0.1 杂题

例题 0.1 设 $Y, x_0, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-nY(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{Y}}\int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{Y}}\int_{0}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{Y}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}.\end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $f \in C^3[0,x], x > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,x)$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \tag{1}$$

若还有 $f'''(0) \neq 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi}{x}$.

笔记 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x)-f(0))\,t + f(0) + f''(\xi)\,t\,(t-x)\,, t \in [0,x]\,.$$

两边同时对 t 在 $[0,x]$ 上积分就能得到(1)式.

证明 设 $K \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(0)+f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{y}{2}[f(0)+f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0)+f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y)-f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由 $g(x) = g(0) = 0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1 \in (0,x)$ 使得 $g'(\xi_1) = 0$. 注意到 $g'(0) = 0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi \in (0,x)$ 使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即 $K = f''(\xi)$, 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0,\xi).$$

于是

$$f'''(\eta)\frac{\xi}{x} = \frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)\frac{\xi}{x} &= \lim_{x\to0^+}\frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}-f''(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{-12\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+6x[f(0)+f(x)]-f''(0)x^3}{x^4}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{-12f(x)+6[f(x)+f(0)]+6xf'(x)-3f''(0)x^2}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{6xf''(x)-6f''(0)x}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'''(0).\end{aligned}$$

因为 $0<\eta<\xi<x$, 所以

$$\lim_{x\to0^+} f'''(\eta)=f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.3 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g\in C^2[0,+\infty)$ 满足

$$g''(x)+f(x)g(x)=0. \tag{2}$$

证明: 存在 $M>0$ 使得

$$|g(x)|\leqslant M,\quad |g'(x)|\leqslant M\sqrt{f(x)},\quad \forall x>0. \tag{3}$$

证明 对 $\forall x>0$, 有 f 在 $[0,x]$ 上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知 $f\in R[0,x],\forall x>0,f$ 在 $[0,+\infty)$ 上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^x f(y)g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\forall x>0 \tag{4}$$

利用 f 递增和第二积分中值定理和 (4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+f(x)\int_\xi^x g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y=0,\xi\in[0,x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2-\frac{1}{2}|g'(0)|^2+\frac{[f(x)]^2}{2}\left[g^2(x)-g^2(\xi)\right]=0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2=|g'(0)|^2-f(x)g^2(x)+f(x)g^2(\xi)\leqslant|g'(0)|^2+f(x)g^2(\xi). \tag{5}$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)}+g'(x)g(x)=0,\forall x>0.$$

即

$$\int_0^x\frac{g''(y)g'(y)}{f(y)}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\forall x>0$$

由 f 递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)}\int_0^\eta g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0,\eta\in[0,x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)}\left[|g'(\eta)|^2-|g'(0)|^2\right]+\frac{1}{2}g^2(x)-\frac{1}{2}g^2(0)=0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)}\left[|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2\right] \leqslant g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \tag{6}$$

由 $g \in C[0, +\infty)$ 知 g 有界, 即存在 $C_1 > 0$, 使得 $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$. 于是由(5)式知

$$|g'(x)|^2 \leqslant |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi) \leqslant |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \tag{7}$$

又因为 f 是递增正函数, 所以 $f(x) \geqslant f(0) > 0, \forall x > 0$. 从而存在 $C_2 > 0$, 使得

$$|g'(0)|^2 \leqslant C_2 f(0) \leqslant f(x), \forall x > 0.$$

于是取 $M = \max\left\{C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}\right\}$, 则由(7)式和(6)式可得, 对 $\forall x > 0$, 有

$$|g(x)|^2 \leqslant M \leqslant M^2,$$
$$|g'(x)|^2 \leqslant C_2 f(x) + C_1 f(x) \leqslant M f(x) \leqslant M^2 f(x).$$

进而

$$|g(x)| \leqslant M, |g'(x)| \leqslant M\sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了(3). □

例题 0.4 设 $f \in C^2[0, 1]$, 证明

(a)

$$|f'(x)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{8}$$

(b)

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{9}$$

(c) 若 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 则

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \tag{10}$$

笔记 对于 $[a, b]$ 的情况, 考虑 $f(a + (b - a)x), x \in [0, 1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |f''(x)|dx,$$

以及

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

当 $f(a)f(b) \geqslant 0$, 我们有

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|dx.$$

证明

(a) 注意到对任何 $\theta \in [0, 1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leqslant |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x f''(y)\mathrm{d}y\right| + |f'(\theta)|$$
$$\leqslant \int_0^1 |f''(y)|\mathrm{d}y + |f'(\theta)|.$$

于是只需证明存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(\theta)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{11}$$

如果 f' 有零点, 则显然存在 $\theta \in [0, 1]$, 使得 $f(\theta) = 0$, 从而满足 (11) 式. 下设 f' 没有零点. 由 f' 的介值性可

知,f' 要么恒正, 要么恒负. 不妨设 f 严格递增. 若 f 没有零点, 不妨设 $f>0$, 则由 Lagrange 中值定理可得

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\min_{[0,1]}|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\geqslant\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|,$$

这也给出了 (11) 式. 若存在 $t\in[0,1]$, 使得 $f(t)=0$. 由 Lagrange 中值定理可知

$$f(x)=f'(\theta)(x-t).$$

从而

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1|x-t|\mathrm{d}x\overset{\text{命题??}}{\geqslant}\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|.$$

这也给出了 (11) 式. 于是我们证明了不等式(8)式.

