

## 0.1 辐角原理和 Rouché 定理

### 定理 0.1

设  $f \in H(D)$ ,  $\gamma$  是  $D$  中一条可求长的简单闭曲线,  $\gamma$  的内部位于  $D$  中. 如果  $f$  在  $\gamma$  上没有零点, 在  $\gamma$  内部有零点

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

它们的阶数分别为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \alpha_k. \quad (1)$$

♡

**注** 公式 (1) 有明确的几何意义. 我们先作一个自然的约定: 如果  $a$  是  $f$  的  $m$  阶零点, 我们就把  $a$  看成是  $f$  的  $m$  个重合的 1 阶零点. 这样, 公式 (1) 右边就表示  $f$  在  $\gamma$  内部的零点个数的总和, 我们记之为  $N$ . 于是, 公式 (1) 可写为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N. \quad (2)$$

**证明** 取充分小的  $\varepsilon > 0$ , 作圆盘  $B(a_k, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , 使得这  $n$  个圆盘都在  $\gamma$  内部, 且两两不相交. 于是,  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  在

$D \setminus \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \varepsilon)$  中全纯. 记  $\gamma$  的内部为  $E$ , 则  $f \in H\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \varepsilon)\right) \cap C\left(\overline{E \setminus \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \varepsilon)}\right)$ . 应用多连通域的 Cauchy 积分定理, 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (3)$$

其中,  $\gamma_k = \partial B(a_k, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

因为  $a_k$  是  $f$  的  $\alpha_k$  阶零点, 由命题?? 知道,  $f$  在  $a_k$  的邻域中可以写成

$$f(z) = (z - a_k)^{\alpha_k} g_k(z),$$

这里,  $g_k$  在  $a_k$  的邻域中全纯, 且  $g_k(a_k) \neq 0$ . 于是

$$\begin{aligned} f'(z) &= \alpha_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} g_k(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} g'_k(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g'_k(z)}{g_k(z)}. \end{aligned}$$

因为  $\frac{g'_k}{g_k}$  在  $\overline{B(a_k, \varepsilon)}$  中全纯, 于是由 Cauchy 积分定理及例題?? 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \left[ \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g'_k(z)}{g_k(z)} \right] dz = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n.$$


把它代入 (3) 式, 即得公式 (1). □

### 定理 0.2 (辐角原理)

设  $f \in H(D)$ ,  $\gamma$  是  $D$  中的可求长简单闭曲线,  $\gamma$  的内部位于  $D$  中. 如果  $f$  在  $\gamma$  上没有零点, 那么当  $z$  沿着  $\gamma$  的正方向转动一圈时, 函数  $f(z)$  在相应的曲线  $\gamma$  上绕原点转动的总圈数恰好等于  $f$  在  $\gamma$  内部的零点的个数.

♡

**注** 例如, 设  $f(z) = (z^2 + 1)(z - 1)^5$ , 则当  $z$  沿着圆周  $\{z : |z| = 3\}$  的正方向转动一圈时,  $f(z)$  在  $w$  平面上绕原点转动 7 圈. 这是因为  $f$  在  $B(0, 3)$  中共有 7 个零点, 其中,  $\pm i$  是 1 阶零点, 而 1 则是 5 阶零点.

 **笔记** 实际上, 这个定理就是 (2) 式左端积分的几何意义.

**证明** 设  $\Gamma$  是  $w$  平面上一段不通过原点的连续曲线, 它的方程记为  $w = \lambda(t), a \leq t \leq b$ . 对于每个  $t$ , 选取  $\lambda(t)$  的一个辐角  $\theta(t)$ , 使得  $\theta(t)$  是  $t$  的连续函数, 我们称  $\theta(b) - \theta(a)$  为  $w$  沿曲线  $\Gamma$  的辐角的变化, 记为

$$\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = \theta(b) - \theta(a).$$

今设  $\Gamma$  是一条不通过原点的可求长简单闭曲线, 显然有

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = \begin{cases} 1, & \text{如果原点在 } \Gamma \text{ 内部;} \\ 0, & \text{如果原点不在 } \Gamma \text{ 内部.} \end{cases}$$

另一方面, 由例题??可知

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = \begin{cases} 1, & \text{如果原点在 } \Gamma \text{ 内部;} \\ 0, & \text{如果原点不在 } \Gamma \text{ 内部.} \end{cases}$$

于是得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w. \quad (4)$$

一般来说, 当  $\Gamma$  是一条不通过原点的任意可求长闭曲线时,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}$  等于  $\Gamma$  绕原点的圈数, 称为  $\Gamma$  关于原点的环绕指数, 因而 (4) 式对于一般的不通过原点的可求长闭曲线都是成立的.

