0.1 映射

定义 0.1 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f, 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f : A \to B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subseteq B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

♣

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) f 的一个像可以存在多个原像; 但对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应, 因此今后如果构造映射 $f : A \to B$, 就必须先验证其良定义性, 即 $\forall x_1 = x_2 \in A$, 则 $f(x_1) = f(x_2) \in B$. 也即定义域中的每个元素只能有一个像.

(2) $f(A) \subseteq B$, 不一定有 $f(A) = B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad 和 \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subseteq 2^A$, 定义 $\phi : \mathcal{D} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 0.2 (单射、满射和双射)

设 $f : A \to B$, 则

1. 若 B 中每个元素最多只有一个原像, 即对 $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ 所含元素个数为 0 或 1, 则称 f 为**单射**或**一一映射**或**一一的**.
2. 若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \varnothing, \forall y \in B$, 则称 f 为**满射**或**映上的**.
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**或**一一对应**.

♣

定义 0.3 (逆映射)

设 $f : A \to B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \to A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的**逆映射**. 自然 f 也是 f^{-1} 的逆映射, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$.

♣

笔记 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

公理 0.1 (选择公理 (AC))

设 $\mathcal{F}$ 是一个非空集合族, 且 $\mathcal{F}$ 中的每个元素都是非空集合. 那么存在一个函数

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

使得对任意 $A \in \mathcal{F}$, 有 $f(A) \in A$. 这样的函数 f 称为**选择函数** (choice function).

♡

定理 0.1

设 $f: A \to B$, 其中 $A, B \neq \varnothing$, 则

(1) f 为单射的充要条件是满足下列条件之一.

(i) $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(ii) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(iii) $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

(iv) 存在 $g: B \to A$, 使得 $gf = \mathrm{id}_A$.

(2) f 为满射的充要条件是满足下列条件之一.

(i) $f(A) = B$.

(ii) 存在 $g: B \to A$, 使得 $fg = \mathrm{id}_B$.

(3) f 为双射的充要条件是存在 $g: B \to A$, 使得

$$gf = \mathrm{id}_A, \quad fg = \mathrm{id}_B.$$

此时必有 $g = f^{-1}$. 即有两个交换图, 如图 1所示.

笔记

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[dl, "f^{-1}"] \\ A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ B & \end{tikzcd}$$

图 1

证明

□

定义 0.4 (映射的乘积)

设映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, 定义 $g \circ f: A \to C$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 g 与 f 的**复合映射**或**乘积**. $g \circ f$ 也常简记为 gf.

定理 0.2 (映射的乘法满足结合律)

若有 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, 则有

$$h(gf) = (hg)f.$$

笔记 由映射的乘法满足结合律可知在多个映射相乘时, 可以不加括号. 特别地, $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 均可简记作 hgf.

证明 事实上, 对 $\forall x \in A$ 有

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) = (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x).$$

□

定义 0.5

设映射 $f: A \to B$, $A_0 \subseteq A$, 定义映射 $i: A_0 \to A$ 满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称 i 为 A_0 到 A 中的**嵌入映射**. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射 $f: A \to B$ 与映射 $g: A_0 \to B$ 满足 $gi = f$, 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的**限制**, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**或**开拓**. 即图 2为交换图.

笔记

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

图 2

命题 0.1

设一列映射 $f_i: A_i \to A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.

(2) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.

(3) 若 f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

(4) 若 $f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $(f_n \cdots f_2 f_1)^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_n^{-1}$.

证明

(1)

(2)

(3)

□

命题 0.2 (映射的基本性质)

对于映射 $f: X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X, \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq Y$, 则下列事实成立:

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 $f(A) \subseteq f(B)$; 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, 则 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(2) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha); f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(B_\alpha)$.

(3) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$;

$f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.

(4) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$, 当且仅当 f 为满射时 “=” 成立;

$A \subseteq f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.

