0.1 级数基本结论

0.1.1 级数的敛散性

定理 0.1 (交错级数不等式)

设 $\{a_n\}$ 递减非负数列, 则对 $m, p \in \mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}(-1)^n a_n\right| \leqslant a_m. \tag{1}$$

笔记 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m=0$, 则

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n = \begin{cases} a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为偶数} \\ a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p & ,p\text{为奇数} \end{cases} \leqslant a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n = \begin{cases} (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-2}-a_{p-1})+a_p & ,p\text{为偶数} \\ (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为奇数} \end{cases} \geqslant 0,$$

这就证明了不等式(1). □

定理 0.2 (A-D 判别法)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 满足下列条件之一时收敛.

1. $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, b_n 递减到 0;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, b_n 单调有界.

证明 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=n}^{k} a_j + b_m\sum_{k=n}^{m} a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M = 2\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|,$$

我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant M\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}| + M|b_m| = Mb_n \to 0, \text{当} n,m\to\infty.$$

对于第二种情况, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任何 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大, 对任何 $p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \leqslant \varepsilon.$$

于是当 n,m 充分大, 我们有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}| + \varepsilon|b_m| = \varepsilon|b_m-b_n| + \varepsilon|b_m| \leqslant 3\varepsilon\sup_{n\geqslant 1}|b_n|.$$

因此无论如何都有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

定理 0.3 (积分判别法)

若 f 是 $[1,+\infty)$ 的单调不变号函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

笔记 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

证明 不妨设 f 非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

由夹逼准则即证. □

定理 0.4 (比值判别法)

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta \in (0,1)$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 极限版的 1 和不等式版的 1 是等价的, 极限版的 2 能推出不等式版的 2, 但不等式版的 2 不能推出极限版的 2.

定理 0.5 (Cauchy 链)

设正值递增函数 $F \in C^1[a,+\infty), \frac{F'}{F}$ 在 $[a,+\infty)$ 递减. 若满足 $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散, 则对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 有如下判别法:

极限版:

1. 若
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} > 1, \tag{2}$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} < 1, \tag{3}$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c>1,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c,\forall n\geqslant N,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c\leqslant 1,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant c,\forall n\geqslant N,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱, 因为如果改 (3)为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant 1$, 则 $\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$ 仍然可能在 n 充分大严格超过 1.

注 取 $F(x)=e^x$, 则

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{n-\ln a_n}{n}=1-\ln\sqrt[n]{a_n},$$

这恰好是根值判别法.

取 $F(x)=x$, 则

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{-\ln a_n}{\ln n},$$

这恰好是对数判别法.

证明 **Step 1** 先证明

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty. \tag{4}$$

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A$, 则积分判别法表明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\sim\int_a^{\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx=\ln F(x)\Big|_a^{\infty},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{A}$, 这就和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F'(n)$ 发散矛盾! 故我们证明了 (4).

Step 2 当 (2) 成立, 再利用(4)式, 存在 $c>1,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c,F(N)>1,\forall n\geqslant N.$$

因此

$$\frac{F'(n)}{a_n}\geqslant e^{c\ln F(n)}\Rightarrow\frac{F'(n)}{F^c(n)}\geqslant a_n,\forall n\geqslant N.$$

结合 $\frac{F'(n)}{F^c(n)}=\frac{F'(n)}{F(n)}\cdot\frac{1}{F^{c-1}(n)}$ 递减, 由积分判别法, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F^c(n)}\sim\int_N^{\infty}\frac{F'(x)}{F^c(x)}\,dx=\int_{F(N)}^{\infty}\frac{1}{y^c}\,\mathrm{d}y<\infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

Step 3 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)} \leqslant c, F(n) \geqslant 1, \forall n \geqslant N.$$

根据 **Step 2**, 同样的我们有 $\frac{F'(n)}{F(n)} \leqslant \frac{F'(n)}{F^c(n)} \leqslant a_n, \forall n \geqslant N$ 以及由积分判别法有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(n)}{F(n)} \sim \int_N^{\infty} \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \int_{F(N)}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.6 (对数判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c > 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 0.7 (根值判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant c, \forall n \geqslant N,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 而应该是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. 也不应是无穷多个 n, 而是任何 $n \geqslant N$. 所以我们需要一些加强的证明.

