

## 0.1 微分不等式问题

### 0.1.1 一阶/二阶构造类

**例题 0.1 Gronwall 不等式** 设  $\alpha, \beta, \mu \in C[a, b]$  且  $\beta$  非负, 若还有


$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds, \forall t \in [a, b]. \quad (1)$$

证明:

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

若还有  $\alpha$  递增, 我们有

$$\mu(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

 **笔记** 解微分方程即得构造函数. 参考单中值点问题. 考虑  $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$ , 则

$$F'(t) = \beta(t)\mu(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y' = \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)y \Rightarrow y = ce^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t) = \frac{F(t) - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds}{e^{\int_a^t \beta(s)ds}} = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b].$$

**证明** 令

$$c(t) = F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds, t \in [a, b], \quad (2)$$

这里  $F(t) = \int_a^t \beta(s)\mu(s)ds$ . 由不等式(1)知

$$F'(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + F(t)\beta(t), \forall t \in [a, b]. \quad (3)$$

于是由(2)和(3)可知

$$c'(t) = [F'(t) - \alpha(t)\beta(t) - \beta(t)F(t)]e^{\int_t^a \beta(s)ds} \leq 0,$$

因此  $c(t)$  在  $[a, b]$  上单调递减, 从而

$$c(t) \leq c(a) = 0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a \beta(u)du}ds.$$

再用一次不等式(1), 即得

$$\mu(t) \leq \alpha(t) + F(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds, \forall t \in [a, b].$$

特别的, 当  $\alpha$  递增, 对  $\forall t \in [a, b]$ , 固定  $t$ , 记  $G(s) = \int_s^t \beta(u)du$ , 我们有不等式

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds = \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t -G'(s)e^{G(s)}ds \\ &= \alpha(t) - \alpha(t) \int_a^t e^{G(s)}dG(s) = \alpha(t) + \alpha(t) [e^{G(a)} - 1] = \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}. \end{aligned}$$


□

**例题 0.2** 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  二阶可微且

$$f(0), f'(0) \geq 0, f''(x) \geq f(x), \forall x \geq 0. \quad (4)$$

证明:

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x, \forall x \geq 0. \quad (5)$$

 **笔记** 通过  $f'' - f' = f - f'$  视为一阶构造类来构造函数. (也可以尝试考虑  $f''f' = ff'$ , 但是这样得到的构造函数处理本题可能不太方便) 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

**证明** 令  $h(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$ , 由(4)知

$$h'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x \geq 0.$$

故

$$h(x) \geq h(0) = f'(0) - f(0) \Rightarrow [f'(x) - f(x)]e^x \geq f'(0) - f(0) = h(0).$$

继续视为一阶构造类可得

$$c(x) = \frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x}, c'(x) = \frac{[f'(x) - f(x)]e^x - h(0)}{e^{3x}} \geq 0.$$

于是

$$\frac{f(x) + \frac{1}{2}e^{-x}h(0)}{e^x} \geq f(0) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{f'(0) + f(0)}{2}.$$

继续利用(4)即得

$$f(x) \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2}f(0) + \frac{e^x - e^{-x}}{2}f'(0) \geq f(0) + f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq x.$$

可以分别利用均值不等式和求导进行证明.


□

**例题 0.3** 设  $f \in C^1[0, +\infty) \cap D^2(0, +\infty)$  且满足

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0, f(0) = 1, f'(0) = 0. \quad (6)$$

证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geq 0. \quad (7)$$

 **笔记** 显然如果把式(6)得不等号改为等号, 则微分方程的解为  $3e^{2x} - 2e^{3x}$ . 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(7)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2, 3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

**证明** 把不等式(6)改写为

$$f''(x) - 2f'(x) \geq 3(f'(x) - 2f(x)).$$

考虑  $g_1(x) = f'(x) - 2f(x)$ , 则上式可化为

$$g_1'(x) \geq 3g_1(x).$$

视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数为  $g_2(x) = \frac{g_1(x)}{e^{3x}}$ . 于是有

$$g_2'(x) \geq 0 \Rightarrow g_2(x) \geq g_2(0) = -2 \Rightarrow f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}.$$

进一步视为一阶构造类来构造函数, 解得构造函数:

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + 2e^x, g_3'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}}{e^{2x}} \geq 0,$$

于是


$$g_3(x) \geq g_3(0) = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

我们完成了证明.  $\square$

**例题 0.4** 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可导且满足等式

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), g(x) \geq 0. \quad (8)$$

证明  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界.

 **笔记**  $f + f''$  的出现暗示我们构造  $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ , 这已是频繁出现的事实. 因为等式右边有一个未知函数  $g(x)$ , 所以我们考虑局部的微分方程, 即只考虑等式左边, 以此来得到构造函数. 考虑  $f + f'' = 0 \Leftrightarrow ff' = -f''f'$ , 两边同时积分得到  $\frac{1}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(f')^2 + C$ . 由此得到构造函数  $C(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ .

**证明** 构造  $h(x) = |f(x)|^2 + |f'(x)|^2$ , 则由(8)知

$$h'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = -2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是  $h$  在  $(-\infty, 0]$  递增,  $[0, +\infty)$  递减. 现在我们有

$$h(x) \leq h(0) \Rightarrow |f(x)|^2 \leq h(0),$$

即  $f$  有界.  $\square$

## 0.1.2 双绝对值问题

注意区分齐次微分不等式问题和双绝对值问题.

**例题 0.5** 对某个  $D > 0$ ,

1. 设  $f \in D(\mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$ , 使得


$$|f'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

证明  $f \equiv 0$ .

2. 设  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f^{(j)}(0) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$ , 使得

$$|xf'(x)| \leq D|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

 **笔记** 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程  $y' = dy, y' = -dy$  得构造函数

$$C_1(x) = \frac{y(x)}{e^{dx}}, C_2(x) = y(x)e^{dx}.$$

但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

**证明**

1. 构造  $C_1(x) = \frac{f^2(x)}{e^{2dx}}, C_2(x) = f^2(x)e^{2dx}$ , 我们有

$$C_1'(x) = \frac{2f(x)f'(x) - 2Df^2(x)}{e^{2dx}}, C_2'(x) = [2f(x)f'(x) + 2Df^2(x)]e^{2dx}.$$

由条件(9), 我们知道

$$\pm f'(x)f(x) \leq |f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

于是  $C_1$  递减,  $C_2$  递增, 故

$$\frac{f^2(x)}{e^{2dx}} \leq \frac{f^2(0)}{e^{20}} = 0, \forall x \geq 0, f^2(x)e^{2dx} \leq f^2(0)e^{20} = 0, \forall x \leq 0,$$

于是就得到了  $f \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. 构造  $C(x) = \frac{f^2(x)}{x^{2D}}, x > 0$  (因为只需证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ , 所以我们只考虑一边), 则

$$C'(x) = \frac{2f(x)f'(x)x - 2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$

由(10), 我们有

$$xf'(x)f(x) \leq x|f'(x)||f(x)| \leq D|f(x)|^2,$$

即  $C$  递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有  $f(x) = o(x^m), \forall m \in \mathbb{N} \cap (D, +\infty)$ , 于是


$$C(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{x^{2D}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^m)}{x^{2D}} = 0,$$

故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ . □

**例题 0.6** 设  $f \in D^2[0, +\infty)$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  以及

$$|f''(x)|^2 \leq |f(x)f'(x)|, \forall x \geq 0.$$

证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

 **笔记** 本题的加强版本见命题??.

**证明** 令  $M > 0$ , 考虑

$$g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2], x \geq 0.$$

利用  $1+t^2 \geq \sqrt{t}, \forall t \geq 0$ , 我们有

$$1 + \frac{|f|^2}{|f'|^2} \geq \sqrt{\frac{|f|}{|f'|}} \Rightarrow |f'|^2 + |f|^2 \geq |f|^{\frac{1}{2}} |f'|^{\frac{3}{2}} = |f'| \sqrt{|ff'|}. \quad (11)$$

于是

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'| \sqrt{|ff'|} - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{(11)}{\leq} e^{-Mx} [2|ff'| + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\stackrel{\text{均值不等式}}{\leq} e^{-Mx} [|f|^2 + |f'|^2 + 2|f'|^2 + 2|f|^2 - Mf^2 - M(f')^2] = 0. \end{aligned}$$


只要取充分大的  $M$ , 就有  $g$  递减, 从而  $0 \leq g(x) \leq g(0) = 0$ , 故  $f(x) \equiv 0$ . □

**例题 0.7** 设  $f \in D^2(\mathbb{R})$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

 **笔记** 本题的加强版本见命题??.

**证明** 令  $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2]$ , 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-Mx} [2ff' + 2f'f'' - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2f'(|f| + |f'|) - Mf^2 - M(f')^2] \\ &\leq e^{-Mx} [f^2 + (f')^2 + 2(f')^2 + f^2 + (f')^2 - Mf^2 - M(f')^2] \\ &= e^{-Mx} [(2-M)f^2 + (4-M)(f')^2]. \end{aligned}$$

取充分大的  $M$ , 就有  $g'(x) \leq 0$ . 于是  $g(x) \leq g(0) = 0, \forall x \geq 0$ . 又注意到  $g(x) = e^{-Mx} [|f(x)|^2 + |f'(x)|^2] \geq 0$ , 因此  $g(x) \equiv 0, \forall x \geq 0$ . 故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ . □

**例题 0.8** 设  $f \in D^2(\mathbb{R})$  满足  $f(0) = f'(0) = 0$  且

$$|f''(x)| \leq |f'(x)f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geq 0.$$

**注** 与例题 0.6 不同的是, 本题的不等式左右两边并不齐次, 如果还使用例题 0.6 的方法, 那么在放缩过程中会使得系数不含  $M$  的项的次数大于系数含  $M$  的项, 从而无法直接通过控制  $M$  的取值, 使得  $g'(x) \leq 0$ . 因此本题我们需要使用另外的方法.

