0.1 非负可测函数的积分

0.1.1 非负可测简单函数积分

定义 0.1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 它在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 c_i 意味着:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{A_i}(x),\quad \bigcup_{i=1}^{p}A_i=\mathbb{R}^n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j).$$

若 $E\in\mathscr{M}$, 则定义 $f(x)$ 在 E 上的**积分**为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i).$$

这里积分符号下的 dx 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的标志.(注意, 我们曾约定 $0\cdot\infty=0$.) ♣

注 此外, 由定义立即得知, $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 只与 $f(x)$ 在 E 上的值有关.

例题 0.1 设在 $\mathbb{R}$ 上定义函数

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{是有理数},\\ 0, & x\ \text{是无理数}.\end{cases}$$

我们有

$$\int_{(0,1)}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

引理 0.1

设 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x), g(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}(x)$ 为 E 上的简单函数, 其中

$$E=\bigcup_{i=1}^{\mathrm{n}}E_i=\bigcup_{i=1}^{m}F_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,\quad F_i\cap F_j=\varnothing.$$

则它们可以表示为统一形式:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}(x),\quad g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{E_i\cap F_j}(x)$$

进而

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i\pm b_j)\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$ ♡

证明 实际上, 对于 E 的两种划分:$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$, 其中,$E_i$ 互不相交,F_j 互不相交. 我们有

$$E_i\cap E=E_i\cap\bigcup_{j=1}^{m}F_j=\bigcup_{j=1}^{m}\left(E_i\cap F_j\right), i=1,2,\cdots,n.$$

$$E\cap F_j=\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)\cap F_j=\bigcup_{i=1}^{m}\left(E_i\cap F_j\right), j=1,2,\cdots,m.$$

显然 $(E_i\cap F_j)(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$ 互不相交. 从而

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)}(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_i\cap F_j}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$

$$g(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{\bigcup_{i=1}^{m}(E_i\cap F_j)}(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i\cap F_j}(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_j\chi_{E_i\cap F_j}(x).$$

□

定理 0.1 (积分的线性性质)

设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数,$f(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$,$g(x)$ 在点集 $B_j(j=1,2,\cdots,q)$ 上取值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$,$E\in\mathscr{M}$, 则有

(i) 若 C 是非负常数, 则

$$\int_E Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\mathrm{d}x;$$

(ii)

$$\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 (i) 可从定义直接得出.

(ii) 由引理 0.1可知 $f(x)+g(x)$ 在 $A_i\cap B_j$(假定非空) 上取值 a_i+b_j, 故有

$$\begin{aligned}\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(E\cap A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_im(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_jm(E\cap B_j)\\&=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 0.2

若 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增可测集列,$f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

♡

证明 设 $f(x)$ 在 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}c_im(E_k\cap A_i)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lim_{k\to\infty}m(E_k\cap A_i)\\&\xlongequal{\text{递增可测集列的测度运算}}\sum_{i=1}^{p}c_im\left(\lim_{k\to\infty}(E_k\cap A_i)\right)=\sum_{i=1}^{p}c_im\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\cap A_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}c_im(E\cap A_i)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

0.1.2 非负可测函数的积分

定义 0.2

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\le f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x: h(x)\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{ 上的非负可测简单函数}\right\}$$

$$=\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x: h(x)\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\},$$

这里的积分可以是 $+\infty$; 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 则称 $f(x)$ 在 E 上是**可积的**, 或称 $f(x)$ 是 E 上的**可积函数**.

♣

定理 0.3

(1) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x)\leqslant g(x)(x\in E)$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 E 上非负可测, 我们有

(i) 若存在 E 上非负可积函数 $F(x)$, 使得

$$f(x)\leqslant F(x),\quad x\in E,$$

则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上有界, 且 $m(E)<+\infty$, 则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(3) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,A 是 E 中可测子集, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 若 $F\subset E$ 且 F 可测, 则

$$\int_F f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(5) (i) $f(x)$ 在 E 上几乎处处等于零的充要条件是 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(ii) 若 $m(E)=0$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

♡

证明

(1) 证法一:任取非负可测简单函数 $h(x)$(在 $\mathbb{R}^n$ 上), 且

$$h(x)\le f(x)\quad(x\in E),$$

则 $h(x)\le g(x)(x\in E)$, 从而由定义可知

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x\leqslant\sup_{\substack{h(x)\le g(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

