数学分析习题课讲义 (谢惠民) 解答

作者: 邹文杰

时间:2024/11/03

目录

第一章 微分学基本定理

1.1 定理

定理 1.1 (*Cauchy* 中值定理)

设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且满足条件 $g(b)-g(a)\neq 0$ 和 $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 引进记号 $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

我们的目的是要证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0 \tag{1.1}$$

这里要说明, 如有 $g'(\xi)=0$, 则由上式可见也有 $f'(\xi)=0$, 这与条件 $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$ 相矛盾. 因此有了(1.1)之后, 就一定有 $g'(\xi)\neq 0$, 从而可以由它推出定理中所要的等式.

由(1.1)出发试作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\lambda g(x)$$

然后计算

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(a)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)},$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}.$$

可见有 $F(a)=F(b)$. 然后对 $F(x)$ 在区间 [a,b] 上应用 *Rolle* 定理, 就知道存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 这就是要证明的结果(1.1).

定理 1.2 (*Rolle* 中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 若 f 是区间 $[a,b]$ 上的常值函数, 则在 (a,b) 的每一点上有 $f'(x)=0$. 因此可以在 (a,b) 中任取一点作为 ξ.

否则, 由有界闭区间上连续函数的值域定理知,f 在 $[a,b]$ 上取到自己的最大值 M 和最小值 m, 且有 $m<M$. 由于有题设条件 $f(a)=f(b)$, 因此在 m 和 M 中. 至少有一个与函数在端点的值不同. 这就是说, 至少有一个最值是在 (a,b) 中取到的. 设这个最值点为 $\xi\in(a,b)$. 由于在区间的内点处取到的最值也就是极值, 而函数 f 又在 (a,b) 上可微, 因此可以用费马定理, 知道 $f'(\xi)=0$.

定理 1.3 (*Rolle* 中值定理在无限区间上的推广)

设 f 在 $(a,+\infty)$ 上连续, 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 证法一: 若存在 $x_0>a$, $f(x_0')<f(a)$, 由连续函数介值定理可知, 存在 $\eta\in(\min\{x_0,x_0'\},\max\{x_0,x_0'\})$, 使得 $f(\eta)=f(a)$. 这与 $\forall x>a$, 有 $f(x)\neq f(a)$ 矛盾.

任取 $x_1>a$, 则 $f(x_1)>f(a)$. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)<f(x_1)$, 所以由极限的局部保号性可知, 存在 $x_2>x_1$, 使得 $f(x_2)<f(a)<f(x_1)$. 从而由连续函数的介值定理可知, 存在 $x_3\in(x_1,x_2)$, 使得 $f(x_3)=f(a)$. 于是根据有限区间上的 Rolle 中值定理 (定理 1.2) 可知, 存在 $\xi\in(a,x_3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证法二: 令 $x=\tan t$, 在 $t\in[\arctan a,\frac{\pi}{2}]$ 上定义

$$g(t)=\begin{cases} f(\tan t), & 若 t\neq\frac{\pi}{2}\\ f(a), & 若 t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$ 及 $f\in C[a,+\infty)$ 可得

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}f(\tan t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}g(t)$$

因此, 再结合 $f\in C[a,+\infty)$ 且 $f\in C^1(a,+\infty)$ 可知,$g\in C[\arctan a,\frac{\pi}{2}]$ 且 $g\in C^1(\arctan a,\frac{\pi}{2})$

又 $g(\arctan a)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 从而根据有限区间上的 Rolle 中值定理 (定理 1.2) 可知, 存在 $\xi\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})$, 使得

$$g'(\xi)=\sec^2\xi f'(\tan\xi)=0$$

由于 $g\in C^1(\arctan a,\frac{\pi}{2})$, 所以 $g'(\xi)=\sec^2\xi f'(\tan\xi)$ 一定有定义. 再结合 $\sec^2\xi\neq0$ 可知,$f'(\xi)=0$.

定理 1.4 (*Darboux* 定理)

设 f 在区间 I 上可微, 则 f' 具有介值性质.

1.2 命题

命题 1.1

单调函数只有第一类间断点.

命题 1.2

导函数不存在第一类间断点.

命题 1.3

在区间上的导函数如果单调, 则一定连续.

证明 事实上, 由命题1.2可知, 导函数不存在第一类间断点, 而又由命题1.1可知, 单调函数只有第一类间断点. 故该导函数一定连续.

命题 1.4

如果已知 f 在区间 I 上连续并且 $\exists x_0,y_0\in I$ 且 $|f(x_0)-f(y_0)|\geq a>0$, 那么对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$ 且 $k\geq2$, 令 $b=\frac{a}{k}>0$, $m=\left[\frac{f(y_0)-f(x_0)}{b}\right]\geq k$(不超过 $\frac{f(y_0)-f(x_0)}{b}$ 的最大整数). 则可以得到 $[x_0,y_0]$ 的一个划分

$$\Delta: y_0=x_m>x_{m-1}>\cdots>x_1>x_0.$$

满足

$$f(x_i)=f(x_0)+b\cdot i\ ,\ f(x_i)-f(x_{i-1})\geq b=\frac{a}{k}\ ,\ \forall i=1,2\cdots,m.$$

并且一定存在正整数 i_0, 使得 $x_{i_0}-x_{i_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}(\leq\frac{y_0-x_0}{k}\leq\frac{y_0-x_0}{2})$.

注 若知道 y_0-x_0 和 $f(y_0)-f(x_0)$ 具有某些等式或不等式关系, 则可以进一步放缩 $x_{i_0}-x_{i_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}$. 使得 x_{i_0},x_{i_0-1} 符合我们要求的式子, 进而得到我们需要找的充分近的两个点就是 x_{i_0},x_{i_0-1}.(具体例子见命题1.5)

笔记 (1) 要求 $k\geq2$ 是因为: 必须要保证划分 Δ 中至少有 3 个分点, 至少能将区间 $[x_0,y_0]$ 分成 2 部分 (若 $k\leq1$, 则划分 Δ 最多只会将区间 $[x_0,y_0]$ 分成 1 部分, 相当于没有对原区间进行划分).

(2)$m \geq k$ 是因为: 由 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq a > 0$, 可得 $m = \left[\dfrac{f(y_0) - f(x_0)}{\frac{a}{k}}\right] > \dfrac{f(y_0) - f(x_0)}{\frac{a}{k}} - 1 \geq k - 1$, 又由于 $m, k \in \mathbb{N}_+$, 所以 $m \geq k$.

