

0.1 群的直积

定义 0.1 (外直积)

设 G_1, G_2, \dots, G_n 是 n 个群, 构造集合 G_1, G_2, \dots, G_n 的笛卡尔积

$$G = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

并在 G 中定义乘法运算

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n), \forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in G,$$

则 G 关于上述定义的乘法构成群, 称为群 G_1, G_2, \dots, G_n 的**外直积**, 记作 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.



注

- (1) 如果 e_1, e_2, \dots, e_n 分别是群 G_1, G_2, \dots, G_n 的单位元, 则 (e_1, e_2, \dots, e_n) 是 $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ 的单位元;
- (2) 设 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G$, 则 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$;
- (3) 当 G_1, G_2, \dots, G_n 都是加群时, G_1 与 G_2 的外直积也可记作 $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$.

定理 0.1

设 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ 是 n 个群 G_1, G_2, \dots, G_n 的外直积, 则

- (1) G 是有限群的充分必要条件是 G_1, G_2, \dots, G_n 都是有限群. 并且, 当 G 是有限群时, 有

$$|G| = |G_1| \cdot |G_2| \cdot \dots \cdot |G_n|;$$

- (2) G 是交换群的充分必要条件是 G_1, G_2, \dots, G_n 都是交换群;
- (3) $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \cong G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \dots \times G_{\sigma(n)}, \forall \sigma \in S_n$.
- (4) 若 a_1, a_2, \dots, a_n 分别是 G_1, G_2, \dots, G_n 中的有限阶元素, 则对 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, 有

$$\text{ord}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [\text{ord } a_1, \text{ord } a_2, \dots, \text{ord } a_n].$$

- (5) $C(G) = C(G_1) \times C(G_2) \times \dots \times C(G_n)$.
- (6) 若 G_1, G_2, \dots, G_n 分别是 m_1, m_2, \dots, m_n 阶的循环群, 则 G 是循环群的充要条件是 $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$.



证明

- (1) 由笛卡尔积的定义易得.
- (2) 如果 G_1 与 G_2 都是交换群, 则对任意的 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in G$, 有

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \\ &= (b_1 a_1, b_2 a_2, \dots, b_n a_n) \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

所以 G 是交换群.

反之, 如果 G 是交换群, 那么对任意的 $a_1, b_1 \in G_1, a_2, b_2 \in G_2$, 有

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

即

$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) = (b_1 a_1, b_2 a_2, \dots, b_n a_n).$$

因此 $a_i b_i = b_i a_i, i = 1, 2, \dots, n$. 从而 $G_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是交换群.

(3) 对 $\forall \sigma \in S_n$, 构造映射

$$\phi: G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)},$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \longmapsto (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \cdots, a_{\sigma(n)}), \quad \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

因为 σ 是双射, 所以 ϕ 也是双射, 且

$$\begin{aligned} & \phi((a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n)) \\ &= \phi(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n) \\ &= (a_{\sigma(1)} b_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)} b_{\sigma(2)}, \cdots, a_{\sigma(n)} b_{\sigma(n)}) \\ &= (a_2, a_1)(b_2, b_1) = \phi(a_1, a_2) \cdot \phi(b_1, b_2). \end{aligned}$$

因此 ϕ 是 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 到 $G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)}$ 的同构映射, 即

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \cong G_{\sigma(1)} \times G_{\sigma(2)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)}.$$

(4) 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n - 1$ 成立, 现在考虑 n 的情况.

设 $a_i \in G_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $b = (a_2, \cdots, a_n) \in G_2 \times \cdots \times G_n, \text{ord } a_1 = m$, 则由归纳假设知

$$\text{ord } b = \text{ord}(a_2, \cdots, a_n) = [\text{ord } a_2, \cdots, \text{ord } a_n].$$

再记 $\text{ord } b = n, s = [m, n], e_1$ 为 G_1 的幺元, e_2 为 $G_2 \times \cdots \times G_n$ 的幺元. 则

$$(a_1, b)^s = (a_1^s, b^s) = (e_1, e_2).$$

从而 (a_1, b) 的阶有限, 设其为 t , 则由上式得 $t \mid s$.

又因为

$$(e_1, e_2) = (a_1, b)^t = (a_1^t, b^t),$$

所以 $a_1^t = e_1, b^t = e_2$. 于是 $m \mid t$, 且 $n \mid t$, 从而 t 是 m 和 n 的公倍数. 而 s 是 m 和 n 的最小公倍数, 因此 $s \mid t$. 结合以上讨论得 $s = t$, 即

$$\begin{aligned} \text{ord}(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \text{ord}(a_1, b) = [\text{ord } a_1, \text{ord } b] \\ &= [\text{ord } a_1, [\text{ord } a_2, \cdots, \text{ord } a_n]] \\ &= [\text{ord } a_1, \text{ord } a_2, \cdots, \text{ord } a_n]. \end{aligned}$$

故由数学归纳法知结论成立.