现在让  $z$  在  $z$  平面上沿曲线  $\gamma$  的正方向走一圈, 相应的函数  $w = f(z)$  的值在  $w$  平面上画出一条相应的闭曲线  $\Gamma$  (见图 1). 根据 (4) 式, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z). \quad (5)$$

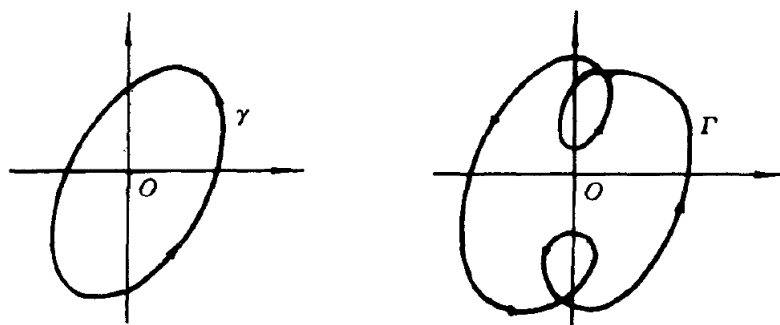


图 1

由此可知, 积分  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  就表示当  $z$  沿着  $\gamma$  的正方向走一圈时, 函数  $f(z)$  在  $\Gamma$  上的辐角变化再除以  $2\pi$ . 由 (2) 式和 (5) 式, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z) = N. \quad (6)$$

□

### 定理 0.3 (Rouché(鲁歇) 定理)

设  $f, g \in H(D)$ ,  $\gamma$  是  $D$  中可求长的简单闭曲线,  $\gamma$  的内部位于  $D$  中. 如果当  $z \in \gamma$  时, 有不等式

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad (7)$$

那么  $f$  和  $g$  在  $\gamma$  内部的零点个数相同.

♡

**证明** 由 (7) 式知道,  $f$  和  $g$  在  $\gamma$  上都没有零点. 用  $|f(z)|$  去除 (7) 式的两端, 得

$$\left| 1 - \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1.$$

若记  $w = \frac{g}{f}$ , 则有  $|w - 1| < 1$ . 这说明当  $z$  在  $\gamma$  上变动时,  $w$  落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 因而  $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = 0$ , 于是由定理??可得

$$\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z) = \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} g(z).$$

由辐角原理即知  $f$  和  $g$  在  $\gamma$  内部的零点个数相同. □

#### 定理 0.4

设  $f$  是域  $D$  中的全纯函数,  $z_0 \in D$ , 记  $w_0 = f(z_0)$ , 如果  $z_0$  是  $f(z) - w_0$  的  $m$  阶零点, 那么对于充分小的  $\rho > 0$ , 必存在  $\delta > 0$ , 使得对于任意  $a \in B(w_0, \delta)$ ,  $f(z) - a$  在  $B(z_0, \rho)$  中恰有  $m$  个零点.

**证明** 根据全纯函数零点的孤立性, 必存在充分小的  $\rho > 0$ , 使得  $f(z) - w_0$  在  $\overline{B(z_0, \rho)}$  中除  $z_0$  外没有其他的零点. 记

$$\min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = \rho\} = \delta > 0,$$

于是当  $|z - z_0| = \rho$  时,  $|f(z) - w_0| \geq \delta$ . 今任取  $a \in B(w_0, \delta)$ , 则当  $z$  在圆周  $|z - z_0| = \rho$  上时, 有

$$|f(z) - w_0| \geq \delta > |w_0 - a|. \quad (8)$$

若记  $F(z) = f(z) - w_0$ ,  $G(z) = f(z) - a$ , 则 (8) 式可写成

$$|F(z)| > |F(z) - G(z)|.$$

由 Rouché 定理,  $F$  和  $G$  在  $B(z_0, \rho)$  中的零点个数相同, 因而  $G(z) = f(z) - a$  在  $B(z_0, \rho)$  中恰有  $m$  个零点. □

#### 推论 0.1

设  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in D$ ,  $w_0 = f(z_0)$ , 则对充分小的  $\rho > 0$ , 一定存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta).$$

**证明** 显然  $z_0$  至少是  $f(z) - w_0$  的 1 阶零点, 由定理 0.4 可知, 对充分小的  $\rho > 0$ , 一定存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $a \in B(w_0, \delta)$ , 都有  $f(z) - a$  在  $B(z_0, \rho)$  中有一个零点  $t_a$ , 即

$$t_a \in B(z_0, \rho), \quad \text{且} \quad f(t_a) = a.$$

再由  $a$  的任意性可知

$$f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta).$$

□

#### 定理 0.5 (开映射定理)

设  $f$  是域  $D$  上非常数的全纯函数, 那么  $f(D)$  也是  $\mathbb{C}$  中的域.