证明 不妨设 $x_0 < y_0, f(x_0) < f(y_0)$. 注意到

$$f(x_0) < f(x_0) + b \cdot m = f(x_0) + b \cdot \left[\frac{f(y_0) - f(x_0)}{b}\right] \leq f(x_0) + b \cdot \frac{f(y_0) - f(x_0)}{b} = f(y_0).$$

从而

$$f(x_0) < f(x_0) + b \cdot (m-1) < f(x_0) + b \cdot m \leq f(y_0), \text{其中} m \geq k \geq 2.$$

由连续函数介值定理可知,$\exists x_{m-1} \in (x_0, y_0)$, 使得

$$f(x_{m-1}) = f(x_0) + b \cdot (m-1).$$

进而, 我们有

$$f(x_0) < f(x_0) + b \cdot (m-2) < f(x_0) + b \cdot (m-1) = f(x_{m-1}).$$

再由连续函数介值定理可知,$\exists x_{m-2} \in (x_0, y_0)$, 使得

$$f(x_{m-2}) = f(x_0) + b \cdot (m-2).$$

依此类推, 可得 $[x_0, y_0]$ 的一个划分

$$\Delta : y_0 = x_m > x_{m-1} > \cdots > x_1 > x_0.$$

根据划分方式, 可知 $f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq b, \forall i = 1, 2 \cdots, m$. 并且一定存在正整数 $i_0 \in \{1, 2 \cdots, m\}$, 使得 $x_{i_0} - x_{i_0-1} \leq \dfrac{y_0 - x_0}{m}$. 否则对 $\forall i \in \{1, 2 \cdots, m\}$, 有 $x_i - x_{i-1} > \dfrac{y_0 - x_0}{m}$. 从而 $y_0 - x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) > \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{y_0 - x_0}{m} = y_0 - x_0$ 矛盾. 再结合 $m \geq k$ 可知,$x_{i_0} - x_{i_0-1} \leq \dfrac{y_0 - x_0}{m} \leq \dfrac{y_0 - x_0}{k}$.

注 实际问题中由于 k 取不同值得到的结论差别不大, 因此一般直接取 $k = 2$, 得到下述推论.

推论 1.1

如果已知 f 在区间 I 上连续并且 $\exists x_0, y_0 \in I$ 且 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq a > 0$, 那么令 $m = \left[\dfrac{f(y_0) - f(x_0)}{\frac{a}{2}}\right] \geq 2$(不超过 $\dfrac{f(y_0) - f(x_0)}{\frac{a}{2}}$ 的最大整数). 则可以得到 $[x_0, y_0]$ 的一个划分

$$\Delta : y_0 = x_m > x_{m-1} > \cdots > x_1 > x_0.$$

满足

$$f(x_i) = f(x_0) + \frac{a}{2} \cdot i,\ f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq \frac{a}{2},\ \forall i = 1, 2 \cdots, m.$$

并且一定存在正整数 i_0, 使得 $x_{i_0} - x_{i_0-1} \leq \dfrac{y_0 - x_0}{m} (\leq \dfrac{y_0 - x_0}{2})$.

注 记忆这个推论的使用条件、结论和证明方法, 以后遇到类似条件就可以使用这个推论进行尝试.

证明 令上一个命题证明中的 $k = 2$, 立得.

命题 1.5 (一致连续的充要条件)

函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N, 使得当 $x, y \in I, x \neq y$ 且

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > N$$

时, 成立 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

笔记 必要性 ($\Rightarrow$) 的证明主要应用了推论1.1, 只要在反证法的基础上利用推论1.1, 再结合已知条件找到合适的 N(与 x_0, y_0 无关) 即可完成证明.

必要性 ($\Rightarrow$) 的证明思路分析:先运用反证法假设 $\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists x,y\in I$ 且 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$, 使得 $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$. 我们要找的矛盾就是 f 在区间 I 上不一致连续, 则根据一致连续的否命题可知, 只要对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $x_{k_0},x_{k_0-1}\in I$ 且 $\left|x_{k_0}-x_{k_0-1}\right|<\frac{1}{n}$, 使得 $|f(x_k)-f(x_{k-1})|\geq\frac{\varepsilon_0}{2}$. 就能得到 f 在区间 I 上不一致连续. 由假设可知, 对某个特定的 $N>0$(若 N 不固定, 则通过不同 N 找到的 x,y 之间没有联系, 更难以找到充分近的 x',x'', 因此我们现将 N 固定下来), 存在两点 $x_0,y_0\in I$ 且 $\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|>N$, 使得 $|f(x_0)-f(y_0)|\geq\varepsilon_0$. 再根据推论1.1, 我们可以通过对区间 $[x_0,y_0]$ 作划分去找出比较靠近的两点 x_{i_0},x_{i_0-1}. 此时有 $x_{k_0}-x_{k_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}$. 只要再取一个特殊的 N 使得 $x_{k_0}-x_{k_0-1}\leq\frac{1}{n}$ 成立就能得到证明.

由 $\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|>N$, 可得 $y_0-x_0<\frac{f(y_0)-f(x_0)}{N}$. 又由 $\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}<\left[\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right]+1=m+1$, 可得 $f(y_0)-f(x_0)<\frac{(m+1)\varepsilon_0}{2}$. 从而有 $x_{k_0}-x_{k_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}<\frac{f(y_0)-f(x_0)}{mN}<\frac{(m+1)\varepsilon_0}{2mN}<\frac{\varepsilon_0}{N}$. 再令 $\frac{\varepsilon_0}{N}=\frac{1}{n}$, 可知我们需要取 $N=n\varepsilon_0$.

证明 ($\Leftarrow$) 设对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得当 $x,y\in I,x\neq y$ 且 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

假设 f 在区间 I 上非一致连续, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 使得取 $\delta=\frac{\varepsilon_0}{N}>0$, 当 $x,y\in I$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0.$$

从而此时 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>\frac{\varepsilon_0}{\delta}=N$. 于是此时, 必有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 这与上述 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾. 故 f 在区间 I 上一致连续.

($\Rightarrow$) 假设 $\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists x,y\in I$ 且 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$, 使得 $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$.

则 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 取 $N=n\varepsilon_0,\exists x_0,y_0\in I$ 且 $\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|>N=n\varepsilon_0$, 使得 $|f(x_0)-f(y_0)|\geq\varepsilon_0$.