(5) 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in C(G)$, 则对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$, 由 $ax = xa$ 得 $a_i \in C(G_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 因此

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n).$$

另一方面, 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n)$, 则对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$, 有

$$ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n) = (x_1 a_1, x_2 a_2, \cdots, x_n a_n) = xa.$$

所以 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in C(G)$. 因此

$$C(G) = C(G_1) \times C(G_2) \times \cdots \times C(G_n).$$

(6) 设 $G_1 = \langle a_1 \rangle, G_2 = \langle a_2 \rangle, \cdots, G_n = \langle a_n \rangle, e_1, e_2, \cdots, e_n$ 分别为 G_1, G_2, \cdots, G_n 的幺元.

必要性: 设 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 是循环群. 若 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) = t \neq 1$, 则由于 $\text{ord } a_i = m_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 而 $a_i^{\frac{m_i}{t}}$ 的阶都是 t , 因此由定理??知

$$\langle (e_1, \cdots, \underbrace{a_i^{\frac{m_i}{t}}}_{\text{第 } i \text{ 个位置}}, \cdots, e_n) \rangle, i = 1, 2, \cdots, n$$

都是循环群 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 中的 n 个不同的 t 阶子群. 而这与定理????矛盾! 故 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 1$.

充分性: 设 $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$, 则由定理 0.1(4) 和定理 0.1(1) 可得

$$\begin{aligned} | \langle (a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle | &= \text{ord}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [m_1, m_2, \dots, m_n] \\ &= m_1 m_2 \cdots m_n = |G_1| \cdot |G_2| \cdots |G_n| \\ &= |G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n|. \end{aligned}$$

又 $\langle (a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle \subseteq G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 故 $\langle (a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. 因此 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 是循环群.

□

定义 0.2 (换位子)

设 g_1, g_2 是群 G 中的两个元素, 称

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$$

为 g_1 与 g_2 的换位子.

♣

定义 0.3 (换位子群)

若 H, K 是群 G 的两个子群, 称

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle$$

为 H 与 K 的换位子群.

♣

命题 0.1

设 H, K 是群 G 的两个子群, 则

- (1) $\alpha([g_1, g_2]) = [\alpha(g_1), \alpha(g_2)], \quad \forall \alpha \in \text{Aut} G, g_1, g_2 \in G.$
- (2) $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)], \quad \forall \alpha \in \text{Aut} G.$
- (3) 若 $H \triangleleft G$, 则 G/H 为 Abel 群的充要条件是 $H \supseteq [G, G]$.

♣

证明

- (1) 从换位子的定义即得.
- (2) 因为 $\forall a \in H, b \in K$, 有 $\alpha(a) \in \alpha(H), \alpha(b) \in \alpha(K)$. 注意到

$$\alpha([a, b]) = \alpha(aba^{-1}b^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)\alpha(a)^{-1}\alpha(b)^{-1} = [\alpha(a), \alpha(b)],$$

故 $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$.

- (3) G/H 为 Abel 群, 当且仅当对 $\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (bH)(aH)$, 即 $abH = baH, \forall a, b \in G$, 当且仅当 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H, \forall a, b \in G$, 即 $H \supseteq [G, G]$.

□

引理 0.1

设 H, K 是群 G 的子群, 则有

- (1) $[H, K] = \{1\} \iff H \subseteq C_G(K);$
- (2) $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K),$
 $[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H);$
- (3) 若 $H \triangleleft G, K \triangleleft G$, 则 $[H, K] \triangleleft G$ 且 $[H, K] \subseteq H \cap K$. 特别地, 由 $G \triangleleft G$ 知 $[G, G] \triangleleft G$;
- (4) 当 H_1, K_1 分别为 H, K 的子群时有 $[H_1, K_1] \subseteq [H, K]$.

♥

证明

- (1) $[H, K] = \{1\}$ 当且仅当对 $\forall h \in H, k \in K$ 有

$$[h, k] = 1 \iff h^{-1}k^{-1}hk = 1 \iff hk = kh \iff hkh^{-1} = k,$$

即 $h \in C_G(K), \forall h \in H$, 即 $H \subseteq C_G(K)$.

(2) 先证 $[H, K] \subseteq K \iff H \subseteq N_G(K)$. 若 $[H, K] \subseteq K$, 则

$$[h, k] \in K, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in K, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

对 $\forall h \in H$, 设 $k \in K$, 则由 $[h, k] \in K$ 知存在 $k_1 \in K$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = k_1 \iff hkk_1^{-1} = kh \iff k = hkk_1^{-1}h^{-1} \in hKh^{-1},$$

故 $K \subseteq hKh^{-1}$. 再设 $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$, 则由 $[h^{-1}, k^{-1}] \in K$ 知存在 $k_2 \in K$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = k_1 \iff hkh^{-1} = kk_1 \in K,$$

故 $hKh^{-1} \subseteq K$. 因此 $hKh^{-1} = K, \forall h \in H$. 即 $h \in N_G(K), \forall h \in H$. 故 $H \subseteq N_G(K)$.

