0.1 其他

例题 0.1 (1) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 试求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

(2) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式, $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

解 (1) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

依次将第 i 行乘以 -1 加到第 $i-1$ 行上去 $(i=2,\cdots,n)$, 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}n$. 此即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, n.$$

(2) 写出行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

从最后一列起每一列减去前一列, 再将得到的行列式的最后一行加到前面的每一行上去, 就可以得到一个下三角行列式, 求得值为 $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. 此即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n+2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\,(n-1)\,2^{n-2}.$$

□

注 上述解法可作为循环行列式除求和法的另一种解法.

例题 0.2 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

笔记 注意到这个行列式每行元素除了主对角元素外, 其余位置元素都相同. 因此这个行列式是推广的"爪"型行列式.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}(x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x-a_n)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(x-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ 2a_1x-x^2 & x^2-2a_2x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2a_1x-x^2 & 0 & \cdots & x^2-2a_nx\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{"爪"型行列式}}(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(2a_1x-x^2\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}a_i^2\left(x^2-2a_1x\right)\left(x^2-2a_2x\right)\cdots\widehat{\left(x^2-2a_ix\right)}\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=(x-a_1)^2\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=\left[\left(x^2-2a_1x\right)+a_1^2\right]\prod_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_ix\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x^2-2a_1x\right)\cdots\left(x^2-2a_{i-1}x\right)a_i^2\left(x^2-2a_{i+1}x\right)\cdots\left(x^2-2a_nx\right).$$

□

例题 0.3 求下列行列式式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}.$$

解 *解法一:*

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-j_1+j_i}\begin{vmatrix}(a+b)^2-c^2 & c^2 & 0\\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2\\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2]{-r_i+r_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ -2b & 2bc & -2c\\ 0 & b^2 & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\frac{b}{2}j_3+j_2]{\frac{c}{2}j_1+j_2}(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3\begin{vmatrix}a+b-c & \frac{c}{2} & 0\\ -2b & 0 & -2c\\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=2abc(a+b+c)^3.$$

解法二 (求根法):

□

例题 0.4 证明: 若一个 $n(n>1)$ 阶行列式中元素或为 1 或为 -1, 则其值必为偶数.

证明 将该行列式的任意一行加到另一行上去得到的行列式有一行元素全是偶数 (注意: 零也是偶数), 由行列式的基本性质知道, 可将因子 2 提出, 剩下的行列式的元素都是整数, 其值也是整数, 乘以 2 后必是偶数. □

例题 0.5 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 c, 若从第二列开始每一列加上它前面的一列, 同时对第一列加上 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 n 列, 求得到的新行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的值.

解 利用大拆分法, 直接按列拆分成 2^n 项, 并且只有 2 项不为 0, 其他项都有两列相同从而为 0. 即

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|$$

$$=c+(-1)^{n-1}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=c+(-1)^{n-1}c=\begin{cases}0\ ,n\text{为偶数}\\ 2c,n\text{为奇数}\end{cases}$$

□

例题 0.6 令

$$(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}=\frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_2a_3\cdots a_n)}.$$

解 假设等式对 $\forall n\leqslant k-1, k\in\mathbb{N}_+$ 都成立. 则当 $n=k$ 时, 将行列式 $(a_1a_2,\cdots,a_k)$ 按第一列展开得

$$(a_1a_2\cdots a_k)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_k \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & & \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & 1 & & \\ -1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

$$=a_1\left(a_2a_3\cdots a_k\right)+\left(a_3a_4\cdots a_k\right).$$

从而

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{(a_3a_4\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}.$$

于是由归纳假设可知

$$\frac{(a_1a_2\cdots a_k)}{(a_2a_3\cdots a_k)}=a_1+\frac{1}{\frac{(a_2a_3\cdots a_k)}{(a_3a_4\cdots a_k)}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}.$$

故由数学归纳法可知结论成立. □

例题 0.7 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 试求 $|A|$ 的值.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-r_i+r_{i-1}}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n.$$

□

例题 0.8 设 $|A|$ 是 n 阶行列式,$|A|$ 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}=|i-j|$, 试求 $|A|$ 的值.

笔记 注意: 这只是一个**对称行列式**, 不是循环行列式. 类似这种每行、每列元素有一定的等差递进关系的行列式, 都可以先尝试用每一列减去前面一列.

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{-j_{i-1}+j_i}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)^{n-2}(n-1).$$

□

例题 0.9 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}.$$

笔记 当行列式的行或列有一定的规律性时, 但是由于缺少一行或一列导致这个行列式行或列的规律性并不完整. 此时我们可以尝试升阶法补全这个行列式行或列的规律, 再对行列式进行化简.

本题若直接使用大拆分法会得到比较多的行列式, 而且每个行列式并不是完整的 *Vandermode* 行列式. 后续求解很繁琐, 因此不采取大拆分法.

