0.1 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 ·Borel 集 ·Cantor 集

0.1.1 闭集

定义 0.1 (闭集与闭包)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \supset E'$（即 E 包含 E 的一切极限点），则称 E 为**闭集**（这里规定空集为闭集）. 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**（E 为闭集就是 $E = \overline{E}$）.

定义 0.2 (稠密子集)

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 A 在 B 中**稠密**, 或称 A 是 B 的**稠密子集**.

定理 0.1 (闭集的运算性质)

(i) 若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;

(ii) 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 则其交集 $F = \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集.

(iii) 设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n (\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} \overline{E_\alpha}.$$

注 无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如, 令

$$F_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = (0, 1]$. 此例还说明

$$[0, 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = (0, 1].$$

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned} \overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\ &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\ &= \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \end{aligned}$$

可知, 若 F_1, F_2 为闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$. 即 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

(ii) 因为对一切 $\alpha \in I$, 有 $F \subset F_\alpha$, 所以对一切 $\alpha \in I$, 有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, 从而有

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = F.$$

但 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$. 这说明 F 是闭集. □

定理 0.2 (Cantor 闭集套定理)

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明 若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合, 则存在自然数 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有 $F_k = F_{k_0}$. 此时,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing$. 现在不妨假定对一切 k,F_{k+1} 是 F_k 的真子集, 即

$$F_k \setminus F_{k+1} \neq \varnothing \quad (一切k),$$

我们选取 $x_k \in F_k \setminus F_{k+1}(k = 1,2,\cdots)$, 则 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 根据 Bolzano - Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_{k_i}\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} |x_{k_i} - x| = 0$. 由于每个 F_k 都是闭集, 故知 $x \in F_k(k = 1,2,\cdots)$, 即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

□

0.1.2 开集

定义 0.3 (开集)

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若 $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$ 是闭集, 则称 G 为**开集**.

♣

笔记 由此定义立即可知,$\mathbb{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集;$\mathbb{R}^n$ 中的开矩体是开集; 闭集的补集是开集.

定理 0.3 (开集的运算性质)

(i) 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ 是开集;

(ii) 若 $G_k(k = 1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集（有限个开集的交集是开集）;

(iii) 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 G 是开集的充分必要条件是, 对于 G 中任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset G$.

♡

证明 (i) 由定义知 $G^c_\alpha(\alpha \in I)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcap\limits_{\alpha\in I} G^c_\alpha$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(ii) 由定义知 $G^c_k(k = 1,2,\cdots,m)$ 是闭集, 且有 $G^c = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G^c_k$. 根据闭集的性质可知 G^c 是闭集, 即 G 是开集.

(iii) 若 G 是开集且 $x \in G$, 则由于 G^c 是闭集以及 $x \notin G^c$, 可知存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset G$.

反之, 若对 G 中的任一点 x, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset G$, 则

$$B(x,\delta) \cap G^c = \varnothing,$$

从而 x 不是 G^c 的极限点, 即 G^c 的极限点含于 G^c. 这说明 G^c 是闭集, 即 G 是开集. □

定义 0.4 (内点与边界点)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 对 $x \in E$, 若存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset E$, 则称 x 为 E 的**内点**.E 的内点全体记为 $\mathring{E}$, 称为 E 的**内核**. 若 $x \in \overline{E}$ 但 $x \notin \mathring{E}$, 则称 x 为 E 的**边界点**. 边界点全体记为 ∂E.

♣

笔记 显然, 内核一定为开集.开集的运算性质 (iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

定理 0.4 (开集构造定理)

(i) $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间（这里也包括 $(-\infty,a)$,$(b,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$）的并集;

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

♡

证明 (i) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 对于 G 中的任一点 a, 由于 a 是 G 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(a-\delta, a+\delta) \subset G$. 现在令

$$a' = \inf\{x : (x,a) \subset G\}, \quad a'' = \sup\{x : (a,x) \subset G\}$$

（这里 a' 可以是 $-\infty$,a'' 可以是 $+\infty$）, 显然 $a' < a < a''$ 且 $(a',a'') \subset G$. 这是因为对区间 (a',a'') 中的任一点 z, 不妨设 $a' < z \leqslant a$, 必存在 x, 使得 $a' < x < z$ 且 $(x,a) \subset G$, 即 $z \in G$. 我们称这样的开区间 (a',a'') 为 G（关于点 a）的**构成区间**I_a.

