0.1 函数性态分析综合

例题 0.1 设 $f:(a,b)\to(a,b)$ 满足对任意的 $x,y\in(a,b)$, 当 $x\neq y$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 任取 $x_1\in(a,b)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$, 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

注

(1) 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A,\ \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\xi+A$ 的原因: 记 $X=\xi-A,Y=\xi+A$, 假设存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 对 $\forall n>k_0$, 有

$$x_n\notin(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\text{或}x_{n+1}\notin(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0}).\tag{1}$$

因为 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 X 和 Y, 所以对上述 ε,$\{x_n\}$ 中都有无穷多项落在 $(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\cup(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0})$ 内. 从而存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n>N$, 有

$$x_n\in(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\cup(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0}).\tag{2}$$

于是由(1)(2)式可得, 当 $n>\max\{N,k_0\}$ 时, 我们有

$$x_n\in(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})\text{或}x_{n+1}\in(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0}).$$

因此若 $x_n\in(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0}),\forall n>\max\{N,k_0\}$, 则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0})$ 内, 这与 X 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾. 若 $x_{n+1}\in(X-\frac{1}{k_0},X+\frac{1}{k_0}),\forall n>\max\{N,k_0\}$, 则 $\{x_n\}$ 最多只有有限项落在 $(Y-\frac{1}{k_0},Y+\frac{1}{k_0})$ 内, 这与 Y 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点矛盾. 故假设不成立, 从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都存在 $n_k>k$, 使得

$$x_{n_k}\in(X-\frac{1}{k},X+\frac{1}{k})\text{且}x_{n_k+1}\in(Y-\frac{1}{k},Y+\frac{1}{k}).$$

于是根据 k 的任意性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=X=\xi-A,\ \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k+1}=Y=\xi+A$.

(2) $\xi-A,\xi+A\in(a,b)$ 的原因: 一定存在 $k_1,k_2\in\mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_{k_1}}<\xi,x_{n_{k_2}}>\xi.\tag{3}$$

否则, 对 $\forall k_1,k_2\in\mathbb{N}$, 都有

$$x_{n_{k_1}}\geqslant\xi,\quad x_{n_{k_2}}\leqslant\xi.$$

令 $k_1,k_2\to\infty$, 再结合 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A,\ \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\xi+A$ 得到

$$\xi-A=\lim_{k_1\to\infty}x_{n_{k_1}}\geqslant\xi>\xi-A,\quad \xi+A=\lim_{k_2\to\infty}x_{n_{k_2}}\leqslant\xi<\xi+A.$$

显然矛盾! 又因为 $\{|x_n-\xi|\}$ 单调递减趋于 A, 所以

$$|x_n-A|\geqslant A,\forall n\in\mathbb{N}.$$

从而由 $x_n\in(a,b)$ 及(3)式可得

$$A\leqslant|x_{n_{k_1}}-\xi|=\xi-x_{n_{k_1}}<\xi-a\Rightarrow\xi-A>a,$$
$$A\leqslant|x_{n_{k_2}}-\xi|=x_{n_{k_2}}-\xi<b-\xi\Rightarrow\xi+A<b.$$

因此 $\xi-A,\xi+A\in(a,b)$.

证明 注意到 $x_1\in(a,b)$, 假设 $x_k\in(a,b)$, 则 $x_{k+1}=f(x_k)\in(a,b)$, 故由数学归纳法可知 $x_n\in(a,b),\forall n\in\mathbb{N}$. 又由条件可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon>0$, 当 $x,y\in(a,b)$ 且 $0<|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|<\delta=\varepsilon.$$

故 f 在 (a,b) 上一致连续. 从而 $f\in C(a,b)$, 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F\in C(a,b)$. 下面我们对 F 进行分类讨论.

(1) 若 F 在 (a,b) 上不变号, 则由 $F\in C(a,b)$ 可知,F 要么恒大于零, 要么恒小于零. 不妨设 F 在 (a,b) 上恒大于零, 即 $f(x)>x,\forall x\in(a,b)$. 从而

$$x_{n+1}=f(x_n)>x_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增. 又因为 $x_n \in (a,b), \forall n \in \mathbb{N}$, 所以由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 若 F 在 (a,b) 上变号, 则由 $F \in C(a,b)$ 及介值定理可得, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$. 若存在 $\xi' \in (a,b)$ 且 $\xi' \neq \xi$, 使得 $f(\xi')=\xi'$, 则由条件可得到

$$|\xi-\xi'|=|f(\xi)-f(\xi')|<|\xi-\xi'|.$$

显然矛盾! 因此存在唯一的 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$. 从而

$$|x_{n+1}-\xi|=|f(x_n)-f(\xi)|<|x_n-\xi|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是 $\{|x_n-\xi|\}$ 单调递减且有下界 0, 故由单调有界定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi|=A\geqslant 0$ 存在.