反之, 若 $H \subseteq N_G(K)$, 对 $\forall h \in H, k \in K$, 有 $hKh^{-1} = K$, 从而存在 $h_1 \in H, k_1 \in K$, 使

$$k = h_1k_1h_1^{-1} \iff k^{-1} = h_1k_1^{-1}h_1^{-1}.$$

于是

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}h_1k_1^{-1}h_1^{-1}hk = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k.$$

注意到 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} \in hKh^{-1}$, 所以存在 $k_2 \in K$, 使 $(h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1} = k_2$. 从而

$$[h, k] = (h^{-1}h_1)k_1^{-1}(h^{-1}h_1)^{-1}k = k_2k \in K, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

故 $[H, K] \subseteq K$.

再证 $[H, K] \subseteq H \iff K \subseteq N_G(H)$. 若 $[H, K] \subseteq H$, 则

$$[h, k] \in H, \quad [h^{-1}, k^{-1}] \in H, \quad \forall k \in K, h \in H.$$

对 $\forall k \in K$, 设 $h \in H$, 则由 $[h, k] \in H$ 知存在 $h_1 \in H$, 使

$$h^{-1}k^{-1}hk = h_1 \iff hk = khh_1 \iff h = khh_1k^{-1} \in kHk^{-1},$$

故 $H \subseteq kHk^{-1}$. 再设 $khk^{-1} \in kHk^{-1}$, 则由 $[h^{-1}, k^{-1}] \in H$ 知存在 $h_2 \in H$, 使

$$hkh^{-1}k^{-1} = h_1 \iff khk^{-1} = h^{-1}h_1 \in H,$$

故 $kHk^{-1} \subseteq H$. 因此 $kHk^{-1} = H, \forall k \in K$. 即 $k \in N_G(H), \forall k \in K$. 故 $K \subseteq N_G(H)$.

反之, 若 $K \subseteq N_G(H)$, 对 $\forall h \in H, k \in K$, 有 $kHk^{-1} = H$, 从而存在 $h_1 \in H, k_1 \in K$, 使

$$h = k_1h_1k_1^{-1}.$$

于是

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}k^{-1}k_1h_1k_1^{-1}k = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1}.$$

注意到 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} \in kHk^{-1}$, 所以存在 $h_2 \in H$, 使 $(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h_2$. 从而

$$[h, k] = h^{-1}(k^{-1}k_1)h_1(k^{-1}k_1)^{-1} = h^{-1}h_2 \in H.$$

故 $[H, K] \subseteq H$.

(3) 设 $H \triangleleft G, K \triangleleft G$, 于是对 $\forall \alpha = L_g R_{g^{-1}} \in \text{Int}G$, 由命题 0.1(2) 有

$$g[H, K]g^{-1} = \alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)] = [gHg^{-1}, gKg^{-1}] = [H, K],$$

即 $[H, K] \triangleleft G$. 由 $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ 知

$$gHg^{-1} = H, \quad gKg^{-1} = K, \quad \forall g \in G.$$

故

$$kHk^{-1} = H, \quad \forall k \in K;$$

$$hKh^{-1} = K, \quad \forall h \in H.$$

即 $K \subseteq N_G(H), H \subseteq N_G(K)$. 再由结论 (2) 知 $[H, K] \subseteq H \cap K$.

(4) 此结论是显然的. □

推论 0.1

(1) 设 G 是一个群, $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$, 且 $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$, 则对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

并且

$$N_j \subseteq C(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

(2) 设 H, K 是两个群, $N \triangleleft H, K$, 则

$$[H, K] \subseteq N \iff [H/N, K/N] = N \iff H/N \subseteq C(K/N).$$

证明

(1) 对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 由引理 0.1(3) 知 $[N_i, N_j] \subseteq N_i \cap N_j = \{1\}$, 故 $[N_i, N_j] = \{1\}$. 因此对 $\forall n_i \in N_i, n_j \in N_j$, 有

$$1 = [n_i, n_j] = n_i^{-1} n_j^{-1} n_i n_j \iff n_i n_j = n_j n_i.$$

并且由引理 0.1(1) 知

$$N_j \subseteq C(N_i), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

(2) 由引理 0.1(1) 知

$$[H/N, K/N] = N \iff H/N \subseteq C(K/N).$$

于是对 $\forall a \in H, b \in K$, 有

$$N = [aN, bN] = (a^{-1}N)(b^{-1}N)(aN)(bN) = (a^{-1}b^{-1}ab)N = [a, b]N.$$

这也当且仅当

$$[a, b] \in N, \quad \forall a \in H, b \in K.$$

即 $[H, K] \subseteq N$. □

定义 0.4

设 A, B, G 都是群, 若有 G 的正规子群 N 与 A 同构, 而商群 G/N 与 B 同构, 则称 G 是 B 过 A 的扩张, N 称为该扩张的核, 简称扩张核. ♣

注 显然, 若 N 是 G 的正规子群, 则 G 是 G/N 过 N 的扩张, 扩张核为 N .

