0.1 群

定义 0.1

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群,$x\in S$. 我们称 x 是**可逆的**, 当且仅当

$$\exists y\in S, x\cdot y=y\cdot x=e$$

其中 y 被称为 x 的**逆元**, 记作 x^{-1}.

命题 0.1 (逆元存在必唯一)

令 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群. 假设 $x\in S$ 是可逆的, 则其逆元唯一. 也就是说, 如果 $y,y'\in S$ 都是它的逆元, 则 $y=y'$.

证明 假设 y,y' 都是 x 的逆元. 则 $y\cdot x=e$,$x\cdot y'=e$. 从而

$$y=y\cdot e=y\cdot x\cdot y'=e\cdot y'=y'.$$

□

定义 0.2 (群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个幺半群, 若 G 中所有元素都是可逆的, 则我们称 $(G,\cdot)$ 是一个**群**. 换言之, 若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**, 或 G 对 $\cdot$ 构成群, 当这个运算满足结合律, 存在单位元, 且每个元素具有逆元. 再进一步展开来说, 同样等价地, 若 $\cdot$ 是 G 上的一个二元运算, 则我们称 $(G,\cdot)$ 是个**群**, 当

$$\forall x,y,z\in G, x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$$
$$\exists e\in G, \forall x\in G, x\cdot e=e\cdot x=x,$$
$$\forall x\in G, \exists y\in G, x\cdot y=y\cdot x=e.$$

命题 0.2

令 $(G,\cdot)$ 是一个群, 令 $x\in G$, 则 $(x^{-1})^{-1}=x$.

证明 方便起见, 我们令 $y=x^{-1}$, 于是有 $x\cdot y=y\cdot x=e$. 我们要证明 $y^{-1}=x$, 而这就是 $y\cdot x=x\cdot y=e$, 显然成立. 这就证明了逆元的逆元是自身. □

命题 0.3

令 $(G,\cdot)$ 是一个群, 令 $x,y\in G$, 则 $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$.

证明 我们利用定义来证明. 一方面, 利用广义结合律,$(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1})=e$; 另一方面, 同理可以得到另一边的等式 $(y^{-1}\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot y)=e$, 这就告诉我们 $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$. □

定义 0.3

设 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $x\in G$. 若 $n\in\mathbb{N}_1$, 我们定义 $x^{-n}=(x^{-1})^n$, 另外定义 $x^0=e$.

命题 0.4

设 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $x\in G$. 则满足

(1) $x^{-n}=(x^{-1})^n=(x^n)^{-1}$,$\forall n\in\mathbb{Z}$.
(2) $x^{m+n}=x^m\cdot x^n$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.
(3) $x^{mn}=(x^m)^n=(x^n)^m$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

证明

(1) (i) 当 $n=0$ 时, 结论显然成立.

(ii) 当 $n\in\mathbb{N}_1$ 时, 只需证明 $(x^{-1})^n=(x^n)^{-1}$ 即可. 注意到

$$x^n\cdot(x^{-1})^n=\left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\right)=e,$$

$$(x^n)^{-1}\cdot x^n=\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right)=e.$$

故根据逆元的定义可知结论成立.

(iii) 当 n 为负整数时, 令 $m=-n$, 则 $m\in\mathbb{N}_1$. 从而我们只需证 $x^m=(x^{-1})^{-m}=(x^{-m})^{-1}$ 即可. 根据定义 0.3可得

$$x^{-m}\cdot x^m=\left(x^{-1}\right)^m\cdot x^m=\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x\cdots x}_{m\text{个}}\right)=e,$$

$$x^m\cdot x^{-m}=x^m\cdot\left(x^{-1}\right)^m=\left(\underbrace{x\cdots x}_{m\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m\text{个}}\right)=e.$$

故根据逆元的定义可知 $x^m=(x^{-m})^{-1}$. 又由定义 0.3可知,$\left(x^{-1}\right)^{-m}=\left(\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)^m=x^m$. 故结论成立.

