0.1 Cauchy 积分公式

定理 0.1

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域, 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 那么对任意 $z \in D$, 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{1}$$

等式(??)称为 **Cauchy 积分公式**.

笔记 上述定理表明全纯函数在域中的值由它在边界上的值所完全确定. (??)式是全纯函数的一种积分表示, 通过这种表示, 我们可以证明全纯函数有任意阶导数.

证明 任取 $z \in D$, 因为 f 在 z 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, 有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $\rho < \delta$, 使得 $B(z, \rho) \subset D$. 记 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, 由 γ 和 γ_ρ 围成的二连通域记为 D'(图 1), 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 D' 中全纯, 在 $\overline{D'}$ 上连续. 于是, 由推论??得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

又由例题??可知 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 1$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3}$$

于是, 由(2)式、(3)式及长大不等式即得

$$\begin{aligned}
\left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon.
\end{aligned}$$

让 $\varepsilon \to 0$, 即得所要证的等式 (??).

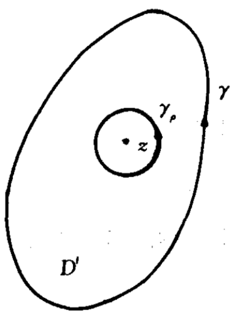

图 1

□

定义 0.1

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中一条可求长曲线 (不一定是闭的),g 是 γ 上的连续函数, 如果 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 那么由命题??可知积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

是存在的, 它定义了 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上的一个函数 $G(z)$, 即

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

称它为 **Cauchy 型积分**.

笔记 由 Cauchy 型积分确定的函数有很好的性质.

定理 0.2

设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线,g 是 γ 上的连续函数, 那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上有任意阶导数, 而且

$$G^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

笔记 这个定理实际上证明了在现在的情况下, 微分运算和积分运算可以交换, 公式很便于记忆.

证明 我们用数学归纳法来证明等式 (4). 先设 $n=1$, 我们要证明

$$G'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta,\ z\in\mathbb{C}\setminus\gamma. \tag{5}$$

任意取定 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, 记 $\rho=\inf\limits_{\zeta\in\gamma}|\zeta-z_0|>0,\delta=\min\left(1,\frac{\rho}{2}\right)$, 则当 $\zeta\in\gamma,z\in B(z_0,\delta)$ 时, 有 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<\frac{1}{2}$. 于是由 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\frac{1}{\zeta-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+h(z,\zeta)\right), \tag{6}$$

其中 $h(z,\zeta)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$, 从而

$$|h(z,\zeta)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n=\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n<\frac{|z-z_0|^2}{\rho^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{\rho^2}|z-z_0|^2. \tag{7}$$

这样, 由 (6)式便得

$$G(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta+\frac{z-z_0}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta,$$

又注意到 $h(z_0,\zeta)=0$, 因而有

$$\frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta. \tag{8}$$

若记 $M=\sup\limits_{\zeta\in\gamma}|g(\zeta)|$, 由 (7)式便知(8)式右端的绝对值不超过

$$\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3|z-z_0|}\cdot|z-z_0|^2=\frac{M|\gamma|}{\pi\rho^3}|z-z_0|.$$

在 (8)式两端令 $z\to z_0$, 即得

$$G'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

现设 $n=k$ 时 (4)式成立, 即

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

要证明

$$G^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由 (6)式和二项式定理, 可得

$$\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+h(z,\zeta)\right)^{k+1}=\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+(k+1)\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+H(z,\zeta)\right),$$

由 (7)式便得

$$|H(z,\zeta)|\leqslant C|z-z_0|^2, \tag{9}$$

这里,C 是一个常数. 于是

$$G^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta+\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}(z-z_0)\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta+\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

即

$$\frac{G^{(k)}(z)-G^{(k)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}(z-z_0)}\int_\gamma\frac{g(\zeta)H(z,\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta. \tag{10}$$

