0.1 群

定义 0.1

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群，$x\in S$。我们称 x 是**可逆的**，当且仅当

$$\exists y\in S, x\cdot y=y\cdot x=e$$

其中 y 被称为 x 的**逆元**，记作 x^{-1}。

命题 0.1 (逆元存在必唯一)

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群。假设 $x\in S$ 是可逆的，则其逆元唯一。也就是说，如果 $y,y'\in S$ 都是它的逆元，则 $y=y'$。

证明 假设 y,y' 都是 x 的逆元。则 $y\cdot x=e$，$x\cdot y'=e$. 从而

$$y=y\cdot e=y\cdot x\cdot y'=e\cdot y'=y'.$$

□

定义 0.2 (群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个幺半群, 若 G 中所有元素都是可逆的, 则我们称 $(G,\cdot)$ 是一个**群**. 换言之，若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算，则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**，或 G 对 $\cdot$ 构成群，当这个运算满足结合律，存在单位元，且每个元素具有逆元。再进一步展开来说，同样等价地，若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算，则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**，当

$$\forall x,y,z\in G, x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$$
$$\exists e\in G, \forall x\in G, x\cdot e=e\cdot x=x,$$
$$\forall x\in G, \exists y\in G, x\cdot y=y\cdot x=e.$$

命题 0.2

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，令 $x\in G$，则 $(x^{-1})^{-1}=x$。

证明 方便起见，我们令 $y=x^{-1}$，于是有 $x\cdot y=y\cdot x=e$。我们要证明 $y^{-1}=x$，而这就是 $y\cdot x=x\cdot y=e$，显然成立。这就证明了逆元的逆元是自身. □

命题 0.3

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，令 $x,y\in G$，则 $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$。

证明 我们利用定义来证明。一方面，利用广义结合律，$(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1})=e$；另一方面，同理可以得到另一边的等式 $(y^{-1}\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot y)=e$，这就告诉我们 $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$。 □

定义 0.3

设 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $x\in G$。若 $n\in\mathbb{N}_1$，我们定义 $x^{-n}=(x^{-1})^n$，另外定义 $x^0=e$。

命题 0.4

设 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $x\in G$. 则满足

(1) $x^{-n}=(x^{-1})^n=(x^n)^{-1}, \forall n\in\mathbb{Z}$.

(2) $x^{m+n}=x^m\cdot x^n, \forall m,n\in\mathbb{Z}$.

(3) $x^{mn}=(x^m)^n=(x^n)^m, \forall m,n\in\mathbb{Z}$.

证明

(1) (i) 当 $n=0$ 时, 结论显然成立.

(ii) 当 $n\in\mathbb{N}_1$ 时, 只需证明 $(x^{-1})^n=(x^n)^{-1}$ 即可. 注意到

$$x^n\cdot(x^{-1})^n=\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\Bigg)=e,$$

$$(x^n)^{-1}\cdot x^n=\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\Bigg)=e.$$

故根据逆元的定义可知结论成立.

(iii) 当 n 为负整数时, 令 $m=-n$, 则 $m\in\mathbb{N}_1$. 从而我们只需证 $x^m=(x^{-1})^{-m}=(x^{-m})^{-1}$ 即可. 根据定义 0.3可得

$$x^{-m}\cdot x^m=\left(x^{-1}\right)^m\cdot x^m=\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{m\text{个}}\Bigg)=e,$$

$$x^m\cdot x^{-m}=x^m\cdot\left(x^{-1}\right)^m=\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{m\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m\text{个}}\Bigg)=e.$$

故根据逆元的定义可知 $x^m=(x^{-m})^{-1}$. 又由定义 0.3可知,$\left(x^{-1}\right)^{-m}=\left(\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)^m=x^m$. 故结论成立.

(2) 首先注意到,

(i) 如果 $m,n\in\mathbb{N}_1$，则由推论**??**就立刻得到这个性质。若 m 或 n 是 0，利用单位元的性质也是显然的。从而我们只需证明当 m,n 至少有一个小于 0 时,$x^{m+n}=x^m\cdot x^n$. 故我们可以不失一般性，假设 $m<0$，记 $m'=-m$，则 $x^m=x^{-m'}=(x^{-1})^{m'}$。

(ii) 若 $n<0$，记 $n'=-n$，则同理，$x^n=(x^{-1})^{n'}$，故 $x^{m+n}=(x^{-1})^{m'+n'}$，这里 $m',n'\in\mathbb{N}_1$，于是就有

$$x^{m+n}=(x^{-1})^{m'+n'}=\left(x^{-1}\right)^{m'}\left(x^{-1}\right)^{n'}=x^mx^n,$$

因此得证了.