(2) 首先注意到,

(i) 如果 $m,n\in\mathbb{N}_1$, 则由推论**??**就立刻得到这个性质. 若 m 或 n 是 0, 利用单位元的性质也是显然的. 从而我们只需证明当 m,n 至少有一个小于 0 时,$x^{m+n}=x^m\cdot x^n$. 故我们可以不失一般性, 假设 $m<0$, 记 $m'=-m$, 则 $x^m=x^{-m'}=(x^{-1})^{m'}$.

(ii) 若 $n<0$, 记 $n'=-n$, 则同理,$x^n=(x^{-1})^{n'}$, 故 $x^{m+n}=(x^{-1})^{m'+n'}$, 这里 $m',n'\in\mathbb{N}_1$, 于是就有

$$x^{m+n}=(x^{-1})^{m'+n'}=\left(x^{-1}\right)^{m'}\left(x^{-1}\right)^{n'}=x^mx^n,$$

因此得证了.

(iii) 若 $0<n<m'$, 则 $x^{m+n}=x^{-(m'-n)}=(x^{-1})^{m'-n}$. 而 $x^m\cdot x^n=(x^{-1})^{m'}\cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned}&x^{m+n}=x^m\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &(x^{-1})^{m'-n}=(x^{-1})^{m'}\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}=\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\right)\cdot x^n\end{aligned}$$

对上式两边左乘 $x^{m'-n}$, 得到

$$\begin{aligned}&x^{m+n}=x^m\cdot x^n\Leftrightarrow\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}=\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\right)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &x^{m'-n}\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}\right)=x^{m'-n}\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\right)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &\left(\underbrace{x\cdots x}_{m'-n\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'-n\text{个}}\right)=\left(\underbrace{x\cdots x}_{m'-n\text{个}}\right)\cdot\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{m'\text{个}}\right)\cdot x^n\\ \Leftrightarrow\ &e=\left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n\text{个}}\right)\cdot x^n\Leftrightarrow e=(x^n)^{-1}\cdot x^n\end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(iv) 若 $n \geq m'$, 则 $x^{m+n} = x^{n-m'}$. 而 $x^m \cdot x^n = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n$. 于是

$$\begin{aligned} & x^{m+n} = x^m \cdot x^n \\ \Leftrightarrow\ & x^{n-m'} = (x^{-1})^{m'} \cdot x^n \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{x\cdots x}_{n-m'\text{个}} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right) \end{aligned}$$

对上式两边右乘 $(x^{-1})^{n-m'}$, 得到

$$\begin{aligned} x^{m+n} = x^m \cdot x^n \Leftrightarrow\ & \underbrace{x\cdots x}_{n-m'\text{个}} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(\underbrace{x\cdots x}_{n-m'\text{个}}\right) \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-m'} = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right) \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-m'} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\underbrace{x\cdots x}_{n-m'\text{个}}\right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n-m'\text{个}}\right) = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{个}}\right) \cdot \left(\underbrace{x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n-m'\text{个}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & e = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot \left(\underbrace{x\cdots x}_{m'\text{个}}\right) \Leftrightarrow e = \left(x^{-1}\right)^{m'} \cdot x^{m'} \end{aligned}$$

上式最后一个等式显然成立, 故此时结论成立.

(3) 先证 $x^{mn} = (x^m)^n$. 对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, 固定 m, 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n = k$ 时, 结论成立, 即 $x^{mk} = (x^m)^k$. 则由 (2) 的结论可得

$$x^{m(k+1)} = (x^m)^{k+1} = (x^m)^k \cdot x^m = (x^m)^{k+1}.$$

故由数学归纳法可知,$x^{mn} = (x^m)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. 再由 m 的任意性可知 $x^{mn} = (x^m)^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 同理可证 $x^{nm} = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 由于 $x^{nm} = x^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. 因此 $x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

□

定义 0.4 (Abel 群)