不妨设 $x_0<y_0,f(x_0)<f(y_0)$. 再令 $m=\left[\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right]\geq2$(不超过 $\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 的最大整数), 则

$$f(x_0)<f(x_0)+\frac{(m-1)\varepsilon_0}{2}<f(x_0)+\frac{m\varepsilon_0}{2}=f(x_0)+\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right]\leqslant f(x_0)+f(y_0)-f(x_0)=f(y_0).$$

由连续函数的介值定理可知,$\exists x_{m-1}\in(x_0,y_0)$, 使得

$$f(x_{m-1})=f(x_0)+\frac{(m-1)\varepsilon_0}{2}.$$

于是, 我们有

$$f(x_0)<f(x_0)+\frac{(m-2)\varepsilon_0}{2}<f(x_0)+\frac{(m-1)\varepsilon_0}{2}=f(x_{m-1}).$$

再由连续函数的介值定理可知,$\exists x_{m-2}\in(x_0,y_0)$, 使得

$$f(x_{m-2})=f(x_0)+\frac{(m-2)\varepsilon_0}{2}.$$

依此类推, 可得 $[x_0,y_0]$ 的一个划分

$$\Delta:y_0=x_m>x_{m-1}>\cdots>x_1>x_0.$$

根据划分方式, 可知 $f(x_k)-f(x_{k-1})\geq\frac{\varepsilon_0}{2},k=1,2,\cdots,m$. 并且一定存在正整数 $k_0\in\{1,2\cdots,m\}$, 使得 $x_{k_0}-x_{k_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}$. 否则 $\forall k\in\{1,2\cdots,m\}$, 都有 $x_k-x_{k-1}>\frac{y_0-x_0}{m}$. 从而 $y_0-x_0=\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1})>\sum_{k=1}^{m}\frac{y_0-x_0}{m}=y_0-x_0$ 矛盾.

由 $\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|>N=n\varepsilon_0$, 可知 $y_0-x_0<\frac{f(y_0)-f(x_0)}{n\varepsilon_0}$. 又由 $\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}<\left[\frac{f(y_0)-f(x_0)}{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right]+1=m+1$, 可得 $f(y_0)-f(x_0)<\frac{(m+1)\varepsilon_0}{2}$. 因此

$$x_{k_0}-x_{k_0-1}\leq\frac{y_0-x_0}{m}<\frac{f(y_0)-f(x_0)}{mn\varepsilon_0}<\frac{(m+1)\varepsilon_0}{2mn\varepsilon_0}<\frac{1}{n}.$$

综上可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $x_{k_0},x_{k_0-1}\in I$ 且 $\left|x_{k_0}-x_{k_0-1}\right|<\dfrac{1}{n}$, 使得 $\left|f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right|\geq\dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

这与 f 在区间 I 上一致连续矛盾. 故原命题成立.

命题 1.6 (Cantor 定理在开区间上的推广)

有界开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$.

证明

证 先证充分性. 在闭区间 $[a,b]$ 上构造辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b.\end{cases}$$

则可以看出 $F\in C[a,b]$. 对 F 应用 Cantor 定理, 可见 F 在 $[a,b]$ 上一致连续. 因此 f 在 (a,b) 上也一致连续. (这与例题 5.3.3 的第一个证明完全相同.)

§5.4 一致连续性与 Cantor 定理 141

再证必要性. 不妨只写出存在 $f(a^+)$ 的证明. 对 $\varepsilon>0$, 由于 f 在 (a,b) 上一致连续, 因此存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(a,b)$, 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

因此当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立. 应用关于右侧极限的 Cauchy 收敛准则 (命题 4.2.5), 可见存在极限 $f(a^+)$. □

命题 1.7

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$, 证明:$|f'(x)|\leqslant\dfrac{2A}{b-a}+\dfrac{B\,(b-a)}{2}$.

笔记 积累这种想法: 利用 $Taylor$ 定理将 n 阶可导函数 $f(x)$ 在特殊点处 (本题是端点处) 的函数值分别在 x(x 可取到所有能展开的点) 处展开, 再根据 x 的任意性得到 $k(k=0,1,\cdots,n)$ 阶导数 $f^{(k)}(x)$ 的相关结论.

证明 (将 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别在 x 点处展开) 由 $Taylor$ 定理可知, 对 $\forall x\in(a,b)$,$\exists\xi\in(a,x)$,$\eta\in(x,b)$, 使得

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2,\ f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2.$$

上述两式相减得

$$f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2-\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2. \tag{1.2}$$

从而结合 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$, 对 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|+\left|\frac{f''(\xi)(a-x)^2-f''(\eta)(b-x)^2}{2(b-a)}\right|\leqslant\frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2(b-a)}[(a-x)^2+(b-x)^2].$$

又根据抛物线的性质易知 $(a-x)^2+(b-x)^2<(b-a)^2$,$x\in(a,b)$. 代入到上式有

$$|f'(x)|<\frac{2A}{b-a}+\frac{B(b-a)}{2}.$$

最后再结合 $f'(x)$ 的连续性, 可知对 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $|f'(x)|\leqslant \dfrac{2A}{b-a}+\dfrac{B(b-a)}{2}$.

$\left(|f'(a)| \xlongequal{f'(x)\text{的连续性}} \lim\limits_{x\to a^+}|f'(x)| \overset{\text{极限保不等式性}}{\leqslant} \dfrac{2A}{b-a}+\dfrac{B(b-a)}{2}, |f'(b)|\text{ 同理}\right)$

注 上述命题中将 $|f(x)|$ 的条件改为 $f(a)=f(b)$, 可以得到下面的推论.

推论 1.2

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f(a)=f(b), |f''(x)|\leqslant B$, 证明: $|f'(x)|\leqslant \dfrac{B(b-a)}{2}$.

证明 只需将(1.2)式改为

$$f'(x)(b-a)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2-\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2=0.$$

再根据上述命题同理证明, 就可以得到 $|f'(x)|\leqslant \dfrac{B(b-a)}{2}$.

命题 1.8

设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 在 (a,b) 上二阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

(注意: 这里没有假定 $f'\in C[a,b]$)

笔记 (1) 因为本题没有假定 $f'\in C[a,b]$, 所以不能直接使用各种中值定理证明中值点的存在性 (也就不能使用 K 值法构造辅助函数证明). 因此只能利用反证法, 假设不存在中值点, 再构造辅助函数 (构造辅助函数的方法见下述 (2)), 然后分析函数的性态找到矛盾.