(i) 当 $A=0$ 时, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi|=A=0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(ii) 当 $A>0$ 时, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则结论已经成立. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则由 $x_n \in (a,b), \forall n \in \mathbb{N}$ 及聚点定理可知,$\{x_n\}$ 至少有一个聚点. 若 $\{x_n\}$ 只有一个聚点, 则 $\{x_n\}$ 收敛与假设矛盾! 因此 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点. 任取收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=B$, 则

$$A=\lim_{n\to\infty}|x_n-\xi|=|B-\xi|.$$

从而 $B=\xi-A$ 或 $\xi+A$. 因此 $\{x_n\}$ 最多有两个聚点 $\xi-A$ 和 $\xi+A$. 又因为 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点, 所以 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 $\xi-A$ 和 $\xi+A$. 进而一定存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi-A,\ \lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\xi+A\text{并且}\xi-A,\xi+A\in(a,b).$$

从而由条件可知

$$x_{n_k+1}=f(x_{n_k}).$$

令 $k\to\infty$, 由 $f\in C(a,b)$ 及归结原则可得

$$\xi+A=f(\xi-A).$$

再结合 $\xi=f(\xi),\xi-A,\xi+A\in(a,b)$ 及条件可得

$$A=|\xi-(\xi+A)|=|f(\xi)-f(\xi-A)|<|\xi-(\xi-A)|=A.$$

显然矛盾! 故 $A>0$ 不成立, 于是 $A=0$. 再由 (1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 即 $\{x_n\}$ 收敛, 与假设 $\{x_n\}$ 发散矛盾! □

命题 0.1

设 f' 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

笔记 本题也有积分版本: 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.(令 $F=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 就可以将这个积分版本转化为上述命题)

证明 反证, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$, 则可以不妨设存在 $\delta>0,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$x_n\longrightarrow+\infty\text{且}f'(x_n)\geqslant\delta,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由 f' 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\eta>0$, 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f'(x)\geqslant f'(x_n)-\frac{\delta}{2}\geqslant\frac{\delta}{2},\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f(x_n+\eta)-f(x_n)=\int_{x_n}^{x_n+\eta}f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_n+\eta}\frac{\delta}{2}\mathrm{d}x=\frac{\delta\eta}{2}>0,\forall x\in[x_n-\eta,x_n+\eta].$$

令 $n\to\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在可得 $0\geqslant\frac{\delta\eta}{2}>0$, 矛盾! 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. □

例题 0.2 时滞方程 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=1,\quad f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

证明 由 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 及 $f\in D(\mathbb{R})$ 可知 $f'\in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_1\in\mathbb{R}$, 固定 x_1, 记

$$A=\{z>x_1\mid f'(z)=f'(x_1)\}.$$

由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可知

$$\exists x_2\in(x_1,x_1+1)\text{ s.t. }f'(x_1)=f(x_1+1)-f(x_1)=f'(x_2).$$

故 $x_2\in A$, 从而 A 非空. 现在考虑 $y\triangleq\sup A\in(x_1,+\infty)$, 下证 $y=+\infty$. 若 $y<+\infty$, 则存在 $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n'\to y\text{且}f'(z_n')=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty}f'(z_n')=f'(y).$$

又由 Lagrange 中值定理及 $f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 可得

$$\exists y'\in(y,y+1)\text{ s.t. }f'(y)=f(y+1)-f(y)=f'(y').$$

从而 $y'\in A$ 且 $y'>y$, 这与 $y=\sup A$ 矛盾! 故 $y=+\infty$. 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$z_n\to+\infty\text{且}f'(z_n)=f'(x_1).$$

两边同时令 $n\to\infty$, 由 $f'\in C(\mathbb{R})$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$ 可得

$$f'(x_1)=\lim_{n\to\infty}f'(z_n)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=1.$$

因此由 x_1 的任意性得, 存在 C 为常数, 使得 $f(x)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$. □

例题 0.3 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)\leqslant 0$ 以及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0. \tag{12.27}$$

证明: (1): 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

(2): 存在 $\eta\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta)=0$.

证明 (1) 如果对任何 $x\in(1,+\infty)$, 都有 $f'(x)\leqslant 1$, 那么 $[f(x)-x]'\leqslant 0$ 知 $f(x)-x$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1\geqslant f(1)-1\geqslant\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

(2) 若对任何 $x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f''(x)\neq 0$. 从而 $f''(x)$ 要么恒大于零, 要么恒小于零, 否则由零点存在定理可得矛盾! 任取 $\xi\in\mathbb{R}$.

