

0.1 性态分析类

定理 0.1 (积分中值定理)

(1) $f(x) \in R[a, b]$, $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\zeta} f(x)dx.$$

(2) $f(x) \in R[a, b]$, $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\zeta}^b f(x)dx.$$

(3) $f(x) \in R[a, b]$, $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\zeta} f(x)dx + g(b) \int_{\zeta}^b f(x)dx.$$

(4) $f(x) \in R[a, b]$ 且不变号, $g(x) \in R[a, b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b f(x)dx.$$

(5) $f(x) \in R[a, b]$ 且不变号, $g(x) \in C[a, b]$, 则存在 $\zeta \in (a, b)$, 使得


$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\zeta) \int_a^b f(x)dx.$$

(6) 若 (1),(2),(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a, b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta \in (a, b)$.

定理 0.2 (Hadamard 不等式)

f 是 $[a, b]$ 上的下凸函数, 则

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

 **笔记** 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间 $[0, 1]$.

注 左边的不等式证明中的线性换元构造思路: 我期望找到一个线性函数 $g(t)$, 使得令 $x = g(t)$ 换元后, 有

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=g(t)}{=} \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt.$$

即 $g(0) = a, g(1) = b$. 因此 $g(t) = \frac{b-a}{1-0}t + a = a + (b-a)t$. 从而

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=a+(b-a)t}{=} (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t)dt = (b-a) \int_0^1 f((1-t)a + bt)dt.$$

证明 由 f 在 $[a, b]$ 上下凸, 一方面, 我们有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(a(1-t) + bt)dt \leq \int_0^1 [(1-t)f(a) + tf(b)]dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b [f(a+b-x) + f(x)]dx \\ &\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

故结论成立. □

例题 0.1 若 f 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $f''(\eta) < -2$.

注 通过 $f''(x) + 2 \geq 0, \forall x \in (0, 1)$ 来推出 $f + x^2$ 在 $[0, 1]$ 下凸: 实际上, 令 $g = f + x^2$, 则 $g'' \geq 0, \forall x \in (0, 1)$, 从而 g

在 $(0, 1)$ 下凸. 因为 $g = f + x^2 \in C[0, 1]$ 和 g 在 $(0, 1)$ 下凸我们就有

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y), \forall x, y \in (0, 1), \lambda \in [0, 1].$$

上式中令 x 趋于 0 或者 1 也成立, 再令 y 趋于 1 或者 0 也成立. 因此 g 在 $[0, 1]$ 下凸.

证明 若不然, 对任何 $x \in (0, 1)$ 都有 $f''(x) \geq -2$, 于是 $f(x) + x^2$ 是 $[0, 1]$ 的下凸函数. 于是由 Hadamard 不等式我们知道

$$\frac{4}{3} = \int_0^1 [f(x) + x^2] dx \leq \frac{f(0) + 0^2 + f(1) + 1^2}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

矛盾! 现在存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $f''(\eta) < -2$. □

命题 0.1

设 $f \in C^3(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \forall b \neq a.$$

证明: f 是下凸函数. ▲

注 本题对一般情况 $f \in C(\mathbb{R})$ 也成立, 需要取磨光函数如卷积磨光核. 详细见清疏讲义.

笔记 这就是 Hadamard 不等式的反向结果.

证明 当 $f \in C^3(\mathbb{R})$ 时, 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{6}(b-a)^3} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{2}(b-a)^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f'(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{4} f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \left(f''(b) - \frac{3}{4} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{8} f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} f''(a) \geq 0. \end{aligned}$$

因此

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

所以 f 是下凸函数. □

定理 0.3 (Darboux 中值定理/导数介值定理)

设 $f \in D[a, b]$, 对任何介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的 η , 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = \eta$. ♥

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理. 即不妨设 $f'(a) < 0 < f'(b)$, 去找 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = 0$. 事实上由极限保号性和

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) > 0,$$

我们知道存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) < f(a), \forall x \in (a, a + \delta], \quad f(x) < f(b), \forall x \in [b - \delta, b).$$

因此 f 最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的导数为 0, 从而证毕! □

定理 0.4 (加强的 Rolle 中值定理)

(a): 设 $f \in D(a, b)$ 且在 $[a, b]$ 上 f 有介值性, 则若 $f(a) = f(b)$, 必然存在 $\theta \in (a, b)$, 使得 $f'(\theta) = 0$.

(b): 设 $f \in C[a, +\infty) \cap D^1(a, +\infty)$ 满足 $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则存在 $\theta \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\theta) = 0$.



笔记 一旦罗尔成立, 所有中值定理和插值定理都会有类似的结果, 可以具体情况具体分析.