(b) 直接对(8)式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分得(9)式.

(c) 由 (a) 同理只需证明存在 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)|\leqslant 2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x. \tag{12}$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0)\geqslant 0$, 则当 f 递增, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\cdot\min|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\min|f'\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

当 f 递减, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\alpha)\geqslant(1-x)\min|f'|\implies\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

于是必有 (12) 式成立, 这就给出了(10)式.

□

例题 0.5 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格单调下降, 证明: 若 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

证明 反证, 假设 $\varliminf_{n\to\infty}x_n=c\in(a,+\infty)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k}\to c$. 记

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

则 $f(x_n)$ 的子列极限也收敛到 A, 即 $\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=A$. 由 $x_{n_k}\to c$ 知, 存在 $K\in\mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_k}\in(c-\delta,c+\delta),\forall k>K.$$

其中 $\delta=\min\left\{\frac{c-a}{2},\frac{1}{2}\right\}$. 任取 $x_1,x_2\in(c+\delta,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$, 则由 f 严格递减知

$$f\left(x_{n_k}\right)>f(x_1)>f(x_2)>f(x),\forall x>x_2,\forall k>K.$$

左边令 $k\to+\infty$, 右边令 $x\to+\infty$ 得

$$A=\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)\geqslant f(x_1)>f(x_2)\geqslant\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

显然矛盾!

□

例题 0.6 设 $\{x_n\}\subset(0,1)$ 满足对 $i\neq j$, 有 $x_i\neq x_j$, 讨论函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有 $\operatorname{sgn}(x-x_n)$ 在 $x=x_n$ 处间断, 在 $x\neq x_n$ 处连续.

当 $x\neq x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 时,$f(x)$ 的每一项都连续. 又 $f(x)$ 一致收敛, 故 f 在 $x\neq x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 处都连续.

当 $x=x_k,\forall k\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$f(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}+\sum_{n\neq k}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在 $x=x_k$ 处间断. 故 $f(x)$ 在 $x=x_k, \forall k\in\mathbb{N}$ 处都间断. □

例题 0.7 证明 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 由 Abel 变换得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}, \forall x\geqslant 0$ 成立

$$\begin{aligned}
\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{t=m}^{n}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=m}^{n-1}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t+\frac{n}{n^2+x}s_n\right]\\
&= \sum_{t=m}^{\infty}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t\\
&= \sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t-\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t,
\end{aligned}$$

这里 $s_t=\sum\limits_{i=1}^{t}(-1)^i=(-1)^t\in\{1,-1\}$. 一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}.$$

而由 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}$ 和 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}$ 都收敛知

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}=\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)}=0.$$

于是我们有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}=0, \text{关于} x\in[0,+\infty)\text{一致},$$

这就证明了 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛. □

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续实值右可导函数, 记 $D^+f(x)$ 为 $f(x)$ 的右导函数, 如果 $f(a)=0$, 且 $D^+f(x)\leqslant 0$, 则 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$.

证明 (1) 先假定 $D^+f(x)<0$, 如果结论不成立, 则存在 $x_1\in(a,b)$, 使 $f(x_1)>0$. 记

$$x_0=\inf\{x\mid f(x)>0\}.$$

由 x_0 的定义, 我们有序列 $\{x_n\}$, 使 x_n 单调递减趋于 x_0, 且 $f(x_n)>0$. 从而由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant 0. \tag{13}$$

根据 x_0 的定义可知, 对 $\forall x<x_0$, 都有 $f(x)<f(x_0)$, 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列 $\{x_n'\}$ 单调递增趋于 x_0, 且 $f(x_n')$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n'\right)\leqslant 0. \tag{14}$$

故由(13)(14)知 $f(x_0)=0$. 于是

$$D^+f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\geqslant 0,$$

这与 $D^+f(x_0)<0$ 矛盾, 于是 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$.

(2) 若 $D^+f(x)\leqslant 0$, 对任给的 $\varepsilon>0$ 构造函数

$$f_\varepsilon(x)=f(x)-\varepsilon(x-a),$$

对 $f_\varepsilon(x)$ 有 $f_\varepsilon(a)=0$ 且

$$D^+f_\varepsilon(x)\leqslant -\varepsilon<0.$$

从而由 (1) 得 $f_\varepsilon(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$. 因此 $f(x)\leqslant\varepsilon(x-a)\leqslant\varepsilon(b-a)$, 由 ε 的任意性, 得 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$. □

例题 0.8 设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b)$ 上连续且右可导的函数, 如果 $D^+\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续, 证明:$\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可导,$\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$.

