

0.1 杂题

例题 0.1 设 $Y, x_0, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx.$$

证明

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-nY(x-x_0)^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-nYx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{Y}} \int_{-\delta\sqrt{nY}}^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{\delta\sqrt{nY}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{Y}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Y}}. \end{aligned}$$

□

例题 0.2 设 $f \in C^3[0, x], x > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}f''(\xi). \quad (1)$$

若还有 $f'''(0) \neq 0$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x}$.

笔记 我们当然可以直接用 Lagrange 插值公式得到

$$f(t) = (f(x) - f(0))t + f(0) + f''(\xi)(t-x), t \in [0, x].$$

两边同时对 t 在 $[0, x]$ 上积分就能得到(1)式.

证明 设 $K \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2}[f(0) + f(x)] - \frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y f(t) dt - \frac{y}{2}[f(0) + f(y)] + \frac{y^3}{12}K,$$

于是

$$g'(y) = f(y) - \frac{1}{2}[f(0) + f(y)] - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4} = \frac{f(y) - f(0)}{2} - \frac{yf'(y)}{2} + \frac{y^2K}{4}$$

以及

$$g''(y) = -\frac{yf''(y)}{2} + \frac{yK}{2}.$$

由 $g(x) = g(0) = 0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1 \in (0, x)$ 使得 $g'(\xi_1) = 0$. 注意到 $g'(0) = 0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$g''(\xi) = -\frac{\xi f''(\xi)}{2} + \frac{\xi K}{2} = 0,$$

即 $K = f''(\xi)$, 这就得到了(1)式. 由(1)式得

$$f''(\xi) = -12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f''(\xi) = f''(0) + f'''(\eta)\xi, \eta \in (0, \xi).$$

于是

$$f'''(\eta) \frac{\xi}{x} = \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0) + f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x}$$

现在利用 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) \frac{\xi}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \frac{\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3} - f''(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12 \int_0^x f(t) dt + 6x[f(0)+f(x)] - f''(0)x^3}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-12f(x) + 6[f(x) + f(0)] + 6xf'(x) - 3f''(0)x^2}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6xf''(x) - 6f''(0)x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{2x} = \frac{1}{2}f'''(0). \end{aligned}$$

因为 $0 < \eta < \xi < x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(\eta) = f'''(0),$$

我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2}.$$

□

例题 0.3 设 f 是 $[0, +\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g \in C^2[0, +\infty)$ 满足

$$g''(x) + f(x)g(x) = 0. \quad (2)$$

证明: 存在 $M > 0$ 使得

$$|g(x)| \leq M, \quad |g'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}, \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

证明 对 $\forall x > 0$, 有 f 在 $[0, x]$ 上单调递增, 从而由闭区间上单调函数必可积可知 $f \in R[0, x], \forall x > 0, f$ 在 $[0, +\infty)$ 上内闭连续. 由(2)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + \int_0^x f(y)g'(y)g(y) dy = 0, \forall x > 0 \quad (4)$$

利用 f 递增和第二积分中值定理和(4), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y) dy + f(x) \int_\xi^x g'(y)g(y) dy = 0, \xi \in [0, x].$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2 - \frac{1}{2}|g'(0)|^2 + \frac{|f(x)|^2}{2} [g^2(x) - g^2(\xi)] = 0.$$

现在一方面

$$|g'(x)|^2 = |g'(0)|^2 - f(x)g^2(x) + f(x)g^2(\xi) \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi). \quad (5)$$

另外一方面由(2)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g'(x)g(x) = 0, \forall x > 0.$$

即

$$\int_0^x \frac{g''(y)g'(y)}{f(y)} dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \forall x > 0$$

由 f 递增和第二积分中值定理, 我们有

$$\frac{1}{f(0)} \int_0^\eta g''(y)g'(y) dy + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \eta \in [0, x]$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0$$

即

$$|g(x)|^2 = g^2(0) - \frac{1}{f(0)} [|g'(\eta)|^2 - |g'(0)|^2] \leq g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)}, \forall x > 0. \quad (6)$$

由 $g \in C[0, +\infty)$ 知 g 有界, 即存在 $C_1 > 0$, 使得 $|g(x)| < C_1, \forall x > 0$. 于是由(5)式知

$$|g'(x)|^2 \leq |g'(0)|^2 + f(x)g^2(\xi) \leq |g'(0)|^2 + C_1 f(x), \forall x > 0. \quad (7)$$

又因为 f 是递增正函数, 所以 $f(x) \geq f(0) > 0, \forall x > 0$. 从而存在 $C_2 > 0$, 使得

$$|g'(0)|^2 \leq C_2 f(0) \leq f(x), \forall x > 0.$$

于是取 $M = \max \left\{ C_1 + C_2, g^2(0) + \frac{|g'(0)|^2}{f(0)} \right\}$, 则由(7)式和(6)式可得, 对 $\forall x > 0$, 有

$$|g(x)|^2 \leq M \leq M^2,$$

$$|g'(x)|^2 \leq C_2 f(x) + C_1 f(x) \leq M f(x) \leq M^2 f(x).$$

进而

$$|g(x)| \leq M, |g'(x)| \leq M \sqrt{f(x)}, \forall x > 0.$$

这就证明了(3). □

例题 0.4 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上严格单调下降, 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

证明 反证, 假设 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in (a, +\infty)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $x_{n_k} \rightarrow c$. 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

则 $f(x_n)$ 的子列极限也收敛到 A , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$. 由 $x_{n_k} \rightarrow c$ 知, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得

$$x_{n_k} \in (c - \delta, c + \delta), \forall k > K.$$

其中 $\delta = \min \left\{ \frac{c - a}{2}, \frac{1}{2} \right\}$. 任取 $x_1, x_2 \in (c + \delta, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则由 f 严格递减知

$$f(x_{n_k}) > f(x_1) > f(x_2) > f(x), \forall x > x_2, \forall k > K.$$

左边令 $k \rightarrow +\infty$, 右边令 $x \rightarrow +\infty$ 得

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_1) > f(x_2) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

显然矛盾! □

例题 0.5 设 $\{x_n\} \subset (0, 1)$ 满足对 $i \neq j$, 有 $x_i \neq x_j$, 讨论函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

故级数一致收敛. 注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $\operatorname{sgn}(x - x_n)$ 在 $x = x_n$ 处间断, 在 $x \neq x_n$ 处连续.

当 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, $f(x)$ 的每一项都连续. 又 $f(x)$ 一致收敛, 故 f 在 $x \neq x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都连续.

当 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x - x_k)}{2^k} + \sum_{n \neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在 $x = x_k$ 处间断. 故 $f(x)$ 在 $x = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$ 处都间断. □

例题 0.6 证明 $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛性.

证明 由 Abel 变换得, 对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$ 成立

$$\begin{aligned} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^n (-1)^t \frac{t}{t^2 + x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=m}^{n-1} \left(\frac{t}{t^2 + x} - \frac{t+1}{(t+1)^2 + x} \right) s_t + \frac{n}{n^2 + x} s_n \right] \\ &= \sum_{t=m}^{\infty} \left(\frac{t}{t^2 + x} - \frac{t+1}{(t+1)^2 + x} \right) s_t \\ &= \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2 + t}{(x + t^2)(x + t^2 + 2t + 1)} s_t - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x + t^2)(x + t^2 + 2t + 1)} s_t, \end{aligned}$$

这里 $s_t = \sum_{i=1}^t (-1)^i = (-1)^t \in \{1, -1\}$. 一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2 + t}{(x + t^2)(x + t^2 + 2t + 1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2 + t}{t^2(t^2 + 2t + 1)},$$

另外一方面

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{x}{(x + t^2)(x + t^2 + 2t + 1)} s_t \right| \leq \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2 + t + 1}.$$

而由 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t^2 + t}{t^2(t^2 + 2t + 1)}$ 和 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + t + 1}$ 都收敛知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^2 + t + 1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{t^2 + t}{t^2(t^2 + 2t + 1)} = 0.$$

于是我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x} = 0, \text{ 关于 } x \in [0, +\infty) \text{ 一致},$$

这就证明了 $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{t}{t^2 + x}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

□

命题 0.1

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续实值右可导函数, 记 $D^+f(x)$ 为 $f(x)$ 的右导函数, 如果 $f(a) = 0$, 且 $D^+f(x) \leq 0$, 则 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$.

