0.1 实正规矩阵的正交相似标准型

引理 0.1

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正规矩阵. 若 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 A 的特征值, 则 $\overline{\lambda}$ 是 A^T 的特征值, 且 A 和 A^T 有分别属于 $\lambda,\overline{\lambda}$ 的相同的特征向量.

证明 设 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, 注意到

$$\begin{aligned}&A\alpha=\lambda\alpha \iff (A-\lambda E)\alpha=0 \overset{\text{注意内积的性质}}{\iff} \alpha^*(A^T-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)\alpha=0\\&\overset{\text{矩阵乘法之后利用正规定义}}{\iff} \alpha^*(A-\lambda E)(A^T-\overline{\lambda}E)\alpha=0 \iff (A^T-\overline{\lambda}E)\alpha=0\\&\iff A^T\alpha=\overline{\lambda}\alpha,\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

定理 0.1 (实正规矩阵的正交相似标准型)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实正规矩阵. 设 A 的全部特征值是

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,a_1\pm ib_1,a_2\pm ib_2,\cdots,a_t\pm ib_t,$$

这里

$$\lambda_i,a_j\in\mathbb{R},b_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\},1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t,$$

且允许相同. 记

$$c_j=-2a_j,d_j=a_j^2+b_j^2,$$
$$R_j=\begin{pmatrix}a_j&-b_j\\b_j&a_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}a_j&b_j\\-b_j&a_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0&-d_j\\1&-c_j\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0&1\\-d_j&-c_j\end{pmatrix},$$

则存在实正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_s&&&\\&&&R_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&R_t\end{pmatrix}. \tag{1}$$

也存在实正交矩阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix}I_{r_1}&&&&&\\&-I_{r_2}&&&&\\&&O&&&\\&&&R_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&R_t\end{pmatrix},$$

其中 1 的个数与 A 的正实数特征值的个数相同,-1 的个数与 A 的负实数特征值的个数相同,0 的个数与 A 的零特征值个数相同.

笔记 读者应该仔细计算(1)中每个块对应的特征值. 本结果如果不是被直接考察, 可以直接使用.

证明 **Step1** 当 $n=1$ 时命题是显然的. 对 $n=2$ 时证明蕴含在下面证明中. 假定命题对于小于等于 $n-1$ 的所有实正规矩阵成立, 现在考虑 n 阶正规矩阵. 证明的想法就是降阶之后用归纳假设.

Step2 若 A 有实特征值 λ, 取 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 是 A 的单位特征向量, 并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 则在这组基下有

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & C\\ 0 & H\end{pmatrix}.$$

现在由 $A^TA=AA^T$ 知

$$\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda C\\ \lambda C^T & C^TC+H^TH\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+CC^T & CH^T\\ HC^T & HH^T\end{pmatrix}.$$

于是

$$CC^T=0\overset{\text{命题??}}{\Longrightarrow}C=0\Longrightarrow H^TH=HH^T,$$

故 H 是 $n-1$ 阶实正规矩阵, 此时用归纳假设即得存在 $n-1$ 阶实正交矩阵 T_1, 使得 $T_1^THT_1$ 形如(1)右边矩阵的形状. 于是可取 $T=\operatorname{diag}\{1,T_1\}$, 即得(1).

Step3 若 A 有特征值 $a+bi, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 则存在不同时为 0 的 $\beta,\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$A(\beta+i\eta)=(a+bi)(\beta+i\eta)\iff\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\ A\eta=a\eta+b\beta\end{cases}\iff A(\beta\ \eta)=(\beta\ \eta)\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}.\tag{2}$$

于是式(2)暗示我们想到 β,η 是标准正交的.

