f_2(\varphi) = 0$  可得  $\text{Im } f_2(\varphi) \subseteq \text{Ker } f_1(\varphi) = V_1, \text{Im } f_1(\varphi) \subseteq \text{Ker } f_2(\varphi) = V_2$ . 因为  $V = V_1 \oplus V_2$ , 故由维数公式可得

$$\dim \text{Im } f_2(\varphi) = \dim V - \dim \text{Ker } f_2(\varphi) = \dim V - \dim V_2 = \dim V_1,$$

$$\dim \text{Im } f_1(\varphi) = \dim V - \dim \text{Ker } f_1(\varphi) = \dim V - \dim V_1 = \dim V_2,$$

从而  $V_1 = \text{Im } f_2(\varphi), V_2 = \text{Im } f_1(\varphi)$ .

- (3) 设  $\varphi|_{V_i}$  的特征多项式为  $g_i(\lambda) (i = 1, 2)$ , 则由命题??可得

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda). \quad (4)$$

注意到  $f_i(\varphi|_{V_i}) = f_i(\varphi)|_{V_i} = 0$ , 即  $\varphi|_{V_i}$  适合多项式  $f_i(\lambda)$ , 因此  $\varphi|_{V_i}$  的特征值也适合  $f_i(\lambda)$ , 即  $g_i(\lambda)$  的根都是  $f_i(\lambda)$  的根. 因为  $(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = 1$ , 故  $f_1(\lambda)$  与  $f_2(\lambda)$  没有公共根, 从而由  $f_i(\lambda)$  的首一性和(4)式即得  $f_1(\lambda) = g_1(\lambda), f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$ . □

这个命题的结论还可以进一步推广, 例如不限定  $f(\lambda)$  是  $\varphi$  的特征多项式, 而只要求  $\varphi$  适合它 (比如  $\varphi$  的极小



多项式  $m(\lambda)$ , 则由完全相同的讨论可以证明此时对这个命题的 (1) 和 (2) 都成立.

#### 命题 0.14

设  $\varphi$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 若其适合多项式  $f(\lambda)$  且  $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ , 其中  $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$  是互素的首一多项式. 令  $V_1 = \text{Ker } f_1(\varphi), V_2 = \text{Ker } f_2(\varphi)$ , 求证:

- (1)  $V_1, V_2$  是  $\varphi$ -不变子空间且  $V = V_1 \oplus V_2$ ;
- (2)  $V_1 = \text{Im } f_2(\varphi), V_2 = \text{Im } f_1(\varphi)$ ;
- (3)  $\varphi|_{V_1}$  适合多项式  $f_1(\lambda), \varphi|_{V_2}$  适合多项式  $f_2(\lambda)$ .

设  $\varphi$  的极小多项式为  $m(\lambda)$ , 特别地, 如果  $f(\lambda) = m(\lambda)$ , 并且考虑极小多项式的首一互素因式分解

$$m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda), V_1 = \text{Ker } m_1(\varphi), V_2 = \text{Ker } m_2(\varphi),$$

则  $\varphi|_{V_i}$  的极小多项式就是  $m_i(\lambda)$ .



**注** 这个命题是命题 0.13 的推广.

**证明** 由命题 0.13 完全类似的讨论可证. □

### 0.1.5 Cayley-Hamilton 定理的其他应用

**例题 0.6** 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $C$  为  $k \times n$  矩阵, 且对任意的  $\lambda \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{pmatrix}$  均为列满秩阵. 证明: 对任意的  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}, \begin{pmatrix} C \\ C(A - \lambda I_n) \\ C(A - \lambda I_n)^2 \\ \vdots \\ C(A - \lambda I_n)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ 均为列满秩阵.}$$

**证明** 由推论??可知, 对任意的  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 下列线性方程组只有零解:

$$\begin{cases} (A - \lambda I_n)x = 0, \\ Cx = 0. \end{cases} \quad (5)$$

而要证明结论, 根据推论??可知, 只要证明对任意的  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 下列线性方程组只有零解即可:

$$\begin{cases} Cx = 0, \\ C(A - \lambda I_n)x = 0, \\ C(A - \lambda I_n)^2x = 0, \\ \dots\dots\dots \\ C(A - \lambda I_n)^{n-1}x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

