

0.1 模

定义 0.1 (模)

设 R 是幺环, M 是 Abel 群, 其运算为加法. 若有 $R \times M$ 到 M 的映射: $(a, x) \rightarrow ax (a \in R, x \in M)$, 对 $\forall a, b \in R, x, y \in M$ 满足

- (1) $a(x + y) = ax + ay$;
- (2) $(a + b)x = ax + bx$;
- (3) $(ab)x = a(bx)$;
- (4) $1 \cdot x = x$,

则称 M 为 R 上的一个**左模**, 或称 M 是**左 R 模**, ax 称为 a 与 x 的积, 相应地说, R 与 M 间有一个乘法.

类似地, 可定义**右 R 模**, 即有映射 $(x, a) \rightarrow xa (a \in R, x \in M)$, 对 $\forall a, b \in R, x, y \in M$ 满足

- (1) $(x + y)a = xa + ya$;
- (2) $x(a + b) = xa + xb$;
- (3) $x(ab) = (xa)b$;
- (4) $x \cdot 1 = x$.

若 M 既是左 R 模, 又是右 R 模且满足

$$(ax)b = a(xb), \quad \forall a, b \in R, x \in M,$$

则称 M 是 **R 双模**, 或称 **R 模**.



注 假设 R 交换环且 M 是左或右 R 模, 又对 $a \in R, x \in M$, 令 $xa = ax$, 则易证 M 是一个 R 模, 今后对于交换环 R 上的模都指这种意义下的模.

定理 0.1

数域 P 上的线性空间 V 就是一个 **P 模**.

一般地, 域 F 上的模都称为 F 上的**线性空间**.



证明

□

例题 0.1 设 R 是幺环, R 对加法是 Abel 群, 记为 R_+ . 考虑 $R \times R_+$ 到 R_+ 的映射

$$(r, x) \rightarrow rx, \quad r \in R, x \in R_+$$

及 $R_+ \times R$ 到 R_+ 的映射

$$(x, s) \rightarrow xs, \quad x \in R_+, s \in R,$$

使 R_+ 变成一个 R 模, 因而 R 可看成它自身上的模.

证明

□

例题 0.2 设 V 是数域 P 上的线性空间, \mathcal{A} 是 V 的一个线性变换, 令 $R = P[\lambda]$ 为 P 上的一元多项式环, 则 $R \times V$ 到 V 的映射 $(f(\lambda), x) \rightarrow f(\mathcal{A})x, f(\lambda) \in R (x \in V)$, 使 V 成为一个左 R 模.

证明

□

例题 0.3 设 M 是一个 Abel 群, 运算为加法, 则 $\text{End}M$ 为 M 的自同态环, 并且 $\text{End}M \times M$ 到 M 的映射 $(\eta, x) \rightarrow \eta(x) (\eta \in \text{End}M, x \in M)$, 使 M 成为一个左 $\text{End}M$ 模.

证明

□

定理 0.2

设 M 是一个 R 模, 则

$$(1) \forall a, a_i \in R, x, x_i \in M, 1 \leq i \leq n,$$

$$a \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n ax_i, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) x = \sum_{i=1}^n a_i x.$$

$$(2) \forall a \in R, x \in M,$$

$$a0 = 0a = 0, \quad a(-x) = (-a)x = -ax.$$



证明

(1)

(2)

**定义 0.2**

设 M 是一个 R 模, M 的子集 N 若满足

(1) N 是 M 的子群;

(2) $\forall a \in R, x \in N$ 有 $ax \in N$, 即对 $\forall x \in N$, 有 $Rx \subseteq N$

则称 N 为 M 的一个**子模**. 显然, $\{0\}$ 与 M 都是 M 的子模, 称为**平凡子模**.



例题 0.4 设 V 是数域 P 上的线性空间, V 的子模即 V 的线性子空间. 一般域 F 上的线性空间的子模, 也称为 V 的线性子空间或子空间.

证明



例题 0.5 设 M 是一个 Abel 群, 其运算为加法. 映射

$$(m, x) \rightarrow mx, \quad m \in \mathbb{Z}, x \in M,$$

使 M 变成一个 \mathbb{Z} 模. 并且 M 的子集 N 为子模当且仅当 N 为 M 的子群.

证明

**命题 0.1**

设 R 是一个幺环, R 可看成左 R 模、右 R 模或 R 模. 又设 N 是 R 的子集, 则 N 是左 R 模 (或右 R 模、 R 模) R 的子模当且仅当 N 是 R 的左理想 (或右理想、理想).



