



# 分析学技巧积累

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

# 目录

<b>第一章 想法</b>	<b>1</b>
1.1 分段估计 . . . . .	1
1.2 分部积分 . . . . .	1
<b>第二章 求和与求积符号</b>	<b>2</b>
2.1 求和符号 . . . . .	2
2.1.1 求和号交换顺序 . . . . .	2
2.1.2 裂项求和 . . . . .	6
2.2 求积符号 . . . . .	8
<b>第三章 实数基本定理与上下极限</b>	<b>9</b>
3.1 实数基本定理 . . . . .	9
3.1.1 定理介绍 . . . . .	9
3.1.2 综合应用 . . . . .	9
3.2 上下极限 . . . . .	13
<b>第四章 极限与渐近分析方法</b>	<b>19</b>
4.1 基本的渐进估计与求极限方法 . . . . .	19
4.1.1 Taylor 公式 . . . . .	19
4.1.2 利用 Lagrange 中值定理求极限 . . . . .	22
4.1.3 强行替换 (拟合法) 和凑定积分 . . . . .	23
4.1.4 L'Hospital's rules . . . . .	24
4.1.5 与方程的根有关的渐近估计 . . . . .	25
4.1.5.1 可以解出 $n$ 的类型 . . . . .	25
4.2 Toeplitz 定理 . . . . .	26
4.3 Abel 变换 . . . . .	29
4.4 Stolz 定理 . . . . .	30
4.4.1 数列 Stolz 定理 . . . . .	30
4.4.2 函数 Stolz 定理 . . . . .	38
4.5 递推数列求极限和估阶 . . . . .	42
4.5.1 "折线图" 分析法 (图未完成, 但已学会) . . . . .	42
4.5.2 单调性分析法 . . . . .	42
4.5.3 利用上下极限求递推数列极限 . . . . .	43
4.5.4 类递增/类递减递推数列 . . . . .	44
4.5.5 压缩映像 . . . . .	47
4.5.6 强求通项和强行裂项 . . . . .	49
4.5.6.1 直接构造通项 . . . . .	49
4.5.6.2 强求通项和强行裂项 . . . . .	51
4.6 分部积分 . . . . .	57
4.7 Laplace 方法 . . . . .	58
4.8 欧拉麦克劳林公式 (E-M 公式) . . . . .	69
4.9 Riemann 引理 . . . . .	78

---


第五章 不等式	84
第六章 积分	89
6.1 积分常用结论	89
6.2 积分性态分析	90
第七章 函数性态分析	92
7.1 连续函数	92
第八章 小技巧	93
8.1 长除法	93
8.2 将多项式分式分解为其部分因式的和	94

# 第一章 想法

## 1.1 分段估计

### 结论 分段估计和式

分段的方式: 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前  $N$  项), 另一部分是余项 (从  $N+1$  项开始包括后面的所有项). (黎曼积分本质就是和式的极限, 直接细分成每一小段, 估计每一小段的被积函数值, 进而区分积分 (和式) 的主体部分和余项部分)

 **笔记** 如果和式的极限存在, 则由 *Cauchy* 收敛准则, 可知和式的余项的极限一般会趋于 0.

## 1.2 分部积分

### 分部积分转换导数

分部积分能够将两个被积函数的导数交换.

## 第二章 求和与求积符号

### 2.1 求和符号

#### 定义 2.1 (空和 (Empty sum))

$$\sum_{i=b+1}^b f(i) \triangleq 0, b \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

#### 定理 2.1 (关于求和号下限大于上限的计算)

$$\sum_{i=a}^c f(i) \equiv - \sum_{i=c+1}^{a-1} f(i), a, c \in \mathbb{Z} \text{ 且 } a > c. \quad (2.2)$$

 **笔记** 上述空和的定义与关于求和号下限大于上限的计算定理都来自论文: Interpreting the summation notation when the lower limit is greater than the upper limit(Kunle Adegoke).

#### 定理 2.2 (求和号基本性质)

1. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

#### 2.1.1 求和号交换顺序

#### 定理 2.3 (基本结论)

1. 当  $n, m$  均为非负整数时, 有

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

2. 当  $n, m$  均为非负整数,  $p \leq n, q \leq m$  且  $p, q \in \mathbb{N}_+$  时, 有

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}.$$

3. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}.$$

4. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$


5. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j.$$

6. 当  $n$  为非负整数时, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \geq 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j.$$



 **笔记** 如果上述命题第 1 条中的  $n$  或  $m$  取到无穷, 第 2 条中的  $n$  取到无穷, 则求和号不能直接交换顺序. 此时, 往往要添加一个条件, 相应的交换和号的结论才能成立. 比如, 著名的 *Fubini* 定理 (见关于无限和的 *Fubini* 定理).

**证明** 1. 利用矩阵证明该结论.

设一个  $m$  行  $n$  列的矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

则矩阵  $A$  的第  $i$  行的和记为

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

矩阵  $A$  的第  $j$  列的和记为

$$c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和  $r_i, i = 1, 2, \dots, m$  求和也等于所有列和  $c_j, j = 1, 2, \dots, n$  求和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} &= \sum_{i=1}^m r_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}, \\ \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} &= \sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}.$$

2. 同理利用矩阵证明该结论.

设一个  $m$  行  $n$  列的矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} a_{pq} & a_{p,q+1} & \cdots & a_{pm} \\ a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{p+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mq} & a_{m,q+1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵  $A$  的第  $i$  行的和记为

$$r_i = \sum_{j=q}^m a_{ij} \quad (i = p, p+1, \dots, m).$$

矩阵  $A$  的第  $j$  列的和记为

$$c_j = \sum_{i=p}^m a_{ij} \quad (j = q, q+1, \dots, m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和  $r_i, i = p, p+1, \dots, n$  求和也等于所有列和  $c_j, j = q, q+1, \dots, m$  求和, 即

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=p}^n r_i = \sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij},$$

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{j=q}^m c_j = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}.$$

故

$$\sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{ij} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij} = \sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq n}} a_{ij}.$$

3. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \chi_{i \leq j}(i) \xrightarrow{\text{1.的结论}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_{i \leq j}(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}.$$

4. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \chi_{i < j}(i) \xrightarrow{\text{1.的结论}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n a_{ij} \chi_{i < j}(i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij}.$$

5. 结论是显然的.

6. 结论是显然的.

**注** 设  $X$  是全集, 对任意集合  $A \subset X$ , 把函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

称为集合  $A$  的示性函数.

**例题 2.1** 计算

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)}.$$

**解** 令  $I = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} \xrightarrow[\text{(轮换换元)}]{\text{将 } i \text{ 换成 } j, \text{ 换成 } i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{2^{i+j}(i+j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{2^{i+j}(i+j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i+j}{2^{i+j}(i+j)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2^n} \right]^2. \end{aligned}$$

**例题 2.2** 记

$$T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b, c \text{ 可以构成某个三角形的三边长}\}.$$

证明:

$$\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}.$$

 **笔记** 核心想法: 两个集合间可以建立一一映射.

**结论** 若  $x, y, z \in \mathbb{N}_+$ ,  $x, y, z$  具有相同奇偶性的充要条件为

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c, \text{ 其中 } a, b, c \in \mathbb{N}_+.$$

**证明** 必要性显然. 下面证明充分性. 假设  $x, y, z$  具有不同的奇偶性, 则不妨设  $x, z$  为奇数,  $y$  为偶数. 从而  $x + y$  一定为奇数, 这与  $x + y = 2a$  矛盾. 故  $x, y, z$  具有相同奇偶性.

**证明** 设  $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b, c \text{ 可以构成某个三角形的三边长}\}$ .

$$\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}.$$

记  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x, y, z \text{ 有相同的奇偶性}\}$ , 则对  $\forall (x, y, z) \in S$ , 取  $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{z+x}{2}$ . 此时我们有

$$a + b = \frac{x + 2y + z}{2} > \frac{z + x}{2} = c,$$

$$b + c = \frac{x + y + 2z}{2} > \frac{x + y}{2} = a,$$

$$a + c = \frac{2x + y + z}{2} > \frac{y + z}{2} = b.$$

从而  $a, b, c$  可以构成某个三角形的三边长, 即此时  $(a, b, c) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}) \in T$ .

于是我们可以构造映射

$$\tau : S \rightarrow T, (x, y, z) \mapsto (a, b, c) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}).$$

反之, 对  $\forall (a, b, c) \in T$ , 取  $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$ . 此时我们有

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c.$$

从而  $x, y, z$  具有相同的奇偶性, 即此时  $(x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a) \in S$ .

于是我们可以构造映射

$$\tau' : T \rightarrow S, (a, b, c) \mapsto (x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a).$$

因此对  $\forall (x, y, z) \in S$ , 都有  $\tau\tau'(x, y, z) = \tau'(x, y, z) = (x, y, z)$ . 即  $\tau\tau' = I$ . 故映射  $\tau$  存在逆映射  $\tau'$ . 从而映射  $\tau$  是双射.

因此集合  $S$  中的每一个元素都能在集合  $T$  中找到与之一一对应的元素. 于是两和式  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$  和  $\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$  的项数一定相同. 并且任取  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$  中  $(x, y, z)$  所对应的一项  $A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ ,  $\sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$  中一定存在与之一一对应的  $\tau(x, y, z)$  所对应的一项  $A_{\tau(x,y,z)}$ . 而  $\tau(x, y, z) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2})$ , 因此  $A_{\tau(x,y,z)} = A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ . 故  $\sum_{(x,y,z) \in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}} = \sum_{(a,b,c) \in T} A_{a,b,c}$ .

**注** 上述证明中逆映射的构造可以通过联立方程  $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y+z}{2}, c = \frac{z+x}{2}$  解出  $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$  得到.

#### 定理 2.4 (关于无限和的 Fubini 定理)

设  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个使得  $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n, m)$  绝对收敛的函数. 那么

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n, m).$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f(n, m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m).$$





 **笔记** 这个命题是关于求和号换序的基本结论的推广.

**证明**

**例题 2.3** (Putnam A3) 已知  $a_0, a_1, \dots, a_n, x$  是实数, 且  $0 < x < 1$ , 并且满足

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \dots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

证明: 存在一个  $0 < y < 1$ , 使得

$$a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0.$$

**证明** 由题意可知, 将  $\frac{1}{1-x^{k+1}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 根据幂级数展开可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{+\infty} a_k x^{(k+1)i}.$$

又因为  $0 < x < 1$ , 所以几何级数  $\sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i}$  是绝对收敛的. 从而有限个绝对收敛的级数的线性组合  $\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{+\infty} x^{(k+1)i}$

也是绝对收敛的. 于是根据关于无限和的 **Fubini 定理** 可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{+\infty} a_k x^{(k+1)i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^{(k+1)i} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i \sum_{k=0}^n a_k x^{ki}.$$

设  $f(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0, y \in (0, 1)$ , 则  $f \in C(0, 1)$ . 假设对任意的  $y \in (0, 1)$ , 有  $f(y) \neq 0$ . 则  $f$  要么恒为正数, 要么恒为负数. 否则, 存在  $y_1, y_2 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_1) > 0, f(y_2) < 0$ . 那么由连续函数介值定理可知, 一定存在  $y_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(y_0) = 0$ . 这与假设矛盾. 因此不失一般性, 我们假设  $f(y) > 0, \forall y \in (0, 1)$ . 又由  $0 < x < 1$  可知,  $x^i \in (0, 1)$ . 从而

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1-x^{k+1}} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i \sum_{k=0}^n a_k x^{ki} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i f(x^i) > 0.$$

这与题设矛盾. 故原结论成立.

## 2.1.2 裂项求和

### 定理 2.5 (基本结论)

(1) 当  $a, b \in \mathbb{Z}$  且  $a \leq b$  时, 有

$$\sum_{n=a}^b [f(n) - f(n+1)] = f(a) - f(b+1);$$

$$\sum_{n=a}^b [f(n+1) - f(n)] = f(b+1) - f(a);$$

$$\sum_{n=a}^b [f(n) - f(n-1)] = f(b) - f(a-1);$$

$$\sum_{n=a}^b [f(n-1) - f(n)] = f(a-1) - f(b).$$

(2) 当  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  且  $a \leq b$  时, 有

$$\sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n); \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=a}^b [f(n) - f(n+m)] = \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) - \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n). \quad (2.4)$$

**证明** (1) 将求和展开后很容易得到证明.

(2) 因为 (2) 中上下两个式子(2.3)(2.4)互为相反数, 所以我们只证明(2.3)即可.

当  $m \geq 0$  时, 若  $m \leq b - a$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] \\ &= f(a+m) + \cdots + f(b) + f(b+1) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(a+m-1) - f(a+m) - \cdots - f(b) \\ &= f(b+1) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(a+m-1) \\ &= \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) \end{aligned}$$

若  $m > b - a$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) \\ &= f(b+1) + \cdots + f(a+m-1) + f(a+m) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(b) - f(b+1) - \cdots - f(a+m-1) \\ &= f(a+m) + \cdots + f(b+m) - f(a) - \cdots - f(b) \\ &= \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] \end{aligned}$$

综上, 当  $m \geq 0$  时, 有  $\sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n)$ .

当  $m < 0$  时, 我们有  $-m > 0$ , 从而

$$\begin{aligned} & \sum_{n=a}^b [f(n+m) - f(n)] = \sum_{n=a+m}^{b+m} [f(n) - f(n-m)] = - \sum_{n=a+m}^{b+m} [f(n-m) - f(n)] \\ &= - \left( \sum_{n=b+m+1}^{b+m-m} f(n) - \sum_{n=a+m}^{a+m-m-1} f(n) \right) = \sum_{n=a+m}^{a-1} f(n) - \sum_{n=b+m+1}^b f(n) \\ & \quad \underline{\underline{\text{求和号下限大于上限}}} \sum_{n=b+1}^{b+m} f(n) - \sum_{n=a}^{a+m-1} f(n) \end{aligned}$$

综上所述, 结论得证.

**例题 2.4** 1. 对  $m \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{n=1}^m (\sin n^2 \cdot \sin n)$ . 2. 对  $n, m \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)}$ .

**解** 1.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m (\sin n^2 \cdot \sin n) \xrightarrow{\text{积化和差公式}} -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [\cos(n^2 + n) - \cos(n^2 - n)] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [\cos(n(n+1)) - \cos(n(n-1))] \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(m(m+1)) - 1] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+m} \right) \end{aligned}$$

## 2.2 求积符号

## 定义 2.2 (求积符号)

$$\prod_{k=1}^n a_k \triangleq a_1 a_2 \cdots a_n.$$

## 定理 2.6 (基本结论)

当  $p, q \in \mathbb{Z}$  且  $p \leq q$  时, 有

$$\prod_{n=p}^q \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{q+1}}{a_p};$$

$$\prod_{n=p}^q \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_p}{a_{q+1}}.$$

**证明** 由求积符号定义很容易得到证明.

**注** 对于正数列的乘积, 我们可以通过取对数的方式, 将其转化为  $\ln \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln a_k$  来研究.


**例题 2.5** 计算:  $\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ .

**解**

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} &= \prod_{k=2}^n \left( \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k(k+1)+1}{k(k-1)+1} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots n-1}{3 \cdot 4 \cdots n+1} \cdot \frac{n(n+1)+1}{2+1} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)+1}{3} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2}{3n+3} \end{aligned}$$

**例题 2.6** 证明:

$$\frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

 **笔记** 利用“糖水”不等式: 对任意真分数  $\frac{b}{a}$ ,  $a, b, c > 0$ , 都有  $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$  成立.

**证明** 根据“糖水”不等式, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]^2 &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right)^2 = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \\ &< \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

故对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $\frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$  成立.

## 第三章 实数基本定理与上下极限

### 3.1 实数基本定理

#### 3.1.1 定理介绍

##### 定理 3.1 (实数基本定理)

1. 确界存在定理: 有上界的非空数集一定有上确界.
2. 单调有界原理: 单调有界数列一定收敛.
3. 柯西收敛准则: 数列  $\{x_n\}$  收敛当且仅当任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $m, n > N$  都有  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .
4. 闭区间套定理: 闭区间套  $I_n = [a_n, b_n]$  满足  $I_{n+1} \subset I_n$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 则存在唯一的  $\xi$ , 使得  $\xi$  属于每一个  $I_n$ .
5. 聚点定理: 有界数列必有收敛子列.
6. 有限覆盖定理: 有界闭集的任意一族开覆盖, 都存在有限子覆盖.

##### 定义 3.1 (点集相关概念)

1. 如果存在  $r > 0$  使得  $(a - r, a + r) \subset A$ , 则称  $a$  是集合  $A$  的内点 (高维改为开球即可).
2. 如果一个集合  $A$  中的每一个点都是内点, 则称  $A$  是开集.
3. 如果集合  $A$  中的任意一个收敛序列  $x_n$  的极限点  $x$ , 都有  $x \in A$ , 则称  $A$  是闭集.
4. 设  $B \subset A$ , 如果对任意  $r > 0$  和任意  $x \in A$ , 都有  $(x - r, x + r) \cap B \neq \emptyset$ , 则称  $B$  在  $A$  中稠密.

#### 3.1.2 综合应用

**例题 3.1** 设  $f(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  单调递增且  $f(0) > 0, f(1) < 1$ , 证明: 存在  $x$  使得  $f(x) = x$ .

**笔记** 因为题目条件中的函数  $f$  只是一个实值函数, 并没有其他更进一步的性质 (连续性、可微性、凸性等). 所以我们只能利用最基本的实数基本定理证明. 证明存在性, 考虑反证法会更加简便.

**注**  $f$  并不是连续函数, 不能用介值定理.

**证明** (反证法) 假设对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有  $f(x) \neq x$ . 将闭区间  $[0, 1]$  记作  $[a_1, b_1]$ , 且由条件可知  $f(a_1) > a_1, f(b_1) < b_1$ . 令  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , 若  $f(c_1) > c_1$ , 则取  $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ ; 若  $f(c_1) < c_1$ , 则取  $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ . 从而得到闭区间  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ , 并且  $f(a_2) > a_2, f(b_2) < b_2$ . 以此类推, 可得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 并且  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

根据闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又由  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增及  $f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 可知  $a_n < f(a_n) \leq f(\xi) \leq f(b_n) < b_n$ . 令  $n \rightarrow \infty$  可得  $\xi \leq f(\xi) \leq \xi$ , 即  $f(\xi) = \xi$ . 这与假设矛盾.

##### 引理 3.1 (Lebesgue 数引理)

如果  $\{O_\alpha\}$  是区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 则存在一个正数  $\delta > 0$ , 使得对于区间  $[a, b]$  中的任何两个点  $x', x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖  $x', x''$ . (称这个数  $\delta$  为开覆盖的 Lebesgue 数.)

**笔记** 本题谢惠民上的证明是利用有限覆盖定理, 而 CMC 红宝书上通过直接构造出  $\delta$  进行证明. 这里我们采用的是聚点定理进行证明.


**证明** (反证法) 假设对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 取  $\delta = \frac{1}{n} > 0$ , 都存在相应的  $x_n, y_n \in [a, b]$  且  $|x_n - y_n| < \delta$ , 使得对  $\forall I \in \{O_\alpha\}$ , 要么  $x_n \notin I$ , 要么  $y_n \notin I$ . 由聚点定理可知, 有界数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  一定存在收敛子列. 设  $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$  为相应的收敛子列, 则由  $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$  可知  $x_{n_k}, y_{m_k}$  收敛于同一个极限点. 故设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = x_0 \in [a, b]$ .

因为  $\{O_\alpha\}$  是区间  $[a, b]$  的一个开覆盖, 所以存在  $I_0 \in \{O_\alpha\}$ , 使得  $x_0 \in I_0$ . 又由于  $I_0$  是开集, 因此存在  $\eta > 0$ , 使得  $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset I_0$ . 从而由  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = x_0 \in [a, b]$  可知, 存在充分大的  $K$ , 使得  $|x_{n_K} - x_0| < \eta, |y_{m_K} - x_0| < \eta$ . 于是  $x_{n_K}, y_{m_K} \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset I_0$ . 即开区间  $I_0 \in \{O_\alpha\}$  同时覆盖了  $x_{n_K}, y_{m_K}$  这两个点, 与假设矛盾.

**注** 注意对于两个收敛子列  $\{x_{n_k}\}, \{y_{m_k}\}$ , 此时  $n_k = m_k$  并不一定对  $\forall k \in \mathbb{N}_+$  都成立, 即这两个收敛子列的指标集  $\{n_k\}_{k=1}^\infty, \{m_k\}_{k=1}^\infty$  不相同也不一定有交集, 故无法利用聚点定理反复取子列的方法取到两个指标相同且同时收敛的子列  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  (取  $\{x_n\}$  为一个奇子列收敛, 偶子列发散的数列; 取  $\{y_n\}$  为一个奇子列发散, 偶子列收敛的数列就能得到反例.).

### 例题 3.2

1. 设  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  中且对任意  $x$ , 都存在与  $x$  有关的  $r > 0$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(x - r, x + r)$  中为常值函数, 证明:  $f(x)$  是常值函数.
2. 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  中的实值函数, 如果对任意  $x \in [a, b]$ , 均存在  $\delta_x > 0$  以及  $M_x$ , 使得  $|f(y)| \leq M_x, \forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ , 证明:  $f(x)$  是有界的.
3. 设  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上, 对任意  $x_0 \in \mathbb{R}$  均存在与  $x_0$  有关的  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  是单调递增的, 证明:  $f$  在整个  $\mathbb{R}$  上也是单调递增的.

 **笔记** 这个结果说明: 局部常值函数就是常值函数, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数, 局部单调递增函数在整个区间上也是单调递增的, **实数基本定理能够将局部性质扩充为整体性质.**

### 证明

1. **证法一 (有限覆盖定理)(不建议使用):** 对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $r_x > 0$  使得  $f(t)$  在区间  $(x - r_x, x + r_x)$  为常值函数, 则  $\bigcup_{x \in [a, b]} (x - r_x, x + r_x) \supset [a, b]$ , 故存在其中有限个区间  $(x_k - r_k, x_k + r_k), 1 \leq k \leq n$  使得他们的并集包含  $[a, b]$ .

直观来看只需要将这些区间“从小到大”排列, 就可以依次推出每一个区间上都是相同的一个常值函数, 但是所谓“从小到大”排列目前是无法准确定义的, 所以这样说不清楚, 优化如下:

方案 1: 选择其中个数尽可能少的区间, 使得它们的并集可以覆盖  $[a, b]$  但是任意删去一个都不可以 (这是能够准确定义的一个操作), 此时区间具备性质“任意一个不能被其余的并集盖住”, 接下来将这些区间按照左端点的大小关系来排序, 去论证它们确实是如你所想的那样“从小到大”排列的 (关注右端点), 进而得证.

方案 2: 利用 **Lebesgue 数引理**, 将区间  $[a, b]$  分为有限个  $[a, a + \delta], [a + \delta, a + 2\delta], \dots, [a + n\delta, b]$ , 其中  $\delta$  是 Lebesgue 数. 则每一个闭区间都可以被开覆盖中的某一个开区间覆盖住, 于是分段常值函数, 并且还能拼接起来, 所以是常值函数.

**证法二 (确界存在定理):** (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 构造数集

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(t) = f(a), \forall t \in [a, x]\}.$$

从而  $E \neq \emptyset$  且  $E \subset [a, b]$ . 于是由确界存在定理, 可知数集  $E$  存在上确界, 设  $x_0 = \sup E$ .

如果  $f(a) \neq f(x_0)$ , 则由条件可知, 存在  $r_0 > 0$ , 使得  $f(t) = f(x_0), \forall t \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ . 由  $x_0 = \sup E$  可知, 存在  $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0)$  且  $x_1 \in E$ . 于是  $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_1]$ . 从而  $f(t) = f(a) = f(x_0), \forall t \in (x_0 - r_0, x_1)$ . 这与  $f(x_0) \neq f(a)$  矛盾.

如果  $f(a) = f(x_0)$ , 则由条件可知, 存在  $r_1 > 0$ , 使得  $f(t) = f(x_0) = f(a), \forall t \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ . 又由  $x_0 = \sup E$  可知, 存在  $x_2 \in (x_0 - r_1, x_0)$  且  $x_2 \in E$ . 于是  $f(t) = f(a), \forall t \in [a, x_2]$ . 进而对  $\forall t \in [a, x_2] \cup (x_0 - r_1, x_0 + \frac{r_1}{2}] = [a, x_0 + \frac{r_1}{2}]$ , 有  $f(t) = f(a)$ . 从而  $x_0 + \frac{r_1}{2} \in E$ , 这与  $x_0 = \sup E$  矛盾.

故假设不成立, 命题得证.

**证法三 (闭区间套定理):** (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 不妨设  $f(a) < f(b)$ , 则记闭区间  $[a, b] = [a_1, b_1]$ . 若  $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > f(a_1)$ , 则记闭区间  $[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] = [a_2, b_2]$ ; 若  $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < f(b_1)$ , 则记闭区间  $[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$ . 以此类推, 可以得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) <$

$f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n]$ . 又由条件可知, 存在  $r > 0$ , 使得  $f(t) = f(\xi), \forall t \in (\xi - r, \xi + r)$ . 从而存在充分大的  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $|a_N - \xi| < r, |b_N - \xi| < r$ , 即  $a_N, b_N \in (\xi - r, \xi + r)$ . 于是  $f(a_N) = f(b_N)$ , 这与  $f(a_N) < f(b_N)$  矛盾.

2. (聚点定理): (反证法) 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 则对  $\forall n > 0$ , 都存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得  $|f(x_n)| > n$ . 从而得到一个有界数列  $\{x_n\}$ . 由聚点定理, 可知其存在收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ . 由条件可知, 存在  $\delta_{x_0} > 0$  以及  $M_{x_0}$ , 使得  $|f(y)| \leq M_{x_0}, \forall y \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ . 又由  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$  可知, 存在  $K > M_{x_0}$ , 使得  $|x_{n_K} - x_0| < \delta_{x_0}$ , 即  $x_{n_K} \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ . 于是  $|f(x_{n_K})| \leq M_{x_0}$ . 而  $|f(x_{n_K})| > n_K \geq K > M_{x_0}$  矛盾.

