## 0.1 可测函数与连续函数的关系

### 0.1.1 Lusin 定理

**引理 0.1**

设 $F_1,\cdots,F_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的闭集, 记 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$, 则定义在 $F$ 上的任意简单函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\chi_{F_k}(x)$ 都是 $F$ 上的连续函数.

**证明** 设 $x_0\in F$, 则存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $x_0\in F_{k_0}$. 由于 $F_1,\cdots,F_n$ 互不相交, 故 $x_0\notin\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$. 又 $\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$ 闭, 则由命题??(3) 可知 $d(x_0,\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k)>0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 记 $\delta=d(x_0,\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k)$. 则当 $x\in F\cap B(x,\delta)$ 时, 有

$$d\left(x,\bigcup_{k\neq k_0}F_k\right)\geqslant d\left(x_0,\bigcup_{k\neq k_0}F_k\right)-d\left(x,x_0\right)=\delta-d\left(x,x_0\right)>0.$$

于是由命题??(2) 可知 $x\notin F\setminus\bigcup\limits_{k\neq k_0}F_k$, 故 $x\in F_{k_0}$. 从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|c_{k_0}-c_{k_0}|=0<\varepsilon$$

因此,$f$ 在点 $x_0$ 连续, 由 $x_0$ 的任意性,$f$ 在 $F$ 上连续. □

**定理 0.1 (Lusin(卢津) 定理)**

若 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta>0$, 存在 $E$ 中的闭集 $F$,$m(E\setminus F)<\delta$, 使得 $f(x)$ 是 $F$ 上的连续函数.

注 上述Lusin 定理的结论不能改为:$f(x)$ 是 $E\setminus Z$ 上的连续函数, 其中 $m(Z)=0$(Lusin 定理也可不用 Egorov 定理来证明, 见美国数学月刊 (1988)). 粗略地讲,Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了.

注 1.不妨妨假定 $f(x)$ 是实值函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 是实值函数的情形, 令

$$E_1=\{x\in E:|f(x)|<+\infty\},E_2=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}.$$

则 $E_1\cap E_2=\varnothing$,$E=E_1\cup E_2$. 由假设可知, 对 $\forall\delta>0$, 存在闭集 $F\subset E_1\subset E$,$m(E_1\setminus F)<\delta$, 使得 $f(x)$ 是 $F$ 上的连续函数. 又由 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处有限可知 $m(E_2)=0$. 进而

$$m(E\setminus F)=m((E_1\cup E_2)\cap F^c)=m((E_1\setminus F)\cap(E_2\setminus F))=m(E_1\setminus F)+m(E_2\setminus F)<\delta.$$

从而原结论成立.

2.不妨设 $f(x)$ 是有界函数的原因: 假设已证 $f(x)$ 有界的情形, 则当 $f(x)$ 无界时, 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$, 则

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}=1-\frac{1}{1+f(x)}\leqslant 1,\quad \forall x\in\{x\in E:f(x)\geqslant 0\};$$
$$g(x)=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{1}{1-f(x)}-1\geqslant -1,\quad \forall x\in\{x\in E:f(x)<0\}.$$

从而 $|g(x)|<1$,$\forall x\in E$. 即 $g(x)$ 有界. 于是由假设可知, 对 $\forall\delta>0$, 存在 $E$ 中的闭集 $F$,$m(E\setminus F)<\delta$, 使得 $g(x)$ 是 $F$ 上的连续函数.

又注意到

$$f(x)=g(x)(1+|f(x)|)=\frac{g(x)}{1+|f(x)|}=\frac{g(x)}{1-\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}}=\frac{g(x)}{1-|g(x)|},$$

故由连续函数的性质可知, 此时 $f(x)$ 也是 $F$ 上的连续函数. 从而原结论成立.