(5) $f(X \setminus B) = f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c = Y \setminus f^{-1}(B)$ 成立;

但 $f(X \setminus A) = f(A^c) = f(A)^c = f(X) \setminus f(A)$ 不一定成立, 只有 $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

笔记 (4)中第一条的直观理解是:B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(4)中第二条的直观理解是:$X \setminus A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$(即 f 可能不是单射).

证明

(1) 显然.

(2) 显然.

(3) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(4) (i) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$, 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subseteq A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(ii) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾.

(5) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ 成立.

解法一:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus B) &\iff f(x) \in Y \setminus B \\ &\iff f(x) \in Y,\ f(x) \notin B \\ &\iff x \in f^{-1}(Y) = X, x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus B) &= \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus B\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ &= X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

解法三:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus B) &= f^{-1}(Y \cap B^c) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c \\ &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$ 未必成立. 只有 $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$. 事实上,

$$\begin{aligned} y \in f(X) \setminus f(A) &\iff y \in f(X),\ y \notin f(A) \\ &\Rightarrow \exists x \in X \text{但} x \notin A, \text{s. t. } y = f(x) \\ &\iff \exists x \in X \setminus A, \text{s. t. } y = f(x) \end{aligned}$$

$$\iff y \in f(X \setminus A).$$

因此,$f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

但是,$f(X) \setminus f(A) \not\supseteq f(X \setminus A)$. 从而,$f(X \setminus A) \neq f(X) \setminus f(A)$.

反例: 设 X 为多于两点的集合,$A = \{a\} \subset X$, $f : X \to Y$ 为常值映射,$f(x) \equiv y_0 \in Y, \forall x \in X$. 于是

$$f(X) \setminus f(A) = \{y_0\} \setminus \{y_0\} = \varnothing \not\supseteq \{y_0\} = f(X \setminus A).$$

□

命题 0.3 (单调映射的不动点)

设 X 是一个非空集合, 且有 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A \subseteq B$ 的任意 A, B, 必有 $f(A) \subseteq f(B)$, 则存在 $T \subset \mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T) = T$.

证明 作集合 S, T:

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且} A \subseteq f(A)\}, \quad T = \bigcup_{A \in S} A (\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上, 因为由 $A \in S$ 可知 $A \subseteq f(A)$, 从而由 $A \subseteq T$ 可得 $f(A) \subseteq f(T)$. 根据 $A \in S$ 推出 $A \subseteq f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A \in S} A \subseteq f(T), \quad T \subseteq f(T).$$

另一方面, 又从 $T \subseteq f(T)$ 可知 $f(T) \subseteq f(f(T))$. 这说明 $f(T) \in S$, 我们又有 $f(T) \subseteq T$.

□

定义 0.6 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数 (示性函数)** 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 0.4 (特征函数的基本性质)

设 X 为固定的集合,$A, B \subset X$, 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 和集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 都为 X 的子集, 则

(1) $A = B \iff \chi_A(x) = \chi_B(x)$;

$A \neq B \iff \chi_A(x) \neq \chi_B(x)$;

$A \triangle B = \{x \mid \chi_A(x) \neq \chi_B(x)\}$.

特别地,$A = X \iff \chi_A(x) \equiv 1$; $\quad A = \varnothing \iff \chi_A(x) \equiv 0$.

(2) $A \subseteq B \iff \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

(3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(5) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

(6) $\chi_{A \triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

(7) $\chi_{\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha}(x) = \max\limits_{\alpha \in \Gamma} \chi_{A_\alpha}(x)$; $\quad \chi_{\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha}(x) = \min\limits_{\alpha \in \Gamma} \chi_{A_\alpha}(x)$.

(8) $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$存在 $\iff \lim\limits_{n \to +\infty} \chi_{A_n}(x)$存在. 而且当极限存在时, 有 $\chi_{\lim\limits_{n \to +\infty} A_n}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \chi_{A_n}(x)$.

证明

(1) $A = B \iff x \in A$ 等价于 $x \in B \iff \chi_A(x) = 1$ 等价于 $\chi_B(x) = 1 \iff \chi_A = \chi_B$.

