0.1 其他

例题 0.1 设 A, B, C 都是 n 阶复方阵, 记 $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$, 证明:$M$ 的特征值是 $A+B+C$, $A+wB+w^2C$, $A+w^2B+wC$ 的特征值构成的集合的并, 这里 w 是三次单位根, 并集记重复.

笔记 观察到 M 矩阵与循环矩阵由类似结构, 回忆命题??的证明过程, 利用与命题??相同的方法构造相似矩阵与对应的过渡矩阵.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A+B+C & & \\ & A+wB+w^2C & \\ & & A+wB+w^4C \end{pmatrix}$ 相似. 因此结论得证. □

例题 0.2 已知整数 $n>1$. 设 E_{n-1}, E_n 分别为 $n-1$ 阶和 n 阶单位矩阵,$N = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 $n \times n$ 矩阵.

(1) 求 N 的特征值和特征向量.

(2) 求如下矩阵的特征多项式:

$$A = \begin{pmatrix} E_n & N & N^2 \\ N^2 & E_n & N \\ N & N^2 & E_n \end{pmatrix}.$$

证明

(1) 显然 N 的特征值为 $0(n)$ 重, 任意非零向量都是其特征向量.

(2) 令 $f(X) = E_n + NX + N^2X^2$, 记 ε 是 1 的三次单位根, 且

$$\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon^2,\ \varepsilon_3 = \varepsilon^3 = 1. \tag{1}$$

再记

$$V = \begin{pmatrix} E_n & E_n & E_n \\ \varepsilon_1 E_n & \varepsilon_2 E_n & \varepsilon_3 E_n \\ \varepsilon_1^2 E_n & \varepsilon_2^2 E_n & \varepsilon_3^2 E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{pmatrix} \otimes E_n,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & & \\ & f(\varepsilon_2 E_n) & \\ & & f(\varepsilon_1 E_n) \end{pmatrix}.$$

由定理??(8) 知

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{vmatrix}^3 |E_n|^3 \neq 0,$$

故 V 可逆. 注意到

$$\begin{aligned}
AV &= \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & f(\varepsilon_2 E_n) & f(\varepsilon_3 E_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1 E_n) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2 E_n) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3 E_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1 E_n) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2 E_n) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3 E_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_n & E_n & E_n \\ \varepsilon_1 E_n & \varepsilon_2 E_n & \varepsilon_3 E_n \\ \varepsilon_1^2 E_n & \varepsilon_2^2 E_n & \varepsilon_3^2 E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1 E_n) & & \\ & f(\varepsilon_2 E_n) & \\ & & f(\varepsilon_3 E_n) \end{pmatrix} \\
&= V\Lambda,
\end{aligned}$$

故 $A = V^{-1}\Lambda V$. 因此 A 的特征值就是 $f(\varepsilon_1 E_n)$,$f(\varepsilon_1 E_n)$ $f(\varepsilon_2 E_n)$,$f(\varepsilon_3 E_n)$ 特征值的并. 由(1)式知

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon_1 E_n) &= \varepsilon E_n + \varepsilon N + \varepsilon^2 N^2, \\
f(\varepsilon_2 E_n) &= \varepsilon^2 E_n + \varepsilon^2 N + \varepsilon^4 N^2, \\
f(\varepsilon_3 E_n) &= E_n + N + N^2,
\end{aligned}$$

从而显然 $f(\varepsilon_1 E_n)$ 的特征值为 $\varepsilon(n$ 次$)$,$f(\varepsilon_2 E_n)$ 的特征值为 $\varepsilon^2(n$ 次$)$,$f(\varepsilon_3 E_n)$ 的特征值为 $1(n$ 次$)$. 因此 A 的特征值就是 $1(n$ 次$)$,$\varepsilon(n$ 次$)$,$\varepsilon^2(n$ 次$)$. 于是 A 的特征多项式就是 $(x-1)^n(x-\varepsilon)^n(x-\varepsilon^2)^n$.

□

例题 0.3 设 A 是 n 阶方阵,$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是 A 的 k 个互不相同的特征值,v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量, 若 W 是 A 的一个不变子空间, 且 $w = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in W$, 这里 $c_1, \cdots, c_k$ 全都非零, 证明: 所有 v_i 均在 W 中.

