0.1 可测函数与连续函数的关系

0.1.1 Lusin 定理

引理 0.1

设 $F_1,\cdots,F_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的闭集, 记 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$, 则定义在 F 上的任意简单函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\chi_{F_k}(x)$ 都是 F 上的连续函数.

证明 设 $x_0\in F$, 则存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $x_0\in F_{k_0}$. 由于 $F_1,\cdots,F_n$ 互不相交, 故 $x_0\notin\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$. 又 $\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$ 闭, 则由命题??(3) 可知 $d(x_0,\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k)>0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 记 $\delta=d(x_0,\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k)$. 则当 $x\in F\cap B(x,\delta)$ 时, 有

$$d\left(x,\bigcup_{k\neq k_0}F_k\right)\geqslant d\left(x_0,\bigcup_{k\neq k_0}F_k\right)-d\left(x,x_0\right)=\delta-d\left(x,x_0\right)>0.$$

于是由命题??(2) 可知 $x\notin F\backslash\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$, 故 $x\in F_{k_0}$. 从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|c_{k_0}-c_{k_0}|=0<\varepsilon$$

因此,f 在点 x_0 连续, 由 x_0 的任意性,f 在 F 上连续.

□

定理 0.1 (Lusin(卢津) 定理)

若 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta>0$, 存在 E 中的闭集 F,$m(E\setminus F)<\delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

注 上述Lusin 定理的结论不能改为:$f(x)$ 是 $E\setminus Z$ 上的连续函数, 其中 $m(Z)=0$(Lusin 定理也可不用 Egorov 定理来证明, 见美国数学月刊 (1988)). 粗略地讲,Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了.

注 1.不妨妨假定 $f(x)$ 是实值函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 是实值函数的情形, 令

$$E_1=\{x\in E:|f(x)|<+\infty\},E_2=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}.$$

则 $E_1\cap E_2=\varnothing$,$E=E_1\cup E_2$. 由假设可知, 对 $\forall\delta>0$, 存在闭集 $F\subset E_1\subset E$,$m(E_1\setminus F)<\delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数. 又由 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限可知 $m(E_2)=0$. 进而

$$m(E\setminus F)=m((E_1\cup E_2)\cap F^c)=m((E_1\setminus F)\cap(E_2\setminus F))=m(E_1\setminus F)+m(E_2\setminus F)<\delta.$$

从而原结论成立.

2.不妨设 $f(x)$ 是有界函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 有界的情形, 则当 $f(x)$ 无界时, 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$, 则

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}=1-\frac{1}{1+f(x)}\leqslant 1,\quad\forall x\in\{x\in E:f(x)\geqslant 0\};$$
$$g(x)=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{1}{1-f(x)}-1\geqslant -1,\quad\forall x\in\{x\in E:f(x)<0\}.$$

从而 $|g(x)|<1$,$\forall x\in E$. 即 $g(x)$ 有界. 于是由假设可知, 对 $\forall\delta>0$, 存在 E 中的闭集 F,$m(E\setminus F)<\delta$, 使得 $g(x)$ 是 F 上的连续函数.

又注意到

$$f(x)=g(x)(1+|f(x)|)=\frac{g(x)}{1+|f(x)|}=\frac{g(x)}{1-\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}}=\frac{g(x)}{1-|g(x)|},$$

故由连续函数的性质可知, 此时 $f(x)$ 也是 F 上的连续函数. 从而原结论成立.

证明 不妨假定$f(x)$ 是实值函数, 这是因为 $f(x)$ 几乎处处有限, 从而

$$m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

(1) 首先考虑 $f(x)$ 是可测简单函数的情形:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x), x \in E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j).$$

此时, 由定理??可知, 对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 E_i, 可作 E_i 中的闭集 F_i, 使得

$$m(E_i \setminus F_i) < \frac{\delta}{p}, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

显然 $F_1, F_2, \cdots, F_p$ 是互不相交的闭集, 于是由引理 0.1可知 $f(x)$ 在 $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ 上连续. 由闭集的运算性质可知 F 也是闭集, 且由定理????有

$$m(E \setminus F) \leqslant m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \setminus F_i)) = \sum_{i=1}^{p} m(E_i \setminus F_i) < \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta}{p} = \delta.$$

(2) 其次, 考虑 $f(x)$ 是一般可测函数的情形. 由于可作变换

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \quad \left(f(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|}\right),$$

故不妨假定$f(x)$ 是有界函数. 根据简单函数逼近定理可知, 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 现在对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$, 由 (1) 可知存在 E 中的闭集 F_k:$m(E \setminus F_k) < \frac{\delta}{2^k}$, 使得 $\varphi_k(x)$ 在 F_k 上连续. 令 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $F \subset E$, 又由闭集的运算性质可知 F 为闭集. 且有

$$\begin{aligned} m(E \setminus F) &= m(E \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^c) \\ &= m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \setminus F_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \delta. \end{aligned}$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 F 上都是连续的, 所以根据一致收敛性可知,$f(x)$ 在 F 上连续.

