0.1 具体级数敛散性判断

0.1.1 估阶法

例题 0.1 判断下述级数收敛性.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}$.

证明

1. 注意到
$$\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}=\frac{\ln\left(e^n\right)+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}\sim\frac{n}{n^2\cdot\ln^2 n}=\frac{1}{n\ln^2 n},n\to\infty.$$
由积分判别法, 我们有
$$\sum\frac{1}{n\ln^2 n}\sim\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y<\infty,$$
故原级数收敛.
2. 注意到运用 Stolz 定理, 我们有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n\ln^2 n-(n-1)\ln^2(n-1)}\xlongequal{\text{拉中保持阶不变}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n+2\ln n}=1.$$
于是
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln^2 n}{n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}.$$
当 $p>2$ 时, 取 $\delta>0$, 使得 $p-1-\delta>1$. 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^\delta}=0$, 故
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p-1-\delta}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^\delta}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C}{n^{p-1-\delta}}<+\infty.$$
当 $p\leqslant 2$ 时, 有
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 2}{n^{p-1}}=+\infty.$$
因此原级数收敛等价于 $p>2$.
3. 由 Laplace 方法, 我们有
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}=\int_0^1 e^{-n\ln\left(1+t^4\right)}\mathrm{d}t\sim\int_0^{\infty}e^{-nt^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^{\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x,n\to\infty.$$
现在
$$\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}\sim\frac{C}{n^{\frac{5}{4}}},n\to\infty,$$
故原级数收敛.

□

例题 0.2 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|\mathrm{d}t,n\in\mathbb{N}$, 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛性.

笔记 如果需要 a_n 的一个精确的上界, 那么 (就是证法一) 我们可以先待定分段点 θ, 利用不等式 (这个不等式可用

数学归纳法证明)

$$|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|, \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

再结合 Jordan 不等式可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t &= \int_0^{\theta} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{\theta} \frac{tn^3\sin^3 t}{\sin^3 t}\mathrm{d}t + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\theta^2 n^3}{2} + \frac{\pi^3}{8\theta} - \frac{\pi^2}{4} = g(\theta), \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

此时再求出 $g(\theta)$ 的最小值点,就能确定 θ 的取值,进而得到一个较为精确的上界. 求导易知 $g(\theta) \geqslant g\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{3\pi^2}{8}n$, 即

$$\theta = \frac{\pi}{2n}, a_n \leqslant \frac{3\pi^2}{8}n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明 证法一: 利用不等式

$$|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|, \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},$$

我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{tn^3\sin^3 t}{\sin^3 t}\mathrm{d}t = \frac{n^3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8}n.$$

利用不等式 $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 我们有

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{2n}{\pi} = \frac{\pi^2}{4}n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

现在

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{8}n + \frac{\pi^2}{4}n = \frac{3\pi^2}{8}n, \forall n \in \mathbb{N},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{8}{3\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

证法二: 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3} = 1$, 故存在 $c > 0$, 使得

$$|\sin^3 x| \geqslant cx^3,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

从而

$$a_n \leqslant \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin^3(nt)|}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{n}{c}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin^3 y|}{y^2}\mathrm{d}y \leqslant \frac{n}{c}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y \leqslant Kn,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

其中 K 为某个常数. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Kn} = +\infty.$$

□

例题 0.3 对 $x > 0$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]$ 收敛性.

证明 当 $x = 2^m, m \in \mathbb{N}$, 我们知道级数末项在 n 充分大时恒为 0, 因此原本的级数收敛. 下设 $x \neq 2^m, \forall m \in \mathbb{N}$. 此时

由

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)}{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n+1}}\right)}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty} n\frac{\ln x}{n+1}=\ln x,$$

以及拉比判别法, 我们就有 $x>e$ 时级数收敛,$x<e$ 时级数发散. 当 $x=e$ 时, 计算 Taylor 展开式得

$$\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{12n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right), n\to\infty,$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}-1\right]=0.$$

运用较为广泛的判别法 (极限版 2), 我们知道原级数发散.

□

例题 0.4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}, x\in(0,1)$ 收敛性.