解 (升阶法) 考虑 $n+1$ 阶行列式 $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \\ 1 & y-a & y(y-a) & y^2(y-a) & \cdots & y^{n-1}(y-a) \end{vmatrix}$, 则

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & y^3 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由上式可知,$|\boldsymbol{B}|$ 可以看作一个关于 y 的 n 次多项式. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 按最后一行展开得到

$$|\boldsymbol{B}| = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+i}B_{n+1,i}y^{i-1}, \text{其中} B_{ni} \text{是} |\boldsymbol{B}| \text{的第} (n+1,i) \text{元的余子式}, i=1,2,\cdots,n+1.$$

从而

$$|\boldsymbol{B}| = (-1)^{n+2}B_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i+1}B_{n+1,i}y^{i-2}(y-a) = \prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \tag{1}$$

又易知 $B_{n+1,2} = |\boldsymbol{A}|$, 而当 $a=0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数只有 $B_{n+1,2}$. 比较等式(1)两边 y 的系数可得

$$(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum_{i=1}^{n}(-x_1)\cdots(-x_{i-1})(-x_{i+1})\cdots(-x_n)\right).$$

于是 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right) = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\right).$

当 $a\neq 0$ 时, 由等式(1)可知,$|\boldsymbol{B}|$ 中 y 前面的系数不只有 $B_{n+1,2}$, 但是, 我们比较等式(1)两边的常数项可得

$$(-1)^{n+2}B_{n+1,1} - a(-1)^{n+3}B_{n+1,2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k). \tag{2}$$

又因为

$$B_{n+1,1}=\begin{vmatrix} x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

所以再结合等式(2)可得

$$\begin{aligned} -a(-1)^{n+3}|\boldsymbol{A}| &= -a(-1)^{n+3}B_{n+1,2}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(-x_k)-(-1)^{n+2}B_{n+1,1} \\ &=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \\ &=(-1)^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left[\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right]. \end{aligned}$$

故此时 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)$. □

例题 0.10 求下列行列式式的值 (n 为偶数)

$$I=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix}.$$

笔记 应用行列式函数求导求行列式的值.

解 令 $G(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{vmatrix}$, 则 $I=\dfrac{G(n)}{n}$ 且 $G(0)=0$. 利用行列式求导公式, 可得

$$G'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix}=n!x\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\prod_{k=0}^{n}(x-k).$$

因此

$$\begin{aligned} I=\frac{G(n)}{n}=\frac{\int_0^n G'(x)\mathrm{d}x}{n} &=(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(x-k)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{区间再现}}{=}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(n-k-x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1}(n-1)! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\int_0^n \prod_{k=0}^{n}(x-k)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n+1} I.
\end{aligned}
$$

由于 n 为偶数, 所以 $(-1)^{n+1} = -1$. 于是 $I = -I$. 故 $I = 0$. □

例题 0.11 解方程

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.
$$

解 由行列式的性质

$$
\text{方程左边} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 3 & 8 & 34 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}.
$$

这是一 Vandermonde(范德蒙德) 行列式, 它为关于 x 的次数 $\leqslant 3$ 的多项式. 所以上述方程最多有 3 个不同的根. 由行列式性质直接观察可知 $x = 1, 3, 4$ 是方程的根. 故方程的根为 $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$. □

例题 0.12 计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} \sin(\alpha_1-\beta_1) & \sin(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_1-\beta_n) \\ \sin(\alpha_2-\beta_1) & \sin(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\alpha_n-\beta_1) & \sin(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \sin(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.
$$

解 $D_1 = \sin(\alpha_1 - \beta_1)$. 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$
D_n = \left| \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n \end{pmatrix} \right|.
$$

所以当 $n = 2$ 时,

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 \\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 \end{vmatrix} \\
&= (\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2)(-\sin\beta_2\cos\beta_1 + \cos\beta_2\sin\beta_1) \\
&= \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2).
\end{aligned}
$$

当 $n\geqslant 3$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $D_n=0$. 也即

$$D_n=\left|\begin{pmatrix}\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n\\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n\\ -\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \cdots & -\sin\beta_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=0.$$

□

例题 0.13 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ a_1^{n-1}+\dfrac{x}{a_1^2} & a_2^{n-1}+\dfrac{x}{a_2^2} & \cdots & a_n^{n-1}+\dfrac{x}{a_n^2}\end{vmatrix}$, $n\geqslant 2$.

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ \dfrac{x}{a_1^2} & \dfrac{x}{a_2^2} & \cdots & \dfrac{x}{a_n^2}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+\frac{x}{a_1^2}A_{n1}+\frac{x}{a_2^2}A_{n2}+\cdots+\frac{x}{a_n^2}A_{nn},$$

其中

$$A_{n1}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ a_2 & \cdots & a_n\\ a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

$$A_{nt}=(-1)^{n+t}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & \cdots & a_{t-1} & a_{t+1} & \cdots & a_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{t-1}^{n-2} & a_{t+1}^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+t}\prod_{\substack{1\leqslant j<i\leqslant n,\\ i\neq t,j\neq t}}(a_i-a_j),$$

$$A_{nn}=(-1)^{n+n}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(a_i-a_j),$$

所以

$$D = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j) + \sum_{t=1}^{n}(-1)^{n+t}\frac{x}{a_t^2}\prod_{\substack{j<i\\ i,j\in[n]\backslash\{t\}}}(a_i - a_j),$$

其中 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$. $\square$