□

定理 0.2 (Lusin 定理的逆定理 可测函数的又一定义)

设 $f(x)$ 为可测集 E 上几乎处处有限的实值函数, 若对 $\forall \delta > 0$, 存在闭集 $F_\delta \subset E$, 使得 $m(E - F_\delta) < \delta$, 且 $f(x)$ 在 F_δ 上连续, 则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都存在闭集 $F_n \subset E$ 使得 $m(E - F_n) < 1/n$, 且 $f(x)$ 在 F_n 上连续, 故 $f(x)$ 在 F_n 上可测. 记 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $f(x)$ 在 F 上可测. 由于 $F_n \subset F, n = 1, 2, \cdots$, 故

$$m(E - F) \leqslant m(E - F_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

令 $n \to \infty$ 得, $m(E - F) = 0$. 从而 $f(x)$ 在 $E - F$ 上可测. 因此, $f(x)$ 在 $E = F \cup (E - F)$ 上可测.

□

推论 0.1

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$, 使得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \delta;$$

若 E 还是有界集, 则可使上述 $g(x)$ 具有紧支集.

证明 由Lusin 定理可知, 对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F,$m(E \setminus F) < \delta$ 且 $f(x)$ 是 F 上的连续函数, 从而根据连

续函数延拓定理 (2), 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$f(x) = g(x), \quad x \in F.$$

因为 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E \setminus F$, 所以得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant m(E \setminus F) < \delta.$$

若 E 是有界集, 不妨设 $E \subset B(0,k)$, 则作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 且满足 ($\varphi$ 在 $B(0,k)\backslash F$ 中连续且端点连续连接)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \notin B(0,k). \end{cases}$$

从而将上述 $g(x)$ 换成 $g(x) \cdot \varphi(x)$. 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$, 则 $g(x)$ 的支集为 $\overline{A} \subset B(0,k)$. 于是 $\overline{A}$ 为有界闭集, 进而 $g(x)$ 具有紧支集.

□

推论 0.2

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

♡

证明 由推论 0.1可知, 对于任意的趋于零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g_k(x)| \geqslant \varepsilon_k\}) < \delta_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

这说明 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 从而根据 Riesz 定理, 可选子列 $\{g_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} g_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

□

注 我们知道,$\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

可以表示为 (双重指标) 连续函数列的累次极限:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} [\cos(n!2\pi x)]^{2k} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

然而, 并不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

例题 0.1 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

证明 因为 $f(x+h) - f(x) = f(h)$ 以及 $f(0) = 0$, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续即可. 根据Lusin 定理, 可作有界闭集 F:$m(F) > 0$, 使得 $f(x)$ 在 F 上 (一致) 连续, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x - y| < \delta_1, \quad x, y \in F.$$

现在研究 $F - F$. 由 Steinhaus 定理知道, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$F - F \supset [-\delta_2, \delta_2].$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $z \in [-\delta, \delta]$ 时, 由于存在 $x, y \in F$, 使得 $z = x - y$, 故可得

$$|f(z)| = |f(x-y)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

□

例题 0.2 设 $f(x)$ 是 $I=(a,b)$ 上的实值可测函数. 若 $f(x)$ 具有中值 (下) 凸性质:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x,y\in I,$$

则 $f\in C(I)$.

证明 根据数学分析的理论易知, 若 $f(x)$ 是 I 上的有界函数, 则 $f\in C(I)$.

对此, 假定 $f(x)$ 在 $x=x_0\in I$ 处不连续, 且考查区间 $[x_0-2\delta, x_0+2\delta]\subset I$, 其中存在 $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k\in(x_0-\delta, x_0+\delta), \quad f(\xi_k)\geqslant k \quad (k=1,2,\cdots).$$

对于任意的 $x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$, 显然有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta, \quad x_0-2\delta\leqslant x' \overset{\text{def}}{=} 2\xi_k - x\leqslant x_0+2\delta.$$

由 $2\xi_k=x'+x$ 可知 $2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$, 从而必有 $f(x)\geqslant k$ 或者 $f(x')\geqslant k$. 这说明

$$m(\{x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta): f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

也就是说, 对于任意大的自然数 k, 均有

$$m(\{x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta: f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

从而导致 $f(x_0)=+\infty$, 矛盾, 即得所证.

□

0.1.2 复合函数的可测性

引理 0.2

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测的充分必要条件是, 对于 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 G,$f^{-1}(G)$ 是可测集.

♡

证明 **充分性**: 对 $\forall t\mathbb{R}$, 显然 $(t,+\infty)$ 可测, 故由充分性的假设可知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 也可测, 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测.