$\chi_A \neq \chi_B \iff \exists x_0 \in X, \text{s.t. } \chi_A(x_0) \neq \chi_B(x_0) \iff \exists x_0 \in X, \text{s.t. } \chi_A(x_0) = 0$ 且$\chi_B(x_0) = 1$, 或者$\chi_A(x_0) =$

1且$\chi_B(x_0)=0 \iff \exists x_0\in X, \text{s.t. } x_0\notin A$ 且$x_0\in B$, 或者$x_0\in A$且$x_0\notin B \iff A\neq B$.

$x\in A\triangle B=(A-B)\cup(B-A) \iff x\in A-B$ 或$x\in B-A \iff x\in A, x\notin B$, 或$x\in B, x\notin A \iff \chi_A(x)=1, \chi_B(x)=0$, 或$\chi_B(x)=1, \chi_A(x)=0 \iff \chi_A(x)\neq\chi_B(x)$,

即

$$A\triangle B=\{x \mid \chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}.$$

(2) $A\subseteq B \iff$ 对$\forall x\in X, x\in A$ 必有$x\in B \iff$ 对$\forall x\in X, \chi_A(x)=1$ 必有$\chi_B(x)=1 \iff \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x), \forall x\in X$.

(3) 当 $x\in A\cap B$ 时, 有 $x\in A$ 且 $x\in B$, 故

$$\chi_{A\cap B}(x)=1=1\cdot 1=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x);$$

当 $x\notin A\cap B$ 时, 必有 $x\notin A$, 则

$$\chi_{A\cap B}(x)=0=0\cdot\chi_B(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x);$$

或 $x\notin B$, 则

$$\chi_{A\cap B}(x)=0=\chi_A(x)\cdot 0=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x).$$

(4) 当 $x\in A\cap B\subseteq A\cup B$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+1-1=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in A\setminus B(\iff x\in A, x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B, x\in A\cup B)$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+0-0=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in B\setminus A$ 时, 同理有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=0+1-0=1=\chi_{A\cup B}(x).$$

当 $x\in(A\cup B)^c$ 时, 有

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=0+0-0=0=\chi_{A\cup B}(x).$$

再由命题 0.4(3)可知结论成立.

(5) 当 $x\in A-B$ 时, 即 $x\in A, x\notin B$, 有

$$\chi_{A-B}(x)=1=1\cdot(1-0)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)];$$

当 $x\notin A-B$ 时, 必有 $x\notin A$, 则

$$\chi_{A-B}(x)=0=0\cdot[1-\chi_B(x)]=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)];$$

或 $x\in A$, 且 $x\in B$, 则

$$\chi_{A-B}(x)=0=1\cdot(1-1)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)].$$

(6)

$$\chi_{A\triangle B}(x)=\begin{cases}0=|0-0|, & \text{当}x\in(A\cup B)^c,\\ 0=|1-1|, & \text{当}x\in A\cap B,\\ 1=|1-0|, & \text{当}x\in A-B,\\ 1=|0-1|, & \text{当}x\in B-A\end{cases}=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|.$$

(7) 证法一:

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=1 \iff x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha \iff \exists\alpha_0\in\Gamma, \text{s.t.} x\in A_{\alpha_0}$$
$$\iff \exists\alpha_0\in\Gamma, \text{s.t.}\chi_{A_{\alpha_0}}(x)=1 \iff \max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=1,$$

再由 $\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)$ 与 $\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$ 或为 1 或为 0 知

$$\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x). \tag{1}$$

或者再从

$$\begin{aligned}\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=0 &\iff x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha \iff \forall\alpha\in\Gamma,x\notin A_\alpha\\ &\iff \forall\alpha\in\Gamma,\chi_{A_\alpha}(x)=0 \iff \max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=0\end{aligned}$$

