0.1 伴随

定义 0.1 (伴随)

设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在 V 上的线性算子 φ^*, 使等式

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^*(\beta))$$

对一切 $\alpha,\beta\in V$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随算子, 简称为 φ 的**伴随**.

定理 0.1

设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性变换, 则存在 V 上唯一的线性变换 φ^*, 使对一切 $\alpha,\beta\in V$, 成立

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^*(\beta)).$$

笔记 这个定理表明: 对有限维内积空间 V 上的任一线性算子, 它的伴随必存在且唯一.

证明 只需证明唯一性. 若 $\varphi^\sharp$ 是 V 上的线性变换且

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^\sharp(\beta))$$

对一切 $\alpha,\beta\in V$ 成立, 则 $(\alpha,\varphi^\sharp(\beta))=(\alpha,\varphi^*(\beta))$ 对一切 $\alpha\in V$ 成立, 即 $(\alpha,\varphi^\sharp(\beta)-\varphi^*(\beta))=0$ 对一切 $\alpha\in V$ 成立, 特别, 对 $\alpha=\varphi^\sharp(\beta)-\varphi^*(\beta)$ 也成立. 由内积定义即知 $\varphi^\sharp(\beta)-\varphi^*(\beta)=0$, 即 $\varphi^\sharp(\beta)=\varphi^*(\beta)$. 而 β 是任意的, 故有 $\varphi^\sharp=\varphi^*$. □

定理 0.2

设 V 是 n 维内积空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 V 上的线性算子 φ 在这组基下的表示矩阵为 A, 则

(1) 当 V 是酉空间时,φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{A}'$, 即 A 的共轭转置;

(2) 当 V 是欧氏空间时,φ^* 的表示矩阵为 A', 即 A 的转置.

证明 由伴随的唯一性知道本节一开始由 $\overline{A}'$ 定义的线性变换 ψ 就是 φ 的伴随, 而 ψ 的表示矩阵就是 $\overline{A}'$. □

定理 0.3 (伴随算子的性质)

设 V 是有限维内积空间, 若 φ 及 ψ 是 V 上的线性变换,c 为常数, 则

(1) $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$;

(2) $(c\varphi)^*=\overline{c}\varphi^*$;

(3) $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$;

(4) $(\varphi^*)^*=\varphi$.

证明 由矩阵和线性变换的一一对应关系及矩阵共轭转置的性质即得. □

命题 0.1

设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性算子.

(1) 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^\perp$ 是 φ^* 的不变子空间;

(2) 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\cdots,\overline{\lambda}_n$.

证明

(1) 任取 $\alpha\in U,\beta\in U^\perp$, 因为

$$(\alpha,\varphi^*(\beta))=(\varphi(\alpha),\beta)=0,$$

所以 $U^\perp$ 是 φ^* 的不变子空间.

(2) 取 V 的一组标准正交基, 设 φ 在这组基下的表示矩阵为 A, 则无论 V 是酉空间还是欧氏空间,φ^* 的表示矩阵总可写为 $\overline{A}'$. 由假设

$$|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

则容易验证

$$|\lambda I_n - \overline{A}'| = (\lambda - \overline{\lambda}_1)(\lambda - \overline{\lambda}_2)\cdots(\lambda - \overline{\lambda}_n),$$

故结论成立.

□