证明 对于 (a): 不妨设 f 不恒为常数, 则可取 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) \neq f(a)$, 不妨设 $f(x_0) > f(a)$, 则由 f 的介值性, 我们知道存在 $x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, b)$, 使得

$$f(x_1) = \frac{f(a) + f(x_0)}{2}, f(x_2) = \frac{f(b) + f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a) = f(b)$, 我们知道 $f(x_1) = f(x_2)$, 由 Rolle 中值定理 ($f \in C[x_1, x_2] \cap D(x_1, x_2)$) 可知, 存在 $\theta \in (a, b)$, 使得 $f'(\theta) = 0$. 这就完成了 (a) 的证明.

对于 (b): 若对任何 $x \in (0, +\infty)$ 使得 $f'(x) \neq 0$, 则由导数介值性可知, f' 恒大于 0 或恒小于 0 (否则, 由导数介值性可得到一个零点). 从而 f 在 $[0, +\infty)$ 严格单调, 不妨设为递增. 现在

$$f(x) \geq f(a+1) > f(a), \forall x \geq a+1,$$

于是

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq f(a+1) > f(a),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\theta \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\theta) = 0$. □

例题 0.2 设 f 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可微且不是线性函数, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

笔记 $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ 这个线性构造必须记忆!

证明 考虑

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

则 $g(a) = g(b) = 0$ 且 g 不是常值函数. 因 $g' \leq 0$ 恒成立会导致 g 在 $[a, b]$ 递减, 从而 $0 = g(b) < g(a) = 0$, 这不可能! 现在存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) > 0$, 即结论成立. □

例题 0.3

1. 设 $f \in C[0, \pi] \cap D(0, \pi)$ 满足

$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0.$$

证明存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

2. 设 $f \in C[0, \frac{\pi}{2}]$ 满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = 0. \quad (1)$$

证明: f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

笔记 此类给出积分等式的问题, 往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标. 即本题我们要寻求合适的 $a, b \in \mathbb{R}$, 考虑积分

$$\int_0^\pi f(x)(a \cos x + b \sin x) dx = 0.$$

一句话证明本题 1 问, 就是寻求合适的 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $a \cos x + b \sin x$ 和 f 的符号一致. 第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合.

证明

1. 我们只需断言 f 在 $[0, \pi]$ 至少有两个不相同的零点, 之后由罗尔定理就给出了存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

由积分中值定理可知, 存在 $x_0 \in (0, \pi)$, 使得

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(\theta) \int_0^\pi \sin x dx = 2f(x) = 0.$$

即 f 在 $(0, \pi)$ 上有一个零点 x_0 . 若 f 在 $[0, \pi]$ 只有一个零点, 则 f 在 $[0, x_0), (x_0, \pi]$ 不同号 (否则 f 不变号, 则由 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ 知 $f = 0$, 与 f 只有一个零点矛盾!). 不妨设

$$f(x) < 0, \forall x \in [0, x_0), f(x) > 0, \forall x \in (x_0, \pi].$$

于是可取

$$a \sin x + b \cos x = \sin(x - x_0) (a = \cos x_0, b = \sin x_0).$$

此时根据条件就有

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_0) dx = \int_0^\pi f(x) (\cos x_0 \sin x - \sin x_0 \cos x) dx = \cos x_0 \int_0^\pi f(x) \sin x dx - \sin x_0 \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0.$$

又注意到

$$f(x) \sin(x - x_0) > 0, \forall x \in [0, \pi] \setminus \{x_0\},$$

故 $0 = \int_0^\pi f(x) \sin(x - x_0) dx > 0$, 矛盾! 这就完成了证明.

2. 不妨设 f 不恒为 0, 由积分中值定理和(??)式知 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有一个零点且变号. 若 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 只变号一次, 设在 x_1 变号, 则 f 在 x_1 两侧符号相反. 由(??)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(x - x_1) dx = 0.$$

但是 $f(x) \sin(x - x_1)$ 不变号, 这就推出 $f = 0$ 而矛盾! 若 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 只变号两次, 设变号处为 x_1, x_2 , 考虑

$$g(x) \triangleq \sin x - \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \cos x + \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 - \cos x_1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

注意到

$$g'(x) = \cos x + \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \sin x = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\cos x_2 - \cos x_1} \cos x \left(\tan x - \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\sin x_2 - \sin x_1} \right),$$

我们知 g' 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有且只有一个零点. 注意 $g(x_1) = g(x_2) = 0$, 我们由罗尔中值定理知道 g' 在 (x_1, x_2) 有零点, 因此 g 当且仅当在 x_1, x_2 变号. 现由(??)式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx = 0.$$

但是 fg 不变号, 故 $f = 0$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有三个互不相同的零点.

□

例题 0.4 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明:

- (1) 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^\xi e^{f(t)} dt = \int_\xi^1 e^{-f(t)} dt$$

- (2) 对任何大于 1 的正整数 n , 存在唯一的 $\xi_n \in (0, 1)$, 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)} dt$$

并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

证明

- (1) 令 $F(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt - \int_x^1 e^{-f(t)} dt$, 则 $F(0) = -\int_0^1 e^{-f(t)} dt < 0, F(1) = \int_0^1 e^{f(t)} dt > 0$. 又 $F'(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_0^\xi e^{f(t)} dt = \int_\xi^1 e^{-f(t)} dt$.