证明 (1) 先假定 $D^+f(x) < 0$, 如果结论不成立, 则存在 $x_1 \in (a, b)$, 使 $f(x_1) > 0$. 记

$$x_0 = \inf \{x \mid f(x) > 0\}.$$

由 x_0 的定义, 我们有序列 $\{x_n\}$, 使 x_n 单调递减趋于 x_0 , 且 $f(x_n) > 0$. 从而由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq 0. \quad (8)$$

根据 x_0 的定义可知, 对 $\forall x < x_0$, 都有 $f(x) < f(x_0)$, 否则与下确界定义矛盾! 于是有序列 $\{x'_n\}$ 单调递增趋于 x_0 , 且 $f(x'_n)$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \leq 0. \quad (9)$$

故由(8)(9)知 $f(x_0) = 0$. 于是

$$D^+f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0,$$

这与 $D^+f(x_0) < 0$ 矛盾, 于是 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$.

(2) 若 $D^+f(x) \leq 0$, 对任给的 $\varepsilon > 0$ 构造函数

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon(x - a),$$

对 $f_\varepsilon(x)$ 有 $f_\varepsilon(a) = 0$ 且

$$D^+f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon < 0.$$

从而由 (1) 得 $f_\varepsilon(x) \leq 0, x \in [a, b]$. 因此 $f(x) \leq \varepsilon(x - a) \leq \varepsilon(b - a)$, 由 ε 的任意性, 得 $f(x) \leq 0, x \in [a, b]$.

□

例题 0.7 设 $\varphi(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续且右可导的函数, 如果 $D^+\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导, $\varphi'(x) = D^+\varphi(x)$.

证明 设

$$f(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+\varphi(t)dt - \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且右可导, 并且

$$D^+f(x) = D^+\varphi(x) - D^+\varphi(x) = 0.$$

又 $f(a) = 0$, 由**命题 0.1**得 $f(x) \leq 0$. 又 $-f(x)$ 满足 $-f(a) = 0, D^+[-f(x)] = 0$, 同理由**命题 0.1**得 $-f(x) \leq 0$, 故 $f(x) = 0$. 于是

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x D^+\varphi(t)dt.$$

由 $D^+\varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi'(x) = D^+\varphi(x)$.

□

例题 0.8 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{2n}{\pi} (\ln 2n + \gamma - \ln \pi) + o(1).$$

证明 见[here](#).

□

$$\text{例题 0.9} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} = 1.$$

证明 证法一: 对任意充分大的 n , 由 Frullani(傅汝兰尼) 积分知

$$\ln k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{kx}}{x} dx.$$

再结合二项式定理可得

$$\begin{aligned} A &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^k C_n^k \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{x} dx \right) \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (e^{-x} - e^{-kx})}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{-kx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} + e^{-x} (1 - 1)^n - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx. \end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式知

$$(1 - e^{-x})^n \geq 1 - ne^{-x}.$$

取 $M_n > 1$, 满足 $M_n e^{M_n} = n$. 于是

$$0 \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx \leq \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - ne^{-x})}{M_n} dx = \frac{n}{M_n} \int_{M_n}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{n}{M_n e^{M_n}} = 1.$$

从而

$$A = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + \int_{M_n}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1). \quad (10)$$

因为 $M_n e^{M_n} = n$, 所以由命题??知

$$M_n = \ln n + o(\ln n), n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

于是

$$(1 - e^{-x})^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-e^{-x})} \leq e^{-(n-1)e^{-x}} \leq e^{-(n-1)e^{-M_n}} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, \forall x \in [0, M_n].$$

从而

$$\frac{\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} \leq \frac{e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx}{\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx} = e^{-\frac{M_n(n-1)}{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

即 $\int_0^{M_n} \frac{(1-e^{-x})^n}{x} dx = o\left(\int_0^{M_n} \frac{1-e^{-x}}{x} dx\right), n \rightarrow \infty$. 故

$$\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_0^{M_n} \frac{(1 - e^{-x})^n}{x} dx = (1 + o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

故 $\frac{1 - e^{-x}}{x}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx \leq -e^{-M_n} \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

故 $\int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx = O(1)$. 于是再结合(11)式可知

$$\begin{aligned} \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{M_n} \frac{1}{x} dx \\ &= O(1) + \ln M_n = \ln(\ln n + o(\ln n)) + O(1) \\ &= \ln \ln n + o(1) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此再由(12)式可知

$$\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx = (1 + o(1)) \int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = (1 + o(1)) (\ln \ln n + O(1)) = \ln \ln n + o(\ln \ln n), n \rightarrow \infty.$$

故由(10)可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \ln k}{\ln(\ln n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\ln(\ln n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{M_n} \frac{1 - e^{-x} - (1 - e^{-x})^n}{x} dx + O(1)}{\ln(\ln n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + o(\ln \ln n) + O(1)}{\ln(\ln n)} = 1. \end{aligned}$$

证法二: 注意到

$$\begin{aligned} S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx.
\end{aligned}$$

又由二项式定理可知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 t^{k+y-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^{k+y-1} dt \\
&= \int_0^1 t^{y-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} t^k dt = \int_0^1 t^{y-1} [(1-t)^{n-1} - 1] dt.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
S &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+y} dy = \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dt dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 t^{y-1} [1 - (1-t)^{n-1}] dy dt = \int_0^1 \frac{t-1}{t \ln t} [1 - (1-t)^{n-1}] dt \\
&\stackrel{t=e^{-x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-x}) [1 - (1-e^{-x})^{n-1}]}{x} dx.
\end{aligned}$$

后续估阶与证法一相同.

证法三:注意到

$$\begin{aligned}
S &\triangleq \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \ln k \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (\ln(k+1) - \ln k) \\
&= - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \int_0^1 \frac{1}{k+x} dx \\
&= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+x} \right) dx \\
&\stackrel{\text{命題??}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))} \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \right) dx.$$

由命题??(4) 知

$$e^{x^2-x} \geq \frac{1}{1+x} \geq e^{-x}, \forall x > 0.$$

于是

$$e^{x^2-x} \cdot e^{(\frac{x}{2})^2-\frac{x}{2}} \cdots e^{(\frac{x}{n-1})^2-\frac{x}{n-1}} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdots e^{-\frac{x}{n-1}},$$

即

$$e^{x^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \right) - x \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)}.$$

注意到

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \leq x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} x < 2x, \forall x \in [0, 1],$$

故

$$e^{-x \left(-2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right)} \geq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \geq e^{-x \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}}.$$

从而由连续函数 e^{-x} 的介值性知, 存在 $C_n \in \left[-2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right]$, 使得

$$\frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} = e^{-C_n x}.$$

于是由 $-2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq C_n \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$ 知

$$C_n = \ln n + O(1), n \rightarrow \infty.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n-1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} (1 - e^{-C_n x}) dx \\ &= \int_0^{C_n} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1,$$

故 $\frac{1 - e^{-t}}{t}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 进而 $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = O(1)$. 又注意到

$$\int_1^{C_n} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \leq 1 - e^{-C_n} = 1 - e^{-\ln n + O(1)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

故 $\int_1^{C_n} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = O(1)$. 从而

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^{C_n} \frac{1}{t} dt = \ln C_n + O(1) \\ &= \ln (\ln n + O(1)) + O(1) = \ln \ln n + O(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\ln \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + O(1)}{\ln \ln n} = 1.$$

□

例题 0.10 已知 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 在 (a, b) 上至少 2 个零点.