(2) 这类中值问题因为条件不够, 导致无法使用各种中值定理的问题, 所以不能通过 K 值法或解微分方程法构造辅助函数. 而这类问题构造辅助函数的想法实际上与证明 *Lagrange* 中值定理中构造辅助函数的想法类似. 构造的辅助函数 $g(x)$ 需要满足: $g(a)=g(b)=C$(C 为某已知常数), 且 $g'(\xi)=0$ 恰好就是需要证明的等式或者 $g'(a)=g'(b)=C$(C 为某已知常数), 且 $g''(\xi)=0$ 恰好就是需要证明的等式.(构造的辅助函数具体形式一般就两种, 见推论中的 $g_1(x), g_2(x)$)

(3) 也可以构造 $g(x)=f'(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)$ 作为辅助函数, 此时有 $g(a)=g(b)=f'(a)$, 然后同理进行证明 $g'(x)=f''(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$ 即可.

注 记忆这种构造辅助函数的方式.

证明 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\cdot\dfrac{(x-a)^2}{2}$, 则 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)$, 且 $g'(a)=g'(b)=f'(a)$.

(因为只有 $g\in D(a,b)$, 而 g 不一定在 a、b 处连续, 所以不能使用 *Rolle* 中值定理直接得到 $g''(\xi)=0$)

(反证) 假设 $g''(x)>0$ 或 $g''(x)<0, \forall x\in(a,b)$. 当 $g''(x)>0$ 时, 对 $\forall x\in(a,b)$, 有 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递增. 任取 $c\in(a,b)$, 则 $f'(c)>f'(a)=f'(b)$. 又由 *Darboux* 定理可知, 存在 $d\in(c,b)$, 使得 $f'(c)>f'(d)>f'(b)$. 这与 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递增矛盾. 于是 $g''(x)>0$, 对 $\forall x\in(a,b)$ 不成立. 同理可得 $g''(x)<0$, 对 $\forall x\in(a,b)$ 也不成立. 故一定存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g''(\xi)=0$.

又因为 $g''(x)=f''(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, 所以 $f''(\xi)=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. 即 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$.

注 将上述命题推广可以得到下面一个命题.

推论 1.3

设 $f\in D^k[a,b]\cap D^{k+1}(a,b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)=f^{(k+1)}(\xi)(b-a).$$

笔记 记忆这个推论构造辅助函数的方式以及这个推论的结论.

证明 证明这个命题只需要构造辅助函数 $\boldsymbol{g_1(x)=f(x)-\dfrac{f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)}{b-a}\cdot\dfrac{(x-a)^k}{k!}}$, 则有 ${g_1}^{(k)}(a)={g_1}^{(k)}(b)=$

$f^{(k)}(a)$. 然后只需要仿造上一个命题的证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 ${g_1}^{(k+1)}(\xi)=f^{(k+1)}(\xi)-\dfrac{f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)}{b-a}=0$ 即可.

或者构造辅助函数 $\boldsymbol{g_2(x)=f^{(k)}(x)-\dfrac{f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)}{b-a}(x-a)}$. 则有 ${g_2}^{(k)}(a)={g_2}^{(k)}(b)=f^{(k)}(a)$. 然后只需要同理证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g_2(\xi)=f^{(k+1)}(\xi)-\dfrac{f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)}{b-a}=0$ 即可.

命题 1.9

设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且有界, 证明: 存在 ξ, 使成立 $f''(\xi)=0$.

笔记 当 $f''(x)>0$ 时,$f(x)$ 是下凸函数, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一定会发散到无穷.(即 $f(x)$ 的增速越来越快, 不会出现类似 $arctanx$ 那种情况)

注 如果 $f\in D(-\infty,+\infty)$, 且有界. 那么得不到 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有零点.(例如,$f(x)=arctanx$)

证明 (反证) 假设结论不成立, 则 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$ 恒成立. 不妨设 $f''(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$. 则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增. 若 $f'(0)\geq 0$, 则对 $\forall a>1$, 都有 $f'(a)>f'(1)>f'(0)\geq 0$. 从而对 $\forall x>1$, 根据 $Lagrange$ 中值定理, 可知, 存在 $\eta\in(1,x)$, 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\eta)(x-1)>f'(1)(x-1).$$

令 $x\to+\infty$, 得 $f(x)\to+\infty$. 这与 $f(x)$ 有界矛盾. 同理 $f'(0)<0$ 也不成立. 于是假设不成立, 命题即证.

命题 1.10

若 $x_1,x_2,a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 且 $x_2-a_2>0$,$b_2-a_2>0$, 则 $\dfrac{x_1-a_1}{x_2-a_2}<\dfrac{b_1-a_1}{b_2-a_2}\Leftrightarrow\dfrac{x_1-a_1}{x_2-a_2}<\dfrac{b_1-x_1}{b_2-x_2}$.

证明

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1-a_1}{x_2-a_2}<\frac{b_1-a_1}{b_2-a_2}\\
\Leftrightarrow&(x_1-a_1)(b_2-a_2)<(b_1-a_1)(x_2-a_2)\\
\Leftrightarrow&(x_1-a_1)(b_2-x_2+x_2-a_2)<(b_1-a_1)(x_2-a_2)\\
\Leftrightarrow&(x_1-a_1)(b_2-x_2)+(x_1-a_1)(x_2-a_2)<(b_1-a_1)(x_2-a_2)\\
\Leftrightarrow&(x_1-a_1)(b_2-x_2)<(b_1-a_1+a_1-x_1)(x_2-a_2)\\
\Leftrightarrow&(x_1-a_1)(b_2-x_2)<(b_1-x_1)(x_2-a_2)\\
\Leftrightarrow&\frac{x_1-a_1}{x_2-a_2}<\frac{b_1-x_1}{b_2-x_2}
\end{aligned}$$

1.3 例题

例题 1.1 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且已知

$$M_0=\sup\{|f(x)|\mid x\in(0,+\infty)\}\text{和}M_2=\sup\{|f''(x)|\mid x\in(0,+\infty)\}$$

为有限数. 证明:$M_1=\sup\{|f'(x)|\mid x\in(0,+\infty)\}$ 也是有限数, 并满足不等式

$$M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

证明 $\forall x,t>0$, 由于 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 根据 $Taylor$ 定理, 将 $f(x+t)$ 在 x 处展开得, 存在 $\xi\in(x,x+t)$, 使得

$$f(x+t)=f(x)+f'(x)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2$$

由此有估计

$$|tf'(x)|=|f(x+t)-f(x)-\frac{f''(\xi)}{2}t^2|\leqslant 2M_0+\frac{M_2}{2}t^2$$

这样就得到

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2}{2}t$$

这对每个 $x,t \in (0,+\infty)$ 都成立. 两边对 x 取上确界, 就有

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2}{2}t$$

这对每个 $t \in (0,+\infty)$ 都成立. 因此,M_1 为有限数. 为了得到最好的估计, 可以取 $t = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, 使右边和达到最小, 即有

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

注 将上述例题中的区间从 $(0,+\infty)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$. 可以得到更好的估计 $M_1 \leqslant \sqrt{M_0 M_2}$. 即下面一个例题.