当 $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x)\geqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x>\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]\geqslant\lim_{x\to+\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)-1)x]=+\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x)\leqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x<\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]\leqslant\lim_{x\to-\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)+1)x]=-\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). □

例题 0.4 设 f 在 $[a,b]$ 上每一个点极限都存在, 证明:f 在 $[a,b]$ 有界.

笔记 极限存在必然局部有界, 本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象: 即**局部的性质等价于在所有紧集上的性质**. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对 $\forall c \in [a,b]$, 由 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在可知, 存在 c 的邻域 U_c 和 $M>0$, 使得

$$\sup_{x\in U_c\cap[a,b]} |f(x)| \leqslant M_c.$$

注意 $[a,b]\subset \bigcup\limits_{c\in[a,b]} U_c$, 由有限覆盖定理得, 存在 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in[a,b]$, 使得

$$[a,b]\subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{c_k}.$$

故 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} M_k.$ □

例题 0.5 设 f 是 $(a,+\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T, 存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

注 因为 $|f(x+T)-f(x)|\geqslant 0$, 所以

$$0\leqslant \varliminf_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|\leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|.$$

原结论的反面只用考虑 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|$ 即可. 若 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|=0$, 则一定存在子列 $x_n\to+\infty$, 使得结论成立. 因此原结论等价于 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|=0$. 故原结论的反面就是 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|>0$.

笔记 考虑反证法之后, 再进行定性分析 (画 $f(x)$ 的大致走势图), 就容易找到矛盾.

证明 当 $T=0$ 时, 显然存在这样的数列. 不妨设 $T>0$, 假设 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x+T)-f(x)|>0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, $X>0$, 使得

$$|f(x+T)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0>0,\quad \forall x\geqslant X \tag{4}$$

令 $g(x)\triangleq f(x+T)-f(x)$, 则若存在 $x_1,x_2\geqslant X$, 使得

$$g(x_1)=f(x_1+T)-f(x_1)\geqslant\varepsilon_0>0,\quad g(x_2)=f(x_2+T)-f(x_2)\leqslant-\varepsilon_0<0.$$

不妨设 $x_1<x_2$, 由 g 连续及介值定理可知, 存在 $x_3\in(x_1,x_2)$, 使得

$$g(x_3)=f(x_3+T)-f(x_3)=0$$

与(4) 式矛盾! 故 $g(x)\triangleq f(x+T)-f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 ε_0, 要么恒小于 ε_0. 于是不妨设

$$f(x+T)-f(x)\geqslant\varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant X. \tag{5}$$

从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在 $X_k\geqslant X$, 使得当 $x\geqslant X_1$ 时, 有 $x+(k-1)T>X$. 于是由(5)式可得

$$f(x+kT)-f(x+(k-1)T)\geqslant\varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant X_k. \tag{6}$$

因此对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 取 $K_n=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_k\}$, 则由(6)式可知

$$f(x+kT)-f(x+(k-1)T)\geqslant\varepsilon_0,\forall x\geqslant K_n,\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

进而对上式求和可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x+kT)-f(x+(k-1)T)]=f(x+nT)-f(x)\geqslant n\varepsilon_0,\quad \forall x\geqslant K_n$$

任取 $x_0\geqslant K_n$, 则 $f(x_0+nT)-f(x_0)\geqslant n\varepsilon_0,\quad \forall n\in\mathbb{N}$. 令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 这与 f 在 $(a,+\infty)$ 上有界矛盾! □

命题 0.2

1. 设 $f_n\in C[a,b]$ 且关于 $[a,b]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

证明: 对 $\{x_n\}\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$, 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(c).$$

2. 设 $f_n(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0\in\mathbb{R}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0),$$

证明: $f\in C(\mathbb{R})$.

证明

1. 由 f_n 一致收敛到 $f(x)$ 可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall N\geqslant N_0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 对 $\forall x\in[a,b]$, 都有

$$|f_n(x)-f_N(x)|<\varepsilon.$$

从而由上式可得

$$\begin{aligned}|f_n(x_n)-f(c)|&\leqslant|f_n(x_n)-f_N(x_n)|+|f_N(x_n)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)|\\&\leqslant\varepsilon+|f_N(x_n)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)|.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant\varepsilon+|f_N(c)-f(c)|.$$

再令 $N\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$ 可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n(x_n)-f(c)|\leqslant0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(c)$.

