

0.1 子群与商群

定义 0.1

设 A, B 是群 G 的两个子集, 约定

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}.$$

特别地, 当 $A = \{a\}$ 为单点集时, 记 $AB = aB, BA = Ba$. 当然这些符号对半群与么半群可同样使用.

命题 0.1

设有限群 N_1, N_2, \dots, N_k 满足

$$N_i \cap N_j = \{1\}, i \neq j.$$

则

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

证明 因为 N_i 都是有限群, 所以设

$$N_i = \{n_1^i, n_2^i, \dots, n_{|N_i|}^i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

其中 $n_1^i = 1, i = 1, 2, \dots, k$. 由 $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$ 知当 $i \neq j$ 时, 有

$$n_s^i \neq n_t^j, \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

于是

$$N_1 N_2 \cdots N_k = \{n_{j_1}^1 n_{j_2}^2 \cdots n_{j_k}^k \mid j_i \in \{1, 2, \dots, |N_i|\}, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

因此直接计算 $N_1 N_2 \cdots N_k$ 的元素个数可得

$$|N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

若 $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$, 则当 $i \neq j$ 时, 有 $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$, 故此时有

$$|G| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

□

定义 0.2

群 G 的非空子集 H 若对 G 的运算也构成一个群, 则称为 G 的子群, 记作 $H < G$.

♣

注 显然, $H = \{1\}$ (1 为 G 的么元) 与 $H = G$ 均为 G 的子群, 称为 G 的平凡子群, 其他的子群称为非平凡子群.

定理 0.1

设 H 是群 G 的非空子集, 则下列条件等价:

- (1) H 是 G 的子群;
- (2) $1 \in H$; 若 $a \in H$, 则 $a^{-1} \in H$; 若 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$;
- (3) 若 $a, b \in H$, 则 $ab \in H, a^{-1} \in H$;
- (4) 若 $a, b \in H$, 则 $ab^{-1} \in H$.

♥

证明 (1) \Rightarrow (2). 由 H 对 G 的乘法构成群知 $a, b \in H$, 则 $ab \in H$. 又 H 有么元 $1'$, 即有 $1' \cdot 1' = 1'$. 设 $1'$ 在 G 中的逆元为 $1'^{-1}$, 则有

$$1 = 1' \cdot 1'^{-1} = (1' \cdot 1') \cdot 1'^{-1} = 1',$$

故 $1 \in H$. 设 a 在 H 中的逆元为 a' , 于是 $aa' = 1' = 1$, 即 $a' = a^{-1}$, 故 $a^{-1} \in H$. 由此知 (2) 成立, 而且 H 的么元是

G 的幺元. $a \in H$, a 在 H 中的逆元与在 G 中的逆元一致.

(2) \Rightarrow (3). 这是显然的.

(3) \Rightarrow (4). 若 $a, b \in H$, 故 $a, b^{-1} \in H$, 故 $ab^{-1} \in H$.

(4) \Rightarrow (1). 由 $H \neq \emptyset$ 知 $\exists a \in H$, 因而 $1 = aa^{-1} \in H$. 又由 $1, a \in H$ 知 $a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} \in H$. 又若 $a, b \in H$, 由 $b^{-1} \in H$ 得 $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. 由此可知 G 的乘法也是 H 的乘法. 对 H 而言有幺元 1; 对 $a \in H$ 有逆元 a^{-1} ; 结合律显然成立. 故 H 是 G 的子群. \square

定理 0.2

设 A, B, C, H 是群 G 的非空子集, g 是群 G 的一个元素, 则

- (1) $A(BC) = (AB)C$;
- (2) $gA = gB$ 或 $Ag = Bg \iff A = B$;
- (3) H 是 G 的子群 $\iff HH = H, H^{-1} = H \iff H^{-1}H = H$;
- (4) 如果 A, B 是群 G 的两个子群, 则 AB 也是群 G 的子群的充分必要条件是 $AB = BA$.