(iii) 若 $0<n<m'$，则 $x^{m+n}=x^{-(m'-n)}=(x^{-1})^{m'-n}$。而 $x^m\cdot x^n=(x^{-1})^{m'}\cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned}&x^{m+n}=x^m\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &(x^{-1})^{m'-n}=(x^{-1})^{m'}\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}=\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\Bigg)\cdot x^n\end{aligned}$$

对上式两边左乘 $x^{m'-n}$，得到

$$\begin{aligned}x^{m+n}=x^m\cdot x^n\Leftrightarrow\ &\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}=\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\Bigg)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &x^{m'-n}\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}\Bigg)=x^{m'-n}\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\Bigg)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{m'-n\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}\Bigg)=\Bigg(\underbrace{x\cdots x}_{m'-n\text{个}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\Bigg)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &e=\Bigg(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\Bigg)\cdot x^n\Leftrightarrow e=(x^n)^{-1}\cdot x^n\end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(iv) 若 $n \geq m'$, 则 $x^{m+n} = x^{n-m'}$。而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$
\begin{aligned}
& x^{m+n} = x^m \cdot x^n \\
\Leftrightarrow\ & x^{n-m'} = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{x \cdots x}_{n-m'个} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n个}\right)
\end{aligned}
$$

对上式两边右乘 $(x^{-1})^{n-m'}$，得到

$$
\begin{aligned}
& x^{m+n} = x^m \cdot x^n \Leftrightarrow \underbrace{x \cdots x}_{n-m'个} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n个}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m'个}\right) \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-m'} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n个}\right) \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-m'} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\underbrace{x \cdots x}_{n-m'个}\right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m'个}\right) = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{n个}\right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n-m'个}\right) \\
\Leftrightarrow\ & e = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x \cdots x}_{m'个}\right) \Leftrightarrow e = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot x^{m'}
\end{aligned}
$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(3) 先证 $x^{mn} = (x^m)^n$. 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 固定 m, 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n = k$ 时, 结论成立, 即 $x^{mk} = (x^m)^k$. 则由 (2) 的结论可得

$$
x^{m(k+1)} = (x^m)^{k+1} = (x^m)^k \cdot x^m = (x^m)^{k+1}.
$$

故由数学归纳法可知,$x^{mn} = (x^m)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 再由 m 的任意性可知 $x^{mn} = (x^m)^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 同理可证 $x^{nm} = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 由于 $x^{nm} = x^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 因此 $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

□

定义 0.4 (Abel 群)

若 $(G, \cdot)$ 是一个群，我们称它是 **Abel 群**, 或**交换群**，当该运算满足交换律，即

$$
\forall x, y \in G, x \cdot y = y \cdot x
$$

♣

例题 0.1 常见的群

1. 我们称只有一个元素的群为**平凡群**, 记作 e. 其中的二元运算是 $e \cdot e = e$.
2. 常见的加法群有 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ 等. 这些加法群分别称为整数加群、有理数加群、实数加群、复数加群.
3. 常见的乘法群有 $(\mathbb{Q}^\times, +)$, $(\mathbb{R}^\times, +)$, $(\mathbb{C}^\times, +)$ 等, 其中 $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \backslash 0$, 类似地定义其余两个集合. 这些乘法群分别称为有理数乘群、实数乘群、复数称群.
4. 在向量空间中,n 维欧式空间对加法构成群即 $(\mathbb{R}^n, +)$. 类似地 $(\mathbb{C}^n, +)$, $(\mathbb{Q}^n, +)$, $(\mathbb{Z}^n, +)$ 也是群. 对于这些群, 单位元都是零向量, 加法逆元则是对每个坐标取相反数, 如 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的加法逆元是 $(-x_1, \cdots, -x_n)$.
5. 所有的 $m \times n$ 矩阵也对加法构成群, 单位元都是零矩阵, 加法逆元则是对每一项取相反数. 对于 $n \times n$ 的实矩阵加法群, 我们记作 $(M(n, \mathbb{R}), +)$, 类似地我们将 $n \times n$ 的复矩阵加法群记作 $(M(n, \mathbb{C}), +)$.