定义 0.5

设 G 是 B 过 A 的扩张, N 为扩张核, λ 是 A 到 N 上的同构, μ 是 G 到 B 上的同态且 μ 满足 $\ker \mu = N$. 1 为 A 的幺元, $1'$ 为 B 的幺元, i 是 $\{1\}$ 到 A 的映射, $i(1) = 1$. $0'$ 是 B 到 $\{1'\}$ 的映射, $0'(b) = 1' (\forall b \in B)$. 于是有群及其映射的序列 (以 $1, 1'$ 代替 $\{1\}, \{1'\}$)

$$1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\lambda} N \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{0'} 1',$$

每个映射都是群的同态映射, 并且前一映射的像恰是后一映射的核, 即

$$i(1) = \ker \lambda, \quad \lambda(A) = \ker \mu, \quad \mu(G) = \ker 0'.$$

这样的序列称为 (短) 正合序列. 以后记 (短) 正合序列时, i 与 $0'$ 省略不写, 同时也将 $1'$ 记为 1 . ♣

注 由定理?? 知存在 G 到 G/N 的自然群同态 μ_1 . 由 $G/N \cong B$ 可设 G/N 到 B 的同构 f , 则 $\mu = f\mu_1$ 就是 G 到 B 的

同态. 由命题 0.1 知 $\ker \mu_1 = N$, 从而

$$\mu(N) = f\mu_1(N) = f(N) = 1'.$$

故 $N \subseteq \ker \mu$. 再设 $x \in \ker \mu$, 则

$$\mu(x) = f\mu_1(x) = 1' \implies \mu_1(x) = f^{-1}(1') = N \implies x \in \ker \mu_1 = N.$$

故 $\ker \mu \subseteq N$. 综上可得 $\lambda(A) = N = \ker \mu$. 故上述定义中的同态 μ 是良定义的.

命题 0.2

若群 A, B, G 之间有 (短) 正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

即存在 G 的正规子群 N , 还存在 λ 是 A 到 N 上的同构, 以及 μ 是 G 到 B 上的同态且 μ 满足 $\ker \mu = N$.

则 λ 是 A 到 G 的单同态, μ 是 G 到 B 的满同态, 并且 G 是 B 过 A 的扩张.

证明

□

定理 0.2

设 A, B, G, G' 是群.

- (1) 若 G 是 B 过 A 的扩张, G 与 G' 同构, 则 G' 也是 B 过 A 的扩张;
- (2) 若 G, G' 都是 B 过 A 的扩张且有 G 到 G' 的同态 f , 使图 1 为交换图, 则 f 是 G 到 G' 上的同构, 这时称 G 与 G' 是 B 过 A 的等价扩张.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & G & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow f & & \downarrow \text{id}_B \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda'} & G' & \xrightarrow{\mu'} & B \longrightarrow 1 \end{array}$$

图 1

证明

- (1) 设 A, B, G 对应的 (短) 正合序列为

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

f 是 G 到 G' 上的同构. 令 $\lambda' = f\lambda, \mu' = \mu f^{-1}$. 由命题 0.2 知 λ 是 A 到 G 的单同态且 $\lambda(A) = N$. 从而 λ' 是单同态且 $\lambda'(A) = f(\lambda(A))$ 与 A 同构. $\mu' = \mu f^{-1}$ 是 G' 到 B 上的同态, 又注意到

$$\mu'(\ker \mu') = 1' \iff \mu(f^{-1}(\ker \mu')) = 1' \iff f^{-1}(\ker \mu') = \ker \mu \iff \ker \mu' = f(\ker \mu),$$

故

$$\ker \mu' = \ker(\mu f^{-1}) = f(\ker \mu) = f(\lambda(A)) = \lambda'(A).$$

因而 G' 是 B 过 A 的扩张.

- (2) 先证 $\ker f = \{1\}$, 即 f 是单射. 若 $x \in \ker f$, 则 $\mu(x) = \mu'f(x) = \mu'(1) = 1$ 知 $x \in \ker \mu = \lambda(A)$, 因而 $\exists y \in A$, 使得 $x = \lambda(y)$. 于是 $\lambda'(y) = f(\lambda(y)) = f(x) = 1$. 由 (1) 的证明知 λ' 是单射, 故 $y = 1$, 于是 $x = \lambda(1) = 1$, 即 $\ker f = \{1\}$.