证明

(1)

(2)

(3)

(4) 必要性: 设 AB 为 G 的子群. 对任意的 $ab \in AB$, 其中 $a \in A, b \in B$, 有 $(ab)^{-1} \in AB$. 因而存在 $a_1 \in A, b_1 \in B$, 使 $a_1b_1 = (ab)^{-1}$. 从而

$$ab = (a_1b_1)^{-1} = b_1^{-1}a_1^{-1} \in BA,$$

所以

$$AB \subseteq BA.$$

反之, 对任意的 $ba \in BA$, 其中 $b \in B, a \in A$, 有 $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in AB$. 于是

$$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1} \in AB,$$

所以

$$BA \subseteq AB.$$

这就证明了 $AB = BA$.

充分性: 对任意的 $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$, 其中 $a_i \in A, b_i \in B$ ($i = 1, 2$), 由于 $AB = BA$, 因此由定理 0.2(1) 和定理 0.2(3) 有

$$a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1} \in ABA = A(BA) = A(AB) = (AA)B = AB,$$

由此知 AB 是 G 的子群. \square

命题 0.2

(1) 设 H 是群 G 的非空有限子集. 证明: H 是 G 的子群的充分必要条件是 H 关于 G 的运算封闭.

(2) 若 G 是一个群, 则 G 的任意子群的交 $\bigcap_{H < G} H$ 也是 G 的子群.

(3) 若 H_1, H_2 都是群 G 的子群且 $H_2 \subseteq H_1$, 则 H_2 也是 H_1 的子群.

(4) 设 H, K 是群 G 的两个子群. 则 $H \cup K$ 是 G 的子群的充要条件是 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$. 并且群 G 不能被它的两个真子群所覆盖.

注 在这个**命题 0.2(4)**中, 群 G 可能被它的三个真子群所覆盖. 例如, 群

$$U(8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}.$$

易知

$$H = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \quad J = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \quad K = \{\bar{1}, \bar{7}\}$$

都是 $U(8)$ 的真子群, 且 $U(8) = H \cup J \cup K$.

证明

- (1) 必要性显然, 下证充分性. 因为 H 关于 G 的运算封闭, 所以 G 的运算是 H 的代数运算. 又因为 G 的运算满足结合律, 所以 H 的运算也满足结合律.

设 $H = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. 对任意的 $a \in H$, 记 $Ha = \{a_1a, a_2a, \dots, a_na\}$, 则 $Ha \subseteq H$. 于是 $a_i a \neq a_j a (i \neq j)$. 否则, 由 $a_i a = a_j a (i \neq j)$ 可得

$$a_i = a_i(aa^{-1}) = (a_i a)a^{-1} = (a_j a)a^{-1} = a_j(aa^{-1}) = a_j,$$

显然矛盾! 由此推出 $|Ha| = n = |H|$, 于是 $Ha = H$. 这样, 对任意的 $a, b \in H$, 因为 $Ha = H$, 所以必有 $a_i \in H$, 使 $a_i a = b$. 这说明, 对任意的 $a, b \in H$, 方程 $xa = b$ 在 H 中必有解. 同理可证, 方程 $ay = b$ 在 H 中也有解. 从而, 由定理??知 H 为群.

- (2) 设 I 为任一(有限或无限的)指标集, $\{H_i \mid i \in I\}$ 为群 G 的一些子群的集合, 令

$$J = \bigcap_{i \in I} H_i,$$

因为 $e \in H_i (\forall i \in I)$, 所以 $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$, 从而 J 非空; 对 $\forall a, b \in J$, 有 $a, b \in H_i (\forall i \in I)$. 由于 $H_i < G$, 因此 $ab^{-1} \in H_i (\forall i \in I)$, 于是 $ab^{-1} \in J$. 这就证明了 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 为 G 的子群.

- (3) 由 H_2 是 G 的子群知 $ab^{-1} \in H_2, \forall a, b \in H_2$. 又 $H_2 \subseteq H_1$, 故 H_2 也是 H_1 的子群.

