

## 0.1 集合之间的运算

### 定理 0.1

设有集合  $A, B$  与  $C$ , 则

(i) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

### 定义 0.1 (集族的并和交)

设有集合族  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{存在 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \exists \alpha \in I \text{ s.t. } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{对一切 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\} = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

### 定理 0.2

(1) 广义交换律和结合律: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

(2) 分配律:

$$(i) A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha);$$

$$(ii) A \cup \left( \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

$$(3) \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

$$(4) \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

(1)

(2)

(3) 对  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ , 存在  $\alpha_x \in I$ , 使  $x \in A_{\alpha_x}$ , 并且  $x \notin B_\alpha, \forall \alpha \in I$ . 从而  $x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$ . 故

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

(4) 对  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha)$ , 都存在  $\alpha_x \in I$ , 使得  $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$ . 于是  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  且  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ , 即  $x \in$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

**定义 0.2**

设  $A, B$  是两个集合, 称  $\{x : x \in A, x \notin B\}$  为  $A$  与  $B$  的**差集**, 记作  $A - B$  或  $A \setminus B$ .

在上述定义中, 当  $B \subset A$  时, 称  $A - B$  为集合  $B$  相对于集合  $A$  的**补集或余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合  $X$  的子集, 我们称  $X$  为全集. 此时, 集合  $B$  相对于全集  $X$  的补集就简称为  $B$  的补集或余集, 并记为  $B^c$  或  $\mathcal{C}B$ , 即

$$B^c = X - B.$$

今后, 凡没有明显标出全集  $X$  时, 都表示取补集运算的全集  $X$  预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是  $B^c$  也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

**命题 0.1 (集合的差与补的基本性质)**

$$(1) A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset, (A^c)^c = A, X^c = \emptyset, \emptyset^c = X.$$

$$(2) A - B = A \cap B^c.$$

$$(3) \text{ 若 } A \supset B, \text{ 则 } A^c \subset B^c; \text{ 若 } A \cap B = \emptyset, \text{ 则 } A \subset B^c.$$

$$(4) A - B^c = B - A^c.$$

**证明**

(1)

(2)

(3)

$$(4) x \in A - B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \notin B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \iff x \in B \text{ 且 } x \notin A^c \iff x \in B - A^c.$$

□

**定理 0.3 (De Morgan 法则)**

$$(i) \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c; \quad (ii) \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

♥

**证明** 以 (i) 为例. 若  $x \in \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$ , 则  $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 即对一切  $\alpha \in I$ , 有  $x \notin A_\alpha$ . 这就是说, 对一切  $\alpha \in I$ , 有  $x \in A_\alpha^c$ . 故得  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ .

反之, 若  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ , 则对一切  $\alpha \in I$ , 有  $x \in A_\alpha^c$ , 即对一切  $\alpha \in I$ , 有  $x \notin A_\alpha$ . 这就是说,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad x \in \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

□

**定义 0.3 (集合的对称差)**

设  $A, B$  为两个集合, 称集合  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  为  $A$  与  $B$  的**对称差集**, 记为  $A \Delta B$ .

♥

**命题 0.2 (集合的对称差的基本性质)**

$$(i) A \Delta \emptyset = A, A \Delta A = \emptyset, A \Delta A^c = X, A \Delta X = A^c.$$

$$(ii) \text{ 交换律: } A \Delta B = B \Delta A.$$

$$(iii) \text{ 结合律: } (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

(iv) 交与对称差满足分配律:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

(v)  $A^c \Delta B^c = A \Delta B$ ;  $A = A \Delta B$  当且仅当  $B = \emptyset$ .

(vi) 对任意的集合  $A$  与  $B$ , 存在唯一的集合  $E$ , 使得  $E \Delta A = B$  (实际上  $E = B \Delta A$ ).

#### 定义 0.4 (递增、递减集合列)

设  $\{A_k\}$  是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ ; 若  $\{A_k\}$  满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称  $\{A_k\}$  为**递增集合列**, 此时称其并集  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  为  $\{A_k\}$  的极限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

#### 命题 0.3

1. 当  $\{A_k\}$  为递减集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .
2. 当  $\{A_k\}$  为递增集合列时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$ .

证明

1. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递减集合列可得

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \cdots.$$

因此  $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ .

2. 对  $\forall N \in \mathbb{N}$ , 一方面, 由  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . 另一方面, 由  $\{A_k\}$  为递增集合列可得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$

因此  $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ , 故再根据  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$  可知  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ .

□

#### 定义 0.5 (上、下极限集)

设  $\{A_k\}$  是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有  $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$ . 我们称

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列  $\{A_k\}$  的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$  为集合列  $\{A_k\}$  的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说  $\{A_k\}$  的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .

#### 命题 0.4

设  $\{A_k\}$  是一个集合列, 我们有

1. 若  $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$ , 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

2. 若  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$ , 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

#### 证明

1. 由于  $\{A_k\}$  为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.3 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k. \\ \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j. \end{aligned}$$

2. 由于  $\{A_k\}$  为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.3 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j. \\ \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k. \end{aligned}$$

□

**命题 0.5 (上、下极限集的性质)**

设  $\{A_k\}$  是一集合列,  $E$  是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} (E \setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} (E \setminus A_k).$$

▲

**定理 0.4**

若  $\{A_k\}$  为一集合列, 则

$$(i) \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{对任一自然数 } j, \text{ 存在 } k (k \geq j), x \in A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geq j \text{ 且 } k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$(ii) \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : \text{存在自然数 } j_0, \text{ 当 } k \geq j_0 \text{ 时}, x \in A_k\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j_0 \text{ 且 } k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k.$$

♡

**证明** 以 (ii) 为例. 若  $x \in \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k$ , 则存在自然数  $j_0$ , 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ . 反之, 若存在自然数  $j_0$ , 当  $k \geq j_0$  时, 有  $x \in A_k$ , 则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k$ .

由 (i)(ii) 可知,  $\{A_k\}$  的上限集是由属于  $\{A_k\}$  中无穷多个集合的元素所形成的;  $\{A_k\}$  的下限集是由只不属于  $\{A_k\}$  中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} A_k.$$

□

**定义 0.6 (直积集)**

设  $X, Y$  是两个集合, 称一切有序“元素对”  $(x, y)$  (其中  $x \in X, y \in Y$ ) 形成的集合为  $X$  与  $Y$  的**直积集**, 记为  $X \times Y$ , 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

其中  $(x, y) = (x', y')$  是指  $x = x', y = y'$ .  $X \times X$  也记为  $X^2$ .

♣