2. 反证, 若 f 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得 $\forall m\in\mathbb{N}$, 存在 $y_m\in(x_0-\frac{1}{m},x_0+\frac{1}{m})$, 使得

$$|f(y_m)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.\tag{7}$$

对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 令条件中的 $x_0=y_m,x_n\equiv y_m,\forall n\in\mathbb{N}$, 从而由条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(y_m)-f(y_m)|=0,m=1,2,\cdots$, 故对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 存在严格递增的数列 $n_m\to+\infty$, 使得

$$|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\frac{\varepsilon_0}{2}.\tag{8}$$

从而由(7)(8)式可知, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f(y_{n_m})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0,\tag{9}$$

$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|<\frac{\varepsilon_0}{2}.\tag{10}$$

因此由(9)(10)式可得, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f_{n_m}(y_{n_m})-f(x_0)|\geqslant|f(y_{n_m})-f(x_0)|-|f_{n_m}(y_{n_m})-f(y_{n_m})|\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.\tag{11}$$

注意到 $y_m\to x_0$, 于是 $y_{n_m}\to x_0$. 从而由已知条件可知 $\lim\limits_{m\to\infty}f_{n_m}(y_{n_m})=f(x_0)$. 这与(11)式矛盾! 故 $f\in C(\mathbb{R})$. □

例题 0.6 设 $g\in C(\mathbb{R})$ 且以 $T>0$ 为周期, 且有

$$f(f(x))=-x^3+g(x).\tag{12}$$

证明: 不存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(12)式成立.

证明 由连续的周期函数的基本性质可知, 存在 $M>0$, 使得 $|g(x)|\leqslant M$. 反证, 假设存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(12)式成立. 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=-\infty,\tag{13}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=+\infty.\tag{14}$$

假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$, 则存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $f(x_n)\to A$. 从而由(12)式可得

$$f(A)=\lim_{n\to\infty} f(f(x_n))=\lim_{n\to\infty}(-x_n^3+g(x_n))=-\infty.$$

上式显然矛盾! 又因为 $f\in C(\mathbb{R})$, 所以 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$. 否则, 当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 振荡, 则由零点存在定理可知, 存在 $y_n\to+\infty$, 使得 $f(y_n)=0, n=1,2,\cdots$. 从而由(13)式可知

$$-\infty=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{n\to\infty} f(f(y_n))=f(0).$$

显然矛盾!

(i) 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 则

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty.$$

显然矛盾!

(ii) 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 则

$$f(-\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}[-x^3+g(x)]=-\infty. \tag{15}$$

从而对上式两边同时作用 f 可得

$$f(-\infty)=f(f(-\infty))=\lim_{x\to-\infty}[-x^3+g(x)]=+\infty. \tag{16}$$

于是(15)式与(16)式显然矛盾! 综上,$f\in C(\mathbb{R})$ 的解不存在. □

例题 0.7

1. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.
2. 设 $f\in C(\mathbb{R})$,n 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y\in\mathbb{R}$, 都有 $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存在.

证明

1. 反证, 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在, 由 f 有界, 可设 $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)=A>B=\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)$. 任取 $C\in(B,A)$, 则由 $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_1\geqslant 0$, 使得 $f(x_1)>C$. 又由 $\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_2>x_1+1$, 使得 $f(x_2)<C$. 于是再由 $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)=A>C$ 可知, 存在 $x_3>x_2+1$, 使得 $f(x_3)>C$. 又由 $\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)=B<C$ 可知, 存在 $x_4>x_3+1$, 使得 $f(x_4)<C$. 依此类推, 可得递增数列 $\{x_n\}$, 使得
$$x_{n+1}>x_n+1,\quad f(x_{2n-1})>C,\quad f(x_{2n})<C,\quad n=1,2,\cdots.$$
从而由 $f\in C[0,+\infty)$ 及介值定理可得, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $y_n\in(x_{2n-1},x_{2n})$, 使得 $f(y_n)=C$, 矛盾!
2. 设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是 f 的所有零点, 记 $x_0=-\infty$,$x_{n+1}=+\infty$, 则由 f 的连续性及介值定理可知,f 在 (x_{i-1},x_i) 上不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 现在考虑 (x_{i-1},x_i),$i=2,3,\cdots,n$, 这 $n-1$ 个区间. 于是由抽屉原理可知, 这 $n-1$ 个区间中必存在 $\frac{n}{2}$ 区间, 使 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内都同号.
不妨设 f 在这 $\frac{n}{2}$ 个区间内恒大于 0, 记 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值记为 $f(m_i)\triangleq M_i>0$, 其中 $m_i\in(x_{i-1},x_i)$,$i=2,3,\cdots,n$. 由介值定理知, 至少存在 $c_i\in(x_{i-1},m_i)$,$c_i'\in(m_i,x_i)$, 使得
$$f(c_i)=f(c_i')=\frac{1}{2}\min_{2\leqslant i\leqslant n} M_i>0, i=2,3,\cdots,n.$$
注意到在 (x_0,x_1),(x_n,x_{n+1}) 上 f 必不同号. 否则, 不妨设在 (x_0,x_1),(x_n,x_{n+1}) 上 f 恒大于 0, 则由 $f\in C(\mathbb{R})$ 可知, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|<M,\forall x\in[x_1,x_{n+1}]$. 从而 $f(x)\geqslant -M,\forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R}$,$f(x)=y$ 都有根矛盾!
不妨设 f 在 (x_0,x_1) 上恒小于 0, 在 (x_n,x_{n+1}) 上恒大于 0, 则 f 在 (x_n,x_{n+1}) 上无上界. 否则, 存在 $K>\max_{2\leqslant i\leqslant n} M_i>0$, 使得 $f(x)<K,\forall x\in(x_n,x_{n+1})$. 又因为 $f(x)<0<K,\forall x\in(x_0,x_1)$, $f(x)\leqslant\max_{2\leqslant i\leqslant n} M_i<K,\forall x\in(x_1,x_n)$. 所以 $f(x)<K,\forall x\in\mathbb{R}$. 这与对 $\forall y\in\mathbb{R}$,$f(x)=y$ 都有根矛盾!
又 $f(x_n)=0$, 故至少存在一个 $c\in(x_n,x_{n+1})$, 使得 $f(c)=\frac{1}{2}\min_{2\leqslant i\leqslant n} M_i>0$. 综上, 至少有 $n+1$ 个点使得