**注** 如果  $f$  是域  $D$  上非常数的连续函数, 那么  $f(D)$  未必是一个域. 例如, 函数  $f(z) = |z|$  是单位圆盘上的连续函数, 它把单位圆盘映为线段  $[0, 1]$ . 但是, 由这个定理可知, 域  $D$  上非常数的全纯函数则一定把域映为域.



**笔记** 这个定理说明非常数的全纯函数把开集映为开集, 因此称为开映射定理.

**证明** 我们证明  $f(D)$  是  $\mathbb{C}$  中的连通开集. 先证  $f(D)$  是开集. 任取  $w_0 \in f(D)$ , 由推论 0.1 知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(w_0, \delta) \subset f(D)$ , 这说明  $w_0$  是  $f(D)$  的内点, 所以  $f(D)$  是开集.

再证  $f(D)$  是连通的. 任取  $w_1, w_2 \in f(D)$ , 则存在  $z_1, z_2 \in D$ , 使得  $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ . 因为  $D$  是连通的, 故在  $D$  中存在连续曲线  $z = \gamma(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$  连接  $z_1$  和  $z_2$ , 于是  $w = f(\gamma(t)) (\alpha \leq t \leq \beta)$  是  $f(D)$  中连接  $w_1, w_2$  的曲线, 因而  $f(D)$  是连通的. □

#### 定理 0.6

如果  $f$  是域  $D$  中单叶的全纯函数, 那么对于  $D$  内每一点  $z$ , 有  $f'(z) \neq 0$ .

□

**注** 这个定理的逆定理是不成立的, 即若  $f'$  在  $D$  中处处不为零,  $f$  未必是  $D$  中的单叶函数.  $f(z) = e^z$  就是最简单的例子.

**证明** 用反证法. 如果存在  $z_0 \in D$ , 使得  $f'(z_0) = 0$ , 那么  $z_0$  是  $f(z) - f(z_0)$  的  $m$  级零点, 这里,  $m \geq 2$ . 因为  $f'(z_0) \neq 0$ , 所以  $f(z)$  非常数. 从而由命题??, 可取  $\rho$  充分小, 使得  $f'(z)$  在  $B(z_0, \rho)$  中除了  $z_0$  外不再其他的零点. 由定理 0.4, 对于  $0 < \eta < \rho$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $a \in B(f(z_0), \delta)$ ,  $f(z) - a$  在  $B(z_0, \eta)$  中至少有两个零点, 设为  $z_1, z_2$ . 由于  $f'(z_1) \neq 0, f'(z_2) \neq 0$ , 故  $z_1, z_2$  都是  $f(z) - a$  的 1 阶零点. 这就是说, 存在  $z_1 \neq z_2$ , 使得  $f(z_1) = f(z_2) = a$ , 这与  $f$  的单叶性相矛盾.  $\square$

### 定理 0.7

设  $f$  是域  $D$  中的全纯函数, 如果对于  $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$ , 那么  $f$  在  $z_0$  的邻域中是单叶的.

**证明** 因为  $f'(z_0) \neq 0$ , 所以  $z_0$  是  $f(z) - f(z_0)$  的 1 阶零点. 由定理 0.4, 存在  $\rho > 0$  和  $\delta > 0$ , 使得对于任意的  $a \in B(f(z_0), \delta)$ ,  $f(z) - a$  在  $B(z_0, \rho)$  中只有一个零点. 由  $f$  的连续性, 对  $\delta > 0$ , 存在  $\rho_1 < \rho$ , 使得对任意  $z \in B(z_0, \rho_1)$ , 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \iff f(z) \in B(f(z_0), \delta).$$

即

$$f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta),$$

设  $z_1, z_2 \in B(z_0, \rho_1)$  且  $z_1 \neq z_2$ , 则  $f(z_1), f(z_2) \in f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta)$ . 又因为  $f(z) - f(z_2)$  在  $B(z_0, \rho)$  中只有一个零点  $z_2$ , 所以

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

因而  $f$  在  $B(z_0, \rho_1)$  中是单叶的.  $\square$

### 定理 0.8

设  $f$  是域  $D$  上的单叶全纯函数, 那么它的反函数  $f^{-1}$  是  $G = f(D)$  上的全纯函数, 而且

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w \in G,$$

其中,  $w = f(z)$ .