于是由 $h(x)$ 的任意性可知,$\int_E g(x)\mathrm{d}x$ 是 $\{\int_E h(x)\mathrm{d}x: h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x),\forall x\in E\}$ 的一个上界. 由此即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\le f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证法二:因为对 $\mathbb{R}^n$ 任意的非负可测简单函数 $h(x)$, 且 $h(x)\leqslant f(x)(x\in E)$, 都有

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)(x\in E),$$

所以

$$\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\}$$
$$\subset\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant g(x)\,(x\in E)\right\}.$$

于是

$$\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)\right\}$$
$$\leqslant\sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的非负可测简单函数且}h(x)\leqslant g(x)\,(x\in E)\right\}.$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) (i) 由 $F(x)$ 在 E 上可积及 (1) 可知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E F(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

故 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 由 $f(x)$ 在 E 上有界可知, 存在 $M>0$, 使得

$$f(x)\leqslant M,\quad\forall x\in E.$$

从而由 (1) 可得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E M\mathrm{d}x.$$

由于常值函数也是简单函数, 故

$$\int_E M\mathrm{d}x=M\cdot m(E)<+\infty.$$

因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E M\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $f(x)$ 在 E 上可积.

(3) 设 $h(x)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数. 任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\leqslant f(x), x\in A\}$, 则 $h_0(x)$ 为 A 上的非负可测简单函数, 且 $h_0(x)\leqslant f(x)(x\in A)$. 令

$$h_1(x)=\begin{cases}h_0(x), & x\in A,\\ 0, & x\in E\backslash A,\end{cases}$$

显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负简单可测函数, 且 $h_1(x)\chi_A(x)=h_0(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E$. 设 $h_0(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上的取值为 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 则

$$\int_E h_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i)+0\cdot m(E\backslash A)=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i)=\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\leqslant f(x), x\in A\}\subset\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}.$$

任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\in\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数且 $h_0(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x), x\in E$. 令 $h_1(x)=h_0(x), x\in A$, 显然 $h_1(x)$ 是 A 上的非负可测简单函数, 且 $h_1(x)=h_0(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)=f(x), x\in A$. 由 $h_1(x)=h_0(x), x\in A$ 可知 $h_1(x)\leqslant h_0(x)\leqslant h_1(x), x\in A$. 从而由 (1) 可得

$$\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x=\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\} \supset \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

综上可得

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x), x \in A\} = \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \tag{1}$$

任取 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E$. 令 $h_1(x) = h_0(x)\chi_A(x), x \in E$, 显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 且 $h_1(x) = h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E$. 设 $h_0(x)$ 在点集 $E_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 上的取值为 $c_i(i = 1, 2, \cdots, p)$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{p}(E_i \cap A) = (\bigcup_{i=1}^{p} E_i) \cap A = E \cap A = A, \quad (E_i \cap A) \cap (E_j \cap A) = \varnothing(i \neq j).$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_E h_1(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E h_0(x)\chi_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \sum_{i=1}^{p} c_i(\chi_{E_i}(x) \cdot \chi_A(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_E \left[\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i \cap A}(x) + 0 \cdot \chi_{E \setminus A}(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap A) + 0 \cdot m(E \setminus A) \\
&= \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap A) = \int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此 $\int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \subset \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

任取 $\int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 则 $h_0(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且

$$h_0(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E. \tag{2}$$

令 $h_1(x) = h_0(x), x \in E$, 显然 $h_1(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 且

$$h_1(x)\chi_A(x) = h_0(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x) \cdot \chi_A(x) = f(x)\chi_{A \cap A}(x) = f(x)\chi_A(x), x \in E.$$

又由(2)式可知 $h_0(x) = 0, x \in E \setminus A$. 于是可设 $h_0(x)$ 在点集 $E_i(i = 1, 2, \cdots, p-1)$ 上取值为 $c_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots, p-1)$, 在 E_p 上取值为 0, 则 $E \setminus A \subset E_p$, 从而

$$E_i \subset \bigcup_{i=1}^{p-1} E_i \subset A, i = 1, 2, \cdots, p-1.$$

进而 $h_0(x) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i\chi_{E_i}(x)$. 于是

$$\int_A h_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_A h_0(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p-1} c_i m(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i m(E_i) = \int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_E h_0(x)\,\mathrm{d}x \in \{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}$, 故