3. (闭区间套定理): (反证法) 假设存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(a) \geq f(b)$ . 记闭区间  $[a, b] = [a_1, b_1]$ , 若  $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \leq f(a_1)$ , 则记闭区间  $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] = [a_2, b_2]$ ; 若  $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \geq f(b_1)$ , 则记闭区间  $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right] = [a_2, b_2]$ . 以此类推, 可以得到一系列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足  $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) \geq f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由闭区间套定理, 可知存在唯一  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\xi \in [a_n, b_n]$ . 由条件可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(\xi - \delta, \xi + \delta)$  上单调递增. 又由  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  可知, 存在  $N > 0$ , 使得  $|a_N - \xi| < \delta, |b_N - \xi| < \delta$ , 即  $a_N, b_N \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ , 且  $a_N < b_N$ . 于是  $f(a_N) \leq f(b_N)$ . 而  $f(a_N) \geq f(b_N)$ , 这就产生了矛盾.

### 引理 3.2

设  $f(x)$  定义在区间  $I$  中, 则  $f(x)$  的全体极值构成的集合是至多可数集.



**证明** 极值只有极大值和极小值, 因此只要证明极大值全体与极小值全体都是至多可数的即可.

设  $f(x)$  的全体极小值构成的集合为  $A$ , 则

$$A = \{f(x) | \exists \delta > 0, \forall t \in (x - \delta, x + \delta), f(t) \geq f(x)\}.$$

故对  $\forall y \in A$ , 都存在  $x \in I$ , 使得  $y = f(x)$ , 并且  $\exists \delta > 0, \forall t \in (x - \delta, x + \delta), f(t) \geq f(x)$ . 由有理数的稠密性可知, 存在  $r \in (x - \delta, x) \cap \mathbb{Q}, s \in (x, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ . 从而  $(r, s) \subset (x - \delta, x + \delta)$ , 于是对  $\forall t \in (r, s)$ , 同样有  $f(t) \geq f(x)$ .

再设全体有理开区间构成的集合为  $B$ , 现在定义一个映射

$$\varphi: A \longrightarrow B; \quad y \longmapsto (r, s).$$

任取  $y_1, y_2 \in A$  且  $y_1 \neq y_2$ , 则存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 假设  $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = (r_0, s_0)$ , 则对  $\forall t \in (r_0, s_0)$ , 都有  $f(t) \geq y_1, y_2$ . 于是  $y_1 = f(x_1) \geq y_2, y_2 = f(x_2) \geq y_1$ , 从而  $y_1 = y_2$ , 这产生了矛盾. 故  $\varphi(y_1) \neq \varphi(y_2)$ , 因此  $\varphi$  是单射.

而由全体有理开区间构成的集合  $B$  是至多可数的, 因此  $f(x)$  的全体极小值构成的集合  $A$  也是至多可数的. 同理,  $f(x)$  的全体极大值构成的集合也是至多可数的.

**注** 由全体有理开区间构成的集合  $B$  是可数集的原因:

构造一个映射

$$\phi: B \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \quad (r, s) \longmapsto (r, s).$$

显然  $\phi$  是一个双射, 而  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  是可数集, 故  $B$  也是可数集.

**例题 3.3** 设  $f(x)$  在区间  $I$  中连续, 并且在每一点  $x \in I$  处都取到极值, 证明:  $f(x)$  是常值函数.

**注** 连续这一条件不可删去, 也不可减弱为至多在可数个点不连续. 反例: 考虑黎曼函数即可, 它处处取极值, 并且在有理点不连续, 无理点连续.

**证明** **证法一** (引理 3.2): (反证) 假设  $f(x)$  不是常值函数, 则存在  $a, b \in I$ , 使得  $f(a) \neq f(b)$ . 由  $f$  的连续性及其介值性可知,  $f(x)$  可以取到  $f(a), f(b)$  中的一切值. 故  $f(x)$  的值域是不可数集 (区间都是不可数集). 又由条件可知,  $f(x)$  的值域就是由  $f(x)$  的全体极值构成的. 于是根据引理 3.2 可得,  $f(x)$  的值域是至多可数集. 这与  $f(x)$  的值域是不可数集矛盾.

**证法二** (闭区间套定理): 假设  $f(x)$  不是常值函数, 则存在  $a_1, b_1 \in I$ , 使得  $f(a_1) \neq f(b_1)$ . 不妨设  $f(a_1) < f(b_1)$ . 因为  $f$  在  $I$  上连续, 所以由介值定理可知, 存在  $c_1 \in [a_1, b_1]$ , 使得  $f(a_1) < f(c_1) = \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} < f(b_1)$ . 若

$b_1 - c_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$ , 则令  $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ ; 若  $c_1 - a_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$ , 则令  $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ . 无论哪种情况, 都有  $f(a_2) < f(b_2)$ .

在  $[a_2, b_2]$  上重复上述操作, 并依次类推下去, 得到一列闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}$  满足

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}], f(a_n) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由闭区间套定理可知, 存在唯一  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , 使得  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . 再由  $f$  的连续性以及 Heine 归结原则可知,  $f(a_n)$  严格递增收敛于  $f(x_0)$ ,  $f(b_n)$  严格递减收敛于  $f(x_0)$ . 故  $f(a_n) < f(x_0) < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 因此对  $\forall \delta > 0$ , 都存在  $N > 0$ , 使得  $|a_N - x_0| < \delta, |b_N - x_0| < \delta$ , 并且  $f(a_N) < f(x_0) < f(b_N)$ . 从而  $x_0 \in I$  不是  $f(x)$  的极值点, 这与  $f$  在  $I$  上处处取极值矛盾.

### 定理 3.2 (Baire 纲定理)

1. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列没有内点的闭集, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也没有内点.
2. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列开集并且都在  $\mathbb{R}$  稠密, 则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  也在  $\mathbb{R}$  中稠密.
3. 设  $A_n \subset \mathbb{R}$  是一列闭集, 并且  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也是闭集, 则存在开区间  $(a, b)$  (可以无穷区间) 和正整数  $N$  使得  $(a, b) \cap A \subset A_N$ .
4. 设  $A_n$  是一列无处稠密集 (闭包没有内点), 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  也没有内点.

### 证明

1. 用反证法. 设  $x_0 \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  为内点, 则存在  $\delta_0 > 0$ , 使得  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$ . 因为  $A_1$  没有内点, 故存在  $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$ . 由于  $A_1$  为闭集, 故存在  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \emptyset$$

不妨设  $\delta_1 < 1$ . 因为  $A_2$  没有内点, 故存在  $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$ . 由于  $A_2$  为闭集, 故存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \emptyset$$

不妨设  $\delta_2 < \frac{1}{2}$ . 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$

使得  $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \emptyset, \delta_n < \frac{1}{n} (n \geq 1)$ . 根据闭区间套原理, 存在  $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n], \forall n \geq 1$ . 因此  $\xi \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$ , 这和  $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$  相矛盾.

- 2.
- 3.
- 4.

**例题 3.4** 设数列  $a_n$  单调递增趋于正无穷, 并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ , 函数  $f(x)$  定义在  $(0, +\infty)$  中且对任意  $x \geq 1$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x) = 0$ .

1. 若  $f(x)$  是连续函数, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;

2. 若删去连续这一条件, 或者虽然连续, 但是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , 则上述结论均不成立.

### 证明

1. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 定义  $E_n = \{x \geq 1 | \forall k \geq n, |f(a_k x)| \leq \varepsilon\}$ , 则  $E_n$  是一列闭集, 根据条件有  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [1, +\infty)$ . 于是根据 Baire 纲定理可知存在正整数  $N$  和区间  $(u, v)$  使得  $(u, v) \subset E_N$ , 也就是说, 任意  $x \in (u, v)$ , 任意  $n \geq N$  都有  $|f(a_n x)| \leq \varepsilon$ , 换句话说我们得到了一个一致的  $N$ . 因此  $|f(x)|$  在区间  $(a_N u, a_N v), (a_{N+1} u, a_{N+1} v), \dots$



中都是不超过  $\varepsilon$  的, 只要这些区间在  $n$  很大之后能够相互有重叠, 一个接着下一个, 全覆盖就行了. 换句话说, 我们要证明: 存在  $N_0$  使得任意  $n \geq N_0$  都有  $a_{n+1}u < a_nv$ , 这等价于  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{v}{u}$ , 注意条件: 极限等于 1 并且右端  $\frac{v}{u} > 1$ , 所以上式成立. 将前面推导的东西梳理一下, 就是说: 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M$  使得  $x > M$  时恒有  $|f(x)| < \varepsilon$ , 结论得证.

2. 例如考虑  $a_n = n$ , 定义  $f(x)$  为: 当  $x = m \cdot 2^{\frac{1}{k}}, m \in \mathbb{N}^+$  时候取 1, 其余情况都取 0, 则对任意的  $x > 0$ , 数列  $f(nx)$  中都至多只有一项为 1, 因此极限总是 0, 但是很明显  $f(x)$  的极限并不存在. 另外一个反例, 可以考虑  $a_n = e^n$ , 现在看连续性, 条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{n+\ln x}) = 0$$

将  $\ln x \in \mathbb{R}$  看成一个变量, 相应的考虑  $g(x) = f(e^x)$ , 则连续函数  $g(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{y+n}) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , 我们构造一个例子使得  $g(x)$  在无穷处极限非零或者不存在即可. 这与经典的命题有关: 设  $f(x)$  一致连续且  $f(x+n) \rightarrow 0$  对任意  $x$  成立, 则  $f(x) \rightarrow 0$ , 现在删去了一致连续命题自然是错的, 具体构造留作习题.

**注** 通常, 点态收敛 (上题) 或者数列极限 (本题) 这种非一致性的条件, 描述起来是 “任意  $x \in (0, 1)$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $n > N$  都有  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ” 或者 “任意  $x > 0$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得任意  $n > N$  都有  $|f(a_n x)| < \varepsilon$ ”, 很明显这里的  $N$  是与  $x, \varepsilon$  都有关系的, 如果我们事先取定  $\varepsilon > 0$ , 那么这个过程可以说是 “给定  $x$ , 去找对应的  $N$ ”. 而 baire 纲定理的想法就是反过来找: 不同的  $x$  对应的  $N$  确实可以不一样, 那就先取好  $N$ , 我们看都有哪些  $x$  对应到这一个  $N$ , 也就是说事先取定  $\varepsilon > 0$ , 然后对每一个  $n$  去定义集合, 反找  $x$ . 所有 baire 纲定理相关的问题, 思想都是如此, 根据定理便能得到一个一致的东西, 拿来做事情.

**例题 3.5** 设  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  中可导, 证明:  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  中的一个稠密子集中连续.

**证明**

### 引理 3.3

有界数列  $x_n$  如果满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 则  $x_n$  的全体聚点构成一个闭区间.

**证明**

**例题 3.6** 设连续函数  $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x_1 \in [0, 1], x_{n+1} = f(x_n)$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ .

**证明** 必要性 ( $\Rightarrow$ ): 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  显然成立.

充分性 ( $\Leftarrow$ ):

## 3.2 上下极限

### 命题 3.1 (子列极限命题)

- (a): 给定  $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  的充分必要条件是: 对任何广义存在的  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , 都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .  
 (b): 设  $m \in \mathbb{N}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn+r}, \forall r = 0, 1, 2, \dots, m-1$  相同, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}$ .



**笔记** 当  $m = 2$ , 上述命题是在说如果序列奇偶子列极限存在且为同一个值, 则序列的极限存在且极限和偶子列极限值相同. 所谓奇偶, 就是看除以 2 的余数是 1 还是 0. 对一般的  $m \in \mathbb{N}$ , 我们也可以看除以  $m$  的余数是  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  中的哪一个来对整数进行分类, 即  $\text{mod } m$  分类. 严格的说, 我们有无交并

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{m-1} \{mk + r : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**证明** 对 (a): 考虑上下极限即可.



对 (b): 记  $A \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}$ . 事实上对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $k > N$  时, 我们有

$$|x_{mk+r} - A| < \varepsilon, \forall r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}. \quad (3.1)$$


我们知道对任何正整数  $n > mN + m - 1$ , 存在唯一的  $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  和  $k > N$ , 使得  $n = km + r$ , 于是运用 (3.1) 我们有  $|x_n - A| < \varepsilon$ , 因此我们证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}.$$

### 定义 3.2 (上下极限的定义)

我们定义

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k. \quad (3.2)$$

 **笔记** 注意到由定义,  $\sup_{k \geq n} a_k$  是单调递减的,  $\inf_{k \geq n} a_k$  是单调递增的. 因此 (3.2) 式的极限存在或为确定符号的  $\infty$ .

### 命题 3.2 (上下极限的等价定义)


假定  $\{a_n\}$  是个实数列, 则有

- (1): 设  $A$  是某个实数, 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  的充分必要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在无穷多个  $n$ , 使得  $a_n > A - \varepsilon$  且存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $a_n \leq A + \varepsilon, \forall n \geq N$ .
- (2):  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  的充分必要条件是对任何  $A > 0$ , 存在  $n$ , 使得  $a_n > A$ .
- (3): 设  $A$  是某个实数, 则  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  的充分必要条件是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在无穷多个  $n$ , 使得  $a_n < A + \varepsilon$  且存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $a_n \geq A - \varepsilon, \forall n \geq N$ .
- (4):  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  的充分必要条件是对任何  $A < 0$ , 存在  $n$ , 使得  $a_n < A$ .

### 命题 3.3 (上下极限的性质)

我们有如下的

1.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $-\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$ .
3.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
4. 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b, \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 则  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab$ .

 **笔记** 上下极限的性质都可以通过考虑其子列的极限快速得到证明. 因此我们一般不需要额外记忆上下极限的性质, 只需要熟悉通过考虑子列极限直观地得到结论即可. 并且因为上下极限就是 (最大/最小) 子列极限, 所以一般极限的性质对于上下极限都成立.

**证明** 1.

2.

3.

4. 由于  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 因此我们可设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ . 根据极限的四则运算法则, 可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$ . 从而  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$ . 又由上下极限的性质, 可知  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n = ab$ . 故  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab$ .

**例题 3.7** 求上极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

解 注意到

$$n \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi + n\pi) = (-1)^n n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{\pi}{2}.$$

注 本题最后一个等号其实是直接套用了一个上极限的性质得到的.

#### 命题 3.4

对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \varepsilon) \leq a_n \leq f_2(n, \varepsilon), \forall n \geq N,$$

这里

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(n, \varepsilon) = A \in \mathbb{R}.$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

 **笔记** 以后可以直接使用这个命题. 但是要按照证法一的格式书写.

**证明** 证法一 (利用上下极限)(也是实际做题中直接使用这个命题的书写步骤):

已知对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \varepsilon) \leq a_n \leq f_2(n, \varepsilon), \forall n \geq N,$$

上式两边令  $n \rightarrow +\infty$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 两边令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 可得

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon) = A.$$

又显然有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , 于是

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon) = A.$$

故由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

证法二 ( $\varepsilon - \delta$  语言):

$\forall \varepsilon > 0$ , 记  $g_1(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \varepsilon)$ ,  $g_2(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \varepsilon)$ . 由  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_2(\varepsilon) = A$ , 可知对  $\forall \eta > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$g_1(\delta) > A - \frac{\eta}{2}, \quad g_2(\delta) < A + \frac{\eta}{2}.$$

由于  $g_1(\delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n, \delta)$ ,  $g_2(\delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n, \delta)$ , 因此存在  $N' \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \delta) > g_1(\delta) - \frac{\eta}{2}, \quad f_2(n, \delta) < g_2(\delta) + \frac{\eta}{2}, \quad \forall n > N'.$$

又由条件可知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$f_1(n, \delta) \leq a_n \leq f_2(n, \delta), \quad \forall n > N.$$


于是当  $n > \max\{N, N'\}$  时, 对  $\forall \eta > 0$ , 我们都有

$$A - \eta < g_1(\delta) - \frac{\eta}{2} < f_1(n, \delta) \leq a_n \leq f_2(n, \delta) < g_2(\delta) + \frac{\eta}{2} < A + \eta.$$

故由夹逼准则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ .

**例题 3.8** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = x.$$

 **笔记** 可以不妨设  $x = 0$  的原因: 假设当  $x = 0$  时, 结论成立, 则当  $x \neq 0$  时, 令  $y_n = x_n - x$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ . 从而由假设可知

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k y_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (x_k - x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k - x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k - x.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = x$ .

**证明** 不妨设  $x = 0$ , 则对  $\forall N > 0$ , 当  $n > N$  时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k x_k \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k \sup_{k \geq N+1} |x_k| \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \sup_{k \geq N+1} |x_k| \\ &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| + \sup_{k \geq N+1} |x_k| \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow +\infty$ , 则结合  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k x_k \right| \xrightarrow{\text{因为分子是关于 } n \text{ 的多项式}} 0$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \sup_{k \geq N+1} |x_k|, \forall N > 0.$$

由  $N$  的任意性, 上式两边令  $N \rightarrow +\infty$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |x_k|.$$

又根据上极限的定义, 可知  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |x_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .


从而

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| \leq 0.$$

故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k \right| = 0$ . 原命题得证.

**例题 3.9** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

 **笔记** 求这种前  $n$  项和关于  $n$  的极限 ( $n$  既和求和号上限有关, 又和通项有关) 的思路是: 先假设极限存在 (这里极限号内是数列不是级数, 所以这里是数列收敛). 于是由数列收敛的柯西收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_0 \in \mathbb{N}_+$ , 使得对  $\forall n > N_0$ , 都有

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} - \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| = \left| \sum_{k > N_0} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \sum_{k=0}^{N_0+1} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}} - \cos \sqrt{\frac{k}{N_0+1}}}{2^k} \right| > \sum_{k > N_0} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}.$$

从而由数列极限的定义, 可知对  $\forall N > N_0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 0$ .

因此对  $\forall N > N_0$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k>N}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2$ .

综上所述, 我们在假设原极限收敛的前提下能够得到原极限就是 2, 因此我们可以凭借直觉不严谨地断言原极限实际上就是 2 (如果原极限不是 2, 那么原极限只能发散, 否则与上述证明矛盾. 而出题人要我们求解的极限一般都不发散, 并且凭借直觉也能感觉到这个极限不发散).

**注意:** 因为这里我们并不能严谨地证明原数列收敛, 所以只凭借上述论证并不能严谨地得到原极限等于 2.

(上述论证实际上就是一种“猜测”这种极限的值得方法)

虽然只凭借上述论证我们并不能直接得到原极限等于 2 的证明, 但是我们可以得到一个重要的结果: 原极限的值就是 2. 我们后续只需要证明这个结果是正确的即可. 后续证明只需要适当放缩原本数列, 再利用上下极限和夹逼定理即可 (因为我们已经知道极限的值, 放缩的时候就能更容易地把握放缩的“度”). 并且我们根据上述论证可知 (放缩的时候我们可以利用下述想法, 即将不影响整体的阶的余项通过放缩去掉), 原和式的极限等于其前  $N$  项的极限, 原和式除前  $N$  项外的余项的极限趋于 0, 即余项并不影响原数列的极限, 可以通过放缩将其忽略. 我们只需要考虑前  $N$  项的极限即可.

后续证明的套路一般都是: 放大: 可以直接通过一些常用不等式得到; 放小: 将原级数直接放缩成有限项再取下极限.

**注:** 关键是如何利用上述想法直接计算出极限的值, 后续的放缩证明只是为了保证其严谨性的形式上的证明.

**注** 上述思路只是我的一点个人拙见, 也可以使用 *Toplitz* 定理的分段估计想法解决本题. 于是我们今后遇到类似问题可以分别采取这两种思路解决.

这里我们可以采取两种方法去证明这个极限 (夹逼定理和 *Toplitz* 定理).

**解 解法一 (夹逼定理):**

$$\text{一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 于是 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$\text{另一方面, 注意到 } \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+. \text{ 从而}$$


$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}, \forall N \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{于是令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} = 2.$$

$$\text{综上所述, 我们有 } 2 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} \leq 2. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \sqrt{\frac{k}{n}}}{2^k} = 2.$$

**解法二 (Toplitz 定理):**

**例题 3.10** 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$ .

 **笔记** 我们利用上一题的想法计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}$ . 先假设级数  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$  收敛, 则由 *Cauchy* 收敛准则可知,

存在  $N' > 0$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k}, \forall N > N'.$$

令  $N \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}$ . 然后再根据计算出来的结果对原级数进行适当放缩, 最后利用上下极限和夹逼准则得到完整的证明.

**解** 注意到

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

一方面, 利用  $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \leq \sum_{k=1}^n e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^n e^{1-k}, \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{令 } n \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n e^{1-k} = \frac{e}{e-1}.$$

另一方面, 注意到  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \geq \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})}, \forall N \in \mathbb{N}_+$ . 两边同时对  $n$  取下极限, 可得对

$\forall N \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} \\ &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot (-\frac{k-1}{n})} = \sum_{k=1}^N e^{1-k} \end{aligned}$$

$$\text{令 } N \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N e^{1-k} = \frac{e}{e-1}. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}.$$

## 第四章 极限与渐近分析方法

### 4.1 基本的渐进估计与求极限方法

#### 4.1.1 Taylor 公式

**定理 4.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)**

设  $f$  在  $x = a$  是  $n$  阶右可微的, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (4.1)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^n), x \rightarrow a^+. \quad (4.2)$$

**证明** (1) 要证明(4.1)式等价于证明

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0.$$

对上式左边反复使用  $n-1$  次  $L'Hospital'rules$ , 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} \stackrel{L'Hospital'rules}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}} \\ & \stackrel{L'Hospital'rules}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!} (x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\ & \stackrel{L'Hospital'rules}{=} \dots \stackrel{L'Hospital'rules}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} \\ & = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \stackrel{n \text{ 阶导数定义}}{=} 0 \end{aligned}$$


故(4.1)式成立.

(2) 要证明(4.2)式等价于证明: 存在  $C > 0$  和  $\delta > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} \right| \leq C, \forall x \in [a, a+\delta].$$

**例题 4.1** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{f(n)} \right)^n.$$

 **笔记** 由  $\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1)$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , 可得  $f(n) = n + o(n)$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . 这个等式的意思是:  $f(n) = n + o(n)$  对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$  都成立. 并且当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + o(n)}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 1$ . 其中  $o(n)$  表示一个(类)数列, 只不过这个(类)数列具有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o(n)}{n} = 0$  的性质.

**解 解法一 (一般解法):**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{f(n)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left( 1 + \frac{1}{f(n)} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{f(n)} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(n)}} = e.$$

解法二 (渐进估计):

由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ , 可知

$$\frac{f(n)}{n} = 1 + o(1), n \rightarrow +\infty.$$

从而

$$\left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+o(1)}\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} (1+o(1))\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e^{n \ln[1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})]}, n \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln[1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n[\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1+o(1)} = e.$$

例题 4.2 计算:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sin x - \cos x}{x^4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right].$$

解

例题 4.3 计算  $(1 + \frac{1}{x})^x, x \rightarrow +\infty$  的渐进估计.

解 由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{x \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]} = e^{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 + o\left( -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \right] \\ &= e \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \frac{e}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ x \left( e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) - \frac{e}{2} \right] = -\frac{11e}{24}. \quad (4.3)$$

注 反复利用上述(4.3)式构造极限的方法, 再求出相应极限, 就能得到  $e$  的更精确的渐进估计. 这也是计算渐进估计的一般方法.

例题 4.4 设  $f$  在 0 处可微,  $f(0) = 0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

 笔记 本题如果使用例题 3.9 的方法求极限, 那么我们将得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot 0) = +\infty \cdot 0.$$

而  $+\infty \cdot 0$  我们是无法确定其结果的, 故本题并不适用这种方法. 不过, 我们也从上述论述结果发现我们需要更加精细地估计原级数的阶, 才能确定出上述“ $+\infty \cdot 0$ ”的值, 进而得到原级数的极限. 因此我们引入余项方法和  $\varepsilon - \delta$  方法更加精细地估计原级数的阶.

注 虽然使用余项证明这类问题并不严谨, 但是在实际解题中, 我们仍使用这种余项方法解决这类问题. 因为严谨的  $\varepsilon - \delta$  语言证明比较繁琐. 我们只在需要书写严谨证明的时候才使用严谨的  $\varepsilon - \delta$  语言进行证明.

证明 证法一 (不严谨的余项方法): 由  $f$  在 0 处可微且  $f(0) = 0$  和带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可知

$$f(x) = f'(0)x + o(x), x \rightarrow 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) &= \sum_{i=1}^n \left[ f'(0) \cdot \frac{i}{n^2} + o\left(\frac{i}{n^2}\right) \right] = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{i}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + \sum_{i=1}^n o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)(n+1)}{2n} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{f'(0)}{2}, n \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

**证法二 ( $\varepsilon - \delta$  严谨的证明):** 由 Taylor 定理, 可知对  $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta > 0$ , 当  $|x| \leq \delta$  时, 有  $|f(x) - f'(0)x| \leq \varepsilon|x|$ .

只要  $n > \frac{1}{\delta}$ , 有  $\left|\frac{i}{n^2}\right| \leq \delta, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , 故  $\left|f\left(\frac{i}{n^2}\right) - f'(0)\frac{i}{n^2}\right| \leq \varepsilon\frac{i}{n^2}, i = 1, 2, \dots, n$ .

从而

$$f'(0)(1 - \varepsilon)\frac{i}{n^2} \leq f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1 + \varepsilon)\frac{i}{n^2}.$$

进而

$$\frac{f'(0)}{2}(1 - \varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n} = f'(0)(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq f'(0)(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{f'(0)}{2}(1 + \varepsilon) \cdot \frac{n+1}{n}.$$

于是

$$-\frac{\varepsilon f'(0)}{2} \leq \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leq \frac{f'(0)\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left| \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| \leq \frac{|f'(0)|}{2} \varepsilon.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{f'(0)}{2}$ .

**例题 4.5** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n$ .

**注** 这种余项方法并不是严谨证明, 如果需要严谨地证明, 就需要用  $\varepsilon - \delta$  语言书写证明. 虽然使用余项方法估计和式的阶并不严谨, 但是在实际解题中为了快速解决问题, 我们仍旧先使用余项方法进行估阶.