证明 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则存在 $n_k \to \infty$, 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant c \geqslant 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

定理 0.8 (Kummer 链)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 设

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \cdots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} K_n > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} K_n < 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ 使得 $K_n \geqslant \delta, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_n \leqslant 0, \forall n \geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$.

注 当 $d_n = 1, n \in \mathbb{N}$. 我们有 $K_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1$, 这恰好就是比值判别法.

当 $d_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有 $K_n = n\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$, 这恰好是拉比判别法.

当 $d_n = \dfrac{1}{n \ln n}, n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \\ &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

即得一个较为广泛的判别法. 要注意我们在阶的层面对 K_n 做了变形, 因此不再给出不等式版本的较为广泛的判别法.

证明 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>0$ 使得 $K_n\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\geqslant a_{n+1},\forall n\geqslant N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^{m}a_{k+1}\leqslant\sum_{k=N}^{m}\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_k}{d_k}-\frac{a_{k+1}}{d_{k+1}}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{d_N}-\frac{a_{m+1}}{d_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\cdot\frac{a_N}{d_N},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $K_n\leqslant 0,\forall n\geqslant N$. 则 $\dfrac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\geqslant\dfrac{a_n}{d_n},\forall n\geqslant N$. 现在

$$a_{n+1}\geqslant\frac{a_N}{d_N}d_{n+1},\forall n\geqslant N,\sum_{n=1}^{\infty}d_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,$$

这就完成了证明. □

定理 0.9 (拉比判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>1$ 使得 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明

□

定理 0.10 (较为广泛的判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版 1:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\cdot\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

极限版 2:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

笔记 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的, 极限版 1 就是Kummer 链的 $d_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ 的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例, 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设 $t>1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>t,\forall n\geqslant N.$$
然后
$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{1}{n}+\frac{t}{n\ln n},\forall n\geqslant N.$$
现在求和得
$$\ln\frac{a_N}{a_{n+1}}>\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right),\forall n\geqslant N.$$
于是
$$a_{n+1}<a_N e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)},\forall n\geqslant N.$$
现在由例题**??**(2) 和例题**??**, 我们有
$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1),\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+O(1),n\to\infty.$$
于是
$$e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}=e^{-\ln n-\ln\ln n+O(1)}=\frac{e^{O(1)}}{n\ln^t n}.$$
结合积分判别法有
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y<\infty,$$
我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2. 设 $0<t<1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<t,\forall n\geqslant N.$$
然后相似第 1 问的证明和
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}dx=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y=+\infty,$$
我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

□

定理 0.11 (Herschfeld 判别法)

设 $p>1$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$. 定义
$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}},\ n\in\mathbb{N},$$
然后 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界. 显然 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增.

证明 **必要性**: 若 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由
$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}\geqslant\sqrt[p]{0+\sqrt[p]{0+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}=a_n^{\frac{1}{p^n}}$$
和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界知 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

充分性: 若 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界, 则设 $a_n^{\frac{1}{p^n}}\leqslant M, \forall n\in\mathbb{N}$, 于是我们有 $a_n\leqslant M^{p^n}, \forall n\in\mathbb{N}$. 因此
$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}\leqslant\sqrt[p]{M^p+\sqrt[p]{M^{p^2}+\cdots+\sqrt[p]{M^{p^n}}}}$$

$$= M\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\cdots+\sqrt[p]{1}}} \leqslant M\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\cdots+\sqrt[p]{1}}}}_{n\text{ 个根号}},$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1=\sqrt[p]{1},\ x_{n+1}=\sqrt[p]{1+x_n},\ n\in\mathbb{N}.$$

注意到 $x_2=\sqrt[p]{2}>1=x_1$, 不动点 $x_0>1$ 满足 $x_0^p-x_0-1=0$. 因此由命题**??**知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增有上界, 从而极限存在.