**证明** 不妨假定$f(x)$ 是实值函数, 这是因为 $f(x)$ 几乎处处有限, 从而

$$m(\{x\in E:|f(x)|=+\infty\})=0.$$

(1) 首先考虑 $f(x)$ 是可测简单函数的情形:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x),x\in E=\bigcup_{i=1}^{p}E_i,E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j).$$

此时, 由定理??可知, 对任给的 $\delta>0$ 以及每个 $E_i$, 可作 $E_i$ 中的闭集 $F_i$, 使得

$$m(E_i\setminus F_i)<\frac{\delta}{p},\quad i=1,2,\cdots,p.$$

显然 $F_1,F_2,\cdots,F_p$ 是互不相交的闭集, 于是由引理 0.1可知 $f(x)$ 在 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{p}F_i$ 上连续. 由闭集的运算性质可知 $F$ 也是闭集, 且由定理??(3) 有

$$m(E\setminus F)\leqslant m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\backslash F_i))=\sum_{i=1}^{p}m(E_i\setminus F_i)<\sum_{i=1}^{p}\frac{\delta}{p}=\delta.$$

(2) 其次, 考虑 $f(x)$ 是一般可测函数的情形. 由于可作变换

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\qquad\left(f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}\right),$$

故不妨假定$f(x)$ 是有界函数. 根据简单函数逼近定理可知, 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $E$ 上一致收敛于 $f(x)$. 现在对任给的 $\delta>0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$, 由 (1) 可知存在 $E$ 中的闭集 $F_k$:$m(E\setminus F_k)<\frac{\delta}{2^k}$, 使得 $\varphi_k(x)$ 在 $F_k$ 上连续. 令 $F=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 $F\subset E$, 又由闭集的运算性质可知 $F$ 为闭集. 且有

$$\begin{aligned}m(E\setminus F)&=m(E\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)^c)=m(E\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^c)\\&=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\backslash F_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E\setminus F_k)<\delta.\end{aligned}$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 $F$ 上都是连续的, 所以根据一致收敛性可知,$f(x)$ 在 $F$ 上连续. □

**定理 0.2 (Lusin 定理的逆定理　可测函数的又一定义)**

设 $f(x)$ 为可测集 $E$ 上几乎处处有限的实值函数, 若对 $\forall\delta>0$, 存在闭集 $F_\delta\subset E$, 使得 $m(E-F_\delta)<\delta$, 且 $f(x)$ 在 $F_\delta$ 上连续, 则 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

**证明** 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 都存在闭集 $F_n\subset E$ 使得 $m(E-F_n)<1/n$, 且 $f(x)$ 在 $F_n$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $F_n$ 上可测. 记 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 $f(x)$ 在 $F$ 上可测. 由于 $F_n\subset F,n=1,2,\cdots$, 故

$$m(E-F)\leqslant m(E-F_n)<\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

令 $n\to\infty$ 得, $m(E-F)=0$. 从而 $f(x)$ 在 $E-F$ 上可测. 因此, $f(x)$ 在 $E=F\cup(E-F)$ 上可测. □

**推论 0.1**

若 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$, 使得

$$m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})<\delta;$$

若 $E$ 还是有界集, 则可使上述 $g(x)$ 具有紧支集.

**证明** 由Lusin 定理可知, 对任给的 $\delta>0$, 存在 $E$ 中的闭集 $F$,$m(E\setminus F)<\delta$ 且 $f(x)$ 是 $F$ 上的连续函数, 从而根据连续函数延拓定理 (2), 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$f(x)=g(x),\quad x\in F.$$

因为 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E \setminus F$, 所以得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant m(E \setminus F) < \delta.$$

若 $E$ 是有界集, 不妨设 $E \subset B(0,k)$, 则作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 且满足 ($\varphi$ 在 $B(0,k)\backslash F$ 中连续且端点连续连接)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \notin B(0,k). \end{cases}$$

