0.1 可解群和幂零群

定义 0.1 (换位子)

设 g_1, g_2 是群 G 中的两个元素, 称

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$$

为 g_1 与 g_2 的**换位子**.

注 从换位子的定义即得

$$\alpha([g_1, g_2]) = [\alpha(g_1), \alpha(g_2)], \quad \forall \alpha \in \mathrm{Aut}G,\ g_1, g_2 \in G.$$

定义 0.2 (换位子群)

若 H, K 是群 G 的两个子群, 称

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H,\ k \in K\} \rangle$$

为 H 与 K 的**换位子群**.

注 从换位子群的定义即得

$$\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)], \quad \forall \alpha \in \mathrm{Aut}G.$$

引理 0.1

设 H, K 是群 G 的子群, 则有

(1) $[H, K] = \{1\} \iff H \subseteq C_G(K)$;

(2) $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$,
$[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$;

(3) 若 $H \lhd G, K \lhd G$, 则 $[H, K] \lhd G$ 且 $[H, K] \subseteq H \cap K$;

(4) 当 H_1, K_1 分别为 H, K 的子群时有 $[H_1, K_1] \subseteq [H, K]$.

证明

(1) $[H, K] = \{1\}$ 当且仅当对 $\forall h \in H, k \in K$ 有

$$[h, k] = 1 \iff h^{-1}k^{-1}hk = 1 \iff hk = kh \iff hkh^{-1} = k,$$

即 $h \in C_G(K), \forall h \in H$, 即 $H \subseteq C_G(K)$.

(2) 先证 $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$. 若 $[H, K] \subseteq K$, 则

$$[h, k] \in K, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in K, \quad \forall k \in K,\ h \in H.$$

对 $\forall h \in H$, 设 $k \in K$, 则由 $[h, k] \in K$ 知存在 $k_1 \in K$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = k_1 \iff hkk_1^{-1} = kh \iff k = hkk_1^{-1}h^{-1} \in hKh^{-1},$$

故 $K \subseteq hKh^{-1}$. 再设 $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$, 则由 $[h^{-1}, k^{-1}] \in K$ 知存在 $k_2 \in K$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = k_1 \iff hkh^{-1} = kk_1 \in K,$$

故 $hKh^{-1} \subseteq K$. 因此 $hKh^{-1} = K, , \forall h \in H$. 即 $h \in N_G(K), \forall h \in H$. 故 $H \subseteq N_G(K)$.
反之, 若 $H \subseteq N_G(K)$, 对 $\forall h \in H,\ k \in K$, 有 $hKh^{-1} = K$, 从而存在 $h_1 \in H,\ k_1 \in K$, 使

$$k = h_1k_1h_1^{-1} \iff k^{-1} = h_1k_1^{-1}h_1^{-1}.$$

于是

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}h_1k_1^{-1}h_1^{-1}hk = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k.$$

注意到 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} \in hKh^{-1}$, 所以存在 $k_2 \in K$, 使 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} = k_2$. 从而

$$[h,k] = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k = k_2k \in K, \ \forall k \in K, h \in H.$$

故 $[H,K] \subseteq K$.

再证 $[H,K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$. 若 $[H,K] \subseteq H$, 则

$$[h,k] \in H, \quad [h^{-1},k^{-1}] \in H, \quad \forall k \in K, \ h \in H.$$

对 $\forall k \in K$, 设 $h \in H$, 则由 $[h,k] \in H$ 知存在 $h_1 \in H$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = h_1 \iff hk = khh_1 \iff h = khh_1k^{-1} \in kHk^{-1},$$

故 $H \subseteq kHk^{-1}$. 再设 $khk^{-1} \in kHk^{-1}$, 则由 $[h^{-1},k^{-1}] \in H$ 知存在 $h_2 \in H$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = h_1 \iff khk^{-1} = h^{-1}h_1 \in H,$$

故 $kHk^{-1} \subseteq H$. 因此 $kHk^{-1} = H, \forall k \in K$. 即 $k \in N_G(H), \forall k \in K$. 故 $K \subseteq N_G(H)$.

反之, 若 $K \subseteq N_G(H)$, 对 $\forall h \in H, \ k \in K$, 有 $kHk^{-1} = H$, 从而存在 $h_1 \in H, \ k_1 \in K$, 使

$$h = k_1h_1k_1^{-1}.$$

于是

$$[h,k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}k^{-1}k_1h_1k_1^{-1}k = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1}.$$

注意到 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} \in kHk^{-1}$, 所以存在 $h_2 \in H$, 使 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h_2$. 从而

$$[h,k] = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h^{-1}h_2 \in H.$$

故 $[H,K] \subseteq H$.

