## 0.1 正规子群

**定义 0.1 (正规子群)**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $N\subset G$。我们称 $N$ 是个**正规子群**, 记作 $N\lhd G$，若

$$N \text{ 是个子群},$$

$$\forall a\in G, aN=Na.$$

注 注意 $aN=Na \nLeftrightarrow an=na,\forall n\in N$. 虽然 $an=na,\forall n\in N\Rightarrow aN=Na$, 但是 $aN=Na \nRightarrow an=na,\forall n\in N$. 实际上,$aN=Na\Leftrightarrow \exists n,n'\in N \text{ s.t. } an=n'a$.

**引理 0.1**

设 $G$ 是一个群或幺半群，若 $H<G$，则 $HH=H$。

证明 一方面，对 $\forall h_1,h_2\in H$，根据乘法封闭性，都有 $h_1h_2\in H$。故 $HH\subset H$。另一方面，设 $h\in H$，则 $h=he\in HH$。故 $H\subset HH$。因此 $HH=H$。 □

**命题 0.1**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $N\lhd G$，$a,b\in G$，则

$$(aN)\cdot(bN)=(ab)N.$$

是良定义的。

结论 元素与群 (其实只要满足结合律的半群就足够了) 的乘积满足广义结合律. 例如: 设 $G$ 是一个群, 若 $H,K<G$,$a,b\in G$, 则

$$aHbK=(aH)(bK)=a((Hb)K)=a(H(bK))=(a(Hb))K=((aH)b)K.$$

$$abHK=(ab)(HK)=a((bH)K)=a(b(HK))=((ab)H)K.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即两个陪集相乘可以看作一个陪集或两个陪集的乘积的陪集等.

证明 证法一: 设 $aN=a'N,bN=b'N$，则由引理??可知 $a^{-1}a',b^{-1}b'\in N$，我们只须证明 $abN=a'b'N$，即 $(ab)^{-1}a'b'=b^{-1}a^{-1}a'b'\in N$。首先中间这个部分，即 $a^{-1}a'$，是在 $N$ 中的。接着，利用 $N$ 是个正规子群, 再结合引理??, 我们可以得到 $b^{-1}Nb=N$，因此，$b^{-1}a^{-1}a'b'\in b^{-1}Nb'=N$。进一步地，由引理??可得 $abN=a'b'N$。这就证明了良定义性。

证法二:事实上，这个乘法可以简单地理解成子集乘法，即 $(aN)(bN)=\{xy:x\in aN,y\in bN\}$。我们只须说明，这从集合意义上，等于 $abN$。而这几乎是显然的。由于 $Nb=bN$ 及引理 0.1, 我们有 $aNbN=abNN=abN$. 这样，既然从集合意义上相等，那么自然就是良定义的（因为我们不必选取单位元）。 □

**命题 0.2 (商群)**

令 $(G,\cdot)$ 是一个群, 且 $N\lhd G$, 则 $(G/N,\cdot)$ 构成一个群, 称为（$G$ 在 $N$ 上的）**商群**, 其中的单位元是 $eN=N$, 每个陪集 $aN$ 的逆元是 $a^{-1}N$。

证明 由命题 0.1可知商群 $(G/N,\cdot)$ 的乘法是良定义的.

封闭性：对 $\forall aN,bN\in(G/N,\cdot)$, 其中 $a,b\in G$, 根据 $G$ 对乘法的封闭性可得 $ab\in G$, 从而 $(aN)(bN)=abN\in(G/N,\cdot)$.

结合律：令 $a,b,c\in G$，则利用乘法的定义，$(aNbN)cN=(abN)(cN)=((ab)c)N$。利用 $G$ 对乘法的结合律，得到这是等于 $(a(bc))N$ 的。类似地，这最终等于 $aN(bNcN)$。

单位元：令 $a\in G$，则 $aNeN=(ae)N=aN$，类似地 $eNaN=aN$。

逆元：令 $a \in G$，则 $aNa^{-1}N = (aa^{-1})N = eN$，类似地 $a^{-1}NaN = eN$。

综上，若 $N \lhd G$，则 $G/N$ 在这个自然的乘法下构成群，称为一个商群。 □

**引理 0.2 (正规子群的等价条件)**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，且 $N < G$，则下列命题等价

(1) $N$ 是 $G$ 的正规子群，即 $\forall a \in G, aN = Na$.