**笔记** 由于这个定理, 故单叶全纯函数也称为**双全纯函数**或**双全纯映射**.

**证明** 先证明  $f^{-1}$  在  $G$  上连续. 任取  $w_0 \in G$ , 则存在  $z_0 \in D$ , 使得  $f(z_0) = w_0$ . 由定理 0.4 或推论 0.1, 对于充分小的  $\rho > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|w - w_0| < \delta$  时, 相应的  $z$  满足  $|z - z_0| < \rho$ , 即  $|f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < \rho$ , 这说明  $f^{-1}$  在  $w_0$  处是连续的. 现在

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

即

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

这里, 我们已经利用了定理 0.6 的结果.  $\square$

### 定理 0.9 (Hurwitz 定理)

设  $\{f_n\}$  是域  $D$  中的一列全纯函数, 它在  $D$  中内闭一致收敛到不恒为零的函数  $f$ . 设  $\gamma$  是  $D$  中一条可求长简单闭曲线, 它的内部属于  $D$ , 且不过  $f$  的零点. 那么必存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $f_n$  与  $f$  在  $\gamma$  内部的零点个数相同.

**证明** 由 Weierstrass 定理,  $f$  在  $D$  中是全纯的. 因为  $f$  在  $\gamma$  上没有零点, 所以

$$\min\{|f(z)| : z \in \gamma\} = \varepsilon > 0.$$

另一方面, 对于上面的  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  在  $\gamma$  上成立. 于是, 当  $n \geq N$  时, 在  $\gamma$  上有不等式

$$|f(z)| \geq \varepsilon > |f_n(z) - f(z)|.$$

根据 Rouché 定理,  $f$  和  $f_n$  在  $\gamma$  内有相同个数的零点. □

### 定理 0.10

设  $\{f_n\}$  是域  $D$  上一列单叶的全纯函数, 它在  $D$  上内闭一致收敛到  $f$ , 如果  $f$  不是常数, 那么  $f$  在  $D$  中也是单叶的全纯函数. ♡

**证明** 由 Weierstrass 定理,  $f$  是  $D$  上的全纯函数. 如果  $f$  在  $D$  上不是单叶的, 那么一定存在  $z_1, z_2, z_1 \neq z_2$ , 使得  $f(z_1) = f(z_2)$ . 令

$$F(z) = f(z) - f(z_1),$$

那么  $F$  在  $D$  中有两个零点  $z_1$  和  $z_2$ . 因为  $F \neq 0$ , 故由命题 ?? 可知  $z_1$  和  $z_2$  是孤立的. 选取充分小的  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \emptyset$ , 且  $F$  在  $B(z_1, \varepsilon)$  和  $B(z_2, \varepsilon)$  中除去  $z_1$  和  $z_2$  外不再其他的零点. 令

$$F_n(z) = f_n(z) - f(z_1),$$

则  $F_n$  在  $D$  中内闭一致收敛到  $F$ . 由 Hurwitz 定理, 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $F_n$  在  $B(z_1, \varepsilon)$  和  $B(z_2, \varepsilon)$  中各有一个零点, 设为  $z'_1$  和  $z'_2$ . 显然  $z'_1 \neq z'_2$ , 由此即得

$$f_n(z'_1) = f_n(z'_2) = f(z_1).$$

这与  $f_n$  在  $D$  内的单叶性相矛盾. □

**例题 0.1** 求方程  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$  在单位圆内的零点个数.

**解** 令

$$\begin{aligned} f(z) &= -4z^5, \\ g(z) &= z^8 - 4z^5 + z^2 - 1. \end{aligned}$$

在单位圆周上,  $|f(z)| = 4$ , 于是

$$|f(z) - g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z|^8 + |z|^2 + 1 = 3 < |f(z)|.$$

根据 Rouché 定理,  $g$  和  $f$  在  $|z| < 1$  中的零点个数相同. 而  $f$  在  $z = 0$  处有 1 个 5 阶零点, 因而原方程在  $|z| < 1$  中有 5 个零点. □

**例题 0.2** 试求方程  $z^4 - 6z + 3 = 0$  在圆环  $\{z : 1 < |z| < 2\}$  中根的个数.

**解** 我们只需分别算出它在圆盘  $|z| \leq 1$  和  $|z| < 2$  中根的个数, 二者之差即为在圆环  $1 < |z| < 2$  中根的个数.

利用例题 0.1 中的方法, 容易知道原方程在  $|z| < 1$  中只有 1 个根. 而在圆周  $|z| = 1$  上, 由于

$$|z^4 - 6z + 3| \geq 6 - |z^4 + 3| \geq 2,$$

故在圆周  $|z| = 1$  上不可能有零点. 所以, 在  $|z| \leq 1$  中只有 1 个根.

