

## 0.1 正测度集与矩体的关系

### 定理 0.1

设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集, 且  $m(E) > 0, 0 < \lambda < 1$ , 则存在矩体  $I$ , 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap E). \quad (1)$$



**注** 上述定理告诉我们, 任何一个正测集, 其中总有一部分被一个矩体套住, 使两者的测度差小于预先给定的正数  $\varepsilon$ . 当然, 这一测度差不一定能等于零.

**证明** 情形 I: 当  $m(E) < +\infty$  时, 对于  $0 < \varepsilon < (\lambda^{-1} - 1)m(E)$ , 作  $E$  的  $L$ -覆盖  $\{I_k\}$ , 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon.$$

从而存在  $k_0$ , 使得  $\lambda|I_{k_0}| < m(I_{k_0} \cap E)$ . 事实上, 若对一切  $k$ , 有

$$\lambda|I_k| \geq m(I_k \cap E),$$

则可得

$$m(E) = m(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap E) \leq \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \lambda(m(E) + \varepsilon) < m(E).$$

这就导致  $m(E) < m(E)$ , 产生矛盾.

情形 II: 当  $m(E) = +\infty$  时, 由定理 ??(ii) 可知, 存在闭集  $F \subset E$ , 使得  $m(E \setminus F) < 1$ . 记  $H = E \setminus F$ , 则  $m(H) < 1$  且  $H \subset E$ . 于是由情形 I 可知, 存在矩体  $I$ , 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap H).$$

再由  $I \cap H \subset I \cap E$  及测度的单调性可得

$$\lambda|I| < m(I \cap H) \leq m(I \cap E).$$

故结论得证. □

**例题 0.1**  $[0, 1]$  中存在正测集  $E$ , 使对  $[0, 1]$  中任一开区间  $I$ , 有

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

**解** 首先, 在  $[0, 1]$  中作类 Cantor 集  $H_1: m(H_1) = 1/2$ . 其次, 在  $[0, 1]$  中  $H_1$  的邻接区间  $\{I_{1j}\}$  的每个  $I_{1j}$  内再作类 Cantor 集  $H_{1j}: m(H_{1j}) = |I_{1j}|/2^2$ , 并记  $H_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{1j}$ . 然后, 对  $H_1 \cup H_2$  的邻接区间  $\{I_{2j}\}$  的每个  $I_{2j}$ , 又作类 Cantor

集  $H_{2j}: m(H_{2j}) = |I_{2j}|/2^3$ . 再记  $H_3 = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{2j}$ , 依次继续进行, 则得  $\{H_m\}$ . 令  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ , 得证. □

### 定理 0.2 (Steinhaus 定理)

设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集, 且  $m(E) > 0$ . 作 (向量差) 点集

$$E - E \stackrel{\text{def}}{=} \{x - y : x, y \in E\},$$

则存在  $\delta_0 > 0$ , 使得  $E - E \supset B(0, \delta_0)$ . ♥

**证明** 取  $\lambda$  满足  $1 - 2^{-(n+1)} < \lambda < 1$ . 由定理 0.1 可知, 存在矩体  $I$ , 使得  $\lambda|I| < m(I \cap E)$ . 现在记  $I$  的最短边长为  $\delta$ , 并作开矩阵

$$J = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : |\xi_i| < \frac{\delta}{2} (i = 1, 2, \dots, n) \right\}.$$

从而只需证明  $J \subset E - E$  即可, 也就是只要证明对每个  $x_0 \in J$ , 点集  $E \cap I$  必与点集  $(E \cap I) + \{x_0\}$  相交 (此时有  $y, z \in E \cap I$ , 使得  $y - z = x_0$ ) 即可. 因为  $J$  是以原点为中心, 边长为  $\delta$  的开矩阵, 所以  $I$  的平移矩阵  $I + \{x_0\}$  仍含有

$I$  的中心, 从而知

$$m(I \cap (I + \{x_0\})) > 2^{-n}|I|.$$

由此可得

$$m(I \cup (I + \{x_0\})) = |I| + m(I + \{x_0\}) - m(I \cap (I + \{x_0\})) < 2|I| - 2^{-n}|I|,$$

即

$$m(I \cup (I + \{x_0\})) < 2\lambda|I|.$$

但由于  $E \cap I$  与  $(E \cap I) + \{x_0\}$  有着相同的测度并且都大于  $\lambda|I|$ , 同时又都含于  $I \cup (I + \{x_0\})$  之中, 故它们必定相交, 否则其并集测度要大于  $2\lambda|I|$ , 从而引起矛盾.  $\square$