- (4) 充分性显然, 下证必要性. 设 $H \cup K$ 是 G 的子群. 如果 $H \subseteq K$, 则结论成立. 如果 $H \not\subseteq K$, 则存在 $h \in H$, 使 $h \notin K$. 由于 $H \cup K$ 为 G 的子群, 因此对任意的 $k \in K$, 有 $hk \in H \cup K$. 从而必有 $hk \in H$ 或 $hk \in K$. 如果 $hk \in K$, 则 $h = hk \cdot k^{-1} \in K$, 这与 h 的选取矛盾. 从而必有 $hk \in H$, 由此推出 $k = h^{-1} \cdot hk \in H$. 由 k 的任意性知 $K \subseteq H$. 这就证明了必要性.

设 H, K 是群 G 的两个子群. 如果 $G = H \cup K$, 由前面所证, 应有 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$, 于是有 $G = K$ 或 $G = H$. 这说明 H, K 不可能都是 G 的真子群. 因此群 G 不能被它的两个真子群所覆盖.

□

定理 0.3

1. 设 V 是数域 \mathbb{P} 上的 n 维线性空间. S_V 为 V 上的全变换群, $GL(V)$ 表示 V 上所有可逆线性变换的集合, 则 $GL(V)$ 为 S_V 的子群, 称为线性空间 V 的一般线性群.
又设 $SL(V)$ 为 V 上所有行列式等于 1 的线性变换的集合, 则 $SL(V)$ 是 $GL(V)$ (同时也是 S_V) 的子群, 称为特殊线性群.
2. 设 V 是 n 维 Euclid 空间. 以 $O(V)$ 表示 V 上所有正交变换的集合, $SO(V)$ 表示所有行列式等于 1 的正交变换的集合, 则 $O(V)$ 是 $GL(V)$ 的子群, $SO(V)$ 是 $O(V)$ 的子群. $O(V)$ 称为 V 的正交变换群, 简称正交群, $SO(V)$ 称为转动群(或特殊正交变换群、特殊正交群).

♡

注 将上述 S_V 换成数域 \mathbb{P} 上的全体方阵构成的乘法群, 线性变换换成方阵, 结论也成立.

证明

□

定义 0.3

设 H 是群 G 的子群, 又 $a \in G$. 集合 aH 与 Ha 分别称为以 a 为代表的 H 的左陪集与右陪集.

♣

定理 0.4

设 H 是群 G 的子群, 则由

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H$$

所确定的 G 中的关系 R 是一个等价关系, 并且 a 所在的等价类为 aH , 故 H 的左陪集族 $\{aH : a \in G\}$ (集合无相同元素) 是 G 的一个分划. 即

$$G = \bigsqcup_{a \in G} aH,$$

其中 a 取遍不同 H 的左陪集的代表元.



证明 由 $a^{-1}a \in H$ 知 $aRa (\forall a \in G)$. 又设 aRb , 即 $a^{-1}b \in H$, 故 $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$, 即 bRa . 再设 aRb, cRb , 即 $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$, 故 $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$, 即 aRc . 这样知 R 是等价关系. 又由 $b = a(a^{-1}b)$ 知

$$aRb \iff a^{-1}b \in H \iff b \in aH,$$

故 a 所在的等价类为 aH . 由定理 1.18 知 $\{aH : a \in G\}$ 为 G 的一个分划.

**定理 0.5**

设 H 是群 G 的非空子群, $a, b \in G$, 则

- (1) $a \in aH$;
- (2) $aH = H$ 的充分必要条件是 $a \in H$;
- (3) aH 为子群的充分必要条件是 $a \in H$;
- (4) $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$ 或 $b^{-1}a \in H \iff aH \cap bH \neq \emptyset$;
- (5) 若 H 还是有限群, 则 $|aH| = |bH| = |Ha| = |Hb| = |aHb|$.