证明



例题 0.6 设 V 是数域 P 上的线性空间, \mathcal{A} 是 V 上的一个线性变换. 在**定理 0.2**中, 从 \mathcal{A} 出发定义了 $P[\lambda]$ 模 V , V 的子集 V_1 是 $P[\lambda]$ 子模当且仅当 V_1 是 \mathcal{A} 的不变子空间.

证明

**定理 0.3**

设 M 是一个 R 模, 则

(1) M 中任意多个子模之交仍为子模.

(2) M 中有限多个子模 N_1, N_2, \dots, N_r 之和

$$N_1 + N_2 + \dots + N_r = \{x_1 + x_2 + \dots + x_r \mid x_i \in N_i\}$$

仍为 M 的子模.

- (3) 设 S 为 M 的子集, 则 M 中包含 S 的最小子模是所有包含 S 的子模之交, 称为由 S 生成的子模. 若 $S = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ 为有限集, 则 S 生成的子模为

$$Ry_1 + Ry_2 + \dots + Ry_k = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i y_i \mid a_i \in R \right\}.$$

特别地, 由一个元素 x 生成的子模 Rx 称为循环子模. 若 M 是由一个元素 x 生成, 即 $M = Rx$, 则称 M 为循环模.



注 循环群就是循环 \mathbb{Z} 模. 幺环 R 就是循环 R 模.

证明

- (1)
- (2)
- (3)



定理 0.4

设 N 为 R 模 M 的子模. $\overline{M} = M/N$ 为 M 对 N 的商群, 定义 $R \times \overline{M}$ 到 \overline{M} 的映射

$$(a, x + N) \rightarrow ax + N, \quad \forall x \in M, a \in R,$$

则 \overline{M} 为 R 模, 称为 M 对 N 的商模.



证明 因为 N 为 M 的子模, 所以 N 为 Abel 群 M 的子群, 从而 $N \triangleleft M$. 因此商群 \overline{M} 是良定义的.

先上述映射是单值的, 即 R 中元素 \overline{M} 中元素所作乘法运算的合理性.

设 $x_1, x_2 \in M$ 且 $x_1 + N = x_2 + N$, 于是 $x_1 - x_2 \in N$, 因而, 由 N 为子模有 $a(x_1 - x_2) = ax_1 - ax_2 \in N$, 故 $ax_1 + N = ax_2 + N$, 即上面映射是单值的, 即是良定义的映射.

以下只要验证 R 模的 4 个定义条件. 这些验证不难.



定义 0.3

设 M, M' 为两个 R 模. 如果 M 到 M' 的映射 η 满足 $\forall a \in R, x, y \in M$ 有

- (1) $\eta(x + y) = \eta(x) + \eta(y)$, 即 η 是群同态;
- (2) $\eta(ax) = a\eta(x)$,

则称 η 为 M 到 M' 的一个模同态或 R 同态.

若 η 还是满映射, 则称 η 为满同态, 此时称 M 与 M' 同态.

η 若还是一一对应, 则称 η 为模同构或 R 同构, 此时称 M 与 M' 同构, 记为 $M \cong M'$.



注 模同态的定义知模同态必为群同态.

命题 0.2

设 M, M' 是两个 Abel 群, η 是 M 到 M' 的群同态, 则 η 也是 \mathbb{Z} 模 M 到 \mathbb{Z} 模 M' 的模同态;

若 η 为群同构, 则 η 也是模同构.



证明



定理 0.5

设 N 是 R 模 M 的子模, π 是 M 到商模 $\overline{M} = M/N$ 的自然映射, 即 $\pi(x) = x + N (\forall x \in M)$.

若已知 π 是群同态, 又对 $\forall a \in R, x \in M$ 有 $\pi(ax) = ax + N = a(x + N) = a\pi(x)$, 故 π 也是模同态, 称 π 是 M 到 M/N 上的**自然(模)同态**.



证明

□

命题 0.3

设 N 是 R 模 M 的子模, 记 M 到商模 M/N 的自然映射为 π , 则

(1) 若 M_1 是模 M 的子模且 $M_1 \supseteq N$, 则 $\pi(M_1) = M_1/N$.



证明

(1)

□

例题 0.7 假设 V 是域 F 上的线性空间. V 到自身的模同态 \mathcal{A} , 称为 V 的线性变换. 显然, 当 F 为数域时, \mathcal{A} 就是线性代数中讲的线性空间的线性变换.

证明

□

定理 0.6

设 M 是一个 R 模,

- (1) 设 η 是 M 到 M' 的 R 同态, 则 $\eta(M)$ 是 M' 的子模且 η 是 M 到 $\eta(M)$ 上的同态. 进而若 M_1 是 M 的子模, 则 $\eta(M_1)$ 也是 M' 的子模.
- (2) 设 η 是 R 模 M 到 R 模 M' 的同态, η' 是 R 模 M' 到 R 模 M'' 的同态, 则 $\eta'\eta$ 是 M 到 M'' 的模同态 (图 1).
- (3) R 模之间的同构关系是等价关系.

