

## 0.1 曲线和域

### 定义 0.1 (连续曲线)

所谓**连续曲线**,是指定义在闭区间  $[a, b]$  上的一个复值连续函数  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ , 写为

$$z = \gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b,$$

这里,  $x(t), y(t)$  都是  $[a, b]$  上的连续函数.

如果用  $\gamma^*$  记  $\gamma$  的像点所成的集合:

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\},$$

那么  $\gamma^*$  是  $\mathbf{C}$  上的紧集. 曲线  $\gamma$  的方向就是参数  $t$  增加的方向, 在这个意义下,  $\gamma(a)$  和  $\gamma(b)$  分别称为  $\gamma$  的**起点**和**终点**.

如果  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , 即起点和终点重合, 就称  $\gamma$  为**闭曲线**.

如果曲线  $\gamma$  仅当  $t_1 = t_2$  时才有  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , 就称  $\gamma$  为**简单曲线**或**Jordan 曲线**.

如果只有当  $t_1 = a, t_2 = b$  时才有  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , 就称  $\gamma$  为**简单闭曲线**或**Jordan 闭曲线**, 或简称**围道**.

### 定义 0.2

设  $z = \gamma(t) (a \leq t \leq b)$  是一条曲线. 对区间  $[a, b]$  作分割  $T: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ , 得到以  $z_k = \gamma(t_k) (k = 0, 1, \cdots, n)$  为顶点的折线  $P$ , 那么  $P$  的长度为

$$|P| = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果不论如何分割区间  $[a, b]$ , 所得折线的长度都是有界的, 就称曲线  $\gamma$  是**可求长的**,  $\gamma$  的长度定义为  $|P|$  的上确界, 即

$$\sup_T \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

如果  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$  存在, 且  $\gamma'(t) \neq 0$ , 那么  $\gamma$  在每一点都有切线,  $\gamma'(t)$  就是曲线  $\gamma$  在  $\gamma(t)$  处的切向量, 它与正实轴的夹角为  $\text{Arg} \gamma'(t)$ . 如果  $\gamma'(t)$  是连续函数, 那么  $\gamma$  的切线随  $t$  而连续变动, 这时称  $\gamma$  为**光滑曲线**. 在这种情况下,  $\gamma$  的长度为

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

曲线  $\gamma$  称为**逐段光滑的**, 如果存在  $t_0, t_1, \cdots, t_n$ , 使得  $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ,  $\gamma$  在每个参数区间  $[t_{j-1}, t_j]$  上是光滑的, 在每个分点  $t_1, \cdots, t_{n-1}$  处  $\gamma$  的左右导数存在.

### 定义 0.3

平面点集  $E$  称为是**连通的**, 如果对任意两个不相交的非空集  $E_1$  和  $E_2$ , 满足

$$E = E_1 \cup E_2,$$

那么  $E_1$  必含有  $E_2$  的极限点, 或者  $E_2$  必含有  $E_1$  的极限点. 也就是说,  $E_1 \cap \bar{E}_2$  和  $\bar{E}_1 \cap E_2$  至少有一个非空.

### 命题 0.1

$\mathbf{C}$  中的开集  $E$  是连通的充分必要条件是  $E$  不能表示为两个不相交的非空开集的并.

**证明** 设开集  $E$  是连通的, 如果存在不相交的非空开集  $E_1$  和  $E_2$ , 使得  $E = E_1 \cup E_2$ . 由于  $E_1$  中的点都是  $E_1$  的内点,  $E_2$  中的点都是  $E_2$  的内点, 因此  $E_1$  中没有  $E_2$  的极限点,  $E_2$  中也没有  $E_1$  的极限点, 这与  $E$  的连通性相矛盾. 这就证明了条件的必要性. 反之, 如果开集  $E$  是不连通的, 则必存在不相交的非空集  $E_1$  和  $E_2$ , 使得  $E = E_1 \cup E_2$ , 且  $E_1$  中无  $E_2$  的极限点,  $E_2$  中无  $E_1$  的极限点. 由此可见,  $E_1$  和  $E_2$  均为开集. 这就证明了条件的充分性.  $\square$

**定理 0.1**

平面上的非空开集  $E$  是连通的充分必要条件是:  $E$  中任意两点可用位于  $E$  中的折线连接起来.