□

命题 0.1

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}=0$.

笔记 这个命题是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人卡住.

这个命题是命题**??**的离散版本.

注 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理就可以的. 笔记如果我们直接使用 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}na_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在, 而 Stolz 定理不可以逆用.

证明 记 $s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$, 则由 Abel 变换及 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}[k-(k+1)]s_k+ns_n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(s_n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}s_k}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_n=0.\end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则

1. 若 a_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.
2. 若 na_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln n\cdot a_n=0$.
3. 若 $n\ln n\cdot a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n=0$.

证明

1. 不妨设 a_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道 a_n 递减到 0. 注意到由 a_n 递减知

$$0\leqslant 2na_{2n}\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n}a_k,\ 0\leqslant(2n-1)a_{2n-1}\leqslant 2na_{2n-1}\leqslant 2\sum_{k=n}^{2n-1}a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = \lim_{n\to\infty}(2n-1)a_{2n-1} = 0.$$

由命题**??**知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2. 不妨设 na_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = c \neq 0$ 会导致 $a_n \sim \frac{c}{n}$, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以我们知道 na_n 递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{ka_k}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{1}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \\ &= na_n \int_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n} \frac{1}{x}dx = na_n \ln\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \geqslant na_n \ln\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}na_n \ln n \geqslant 0,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n \cdot a_n = 0$.

3. 不妨设 $n\ln n\cdot a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n) = c \neq 0$. 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\ln n\cdot a_n) = 0$, 从而 $a_n \geqslant 0$.

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} a_k &= \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} \frac{k\ln k\cdot a_k}{k\ln k} \geqslant n\ln n\cdot a_n \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k\ln k} \\ &\geqslant n\ln n\cdot a_n \sum_{[\ln n]\leqslant k\leqslant n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}dx = n\ln n\cdot a_n \int_{[\ln n]}^{n+1} \frac{1}{x\ln x}dx \\ &= n\ln n\cdot a_n\cdot \ln\frac{\ln(n+1)}{\ln[\ln n]} \geqslant n\ln n\cdot a_n\cdot \ln\frac{\ln n}{\ln\ln n} \sim n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n = 0$.

□

定理 0.12 (级数的控制收敛定理)

设 $a_n(s), n = 1, 2, \cdots$ 满足

$$|a_n(s)| \leqslant c_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及 $\lim\limits_{s} a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$.

则

$$\lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里 $\lim\limits_{s}$ 表示 s 趋于某个 $s_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$.

♡

证明 事实上由极限保号性, 我们知道 $|b_n| \leqslant c_n, n = 1, 2, \cdots$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s) - b_n)\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n(s) - b_n| \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m}(a_n(s) - b_n)\right| + 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.\end{aligned}$$

对 s 取极限得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leqslant 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

由 m 任意性及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛的 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right|=0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明. □

例题 0.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k),$$

并且

$$\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)\right|\leqslant e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\leqslant e^{n\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}.$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}<\infty$, 故由级数的控制收敛定理及(??)式可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n&=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{1,2,\cdots,n-1\}}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}\\&=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

□

定理 0.13 (级数的 Levi 定理)

若非负 $a_n(s), n=1,2,\cdots$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是 $s\to s_0^+$, 那么应该是关于 s 的递减函数) 且

$$\lim_{s} a_n(s)=b_n\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

♡

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 那么由于 $0\leqslant a_n(s)\leqslant b_n$, 取控制级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 即可使用控制收敛定理得到

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$ 也单调递增, 故 $\lim\limits_{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)$ 广义存在. 假设

$$\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=m<\infty,$$

此时对任何 $N\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{n=1}^{N} b_n=\lim_{s}\sum_{n=1}^{N} a_n(s)\leqslant\lim_{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=m<\infty,$$