如果 $I_a = (a', a'')$,$I_b = (b', b'')$ 是 G 的构成区间, 那么可以证明它们或是重合的或是互不相交的. 为此, 不妨设 $a < b$. 若

$$I_a \cap I_b \neq \varnothing,$$

则有 $b' < a''$. 于是令 $\min\{a', b'\} = c$,$\max\{a'', b''\} = d$, 则有 $(c, d) = (a', a'') \cup (b', b'')$. 取 $x \in I_a \cap I_b$, 则 $I_x = (c, d)$ 是构成区间, 且

$$(c, d) = (a', a'') = (b', b'').$$

最后, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族是可数的.

(ii) 首先将 $\mathbb{R}^n$ 用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 Γ_0. 再将 Γ_0 中每个方体的每一边二等分, 则每个方体就可分为 2^n 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 Γ_0 中如此做成的子方体的全体为 Γ_1. 继续按此方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 Γ_k 中每个方体的边长是 2^{-k}, 且此方体是 Γ_{k+1} 中相应的 2^n 个互不相交的方体的并集. 我们称如此分成的方体为二进方体.

现在把 Γ_0 中凡含于 G 内的方体取出来, 记其全体为 H_0. 再把 Γ_1 中含于

$$G \setminus \bigcup_{J \in H_0} J$$

（J 表示半开闭二进方体）内的方体取出来, 记其全体为 H_1. 依此类推,H_k 为 Γ_k 中含于

$$G \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

内的方体的全体. 显然, 一切由 $H_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中的方体构成的集合为可列的. 因为 G 是开集, 所以对任意的 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 而 Γ_k 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时是趋于零的, 从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体. 这说明

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ, 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集. 事实上,Γ 可取为

$$\left\{B\left(x, \frac{1}{k}\right) : x\mathbb{R}^n, k\right\}.$$

首先,Γ 是可列集. 其次, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 G 的任一点 x, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 现在取有理点 x', 使得 $d(x, x') < 1/k$, 其中 $k > 2/\delta$, 从而有

$$x \in B(x', 1/k) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

显然, 一切如此做成的 $B(x', 1/k)$ 的并集就是 G. □

定义 0.5 (开覆盖)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$,Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x \in E$, 存在 $G \in \Gamma$, 使得 $x \in G$, 则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖, 则称 Γ' 为 Γ（关于 E）的一个**子覆盖**. ♣

引理 0.1

$\mathbb{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖. ♡

定理 0.5 (Heine - Borel 有限子覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖. ♡

注 在上述定理中, 有界的条件是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}^1$ 中对自然数集作开覆盖 $\{(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\}$ 就不存在有限子覆

盖. 同样, 闭集的条件也是不能缺的. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

就不存在有限子覆盖.

证明 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,Γ 是 F 的一个开覆盖. 由引理 0.1, 可以假定 Γ 由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}.$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然,H_k 是开集,L_k 是闭集且有 $L_k \supset L_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$. 分两种情况:

(i) 存在 k_0, 使得 L_{k_0} 是空集, 即 H_{k_0} 中不含 F 的点, 从而知 $F \subset H_{k_0}$, 定理得证;

(ii) 一切 L_k 皆非空集, 则由Cantor 闭集套定理可知, 存在点 $x_0 \in L_k (k = 1, 2, \cdots)$, 即 $x_0 \in F$ 且 $x_0 \in H_k^c (k = 1, 2, \cdots)$. 这就是说 F 中存在点 x_0 不属于一切 H_k, 与原设矛盾, 故第 (ii) 种情况不存在. □