**解** 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \right)}.$$

由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ 1 - \frac{k}{2n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right] = \frac{1}{n} \left[ n - \frac{\sum_{k=1}^n k}{2n^2} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{n+1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( 1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \left( -\frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

**例题 4.6** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}.$$



解 记  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}$ , 则由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可得

$$\begin{aligned} \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx) &= \left[ 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right] \left[ 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \right] \cdots \left[ 1 - \frac{(nx)^2}{2} + o(x^2) \right] \\ &= 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 6}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

故  $I = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ .

例题 4.7 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{x - \sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 次复合}}}{x^3}.$$

解 先证明  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x)) \cdots))}_{n \text{ 次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ .

当  $n=1$  时, 由 Taylor 公式结论显然成立. 假设  $n=k$  时, 结论成立. 则当  $n=k+1$  时, 我们有

$$\begin{aligned} &\sin\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= x - \frac{n+1}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

由数学归纳法得  $\underbrace{\sin(\sin(\sin(\cdots(\sin x)) \cdots))}_{n \text{ 次复合}} = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{x - \sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 次复合}}}{x^3} = \frac{n}{6}$ .

### 4.1.2 利用 Lagrange 中值定理求极限

Lagrange 中值定理不会改变原数列或函数的阶, 但是可以更加精细地估计原数列或函数的阶. 以后利用 Lagrange 中值定理处理数列或函数的阶的过程都会直接省略.

例题 4.8 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})].$$

解 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $\theta_n \in (\sqrt{n+1}, \sqrt{n})$ , 使得

$$\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n.$$

从而当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $\theta_n \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \cos \theta_n \right] = 0.$$

例题 4.9 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right).$$

证明 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $\theta_n \in \left( \frac{2024}{n}, \frac{2024}{n+1} \right)$ , 使得

$$\arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} = \frac{1}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right).$$


并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + \theta_n^2} \cdot \left( \frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} \right) = 2024 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 2024.$$

**例题 4.10**

1. 对  $\alpha \neq 0$ , 求  $(n+1)^\alpha - n^\alpha, n \rightarrow \infty$  的等价量;

2. 求  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1), n \rightarrow \infty$  的等价量.

 **笔记** 熟练这种利用 Lagrange 中值定理求极限的方法以后, 这类数列或函数的等价量我们应该做到能够快速口算出来. 因此, 以后利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量的具体过程我们不再书写, 而是直接写出相应的等价量.

**注** 不难发现利用 Lagrange 中值定理计算数列或函数的等价量, 并不改变原数列或函数的阶.

**解** 1. 根据 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \cdot \theta_n^{\alpha-1}, \theta_n \in (n, n+1).$$

不妨设  $\alpha > 1$ , 则有  $\alpha n^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha (n+1)^{\alpha-1}$  (若  $\alpha \leq 1$ , 则有  $\alpha (n+1)^{\alpha-1} \leq \alpha \theta_n^{\alpha-1} \leq \alpha n^{\alpha-1}$ ). 故

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \theta_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha (n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = \alpha.$$

因此  $(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha n^{\alpha-1}, n \rightarrow \infty$ .

2. 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - (n-1)) \cdot (1 + \ln \theta_n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n}, n-1 < \theta_n < n.$$

又  $\frac{\ln(n-1)}{\ln n} < \frac{\ln \theta_n}{\ln n} < \frac{\ln n}{\ln n} = 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta_n}{\ln n} = 1.$$

于是  $n \ln n - (n-1) \ln(n-1) \sim \ln n, n \rightarrow +\infty$ .

**例题 4.11** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x}.$$

**证明** 由 Lagrange 中值定理, 可知对  $\forall x \in U(0)$ , 都有

$$\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x) \sin \theta, \theta \in (\sin x, x).$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \sin \theta}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 \cdot \sin \theta}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x}.$$


又由  $\sin x < \theta < x, \forall x \in U(0)$  可知

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\theta}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

故  $\sin \theta \sim \theta \sim x, x \rightarrow 0$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}.$

**4.1.3 强行替换 (拟合法) 和凑定积分****例题 4.12** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}.$$

 **笔记** 证明的想法要么是凑定积分定义. 要么强行替换为自己熟悉的结构 (拟合法), 无需猜测放缩手段.

**注** 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不只是等分取端点.

**解** 解法一: 注意到

$$\frac{i}{n} < \frac{\sqrt{i^2+1}}{n} < \frac{i+1}{n}, i = 1, 2, \dots, n,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

解法二:注意到


$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \left( n + \frac{i^2+1}{n} \right) \left( n + \frac{i^2}{n} \right)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

例题 4.13 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n}.$$

 **笔记** 长得神似定积分定义且很容易观察到  $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}}$  和  $\frac{i}{n^2}$  没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方法, 即做差  $\frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2}$  强估证明不影响极限.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| = \left| \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} - \frac{i}{n^2} \right) \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^2 \left( n^2 + \frac{1}{i} \right)} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{4n^2 - 1}{n^4} = \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4}, \end{aligned}$$

于是

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n^2 - 1)}{n^4} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i+4}{n^2 + \frac{1}{i}} \sin^4 \frac{\pi i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n} \sin^4 \frac{\pi i}{n} \\ & = \int_0^2 x \sin^4 \pi x dx \stackrel{\text{区间再现}}{\underset{\text{令 } x=2-y}}{=}} \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi (2-y) dy \\ & = \int_0^2 (2-y) \sin^4 \pi y dy = \int_0^2 \sin^4 \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx \\ & = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

#### 4.1.4 L'Hospital's rules

例题 4.14 若  $f \in D^1[0, +\infty)$ .

(1) 设


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = s$ .

(2) 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} f(x) \right] = s \in \mathbb{R},$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{s}{2}$ .

 **笔记** (2) 中的构造思路: 根据条件构造相应的微分方程, 然后求解这个微分方程, 再常数变易得到我们需要构造的函数. 具体步骤如下:

构造微分方程:  $y' + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}y = 0$ , 整理可得  $\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ , 再对其两边同时积分得到  $\ln y = -\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt + C_0$ . 从而  $y = Ce^{-\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}$ , 于是  $C = ye^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}$ . 故我们要构造的函数就是  $C(x) = f(x)e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}$ . 并且此时  $C(x)$  满足  $C'(x) = f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)$ .

**证明**

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + f'(x)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f + f'] = s.$$

(2) 注意到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt} = +\infty$ , 从而由 L'Hospital'rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}} \stackrel{\text{L'Hospital'rules}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ f'(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x) \right] e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}}{\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}} e^{\int_0^x \frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}dt}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x} \left[ f(x) + \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f'(x) \right] = \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

## 4.1.5 与方程的根有关的渐近估计

### 4.1.5.1 可以解出 $n$ 的类型

**例题 4.15** 设  $x^{2n+1} + e^x = 0$  的根记为  $x_n$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n).$$

**解** 注意到  $0^{2n+1} + e^0 > 0$ ,  $(-1)^{2n+1} + e^{-1} < 0$  且  $x^{2n+1} + e^x$  严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在唯一的  $x_n \in (-1, 0)$ , 使得

$$x_n^{2n+1} + e^{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = 2n+1 \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

任取  $\{x_n\}$  的一个收敛子列  $\{x_{n_k}\}$ , 又  $x_n \in (-1, 0)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [-1, 0]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)}$ . 又

因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln(-x_n)} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\ln(-x_{n_k})} = \frac{c}{\ln(-c)} = +\infty,$$

故  $c = -1$ . 于是由子列极限命题 (a) 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ . 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(1+x_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1+x_n)}{\ln(-x_n)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(1+x)}{\ln(-x)} = \frac{1}{2}.$$

**例题 4.16** 设  $a_n \in (0, 1)$  是  $x^n + x = 1$  的根, 证明

$$a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**证明** 注意到  $0^n + 0 - 1 < 0$ ,  $1^n + 1 - 1 > 0$ , 且  $x^n + x - 1$  在  $(0, 1)$  上严格单调递增, 所以由零点存在定理可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 存在唯一的  $a_n \in (0, 1)$ , 使得

$$a_n^n + a_n = 1 \Rightarrow \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty. \quad (4.4)$$

任取  $\{a_n\}$  的一个收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 又  $a_n \in (0, 1)$ , 因此可设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = c \in [0, 1]$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c}$ .

又由 (1.1) 式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} = +\infty$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = +\infty$ . 从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a_{n_k})}{\ln a_{n_k}} = \frac{\ln(1-c)}{\ln c} = +\infty.$$

故  $c = 1$ , 于是由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c = 1. \quad (4.5)$$

而要证  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ , 等价于证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - 1 + \frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = 0$ . 利用 (4.4)(4.5) 式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} \cdot a_n - \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} + 1}{\frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n}} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(a_n - 1) \ln(1-a_n)}{\ln a_n \left( \ln \frac{\ln(1-a_n)}{\ln a_n} \right)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{(x-1) \ln(1-x)}{\ln x \left( \ln \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \right)} + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

由 L'Hospital's rules 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{\ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)}} \stackrel{\text{L'Hospital's rules}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} \cdot \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} \ln(-x)}{\ln^2(1+x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) \cdot \ln(1+x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln(-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln(-x)} - \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-\frac{x}{1+x}} = -1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

于是结合 (4.6)(4.7) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - n + \ln n}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{x \ln(-x)}{\ln(1+x) \left( \ln \frac{\ln(-x)}{\ln(1+x)} \right)} + 1 \right] = -1 + 1 = 0.$$

故  $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), n \rightarrow +\infty$ .

## 4.2 Toeplitz 定理


### 定理 4.2 (Toeplitz 定理)

(a): 设  $\{t_{nk}\}_{1 \leq k \leq n} \subset [0, +\infty)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a. \quad (4.8)$$

(b): 设  $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^\infty \subset [0, +\infty)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} = 1$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty t_{nk} a_k = a. \quad (4.9)$$

 **笔记** 无需记忆 Toeplitz 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明 Toeplitz 定理, 即当  $n$  比较小的时候, 用  $t_{nk}$  趋于 0 来控制, 当  $n$  比较大的时候, 用  $a_n$  趋于  $a$  来控制.

我们需要熟悉蕴含在 *Toeplitz* 定理其中的一个关键想法: **分段估计** (分段的方式要合理才行).

*Toeplitz* 定理只是先对和式进行分段处理, 将和式分成两部分, 一部分是和式的前充分多项 (前有限项/前  $N$  项), 另一部分是余项 (从  $N+1$  项开始包括后面的所有项). 然后在这种分段估计的基础上, 利用已知的极限条件, 分别控制 (放缩) 和式的前充分多项 (前有限项/前  $N$  项) 和余项 (从  $N+1$  项开始包括后面的所有项).

**注** 注意区分 (a), (b) 两者的条件:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m t_{nk} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk}$ .

**证明** (a): 事实上, 不妨设  $a = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$  即可.

对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k|.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由  $N$  的任意性, 再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

故 (4.8) 式成立.

(b): 事实上, 不妨设  $a = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$  即可.

对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k|.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |t_{nk} a_k| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

由  $N$  的任意性, 再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} a_k \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

故 (4.9) 式成立.

**例题 4.17** 设  $p_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$  且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a.$$



**笔记** 理解到本质之后不需要记忆 *Toeplitz* 定理, 但是这里可以直接套用 *Toeplitz* 定理我们就引用了. 今后我们不再直接套用 *Toeplitz* 定理, 而是利用 *Toeplitz* 定理的证明方法解决问题.

**证明** 记  $t_{nk} = \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ . 则  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{\sum_{k=1}^n p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 1$ . 又因为

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n+k+1}} = 0.$$

所以由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 故由 *Toeplitz* 定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_1 + \dots + p_1 a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

**例题 4.18** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  且  $b_n \geq 0$ . 记  $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS.$$

**证明** (i) 若  $S = 0$ , 则  $b_n \equiv 0$ . 此时结论显然成立.

(ii) 若  $S > 0$ , 则令  $t_{nk} = \frac{1}{S} b_{n-k+1}, k = 1, 2, \cdots, n$ . 从而

$$\sum_{k=1}^n t_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{n-k+1} = \frac{1}{S} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

又因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  存在, 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk}.$$

不妨设  $a = 0$ , 则对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k t_{nk} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk}.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{k \geq N+1} |a_k| \sum_{k=1}^n t_{nk} \right) = \sup_{k \geq N+1} |a_k|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

再令  $N \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq N+1} |a_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = a$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k t_{nk} = aS$ .

**例题 4.19** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . 且存在常数  $K > 0$ , 使得  $\sum_{j=0}^n |y_j| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = 0.$$

**证明** 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \left| \sum_{i=N+1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + \sup_{i \geq N+1} |x_i| \cdot \sum_{i=N+1}^n |y_{n-i}| \leq \left| \sum_{i=1}^N x_i y_{n-i} \right| + K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|.$$


令  $n \rightarrow +\infty$ , 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} \right| \leq K \cdot \sup_{i \geq N+1} |x_i|$ .

由  $N$  任意性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{i \geq N+1} |x_i| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**例题 4.20** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

 **笔记** 可以不妨设  $a = b = 0$  的原因: 假设当  $a = b = 0$  时, 结论成立. 则当  $a, b$  至少有一个不为零时, 我们有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b) = 0$ . 从而由假设可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_{n-k+1} - b)}{n} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} + ab - a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} - b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = 0$$

又由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_{n-k+1}}{n} + b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} - ab = ab.$$

**证明** 不妨设  $a = b = 0$ , 否则用  $a_n - a$  代替  $a_n$ , 用  $b_n - b$  代替  $b_n$ . 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}}{n} \right| &\leq \frac{\left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right|}{n} + \frac{\left| \sum_{k=N+1}^n a_k b_{n-k+1} \right|}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |b_{n-k+1}| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N a_k b_{n-k+1} \right| + \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k|. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \right| \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |b_k|}{n} \leq \sup_{k \geq N+1} |a_k| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

$$\text{故 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = 0.$$

### 4.3 Abel 变换

#### 定理 4.3 (Abel 变换)

设  $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$  是数列, 则有恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k b_k &= (a_1 - a_2)b_1 + \cdots + (a_{N-1} - a_N)(b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}) + a_N(b_1 + b_2 + \cdots + b_N) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i. \end{aligned}$$



**笔记** Abel 变换的证明想法“强行裂项”是一种很重要的思想.

**证明** 为了计算  $\sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i$ , 我们来强行构造裂项, 差什么就给他补上去再补回来, 即:


$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) \sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i &= \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_j \sum_{i=1}^j b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^j b_i \right) + a_N \sum_{i=1}^N b_i \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_j \sum_{i=1}^j b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} b_i \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} b_i - a_{j+1} \sum_{i=1}^j b_i \right) + a_N \sum_{i=1}^N b_i \\ &= a_1 b_1 - a_N \sum_{i=1}^N b_i + \sum_{j=1}^{N-1} a_{j+1} b_{j+1} + a_N \sum_{i=1}^N b_i = \sum_{j=1}^N a_j b_j. \end{aligned}$$



## 命题 4.1 (经典乘积极限结论)

设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_k$  存在. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) a_n = 0.$$

 **笔记** 为了估计  $\sum_{j=1}^n b_j$ , 前面的有限项不影响. 而要用上极限  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 自然想到  $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \frac{b_j a_j}{a_j}$  和 Abel 变换. 而  $a_j$  的单调性能用在 Abel 变换之后去绝对值.

**证明** 不妨设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ . 则由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \sum_{i=N+1}^m a_i b_i \right| \leq \varepsilon, \forall m \geq N+1.$$

当  $n \geq N+1$ , 由 Abel 变换, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=N+1}^n b_j \right| &= \left| \sum_{j=N+1}^n \frac{a_j b_j}{a_j} \right| = \left| \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right) \sum_{i=N+1}^j a_i b_i + \frac{1}{a_n} \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \left| \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right| \cdot \left| \sum_{i=N+1}^j a_i b_i \right| \right) + \frac{1}{|a_n|} \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \cdot \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \left| \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right| \right) + \frac{1}{|a_n|} \left| \sum_{i=N+1}^n a_i b_i \right| \\ &\leq \varepsilon \left[ \sum_{j=N+1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_j} \right) + \frac{1}{a_n} \right] = \varepsilon \left( \frac{2}{a_n} - \frac{1}{a_{N+1}} \right). \end{aligned}$$

因此我们有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^n b_j \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^N b_j \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=N+1}^n b_j \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^N b_j \right| + \varepsilon \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{a_n}{a_{N+1}} \right) = 2\varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性即可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \sum_{j=1}^n b_j \right| = 0$ , 于是就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) a_n = 0$ .

## 4.4 Stolz 定理

## 4.4.1 数列 Stolz 定理

## 定理 4.4 (Stolz 定理)

(a): 设  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(b): 设  $x_n$  是严格递减数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

(c): 分别在 (a),(b) 的条件基础上, 若还有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (4.10)$$

**注** 注意 (c) 由 (a),(b) 是显然的, 且只有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$  存在或者为确定符号的  $\infty$  时才 (4.10) 式成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即 **Stolz 定理** 是离散的洛必达法则.

**证明** 我们仅证明  $x_n$  是严格递增数列且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} < \infty$  时有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}. \quad (4.11)$$

记  $A \triangleq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ , 由上极限定义我们知道对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \leq A + \varepsilon, \forall n \geq N$ .

利用  $x_n$  严格递增时, 成立  $y_{n+1} - y_n \leq (A + \varepsilon)(x_{n+1} - x_n), n \geq N$ , 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) \leq (A + \varepsilon) \sum_{j=N}^{n-1} (x_{j+1} - x_j), \forall n \geq N + 1.$$

即

$$y_n - y_N \leq (A + \varepsilon)(x_n - x_N), \forall n \geq N + 1.$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 取上极限就得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_N}}{1 - \frac{x_N}{x_n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} \leq A + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  任意性得到式 (4.11).

#### 命题 4.2 (Cauchy 命题)

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在或者为确定符号的  $\infty$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**笔记** 这个命题说明 **Stolz 定理** 是一种有效的把求和消去的降阶方法.

**证明** 容易由 **Stolz 定理** 的 (a) 直接得出.

**例题 4.21** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}.$$

**笔记** 本题计算过程中使用了 Lagrange 中值定理, 只是过程省略了而已 (以后这种过程都会省略).

**证明** 由 **Stolz 定理** 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}})}.$$

又由 **Stolz 定理** 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{2020} - (n+1)^{2020}}{(n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020 \cdot n^{2019}}{(n+1)^{2020}} = 0.$$

于是再利用 **Stolz 定理** 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln \left(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n \cdot (n+1)^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{2020}}{n^{2021}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)^{2021} - n^{2021}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2020}}{2021 \cdot n^{2020}} = \frac{1}{2021}.\end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \frac{1}{2021}.$


**命题 4.3 (数列收敛的级数形式)**

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  收敛的充要条件:  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  收敛.

**证明** 必要性 ( $\Rightarrow$ ) 和充分性 ( $\Leftarrow$ ) 都可由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1)$  直接得到.

**例题 4.22**

1. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}.$
2. 证明下述极限存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$
3. 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right).$

 **笔记** 注意,  $\gamma \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.577 \dots$  是没有初等表达式的, 我们只能规定为一个数字, 这个数字叫做欧拉常数, 截至目前, 人类甚至都不知道  $\gamma$  会不会是一个分数.

**解**

1. 直接由 **Stolz 定理** 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

2. 记  $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ , 则

$$\begin{aligned}c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \left[ \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

从而存在常数  $C > 0$ , 使得  $|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{C}{n^2}$ , 又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$  收敛, 所以由比较原则可知  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+1} - c_n|$  也收敛.

由于数列级数绝对收敛一定条件收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1} - c_n)$  也收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_1)$

存在. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$  也存在.

3. 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此我们得到了调和级数的渐进估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.$$

例题 4.23 计算

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right)$ .

证明

1. 由Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} - \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{n}{n+1} - 1 \right)} = e^{-1}.\end{aligned}$$

2. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1}} - e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right).$$

由上一小题可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}}}{n} = e^{-1}.$$

故  $e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \sim \frac{n}{e}, n \rightarrow \infty$ . 并且

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - (n+1) \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2(n+1)} = 0.\end{aligned}$$


因此

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} \left( e^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \cdot \left( \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - n \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \ln k \right] \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \ln(n+2) - (n+1) \ln(n+1)] = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[ \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \right] = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

例题 4.24 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2}.$$

 **笔记** 注意到, 分子求和时, 不是单纯的  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_n^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ , 而是  $\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ .

组合数的定义和性质可以参考 Binomial Coefficient.

**结论**  $C_a^b = \frac{a}{b} C_{a-1}^{b-1}$ .

**解** 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{n+1}{k} C_n^{k-1} \right) - \sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k + \sum_{k=1}^n (\ln C_n^{k-1} - \ln C_n^k)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k - (\ln C_n^0 - \ln C_n^n)}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln k}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+2) - n \ln(n+1) - \ln(n+1)}{1} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left( \frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例题 4.25 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na_n}$ .

**解** 因为  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}$  单调递增, 故由单调有界定理可知,  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}$  的极限要么为有限数, 要么为  $+\infty$ . 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

或不存在, 则此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = +\infty$ . 否则, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 = c < \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \right) = c - c = 0$

矛盾. 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$  可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = 0$ , 这与  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  或不存在矛盾. 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 并且由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$  可知  $a_n \sim \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \left[ \left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \right]$$

又由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 a_n = 0$ , 因此  $\left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \sim \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}, n \rightarrow \infty$ . 从而上式可化为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \left[ \left( \frac{a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} + 1 \right)^3 - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2 \right)^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2 \right)^2 \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_{n+1}^2 \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^2 - 2a_{n+1}^4 \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6 \right] = 3 + 0 + 0 = 3. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{na_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .

#### 例题 4.26

1. 设  $x_{n+1} = \ln(1+x_n), n=1, 2, \dots, x_1 > 0$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n}$ .
2. 设  $x_{n+1} = \sin x_n, n=1, 2, \dots, x_1 \in (0, \pi)$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n)$ .
3. 设  $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n=1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ .

解

1. 由  $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 并且  $x_1 > 0$ , 假设  $x_n > 0$ , 则  $x_{n+1} = \ln(1+x_n) > 0$ . 从而由数学归纳法, 可知  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是由单调有界定理, 可知数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$ . 对  $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+x_n) = \ln(1+a).$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 进而, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 2$ . 即  $x_n \sim \frac{2}{n}, n \rightarrow \infty$ .

因而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n \left( n - \frac{2}{x_n} \right)}{\ln n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{2}{x_n}}{\ln n}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}}{\frac{1}{n}} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{2}{\ln(1+x_n)}}{\frac{x_n}{2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{\ln(1+x)}}{x} \\
&= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \ln(1+x) - 2x}{x^2 \ln(1+x)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2x}{x^3} \\
&= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

实际上, 由上述计算我们可以得到  $x_n$  在  $n \rightarrow \infty$  时的渐进估计:

$$\begin{aligned}
\frac{n(nx_n - 2)}{\ln n} &= \frac{2}{3} + o(1) \Rightarrow nx_n - 2 = \frac{2 \ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\
&\Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

2. 由  $\sin x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  可知  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 又由于  $0 < x_1 < \pi$  及  $0 < x_{n+1} = \sin x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 故归纳可得  $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \geq 2$ . 因此  $\{x_n\}$  极限存在, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ . 从而对  $x_{n+1} = \sin x_n$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$  可得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{nx_n^2} &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} \right) \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = 1.
\end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{nx_n^2}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = 3$ . 即  $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, n \rightarrow \infty$ . 进而, 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n\right) &\stackrel{\text{平方差公式}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{n}{3} x_n^2\right)}{\ln n \left(1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^2 \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3}\right)}{\ln n \left(1 + \sqrt{\frac{n}{3}} x_n\right)} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{n}{3}}{\ln n} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3}}{\frac{x_n^2}{3}} \\
&= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}}{x^2} = \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x - \frac{1}{3} x^2 \sin^2 x}{x^4 \sin^2 x} \\
&= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 - \frac{1}{3} x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2}{x^6} \\
&= \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^6}{36} - \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{9} + o(x^6)}{x^6} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

(最几步的计算除了用 Taylor 展开也可以用洛朗展开计算, 即先用长除法算出  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} x^2 + o(x^2)$ , 再直接带入计算得到结果, 实际上利用洛朗展开计算更加简便.)

3. 由条件可知  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $x_1 = 1 > 0$ , 故归纳可得  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 由单调有界定理可知数

列  $\{x_n\}$  的极限要么是  $+\infty$ , 要么是有限数. 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ , 则对  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = a + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 0$  矛盾. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1 - n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)^2 - x_n^2 \right)} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x_n^2} \right)} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

因此  $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 从而  $x_n + \sqrt{2n} \sim 2\sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$ . 再结合 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} &\stackrel{\text{平方差公式}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{2\sqrt{2n} \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)^2 - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例题 4.27** 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$ .

**解** 由于  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 并且  $a_1 > 0$ , 故由数学归纳法可知  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 又  $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} > a_1$ , 再根据递推式, 可以归纳得到数列  $\{a_n\}$  单调递增. 因此, 数列  $\{a_n\}$  要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < \infty$ , 要么  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 由条件可知  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{S_n} \geq \frac{1}{na_1} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 \geq \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . 于是由 Stolz 定理, 可知

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_{n+1}^2 - a_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( a_n + \frac{1}{S_n} \right)^2 - a_n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right).\end{aligned}$$

根据 Stolz 定理, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}^2} = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right].\end{aligned}$$

由递推公式, 可得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned}1 = n+1 - n &\leq n+1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} = n+1 - \frac{na_n}{a_n + \frac{1}{S_n}} = 1 + \frac{\frac{n}{a_n S_n}}{1 + \frac{1}{a_n S_n}} \\ &= 1 + \frac{n}{1 + a_n S_n} \leq 1 + \frac{n}{1 + a_1 S_n} = 1 + \frac{n}{1 + S_n}.\end{aligned}$$



又由 Stolz 定理, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$ . 故由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n + 1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} \right] = 1$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^2} = 2 + 0 = 2.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$ .

#### 4.4.2 函数 Stolz 定理

##### 定理 4.5 (函数 Stolz 定理)

设  $T > 0, f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是内闭有界函数.

