集合论

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLATEX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第 1 章 集合与点集

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的基本概念

集合的定义

定义 1.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**)，通常用大写字母如 A, B, C 等表示。构成一个集合的那些事物称为集合的元素 (或元)，通常用小写字母如 a, b, c 等表示。

若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$。对于给定的集合，任一元素要么属于它，要么不属于它，二者必居其一。

不含任何元素的集合称为空集，用 $\emptyset$ 表示；只含有限个元素的集合称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup 0$.

集合的表示方法

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$$

(2) 描述法——$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\}$$

集合的相等与包含

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$. 若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subsetneq B$.

注 $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. (经常用于证明两个集合相等) 集合 A 的所有子集的全体，称为 A 的幂集，记为 2^A.

1.1.2 集合的运算

交与并

设 A, B 为两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且} x \in B\}$$

若 $A \cap B = \emptyset$，则称 A 与 B 互不相交。

集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为集族，其中 Γ 为指标集 (有限或无限)，α 为指标. 特别地，当 $\Gamma=\mathbb{N}$ 时，集族称为列集，记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{A_n\}$。

1.1.2.0.1 集族的并：

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x:\exists\alpha_0\in\Gamma\ \text{使得} x\in A_{\alpha_0}\}$$

1.1.2.0.2 集族的交：

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x:x\in A_\alpha,\forall\alpha\in\Gamma\}$$

差与余

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$，即

$$A-B=\{x:x\in A\ \text{且} x\notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 X 的子集，X 称为全集或基本集. 全集 X 与子集 A 的差集 $X-A$，称为 A 的余集，记为 A^c，即

$$A^c=\{x:x\notin A\}$$

注 补集是相对概念，若 $A\subset B$，则 $B-A$ 称为 A 关于 B 的补集。特别地，余集是集合关于全集的补集。

笛卡尔积

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\}$$

$$A_1\times\cdots\times A_n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in A_i,i=1,\cdots,n\}$$

例如，n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ 个}}$。

集合的运算及性质

(1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；
(2) $A\cup\emptyset=A$，$A\cap\emptyset=\emptyset$；
(3) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；
(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；
(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，
$A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$，$A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$；
(6) $A\cup A^c=X$，$A\cap A^c=\emptyset$；
(7) $X^c=\emptyset$，$\emptyset^c=X$；
(8) $A-B=A\cap B^c$。

定理 1.1 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族，则

(i) $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$；

(ii) $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。

证明 (i) 设 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$，则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$，故对 $\forall\alpha \in \Gamma$，$x \notin A_\alpha$，即 $\forall\alpha \in \Gamma$，$x \in A_\alpha^c$。从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$，因此，$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。上述推理反过来也成立，故 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c \subset (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c$。因此，$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c$。

(ii) 类似可证。 □

1.1.3 上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列，若 $\{A_n\}$ 单调递增，即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。若 $\{A_n\}$ 单调递减，即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。

定义 1.2 (上限集和下限集)

对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，则 $\{C_n\}$ 单调递减，故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的**上限集**，记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \cdots \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \cdots$$

记 $D_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，则 $\{D_n\}$ 单调递增，故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集，记为 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，则称 $\{A_n\}$ 收敛，其极限记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$。

命题 1.1

设 $\{A_n\}$ 为一集列，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个} A_n\}$$

$$= \{x: \text{ 对}\forall k\in\mathbb{N}, \text{ 都存在} n_k \text{ 使得} x\in A_{n_k}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x: \text{ 除有限个} A_n \text{ 外, 都含有} x\}$$

$$= \{x : \exists n_0\in\mathbb{N}, \text{ 使得} x\in A_n, \forall n \geqslant n_0\}$$

证明 (1) 设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，则对 $n=1$, 有 $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，故 $\exists n_1\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in A_{n_1}$；对 $n=n_1+1$, 有 $x\in\bigcup_{k=n_1+1}^{\infty}A_k$，故 $\exists n_2>n_1$, 使得 $x\in A_{n_2}$；以此类推，得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1<n_2<\cdots$, 且 $x\in A_{n_k},\forall k$. 因此，x 属于无穷多个 A_n.

