0.1 过渡矩阵的求法

0.1.1 方法 1: 计算特征矩阵之间的相抵变换

推论 0.1

设 A 是 n 阶数字矩阵, $P(\lambda)$ 及 $Q(\lambda)$ 是同阶可逆 λ-矩阵, 且

$$Q(\lambda)(\lambda I_n - A)P(\lambda) = \lambda I_n - J,$$

其中 J 是 A 的 Jordan 标准型. 又由引理**??**可知, 存在 λ 矩阵 $T(\lambda)$ 和数字矩阵 P, 使得

$$P(\lambda) = T(\lambda)(\lambda I_n - J) + P,$$

其中 P 是数字矩阵, 求证: $P^{-1}AP = J$.

注 这个结论就是定理**??**的推论. 因此我们可以先计算出特征矩阵之间的相抵变换的过渡矩阵, 再由引理**??**算出我们需要的数字矩阵的相似变换的过渡矩阵.

证明 由已知可得 $(\lambda I_n - A)P(\lambda) = Q(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - J)$. 代入 $P(\lambda)$, 可得

$$(\lambda I_n - A)(T(\lambda)(\lambda I_n - J) + P) = Q(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - J).$$

整理可得

$$(\lambda I_n - A)P = \left(Q(\lambda)^{-1} - (\lambda I_n - A)T(\lambda)\right)(\lambda I_n - J).$$

比较 λ 的次数可知, $Q(\lambda)^{-1} - (\lambda I_n - A)T(\lambda)$ 必须是数字矩阵, 记之为 R, 于是

$$(\lambda I_n - A)P = R(\lambda I_n - J).$$

去括号再次比较次数可得 $P = R, AP = RJ$. 若可证明 P 是可逆矩阵, 即有 $P^{-1}AP = J$. 由 $Q(\lambda)^{-1} - (\lambda I_n - A)T(\lambda) = R$ 可得

$$I_n = Q(\lambda)(\lambda I_n - A)T(\lambda) + Q(\lambda)R.$$

注意到 $Q(\lambda)(\lambda I_n - A) = (\lambda I_n - J)P(\lambda)^{-1}$, 故

$$I_n = (\lambda I_n - J)P(\lambda)^{-1}T(\lambda) + Q(\lambda)R.$$

由引理**??**可知, 存在 λ 矩阵 $M(\lambda)$ 和数字矩阵 N, 使得

$$Q(\lambda) = (\lambda I_n - J)M(\lambda) + N,$$

于是

$$I_n = (\lambda I_n - J)\left(P(\lambda)^{-1}T(\lambda) + M(\lambda)R\right) + NR.$$

比较次数可得 $NR = I_n$, 即 R 可逆, 也即 P 可逆. □

0.1.2 方法 2: 计算特征向量和广义特征向量

在例题 0.1中, 任取 $(A - I)x = 0$ 的两个线性无关的解作为特征向量 α_1, α_3, 都可以解出对应的广义特征向量 α_2, α_4, 即线性方程组 $(A - I)x = \alpha_1$ 和 $(A - I)x = \alpha_3$ 的可解性不依赖于 α_1, α_3 的选取（请读者自行思考其中的原因）, 但这并非是普遍的情形. 一般来说, 我们总可以取到 $(A - \lambda_0 I)x = 0$ 的一个非零解 α_1（即特征值 λ_0 的特征向量）, 但若 α_1 选取不当, 线性方程组 $(A - \lambda_0 I)x = \alpha_1$ 有可能是无解的（即求不出对应的广义特征向量）. 因此在选取特征向量时, 需要我们仔细观察或设立参数, 这样才能保证最终得到正确的结果. 让我们来看下面两个例题中的具体分析.

例题 0.1 设复四维空间上的线性变换 φ 在基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

求一组新基, 使 φ 在这组新基下的表示矩阵是 A 的 Jordan 标准型, 并求过渡矩阵.

