

0.1 \mathbb{R}^n 中开集、闭集及其性质

0.1.1 n 维欧氏空间

我们用 \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间, 即

$$\mathbb{R}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

其中, ξ_i 称为 x 的第 i 个坐标.

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, 按如下的加法、数乘

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$kx = (k\xi_1, k\xi_2, \dots, k\xi_n)$$

构成线性空间.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

表示点 x 到 y 的距离. 容易验证, 距离满足下列性质:

- (i) (非负性) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (ii) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) (三角不等式) 对任意的 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

通常记 $d(x, 0) = \|x\|$, 表示 x 的范数, 若 $x \in \mathbb{R}^1$, 则 $\|x\|$ 即为 x 的绝对值.

定义 0.1

设 $\{x_k\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的点列, 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$$

则称 $\{x_k\}$ 收敛于 x , 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ 或 $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$.

命题 0.1

设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\{x_k\}$ 是收敛数列, 当且仅当

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} d(x_i, x_j) = 0$$

证明 设 $x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}), x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. 注意到

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i| \leq d(x_k, x) \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i^{(k)} - \xi_i|$$

易证 $x_k \rightarrow x$, 当且仅当对每个坐标位置 i , 都有 $\xi_i^{(k)} \rightarrow \xi_i (k \rightarrow \infty)$. 再由柯西收敛准则即可得到证明. \square

0.1.2 \mathbb{R}^n 中的开集及其性质

定义 0.2 (邻域、内点、内部和开集)


设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, 定义

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

为 x_0 的 ε -邻域.

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x, \varepsilon_0) \subset A$, 则称 x 为 A 的内点. A 的全体内点, 记为 A° , 也称为 A 的内部.

若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 为开集.

 **笔记** (a, b) , $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ 都是 \mathbb{R} 中的开集; 邻域 $U(x_0, r)$, 又称以 x_0 为心、以 r 为半径的开球, 是 \mathbb{R}^n 中的开集; A° 也是开集.

命题 0.2 (开集的性质)

- (1) \emptyset 和 \mathbb{R}^n 是开集;
- (2) 任意个开集的并集是开集;
- (3) 有限个开集的交集是开集.

注 无限个开集的交集不一定是开集. 例如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

证明

(1) 显然.

(2) 设 $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 为一族开集. 任取 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$, 则存在 $\alpha_0 \in \Gamma$ 使得 $x \in G_{\alpha_0}$. 由于 G_{α_0} 是开集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$U(x, \varepsilon_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$$

故 x 是 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ 的内点. 再由 x 的任意性知 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ 是开集.

(3) 设 G_1, G_2, \dots, G_n 为开集, 任取 $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$, 则 $x \in G_i, i = 1, 2, \dots, n$. 由于 G_i 是开集, 故存在 $\varepsilon_i > 0$ 使得

$$U(x, \varepsilon_i) \subset G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, 则 $\varepsilon > 0$ 且 $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$, 故 x 是 $\bigcap_{i=1}^n G_i$ 的内点. 再由 x 的任意性知 $\bigcap_{i=1}^n G_i$ 是开集.

□

定理 0.1

设 A 为非空集合, 则 A° 为开集.

♥

证明 任取 $x \in A^\circ$, 则存在 $r > 0$ 使得 $U(x, r) \subset A$. 对 $\forall y \in U(x, r)$, 令 $\delta = r - d(x, y)$, 则易知 $U(y, \delta) \subset A$, 故 $y \in A^\circ$. 从而 $U(x, r) \subset A^\circ$, 因此, A° 是开集.

□

0.1.3 \mathbb{R}^n 中的闭集及其性质

定义 0.3 (聚点、极限点和孤立点)

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有

$$U(x_0, \varepsilon) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$$

则称 x_0 为 A 的聚点或极限点.

不是聚点, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \emptyset$$

则称 x_0 为 A 的孤立点.



注 (i) \mathbb{R}^n 空间, 聚点 = 内点 + 边界点, 故聚点不一定属于 A , 比如边界点. 例如, $A = (0, 1)$, 则 $[0, 1]$ 都是 A 的聚点.
(ii) 若 x_0 是 A 的聚点, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $U(x, \varepsilon)$ 中含有无穷多 A 中的点.

证明 假设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$U(x_0, \varepsilon_0) \cap (A - \{x_0\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

令

$$\delta = \min\{|x_0 - x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

则 $U(x_0, \delta)$ 中不含 A 中异于 x_0 的点, 这与 x_0 是 A 的聚点矛盾. □

定义 0.4 (导集、完全集、闭包和闭集)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则 A 的聚点的全体, 称为 A 的导集, 记为 A' . 若 $A' = A$, 则称 A 为完全集 (无孤立点). $A - A'$ 中的点, 即为所有孤立点.

$A \cup A'$ 称为 A 的闭包, 记为 \bar{A} . 开集的余集, 称为闭集.



笔记 例如, $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ 都是 \mathbb{R} 中的闭集; 以 x_0 为心, 以 r 为半径的闭球 $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭集; A' , \bar{A} 也是闭集.

命题 0.3

- (1) 若 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$;
- (2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.



证明 利用导集的定义容易验证. □

命题 0.4 (闭集的性质)

- (1) \emptyset 和 \mathbb{R}^n 是闭集;
- (2) 任意个闭集的交集是闭集;
- (3) 有限个闭集的并集是闭集.



注 无限个闭集的并集不一定是闭集. 例如, $\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1] = (0, 1]$.

证明 由命题 0.2, 闭集的定义以及定理 ??, 容易验证. □

命题 0.5

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则

- (1) $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset (A - \{x\})$ 使得 $x_n \rightarrow x$;
- (2) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A$ 使得 $x_n \rightarrow x$.