Step4 由引理 0.1, 我们知道 $A^T(\beta+i\eta)=(a-bi)(\beta+i\eta)$, 于是类似(2)可得

$$\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\ A\eta=a\eta+b\beta\end{cases},\begin{cases}A^T\beta=a\beta+b\eta\\ A^T\eta=a\eta-b\beta\end{cases}.$$

由此可得

$$\begin{cases}\beta^TA\beta=a\beta^T\beta-b\beta^T\eta\\ \beta^TA\beta=a\beta^T\beta+b\eta^T\beta\end{cases}\Longrightarrow\beta^T\eta+\eta^T\beta=0\overset{\text{都是数字}}{\Longrightarrow}\beta^T\eta=\eta^T\beta=0,$$

以及

$$\begin{cases}\eta^TA^T\beta=a\eta^T\beta+b\eta^T\eta\\ \beta^TA\eta=a\beta^T\eta+b\beta^T\beta\end{cases}\Longrightarrow\eta^T\eta=\beta^T\beta.$$

因此 β,η 是想要的正交的. 不妨设为单位向量并将其扩充到全空间构成标准正交基. 则在这组基下, A 形如

$$\begin{pmatrix}a & -b & C_1\\ b & a & C_2\\ 0 & 0 & H\end{pmatrix}.$$

类似实特征值的情况, 我们直接矩阵乘法可得 $C_1=C_2=0, H$ 正规. 于是类似由归纳假设即可得(1). 我们完成了证明.

□

命题 0.1 (正定阵与实反称阵可同时合同对角化)

设 A 为 n 阶正定实对称矩阵, S 是同阶实反对称矩阵, 求证: 存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC=I_n,\quad C'SC=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0 & b_1\\ -b_1 & 0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0 & b_r\\ -b_r & 0\end{pmatrix},0,\dots,0\right\},$$

其中 $b_1,\dots,b_r$ 是非零实数.

证明 因为 A 是正定阵, 故存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP=I_n$. 又矩阵 $P'SP$ 还是实反对称矩阵, 故由反对称矩阵的合同标准型知, 存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q'(P'SP)Q=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0 & b_1\\ -b_1 & 0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0 & b_r\\ -b_r & 0\end{pmatrix},0,\dots,0\right\},$$

其中 $b_1,\dots,b_r$ 是非零实数. 此时 $Q'(P'AP)Q = I_n$, 只需令 $C = PQ$ 即得结论.

□

命题 0.2

设 n 阶实矩阵 A 满足 $A + A'$ 正定 (即 A 是亚正定阵). 求证:

$$|A + A'| \leqslant 2^n |A|$$

且等号成立的充要条件是 A 为对称矩阵.

证明 证法一:注意到矩阵 A 的如下分解:

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

其中 $\frac{1}{2}(A + A')$ 是正定阵, $\frac{1}{2}(A - A')$ 是实反对称矩阵, 故由命题??可得 $|A| \geqslant \frac{1}{2^n}|A + A'|$, 等号成立的充要条件是 $\frac{1}{2}(A - A') = O$, 即 A 为对称矩阵.

证法二:设可逆矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $C^T(A + A^T)C = E_n$, 要证不等式等价于两边乘以 $(\det C)^2 > 0$ 还成立, 因此可以不妨设 $A + A^T = E_n$.

现在 $(A - \frac{1}{2}E_n)^T = A^T - \frac{1}{2}E_n = \frac{1}{2}E_n - A$, 即 $A - \frac{1}{2}E_n$ 是实反对称矩阵. 由实反对称矩阵特征值为 0 或者纯虚数我们有 A 的特征值形如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm ai, a \neq 0$, 注意到复特征值成对出现且有

$$\left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} - ai\right) = \frac{1}{4} + a^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

我们由行列式为特征值的积得

$$\det(2A) = 2^n \det A \geqslant 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

若等号成立, 则 $A - \frac{1}{2}E_n$ 特征值全为 0. 考虑实正规矩阵的正交相似标准型得 $A = \frac{1}{2}E_n = A^T$ 而矛盾! 我们完成了证明.

□

例题 0.1 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 其中 A 的 n 个特征值都是正实数, 并且满足 $AB + BA' = 2AA'$. 证明:

(1) B 必为对称矩阵;

(2) A 为对称矩阵当且仅当 $A = B$, 也当且仅当 $\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(AA')$;

(3) $|B| \geqslant |A|$, 且等号成立的充要条件是 $A = B$.