例题 1.2 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且已知

$$M_0 = \sup\{|f(x)| \mid x \in (0,+\infty)\}\text{和}M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in (0,+\infty)\}$$

为有限数. 证明:$M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in (0,+\infty)\}$ 也是有限数, 并满足不等式

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}.$$

证明 由于 $f \in D^2(-\infty,+\infty)$, 对 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$,$t > 0$, 根据 *Taylor* 中值定理, 分别将 $f(x+t)$,$f(x-t)$ 在 x 处展开可得, 存在 $\xi_1 \in (x-t,x)$,$\xi_2 \in (x,x+t)$, 使得

$$f(x-t) = f(x) + f'(x)(-t) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(-t)^2, f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(\xi_2)}{2}t^2.$$

上面两式相减, 可得

$$f(x+t) - f(x-t) = 2tf'(x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}t^2 - \frac{f''(\xi_1)}{2}t^2.$$

从而 $f'(x) = \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t} + \frac{t[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]}{4}$. 于是

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{2t} + \frac{|t[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]|}{4} \leqslant \frac{M_0}{t} + \frac{tM_2}{2}.$$

上式对 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$,$t > 0$ 都成立, 并且上式右边与 x 无关. 两边同时对 x 取上确界, 就有

$$M_1 \leqslant \frac{M_0}{t} + \frac{tM_2}{2}.$$

这对每个 $t > 0$ 都成立. 取 $t = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, 则有

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}.$$

注 取 $t = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, 此时有 $g(t) = \frac{M_0}{t} + \frac{tM_2}{2}$ 恰好达到最大值. 因此 $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$ 是最佳估计.

例题 1.3 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

证明 证法一: 写出 $f(a), f(b)$ 在点 $\frac{a+b}{2}$ 处的 *Taylor* 展开式:

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \eta_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \eta_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

然后将两式相加, 就有

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{8}(b-a)^2\left[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)\right] \tag{1.3}$$

又 $\min\{f''(\eta_1), f''(\eta_2)\} \leq \frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] \leq \max\{f''(\eta_1), f''(\eta_2)\}$, 故由 *Darboux* 定理 (定理1.4) 可知, 存

在 $\xi \in (\min\{\eta_1,\eta_2\},\max\{\eta_1,\eta_2\})$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$$

再结合(1.3)可得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

证法二 (K值法构造辅助函数): 记常数 $\lambda=\dfrac{4\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}$, 令

$$F(t)=f(t)+f(a)-2f\left(\frac{t+a}{2}\right)-\lambda\frac{(t-a)^2}{4}$$

则 $F(b)=F(a)=0$. 由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 $F'(\eta)=0$, 即

$$f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)=\frac{\lambda}{2}(\eta-a) \tag{1.4}$$

而由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(\dfrac{\eta+a}{2},\eta)$, 使得

$$f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)=\frac{f''(\xi)}{2}(\eta-a)$$

将其代入(1.4)式可得, $\left[\dfrac{f''(\xi)}{2}-\dfrac{\lambda}{2}\right](\eta-a)=0$. 从而 $\lambda=f''(\xi)$, 即有

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

注 K 值法构造辅助函数: 首先令 $\lambda=f''(\xi)$, 代入

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

得 $\lambda=\dfrac{4\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}$, 然后将需要证明的式子全部移到等式左边, 将 $f''(\xi)$ 换成 λ, 并将式中常数 a 或 b 改为变量 t 即可得到我们需要构造的辅助函数:

$$F(t)=f(t)+f(a)-2f\left(\frac{t+a}{2}\right)-\lambda\frac{(t-a)^2}{4}$$

然后再反复利用 *Rolle* 中值定理即可得到结论.

证法三: 作辅助函数

$$\varphi(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x)$$

由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\eta\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$, 使得

$$\frac{\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)}{\frac{1}{2}(b-a)}=\varphi'(\eta)=f'\left(\eta+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\eta) \tag{1.5}$$

再次由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\xi\in\left(\eta,\eta+\dfrac{b-a}{2}\right)$, 使得

$$\frac{f'\left(\eta+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\eta)}{\frac{1}{2}(b-a)}=f'(\xi) \tag{1.6}$$

结合(1.5)(1.6)式可得

$$f'(\xi)=\frac{f'\left(\eta+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\eta)}{\frac{1}{2}(b-a)}=\frac{\varphi'(\eta)}{\frac{1}{2}(b-a)}=\frac{\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}=\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$$

整理即得结论.

1.4 练习

✍ **练习 1.1** 设 $f \in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 上可微, 并且 $f(0)=0, f(1)=1$. 又设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 的 n 个正数. 证明: 在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同的数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=1$$

证明 由介值定理知, 可以在 $(0,1)$ 中插入 $x_1, x_2, \cdots, x_n-1$, 使得

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n-1<x_n=1$$

同时满足

$$f(x_1)=k_1, f(x_2)=k_1+k_2, \cdots, f(x_{n-1})=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}$$

在区间 (x_{i-1}, x_i) 上用拉格朗日中值定理, 有存在 $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$k_i=f(x_{i-1})-f(x-i)=f'(t_i)(x_{i-1}-x_i), i=1,2,\cdots,n.$$

这样就有

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=1.$$

✍ **练习 1.2** 用 *Rolle* 定理解决以下问题 (在方程中出现的系数均为实数):

(1) 证明: 方程 $e^x=ax^2+bx+c$ 的不同实根不多于 3 个;

(2) 证明: 方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根;

(3) 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 有 $n+1$ 个 (不同) 实根, 证明:$f(x)\equiv 0$.

(4) 若 $2a^2 \le 5b$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 不可能有 5 个不同的实根.

(5) 证明:*Legendre* 多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}$ 在 (-1,1) 内有 n 个不同实根.

(6) 证明:*Laguerre*(拉盖尔) 多项式 $L_n(x)=e^x\left(x^ne^{-x}\right)^{(n)}$ 有 n 个不同正根.