若 $(G, \cdot)$ 是一个群, 我们称它是 **Abel 群**, 或**交换群**, 当该运算满足交换律, 即

$$\forall x, y \in G, x \cdot y = y \cdot x$$

♣

例题 0.1 常见的群

1. 我们称只有一个元素的群为**平凡群**, 记作 e. 其中的二元运算是 $e \cdot e = e$.
2. 常见的加法群有 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ 等. 这些加法群分别称为整数加群、有理数加群、实数加群、复数加群.
3. 常见的乘法群有 $(\mathbb{Q}^\times, +)$, $(\mathbb{R}^\times, +)$, $(\mathbb{C}^\times, +)$ 等, 其中 $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \backslash 0$, 类似地定义其余两个集合. 这些乘法群分别称为有理数乘群、实数乘群、复数称群.
4. 在向量空间中,n 维欧式空间对加法构成群即 $(\mathbb{R}^n, +)$. 类似地 $(\mathbb{C}^n, +)$, $(\mathbb{Q}^n, +)$, $(\mathbb{Z}^n, +)$ 也是群. 对于这些群, 单位元都是零向量, 加法逆元则是对每个坐标取相反数, 如 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的加法逆元是 $(-x_1, \cdots, -x_n)$.
5. 所有的 $m \times n$ 矩阵也对加法构成群, 单位元都是零矩阵, 加法逆元则是对每一项取相反数. 对于 $n \times n$ 的实矩阵加法群, 我们记作 $(M(n, \mathbb{R}), +)$, 类似地我们将 $n \times n$ 的复矩阵加法群记作 $(M(n, \mathbb{C}), +)$.

证明 证明都是显然的. □

引理 0.1

令 $(S, \cdot)$ 是一个幺半群, 令 G 是其所有可逆元素构成的子集, 则 $(G, \cdot)$ 是个群.

♡

注 我们称呼幺半群中的可逆元素为“**单位**”，因此 G 是由所有该运算下的单位构成的集合（在这里甚至是群）.

证明 首先结合律完全继承自 S, 不需要证明. 而单位元是可逆的, 因此 $e\in G$. 剩下要证明 G 中每个元素都有（G 中的）逆元, 而这几乎是显然的. 假设 $x\in G$, 则 x 是可逆元素, 我们取 $y\in S$, 使得 $x\cdot y=y\cdot x=e$（这里要注意我们只能首先保证 y 在全集 S 中）. 接下来我们要证明 $y\in G$, 即 y 可逆, 而这是显然的, 因为 x 正是它的逆. 所以 $y\in G$. 这样, 就证明了 $(G,\cdot)$ 是个群. □

定义 0.5 (子群)

设 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $H\subset G$. 我们称 H 是 G 的**子群**, 记作 $H<G$, 当其包含了单位元, 在乘法和逆运算下都封闭, 即

$$e\in H,$$

$$\forall x,y\in H, x\cdot y\in H,$$

$$\forall x\in H, x^{-1}\in H.$$

♣

命题 0.5 (子群也是群)

令 $(G,\cdot)$ 是一个群. 若 H 是 G 的子群, 则 $(H,\cdot)$ 也是个群.

♠

证明 就二元运算的良定义性而言, 子群第一个条件（封闭性）就满足了, 这使得我们后面的谈论是有意义的. 首先, 结合律肯定满足, 因为它是个子集. 其次, 根据子群的第二个条件,$e\in H$ 是显然的. 再次, 我们要证明每个 H 中元素有 H 中的逆元, 而这是子群的第三个条件. □

推论 0.1 (子群的传递性)

若 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $H<G,K<H$, 则一定有 $K<G$. 因此我们可以将 $H<G,K<H$ 简记为 $K<H<G$.

♡

证明 证明是显然的. □

命题 0.6 (子群的等价条件)

设 $(G,\cdot)$ 是一个群,$H\subset G$, 则 $(H,\cdot)$ 是子群等价于

$$e\in H,$$

$$\forall x,y\in H, x\cdot y^{-1}\in H.$$

♠

证明 设 $(H,\cdot)$ 是子群. 令 $x,y\in H$, 利用逆元封闭性得到 $y^{-1}\in H$, 再利用乘法封闭性得到 $x\cdot y^{-1}\in H$.

