0.1 留数定理 (残数定理)

定义 0.1

设 a 是 f 的一个孤立奇点,f 在 a 点的邻域 $B(a,r)$ 中的 Laurent 展开为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, 称 c_{-1} 为 f 在 a 点的**留数 (残数)**, 记为

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}$$

或

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f=c_{-1}.$$

若 $z=\infty$ 是 f 的孤立奇点, 即 f 在 $R<|z|<\infty$ 中全纯, 我们定义 f 在 $z=\infty$ 处的**留数 (残数)** 为

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z, \tag{1}$$

这里,$\gamma=\{z:|z|=\rho\},R<\rho<\infty$.

命题 0.1

设 a 是 f 的一个孤立奇点, 对于 a 点邻域中的任意可求长闭曲线 γ, 都有

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f,a).$$

注 如果 f 在 a 点全纯, 那么对于 a 点邻域中的任意可求长闭曲线 γ, 都有 $\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=0$. 如果 a 是 f 的孤立奇点, 那么上述积分不一定总等于零, 且积分值只与 f 和 a 有关, 而与 γ 无关.

证明 设 f 在 a 点邻域中的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,\pm1,\cdots.$$

特别地, 当 $n=-1$ 时, 我们有

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

原来所讨论的积分值就是 c_{-1} 的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍 (因此 c_{-1} 这个系数有它特殊的含义), 根据 (2) 式, 我们有

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f,a). \tag{3}$$

这里,$\gamma=\{z:|z-a|=\rho\},0<\rho<r$. □

命题 0.2

若 a 是 f 的 m 阶极点, 则

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\}.$$

证明 因为 a 是 f 的 m 阶极点, 故由定理**??**可知, 在 a 点的邻域中有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z), \tag{4}$$

这里,g 在 a 点全纯, 且 $g(a) \neq 0$. 于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}.$$

这是一个 Laurent 展开式,$(z-a)^{-1}$ 的系数为 $\dfrac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. 由(4)式知 $g(z)=(z-a)^m f(z)$, 因而得

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\}.$$

□

命题 0.3

若 a 是 f 的 1 阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

证明 这就是命题 0.2中 $n=1$ 的情形. □

例题 0.1 若 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$,$z=\pm\mathrm{i}$ 都是 f 的 1 阶极点, 求这个两个极点的留数.

解 由命题 0.3即得

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}},$$

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=\lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{1}{1+z^2}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

□

命题 0.4

设 $f=\dfrac{g}{h}$,g 和 h 都在 a 处全纯, 且 $g(a)\neq 0$,$h(a)=0$,$h'(a)\neq 0$, 那么

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

证明 在所设的条件下,a 是 f 的 1 阶极点, 故由命题 0.3即得

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

□

例题 0.2 计算 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sin z}$ 在 $z=0$ 处的残数.

解 这时 $g(z)=\mathrm{e}^z$,$h(z)=\sin z$. 于是 $g(0)=1$,$h(0)=0$,$h'(0)=1$, 因而由命题 0.4得

$$\operatorname{Res}(f,0)=1.$$

□

例题 0.3 计算函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}$ 在 $z=-\mathrm{i}$ 处的残数.

解 显然,$z=-\mathrm{i}$ 是 f 的一个 2 阶极点, 利用命题 0.2, 得

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z-\mathrm{i})^2}\right)=\frac{\mathrm{e}}{4}.$$

□

例题 0.4 计算 $f(z)=\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的残数.

注 如果 a 是 f 的本性奇点, 就没有像上面那种简单的计算残数的公式了, 这时只能通过 f 的 Laurent 展开来得到 f 在 a 点的残数.

解 因为

$$f(z)=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right),$$

在这个乘积中,$\frac{1}{z}$ 的系数为

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots,$$

这就是要找的残数, 即

$$\operatorname{Res}(f,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

□

定理 0.1 (留数定理 (残数定理))

设 D 是复平面上的一个有界区域, 它的边界 γ 由一条或若干条简单闭曲线组成. 如果 f 在 D 中除去孤立奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 外是全纯的, 在闭域 $\overline{D}$ 上除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外是连续的, 那么

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k). \tag{5}$$

♡

注 这个定理称为**留数定理 (残数定理)**, 它的主要贡献是把积分计算归结为残数的计算. 而从命题 0.2知道, 计算残数是一个微分运算. 因此, 从实质上来说, 残数定理把积分运算变成了微分运算, 从而带来了方便.

证明 在 D 内以 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为中心作一小圆周 γ_k, 使得所有 γ_k 都在 D 的内部, 且每一个 γ_k 都在其余小圆周的外部. 于是由多连通域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}f(z)\mathrm{d}z.$$

再由命题 0.1, 即得所要证的公式 (5). □

例题 0.5 计算积分

$$\int_{\gamma}\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z,$$

这里,$\gamma=\{z:|z-1|=\sqrt{3}\}$.

解 被积函数

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$$

有两个 1 阶极点 $z_1=\mathrm{i},z_2=-\mathrm{i}$, 以及两个 2 阶极点 $z_3=1,z_4=-1$. 容易看出,z_1,z_2,z_3 都在 γ 的内部,z_4 在 γ 的外部. 由留数定理得

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Res}(f,z_k).$$

由命题 0.3和命题 0.2, 得

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z)=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{z}{(z^2-1)^2(z+\mathrm{i})}=\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=\lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z)=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{z}{(z^2-1)^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{(z-1)^2f(z)\right\}=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right\}=\lim_{z\to1}\frac{-3z^3-z^2-z+1}{(z+1)^3(z^2+1)^2}=-\frac{1}{8}.$$

因而有

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi\mathrm{i}}{4}.$$

□

例题 0.6 计算积分

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}\mathrm{d}z.$$

解 容易看出，被积函数

$$f(z)=\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}$$

在 $|z|=1$ 内只有一个极点 $z=0$. 对于这种类型的函数, 直接从 Laurent 展开来求残数更方便些:

$$\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}=\frac{z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2}{\left(-z-\frac{z^2}{2!}-\cdots\right)^5}=-\frac{z^4\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2}{z^5\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^5}.$$

因为 $\dfrac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2}{\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^5}$ 在 $z=0$ 处全纯, 且在 $z=0$ 处等于 1, 故其 Taylor 展开可写为 $1+c_1z+\cdots$, 于是得

$$\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}=-\frac{1}{z}(1+c_1z+\cdots),$$

因而 $\mathrm{Res}(f,0)=-1$. 由留数定理即得

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-\mathrm{e}^z)^5}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}.$$

□

定理 0.2

若 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外是全纯的, 则 f 在 $z_1,\cdots,z_n$ 及 $z=\infty$ 处的残数之和为零.

注 这个定理是留数定理的另一种形式.

证明 取 R 充分大, 使得 $z_1,\cdots,z_n$ 都在 $B(0,R)$ 中. 于是, 由留数定理得

$$\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k). \tag{6}$$

但由 (1) 式得

$$-\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f,\infty). \tag{7}$$

由 (6) 式和 (7) 式即得所要证之结论. □