(1) 设  $g(x+T) > g(x)$ , 若有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

(2) 设  $0 < g(x+T) < g(x)$ , 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

**注** 考试中, 如果要用函数 Stolz 定理, 不要直接证明这个抽象的版本 (直接证明这个定理太繁琐). 而是根据具体问题, 证明具体函数的函数 Stolz 定理. 具体可见 [例题 4.28](#).

##### 笔记

(1) 不妨设  $A = 0$  的原因:

(2) 不妨设  $T = 1$  的原因:

**证明** 我们仅考虑  $A \in \mathbb{R}$ , 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设  $A = 0$ , 否则用  $f - Ag$  代替  $f$  即可. 不妨设  $T = 1$ , 否则用  $f(Tx)$  代替  $f$  即可.

(1) 对任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x+1) - g(x)], g(x) > 0. \quad (4.12)$$

于是对  $\forall x > X$ , 利用 (4.12) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} + \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [f(x-k+1) - f(x-k)]}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \\ &\stackrel{(4.12) \text{ 式}}{\leq} \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [g(x-k+1) - g(x-k)]}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x-[x]+X)}{g(x)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \frac{g(x) - g(x - [x] + X)}{|g(x)|} + \left| \frac{f(x - [x] + X)}{g(x)} \right| \\
&\stackrel{(4.12) \text{式}, g > 0}{\leq} \varepsilon + \left| \frac{f(x - [x] + X)}{g(x)} \right|.
\end{aligned}$$

于是利用  $f$  在  $[X, X+1]$  有界及  $X \leq x - [x] + X < X+1$ , 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

由  $\varepsilon$  任意性即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

这就完成了证明.

(2) 任何  $\varepsilon > 0$ , 由条件可知存在某个  $X \in \mathbb{N}$ , 使得对任何  $x > X$  都有

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon[g(x) - g(x+1)]. \quad (4.13)$$

于是对  $\forall x > X, \forall n \in \mathbb{N}$ , 利用(4.13)可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n [f(x+k-1) - f(x+k)] + f(x+n)}{g(x)} \right| \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^n |f(x+k-1) - f(x+k)|}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leq \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^n [g(x+k-1) - g(x+k)]}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&= \varepsilon \frac{g(x) - g(x+n)}{g(x)} + \frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\
&\leq \varepsilon + \frac{|f(x+n)|}{g(x)}.
\end{aligned}$$

再利用  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x+n)|}{g(x)} = 0 \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon, \forall x > X.$$


从而结论得证.

#### 例题 4.28

(1) 设  $\alpha > -1$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}}.$

(2) 不直接使用函数 Stolz 定理, 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x}.$

(3) 不直接使用函数 Stolz 定理, 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt$ , 这里  $[ \cdot ]$  表示向下取整函数.

 **笔记** 虽然这个几个问题的思路都是函数 Stolz 定理, 但是注意在考试中我们不能直接使用这个定理, 需要我们结合具体问题给出这个定理的证明. 具体可见本题第 (2)(3) 问的证明.

**注** 第 (1) 题如果直接洛必达得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\sin x|}{\alpha+1} \text{ 不存在,}$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

第 (2) 题中, 求和号上取  $n = \left\lceil \frac{x-X}{\pi} \right\rceil$  是因为我们要保证  $x - n\pi > X$ , 从而使得求和号内每一项  $\int_0^{x-k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^{x-k\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt$  都满足(4.16)式.

第(3)题中, 求和号上限取  $n = [x] - X$  是因为我们要保证  $x - n > X$ , 从而使得求和号内每一项  $\int_0^{x-k} (t - [t]) dt - \int_0^{x-k+1} (t - [t]) dt$  都满足(4.20)式.

第(1)题直接使用函数 Stolz 定理进行证明, 但是考试中不能直接使用函数 Stolz 定理, 需要我们给出这个定理的证明. 第(2)(3)题没有直接使用函数 Stolz 定理进行证明, 而是结合具体的问题重新证明了函数 Stolz 定理. 考试中的证明过程应该按照这样书写.

**证明**

(1) 由函数 Stolz 定理和积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt - \int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{(x+\pi)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}}$$

$$\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} t^\alpha |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} \stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha},$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x + \pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta_x^\alpha \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt}{\pi(\alpha+1)x^\alpha} = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi(\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

(2) 由 Lagrange 中值定理及积分中值定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt - \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} \stackrel{\text{Lagrange 中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt}{\frac{\pi}{x}}$$

$$\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x}. \quad (4.14)$$

其中  $x \leq \theta_x \leq x + \pi$ . 从而  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 再结合(4.14)式可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\theta_x} = \frac{2}{\pi}. \quad (4.15)$$

下面证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi}$ . 由(4.15)式可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists X \in \mathbb{N}_+$ , 使得当  $x > X$  时, 有

$$\left( \frac{2}{\pi} - \varepsilon \right) [\ln(x+\pi) - \ln x] < \left| \int_0^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt \right| < \left( \frac{2}{\pi} + \varepsilon \right) [\ln(x+\pi) - \ln x]. \quad (4.16)$$

于是对上述  $M, \forall x > X, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 利用(4.16)式, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} &= \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left[ \int_0^{x-k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^{x-k\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt \right] + \int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left[ \int_0^{x-k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^{x-k\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt \right]}{\ln x} + \frac{\int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \\ &\stackrel{(4.16) \text{ 式}}{<} \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left( \frac{2}{\pi} + \varepsilon \right) [\ln(x-k\pi+\pi) - \ln(x-k\pi)]}{\ln x} + \frac{\int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \\ &= \frac{\left( \frac{2}{\pi} + \varepsilon \right) [\ln x - \ln(x - \left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi)]}{\ln x} + \frac{\int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} &= \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left[ \int_0^{x-k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^{x-k\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt \right] + \int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \\ &\geq \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left[ \int_0^{x-k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt - \int_0^{x-k\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt \right]}{\ln x} + \frac{\int_0^{x-\left[\frac{x-X}{\pi}\right]\pi} \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.16) \text{ 式}}{>} \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x-X}{\pi}\right]} \left(\frac{2}{\pi} - \varepsilon\right) [\ln(x - k\pi + \pi) - \ln(x - k\pi)]}{\ln x} + \frac{\int_0^X \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \\
& = \frac{\left(\frac{2}{\pi} - \varepsilon\right) [\ln x - \ln(x - \left[\frac{x-X}{\pi}\right] \pi)]}{\ln x} + \frac{\int_0^X \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x}.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

又因为  $\ln x$  在  $[X, X + \pi]$  上有界, 并且  $X \leq x - \left[\frac{x-X}{\pi}\right] \pi < X + \pi, \forall x \in \mathbb{R}$ , 所以  $\ln\left(x - \left[\frac{x-X}{\pi}\right] \pi\right)$  在  $\mathbb{R}$  上有界. 从而对(4.17)(4.18)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\frac{2}{\pi} - \varepsilon \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} \leq \frac{2}{\pi} + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性即得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{\ln t} dt}{\ln x} = \frac{2}{\pi}$ .

(3) 注意到  $t - [t]$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的非负函数, 故

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{x+1} (t - [t]) dt - \int_0^x (t - [t]) dt}{x + 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} (t - [t]) dt \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 (t - [t]) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned} \quad (4.19)$$

下面证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (t - [t]) dt = \frac{1}{2}$ .

由(4.19)式可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $X \in \mathbb{N}_+$ , 使得当  $x \geq X$  时, 有

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \int_0^{x+1} (t - [t]) dt - \int_0^x (t - [t]) dt < \frac{1}{2} + \varepsilon. \quad (4.20)$$

从而对  $\forall x > X$ , 利用(4.20)式, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^x (t - [t]) dt}{x} &= \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [\int_0^{x-k+1} (t - [t]) dt - \int_0^{x-k} (t - [t]) dt]}{x} + \frac{\int_0^{x-([x]-X)} (t - [t]) dt}{x} \\
&\stackrel{(4.20) \text{ 式}}{<} \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} (\frac{1}{2} + \varepsilon)}{x} + \frac{\int_0^{X+1} (t - [t]) dt}{x} \\
&= \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)([x] - X)}{x} + \frac{\int_0^{X+1} (t - [t]) dt}{x}.
\end{aligned} \quad (4.21)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^x (t - [t]) dt}{x} &= \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} [\int_0^{x-k+1} (t - [t]) dt - \int_0^{x-k} (t - [t]) dt]}{x} + \frac{\int_0^{x-([x]-X)} (t - [t]) dt}{x} \\
&\stackrel{(4.20) \text{ 式}}{>} \frac{\sum_{k=1}^{[x]-X} (\frac{1}{2} - \varepsilon)}{x} + \frac{\int_0^{X+1} (t - [t]) dt}{x} \\
&= \frac{(\frac{1}{2} - \varepsilon)([x] - X)}{x} + \frac{\int_0^{X+1} (t - [t]) dt}{x}.
\end{aligned} \quad (4.22)$$

于是利用  $\int_0^{X+1} (t - [t]) dt < \infty$ , (4.21)(4.22)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t - [t]) dt}{x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t - [t]) dt}{x} \leq \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t - [t]) dt}{x} = \frac{1}{2}.$$

## 4.5 递推数列求极限和估阶

### 4.5.1 “折线图”分析法 (图未完成, 但已学会)

关于递推数列求极限的问题, 可以先画出相应的“折线图”, 然后根据“折线图”的性质来判断数列的极限. 这种方法可以帮助我们快速得到数列的极限, 但是对于数列的估阶问题, 这种方法并不适用.

**注** 这种方法只能用来分析问题, 严谨的证明还是需要用单调性分析法或压缩映像法书写.

**例题 4.29** 设  $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$ , 判断  $u_n$  的收敛性.

**解**

**例题 4.30** 定义数列  $a_0 = x, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + y^2}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$ , 求  $D \triangleq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{数列 } a_n \text{ 收敛}\}$  的面积.

**解**

**例题 4.31**

**解**

### 4.5.2 单调性分析法

关于递推数列求极限和估阶的问题, 单调性分析法只适用于

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}.$$

$f$  是递增或者递减的类型, 且大多数情况只适用于  $f$  递增情况, 其余情况不如压缩映像思想方便快捷. 显然递推数列  $x_{n+1} = f(x_n)$  确定的  $x_n$  如果收敛于  $x \in \mathbb{R}$ , 则当  $f$  连续时一定有  $f(x) = x$ , 此时我们也把这个  $x$  称为  $f$  的不动点. 因此  $f(x) = x$  是  $x_n$  收敛于  $x \in \mathbb{R}$  的必要条件.

#### 命题 4.4 (递增函数递推数列)

设  $f$  是递增函数, 则递推

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \quad (4.23)$$

确定的  $x_n$  一定单调, 且和不动点大小关系恒定.

**笔记** 本结论表明由递增递推(4.23)确定的数列的单调性和有界性, 完全由其  $x_2 - x_1$  和  $x_1$  与不动点  $x_0$  的大小关系确定. 即  $x_2 > x_1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+, x_1 > x_0 \Rightarrow x_n > x_0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

**证明** 我们只证一种情况, 其余情况是完全类似的. 设  $x_0$  是  $f$  的不动点且  $x_1 \leq x_0, x_2 \geq x_1$ , 则若  $x_n \leq x_{n+1}, x_n \leq x_0, n \in \mathbb{N}$ , 运用  $f$  递增性有

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_0) = x_0, x_{n+2} = f(x_{n+1}) \geq f(x_n) = x_{n+1}.$$

由数学归纳法即证明了命题 4.4

#### 命题 4.5 (递减函数递推数列)

设  $f$  是递减函数, 则递推

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

确定的  $x_n$  一定不单调, 且和不动点大小关系交错.

**笔记** 我们注意到  $f \circ f$  递增就能把  $f$  递减转化为递增的情况, 本结论无需记忆或证明, 只记得思想即可.  $x_n$  和不动点关系交错, 即若  $x_0$  为数列  $x_n$  的不动点, 且  $x_1 \geq x_0, x_2 \leq x_0$ , 则  $x_3 \geq x_0, \dots, x_{2n} \leq x_0, x_{2n-1} \geq x_0, \dots$ ; 并且  $x_2 \leq x_1, x_3 \geq x_1, x_4 \leq x_2, x_5 \geq x_3, \dots, x_{2n} \leq x_{2n-2}, x_{2n-1} \geq x_{2n-3}, \dots$ .

**证明** 由命题 4.4 类似证明即可.

**例题 4.32 递增/递减递推数列**

1. 设  $x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, n=1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
2. 设  $x_1, a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3}), n=1, 2, \dots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
3. 设  $x_1 = 2, x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3, (n=2, 3, \dots)$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
4. 设  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1, n=1, 2, \dots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

### 笔记

1. 不妨设  $x_1 \geq 0$  的原因: 我们只去掉原数列  $\{x_n\}$  的第一项, 得到一个新数列, 并且此时新数列是从原数列  $\{x_n\}$  的第二项  $x_2$  开始的. 对于原数列  $\{x_n\}$  而言, 有  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 故新数列的每一项都大于等于 0. 将新数列重新记为  $\{x_n\}$ , 则  $x_1 \geq 0$ . 若此时能够证得新数列收敛到  $x_0$ , 则由于数列去掉有限项不会影响数列的敛散性以及极限值, 可知原数列也收敛到  $x_0$ . 故不妨设  $x_1 \geq 0$  是合理地.

(简单地说, 就是原数列用  $x_2$  代替  $x_1$ , 用  $x_{n+1}$  代替  $x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 而由  $x_1 > -6$ , 可知  $x_2 = \sqrt{6+x_1} \geq 0$ .)

**注** 这种不妨设的技巧在数列中很常用, 能减少一些不必要的讨论. 实际上就是去掉数列中有限个有问题的项, 而去掉这些项后对数列的极限没有影响.

### 解

1. 不妨设  $x_1 \geq 0$ , 则设  $f(x) = \sqrt{6+x}$ , 则  $f(x)$  单调递增.

当  $x_1 < 3$  时, 由条件可知

$$x_2 - x_1 = \sqrt{6+x_1} - x_1 = \frac{(3-x_1)(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1} + x_1}. \quad (4.25)$$

从而此时  $x_2 > x_1$ . 假设当  $n=k$  时, 有  $x_k < 3$ . 则当  $n=k+1$  时, 就有

$$x_{k+1} = f(x_k) = \sqrt{6+x_k} < \sqrt{6+3} = 3.$$

故由数学归纳法, 可知  $x_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

假设当  $n=k$  时, 有  $x_{k+1} \geq x_k$ . 则当  $n=k+1$  时, 就有

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) \geq f(x_k) = x_{k+1}.$$

故由数学归纳法, 可知  $\{x_n\}$  单调递增. 于是由单调有界定理, 可得数列  $\{x_n\}$  收敛.

当  $x_1 \geq 3$  时, 由(4.25)式可知, 此时  $x_2 \leq x_1$ . 假设当  $n=k$  时, 有  $x_k \geq 3$ . 则当  $n=k+1$  时, 就有

$$x_{k+1} = f(x_k) = \sqrt{6+x_k} \geq \sqrt{6+3} = 3.$$

故由数学归纳法, 可知  $x_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

假设当  $n=k$  时, 有  $x_{k+1} \leq x_k$ . 则当  $n=k+1$  时, 就有

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) \leq f(x_k) = x_{k+1}.$$

故由数学归纳法, 可知  $\{x_n\}$  单调递减. 于是由单调有界定理, 可得数列  $\{x_n\}$  收敛.

综上, 无论  $x_1 > 3$  还是  $x_1 \leq 3$ , 都有数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 则对  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$

可得  $a = \sqrt{6+a}$ , 解得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 3$ .

2.

3.

4.

### 4.5.3 利用上下极限求递推数列极限

**例题 4.33** 设  $A, B > 0, a_1 > A$  以及  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n}, n \in \mathbb{N}_+$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**证明** 显然  $a_n > A > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 从而  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n} \leq A + \frac{B}{A}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 故数列  $\{a_n\}$  有界. 于是可设  $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n <$

$\infty, b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 对等式  $a_{n+1} = A + \frac{B}{a_n}$  两边同时关于  $n \rightarrow +\infty$  取上下极限得到

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{a_n} = A + \frac{B}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = A + \frac{B}{b},$$

$$b = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{a_n} = A + \frac{B}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = A + \frac{B}{a}.$$


于是我们有  $\begin{cases} ab = Ab + B \\ ab = Aa + B \end{cases}$ , 解得  $a = b = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ . 又由  $a_n > A > 0$ , 可知  $a = b = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}.$$

#### 4.5.4 类递增/类递减递推数列

##### 例题 4.34 类递增模型

1. 设  $c_1, c_2 > 0, c_{n+2} = \sqrt{c_{n+1}} + \sqrt{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .
2. 设  $a_k \in (0, 1), 1 \leq k \leq 2021$  且  $(a_{n+2021})^{2022} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+2020}, n = 1, 2, \dots$ , 这里  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

 **笔记** 解决此类问题一般先定界 (即确定  $c_n$  的上下界的具体数值), 再对等式两边同时取上下极限即可.

**注**

1. 记  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$  的原因: 为了证明数列  $c_n$  有界, 我们需要先定界 (即确定  $c_n$  的上下界的具体数值), 然后再利用数学归纳法证得数列  $c_n$  有界. 显然  $c_n$  有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列  $c_n$  的一个上界, 我们可以先假设  $c_n$  有一个上界  $b$  (此时  $b$  是待定常数). 则  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} \leq \sqrt{b} + \sqrt{b} = 2\sqrt{b} \leq b$ , 由此解得  $b \geq 4$ . 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证  $b$  同时也是  $c_1, c_2$  的上界. 故只要取  $b \geq 4, c_1, c_2$  就一定能归纳出  $b$  是  $c_n$  的一个上界. 而我们取  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$  满足这个条件.
2. 记  $M =$  的原因: 同上一问, 假设数列  $a_n$  有一个上界  $M$  (此时  $M$  是待定常数), 则

$$a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+2020}} \leq \sqrt[2022]{M + M + \dots + M} = \sqrt[2022]{2021M} \leq M.$$

由此解得  $M \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}$ . 又由数学归纳法的原理, 可知需要保证  $M$  同时也是  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  的上界. 故只要取  $M \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  就一定能归纳出  $M$  是  $a_n$  的一个上界. 而我们取  $M = \max\{(2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \dots, a_{2020}\}$  满足这个条件.

**解**

1. 记  $b \triangleq \max\{c_1, c_2, 4\}$ , 则  $0 < c_1, c_2 \leq b$ . 假设  $0 < c_n \leq b$ , 则

$$0 < c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} \leq \sqrt{b} + \sqrt{b} = 2\sqrt{b} \leq b.$$

由数学归纳法, 可知对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $0 < c_n \leq b$  成立. 即数列  $\{c_n\}$  有界.

因此可设  $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n < \infty, l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n < \infty$ . 令  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$  两边同时对  $n \rightarrow \infty$  取上下极限, 可得

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_{n-1}} = 2\sqrt{L} \Rightarrow L \leq 4,$$

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_{n-1}} = 2\sqrt{l} \Rightarrow l \geq 4.$$

又  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ , 故  $L = l = 4$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 4$ .

2. 取  $M = \max\{(2021)^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \dots, a_{2020}\}$ , 显然  $a_n > 0$  且  $a_1, a_2, \dots, a_{2020} \leq M$ . 假设  $a_k \leq M, k = 1, 2, \dots, n$  则由条件可得

$$a_{n+1} = \sqrt[2022]{a_{n-2020} + a_{n-2019} + \dots + a_n} \leq \sqrt[2022]{M + M + \dots + M} = \sqrt[2022]{2021M} \leq M.$$

由数学归纳法, 可知  $0 < a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 即数列  $a_n$  有界. 因此可设  $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 由条件可得

$$a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}}.$$


上式两边同时对  $n \rightarrow \infty$  取上下极限得到

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2021} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020})} \\ &\leq \sqrt[2022]{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + \cdots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{A + A + \cdots + A} \Rightarrow A \leq (2021)^{\frac{1}{2021}}, \\ a &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2021} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+2020})} \\ &\geq \sqrt[2022]{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + \cdots + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2020}} = \sqrt[2022]{a + a + \cdots + a} \Rightarrow a \geq (2021)^{\frac{1}{2021}}. \end{aligned}$$

又  $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 故  $A = a = (2021)^{\frac{1}{2021}}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (2021)^{\frac{1}{2021}}$ .

#### 例题 4.35 类递减模型

1. 设  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}, a_1, a_2 > 0, n = 1, 2, \cdots$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.
2. 设  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_{n+2} = 3 + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_n^2}, n = 1, 2, \cdots$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

 **笔记** 此类问题一定要记住, 隔项抽子列. 如果不记住做题时会难以想到. 与类递增模型一样, 一开始要定界.

**证明**

1. 取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\} > 0$ , 则有  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$  成立. 假设  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}$ , 则由条件可得

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}.$$

由数学归纳法, 可知  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 即数列  $a_n$  有界. 于是可设  $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, B = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . 由致密性定理, 可知存在一个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k-1} = l_3 < \infty$ . 并且根据上下极限的定义, 可知  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$ . 对等式  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  两边同时关于  $n \rightarrow +\infty$  取上下极限得到

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} \Rightarrow AB \leq 2. \\ B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \right) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} + \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} \Rightarrow AB \geq 2. \end{aligned}$$

故  $AB = 2$ . 因为  $\{a_{n_k}\}$  是数列  $a_n$  的一个子列, 所以  $\{a_{n_k}\}$  也满足  $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}, \forall k \in \mathbb{N}_+$ . 并且子列  $\{a_{n_k-1}\}, \{a_{n_k}\}, \{a_{n_k+1}\}, \{a_{n_k+2}\}$  的极限都存在, 于是对  $a_{n_k+2} = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \frac{1}{a_{n_k}}$  等式两边同时关于  $k \rightarrow +\infty$  取极限, 再结合  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$  得到

$$\begin{aligned} A &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k+1}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} \\ &= \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \leq \frac{1}{B} + \frac{1}{B} = \frac{2}{B} = A \Rightarrow l_1 = l_2 = B. \end{aligned}$$



同理再对  $a_{n_{k+1}} = \frac{1}{a_{n_k}} + \frac{1}{a_{n_{k-1}}}$  等式两边同时关于  $k \rightarrow +\infty$  取极限, 再结合  $B \leq l_1, l_2, l_3 \leq A$  得到

$$\begin{aligned} B = l_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_{k-1}}} \\ &= \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \geq \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = B \Rightarrow l_2 = l_3 = A. \end{aligned}$$

故  $A = B = l_1 = l_2 = l_3$ , 又由于  $AB = 2$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = B = \sqrt{2}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ .

2.

注

1. (1) 取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\}$  的原因: 为了证明数列  $a_n$  有界, 我们需要先定界, 然后再利用数学归纳法证得数列  $a_n$  有界. 显然  $a_n$  有一个下界 0, 但上界无法直接观察出来. 为了确定出数列  $a_n$  的上下界, 我们可以先假设  $b$  为数列  $a_n$  的一个上界 (此时  $b$  是待定常数), 但是我们根据  $a_n > 0$  和  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  只能得到  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} < +\infty$ , 无法归纳法出  $a_n \leq b$ , 故我们无法归纳出  $0 < a_n < b, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 因此仅待定一个上界并不够, 下界并不能简单的取为 0, 我们还需要找到一个更接近下确界的大于零的下界, 不妨先假设这个下界为  $a > 0$  (此时  $a$  也是待定常数). 利用这个下界和递推式  $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$  归纳出  $0 < a \leq a_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}_+$  (此时  $a, b$  都是待定常数). 于是由已知条件可得

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \leq b \Rightarrow ab \geq 2, \\ a_{n+2} &= \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} \geq a \Rightarrow ab \leq 2. \end{aligned}$$

从而  $ab = 2$ , 即  $b = \frac{2}{a}$ . 进而  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}$ . 又由数学归纳法的原理, 可知我们需要同时保证  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$ . 因此找到一个合适的  $a$ , 使得  $0 < a \leq a_1, a_2 \leq \frac{2}{a}$  成立就一定归纳出  $0 < a \leq a_n \leq \frac{2}{a}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 即数列  $\{a_n\}$  有界. 而当我们取  $a = \min \left\{ a_1, a_2, \frac{2}{a_1}, \frac{2}{a_2} \right\}$  时, 有  $a_1, a_2 \leq a, \frac{2}{a} \geq \frac{2}{a_1} = a_1, \frac{2}{a} \geq \frac{2}{a_2} = a_2$ . 恰好满足这个条件.

- (2) 能取到一个子列  $a_{n_k}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+2}} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+1}} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k-1}} = l_3 < \infty$  成立的原因: 由  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  和上极限的定义 (上极限就是最大的子列极限), 可知存在一个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+2}} = A$ . 因为数列  $\{a_{n_{k+1}}\}$  有界 (因为数列  $\{a_n\}$  有界), 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_{k+1}}\}$  一定存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_j}+1}\}$ , 并记  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}+1} = l_1 < \infty$ . 又因为  $\{a_{n_{k_j}+2}\}$  是  $\{a_{n_{k+2}}\}$  的子列, 所以  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}+2} = A$ . 由于  $\{a_{n_{k_j}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_j}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+2}} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+1}} = l_1 < \infty$ . 同理由于数列  $\{a_{n_k}\}$  有界, 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_k}\}$  存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$ , 并记  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}} = l_2$ . 又因为  $\{a_{n_{k_l}+2}\}$  是  $\{a_{n_{k+2}}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_l}+1}\}$  是  $\{a_{n_{k+1}}\}$  的子列, 所以  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}+2} = A, \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}+1} = l_1$ . 由于  $\{a_{n_{k_l}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_l}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+2}} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+1}} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty$ . 再同理由于数列  $\{a_{n_k}\}$  有界, 所以由致密性定理可知  $\{a_{n_k}\}$  存在一个收敛的子列  $\{a_{n_{k_s}}\}$ , 并记  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}} = l_3$ . 又因为  $\{a_{n_{k_s}+2}\}$  是  $\{a_{n_{k+2}}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_s}+1}\}$  是  $\{a_{n_{k+1}}\}$  的子列,  $\{a_{n_{k_s}}\}$  是  $\{a_{n_k}\}$  的子列, 所以  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}+2} = A, \lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}+1} = l_1, \lim_{s \rightarrow \infty} a_{n_{k_s}} = l_2$ . 由于  $\{a_{n_{k_s}}\}$  仍是  $\{a_n\}$  的一个子列, 因此不妨将  $\{a_{n_{k_s}}\}$  记作  $\{a_{n_k}\}$ , 则此时有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+2}} = A, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+1}} = l_1 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l_2 < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k-1}} = l_3 < \infty$ .