$f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i>0$. 这与 $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=\frac{1}{2}\min\limits_{2\leqslant i\leqslant n}M_i\}$ 是 n 元集矛盾!

□

例题 0.8 设 $f\in C^2[0,+\infty)$,$g\in C^1[0,+\infty)$ 且存在 $\lambda>0$ 使得 $g(x)\geqslant\lambda,\forall x\geqslant 0$. 若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x)+g(x)f(x)=0,\quad \forall x\geqslant 0,$$

证明:f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

笔记 形式计算分析需要的构造函数: 由条件微分方程可得

$$y'y''=-gyy'\Rightarrow\frac{(y')^2}{2}=-\int gyy'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int g\mathrm{d}y^2=-\frac{1}{2}gy^2+\frac{1}{2}\int y^2\mathrm{d}g$$
$$\Rightarrow (y')^2=-gy^2+\int y^2\mathrm{d}g\Rightarrow\frac{(y')^2}{g}+y^2=\int y^2\mathrm{d}g.$$

于是考虑构造函数 $F_1(x)\triangleq\frac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x)$,$F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$.

证明 因为 g' 至多只有有限个零点, 所以存在 $X>0$, 使得 $g'(x)\neq 0,\forall x\geqslant X$. 从而由导数介值性可知,$g'$ 在 $[X,+\infty)$ 上要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 令 $F_1(x)\triangleq\frac{|f'(x)|^2}{g(x)}+f^2(x),x\geqslant X$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_1'(x)=\frac{2f'f''g-g'(f')^2+2ff'g}{g^2}=\frac{-2f'fg^2-g'(f')^2+2ff'g^2}{g^2}=-\frac{g'(f')^2}{g^2}.\tag{17}$$

(i) 若 $g'(x)>0,\forall x\geqslant X$, 则由(17)式可知 $F'(x)\leqslant 0$, 即 $F(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减. 于是再结合 $g(x)>\lambda>0,\forall x>0$ 可知, 存在 $C>0$, 使得

$$f^2(x)\leqslant F_1(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(ii) 若 $g'(x)<0,\forall x\geqslant X$, 令 $F_2(x)\triangleq|f'(x)|^2+g(x)f^2(x)$, 则结合条件 $f''=-gf$ 可得

$$F_2'(x)=2f'f''+g'f^2+2gff'=-2f'fg+g'f^2+2gff'=g'f^2\leqslant 0.\tag{18}$$

从而 $F_2(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上递减, 于是存在 $C'>0$, 使得

$$g(x)f^2(x)\leqslant F_2(x)\leqslant C,\quad \forall x\geqslant X.$$

进而由 $g(x)>\lambda>0,\forall x>0$ 可得

$$f^2(x)\leqslant\frac{C}{g(x)}\leqslant\frac{C}{\lambda},\quad \forall x\geqslant X.$$

故 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界. 又 $f\in C[0,+\infty)$, 故 f 在 $[0,X]$ 上必有界. 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界. □

例题 0.9 设 $a,b>1$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 邻域有界. 若

$$f(ax)=bf(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

证明:f 在 $x=0$ 连续.