定理 0.6

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 E 是有界闭集. ♡

证明 设 $y \in E^c$, 则对于每一个 $x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing.$$

显然,$\{B(x, \delta_x) : x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由题设知存在有限子覆盖, 设为

$$B(x_1, \delta_{x_1}), \quad \cdots, \quad B(x_m, \delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集. 现在再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_m}\},$$

则 $B(y, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 即 $y \notin E'$. 这说明 $E' \subset E$, 即 E 是闭集. 有界性显然. □

定义 0.6 (紧集)

如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 我们就称 E 为**紧集**. ♣

笔记 Heine - Borel 有限子覆盖定理和定理 0.6表明,$\mathbb{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

定义 0.7 (实值函数的连续)

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$x_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**连续**, 称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**连续点**（在 $x_0 \notin E'$ 的情形, 即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$ 自然在 $x = x_0$ 处连续）. 若 E 中的任一点皆为 $f(x)$ 的连续点, 则称 $f(x)$ **在 E 上连续**. 记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$. ♣

命题 0.1 (在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上连续的函数的性质)

设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,$f \in C(F)$, 则

(i) $f(x)$ 是 F 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

(ii) 存在 $x_0 \in F$,$y_0 \in F$, 使得

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in F\}, \quad f(y_0) = \inf\{f(x) : x \in F\}.$$

(iii) $f(x)$ 在 F 上是一致连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in F$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此外, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

0.1.3 Borel 集

定义 0.8 (F_σ, G_δ 集)

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 E 为 F_σ(型) 集;
若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 E 为 G_δ(型) 集.

注 由定义可直接推知,F_σ 集的补集是 G_δ 集;G_δ 集的补集是 F_σ 集.

例题 0.1 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$$

为 F_σ 集.

例题 0.2 函数连续点的结构 若 $f(x)$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集.

证明 令 $\omega_f(x)$ 为 $f(x)$ 在 x 点的振幅, 易知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0) = 0$. 由此可知 $f(x)$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k}\right\}.$$

因为 $\{x \in G : \omega_f(x) < 1/k\}$ 是开集, 所以 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集. □

定义 0.9 (σ-代数)

设 Γ 是由集合 X 的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

(i) $\varnothing \in \Gamma$;

(ii) 若 $A \in \Gamma$, 则 $A^c \in \Gamma$;

(iii) 若 $A_n \in \Gamma$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$,

这时称 Γ 是 (X 上的) 一个 **σ-代数**.

命题 0.2 (σ-代数的基本性质)

若 Γ 是 X 上的一个 σ-代数, 则

(i) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$ $,\bigcap\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma,$;

(ii) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma;$$

(iii) 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \setminus B \in \Gamma$;

(iv) $X \in \Gamma$.

证明 由 σ-代数的定义立得. □

定义 0.10 (生成 σ-代数)

设 Σ 是集合 X 的一些子集所构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ-代数 Γ（即若 $A \in \Sigma$, 必有 $A \in \Gamma$, 这样的 Γ 是存在的, 如 $\mathcal{P}(X)$）. 记包含 Σ 的最小 σ-代数为 $\Gamma(\Sigma)$. 也就是说, 对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ', 若 $A \in \Gamma(\Sigma)$, 则 $A \in \Gamma'$, 称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 Σ **生成的 σ-代数**. ♣

定义 0.11

由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 **Borel 集**. ♣

笔记 显然,$\mathbb{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集皆为 Borel 集; 任一 Borel 集的补集是 Borel 集;Borel 集列的并、交、上（下）限集皆为 Borel 集. 例如,$F_{\sigma\delta}$ 集（可数个 F_σ 集的交集）是 Borel 集.

例题 0.3 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)\ (k = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $f(x)$ 的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$$

是 G_δ 型集, 其中 $E_k(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$.