下面证 $f(G) = G'$, 即 f 是满映射. 设 $x' \in G'$, 由命题 0.2 知 μ 是 G 到 B 的满同态, 即 $\mu(G) = B$, 从而 $\exists x \in G$, 使 $\mu(x) = \mu'(x')$, 但 $\mu = \mu'f$, 故

$$\mu'(f(x)) = \mu(x) = \mu'(x') \iff 1 = (\mu'(x'))^{-1} \mu'(f(x)) = (\mu'(x')^{-1}) \mu'(f(x)) = \mu'((x')^{-1}f(x)).$$

因而 $(x')^{-1}f(x) \in \ker \mu' = \lambda'(A) = f\lambda(A)$. 故 $\exists a \in A$, 使 $(x')^{-1}f(x) = f(\lambda(a)) \in f(G)$, 于是 $x' \in f(G)$, 即 f 是满映射.

□

定理 0.3

设群 G 是群 B 过群 A 的扩张, 对应的 (短) 正合序列为

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

扩张核为 $N = \lambda(A) = \ker \mu$.

- (1) 若有 G 的子群 H 满足 $G = HN$, $H \cap N = \{1\}$, 则 $\mu|_H$ 是 H 到 B 上的同构, 此时 $(\mu|_H)^{-1} = \nu$ 是 B 到 G 中的同态且 $\mu\nu = \text{id}_B$;
- (2) 若存在 B 到 G 的同态 ν , 使得 $\mu\nu = \text{id}_B$, 则 $\nu(B) = H$ 是 G 的子群, ν 是 B 到 $H = \nu(B)$ 上的同构且 $G = HN$, $H \cap N = \{1\}$.

♥

证明

- (1) 由 $\ker(\mu|_H) = H \cap \ker \mu = H \cap N = \{1\}$ 知 $\mu|_H$ 是 H 到 B 的单射, 又 $\forall b \in B, \exists x \in G$, 使 $\mu(x) = b$, 而 $G = HN$, 故 $\exists y \in H, z \in N$, 使 $x = yz$. 于是 $b = \mu(x) = \mu(y)\mu(z) = \mu(y)$, 故 $\mu|_H$ 是 H 到 B 上的满映射, 于是 $\mu|_H$ 是 H 到 B 上的同构. 从而 ν 是 B 到 H 中的同构, 故 ν 是 B 到 G 中的同态. 又 $\mu\nu(b) = \mu(y) = b$, 故 $\mu\nu = \text{id}_B$.
- (2) 由命题 2.2.2 知 $\nu(B) = H$ 是 G 的子群. 由 $\mu\nu = \text{id}_B$ 知 $x = \mu\nu(x) = \mu(1) = 1, \forall x \in \ker \nu$, 即 $\ker \nu \subseteq \{1\}$, 因此 $\ker \nu = \{1\}$, 故 ν 是 B 到 $H = \nu(B)$ 上的同构, 若 $x \in N \cap H$, 则由 $x \in N = \ker \mu$ 知 $\mu(x) = 1$, 由 $x \in H = \nu(B)$ 知存在 $b \in B$, 使 $x = \nu(b)$. 从而

$$1 = \mu(x) = \mu\nu(b) = \text{id}_B(b) = b.$$

故 $x = \nu(b) = \nu(1) = 1$, 即 $H \cap N = \{1\}$.

对 $\forall b \in B$, 由 $\mu\nu = \text{id}_B$ 知 $\mu(\nu(b)) = \text{id}_B(b) = b$ 且 $\nu(b) \in H$, 故 $\mu|_H$ 是 H 到 B 上的满同态. 设 $x \in G$, 则 $\mu(x) \in B$. 于是 $\exists y \in H$, 使 $\mu(y) = \mu(x)$, 因而 $\mu(y^{-1}x) = 1$, 即 $z = y^{-1}x \in \ker \mu = N$ 有 $x = yz \in HN$, 故 $G = HN$.

□

定义 0.6

设 G 是一个群, $N \triangleleft G$, H 是 G 的子群, 且 $H \cap N = \{1\}$, $G = HN$, 则称 G 是 N 与 H 的**半直积**, 记为 $G = H \ltimes N$. 如果 H 还是 G 的正规子群, 则称 G 是 N 与 H 的**内直积**, 记为 $G = H \otimes N$.

♣

定义 0.7

设 G 是群 B 过群 A 的扩张, N 是扩张的核.

- (1) 如果存在 G 的子群 H , 使 $H \cap N = \{1\}$, $G = HN$, 那么称此扩张为**非本质扩张**. 若 H 还是 G 的正规子群, 则称此扩张为**平凡扩张**.
- (2) 如果 $N \subseteq C(G)$, 那么称此扩张为**中心扩张**.

