0.1 分块矩阵的初等变换与降价公式 (打洞原理)

命题 0.1 (打洞原理)

(1) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 A 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

是一个方阵, 并且 D 为 n 阶可逆子方阵, 那么

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

笔记 打洞原理是一个重要结论, 必须要熟练掌握. 但是在实际解题中我们一般不会直接套用打洞原理的结论, 而是利用分块矩阵的初等变换书写过程.

记忆打洞原理公式的小技巧: 先记住一个模板 $|\square| = |\square| \left|\square - \square\square^{-1}\square\right|$, 然后从左往右填入子矩阵 (每个子矩阵只能填一次), 第一个 □ 填相应的可逆子矩阵, 再从主对角线上另外一个子矩阵开始, 按顺时针顺序将子矩阵填入 □ 即可.

证明 (核心想法: 利用分块矩阵的初等变换消去 B 或 C)

(1) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第一行左乘 $(-CA^{-1})$ 再加到第二行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 根据分块矩阵的初等变换, 对 M 的第二行左乘 $(-BD^{-1})$ 再加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}.$$

然后两边同时取行列式就得到

$$|M| = \begin{vmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I_n & -BD^{-1} \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

□

推论 0.1 (打洞原理推论)

设 A 是 $n \times m$ 矩阵,B 是 $m \times n$ 矩阵, 则

$$\lambda^m|\lambda I_n - AB| = \lambda^n|\lambda I_m - BA|.$$

笔记 这个推论能将原本复杂的矩阵 AB 通过交换顺序变成相对简单的矩阵 BA. 例如:例题 0.2.

注 这是由打洞原理得到的一个重要结论, 也需要熟练掌握. 同样地, 在实际解题中如果不能直接套用打洞原理推论的结论, 就需要利用分块矩阵的初等变换书写过程.

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 结论显然成立.

当 $\lambda \neq 0$ 时, 根据分块矩阵的初等变换可知

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA} \end{pmatrix}.$$

再对上式两边分别取行列式得到

$$\begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}|.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA} \end{vmatrix} = \lambda^n \left| \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA} \right| = \lambda^{n-m} |\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}|.$$

于是 $\begin{vmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m \end{vmatrix} = |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^{n-m} |\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}|$.. 故 $\lambda^m |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^n |\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA}|$. □

推论 0.2

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 AB 和 BA 有完全一样的非 0 特征值且重数也相同.

证明 由推论 0.1立得. □

例题 0.1

1. 设 A 是 n 阶矩阵,D 是 m 阶矩阵.$|A| \neq 0$,$|D - CA^{-1}B| \neq 0$, 计算逆矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$.
2. 设 A 是 n 阶矩阵,C 是 m 阶矩阵. 计算伴随矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{*}$.

证明

1. 由条件可知 $A, D - CA^{-1}B$ 都非异, 于是由分块矩阵初等变换可得

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{pmatrix}.$$

于是对上式两边同时取逆可得

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. 若 A, C 非异, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A|\,|C| \neq 0$, 进而 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 非异. 利用分块矩阵初等变换可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{pmatrix}.$$

故此时就有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{*} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} |A|\,|C|\,A^{-1} & -|A|\,|C|\,A^{-1}BC^{-1} \\ O & |A|\,|C|\,C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |C|\,A^{*} & -A^{*}BC^{*} \\ O & |A|\,C^{*} \end{pmatrix}.$$

对于一般的方阵 A, C, 存在一列有理数 $t_k \to 0$, 使得 $t_kI_n + A, t_kI_m + C$ 都是非异阵. 于是由上述非异的情形可得

$$\begin{pmatrix} t_kI_n + A & B \\ O & t_kI_n + C \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} |t_kI_n + A|\,|t_kI_n + C|\,(t_kI_n + A)^{-1} & -|t_kI_n + A|\,|t_kI_n + C|\,(t_kI_n + A)^{-1}B\,(t_kI_n + C)^{-1} \\ O & |t_kI_n + A|\,|t_kI_n + C|\,(t_kI_n + C)^{-1} \end{pmatrix}.$$