**证明**

- (1) $a = ae \in aH$.
- (2) 如果 $aH = H$, 因 $a \in aH$, 所以 $a \in H$.

反之, 如果 $a \in H$, 则 $a^{-1} \in H$. 从而

$$aH \subseteq H \cdot H = H, \quad H = (aa^{-1})H = a(a^{-1}H) \subseteq aH,$$

所以 $aH = H$.

- (3) 设 aH 为子群. 因为 $a \in aH$, 所以 $a^{-1} \in aH$, 于是 $e = aa^{-1} \in aH$. 从而存在 $h \in H$, 使 $e = ah$. 所以 $a = eh^{-1} = h^{-1} \in H$.

另一方面, 如果 $a \in H$, 则 $aH = H$ 为子群.

- (4) 如果 $aH = bH$, 则

$$a^{-1}bH = a^{-1}aH = H,$$

从而由 (2) 知 $a^{-1}b \in H$.

反之, 如果 $a^{-1}b \in H$, 则又由 (2) 得 $a^{-1}bH = H$, 于是

$$aH = a(a^{-1}bH) = (aa^{-1})bH = ebH = bH.$$

故 $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$. 交换 a, b 位置即得 $bH = aH \iff b^{-1}a \in H$.

若 $aH = bH$, 则显然有 $aH \cap bH \neq \emptyset$. 假设 $aH \cap bH \neq \emptyset$. 任取 $g \in aH \cap bH$, 则存在 $h_1, h_2 \in H$, 使

$$ah_1 = g = bh_2.$$

从而

$$aH = a(h_1H) = (ah_1)H = (bh_2)H = b(h_2H) = bH.$$

故 $aH = bH \iff aH \cap bH \neq \emptyset$.

(5) 考察映射

$$\sigma : aH \rightarrow bH,$$

$$ah \mapsto bh,$$

易知 σ 为一一对应, 所以 $|aH| = |bH|$. 其他同理可证.

□

定义 0.4

设 H 是群 G 的子群, 由定理 0.4 定义 G 中的等价关系 R 为

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H.$$

将 G 对等价关系 R 的商集合, 即以左陪集 $aH, a \in G$ 为元素的集合记为 $G/H = \{aH : a \in G\}$, 称为 G 对 H 的左陪集空间. G/H 中元素个数 $|G/H|$ 称为 H 在 G 中的指数, 记为 $[G : H]$. 相应可定义右陪集空间.



注 {1} 作为 G 的子群, 在 G 中指数显然为 $|G|$. 故也记 $|G| = [G : 1]$.

例题 0.1 设 V 是数域 \mathbb{P} 上的 n 维线性空间, $GL(V)$ 有子群 $SL(V)$. 在 V 中取定一组基, 任何一个线性变换由它在这组基下的矩阵完全确定, 可把它们等同起来. $\forall \lambda \in \mathbb{P}, \lambda \neq 0$, 令 $D(\lambda) = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$, 于是 $D(\lambda) \in GL(V)$, 对于 $A \in GL(V)$ 有

$$ASL(V) = D(\lambda)SL(V) \iff \det A = \lambda.$$

于是

$$GL(V) = \bigcup_{\lambda \neq 0} D(\lambda)SL(V),$$

因而

$$[GL(V) : SL(V)] = +\infty.$$

证明

□

例题 0.2 设 V 是 n 维 Euclid 空间. 由 $A \in O(V)$ 有 $\det A = \pm 1$, 令 $D(\lambda) = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$, 于是

$$O(V) = SO(V) \bigcup D(-1)SO(V), \quad [O(V) : SO(V)] = 2.$$

证明

□

定理 0.6 (Lagrange 定理)

设 H 是有限群 G 的子群, 记 1 为 G, H 的幺元, 则有

$$[G : 1] = [G : H][H : 1] \tag{1}$$

因而子群 H 的阶是群 G 的阶的因子.