任取  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  以及对应线性方程组 (6) 的任一解  $x_0$ , 则由线性方程组 (6) 可得  $Cx_0 = 0, CAx_0 = 0, \dots, CA^{n-1}x_0 = 0$ , 因此对任意次数小于  $n$  的多项式  $g(x)$ , 均有  $Cg(A)x_0 = 0$ . 设

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

为  $A$  的特征多项式, 则由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = O.$$

因此  $y = (A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)x_0$  既满足  $(A - \lambda_1 I_n)y = 0$ , 又满足  $Cy = 0$ , 故由线性方程组 (5) 只有零解可得  $y = (A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)x_0 = 0$ . 不断重复上述论证, 最后可得  $x_0 = 0$ , 结论得证. □

**例题 0.7** 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 分块矩阵  $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$  的秩为  $r$ . 证明: 存在  $n$  阶可逆

矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix},$$

其中  $A_{11}$  是  $r$  阶矩阵,  $B_1$  是  $r \times m$  矩阵.

**注**  $A\alpha_i (1 \leq i \leq r)$  都是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的线性组合的原因: 因为  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是  $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$  列向量的极大无关组, 所以对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , 都存在  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , 使得  $\alpha_i$  是  $A^k B$  的某一列向量.

当  $\alpha_i$  是  $A^k B (0 \leq k \leq n-2)$  的某一列向量时, 则  $A\alpha_i$  一定是  $A^{k+1}B$  的某一列向量, 又由于  $1 \leq k+1 \leq n-1$ , 因此  $A\alpha_i$  仍是  $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$  的某一列向量, 从而  $A\alpha_i$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出.

当  $\alpha_i$  是  $A^{n-1}B$  的某一列向量时, 则  $A\alpha_i$  一定是  $A^n B$  的某一列向量. 由(7)式可知

$$A^n B = -a_1 A^{n-1} B - \dots - a_{n-1} AB - a_n B.$$

而上式右边的每一个列向量都可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出, 于是  $A^n B$  的每一个列向量都可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出. 故  $A\alpha_i$  也可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出.

**证明** 设  $(B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B)$  列向量的极大无关组为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , 由基扩张定理可将其扩张为  $\mathbb{F}^n$  的一组基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . 令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则  $P$  为可逆矩阵. 设  $A$  的特征多项式为  $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ , 则由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = O,$$

从而

$$A^n B = -a_1 A^{n-1} B - \dots - a_{n-1} AB - a_n B. \quad (7)$$

由上式容易验证  $A\alpha_i (1 \leq i \leq r)$  都是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的线性组合, 于是  $AP = P \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ , 即有  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ . 又  $B$  的列向量都是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的线性组合, 于是  $B = P \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ , 即有  $P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ .  $\square$

**例题 0.8** 设  $A$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵, 递归地定义矩阵序列  $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ :

$$A_1 = A, \quad p_k = -\frac{1}{k} \text{tr}(A_k), \quad A_{k+1} = A(A_k + p_k I_n), \quad k = 1, 2, \dots.$$

求证:  $A_{n+1} = O$ .

**证明** 设  $A$  的全体特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 它们的幂和记为  $s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(A^k)$ , 它们的初等对称多项式记为  $\sigma_k$ , 则  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \lambda + (-1)^n \sigma_n.$$

下面用归纳法证明:  $p_k = (-1)^k \sigma_k (1 \leq k \leq n)$ .  $p_1 = -\text{tr}(A) = -\sigma_1$ , 结论成立. 假设小于等于  $k$  时结论成立, 则  $A_{k+1} = A^{k+1} - \sigma_1 A^k + \dots + (-1)^k \sigma_k A$ . 由 Newton 公式可得

$$p_{k+1} = -\frac{1}{k+1} \text{tr}(A_{k+1}) = -\frac{1}{k+1} (s_{k+1} - s_k \sigma_1 + \dots + (-1)^k s_1 \sigma_k) = (-1)^{k+1} \sigma_{k+1},$$

结论得证. 最后, 由 Cayley - Hamilton 定理可得

$$A_{n+1} = A^{n+1} - \sigma_1 A^n + \dots + (-1)^n \sigma_n A = f(A)A = O.$$

$\square$