2.

## 4.5.5 压缩映像

我们来看一种重要的处理模型, 压缩映像方法, 它是我们以后解决基础题的重要方法. 其思想内核有两种, 一种是找到不动点  $x_0$ , 然后得到某个  $L \in (0, 1)$ , 使得

$$|x_n - x_0| \leq L|x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|.$$


还有一种是得到某个  $L \in (0, 1)$ , 使得

$$|x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq L^{n-2}|x_2 - x_1|.$$

当数列由递推确定时, 我们有

$$|x_n - x_0| = |f(x_{n-1}) - f(x_0)|, |x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|,$$

因此往往可适用中值定理或者直接放缩法来得到渴望的  $L \in (0, 1)$ , 特别强调  $L = 1$  是不对的.

 **笔记** 常规的递减递推数列求极限问题我们一般使用压缩映像证明. 压缩映像的书写过程往往比用递推函数的二次复合和数学归纳法的书写要简便的多.

**例题 4.36**

1. 设  $x_1 > -1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, n = 1, 2, \cdots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

2. 求数列  $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \cdots$  极限.

**解**

1. **解法一 (递减递推归纳法):** 不妨设  $x_1 > 0$  (因为  $x_2 = \frac{1}{1+x_1} > 0$ ), 归纳可知  $x_n > 0$ . 由于原递推函数是递减函数, 因此考虑递推函数的二次复合  $x_{n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}} = \frac{1+x_n}{2+x_n}$ , 这个递推函数一定是单调递增的. 进而考虑

$$\frac{1+x}{2+x} - x = \frac{\left(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x\right)}{2+x}.$$

于是当  $x_1 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时, 有  $x_3 - x_1 = \frac{1+x_1}{2+x_1} - x_1 \leq 0$ , 即  $x_3 \leq x_1$ . 从而由 **递增递推结论** 可知,  $\{x_{2n-1}\}$  单调递减且

$x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ . 此时  $x_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (由  $x = \frac{1}{1+x}$  以及  $x_n > 0$  可以解得不动点  $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 又因为原数列是递减递推, 所以  $x_n$  与  $x_0$  大小关系交错. 而  $x_1 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 故  $x_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ). 于是  $x_4 - x_2 = \frac{1+x_2}{2+x_2} - x_2 > 0$ ,

即  $x_4 > x_2$ . 从而由 **递增递推结论** 可知,  $\{x_{2n}\}$  单调递增且  $x_{2n} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ .

因此由单调有界定理可知,  $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = b > 0$ . 又由  $x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}}, x_{2n-1} =$

$\frac{1}{1+x_{2n-2}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 再令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = \frac{1}{1+a}, b = \frac{1}{1+b}$ , 进而解得  $a = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 同理, 当  $x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时, 也有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**解法二 (压缩映像):** 不妨设  $x_1 > 0$  (用  $x_2 = \frac{1}{1+x_1} > 0$  代替  $x_1$ ), 归纳可知  $x_n > 0$ . 设  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 则

$$|x_{n+1} - x| = \left| \frac{1}{1+x_n} - x \right| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x} \right| = \frac{|x_n - x|}{(1+x_n)(1+x)} \leq \frac{1}{1+x} |x_n - x|.$$

从而

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{1}{1+x} |x_n - x| \leq \frac{1}{(1+x)^2} |x_{n-1} - x| \leq \cdots \leq \frac{1}{(1+x)^n} |x_1 - x|.$$

于是令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x| = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

2. 由条件可知,  $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$  (由此可解得  $x = 2$  为不动点). 于是

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 2| &= |\sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} - 2| \\ &= \frac{|3 - \sqrt{7 + x_n}|}{\sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} + 2} \\ &= \frac{|2 - x_n|}{(\sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} + 2)(3 + \sqrt{7 + x_n})} \\ &\leq \frac{1}{6}|x_n - 2|. \end{aligned}$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} |x_{2n} - 2| &\leq \frac{1}{6}|x_{2n-2} - 2| \leq \frac{1}{6^2}|x_{2n-4} - 2| \leq \cdots \leq \frac{1}{6^{n-1}}|x_2 - 2|; \\ |x_{2n+1} - 2| &\leq \frac{1}{6}|x_{2n-1} - 2| \leq \frac{1}{6^2}|x_{2n-3} - 2| \leq \cdots \leq \frac{1}{6^n}|x_1 - 2|. \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2n} - 2| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2n+1} - 2| = 0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 2$ .

**例题 4.37** 设数列  $x_1 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \cos x_n, n \in \mathbb{N}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解** 令  $g(x) = x - \cos x$ , 则  $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ , 且  $g'(x)$  不恒等于 0. 又  $g(0) = -1 < 0, g(1) = 1 - \cos 1 > 0$ , 因此由零点存在定理可知,  $g$  存在唯一零点  $x_0 \in (0, 1)$ . 不妨设  $x_1 \in [-1, 1]$  (用  $x_2$  代替  $x_1$ ), 则  $x_n \in [-1, 1]$ . 再令  $f(x) = \cos x$ , 则  $f'(x) = -\sin x$ . 于是记  $C \triangleq \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| \in (0, 1)$ .

故由 Lagrange 中值定理, 可得存在  $\theta_n \in (\min\{x_n, x_0\}, \max\{x_n, x_0\})$ , 使得对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\theta_n)||x_n - x_0| \leq C|x_n - x_0|.$$

进而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| \leq C|x_n - x_0| \leq C^2|x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq C^n|x_1 - x_0|.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 再结合  $C \in (0, 1)$ , 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_0| = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

#### 命题 4.6 (加强的压缩映像)

设可微函数  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  满足  $|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ . 证明: 对

$$x_1 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N},$$

必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

**注** 注意到  $f'$  未必是连续函数, 所以  $\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$  未必可以严格小于 1.

**笔记** 实际上, 用压缩映像证明  $\{x_n\}$  的极限是  $x_0$ , 也同时蕴含了  $x_0$  就是这个递推数列的唯一不动点 (反证易得).

**证明** 令  $g(x) = x - f(x)$ , 则  $g(a) = a - f(a) \leq 0, g(b) = b - f(b) \geq 0$ . 由零点存在定理可知, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得

$$x_0 = f(x_0). \text{ 令 } h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}, \text{ 则由导数定义可知 } h \in C[a, b]. \text{ 又由 } |f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b], \text{ 可知}$$

$|h(x_0)| < 1$ . 对  $\forall x \neq x_0$ , 由 Lagrange 中值定理可知

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\theta_x)| < 1, \quad \theta_x \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$$

故  $|h(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ . 于是记  $L \triangleq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \in (0, 1)$ . 因此再由 Lagrange 中值定理可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\xi_n)||x_n - x_0|, \quad \xi_n \in (\min\{x_n, x_0\}, \max\{x_n, x_0\})$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|f'(\xi_n)| = \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = |h(x_n)| \leq L$$

进而对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$|x_{n+1} - x_0| = |f'(\xi_n)| |x_n - x_0| \leq L |x_n - x_0| \leq L^2 |x_{n-1} - x_0| \leq \cdots \leq L^n |x_1 - x_0|$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_0| = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

#### 命题 4.7 (反向压缩映像)

设  $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}, x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N},$$

证明: 若  $f$  在  $x = a$  可导, 则  $|f'(a)| \leq 1$ .

**证明** (反证法) 假设  $|f'(a)| > 1$ , 由导数定义及极限保号性可知, 存在  $r > 1, \delta > 0$ , 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \geq r > 1, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta].$$

即

$$|f(x) - f(a)| \geq r|x - a|, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta].$$

因为  $f$  在  $x = a$  可导以及  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 所以由 Heine 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . 又  $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 从而等式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $a = f(a)$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0$ , 因此存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对  $\forall n \geq N$ , 有

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \geq r|x_n - a|.$$

故对  $\forall n \geq N$ , 有

$$|x_{n+1} - a| \geq r|x_n - a| \geq r^2|x_{n-1} - a| \geq \cdots \geq r^n|x_1 - x_0|.$$


上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - a| = +\infty$ , 矛盾.

### 4.5.6 强求通项和强行裂项

#### 4.5.6.1 直接构造通项

先来看能够直接构造出数列通项的例子. 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数或双曲三角函数的形式, 再利用三角函数或双曲三角函数的性质递推归纳.

**例题 4.38** 设  $a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}, n = 1, 2, \cdots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n$ .

 **笔记** 本题是经典的例子, 注意此类问题如果不能求出通项就无法求出具体的值, 本题便是一个能求出通项从而算出极限值的经典例子.

**注** 这类问题只能靠记忆积累.

**解** 利用

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}, \theta \in \mathbb{R},$$

因为  $a_1 \in (0, 1)$ , 所以一定存在  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $a_1 = \cos \theta$ . 则  $\theta = \arccos a_1, \sin \theta = \sqrt{1 - a_1^2}$ . 并且由  $a_{n+1} =$

$\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}, n = 1, 2, \cdots$  可得

$$a_2 = \cos \frac{\theta}{2}, a_3 = \cos \frac{\theta}{2^2}, \cdots, a_n = \cos \frac{\theta}{2^{n-1}}.$$


因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin \frac{\theta}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} \prod_{k=0}^{n-2} \cos \frac{\theta}{2^k}$$

$$= \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = \frac{\sin(2 \arccos a_1)}{2 \arccos a_1} = \frac{a_1 \sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}.$$

**例题 4.39** 设  $x_1 = \sqrt{5}, x_{n+1} = x_n^2 - 2$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

 **笔记** 这类问题只能靠记忆积累. 找不到递推数列通项就很难处理. 一般我们可以猜递推数列通项就是三角函数/双曲三角函数的形式, 再利用三角函数/双曲三角函数的性质递推归纳.

**解** 注意到  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  在  $\mathbb{R}$  上无解, 因此推测类似的双曲三角函数可以做到. 设  $x_1 = 2 \cosh \theta, \theta \in (0, +\infty)$ . 利用

$$\cosh x = 2 \cosh^2 \frac{x}{2} - 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

我们归纳可证

$$x_n = 2 \cosh(2^{n-1} \theta), n = 1, 2, \cdots.$$

于是利用  $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x, \forall x \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \prod_{k=0}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sinh \theta \prod_{k=0}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \sinh(2\theta) \prod_{k=1}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \sinh(2^2 \theta) \prod_{k=2}^{n-1} \cosh(2^k \theta)}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh 2^n \theta}{2 \sinh \theta \cosh(2^n \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tanh 2^n \theta}{2 \sinh \theta} = \frac{1}{2 \sinh \theta} = 1, \end{aligned}$$

这里倒数第二个等号来自  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$ .

**例题 4.40** 设  $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1, n = 2, 3, \cdots$ , 则计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

**注** 因为双曲三角函数  $\cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上的值域为  $(1, +\infty)$ , 并且  $\cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增, 所以一定存在唯一的  $\theta \in (0, +\infty)$ , 使得  $a_1 = \cosh \theta = 3$ .


**证明** 设  $a_1 = \cosh \theta = 3, \theta \in (0, +\infty)$ . 则利用  $\cosh 2\theta = 2 \cosh^2 \theta - 1$ , 再结合条件归纳可得

$$a_n = 2a_{n-1}^2 - 1 = \cosh 2^{n-1} \theta, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh 2^{n-1} \theta}{2^n \prod_{k=1}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2^n \sinh \theta \prod_{k=1}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2^{n-1} \sinh 2\theta \prod_{k=2}^{n-1} \cosh 2^{k-1} \theta} = \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta \cosh 2^{n-1} \theta}{2 \sinh 2^{n-1} \theta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh \theta}{2 \tanh 2^{n-1} \theta} \stackrel{\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh 2^{n-1} \theta = 1}{=} \frac{\sinh \theta}{2} = \frac{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**例题 4.41** 设  $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$ .

 **笔记** 关于求和的问题, 要注意求和的通项能否凑成相邻两项相减的形式, 从而就能直接求和消去中间项, 进而将求和号去掉.

**注** 因为双曲三角函数  $2 \cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上的值域为  $(1, +\infty)$ , 并且  $2 \cosh x$  在  $(0, +\infty)$  上严格递增, 所以一定存在唯一的  $\theta \in (0, +\infty)$ , 使得  $y_0 = 2 \cosh \theta \geq 2$ .

**证明** 设  $y_0 = 2 \cosh \theta, \theta \in (0, +\infty)$ , 则利用  $\cosh 2\theta = 2 \cosh^2 \theta - 1$ , 再结合条件归纳可得


$$y_1 = y_0^2 - 2 = 4 \cosh^2 \theta - 2 = 2(2 \cosh^2 \theta - 1) = 2 \cosh 2\theta,$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1^2 - 2 = 4 \cosh^2 2\theta - 2 = 2(2 \cosh^2 2\theta - 1) = 2 \cosh 2^2\theta, \\
&\dots\dots \\
y_n &= y_{n-1}^2 - 2 = 4 \cosh^2 2^{n-1}\theta - 2 = 2(2 \cosh^2 2^{n-1}\theta - 1) = 2 \cosh 2^n\theta, \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n 2^{n+1} \cosh 2^k \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{2^{n+1} \sinh \theta \prod_{k=0}^n \cosh 2^k \theta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{2^n \sinh 2\theta \prod_{k=1}^n \cosh 2^k \theta} = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \theta}{\sinh 2^{n+1} \theta} \\
&= 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{2^{n+1} \theta} - e^{-2^{n+1} \theta}} = 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2^{n+1} \theta}}{e^{2^{n+2} \theta} - 1} \\
&= 2 \sinh \theta \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{2^{n+1} \theta} - 1} - \frac{1}{e^{2^{n+2} \theta} - 1} \right) = \frac{2 \sinh \theta}{e^{2\theta} - 1} \\
&= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta (e^\theta - e^{-\theta})} = e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta \\
&= \frac{y_0}{2} - \sqrt{\cosh^2 \theta - 1} = \frac{y_0}{2} - \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - 1}.
\end{aligned}$$

**例题 4.42** 设  $y_0 > 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}$ , 计算  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{y_n})$ .

 **笔记** 关于累乘的问题, 要注意累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式, 从而就能直接累乘消去中间项, 进而将累乘号去掉.

本题是利用已知条件和平方差公式将累乘的通项能否凑成相邻两项相除的形式.

**证明** 一方面

$$y_n + 1 = y_{n-1}^2 - 1 = (y_{n-1} - 1)(y_{n-1} + 1) \Rightarrow y_{n-1} - 1 = \frac{y_n + 1}{y_{n-1} + 1} \Rightarrow y_n - 1 = \frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1}.$$

另外一方面

$$y_n - 2 = y_{n-1}^2 - 4 = (y_{n-1} - 2)(y_{n-1} + 2) \Rightarrow y_n - 2 = (y_{n-1} - 2)y_{n-2}^2 \Rightarrow y_n = \sqrt{\frac{y_{n+2} - 2}{y_{n+1} - 2}}.$$

于是结合  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = +\infty$  我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{y_n} \right) &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{y_n - 1}{y_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left( \frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_{n+1} - 2}{y_{n+2} - 2}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^m \left( \frac{y_{n+1} + 1}{y_n + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_{n+1} - 2}{y_{n+2} - 2}} \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+1} + 1}{y_0 + 1} \cdot \sqrt{\frac{y_1 - 2}{y_{m+2} - 2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+1} + 1}{\sqrt{y_{m+1}^2 - 4}} \cdot \frac{\sqrt{y_0^2 - 4}}{y_0 + 1} = \frac{\sqrt{y_0^2 - 4}}{y_0 + 1}.
\end{aligned}$$

### 4.5.6.2 强求通项和强行裂项

若数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty}$  满足下列递推条件之一:

1.  $a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \dots;$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = A.$

则我们都可以考虑对  $a_n$  进行强行裂项和强求通项, 从而可以将  $a_n$  写成关于  $b_n, d_n$  或  $A, d_n$  的形式, 进而将题目

条件和要求进行转化.

**命题 4.8 (强求通项和强行裂项)**

(1) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件:

$$a_n = d_n a_{n-1} + b_n, n = 1, 2, \dots, \quad (4.26)$$

则令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 一定有

$$a_n = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots.$$

(2) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = A, \quad (4.27)$$

则令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 再令  $b_0 = 1, b_n = a_n - \frac{c_{n-1} a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A, \\ a_n = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots.$$

**注** 此时只能都对  $a_n$  进行强行裂项和强求通项,  $b_n$  和  $d_n$  都无法通过这种方法强行裂项和强求通项!

**笔记** 也可以通过观察原数列  $a_n$  的递推条件直接得到需要构造的数列, 从而将  $a_n$  强行裂项和强求通项. 具体可见例题 4.43 解法一. (1) 的具体应用可见例题 4.44 笔记; (2) 的具体应用可见例题 4.43 笔记.

**证明** (强行裂项和强求通项的具体步骤)

(1) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件(4.26)式, 则令  $c_0 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ , 由递推条件(4.26)式可得

$$c_n a_n = c_n d_n a_{n-1} + c_n b_n, n = 1, 2, \dots. \quad (4.28)$$

我们希望  $c_n d_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{d_n}, n = 2, 3, \dots$ . 从而  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 1, 2, \dots$ , 且

该式对  $n = 0$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 则由(4.28)式可知

$$c_n a_n = c_n d_n a_{n-1} + c_n b_n \Rightarrow c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1} = c_n b_n, n = 1, 2, \dots.$$

于是

$$a_n = \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots.$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项, 并将  $a_n$  写成了关于  $b_n, d_n$  的形式.

(2) 若数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{d_n\}_{n=0}^\infty$  满足递推条件(4.27)式, 则令  $c_0 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ , 由递推条件(4.27)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_n d_n a_{n-1}}{c_n} = A. \quad (4.29)$$

我们希望  $c_n d_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{d_n}, n = 2, 3, \dots$ . 从而  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 1, 2, \dots$ , 且

该式对  $n = 0$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k}, n = 0, 1, \dots$ , 则由(4.29)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d_n a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_n d_n a_{n-1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = A. \quad (4.30)$$

于是令  $b_0 = 1$ , 待定  $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 即  $b_n = \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} =$

$a_n - \frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ . 因此, 令  $b_0 = 1, b_n = a_n - \frac{c_{n-1}a_{n-1}}{c_n}, n = 1, 2, \dots$ , 则  $b_n$  满足

$$c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}, n = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

并且由(4.30)式可知


$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n} = A.$$

从而由(4.31)式可得

$$a_n = \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n c_k b_k + a_0, n = 0, 1, \dots$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项.

**例题 4.43** 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, |\lambda| < 1$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

 **笔记 解法二** 构造数列  $c_n, b_n$  的思路: 待定数列  $c_n$  且  $c_0 = 1$ , 由条件可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - \lambda c_n a_{n-1}}{c_n} = a$ . 希望  $c_{n-1} = \lambda c_n$ ,

即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{\lambda}$ , 等价于  $c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{1}{\lambda^n}$ . 该式对  $n = 0$  也成立. 于是令  $c_n = \frac{1}{\lambda^n}$ , 则由条件可知

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - \lambda c_n a_{n-1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}}{c_n}$$

从而待定  $b_n$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ , 即  $\frac{b_n}{\lambda^n} = \frac{a_n}{\lambda^n} - \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}} = \frac{a_n - \lambda a_{n-1}}{\lambda^n}$ . 于是令  $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}$ , 则由条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] \\ &= \frac{1}{c_n} \left( \sum_{k=1}^n c_k b_k + c_0 a_0 \right) = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n. \end{aligned}$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项. 后续计算极限的方法与解法一相同.

**解 解法一** (通过观察直接构造出裂项数列  $b_n$ ): 当  $\lambda = 0$  问题时显然的, 当  $\lambda \neq 0$ , 记  $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 我们有

$$\frac{b_n}{\lambda^n} = \frac{a_n - \lambda a_{n-1}}{\lambda^n} = \frac{a_n}{\lambda^n} - \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}}, n = 1, 2, \dots$$

上式对  $n = 1, 2, \dots$  求和得

$$a_n = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n, n = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

由于  $|\lambda| < 1$ , 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \lambda^n = 0$ . 于是由 Stolz 定理, 可知当  $\lambda > 0$  时, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}} - \frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{1 - \lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

当  $\lambda < 0$  时 (此时分母  $\frac{1}{\lambda^n}$  不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于(4.32)式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{b_k}{\lambda^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}} + \frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+2} + \lambda b_{2n+1}}{1 - \lambda^2} = \frac{a + \lambda a}{1 - \lambda^2} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

对于(4.32)式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} - \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} \xrightarrow{\text{因为偶子列的极限}} \frac{a}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{1 - \lambda}.$$



因此无论如何我们都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$ .

**解法二 (强求通项和强行裂项的标准解法):** 令  $c_n = \frac{1}{\lambda^n}, n = 0, 1, \dots, b_n = a_n - \lambda a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ , 则由条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = a, c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} (c_n a_n - c_0 a_0 + c_0 a_0) = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=1}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_0 a_0 \right] \\ &= \frac{1}{c_n} \left( \sum_{k=1}^n c_k b_k + c_0 a_0 \right) = \lambda^n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k} + a_0 \lambda^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

由于  $|\lambda| < 1$ , 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \lambda^n = 0$ . 于是由 Stolz 定理, 可知当  $\lambda > 0$  时, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}} - \frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{1-\lambda} = \frac{a}{1-\lambda}.$$

当  $\lambda < 0$  时 (分母  $\frac{1}{\lambda^n}$  不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 而我们发现其奇偶子列恰好严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此需要分奇偶子列讨论), 对于 (4.33) 式的偶子列, 由 Stolz 定理, 我们有


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{b_k}{\lambda^k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}} + \frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}} - \frac{1}{\lambda^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+2} + \lambda b_{2n+1}}{1-\lambda^2} = \frac{a + \lambda a}{1-\lambda^2} = \frac{a}{1-\lambda}.$$

对于 (4.33) 式的奇子列, 由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} - \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}} \stackrel{\text{因为偶子列的极限}}{=} \frac{a}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{1-\lambda}.$$

因此无论如何我们都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$ .

**例题 4.44** 设  $a_1 = 2, a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} a_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 2$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  存在.

 **笔记** 构造数列  $c_n, b_n$  的思路: 待定数列  $c_n$  且  $c_1 = 1$ , 由条件可得  $c_n a_n = \frac{n+1}{2n} c_n a_{n-1} + \frac{c_n}{n}$ , 希望  $c_n$  满足  $\frac{n+1}{2n} c_n = c_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ , 即  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n+1}{n}$ , 等价于  $c_n = \prod_{k=2}^n \frac{2k}{k+1} = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}$  且该式对  $n = 1$  也成立. 于是令  $c_n = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}$ , 则由条件可知

$$c_n a_n = \frac{n+1}{2n} c_{n-1} + \frac{c_n}{n} = c_{n-1} a_{n-1} + \frac{c_n}{n}, n = 2, 3, \dots$$

于是待定  $b_n$ , 希望  $b_n$  满足  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ , 即  $c_n b_n = \frac{1}{n}$ . 从而令  $b_n = \frac{1}{n}$ , 则  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 因此对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 都有

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{c_m} (c_m a_m - c_1 a_1 + c_1 a_1) = \frac{1}{c_m} \left[ \sum_{n=1}^m (c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}) + c_1 a_1 \right] \\ &= \frac{1}{c_m} \left( \sum_{n=1}^m c_n b_n + c_1 a_1 \right) = \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} + 2 \right). \end{aligned}$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项. 后续再利用 Stolz 定理计算极限即可.

**证明** 令  $c_n = \frac{(2n)!!}{(n+1)!}, b_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , 则由条件可知  $c_n b_n = c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}$ . 从而对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$c_m a_m - 2 = c_m a_m - c_1 a_1 = \sum_{n=2}^m (c_n a_n - c_{n-1} a_{n-1}) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{n} = \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!},$$

从而

$$a_m = \frac{1}{c_m} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right) = \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right).$$


再由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} m a_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \frac{(m+1)!}{(2m)!!} \left( 2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 + \sum_{n=1}^m \frac{(2n)!!}{n(n+1)!}}{\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}} \\ &\stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}}{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!} - \frac{(2m)!!}{m(m+1)!}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2m+2}{m+1}}{\frac{2m+2}{m+1} - \frac{m+2}{m}} = \frac{2}{2-1} = 2.\end{aligned}$$

**例题 4.45** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  存在, 令

$$a_{n+1} = b_n - \frac{n a_n}{2n+1},$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

 **笔记** 构造数列  $c_n$  的思路: 令  $c_1 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , 由条件可知  $c_{n+1} a_{n+1} = c_{n+1} b_n - \frac{n}{2n+1} c_{n+1} a_n$ . 希望  $-\frac{n}{2n+1} c_{n+1} = c_n$ , 则  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{2n+1}{n}$ , 从而

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{2k+1}{k} \right) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$$

该式对  $n=1$  也成立. 因此令  $c_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$ , 则由条件可知

$$c_{n+1} a_{n+1} = c_{n+1} b_n + c_n a_n \Rightarrow c_{n+1} a_{n+1} - c_n a_n = c_{n+1} b_n$$

从而

$$a_n = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=2}^n (c_k a_k - c_{k-1} a_{k-1}) + c_1 a_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left[ \sum_{k=2}^n c_k b_{k-1} + c_1 a_1 \right]$$

这样就完成了对  $a_n$  的强行裂项和强求通项.

**注** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  的思路分析: 如果此时我们将 (4.34) 中的  $\frac{(2n+1)!!}{n!}$  看作分母, 将  $(-1)^n$  放到分子上, 那么由 Wallis 公式可知分母严格单调递增趋于  $+\infty$ , 此时  $a_n$  满足 Stolz 定理条件. 但是使用一次 Stolz 定理后我们并不能直接得到结果, 并且此时  $(-1)^n$  仍未消去. 因此我们不采用这种处理方式.