证明 $\forall w \in W$, 都有 $w = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$, 从而由 W 是 A 的不变子空间及 v_i 是属于特征值 λ_i 的特征向量可知

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= Aw = \lambda_1 c_1 v_1 + \cdots + \lambda_k c_k v_k \in W, \\
\alpha_2 &= A^2 w = \lambda_1^2 c_1 v_1 + \cdots + \lambda_k^2 c_k v_k \in W, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_k &= A^{k-1} w = \lambda_1^{k-1} c_1 v_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1} c_k v_k \in W.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 v_1 \\ c_2 v_2 \\ \vdots \\ c_k v_k \end{pmatrix}.$$

利用 Vandermonde 行列式可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \text{可逆},$$

因此

$$\begin{pmatrix} c_1 v_1 \\ c_2 v_2 \\ \vdots \\ c_k v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

进而对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 都有 $c_i v_i \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$, 又 $c_i \neq 0$, 故 $v_i \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$. 又因为 $\alpha_i \in W\ (1 \leq i \leq k)$, 所以 $v_i \in W$. □

例题 0.4 设 A 是 $d \times d$ 整数矩阵且满足 $I + A + A^2 + \cdots + A^{100} = 0$, 对任意正整数 $n \leqslant 100$, 证明:$A^n + A^{n+1} + \cdots + A^{100}$

的行列式为 1.

证明 设 $m(x)=x^{100}+\cdots+x+1$, 则 $m(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $m(x)$ 不可约. 再设 A 的极小多项式为 $g(x)$, 则由条件可知 $g(x)\mid m(x)$, 再由 $m(x)$ 不可约可得 $g(x)=m(x)$. 记 A 的不变因子分别为 $d_1,\cdots,d_k$, 其中 $d_i\mid d_{i+1}\ (1\leqslant i\leqslant k)$, 并且 $d_k=m(x)$. 于是 $d_i\mid m(x)$, 而 $m(x)$ 不可约, 故 A 的不变因子为 $m(x),\cdots,m(x)$(共有 k 个). 从而

$$|\lambda I-A|=(m(\lambda))^k.$$

又因为 A 是 d 阶矩阵, 所以 $d=100k$. 再根据矩阵的有理标准型可知, 存在可逆矩阵 P, 使得

$$PAP^{-1}=F=\begin{pmatrix} F(m(x)) & & \\ & \ddots & \\ & & F(m(x)) \end{pmatrix}_{100s\times 100s},$$

其中 $F(m(x))=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{100\times 100}$. 又因为条件和结论在线性变换 $A\to PAP^{-1}=F$ 下不改变, 故不妨设 $A=F$. 设 $F(m(x))$ 的特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{100}$, 则

$$|\lambda_i I-F(m(x))|=1+\lambda_i+\cdots+\lambda_i^{100}=0,$$

从而 λ_i 都是 $1+x+\cdots+x^{100}=0$ 的根, 故

$$\lambda_k=e^{\frac{2k\pi i}{101}}\ (1\leqslant k\leqslant 100). \tag{2}$$

再根据 Vieta 定理可得

$$|F(m(x))|=\lambda_1\cdots\lambda_{100}=1.$$

从而 $|F|=|F(m(x))|^s=1$, 并且 F 的特征值就是 $\lambda_k=e^{\frac{2k\pi i}{101}}\ (1\leqslant k\leqslant 100)$ 且每个特征值都是 100 重的.

注意到对 $\forall n\in[1,100]\cap\mathbb{N}$, 有

$$|F^n+F^{n+1}+\cdots+F^{100}|=|F|^n|I+F+\cdots+F^{100-n}|=|I+F+\cdots+F^{100-n}|.$$

记 $k=100-n$, 则 $k\in[0,99]\cap\mathbb{N}$. 因此只需证

$$|I+F+\cdots+F^k|=1,\forall k\in[0,99]\cap\mathbb{N}.$$

当 $k=0$ 时, 结论显然成立. 当 $k\in[1,99]\cap\mathbb{N}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |I+F+\cdots+F^k|=1 &\Longleftrightarrow |(I+F+\cdots+F^k)(I-F)|=|I-F| \Longleftrightarrow |I-F^{k+1}|=|I-F| \\ &\Longleftrightarrow (1-\lambda_1^{k+1})(1-\lambda_2^{k+1})\cdots(1-\lambda_k^{k+1})=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_k). \end{aligned} \tag{3}$$

记 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{101}}$, 则由(2)式可知上式最后一个等式等价于

$$(1-\varepsilon^{k+1})(1-\varepsilon^{2(k+1)})\cdots(1-\varepsilon^{100(k+1)})=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{100}).$$