矛盾! 我们完成了 Levi 定理的证明. □

引理 0.1 (级数的 Fatou 引理)

设非负数列 $a_n(s), n=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varliminf_{s} a_n(s) \leqslant \varliminf_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s).$$

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 不妨设 $s \to +\infty$, 考虑 $g_n(s) \triangleq \inf_{t\geqslant s} a_n(t)$, 则 g_n 关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varliminf_{s} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t\geqslant s} a_k(t) \leqslant \varliminf_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_k(s),$$

这就完成了证明. □

定理 0.14 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{5}$$

1. $a_{m,n} \geqslant 0, \forall m,n \in \mathbb{N}$;
2. $$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty.$$

笔记 第一个条件级数发散也能用, 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

证明

1. 由级数的 Levi 定理. 我们注意到 $\{\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\}$ 关于 N 非负递增, 于是有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \tag{6}$$

这就是 (5).

2. 注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

于是由级数的控制收敛定理知 (6) 仍然成立, 这就是 (5).

□

定理 0.15 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致.

证明

1. 设加括号后新的级数是 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$, 其中 n_k 递增趋于 $+\infty$. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}} a_j = \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_j,$$

这就完成了证明.

2. 即证明对严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}, n_1=0$, 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j$ 收敛且对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $a_{n_k+1},a_{n_k+2},\cdots,a_{n_{k+1}}$ 将符号相同, 则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ 收敛且

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{7}$$

事实上, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $n_m<n\leqslant n_{m+1}$, 此时

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j+\sum_{j=n_m+1}^{n}a_j.$$

则当 $a_j\geqslant 0, n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j,\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j-\sum_{j=n+1}^{n_{m+1}}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{8}$$

若 $a_j\leqslant 0, n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 可得 (8) 的类似式

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{9}$$

让 $n\to+\infty$, 我们由 (8),(9) 和夹逼准则得 (7). 这就完成了证明.

□

命题 0.3

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty), S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, n\in\mathbb{N}$. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不恒为 0, 不妨设 $a_1\neq 0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{和}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{同敛散}, & 0<p\leqslant 1\end{cases}.$$

笔记 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right),\sum\left(\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

证明 当 $p>1$, 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{S_1}^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,$$

可以看到无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性如何都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则有 $\frac{a_n}{S_n^p}\sim\frac{a_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)^p}=ca_n, n\to\infty$, 其中 c 是某个常数, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 我们对任何充分大的 $m,k\in\mathbb{N}$ 都有

$$1-\frac{S_k}{S_{k+m}}=\frac{S_{k+m}-S_k}{S_{k+m}}=\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_{k+m}}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n^p}.$$

让 $m \to +\infty$, 利用 $S_{k+m} \to +\infty$, 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散. 这就完成了证明. □

0.1.2 幂级数阶与系数阶的关系

定理 0.16 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

(1) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1) \tag{10}$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty, \tag{11}$$

则

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{12}$$

(2) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in (-1, 1)$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty, \tag{13}$$

则

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{14}$$

(3) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \tag{15}$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \tag{16}$$

则

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{17}$$

(4) 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, x \in \mathbb{R} \tag{18}$$

满足

$$b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{19}$$

则

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{20}$$

♡

注 一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

证明

(1) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{g(x)}=0.$$

由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (11) 即得 (12).

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$ 和 (1) 问知

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0,$$

即得 (14).

(3) 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}\leqslant\frac{b_nx^n}{b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}}=\frac{b_n}{b_n+b_{n+1}x},$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=0$. 由 Toeplitz 定理 (b) 以及 (16) 我们就得到 (17).

(4) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$ 和 (3) 问知

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0,$$

即得 (20).

□

例题 0.2 设 p 是 $\mathbb{R}$ 上实解析函数且 $0<\prod\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(0)<\infty$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}$.