反过来, 假设上述条件成立. 令 $x\in H$, 则 $e\cdot x^{-1}=x^{-1}\in H$, 这证明了逆元封闭性. 接下来, 令 $x,y\in H$, 则利用逆元封闭性,$y^{-1}\in H$, 故 $x\cdot(y^{-1})^{-1}=x\cdot y\in H$. 这就证明了乘法封闭性.

综上, 这的确是子群的等价条件. □

命题 0.7 (子群的任意交仍是子群)

设 G 是一个群, $(H_i)_{i\in I}$ 是一族 G 的子群, 则它们的交集仍然是 G 的子群, 即

$$\bigcap_{i\in I}N_i<G.$$

♠

证明 首先, 设 e 是 G 的单位元, 则由子群对单位元封闭可知,$e\in N_i,\forall i\in I$. 从而 $e\in\bigcap_{i\in I}N_i$.

其次, 对 $\forall x,y\in\bigcap_{i\in I}N_i$, 都有 $x,y\in N_i,\forall i\in I$. 根据子群对逆元封闭可知,$y^{-1}\in N_i,\forall i\in I$. 于是再由子群对乘法封闭可知,$xy^{-1}\in N_i,\forall i\in I$. 故 $xy^{-1}\in\bigcap_{i\in I}N_i$.

综上,$\bigcap_{i\in I}N_i<G$. □

定义 0.6 (一般线性群)

我们对于那些 $n*n$ 可逆实矩阵构成的乘法群, 称为 **(实数上的) n 阶一般线性群**, 记作 $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$. 由于一个矩阵可逆当且仅当其行列式不为零, 因此

$$GL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R}):\det(A)\neq 0\}.$$

定义 0.7 (特殊线性群)

我们将由那些行列式恰好是 1 的 $n*n$ 实矩阵构成的乘法群称为 **(实数上的)n 阶特殊线性群**, 记作 $(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, 即

$$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R}):\det(A)=1\}.$$

命题 0.8

$(SL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ 是个群.

证明 根据定义,$SL(n,\mathbb{R})$ 首先是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子集, 那么只要证明它是个子群即可. 首先, 乘法单位元单位矩阵的行列式恰好是 1（这也是为什么我们定义特殊线性群是行列式是 1 的矩阵构成的群的原因）, 这就证明了 $I\in SL(n,\mathbb{R})$（$I=I_n$ 指的是 n 阶单位矩阵）. 另外, 我们要证明 $SL(n,\mathbb{R})$ 在乘法下封闭. 令 A,B 是两个行列式为 1 的 $n*n$ 实矩阵. 由于行列式满足 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, 因此 AB 的行列式也是 1, 也就在特殊线性群中. 这就证明了特殊线性群确实是个群. 至于逆元封闭性, 我们利用 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$. 假设 $\det(A)=1$, 则 $\det(A^{-1})=1$, 于是 $A^{-1}\in SL(n,\mathbb{R})$. 综上, 特殊线性群确实是个群. □

定义 0.8 (群同态)

令 $(G,\cdot),(G',*)$ 是两个群, 且 $f:G\to G'$ 是一个映射. 我们称 f 是一个**群同态**, 当其保持了乘法运算, 即

$$\forall x,y\in G, f(x\cdot y)=f(x)*f(y).$$

命题 0.9

若 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态, 则 $f(e)=e',f(x^{-1})=f(x)^{-1}$.

笔记 也就是说,f 不仅把乘积映到乘积, 而且把单位元映到单位元, 把逆元映到逆元. 在这个意义下, 实际上 f 将所有群 G 的“信息”都保持到了 G' 上, 包括单位元, 乘法和逆元. 至于结合律（或者更基础的封闭性）, 显然两边本来就有, 就不必再提.

