0.1 整函数与亚纯函数

定理 0.1

设 f 为一整函数，则

(1) $z=\infty$ 为 f 的解析点或可去奇点的充要条件是 f 一定是常数.

(2) $z=\infty$ 为 f 的一个 m 阶极点的充要条件是 f 是一个 m 次多项式.

证明

(1) 充分性显然，只证必要性. 由于 f 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上全纯，即 f 为整函数，则由定理**??**知 f 在 $\mathbb{C}$ 上有 Taylor 展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{1}$$

它当然在 $R<|z|<\infty$ 中也成立，因此也可把它看成是无穷远点邻域中的 Laurent 展开式.

如果整函数 f 在 ∞ 处全纯或无穷远点为 f 的可去奇点，那么根据(**??**)，它在 ∞ 处邻域中的 Laurent 展开式除去常数项外只有负次幂的项，因此在展开式 (1) 中必须有

$$a_1=a_2=\cdots=0,$$

所以 f 是一常数.

(2) 充分性显然，只证必要性. 如果无穷远点是整函数 f 的一个 m 阶极点，那么根据(**??**)，它在无穷远点邻域中的 Laurent 展开式除去一个 m 次多项式外只有负次幂的项，因此在展开式 (1) 中必须有

$$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=0,$$

所以 f 是一个 m 次多项式.

□

定义 0.1

不是常数和多项式的整函数称为**超越整函数**.

注 如 $e^z, \sin z, \cos z$ 等，都是超越整函数.

命题 0.1

无穷远点一定是超越整函数的本性奇点.

证明 反证，设 f 是超越整函数，若无穷远点不是 f 的本性奇点，则当 f 在无穷远点全纯或无穷远点是 f 的可去奇点时，由定理 0.1可知 f 为一个常数. 当无穷远点是 f 的 m 阶极点时，由定理 0.1(2)可知 f 是一个 m 次多项式. 这与 f 是超越整函数矛盾!

□

定义 0.2

如果 f 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上除去极点外没有其他奇点的单值全纯函数，就称 f 是一个**亚纯函数**.

命题 0.2

(1) 整函数是亚纯函数.

(2) 有理函数

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

也是亚纯函数，这里,P_n 和 Q_m 是两个既约的多项式.

证明

□

命题 0.3

无穷远点或是有理函数的可去奇点, 或是有理函数的极点.

证明 若记

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_n \neq 0,$$

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m,\ b_m \neq 0,$$

那么

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_0 \frac{1}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ \infty, & n > m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

这说明 $z = \infty$ 或是 f 的可去奇点, 或是 f 的极点.

□

定理 0.2

若 $z = \infty$ 是亚纯函数 f 的可去奇点或极点, 则 f 一定是有理函数.

证明 因 $z = \infty$ 是 f 的可去奇点或极点, 故必存在 $R > 0$, 使得 f 在 $R < |z| < \infty$ 中全纯. 在 $|z| \leqslant R$ 中,f 最多只能有有限个极点. 因若有无穷多个极点 $z_j, j = 1, 2, \cdots$, 则 $\{z_j\}$ 必有收敛的子列 $\{z_{k_j}\}$, 设其极限为 a, 则 $|a| \leqslant R$, 显然若 a 是极点, 则 a 不是孤立奇点, 矛盾! 若 a 不是极点, 则由 f 是亚纯函数可知 f 在 a 处全纯, 但 f 在 a 的任意邻域内必有极点, 矛盾! 今设 $z_1, \cdots, z_n$ 为 f 在 $|z| \leqslant R$ 中的有限个极点, 它们的阶分别为 $m_1, \cdots, m_n$. 由定理**????**可知 f 在 $z_j (j = 1, \cdots, n)$ 附近的 Laurent 展开的主要部分为

$$h_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z - z_j} + \frac{c_{-2}^{(j)}}{(z - z_j)^2} + \cdots + \frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{m_j}}.$$

设 f 在 ∞ 的邻域内的 Laurent 展开的主要部分为 g, 由定理**????**和定理**????**可知, 当 $z = \infty$ 是 f 的极点时,g 是一个多项式; 当 $z = \infty$ 是 f 的可去奇点时,$g \equiv 0$. 令

$$F(z) = f(z) - h_1(z) - \cdots - h_n(z) - g(z),$$

显然,F 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中除 $z_1, \cdots, z_n$ 和 ∞ 外是全纯的, 而在 $z_1, \cdots, z_n$ 和 ∞ 这些点上,f 的主要部分都已经被消去, 因而也是全纯的. 所以,F 是 $\mathbb{C}_\infty$ 上的全纯函数, 因而由定理 0.1,F 是一个常数 c. 于是

$$f(z) = c + g(z) + \sum_{j=1}^{n} h_j(z),$$

所以 f 是有理函数.

□

注 这里, 我们顺便得到了这样一个结论: **任何有理函数一定能分解成部分分式之和, 而且这种分解是唯一的.** 这个结论在计算有理函数的不定积分时已经被多次用过.

定义 0.3

非有理函数的亚纯函数称为**超越亚纯函数**.

定理 0.3

Aut($\mathbb{C}$) 由所有的一次多项式组成.

♡

证明 设 $f(z) = az + b, a \neq 0$, 则显然 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. 反之, 对于任意的 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, 因为 f 是整函数, 如果 ∞ 是它的可去奇点, 则由定理 0.1,f 是一个常数, 这不可能. 如果 ∞ 是 f 的本性奇点, 则由定理**??**, 对于任意 $A \in \mathbb{C}$, 必有 $z_n \to \infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. 现在记 $f(z_n) = w_n$, 则 $z_n = f^{-1}(w_n)$, 两端令 $n \to \infty$, 即得 $f^{-1}(A) = \infty$. 这说明 A 是 f^{-1} 的一个极点, 与 f^{-1} 是整函数相矛盾. 由此可知 ∞ 必为 f 的极点, 由定理 0.1(2)知道,f 是一个多项式. 又因为 f 在 $\mathbb{C}$ 上是单叶的, 所以 f 只能是一次多项式.

□

定理 0.4

Aut($\mathbb{C}_\infty$) 由所有的分式线性变换组成.

♡

证明 因为是在 $\mathbb{C}_\infty$ 上讨论,Aut($\mathbb{C}_\infty$) 中的元素不再是全纯函数, 而是亚纯函数. 由分式线性变换的讨论知道, 任何分式线性变换都是 Aut($\mathbb{C}_\infty$) 中的元素. 现设 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, 则 f 必为亚纯函数, 而且 ∞ 必是 f 的可去奇点或极点. 由定理 0.2,f 必为有理函数, 再由它的单叶性, 它只能是分式线性变换.

□