♡

注 这个结论对无限群 G 也正确, 此时等式两边都是 $+\infty$.

证明 设 $a \in G$. 显然, 映射 $h \rightarrow ah$ 是 H 到 aH 上的一一对应, 因而 $|aH| = |H| = [H : 1]$. 又由定理 0.4 知 $G = \bigcup_{a \in G} aH$ 为不相交的并, $\{aH : a \in G\}$ 的不同左陪集个数为 $[G : H]$, 故式 (1) 成立.

□

定理 0.7

设 H 是群 G 的子群, 则 G 中由

$$aRb, \text{ 若 } a^{-1}b \in H$$

所定义的关系 R 为同余关系的充分必要条件是

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H.$$

此时称 H 为 G 的正规子群, 记为 $H \triangleleft G$. 同时, 商集合 G/H 对同余关系 R 导出的运算

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G$$

也构成一个群, 称为 G 对 H 的商群. 商群 G/H 的幺元为 $1 \cdot H = H$. 为方便计, 常将商群 G/H 中元素记为 $\bar{g} = gH$. 有时也将商群 G/H 记作 $\frac{G}{H}$. 并且 H 为 G/H 的幺元, aH 的逆元为 $a^{-1}H$.



证明 设 R 为同余关系. 又 $g \in G, h \in H$, 于是有

$$gRgh, \quad g^{-1}Rg^{-1},$$

因而 $gg^{-1}R(ghg^{-1})$, 即 $1Rghg^{-1}$, 亦即 $ghg^{-1} \in H$.

反之, 设 $\forall g \in G, h \in H$ 有 $ghg^{-1} \in H$. 设 aRb, cRd , 则 $a^{-1}b, c^{-1}d \in H$, 即 $\exists h_1, h_2 \in H$, 使 $b = ah_1, d = ch_2$, 从而 $c^{-1} = h_2d^{-1}$. 因而 $(ac)^{-1}(bd) = c^{-1}a^{-1}ah_1d = h_2(d^{-1}h_1d) \in H$, 则有 $(ac)R(bd)$, 即 R 为同余关系.

设 R 为同余关系. 因 a 所在等价类为 aH , 由定理 1.20 知 G/H 中的乘法为

$$aH \cdot bH = abH, \quad \forall a, b \in G. \tag{2}$$

显然有 $(aH \cdot bH)cH = abcH = aH(bH \cdot cH)$, $1H \cdot aH = aH$, $a^{-1}H \cdot aH = 1 \cdot H$, 故 G/H 为群.



推论 0.1

- (1) 若 G 为有限群, $H \triangleleft G$, 商群 G/H 的阶 $[G/H : H] = [G : H] = \frac{[G : 1]}{[H : 1]}$.
- (2) 若 G 为无限群, $H \triangleleft G$, 商群 G/H 的阶 $[G/H : H] = [G : H]$.



证明 这是 Lagrange 定理的直接推论.



定理 0.8

设 H 是群 G 的子群, 则下列条件等价:

- (1) $H \triangleleft G$;
- (2) 对 $\forall a, b \in G$, 如果 $ab \in H$, 则 $ba \in H$;
- (3) $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H \iff gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$;
- (4) $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$;
- (5) $gH = Hg, \forall g \in G \iff GH = HG$;
- (6) $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \forall g_1, g_2 \in G$.



注 由这个定理可知一个群的任意正规子群都是 Abel 群.

证明 (1) \Rightarrow (2). 设 H 是 G 的正规子群, 则对任意的 $a, b \in G$, 如果 $ab \in H$, 则

$$ba = b(ab)b^{-1} \in H.$$

(2) \Rightarrow (3). 对 $\forall a, b \in G$, 如果 $ab \in H$, 可推出 $ba \in H$, 则对任意的 $a \in G, h \in H$, 由于 $a^{-1}(ah) = h \in H$, 因此

$$aha^{-1} = (ah)a^{-1} \in H,$$

(3) \Rightarrow (4). 对 $\forall g \in G$, 由 $gHg^{-1} \subseteq H$ 知, 对 $\forall h \in H$, 有 $g^{-1}hg = (g^{-1})^{-1}hg^{-1} \in H$. 从而 $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$. 故由 h 的任意性知 $H \subseteq gHg^{-1}$. 因此 $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$.