上式两边的矩阵中的元素都是 t_k 的多项式, 从而都关于 t_k 连续. 于是令 $k \to \infty$, 得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} |A|\,|C|\,A^{-1} & -|A|\,|C|\,A^{-1}BC^{-1} \\ O & |A|\,|C|\,C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |C|\,A^{*} & -A^{*}BC^{*} \\ O & |A|\,C^{*} \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.2 求下列矩阵的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 + 1 & \cdots & a_1a_n + 1 \\ a_2a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 + 1 & a_na_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$, 则由降价公式 (打洞原理) 我们有

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n\,|\boldsymbol{I}_2|\left|\boldsymbol{I}_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{\Lambda}' \\ \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} = (-1)^n\,|\boldsymbol{I}_n|\left|\boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_n^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\left|\boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix}\right| = (-1)^n\left[(1-n)\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right].$$

□

例题 0.3 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A-I_n=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}.$$

从而由降价公式可得

$$|A|=\left|I_n+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\right|=|I_n|\left|1+\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}I_n^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\right|=1+\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

□

例题 0.4 计算矩阵 A 的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&\cdots&a_1-b_n\\a_2-b_1&a_2-b_2&\cdots&a_2-b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n-b_1&a_n-b_2&\cdots&a_n-b_n\end{pmatrix}.$$

解 注意到

$$A=\begin{pmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&\cdots&a_1-b_n\\a_2-b_1&a_2-b_2&\cdots&a_2-b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n-b_1&a_n-b_2&\cdots&a_n-b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&-1\\a_2&-1\\\vdots&\vdots\\a_n&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}.$$

当 $n>2$ 时, 由 Cauchy-Binet 公式可知 $|A|=0$. 当 $n=2$ 时,$|A|=a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-b_1a_2$. 当 $n=1$ 时,$|A|=a_1-b_1$.
□

例题 0.5 求下列矩阵的行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3&\cdots&n\\1&0&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

解 将 A 化为

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1,2,\cdots,n),$$

利用降阶公式容易求得 $|A|=(-1)^n n!(1-n)$. □

命题 0.2

设 A,B 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

□

例题 0.6 计算:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解 *解法一:* 令

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix},$$

则 $|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix}$. 由命题 0.2可得

$$|A| = |B+C||B-C| = \begin{vmatrix} x+z & y+w \\ y+w & x+z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-z & y-w \\ y-w & x-z \end{vmatrix}$$
$$= (x+y+z+w)(x+z-y-w)(x+y-z-w)(x+w-y-z).$$

解法二 (求根法): □

命题 0.3

设 A, B 是 n 阶复矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

证明 将分块矩阵的第二行乘以 i 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-\mathrm{i}$ 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & \mathrm{i}A-B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{pmatrix}.$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ B & A-\mathrm{i}B \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|.$$

□

例题 0.7 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 求证:

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

解 反复利用命题 0.2的结论可得

$$|M| = \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix}$$
$$= |A+B+C+D||A-B+C-D||A+B-C-D||A-B-C+D|.$$

□

例题 0.8 设 A, B 是 n 阶矩阵且 $AB = BA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

证明 由命题 0.3的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + \mathrm{i}B| \cdot |A - \mathrm{i}B| = |(A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)| = |A^2 + B^2 - \mathrm{i}(AB - BA)| = |A^2 + B^2|.$$

□

例题 0.9 设 A, B 是 n 阶实矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

证明 注意到 A, B 都是实矩阵, 故 $\overline{|A + \mathrm{i}B|} = |\overline{A + \mathrm{i}B}| = |A - \mathrm{i}B|$, 再由命题 0.3的结论可得

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + \mathrm{i}B| \cdot |A - \mathrm{i}B| = |A + \mathrm{i}B| \cdot \overline{|A + \mathrm{i}B|} \geq 0.$$

□