证明 注意到

$$f(0)=bf(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

由条件可得

$$f(ax)=bf(x)\Rightarrow f(x)=\frac{f(ax)}{b}=\frac{f(a^2x)}{b^2}=\cdots=\frac{f(a^nx)}{b^n},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{19}$$

因为 f 在 $x=0$ 邻域有界, 所以存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in(-\delta,\delta).\tag{20}$$

从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{M}{b^N}<\varepsilon.\tag{21}$$

于是当 $x \in \left(-\frac{\delta}{a^N}, \frac{\delta}{a^N}\right)$ 时, 结合(19)(20)(21)式, 我们有

$$|f(x)| = \left|\frac{f(a^N x)}{b^N}\right| \leqslant \frac{M}{b^N} < \varepsilon.$$

故 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$ □

例题 0.10 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x), f(x^2)$ 都是周期函数, 证明:f 为常值函数.

证明 由连续周期函数必一致连续可知,$f(x), f(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 于是对任意满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$ 的数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$, 都有

$$|f(x_n') - f(x_n'')|, |f((x_n')^2) - f((x_n'')^2)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{22}$$

设 $f(x)$ 的周期为 $T > 0$, 则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, 取 $x_n' = \sqrt{nT + c}, x_n'' = \sqrt{nT}$, 显然 $x_n' - x_n'' = \frac{c}{\sqrt{nT+c} + \sqrt{nT}} \to 0$. 从而由 (22) 式可得

$$|f((x_n')^2) - f((x_n'')^2)| = f(nT + c) - f(nT) = f(c) - f(0) \to 0.$$

故 $f(c) = f(0), \forall c \in \mathbb{R}$. 故 f 为常值函数. □

例题 0.11 计算函数方程 $f(\log_2 x) = f(\log_3 x) + \log_5 x$ 所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

笔记 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5}, x > 0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n \in \mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3}, \quad \frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\frac{\ln 3}{\ln 2} > 1$, 后者公比 $\frac{\ln 2}{\ln 3} < 1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 取 $a_1 = x, \ln a_n = \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1} \cdot \ln x, n \in \mathbb{N}$. 则 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0$. 此时有

$$\frac{\ln a_n}{\ln 3} = \frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是由条件可得

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right) + \frac{\ln x}{\ln 5} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln 5}, n = 1, 2, \cdots$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_n}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right) - f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right] = f\left(\frac{\ln a_1}{\ln 2}\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right) = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0).$$

故

$$\frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\ln x}{1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}} = f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - f(0) \overset{y = \frac{\ln x}{\ln 2}}{\Longrightarrow} f(y) = f(0) + \frac{y \ln 2 \ln 3}{\ln 5 \ln \frac{3}{2}}.$$

□

例题 0.12 设 $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 满足对任何 $x, h \in \mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 对 $\forall x,h\in\mathbb{R}$, 由 Taylor 公式可知

$$f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2h^2.$$

再结合条件可得

$$\begin{aligned}f(x+h)&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2}\theta^2h^2}{n!}h^n,\end{aligned}\tag{23}$$

由 Taylor 公式可知

$$f(x+h)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2}.\tag{24}$$

比较(23)式和(24)式得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}-\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\right]h.\tag{25}$$

当 $\theta=\dfrac{1}{n+1}$ 时, 我们有

$$\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}=\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}.$$

对上式令 $h\to0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\frac{f^{(n+2)}(x)}{2n!(n+1)^2}=\frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!}\Rightarrow f^{(n+2)}(x)=0.$$

当 $\theta\neq\dfrac{1}{n+1}$ 时, 对(25)式令 $h\to0$, 则 $\xi,\eta\to x$, 故此时就有

$$\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=0\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=0.$$

因此, 无论如何都有 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式. □

例题 0.13

1. 设
$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots\tag{26}$$
证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$.
2. 设 $g(x)=e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$, 证明 g 是只有实根的多项式.

笔记 本题第 1 问叫做 Legendre(勒让德) 多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用 Rolle 定理时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式, 且 ±1 是 $\dfrac{d^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n$ 的 $n-k$ 重根 $(0\leqslant k\leqslant n)$. 由 Rolle 定理可知,$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有一个实根. 于是再由 Rolle 定理可知,$\dfrac{d^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有两个不同实根. 反复利用 Rolle 定理可得,$\dfrac{d^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 有 n 个不同实根. 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 故 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$ 上.
2. 设 $\dfrac{d^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2})=P_k(x)e^{-x^2}$,$P_k$ 是 k 次多项式,$k\in\mathbb{N}$, 显然 $P_0(x)=1$, 于是
$$\frac{d^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}(e^{-x^2})=\left[P_k'(x)-2xP_k(x)\right]e^{-x^2}.$$

令 $P_{k+1}(x)=P_k'(x)-2xP_k(x)$, 则由 P_k 是 k 次多项式可知 $P_{k+1}(x)$ 是 $k+1$ 次多项式. 故由数学归纳法可知

$$\frac{d^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})=P_n(x)e^{-x^2},\quad P_n\in\mathbb{R}[x],\quad n\in\mathbb{N}.$$