(3) 设 $H \lhd G, K \lhd G$, 于是对 $\forall \alpha = L_gR_{g^{-1}} \in \mathrm{Int}G$, 有

$$g[H,K]g^{-1} = \alpha([H,K]) = [\alpha(H),\alpha(K)] = [gHg^{-1}, gKg^{-1}] = [H,K],$$

即 $[H,K] \lhd G$. 由 $H \lhd G, K \lhd G$ 知

$$gHg^{-1} = H, \quad gKg^{-1} = K, \quad \forall g \in G.$$

故

$$kHk^{-1} = H, \quad \forall k \in K;$$

$$hKh^{-1} = K, \quad \forall h \in H.$$

即 $K \subseteq N_G(H), \ H \subseteq N_G(K)$. 再由结论 (2) 知 $[H,K] \subseteq H \cap K$.

(4) 此结论是显然的.

□

定义 0.3

幺元为 1 的群 G 中的子群序列

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_t \supset G_{t+1} = \{1\}.$$

若满足 $G_i \lhd G_{i-1}(2 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称之为**次正规序列**,$t$ 称为此序列的长度.$G_{i-1}/G_i(2 \leqslant i \leqslant t+1)$ 称为此序列的**因子**.

若在上述序列中有 $G_i \lhd G(1 \leqslant i \leqslant t+1)$, 则称此序列为**正规序列**.

若两个次正规序列 (正规序列)

$$G = G_1' \supset G_2' \supset \cdots \supset G_r' \supset G_{r+1}' = \{1\},$$

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_t \supset G_{t+1} = \{1\}$$

满足 $\forall G_i'(1 \leqslant i \leqslant r+1), \exists G_{i_j} = G_i'(1 \leqslant i_j \leqslant t+1)$, 则称此序列 $\{G_j\}$ 是序列 $\{G_i'\}$ 的**加细**.

♣

例题 0.1 $S_3 \supset A_3 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_3 的正规序列.

例题 0.2 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的正规序列, 而 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \langle(12)(34)\rangle \supset \{\mathrm{id}\}$ 是 S_4 的次正规序列, 后者是前者作为次正规序列的加细.

定义 0.4

在群 G 中分别归纳地定义 $\{G^{(k)}\}$,$\{\Gamma_k(G)(或\ G^k)\}$,$\{C_k(G)\}$ 为

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad k > 0;$$

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_k(G) = [G, \Gamma_{k-1}(G)], \quad k > 1;$$

$$C_0(G) = \{1\}, \quad C_k(G)/C_{k-1}(G) = C(G/C_{k-1}(G)), \quad k > 0.$$

分别称群 G 中序列

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots,$$

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \cdots,$$

$$C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq C_2(G) \subseteq \cdots$$

为 G 的导出列、降中心列和升中心列.

♣

这里要指出 $C_k(G)$ 是存在的. 显然 $C_1(G) = C(G)$. 设 π_1 是 G 到 $G/C_1(G)$ 上的自然同态. 令

$$C_2(G) = \pi_1^{-1}(C(G/C_1(G))),$$

则 $C_2(G) \lhd G$ 且

$$C_1(G) \subseteq C_2(G), \quad C_2(G)/C_1(G) = C(G/C_1(G)).$$

再令 π_2 是 G 到 $G/C_2(G)$ 上的自然同态, 则

$$C_3(G) = \pi_2^{-1}(C(G/C_2(G))),$$

如此进行下去, 即得所有 $C_k(G)$.

定义 0.5

设 G 是群, 若有 k, 使 $G^{(k)} = \{1\}$, 则称 G 是可解群. 若有 k, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$, 则称 G 是幂零群.
此定义也适用于无限群.

♣

例题 0.3 Abel 群是幂零群, 也是可解群.

例题 0.4 设 $G = S_3$, 于是 $G^{(1)} = \Gamma_2(G) = A_3$, 因而 $G^{(2)} = \{1\}$, 但 $\Gamma_3(G) = A_3 = \Gamma_2(G)$, 故当 $k \geqslant 2$ 时均有 $\Gamma_k(G) = A_3 \neq \{1\}$, 故 S_3 是可解群但不是幂零群.

定理 0.1

设群 G 是群 B 过群 A 的扩张, 则 G 可解的充分必要条件是 A, B 都是可解群.

♡

证明 由 G 是 B 过 A 的扩张, 故可假定 $A \lhd G, B = G/A$. 又设 π 是 G 到 B 的自然同态.