反之，若 x 属于无穷多个 A_n, 不妨设 $x\in A_{n_k}, k=1,2,\cdots$, 且 $n_1<n_2<\cdots$, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都存在 $n_k>n$. 从而 $x\in A_{n_k}\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 因此，$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

(2) $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k \iff \exists n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k \iff x\in A_n, \forall n\geqslant n_0$. □

例题 1.1 设 $A_{2n+1}=[0,2-1/(2n+1)], n=0,1,2,\cdots$, $A_{2n}=[0,1+1/2n], n=1,2,\cdots$, 求 $\liminf_{n\to\infty}A_n$ 与 $\limsup_{n\to\infty}A_n$.

解 注意到

$$[0,1]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2)$$

故只需考察 $(1,2)$ 中的点. 对 $\forall x\in(1,2)$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$(与 x 有关), 使得

$$1+\frac{1}{2n}<x<2-\frac{1}{2n+1},\quad \forall n\geqslant n_0$$

即当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $x\notin A_{2n}, x\in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能"除有限个 A_n 外, 都含有 x", 即 $x\notin\liminf_{n\to\infty}A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 A_n", 故 $x\in\limsup_{n\to\infty}A_n$. 因此, $\liminf_{n\to\infty}A_n=[0,1]$, $\limsup_{n\to\infty}A_n=[0,2)$. □

例题 1.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x\in D$, 则"$f_n(x)\nrightarrow f(x)$", 即 $\exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall k\in\mathbb{N}, \exists n_k\geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n(\varepsilon_0),\quad \exists\varepsilon_0>0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0=1/k_0, k_0\in\mathbb{N}$. 因此

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}.$$

□

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由德　摩根公式, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}$$

1.2 映射与集合的基数

1.2.1 映射

定义 1.3 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f, 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f : A \to B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.B 称为 f 的**陪域**. A 在 f 下的象称为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subset B$ 在 f 下的**原象**, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) 对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应; 并且 f 的一个像可以存在多个原像.

(2) $f(A) \subset B$, 不一定有 $f(A) = B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad 和 \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subset 2^A$, 定义 $\phi : \mathcal{D} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 1.4 (单射、满射和双射)

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射.

若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为满射 (或到上的).

既单且满的映射, 称为一一映射 (或双射).

定义 1.5 (逆映射)

设 $f : A \to B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \to A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的逆映射.

笔记 逆映射是反函数概念的推广, 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

定义 1.6 (复合映射和映射的延拓)

设映射 $f : A \to B, g : B \to C$, 定义 $g \circ f : A \to C$ 为

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 f 与 g 的**复合映射**.

设映射 $f : A \to B, A_0 \subset A$, 若 $g : A_0 \to B$ 满足

$$g(x) = f(x), \quad x \in A_0$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的限制, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的**延拓**.

命题 1.2

设一列映射 $f_i : A_i \to A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是单射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.

(2) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是满射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.

(3) 若 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是双射, 则 $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.

证明

(1)

(2)

(3)

□

定义 1.7 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的**特征函数** (**示性函数**) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 1.3 (特征函数的基本性质)

(1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$;

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$;

(3) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

证明 证明都是显然的. □

命题 1.4 (映射的基本性质)

对于映射 $f : C \to D, A \subset C, B \subset D$, 下列事实成立:

(i) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$;

(ii) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$;

(iii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;

(iv) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$, 当且仅当 f 为满射时, “=” 成立;

$A \subset f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时, “=” 成立;

(v) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

笔记 (iv) 中第一条的直观理解是:B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是:$C - A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$(即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subset A_1, A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subset f(f^{-1}(B))$, 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subset A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此, "=" 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾. □

1.2.2 集合的对等

定义 1.8 (集合的对等)

设 A, B 为非空集, 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记为 $A \sim B$. 规定 $\varnothing \sim \varnothing$. ♣

笔记 A 与 B 对等就是两个集合的元素可以建立一一对应的关系.