解 解法一: 通过计算可知 $\lambda I_4 - A$ 的法式为 $\mathrm{diag}\{1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2\}$, 故 A 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, 从而 A 的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设过渡矩阵为 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 则 $P^{-1}AP = J$, 即

$$AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = PJ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)J$$

从而得到线性方程组:

$$(A-I)\alpha_1 = 0,\ (A-I)\alpha_2 = \alpha_1,\ (A-I)\alpha_3 = 0,\ (A-I)\alpha_4 = \alpha_3$$

求解 $(A-I)x = 0$ 得到两个线性无关的解, 将它们分别作为 α_1 和 α_3:

$$\alpha_1 = (1, 3, 0, 0)',\ \alpha_3 = (5, 0, 6, 3)'$$

再求解方程组 $(A-I)x = \alpha_1$,$(A-I)x = \alpha_3$, 得到

$$\alpha_2 = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0)',\ \alpha_4 = (\frac{7}{6}, 0, \frac{3}{2}, 0)'$$

因此过渡矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 & \frac{7}{6} \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

新基为 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)P$, 即

$$f_1 = e_1 + 3e_2,\ f_2 = \frac{1}{3}e_1,\ f_3 = 5e_1 + 6e_3 + 3e_4,\ f_4 = \frac{7}{6}e_1 + \frac{3}{2}e_3$$

解法二: A 的初等因子组的计算同解法一, 可得 A 的 Jordan 标准型 $J = \mathrm{diag}\{J_2(1), J_2(1)\}$. 注意到 $(A-I_4)^2 = O$ 且 $\mathrm{r}(A-I_4) = 2$, 故可取 $A - I_4$ 的第 1 列和第 3 列作为其列向量的极大无关组. 因此 $e_1 = (1, 0, 0, 0)'$,$e_3 = (0, 0, 1, 0)'$ 为广义特征向量, 使得 $(A-I_4)e_1 = (3, 9, 0, 0)'$,$(A-I_4)e_3 = (1, -7, 4, 2)'$ 为线性无关的特征向量, 则过渡矩阵 $P = ((A-I_4)e_1, e_1, (A-I_4)e_3, e_3)$ 满足 $P^{-1}AP = J$. □

例题 0.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

求非异阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

解 解法一: 通过计算可知 $\lambda I_3 - A$ 的法式为 $\mathrm{diag}\{1, \lambda+1, (\lambda+1)^2\}$, 故 A 的初等因子组为 $\lambda+1, (\lambda+1)^2$, 从而 A 的

Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

设非异阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 使 $P^{-1}AP = J$, 则 $AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = PJ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)J$, 从而得到线性方程组:

$$(A + I_3)\alpha_1 = 0,\ (A + I_3)\alpha_2 = 0,\ (A + I_3)\alpha_3 = \alpha_2$$

求解 $(A+I_3)x = 0$ 得到两个线性无关的解 $\beta_1 = (-2, 1, 0)'$ 和 $\beta_2 = (5, 0, 1)'$. 注意到 $(A+I_3)x = \beta_i\ (i = 1, 2)$ 都是无解的, 故不能将 β_1 或 β_2 直接作为 α_2 来求广义特征向量 α_3. 一般地, 可设 $\alpha_2 = k_1\beta_1+k_2\beta_2 = (-2k_1+5k_2, k_1, k_2)'$, 代入 $(A+I_3)x = \alpha_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(A+I_3, \alpha_2) = \mathrm{r}(A+I_3)$ 可得 $k_1 = k_2$. 因此, 可取 $\alpha_1 = \beta_1 = (-2, 1, 0)'$,$\alpha_2 = \beta_1+\beta_2 = (3, 1, 1)'$, 此时可解出 $\alpha_3 = (1, 0, 0)'$, 于是

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解法二:A 的初等因子组的计算同解法一, 可得 A 的 Jordan 标准型 $J = \mathrm{diag}\{-1, J_2(-1)\}$. 注意到 $(A + I_3)^2 = O$ 且 $\mathrm{r}(A + I_3) = 1$, 故可取 $A + I_3$ 的第 1 列作为其列向量的极大无关组. 因此 $e_1 = (1, 0, 0)'$ 为循环向量（即广义特征向量）, 使得 $e_1, (A + I_3)e_1 = (3, 1, 1)'$ 构成了 $J_2(-1)$ 的循环轨道. 再取线性无关的特征向量 $\xi_1 = (-2, 1, 0)'$, 则过渡矩阵 $P = (\xi_1, (A + I_3)e_1, e_1)$ 满足 $P^{-1}AP = J$. □

