0.1 点集间的距离

定义 0.1

设 $x \in \mathbb{R}^n$,E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**; 若 E_1,E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的**距离**. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} \quad 或 \quad \inf\{d(E_1, y) : y \in E_2\}.$$

命题 0.1 (点集间的距离的性质)

(1) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n, F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个非空点集, 则

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

(2) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空点集, 若 $d(E_i, E_j) > 0 (i \neq j)$, 则 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$.

(3) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个非空闭集, 若 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$, 则 $d(E_i, E_j) > 0 (i \neq j)$.

注 若 (3) 中去掉 E_i 是闭集这个条件, 则结论不一定成立 (例如, 两个开球相切).

证明

(1) 由 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \supset E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 可知

$$\left\{(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \supset \{(x, y) | x \in F, y \in E_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \inf\left\{d(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \geqslant \inf\{d(x, y) | x \in F, y \in E_i\} = d(F, E_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

故

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geqslant \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

对 $\forall x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, 都存在 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $y \in E_j$. 于是

$$d(x, y) \geqslant d(F, E_j) \geqslant \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

故 $\min\limits_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}$ 是 $\left\{d(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\}$ 的一个下界. 因此

$$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \inf\left\{d(x, y) | x \in F, y \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right\} \geqslant \min_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}.$$

综上,$d\left(F, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \min\limits_{i=1,2,\cdots,n} \{d(F, E_i)\}$.

(2) 反证, 假设存在 $i \neq j$, 使得 $E_i \cap E_j \neq \varnothing$, 则任取 $x_0 \in E_i \cap E_j$, 又由 $d(E_i, E_j) > 0$ 可知, 对 $\forall x \in E_i, y \in E_j$, 都有 $d(x, y) \geq d(E_i, E_j) > 0$. 这与 $d(x_0, x_0) = 0, x_0 \in E_i \cap E_j$ 矛盾!

(3) 反证, 假设存在 $i \neq j$, 使得 $d(E_i, E_j) = 0$. 由 $d(E_i, E_j) = \inf\{d(x, y) \mid x \in E_i, y \in E_j\}$ 及下确界的定义可知, 对

$\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in E_i, y_n \in E_j$, 使得 $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

再由 E_i, E_j 都是闭集可知 $c \in E_i \cap E_j$, 这与 $E_i \cap E_j = \varnothing$ 矛盾!

□

例题 0.1 在 $\mathbb{R}^2$ 中作点集

$$E_1 = \{x = (\xi, \eta) : -\infty < \xi < +\infty, \eta = 0\},$$
$$E_2 = \{y = (\xi, \eta) : \xi \cdot \eta = 1\},$$

则 $d(E_1, E_2) = 0$.

证明 事实上, 当我们取 $x = (\xi, 0) \in E_1$ 且 $y = (\xi, \eta) \in E_2$ 时, 由

$$d(E_1, E_2) \leqslant d(x, y) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1, E_2) < \varepsilon$. 由此得

$$d(E_1, E_2) = 0.$$

显然, 若 $x \in E$, 则 $d(x, E) = 0$. 但反之, 若 $d(x, E) = 0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x \notin E$ 时, 必有 $x \in E'$. □

定理 0.1

若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0 \in F$, 有

$$|x_0 - y_0| = d(x_0, F).$$

证明 作闭球 $\overline{B} = \overline{B}(x_0, \delta)$, 使得 $\overline{B} \cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0, F) = d(x_0, \overline{B} \cap F).$$

$\overline{B} \cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0 - y|$ 看作定义在 $\overline{B} \cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\overline{B} \cap F$ 上达到最小值, 即存在 $y_0 \in \overline{B} \cap F$, 使得

$$|x_0 - y_0| = \inf\{|x_0 - y| : y \in \overline{B} \cap F\},$$

从而有 $|x_0 - y_0| = d(x_0, F)$.

□

定理 0.2

若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空点集, 则 $d(x, E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 x, y. 根据 $d(y, E)$ 的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $z \in E$, 使得 $|y - z| < d(y, E) + \varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leqslant |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \\ &< |x - y| + d(y, E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$d(x, E) - d(y, E) \leqslant |x - y|.$$

同理可证 $d(y, E) - d(x, E) \leqslant |x - y|$. 这说明

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leqslant |x - y|.$$

□

推论 0.1

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$, 使得

$$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2).$$

引理 0.1

若 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得
(i) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$;
(ii) $F_1 = \{x : f(x) = 1\}$,$F_2 = \{x : f(x) = 0\}$.

证明 构造函数 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

它就是所求的函数. □

定理 0.3 (连续延拓定理)

(1) 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 且 $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)| \leqslant M, \quad g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

(2) 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

注 $\mathbb{R}^2$ 中存在由某些有理点构成的稠密集, 其中任意两点的距离为无理数.

证明 (1) 把 F 分成三个点集:

$$A = \left\{x \in F : \frac{M}{3} \leqslant f(x) \leqslant M\right\},$$

$$B = \left\{x \in F : -M \leqslant f(x) \leqslant \frac{-M}{3}\right\},$$

$$C = \left\{x \in F : \frac{-M}{3} < f(x) < \frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x) = \frac{M}{3} \cdot \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, B) + d(x, A)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集, 所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 此外, 还有

$$|g_1(x)| \leqslant \frac{M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|f(x) - g_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}M, \quad x \in F.$$

再在 F 上来考查 $f(x)-g_1(x)$(相当于上述之 $f(x)$), 并用类似的方法作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$. 此时由于 $f(x)-g_1(x)$ 的界是 $2M/3$, 故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad x \in F.$$

继续这一过程, 可得在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k M, \quad x \in F \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

上面的第一式表明 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 是一致收敛的. 若记其和函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 上面的第二式表明

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in F.$$

最后, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 得到

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \frac{M}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) \\ &\leqslant \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = M. \end{aligned}$$

(2) 令 $F(x) = \arctan f(x)$, 则 $|F(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}(x \in F)$. 于是由 (1) 可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $G(x)$ 满足

$$|G(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad G(x) = F(x), \quad x \in F.$$

取 $g(x) = \tan G(x)$, 则

$$f(x) = \tan F(x) = \tan G(x) = g(x), \quad x \in F.$$

故结论得证. □