因此 $g(x)=e^{-x^2}\frac{d^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})=P_n(x)$ 是 n 次多项式 $(n\in\mathbb{N})$. 设 P_k 是有 k 个不同实根的多项式, 这 k 个根为

$$x_1<x_2<\cdots<x_k.$$

从而这 k 个根也是 $P_k(x)e^{-x^2}$ 的根. 由 Rolle 定理可知

$$P_{k+1}(x)=e^{-x^2}\frac{d^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2})=e^{-x^2}\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(P_k(x)e^{-x^2}\right)$$

在 $(x_{j-1},x_j),j=2,3,\cdots,k$ 有实根. 而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_k(x)e^{-x^2}=0$, 故由 Rolle 定理可知 $P_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_k,+\infty)$ 上还各有一个实根. 因此 $P_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个根. 故由数学归纳法可知 $P_n(x)$ 有 n 个实根 $(n\in\mathbb{N})$. 又因为 $g(x)=P_n(x)$ 是 n 次多项式, 而 n 次多项式有且仅有 n 个根, 所以 $g(x)=P_n(x)$ 是只有实根的多项式.

□

例题 0.14 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 且 f,f',f'' 都是正值函数. 若存在 $a,b>0$ 使得

$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

求 $f'(x)\leqslant cf(x)$ 恒成立的最小的 c.

证明 考虑微分方程 $y''=ay+by'$, 其特征方程为

$$x^2-bx-a=0\Rightarrow x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>0,\quad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}<0.$$

于是

$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)\Longleftrightarrow f''(x)-x_1f'(x)\leqslant x_2\left[f'(x)-x_1f(x)\right].$$

令 $g(x)\triangleq f'(x)-x_1f(x)$, 则 $g'(x)\leqslant x_2g(x)$. 再令 $c(x)\triangleq\frac{g(x)}{e^{x_2x}}$, 则

$$c'(x)=\frac{g'(x)-x_2g(x)}{e^{x_2x}}\leqslant 0\Rightarrow c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}c(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

由 $f'',f',f>0$ 可知 f,f' 递增有下界. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 都存在. 因此

$$c(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)-x_1f(x)}{e^{x_2x}}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

即

$$f'(x)\leqslant x_1f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

取 $f(x)=e^{x_1x}$, 此时等号成立. 故 $c_{\min}=x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. □

注 若存在 $c<x_1$, 使得 $f'(x)\leqslant cf(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 则

$$f'(x)\leqslant cf(x)<x_1f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

但是取当 $f(x)=e^{x_1x}$ 时,$f'(x)=x_1f(x)$ 矛盾! 故 $c_{\min}=x_1$.

例题 0.15 设 $f\in C^n(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N},f^{(k)}(x_0)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$. 若对某个 $M>0$ 和 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2}\geqslant 0,\lambda_{n-1}\geqslant 1$ 有不等式

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M\prod_{k=0}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k},\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

笔记 因为原不等式是绝对值不等式, 所以考虑两个微分方程

$$f^{(n)}=f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{\int_{x_0}^{x}g(y)\mathrm{d}y}.$$

$$f^{(n)}=-f^{(n-1)}\cdot g\Rightarrow\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}=-g\Rightarrow\ln f^{(n-1)}=-\int_{x_0}^{x}g(y)\mathrm{d}y+C\Rightarrow f^{(n-1)}=Ce^{-\int_{x_0}^{x}g(y)\mathrm{d}y}.$$

分离常量得到构造函数 $c_1(x) \triangleq \frac{f^{(n-1)}(x)}{e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}, c_2(x) \triangleq f^{(n-1)}(x)e^{\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$. 回顾双绝对值问题的构造函数, 我们需要的构造函数应是 $C_1(x) \triangleq c_1^2(x) = \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}, C_2(x) \triangleq c_2^2(x) = [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$.

证明 由条件可知

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant |f^{(n-1)}(x)| \cdot g(x),$$

其中 $g(x) = M\prod_{k=1}^{n-1}|f^{(k)}(x)|^{\lambda_k-1}$. 从而 $f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x) \leqslant |f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)| \leqslant |f^{(n-1)}(x)|^2 \cdot g(x)$.