证明 注意到

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{\prod\limits_{n=0}^{m+1}p^{(n)}(0)}{\prod\limits_{n=0}^{m}p^{(n)}(0)}=\lim_{m\to\infty}p^{(m)}(0),$$

所以 $\{p^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, 故

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n,x\in\mathbb{R}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上有定义且收敛. 于是

$$p'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}x^n,x\in\mathbb{R}.$$

由定理 0.16(3), 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}=1.$$

□

例题 0.3 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot x^n\sim\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x},x\to1^-.$$

解 注意到
$$\ln n\sim 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},n\to\infty.$$
由定理 0.16可知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot x^n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\xlongequal{\text{例题??}}\frac{-\ln(1-x)}{1-x}=\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x},x\to1^-.$$

□

例题 0.4 证明:
$$\lim_{y\to1^-}\frac{1}{\ln(1-y)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}}=-\frac{1}{2}.$$

证明 注意到
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^kk!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$
于是
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}}=\int_0^1\frac{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}x^{2k}y^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^1\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right]y^{2k}$$
$$\xlongequal{x=\cos\theta}\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\theta\mathrm{d}\theta\right]y^{2k}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2y^{2k}.$$
又由 Wallis 公式知
$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\sim\sqrt{\pi k},k\to\infty.$$
故由定理 0.16可得
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2x^2}}\sim\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{2k}}{\pi k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y^2)^k}{k}=-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1-y)-\frac{1}{2}\ln(1+y)\sim-\frac{1}{2}\ln(1-y),y\to1^-.$$

□

例题 0.5 证明
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}\sim\frac{1}{(1-x)\ln\frac{1}{1-x}},x\to1^-.$$

证明 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$ 在 $(-1,1)$ 上绝对收敛, 由Cauchy 积收敛定理及推论 0.1可知
$$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}\xlongequal{\text{推论 0.1}}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln k\,(n-k)}\right)x^n.$$
下证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}=1$. 一方面, 我们有
$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\geqslant\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(n-1)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}}{\ln(n-1)}\to1,n\to\infty.$$

另一方面, 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}&\leqslant\sum_{2\leqslant k\leqslant\varepsilon n}\frac{1}{(n-k)\ln k}+\sum_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\\&\leqslant\frac{1}{n(1-\varepsilon)}\sum_{2\leqslant k\leqslant\varepsilon n}\frac{1}{\ln 2}+\sum_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln\varepsilon n}\\&\leqslant\frac{\varepsilon n}{n(1-\varepsilon)\ln 2}+\frac{\sum\limits_{\varepsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}}{\ln\varepsilon+\ln n}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\leqslant\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\ln 2}+1.$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$ 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\leqslant 1.$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}=1$. 于是由定理 0.16可知

$$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln k\,(n-k)}\right)x^n\sim\sum_{n=3}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\to 1^-.$$

即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}\sim\frac{1}{(1-x)\ln\frac{1}{1-x}},x\to 1^-.$ □

例题 0.6 设

$$a_0=1,a_1=\frac{5}{4},a_n=\frac{(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}}{4n},n=2,3,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的 f 的幂级数是否收敛的问题. 因为这个方法最后往往可以算出一个具体的 f, 对这个 f 来说直接用数学归纳法计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于**先猜后证**的方法.

从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了 a_n 的通项. 此外考虑 $\frac{1}{1-x}f(x)$ 的幂级数并用 Cauchy 积可以导出 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ 的信息.

如果要严谨地证明, 就是用数学归纳法证明下述求出来的 a_n 通项表达式 (其实就是下面解出来的 f 的 Taylor 展开式中的通项) 就是满足题目条件的 a_n, 再直接计算其极限即可.