定理 1.2

对等关系也是等价关系, 即具有如下性质:

(1) (反身性)$A \sim A$;

(2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$. ♡

证明 证明是显然的. □

命题 1.5

(1) 设 A, B, C, D 都是非空集合, 若 $A \sim C, B \sim D$, 则 $A \times B \sim C \times D$.

(2) 设 A_i, B_i 都是非空集合, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $A_i \sim B_i$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$. ♠

证明

(1) 由 $A \sim C, B \sim D$ 可知, 存在双射 $f: A \to C$ 和 $g: B \to D$. 于是令

$$\varphi: A \times B \to C \times D, \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

对 $\forall(a,b)\in A\times B$, 由 $f(a)\in C, g(b)\in D$ 可知 $(f(a),g(b))\in C\times D$. 故 φ 是良定义的. 由 f,g 都是双射易知 φ 也是双射. 故 $A\times B\sim C\times D$.

(2) 根据 (1) 的结论, 再利用数学归纳法不难证明.

□

例题 1.3 自然数集 $\mathbb{N}\sim$ 正偶数集 $\sim$ 正奇数集 $\sim$ 整数集 $\mathbb{Z}$.

证明 正偶数集 $=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$; 正奇数集 $=\{2n-1:n\in\mathbb{N}\}$;

$$\mathbb{Z}=\{(-1)^{n+1}[n/2]:n\in\mathbb{N}\}.$$

□

例题 1.4 $(-1,1)\sim\mathbb{R}$.

证明 $f(x)=\tan\dfrac{\pi}{2}x$. □

例题 1.5 {去掉一点的圆周} $\sim\mathbb{R}$.

笔记 类似地, 球面去掉一点与平面上的点集对等.

证明 如图 1.1, 设圆周为 C, 从除去的点 P 作过圆心的直线, 取与该直线垂直且与圆周相切 (不过点 P) 的直线表示实轴 $\mathbb{R}$. 对于 $C-\{P\}$ 上的每一点 c, 从点 P 作过点 c 的直线必与实轴相交于某点, 记为 x. 建立一一对应: $s:\mathbb{R}\to C-\{P\}$ 为 $s(x)=c$. (点 P 对应 ∞)

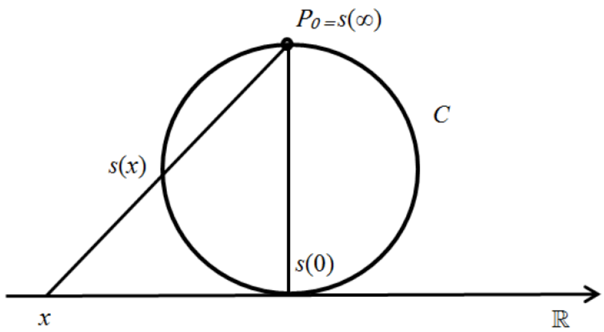

图 1.1: 去掉一点的圆周与实轴对等

□

引理 1.1

设 A,B 为非空集, 若 $f:A\to B, g:B\to A$, 则 A 与 B 存在如下分解:

(i) $A=A_1\cup A_2, B=B_1\cup B_2$;

(ii) $A_1\cap A_2=\varnothing, B_1\cap B_2=\varnothing$;

(iii) $f(A_1)=B_1, g(B_2)=A_2$.

证明 作集族

$$\Gamma=\{E\subset A:E\cap g(B-f(E))=\varnothing\}$$

Γ 中的元称为 A 中的隔离集. 令 $A_1=\bigcup\limits_{E\in\Gamma}E$, 则 $A_1\in\Gamma$. 实际上, 对任意的 $E\in\Gamma$, 都有 $E\subset A_1$, 再由 $E\cap g(B-f(E))=\varnothing$ 知

$$E\cap g(B-f(A_1))=\varnothing$$

从而

$$A_1\cap g(B-f(A_1))=\bigcup_{E\in\Gamma}[E\cap g(B-f(E))]=\varnothing$$

因此, A_1 是 A 中隔离集, 且是 Γ 中的最大元.