(4) \Rightarrow (5). $\forall g \in G, h \in H$ 有 $gh = ghg^{-1}g \in Hg, hg = gg^{-1}hg \in gH$, 故 $gH = Hg$.

(5) \Rightarrow (6). 设 $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2, h \in H$. 由 $gH = Hg$ 知 $\exists h'_1, h' \in H$, 使 $h_1g_2 = g_2h'_1, g_2h = h'g_2$. 于是

$g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h'_1h_2 \in g_1g_2H$, $g_1g_2h = g_1h'g_2 \cdot 1 \in g_1H \cdot g_2H$, 故 $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$.

(6) \Rightarrow (1). 设 $g \in G, h \in H$, 故有 $ghg^{-1} \in gHg^{-1}H = gg^{-1}H = H$, 则 $H \triangleleft G$. □

命题 0.3

- (1) Abel 群 G 的任一子群 H 都是正规子群, 商群 G/H 也是 Abel 群.
- (2) 若 H 是群 G 的子群且 $H \trianglelefteq N, N \triangleleft G$, 则 $N \triangleleft H$.
- (3) 设 H 和 N 分别是群 G 的子群和正规子群. 证明: HN 是 G 的子群.
- (4) 若 G 是一个群, 则 G 的任意正规子群的交 $\bigcap_{H \trianglelefteq G} H \triangleleft G$.
- (5) 设 G 是一个群, 且 $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$, 则 $N_1N_2 \cdots N_k \triangleleft G$.
- (6) 设 G 是一个群, $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$, 且 $N_i \cap N_j = \{1\}$ ($i \neq j$), 则对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

并且

$$N_j \subseteq C_G(N_i) = \{g \in G \mid gn_i = n_i g, \forall n_i \in N_i\}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

证明

(1) 因为

$$aH = \{ah \mid h \in H\} = \{ha \mid h \in H\} = Ha, \quad \forall a \in G,$$

所以 H 是 G 的正规子群.

对 $\forall g_1H, g_2H \in G/H$, 由定理 0.8(6) 有

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H = g_2g_1H = g_2Hg_1H.$$

故 G/H 也是 Abel 群.

(2) 由命题 0.2(3) 知 N 是 H 的子群. 又由 $N \triangleleft G$ 知

$$gn^{-1} \in N \subseteq H, \quad \forall n \in N, g \in H.$$

故 $N \triangleleft H$.

(3) 由于 N 是 G 的正规子群, 因此对任意的 $h \in H$, 有 $hN = Nh$. 由此推出, $HN = NH$, 从而由定理 0.2(4) 知, HN 为 G 的子群.

(4) 设 I 为任意指标集, $H_i \triangleleft G, \forall i \in I$. 则对 $\forall g \in G$, 有

$$gH_i g^{-1} \subseteq H_i, \quad \forall i \in I.$$

对 $\forall h \in \bigcap_{i \in I} H_i$, 有 $h \in H_i, \forall i \in I$. 从而由上式可得

$$ghg^{-1} \in H_i, \quad \forall i \in I \implies ghg^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i.$$

进而 $g \bigcap_{i \in I} H_i g^{-1} \subseteq \bigcap_{i \in I} H_i$. 故由定理 0.8(2) 知 $\bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$.

(5) 由 $N_i \triangleleft G, i = 1, 2, \dots, k$ 知

$$gn_i g^{-1} \in N_i, \quad \forall n_i \in N_i, g \in G.$$

于是对 $\forall n_1 n_2 \cdots n_k \in N_1 N_2 \cdots N_k, g \in G$, 有

$$g(n_1 n_2 \cdots n_k) g^{-1} = (gn_1 g^{-1})(gn_2 g^{-1}) \cdots (gn_k g^{-1}) \in N_1 N_2 \cdots N_k.$$

故 $N_1 N_2 \cdots N_k \triangleleft G$.

