0.1 降阶法

定理 0.1 (Vandermode 恒等式)

$$\mathrm{C}_{p+q}^{l}=\sum_{k=0}^{p+q}\mathrm{C}_p^k\mathrm{C}_q^{l-k},\quad l=1,2,\cdots,p+q.$$

证明 注意到

$$(x+1)^p(x+1)^q=(x+1)^{p+q}.$$

由二项式定理可得

$$\sum_{r=0}^{p}\mathrm{C}_p^r x^r\cdot\sum_{r=0}^{p}\mathrm{C}_q^r x^r=\sum_{r=0}^{p+q}\mathrm{C}_{p+q}^r x^r.$$

对 $\forall l=\{1,2,\cdots,p+q\}$, 考虑上式 x^l 的系数, 就有

$$\mathrm{C}_{p+q}^{l}=\mathrm{C}_p^0\mathrm{C}_q^l+\mathrm{C}_p^1\mathrm{C}_q^{l-1}+\cdots+\mathrm{C}_p^l\mathrm{C}_q^0.$$

□

例题 0.1 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_n^1\\1&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

笔记 解法一的关键就是组合数公式: $\mathrm{C}_m^{k-1}+\mathrm{C}_m^k=\mathrm{C}_{m+1}^k$.

于是有

$$\mathrm{C}_m^k=\mathrm{C}_{m+1}^k-\mathrm{C}_m^{k-1}$$
$$\mathrm{C}_m^{k-1}=\mathrm{C}_{m+1}^k-\mathrm{C}_m^k$$

解法二的核心想法就是: 将Vandermode 恒等式与矩阵乘法的定义联系起来.

解 解法一:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_n^1\\1&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot r_{i-1}+r_i}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_0^0&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_2^1-\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_3^2-\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n+1}^2-\mathrm{C}_n^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}-\mathrm{C}_{2n-3}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathrm{C}_0^0&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^0\\0&\mathrm{C}_1^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\0&\mathrm{C}_2^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_3^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,\cdots,2]{(-1)\cdot j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_2^1-\mathrm{C}_1^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1-\mathrm{C}_{n-2}^1\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_3^2-\mathrm{C}_2^2&\cdots&\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1}-\mathrm{C}_{2n-4}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{C}_1^1&\mathrm{C}_1^0&\cdots&\mathrm{C}_{n-2}^0\\\mathrm{C}_2^2&\mathrm{C}_2^1&\cdots&\mathrm{C}_{n-1}^1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}&\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}&\cdots&\mathrm{C}_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \mathrm{C}_{n-1}^{n-2} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}.$$

此时得到的行列式恰好是原行列式的左上角部分,并具有相同的规律.不断这样做下去,最后可得 $|\boldsymbol{A}|=1$

解法二:设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $a_{ij}=\mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1},i,j=1,2,\cdots,n$.从而由Vandermode 恒等式及组合数定义的扩充可得

$$a_{ij}=\mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1}=\sum_{k=0}^{i+j-2}\mathrm{C}_{i-1}^{i-1-k}\mathrm{C}_{j-1}^{k}=\sum_{k=1}^{i+j-1}\mathrm{C}_{i-1}^{i-k}\mathrm{C}_{j-1}^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{i-1}^{i-k}\mathrm{C}_{j-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{i-1}^{k-1}\mathrm{C}_{j-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}l_{jk},$$

其中 $l_{ij}=\begin{cases}\mathrm{C}_{i-1}^{j-1}, & 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n,\\ 0, & 1\leqslant i<j\leqslant n,\end{cases}$. 记 $L=\left(l_{ij}\right)_{n\times n}$,则根据矩阵乘法的定义可知

$$A=LL^T\Rightarrow|A|=|L|^2.$$

因为当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时,$l_{ij}=0$,所以 L 是上三角矩阵.于是

$$|L|=\prod_{i=1}^{n}l_{ii}=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{C}_{i-1}^{i-1}=1.$$

故 $|A|=|L|^2=1$. □

例题 0.2 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!$$

□

例题 0.3 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-a_i)r_1+r_i} a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1b_2-a_2b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & a_3b_n-a_nb_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}} (-1)^{n+1} a_1b_n \begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n-a_nb_1 & a_2b_n-a_nb_2 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

$$= a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1}).$$

□

命题 0.1 (" 爪" 型行列式)

证明 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

笔记 记忆" 爪" 型行列式的计算方法和结论.