例题 0.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求非异阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

解 解法一: 通过计算可知 $\lambda I_4 - A$ 的法式为 $\mathrm{diag}\{1, 1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^3\}$, 故 A 的初等因子组为 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^3$, 从而 A 的 Jordan 标准型为 $J = \mathrm{diag}\{1, J_3(1)\}$. 设非异阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 使 $P^{-1}AP = J$, 则 $AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = PJ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)J$, 从而得到线性方程组:

$$(A - I_4)\alpha_1 = 0,\ (A - I_4)\alpha_2 = 0,\ (A - I_4)\alpha_3 = \alpha_2,\ (A - I_4)\alpha_4 = \alpha_3.$$

求解 $(A - I_4)x = 0$ 得到两个线性无关的解 $\beta_1 = (-1, 0, 1, 0)'$ 和 $\beta_2 = (0, 1, 0, 1)'$. 设 $\alpha_2 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$, 代入 $(A - I_4)x = \alpha_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(A - I_4, \alpha_2) = \mathrm{r}(A - I_4)$ 可得 $k_1 = 0$. 于是可取 $\alpha_2 = k_2\beta_2$, 解出 $\alpha_3 = k_2e_1 + k_3\beta_1 + k_4\beta_2$, 其中 $e_1 = (1, 0, 0, 0)'$. 再代入 $(A - I_4)x = \alpha_3$ 中, 利用 $\mathrm{r}(A - I_4, \alpha_3) = \mathrm{r}(A - I_4)$ 可得 $k_2 = 2k_3$. 于是可取 $k_2 = 2$,$k_3 = 1$,$k_4 = 0$, 最终得到特征向量 $\alpha_1 = \beta_1 = (-1, 0, 1, 0)'$,$\alpha_2 = 2\beta_2 = (0, 2, 0, 2)'$,1 级广义特征向量 $\alpha_3 = 2e_1 + \beta_1 = (1, 0, 1, 0)'$,2 级广义特征向量 $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)'$, 从而

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解法二:A 的初等因子组的计算同解法一, 可得 A 的 Jordan 标准型 $J = \mathrm{diag}\{1, J_3(1)\}$. 注意到 $(A - I_4)^3 = O$ 且 $\mathrm{r}((A - I_4)^2) = 1$, 故可取 $(A - I_4)^2$ 的第 4 列作为其列向量的极大无关组. 因此 $e_4 = (0, 0, 0, 1)'$ 为循环向量（即 2 级广义特征向量）, 使得 $e_4, (A - I_4)e_4 = (1, 0, 1, 0)'$,$(A - I_4)^2e_4 = (0, 2, 0, 2)'$ 构成了 $J_3(1)$ 的循环轨道. 再取线性无关的特征向量 $\xi_1 = (-1, 0, 1, 0)'$, 则过渡矩阵 $P = (\xi_1, (A - I_4)^2e_4, (A - I_4)e_4, e_4)$ 满足 $P^{-1}AP = J$. □

0.1.3 方法 3: 计算循环子空间的循环向量

根据 Jordan 标准型的几何意义, 全空间可分解为不同特征值的根子空间的直和, 每个根子空间可分解为若干个循环子空间的直和, 每个循环子空间对应于一条循环轨道, 这条轨道由循环向量（即最高级的广义特征向量）生成. 下面以幂零根子空间为例, 说明如何确定所有的循环向量, 从而确定所有的基向量（等价于求过渡矩阵 P）.

例题 0.4 设 9 阶幂零矩阵 A 的 Jordan 标准型 $J = \mathrm{diag}\{0, J_2(0), J_3(0), J_3(0)\}$, 求非异阵 P, 使 $P^{-1}AP = J$.