(2) $\forall a \in G, aNa^{-1} \subset N$.

(3) $\forall a \in G, \forall n \in N, ana^{-1} \in N$.

**证明** 显然第二个条件和第三个条件等价。我们只要证明第一个条件与第二个条件等价即可。

一方面，设 $N$ 是 $G$ 的正规子群。令 $a \in G$，则 $aN = Na$。同时右乘 $a^{-1}$ 并取一半的包含关系，我们得到了 $aNa^{-1} \subset N$。

另一方面，设第二个条件成立。令 $a \in G$，则由 $aNa^{-1} \subset N$ 及引理??得到 $aN \subset Na$，由 $a^{-1}N(a^{-1})^{-1} \subset N$ 及引理??得到得到 $Na \subset aN$。因此，$aN = Na$。 □

**命题 0.3 (正规子群的任意交还是正规子群)**

令 $(N_i)_{i\in I}$ 是一族 $G$ 的正规子群，则它们的交集仍然是 $G$ 的正规子群，即

$$\bigcap_{i\in I} N_i \lhd G.$$

**证明** 首先，由子群的任意交仍是子群可知 $\bigcap_{i\in I} N_i < G$. 因此我们只需证明正规性。利用正规子群的等价条件(3)可知, 对 $\forall a \in G, \forall n \in \bigcap_{i\in I} N_i$, 我们只须证明 $ana^{-1} \in \bigcap_{i\in I} N_i$ 即可. 任取 $i \in I$，则 $n \in N_i$。由于 $N_i \lhd G$，我们有 $ana^{-1} \in N_i$。因此，由 $i$ 的任意性可知 $ana^{-1} \in \bigcap_{i\in I} N_i$。这就证明了 $\bigcap_{i\in I} N_i \lhd G$。 □

**命题 0.4**

令 $(G, \cdot)$ 是一个群，则

$$\{e\} \lhd G,$$
$$G \lhd G.$$

**证明** 平凡群：怎么乘都是单位元，所以对乘法封闭；包含单位元；唯一的元素的逆元还是单位元；在这个群中，$a$ 的左右陪集都是 $a\{e\} = \{e\}a = \{a\}$。因此，$\{e\} \lhd G$。

整个群：子群是显然的；在整个群 $G$ 中，每个元素的左右陪集都是全集，即 $aG = Ga = G$，这是因为 $a \in G$。因此，$G \lhd G$(推论??). □

**推论 0.1**

1. 若 $G$ 是一个群，$e$ 是其单位元，则 $G/\{e\}$ 同构于 $G$，即 $G/\{e\} \simeq G$。
2. 若 $G$ 是一个群，则 $G/G$ 是平凡群，即 $G/G = \{e\}$。

**证明**

1. 令

$$f : G \to G/\{e\}, a \mapsto a\{e\} = \{a\}.$$

显然 $f$ 是双射。对 $\forall a, b \in G$，我们都有

$$f(ab) = \{ab\} = ab\{e\} = (a\{e\})(b\{e\}) = \{a\}\{b\} = f(a)f(b).$$

因此 $f$ 也是同态映射。于是 $f$ 是同构映射。故 $G/\{e\} \simeq G$。

2. 由命题 0.2及命题0.4可知 $G/G$ 是一个群。注意到 $\forall a \in G$，都有 $aG = G$。因此 $G/G = G$。于是 $|G/G| = 1$。故 $G/G = \{e\}$。

□

**命题 0.5**

令 $(G, \cdot)$ 是个阿贝尔群，则子群就是正规子群，正规子群也就是子群，即

$$H < G \iff H \lhd G$$

**证明** 根据阿贝尔群满足交换律可知,$aH = \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} = Ha$。 □

**定理 0.1**

**证明**

□

**定义 0.2**

**命题 0.6**

**证明**

□

**定理 0.2**

**证明**

□

**定义 0.3**

**命题 0.7**

**证明**

□

**定理 0.3**

**证明**

□

**定义 0.4**

**命题 0.8**

**证明**

□

**定理 0.4**

♡

证明

□