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} \supset \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}.$$

综上可得

$$\{\int_A h(x)\,\mathrm{d}x : h(x)\chi_A(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\} = \{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x : h(x) \leqslant f(x)\chi_A(x), x \in E\}. \tag{3}$$

综上所述, 由(3)(1)式, 我们有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{h(x)\le f(x)\\ x\in A}} \left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\} = \sup_{\substack{h(x)\chi_A(x)\le f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}} \left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\} = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 由 (1) 和 (3) 立得.

(5) (i) **必要性**: 由必要性假设可知, 存在零测集 $Z\subset E$, 使得

$$f(x)=0, x\in E\backslash Z.$$

设 $h(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x), x\in E$. 从而

$$h(x)=0, x\in E\backslash Z.$$

于是可设 $h(x)$ 在点集 $E_i(i=1,2,\cdots,p-1)$ 上取值为 $c_i\neq 0(i=1,2,\cdots,p-1)$, 在 E_p 上取值为 0, 即

$$h(x)=\sum_{i=1}^{p-1} c_i\chi_{E_i}(x),\quad E=\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),\quad c_i\neq c_j(i\neq j).$$

从而

$$E\backslash Z\subset E_p,\quad E_i\subset\bigcup_{i=1}^{p-1} E_i\subset Z(i=1,2,\cdots,p-1).$$

又 Z 为零测集, 故 $m(E_i)=0(i=1,2,\cdots,p-1)$. 于是

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p-1} c_i m(E_i)+0\cdot m(E_p)=0.$$

故

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x\right\}=0.$$

充分性: 记

$$E_k=\{x\in E: f(x)>1/k\},$$

由 (1) 和 (4) 可得

$$\frac{1}{k}m(E_k)=\int_{E_k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\le\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x=0,$$

故知 $m(E_k)=0(k=1,2,\cdots)$. 注意到

$$\{x\in E: f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

立即得出 $m(\{x\in E: f(x)>0\})=0$.

(ii) 设 $h(x)$ 为 E 上的非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x), x\in E$. 从而可设 $h(x)$ 在点集 $E_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值为 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 即

$$h(x)=\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x),\quad E=\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),\quad c_i\neq c_j(i\neq j).$$

注意到

$$E_i\subset\bigcup_{i=1}^{p} E_i=E(i=1,2,\cdots,p),$$

又 E 为零测集, 故 $m(E_i)=0(i=1,2,\cdots,p)$. 于是

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i)=0.$$

故

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}x\right\}=0.$$

□

定理 0.4

若 $f(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的.

证明 令 $E_k=\{x\in E: f(x)>k\}$, 则由 $f(x)$ 在 E 上可测可知 E_k 都可测, 且

$$\{x\in E: f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

对于每个 k, 可得

$$km(E_k)\leqslant\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

从而

$$m(E_k)\leqslant\frac{\int_E f(x)\,\mathrm{d}x}{k},\forall k\in\mathbb{N}.$$

令 $k\to\infty$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$. 于是

$$m(\{x\in E: f(x)=+\infty\}=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)$$
$$\xlongequal{\text{命题??}}m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\overset{\text{定理??(2)}}{\leqslant}\varliminf_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=0.$$

故 $m(\{x\in E: f(x)=+\infty\}=0$. □

定理 0.5 (Beppo Levi 非负渐升列积分定理)

设有定义在 E 上的非负可测函数渐升列:

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots,$$

且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), x\in E$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 这个Beppo Levi 非负渐升列积分定理表明, 对于非负可测函数渐升列来说, 极限与积分的次序可以交换, 即

$$\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}\mu.$$

此外, 由简单函数逼近定理可知, 非负可测函数是非负可测简单函数渐升列的极限, 因而使得积分理论中的许多结果可直接从可测简单函数的积分性质得到.