证明 证明都是显然的. □

引理 0.1

令 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群，令 G 是其所有可逆元素构成的子集，则 $(G, \cdot)$ 是个群。

♡

注 我们称呼幺半群中的可逆元素为“**单位**”，因此 G 是由所有该运算下的单位构成的集合（在这里甚至是群）。

证明 首先结合律完全继承自 S，不需要证明。而单位元是可逆的，因此 $e \in G$。剩下要证明 G 中每个元素都有（G 中的）逆元，而这几乎是显然的。假设 $x \in G$，则 x 是可逆元素，我们取 $y \in S$，使得 $x \cdot y = y \cdot x = e$（这里要注意我们只能首先保证 y 在全集 S 中）。接下来我们要证明 $y \in G$，即 y 可逆，而这是显然的，因为 x 正是它的逆。所以 $y \in G$。这样，就证明了 $(G, \cdot)$ 是个群. □

定义 0.5 (子群)

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，且 $H \subset G$。我们称 H 是 G 的**子群**，记作 $H < G$，当其包含了单位元，在乘法和逆运算下都封闭，即

$$e \in H,$$
$$\forall x, y \in H, x \cdot y \in H,$$
$$\forall x \in H, x^{-1} \in H.$$

♣

命题 0.5 (子群也是群)

令 $(G, \cdot)$ 是一个群。若 H 是 G 的子群，则 $(H, \cdot)$ 也是个群。

♠

证明 就二元运算的良定义性而言，子群第一个条件（封闭性）就满足了，这使得我们后面的谈论是有意义的。首先，结合律肯定满足，因为它是个子集。其次，根据子群的第二个条件，$e \in H$ 是显然的。再次，我们要证明每个 H 中元素有 H 中的逆元，而这是子群的第三个条件。 □

命题 0.6 (子群的等价条件)

$(H, \cdot)$ 是子群等价于

$$e \in H,$$
$$\forall x, y \in H, x \cdot y^{-1} \in H.$$

♠

证明 假设 $(H, \cdot)$ 是子群。令 $x, y \in H$，利用逆元封闭性得到 $y^{-1} \in H$，再利用乘法封闭性得到 $x \cdot y^{-1} \in H$。

反过来，假设上述条件成立. 令 $x \in H$，则 $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$，这证明了逆元封闭性。接下来，令 $x, y \in H$，则利用逆元封闭性，$y^{-1} \in H$，故 $x \cdot (y^{-1})^{-1} = x \cdot y \in H$。这就证明了乘法封闭性。

综上，这的确是子群的等价条件。 □

定义 0.6 (一般线性群)

我们对于那些 $n * n$ 可逆实矩阵构成的乘法群，称为**（实数上的）n 阶一般线性群**，记作 $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$。由于一个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零，因此

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}.$$

♣

定义 0.7 (特殊线性群)

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n * n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的)n 阶特殊线性群**，记作 $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$，即

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

♣

命题 0.7

$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ 是个群。

♠

证明 根据定义，$SL(n, \mathbb{R})$ 首先是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子集，那么只要证明它是个子群即可。首先，乘法单位元单位矩

阵的行列式恰好是 1（这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因），这就证明了 $I \in SL(n,\mathbb{R})$（$I = I_n$ 指的是 n 阶单位矩阵）。另外，我们要证明 $SL(n,\mathbb{R})$ 在乘法下封闭。令 A, B 是两个行列式为 1 的 $n*n$ 实矩阵。由于行列式满足 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$，因此 AB 的行列式也是 1，也就在特殊线性群中。这就证明了特殊线性群确实是个群。至于逆元封闭性，我们利用 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$。假设 $\det(A) = 1$，则 $\det(A^{-1}) = 1$，于是 $A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$。综上，特殊线性群确实是个群。 □

定义 0.8 (群同态)

令 $(G,\cdot),(G',*)$ 是两个群，且 $f : G \to G'$ 是一个映射。我们称 f 是一个**群同态**，当其保持了乘法运算，即

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

♣

命题 0.8

若 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个群同态，则 $f(e) = e'$，$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$。

♠

笔记 也就是说，f 不仅把乘积映到乘积，而且把单位元映到单位元，把逆元映到逆元。在这个意义下，实际上 f 将所有群 G 的“信息”都保持到了 G' 上，包括单位元，乘法和逆元。至于结合律（或者更基础的封闭性），显然两边本来就有，就不必再提。

证明 首先，因为 $e \cdot e = e$，所以利用同态的性质，$f(e) = f(e \cdot e) = f(e) * f(e)$。这时，两边同时左乘 $f(e)^{-1}$，就可以各约掉一个 $f(e)$，得到 $e' = f(e)$，这就证明了 f 把单位元映到单位元。