证明 首先, 因为 $e\cdot e=e$, 所以利用同态的性质,$f(e)=f(e\cdot e)=f(e)*f(e)$. 这时, 两边同时左乘 $f(e)^{-1}$, 就可以各约掉一个 $f(e)$, 得到 $e'=f(e)$, 这就证明了 f 把单位元映到单位元.

另一方面, 令 $x\in G$, 则 $e'=f(e)=f(x\cdot x^{-1})=f(x)*f(x^{-1})$. 同理 $e'=f(x^{-1})*f(x)$. 于是由定义,$f(x^{-1})$ 就是 $f(x)$ 的逆元, 即 $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$. 这就证明了这个命题. □

定义 0.9 (群同态的核与像)

令 $f:(G,\cdot)\to(G',*)$ 是一个群同态, 则我们定义 f 的**核与像**, 记作 $\ker(f)$ 与 $\mathrm{im}(f)$, 分别为

$$\ker(f)=\{x\in G:f(x)=e'\}\subset G,$$
$$\mathrm{im}(f)=\{y\in G':\exists x\in G,y=f(x)\}=\{f(x):x\in G\}\subset G'.$$

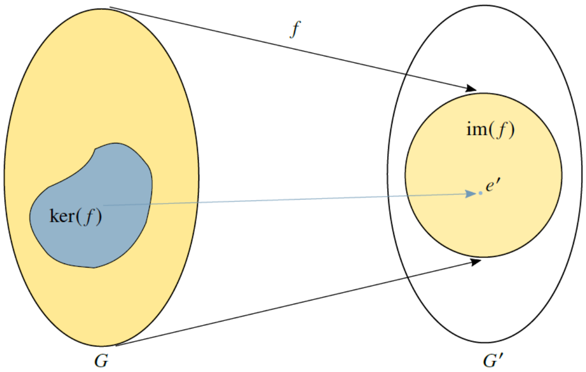

图 1: 群同态的核与像示意图

命题 0.10

令 $f : (G, \cdot) \to (G', *)$ 是一个群同态, 则核是定义域的子群, 像是陪域的子群, 即

$$\ker(f) < G, \quad \mathrm{im}(f) < G'.$$

注 根据群同构第一定理进一步可知,$\ker f \lhd G$. 但是注意同态的像 $(\mathrm{im}(f))$ 未必是 G' 的正规子群, 往往只是普通的子群.

证明 先证明第一个子群关系. 我们利用 $f(e) = e'$ 来说明 $e \in \ker(f)$. 接着, 设 $x, y \in \ker(f)$, 只需证明 $xy^{-1} \in \ker(f)$. 利用同态的性质,$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e'e'^{-1} = e'$, 这就证明了 $xy^{-1} \in \ker(f)$. 第一个子群关系得证.

再证明第二个子群关系. 同样由于 $f(e) = e'$, 我们有 $e' \in \mathrm{im}(f)$. 接着, 设 $y = f(x), y' = f(x') \in \mathrm{im}(f)$, 只需证明 $yy'^{-1} \in \mathrm{im}(f)$. 同样利用同态的性质,$yy'^{-1} = f(x)f(x')^{-1} = f(xx'^{-1}) \in \mathrm{im}(f)$. 第二个子群关系也得证. 这样我们就证完了整个命题. □

例题 0.2 证明:$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$.

证明 由命题**??**可知,$\det : GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$ 是一个乘法群同态. 注意到 $\ker(det) = (SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, 因此由命题 0.10可知,$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) = \ker(det) < (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$. □

定义 0.10 (满同态与单同态)

令 $f : (G, \cdot) \to (G', *)$ 是一个群同态, 我们称 f 是一个**满同态**当 f 是满射, 称 f 是一个**单同态**当 f 是单射.

命题 0.11

令 $f : (G, \cdot) \to (G', *)$ 是一个群同态, 则

1. f 是一个单同态当且仅当 $\ker(f) = \{e\}$. 也就是说, 一个群同态是单的当且仅当核是平凡的.
2. f 是一个满同态当且仅当 $\mathrm{im}(f) = G'$. 也就是说, 一个群同态是满的当且仅当值域等于陪域.