(2) 令 $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x e^{f(t)} dt - \int_x^1 e^{-f(t)} dt$, 则 $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)} dt < 0$, $F_n(1) = \int_x^1 e^{-f(t)} dt > 0$. 又 $F'_n(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)} > 0$, 故由零点存在定理可知, 存在唯一的 $\xi_n \in \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, 使得 $F(\xi_n) = 0$, 即

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)} dt. \quad (2)$$

因为 $\xi_n \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N}$, 所以由聚点定理可知, $\{\xi_n\}$ 存在收敛子列. 任取 $\{\xi_n\}$ 的一个收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$, 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = a$, 则由(??)式可知

$$\int_{\frac{1}{n_k}}^{\xi_{n_k}} e^{f(t)} dt = \int_{\xi_{n_k}}^1 e^{-f(t)} dt.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由归结原则得到

$$\int_0^a e^{f(t)} dt = \int_a^1 e^{-f(t)} dt.$$

由(1)可知 $a = \xi$. 故由命题??(a)可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$.

□

例题 0.5 $f \in C(0, 1)$ 且存在互不相同的 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1)$ 满足

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = b.$$

证明对任何 $\lambda \in (a, b)$, 存在互不相同的 $x_5, x_6 \in (0, 1)$, 使得 $\lambda = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$.

证明 要证原结论, 等价于对 $\forall \lambda \in (a, b)$, 存在 $x_5 \neq x_6$ 且 $x_5, x_6 \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_6) - f(x_5) = \lambda(x_6 - x_5) \Leftrightarrow f(x_6) - \lambda x_6 = f(x_5) - \lambda x_5.$$

即证 $f(x) - \lambda x$ 在 $(0, 1)$ 上不是单射. 又由命题??及 $f \in C(0, 1)$, 故只须证 $f(x) - \lambda x$ 不是严格单调的. 对 $\forall \lambda \in (a, b)$, 令 $g(x) = f(x) - \lambda x$, 不妨设 $x_2 > x_1, x_4 > x_3$, 则

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a - \lambda < 0, \quad \frac{g(x_4) - g(x_3)}{x_4 - x_3} = b - \lambda > 0.$$

从而 $g(x_2) < g(x_1), g(x_4) > g(x_3)$, 故 g 在 $(0, 1)$ 上非严格单调, 结论得证.

□

例题 0.6 $f \in D[a, b]$, 且在 (a, b) 上 f' 有零点. 证明: 存在 $\theta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}.$$

注 先考虑微分方程: $y' = \frac{y - f(a)}{b - a}$, 解出微分方程的解, 再常数变易得到构造函数: $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$.

证明 令 $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}$. 由条件可设 $f'(c) = 0, c \in (a, b)$. 从而 $g'(c) = \frac{-\frac{f(c) - f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}}$.

(i) 若 $g'(c) = 0$, 则取 $\theta = c$ 即可.

(ii) 若 $g'(c) > 0$, 则 $f(c) < f(a)$. 从而 $g(c) = \frac{f(c) - f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}} < 0$. 于是存在 $\delta > 0$, 使得

$$g(x) \leq g(c) < 0, \forall x \in (c - \delta, c + \delta).$$

又因为 $g(a) = 0$, 所以

$$g(x) \leq g(c) < g(a), \forall x \in (c - \delta, c + \delta). \quad (3)$$


由于 $g \in C[a, c]$, 因此 g 在 $[a, c]$ 上存在最小值. 由(??)式可知, g 在 $[a, c]$ 上的最小值一定在 (a, c) 上取到. 故存在 $\theta \in (a, c)$, 使得

$$g(\theta) = \min_{x \in (a, c)} g(x).$$

由 Fermat 引理可知, $g'(\theta) = 0$, 即 $f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}$.

(iii) 若 $g'(c) < 0$, 则由 (ii) 同理可证, 存在 $\theta \in (a, b)$, 使得 $f'(\theta) = \frac{f(\theta) - f(a)}{b - a}$. □

例题 0.7 设 $f \in C[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $\int_0^1 xf(x) dx = 1$, 证明: 存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得 $|f(\xi)| = 4$.

 **笔记** 考虑题目条件的线性组合, 待定 $a \in \mathbb{R}$ 考虑

$$1 = \left| \int_0^1 (x - a)f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |x - a| \cdot |f(x)| dx \leq \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 |x - a| dx.$$

为了使放缩最精确, 我们希望右边积分 $\int_0^1 |x - a| dx$ 达到最小, 容易知道是 $a = \frac{1}{2}$.

证明 注意到

$$1 = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot |f(x)| dx \leq \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

故 $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \geq 4$. 又因为 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 所以由积分中值定理可知, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $f(\theta) = |f(\theta)| = 0$. 从而由介值定理可知, 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $|f(\xi)| = 4$. □