证明 (i) 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 $f(x)$ 的连续点. 由题设知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0, 使得 $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3, \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3, \quad x \in U(x_0, \delta),$$

从而对 $x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad U(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\varepsilon)$. 又由 ε 的任意性, 可推知

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设 $x_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$. 对 $\varepsilon > 0$, 取 $m > 3/\varepsilon$. 由于 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$, 故存在 k_0, 使得 $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 从而可得 $U(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$, 即

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_0).$$

注意到 $f_{k_0}(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 又有 $\delta_1 > 0$, 使得

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_1).$$

记 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 这说明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. □

定义 0.12 (Baire 第一函数类)

称区间 I 上连续函数列的极限函数 $f(x)$ 的全体为 **Baire 第一函数类**, 记为 $f \in B_1(I)$. ♣

定理 0.7

若 $f_n \in B_1(\mathbb{R})$, 且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f \in B_1(\mathbb{R})$. ♡

证明 事实上, 由题设知, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n_k \in \mathbb{N}$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^{k+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

这里不妨认定 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. 考查 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$, 因为我们有

$$\begin{aligned}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| &\leqslant |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} \quad (x \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

所以 $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] \in B_1(\mathbb{R})$. 显然有 $g(x) = f(x) - f_{n_1}(x)$, 即 $f(x) = g(x) + f_{n_1}(x)$. 证毕. □

命题 0.3

$\mathbb{R}$ 中存在非 $F_{\sigma\delta}$ 集、非 $F_{\delta\delta\sigma}$ 集等等.

定理 0.8 (Baire 定理)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集, 即 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k, F_k\ (k = 1, 2, \cdots)$ 是闭集. 若每个 F_k 皆无内点, 则 E 也无内点.

证明 若 E 有内点, 设为 x_0, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使 $\overline{B}(x_0, \delta_0) \subset E$. 因为 F_1 是无内点的, 所以必存在 $x_1 \in B(x_0, \delta_0)$, 且有 $x_1 \notin F_1$. 又因为 F_1 是闭集, 所以可以取到 $\delta_1 (0 < \delta_1 < 1)$, 使得

$$\overline{B}(x_1, \delta_1) \cap F_1 = \varnothing,$$

同时有 $\overline{B}(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$. 再从 $\overline{B}(x_1, \delta_1)$ 出发以类似的推理使用于 F_2, 则可得 $\overline{B}(x_2, \delta_2) \cap F_2 = \varnothing$, 同时有 $\overline{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, \delta_1)$, 这里可以要求 $0 < \delta_2 < 1/2$. 继续这一过程, 可得点列 $\{x_k\}$ 与正数列 $\{\delta_k\}$, 使得对每个自然数 k, 有

$$\overline{B}(x_k, \delta_k) \subset B(x_{k-1}, \delta_{k-1}), \quad \overline{B}(x_k, \delta_k) \cap F_k = \varnothing,$$

其中 $0 < \delta_k < 1/k$. 由于当 $l > k$ 时, 有 $x_l \in B(x_k, \delta_k)$, 故

$$|x_l - x_k| < \delta_k < \frac{1}{k}.$$

这说明 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列（Cauchy 列）, 从而是收敛列, 即存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - x| = 0$.

此外, 从不等式

$$|x - x_k| \leqslant |x - x_l| + |x_l - x_k| < |x - x_l| + \delta_k, \quad l > k$$

立即可知（令 $l \to \infty$）$|x - x_k| \leqslant \delta_k$. 这说明 $x \in \overline{B}(x_k, \delta_k)$, 即对一切 k,$x \notin F_k$. 这与 $x \in E$ 发生矛盾. □

例题 0.4 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

证明 事实上, 令 $\mathbb{Q} = \{r_k : k = 1, 2, \cdots\}$, 假定 $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 式中 $G_i\ (i = 1, 2, \cdots)$ 是开集, 则有表示式

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}\right),$$

这里的每个单点集 $\{r_k\}$ 与 G_i^c 皆为闭集, 而且从 $\overline{G_i} = \mathbb{R}^1$ 可知每个 G_i^c 是无内点的. 这说明 $\mathbb{R}$ 是可列个无内点之闭集的并集. 从而由 Baire 定理可知 $\mathbb{R}$ 也无内点, 这一矛盾说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集. □

定义 0.13

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**稠密集**; 若 $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**无处稠密集**; 可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**. 不是第一纲集称为**第二纲集**.