证明 由函数列 $\{f_k(x)\}$ 的渐升性和 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), x\in E$ 可知,$f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 从而积分 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 有定义. 由函数列 $\{f_k(x)\}$ 的渐升性及定理 0.3(2)可知

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots),$$

所以根据单调有界定理可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x$ 有定义, 而且从函数列的渐升性可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\tag{4}$$

现在令 c 满足 $0<c<1$,$h(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的任一非负可测简单函数, 且 $h(x)\leqslant f(x), x\in E$. 记

$$E_k=\{x\in E: f_k(x)\geqslant ch(x)\}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant ch(x)\}=E$. 根据定理 0.2可知

$$\lim_{k\to\infty}c\int_{E_k}h(x)\,\mathrm{d}x=c\int_E h(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是从不等式

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k} f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k} ch(x)\,\mathrm{d}x = c\int_{E_k} h(x)\,\mathrm{d}x$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant c\int_E h(x)\,\mathrm{d}x.$$

在上式中令 $c\to 1$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E h(x)\,\mathrm{d}x.$$

依 $f(x)$ 的积分定义即知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

综上, 由(4)(5)式可知结论成立. □

推论 0.1

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a. e. } x\in E,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 因为 $0\leqslant f(x)\leqslant f_1(x)$, 所以由定理 0.3(2)(i)可知 $f(x)$ 在 E 上可积. 记

$$g_k(x) = f_1(x) - f_k(x) \quad (k=1,2,\cdots),$$

则 $\{g_k(x)\}$ 是非负可积函数渐升列. 从而由Beppo Levi 非负渐升列积分定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E (f_1(x)-f_k(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{命题 0.7}}{=\!=\!=} \int_E (f_1(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

注意到 $f_1(x) = (f_1(x)-f_k(x)) + f_k(x)$, 于是由非负可测函数积分的线性性质我们有

$$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_E (f_1(x)-f_k(x))\,\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

进而

$$\int_E (f_1(x)-f_k(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $k\to\infty$, 可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f_1(x)-f_k(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\left(\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

再结合(6)式可得

$$\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为可积函数的积分值是有限的, 所以从两端消去同值项, 即得所证. □

定理 0.6 (非负可测函数积分的线性性质)

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数,α,β 是非负常数, 则

$$\int_E (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由简单函数逼近定理可知, 存在 $\{\varphi_k(x)\}, \{\psi_k(x)\}$ 是非负可测简单函数渐升列, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = g(x), \quad x \in E,$$

则 $\{\varphi_k(x) + \psi_k(x)\}$ 仍为非负可测简单函数渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha\varphi_k(x) + \beta\psi_k(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in E.$$

从而由简单函数积分的线性性质和Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty} \int_E (\alpha\varphi_k(x) + \beta\psi_k(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x + \beta \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 0.7

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x) = g(x)$ a. e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 这个命题表明: 改变非负可测函数在零测集上的值, 不会影响它的可积性与积分值.

证明 令 $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$,$E_2 = E \setminus E_1$,$m(E_1) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{定理 0.3(3)}} \int_E f(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_E f(x)[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x)]\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{定理 0.3(3)}} \int_{E_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{定理 0.3(5)(ii)}} \int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_2} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{定理 0.3(5)(ii)}} \int_{E_1} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 0.8 (逐项积分定理)

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$, 则 $\{S_m(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数渐升列, 且 $\lim\limits_{m\to\infty} S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. 从而根据 Beppo Levi 非负渐升列积分定理以及非负可测函数积分的线性性质, 可知

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{m\to\infty} S_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_E S_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

□

推论 0.2

设 $E_k \in \mathscr{M}(k=1,2,\cdots), E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$. 若 $f(x)$ 是 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上的非负可测函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 特别地, 当 $f(x) \equiv 1$ 时, 上式就是测度的可数可加性. 从这里还可看到, 通过点集的特征函数, 积分与测度的问题是可以互相转化的.

证明 由逐项积分定理可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

例题 0.2 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $[0,1]$ 中的可测集,$[0,1]$ 中每一点至少属于上述集合中的 k 个 $(k \leqslant n)$, 则在 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中必有一个点集的测度大于或等于 k/n.