如果此时我们将 (4.34) 中的  $\frac{(-1)^n (2n+1)!!}{n!}$  看作分母, 则由于  $(-1)^n$  的振荡性, 导致这个分母不再严格单调递增趋于  $+\infty$ , 不满足 Stolz 定理条件. 但是不难发现其奇偶子列严格单调递增趋于  $+\infty$  满足 Stolz 定理条件, 因此我们可以分奇偶子列进行讨论.

**证明** 令  $c_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则由条件可知

$$c_{n+1} a_{n+1} = c_{n+1} b_n - \frac{n}{2n+1} c_{n+1} a_n = c_{n+1} b_n + c_n a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

从而  $c_{n+1} a_{n+1} - c_n a_n = c_{n+1} b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ . 于是

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1} a_{k+1} - c_k a_k) + c_1 a_1 \right] = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n c_{k+1} b_k + c_1 a_1 \right] \\ &= \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n c_{k+1} b_k + a_1 \right] = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right], \quad n \in \mathbb{N}_+.\end{aligned} \quad (4.34)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

由 Wallis 公式可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

从而我们有

$$\frac{n!}{(2n+1)!!} = \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)2^n(2n-1)!!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{n^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.35)$$

于是由(4.34)(4.35)式以及 Stolz 定理和  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  可知, 一方面, 考虑  $\{a_n\}$  的奇子列, 我们有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} (2n)!}{(4n+1)!!} \left[ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} + a_1 \right]}{2^{2n+1} \sqrt{2n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} \right]}{2^{2n+1} \sqrt{2n}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \frac{(4n+1)!!}{(2n)!} b_{2n} - \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} b_{2n-1} \right]}{2^{2n+1} \sqrt{2n} - 2^{2n-1} \sqrt{2n-2}} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{2^{2n+1} \sqrt{n} - 2^{2n-1} \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \sqrt{2n-1} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{2^{2n+1} \sqrt{n} - 2^{2n-1} \sqrt{n-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right)}{4\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{4\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+1}{2n} b_{2n} - b_{2n-1} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{4\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \cdot (2b - b) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot b = \frac{2}{3}b.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$


另一方面, 考虑  $\{a_n\}$  的偶子列, 我们有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n-1} (2n-1)!}{(4n-1)!!} \left[ \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{k!} b_k + a_1 \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} + a_1 \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1}} \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(4k+1)!!}{(2k)!} b_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{(4k-1)!!}{(2k-1)!} b_{2k-1} \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1}} \xrightarrow{\text{Stolz 定理}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \left[ \frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!} b_{2n-2} - \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!} b_{2n-1} \right]}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} \\
 &= - \sqrt{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(4n-3)!!}{(2n-2)!} \left( b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1} \right)}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} \sqrt{2n-2} \left( b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1} \right)}{2^{2n} \sqrt{2n-1} - 2^{2n-2} \sqrt{2n-3}} \\
 &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-2} \left( b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1} \right)}{4\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}} = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-2}}{4\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_{2n-2} - \frac{4n-1}{2n-1} b_{2n-1} \right) \\
 &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{2}{n}}}{4\sqrt{2 - \frac{1}{n}} - \sqrt{2 - \frac{3}{n}}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot (-b) = \frac{2}{3}b.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

故由(4.36)(4.37)式, 再结合子列极限命题 (b) 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \frac{2}{3}b.$$

**例题 4.46** 设  $a_n, b_n > 0, a_1 = b_1 = 1, b_n = a_n b_{n-1} - 2, n \geq 2$  且  $b_n$  有界, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$ .

 **笔记** 构造数列  $c_n$  的思路: 观察已知的数列递推条件:  $b_n = a_n b_{n-1} - 2$ , 可知我们只能对  $b_n$  进行强行裂项和强求通项. 于是令  $c_1 = 1$ , 待定  $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , 则由条件可知  $c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2$ . 希望  $a_n c_n = c_{n-1}$ , 则  $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{a_n}$ ,

从而  $c_n = \prod_{k=2}^n \frac{1}{a_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ . 该式对  $n=1$  也成立. 因此, 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ , 则由条件可知

$$c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n = c_{n-1} b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2.$$

于是

$$c_n b_n - c_{n-1} b_{n-1} = -2c_n, n \geq 2.$$

故

$$b_{n+1} = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1} b_{k+1} - c_k b_k) + c_1 b_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^n c_k \right).$$

这样就完成了对  $b_n$  的强行裂项和强求通项, 而我们发现  $\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  恰好就是题目要求的数列极限.

**证明** 令  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ , 则由条件可知  $c_n > 0$ , 且

$$c_n b_n = a_n c_n b_{n-1} - 2c_n = c_{n-1} b_{n-1} - 2c_n, n \geq 2.$$

于是

$$c_n b_n - c_{n-1} b_{n-1} = -2c_n, n \geq 2.$$

故

$$b_{n+1} = \frac{1}{c_{n+1}} \left[ \sum_{k=1}^n (c_{k+1} b_{k+1} - c_k b_k) + c_1 b_1 \right] = \frac{1}{c_n} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^n c_{k+1} \right), \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \sum_{k=1}^n c_k = 1 + \sum_{k=1}^n c_{k+1} = 1 + \frac{1 - b_{n+1} c_n}{2} = \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (4.38)$$

由于  $a_n, b_n, c_n > 0$ , 再结合(4.38)式, 可知  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  单调递增且  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2} \leq \frac{3}{2}$ , 因此

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$  一定存在. 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . 从而再结合(4.38)式和  $b_n$  有界可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{c_n b_{n+1}}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

## 4.6 分部积分

分析学里流传着一句话: “遇事不决分部积分”.

分部积分在渐近分析中的用法:

- (1) 有时候分部积分不能计算出某一积分的具体值, 但是我们可以利用分部积分去估计原积分 (或原含参积分) 的范围. 并且我们可以通过不断分部积分来提高估计的精确程度.
- (2) 分部积分也可以转移被积函数的导数.
- (3) 分部积分可以改善阶. 通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计.

### 例题 4.47

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt.$$

证明  $|f(x)| \leq \frac{1}{x}, x > 0$ .

 **笔记** 证明的想法是利用分部积分在渐近分析中的用法 (1).

**证明** 由分部积分可得, 对  $\forall x > 0$ , 都有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt \right| = \left| \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right| = \left| -\frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} \cos u du - \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{(x+1)^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} u^{-\frac{3}{2}} du \right| + \left| \frac{\cos x}{2x} - \frac{\cos(x+1)}{2(x+1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(x+1)}{(x+1)} \right| \\ &= \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x[\cos x - \cos(x+1)] + \cos x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{2x+1}{2} + \cos x}{2x(x+1)} \\ &\leq \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{x+1}{2x(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

### 例题 4.48

证明

例题 4.49

证明

例题 4.50

证明

例题 4.51

证明

## 4.7 Laplace 方法

Laplace 方法适用于估计形如  $\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx, n \rightarrow \infty$  的渐近展开式, 其中  $f, g \in C[a, b]$  且  $g$  在  $[a, b]$  上有界; 或者  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$  的渐近展开式, 其中  $f, g \in C[a, b]$  且  $g$  在  $[a, b]$  上有界. 实际上, 若要估计的是前者, 我们可以将其转化为后者的形式如下:

$$\int_a^b [f(x)]^n g(x) dx = \int_a^b e^{n \ln f(x)} g(x) dx.$$

若参变量  $n, x$  在积分区间上, 或者估计的不是  $n, x \rightarrow +\infty$  处的渐近展开式, 而是其他点处 ( $x \rightarrow x_0$ ) 处的渐近展开式. 我们都可以通过积分换元将其转化为标准形式  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$ , 其中  $f, g \in C[a, b]$ .


思路分析: 首先, 由含参量积分的计算规律 (若被积函数含有  $e^{f(x)}$ , 则积分得到的结果中一定仍含有  $e^{f(x)}$ ), 我们可以大致估计积分  $\int_a^b e^{f(x,y)} g(y) dy, x \rightarrow +\infty$  的结果是  $C_1 h_1(x) e^{f(x,b)} - C_2 h_2(x) e^{f(x,b)} e^{f(x,a)}$ , 其中  $C$  为常数. 因为指数函数的阶远大于一般初等函数的阶, 这个结果的阶的主体部分就是  $e^{f(x,b)}$  和  $e^{f(x,a)}$ . 而我们注意到到改变指数函数  $e^{p x + q}$  的幂指数部分的常数  $p$  会对这个指数函数的阶 ( $x \rightarrow +\infty$ ) 产生较大影响, 而改变  $q$  不会影响这个指数函数的阶. 比如,  $e^{2x}$  比  $e^x$  高阶 ( $x \rightarrow +\infty$ ). 由此我们可以发现  $e^{f(x,b)}$  和  $e^{f(x,a)}$  中的幂指数部分中  $f(x, a), f(x, b)$  中除常数项外的含  $x$  项的系数 (暂时叫作指数系数) 对这个函数的阶影响较大. 然而这些系数都是由被积函数中的  $f(x, y)$  和积分区间决定的, 但是在实际问题中  $f(x, y)$  的形式已经确定, 因此这些系数仅仅由积分区间决定. 于是当我们只计算某些不同点附近 (充分小的邻域内) 的含参量积分时, 得到的这些系数一般不同, 从而导致这些积分的阶不同. 故我们可以断言这类问题的含参量积分在每一小段上的阶都是不同的. 因此我们只要找到这些不同的阶中最大的阶 (此时最大阶就是主体部分) 就相当于估计出了积分在整个区间  $[a, b]$  上的阶. 由定积分的几何意义, 我们不难发现当参变量  $x$  固定时, 并且当积分区间为某一点  $y_0$  附近时, 只要被积函数的  $e^{f(x,y)}$  在  $y_0$  处 (关于  $y$ ) 的取值越大, 积分后得到的 (值/充分小邻域内函数与  $x$  轴围成的面积) 指数系数就会越大, 从而在  $y_0$  附近的积分的阶也就越大. 综上所述, 当参变量  $x$  固定时,  $f(x, y)$  (关于  $y$ ) 的最大值点附近的积分就是原积分的主体部分, 在其他区间上的积分全都是余项部分.

然后, 我们将原积分按照上述的积分区间分段, 划分为主体部分和余项部分. 我们知道余项部分一定可以通过放缩、取上下极限等操作变成 0 (余项部分的放缩一般需要结合具体问题, 并使用一些放缩技巧来实现. 但是我们其实只要心里清楚余项部分一定能够通过放缩、取上下极限变成 0 即可), 关键是估计主体部分的阶. 我们注意到主体部分的积分区间都包含在某一点的邻域内, 而一般估计在某个点附近的函数的阶, 我们都会想到利用 Taylor 定理将其在这个点附近展开. 因此我们利用 Taylor 定理将主体部分的被积函数的指数部分  $f(x, y)$  在最大值点附近 (关于  $y$ ) 展开 (注意: 此时最多展开到  $x^2$  项, 如果展开项的次数超过二次, 那么后续要么就无法计算积分, 要么计算就无法得到有效结果, 比如最后积分、取极限得到  $\infty + \infty$  或  $0 \cdot \infty$  等这一类无效的结果). Taylor 展开之后, 我们只需要利用欧拉积分和定积分, 直接计算得到结果即可.

事实上, 原积分中的有界连续函数  $g(x)$  只会影响渐进展开式中的系数, 对整体的阶并不造成影响. 在实际估计中处理  $g(x)$  的方法: (i) 在余项部分, 直接将  $g(x)$  放缩成其在相应区间上的上界或下界即可. (ii) 在主体部分, 因为主体部分都包含在  $f(x, y)$  (关于  $y$ ) 的某些最大值点  $y_i$  的邻域内, 所以结合  $g(x)$  的连续性, 直接将  $g(x)$  用  $g(y_i)$

代替即可 (将  $g(x)$  放缩成  $g(y_i) \pm \varepsilon$  即可). 即相应的主体部分 ( $y_i$  点附近) 乘以  $g(x)$  相应的函数值  $g(y_i)$ . 具体例题见例题 4.58. 也可以采取拟合法处理  $g(x)$ , 具体例题见例题 4.59.

严谨的证明过程最好用上下极限和  $\varepsilon - \delta$  语言书写. 具体严谨的证明书写见例题: 例题 4.55, 例题 4.56, 例题 4.57, 例题 4.58.

 **笔记** Laplace 方法的思路蕴含了一些常用的想法: 分段估计、Taylor 定理估阶. 而严谨的证明书写也使用一些常用方法: 上下极限、 $\varepsilon - \delta$  语言、拟合法.

**注** 上述 Laplace 方法得到的渐近估计其实比较粗糙, 想要得到更加精细的渐近估计需要用到更加深刻的想法和技巧 (比如 Puiseux 级数展开 (见清疏讲义) 等).

**例题 4.52** 设  $a_1, a_2, \dots, a_m > 0, m \in \mathbb{N}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j.$$

**注** 熟知, 极限蕴含在  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的最大值中.

**证明** 显然


$$\max_{1 \leq j \leq m} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{1 \leq j \leq m} a_j^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \max_{1 \leq j \leq m} a_j \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \max_{1 \leq j \leq m} a_j, \quad (4.39)$$

从而我们证明了 (4.39).

**例题 4.53** 设非负函数  $f \in C[a, b]$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

**注** 熟知, 极限蕴含在  $f$  的最大值中.

 **笔记** 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

**证明** 事实上记  $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x), x_0 \in [a, b]$ , 不失一般性我们假设  $x_0 \in (a, b)$ . 那么对充分大的  $n \in \mathbb{N}$ , 我们由

积分中值定理知道存在  $\theta_n \in (x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n})$ , 使得

$$f(\theta_n) \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0) dx} = f(x_0) \sqrt[n]{b-a}. \quad (4.40)$$

两边取极限即得 (4.40).

**例题 4.54** 设非负严格递增函数  $f \in C[a, b]$ , 由积分中值定理我们知道存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx.$$

计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**证明** 由 (上一题) 例题 4.53, 我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b-a}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = f(b).$$

注意到  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ , 我们知道对任何  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$ , 都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = f(b)$ . 又由于  $f$  为严格递增函数, 因此只能有  $c = b$ , 利用命题 3.1 的 (a)(Heine 归结原理), 我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . 证毕!

#### 定理 4.6 (Wallis 公式)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (4.41)$$

**注** 我们只需要记住  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$  及其证明即可, 更精细的渐近表达式一般用不到.

 **笔记** (4.41)式等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \sqrt{\pi n} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}. \quad (4.42)$$

证明的想法是把(4.42)式用积分表示并运用 Laplace 方法进行估计.

**证明** 我们只证明  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$ , 更精细的渐近表达式一般不会被考察, 故在此不给出证明.(更精细的渐近表达式的证明可见清疏讲义)

注意到经典积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \quad (4.43)$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln \sin^2 x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right], \quad (4.44)$$

即  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \frac{\ln \sin^2 x}{-(x - \frac{\pi}{2})^2} = -1$ . 于是利用(4.44), 对任何  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 我们知道存在  $\delta \in (0, 1)$ , 使得对任何  $x \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}]$ , 都有

$$-(1+\varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \ln \sin^2 x \leq -(1-\varepsilon)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (4.45)$$

利用(4.45)式, 现在一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n \ln \sin^2(\frac{\pi}{2}-\delta)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\varepsilon)y^2} dy \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\delta\sqrt{(1-\varepsilon)n}} e^{-z^2} dz \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\varepsilon)(x-\frac{\pi}{2})^2} dx = \int_0^{\delta} e^{-n(1+\varepsilon)y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-z^2} dz.$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

由  $\varepsilon$  任意性即可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再结合(4.43)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sqrt{n}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1.$$

故  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow +\infty$ .

**例题 4.55** 求  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+x^2)^n} dx, n \rightarrow \infty$  的等价无穷小.

解 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2 \leq \ln \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right) \leq \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx = \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta e^{-n \ln \left(1+\frac{x^2}{2}\right)} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left( \int_0^\delta e^{-n \left(\frac{x^2}{2} - \varepsilon x^2\right)} dx + \int_\delta^\infty \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} dx \right) \\ &\stackrel{\text{令 } y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}{=} \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} \int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy + \frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right) = \frac{1}{2^n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}}.$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} + \frac{\pi\sqrt{2n}}{2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^{n-1}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^n} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n \ln \left(1+\frac{x^2}{2}\right)} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_0^\delta e^{-n \left(\frac{x^2}{2} + \varepsilon x^2\right)} dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=x\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}{=} \frac{1}{2^n \sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}} \int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}} \int_0^{\delta\sqrt{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}} e^{-y^2} dy.$$



上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}} \int_0^{\delta \sqrt{n\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}} e^{-y^2} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}}.$$


再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

因此, 再结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx$ , 我们就有

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{2^n \sqrt{n}}{(2+x^2)^n} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . 即  $\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{2^n \sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty.$

**例题 4.56** 求  $\int_0^x e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty$  的渐近估计 (仅两项).

 **笔记** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 所以实际上只需要估计

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-y^2} dy - \int_0^x e^{-y^2} dy = \int_x^\infty e^{-y^2} dy, x \rightarrow +\infty.$$

**解** 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$2x - \varepsilon x \leq x^2 + 2x \leq 2x + \varepsilon x.$$

现在, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2t - x^2} dt = xe^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \\ &= xe^{-x^2} \left( \int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \right) \\ &\leq xe^{-x^2} \left( \int_0^\delta e^{-x^2(2t+\varepsilon t)} dt + \int_\delta^\infty e^{-x^2(t^2+2)} e^{-x^2\delta} dt \right) \\ &= xe^{-x^2} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{(2+\varepsilon)x^2} + \frac{e^{-2x^2(\delta+1)}}{x^2} \right) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right). \end{aligned}$$

于是就有

$$xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)}.$$

上式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$  并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - e^{-(2+\varepsilon)x^2\delta}}{2+\varepsilon} + e^{-2x^2(\delta+1)} \right) = \frac{1}{2+\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}.$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-y^2} dy &\stackrel{\text{令 } y=xu}{=} x \int_1^\infty e^{-(xu)^2} du \stackrel{\text{令 } t=u-1}{=} x \int_0^\infty e^{-(xt+x)^2} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-(xt)^2 - 2x^2t - x^2} dt = xe^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2(t^2+2t)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq x e^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(t^2+2t)} dt \geq x e^{-x^2} \int_0^\delta e^{-x^2(2t-\varepsilon t)} dt \\ &= x e^{-x^2} \cdot \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}. \end{aligned}$$

于是就有

$$x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2}.$$

上式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$  并取下极限得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(2-\varepsilon)x^2\delta}}{(2-\varepsilon)x^2} = \frac{1}{2-\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \geq \frac{1}{2}$ .

因此, 再结合  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy$ , 我们就有

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2}.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}$ , 即  $\int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$ .

因此  $\int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right), x \rightarrow +\infty$ .

**例题 4.57** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx$ .

**解** 由 Taylor 定理可知, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 使得当  $x \in [0, \delta]$  时, 有

$$-t - \varepsilon t \leq \ln(1 - \sin t) \leq -t + \varepsilon t.$$

此时, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_0^{10n} \left(1 - \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx \stackrel{\text{令 } x=nt}{=} n \int_0^{10} (1 - |\sin t|)^n dt = n \int_0^{10} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &\quad + n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt \\ &= n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \\ &\quad + n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt + n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt. \end{aligned} \quad (4.46)$$

由积分换元可得

$$\begin{aligned} &n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=\pi-t}{=} -n \int_\delta^0 e^{n \ln(1 - \sin(\pi-u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ &n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} n \int_0^\delta e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ &n \int_{\pi+\delta}^{2\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 + \sin(\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du, \\ &n \int_{2\pi+\delta}^{3\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt \stackrel{\text{令 } u=t-2\pi}{=} \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin(2\pi+u))} du = \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1 - \sin u)} du. \end{aligned}$$

从而

$$n \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - |\sin t|)} dt = n \int_{\pi-\delta}^\pi e^{n \ln(1 - \sin t)} dt + n \int_\pi^{\pi+\delta} e^{n \ln(1 - \sin t)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1 - \sin t)} dt.$$

同理,  $n \int_{2\pi-\delta}^{2\pi+\delta} e^{n \ln(1-|\sin t|)} dt = n \int_{3\pi-\delta}^{3\pi+\delta} e^{n \ln(1-|\sin t|)} dt = 2n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt$ . 于是原积分(4.46)式可化为

$$\int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin t)} dt.$$

进而, 一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx &= 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin t)} dt \\ &\leq 7n \int_0^\delta e^{n(-t+\varepsilon t)} dt + 3n \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin \delta)} dt \\ &= 7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1-\sin \delta)}(\pi - 2\delta). \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ 7 \cdot \frac{e^{(\varepsilon-1)n\delta} - 1}{\varepsilon - 1} + 3ne^{n \ln(1-\sin \delta)}(\pi - 2\delta) \right] = \frac{7}{1-\varepsilon}.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7$ .

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx &= 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt + 3 \int_\delta^{\pi-\delta} e^{n \ln(1-\sin t)} dt \\ &\geq 7n \int_0^\delta e^{n \ln(1-\sin t)} dt \geq 7n \int_0^\delta e^{n(-t-\varepsilon t)} dt = 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon + 1} \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \frac{1 - e^{-(\varepsilon+1)n\delta}}{\varepsilon + 1} = \frac{7}{\varepsilon + 1}.$$


再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \geq \frac{7}{\varepsilon + 1}$ .

因此, 再结合  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx$ , 我们就有

$$7 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx \leq 7.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{10n} (1 - |\sin(\frac{x}{n})|)^n dx = 7$ .

**例题 4.58** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx}$ .

 **笔记** 我们首先可以求解出被积函数带  $n$  次幂部分的最大值点即  $1-x^2+x^3$  的最大值点为  $x=0, 1$ . 于是被积函数的阶一定集中在这两个最大值点附近.

**注** 注意由  $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1)$ ,  $x \rightarrow 1$ . 得到的是  $\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1)$ ,  $x \rightarrow 1$ . 而不是.

**证明** 由 Taylor 定理可知,

$$\ln(1-x^2+x^3) = -x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1-x^2+x^3) = x-1+o(x-1), x \rightarrow 1.$$

从而对  $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ , 存在  $\delta_1 \in (0, \frac{1}{10})$ , 使得

$$-x^2 - \varepsilon x^2 \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq -x^2 + \varepsilon x^2, \forall x \in (0, \delta_1);$$

$$x-1-\varepsilon(x-1) \leq \ln(1-x^2+x^3) \leq x-1+\varepsilon(x-1), \forall x \in (1-\delta_1, 1).$$

设  $f \in C[0, 1]$ , 则由连续函数最大值、最小值定理可知,  $f$  在闭区间  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$  上都存在最大值和最小值. 设

$M_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f(x), M_2 = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f(x)$ . 又由连续性可知, 对上述  $\varepsilon$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon, \forall x \in [0, \delta_2];$$

$$f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon, \forall x \in [1 - \delta_2, 1].$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则一方面我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \int_0^{\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &= \int_0^{\delta} e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &\leq (f(0) + \varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2+\varepsilon x^2)} dx + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n dx \\ &= \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{n(1-\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right), \end{aligned}$$

又易知  $1-x^2+x^3$  在  $[0, \frac{2}{3}]$  上单调递减, 在  $(\frac{2}{3}, 1]$  上单调递增. 再结合  $\delta < \frac{1}{10}$  可知,  $1 - (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 < 1 - (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 < 1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3$ . 从而当  $x \in (\frac{1}{2}, 1-\delta)$  时, 我们就有  $1-x^2+x^3 < 1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3 < 1$ . 进而可得

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} M_2 \left(1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3\right)^n dx + (f(1) + \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1+\varepsilon(x-1)]} dx \\ &= M_2 \left(1 - (1-\delta)^2 + (1-\delta)^3\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} \left(1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1-\varepsilon)}} e^{-y^2} dy + \sqrt{n} M_1 \left(\frac{7}{8} - \delta^2\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right), \\ n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq n M_2 \left(\frac{3}{4} + (1-\delta)^3\right)^n \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon} \left(1 - e^{-n\delta(1+\varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取上极限得到

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(0) + \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}} (f(0) + \varepsilon), \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\leq \frac{f(1) + \varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1)$ .

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_0^{\delta} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^{\delta} e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \\ &\geq (f(0) - \varepsilon) \int_0^{\delta} e^{n(-x^2-\varepsilon x^2)} dx = \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \int_0^{\delta \sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \int_{1-\delta}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_{1-\delta}^1 e^{n \ln(1-x^2+x^3)} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\geq (f(1) - \varepsilon) \int_{1-\delta}^1 e^{n[x-1-\varepsilon(x-1)]} dx = \frac{f(1) - \varepsilon}{n(1+\varepsilon)} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}).$$

于是就有

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\varepsilon)}} e^{-y^2} dy, \\ n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1) - \varepsilon}{1+\varepsilon} (1 - e^{-n\delta(1-\varepsilon)}). \end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$  并取下极限得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(0) - \varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}} (f(0) - \varepsilon), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &\geq \frac{f(1) - \varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

再由  $\varepsilon$  的任意性可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \geq f(1)$ .

因此, 我们就有

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0), \\ f(1) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx \leq f(1). \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = f(1)$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \rightarrow \infty; \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx &= \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$


故  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^3)^n f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2+x^3)^n f(x) dx = \frac{f(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ .

从而当  $f \equiv 1$  时, 上式等价于  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ ; 当  $f(x) = \ln(x+2)$  时, 上式等价于  $\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx = \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2) dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \ln 2.$$

**例题 4.59** 设  $f \in R[0, 1]$  且  $f$  在  $x=1$  连续, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = f(1).$$

 **笔记** 这种运用 Laplace 方法估阶的题目, 如果要求解/证明的是极限值, 而不是估计函数或数列的阶, 那么也可以用拟合法进行书写.

**证明** 由于  $f \in R[0, 1]$ , 因此存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$ . 于是对  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall \delta \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| &= \left| n \int_0^1 [f(x) - f(1)] x^n dx \right| \\ &\leq n \int_0^1 |f(x) - f(1)| x^n dx = n \int_0^\delta |f(x) - f(1)| x^n dx + n \int_\delta^1 |f(x) - f(1)| x^n dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq n \int_0^\delta |M + f(1)| \delta^n dx + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_\delta^1 x^n dx \\
&\leq n |M + f(1)| \delta^{n+1} + n \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| \int_0^1 x^n dx \\
&= n |M + f(1)| \delta^{n+1} + \frac{n}{n+1} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 并取上极限可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)|, \quad \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据  $\delta$  的任意性, 令  $\delta \rightarrow 1^-$  可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 1^-} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f(x) - f(1)| = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)|.$$

又因为  $f$  在  $x=1$  处连续, 所以  $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 1^-} |f(x) - f(1)| = 0$ . 故

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 f(x) x^n dx - n \int_0^1 f(1) x^n dx \right| \leq 0.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(1) x^n dx = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = f(1)$ .

**例题 4.60 Possion 核** 设  $f \in R[0, 1]$  且  $f$  在  $x=0$  连续, 证明

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

**证明** 因为  $f \in R[0, 1]$ , 所以存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$ . 于是对  $\forall \delta \in (0, 1)$ , 固定  $\delta$ , 再对  $\forall t > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx \\
&= \int_0^\delta \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx + \int_\delta^1 \frac{t}{x^2 + t^2} |f(x) - f(0)| dx \\
&\leq \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \int_0^\delta \frac{t}{x^2 + t^2} dx + \int_0^\delta \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| dx \\
&= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \arctan \frac{x}{t} \Big|_0^\delta + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)| \\
&= \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| \cdot \arctan \frac{\delta}{t} + \frac{t}{\delta^2 + t^2} |M + f(0)|.
\end{aligned}$$

上式两边同时令  $t \rightarrow 0^+$  并取上极限, 可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)|, \quad \forall \delta \in (0, 1).$$

再根据  $\delta$  的任意性, 令  $\delta \rightarrow 0^+$  可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x) - f(0)| = \frac{\pi}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)|.$$

又由于  $f$  在  $x=0$  处连续, 从而  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0$ . 故

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx - \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx \right| \leq 0.$$

因此  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2 + t^2} f(0) dx = f(0) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} f(0)$ .

**例题 4.61 Fejer 核** 设  $f$  在  $x = 0$  连续且在  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  可积, 则

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = f(0).$$

**证明** 因为  $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , 所以存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . 又因为  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ , 所以对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\delta_0 > 0$ , 使得当  $|x| \leq \delta_0$  时, 有  $\sin x \geq (1 - \varepsilon)x$ . 于是对  $\forall \delta \in \min\{\frac{1}{2}, \delta_0\}$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx \\ &= \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} |f(x) - f(0)| dx \\ &\leq \sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)| \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} |M + f(0)| dx \\ &\leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\ &\stackrel{\text{令 } y = Nx}{=} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx \\ &= \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy + \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{|M + f(0)|}{\sin^2(\pi \delta)} dx. \end{aligned}$$

上式两边同时令  $N \rightarrow +\infty$  并取上极限, 得到

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy.$$

又由 *Dirichlet* 判别法, 可知  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy$  收敛. 从而根据  $\delta$  的任意性, 上式两边同时令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 再结合  $f$  在  $x = 0$  处连续, 可得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{|x| \leq \delta} |f(x) - f(0)|}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy}{1 - \varepsilon} \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = 0. \end{aligned}$$

从而

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| \leq 0.$$

故  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} [f(x) - f(0)] dx \right| = 0$ . 即  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx$ .

而一方面, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} f(0) dx \\ &\stackrel{\text{令 } y = Nx}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} f(0) dy = f(0). \end{aligned}$$

另一方面, 对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$  我们有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \\ &\leq f(0) \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)} f(0) dx \leq \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq \delta} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{(\pi x)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=Nx}{=} \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|y| \leq N\delta} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} dy = \frac{f(0)}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

再根据  $\varepsilon$  的任意性, 可知

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx \leq f(0).$$

因此, 由夹逼准则, 可知  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)} f(0) dx = f(0)$ .

**例题 4.62** 设  $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi_n(x-y) dy = f(x).$$

**证明** 由条件可知, 存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ . 于是对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 固定  $x$ , 再对  $\forall \delta > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \geq \delta} 2M \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 \delta^2} dy \\ &\stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

令  $\delta \rightarrow 0^+$ , 再结合  $f$  在  $\forall x \in \mathbb{R}$  上连续, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f(x)| \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| = \lim_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)| = 0.$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \\ &= f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} dy \stackrel{\text{令 } z=n(x-y)}{=} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq n\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = f(x). \end{aligned}$$

## 4.8 欧拉麦克劳林公式 (E-M 公式)

### 命题 4.9 (0 阶欧拉麦克劳林公式 (0 阶 E-M 公式))


设  $a, b \in \mathbb{Z}, f \in D[a, b], f' \in L^1[a, b]$ , 让我们有

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.$$

**注** 如果考试中要使用 0 阶欧拉麦克劳林公式, 则一定要先证明 0 阶欧拉麦克劳林公式 (按照下面的证明书写即



可), 再使用.

 **笔记** 在  $[0, 1)$  上  $x - [x] - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ , 它也是  $x - \frac{1}{2}$  做周期 1 延拓得到的函数. 故  $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
**证明**

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\
 &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \left( x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) f'(x+k) dx \\
 &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[ \frac{1}{2} f(1+k) + \frac{1}{2} f(k) - \int_0^1 f(x+k) dx \right] \\
 &= \sum_{k=a}^{b-1} \left[ \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b-1} [f(k) + f(k+1)] - \int_a^b f(x) dx \\
 &= -\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx.
 \end{aligned}$$

**注** 假设已知  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , 使用 0 阶 E-M 公式后, 由于  $-\frac{1}{2} \leq x - [x] - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ , 因此直接将  $b_1(x)$  放大成  $\frac{1}{2}$  就可以得到原级数的一个较为粗略的估计. 具体例题见 **例题 4.63**.

但是如果我们想要得到原级数更加精确的估计, 就需要对  $b_1(x)$  使用分部积分. 但是由于  $b_1$  并非连续函数, 为了把  $\int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx$  继续分部积分, 我们需要寻求  $b_1$  的原函数  $b_2$  使得

$$\int_a^b b_1(x) f'(x) dx = \int_a^b f'(x) db_2(x),$$

即期望  $b_2(x)$  是  $b_1(x)$  的一个原函数并且仍然有周期 1 (因为求导不改变周期性, 又由于  $b_1(x)$  周期为 1, 故原函数  $b_2(x)$  的周期也必须为 1). 相当于需要

$$b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, b_2(x+1) = b_2(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(构造  $b_2(x)$  的想法: 先找到  $x \in [0, 1)$  这个特殊情况下的  $b_2(x)$ , 再由此构造出  $x \in \mathbb{R}$  这个一般情况下的  $b_2(x)$ , 即由特殊推广到一般)

先考虑  $x \in [0, 1)$  的情况 (因为此时  $[x] \equiv 0$ , 方便后续计算得到原函数  $b_2(x)$ ), 于是就需要  $\int_0^1 b_1(x) dx = b_2(1) = b_2(0) = 0$ . 显然

$$b_2(1) = \int_0^1 b_1(x) dx = \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) dx = 0 = b_2(0)$$

是自带条件. 并且还需要  $b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy = \int_0^x \left( y - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$  (其中  $c$  为任意常数),  $x \in [0, 1)$ . 又因为我们需要  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 所以再将  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$  做周期 1 延拓到  $\mathbb{R}$  上, 得到在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1 的  $b_2(x)$  (易知此时  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上只有至多可数个不可导点). 由此我们可以得到  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式为

$$b_2(x) = b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y) dy = \int_0^{x-[x]} \left( y - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

此时又由  $\int_0^1 b_1(y) dy = 0$  可得

$$b_2(x) = b_2(x - [x]) = \int_0^{x-[x]} b_1(y) dy = \int_{[x]}^x b_1(y - [x]) dy = \int_{[x]}^x b_1(y) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_0^1 b_1(y+k) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy \\
&= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy = \int_0^{[x]} b_1(y) dy + \int_{[x]}^x b_1(y) dy \\
&= \int_0^x b_1(y) dy, \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

故此时周期延拓得到的  $b_2(x)$  恰好就是  $b_1(x)$  的一个原函数. 即  $b_1(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有连续且周期为 1 的原函数  $b_2(x)$ ,  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续. 因此我们可以对  $b_1(x)$  进行分部积分. 即此时

$$\int_a^b b_1(x) f'(x) dx = \int_a^b f'(x) db_2(x)$$

成立. 并且此时  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ . 其中  $c$  为任意常数.

如果我们想要继续分部积分, 就需要  $b_3(x)$  是  $b_2(x)$  的一个原函数. 按照上述构造的想法, 实际上, 我们只需期望  $b_3(1) = b_3(0)$  和  $b_3(x) = \int_0^x b_2(y) dy, \forall x \in [0, 1)$ . 即

$$\begin{aligned}
\int_0^1 b_2(x) dx &= b_3(1) = b_3(0) = 0, \\
b_3(x) &= \int_0^x b_2(y) dy, \forall x \in [0, 1).
\end{aligned}$$

然后以此构造出  $[0, 1)$  上的  $b_3(x)$ , 再对其做周期 1 延拓, 就能得到  $\mathbb{R}$  上的  $b_3(x)$ , 并且  $b_3(x)$  满足在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1. 进而可以利用这个  $b_3(x)$  继续对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计.

而由  $\int_0^1 b_2(x) dx = b_3(1) = b_3(0) = 0$  可知

$$\int_0^1 b_2(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c \right) dx = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{12}.$$

于是如果我们还需要继续分部积分的话, 此时  $b_1(x)$  的原函数  $b_2(x)$  就被唯一确定了 (如果只进行一次分部积分, 那么  $c$  可以任取. 但是一般情况下, 无论是否还需要继续分部积分, 我们都会先取定这里的  $c = \frac{1}{12}$ ). 此时这个唯一确定的  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 并且

$$\begin{aligned}
b_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1); \\
b_2(x) &= \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

依次下去我们给出计算  $b_n, n \in \mathbb{N}$  的算法.

#### 定义 4.1 ( $b_n(x)$ 定义和算法)

我们令  $b_1(x)$  为  $x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1)$  的周期 1 延拓. 对所有  $n = 2, 3, \dots, b_n(x)$  是  $b_{n-1}(x)$  的一个原函数.

#### 笔记 $b_n(x)$ 的算法:

根据上述构造  $b_2(x), b_3(x)$  的想法可知, 我们只需期望  $b_n(1) = b_n(0)$  和  $b_n(x) = \int_0^x b_{n-1}(y) dy, \forall x \in [0, 1)$ .

即

$$\begin{aligned}
\int_0^1 b_{n-1}(x) dx &= b_n(1) = b_n(0) = 0, \\
b_n(x) &= \int_0^x b_{n-1}(y) dy, \forall x \in [0, 1).
\end{aligned}$$

然后以此构造出  $[0, 1)$  上的  $b_n(x)$ , 再对其做周期 1 延拓, 就能得到  $\mathbb{R}$  上的  $b_n(x)$ , 并且  $b_n(x)$  满足在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1. 并且根据  $\int_0^1 b_{n-1}(x) dx = b_n(1) = b_n(0) = 0$  我们可唯一确定  $b_{n-1}(x)$  在  $[0, 1)$  上的表达式. 从而可以唯一确定  $b_n(x)$  之前的所有  $b_{n-1}(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式. 又因为这个过程可以无限地进行下去, 所以我们其实可以唯一

确定所有的  $b_n(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的表达式, 方便我们后续可按照我们的需要对原积分进行多次分部积分.

根据上述  $b_n(x)$  的定义和算法, 可知  $b_n(x)$  是连续且周期为 1 的函数. 而连续的周期函数一定有界, 故一定存在  $M_n > 0$ , 使得对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $|b_n(x)| \leq M_n$ .

**注** 我们可以利用这些  $b_n(x)$  不断地对原积分进行分部积分, 得到更加精细的估计, 而且这个过程可以一直进行下去. 因此无论我们需要多么精确的估计, 都可以通过这样的分部积分方式来得到. 具体例题见 **例题 4.10**, **例题 4.63**.

**结论** 我们计算一些  $b_n(x)$  以备:

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2}, x \in [0, 1).$$

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, |b_1(x)| \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, x \in [0, 1).$$

$$b_3(x) = \frac{(x - [x])^3}{6} - \frac{(x - [x])^2}{4} + \frac{(x - [x])}{12}, |b_3(x)| \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{36}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}, x \in [0, 1).$$

$$b_4(x) = \frac{(x - [x])^4}{24} - \frac{(x - [x])^3}{12} + \frac{(x - [x])^2}{24} - \frac{1}{720}, |b_4(x)| \leq \frac{1}{720}, x \in \mathbb{R}.$$

**例题 4.63** 估计  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \rightarrow \infty$ .

**解 解法一:** 一方面, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  我们有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

另一方面, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  我们也有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n.$$

于是对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都有

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

从而对  $\forall n \in \mathbb{N}$  都有

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由夹逼准则可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$ . 即  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, n \rightarrow \infty$ .

**解法二 (E-M 公式):** 由 E-M 公式可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^2} dx. \quad (4.47)$$

因为  $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{2x^2} dx$  存在, 所以可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq C < \infty.$$

于是  $\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx = C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx$ . 从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left[ C - \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \right] \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

故  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ . 此时令  $\frac{1}{2} - C = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} dx \triangleq \gamma$  (欧拉常数). 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

由  $b_n(x)$  的构造和分部积分可知, 上述结果只是对  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  的一个最粗糙的估计. 实际上, 我们可以利用分部积分得到更加精细的估计. 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ ,  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}$ . 则不难发现  $b_2(x)$  是连续且周期为 1 的函数,  $b_2(x)$  是  $b_1(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的一个原函数, 并且  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$ . 而由 Dirichlet 判别法可知  $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx$  收敛, 于是设  $\int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \triangleq C$ . 从而再对 (4.47) 分部积分得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \left( \int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x^2} dx = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} db_2(x) \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + \frac{b_2(x)}{x^2} \Big|_n^{+\infty} + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2}. \quad (4.49) \end{aligned}$$

又由  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$  可知

$$\left| 2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} \right| \leq 2 \left| \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx \right| + \frac{|b_2(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{6} \left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \right| + \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

即

$$2 \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^3} dx - \frac{b_2(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.50)$$

再结合 (4.49) 和 (4.50) 式可得


$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

记  $\gamma \triangleq \frac{1}{2} - C$  ( $\gamma$  为欧拉常数), 则我们就得到了比(4.48)式更加精细的估计:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

**例题 4.64** 计算

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$$

 **笔记** 估计交错级数的想法: 将原交错级数分奇偶子列, 观察奇偶子列的关系 (一般奇偶子列的阶相同), 再估计奇子列或偶子列, 进而得到原级数的估计.

**解** 注意到原级数的奇子列有

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + (-1)^{2m-2} \frac{\ln(2m-1)}{2m-1} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2m-1)}{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (4.51)$$

因此我们只需要估计原级数的偶子列  $\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$  即可. 又注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^m \left[ (-1)^{2n-2} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + (-1)^{2n-1} \frac{\ln 2n}{2n} \right] = \sum_{n=1}^m \left[ \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln 2n}{2n} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

由例题 4.63 可知

$$\sum_{n=1}^m \frac{\ln 2}{n} = \ln 2 (\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (4.53)$$

又由 E-M 公式可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \int_1^m \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx. \end{aligned} \quad (4.54)$$

因为

$$\left| \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

并且  $\int_1^m \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$  收敛, 所以  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C < \infty$ . 即

$$\int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = C + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (4.55)$$

于是结合(4.54)(4.55)式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{\ln n}{n} &= \frac{\ln m}{2m} + \frac{1}{2} \ln^2 m + \int_1^m \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1), m \rightarrow +\infty. \quad (4.56)$$

因此由(4.52)(4.53)(4.56)式可得


$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} &= \sum_{n=1}^{2m} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^m \frac{\ln 2 + \ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 2m + C + o(1) - \left[ \ln 2 \cdot \ln m + \gamma \ln 2 + o(1) + \frac{1}{2} \ln^2 m + C + o(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 2m - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 m - \ln 2 \cdot \ln m - \gamma \ln 2 + o(1) \\ &= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1), m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

即  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$ . 再结合(4.51)式可得

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2m-2} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

$$\text{故 } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.$$

**例题 4.65** 设  $f \in C^1[1, +\infty)$  且  $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$ , 证明  $\int_1^\infty f(x) dx$  收敛等价于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在.

 **笔记** 关键想法参考:E-M 公式和命题 6.1.

**证明** 由 E-M 公式可知

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(x) dx + \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx. \quad (4.57)$$

注意到  $0 \leq \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right| f'(x) \leq \frac{1}{2} |f'(x)|$ , 并且  $\int_1^\infty |f'(x)| dx$  收敛, 因此  $\int_1^\infty \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right| f'(x) dx$  也收敛. 从而  $\int_1^\infty \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$  也收敛, 故由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$  存在.

(1) 若  $\int_1^\infty f(x) dx$  存在, 则由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$  存在. 又由  $\int_1^\infty |f'(x)| dx < \infty$  可知  $\int_1^\infty f'(x) dx$  收敛. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f'(y) dy = \int_1^\infty f'(x) dx < \infty.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 从而由 Henie 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$  也存在. 又由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$  存在, 再结合(4.57)式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在.

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(k)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$  存在, 再结合(4.57)式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$  也存在. 于是对  $\forall x \geq 1$ , 一定存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x < n+1$ . 从而可得

$$\int_1^x f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^x f(x) dx. \quad (4.58)$$

并且

$$\int_n^x f(x) dx \leq \int_n^x |f(x)| dx \leq \int_n^{n+1} |f(x)| dx \leq \sup_{y \geq n} |f(y)|. \quad (4.59)$$

对(4.59)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 进而可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \geq n} |f(y)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|.$$

由于此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 因此  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = 0$ . 于是再对(4.58)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 从而可得

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx.$$

又因为此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$  存在, 所以  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  也存在.

**例题 4.66** 用积分放缩法得到  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, n \rightarrow \infty$  的等价无穷大.

**证明** 注意到对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k} dx \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln(n+1) - \ln \ln 2. \quad (4.60)$$

同时, 也有

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k \ln k} dx \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln n. \quad (4.61)$$

从而对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 由(4.60)(4.61)式可得

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \ln \ln n.$$

于是对  $\forall n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\frac{\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2}{\ln \ln n} \leq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} \leq 1.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln \ln n} = 1$ . 即  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln \ln n, n \rightarrow \infty$ .

**例题 4.67** 用积分放缩法得到  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, x \rightarrow 1^-$  的等价无穷大.

**证明** 注意到对  $\forall x \in (0, 1)$ , 固定  $x$ , 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{n^2} dt \geq -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2} dt = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (4.62)$$

同时也有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{n^2} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt. \quad (4.63)$$

又由于  $x \in (0, 1)$ , 因此  $\ln x \in (-\infty, 0)$ . 从而

$$\int_0^{\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{t^2 \ln x} dt \stackrel{\text{令 } y=t\sqrt{-\ln x}}{=} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

故  $\int_0^{\infty} x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$  收敛. 于是由 Henie 归结原则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \int_0^{\infty} x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}. \quad (4.64)$$

从而对  $\forall x \in (0, 1)$ , 结合(4.62)(4.63)(4.64)式可得

$$-1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{t^2} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

即

$$-\sqrt{-\ln x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \forall x \in (0, 1).$$

令  $x \rightarrow 1^-$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{-\ln x} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 即  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}, x \rightarrow 1^-$ .


又由  $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$  可知  $-\ln x = -\ln(1+x-1) \sim 1-x, x \rightarrow 1^-$ . 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, x \rightarrow 1^-.$$

#### 命题 4.10

用欧拉麦克劳林公式估计  $\sum_{k=1}^n \ln k, n \rightarrow \infty$  的渐近展开式, 以此结合 Wallis 公式:  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow \infty$  证明:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty.$$

 **笔记** 需要记忆这个公式:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty$ .

**证明** 由 E-M 公式可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx. \quad (4.65)$$

由 Dirichlet 判别法可知,  $\int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx$  收敛. 则可设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} dx \triangleq$

$C_0 < \infty$ . 记  $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , 再令  $b_2(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) + \frac{1}{12}, x \in \mathbb{R}$ . 则不难发现  $b_2(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且周期为 1, 并且

$$b_2(x) = \int_0^x b_1(y) dy, \quad |b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

从而对 (4.65) 式使用分部积分可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln k &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \frac{b_1(x)}{x} dx = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + \int_1^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx - \int_n^{+\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx \\ &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + C_0 - \int_n^{+\infty} \frac{1}{x} db_2(x) = \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 + C_0 - \frac{b_2(x)}{x} \Big|_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + C_0 + \frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

又因为  $|b_2(x)| \leq \frac{1}{12}, \forall x \in \mathbb{R}$ . 所以对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\left| \frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right) = \frac{1}{6n}.$$

故  $\frac{b_2(n)}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{b_2(x)}{x^2} dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是再记  $C = 1 + C_0$ , 则

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.66)$$

注意到

$$(2n)!! = 2^n n!, n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.67)$$



于是由 Wallis 公式:  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, n \rightarrow \infty$ . 再结合(4.66)(4.67)可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! \cdot n!}{(2n)!\sqrt{n}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! \prod_{k=1}^n k}{\sqrt{n} \prod_{k=n+1}^{2n} k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{\sum_{k=1}^n \ln k}}{\sqrt{n} e^{\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{(n+\frac{1}{2}) \ln n - n + C + O(\frac{1}{n})}}{\sqrt{n} e^{(2n+\frac{1}{2}) \ln 2n - 2n + C + O(\frac{1}{n})}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{(n+\frac{1}{2}) \ln n - n + C + O(\frac{1}{n}) - [(2n+\frac{1}{2}) \ln 2n - 2n + C + O(\frac{1}{n})]}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! e^{-n \ln n + n - (2n+\frac{1}{2}) \ln 2 + O(\frac{1}{n})}}{\sqrt{n}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! 2^{-2n-\frac{1}{2}} e^n}{n^n \sqrt{n}} e^{O(\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} e^{O(\frac{1}{n})}.\end{aligned}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{O(\frac{1}{n})}} = \sqrt{\pi}$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} (\frac{n}{e})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ . 故  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty$ .

## 4.9 Riemann 引理

### 引理 4.1 (Riemann 引理)

设  $E \subset \mathbb{R}$  是区间且  $f$  在  $E$  上绝对可积.  $g$  是定义在  $\mathbb{R}$  的周期  $T > 0$  函数, 且在任何有界闭区间上 Riemann 可积, 则我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy. \quad (4.68)$$

注  $f$  在  $E$  上绝对可积包含  $f$  为反常积分的情况.

考试中, Riemann 引理不能直接使用, 需要我们根据具体问题给出证明. 具体可见例题 4.68.

### 笔记

- (1) 不妨设  $E = \mathbb{R}$  的原因: 若 (1.1) 式在  $E = \mathbb{R}$  时已得证明, 则当  $E \subseteq \mathbb{R}$  时, 令  $\tilde{f}(y) = f(y) \cdot \chi_E, y \in \mathbb{R}$ , 则由  $f(y)$  在  $E$  上绝对可积, 可得  $\tilde{f}(y)$  在  $\mathbb{R}$  上也绝对可积. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy \int_0^T g(y)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$$

故可以不妨设  $E = \mathbb{R}$ .

- (2) 不妨设  $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$  的原因: 若  $\sup_{\mathbb{R}} |g| = 0$ , 则  $g(x) \equiv 0$ , 此时结论显然成立. 因此我们只需要考虑当  $\sup_{\mathbb{R}} |g| > 0$  时的情况.

- (3) 不妨设  $T = 1$  的原因: 若 (4.68) 式在  $T = 1$  时已得证明, 则当  $T \neq 1$  时, 有

$$\frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy \stackrel{\text{令 } y=Tx}{=} \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Tx)dx = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (4.69)$$

由于  $g(y)$  是  $\mathbb{R}$  上周期为  $T \neq 1$  的函数, 因此  $g(Ty)$  就是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的函数. 从而由假设可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy = \int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy. \quad (4.70)$$

又由(4.69)式及  $T > 0$  可得

$$\int_E f(y)dy \int_0^1 g(Ty)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(Txy)dy \stackrel{\text{令 } t=Tx}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(ty)dy = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy$$

再结合(4.70)式可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T} \int_E f(y)dy \int_0^T g(y)dy$ . 故可以不妨设  $T = 1$ .

(4) 不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  的原因: 若 (4.68) 式在  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  时已得证明, 则当  $\int_0^1 g(y)dy \neq 0$  时, 令  $G(y) = g(y) - \int_0^1 g(t)dt$ , 则  $G(y)$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的函数, 并且  $\int_0^1 G(y)dy = 0$ . 于是由假设可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)G(xy)dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 G(y)dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y) \left[ g(xy) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy &= \int_E f(y)dy \int_0^1 \left[ g(y) - \int_0^1 g(t)dt \right] dy \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_E f(y)g(xy)dy - \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \right) &= \int_E f(y)dy \int_0^1 g(y)dy - \int_E f(y)dy \int_0^1 g(t)dt = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_E f(y)g(xy)dy &= \int_E f(y) \int_0^1 g(t)dt dy \end{aligned}$$

再结合(2)可知, 此时原结论成立. 故可以不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$ .