现在令 $B_1=f(A_1), B_2=B-B_1, A_2=g(B_2)$, 则

$$A_1\cap A_2=A_1\cap g(B-f(A_1))=\varnothing$$

下面只需验证 $A_1 \cup A_2 = A$.

若不然, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_1 \cup A_2$. 令 $A_0 = A_1 \cup \{x_0\}$, 由于 $B_1 = f(A_1) \subset f(A_0)$, 故

$$B - f(A_0) \subset B - B_1 = B_2$$

从而

$$g(B - f(A_0)) \subset g(B_2) = A_2$$

再由 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 以及 $x_0 \notin A_2$ 知

$$A_1 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing, \quad x_0 \notin g(B - f(A_0))$$

因此

$$A_0 \cap g(B - f(A_0)) = \varnothing$$

故 $A_0 \in \Gamma$. 这与 A_1 是 Γ 中的最大元矛盾. □

1.2.3 集合的基数 (势)

定义 1.9 (集合的基数 (势))

设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 的**基数或势相同**, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. ♣

笔记 基数反映了对等集在元素数量级别上的共性.

定理 1.3

(1) 自反性:$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ 。
(2) 对称性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ 。
(3) 传递性: 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ 。 ♡

证明 由定理 1.2及集合的基数 (势) 的定义可直接得到. □

定义 1.10

对于集合 A, B, 若有 $B_0 \subset B$, $A \sim B_0$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$。若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 A 与 B 不对等, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$。同理可定义 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. ♣

命题 1.6 (映射与基数之间的关系)

(1) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;
(2) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$;
(3) 若存在从 A 到 B 的一一映射, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. ♠

证明

(1)
(2)
(3)

□

定理 1.4 (Bernstein 定理)

Bernstein 定理的两个等价形式:

(1) 若 A 与 B 的某子集对等, B 与 A 的某子集对等, 则 $A \sim B$.

(2) 若集合 A, B 满足 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明

(1) 由题设存在单射 $f: A \to B, g: B \to A$, 利用引理 1.1可得到 A 与 B 的分解

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$
$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2$$

其中, $A_1 \cap A_2 = \varnothing, B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 注意到 $f: A_1 \to B_1, g^{-1}: A_2 \to B_2$ 是一一映射, 作映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

则 $F: A \to B$ 是一一映射, 从而 $A \sim B$.

(2) 由定义 1.9和定义 1.10可知 (2)⇔(1).

□

例题 1.6 $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$.

证明 由例题 1.4可知, $\mathbb{R} \sim (-1, 1) \subset [-1, 1]$; 又 $[-1, 1] \sim [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. 由Bernstein 定理 (1)可知, $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$. □

定理 1.5

对于集合 A, B, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 中的任意两个不会同时成立。

证明 由定义 1.10可知，若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，则 A 与 B 对等，另外两个不会成立；假设 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 同时成立，则存在 $B_0 \subset B$，$A_0 \subset A$，使得 $A \sim B_0$，$B \sim A_0$. 使用Bernstein 定理 (1)得出 $A \subset B$, 进而 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，显然矛盾，证毕。 □

定义 1.11 (有限集与无限集)

设 A 是一个非空集合, 若存在自然数 n, 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 并记 $\overline{\overline{A}} = n$. 若 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**. 特别地, 规定 $\overline{\overline{\varnothing}} = 0$.

笔记 由上述定义可知有限集的基数等于该集合元素的个数. 实际上, 集合的基数就是有限集元素个数的推广.

定理 1.6

设 A 是非空集合, 则

(1) A 是有限集的充要条件是 A 不与其任何真子集对等.

(2) A 是无限集的充要条件是 A 与其某个真子集对等.

笔记 这就是有限集与无限集的本质区别.

证明 先证 (1)(2) 的必要性.

(1) 的必要性: 设 $\overline{\overline{A}} = n$, 用数学归纳法证明, $n = 1$, 显然. 假设 $n = k$ 时, 结论成立.