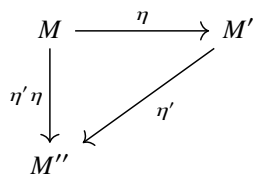


图 1

证明

- (1) 后者注意到 $\eta|_{M_1}$ 是 $M_1 \rightarrow M'$ 上的模同态, 故由前面的结论知 $\eta(M_1)$ 也是 M' 的子模.
- (2)
- (3)

□

定义 0.4 (单模)

无非平凡子模的 R 模 M 称为**单模**.

**定理 0.7**

R 模 M 为单模当且仅当对 $\forall x \in M, x \neq 0$ 有 $M = Rx$.



证明 设 $x \in M, a, b \in R$, 于是 $ax - bx = (a - b)x \in Rx$, 故 Rx 是 M 的子群. 又 $aRx \subseteq Rx$. 因此 Rx 为 M 的子模, 显然 $x \neq 0$, 则 $Rx \neq 0$.

若 M 为单模, $x \in M, x \neq 0$. 于是 Rx 是 M 的非零子模, 因此 $M = Rx$.

反之, 设 $\forall x \in M, x \neq 0$ 有 $M = Rx$. 若 M_1 是 M 的非零子模. 于是有 $x \in M_1, x \neq 0$. 于是 $M = Rx \subseteq M_1 \subseteq M$, 故 $M_1 = M$, 即 M 为单模. □

定义 0.5

一个 R 模 M 到自身的同态称为 M 的 R 自同态, 简称**自同态**. R 模 M 的 R 自同态的集合记为 $\text{End}_R M$. 以 $\text{End} M$ 表示 Abel 群 M 的所有群自同态的集合. ♣

注 由模同态的定义知模同态必为群同态, 故有 $\text{End}_R M \subseteq \text{End} M$. 另一方面, 可以验证在 $\text{End} M$ 中可定义加法与乘法使 $\text{End} M$ 是一个环.

定理 0.8

设 M 是一个 R 模, 则 M 的 R 自同态的集合 $\text{End}_R M$ 是 Abel 群 M 的自同态环 $\text{End} M$ 的子环. $\text{End}_R M$ 称为 R 模 M 的**模自同态环**. ♡

证明 显然, $\text{id}_M \in \text{End}_R M$, 故 $\text{End}_R M \neq \emptyset$, 又若 $\eta_1, \eta_2 \in \text{End}_R M, x, y \in M, a \in R$, 则有

$$(\eta_1 - \eta_2)(x + y) = \eta_1(x + y) - \eta_2(x + y) = (\eta_1 - \eta_2)(x) + (\eta_1 - \eta_2)(y),$$

可知 $\eta_1 - \eta_2 \in \text{End}_R M$, 故 $\text{End}_R M$ 对加法成群. 又由同态性质知 $\eta_1 \eta_2 \in \text{End}_R M$, 由此可知 $\text{End}_R M$ 是 $\text{End} M$ 的子环. □

例题 0.8 设 M 为 Abel 群, 于是 M 为 \mathbb{Z} 模. 则由**命题 0.2**知 $\text{End}_{\mathbb{Z}} M = \text{End} M$.

证明 □

例题 0.9 设 R 是一个幺环, 则 R 作为左 R 模有 $\text{End}_R R = R_r$. □

注 设 M 是一个左 R 模, 一般把 M 的模自同态环记为 ${}_R \text{End} M$. 若 M 是右 R 模, 则将 M 的模自同态环记为 $\text{End}_R M$. 交换幺环上的模, 可自然地看成双模, 故这时没必要区分这两种记号, 统一地以 $\text{End}_R M$ 表示.

证明 $\forall a \in R$, 可定义 a 的右乘变换 a_r 为 $a_r(x) = xa (\forall x \in R)$. 显然, 对 $\forall x, y, a, b \in R$ 有 $a_r(x + y) = a_r(x) + a_r(y)$, $a_r(bx) = bxa = ba_r(x)$, 故 $a_r \in \text{End}_R R$. 令 $R_r = \{a_r | a \in R\}$, 即有 $R_r \subseteq \text{End}_R R$. 现设 $\eta \in \text{End}_R R, \eta(1) = a$, 于是 $\eta(x) = \eta(x \cdot 1) = x\eta(1) = xa = a_r(x)$, 即 $\eta = a_r$. 故 $\eta \in R_r$. 这样就证明了幺环 R 作为左 R 模有 $\text{End}_R R = R_r$. □