证明 (1) “ \Rightarrow ”. 若 $x \in A'$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 $U(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. 特别地, 依次令 $\varepsilon_n = 1/n, n = 1, 2, \dots$, 取 $x_n \in U(x, 1/n) \cap (A - \{x_0\})$, 则 $x_n \rightarrow x$.

“ \Leftarrow ”. 设 $\{x_n\} \subset (A - \{x\})$ 满足 $x_n \rightarrow x$. 由于 $x_n \rightarrow x$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N$ 时有 $d(x_n, x) < \varepsilon$, 即 $x_n \in U(x, \varepsilon)$. $\forall n \geq N$. 又 $x_n \neq x$, 故 $U(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. 因此, $x \in A'$.

(2) “ \Rightarrow ”. $\bar{A} = A \cup A'$. 若 $x \in A$, 令 $x_n = x, n \in \mathbb{N}$, 则 $x_n \rightarrow x$. 若 $x \in A'$, 由 (i) 知, 结论仍然成立.

“ \Leftarrow ”. 设 $\{x_n\} \subset A$ 满足 $x_n \rightarrow x$. 若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x_{n_0} = x$, 则 $x \in A \subset \bar{A}$. 否则 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $x_n \neq x$, 则由 (i) 知, $x \in A' \subset \bar{A}$. \square

定理 0.2

A 为闭集 $\Leftrightarrow A' \subset A$.



证明 “ \Rightarrow ”. 设 A 为闭集, 则 A^c 为开集. 任取 $x \in A'$, 往证 $x \in A$, 即 $x \notin A^c$. 若 $x \in A^c$, 由于 A^c 是开集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 故 $U(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, 从而 $U(x, \varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$. 这与 $x \in A'$ 矛盾.

“ \Leftarrow ”. 设 $A' \subset A$, 往证 A 是闭集, 即 A^c 是开集. 任取 $x \in A^c$, 由于 $A' \subset A$, 则 $x \notin A'$. 故 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $U(x, \varepsilon_0) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$, 从而

$$U(x, \varepsilon_0) \subset (A - \{x\})^c = (A \cap \{x\})^c = A^c \cup \{x\} = A^c$$

因此, A^c 是开集. \square

定理 0.3

A 为闭集 $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.



注 闭集 $A = \bar{A}$, 再由命题 0.5(2) 知, 闭集中任一点都能找到闭集中的一个点列收敛到该点. 这也是闭集才具有的好的性质.

证明 “ \Rightarrow ”. A 为闭集, 则 $A' \subset A$. 故 $\bar{A} = A \cup A' \subset A \subset \bar{A}$. 因此, $A = \bar{A}$.

“ \Leftarrow ”. 若 $A = \bar{A}$, 则 $A' \subset \bar{A} = A$, 故 A 是闭集. \square

定理 0.4

设 A 为一个非空集合, 则 A' 为闭集.



证明 只需证明 $(A')' \subset A'$. 设 $x \in (A')'$, 由命题 0.5(1), 存在 $\{x_n\} \subset A' - \{x\}$ 使得 $x_n \rightarrow x$. 往证 $x \in A'$, 即存在 $\{y_n\} \subset A - \{x\}$ 使得 $y_n \rightarrow x$.

对于固定的 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $x_n \in A'$, 则存在 $y_n \in A - \{x, x_n\}$ 使得 $d(y_n, x_n) < 1/n$. 于是

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

故 $y_n \rightarrow x$. \square

定义 0.5 (连续映射)

设 X, Y 为距离空间, 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x_0 \in X$ 处连续, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

若 f 在任意点 $x \in X$ 都连续, 则称 f 为 X 上的连续映射. \clubsuit

注 f 在 x_0 点连续可等价地用集合语言描述如下:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得 } f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$$

定理 0.5 (连续映射的充要条件)

设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 则下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) Y 的任一开集在 f 下的原象是 X 中的开集;

(3) Y 的任一闭集在 f 下的原象是 X 中的闭集.



注 若上述定理的 (2) 换成 “ X 的任一开集在 f 下的象是 Y 中的开集”, 结论不一定成立. 因为连续映射在开集上的象未必是开集. 例如, $f(x) = |x|$, 则 f 在开区间 $(-1, 1/2)$ 上连续, 但 f 的象是 $[0, 1)$, 不是开集.

证明 (1) \Rightarrow (2). 设 f 连续, $G \subset Y$ 为开集. 不妨设 $f^{-1}(G) \neq \emptyset$, 任取 $x_0 \in f^{-1}(G)$, 则 $f(x_0) \in G$. 由于 G 是开集, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $U(f(x_0), \varepsilon) \subset G$. 又 f 连续, 则对上述 ε , $\exists \delta > 0$ 使得

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon) \subset G$$

从而 $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$. 这就证明了 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点. 因此, $f^{-1}(G)$ 是开集.

(2) \Rightarrow (1). 设 $x_0 \in X$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 $U(f(x_0), \varepsilon)$ 是 Y 中的开集, 从而由 (2) 知 $f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ 是 X 中的开集. 又 $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$, 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$

故 $f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$, 从而 f 在点 x_0 连续, 再由 x_0 的任意性知 f 连续.

(2) \Rightarrow (3). 设 $F \subset Y$ 为闭集, 则 F^c 是开集, 故由 (2) 知 $f^{-1}(F^c)$ 是 X 中的开集. 于是, $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F^c))^c$ 是 X 中的闭集.

(3) \Rightarrow (2) 类似.

□