当 $n = k + 1$ 时, 若存在 A 的某个真子集 A_0 使得 $A \sim A_0$, 则存在一一映射 $\varphi: A \to A_0$. 下面分两种情况:

(i) $\exists a \in A$, 使得 $\varphi(a) = a$.

令 $A_1 = A - \{a\}, A_2 = A_0 - \{a\}$, 则 A_2 是 A_1 的真子集, $\overline{\overline{A_1}} = k$. 而 $\varphi|_{A_1}$ 是 A_1 到 A_2 的一一映射, 故 $A_1 \sim A_2$. 这与假设矛盾.

(ii) $\forall a \in A$, 都有 $\varphi(a) \neq a$.

A_0 是 A 的真子集, 则存在 $x_0 \in A, x_0 \notin A_0$. 令

$$A_3 = A - \{x_0\}, \quad A_4 = A_0 - \{\varphi(x_0)\}$$

注意到 $x_0 \notin A_0$ 以及 A_0 是 A 的真子集, 则 A_4 是 A_3 的子集. 又由于

$$\varphi(x_0) \in A_0 \subset A, \quad \varphi(x_0) \neq x_0$$

故 $\varphi(x_0) \in A - \{x_0\} = A_3$, 而 $\varphi(x_0) \notin A_0 - \{\varphi(x_0)\} = A_4$. 从而 A_4 是 A_3 的真子集, 于是 $\overline{\overline{A_3}} = k$, $\varphi|_{A_3}$ 是 A_3 到 A_4 的一一映射, 故 $A_3 \sim A_4$. 这与假设矛盾.

(2) 的必要性: 设 A 是无限集. 先证明在任一无限集 A 中, 一定能取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, \cdots$. 事实上, 在 A 中任取一个元素, 记为 a_1. 因为 A 是无限集, 集 $A - \{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集 $A - \{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样, $A - \{a_1, a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去, 将从 A 中取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, \cdots$, 记余集为 $\hat{A} = A - \{a_n | n = 1, 2, \cdots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \cdots\} \cup \hat{A} = \tilde{A}$$

现作 A 与 $\tilde{A}$ 之间的映射 φ:

$$\varphi(a_i) = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots$$
$$\varphi(x) = x, \quad x \in \hat{A}$$

显然, φ 是 A 到 $\tilde{A}$ 上的一一对应, 证毕.

再证 (1)(2) 的充分性.

(1) 的充分性: 设 A 不与其任何真子集对等, 假设 A 是无限集, 则与由 (2) 的必要性矛盾! 因此 A 不是无限集, 故 A 是有限集.

(2) 的充分性: 设 A 与其某个真子集对等, 假设 A 是有限集, 则与 (1) 的必要性矛盾! 因此 A 是不是有限集. 故 A 一定是无限集. □

1.3 可列集与不可列集

1.3.1 可列集

定义 1.12 (可列集)

与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集合称为**可列集**, 其基数记为 $\aleph_0$(读作阿列夫零). 有限集和可列集统称为**可数集**. ♣

命题 1.7

A 是可列集当且仅当 A 可以写成 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ♠

证明 A 可列, 则存在 $\mathbb{N}$ 到 A 的一一映射 φ, 记为 $\varphi(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, 则 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 反过来, 若 $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 将每个 a_n 与其下标 n 建立一一对应, 则 A 与 $\mathbb{N}$ 对等, 从而是可列集 □

命题 1.8 (可列集的性质)

(1) 任何无限集必包含一个可列子集.
(2) 可列集的任何无限子集都是可列集.
(3) 有限集与可列集的并集是可列集.
(4) 有限个可列集的并集是可列集.
(5) 可列个可列集的并集是可列集.
(6) 若 A 为无限集, B 为有限集或可列集, 则 $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$.
(7) 设 A, B 为可列集, 则 $A \times B$ 是可列集.
(8) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 可列, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 可列. ♠

笔记 (1) 也说明, 众多无限集中, 最小的基数是可列集的基数 $\aleph_0$.