证明 当 $a_i \neq 0\,(\forall i \in [2,n]\cap\mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{\left(-\frac{c_i}{a_i}\right)j_i+j_1} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i = a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_nb_ic_i.$$

当 $\exists i \in [2,n] \cap \mathbb{N}\ s.t.\ a_i = 0$ 时, 则 $a_1a_2\cdots a_n - \sum\limits_{i=2}^{n} a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n b_i c_i = -a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n b_i c_i$. 此时, 我们有

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
a_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\
c_2 & a_2 & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
c_{i-1} & & & a_{i-1} & & & & \\
c_i & & & & 0 & & & \\
c_{i+1} & & & & & a_{i+1} & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
c_n & & & & & & & a_n
\end{vmatrix}
\xlongequal[\text{(按}c_i\text{所在行展开)}]{\text{按第}i\text{行展开}} (-1)^{i+1}c_i
\begin{vmatrix}
b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\
a_2 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & a_{i-1} & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & a_{i+1} & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{(按}b_i\text{所在列展开)}]{\text{按第}i-1\text{列展开}} (-1)^{i+1}(-1)^i b_i c_i
\begin{vmatrix}
a_2 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & a_{i-1} & & & \\
 & & & a_{i+1} & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & a_n
\end{vmatrix}
= -a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n b_i c_i .
$$

综上所述, 原命题得证. □

命题 0.2 (分块" 爪" 型行列式)

计算 n 阶行列式 $(a_{ii} \neq 0, i = k+1, k+2, \cdots, n)$:

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\
a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn}
\end{vmatrix} .
$$

笔记 记忆分块" 爪" 型行列式的计算方法即可, 计算方法和" 爪" 型行列式的计算方法类似.

解

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\
a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nk} & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=k+1,k+2,\cdots,n]{-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}j_i+j_1,-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}j_i+j_2,\cdots,-\frac{a_{in}}{a_{ii}}j_i+j_k}
\begin{vmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\
0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$= \begin{vmatrix} C & B \\ O & \Lambda \end{vmatrix} = |C| \cdot |\Lambda| = |C| \prod_{i=k+1}^{n} a_{ii}.$$

其中 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} a_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$. 并且 $c_{pq} = a_{pq} - \sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{a_{iq}a_{pi}}{a_{ii}}, p, q = 1, 2, \cdots, n.$ □

推论 0.1 ("爪"型行列式的推广)

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

笔记 这是一个有用的模板 (即**行列式除了主对角元素外, 每行都一样**).

记忆该命题的计算方法即可. 即先化为" 爪" 型行列式, 再利用" 爪" 型行列式的计算结果.

解 当 $a_i \neq 0\,(\forall i \in [2, n] \cap \mathbb{N})$ 时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题0.1}} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 x_i}{a_i}\right] \prod_{i=2}^{n} (-a_i) = (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 x_i}{a_i}\right] \prod_{i=2}^{n} a_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right].$$

当 $\exists i \in [2, n] \cap \mathbb{N}\ s.t.\ a_i = 0$ 时, 我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题0.1}} (x_1 - a_1)(-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n) - \sum_{i=2}^{n} (-a_2)\cdots\widehat{(-a_i)}\cdots(-a_n) a_1 x_i$$

$$= (-1)^{n-1} (x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^{n-1} \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i$$

$$= (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right].$$

综上所述, $|A| = (-1)^{n-1} \left[(x_1 - a_1) \prod\limits_{i=2}^{n} a_i + \sum\limits_{i=2}^{n} a_1 a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n x_i\right].$ □

例题 0.4 计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&1\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&0\\1&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}.$$

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&1\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&0\\1&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\a&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&0\end{vmatrix}=a^n+(-1)^{n+1+n}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}.$$

□

注 本题也可由命题0.1直接得到,$|\boldsymbol{A}|=a^n-a^{n-2}$.

命题 0.3

设 $|A|=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式,A_{ij} 是它的第 (i,j) 元素的代数余子式,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,z 是任意常数, 求证:

$$\begin{vmatrix}A&X\\Y^T&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&x_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&x_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&x_n\\y_1&y_2&\cdots&y_n&z\end{vmatrix}=z|\boldsymbol{A}|-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}x_iy_j.$$

进而得到

$$\begin{vmatrix}A&X\\Y^T&0\end{vmatrix}=-Y^TA^*X.$$

笔记 根据这个命题可以得到一个**关于行列式 $|A|$ 的所有代数余子式求和的构造**:

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}'&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}&\boldsymbol{\alpha_2}&\cdots&\boldsymbol{\alpha_n}&\boldsymbol{1}\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta_1}&1\\\boldsymbol{\beta_2}&1\\\vdots&\vdots\\\boldsymbol{\beta_n}&1\\\boldsymbol{1}'&0\end{vmatrix}.$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$,$|\boldsymbol{A}|$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\cdots,\boldsymbol{\beta_n}$. 并且 $\boldsymbol{1}$ 表示元素均为 1 的列向量,$\boldsymbol{1}'$ 表示 $\boldsymbol{1}$ 的转置. (令上述命题中的 $z=0,x_i=y_i=1,i=1,2,\cdots,n$ 即可得到.)

注 如果需要证明的是矩阵的代数余子式的相关命题, 我们可以考虑一下这种构造, 即令上述命题中的 $z=0$ 并且待定/任取 x_i,y_i.