由 (9)式便知 (10)式右端的绝对值不超过 $K|z-z_0|$, 这里,K 是一个常数. 在 (10) 式中令 $z\to z_0$, 即得

$$G^{(k+1)}(z_0)=\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 z_0 是 D 中的任意点, 归纳法证明完毕. □

定理 0.3

设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域, 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 那么 f 在 D 上有任意阶导数, 而且对任意 $z\in D$, 有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=1,2,\cdots.$$

证明 由定理 0.1,f 可写为 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 f 在 γ 上连续, 故由定理 0.2即得所要证的结果. □

定理 0.4

如果 f 是域 D 上的全纯函数, 那么 f 在 D 上有任意阶导数.

证明 任取 $z_0\in D$, 取充分小的 δ, 使得 $\overline{B(z_0,\delta)}\subset D$. 由定理 0.3,$f$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中有任意阶导数, 又由于 z_0 是任意的, 所以 f 在 D 中有任意阶导数. □

例题 0.1 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}.$$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$, 则 f 在 $\{z:|z|\leqslant 2\}$ 中全纯, 根据定理 0.3, 有

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{z^2+16}\right)'\bigg|_{z=0}=0.$$

也可以这样计算:

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=\frac{1}{16}\left\{\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}-\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+16}\right\}=0.$$

这是因为, 由例题??, 第一个积分为零; 由 Cauchy 积分定理, 第二个积分为零. □

定理 0.5

设 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 都在 γ_0 的内部,$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 中的每一条都在其他 $k-1$ 条的外部,D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的域,D 的边界 γ 由 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 所组成. 如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$,

则对任意 $z \in D$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

f 在 D 内有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \ n = 1, 2, \cdots.$$

♡

证明 定理的证明和前面的一样, 不再重复. 根据定理 0.2的结论, 再利用定理??的证明思路进行证明即可. □

例题 0.2 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2}.$$

解 注意到 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$ 在 $1, e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}, e^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}}$ 处不解析. 作一个中心在原点、半径为 $R(R > 4)$ 的大圆 (图 2), 则在闭圆环

$$\{z : 2 \leqslant |z| \leqslant R\}$$

上,$f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$ 是全纯的. 于是, 由定理 0.5 得

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} = 2\pi \mathrm{i} \left(\frac{1}{z^3 - 1} \right)' \bigg|_{z=-4} = -\frac{32}{1323} \pi \mathrm{i},$$

其中 $\gamma_1 = \{z : |z| = 2\}$(顺时针方向),$\gamma_2 = \{z : |z| = R\}$(逆时针方向). 所以

$$\begin{aligned} & -\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} + \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} = -\frac{32\pi \mathrm{i}}{1323} \\ \Longleftrightarrow & \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} = \frac{32\pi \mathrm{i}}{1323} + \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

由于当 $|z| = R$ 时, 有

$$|(z^3 - 1)(z + 4)^2| \geqslant (R^3 - 1)(R - 4)^2,$$

所以由长大不等式得

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} \right| \leqslant \frac{2\pi R}{(R^3 - 1)(R - 4)^2} \to 0 \, (R \to \infty).$$

故在(11)式中令 $R \to \infty$, 即得

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^3 - 1)(z + 4)^2} = \frac{32\pi \mathrm{i}}{1323}.$$

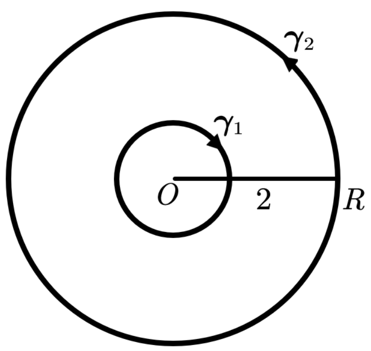

图 2

□

定理 0.6 (Schwarz 积分公式)

设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$, $f = u + iv$. 证明: f 可用实部表示为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} u(Re^{i\theta})d\theta + iv(0).$$

♡

证明

□