另一方面，令 $x \in G$，则 $e' = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$。同理 $e' = f(x^{-1}) * f(x)$。于是由定义，$f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元，即 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$。这就证明了这个命题。 □

命题 0.9

$\det : GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^\times,\cdot)$ 是一个乘法群同态。

♠

证明 证明是显然的. □

定义 0.9 (群同态的核与像)

令 $f : (G,\cdot) \to (G',*)$ 是一个群同态，则我们定义 f 的**核与像**，记作 $\ker(f)$ 与 $\mathrm{im}(f)$，分别为

$$\ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\} \subset G,$$

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in G' : \exists x \in G, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in G\} \subset G'.$$

♣

笔记 群同态的核与像示意图如下:

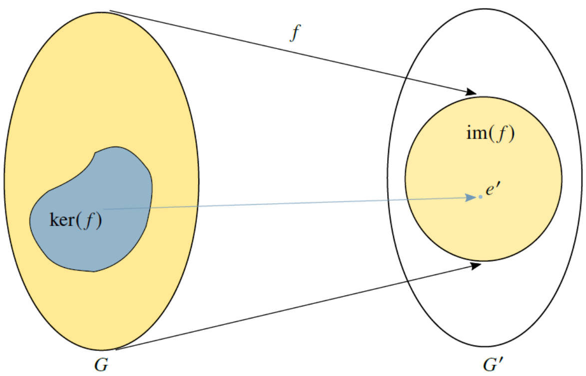

图 1: 群同态的核与像示意图

命题 0.10 令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态，则核是定义域的子群，像是陪域的子群，即

$$\ker(f)<G,\quad \mathrm{im}(f)<G'.$$

证明 先证明第一个子群关系。我们利用 $f(e)=e'$ 来说明 $e\in\ker(f)$。接着，设 $x,y\in\ker(f)$，只需证明 $xy^{-1}\in\ker(f)$。利用同态的性质，$f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}=e'e'^{-1}=e'$，这就证明了 $xy^{-1}\in\ker(f)$。第一个子群关系得证。

再证明第二个子群关系。同样由于 $f(e)=e'$，我们有 $e'\in\mathrm{im}(f)$。接着，设 $y=f(x),y'=f(x')\in\mathrm{im}(f)$，只需证明 $yy'^{-1}\in\mathrm{im}(f)$。同样利用同态的性质，$yy'^{-1}=f(x)f(x')^{-1}=f(xx'^{-1})\in\mathrm{im}(f)$。第二个子群关系也得证。这样我们就证完了整个命题。 □

例题 0.2 证明:$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)<(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$.

证明 由命题 0.9可知,det : $GL(n,\mathbb{R})\to(\mathbb{R}^\times,\cdot)$ 是一个乘法群同态. 注意到 $\ker(det)=(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, 因此由命题 0.10可知,$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)=\ker(det)<(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$. □

定义 0.10 (满同态与单同态) 令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态，我们称 f 是一个**满同态**当 f 是满射，称 f 是一个**单同态**当 f 是单射。

命题 0.11 令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态，则 f 是一个单同态当且仅当 $\ker(f)=\{e\}$。也就是说，一个群同态是单的当且仅当核是平凡的。

证明 假设 f 是单的，那么因为 $f(e)=e'$，因此若 $f(x)=e'$，则利用单射的性质我们一定有 $x=e$，这就证明了核是平凡的。(这个方向是显然的)

另一个方向不那么显然。我们假设 $\ker(f)=\{e'\}$。假设 $x,x'\in G$，使得 $f(x)=f(x')$，我们只须证明 $x=x'$。在这里，我们同时右乘 $f(x')^{-1}$，得到 $f(x)f(x'^{-1})=f(xx'^{-1})=e'$。而因为核是平凡的，所以必须有 $xx'^{-1}=e$。接下来同时右乘 x'，我们就得到 $x=x'$。这就证明了这个命题。 □

笔记 平凡群, 满同态和单同态示意图如下:

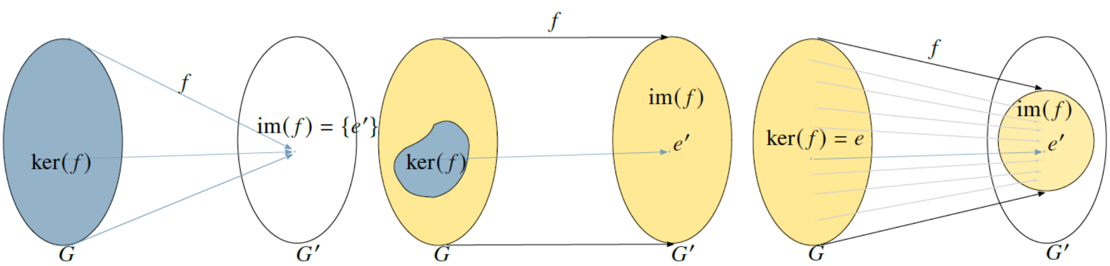

图 2: 平凡群, 满同态和单同态示意图

定义 0.11 (群同构) 令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个映射，我们称 f 是一个**群同构**，当 f 既是一个双射，又是一个群同态。简单来说，同构就是双射的同态。