推出上面等式. 于是

$$\begin{aligned}\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)&=1-\chi_{(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c}(x)\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}1-\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c}(x)\\ &\xlongequal{(1)\text{式}}1-\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha^c}(x)=1-\max_{\alpha\in\Gamma}(1-\chi_{A_\alpha}(x))\\ &=1-(1-\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x))=\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).\end{aligned}$$

证法二:

$$\begin{aligned}\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=1 &\iff x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha \iff \forall\alpha\in\Gamma,x\in A_\alpha\\ &\iff \forall\alpha\in\Gamma,\chi_{A_\alpha}(x)=1 \iff \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=1.\end{aligned}$$

再由 $\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)$ 与 $\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$ 或为 1 或为 0 知

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x). \tag{2}$$

或者再从

$$\begin{aligned}\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=0 &\iff x\notin\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha \iff \exists\alpha_0\in\Gamma,x\notin A_{\alpha_0}\\ &\iff \exists\alpha_0\in\Gamma,\ \chi_{A_{\alpha_0}}(x)=0 \iff \min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=0\end{aligned}$$

推出上面等式. 于是

$$\begin{aligned}\chi_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)&=1-\chi_{(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c}(x)\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}1-\chi_{\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c}(x)\\ &\xlongequal{(2)\text{式}}1-\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha^c}(x)=1-\min_{\alpha\in\Gamma}(1-\chi_{A_\alpha}(x))\\ &=1-(1-\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x))=\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}A_n\text{存在}\iff \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\iff\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subseteq\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\\ &\iff \text{如果}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{即有无穷个}n,\text{使得}x\in A_n,\text{则必有}n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},x\in A_n\\ &\iff \text{如果}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{即有无穷个}n,\text{使得}\chi_{A_n}(x)=1,\text{则必有}n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},\chi_{A_n}(x)=1\\ &\iff \forall x\in X,\text{若}x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{则}\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}n>n_0\text{时},\chi_{A_n}(x)\equiv1;\text{若}x\notin\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,\text{则此时}\chi_{A_n}(x)\equiv0\\ &\iff \text{对}\forall x\in X,\text{都有}\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x)\text{存在}.\end{aligned}$$

当上述极限存在时, 由上式有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n}(x)=\begin{cases}1, & x\in\lim\limits_{n\to+\infty}A_n,\\ 0, & x\notin\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\end{cases}=\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x).$$

□

例题 0.1 设 $\{f_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的实函数列,$E\subseteq[a,b]$, 且有

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x).$$

若令 $E_n=\left\{x\in[a,b]\mid f_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 求集合 $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n$.

解 解法一:由

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to+\infty}E_n&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists\text{无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,x\in E_n\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists\text{无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1\right\}\\
&=\{x\in[a,b]\mid x\in[a,b]\setminus E\}=[a,b]\setminus E\\
&=\{x\in[a,b]\mid x\in[a,b]\setminus E\}=\left\{x\in[a,b]\mid\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}\\
&=\left\{x\in[a,b]\mid\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},x\in E_n\right\}=\varliminf_{n\to+\infty}E_n
\end{aligned}$$

知, $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}E_n=\varliminf\limits_{n\to+\infty}E_n=[a,b]\setminus E$.

解法二:

$$\begin{aligned}
x\in[a,b]\setminus E&\iff 1=\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\\
&\iff\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\\
&\iff\exists n_0\in\mathbb{N},\text{当}\,n>n_0\text{时},x\in E_n\\
&\iff x\in\varliminf_{n\to+\infty}E_n\Rightarrow x\in\varlimsup_{n\to+\infty}E_n\\
&\iff\text{有无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,x\in E_n\\
&\iff\text{有无穷个}\,n\in\mathbb{N},\text{s. t.}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\\
&\iff\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\\
&\iff\chi_{[a,b]\setminus E}(x)=1\iff x\in[a,b]\setminus E.
\end{aligned}$$

由此推出

$$\lim_{n\to+\infty}E_n=\varlimsup_{n\to+\infty}E_n=\varliminf_{n\to+\infty}E_n=[a,b]\setminus E.$$

□