证明 (1)(反证法) 令 $f(x)=e^x-(ax^2+bx+c)$, 假设原方程在 $\mathbb{R}$ 上有 4 个不同实根 x_1, x_2, x_3, x_4, 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$. 则

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$$

由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}), i=1,2,3$, 使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\eta_i \in (\xi_i, \xi_{i+1}), i=1,2$, 使得

$$f''(\eta_1)=f''(\eta_2)=0$$

由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\zeta \in (\eta_1, \eta_2)$, 使得

$$f'''(\zeta)=e^\zeta=0$$

这与 e^x 在 $\mathbb{R}$ 上没有零点矛盾, 故原方程的不同实根不多于 3 个.

(2) 令 $f(x)=4ax^4+3bx^3+2cx^2-(a+b+c)x$, 则 $f(0)=f(1)=0$. 由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 从而 ξ 就是原方程在 $(0,1)$ 的一个根.

(3) 由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, 使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\cdots=f'(\xi_n)=0$$

反复利用 *Rolle* 中值定理, 得

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1\text{有}n\text{个零点} \tag{1.7}$$

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+3!\ a_3x+a_2=0\text{有}n-1\text{个零点} \tag{1.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = n!a_n x + (n-1)!a_{n-1}\text{有2个零点} \tag{1.9}$$

$$f^{(n)}(x) = a_n n!\text{有1个零点} \tag{1.10}$$

从而 $a_n = 0$, 代入(1.9)得,$a_{n-1} = 0$. 依次类推可得,$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. 故 $f(x) \equiv 0$.

(4)(反证法) 令 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. 假设原方程有 5 个不同的实根, 即 $f(x) = 0$ 有 5 个不同的实根. 则反复利用 *Rolle* 中值定理可得, $f'''(x) = 60x^2 + 24ax + 6b$ 有 2 个不同的实根.

从而 $\Delta = (24a)^2 - 4 \times 60 \times 6b > 0$, 这与 $2a^2 \le 5b$ 矛盾. 故原方程不可能有 5 个不同的实根.

(5) 令 $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$. 则 $f(x) = (x-1)^n (x+1)^n$ 为 $2n$ 次多项式, 且 $x = \pm 1$ 分别为 $f(x)$ 的 n 重根.

从而 $f'(x)$ 以 ± 1 为 $n-1$ 重根, 且由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\xi_1^{(1)} \in (-1,1)$, 使得 $f'(\xi_1^{(1)}) = 0$.

进而 $f''(x)$ 以 ± 1 为 $n-2$ 重根, 且由 *Rolle* 中值定理知, 存在 $\xi_1^{(2)} \in (-1, \xi_1^{(1)}), \xi_2^{(2)} \in (\xi_1^{(1)}, 1)$, 使得 $f''(\xi_i^{(2)}) = 0, i = 1,2$. 即 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 存在两个互异的实根.

重复以上操作 n 次, 可得 $f^{(n)}(x)$ 不再以 ± 1 为根, 且 $f^{(n)}(x)$ 在 (-1,1) 内有 n 个互异的实根.

事实上, 可知

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} f^{(n)}(x)$$

从而 $P_n(x)$ 在 (-1,1) 内也有 n 个互异的实根. 又因为 $P_n(x)$ 为 n 次多项式函数, 所以若 $P_n(x)$ 有 $n+1$ 个不同的实根, 则根据练习(1.2)第 (2) 题可知,$P_n(x) \equiv 0$ 矛盾. 故 $P_n(x)$ 在 (-1,1) 内只有 n 个互异的实根.

(6) 令 $f(x) = x^n e^{-x}$, 显然 0 是 $f(x)$ 的 n 重根. 并且

$$f'(x) = \frac{x^n + nx^{n-1}}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x^n + 2nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{e^x}, \text{其中} P(x) \text{是关于} x \text{的} n \text{次多项式}$$

从而 $f^{(k)}(x) = \dfrac{P_{n,k}(x)}{e^x}$, 其中$P_{n,k}(x)$是关于$x$的$n$次多项式,$k = 0, 1, \cdots, n$. 于是

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{P_{n,k}(x)}{e^x} = 0, k = 0, 1, \cdots, n$$

又由 0 是 f 的 n 重根可知,0 是 $f^{(k)}(x)$ 的 $n-k$ 重根,$k = 0, 1, \cdots, n$.

由 $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 及推广的 *Rolle* 中值定理 (定理1.3) 可得, 存在 $\xi_1^{(1)} \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi_1^{(1)}) = 0$.

进而 $f'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = f'\left(\xi_1^{(1)}\right) = 0$, 再运用推广的 *Rolle* 中值定理 (定理1.3) 可得, 存在 $\xi_1^{(2)} \in \left(0, \xi_1^{(1)}\right), \xi_2^{(2)} \in \left(\xi_1^{(1)}, 1\right)$, 使得 $f''\left(\xi_1^{(2)}\right) = f''\left(\xi_2^{(2)}\right) = 0$. 即 $f''(x)$ 存在两个不同的正根.

于是反复利用推广的 *Rolle* 中值定理 (定理1.3) 可得, $f^{(n)}(x)$ 存在 n 个不同的正根.

✍ **练习 1.3** 若 f 在 $[a,b]$ 上满足在 *Rolle* 中值定理中的条件 (即 $f \in C[a,b]$ 且 $f(a) = f(b)$), $f'_+(a) f'_-(b) > 0$. 证明:$f'(x) = 0$ 在 (a,b) 中至少有两个根.

证明 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$ 且 $F'_+(a) F'_-(b) > 0$. 不妨设 $F'_+(a) > 0, F'_-(b) > 0$, 则由极限的局部保号性知, 存在 $a < a_1 < b_1 < b$, 使得 $F(a_1) > F(a) = 0, F(b_1) < F(b) = 0$.

从而由介值定理可知, 存在 $c \in (a_1, b_1)$, 使得 $F(c) = F(a) = F(b) = 0$.

于是由 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $x_1 \in (a,c), x_2 \in (c,b)$, 使得 $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$. 即 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. 故 $f'(x) = 0$ 在 (a,b) 中至少有两个根.

✍ **练习 1.4** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $0 < a < b$ 成立. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f(b) - f(a) = \ln\frac{b}{a} \cdot \xi f'(\xi).$$

证明 令 $g(x) = \ln x$, 则由 *Cauchy* 中值定理可得, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \cdot \xi f'(\xi)$$

整理即得 $f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\cdot\xi f'(\xi)$

练习 1.5 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

(若应用 *Cauchy* 中值定理, 则要讨论其条件不满足的情况.)

