0.1 Weierstrass 定理

定义 0.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1}$$

为一个复数项级数. 级数 (1) 称为是收敛的, 如果它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 收敛. 如果 $\{S_n\}$ 的极限为 S, 就说级数 (1) 的和为 S, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

定理 0.1 (Cauchy 收敛准则)

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立.

证明 由数列的 Cauchy 收敛准则立得. □

推论 0.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数,$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

定义 0.2

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

命题 0.1

绝对收敛的级数一定收敛. 反过来当然不成立.

证明 由级数收敛的 Cauchy 收敛准则立得. □

定义 0.3

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的一个点集,$f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的一个函数列, 如果对于每一个 $z \in E$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{2}$$

收敛到 $f(z)$, 就说级数 (2) 在 E 上收敛, 其和函数为 f, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$.

定义 0.4

设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是定义在点集 E 上的级数, 我们说 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在

正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

对所有 $z \in E$ 成立, 这里,$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 是级数的部分和.

定理 0.2

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \tag{3}$$

对所有 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 那么按定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

在 E 上成立, 这里,p 是任意自然数. 因而

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leqslant |S_{n+p}(z) - f(z)| + |S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

在 E 上成立, 这就是不等式(3).

反之, 如果不等式(3) 对任意自然数 p 在 E 上成立, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上收敛, 设其和为 $f(z)$. 在不等式

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

中令 $p \to \infty$, 即得

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant \varepsilon.$$

按定义,$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$. □

定理 0.3 (Weierstrass 一致收敛判别法)

设 $f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的函数列, 且在 E 上满足 $|f_n(z)| \leqslant a_n, n = 1, 2, \cdots$. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立. 故由定理 0.2知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛. □

定理 0.4

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上的连续函数, 那么 f 也是 E 上的连续函数.

证明 任取 $a \in E$, 只要证明 f 在 a 处连续就可以了. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对所有 $z \in E$ 成立. 取定 $n_0 > N$, 则因 $S_{n_0}(z) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k(z)$ 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z \in E \cap B(a,\delta)$ 时, 有

$$|S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $z \in E \cap B(z_0,\delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(z) - f(a)| &\leqslant |f(z) - S_{n_0}(z)| + |S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| + |S_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 f 在 a 处连续. □

定理 0.5

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都在 γ 上连续, 那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

注 这个定理实际上证明了在上述的条件下, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 可以沿 γ 逐项积分.

证明 由定理 0.4,f 在 γ 上连续. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon$$

对任意 $z \in \gamma$ 成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 由长大不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon|\gamma|.$$

因而等式(4)成立. □

定义 0.5

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 D 的任意紧子集上一致收敛, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中**内闭一致收敛**.

注 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 D 上内闭一致收敛, 那么它在 D 中的每一点都收敛, 但不一定一致收敛. 例如, 级数 $1 +$

$\sum_{k=1}^{\infty}(z^k - z^{k-1})$, 它的部分和

$$S_{n+1}(z) = 1 + (z-1) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) = z^n,$$

显然它在单位圆盘中是内闭一致收敛的, 但不一致收敛.

命题 0.2

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中一致收敛, 那么它一定内闭一致收敛.

笔记 由此可知, 内闭一致收敛比一致收敛要求低.

证明 证明是显然的. □

定义 0.6

如果 D 的子集 G 满足

(i) $\overline{G} \subset D$;

(ii) $\overline{G}$ 是紧的,

就说 G 相对于 D 是紧的, 记为 $G \subset\subset D$.

引理 0.1

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域,K 是 D 中的紧子集, 且包含在相对于 D 是紧的开集 G 中, 即 $K \subset G \subset\subset D$, 那么对任意 $f \in H(D)$, 均有

$$\sup\{|f^{(k)}(z)| : z \in K\} \leqslant C \sup\{|f(z)| : z \in G\}, \tag{5}$$

这里,k 是任意自然数,C 是与 k, K, G 有关的常数.

笔记 这个引理告诉我们,$f^{(k)}$(k 是任意自然数) 在紧集 K 上的上确界可用 f 在 K 的邻域 G 上的上确界来控制.

证明 由定理**??**,$\rho = d(K, \partial G) > 0$. 所以, 以 K 中任意点 a 为中心、ρ 为半径的圆盘都包含在 G 中. 对圆盘 $B(a,\rho)$ 用 Cauchy 不等式, 得

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in B(a,\rho)\} \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in G\}.$$

对 K 中的 a 取上确界, 即得不等式(5). □

定理 0.6 (Weierstrass 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域, 如果

(i) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$,

那么

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

笔记 从 Weierstrass 定理我们看到, 由全纯函数构成的级数只要在域中内闭一致收敛, 它的和函数就一定是域中的全纯函数, 而且可以逐项求导任意次. 这样的结果在实变函数中当然不成立.

证明 任取 $z_0 \in D$, 只要证明 f 在 z_0 的一个邻域中全纯就行了. 选取 $r > 0$, 使得 $\overline{B(z_0, r)} \subset D$, 由定理 0.4,$f$ 在

$B(z_0,r)$ 中连续. 在 $B(z_0,r)$ 中任取一可求长闭曲线 γ, 由定理 0.5和 Cauchy 积分定理, 得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由 Morera 定理, 即知 f 在 $B(z_0,r)$ 中全纯, 所以 f 在 D 中全纯.

为了证明第二个结论, 任取 D 中的紧子集 K, 记 $\rho = d(K,\partial D) > 0$. 令

$$G = \bigcup\left\{B\left(z,\frac{\rho}{2}\right) : z\in K\right\},$$

则 $K\subset G \subset\subset D$. 由于 $\overline{G}$ 是紧集, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $f(z)$. 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 对 $\overline{G}$ 上所有的 z 成立, 这里,$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$. 于是由引理 0.1, 对任意的自然数 k, 有

$$\sup\{|S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| : z\in K\} \leqslant C\sup\{|S_n(z) - f(z)| : z \in G\} \leqslant C\varepsilon,$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 由于 K 是 D 的任意紧子集, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$ □

例题 0.1 研究函数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$.

解 因为 $n^z = \mathrm{e}^{z\log n}$, 若记 $z = x + \mathrm{i}y$, 则

$$|n^z| = |\mathrm{e}^{x\log n}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\log n}| = n^x.$$

当 $\mathrm{Re}z = x \geqslant x_0 > 1$ 时,$\left|\frac{1}{n^z}\right| \leqslant \frac{1}{n^{x_0}}$, 故由Weierstrass 一致收敛判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ 在 $\mathrm{Re}z > 1$ 中一致收敛, 从而内闭一致收敛. 由 Weierstrass 定理,ζ 是半平面 $\mathrm{Re}z > 1$ 上的全纯函数. □