证明 设 $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F_1(a) = F_1(b) = 0$. 再设 $F_2(x) = \int_a^x F_1(t) dt = \int_a^x \left[\int_a^t f(s) ds \right] dt$, 则 $F_2(a) = 0, F'_2(x) = F_1(x), F''_2(x) = F'_1(x) = f(x)$. 由条件可知

$$0 = \int_a^b xf(x) dx = \int_a^b xF'_1(x) dx = \int_a^b x dF_1(x) = xF_1(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_1(x) dx = -F_2(b).$$

于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'_2(\xi) = F_1(\xi) = 0$. 从而再由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$, 使得 $F'_1(\eta_1) = F'_1(\eta_2) = 0$. 即 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$.

□

命题 0.2

已知 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

证明: $f(x)$ 在 (a, b) 上至少 $n+1$ 个零点.

◆



笔记 利用分部积分转换导数的技巧或匹配零点, 得到不变号的被积函数.

证明 证法一: 令 $F(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \cdots \int_a^{x_2} \left[\int_a^{x_1} f(x_1) dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_n$, 则 $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f(x)$. 由已知条件, 再反复分部积分, 可得当 $1 \leq k \leq n$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F^{(n+1)}(x) dx = F^{(n)}(x) \Big|_a^b = F^{(n)}(b), \\ 0 &= \int_a^b xf(x) dx = \int_a^b xF^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x dF^{(n)}(x) = xF^{(n)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F^{(n)}(x) dx = -F^{(n-1)}(b), \\ &\dots \\ 0 &= \int_a^b x^n f(x) dx = \int_a^b x^n F^{(n+1)}(x) dx = \int_a^b x^n dF^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}(x) \Big|_a^b - n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx \\ &= -n \int_a^b x^{n-1} F^{(n)}(x) dx = \cdots = (-1)^n n! \int_a^b F'(x) dx = (-1)^n n! F(b). \end{aligned}$$

从而 $F(b) = F'(b) = \cdots = F^{(n)}(b) = 0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 Rolle 中值定理可知存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (a, b)$, 使得 $F''(\xi_1^2) = F''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1^{n+1}, \xi_2^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1} \in (a, b)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi_1^{n+1}) = F^{(n+1)}(\xi_2^{n+1}) = \cdots = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$. 即 $f(\xi_1^{n+1}) = f(\xi_2^{n+1}) = \cdots = f(\xi_{n+1}^{n+1}) = 0$.

证法二: 假设 f 在 (a, b) 上只有 $s \leq n$ 个不同的零点 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_s < b$. 由 f 的介值性知, f 在 $(x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, s$ 上不变号. 不妨设 f 在相邻两个区间变号, 否则把这两个区间合并. 现在

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_s) f(x)$$

在 $[a, b]$ 上不变号. 又由条件得

$$\int_a^b (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_s) f(x) dx = 0,$$

故 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. 这与 f 在 (a, b) 上只有 s 个不同的零点矛盾! 故结论得证.

□

例题 0.11 设

$$f \in C[a, b], \int_a^b f(x) e^{kx} dx = 0, k = 1, 2, \dots, n+1,$$

证明: f 在 (a, b) 至少有 $n + 1$ 个不同零点.

证明 注意到

$$\int_a^b f(x) e^{kx} dx \stackrel{x=\ln t}{=} \int_{e^a}^{e^b} f(\ln t) t^{k-1} dt = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n+1.$$

即

$$\int_{e^a}^{e^b} f(\ln t) t^k dt = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

且 $f(\ln t) \in C[e^a, e^b]$, 故由**命题 0.2**知 $f(\ln t)$ 在 (e^a, e^b) 上至少有 $n + 1$ 个不同零点. 因此 f 在 (a, b) 上至少有 $n + 1$ 个不同零点.

□

例题 0.12 已知 $f(x) \in D^2[0, 1]$, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}, \int_0^1 x f(x) dx = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{60}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 16$.

 **笔记** 构造 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$ 的原因: 受到上一题的启发, 我们希望找到一个 $g(x) = f(x) - p(x)$, 使得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = \int_0^1 x^k [f(x) - p(x)] dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

成立. 即

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k p(x) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

待定 $p(x) = ax^2 + bx + c$, 则代入上述公式, 再结合已知条件可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c, \\ 0 &= \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}, \\ \frac{1}{60} &= \int_0^1 x^2 p(x) dx = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}. \end{aligned}$$

解得: $a = 8, b = -9, c = 2$. 于是就得到 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$.

证明 令 $g(x) = f(x) - (8x^2 - 9x + 2)$, 则由条件可得

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

再令 $G(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left(\int_0^s g(y) dy \right) ds \right] dt$, 则 $G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, G'''(x) = g(x)$. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'''(x) dx = G''(1), \\ 0 &= \int_0^1 x g(x) dx = \int_0^1 x G'''(x) dx = \int_0^1 x dG''(x) = x G''(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G''(x) dx = -G'(1), \\ 0 &= \int_0^1 x^2 g(x) dx = \int_0^1 x^2 G'''(x) dx = \int_0^1 x^2 dG''(x) = x^2 G''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x G''(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 x dG'(x) = 2 \int_0^1 G'(x) dx - 2x G'(x) \Big|_0^1 = 2G(1). \end{aligned}$$

从而 $G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi_1^1 \in (0, 1)$, 使得 $G'(\xi_1^1) = 0$. 再利用 Rolle 中值定理可知, 存在 $\xi_1^2, \xi_2^2 \in (0, 1)$, 使得 $G''(\xi_1^2) = G''(\xi_2^2) = 0$. 反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3 \in (0, 1)$, 使得 $G'''(\xi_1^3) = G'''(\xi_2^3) = G'''(\xi_3^3) = 0$. 即 $g(\xi_1^3) = g(\xi_2^3) = g(\xi_3^3) = 0$. 再反复利用 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g''(\xi) = 0$. 即 $f''(\xi) = 16$.

□

例题 0.13 设

$$x_n = \int_0^1 \ln(1+x+\cdots+x^n) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx, n=1,2,\dots$$

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

(2) 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{\ln n} (2 - x_n) \right]$.

证明

(1) 注意到

$$x_n = \int_0^1 \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} \right| dx &\leqslant \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \ln^2 x dx \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} -2 \int_0^1 \ln x dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} 2. \end{aligned}$$

从而由**控制收敛定理**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \ln^2 x dx = 2.$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} x_n &= \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 \ln^2 \frac{1}{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx + 2, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 2 - x_n &= - \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) \cdot \ln \frac{1}{1-x} dx \\ &\stackrel{x=e^{-\frac{y}{n+1}}}{=} \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln \left(1-e^{-\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln \left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy. \end{aligned} \tag{13}$$

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1-e^x}{x} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x} \right) \stackrel{\text{L'Hospital's rule}}{=} \ln 1 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-e^x) - \ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-e^x)}{e^x} \stackrel{\text{L'Hospital's rule}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x} = 0. \end{aligned}$$

故存在 $M > 0$, 使得

$$\left| e^{-x} \ln \frac{1-e^x}{x} \right| \leq M, \forall y \in (0, +\infty).$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln \left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot \ln \left(\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-y}) \cdot 0 \cdot 1 dy = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y dy \xrightarrow{x=e^{-y}} - \int_0^1 \ln(1-x) dx \\ &= \int_0^1 \ln x dx = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) dy = - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n} dy \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny}}{n} dy = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

故再由(13)式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (2 - x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln \left(\frac{1 - e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}} \right) \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) \cdot \ln y \cdot e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1)}{(n+1)\ln n} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-y}) e^{-\frac{y}{n+1}} dy \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

例题 0.14 设 f 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x \geq 0$, 定义 $F(x) = \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt$.

