0.1 均差与牛顿插值多项式

定义 0.1 (均差)

称 $f[x_0,x_k]=\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0,x_k 的**一阶均差**.$f[x_0,x_1,x_k]=\dfrac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$ 称为 $f(x)$ 的**二阶均差**. 一般地, 称

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}} \tag{1}$$

为 $f(x)$ 的 ***k* 阶均差** (均差也称为**差商**).

定理 0.1 (均差的基本性质)

(1) k 阶均差可表示为函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 的线性组合, 即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}. \tag{2}$$

这个性质也表明均差与节点的排列次序无关, 称为**均差的对称性**, 即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_1,x_0,x_2,\cdots,x_k]=\cdots=f[x_1,\cdots,x_k,x_0]$$

(2)

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}. \tag{3}$$

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数, 且节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$, 则 n 阶均差与导数的关系为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b].$$

证明

(1) 利用数学归纳法证明即可.

(2) 由性质 (1) 及 (1) 式立得.

(3) 反复使用 Rolle 定理证明即可.

□