从而将上述 $g(x)$ 换成 $g(x) \cdot \varphi(x)$. 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$, 则 $g(x)$ 的支集为 $\overline{A} \subset B(0,k)$. 于是 $\overline{A}$ 为有界闭集, 进而 $g(x)$ 具有紧支集. □

**推论 0.2**

若 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

♡

**证明** 由推论 0.1可知, 对于任意的趋于零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g_k(x)| \geqslant \varepsilon_k\}) < \delta_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

这说明 $\{g_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 从而根据 Riesz 定理, 可选子列 $\{g_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} g_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

□

**注** 我们知道,$\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

可以表示为 (双重指标) 连续函数列的累次极限:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} [\cos(n!2\pi x)]^{2k} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

然而, 并不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**例题 0.1** 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

**证明** 因为 $f(x+h) - f(x) = f(h)$ 以及 $f(0) = 0$, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续即可. 根据Lusin 定理, 可作有界闭集 $F$:$m(F) > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $F$ 上 (一致) 连续, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x - y| < \delta_1, \quad x, y \in F.$$

现在研究 $F - F$. 由 Steinhaus 定理知道, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$F - F \supset [-\delta_2, \delta_2].$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $z \in [-\delta, \delta]$ 时, 由于存在 $x, y \in F$, 使得 $z = x - y$, 故可得

$$|f(z)| = |f(x-y)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的. □

**例题 0.2** 设 $f(x)$ 是 $I = (a,b)$ 上的实值可测函数. 若 $f(x)$ 具有中值 (下) 凸性质:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in I,$$

则 $f \in C(I)$.

**证明** 根据数学分析的理论易知, 若 $f(x)$ 是 $I$ 上的有界函数, 则 $f \in C(I)$.

对此, 假定 $f(x)$ 在 $x=x_0\in I$ 处不连续, 且考查区间 $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]\subset I$, 其中存在 $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad f(\xi_k)\geqslant k\quad(k=1,2,\cdots).$$

对于任意的 $x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$, 显然有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta,\quad x_0-2\delta\leqslant x'\overset{\text{def}}{=}2\xi_k-x\leqslant x_0+2\delta.$$

由 $2\xi_k=x'+x$ 可知 $2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$, 从而必有 $f(x)\geqslant k$ 或者 $f(x')\geqslant k$. 这说明

$$m(\{x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta):f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

也就是说, 对于任意大的自然数 $k$, 均有

$$m(\{x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta:f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

从而导致 $f(x_0)=+\infty$, 矛盾, 即得所证. □

### 0.1.2 复合函数的可测性

**引理 0.2**

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测的充分必要条件是, 对于 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $G$,$f^{-1}(G)$ 是可测集.

**证明** **充分性**: 对 $\forall t\mathbb{R}$, 显然 $(t,+\infty)$ 可测, 故由充分性的假设可知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 也可测, 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测.

**必要性**: 由假设知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集, 故知对任意的区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$, 点集

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\setminus f^{-1}([b,+\infty))$$

是可测的. 若 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集, 则由开集构造定理 (1) 可设 $G=\bigcup\limits_{k\geqslant1}(a_k,b_k)$, 从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geqslant1}f^{-1}(a_k,b_k)$$

可知 $f^{-1}(G)$ 是可测集. □

**定理 0.3**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数,$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x)=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

**注** 当 $f(x)$ 是可测函数而 $g(x)$ 是连续函数时,$f(g(x))$ 就不一定是可测函数 (见例题 0.3).

**证明** 由 $f$ 的连续性可知, 对任一开集 $G\subset\mathbb{R}$, 都有 $f^{-1}(G)$ 是开集. 再根据 $g(x)$ 的可测性, 由推论 0.2可知 $g^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $h(x)=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数. □

**例题 0.3** 设 $\varPhi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\varPsi(x)=\frac{x+\varPhi(x)}{2},$$

则 $\varPsi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 $C$ 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集,$W$ 是 $\varPsi(C)$ 中的不可测子集.