证明

1. 假设 f 是单的, 那么因为 $f(e) = e'$, 因此若 $f(x) = e'$, 则利用单射的性质我们一定有 $x = e$, 这就证明了核是平凡的.(这个方向是显然的)
   另一个方向不那么显然. 我们假设 $\ker(f) = \{e'\}$. 假设 $x, x' \in G$, 使得 $f(x) = f(x')$, 我们只须证明 $x = x'$. 在这里, 我们同时右乘 $f(x')^{-1}$, 得到 $f(x)f(x'^{-1}) = f(xx'^{-1}) = e'$. 而因为核是平凡的, 所以必须有 $xx'^{-1} = e$. 接下来同时右乘 x', 我们就得到 $x = x'$. 这就证明了这个命题.
2. 因为 f 是满同态, 所以对 $\forall a' \in G'$, 都存在 $a \in G$, 使得 $f(a) = a'$. 故 $a' \in \mathrm{im}(f)$. 因此 $G' \subset \mathrm{im}(f)$.. 又显然有 $\mathrm{im}(f) \subset G'$. 故 $\mathrm{im}(f) = G'$.

□

笔记 平凡群, 满同态和单同态示意图如下:

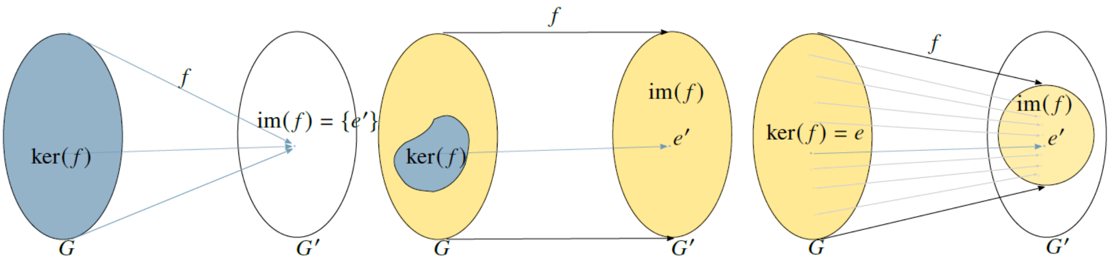

图 2: 平凡群, 满同态和单同态示意图

例题 0.3 证明:det : $GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ 是一个乘法群同态, 并且是满同态,ker(det) = $SL(n, \mathbb{R})$.

证明 设 $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, 则由行列式的 Laplace 定理可知 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. 故 det 是群同态.

任取 $a \in \mathbb{R}^\times$, 令 $C = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $C \in GL(n, \mathbb{R})$ 并且 $\det(C) = a$. 故 det 是满同态.

一方面, 任取 $N \in SL(n, \mathbb{R})$, 则 $\det(N) = 1$, 从而 $N \in \ker(\det)$. 于是 $SL(n, \mathbb{R}) \subset \ker(\det)$. 另一方面, 任取 $M \in \ker(\det)$, 则 $\det(M) = 1$, 从而 $M \in SL(n, \mathbb{R})$. 于是 $\ker(\det) \subset SL(n, \mathbb{R})$. 故 $\ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$. □

定义 0.11 (群同构)

令 $f : (G, \cdot) \to (G', *)$ 是一个映射, 我们称 f 是一个**群同构**, 当 f 既是一个双射, 又是一个群同态. 简单来说, 同构就是双射的同态.

命题 0.12 (群同构的逆也是群同构)

若 $f : (G, \cdot) \to (G', *)$ 是一个群同构, 则 f^{-1} 也是群同构.