若 G 可解, 则 $A^{(1)} = [A, A] \subseteq [G, G] = G^{(1)}$. 一般有 $A^{(k)} \subseteq G^{(k)}$, 故 A 可解. 又 $\forall a, b \in G$ 有

$$\pi(aba^{-1}b^{-1}) = \pi(a)\pi(b)\pi(a)^{-1}\pi(b)^{-1},$$

故 $\pi(G^{(1)}) = B^{(1)}$. 一般有 $\pi(G^{(k)}) = B^{(k)}$, 故 B 可解.

反之, 若 A, B 可解, 则存在 k_1, k_2, 使 $A^{(k_1)} = B^{(k_2)} = \{1\}$, 故 $\pi(G^{(k_2)}) = \{1\}$, 即 $G^{(k_2)} \subseteq A$, 因而 $G^{(k_1+k_2)} = \{1\}$, 于是 G 可解. □

推论 0.1

可解群的子群, 同态像必是可解群.

定理 0.2

设 G 是群, 则下列条件等价:

(1) G 是可解群;

(2) 存在 G 的正规序列

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_r = \{1\},$$

使 G_i/G_{i+1} 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 G 的次正规序列

$$G = G'_1 \supset G'_2 \supset \cdots \supset G'_s = \{1\},$$

使 G'_i/G'_{i+1} 为 Abel 群,$1 \leqslant i \leqslant s-1$;

(4) 存在 G 的次正规序列

$$G = G''_1 \supset G''_2 \supset \cdots \supset G''_t = \{1\},$$

使 G''_i/G''_{i+1} 为素数阶群,$1 \leqslant i \leqslant t-1$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由于 G 可解, 故有 k, 使 $G^{(k)} = \{1\}$, 因而 G 中有正规序列

$$G \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \cdots \supset G^{(k)} = \{1\}.$$

因 $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, 又由 4.1 节的习题 4 知 $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ 是 Abel 群, 故 G 的导出列满足 2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由于正规序列必为次正规序列, 故条件 2) 成立一定有条件 3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $G = G'_1 \supset G'_2 \supset \cdots \supset G'_s = \{1\}$ 是 G 的次正规序列, 并且 G'_i/G'_{i+1} 为 Abel 群. 由于 G 是有限群, 故 G'_i/G'_{i+1} 也是有限群. 如果对某个 i 有

$$|G'_i/G'_{i+1}| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中,$k \geqslant 1$,$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相等的素数.$\sum\limits_{j=1}^{k} a_j > 1$. 令 P_j 是 G'_i/G'_{i+1} 的 Sylow p_j 子群. 显然,P_j 是 G'_i/G'_{i+1} 的正规子群. 由 4.5 节的习题 11 知有直积分解

$$G'_i/G'_{i+1} = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

又设 P'_k 为 P_k 的 $p_k^{a_k-1}$ 阶子群, 则 G'_i/G'_{i+1} 中有正规子群 $H' = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_{k-1} \otimes P'_k$ 且 $[G'_i/G'_{i+1} : H'] = p_k$, 设 π 为 G'_i 到 G'_i/G'_{i+1} 上的自然同态, 令 $H = \pi^{-1}(H')$, 于是由群的同态基本定理知

$$G'_i \lhd H \lhd G'_{i+1}$$

且 $[G'_i : H] = p_k$,$[H : G'_{i+1}] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k-1}$, 于是 G'_i/H 是素数阶群,H/G'_{i+1} 仍是 Abel 群.

(4) $\Rightarrow$ (1). 因 G''_{t-1} 为素数阶群, 故为循环群, 因而可解, 而 G''_{t-2} 是循环群过循环群的扩张, 由定理 4.6.1 知 G''_{t-2} 是可解群. 设已证 G''_{i+1} 为可解群, 则 G''_i 是循环群过可解群的扩张, 故由定理 4.6.1 知 G''_i 是可解群, 故当 $i = 1$ 时知 G 为可解群. □

例题 0.5 在 A_4 中有正规序列

$$A_4 \supset K_4 \supset \{\mathrm{id}\}.$$

A_4/K_4 是 3 阶群,K_4 是 Abel 群, 于是 A_4 是可解群.

定理 0.3

若群 G 是幂零群, 则 G 的子群与同态像也是幂零群. 反之, 幂零群的中心扩张或幂零群过幂零群的平凡扩张是幂零群.

证明 设 A 是 G 的子群, 由数学归纳法可证得 $\Gamma_k(A) \subseteq \Gamma_k(G)(\forall k \in \mathbf{N})$. 由此知 G 为幂零群则 A 必为幂零群. 又若 f 是 G 到 G_1 上的同态. 用数学归纳法可证明 $\Gamma_k(G_1) = f(\Gamma_k(G))$, 于是 G 为幂零群可得 G_1 也是幂零群.