注 这个例题采用的方法可以推广到一般的情形, 其原理是: 设 n 阶幂零矩阵 A 的极小多项式为 λ^k, 则依次选取第 i 级广义特征向量 ξ_i $(i = k-1, \cdots, 0)$, 使得所有的 $A^i\xi_i$ $(i = k-1, \cdots, 0)$ 在 $\mathrm{Ker}\,A$ 中线性无关即可.

解 由已知条件 $A^3 = O$,$\mathrm{r}(A^2) = 2$ 且 $\mathrm{r}(A) = 5$, 可设 $A^2x = 0$ 的基础解系为 $\{\eta_i, 1 \le i \le 7\}$. 由于 A^2 的列秩为 2, 故不妨设 A^2 的第 1 列和第 2 列是 A^2 列向量的极大无关组, 即 A^2e_1, A^2e_2 线性无关, 其中 e_1, e_2 是 9 维标准单位列向量的前两个. 考虑限制映射 $A|_{\mathrm{Ker}A^2} : \mathrm{Ker}A^2 \to \mathrm{Ker}A$, 容易验证 $\mathrm{Ker}(A|_{\mathrm{Ker}A^2}) = \mathrm{Ker}A$,$\mathrm{Im}(A|_{\mathrm{Ker}A^2}) = \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A$. 由 $\dim\mathrm{Ker}A^2 = 7$,$\dim\mathrm{Ker}A = 4$ 及线性映射的维数公式可知 $\dim(\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A) = 3$, 且 $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A = L(A\eta_i, 1 \le i \le 7)$. 注意到 A^2e_1, A^2e_2 是 $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Im}A$ 中两个线性无关的向量, 故可从其生成元中取出一个向量, 不妨设为 $A\eta_1$, 使得 $A^2e_1, A^2e_2, A\eta_1$ 线性无关. 再次注意到 $\dim\mathrm{Ker}A = 4$, 且 $A^2e_1, A^2e_2, A\eta_1$ 是 $\mathrm{Ker}A$ 中 3 个线性无关的向量, 故可从其一组基（即 $Ax = 0$ 的基础解系）中取出一个向量 ξ_1, 使得 $A^2e_1, A^2e_2, A\eta_1, \xi_1$ 线性无关.

下面证明:$\{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2, Ae_2, A^2e_2, \eta_1, A\eta_1, \xi_1\}$ 构成 $\mathbb{C}^9$ 的一组基. 只要证明它们线性无关即可. 设 $c_1,\cdots,c_9 \in \mathbb{C}$, 使得

$$c_1e_1 + c_2Ae_1 + c_3A^2e_1 + c_4e_2 + c_5Ae_2 + c_6A^2e_2 + c_7\eta_1 + c_8A\eta_1 + c_9\xi_1 = 0 \tag{1}$$

将(1)式作用 A^2 可得

$$c_1A^2e_1 + c_4A^2e_2 = 0$$

由 A^2e_1, A^2e_2 线性无关可知 $c_1 = c_4 = 0$. 将(1)式作用 A 可得

$$c_2A^2e_1 + c_5A^2e_2 + c_7A\eta_1 = 0$$

由 $A^2e_1, A^2e_2, A\eta_1$ 线性无关可知 $c_2 = c_5 = c_7 = 0$.(1)式最后变成

$$c_3A^2e_1 + c_6A^2e_2 + c_8A\eta_1 + c_9\xi_1 = 0$$

由 $A^2e_1, A^2e_2, A\eta_1, \xi_1$ 线性无关可知 $c_3 = c_6 = c_8 = c_9 = 0$. 有了上面这组基, 我们可以把 4 个循环子空间的循环轨道全部确定如下:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{轨道1} & & \text{轨道2} & & \text{轨道3} & & \text{轨道4} & & \\
 & & & & e_1 & ------ & e_2 & ------ & \text{2级广义特征向量} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \eta_1 & ------ & Ae_1 & ------ & Ae_2 & ------ & \text{1级广义特征向量} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\xi_1 & ------ & A\eta_1 & ------ & A^2e_1 & ------ & A^2e_2 & ------ & \text{0级广义特征向量} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