♣

例题 0.1

1. 对整数加群 \mathbb{Z} , 它的正规子群 $2\mathbb{Z}$ 与 \mathbb{Z} 同构, 而 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ 是 2 阶循环群, 因而 \mathbb{Z} 是 \mathbb{Z}_2 过 $2\mathbb{Z}$ 的扩张. 由于 \mathbb{Z} 的任何子群都不同构于 \mathbb{Z}_2 , 因而这个扩张不是非本质扩张.
2. 设 $n \geq 3$. A_n 是 S_n 的正规子群, $\langle(12)\rangle$ 是 S_n 的 2 阶子群, $\langle(12)\rangle \cap A_n = \{\text{id}\}$, $S_n = \langle(12)\rangle A_n$, 但 $\langle(12)\rangle$ 不是 S_n 的正规子群, 故 $S_n = \langle(12)\rangle \ltimes A_n$.
3. 3 阶循环群过 5 阶循环群的扩张 G 是 15 阶群. 由命题 2.2.2 知这种扩张必然是平凡扩张, 即 $G = \langle a \rangle \otimes \langle b \rangle$, 其中, a, b 分别为 G 的 3 阶元素与 5 阶元素.

证明

□

定理 0.4

设 A, B 是 G 的子群.

- (1) $G = AB, A \cap B = \{1\}$ 当且仅当 $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$, 使得 $g = ab$ 且这种表示唯一.
- (2) G 是 A 和 B 的内直积的充分必要条件是 G 满足如下两个条件:
 - (i) G 中每个元素可唯一地表为 ab 的形式, 其中 $a \in A, b \in B$;
 - (ii) A 中每个元素与 B 中任意元素可交换, 即: 对任意 $a \in A, b \in B$, 有 $ab = ba$.

♡

证明

- (1) 由 $G = AB, A \cap B = \{1\}$ 知 $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$, 使 $g = ab$. 若另有 $g = a'b', a' \in A, b' \in B$, 则 $a^{-1}a' = bb'^{-1} \in A \cap B = \{1\}$, 于是 $a = a', b = b'$.
反之, 若 $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B$, 使 $g = ab$, 则 $G = AB$. 又若 $c \in A \cap B$, 由 $c = 1 \cdot c = c \cdot 1$ 的表示唯一可知 $c = 1$, 故 $A \cap B = \{1\}$.
- (2) 由定理????知条件 (i) 成立当且仅当 $A, B \triangleleft G$. 又由定理 0.4(1)知条件 (ii) 成立当且仅当 $G = AB, A \cap B = \{1\}$.
故 $G = A \otimes B$ 当且仅当 G 同时满足条件 (i)(ii).

□

定理 0.5

- (1) 如果群 G 是正规子群 H 和 K 的内直积, 则 $H \times K \cong G$.
- (2) 如果群 $G = G_1 \times G_2$, 则存在 G 的正规子群 G'_1 和 G'_2 , 且 G'_i 与 G_i 同构 ($i = 1, 2$), 使得 $G = G'_1 \otimes G'_2$.

♡

注 从这个定理可以看到, 群的内外直积的概念在同构意义下是一致的, 所以有时可不对内外直积加以区分, 而统称为群的直积.

证明

- (1) 如果群 G 是正规子群 H 和 K 的内直积. 定义映射

$$\begin{aligned}\phi: H \times K &\longrightarrow G, \\ (h, k) &\longmapsto hk, \forall (h, k) \in H \times K,\end{aligned}$$

则由于 $G = HK$, 故 ϕ 是满射. 又由定理 0.4(2)知 G 中元素为 hk 形式时表法唯一, 故 ϕ 是单射. 又对任意的 $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$, 由于 H 中的元素与 K 中的元素可交换, 故

$$\begin{aligned}\phi((h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)) &= \phi(h_1 h_2, k_1 k_2) = (h_1 h_2)(k_1 k_2) \\ &= (h_1 k_1)(h_2 k_2) = \phi(h_1, k_1) \cdot \phi(h_2, k_2),\end{aligned}$$

所以 ϕ 是同构映射, 从而 $H \times K \cong G$.

- (2) 如果 $G = G_1 \times G_2$. 令

$$G'_1 = \{(a_1, e_2) \mid a_1 \in G_1\}, G'_2 = \{(e_1, a_2) \mid a_2 \in G_2\},$$

则容易验证 G'_1, G'_2 都是 G 的子群, 且对任意的 $(a_1, a_2) \in G$,

$$(a_1, a_2) = (a_1, e_2)(e_1, a_2) \in G'_1 G'_2.$$

这一表法是唯一的, 且对任意的 $(a_1, e_2) \in G'_1, (e_1, a_2) \in G'_2$, 有

$$(a_1, e_2) \cdot (e_1, a_2) = (a_1, a_2) = (e_1, a_2) \cdot (a_1, e_2),$$

所以由定理 0.4(2)知 G 是 G'_1 与 G'_2 的内直积. 而

$$\phi_1: a_1 \longmapsto (a_1, e_2)$$

以及

$$\phi_2: a_2 \longmapsto (e_1, a_2)$$

分别为 G_1 到 G'_1 和 G_2 到 G'_2 的同构映射.

□

定理 0.6

设 A, B 是两个群, 则一定存在 B 过 A 的平凡扩张 $G = A \times B$, 并且 G 在同构意义下唯一.