证明 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x}-1\right)=-\ln x\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n+1}=-\ln x.
\end{aligned}$$

由拉比判别法, 我们有 $0<x<\frac{1}{e}$ 时原级数收敛, $\frac{1}{e}<x<1$ 时原级数发散. 当 $x=\frac{1}{e}$, 由较为广泛的判别法 (极限版 2) 和

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1+O\left(\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)^2\right)\right]-1\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[-\sin\frac{1}{n+1}\ln x+O\left(\left(-\sin\frac{1}{n+1}\ln x\right)^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(\left[n\sin\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0,
\end{aligned}$$

我们有原级数在 $x=\frac{1}{e}$ 发散.

□

0.1.2 带对数换底法

例题 0.5 判断下列级数收敛性.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}\ (r>0)$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n} n}$;
3. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;
5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$;
6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$

证明

1. 注意到
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln r}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln r}},$$
我们有原级数收敛等价于 $r>e$.
2. 注意到
$$\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n}n}=\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln n}}=\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln n}}\leqslant\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln 100}}<\infty,$$
我们有原级数收敛.
3. 注意到
$$\sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln n}}\leqslant\sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln(e^{e^e}+1)}}=\sum_{n=[e^{e^e}]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln\ln(e^{e^e}+1)}}<\infty,$$
我们有原级数收敛.
4. 由积分判别法, 我们有
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln^2\ln n}}\sim\int_3^{\infty}\frac{1}{e^{\ln^2\ln x}}dx\overset{x=e^y}{=}\int_{\ln 3}^{\infty}e^{y-\ln^2 y}dy=\infty,$$
故原级数发散.
5. 首先
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}},$$
于是我们结合
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}dt<\infty$$
知原级数收敛.
6. 当 n 充分大有
$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}=\frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{\ln\ln n}\right)\ln n}\ln n}=\frac{1}{n\ln ne^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}}}\leqslant\frac{1}{n\ln ne^{\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln\ln n}}}=\frac{1}{n\ln ne^{\ln\ln n}}=\frac{1}{n\ln^2 n}.$$
由积分判别法知
$$\sum\frac{1}{n\ln^2 n}\sim\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^2}dy<\infty,$$
因此 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$ 收敛.

□

0.1.3 Taylor 公式法

例题 0.6 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}$ 收敛性.

笔记 此类问题可采用 Taylor 公式的 peano 余项方法, 主要要展开到余项的级数绝对收敛. 注意积累绝对 ± 绝对 = 绝对, 绝对 ± 条件 = 条件的结论.

证明 注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right).$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散知原级数发散.

□

0.1.4 分组判别法

例题 0.7 设 $a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛.

笔记 待定常数 c, 记

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant ca_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>ca_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$a_n>ca_n^{\frac{n}{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{c}>a_n^{\frac{1}{n+1}}\Rightarrow a_n<\left(\frac{1}{c}\right)^{n+1}.$$

现在我们想要利用几何级数将原级数进行分组, 故只需任取 $c>1$ 即可, 不妨取 $c=2$, 就有下述证明.

证明 记

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

现在

$$a_n^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow a_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n},\forall n\in M,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}=\sum_{n\in M}a_n^{\frac{n}{n+1}}+\sum_{n\in N}a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\sum_{n\in M}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+2\sum_{n\in N}a_n<\infty,$$

这就完成了证明.

□

例题 0.8 设 $a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s},s>1-\frac{1}{p},p>1$ 收敛.

注 本题也可用分组判别法进行证明.

证明 利用 Young 不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{p}+\frac{1}{qn^{sq}}\right)<\infty,sq=\frac{s}{1-\frac{1}{p}}>1,$$

这就完成了证明.

□

0.1.5 拟合法和积分判别法

例题 0.9 设 $n\in\mathbb{N}_+,a_n>1$ 且单调递增,$\alpha>0$.

1. 证明:$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}<+\infty$
2. 证明:$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_n)^{1+\alpha}}<+\infty$

证明 由 $\{a_n\}$ 递增知 $\lim_{n\to\infty}a_n\in[1,+\infty]$, 进而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}}\in[0,1)$.