(1) 若 $\alpha \in (-1, 0)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: F 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha \in (0, 1)$, f 以 $T > 0$ 为周期, $\int_0^T f(t) dt = 2022$. 证明: F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

笔记 本题(1)中的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 可以削弱为 $\exists M, X > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, x \in [X, +\infty)$.

证明

(1) 由于 f 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 所以 $\exists M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, +\infty).$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \left[\frac{(\alpha+1)\varepsilon}{3M} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$, 则当 $0 \leq x < \delta$ 时, 有

$$x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} < \delta^{1+\alpha}.$$

当 $x \geq \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} &= \frac{x - y}{\left[(x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1} + (x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-2} y^{\alpha+1} + \dots + (y^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1} \right]} \\ &< \frac{\delta}{(x^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1}} < \frac{\delta}{(\delta^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}-1}} = \delta^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

因此对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$ 且 $0 < x - y < \delta$, 都有

$$x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} < \delta^{1+\alpha}.$$

从而对 $\forall x, y \in [0, +\infty)$ 且 $0 < x - y < \delta$, 都有

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^x t^\alpha f(t+y) dt - \int_0^y t^\alpha f(t+x) dt \right| = \left| \int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_y^{2y} (t-y)^\alpha f(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt - \int_y^x (t-y)^\alpha f(t) dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] f(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha |f(t)| dt + \int_y^x (t-y)^\alpha |f(t)| dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] |f(t)| dt \\
 &\leq M \left[\int_{2y}^{2x} (t-x)^\alpha dt + \int_y^x (t-y)^\alpha dt + \int_x^{2y} [(t-x)^\alpha - (t-y)^\alpha] dt \right] \\
 &= \frac{M}{\alpha+1} [x^{\alpha+1} - (2y-x)^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1} + (2y-x)^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + (x-y)^{\alpha+1}] \\
 &= \frac{M}{\alpha+1} (x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1} + 2(x-y)^{\alpha+1}) \\
 &< \frac{3M}{\alpha+1} \delta^{1+\alpha} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

故 F 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 假设 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 那么存在 $a, b > 0$, 使得 $F(x) < a|x| + b$.

从而 $\left| \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} \right| < \frac{a|x| + b}{|x|^{\alpha+1}}$, 进而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$.

于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} &= \frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_x^{2x} (t-x)^\alpha f(t) dt}{x^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{换元}} \frac{\int_1^2 x^{\alpha+1} (t-1)^\alpha f(tx) dt}{x^{\alpha+1}} \\
 &\xrightarrow{\text{Riemann 引理}} \int_1^2 (t-1)^\alpha f(tx) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dt \int_1^2 (t-1)^\alpha dt = 0
 \end{aligned}$$

再结合 $\int_1^2 (t-1)^\alpha dt > 0$, 知 $\int_0^T f(x) dt = 0$.

现在有

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt = \int_0^x t^\alpha d \left[\int_0^{x+t} f(y) dy \right] \\
 &\xrightarrow{\text{分部积分}} x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left[\int_0^{x+t} f(y) dy \right] dt \\
 &= x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t) dt
 \end{aligned}$$

设 $G(x) = \int_0^x f(x) dt$, 则由 f 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积知, $G \in C[0, +\infty)$. 又由 $\int_0^T f(x) dt = 0$, 得

$$G(x+T) - G(x) = \int_0^x f(x+T) dt - \int_0^x f(x) dt = \int_x^{x+T} f(x) dt = \int_0^T f(x) dt = 0$$

因为连续的周期函数必有界, 所以 $G(x)$ 有界.

又 $\alpha-1 \in (-1, 0)$, 故由 (1) 可得, $-\alpha \int_0^x t^{\alpha-1} F(x+t) dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

下面证明 $x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy$ 不一致连续.

由于 $G(2x)$ 在 $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ 上连续, 所以由连续函数最大、最小值定理知

记 $M = \max_{x \in [0, \frac{T}{2}]} G(2x)$, 则存在 $x_2 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, 使得 $M = G(2x_2) \geq G(2x), x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

又因为 $G(3) = \int_0^3 f(t) dt = 2022$, 且 $G(2x)$ 以 $\frac{T}{2}$ 为周期, 所以存在 $x_1 \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, 使得 $G(2x_1) = G(3) > 0$.

因此, $M = G(2x_2) \geq G(2x_1) = G(3) = \int_0^3 f(t) dt > 0$.

构造数集 $E = \left\{ x' \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \mid G(2x') = M \right\}$, 由 $x_2 \in E$ 知, $E \neq \emptyset$. 又因为 E 有界, 所以由确界存在定理知, E 必有上确界, 取 $x_0 = \sup E$.

假设 $x_0 \notin E$, 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} |G(2x_0) - M|$, 则 $\varepsilon_0 > 0$, 否则 $x_0 \in E$ 矛盾.

从而 $\forall \delta' > 0, \exists x_{\delta'} \in E$, 使得 $x_0 - \delta' < x_{\delta'} < x_0$, 都有 $|G(2x_0) - G(2x'_{\delta'})| \geq \varepsilon_0$.

这与 $G(2x)$ 在闭区间 $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ 上连续, 进而一致连续矛盾. 故 $x_0 \in E$.

任取 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} - x_0\right)\right)$, 则 $G(2x_0 + \delta) < M = G(2x_0)$, 否则与 $x_0 = \sup E$ 矛盾.

进而 $\left| \int_{2x_0}^{2x_0 + \delta} f(y) dy \right| = |G(2x_0 + \delta) - G(2x_0)| > 0$.

从而当 $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ 时, 由积分中值定理, 得

存在 $\xi_n \in \left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得

$$\left| \int_{2x_0}^{2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y) dy \right| = \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} |f(\xi_n)| > 0 \quad (14)$$

又因为 f 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积, 所以 f 在 $\left(2x_0, 2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ 上有界.

于是存在 $K, L > 0$, 使得

$$K \leq |f(\xi_n)| \leq L \quad (15)$$

取数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$, 其中 $x_n = x_0 + n \frac{T}{2}$, $y_n = x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}, n \in \mathbb{N}_+$. 并且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 0$.

由拉格朗日中值定理, 得对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$,

存在 $\xi_n \in \left(x_0 + n \frac{T}{2}, x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, 使得 $\left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha = \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1}$

从而

$$\frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} \leq \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\alpha-1}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{\alpha-1} = 0$.

于是存在 $N > 0$, 使得 $\forall n > N$, 有

$$\left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha < \frac{\varepsilon}{\int_0^{2x_0} f(y) dy} \quad (16)$$

现在, 当 $n > \max \left\{ N, \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\}$ 时, 结合(14)(15)(16), 我们有

$$\begin{aligned} & \left| x_n^\alpha \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^\alpha \int_0^{2y_n} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &= \left| \left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2})} f(y) dy - \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2})} f(y) dy + \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_{2(x_0 + n \frac{T}{2})}^{2(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right] \right| \\ &= \left| \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha\right] \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2})} f(y) dy - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_{2(x_0 + n \frac{T}{2})}^{2(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| \\ &\geq \left| \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha \int_{2(x_0 + n \frac{T}{2})}^{2(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}})} f(y) dy \right| - \left| \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2}\right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^\alpha\right] \int_0^{2(x_0 + n \frac{T}{2})} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^\alpha \int_{2x_0}^{2x_0 + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}}} f(y) dy \right| - \left| \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2} \right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^\alpha \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\
&= \left| \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^\alpha \right| \cdot \left| \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} f(\xi_n) \right| - \left| \left[\left(x_0 + n \frac{T}{2} \right)^\alpha - \left(x_0 + n \frac{T}{2} + \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^\alpha \right] \int_0^{2x_0} f(y) dy \right| \\
&\geq 2 \left(\frac{T}{2} \right)^\alpha |f(\xi_n)| \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon \\
&\geq 2 \left(\frac{T}{2} \right)^\alpha K \cdot n^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon
\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x_n^\alpha \int_0^{2x_n} f(y) dy - y_n^\alpha \int_0^{2y_n} f(y) dy \right) = +\infty$. 故 $x^\alpha \int_0^{2x} f(y) dy$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

这与 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续矛盾. 因此, F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

□

例题 0.15 计算

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots \right)$$

解 对 $\forall t \in (0, 1)$, 一方面, 我们有

$$(1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+x} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^{k+1}}^{t^k} \frac{1}{1+x} dx = \int_0^t \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+t)$$

另一方面, 我们有

$$(1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+t^k} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t^k}^{t^{k-1}} \frac{t}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{t}{1+x} dx = t \ln 2.$$

故

$$\ln 2 = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln(1+t)] \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} (t \ln 2) = \ln 2.$$

□

例题 0.16 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x}$.