例题 0.5 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列, 则 $G_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明 只需指出对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x, \delta)$, 均有 $G_0 \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 即可. 采用反证法: 假定存在闭球 $\overline{B}_0 = \overline{B}(x_0, \delta_0)$, 使

得 $G_0 \cap \overline{B}_0 = \varnothing$, 则易知

$$\mathbb{R}^n = (G_0 \cap \overline{B}_0)^c = G_0^c \cup (\overline{B}_0)^c,$$

$$\overline{B}_0 = \mathbb{R}^n \cap \overline{B}_0 = G_0^c \cap \overline{B}_0 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right)^c \cap \overline{B}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k^c \cap \overline{B}_0).$$

注意到 G_k^c 是无内点的闭集, 故由Baire 定理可知,$\overline{B}_0$ 也无内点, 矛盾. □

例题 0.6 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, 则 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集.

证明 注意到 $f(x)$ 的连续点集的表示, 只需指出 (例题 0.3)

$$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c \quad \left(G\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

是第一纲集. 对 $\varepsilon > 0$, 令

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leqslant \varepsilon\},$$

易知 $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$,$F_k(\varepsilon) \subset E_k(\varepsilon)$, 从而有

$$\mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \mathring{E}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$\begin{aligned}[G(\varepsilon)]^c &= \mathbb{R}^n \setminus G(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{F}_k(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \setminus \mathring{F}_k(\varepsilon)] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon).\end{aligned}$$

因为 $F_k(\varepsilon)$ 是闭集, 所以 $\partial F_k(\varepsilon)$ 是无处稠密集. 这说明 $(G(\varepsilon))^c$ 是第一纲集. □

例题 0.7 设 $f \in C([0, 1])$, 且令

$$f_1'(x) = f(x), f_2'(x) = f_1(x), \cdots, f_n'(x) = f_{n-1}(x), \cdots.$$

若对每一个 $x \in [0, 1]$, 都存在自然数 k, 使得 $f_k(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 只需指出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的一个稠密集上为 0 即可. 对此, 我们在 $[0, 1]$ 中任取一个闭子区间 I, 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然, 每个 F_k 都是闭集, 且 $I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. 根据Baire 定理可知, 存在 F_{k_0}, 它包含一个区间 (α, β). 因为在 (α, β) 上 $f_{k_0}(x) = 0$, 所以 $f(x) = 0$,$x \in (\alpha, \beta)$. 注意到 $(\alpha, \beta) \subset I$, 即得所证. □

0.1.4 Cantor(三分) 集

定义 0.14

设 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, 将 $[0, 1]$ 三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为 F_1, 即

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2};$$

再将 F_1 中的区间 $[0, 1/3]$ 及 $[2/3, 1]$ 各三等分, 并移去中央三分开区间

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad 及 \quad I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

记 F_1 中留存的部分为 F_2, 即

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$
$$= F_{2,1} \cup F_{2,2} \cup F_{2,3} \cup F_{2,4}.$$

一般地说 (归纳定义), 设所得剩余部分为 F_n, 则将 F_n 中每个（互不相交）区间三等分, 并移去中央三分开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而我们得到集合列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

作点集 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 我们称 C 为 **Cantor(三分) 集**.

♣

定理 0.9 (Cantor 集的基本性质)

(1) C 是非空有界闭集.
(2) $C = C'$, 即 C 为完全集.
(3) C 无内点.
(4) Cantor 集的基数是 c.
(5) $[0, 1] \setminus C$ 的长度的总和为 1.

