

0.1 映射与基数

定义 0.1 (集合之间的对等关系)

设有集合 A 与 B . 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射, 则称集合 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$.

命题 0.1 (对等关系的基本性质)

设有集合 A 与 B , 则

- (i) $A \sim A$;
- (ii) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (iii) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

引理 0.1 (映射分解定理)

若有 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, 则存在分解

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim},$$

其中 $f(A) = B, g(B^{\sim}) = A^{\sim}, A \cap A^{\sim} = \emptyset$ 以及 $B \cap B^{\sim} = \emptyset$.

证明 对于 X 中的子集 E (不妨假定 $Y \setminus f(E) \neq \emptyset$), 若满足

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \emptyset,$$

则称 E 为 X 中的分离集. 现将 X 中的分离集的全体记为 Γ , 且作其并集

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E.$$

我们有 $A \in \Gamma$. 事实上, 对于任意的 $E \in \Gamma$, 由于 $A \supset E$, 故从

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \emptyset$$

可知 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$, 从而有 $A \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$. 这说明 A 是 X 中的分离集且是 Γ 中最大元.

现在令 $f(A) = B, Y \setminus B = B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim}) = A^{\sim}$. 首先知道

$$Y = B \cup B^{\sim}.$$

其次, 由于 $A \cap A^{\sim} = \emptyset$, 故又易得 $A \cup A^{\sim} = X$. 事实上, 若不然, 那么存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \notin A \cup A^{\sim}$. 现在作 $A_0 = A \cup \{x_0\}$, 我们有

$$B = f(A) \subset f(A_0), \quad B^{\sim} \supset Y \setminus f(A_0),$$

从而知 $A^{\sim} \supset g(Y \setminus f(A_0))$. 这就是说, A 与 $g(Y \setminus f(A_0))$ 不相交. 由此可得

$$A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \emptyset.$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾.

□

定理 0.1 (Cantor - Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等, Y 与 X 的某个真子集对等, 则 $X \sim Y$.

 **笔记** 特例: 设集合 A, B, C 满足下述关系:

$$C \subset A \subset B.$$

若 $B \sim C$, 则 $B \sim A$.

证明 由题设知存在单射 $f: X \rightarrow Y$ 与单射 $g: Y \rightarrow X$, 根据**映射分解定理**知

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim}, \quad f(A) = B, \quad g(B^{\sim}) = A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f: A \rightarrow B$ 以及 $g^{-1}: A^{\sim} \rightarrow B^{\sim}$ 是一一映射, 因而可作 X 到 Y 上的一一映射 F :

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in A^{\sim}. \end{cases}$$

这说明 $X \sim Y$.

□

定义 0.2 (集合的基数 (或势))

设 A, B 是两个集合, 如果 $A \sim B$, 那么我们就说 A 与 B 的**基数** (cardinal number) 或**势**是相同的, 记为 $\overline{A} = \overline{B}$. 可见, 凡是互相对等的集合均具有相同的基数.

如果用 α 表示这一相同的基数, 那么 $\overline{A} = \alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B , 记 $\overline{A} = \alpha, \overline{B} = \beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等, 则称 α 不大于 β , 记为

$$\alpha \leqslant \beta.$$

若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则称 α 小于 β (或 β 大于 α), 记为

$$\alpha < \beta \quad (\text{或 } \beta > \alpha).$$

显然, 若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$, 则由**Cantor - Bernstein 定理**可知 $\alpha = \beta$.

♣

定义 0.3 (有限集与无限集)

设 A 是一个集合. 如果存在自然数 n , 使得 $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 A 为**有限集**, 且用同一符号 n 记 A 的基数. 由此可见, 对于有限集来说, 其基数可以看作集合中元素的数目. 若一个集合不是有限集, 则称为**无限集**. 下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数.

♣