0.1 复系数多项式

定理 0.1 (代数基本定理)

次数大于零的复数域上的一元多项式至少有一个复数根.

证明 设复数域上的 n 次多项式为

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0. \tag{1}$$

首先证明, 必存在一个复数 z_0, 使对一切复数 z, 有

$$|f(z)|\geqslant|f(z_0)|.$$

令 $z=x+iy$, 其中 x,y 是实变量. 展开 $f(x+iy)$ 并分开实部和虚部, 则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

其中 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 为实系数二元多项式函数. 又

$$|f(z)|=\sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}$$

是一个二元连续函数, 但

$$\begin{aligned}|f(z)|&=|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geqslant|a_nz^n|-|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geqslant|z|^n\left(|a_n|-\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|-\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right),\end{aligned}$$

因此当 $|z|\to\infty$ 时,$|f(z)|\to\infty$. 于是必存在一个实常数 R, 当 $|z|\geqslant R$ 时,$|f(z)|$ 充分大, 因此 $|f(z)|$ 的最小值必含于圆圈 $|z|\leqslant R$ 中. 但这是平面上的一个闭区域, 因此必存在 z_0 使 $|f(z_0)|$ 为最小.

接下来要证明 $f(z_0)=0$. 用反证法, 即若 $f(z_0)\neq0$, 则必可找到 z_1, 使 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$, 这样就与 $|f(z_0)|$ 是最小值相矛盾. 将 $z=z_0+h$ 代入 (1)式便可得到一个关于 h 的 n 次多项式:

$$f(z_0+h)=b_nh^n+b_{n-1}h^{n-1}+\cdots+b_1h+b_0. \tag{2}$$

当 $h=0$ 时,$f(z_0)=b_0$, 由假设 $f(z_0)\neq0$, 故

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=\frac{b_n}{f(z_0)}h^n+\frac{b_{n-1}}{f(z_0)}h^{n-1}+\cdots+\frac{b_1}{f(z_0)}h+1.$$

$b_1,b_2,\ldots,b_n$ 中有些可能为零, 但绝不全为零. 设 b_k 是第一个不为零的复数, 则

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\cdots+c_nh^n, \tag{3}$$

其中 $c_j=\dfrac{b_j}{f(z_0)}$. 令 $d=\sqrt[k]{\dfrac{1}{|c_k|}}$,$h=ed$ 代入(3)式得

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1-e^k+e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}e+\cdots).$$

取充分小的正实数 e(至少小于 1), 使

$$e(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)<\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right|&\leqslant|1-e^k|+|e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}e+\cdots)|\\&\leqslant1-e^k+e^{k+1}(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)\\&<1-e^k+\frac{1}{2}e^k\\&=1-\frac{1}{2}e^k<1.\end{aligned}$$

将这样的 e 代入 $h=ed$, 得
$$|f(z_0+ed)|<|f(z_0)|.$$
这就推出了矛盾.

□

推论 0.1

1. 复数域上的一元 n 次多项式恰有 n 个复根 (包括重根).
2. 复数域上的不可约多项式都是一次多项式.
3. 复数域上的一元 n 次多项式必可分解为一次因式的乘积.

定理 0.2 (Vieta 定理)

若数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$
$$\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j=x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

证明 $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 将这个式子的右边展开与 $f(x)$ 比较系数即得结论.

□

例题 0.1

(1) 设三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根成等差数列, 求证:
$$2p^3-9pq+27r=0.$$
(2) 设三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0\ (r\neq 0)$ 的 3 个根成等比数列, 求证:
$$rp^3=q^3.$$
(3) 设多项式 x^3+3x^2+mx+n 的 3 个根成等差数列, 多项式 $x^3-(m-2)x^2+(n-3)x+8$ 的 3 个根成等比数列, 求 m 和 n.

证明

(1) 设方程的 3 个根为 $c-d,c,c+d$, 则由 Vieta 定理可得
$$\begin{cases}3c=-p,\\3c^2-d^2=q,\\c(c^2-d^2)=-r.\end{cases}$$
由此可得 $2p^3-9pq+27r=0$.

(2) 设方程的 3 个根为 $\frac{c}{d},c,cd$, 则由 Vieta 定理可得
$$\begin{cases}\frac{c}{d}+c+cd=-p,\\\frac{c^2}{d}+c^2+c^2d=q,\\\frac{c^3}{d}=-r.\end{cases}$$
由此可得 $rp^3=q^3$.

(3) 由 (1)(2) 可知,m,n 应满足如下关系:

$$\begin{cases} m=n+2, \\ -8(m-2)^3=(n-3)^3. \end{cases}$$

若 $n-3=-2(m-2)$, 则可联立求得 $m=3,n=1$.

若 $n-3=-2\omega(m-2)$, 其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则可联立求得 $m=2-\sqrt{3}i, n=-\sqrt{3}i$.

若 $n-3=-2\omega^2(m-2)$, 则可联立求得 $m=2+\sqrt{3}i, n=\sqrt{3}i$.

□

例题 0.2 设 x_1,x_2,x_3 是三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0\ (r\neq 0)$ 的 3 个根, 求这 3 个根倒数的平方和.

证明 由 Vieta 定理可得

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

□

例题 0.3 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根为 x_1,x_2,x_3, 求一个三次方程使其根为 x_1^3,x_2^3,x_3^3.

笔记 利用代数恒等式:$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ac)+3abc$ 得到

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3.$$

$$x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^3-3x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1^3x_3^3x_2^3x_3^3.$$

即可由 Vieta 定理得到结果.

证明 由 Vieta 定理经计算可得

$$\begin{cases} x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p^3+3pq-3r, \\ x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=q^3-3pqr+3r^2, \\ x_1^3x_2^3x_3^3=-r^3. \end{cases}$$

因此, 以 x_1^3,x_2^3,x_3^3 为根的三次方程为

$$x^3+(p^3-3pq+3r)x^2+(q^3-3pqr+3r^2)x+r^3=0.$$

□

例题 0.4 设多项式 x^3+px^2+qx+r 的 3 个根都是实数, 求证:$p^2\geqslant 3q$.

证明 设多项式的 3 个根为 x_1,x_2,x_3, 由已知条件可知:

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2\geqslant 0.$$

用 Vieta 定理可计算出

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2&=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)\\&=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=2(p^2-3q).\end{aligned}$$

因此结论为真.

□

例题 0.5 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 皆不等于零, 求以 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$ 为根的多项式.

证明 令

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

则

$$x^ng\left(\frac{1}{x_i}\right)=a_0+a_1x_i+\cdots+a_{n-1}x_i^{n-1}+a_nx_i^n=f(x_i)=0.$$

因为 $x_i\neq 0$, 故 $g\left(\frac{1}{x_i}\right)=0$, 即 $g(x)$ 的根为 $f(x)$ 根之倒数.

□

例题 0.6 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的可约多项式, 求证: 多项式 $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在 $\mathbb{F}$ 上也可约.

证明 设 $f(x) = p(x)q(x)$, 其中 $\deg p(x) = m, \deg q(x) = n - m, 0 < m < n$, 则

$$g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right) q\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^m p\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x^{n-m} q\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

因此 $g(x)$ 也可约.

□