♡

证明

(1) 因为每个 F_n 都是非空有界闭集, 而且 $F_n \supset F_{n+1}$, 所以根据 Cantor 闭集套定理, 可知 C 不是空集（实际上,F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 中每个闭区间的端点都是没有被移去的, 即都是 C 中的点）. 显然,C 是闭集.

(2) 设 $x \in C$, 则 $x \in F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即对每个 n,x 属于长度为 $1/3^n$ 的 2^n 个闭区间中的一个. 于是, 对任一 $\delta > 0$, 存在 n, 满足 $1/3^n < \delta$, 使得 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x - \delta, x + \delta)$. 此闭区间有两个端点, 它们是 C 中的点且总有一个不是 x. 这就说明 x 是 C 的极限点, 故得 $C' \supset C$. 由 (i) 知 $C = C'$.

(3) 设 $x \in C$, 给定任一区间 $(x - \delta, x + \delta)$, 取 $2/3^n < \delta$. 因为 $x \in F_n$, 所以 F_n 中必有某个长度为 $1/3^n$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x - \delta, x + \delta)$. 然而, 在构造 C 集的第 $n+1$ 步时, 将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间. 这说明 $(x - \delta, x + \delta)$ 不含于 C.

(4) 事实上, 将 $[0, 1]$ 中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0, 2$$

一一对应. 从而知 C 为连续基数集（与 $(0, 1]$ 的二进位小数比较）.

(5) 由 C 的定义可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

□

定义 0.15 (类 Cantor 集)

设 δ 是 $(0, 1)$ 内任意给定的数, 考虑在 $[0, 1]$ 区间, 取 $p = (1 + 2\delta)/\delta$, 采用类似于 Cantor 集的构造过程:
第一步, 移去长度为 $1/p$ 的同心开区间;
第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间;
第三步, 在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间. 继续此过程, 可得一列移去的开区间, 记其并集为 G（开集）, 我们称 $C_p = [0, 1] \setminus G$ 为**类 Cantor 集**（当 $p = 3$ 时,C_p 就是 Cantor（三分）集）. 类 Cantor 集也称为 **Harnack 集**.

♣

注 若要在 $\mathbb{R}^n$ 的单位方体 $[0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ 中构造具有类似性质的集合, 则只需取 $C \times C \times \cdots \times C$（$C$ 是

[0, 1] 中的类 Cantor 集）即可.

定理 0.10 (类 Cantor 集的基本性质)

(1) G 的总长度为 δ（$0 < \delta < 1$ 是任意给定的数）的稠密开集.

(2) C_p 是非空完全集, 且没有内点.

证明

(1) 由 G 的定义可知 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

(2)

□

定义 0.16 (Cantor 函数)

设 C 是 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集, 其中的点我们用三进位小数

$$x = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

来表示.

(i) 作定义在 C 上的函数 $\varphi(x)$. 对于 $x \in C$, 定义

$$\varphi(x) = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}, \quad \alpha_i = 0, 1 \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

(ii) 作定义在 $[0, 1]$ 上的 $\Phi(x)$. 对于 $x \in [0, 1]$, 定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}.$$

我们称 $\Phi(x)$ 为 **Cantor 函数**.

定理 0.11 (Cantor 函数的性质)

设 $\Phi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in C, y \leqslant x\}$ 为 Cantor 函数, 则有下列性质:

(1) $\varphi(C) = [0, 1]$, 即 φ 是满射. 并且 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数.

(2) $\Phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增连续函数. 此外, 在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上, $\Phi(x)$ 都是常数.

证明

(1) 因为 $[0, 1]$ 中的点可用二进位小数表示, 所以由 φ 的定义有 $\varphi(C) = [0, 1]$..

