0.1 矩阵与二次型

0.1.1 用矩阵方法来讨论二次型问题

引理 0.1

设 A 是 n 阶实对称矩阵，则

$$f(x) = x'Ax + 2a\beta'x + a^2c = \begin{pmatrix} x' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}.$$

注 上述 $f(x)$ 仍是一个二次型，只不过有 1 个变量恒为常数而已.

证明 由矩阵乘法易证. □

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称矩阵，求证：函数 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x} + c$ 的极小值等于 $c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, \cdots, b_n)'$, b_i 和 c 都是实数.

证明 注意到

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}' \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故可作如下对称分块初等变换：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}.$$

由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix}$ 可解出 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$，于是

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}' \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} \geq c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

因此，当 $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 时，$f(\boldsymbol{x})$ 取到极小值 $c - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$. □