笔记 因为 *Cauchy* 中值定理 (定理1.1) 的条件 $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$ 对 $\forall x\in(a,b)$ 可能不满足, 所以不能直接使用 *Cauchy* 中值定理证明. 但是可以利用 *Cauchy* 中值定理证明中的思路, 构造类似的辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

使得 $F(a)=F(b)=0$, 再运用 *Rolle* 中值定理得到证明.

证明 令

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}\left[x^2-a^2\right]$$

则 $F(a)=F(b)=0$ 且 $F(x)\in C^1[a,b]$. 从而由 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{2\xi f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=0$. 整理即得结论.

练习 1.6 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且导函数 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

笔记 因为导函数 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点, 所以如果存在 $\xi\in(a,b)$ 满足结论, 则 $g'(\xi)\neq 0, g(b)-g(\xi)\neq 0$.

若 $g(b)-g(\xi)=0$, 则由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta\in(\xi,b)$, 使得 $g'(\eta)=0$. 这与 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点矛盾.

因此, 要证明的结论等价于: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)\left[g(b)-g(\xi)\right]-g'(\xi)\left[f(\xi)-f(a)\right]=0$$

从而只要构造出相应的辅助函数 $F(x)$, 使得 $F(a)=F(b)$ 且 $F'(x)=f'(x)\left[g(b)-g(x)\right]-g'(x)\left[f(x)-f(a)\right]=0$, 再利用 *Rolle* 中值定理即可证明结论. 直接观察可得, 需要构造的辅助函数为 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(x)]$. 再将上述思路严格化即可得证.

证明 令 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(x)]$, 则 $F(a)=F(b)$ 且 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微. 由 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)\left[g(b)-g(\xi)\right]-g'(\xi)\left[f(\xi)-f(a)\right]=0 \tag{1.11}$$

根据 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点知,$g'(\xi)\neq 0, g(b)-g(\xi)\neq 0$. 若 $g(b)-g(\xi)=0$, 则由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\eta\in(\xi,b)$, 使得 $g'(\eta)=0$. 这与 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点矛盾.

因此, 由(1.11)整理可得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

练习 1.7 7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$. 证明: 存在 $\xi>0$, 使得 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

笔记 注意到, 只需要构造出相应的辅助函数 $F(x)$, 使得 $F'(x)=f'(x)-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. 再利用 *Rolle* 中值定理即可得到结论. 运用常数变易法求解一阶常微分方程构造辅助函数:

考虑微分方程 $y'=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 两边同时积分解得 $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$. 故可构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

证明 令 $F(x)=f(x)-\frac{x}{(1-x^2)^2}$, 由条件可知,

$$0\leq f(0)\leq 0,$$
$$0\leq f(+\infty)\leq\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}$$

由迫敛性可知,$f(0)=f(+\infty)=0$. 从而根据推广的 *Rolle* 中值定理 (定理1.3) 可得, 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$. 整理即得结论.

练习 1.8 对于

(1)$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$,

计算在公式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 中的 θ, 并求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta$.

证明 (1) 代入得

$$[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-(ax^2+bx+c)=[2a(x+\theta\Delta x)+b]\Delta x$$

解得 $\theta=\dfrac{1}{2}$.

(2) 代入得

$$\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{(1+(x+\theta\Delta x)^2)}$$

化简可得

$$\Delta x\cdot\theta^2+2\theta x-x=0$$

令 $\Delta x\to 0$, 得 $\theta=\dfrac{1}{2}$.

练习 1.9 证明: 当 $x\geq 0$ 时有 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\dfrac{1}{2}$, 且具有性质

$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$$

证明 由 *Lagrange* 中值定理, 存在 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

由此得

$$2\sqrt{x+\theta(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

进而

$$\theta(x)=\frac{1}{4}[\sqrt{x+1}+\sqrt{x}]^2-x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x]\tag{1.12}$$

由于

$$\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}\leq\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\frac{1}{2}$$

再结合(1.12)可得,$\dfrac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\dfrac{1}{2}$. 又由(1.12)直接可得

$$\lim_{x\to 0^+}=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to+\infty}=\frac{1}{2}$$

练习 1.10 设 f 在区间 $[a,b]$ 上可微. 证明: 若 $f(a)$ 是 f 的最大值, 则 $f'_+(a)\leq 0$: 若 $f(b)$ 是 f 的最大值, 则 $f'_-(b)\geq 0$.

证明 若 $f(a)$ 是 f 的最大值, 则 $\forall x\in[a,b]$, 有 $f(x)\geq f(a)$. 从而

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$

若 $f(b)$ 是 f 的最大值, 同理可得

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant 0$$

练习 1.11 证明: 当且仅当 $|x|\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 成立 $2\arcsin x\equiv\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

证明 令 $f(x)=2\arcsin x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}),|x|\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 则

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(2x^2-1)^2}}=0$$

从而 $f(x)\equiv C$(其中 C 为常数). 又因为 $f(0)=0$, 所以 $f(x)\equiv 0$.

练习 1.12 设函数 f 在区间 I 上二阶可微, 且 $f''(x)\equiv 0$. 问:f 是什么函数?

解 f 为线性函数, 理由如下:

由 $f''(x)=0$ 可知,$f'(x)=C$, 其中 C 为常数. 任取 $x_0\in I$, 对 $\forall x\in I$, 由拉格朗日中值定理可得, 存在 $\xi\in(\min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\})$, 使得

$$f(x)=f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)$$

故 $f(x)=c(x-x_0)+f(x_0)$, 其中 $c=f'(\xi),x\in I$

练习 1.13 证明: 在有界开区间 (a,b) 上无界的可微函数的导数也一定无界.

证明 假设 $\exists M>0,\forall x\in(a,b)$, 有 $|f'(x)|<M$. 任取 $x_0\in(a,b)$, 对 $\forall x\in(a,b)$. 由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi\in(min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\})$, 使得

$$|f(x)|=|f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)|\leqslant M(b-a)+|f(x_0)|$$

因此,$f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界. 这与 $f(x)$ 在有界开区间 (a,b) 上无界矛盾.

练习 1.14 设 f 在 $(0,a)$ 上可微,$f(0^+)=+\infty$. 证明:$f'(x)$ 在点 $x=0$ 的右侧无下界.

证明 任取 $x_0>0$, 由 $f(0^+)=+\infty$ 可知,$\exists 0<\delta<x_0\ s.t.\ \forall x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(x_0)$.

从而当 $x\in(0,\delta)$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\frac{f(x)-f(x_0)}{-x_0}<0$$

令 $x\to 0^+$, 则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0}-\frac{f(0^+)}{x_0}=-\infty$$

故 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的右侧无下界.