现设 G 是 B 过 A 的中心扩张, 即 $A \subseteq C(G), G/A = B$, 又设 π 是 G 到 B 上的自然同态. 由 B 幂零有

$$\pi(\Gamma_{k_1}(G)) = \Gamma_{k_1}(B) = \{1\},$$

因而 $\Gamma_{k_1}(G) \subseteq A \subseteq C(G)$. 故 $\forall a \in \Gamma_{k_1}(G), b \in G$ 有 $[a,b] = 1$. 于是 $\Gamma_{k_1+1}(G) = [G, \Gamma_{k_1}(G)] = \{1\}$, 这就证明了 G 是幂零群.

最后, 设 $G = A \otimes B$ 为群的直积且 A, B 都是幂零群, 由 $\forall a_i \in A, b_i \in B(i = 1,2)$, 有 $[a_i, b_i] = 1$. 于是 $[a_1b_1, a_2b_2] = [a_1, a_2][b_1, b_2] \in [A,A][B,B]$, 因而有 $[G,G] = [A,A] \otimes [B,B]$. 由数学归纳法可证

$$\Gamma_k(G) = \Gamma_k(A) \otimes \Gamma_k(B).$$

于是由 A, B 是幂零群可得 G 为幂零群. □

定理 0.4

设 G 是群, 则下列条件等价:

(1) G 是一个幂零群;

(2) G 中有正规序列

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_r = \{1\},$$

使 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1}), 1 \leqslant i \leqslant r-1$;

(3) 存在 k, 使得 $C_k(G) = G$.

♡

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 因 G 是幂零群, 故有 k, 使 $\Gamma_k(G) = \{1\}$, 于是 G 中有正规序列

$$G = \Gamma_1(G) \supset \Gamma_2(G) \supset \cdots \supset \Gamma_k(G) = \{1\},$$

$\Gamma_{i+1}(G) \lhd G$, 因而 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq G/\Gamma_{i+1}(G)$. 设 π 为 G 到 $G/\Gamma_{i+1}(G)$ 的自然同态, 由 $[G, \Gamma_i(G)] = \Gamma_{i+1}(G)$ 知

$$[G/\Gamma_{i+1}(G), \Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G)] = [\pi(G), \pi(\Gamma_i(G))] = \pi(\Gamma_{i+1}(G)) = \{1\},$$

因而 $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \subseteq C(G/\Gamma_{i+1}(G))$, 故 G 的降中心列满足条件 2) 的要求.

(2) $\Rightarrow$ (3). 用反序归纳法证明 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$, 其中,$C_0(G) = \{1\}$. 当 $i = r$ 时,$G_r = \{1\} = C_0(G) = C_{r-r}(G)$. 设 $i+1$ 时已成立, 因而 $G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G)$, 故 $G_{i+1}C_{r-(i+1)}(G) = C_{r-(i+1)}(G)$. 又 $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$, 由此知 $\forall a \in G_i, b \in G$ 有 $aba^{-1}b^{-1} \in G_{i+1} \subseteq C_{r-(i+1)}(G)$. 因而 $a \in C_{r-i}(G)$, 故 $G_i \subseteq C_{r-i}(G)$. 特别地, 有 $G_1 = G \subseteq C_{r-1}(G)$, 即取 $k = r-1$ 知条件 3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设有 k, 使 $C_k(G) = G$, 于是 G 中有正规序列

$$G = C_k(G) \supset C_{k-1}(G) \supset \cdots \supset C_1(G) \supset C_0(G) = \{1\}.$$

用数学归纳法证明 $\Gamma_i(G) \subseteq C_{k-i+1}(G)$. 当 $i = 1$ 时, 显然成立. 由于 $C_{k-i+1}(G)/C_{k-i}(G) = C(G/C_{k-i}(G))$ 有 $[G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G)$, 于是

$$\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)] \subseteq [G, C_{k-i+1}(G)] \subseteq C_{k-i}(G).$$

特别地, 有 $\Gamma_{k+1}(G) \subseteq C_0(G) = \{1\}$, 因而 G 是幂零群. □

定理 0.5

设 p 是一个素数, 则有限 p 群 G 是幂零群.

♡

证明 从定理**??**知 $C(G) \neq \{1\}$, 故 G 是 $G/C(G)$ 过 $C(G)$ 的中心扩张, 而 $|G/C(G)| < |G|$, 由数学归纳法可证得 G 为幂零群. □

例题 0.6 设 H 是四元数体,$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, 其中,$1, i, j, k \in H$ 如 1.5 节的习题 10 所述, 则 G 是 8 阶群. 这是一个非 Abel 幂零群的例子.