证明 因为 f^{-1} 也是双射, 所以我们只须证明 f^{-1} 是群同态. 令 $x', y' \in G'$, 设 $x' = f(x), y' = f(y)$. 则 $x' * y' = f(x \cdot y)$,$x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$, 故 $f^{-1}(x' * y') = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y')$. 这就完成了证明. □

定义 0.12 (两个群的直积)

令 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 我们记 $(G \times G', *)$ 为 $(G, \cdot_1)$ 和 $(G', \cdot_2)$ 的**直积**. 满足对于 $(x, y), (x', y') \in G \times G'$, 有

$$(x, y) * (x', y') = (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y').$$

命题 0.13 (两个群的直积仍是群)

若 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 是两个群, 则它们的直积 $(G \times G', *)$ 还是一个群.

证明 封闭性: 因为 G 在 $\cdot_1$ 下封闭,G' 在 $\cdot_2$ 下封闭, 而 $G \times G'$ 的元素乘积是逐坐标定义的, 则 $G \times G'$ 在 $* = (\cdot_1, \cdot_2)$ 下也是封闭的.

结合律: 同样, 逐坐标有结合律, 故整体也有结合律.

单位元: 设 e, e' 分别是 $(G, \cdot_1), (G', \cdot_2)$ 的单位元, 则不难想象,(e, e') 是直积的单位元. 对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 我们有 $(x, y) * (e, e') = (x \cdot_1 e, y \cdot_2 e') = (x, y)$, 另一边也是同理, 这就证明了 (e, e') 是直积的单位元.

逆元: 对于任意 $(x, y) \in G \times G'$, 设 x^{-1}, y^{-1} 分别是 x, y 的逆元, 则同样不难想象,(x^{-1}, y^{-1}) 是 (x, y) 的逆元. □

定义 0.13 (一族群的直积)

令 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 其中 I 是一个指标集. 我们记它们的**直积**为 $(\prod\limits_{i\in I} G_i, *)$. 满足对于 $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, 有

$$(x_i)_{i\in I} * (y_i)_{i\in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i\in I}.$$

命题 0.14 (一族群的直积仍是群)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群, 则它们的直积 $(\prod\limits_{i\in I} G_i, *)$ 还是一个群.

笔记 最经典的例子就是通过 n 个实数加群 $(\mathbb{R}, +)$ 直积得到的 $(\mathbb{R}^n, +)$.

证明 证明与命题 0.13同理. 封闭性与结合律是显然的. 单位元是 $(e_i)_{i\in I}$, 而 $(x_i)_{i\in I}$ 的逆元是 $(x_i^{-1})_{i\in I}$. □

命题 0.15 (一族 Abel 群的直积仍是 Abel 群)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族 Abel 群, 则它们的直积 $(\prod\limits_{i\in I} G_i, *)$ 还是一个 Abel 群.

证明 由命题 0.14可知 $(\prod\limits_{i\in I} G_i, *)$ 还是一个群. 下面证明它还是 Abel 群.

由 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族 Abel 群可得, 对 $\forall (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, 都有

$$(x_i)_{i\in I} \cdot (y_i)_{i\in I} = (x_i \cdot_i y_i)_{i\in I} = (y_i \cdot_i x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \cdot (x_i)_{i\in I}.$$

故 $(\prod\limits_{i\in I} G_i, *)$ 还是一个 Abel 群. □

定义 0.14 (投影映射)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群,$j \in I$ 是任意指标, 我们定义映射到指标 j 的**投影映射**为

$$p_j : \prod_{i\in I} G_i \to G_j.$$

对于 $(x_i)_{i\in I}$, 我们称 $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ 为 $(x_i)_{i\in I}$ 的**投影**.

命题 0.16 (投影映射是群同态)

若 $(G_i, \cdot_i)_{i\in I}$ 是一族群,$j \in I$ 是任意指标, 则投影映射 $p_j : \prod\limits_{i\in I} G_i \to G_j$ 是个群同态.

证明 令 $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, 则

$$p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j, \quad p_j((y_i)_{i\in I}) = y_j$$

$$p_j((x_i)_{i\in I} * (y_i)_{i\in I}) = p_j((x_i \cdot_i y_i)_{i\in I}) = x_j \cdot_j y_j = p_j((x_i)_{i\in I}) \cdot_j p_j((y_i)_{i\in I}).$$

□