证明 因为当 $x \in [0,1]$ 时, 有 $\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \geqslant k$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x \geqslant k.$$

若每一个 $m(E_i)$ 皆小于 k/n, 则

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) < \frac{k}{n} \cdot n = k.$$

这与前式矛盾, 故存在 i_0, 使得 $m(E_{i_0}) \geqslant k/n$. □

定理 0.9 (Fatou 引理)

若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 Fatou 引理常用于判断极限函数的可积性. 例如, 当 E 上的非负可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M \quad (k=1,2,\cdots)$$

时, 我们就得到

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

注 Fatou 引理的不等号是可能成立的, 可见例题 0.3.

证明 令 $g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \geqslant k\}$, 我们有

$$g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x) \quad (k=1,2,\cdots),$$

而且得到

$$\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x), \quad x \in E,$$

从而根据 Beppo Levi 非负渐升列积分定理可知,

$$\begin{aligned}\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例题 0.3 在 $[0,1]$ 上作非负可测函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<\frac{1}{n},\\ 0, & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots).$$

显然, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0(x\in[0,1])$, 因此我们有

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 这个例题说明Fatou 引理的不等号是可能成立的.

定理 0.10

设 $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数,$m(E)<+\infty$. 在 $[0,+\infty)$ 上作如下划分:

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty,$$

其中 $y_{k+1}-y_k<\delta\ (k=0,1,\cdots)$. 若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}\}\quad (k=0,1,\cdots),$$

则 $f(x)$ 在 E 上是可积的当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)<+\infty.$$

此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

♡

笔记 由上述定理可知, 对 $m(E)<+\infty$ 以及 E 上的非负实值可测函数来说, 它的可积性等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m(E_k)<+\infty,$$

其中

$$E_k=\{x\in E: k\leqslant f(x)<k+1\}\quad (k=1,2,\cdots).$$

但若把 E_k 换成 $\{x\in E: f(x)\geqslant k\}$, 则还有定理 0.11.

证明 必要性显然成立, 下证充分性. 因为有不等式

$$y_k m(E_k)\leqslant\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\leqslant y_{k+1}m(E_k),$$

所以由推论 0.2得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}m(E_k)\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)m(E_k)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\\ &\leqslant\delta m(E)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k).\end{aligned}$$

令 $\delta\to 0$, 由条件立即可知结论成立. □

定理 0.11

设 $E \subset \mathbf{R}, m(E) < +\infty, f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.$$

证明 **必要性**: 只需注意到下式即可:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&\xlongequal{\text{定理 1.4}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) < +\infty.
\end{aligned}$$

充分性: 由推论 0.2可得

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{x\in E:k\leqslant f(x)<k+1\}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \xlongequal{\text{定理 1.4}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} m(\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in E : k \leqslant f(x) < k+1\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.
\end{aligned}$$

□

例题 0.4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 的上非负实值可测函数, 则 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} nm(\{x \in [a,b] : f(x) \geqslant n\}) < +\infty.$$

证明 (i) 首先, 若 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则易知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若令

$$E_n = \{x \in [a,b] : n \leqslant f(x) < n+1\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

则 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n = b-a$, 且有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)m(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) + (b-a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 m(E_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) + 2\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) + (b-a).
\end{aligned}$$

这就是说, $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n) < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < +\infty.$$

(ii) 注意到等式

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} km(E_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=k}^{\infty} m(E_n) = \sum_{k=1}^{\infty} km(\{x \in [a,b] : f(x) \geqslant k\}),$$

即得所证. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数. 若对任意的正整数 n, 均有 $m(\{x \in E : f(x) > n\}) > 0$, 则存在非负可测函数 g, 且 g 可积, 使得 fg 不可积.

证明 令 $E_n = \{x \in E : n \leqslant f(x) < n+1\}$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n) > 0$ 可知, 存在 $\{n_k\}$:$m(E_{n_k}) > 0$ $(k \in \mathbf{N})$. 作函数

$$g(x) = \begin{cases} (1/k^2) \cdot m(E_{n_k}), & x \in E_{n_k} (k \in \mathbf{N}), \\ 0, & x \in \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right)^c, \end{cases}$$

易知 $g \in L(E)$, 且有

$$\int_E g(x) f(x) \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{k^2} = +\infty \quad (\text{注意} n_k \geqslant k).$$

□