证明 证法一: 将上述行列式先按最后一列展开, 展开式的第一项为

$$(-1)^{n+2}x_1\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\y_1&y_2&\cdots&y_n\end{vmatrix}.$$

再将上式按最后一行展开得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+2} x_1 \left[(-1)^{n+1} (-1)^{1+1} y_1 A_{11} + (-1)^{n+2} (-1)^{1+2} y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{1+n} y_n A_{1n}\right] \\
&= (-1)^{n+2} x_1 (-1)^{n+1} \left[(-1)^2 y_1 A_{11} + (-1)^4 y_2 A_{12} + \cdots + (-1)^{2n} y_n A_{1n}\right] \\
&= -x_1 (y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \cdots + y_n A_{1n}) \\
&= -x_1 \sum_{j=1}^{n} y_j A_{1j}.
\end{aligned}
$$

同理可得原行列式展开式的第 $i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 项为

$$
(-1)^{n+1+i} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}.
$$

将上式按最后一行展开得到 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1+i} x_i \left[(-1)^{n+1} (-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{n+2} (-1)^{i+2} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{n+n} (-1)^{i+n} y_n A_{in}\right] \\
&= (-1)^{n+1+i} x_i (-1)^{n+1} \left[(-1)^{i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{i+2+1} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n+n-1} y_n A_{in}\right] \\
&= (-1)^{2i+1} y_1 A_{i1} + (-1)^{2i+3} y_2 A_{i2} + \cdots + (-1)^{2i+2n-1} y_n A_{in} \\
&= -x_i (y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots + y_n A_{in}) \\
&= -x_i \sum_{j=1}^{n} y_j A_{ij}.
\end{aligned}
$$

而展开式的最后一项为 $z\,|\boldsymbol{A}|$.

因此, 原行列式的值为

$$
z|\boldsymbol{A}| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.
$$

证法二:设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$. 若 A 是非异阵, 则由降阶公式可得

$$
\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = |A|(z - \boldsymbol{y}' A^{-1} \boldsymbol{x}) = z|A| - \boldsymbol{y}' A^* \boldsymbol{x}.
$$

对于一般的方阵 A, 可取到一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_k I_n + A$ 为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$
\begin{vmatrix} t_k I_n + A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = z|t_k I_n + A| - \boldsymbol{y}'(t_k I_n + A)^* \boldsymbol{x}.
$$

注意到上式两边都是关于 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续. 上式两边同时取极限, 令 $t_k \to 0$, 即有

$$
\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' & z \end{vmatrix} = z|A| - \boldsymbol{y}' A^* \boldsymbol{x} = z|A| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.
$$

□

例题 0.5 设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|$,$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 求证:

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ a_{31}-a_{32} & a_{32}-a_{33} & \cdots & a_{3,n-1}-a_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

证明 证法一:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量. 则

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{j_i+j_{i-1}}|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|.$$

将最后一列写成 $(\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}$, 进行拆分可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\alpha_n,(\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{\alpha_n}|\\&=|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_n},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_n}|\\&=|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|.\end{aligned}$$

根据行列式的性质将 $|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|$ 每一列都拆分成两列, 然后按 1 所在的列展开得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha_1}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_2}+\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha_n}+\mathbf{1}|-|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|\\&=|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}-|\boldsymbol{\alpha_1},\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}},\boldsymbol{\alpha_n}|=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.\end{aligned}$$

证法二:设 $|\boldsymbol{A}|$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$, 并且 $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量.注意到

$$-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} & \mathbf{1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

依次将第 i 列乘以 -1 加到第 $i-1$ 列上去 $(i=2,3,\cdots,n)$, 再按第 $n+1$ 行展开可得

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n} & \boldsymbol{\alpha_n} & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\\&=-|\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n-1}}-\boldsymbol{\alpha_n},1|=-|\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

结论得证. □

例题 0.6 设 n 阶矩阵 A 的每一行、每一列的元素之和都为零, 证明:A 的每个元素的代数余子式都相等.

证明 证法一:设 $A=(a_{ij}),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$, 不妨设 x_iy_j 均不相同,$i,j=1,2,\cdots,n$. 考虑如下 $n+1$ 阶矩阵的行列式求值:

$$B=\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}' & 0\end{pmatrix}$$

一方面, 由命题 0.3可得 $|B|=-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$. 另一方面, 先把行列式 $|B|$ 的第二行,$\cdots$, 第 n 行全部加到第一行上; 再将第二列,$\cdots$, 第 n 列全部加到第一列上, 可得

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ \sum\limits_{j=1}^{n}y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

依次按照第一行和第一列进行展开, 可得 $|B| = -A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j$. 比较上述两个结果, 又由于 $x_i y_j$ 均不相同, 因此可得 A 的所有代数余子式都相等.

证法二:由假设可知 $|\boldsymbol{A}| = 0$(每行元素全部加到第一行即得), 从而 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n-1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于零, 结论显然成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和都等于零, 所以由命题**??**可知, 我们可以选取 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)'$ 作为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 由命题**??**的证明可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列与 $\boldsymbol{\alpha}$ 成比例, 特别地,$\boldsymbol{A}^*$ 的每一行都相等. 对 $\boldsymbol{A}'$ 重复上面的讨论, 可得 $(\boldsymbol{A}')^*$ 的每一行都相等. 注意到 $(\boldsymbol{A}')^* = (\boldsymbol{A}^*)'$, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都相等, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij} 都相等. □