0.1 级数常用结论

定理 0.1 (交错级数不等式)

设 $\{a_n\}$ 递减非负数列, 则对 $m, p \in \mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}(-1)^n a_n\right| \leqslant a_m. \tag{1}$$

♡

笔记 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m=0$, 则

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases} a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为偶数} \\ a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p & ,p\text{为奇数} \end{cases} \leqslant a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases} (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-2}-a_{p-1})+a_p & ,p\text{为偶数} \\ (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p) & ,p\text{为奇数} \end{cases} \geqslant 0,$$

这就证明了不等式(1). □