解 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $t_n \in \mathbb{N}$, 使得 $(t_n + 1)\pi < n < (t_n + 2)\pi$. 从而 $n - 7 < t_n \pi < n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = \frac{1}{\pi}$. 现在我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} &= \sum_{k=0}^{t_n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} + \int_{(t_n+1)\pi}^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \\
&= \sum_{k=0}^{t_n} \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2(x+k\pi)} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2(x+(t_n+1)\pi)} \\
&= t_n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} + \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x}.
\end{aligned} \tag{17}$$

注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} \right| &\leq \frac{1}{1+\cos^2 x}, \\
n \left| \frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right| &= \left| \frac{n^3 (x^2 - \cos^2 x)}{(1+n^2 \cos^2 x)(1+n^2 x^2)} \right| \\
&\leq \left| \frac{n^3 (x^2 - \cos^2 x)}{n^4 x^2 \cos^2 x} \right| \leq \frac{|x^2 - \cos^2 x|}{x^2 \cos^2 x},
\end{aligned}$$

故由控制收敛定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n-(t_n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\pi \left(\frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right) dx = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{n}{1+n^2 x^2} \right) dx = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} \cdot n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \int_0^\pi \frac{1}{1+n^2 x^2} + n \int_0^\pi \left(\frac{1}{1+n^2 \cos^2 x} - \frac{1}{1+n^2 x^2} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\pi \frac{dx}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{dx}{1+x^2} = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

综上, 由(17)(18)(19)式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{1+n^2 \cos^2 x} = 1.$$

□

例题 0.17 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}} dx$.

证明 注意到对 $\forall k \in [1, 2018] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{(1+x)^{2021}} dx \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2018-k}}{(1+t)^{2021}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}} dx.$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k-x^{2018-k}}{(1+x)^{2021}} dx = 0, \quad \forall k \in [1, 2018] \cap \mathbb{N}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}} dx = 0.$$

□

例题 0.18 设 $I(f) = \int_0^\pi (\sin x - f(x))f(x) dx$, 求当遍历 $[0, \pi]$ 上所有连续函数 f 时 $I(f)$ 的最大值.

解 对函数配方, 有

$$(\sin x - f(x))f(x) = - \left(f(x) - \frac{\sin x}{2} \right)^2 + \frac{\sin^2 x}{4}.$$

代入积分式, 得

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{4} dx - \int_0^\pi \left(f(x) - \frac{\sin x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \int_0^\pi \left(f(x) - \frac{\sin x}{2} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

故当 $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ 时, $I(f)$ 取得最大值 $\frac{\pi}{8}$.

□

例题 0.19 设 $\alpha > 1$, $\Gamma_k = \left[k^\alpha, \left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha \right) \cap \mathbb{N}$ ($k \geq 1$). 试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性, 其中

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{存在 } k \text{ 使得 } n = \min \Gamma_k, \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{其他,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{存在 } k \text{ 使得 } n \in \Gamma_k, \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 由 $\alpha > 1$ 和条件直接可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{\substack{n \neq \min \Gamma_k, \\ \forall k \in \mathbb{N}}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\substack{\exists k \in \mathbb{N}, \\ n = \min \Gamma_k}}^{\infty} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\min \Gamma_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty.$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{n}$$

$$\geq \sum_{n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^\alpha}. \quad (20)$$

记 N_k 为 Γ_k 所含元素的个数, 则

$$\lfloor \left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha - k^\alpha \rfloor \leq N_k < \lfloor \left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha - k^\alpha \rfloor + 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

再结合 Lagrange 中值定理知

$$N_k \sim \left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha - k^\alpha \sim \frac{\alpha}{2} k^{\alpha-1}, \quad k \rightarrow \infty.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} k^{\alpha-1}}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha-1}}{2^\alpha k^\alpha} = \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^\alpha} = +\infty.$$

故由 (20) 式知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

□

例题 0.20 证明:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n};$$

$$(2) \text{计算 } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}, \text{ 并说明理由.}$$

证明

(1) 注意到对 $\forall \alpha \geq 0$, 都有

$$\left| \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n^{1+\alpha}} \right| \leq \frac{|\cos(n + \frac{1}{2})|}{n},$$

并且对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n [\sin(k+1) - \sin k]}{2 \sin \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin(n+1) - \sin 1}{2 \sin \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

故由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n^{1+\alpha}}$ 关于 $\alpha \geq 0$ 一致收敛. 从而

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n^{1+\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{n}.$$

(2) 注意到对 $\forall \alpha \in (0, 1)$, 都有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \sin n}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n - \frac{1}{2})}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n - \frac{1}{2})}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{2n^\alpha \sin \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{2(n+1)^{\alpha} \sin \frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{2n^{\alpha} \sin \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

由 Lagrange 中值定理知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{\xi^{1+\alpha}} \leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n + \frac{1}{2})|}{n^{1+\alpha}}.$$

于是再结合 (1) 的结论可得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{\xi^{1+\alpha}} = 0.$$

故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}} = \frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}.$$

□

例题 0.21 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x \in [n, n+1)$ 时, 则 $(x) = x - n$).

证明 注意到 (x) 是周期为 1 的函数, 并且在 $[0, 1]$ 上恒有 $(x) = x$. 因此

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{(x)}{x^3} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x+k)}{(x+k)^3} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x)}{(x+k)^3} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(x+k)^3} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+k)^2} - \frac{k}{(x+k)^3} \right] dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{(1+k)^2} - \frac{1}{k} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{(1+k)^2} - \frac{1}{1+k} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(1+k)^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

□

例题 0.22 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0$.

证明 证法一: 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, G(x) = \frac{F^2(x)}{2}$, 则

$$g(x) = F(x) F'(x) = \left[\frac{F^2(x)}{2} \right]' = G'(x),$$

由条件知 $g(x) = G'(x)$ 单调递减, 故 $G(x)$ 是上凸函数. 注意到 $G'(0) = g(0) = 0$, 由 g 递减知, $G'(x) = g(x) \leq 0$

$0, \forall x > 0$. 从而 $G(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减. 故

$$0 \leq G(x) = \frac{F^2(x)}{2} \leq G(0) = 0.$$

因此 $G(x) = 0, \forall x \geq 0$. 于是 $F(x) \equiv 0$, 故 $f(x) = F'(x) = 0, \forall x \geq 0$.