证明

(1) 设 A 为无限集. 从 A 中任取一元 a_1; 由于 $A-\{a_1\}\neq\varnothing$, 取 $a_2\in A-\{a_1\}$; 又 $A-\{a_1,a_2\}\neq\varnothing$, 取 $a_3\in A-\{a_1,a_2\}$; $\cdots\cdots$, 因为 A 是无限集, 这一过程可以一直继续下去, 从而得到 A 的一个可列子集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. B 是 A 的无限子集. 按照 A 中元素的次序依次寻找 B 中元素, 分别记为 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots$, 则 $B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$ 为可列集.

(3) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. 不妨设 $A\cap B=\varnothing$, 则

$$A\cup B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots\}$$

可列.

(4) 设 $A_k=\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},a_3^{(k)},\cdots\}$, $k=1,2,\cdots,n$ 为可列集, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned}
A_1&=\{a_1^{(1)}\quad a_2^{(1)}\quad a_3^{(1)}\quad\cdots\}\\
A_2&=\{a_1^{(2)}\quad a_2^{(2)}\quad a_3^{(2)}\quad\cdots\}\\
&\ \vdots\\
A_n&=\{a_1^{(n)}\quad a_2^{(n)}\quad a_3^{(n)}\quad\cdots\}
\end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{a_1^{(1)},\cdots,a_1^{(n)},a_2^{(1)},\cdots,a_2^{(n)},a_3^{(1)},\cdots\}$$

可列.

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可列集, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素可以按下面的方式编号排序

$$\begin{aligned}
A_1&=\{a_1^{(1)}\to a_2^{(1)}\to a_3^{(1)}\to a_4^{(1)}\cdots\}\\
A_2&=\{a_1^{(2)}\quad a_2^{(2)}\quad a_3^{(2)}\quad a_4^{(2)}\cdots\}\\
A_3&=\{a_1^{(3)}\quad a_2^{(3)}\quad a_3^{(3)}\quad a_4^{(3)}\cdots\}\\
&\ \vdots\\
A_n&=\{a_1^{(n)}\quad a_2^{(n)}\quad a_3^{(n)}\quad a_4^{(n)}\cdots\}\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

必要时删掉后续的重复元 (实际上, 取集合后就自动删去了重复元, 因为集合内不含重复元), 可得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{a_1^{(1)},a_1^{(2)},a_2^{(1)},\cdots,a_{2n+1}^{(1)},a_{2n}^{(2)},\cdots,a_{2n+1}^{(n)},\cdots\}$$

(依次是下标之和等于 $2,3,\cdots,2n+2,\cdots$) 可列.

(6) 不妨设 $A\cap B=\varnothing$, 否则用 $B-A$ 代替 B 即可. A 为无限集, 由 (1) 可知, A 包含一个可列子集 A_1. 由于 $A_1\cup B$ 是可列集, 故 $A_1\cup B\sim A_1$. 注意到 $(A-A_1)\cap(A_1\cup B)=\varnothing$, 则有

$$A\cup B=(A-A_1)\cup A_1\cup B=(A-A_1)\cup(A_1\cup B)\sim(A-A_1)\cup A_1=A.$$

因此, $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.

(7) 由命题 1.7可设 $A=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则

$$\begin{aligned}
A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\}&=\bigcup_{x\in A}\{(x,y):y\in B\}\\
&=\bigcup_{x\in A}\bigcup_{y\in B}(x,y)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(x_i,y_j\right).
\end{aligned}$$

由(5)可知, 对 $\forall i\in\mathbb{N},\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_i,y_j)$ 都可列. 于是再由(5)可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_i,y_j)$ 也可列.

(8) 利用 (7) 及数学归纳法不难证明. □

例题 1.7 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明 $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^-$, 其中 $\mathbb{Q}^+,\mathbb{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集. 由对称性以及命题 1.8(3)和命题 1.8(4), 只需证明 $\mathbb{Q}^+$ 可列.