(27)

令 $C_1(x) \triangleq \frac{[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}}$, 则由 (27) 式可知

$$C_1'(x) = \frac{2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) - 2g(x)[f^{(n-1)}(x)]^2}{e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}} \leqslant 0.$$

故 $C_1(x) \leqslant C_1(x_0) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 因此 $C_1(x) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \geqslant x_0$. 令 $C_2(x) \triangleq [f^{(n-1)}(x)]^2 e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y}$, 则由 (27) 式可知

$$C_2'(x) = \left[2f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x) + 2g(x)(f^{(n-1)}(x))^2\right] e^{2\int_{x_0}^x g(y)\mathrm{d}y} \geqslant 0.$$

故 $C_2(x) \leqslant C_2(x_0) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 因此 $C_2(x) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 进而 $f^{(n-1)}(x) = 0, \forall x \leqslant x_0$. 综上, $f^{(n-1)}(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 又 $f^{(k)}(x_0) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$, 故 $f(x) \equiv 0$. □

例题 0.16 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g \in C(\mathbb{R})$ 且 $\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{|g(x)|}{x} = +\infty$, 证明: $f \circ g$ 不是周期函数.

笔记 $\varlimsup_{x\to+\infty}|g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 的证明类似函数 Stolz 定理的证明. 实际上就是利用了上极限版的函数 Stolz 定理, 只不过我们之前并没有写出这个定理.

证明 若 $f \circ g$ 是周期函数, 则由连续周期函数必一致连续可知 $f \circ g$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 设 f 的周期为 $T > 0$, 记 $a \triangleq \max f - \min f > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使

$$|f(g(x)) - f(g(y))| < a, \forall |x - y| \leqslant \delta. \tag{28}$$

先证 $\varlimsup_{x\to+\infty}|g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 若 $\varlimsup_{x\to+\infty}|g(x+\delta) - g(x)| \neq +\infty$, 则存在 $A > 0$, 使 $|g(x+\delta) - g(x)| \leqslant A, \forall x \geqslant 0$. 对 $x \in [n\delta, (n+1)\delta), n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right| \leqslant \frac{|g(x-n\delta)|}{n\delta} + \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{g(x-k\delta) - g(x-(k+1)\delta)}{n\delta}\right| \leqslant \frac{1}{n\delta}\sup_{x\in[0,\delta]}|g(x)| + \frac{A}{\delta}.$$

故 $\varlimsup_{x\to+\infty}\left|\frac{g(x)}{x}\right| \leqslant \frac{A}{\delta}$ 矛盾! 因此 $\varlimsup_{x\to+\infty}|g(x+\delta) - g(x)| = +\infty$. 于是存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $|g(x_0+\delta) - g(x_0)| \geqslant T$. 由介值定理可知, 存在 $s, t \in [x_0, x_0+\delta]$, 使得 $f(g(s)) = \max f, \quad f(g(t)) = \min f$. 从而由 (28) 式可知

$$a = |f(g(s)) - f(g(t))| < a$$

矛盾! 故 $f \circ g$ 不是周期函数 ($f \circ g$ 甚至不是一致连续函数). □

例题 0.17 设 $f \in C[0,+\infty)\bigcap D^1(0,+\infty)$ 满足

$$f(0) \geqslant 0, f'(x) \geqslant f^3(x), \forall x > 0.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geqslant 0.$$

笔记 $y' = y^3$ 这个微分方程有两种解法得到两个不同的构造函数, 即分别考虑 $\frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \mathrm{d}x$ 和 $\frac{y'}{y} = y^2$ 得到

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int\mathrm{d}x \Longrightarrow -\frac{1}{2y^2} = x + C_1 \Longrightarrow C = x + \frac{1}{2y^2};$$

$$\int \frac{y'}{y}\mathrm{d}y = \int y^2\mathrm{d}y \Longrightarrow \ln y = \int y^2\mathrm{d}y \Longrightarrow y = Ce^{\int y^2\mathrm{d}y} \Longrightarrow C = \frac{y}{e^{\int y^2\mathrm{d}y}}.$$

证明 由条件可知

$$\left[\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}}\right]' = \frac{f'(x) - f^3(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}} \geqslant 0.$$

从而

$$\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}} \geqslant \frac{f(0)}{1} \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0.$$

于是

$$f'(x) \geqslant f^3(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0.$$

若存在 $a \geqslant 0$, 使得 $f(a) > 0$, 则由 $f' \geqslant 0$ 知

$$f(x) \geqslant f(a) > 0, \forall x > a. \tag{29}$$

注意到对 $\forall x \in (a, A)$, 有

$$\left[x + \frac{1}{f^2(x)}\right]' = \frac{f^3(x) - f'(x)}{f^3(x)} \leqslant 0.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{1}{f^2(x)}\right] \leqslant a + \frac{1}{2f^2(a)} < +\infty. \tag{30}$$

而由 $f' \geqslant 0$ 可知 f 递增, 再结合(29)式知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \left[f(a), +\infty\right]$, 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f^2(x)} \in \left[0, \frac{1}{f(a)}\right].$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + \frac{1}{f^2(x)}\right] = +\infty$, 这与(30)式矛盾! □