证明 设

$$f(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t-\varphi(x),\quad x\in[a,b).$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且右可导, 并且

$$D^+f(x)=D^+\varphi(x)-D^+\varphi(x)=0.$$

又 $f(a)=0$, 由命题 0.1得 $f(x)\leqslant 0$. 又 $-f(x)$ 满足 $-f(a)=0, D^+[-f(x)]=0$, 同理由命题 0.1得 $-f(x)\leqslant 0$, 故 $f(x)=0$. 于是

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x D^+\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

由 $D^+\varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi'(x)=D^+\varphi(x)$. □

例题 0.9 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{2n}{\pi}\left(\ln 2n+\gamma-\ln\pi\right)+o\left(1\right).$$

证明 见here. □

例题 0.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln(\ln n)}=1.$

证明 证法一:对任意充分大的 n, 由 Frullani(傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{kx}}{x}\mathrm{d}x.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned}
A&\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\ln k=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-kx}}{x}\mathrm{d}x\right)\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\left(e^{-x}-e^{-kx}\right)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^ke^{-kx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+e^{-x}\left(1-1\right)^n-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$\left(1-e^{-x}\right)^n\geqslant 1-ne^{-x}.$$

取 $M_n>1$, 满足 $M_ne^{M_n}=n$. 于是

$$0\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-e^{-x}\right)^n}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-\left(1-ne^{-x}\right)}{M_n}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_n}\int_{M_n}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{n}{M_ne^{M_n}}=1.$$

从而

$$A=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+\int_{M_n}^{+\infty}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O\left(1\right). \tag{15}$$

因为 $M_ne^{M_n}=n$, 所以由命题**??**知

$$M_n=\ln n+o\left(\ln n\right),n\to\infty. \tag{16}$$

于是

$$(1-e^{-x})^{n-1}=e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})}\leqslant e^{-(n-1)e^{-x}}\leqslant e^{-(n-1)e^{-M_n}}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\to 0,\forall x\in[0,M_n].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}\leqslant\frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x}=e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}}\to 0,n\to\infty.$$

即 $\displaystyle\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right),n\to\infty$. 故

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{M_n}\frac{(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=(1+o\left(1\right))\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x,n\to\infty. \tag{17}$$

注意到

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to0}e^x=1,$$

故 $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\leqslant -e^{-M_n}\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\to 0,n\to\infty,$$

故 $\displaystyle\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=O(1)$. 于是再结合(16)式可知

$$\begin{aligned}\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{M_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=O\left(1\right)+\ln M_n=\ln\left(\ln n+o\left(\ln n\right)\right)+O\left(1\right)\\&=\ln\ln n+o\left(1\right)+O\left(1\right)=\ln\ln n+O\left(1\right),n\to\infty.\end{aligned}$$

因此再由(17)式可知

$$\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x=(1+o\left(1\right))\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x=(1+o\left(1\right))\left(\ln\ln n+O\left(1\right)\right)=\ln\ln n+o\left(\ln\ln n\right),n\to\infty.$$

故由(15)可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln k}{\ln\left(\ln n\right)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{A}{\ln\left(\ln n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{M_n}\frac{1-e^{-x}-(1-e^{-x})^n}{x}\mathrm{d}x+O\left(1\right)}{\ln\left(\ln n\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n+o\left(\ln\ln n\right)+O\left(1\right)}{\ln\left(\ln n\right)}=1.\end{aligned}$$

证法二:注意到

$$\begin{aligned}S\triangleq\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\&=\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^n(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

又由二项式定理可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1 t^{k+y-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^{k+y-1}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 t^{y-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^k\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{y-1}\left[(1-t)^{n-1}-1\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+y}\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^1 t^{y-1}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t-1}{t\ln t}\left[1-(1-t)^{n-1}\right]\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=e^{-x}}\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-x})\left[1-(1-e^{-x})^{n-1}\right]}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$
\begin{aligned}
S\triangleq\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\ln k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\int_0^1\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{命题??}}\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由命题??(4) 知

$$e^{x^2-x} \geqslant \frac{1}{1+x} \geqslant e^{-x}, \forall x > 0.$$

于是

$$e^{x^2-x} \cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x}{2}} \cdots e^{\left(\frac{x}{n-1}\right)^2-\frac{x}{n-1}} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

注意到

$$x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \leqslant x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}x < 2x, \forall x \in [0,1],$$

故

$$e^{-x\left(-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)} \geqslant \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant e^{-x\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数 e^{-x} 的介值性知, 存在 $C_n \in \left[-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}, \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right]$, 使得

$$\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} = e^{-C_n x}.$$

于是由 $-2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \leqslant C_n \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$ 知

$$C_n = \ln n + O(1), n \to \infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-e^{-C_n x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{t\to 0} e^t = 1,$$

故 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 在 $[0,1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leqslant 1-e^{-C_n} = 1-e^{-\ln n+O(1)} \to 1, n \to \infty,$$

故 $\int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = O(1)$. 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{C_n}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln(\ln n + O(1)) + O(1) = \ln\ln n + O(1), n \to \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln k}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S}{\ln\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n + O(1)}{\ln\ln n} = 1.$$

□