必要性: 由假设知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集, 故知对任意的区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$, 点集

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\setminus f^{-1}([b,+\infty))$$

是可测的. 若 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集, 则由开集构造定理 (1) 可设 $G=\bigcup\limits_{k\geqslant1}(a_k,b_k)$, 从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geqslant1}f^{-1}(a_k,b_k)$$

可知 $f^{-1}(G)$ 是可测集.

□

定理 0.3

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数,$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x)=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

♡

注 当 $f(x)$ 是可测函数而 $g(x)$ 是连续函数时,$f(g(x))$ 就不一定是可测函数 (见例题 0.3).

证明 由 f 的连续性可知, 对任一开集 $G\subset\mathbb{R}$, 都有 $f^{-1}(G)$ 是开集. 再根据 $g(x)$ 的可测性, 由推论 0.2可知 $g^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $h(x)=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

□

例题 0.3 设 $\varPhi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\varPsi(x)=\frac{x+\varPhi(x)}{2},$$

则 $\varPsi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集,W 是 $\varPsi(C)$ 中的不可测子集.

现在令 $f(x)$ 是点集 $\Psi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 作

$$g(x)=\Psi^{-1}(x),\quad x\in[0,1].$$

显然,$f(x)=0$,a.e. $x\in[0,1]$,$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 易知 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不是可测函数.

注 该例说明, 存在可测函数 $f(x)$, 它有反函数 $f^{-1}(x)$, 但 $f^{-1}(x)$ 不可测.

定理 0.4

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换, 当 $Z\subset\mathbb{R}^n$ 且 $m(Z)=0$ 时,$T^{-1}(Z)$ 是零测集. 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

♡

证明 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的任一开集, 由假设知道 $f^{-1}(G)$ 是可测集. 不妨设 $f^{-1}(G)=H\setminus Z$, 其中 $m(Z)=0$, 且 H 是 G_δ 型集. 由假设可知 $T^{-1}(Z)$ 是零测集以及 $T^{-1}(H)$ 是 G_δ 型集, 故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G))=T^{-1}(H)\setminus T^{-1}(Z)$$

立即得出 $T^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

□

推论 0.3

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的实值可测函数,$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

♡

证明

□

例题 0.4 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明 (i) 记 $F(x,y)=f(x)$,$(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, 则因对 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$\{(x,y):F(x,y)>t\}=\{(x,y):f(x)>t,y\in\mathbb{R}^n\},$$

所以 $F(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

(ii) 作 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 的非奇异线性变换 T:

$$\begin{cases}x=\xi-\eta,\\ y=\xi+\eta,\end{cases}\quad(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

易知在变换 T 下,$F(x,y)$ 变为 $F(\xi-\eta,\xi+\eta)=f(\xi-\eta)$, 从而 $f(\xi-\eta)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

□

例题 0.5 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的实值可测函数, 令 $F(x,y)=f(y/x)(0<x,y<+\infty)$, 则 $F(x,y)$ 是 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上的二元可测函数.

证明 令 $g(\theta)=f(\tan\theta)$,$0<\theta<\pi/2$. 因为 $y=\tan x$ 的反函数是绝对连续的, 它把零测集变为零测集 (见第五章), 所以 $g(\theta)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可测. 从而对 $t\in\mathbb{R}$, 点集

$$E=\{\theta:0<\theta<\pi/2,g(\theta)>t\}$$

是可测集. 又由于我们有

$$\begin{aligned}&\{(x,y):0<x<+\infty,0<y<+\infty,F(x,y)>t\}\\=&\{(r\cos\theta,r\sin\theta):0<r<+\infty,\theta\in E\}=S_E(0,+\infty),\end{aligned}$$

故根据例题**??**所述, 即得所证.

□

定理 0.5

设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 是单变量 $y\in\mathbb{R}$ 的可测函数;

(ii) $f(x,y)$ 是单变量 $x\in\mathbb{R}$ 的连续函数,

则对定义在 $\mathbb{R}$ 上任一实值可测函数 $g(y)$,$f[g(y),y]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明 对 $\mathbb{R}$ 作如下的区间分割:$\left[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right](m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N})$, 并对 $(x,y)\in[(m-1)/n,m/n]\times\mathbb{R}$, 作函数列 (凸线性组合)

$$f_n(x,y)=n\left(\frac{m}{n}-x\right)f\left(\frac{m-1}{n},y\right)+n\left(x-\frac{m-1}{n}\right)f\left(\frac{m}{n},y\right),$$

易知 $f_n(x,y)$ 位于 $f((m-1)/n,y)$ 与 $f(m/n,y)$ 之间.

因为对每点 (x,y), 均存在区间列

$$I_k=\left[\frac{m_k-1}{n_k},\frac{m_k}{n_k}\right](k\in\mathbb{N}),\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}I_k=x.$$

由 (ii) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$, 从而我们有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(g(y),y)=f(g(y),y),$$

即可得证.

$\square$