(1) 注意到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{a_{n+1}^{\alpha+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)<+\infty,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}\\&<\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}\\&=\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}<+\infty.\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{\alpha+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}\\&\leqslant\int_{a_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}=\frac{1}{\alpha\ln^{\alpha}a_1}<+\infty,\end{aligned}$$

又

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_n)^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}},$$

故只需证

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]<+\infty.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left[\frac{1}{(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{1}{(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]\\&\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left[\frac{1}{(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{1}{(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]\\&<\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(\ln a_n)^{1+\alpha}}-\frac{1}{(\ln a_{n+1})^{1+\alpha}}\right]\\&=\frac{1}{(\ln a_1)^{1+\alpha}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln a_n)^{1+\alpha}}<+\infty.\end{aligned}$$

故结论得证.

□

0.1.6 杂题

例题 0.10 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

证明 相似(**??**)式的计算, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\sin j\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin j\cdot\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos\left(j-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(j+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\\&=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\left|\sin n-\cot\frac{1}{2}\cos n+\cot\frac{1}{2}\right|\\&\leqslant\frac{2}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\cos j\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos j\cdot\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\\ &= \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\left|\cos n+\cot\frac{1}{2}\sin n-1\right|\\ &\leqslant \frac{2}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

都是有界的. 又 $\frac{1}{n}$ 递减到 0, 我们由 A-D 判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n} = \text{发散}-\text{收敛} = \text{发散};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(2n)}{2n} = \text{发散}+\text{收敛} = \text{发散}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

□

例题 0.11 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

注 实际上, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都存在 $t\in\mathbb{N}$, 使得

$$t\leqslant\sqrt{n}<t+1 \iff t^2\leqslant n\leqslant(t+1)^2-1.$$

因此

$$(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}=(-1)^t,\forall k\in[t^2,(t+1)^2-1].$$

注 $\ln(1+x)\leqslant x \Rightarrow \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\leqslant-\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{1}{k}\geqslant\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

证明 证法一:由级数加括号的理解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k}=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}.$$

我们来证明上式右边级数符合莱布尼兹判别法.

首先

$$0\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\ln\frac{k}{k-1}=\lim_{t\to\infty}\ln\frac{(t+1)^2-1}{t^2-1}=0,$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=0.$$

然后对 $t\in\mathbb{N},t\geqslant3$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=(t+1)^2}^{(t+2)^2-1}\frac{1}{k}&=\sum_{k=0}^{2t}\frac{1}{k+t^2}-\sum_{k=0}^{2t+2}\frac{1}{k+t^2+2t+1}\\ &=\sum_{k=0}^{2t}\left(\frac{1}{k+t^2}-\frac{1}{k+t^2+2t+1}\right)-\frac{1}{t^2+4t+2}-\frac{1}{t^2+4t+3}\\ &=\sum_{k=0}^{2t}\frac{2t+1}{(k+t^2)(k+t^2+2t+1)}-\frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{(2t+1)^2}{(2t+t^2)(2t+t^2+2t+1)} - \frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\\
&\geqslant \frac{(2t+1)^2}{(t^2+2t+2)(t^2+4t+3)} - \frac{2t^2+8t+5}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)}\\
&= \frac{2t^2-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} \geqslant \frac{6t-4t-4}{(t^2+4t+2)(t^2+4t+3)} > 0,
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\sum\limits_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}$ 单调递减! 现在由莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

证法二:由级数加括号的理解得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k} = \sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}.
$$

我们用估阶方法进行证明. 由例题**??**(2) 可知

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).
$$

从而

$$
\sum_{k=1}^{t^2-1}\frac{1}{k} = \ln\left(t^2-1\right) + \gamma + O\left(\frac{1}{t^2}\right),
$$

$$
\sum_{k=1}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k} = \ln\left[(t+1)^2-1\right] + \gamma + O\left(\frac{1}{t^2}\right).
$$

于是

$$
\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k} = \ln\frac{t^2+2t}{t^2-1} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).
$$

进而

$$
\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k} = \sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\left[\ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right].
$$

显然 $\ln\left(1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ 单调递减趋于 0, 故由莱布尼兹判别法可知原级数收敛.

□

注 虽然这里的 O 估计只对 n 充分大时成立, 但实际上级数的前有限项的和一定是有限数, 因此讨论级数的敛散性时, 可以只讨论从 n 的充分大的一项开始的级数. 上述证明中省略了这步, 总体问题不大.