♡

证明 在 $G = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 中定义乘法

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad \forall (a_i, b_i) \in G, i = 1, 2.$$

容易验证 G 是群, 幺元为 $(1, 1')$, 其中, $1, 1'$ 分别为 A, B 的幺元. $\forall (a, b) \in G, (a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, 而且

$$A' = \{(a, 1') \mid a \in A\}, \quad B' = \{(1, b) \mid b \in B\}$$

都是 G 的正规子群. 又 $G = A'B', A' \cap B' = \{(1, 1')\}$, 于是 $G = A' \otimes B'$.

又映射 $\lambda: \lambda(a) = (a, 1') (\forall a \in A)$ 是 A 到 G 的单同态, $\lambda(A) = A'$, 故 λ 是 A 到 A' 的同构. 而映射 $\mu: \mu((a, b)) = b$ 则是 G 到 B 上的同态, 并且 $\ker \mu = A' = \lambda(A), \mu|_{B'}$ 是 B' 到 B 上的同构. 即有 (短) 正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1,$$

故由命题 0.2 知 G 是 B 过 A 的扩张, 扩张核为 A' . 由 $G = A' \otimes B'$ 及 $A \cong A', B \cong B'$ 知

$$G = A'B', \quad A' \cap B' = \{1\}, \quad B' \triangleleft G.$$

故 G 是 B 过 A 的平凡扩张.

设 G_1 也是 B 过 A 的平凡扩张, 于是 $G_1 = A_1 \otimes B_1$. 设 λ_1 为 A 到 A_1 的同构, γ_1 是 B 到 B_1 的同构, 令

$$f((a, b)) = \lambda_1(a)\gamma_1(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

由 $G_1 = A_1 \otimes B_1$ 知 $G_1 = A_1 B_1, A_1 \cap B_1 = \{1\}$ 且 $A_1, B_1 \triangleleft G_1$. 从而由定理 0.4(1) 知

$$a_1 b_1 = b_1 a_1, \quad \forall a_1 \in A_1, b_1 \in B_1.$$

于是对 $\forall (a, b), (a', b') \in G$, 有

$$\begin{aligned} f((a, b)(a', b')) &= f((aa', bb')) = \lambda_1(aa')\gamma_1(bb') \\ &= \lambda_1(a)\lambda_1(a')\gamma_1(b)\gamma_1(b') = \lambda_1(a)\gamma_1(b)\lambda_1(a')\gamma_1(b') \\ &= f((a, b))f((a', b')). \end{aligned}$$

因此 f 是 G 到 G_1 的同态.

设 $a_1 b_1 \in A_1 B_1 = G_1$, 则由 λ_1 是 A 到 A_1 的同构, γ_1 是 B 到 B_1 的同构可知, 存在 $a \in A, b \in B$, 使

$$\lambda_1(a) = a_1, \gamma_1(b) = b_1 \implies f((a, b)) = \lambda_1(a)\gamma_1(b) = a_1 b_1.$$

故 f 是满同态.

设 $f((a, b)) = f((a', b')) \in G_1$, 则

$$\lambda_1(a)\gamma_1(b) = f((a, b)) = f((a', b')) = \lambda_1(a')\gamma_1(b').$$

由定理 0.4(1) 知 $\lambda_1(a) = \lambda_1(a'), \gamma_1(b) = \gamma_1(b')$. 又 λ_1 是 A 到 A_1 的同构, γ_1 是 B 到 B_1 的同构, 故

$$a = a', b = b' \implies (a, b) = (a', b').$$

因此 f 是单同态. 综上可知 f 是 G 到 G_1 的同构.

□

定义 0.8

若 N_1, N_2, \dots, N_k 都是群 G 的正规子群, 并且

$$G = N_1 N_2 \cdots N_k, \quad \text{其中 } N_i \cap \prod_{j=1}^{i-1} N_j = \{1\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

则称 G 是 N_1, N_2, \dots, N_k 的**内直积**, 记为

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$



注 由 $N_i \cap \prod_{j=1}^{i-1} N_j = \{1\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ 可推出 $N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

定理 0.7

如果群 G 是有限多个子群 H_1, H_2, \dots, H_n 的内直积, 则 G 同构于 H_1, H_2, \dots, H_n 的外直积.



证明 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 由**定理 0.5(1)**知结论成立.

假定结论对 $n - 1$ 成立. 考察 G 是 n 个正规子群 H_1, H_2, \dots, H_n 的内直积的情形. 令 $K = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$, 则由命题????知 K 为 G 的正规子群, 由命题????知 $H_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ 为 K 的正规子群. 从而由内直积的定义可得, G 为 K 与 H_n 的内直积, K 为正规子群 H_1, H_2, \dots, H_{n-1} 的内直积. 于是由**定理 0.5(1)**及归纳假设得

$$G \cong K \times H_n, \quad K \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{n-1}.$$

因此

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n.$$

□

定理 0.8

(1) 设群 N_1, N_2, \dots, N_k 的内直积为 G , 即 $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$, 则对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

(2) 设有限群 N_1, N_2, \dots, N_k 的内直积为 G , 即 $G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k$, 则

$$|G| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

(3) 设 G 是一个群, 群 $N_1, N_2, \dots, N_k \triangleleft G$, 则

$$N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k \triangleleft G.$$

(4) 设 N_1, N_2, \dots, N_k 都是群 G 的正规子群, 则群 G 满足

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$

的充要条件是 G 中任一元素可分解为 $N_i (1 \leq i \leq k)$ 中元素的积且这种分解是唯一的.