**证明** 先证必要性. 设  $E$  是平面上一个非空的连通的开集, 任取  $a \in E$ , 定义  $E$  的子集  $E_1, E_2$  如下:

$$E_1 = \{z \in E : z \text{ 和 } a \text{ 可用位于 } E \text{ 中的折线连接}\},$$

$$E_2 = \{z \in E : z \text{ 和 } a \text{ 不能用位于 } E \text{ 中的折线连接}\}.$$

显然,  $E = E_1 \cup E_2$ , 而且  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . 现在证明  $E_1$  和  $E_2$  都是开集. 任取  $z_0 \in E_1$ , 因  $E$  是开集, 故必有  $z_0$  的邻域  $B(z_0, \delta) \subset E$ . 这一邻域中的所有点当然可用一条线段与  $z_0$  相连, 因而可用位于  $E$  中的折线与  $a$  相连, 即  $B(z_0, \delta) \subset E_1$ , 所以  $E_1$  是开集. 再任取  $z'_0 \in E_2$ , 则必有  $z'_0$  的邻域  $B(z'_0, \delta') \subset E$ , 如果此邻域中有一点能用一条折线与  $a$  点相连, 那么  $z'_0$  能用线段与该点相连, 因而  $z'_0$  能用折线与  $a$  点相连, 这与  $z'_0$  的定义矛盾. 因而  $B(z'_0, \delta') \subset E_2$ , 即  $E_2$  也是开集. 由  $E$  的连通性知道,  $E_1, E_2$  中必有一个是空集. 由于  $a \in E_1$ , 故  $E_2$  是空集. 因而  $E$  中所有点都能用折线与  $a$  相连, 而  $E$  中任意两点可以用经过  $a$  的折线相连, 这就证明了必要性.

再证条件的充分性. 如果存在两个不相交的非空开集  $E_1, E_2$ , 使得  $E = E_1 \cup E_2$ . 任取  $z_1 \in E_1, z_2 \in E_2$ , 由假定, 这两点可用  $E$  中的折线连接, 因而折线中必有一条线段把  $E_1$  中的一点与  $E_2$  中的一点连接起来. 不妨设这条线段连接的就是  $z_1$  和  $z_2$ , 该线段的参数表示为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

其中,  $t \in [0, 1]$ . 今设

$$T_1 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_1\},$$

$$T_2 = \{t \in (0, 1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_2\}.$$

则  $T_1, T_2$  是非空的不相交的开集, 而且  $T_1 \cup T_2 = (0, 1)$ , 这与区间的连通性相矛盾. □

**定义 0.4**

非空的连通开集称为**域**.



**笔记** 从定理 0.1 知道, 域中任意两点必可用位于域中的折线连接起来.

从几何上来看, 一个域就是平面上连成一片的开集. 例如, 单位圆的内部、上半平面、下半平面等都是域的例子.

**定理 0.2 (Jordan 定理)**

一条简单闭曲线  $\gamma$  把复平面分成两个域, 其中一个是有界的, 称为  $\gamma$  的**内部**; 另一个是无界的, 称为  $\gamma$  的**外部**, 而  $\gamma$  是这两个域的共同的边界.



**笔记** 单位圆盘  $\{z : |z| < 1\}$  和圆环  $\{z : 1 < |z| < 2\}$  都是域, 但它们从函数论的角度来看有很大的差别, 原因是前者是单连通的, 而后者则不是.

**证明**

**定义 0.5**

域  $D$  称为是**单连通的**, 如果  $D$  内任意简单闭曲线的内部仍在  $D$  内. 不是单连通的域称为是**多连通的**.

**定义 0.6**

如果域  $D$  是由  $n$  条简单闭曲线围成的, 就称  $D$  是 **$n$ 连通的**, 简单闭曲线中也可以有退化成一条简单曲线或一点的.



**例题 0.1** 单位圆盘是单连通的, 圆环  $\{z : 1 < |z| < 2\}$  是二连通的, 除去圆心的单位圆盘也是二连通的, 除去圆心和线段  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$  的单位圆盘则是一个三连通域.