这里我们将本题与例题 0.5 类比, 采用同样的方法. 因为只需证明  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ , 所以将原不等式视为 (等式) 函数构造类. 此时需要考虑的微分方程是  $f'' = f f'$ . 我们将其中的  $f$  看作已知函数, 考虑的微分方程转化为  $y'' = f y'$ , 则

$$y'' = f y' \Rightarrow \frac{y''}{y'} = f \Rightarrow \ln y' = \int_0^x f(t) dt + C \Rightarrow y' = C e^{\int_0^x f(t) dt}.$$

于是常数变易, 再开平方得到构造函数  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$ .

**证明** 令  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}$ , 则

$$C'(x) = \frac{2f'(x)f''(x) - 2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}}.$$

又因为

$$f' f'' \leq |f' f''| \leq |f|(f')^2.$$

所以  $C'(x) \leq 0$ , 故  $C(x) \leq C(0) = 0$ . 又注意到  $C(x) = \frac{[f'(x)]^2}{e^{2 \int_0^x |f(t)| dt}} \geq 0$ , 故  $C(x) \equiv 0$ . 于是  $f'(x) = 0, \forall x \geq 0$ . 进而  $f$  就是常值函数, 又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .  $\square$

### 0.1.3 极值原理

**例题 0.9** 设  $f \in C^2[0, 1]$  且  $f(0) = f(1) = 0$ , 若还有

$$f''(x) - g(x)f'(x) = f(x). \quad (12)$$

证明:  $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .

**证明** 如果  $f$  在  $(0, 1)$  取得在  $[0, 1]$  上的正的最大值, 设最大值点为  $c$  且  $f(c) > 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$ , 代入 (12) 式知  $f''(c) = f(c) > 0$ . 又由极值的充分条件, 我们知道  $c$  是严格极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑  $f$  在  $(0, 1)$  取得在  $[0, 1]$  上的负的最小值, 设最小值点为  $c$  且  $f(c) < 0, f'(c) = 0, c \in (0, 1)$ , 代入 (12) 式知  $f''(c) = f(c) < 0$ . 又由极值的充分条件, 我们知道  $c$  是严格极大值点, 这就是一个矛盾!

综上,  $f$  在  $(0, 1)$  上没有正的最大值, 也没有负的最小值. 即


$$0 \leq f(x) \leq 0.$$

$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .  $\square$

**例题 0.10** 设  $f \in C(a, b)$  且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] du \right\} = 0, \forall x \in (a, b),$$

证明:  $f$  是线性函数.

 **笔记** 还可以不妨设  $a = 0, b = 1$ , 否则用  $f(a(1-x) + bx) = f((b-a)x + a)$  代替  $f$  即可. 这样就可以直接不妨设  $f \in C[0, 1]$  且  $f(0) = f(1) = 0$ .

不妨设  $a = 0, b = 1$  的原因: 令  $g(x) \triangleq f((b-a)x + a)$ , 则对  $\forall x \in (0, 1)$ , 记  $y = (b-a)x + a \in [a, b]$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [g(x+u) + g(x-u) - 2g(x)] du \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y + (b-a)u) + f(y - (b-a)u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(b-a)^3 h^3} \left\{ \int_0^{(b-a)h} [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} \\
&= (b-a)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f(y+u) + f(y-u) - 2f(y)] du \right\} = 0.
\end{aligned}$$

因此  $g$  仍然满足题目条件. 若已证  $g \equiv 0$ , 就有

$$f((b-a)x + a) = 0, \forall x \in [0, 1] \iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

故可以不妨设  $a = 0, b = 1$ .

**证明** 不妨设  $f \in C[a, b]$ , 否则内闭的考虑或修改  $f$  在端点的值即可. 用  $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$  代替  $f$  可以不妨设  $f(a) = f(b) = 0$ . 此时只需证  $f \equiv 0$  即可.

若

$$f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x) > 0,$$

则  $x_0 \in (a, b)$ . 取  $\varepsilon > 0$  使得

$$f(x_0) + \varepsilon(x_0 - a)(x_0 - b) > 0.$$

考虑

$$f_\varepsilon(x) \triangleq f(x) + \varepsilon(x - a)(x - b),$$

则存在  $x_1 \in (a, b)$ , 使得

$$f_\varepsilon(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_0) > 0.$$

现在

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1) + f_\varepsilon(x_1) - 2f_\varepsilon(x_1)] du \right\} \\
&\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left\{ \int_0^h [f_\varepsilon(x_1 + u) + f_\varepsilon(x_1 - u) - 2f_\varepsilon(x_1)] du \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h 2\varepsilon u^2 du}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}\varepsilon h^3}{h^3} = \frac{2}{3}\varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此我们有

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq 0 \implies f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

考虑  $-f$ , 令  $-f_\varepsilon(x) = -f(x) - \varepsilon(x - a)(x - b)$ , 同理可得

$$\max_{x \in [a, b]} (-f(x)) \leq 0 \implies -f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \implies f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$$

现在就有

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b],$$

即所求函数  $f$  为线性函数. □