证明

(1) 由内直积的定义知当 $i \neq j$ 时, 有 $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$, 故利用**推论 0.1(1)**得, 对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j.$$

(2) 由内直积的定义知当 $i \neq j$ 时, 有 $N_i \cap N_j \subseteq N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}$, 故利用命题??得

$$|G| = |N_1 N_2 \cdots N_k| = |N_1| |N_2| \cdots |N_k|.$$

(3) 由内直积的定义和命题????立得.

(4) **必要性:** 由内直积的定义知 $G = N_1 N_2 \cdots N_k$ 且 $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$, 则显然 G 中任一元素可分解为 $N_i (1 \leq i \leq k)$ 中元素的积. 由**定理 0.8(1)**知, 对 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有

$$n_i n_j = n_j n_i, \quad \forall n_i \in N_i, n_j \in N_j. \quad (1)$$

设 $g \in G$ 且

$$g = x_1 x_2 \cdots x_k = y_1 y_2 \cdots y_k, \quad x_i, y_i \in N_i (i = 1, 2, \cdots, k).$$

则由(1)式可得

$$1 = x_1 x_2 \cdots x_k y_k^{-1} y_{k-1}^{-1} \cdots y_1^{-1} = (x_1 y_1^{-1})(x_2 y_2^{-1}) \cdots (x_k y_k^{-1}).$$

记 $n_i = x_i y_i^{-1} \in N_i (i = 1, 2, \cdots, k)$, 则

$$1 = n_1 n_2 \cdots n_k.$$

再结合(1)式可得, 对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 都有

$$n_i = \prod_{j \neq i} n_j^{-1} \in N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = \{1\}.$$

故 $n_i = 1$, 即 $x_i = y_i, i = 1, 2, \cdots, k$. 因此 g 的分解唯一.

充分性: 由 G 中任一元素可分解为 $N_i (1 \leq i \leq k)$ 中元素的积知 $G \subseteq N_1 N_2 \cdots N_k$. 又因为 $N_i \triangleleft G (i = 1, 2, \cdots, k)$, 所以 $N_1 N_2 \cdots N_k \subseteq G$. 故 $G = N_1 N_2 \cdots N_k$. 若存在 $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得 $N_i \cap N_j \neq \{1\}$. 取 $n_i \in N_i \cap N_j$, 则

$$n_i = 1 \cdots \underbrace{n_i}_{\text{第 } i \text{ 个位置}} \cdots 1 = 1 \cdots \underbrace{n_i}_{\text{第 } j \text{ 个位置}} \cdots 1 \in N_1 N_2 \cdots N_k.$$

这与 n_i 的分解唯一矛盾! 故 $N_i \cap N_j = \{1\} (i \neq j)$. 因此

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_k.$$

□

命题 0.3

设 G 为有限群, $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, p_1, p_2, \cdots, p_k 为互不相等的素数. 又每个 Sylow p_i 子群 $P_i \triangleleft G$. 则

$$G = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k.$$

◆

证明 由 Sylow 第三定理??知 P_i 是 G 中唯一的 Sylow p_i 子群 ($i = 1, 2, \cdots, k$). 由条件知 $|P_i| = p_i^{a_i}, i = 1, 2, \cdots, k$. 再由定理 0.8(2)知

$$\left| \prod_{i=1}^k P_i \right| = |P_1| |P_2| \cdots |P_k| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = |G|.$$

显然 $\prod_{i=1}^k P_i \subseteq G$, 故 $G = \prod_{i=1}^k P_i$.

由命题??知对 $\forall x_i \in P_i \setminus \{1\}, i = 1, 2, \cdots, k$, 都存在 $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, 使

$$\text{ord } x_i = p_i^{k_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

又因为 p_1, \cdots, p_k 是互不相同的素数, 所以

$$\text{ord } \prod_{j \neq i} x_j = \prod_{j \neq i} p_j^{k_j} \neq p_i^{k_i} = \text{ord } x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

因此 $P_i \cap \prod_{j \neq i} P_j = \{1\}, i = 1, 2, \cdots, k$. 从而 $P_i \cap P_j = \{1\} (i \neq j)$.

综上可知

$$G = \prod_{i=1}^k P_i, \quad P_i \triangleleft G, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$P_i \cap \prod_{j \neq i} P_j = \{1\}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

故 $G = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_k$.

□