证明 (1) 考虑矩阵方程

$$AX - X(-A') = 2AA' \tag{3}$$

由于 A 的特征值都是正实数, 故 $-A'$ 的特征值都是负实数, 从而它们没有公共的特征值. 由命题??可知, 矩阵方程 (3) 存在唯一解 $X = B \in M_n(\mathbb{R})$. 将等式 $AB + BA' = 2AA'$ 两边同时转置, 可得 $AB' + B'A' = 2AA'$, 即 $X = B'$ 也是矩阵方程 (3) 的解, 由解的唯一性可得 $B = B'$, 即 B 为对称矩阵.

(2) 若 A 为对称矩阵, 则 $X = A$ 也是矩阵方程 (3) 的解, 由解的唯一性可得 $B = A$, 于是 $B^2 = AA'$, 从而 $\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(AA')$. 反之, 若 $\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(AA')$, 则

$$\operatorname{tr}\left((A - B)(A - B)'\right) = \operatorname{tr}\left((A - B)(A' - B)\right) = \operatorname{tr}\left(AA' + B^2 - (AB + BA')\right) = \operatorname{tr}(B^2) - \operatorname{tr}(AA') = 0,$$

由迹的正定性可得 $A - B = O$, 即 $A = B$ 是对称矩阵.

(3) 注意到 $AB + (AB)' = 2AA'$ 为正定阵且 $|A| > 0$, 故由命题 0.2可得

$$|2AA'| = |AB + (AB)'| \leqslant 2^n |AB|,$$

由此可得 $|B| \geqslant |A|$, 等号成立当且仅当 AB 为对称矩阵, 即当且仅当 $AB = AA'$, 这也当且仅当 $A = B$.

□

例题 0.2 设 A 为 n 阶实正规矩阵, 求证: 存在特征值为 1 或 -1 的正交矩阵 P, 使得 $P'AP = A'$.

证明 由实正规矩阵的正交相似标准型可知存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q'AQ = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{pmatrix}, c_{2r+1}, \cdots, c_n\right\}$$

为正交相似标准型, 上式两边转置后有

$$Q'A'Q = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_r & -b_r \\ b_r & a_r \end{pmatrix}, c_{2r+1}, \cdots, c_n\right\}.$$

设正交矩阵 $R = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1\right\}$, 其中有 r 个二阶分块, 则容易验证 $R'(Q'AQ)R = Q'A'Q$, 即有 $(QRQ')'A(QRQ') = A'$. 令 $P = QRQ'$, 则 P 为正交矩阵且 $P'AP = A'$. 又 P 正交相似于 R, 故其特征值为 1 或 -1.

□

命题 0.3

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 求证: $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为奇数.

注 这个命题的直接推论是: 若正交矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$. 这一结论也可由第 2 章矩阵的技巧 (类似于例 2.19 的讨论) 来得到. 又因为正交矩阵行列式的值等于 1 或 -1, 故例 9.119 的等价命题为: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ 为偶数.

证明 因为正交矩阵的逆矩阵以及正交矩阵的乘积都是正交矩阵, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 还是正交矩阵. $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$ 等价于 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}| = -1$, 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{I}_n)$, 故只要证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$ 为奇数即可. 下面给出两种证法.

证法一:设 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1\right\},$$

其中 $\sin\theta_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant r)$, 且有 s 个 1, t 个 -1. 于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^t$, 并且

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1+\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 1+\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1+\cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & 1+\cos\theta_r \end{pmatrix}, 2, \cdots, 2, 0, \cdots, 0\right\},$$

从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = n - t$. 因此 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 当且仅当 t 为奇数, 即当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$ 为奇数.

证法二:由于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是复正规矩阵, 从而酉相似于对角矩阵, 特别地, $\boldsymbol{A}$ 可复对角化. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是模长等于 1 的复数, 故或者是模长等于 1 的共轭虚特征值, 或者是 ± 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1 的几何重数 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = t$, 则其代数重数也为 t, 于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^t = -1$ 当且仅当 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = t$ 为奇数.

□