证明 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. 由条件可得

$$\begin{aligned}&4na_n=(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2},\quad n=2,3,\cdots.\\\Rightarrow\ &4\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}[(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}]x^n.\\\Rightarrow\ &4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4a_1x=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{n+2}\\\Rightarrow\ &4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-5x=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2x^3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\\Rightarrow\ &4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-5x=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2x^3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-5x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2x^3+2x^2-4x)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}+(x^2+5x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\Rightarrow (2x^3+2x^2-4x)f'(x)+(x^2+5x)f(x)=0.$$

又注意到 $f(0)=a_0=1, f'(0)=a_1=\frac{5}{4}$, 故分离变量解上述微分方程得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x+2}}{1-x}.$$

因为 $\sqrt{x+2}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 所以可记 $\sqrt{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则 $\sqrt{3}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. 由Cauchy 积收敛定理及推论 0.1知

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)x^n.$$

因此 $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n} b_k$, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. □

0.1.3 Cauchy 积

定义 0.1 (Cauchy 积)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy(乘) 积**. 我们记

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k, B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k, S_n=\sum_{k=0}^{n} c_k.$$

♣

注 我们暂时并不清楚 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

结论 延续定义 0.1, 我们有

$$\begin{cases} a_0b_0=c_0 \\ a_0b_1+a_1b_0=c_1 \\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=c_2 \\ \vdots \\ a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0=c_n \end{cases}$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则当 $a_0 \neq 0$, 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

例题 0.7 设 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n = 0, 1, \cdots$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

注 这是一组 Cauchy 积不收敛的反例.

证明 事实上, 我们有

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \to 2,$$

上式的放缩实际上利用了二次函数 $(n-k+1)(k+1) = -k^2 + nk + n + 1$ 的最值大值点 $k = \dfrac{n}{2}$. 这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散. □

命题 0.4

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n} S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{21}$$

证明 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i,$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^{n} S_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i} B_i$$

由命题**??**可得(21). □

推论 0.1

设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则它们的 Cauchy 积 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

证明 延续定义 0.1, 充分性显然成立, 下证必要性. 由命题 0.4及 Stolz 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} S_j}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

□

定理 0.17 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义 0.1, 我们有

1. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 有一个绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.
2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

♡

证明 1. 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i,$$

因此我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设 (否则, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, 则用 $B_n - B$ 代替 B_n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

于是运用命题??就有

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot |B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot 0 = 0$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.

2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} |a_i b_{k-i}| = \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| \sum_{k=i}^{n} |b_{k-i}|\right)$$

于是由命题??就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| \sum_{k=i}^{n} |b_{k-i}|\right) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛. □

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

命题 0.5

延续定义 0.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-j} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{收敛}. \tag{22}$$

♠

证明 注意到

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{n}a_iB_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}B_i,$$

即 $\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}c_k$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}&=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}-\sum_{j=k}^{n}b_{n-j}\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\left(\sum_{k=0}^{n}a_k-a_0\right)-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{n-k}b_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}a_kb_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}c_k\end{aligned}$$

由于 Cauchy 积收敛, 则由推论 0.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}=0\iff\sum_{n=0}^{\infty}c_n\text{收敛}$$

□

例题 0.8 设递减数列 $a_n,b_n>0,n=0,1,2,\cdots$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n,\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nb_n$ 收敛, 记 $c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nc_n\text{收敛}\iff\lim_{n\to\infty}c_n=0\tag{23}$$

证明 左推右显然, 现在假设 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$, 由命题 0.5, 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}=0$$

现在

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\leqslant\sum_{k=0}^{n+1}a_kb_{n-k+1}=c_{n+1}\end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于交错级数不等式. 于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{n-j}b_{n-j}\right|=0$$

我们证明了(23). □

命题 0.6

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in(-1,1).$$

记 $S_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$, 则

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, x \in (-1, 1).$$

证明 由 Taylor 级数可知

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1).$$

显然 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上绝对收敛, 故由Cauchy 积收敛定理可知 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的 Cauchy 积也收敛, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right) x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n < +\infty.$$

故由推论 0.1可知

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

□