(6) 证法一: 对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 由 $N_i, N_j \triangleleft G$ 知

$$gN_j = N_j g, \quad g^{-1}N_i = N_i g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

从而对 $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$, 存在 $n'_j \in N_j, n'_i \in N_i$, 使得

$$\begin{aligned} n_i n_j &= n'_j n_i, \quad n_i^{-1} n_j^{-1} = n_j^{-1} n'_i, \\ n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} &= n'_j n_i n_i^{-1} n_j^{-1} = n'_j n_j^{-1} \in N_j, \\ n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} &= n_i n_j n_j^{-1} n'_i = n_i n'_i \in N_i. \end{aligned}$$

故 $n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} \in N_i \cap N_j = \{1\}$. 因此

$$n_i n_j n_i^{-1} n_j^{-1} = 1 \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

进而

$$n_j \in C_G(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

再由 n_j 的任意性知

$$N_j \subseteq C_G(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

证法二: 对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 由引理????知 $[N_i, N_j] \subseteq N_i \cap N_j = \{1\}$, 故 $[N_i, N_j] = \{1\}$. 因此对 $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$, 有

$$1 = [n_i, n_j] = n_i^{-1} n_j^{-1} n_i n_j \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

并且由引理????知

$$N_j \subseteq C_G(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

□

例题 0.3 将商群 G/H 中元素记为 $\bar{g} = gH$, 则

- (1) $SL(V) \triangleleft GL(V)$, $GL(V)/SL(V) = \{\overline{D(\lambda)} | \lambda \neq 0\}$ 且 $\overline{D(\lambda)D(\mu)} = \overline{D(\lambda\mu)}$;
- (2) $SO(V) \triangleleft O(V)$, $O(V)/SO(V) = \{\overline{D(1)}, \overline{D(-1)}\}$;
- (3) $A_n \triangleleft S_n$, $S_n/A_n = \{\overline{1}, \overline{\sigma} | \sigma \text{ 奇置换}\}$ 且

$$\overline{1} \cdot \overline{\sigma} = \overline{\sigma} \cdot \overline{1} = \overline{\sigma}, \quad \overline{\sigma} \cdot \overline{\sigma} = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}.$$

- (4) 对任意的 $a \in G$, 由已知条件知, 存在 $b \in G$, 使 $aH = Hb$, 则 $a \in aH = Hb$, 从而 $a \in Ha \cap Hb$, 即 $Ha \cap Hb$ 非空, 因此 $Ha = Hb$, 于是 $aH = Ha$. 所以由定理 0.8 知 H 是 G 的正规子群.

证明

□

定义 0.5 (极大正规子群)

设 G 是一个群, $H \triangleleft G$, 如果 H 满足以下两个条件:

- (1) $H \subset G$, 即 $H \neq G$.
- (2) 若 $K \triangleleft G$ 且 $H \subseteq K \subseteq G$, 则必有 $K = H$ 或 $K = G$.

则称 H 是 G 的极大正规子群.

♣

定义 0.6

若半群 S 的非空子集 S_1 对 S 的运算也是半群, 则称 S_1 为 S 的子半群.

若么半群 M 的子集 Q 对 M 的运算也是么半群且 M 的么元 $1 \in Q$, 则称 Q 为 M 的子么半群.

♣

定理 0.9

如果关系 \sim 是么半群(或半群) G 中的同余关系, 那么商集合 G/\sim 对导出的运算(见定理 1.20)也是么半群(或半群), 称之为商么半群(或商半群).

若 G 是交换么半群(或交换半群), 则商集合 G/\sim 对导出的运算也是交换么半群(或交换半群).

♡

证明

□