证法二: 证明: 若 $\exists X_0 > 0$, s.t. $f(X_0) \neq 0$. 不妨设 $f(X_0) > 0$, 则由 g 递减知

$$g(X_0) = f(X_0) \int_0^{X_0} f(t) dt \leq g(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{X_0} f(t) dt \leq 0.$$

从而由积分中值定理知, $\exists \xi \in (0, X_0)$, s.t. $f(\xi) \leq 0$ 于是由介值定理知, $\exists x_1 \in (0, X_0)$, s.t. $f(x_1) = 0$. 记

$$x_2 \triangleq \sup\{x \in [x_1, X_0] \mid f(x) = 0\}.$$

则 $f(x) > 0, \forall x \in (x_2, X_0)$, 否则,

$$\exists \eta \in (x_2, X_0), \text{s.t. } f(\eta) \leq 0.$$

由介值定理知, $\exists \eta' \in (x_2, X_0)$, s.t. $f(\eta') = 0$. 这与上确界定义矛盾! 再记 $f(x') = \max_{x \in [x_2, X_0]} f(x)$, 任取 $x_3 \in (x_2, x')$. 则 $f(x_3) > 0$, 进而 $\int_{x_3}^{x'} f(t) dt > 0$. 于是

$$\begin{aligned} g(x_3) &= f(x_3) \int_0^{x_3} f(t) dt < f(x') \left(\int_0^{x_3} f(t) dt + \int_{x_3}^{x'} f(t) dt \right) \\ &= f(x') \int_0^{x'} f(t) dt = g(x'). \end{aligned}$$

这与 g 递减矛盾! 故 $f(x) = 0, \forall x > 0$. 同理可得 $f(x) = 0, \forall x < 0$. 再由 f 的连续性可知 $f(0) = 0$, 故 $f(x) \equiv 0$.

□

例题 0.23 设 $f \in C^1[0, +\infty)$ 满足

$$|f(x)| \leq e^{-\sqrt{x}}, f'(x) = -3f(x) + 6f(2x), \forall x \geq 0.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx < \infty.$$

并且证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx = 0$$

的充要条件是 $\int_0^\infty f(x) dx = 0$.

证明 由 $f'(x) = -3f(x) + 6f(2x)$ 可得

$$\begin{aligned} I_n &\triangleq \frac{3^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x) dx \xrightarrow{\text{分部积分}} -\frac{3^n}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} f'(x) dx \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} [f(x) - 2f(2x)] dx \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \left[\int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx - 2 \int_0^\infty x^{n+1} f(2x) dx \right] \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \left[\int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx - \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx \right] \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty x^{n+1} f(x) dx = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot I_{n+1}. \end{aligned}$$

故

$$I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} I_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$I_n = \frac{2^n}{2^n - 1} I_{n-1} = \cdots = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1} \cdots \frac{2}{2 - 1} I_0 = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2^k}{(2^k - 1)}.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \geq \sum_{k=1}^n \left(-\frac{2}{2^k} \right) = -2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\prod_{k=1}^n \frac{2^k}{(2^k - 1)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)} = e^{-\sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)} \leq e^{4(1 - \frac{1}{2^n})} \leq e^4.$$

故 $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)}$ 收敛. 于是

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)} \iff I_0 = 0.$$

□

例题 0.24 设连续函数 $g : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 满足 g 单调递减. 设

$$x_0 > 0, x_{n+1} = x_n + g(x_n), n = 0, 1, 2, \dots,$$

以及 $x \in D^1[0, +\infty)$ 满足

$$x(0) = x_0, x'(t) = g(x(t)), \forall t \geq 0.$$

证明

$$x_n = x(n) + O(1), n \rightarrow \infty.$$

证明 由条件可知

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) > 0, \quad x'(t) = g(x(t)) > 0.$$

故 $\{x_n\}$ 严格递增, $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上也严格递增. 由条件知 $x_0 \geq x(0)$, 假设 $x_n \geq x(n)$, 则由条件知

$$n = \int_0^n \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt = \int_{x(0)}^{x(n)} \frac{1}{g(t)} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

从而

$$\int_{x(0)}^{x_{n+1}} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x(0)}^{x_n} \frac{1}{g(t)} dt + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{g(t)} dt \geq n + \frac{x_{n+1} - x_n}{g(x_n)} = n + 1 = \int_{x(0)}^{x(n+1)} \frac{1}{g(t)} dt.$$

又因为 g 非负, 所以 $x_{n+1} \geq x(n+1)$. 故由数学归纳法知, $x_n \geq x(n), \forall n \in \mathbb{N}$. 于是

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) = x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^k g(x_k) dt \\ &\leq x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^k g(x(t)) dt = x_0 + g(x_0) + \int_0^{n-1} g(x(t)) dt \\ &= x_0 + g(x_0) + \int_0^{n-1} x'(t) dt = x_0 + g(x_0) + x(n-1) \\ &< x_0 + g(x_0) + x(n). \end{aligned}$$

故

$$x(n) \leq x_n \leq x(n) + x_0 + g(x_0) \iff x_n = x(n) + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

□

例题 0.25 设 $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ 是连续满射且满足对某个 $\alpha \in (0, 1)$ 有

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s - t|^\alpha, \forall s, t \in [0, 1].$$

证明: $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

证明 记

$$B_k \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| x - \gamma \left(\frac{k}{n} \right) \right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

对 $\forall x \in [0, 1]$, 存在 $k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$, 使得 $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$. 由条件可知

$$\left| \gamma(x) - \gamma \left(\frac{k}{n} \right) \right| \leq M \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq \frac{M}{n^\alpha} \Rightarrow \gamma(x) \in B_k.$$

故 γ 的值域 $[0, 1]^2 \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$. 于是

$$1 \leq S \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} B_k \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} S(B_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi M^2}{n^{2\alpha}} = \frac{\pi M^2}{n^{2\alpha-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此 $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

□

例题 0.26 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足对某个 $M > 0$ 成立

$$0 < f(x) < M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f''(\xi) + 2[f'(\xi)]^2 = 0.$$

证明 注意到

$$(f^3(x))'' = 3f(x)[f''(x)f(x) + 2[f'(x)]^2].$$

若 ξ 不存在, 则 $(f^3(x))''$ 不变号, 从而 $f^3(x)$ 是上凸或者下凸函数. 但是无穷区间上的有界凸函数必为常函数, 因此 f 为常值函数, 这就和 ξ 不存在矛盾! 现在我们知道存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f''(\xi) + 2[f'(\xi)]^2 = 0.$$

□

例题 0.27 已知: 存在连续正函数 $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, 满足

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

$$(2) \frac{1}{x} \int_1^x f(t)dt \text{ 有界.}$$

证明: 当 $\alpha > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1 + f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1 + x)} = 0.$$

证明 由 $x^\alpha \ln(1 + x)$ 递增可得, 对 $\forall A > 1$, 都有

$$\begin{aligned} \varlimsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1 + f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1 + x)} &= \varlimsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_A^x f^\alpha(t) \ln(1 + f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1 + x)} \\ &\leq \varlimsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_A^x f(t) \cdot \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{\ln(1 + f(t))}{\ln(1 + t)} dt \\ &\leq \sup_{t \geq A} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} \cdot \sup_{t \geq A} \frac{\ln(1 + f(t))}{\ln(1 + t)} \cdot \varlimsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_A^x f(t) dt}{x}. \end{aligned} \tag{21}$$

由条件可知

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq A} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0 \implies f(t) \leq t, \quad t \rightarrow +\infty.$$

从而

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq A} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+f(t))}{\ln(1+t)} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+t)} = 1.$$

于是令(21)式 $A \rightarrow +\infty$ 得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^\alpha(t) \ln(1+f(t)) dt}{x^\alpha \ln(1+x)} \leq 0.$$

□

例题 0.28 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续下凸函数, 实数 m 满足

$$\int_a^b |f(x) - m| dx = \min_{t \in [a, b]} \int_a^b |f(x) - f(t)| dx,$$

证明: $m \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证明 不妨设 $a = 0, b = 1$, 否则用 $f(a + (b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可. 再不妨设 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 否则用 $f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ 代替即可. 现在只需证明 $m \geq 0$. 因为 f 在 $[0, 1]$ 上连续下凸, 所以 f 在 $[0, 1]$ 上存在最小值, 不妨设

$$\min_{x \in [0, 1]} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

根据下凸性知, f 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上非负递增. 反证, 假设 $m < 0$, 则由条件可知 (取 $t = \frac{1}{2}$)

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \int_0^1 |f(x) - m| dx.$$

但是另一方面, 根据绝对值不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|f(x) - m| - |f(x)|) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|f(x) - m| - |f(x)|) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(f(x) - m) - f(x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|f(x) - m| - |f(x)|) dx - \frac{m}{2} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (|m| + |f(x) - m| - |f(x)|) dx \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} (|m + f(x) - m| - |f(x)|) dx = 0. \end{aligned}$$

因此上述绝对值不等式取等, 即对 $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 都有

$$\begin{aligned} |m| + |f(x) - m| &= |m + f(x) - m| = |f(x)| \\ \implies m^2 + f^2(x) - 2mf(x) + m^2 &= f^2(x) \\ \implies f(x) &= m. \end{aligned}$$

这与 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 矛盾!

