0.1 Dini 定理

定理 0.1 (Dini 定理)

若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b]), f \in C([a,b])$ 且对每一个 $x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调并成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 关于 $x \in [a,b]$ 一致. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

注 不妨设 $f(x)=0$ 的原因: 假设当 $f(x)=0$ 时结论已经成立, 则当 $f(x)\neq 0$ 时, 令 $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, 此时 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. 因为对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调, 所以对任意 $x \in [a,b]$, 也有 $g_n(x)$ 关于 n 单调. 于是由假设可知,$g_n(x)$ 一致收敛到 0. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x)=0$, 不妨设对 $\forall x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 可知, 对 $\forall x \in [a,b]$, 都有

$$f_n(x) \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 考虑 $U_n \triangleq \{x \in [a,b] | f_n(x) < \varepsilon\}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 可得

$$[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n.$$

因为 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, 又注意 $f_n^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) = U_n$, 所以 U_n 是开集. 又由于对 $\forall x \in [a,b]$, 都有 $f_n(x)$ 关于 n 单调递减, 因此 $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$. 这是因为对 $\forall x \in U_n$, 都有 $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) < \varepsilon$, 于是 $x \in U_{n+1}$. 从而由有限覆盖定理可知, 存在 $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}_1$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}.$$

取 $N \triangleq \max\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$, 则此时 $[a,b] \subset U_N$. 故对 $\forall n \geqslant N$, 由 $U_n \subset U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$ 可知,$[a,b] \subset U_N \subset U_n$, 即对 $\forall n \geqslant N$, 都有 $f_n(x) < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$. 因此 $f_n(x)$ 一致收敛到 0. 故原定理得证.

□

定理 0.2 (Dini 定理函数单调版本)

设 $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \cdots$ 都是关于 x 的单调函数. 若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b].$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 是一致的. 即 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

注 条件里的单调性可以对不同的 n 有不同的单调性.

证明 由 Cantor 定理可知, f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 从而对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall |y-x| \leqslant \delta. \tag{1}$$

设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 使得 $x_i - x_{i+1} \leqslant \delta, i = 0, 1, 2, \cdots, m$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}. \tag{2}$$

对 $\forall x \in [a,b]$, 当 $n \geqslant N$ 时, 一定存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $x \in [x_{i-1}, x_i]$. 从而当 $n \geqslant N$ 时, 利用(1)和 (2) 式以及 f_n 的单调性可得

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| + \varepsilon + \varepsilon \\
&\leqslant |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + 2\varepsilon \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

$\square$