命题 0.12 (群同构的逆也是群同构) 若 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同构，则 f^{-1} 也是群同构。

证明 因为 f^{-1} 也是双射，所以我们只须证明 f^{-1} 是群同态。令 $x',y'\in G'$，设 $x'=f(x),y'=f(y)$。则 $x'*y'=f(x\cdot y)$,$x=f^{-1}(x'),y=f^{-1}(y')$, 故 $f^{-1}(x'*y')=x\cdot y=f^{-1}(x')\cdot f^{-1}(y')$。这就完成了证明。 □

定义 0.12 (两个群的直积)

令 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 是两个群, 我们记 $(G\times G',*)$ 为 $(G,\cdot_1)$ 和 $(G',\cdot_2)$ 的**直积**. 满足对于 $(x,y),(x',y')\in G\times G'$, 有

$$(x,y)*(x',y')=(x\cdot_1 x',y\cdot_2 y').$$

♣

命题 0.13 (两个群的直积仍是群)

若 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 是两个群, 则它们的直积 $(G\times G',*)$ 还是一个群。

♠

证明 封闭性:因为 G 在 $\cdot_1$ 下封闭,G' 在 $\cdot_2$ 下封闭,而 $G\times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的,则 $G\times G'$ 在 $*=(\cdot_1,\cdot_2)$ 下也是封闭的。

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律。

单位元:设 e,e' 分别是 $(G,\cdot_1),(G',\cdot_2)$ 的单位元,则不难想象,(e,e') 是直积的单位元。对于任意 $(x,y)\in G\times G'$, 我们有 $(x,y)*(e,e')=(x\cdot_1 e,y\cdot_2 e')=(x,y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 (e,e') 是直积的单位元。

逆元: 对于任意 $(x,y)\in G\times G'$, 设 x^{-1},y^{-1} 分别是 x,y 的逆元, 则同样不难想象, (x^{-1},y^{-1}) 是 (x,y) 的逆元。

□

定义 0.13 (一族群的直积)

令 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 其中 I 是一个指标集。我们记它们的**直积**为 $(\prod_{i\in I}G_i,*)$. 满足对于 $(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}G_i$, 有

$$(x_i)_{i\in I}*(y_i)_{i\in I}=(x_i\cdot_i y_i)_{i\in I}.$$

♣

命题 0.14 (一族群的直积仍是群)

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 则它们的直积 $(\prod_{i\in I}G_i,*)$ 还是一个群。

♠

笔记 最经典的例子就是通过 n 个实数加群 $(\mathbb{R},+)$ 直积得到的 $(\mathbb{R}^n,+)$。

证明 证明与命题 0.13同理. 故我们只列出一些重点。封闭性与结合律是显然的。单位元是 $(e_i)_{i\in I}$, 而 $(x_i)_{i\in I}$ 的逆元是 $(x_i^{-1})_{i\in I}$。 □

定义 0.14 (投影映射)

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, $j\in I$ 是任意指标, 我们定义映射到指标 j 的**投影映射**为

$$p_j:\prod_{i\in I}G_i\to G_j.$$

对于 $(x_i)_{i\in I}$, 我们称 $p_j((x_i)_{i\in I})=x_j$ 为 $(x_i)_{i\in I}$ 的**投影**.

♣

命题 0.15 (投影映射是群同态)

若 $(G_i,\cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, $j\in I$ 是任意指标, 则投影映射 $p_j:\prod_{i\in I}G_i\to G_j$ 是个群同态。

♠

证明 令 $(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}G_i$, 则

$$p_j((x_i)_{i\in I})=x_j,\quad p_j((y_i)_{i\in I})=y_j$$

$$p_j((x_i)_{i\in I}*(y_i)_{i\in I})=p_j((x_i\cdot_i y_i)_{i\in I})=x_j\cdot_j y_j=p_j((x_i)_{i\in I})\cdot_j p_j((y_i)_{i\in I}).$$

□