□

例题 0.29 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, n = 0, 1, 2, \dots$

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}(a_{n-2} + a_n)$.

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域.

证明

(1) 由条件可知

$$a_{n-2} + a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\tan^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x) = \frac{1}{n-1}.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} (a_{n-2} + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

(2) 注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \xrightarrow{t=\tan x} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt,$$

又因为

$$\left(\frac{t}{1+t^2} \right)' = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

所以

$$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} = t^{n-1} \cdot \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{t^{n-1}}{2}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

故对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt \leq a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{2} dt = \frac{1}{2n}.$$

因此 $a_n \sim \frac{1}{2n}, n \rightarrow \infty$. 而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.

□

例题 0.30 给定 $f, g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 且 f 连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. 若有不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq g(x) \sup_{t \in [x, y]} f(t), \quad \forall 0 \leq x < y.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

证明 (i) 若 $f(x)$ 有界, 设 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, +\infty)$. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得

$$g(x) < \varepsilon, \quad \forall x > X.$$

于是对 $\forall y > x > X$, 都有

$$|f(x) - f(y)| \leq g(x) \sup_{t \in [x, y]} f(t) < M\varepsilon.$$

故由 Cauchy 收敛准则知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

(ii) 若 $f(x)$ 无界, 记 $K \triangleq \lfloor f(0) \rfloor + 1$,

$$y_n \triangleq \inf \{y \in [0, +\infty) : f(y) = n\}, \quad \forall n > K.$$

由 f 的连续性知 $f(y_n) = n, \forall n > K$. 断言 $y_{n+1} > y_n$. 若 $y_{n+1} \leq y_n$, 则由介值定理知, 存在 $y'_n \in (y_{n+1}, y_n)$, 使得 $f(y'_n) = f(y_n) = n$, 这与 y_n 的下确界定义矛盾! 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in (K, +\infty]$. 又 $f \in C[0, +\infty)$, 故

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 否则 $f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = f(a) < +\infty$ 矛盾! 我们还可以断言

$$f(y_n) = \sup_{t \in [0, y_n]} f(t), \quad \forall n > K. \tag{22}$$

否则, 对 $\forall n > K$, 存在 $t_n \in [0, y_n)$, 使得 $f(t_n) > f(y_n)$. 由介值定理知, 存在 $\xi_n \in (t_n, y_n)$, 使得 $f(\xi_n) = f(y_n) = n$, 这与 y_n 的下确界定义矛盾! 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 知, 存在 $x_0 \in [0, +\infty)$, 使得 $g(x_0) < 1$. 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 知, 存在

$N \in \mathbb{N}$, 使得 $y_n > x_0$. 于是由条件和(22)式可得, 对 $\forall n > N$, 有

$$f(y_n) - f(x_0) = |f(y_n) - f(x_0)| \leq g(x_0) \sup_{t \in [x_0, y_n]} f(t) \leq g(x_0)f(y_n).$$

进而

$$f(x_0) \geq f(y_n) [1 - g(x_0)] = n [1 - g(x_0)], \quad \forall n > N.$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $f(x_0) = +\infty$, 显然矛盾! 故 f 必有界. 再由 (i) 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. \square

例题 0.31 设

$$\varphi(x) \triangleq \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases},$$

证明不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可微函数 f 使得对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$f(f(x)) - |x|f'(x) = \varphi(x).$$

 **笔记** 实际上, 可以直接看出

$$f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx \sim \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$$

显然矛盾!

证明 假设存在这样的 $f(x)$, 则由条件得 $f(f(0)) = 0$. 注意到

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x}, \quad \forall x < 0.$$

于是我们有

$$f(-\varepsilon) - f(-1) = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

现在让 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得

$$f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx.$$

由 $f \in D(\mathbb{R})$ 知, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [-1, 0]$. 再结合 f, φ 在 $x = 0$ 处的连续性知, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(0) - f(-1) &= \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx = \int_{-\delta}^0 \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x} dx \\ &\geq \int_{-\delta}^0 \frac{\varphi(0) - f(f(0))}{x} dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{1+M}{-\delta} dx = \int_{-\delta}^0 \frac{1}{x} dx - \frac{1+M}{\delta}(1-\delta) = +\infty \end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此满足条件的可微函数 f 不存在. \square

例题 0.32 设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 定义

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \quad n \geq 2.$$

请问 $\{x_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 请证明; 若不收敛, 请举反例.

证明 由条件可知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有

$$x_{n+1} - x_n = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x_n - x_{n-1}) = \dots = (-1)^{n-1}(x_2 - x_1) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

于是对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$x_n = x_1 + \sum_{m=1}^{n-1} (x_{m+1} - x_m) = x_1 + (x_2 - x_1) \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

注意到对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 都有

$$\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \Rightarrow \left\{ \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right\} \text{递减.}$$

并且

$$\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = e^{\sum_{k=2}^m \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \leq e^{-\sum_{k=2}^m \frac{1}{\sqrt{k}}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

令 $m \rightarrow \infty$ 得

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=2}^m \frac{1}{\sqrt{k}}} = 0,$$

故 $\left\{ \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right\}$ 单调递减趋于 0. 由 Leibniz 判别法知

$$\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-1} \prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < +\infty.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_1 + (x_2 - x_1) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < +\infty.$$

□

例题 0.33 设 φ 是 \mathbb{R} 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(x_{n+1}) \right), \quad n \geq 2.$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明 由条件可得

$$\varphi(x_{n+2}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(x_{n+1}), \quad n \geq 2.$$

于是

$$\begin{aligned} \varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_{n+1}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) [\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - 1\right) [\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})] \\ &= \cdots = \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) [\varphi(x_3) - \varphi(x_2)] > 0, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

从而 $\{\varphi(x_n)\}$ 递增, 并且

$$\begin{aligned} \varphi(x_n) &= \varphi(x_3) + \sum_{k=3}^{n-1} [\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)] \\ &= \varphi(x_3) + [\varphi(x_3) - \varphi(x_2)] \sum_{k=3}^{n-1} \prod_{m=2}^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - 1\right) \\ &= \varphi(x_3) + [\varphi(x_3) - \varphi(x_2)] \sum_{k=3}^{n-1} e^{\sum_{m=2}^{k-1} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - 1\right)}, \quad \forall n \geq 4. \end{aligned} \tag{23}$$

注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x-1)}{-x} = 1$, 故

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - 1\right) \sim -\frac{1}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow +\infty.$$

因此

$$e^{\sum_{m=2}^{k-1} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - 1\right)} \sim e^{-\sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{m}}}, \quad m \rightarrow +\infty.$$

由 Stoltz 公式可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \ln k}{\sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{m}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(1 + \frac{1}{k})}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{k}}{k} = 0.$$

从而当 k 充分大时, 有

$$\sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{m}} > 2 \ln k \iff e^{-\sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{m}}} < e^{-2 \ln k} = \frac{1}{k^2}.$$