最后, 令 $P = (\xi_1, A\eta_1, \eta_1, A^2e_1, Ae_1, e_1, A^2e_2, Ae_2, e_2)$ 即为所求. □

例题 0.5 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

求非异阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

注 下面的例题也与过渡矩阵有关, 它告诉我们: 满足基础矩阵乘法性质的矩阵类与基础矩阵类之间存在着一个相

似变换. 利用这一结论可以证明:n **阶矩阵环 $M_n(\mathbb{K})$ 的任一自同构都是内自同构.**

解 经计算可知 A 的初等因子组为 $(\lambda+1)^2,(\lambda-1)^2$, 于是 A 的 Jordan 标准型为 $J=\mathrm{diag}\{J_2(-1),J_2(1)\}$. 由命题**??**可知,$\mathbb{C}^4=\mathrm{Ker}(A+I_4)^2\oplus\mathrm{Ker}(A-I_4)^2$, 且 $\mathrm{Ker}(A+I_4)^2=\mathrm{Im}(A-I_4)^2$,$\mathrm{Ker}(A-I_4)^2=\mathrm{Im}(A+I_4)^2$. 经计算可取 $(A-I_4)^2$ 的第二列 $\alpha=(A-I_4)^2e_2=(16,20,0,0)'$ 作为根子空间 $\mathrm{Ker}(A+I_4)^2$ 中的循环向量（即广义特征向量）, 于是 $\alpha,(A+I_4)\alpha=(-16,-16,0,0)'$ 构成根子空间 $\mathrm{Ker}(A+I_4)^2$ 中的循环轨道. 经计算可取 $(A+I_4)^2$ 的第三列 $\beta=(A+I_4)^2e_3=(12,8,12,8)'$ 作为根子空间 $\mathrm{Ker}(A-I_4)^2$ 中的循环向量（即广义特征向量）, 于是 $\beta,(A-I_4)\beta=(8,8,8,8)'$ 构成根子空间 $\mathrm{Ker}(A-I_4)^2$ 中的循环轨道. 因此, 过渡矩阵 $P=((A+I_4)\alpha,\alpha,(A-I_4)\beta,\beta)$ 满足 $P^{-1}AP=J$. □

定理 0.1 (基础矩阵的刻画)

设有 n^2 个 n 阶非零矩阵 $A_{ij}\ (1\le i,j\le n)$, 适合

$$A_{ij}A_{jk}=A_{ik},\ A_{ij}A_{lk}=O\ (j\neq l).$$

求证: 存在可逆矩阵 P, 使得对任意的 i,j,$P^{-1}A_{ij}P=E_{ij}$, 其中 E_{ij} 是基础矩阵.

♡

证明 因为 $A_{11}\neq O$, 故存在 α, 使得 $A_{11}\alpha\neq 0$. 令 $\alpha_1=A_{11}\alpha$, 由 $A_{11}A_{11}=A_{11}$ 可得 $A_{11}\alpha_1=\alpha_1$. 再令 $\alpha_i=A_{i1}\alpha_1$, 由 $A_{i1}A_{i1}=A_{11}$ 可知 $\alpha_i\neq 0$. 我们得到了 n 个非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 由已知条件容易验证这 n 个向量适合下列性质:

$$A_{ij}\alpha_j=\alpha_i,\ A_{ij}\alpha_k=0\,(j\neq k)$$

由此不难证明这 n 个向量线性无关. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 P 是可逆矩阵, 且

$$A_{ij}P=(A_{ij}\alpha_1,A_{ij}\alpha_2,\cdots,A_{ij}\alpha_n)=(0,\cdots,0,\alpha_i,0,\cdots,0).$$

其中上式中的 α_i 在第 j 列. 另一方面, 有

$$PE_{ij}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)E_{ij}=(0,\cdots,0,\alpha_i,0,\cdots,0).$$

因此, 对任意的 i,j,$A_{ij}P=PE_{ij}$, 即 $P^{-1}A_{ij}P=E_{ij}$. □