下面证明 $\varphi(x)$ 是 C 上的递增函数. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots$ 是取 0 或 1 的数, 而且它们所表示的 C 中的数有下述关系:

$$2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} < 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记 $k = \min\{i : \alpha_i \neq \beta_i\}$, 则我们有

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} &= \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k} \frac{\beta_i - \alpha_i}{3^i} \\ &\leqslant \frac{\beta_k - \alpha_k}{3^k} + \sum_{i>k} \frac{2}{3^i} = \frac{\beta_k - \alpha_k + 1}{3^k}. \end{aligned}$$

由此可知 $(\alpha_k < \beta_k)\alpha_k = 0, \beta_k = 1$, 从而得到

$$\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\frac{1}{2^k}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i}=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}\right).$$

(2) 由 (2) 的结论及 Φ 的定义即得 Φ 的递增性. 因为 $\Phi([0,1])=[0,1]$, 所以由命题 6.7可知 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

□

例题 0.8 $E\subset\mathbb{R}$ 是完全集当且仅当 $E=\left(\bigcup_{n\geqslant 1}(a_n,b_n)\right)^c$, 其中 (a_i,b_i) 与 (a_j,b_j) $(i\neq j)$ 无公共端点.

证明 **必要性**: 若 E 是完全集, 则 E 是闭集. 从而 E^c 是开集, 它是 E^c 内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的, 否则 E 中就会有孤立点了, 这是不可能的.

充分性: 首先, 由题设知 E 是闭集. 其次, 对任意的 $x\in E$, 如果 $x\notin E'$, 那么存在 $\delta>0$, 使得 $(x-\delta,x+\delta)\cap E=\{x\}$. 这说明 x 是某两个开区间的端点, 与假设矛盾. □

例题 0.9 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是完全集, 则 E 是不可数集.

证明 用反证法. 假定 $E=\{x_n\in\mathbb{R}^2: n=1,2,\cdots\}$.

(i) 选取 $y_1\in E\setminus\{x_1\}$, 则点 x_1 到 y_1 的距离大于 0. 存在以 y_1 为中心的闭正方形 Q_1,$Q_1\cap E$ 是紧集.

(ii) 看 $E\setminus\{x_2\}$. 因为 y_1 是 $E\setminus\{x_2\}$ 的极限点, 所以 $\mathring{Q}_1\cap(E\setminus\{x_2\})\neq\varnothing$. 又取 $y_2\in\mathring{Q}_1\cap(E\setminus\{x_2\})$, 并作以 y_2 为中心的闭正方形 Q_2:$Q_2\subset Q_1$,$x_1\notin Q_2$,$x_2\notin Q_2$, 可知 $(Q_1\cap E)\supset(Q_2\cap E)$ 是紧集. 如此继续做下去, 可得有界闭集套列 $\{Q_n\cap E\}$:$(Q_{n-1}\cap E)\supset(Q_n\cap E)$ $(n\in\mathbb{N})$, 而且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不在其内. 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(Q_n\cap E)=\varnothing,$$

导致矛盾. □

命题 0.4

任一非空完全集的基数均为 c.

证明 证明见那汤松著《实变函数论》的上册, 有高等教育出版社出版的中译本,1955 年. □

例题 0.10 设 $E=\left\{x\in[0,1]: x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/10^n, a_n=2\text{ 或}7\right\}$, 我们有

(i) E 是闭集;

(ii) $\overline{\overline{E}}=c$;

(iii) E 在 $[0,1]$ 中不稠密.

证明 (i) 若有 $\{x_m\}\subset E$:$x_m\to x(m\to\infty)$, 则

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n/10^n\quad(b_n=0,1,2,\cdots,9).$$

如果 $|x_m-x|<10^{-p}$, 那么在 $x\in E$ 时,$b_n=2$ 或$7(n=1,2,\cdots,p-1)$. 这说明 E 是闭集.

(ii) 与 0 和 1 组成的数列类似,$\overline{\overline{E}}=c$.

(iii) 注意到 $E\cap(0.28,0.7)=\varnothing$, 故 E 不是稠密集. □