由 $(k+1,100)=1\ (1\leqslant k\leqslant 99)$ 及命题 1.32可知,ε^{k+1} 是 101 阶循环群 $\{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{100}\}=\langle\varepsilon\rangle$ 的一个生成元, 因此

$$\{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{100}\}=\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon^{k+1}\rangle=\{1,\varepsilon^{k+1},\cdots,\varepsilon^{100(k+1)}\}.$$

从而

$$(1-\varepsilon^{k+1})(1-\varepsilon^{2(k+1)})\cdots(1-\varepsilon^{100(k+1)})=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{100}).$$

故再由(3)式, 结论得证. □

例题 0.5 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $(A^T)^m=A^k$, 其中 m,k 是不同的正整数, 证明:A 的特征值是零或者单位根.

证明 由条件可知

$$(A^T)^{m^2}=A^{mk},$$
$$(A^T)^{mk}=A^{k^2}.$$

进而

$$A^{m^2}=(A^T)^{mk}=A^{k^2}.$$

于是 A 的特征值 λ 都满足

$$\lambda^{m^2}=\lambda^{k^2}.$$

故 λ 为 0 或单位根. □

例题 0.6 设 A,B 是 n 阶方阵, 满足 $A^2B+BA^2=2ABA$, 证明:$AB-BA$ 是幂零矩阵.

证明 记 $C=AB-BA$, 则显然 $\operatorname{tr}(C)=0$. 由条件可知

$$A^2B+BA^2=2ABA \iff A^2B-ABA=ABA-BA^2 \iff A(AB-BA)=(AB-BA)A \iff AC=CA.$$

从而由上式及矩阵迹的交换性可得, 对 $\forall k\in[1,n]\cap\mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{tr}(C^k)=\operatorname{tr}(C^{k-1}(AB-BA))=\operatorname{tr}(C^{k-1}AB)-\operatorname{tr}(C^{k-1}BA)=\operatorname{tr}(AC^{k-1}B)-\operatorname{tr}(AC^{k-1}B)=0.$$

故由命题**??**可知 $C=AB-BA$ 是幂零矩阵. □

例题 0.7 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & \text{当}i=j+1,1\leq j\leq n-1;\\ 1, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

求矩阵 A 的特征多项式.

证明 记 J 为全 1 矩阵,S 为仅在次对角线 $(i=j+1)$ 上为 1 的矩阵, 则 $A=J+S$. 由引理**??**知 $J=\alpha^T\alpha$, 其中 $\alpha=(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)^T$. 设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值, 注意到

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3\cdots,n]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}}(-1)^{n+1}\neq 0.$$

故 $\lambda_i\neq 0$. 令 $M=\lambda_i I-S$, 则由命题**??**(4) 知

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_i}&&&\\-\frac{1}{\lambda_i^2}&\frac{1}{\lambda_i}&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\(-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda_i^n}&\cdots&-\frac{1}{\lambda_i^2}&\frac{1}{\lambda_i}\end{pmatrix}.$$

于是由打洞原理可得

$$\begin{aligned}0&=|\lambda_i I-A|=|\lambda_i I-S-J|=|M-J|\\&=\left|M-\alpha\alpha^T\right|=|M|\left|1-\alpha^TM^{-1}\alpha\right|\\&=\lambda_i^n\left|1-\alpha^T\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_i}&&&\\-\frac{1}{\lambda_i^2}&\frac{1}{\lambda_i}&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\(-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda_i^n}&\cdots&-\frac{1}{\lambda_i^2}&\frac{1}{\lambda_i}\end{pmatrix}\alpha\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_i^n \left[1 - \left(\frac{n}{\lambda_i} - \frac{n-1}{\lambda_i^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_i^n} \right) \right] \\
&= \lambda_i^n - n\lambda_i^{n-1} + (n-1)\,\lambda_i^{n-2} + \cdots + 2\,(-1)^{n-2}\,\lambda_i + (-1)^{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

因此 A 的所有 n 个特征值 λ_i 都是方程

$$x^n - nx^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + \cdots + 2\,(-1)^{n-2}\,x + (-1)^{n-1} = 0.$$

的根. 而上述方程至多只有 n 个根, 故

$$|xI - A| = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + \cdots + 2\,(-1)^{n-2}\,x + (-1)^{n-1}\,.$$

□