0.1 扩充平面和复数的球面表示

定义 0.1

为了今后讨论的需要, 我们要在 $\mathbf{C}$ 中引进一个新的数 ∞, 这个数的模是 ∞, 辐角没有意义, 它和其他数的运算规则规定为:

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty \ (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0);$$

$0 \cdot \infty$ 和 $\infty \pm \infty$ 都不规定其意义. 引进了 ∞ 的复数系记为 $\mathbf{C}_\infty$, 即 $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

在复平面上, 没有一个点和 ∞ 相对应, 但我们想像有一个**无穷远点**和 ∞ 对应, 加上无穷远点的复平面称为**扩充平面**或**闭平面**, 不包括无穷远点的复平面也称为**开平面**.

注 在复平面上, 无穷远点和普通的点是不一样的,Riemann 首先引进了复数的球面表示, 在这种表示中,∞ 和普通的复数没有什么区别.

命题 0.1

证明: 扩充平面和单位球面对等, 即两者之间存在一个双射.

证明 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面, 即

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

把 $\mathbf{C}$ 等同于平面:

$$\mathbf{C} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

固定 S 的北极 N, 即 $N = (0, 0, 1)$, 对于 $\mathbf{C}$ 上的任意点 z, 联结 N 和 z 的直线必和 S 交于一点 P(图 1). 若 $|z| > 1$, 则 P 在北半球上; 若 $|z| < 1$, 则 P 在南半球上; 若 $|z| = 1$, 则 P 就是 z. 容易看出, 当 z 趋向 ∞ 时, 球面上对应的点 P 趋向于北极 N, 自然地, 我们就把 $\mathbf{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来,$\mathbf{C}_\infty$ 中的所有点 (包括无穷远点在内) 都被移植到球面上去了, 这样我们就找到了一个扩充平面到单位球面的双射. 而在球面上,N 和其他的点是一视同仁的.

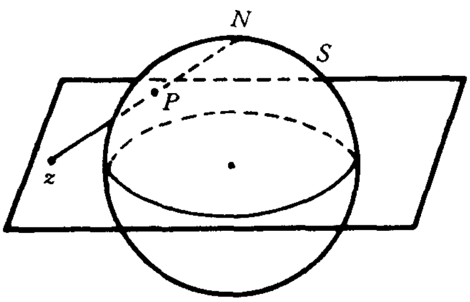

图 1

现在给出这种对应的具体表达式. 设 $z = x + \mathrm{i}y$, 容易算出 zN 和球面 S 的交点的坐标为

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

直接用复数 z, 可表示为

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{\mathrm{i}(1 + |z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

这样, 从 z 便可算出它在球面上对应点的坐标. 反过来, 从球面上的点 (x_1, x_2, x_3) 也可算出它在平面上的对应点 z.

事实上, 从上面的表达式得

$$\begin{cases} x_1 + \mathrm{i}x_2 = \dfrac{2z}{1+|z|^2}, \\ 1 - x_3 = \dfrac{2}{1+|z|^2}, \end{cases}$$

由此即得

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

这就是所需的计算公式. 现在我们可以具体地写出扩充平面到单位球面的双射

$$f : C_\infty \longrightarrow \mathbf{R}^3, z \longmapsto \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

$$f^{-1} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow C_\infty, (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

□