现在令 $f(x)$ 是点集 $\varPsi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 作

$$g(x)=\varPsi^{-1}(x),\quad x\in[0,1].$$

显然,$f(x)=0$,a.e. $x\in[0,1]$,$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 易知 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不是可测函数.

**注** 该例说明, 存在可测函数 $f(x)$, 它有反函数 $f^{-1}(x)$, 但 $f^{-1}(x)$ 不可测.

**定理 0.4**

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换, 当 $Z\subset\mathbb{R}^n$ 且 $m(Z)=0$ 时,$T^{-1}(Z)$ 是零测集. 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

**证明** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中的任一开集, 由假设知道 $f^{-1}(G)$ 是可测集. 不妨设 $f^{-1}(G) = H \setminus Z$, 其中 $m(Z) = 0$, 且 $H$ 是 $G_\delta$ 型集. 由假设可知 $T^{-1}(Z)$ 是零测集以及 $T^{-1}(H)$ 是 $G_\delta$ 型集, 故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G)) = T^{-1}(H) \setminus T^{-1}(Z)$$

立即得出 $T^{-1}(f^{-1}(G))$ 是可测集. 这说明 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

**推论 0.3**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的实值可测函数,$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $f(T(x))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

**证明**

□

**例题 0.4** 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

**证明** (i) 记 $F(x,y) = f(x),(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 则因对 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{(x,y) : F(x,y) > t\} = \{(x,y) : f(x) > t, y \in \mathbb{R}^n\},$$

所以 $F(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

(ii) 作 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的非奇异线性变换 $T$:

$$\begin{cases} x = \xi - \eta, \\ y = \xi + \eta, \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

易知在变换 $T$ 下,$F(x,y)$ 变为 $F(\xi-\eta,\xi+\eta) = f(\xi-\eta)$, 从而 $f(\xi-\eta)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

**例题 0.5** 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的实值可测函数, 令 $F(x,y) = f(y/x)(0 < x, y < +\infty)$, 则 $F(x,y)$ 是 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上的二元可测函数.

**证明** 令 $g(\theta) = f(\tan\theta),0 < \theta < \pi/2$. 因为 $y = \tan x$ 的反函数是绝对连续的, 它把零测集变为零测集 (见第五章), 所以 $g(\theta)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可测. 从而对 $t \in \mathbb{R}$, 点集

$$E = \{\theta : 0 < \theta < \pi/2, g(\theta) > t\}$$

是可测集. 又由于我们有

$$\begin{aligned}&\{(x,y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty, F(x,y) > t\}\\ =&\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < +\infty, \theta \in E\} = S_E(0,+\infty),\end{aligned}$$

故根据例题**??**所述, 即得所证. □

**定理 0.5**

设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 是单变量 $y \in \mathbb{R}$ 的可测函数;

(ii) $f(x,y)$ 是单变量 $x \in \mathbb{R}$ 的连续函数,

则对定义在 $\mathbb{R}$ 上任一实值可测函数 $g(y)$,$f[g(y),y]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

**证明** 对 $\mathbb{R}$ 作如下的区间分割: $\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right]$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, 并对 $(x,y) \in [(m-1)/n, m/n] \times \mathbb{R}$, 作函数列 (凸线性组合)

$$f_n(x,y) = n\left(\frac{m}{n} - x\right) f\left(\frac{m-1}{n}, y\right) + n\left(x - \frac{m-1}{n}\right) f\left(\frac{m}{n}, y\right),$$

易知 $f_n(x,y)$ 位于 $f((m-1)/n, y)$ 与 $f(m/n, y)$ 之间.

因为对每点 $(x,y)$, 均存在区间列

$$I_k = \left[\frac{m_k - 1}{n_k}, \frac{m_k}{n_k}\right] (k \in \mathbb{N}), \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = x.$$

由 (ii) 可知 $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$, 从而我们有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(g(y),y) = f(g(y),y),$$

即可得证. $\square$