0.1 矩阵的法式

引理 0.1

设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是任一非零 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 必相抵于这样的一个 λ-矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 中的任一元素 $b_{ij}(\lambda)$.

证明 设 $k=\min\{\deg a_{ij}(\lambda)\mid a_{ij}(\lambda)\neq 0, 1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n\}$, 我们对 k 用数学归纳法. 首先, 经行对换及列对换可将 $A(\lambda)$ 的第 $(1,1)$ 元素变成次数最低的非零多项式, 因此不妨设 $a_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $\deg a_{11}(\lambda)=k$. 若 $k=0$, 则 $a_{11}(\lambda)$ 是一个非零常数, 结论显然成立. 假设对非零元素次数的最小值小于 k 的任一 λ-矩阵, 引理的结论成立, 现考虑非零元素次数的最小值等于 k 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$. 若 $a_{11}(\lambda)$ 可整除所有的 $a_{ij}(\lambda)$, 则结论已成立. 若否, 设在第一列中有元素 $a_{i1}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除, 作带余除法:

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda).$$

用 $-q(\lambda)$ 乘以第一行加到第 i 行上, 第 $(i,1)$ 元素就变为 $r(\lambda)$. 注意到 $r(\lambda)\neq 0$ 且 $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda)=k$, 由归纳假设即知结论成立.

同样的方法可施于第一行. 因此我们不妨设 $a_{11}(\lambda)$ 可整除第一行及第一列. 这时, 设 $a_{21}(\lambda)=a_{11}(\lambda)g(\lambda)$. 将第一行乘以 $-g(\lambda)$ 加到第二行上, 则第 $(2,1)$ 元素变为零. 用同样的方法可消去第一行、第一列除 $a_{11}(\lambda)$ 以外的所有元素, 于是 $A(\lambda)$ 经初等变换后变成下列形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2}(\lambda) & \cdots & a'_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

这时, 若 $a_{11}(\lambda)$ 可整除所有其他元素, 则结论已成立. 若否, 比如 $a_{11}(\lambda)$ 不能整除 $a'_{ij}(\lambda)$, 则将第 i 行加到第一行上去, 这时在第一行又出现了一元素 $a'_{ij}(\lambda)$, 它不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除. 重复上面的做法, 通过归纳假设即可得到结论. □

定理 0.1

设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\}, \tag{1}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r-1)$. 我们称上式中的对角 λ-矩阵为 $A(\lambda)$ 的**法式**或**相抵标准型**或 **Smith** 标准型.

证明 对 n 用数学归纳法, 当 $n=1$ 时结论显然, 现设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵. 由引理 0.1可知 $A(\lambda)$ 相抵于 n 阶 λ-矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$, 其中 $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}(\lambda)$ 对一切 i,j 成立. 因此, 将 $B(\lambda)$ 的第一行乘以 λ 的某个多项式加到第二行上去便可消去 $b_{21}(\lambda)$. 同理可依次消去第一列除 $b_{11}(\lambda)$ 以外的所有元素. 再用类似方法消去第一行其余元素. 这样便得到了一个矩阵:

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \cdots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \cdots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

不难看出, 这时 $b_{11}(\lambda)$ 仍可整除所有的 $b'_{ij}(\lambda)$. 设 c 为 $b_{11}(\lambda)$ 的首项系数, 记 $d_1(\lambda)=c^{-1}b_{11}(\lambda)$, 设 $\overline{B}(\lambda)$ 为上面的矩阵中右下方的 $n-1$ 阶 λ-矩阵, 则由归纳假设可知存在 $P(\lambda)$ 及 $Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i = 2, \cdots, r-1)$, 其中 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ 可写成为有限个 $n-1$ 阶初等 λ-矩阵之积. 因此

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & O \\ O & \overline{B}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

且

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

可写成有限个 n 阶初等 λ-矩阵之积. 于是只需证明 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$ 即可. 但这点很容易看出, 事实上由于 $\overline{B}(\lambda)$ 中的任一元素均可被 $d_1(\lambda)$ 整除, 因此 $P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda)$ 中的任一元素也可被 $d_1(\lambda)$ 整除, 这就证明了定理. □

注 我们上面对 n 阶 λ-矩阵证明了它必相抵于一个对角阵. 事实上, 对长方 λ-矩阵, 结论也同样成立, 证明也类似.(1)式中的 r 通常称为 $A(\lambda)$ 的秩. 但要注意即使某个 n 阶 λ-矩阵的秩等于 n, 它也未必是可逆 λ-矩阵.

推论 0.1

任一 n 阶可逆 λ-矩阵都可表示为有限个初等 λ-矩阵之积.

证明 由定理 0.1, 存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$, 使可逆阵 $A(\lambda)$ 适合

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为有限个初等 λ-矩阵之积. 因为上式左边是个可逆阵, 故右边的矩阵也可逆, 从而 $r = n$. 注意一个对角 λ-矩阵要可逆必须 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 皆为非零常数, 又它们都是首一多项式, 故只能是 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = 1$, 于是

$$A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}Q(\lambda)^{-1}.$$

因为初等 λ-矩阵的逆仍是初等 λ-矩阵, 故 $P(\lambda)^{-1}$ 与 $Q(\lambda)^{-1}$ 都是有限个初等 λ-矩阵之积, 从而 $A(\lambda)$ 也是有限个初等 λ-矩阵之积. □

推论 0.2

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 则 A 的特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 必相抵于

$$\operatorname{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i = 1, 2, \cdots, m-1)$. 我们称上式中的对角 λ-矩阵为 $A(\lambda)$ 的特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的**法式**或**相抵标准型**.

证明 由定理 0.1, 存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为有限个初等 λ-矩阵之积. 根据 λ-矩阵初等变换的定义以及行列式的性质可得, 上式左边的行列式等于 $c|\lambda I_n - A|$, 其中 c 是一个非零常数, 从而上式右边的行列式不为零, 故 $r = n$. 把 $d_i(\lambda)$ 中的常数多项式写出来（因是首一多项式, 故为常数 1）, 即得结论. □

例题 0.1 求 $\lambda I - A$ 的法式, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{3r_1+r_2,-\lambda r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&\lambda+1\\0&\lambda-1&3\lambda+3\\0&\lambda-1&-\lambda^2-\lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow{j_1+j_2,-(\lambda+1)j_1+j_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&3\lambda+3\\0&\lambda-1&-\lambda^2-\lambda+1\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{-3j_2+j_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&6\\0&\lambda-1&-\lambda^2-4\lambda+4\end{pmatrix}\xrightarrow{j_2\leftrightarrow j_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&\lambda-1\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&\lambda-1\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{6j_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&6(\lambda-1)\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&6(\lambda-1)\end{pmatrix}\xrightarrow{-(\lambda-1)j_2+j_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{\frac{1}{6}j_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{pmatrix}\xrightarrow{-(-\lambda^2-4\lambda+4)r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□