为了计算  $|z| < 2$  中根的个数, 令  $f(z) = z^4, g(z) = z^4 - 6z + 3$ , 于是在圆周  $|z| = 2$  上, 有

$$|f(z) - g(z)| \leq |6z| + 3 = 15 < 16 = |f(z)|.$$

故由 Rouché 定理,  $g(z) = z^4 - 6z + 3$  和  $f(z) = z^4$  在  $|z| < 2$  中的零点个数相同, 因而原方程在  $|z| < 2$  中有 4 个根. 由此即知原方程在圆环  $1 < |z| < 2$  中有 3 个根. □

**例题 0.3** 证明: 方程  $z^4 + 2z^3 - 2z + 10 = 0$  在每个象限内各有一个根.

**证明** 记

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10,$$

我们直接用辐角原理来证明它在第一象限内只有一个零点. 为此, 取围道如图 2 所示, 为了应用辐角原理, 我们要证明  $P$  在  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  上都没有零点. 当  $R$  充分大时,  $P$  在  $\gamma_2$  上没有零点是显然的.

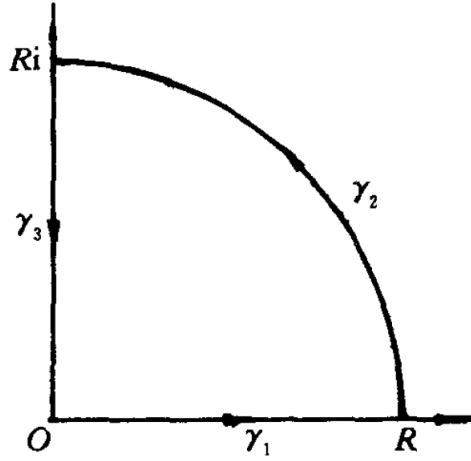


图 2

当  $z \in \gamma_1$  时,  $z = x > 0$ , 于是

$$P(z) = P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 10 = (x^2 - 1)(x + 1)^2 + 11.$$

故当  $x > 1$  时,  $P(x) > 11$ ; 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $P(x) \geq -2 + 11 = 9$ . 因此,  $P$  在  $\gamma_1$  上取正值. 当  $z \in \gamma_3$  时,  $z = iy, y > 0$ , 显然

$$P(iy) = y^4 + 10 - 2iy(y^2 + 1) \neq 0.$$

现在来计算  $P$  在  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  上辐角的变化. 由于  $P$  在  $\gamma_1$  上取正值, 所以

$$\Delta_{\gamma_1} \text{Arg} P(z) = 0. \quad (9)$$

当  $z \in \gamma_2$  时, 有

$$P(z) = z^4 \left( 1 + \frac{2z^3 - 2z + 10}{z^4} \right) = z^4 Q(z),$$

这里,  $Q(z) = 1 + \frac{2z^3 - 2z + 10}{z^4}$ . 当  $|z|$  充分大时, 有

$$|Q(z) - 1| = \left| \frac{2z^3 - 2z + 10}{z^4} \right| < 1,$$

即  $Q(z)$  落在以 1 为中心、半径为 1 的圆内, 所以  $\Delta_{\gamma_2} \text{Arg} Q(z) = 0$ , 于是

$$\Delta_{\gamma_2} \text{Arg} P(z) = 4\Delta_{\gamma_2} \text{Arg} z + \Delta_{\gamma_2} \text{Arg} Q(z) = 2\pi. \quad (10)$$

当  $z \in \gamma_3$  时, 有

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_3} \text{Arg} P(z) &= \text{Arg} P(0) - \text{Arg} P(iR) \\ &= -\text{Arg}\{R^4 + 10 - 2iR(R^2 + 1)\} \\ &= -\text{Arg}(R^4 + 10) \left( 1 - \frac{2iR(R^2 + 1)}{R^4 + 10} \right) \\ &= -\text{Arg} \left( 1 - \frac{2iR(R^2 + 1)}{R^4 + 10} \right) \\ &= 0 \quad (R \text{ 充分大时}). \end{aligned} \quad (11)$$

由 (9), (10) 和 (11) 式即得

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg} P(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_2} \text{Arg} P(z) = 1.$$

根据辐角原理,  $P$  在第一象限内只有一个零点.

由于  $P$  是实系数多项式, 它的零点是共轭出现的, 故在第四象限内也有一个零点.

用与前面相同的方法, 可以证明  $P$  在负实轴上没有零点, 因此剩下的两个零点当然就在第二、第三象限中了.

□