**证明** 不妨设  $E = \mathbb{R}, \sup_{\mathbb{R}} |g| > 0, T = 1$ , 再不妨设  $\int_0^1 g(y)dy = 0$ . 因此只需证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$ . 由  $g$  的周期为 1 及  $\int_0^1 g(y)dy = 0$  可得, 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\begin{aligned} \int_{-n}^0 g(t)dt &\stackrel{\text{令 } x=t+n}{=} \int_0^n g(x-n)dx \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \int_0^n g(x)dx = \int_0^n g(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(t)dt \stackrel{\text{令 } y=t-k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y+k)dy \stackrel{g \text{ 的周期为 } 1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 g(y)dy \\ &= (n-1) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

从而对  $\forall \beta > \alpha > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \right| &= \left| \int_0^{\beta} g(t)dt - \int_0^{\alpha} g(t)dt \right| = \left| \int_{-\lfloor \beta \rfloor}^{\beta - \lfloor \beta \rfloor} g(t + \lfloor \beta \rfloor)dt - \int_{-\lfloor \alpha \rfloor}^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} g(t + \lfloor \alpha \rfloor)dt \right| \\ &= \left| \int_{-\lfloor \beta \rfloor}^{\beta - \lfloor \beta \rfloor} g(t)dt - \int_{-\lfloor \alpha \rfloor}^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} g(t)dt \right| = \left| \int_0^{\beta - \lfloor \beta \rfloor} g(t)dt - \int_0^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} g(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}^{\beta - \lfloor \beta \rfloor} g(t)dt \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g|. \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(xy)dy \right| \stackrel{\text{令 } t=xy}{=} \frac{1}{x} \left| \int_{x\alpha}^{x\beta} g(t)dt \right| \leq \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x}, \quad \forall x > 0, \forall \beta > \alpha > 0. \quad (4.71)$$

因为  $f$  在  $\mathbb{R}$  上绝对可积, 所以由 Cauchy 收敛准则可知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \int_{|y| > N} f(y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (4.72)$$

由于  $f$  在  $\mathbb{R}$  上绝对可积, 从而  $f$  在  $\mathbb{R}$  上也 Riemann 可积, 因此由可积的充要条件可知, 存在划分

$$-N = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \left( \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \right) (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|}. \quad (4.73)$$

于是当  $x > \frac{3 \sum_{j=1}^n |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g|}{\varepsilon}$  时, 结合(4.71)(4.72)(4.73)可得

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(xy)dy \right| &\leq \left| \int_{-N}^N f(y)g(xy)dy \right| + \left| \int_{|y|>N} f(y)g(xy)dy \right| \stackrel{(4.72)}{\leq} \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(y)g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f]g(xy)dy \right| + \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot g(xy)dy \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\stackrel{(4.71)}{\leq} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(y) - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f]dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f|dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f)dy \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f|dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &= \sum_{j=1}^n (\sup_{[t_{i-1}, t_i]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f)(t_j - t_{j-1}) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f|dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\stackrel{(4.73)}{<} \frac{\varepsilon}{3 \sup_{\mathbb{R}} |g|} \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g| + \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g|}{x} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f|dy + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\stackrel{x \text{ 充分大}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(xy)dy = 0$ . 结论得证.

**例题 4.68** 设  $f \in R[0, 2\pi]$ , 不直接使用Riemann 引理计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx.$$

**证明** 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 固定  $n$ . 将  $[0, 2\pi]$  等分成  $2n$  段, 记这个划分为

$$T: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 2\pi,$$

其中  $t_i = \frac{i\pi}{n}, i = 0, 1, \dots, n$ . 此时我们有

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sin(nx)| dx = \int_{\frac{(i-1)\pi}{n}}^{\frac{i\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \frac{1}{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{n}. \quad (4.74)$$

由  $f \in R[0, 2\pi]$  可知,  $f$  在  $[0, 2\pi]$  上有界也内闭有界. 从而利用(4.74)式可知, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \leq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(4.74) \text{式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx &= \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) |\sin(nx)| dx \geq \sum_{i=1}^{2n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot |\sin(nx)| dx \stackrel{(4.74) \text{式}}{=} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

由  $f \in R[0, 2\pi]$  和 Riemann 可积的充要条件可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

于是对(4.75)(4.76)式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

**例题 4.69** 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上周期  $2\pi$  函数且在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积, 设

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, n = 1, 2, \dots$$

若  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  是  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  唯一间断点且存在下述极限

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - A}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - B}{x - x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2}.$$

### 笔记

- (1) 计算  $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路: 由于  $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上只可能有奇点  $t = 0$ , 因此  $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上不一定绝对可积. 从而不能直接利用 Riemann 引理. 于是我们需要将  $\frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  转化为在  $[0, \pi]$  上无奇点的函数 (排除  $t = 0$  这个奇点, 即证明  $t = 0$  不再是奇点), 只要被积函数在积分区间上无奇点且 Riemann 可积, 就一定绝对可积. 进而满足 Riemann 引理的条件, 再利用 Riemann 引理就能求解出  $I_1$ . 具体处理方式见下述证明.
- 计算  $I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路同理, 也是要排除  $t = 0$  这个可能的奇点, 再利用 Riemann 引理进行求解. 具体计算方式见下述证明.
- (2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的思路: 注意由于  $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上有一个奇点  $t = 0$ , 并且对  $\forall t \in (0, \pi]$ , 都有

$$\left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \geq \left| \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2}} \right| = \frac{\pi}{2t} > 0.$$

而  $\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2t} dt$  是发散的, 故  $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt$  也发散. 因此  $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上一定不是绝对可积的, 从而不能利用 Riemann 引理计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ . 真正能计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  的方法有多种, 下述证明利用的是 **强行替换/拟合法**.

**证明** 注意到

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \\ &\stackrel{\text{令 } y=-t}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \end{aligned} \quad (4.77)$$

记  $I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ , 则由(4.77)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2). \quad (4.78)$$

于是

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t) - A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt, \quad (4.79)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0-t) - B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \frac{B}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt. \quad (4.80)$$

由条件可知  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t)-A}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-A}{x-x_0}$  存在,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-t)-B}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-B}{x-x_0}$  存在, 因此  $\frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}}, \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  都没有奇点且 Riemann 可积, 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$  都满足 Riemann 引理的条件. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0. \quad (4.81)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt$ .

$$\left| \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt - \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \right| = \left| \int_0^\pi \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt \right|. \quad (4.82)$$

而  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{t^2} \stackrel{\text{L'Hospital' rules}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{2}}{2t} = 0$ , 因此  $\frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}}$  在  $[0, \pi]$  上无奇点且 Riemann 可积, 从而由 Riemann 引理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0$ . 于是再结合 (4.82) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{1}{t} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{2n+1}{2} \pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (4.83)$$

因此, 由 (4.79)(4.80)(4.81)(4.83) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t)-A}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{A}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0-t)-B}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \frac{2n+1}{2} t \right) dt = 0 + \frac{B}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{B}{2}.$$

再结合 (4.78) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \frac{A+B}{2}.$$

**例题 4.70** 设  $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(0) = 0$ , 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} f(x) dx.$$

**注** 由于  $x = 0$  可能是  $\frac{f(x)}{\sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的奇点, 因此我们需要将其转化为在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上不含奇点的函数, 才能利用 Riemann 引理进行计算.

**证明** 注意到

$$\frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx. \quad (4.84)$$

先计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$ . 由  $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$  可知,  $f \in D^2[0, \frac{\pi}{2}]$ . 从而由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

于是  $\frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 故由 Riemann 引理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx \int_0^\pi \sin^2 x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} dx < \infty. \end{aligned} \quad (4.85)$$

利用 (4.85) 式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = 0. \quad (4.86)$$

下面计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx$ . 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 我们有

$$\left| \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx - \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \right| = \left| \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx \right|. \quad (4.87)$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}$ , 故  $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上无奇点且 Riemann 可积, 从而绝对可积. 于是由 Riemann 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} dx < \infty. \quad (4.88)$$

利用(4.88)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \cdot \sin^2(nx) dx = 0. \quad (4.89)$$

因此, 对(4.87)式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 利用(4.89)式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)}{x} \sin^2(nx) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)}{\ln n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

而由函数 Stolz 定理可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = f'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln(x+\pi) - \ln x} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt. \quad (4.91)$$

由积分中值定理可知, 对  $\forall x > 0$ , 存在  $\theta_x \in [x, x+\pi]$ , 使得

$$\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{\theta_x} \int_x^{x+\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{\theta_x} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2\theta_x}.$$

又由  $\theta_x \in [x, x+\pi]$  可知,  $\theta_x \sim x, x \rightarrow +\infty$ . 从而(4.91)式可化为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} x \int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{f'(0)}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi x}{2\theta_x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

于是由 Heine 归结原则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x} dx}{\ln \frac{n\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(0) \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x - \ln \frac{\pi}{2}} = \frac{f'(0)}{2}. \quad (4.92)$$

利用(4.86)(4.92)式, 对(4.84)式两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(0)x}{\sin^2 x} \sin^2(nx) dx = \frac{f'(0)}{2}.$$

## 第五章 不等式

### 定理 5.1 (Cauchy 不等式)

对任何  $n \in \mathbb{N}, (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (5.1)$$

且等号成立条件为  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.

**证明** (i) 当  $b_i$  全为零时, (5.1) 式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当  $b_i$  不全为零时, 注意到  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . 等价于

$$t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$ .

从而  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$ . 下证 (5.1) 式等号成立的充要条件.

若 (5.1) 式等号成立, 则

(i) 当  $b_i$  全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.

(ii) 当  $b_i$  不全为零时, 此时我们有  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$ . 根据一元二次方程根的存在性定理, 可

知存在  $t_0 \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t_0 b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0.$$

于是  $a_i + t_0 b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 即  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关.

反之, 若  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  线性相关, 则存在不全为零的  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

不妨设  $\lambda \neq 0$ , 则  $a_i = -\frac{\mu}{\lambda} b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 从而当  $t = \frac{\mu}{\lambda}$  时,  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = 0$ .

即一元二次方程  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i) \right)^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2t_0 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$  有实根  $\frac{\mu}{\lambda}$ .

因此  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$ . 即 (5.1) 式等号成立.

**例题 5.1** 证明:


$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

**证明** 对  $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ , 由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i})^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = n^2.$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

**例题 5.2** 求函数  $y = \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x}$  在定义域内的最大值和最小值.

 **笔记** 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后通过简单的放缩就能得到  $y(0)$  就是最小值. 再利用 **Cauchy 不等式** 我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设  $A, B, C > 0$ , 则由 Cauchy 不等式可得

$$\left( \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{Ax+27A} + \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{13B-Bx} + \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{Cx} \right)^2 \leq \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) [(A+C-B)x + 27A + 13B]$$

并且当且仅当  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx}$  时, 等号成立.

令  $A+C-B=0$  (因为要求解  $y$  的最大值, 我们需要将  $y$  放大成一个不含  $x$  的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases} \sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax+27A} = \sqrt{B} \cdot \sqrt{13B-Bx} = \sqrt{C} \cdot \sqrt{Cx} \\ A+C-B=0 \end{cases}$$

解得:  $A=1, B=3, C=2, x=9$ .

从而得到我们需要构造的 Cauchy 不等式为

$$\left( \sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x} \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) (x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当  $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$ , 即  $x=9$  时, 等号成立.

**解** 由题可知, 函数  $y$  的定义域就是:  $0 \leq x \leq 13$ . 而

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x+27} + \sqrt{[\sqrt{13-x} + \sqrt{x}]^2} \\ &= \sqrt{x+27} + \sqrt{13+2\sqrt{x}(13-x)} \\ &\geq \sqrt{27} + \sqrt{13} = 3\sqrt{3} + \sqrt{13} = y(0) \end{aligned}$$

于是  $y$  的最小值为  $3\sqrt{3} + \sqrt{13}$ . 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} y^2(x) &= (\sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x})^2 \\ &= \left( \sqrt{x+27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{39-3x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x} \right)^2 \\ &\leq \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) (x+27+39-3x+2x) \\ &= 121 = y^2(9) \end{aligned}$$

即  $y(x) \leq y(9) = 11$ . 并且当且仅当  $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$ , 即  $x=9$  时, 等号成立. 故  $y$  的最大值为 11.




**定理 5.2 (均值不等式)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 则下述函数是连续递增函数

$$f(r) = \begin{cases} \left( \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, & r = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

其中若  $r_1 \neq r_2$ , 则  $f(r_1) = f(r_2)$  的充要条件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

 **笔记** 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

**定理 5.3 (均值不等式常用形式)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

**例题 5.3** 设  $f(x) = 4x(x-1)^2, x \in (0, 1)$ , 求  $f$  的最大值.

**解** 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2 \cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2 \cdot \left[ \sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)} \right]^3 \\ &\leq 2 \cdot \left[ \frac{2x+1-x+1-x}{3} \right]^3 \\ &= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当  $2x = 1 - x$ , 即  $x = \frac{1}{3}$  时等号成立.

**定理 5.4 (Bernoulli 不等式)**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq -1$  且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

**证明** 当  $n=1$  时, 我们有  $1+x_1 \geq 1+x_1$ , 结论显然成立.

假设当  $n=k$  时, 结论成立. 则当  $n=k+1$  时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立.

**定理 5.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)**

设  $x \geq -1$ , 则

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

### 定理 5.6 (Jesen 不等式)

设  $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 则对下凸函数  $f$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数  $f$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$



### 定理 5.7 (Young 不等式)

对任何  $a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$  有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$



**笔记** 若  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则我们称  $p$  与  $q$  共轭.

**证明** (i) 当  $a, b$  至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当  $a, b$  均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\ \Leftrightarrow \ln a + \ln b &\leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q &\leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \end{aligned}$$

由 **Jesen 不等式** 和  $f(x) = \ln x$  函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 故原结论也成立.

### 定理 5.8 (Hold 不等式)

设  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ , 则有

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}.$$



**证明** (i) 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  不全为零时, 令

$$a'_k = \frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}}, b'_k = \frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}}, k = 1, 2, \dots, n.$$

从而只需证明  $\sum_{k=1}^n a'_k b'_k \leq 1$ . 由 **Young 不等式** 可得

$$\sum_{k=1}^n a'_k b'_k \leq \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(a'_k)^p}{p} + \frac{(b'_k)^q}{q} \right] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} \right)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{p \sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{\sum_{k=1}^n b_k^q}{q \sum_{k=1}^n b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

故原结论成立.

### 定理 5.9 (排序和不等式)

设  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$  满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  是  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

且等号成立的充要条件是  $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$  或者  $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$ .



**笔记** 简单记为倒序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  同序和.

### 定理 5.10 (Chebyshev 不等式)

设  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$  满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  是  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

且等号成立的充要条件是  $a_i = a_j, 1 \leq i < j \leq n$  或者  $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq n$ .



### 定理 5.11 (Chebyshev 不等式积分形式)

设  $p \in R[a, b]$  且非负,  $f, g$  在  $[a, b]$  上是单调函数, 则

$$\left( \int_a^b p(x) f(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) g(x) dx \right) \leq \left( \int_a^b p(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right), f, g \text{ 单调性相同}$$

$$\left( \int_a^b p(x) f(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) g(x) dx \right) \geq \left( \int_a^b p(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right), f, g \text{ 单调性相反}$$



**证明**

$$\begin{aligned} & \left( \int_a^b p(x) f(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) g(x) dx \right) - \left( \int_a^b p(x) dx \right) \left( \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right) \\ &= \left( \int_a^b p(x) f(x) dx \right) \left( \int_a^b p(y) g(y) dy \right) - \left( \int_a^b p(x) dx \right) \left( \int_a^b p(y) f(y) g(y) dy \right) \\ &= \iint_{[a,b]^2} p(x) p(y) g(y) [f(x) - f(y)] dx dy \\ &= \iint_{[a,b]^2} p(y) p(x) g(x) [f(y) - f(x)] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[a,b]^2} p(x) p(y) [g(y) - g(x)] [f(x) - f(y)] dx dy, \end{aligned}$$

## 第六章 积分

### 6.1 积分常用结论

#### 定理 6.1 (基本结论)

$$\sum_{n=1}^m \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^m f_n(x) dx.$$
$$\sum_{n=1}^m \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx = \int_{a_0}^{a_m} f(x) dx, \quad \sum_{n=1}^m \int_{a_n}^{a_{n-1}} f(x) dx = \int_{a_m}^{a_0} f(x) dx.$$

**证明** 由定积分的性质易证.

#### 命题 6.1

若  $f \in R[a, +\infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n |f(x)| dx$  存在且  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ , 则  $\int_a^\infty f(x) dx$  一定存在.

**笔记** 若已知  $\int_a^\infty f(x) dx$  存在, 则由 Heine 归结原则可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$  一定存在. 但是反过来,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$  只是  $\int_a^\infty f(x) dx$  的一个子列极限, 故  $\int_a^\infty f(x) dx$  不一定存在. 还需要额外的条件才能使得  $\int_a^\infty f(x) dx$  存在.

**证明** 对  $\forall x \geq a$ , 一定存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $n \leq x < n+1$ . 从而可得

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^n f(x) dx + \int_n^x f(x) dx. \quad (6.1)$$

并且

$$\int_n^x f(x) dx \leq \int_n^x |f(x)| dx \leq \int_n^{n+1} |f(x)| dx \leq \sup_{y \geq n} |f(y)|. \quad (6.2)$$

对(6.2)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 进而可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \geq n} |f(y)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|.$$

由于此时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 因此  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = 0$ . 于是再对(6.1)式两边同时令  $x \rightarrow +\infty$ , 则  $n \rightarrow +\infty$ . 从而可得

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx.$$

又因为此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$  存在, 所以  $\int_a^\infty f(x) dx$  也存在.

#### 定理 6.2

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上也可积 (即绝对可积), 且成立

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

## 6.2 积分性态分析

**例题 6.1** 已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少 2 个零点.

**证明** 设  $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $F_1(a) = F_1(b) = 0$ . 再设  $F_2(x) = \int_a^x F_1(t) dt = \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt$ , 则  $F_2(a) = 0, F_2'(x) = F_1(x), F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$ . 由条件可知


$$0 = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F_1'(x) dx = \int_a^b x dF_1(x) = x F_1(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_1(x) dx = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F_2'(\xi) = F_1(\xi) = 0$ . 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$ , 使得  $F_1'(\eta_1) = F_1'(\eta_2) = 0$ . 即  $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$ .

**例题 6.2** 已知  $f(x) \in C[a, b]$ , 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少  $n+1$  个零点.

 **笔记** 利用分部积分转换导数的技巧.

**证明** 令  $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \left[ \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 \right] dx_2 \dots dx_n$ . 则  $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$ .

由已知条件, 再反复分部积分, 可得当  $1 \leq k \leq n$  且  $k \in \mathbb{N}$  时, 有


$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F^{(n+1)}(x) dx = F^{(n)}(x) \Big|_a^b = F^{(n)}(b), \\ 0 &= \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = x F^{(n)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x) dx = -F^{(n-1)}(b), \\ &\dots\dots \\ 0 &= \int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x) \Big|_a^b - n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx \\ &= -n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx = \dots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x) dx = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而  $F(b) = F'(b) = \dots = F^{(n)}(b) = 0$ . 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 Rolle 中值定理可知存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a, b)$ , 使得  $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在  $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a, b)$ , 使得  $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \dots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ . 即  $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \dots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$ .

**例题 6.3** 已知  $f(x) \in D^2[0, 1]$ , 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}, \int_0^1 x f(x) dx = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = 16$ .

 **笔记** 构造  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$  的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个  $g(x) = f(x) - p(x)$ , 使得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = \int_0^1 x^k [f(x) - p(x)] dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k p(x) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c,$$

$$0 = \int_0^1 xp(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2},$$

$$\frac{1}{60} = \int_0^1 x^2 p(x)dx = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}.$$

解得:  $a = 8, b = -9, c = 2$ . 于是就得到  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ .

**证明** 令  $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ , 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x)dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令  $G(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t \left( \int_0^s g(y)dy \right) ds \right] dt$ , 则  $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$ . 利用分部积分可得

$$0 = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 G'''(x)dx = G''(1),$$

$$0 = \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 xG'''(x)dx = \int_0^1 xdG''(x) = xG''(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x)dx = -G'(1),$$

$$0 = \int_0^1 x^2g(x)dx = \int_0^1 x^2G'''(x)dx = \int_0^1 x^2dG''(x) = x^2G''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xG''(x)dx$$

$$= -2 \int_0^1 xdG'(x) = 2 \int_0^1 G'(x)dx - 2xG'(x) \Big|_0^1 = 2G(1).$$

从而  $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$ . 于是由 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^1 \in (0, 1)$ , 使得  $G'(\xi_1^1) = 0$ . 再利用 *Rolle* 中值定理可知, 存在  $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0, 1)$ , 使得  $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$ . 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0, 1)$ , 使得  $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$ . 即  $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$ . 再反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $g''(\xi) = 0$ . 即  $f''(\xi) = 16$ .

#### 例题 6.4

**证明**

#### 例题 6.5

**证明**

#### 例题 6.6

**证明**

#### 例题 6.7

**证明**

## 第七章 函数性态分析

### 7.1 连续函数

#### 命题 7.1

若  $f$  是区间  $I$  上处处不为零的连续函数, 则  $f$  在区间  $I$  上要么恒大于零, 要么恒小于零.



**证明** 用反证法, 若存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , 则由零点存在定理可知, 存在  $\xi \in (\min x_1, x_2, \max x_1, x_2)$ , 使得  $f(\xi) = 0$  矛盾.


## 第八章 小技巧

### 8.1 长除法

**例题 8.1** 利用多项式除法计算 Taylor 级数和 Laurent 级数

已知  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$ ,  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$ .

1. 求  $\tan x$ .      2. 求  $\frac{1}{\sin^2 x}$ .

 **笔记** 实际问题中需要多展开几项, 展开得越多, 得到的结果也越多.

**解** 1. 根据多项式除法可得

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \overline{) x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots} \\ \underline{x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots} \\ -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \cdots} \\ \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \underline{\frac{2}{15}x^5 + \cdots} \\ 0 + \cdots \end{array}$$

因此  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ .

2. 根据多项式乘法可得

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

再根据多项式除法可得

$$\begin{array}{r} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots \\ x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots \overline{) 1} \\ \underline{1 - \frac{1}{3}x^2 + \cdots} \\ \frac{1}{3}x^2 + \cdots \\ \underline{\frac{1}{3}x^2 + \cdots} \\ 0 + \cdots \end{array}$$

因此  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \cdots$ .



## 8.2 将多项式分式分解为其部分因式的和

例题 8.2 1. 分解  $a > 0, \frac{1}{(1+x^2)(1+ax)}$ .

2. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2}$ .

3. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)^2(1+x)}$ .

4. 分解  $\frac{1}{(1+x^2)^2(1+x)^2}$ .

解 1. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+ax}. \quad (8.1)$$

其中  $A, B, C$  均为常数.

解法一 (待定系数法):

将(8.1)式右边通分得到

$$\frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+ax} = \frac{(Ax+B)(1+ax) + C(1+x^2)}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{(Aa+C)x^2 + (A+Ba)x + B+C}{(1+x^2)(1+ax)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} Aa+C=0 \\ A+Ba=0 \\ B+C=1 \end{cases}$$

解得:  $A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}, C = \frac{a^2}{1+a^2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法二 (留数法):

(8.1)式两边同时乘  $1+ax$ , 得到  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+ax) + C$ . 再令  $x \rightarrow -\frac{1}{a}$ , 得  $C = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{1+a^2}$ .

(8.1)式两边同时乘  $1+x^2$ , 得到  $\frac{1}{1+ax} = Ax+B + \frac{C}{1+ax} \cdot (1+x^2)$ . 再分别令  $x \rightarrow \pm i$ , 可得

$$\begin{cases} Ai+B = \frac{1}{1+ai} \\ -Ai+B = \frac{1}{1-ai} \end{cases}$$

解得:  $A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

解法三 (留数法 + 待定系数法):

(8.1)式两边同时乘  $1+ax$ , 得到  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+ax) + C$ . 再令  $x \rightarrow -\frac{1}{a}$ , 得  $C = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{1+a^2}$ .

容易直接观察出(8.1)式右边通分后分子的最高次项系数为  $Aa+C$ , 常数项为  $B+C$ . 并将其与(8.1)式左边的分子对比, 可以得到

$$\begin{cases} Aa+C=0 \\ B+C=1 \end{cases}$$

解得:  $A = -\frac{a}{1+a^2}, B = \frac{1}{1+a^2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+ax)} = \frac{-\frac{a}{1+a^2}x + \frac{1}{1+a^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{a^2}{1+a^2}}{1+ax}.$$

2. 根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}. \quad (8.2)$$

其中  $A, B, C, D$  均为常数.

(8.2)式两边同时乘  $(1+x)^2$ , 得到

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2 + C(1+x) + D. \quad (8.3)$$

再令  $x \rightarrow -1$ , 可得  $D = \frac{1}{2}$ . 对(8.3)式两边同时求导得到

$$\left. \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right|_{x \rightarrow -1} = \left[ \frac{Ax+B}{1+x^2} \cdot (1+x)^2 \right]' \bigg|_{x \rightarrow -1} + C = C.$$

从而  $C = \frac{1}{2}$ . 令(8.2)中的  $x = 0$ , 得到  $1 = B + C + D$ , 将  $C = D = \frac{1}{2}$  代入解得:  $B = 0$ . 再令(8.2)中的  $x = 1$ , 得到  $\frac{1}{8} = \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4}$ , 将  $C = D = \frac{1}{2}, B = 0$  代入解得:  $A = -\frac{1}{2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2(1+x)^2}.$$

**例题 8.3** 分解  $\frac{1}{1+x^4}$ .

**解** 首先我们注意到

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(1+x^2) - 2x^2} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}.$$

然后根据代数学知识我们可以设

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \quad (8.4)$$

其中  $A, B, C, D$  均为常数. 将上式右边通分可得

$$\frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{(Ax+B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx+D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}.$$

比较上式左右两边分子各项系数可得

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0 \\ A + C = 0 \end{cases}$$

解得:  $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{\sqrt{2}}{4}, D = \frac{1}{2}$ .  
于是原式可分解为

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

**例题 8.4** 分解  $\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)}$ .

**解** 先利用多项式除法用  $x^4$  除以  $(1+x)(1+x^2)$  得到  $x^4 = (x-1)(1+x)(1+x^2) + 1$ . 从而

$$\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{(x-1)(1+x)(1+x^2) + 1}{(1+x)(1+x^2)} = x - 1 + \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}.$$

然后再利用多项式分式的分解方法 (待定系数法和留数法) 将  $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$  分解为部分因式的和. 最后我们可将原式分解为

$$\frac{x^4}{(1+x)(1+x^2)} = x - 1 + \frac{1}{2+2x} + \frac{-x+1}{2+2x^2}.$$