对每个 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots\right\}$$

则 A_n 可列. 又 $\mathbb{Q}^+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$(除去重复元), 由可列集性质知 $\mathbb{Q}^+$ 可列. □

例题 1.8 实轴上互不相交的开区间至多有可列个.

证明 开区间的长度大于 0, 故必含有有理数, 在每一个开区间内取出一个有理数. 因为开区间互不相交, 所以取出的有理数都不相等, 从而这些有理数构成 $\mathbb{Q}$ 的一个子集. 又 $\mathbb{Q}$ 是可列集, 故这样的开区间至多有可列个. □

例题 1.9 整系数多项式的全体 $\mathbf{P}$ 是可列集.

证明 对每个 $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, 令

$$P_n=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n:a_i\in\mathbb{Z},i=0,1,\cdots,n,a_0\neq 0\}$$

则

$$P_n\sim\mathbb{Z}-\{0\}\times\underbrace{\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}_{n}$$

由命题 1.8(8)知 P_n 可列. 又 $\mathbf{P}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}P_n$, 由可列集性质知 $\mathbf{P}$ 可列.

整系数多项式的根称为代数数, 由于每个多项式只有有限个根, 故代数数的全体构成一可列集. □

例题 1.10 $\mathbb{R}$ 上单调函数的不连续点至多有可列个.

证明 不妨设 f 单调递增, 若 x_0 是 f 的不连续点, 则

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)<\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$$

故 x_0 就对应着一个开区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$. 显然, 若 x_1,x_2 是 f 的不同不连续点, 则对应区间 $(f(x_1-0),f(x_1+0))$ 与 $(f(x_2-0),f(x_2+0))$ 互不相交. 而 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间至多有可列个, 故 f 的不连续点也至多有可列个. □

1.3.2 不可列集

定义 1.13 (不可列集)

不是可列集的无限集称为**不可列集**. ♣

定理 1.7

$[0,1]$ 是不可列集. ♡

证明 假设 $[0,1]$ 可列, 则可表示为 $[0,1]=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 把 $[0,1]$ 三等分为: $[0,1/3],[1/3,2/3],[2/3,1]$, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1, 记该区间为 I_1, 则 $x_1\notin I_1$; 把 I_1 三等分, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_2, 记该区间为 I_2, 则 $x_2\notin I_2,I_2\subset I_1$; ······, 依次做下去, 可得到一列闭区间 $\{I_n\}$ 满足:

(i) $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$;

(ii) $x_n\notin I_n,n\in\mathbb{N}$;

(iii) I_n 的长度为 $1/3^n\to 0,n\to\infty$.

由闭区间套定理，存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 由于 $\xi \in [0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\xi = x_{n_0}$. 而 $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, 这与 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 矛盾. □

定义 1.14

若 $A \sim [0,1]$, 则称 A 具有**连续基数**, 记 $\overline{\overline{A}} = \aleph$. ♣

定理 1.8

对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $\overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$. ♡

证明 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 映射 $f(x) = a + (b-a)x$ 建立了 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 之间的一一对应, 故 $\overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 又 (a,b) 和 $(a,b]$ 与 $[a,b]$ 分别只差一个点和两个点, 由命题 1.8(6)知 $\overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{(a,b]}} = \overline{\overline{[a,b]}} = \aleph$. 最后, 由 § 与 R 对等] 例题1.6以及刚证明的结论可得, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{[-1,1]}} = \aleph$. □

推论 1.1

无理数的基数为 $\aleph$. ♡

证明 记无理数集为 $\mathbb{I}$, 注意到 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, 且 $\mathbb{Q}$ 可列, 由命题 1.8(6)可得 $\overline{\overline{\mathbb{I}}} = \overline{\overline{\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$. □

定理 1.9

设 $\{A_n\}$ 为一集列, 若对每个 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph$. ♡

证明 不妨设 $A_i \cap A_j = \varnothing$. 由于 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$, 则 $A_n \sim (n, n+1]$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}$. □