于是

$$\sum_{k=3}^{\infty} e^{\sum_{m=2}^{k-1} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - 1\right)} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

再由(23)式知 $\varphi(x_n)$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = a$, 由 φ 存在连续的反函数知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)\right) = \psi(a) < +\infty.$$

□

例题 0.34 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} = -1.$$

证明 对 $\forall x \in (0, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} &= \sin x + \sum_{n=2}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leqslant \sin x + \sum_{n=2}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{nx}{n^2} + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sin x + x \sum_{n=2}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{n} + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \sin x + x \sum_{n=2}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \sin x + x \int_1^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{t} dt + \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \leqslant \sin x + x \ln \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

注意到

$$\sin x \geqslant x - x^3, \quad \forall x \in (0, 1].$$

故另一方面, 对 $\forall x \in (0, \frac{1}{N})$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{nx - (nx)^3}{n^2} = x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{n} - x^3 \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} n \\ &\geqslant x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt - x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = x \int_1^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{t} dt - x \\ &= x \ln \lfloor \frac{1}{x} \rfloor - x \geqslant x \ln \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - x^2 \\ &= -x \ln x + x \ln(1-x) - x. \end{aligned}$$

综上, 对 $\forall x \in (0, 1)$, 我们有

$$-x \ln x + x \ln(1-x) - x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \sin x - x \ln x + \frac{x}{1-x}.$$

从而对 $\forall x \in (0, 1)$, 我们有

$$-1 + \frac{\ln(1-x)}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{x \ln x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{\sin x}{x \ln x} - 1 \leq \frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{(1-x) \ln x}.$$

令 $x \rightarrow 0^+$ 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} = -1.$$

□

例题 0.35 设 $f \in C(0, 1]$ 且对某个 $\mu > 1$ 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x[f(\mu x) - f(x)] = A.$$

证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$ 存在.

 **笔记** 取 $n = \lfloor \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} + \frac{1}{2} \rfloor$ 的原因:

$$\mu^n x \geq \delta, \quad \mu^k x < \delta, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

由 $\mu > 1$ 知上式等价于

$$\mu^n x \geq \delta \text{ 且 } \mu^{n-1} x < \delta \iff \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} \leq n < \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} + 1.$$

故取 $n = \lfloor \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} + \frac{1}{2} \rfloor$ 即可满足要求.

注 也可以不妨设 $A = 0$, 否则用 $f(x) + \frac{\mu A}{(\mu-1)x}$ 代替即可.

证明 由条件知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$A - \varepsilon < x [f(\mu x) - f(x)] < A + \varepsilon, \quad \forall x \in (0, \delta).$$

因此

$$\begin{aligned} A - \varepsilon &< -\mu^k x [f(\mu^{k-1} x) - f(\mu^k x)] < A + \varepsilon, \quad \forall \mu^k x \in (0, \delta). \\ \iff \frac{-\varepsilon - A}{\mu^k} &< x [f(\mu^{k-1} x) - f(\mu^k x)] < \frac{\varepsilon - A}{\mu^k}, \quad \forall \mu^k x \in (0, \delta). \end{aligned} \tag{24}$$

由 $f \in C[\delta, 1]$ 知, 存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| < M, \quad x \in [\delta, 1]. \tag{25}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} -A \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu^{k-1}} = -\frac{\mu A}{\mu - 1}$, 故存在 $N > 0$, 使得

$$-\frac{\mu A}{\mu - 1} - \varepsilon < -A \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu^{k-1}} < -\frac{\mu A}{\mu - 1} + \varepsilon. \tag{26}$$

对 $\forall x \in (0, \delta)$, 取 $n_x = \lfloor \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} + \frac{1}{2} \rfloor$, 则

$$\mu^{n_x} x \geq \delta, \quad \mu^k x < \delta, \quad k = 0, 1, \dots, n_x - 1.$$

$$x < \frac{\delta}{\mu^N} \implies \lfloor \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} + \frac{1}{2} \rfloor \geq \frac{\ln \frac{\delta}{x}}{\ln \mu} > N \implies n_x > N.$$

于是由(24)(25)(26)式知, 对 $\forall x \in \left(0, \min \left\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{\delta}{\mu^N}\right\}\right)$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} xf(x) &= x \sum_{k=1}^{n_x} [f(\mu^{k-1}x) - f(\mu^k x)] + xf(\mu^{n_x}x) \\ &< \sum_{k=1}^{n_x} \frac{\varepsilon - A}{\mu^{k-1}} + xM < -A \sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{\mu^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\mu^{k-1}} + \varepsilon \\ &< -\frac{\mu A}{\mu - 1} + \varepsilon + \frac{\mu \varepsilon}{\mu - 1} + \varepsilon. \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} xf(x) &= x \sum_{k=1}^{n_x} [f(\mu^{k-1}x) - f(\mu^k x)] + xf(\mu^{n_x}x) \\ &> \sum_{k=1}^{n_x} \frac{-\varepsilon - A}{\mu^{k-1}} - xM > -A \sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{\mu^{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\mu^{k-1}} - \varepsilon \\ &> -\frac{\mu A}{\mu - 1} - \varepsilon - \frac{\mu \varepsilon}{\mu - 1} - \varepsilon. \end{aligned}$$

综上, 对 $\forall x \in \left(0, \min \left\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{\delta}{\mu^N}\right\}\right)$, 我们有

$$\left|xf(x) + \frac{\mu A}{\mu - 1}\right| < \varepsilon \left(2 + \frac{\mu}{\mu - 1}\right).$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = -\frac{\mu A}{\mu - 1}$.

□

例题 0.36 设 $f \in C^1(1, +\infty)$ 满足

$$f(x) \leqslant x^2 \ln x, f'(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$$

证明:

$$\int_1^\infty \frac{1}{f'(x)} dx = +\infty$$

证明 由 Cauchy 不等式和条件可得, 任取 $X > 1$, 则对 $\forall x \in (X, +\infty)$, 都有

$$\int_X^x \frac{f'(t)}{t^2 \ln^2 t} dt \int_X^x \frac{1}{f'(t)} dt \geqslant \left[\int_X^x \frac{1}{t \ln t} dt \right]^2.$$

于是对 $\forall x \in (X, +\infty)$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_X^x \frac{1}{f'(t)} dt &\geqslant \frac{\left[\int_X^x \frac{1}{t \ln t} dt \right]^2}{\int_X^x \frac{f'(t)}{t^2 \ln^2 t} dt} = \frac{(\ln \ln x - \ln \ln X)^2}{\frac{f(x)}{x^2 \ln^2 x} - \frac{f(X)}{X^2 \ln^2 X} - \int_X^x f(t) \left(\frac{1}{t^2 \ln^2 t} \right)' dt} \\ &\geqslant \frac{(\ln \ln x - \ln \ln X)^2}{\frac{1}{\ln x} - \frac{f(X)}{X^2 \ln^2 X} + \int_X^x \frac{2t \ln^2 t + 2t \ln t}{t^2 \ln^3 t} dt} = \frac{(\ln \ln x - \ln \ln X)^2}{\frac{1}{\ln x} - \frac{f(X)}{X^2 \ln^2 X} + \int_X^x \left(\frac{2}{t \ln t} + \frac{2}{t \ln^2 t} \right) dt} \\ &\geqslant \frac{(\ln \ln x - \ln \ln X)^2}{\frac{1}{\ln x} - \frac{f(X)}{X^2 \ln^2 X} + 2 \ln \ln x - 2 \ln \ln X + \frac{2}{\ln X} - \frac{2}{\ln x}}. \end{aligned}$$

再令 $x \rightarrow +\infty$ 可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{f'(t)} dt = +\infty.$$

□

例题 0.37

证明

□

例题 0.38

证明

□

例题 0.39

证明

□