定义 1.15

设 A 为集合, 记 2^A 为 A 的幂集. 若 A 为含有 n 个元素的有限集, 则 2^A 由 1 个空集, C_n^1 个单元素集, C_n^2 个两元素集, $\cdots\cdots$, C_n^n 个 n 元素集, 所以, 2^A 中元素的个数为

$$1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{\overline{\overline{A}}}$$

更一般地, 设 $\overline{\overline{A}} = \mu$, 定义 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\mu}$. ♣

命题 1.9

设 A, B 都是非空集合, 则 $A \sim B$ 的充要条件是 $2^A \sim 2^B$. ♠

证明 必要性: 由 $A \sim B$ 可知 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 于是 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$. 故 $2^A \sim 2^B$.

充分性: 假设 A 与 B 不对等, 则不妨设 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}} > 2^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{2^B}}$, 这与 $2^A \sim 2^B$ 矛盾! 故 $A \sim B$. □

引理 1.2

设 A 是一个非空集合, 则 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等, 即 $\mathcal{F}_A \sim 2^A$. 进而 $\overline{\overline{\mathcal{F}_A}} = \overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$. ♡

证明 对于每个 $E \in 2^A$, 可以唯一的对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in A - E \end{cases}$$

反之亦然. 这说明 A 上所有特征函数的全体 $\mathcal{F}_A$ 与 2^A 对等. □

定理 1.10

$\aleph = 2^{\aleph_0}$.

证明 用 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{N}$ 上特征函数的全体, 只需证 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 与 $(0,1]$ 对等.

对任意的 $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, 作映射

$$f : \varphi \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}, \varphi(n) \in \{0,1\}.$$

易知, f 是从 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 到 $(0,1]$ 的单射, 故命题 1.10可知 $\overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} \leqslant \overline{\overline{(0,1]}}$.

另一方面, 对每一个 $x \in (0,1]$, 用 2 进制表示为 (不进位)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, a_n \in \{0,1\}.$$

定义映射

$$g : x \to \varphi \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}, \quad \varphi(n) = a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

易知, g 是从 $(0,1]$ 到 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 的单射, 故由命题 1.10可知 $\overline{\overline{(0,1]}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$.

由Bernstein 定理可知 $\overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}}$. 再由引理 1.2可得 $\aleph = \overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = 2^{\aleph_0}$. □

例题 1.11 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

证明 由定理 1.10及命题 1.9和 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}-\mathbb{N}$ 可知 $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$, 故再由命题 1.5可得 $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{Z}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.
□

例题 1.12 用 M 表示 $[0,1]$ 上实值有界函数的全体, 则 $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$.

证明 设 E 为 $[0,1]$ 的任一子集, 则 E 唯一对应一个特征函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0,1] - E \end{cases}$$

显然, $\chi_E \in M$. 故 $\overline{\overline{M}} \geqslant \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^{\aleph}$.

另一方面, 对每一个 $f \in M$, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 为平面上的一有界子集, 两者构成一一对应关系, 故 $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{2^{\mathbb{R}^2}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} = 2^{\aleph}$. 由伯恩斯坦定理, $\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph}$. □

定理 1.11 (无最大基数定理)

设 A 为非空集, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$.

证明 由于 2^A 中的单元素集与 A 对等, 故 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{2^A}}$.

若存在集合 A 满足 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{2^A}}$, 则存在 $f : A \to 2^A$ 为一一映射. 令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

注意到 $\varnothing \in 2^A$, 则存在 $x_0 \in A$ 使得 $f(x_0) = \varnothing$, 故 $x_0 \notin f(x_0)$. 这说明 $x_0 \in B$, 从而 $B \neq \varnothing$.

又 $B \in 2^A$, 则存在 $x_B \in A$ 使得 $f(x_B) = B$. 下面考察 x_B 与 B 的关系: 若 $x_B \in B$, 则 $x_B \notin f(x_B) = B$, 矛盾; 若 $x_B \notin B$, 即 $x_B \notin f(x_B)$, 这又蕴涵 $x_B \in B$, 矛盾. □