练习 1.15 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微,$f(a)=f(b)$, 但 f 不是常值函数. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)>0$.

证明 因为 f 不是常值函数, 所以存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)\neq f(a)$.

若 $f(c)>f(a)=f(b)$, 则由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,c)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$$

若 $f(c)<f(a)=f(b)$, 则由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\eta\in(c,b)$, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$$

练习 1.16 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上二阶可微, 又知连接点 $A(0,f(0))$ 和 $B(1,f(1))$ 的直线段与曲线 $y=f(x)$ 交于点 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ, 使 $f''(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0)$, 则由条件可知,$F(0)=F(1)=F(c)=0$. 从而用两次 $Roll$ 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

练习 1.17 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且 $f'(x)$ 无零点. 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$$

证明 证法一: 由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$e^\eta=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

于是取 $\xi=\eta\in(a,b)$, 则

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}=1$$

证法二: 一方面, 由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)\left(e^b-e^a\right)}=\frac{f'(\xi)}{e^b-e^a}\tag{1.13}$$

另一方面, 由 *Cauchy* 中值定理可知, 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)\left(e^b-e^a\right)}=\frac{f'(\eta)}{b-a}e^{-\eta}\tag{1.14}$$

结合(1.13)(1.14)整理即得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}\tag{1.15}$$

练习 1.18 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可微,$f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$. 证明:

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对任何实数 λ, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

证明 (1) 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(\frac{1}{2})=1>0,g(1)=-1<0$. 由零点存在定理可知, 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $g(\eta)=0$. 即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 令 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$, 则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)-1-\lambda[f(x)-x]}{e^{2\lambda x}}$. 由 (1) 可知,$F(0)=F(\eta)=0$. 由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得

$$F'(\xi)=\frac{f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]}{e^{2\lambda\xi}}=0$$

从而 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

练习 1.19 设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明:f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

证明 充分性显然, 下证必要性. 设 $f'(x)\equiv C$, 其中 C 为某一常数. $\forall x\in I$, 任取固定点 $x_0\in I$, 由 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(\min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\})$, 使得

$$f(x)=f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)=C(x-x_0)+f(x_0)$$

故 $f(x)$ 为线性函数.

练习 1.20 用间接法求函数 $f(x)=\sin x^3$ 的带 *Peano* 余项的 *Maclaurin* 公式, 要求写出直到 x^{13} 项的系数然后利用这个公式计算出函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的直到 13 阶的各阶导数值.

证明

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\sin x^3}&=\left(x^3-\frac{1}{3!}x^9+\frac{1}{5!}x^{15}+o\left(x^{15}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\
&=x\left(1-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{12}+o\left(x^{12}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\
&=x\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{12}+o\left(x^{12}\right)\right)-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{12}+o\left(x^{12}\right)\right)^2}{2!}+o\left(x^{12}\right)\right]\\
&=x\left[1-\frac{x^6}{18}+\frac{x^{12}}{360}-\frac{1}{324}x^{12}+o\left(x^{12}\right)\right]\\
&=x-\frac{x^7}{18}-\frac{1}{3240}x^{13}+o\left(x^{13}\right)
\end{aligned}$$

由 *Taylor* 展开式的唯一性可知

$$f'(0)=1,f^{(k)}(0)=0,k=2,3,4,5,6,8,9,10,11,12$$

$$f^{(7)}(0)=-\frac{1}{18},f^{(13)}(0)=-\frac{1}{3240}$$

✍ **练习 1.21** 计算 $\arcsin x$ 的带 *Peano* 余项的 *Maclaurin* 公式.

证明 由于

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

所以令 $\alpha=-\frac{1}{2}$, 用 $-x^2$ 替换 x 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!}(-x^2)^k=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^n\cdot k!}x^{2k}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}$$

从而

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^x[1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}]dt=x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1}$$

于是 $\arcsin x$ 带 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开为:

$$\arcsin x==x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$$

✍ **练习 1.22** 计算 $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的带 *Peano* 余项的 *Maclaurin* 公式.

证明 令 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-xy}}$, 两边对 x 求导可得

$$\sqrt{1-x^2}y'-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{即}(1-x^2)y'=1+xy$$

显然 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-xy}}$ 为奇函数, 根据 *Taylor* 定理可知, 不妨设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n-1}$, 代入上式, 得

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}((2n+1)a_{2n+1}-(2n-1)a_{2n-1})x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n}$$

对比系数可得

$$\begin{cases}a_1=1\\(2n+1)a_{2n+1}=2na_{2n}\end{cases}$$

于是可得 $a_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$,$n=0,1,2,\cdots$.

从而 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-xy}}$ 有 *Peano* 余项的麦克劳林公式为

$$f(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{4!!}{5!!}x^5+\cdots+\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

✍ **练习 1.23** 估计下列近似公式的绝对误差:

(1) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 当 $0\le x\le 1$;

(2)$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, $\|x|\le\frac{1}{2}$;

(3) $\tan x\approx x+\frac{x^3}{3}$, 当 $|x|\le\frac{1}{10}$;

(4) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, 当 $0\le x\le 1$.

证明 由带有拉格朗日余项的麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

可得绝对误差为

$$(1)|R(x)| == \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

$$(1)|R(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e}{(n+1)!};$$

$$(2)|R(x)| = \left|\frac{\sin\xi}{4!}x^4\right| \le \frac{1}{4!\cdot 2^4} = \frac{1}{384};$$

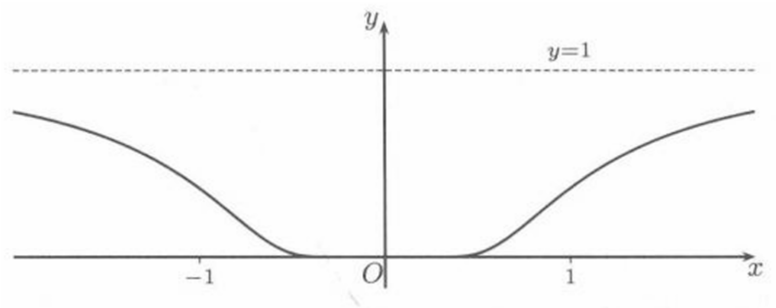
$$(3)|R(x)| = \left|\frac{\tan^{(4)}x}{4!}x^4\right| \le \left|\frac{\tan^{(4)}(0.1)}{4!}0.1^4\right| \approx 0.004286\left((\tan x)^{(4)} \text{ 在 } (-0.1,0.1) \text{ 上单调递增}\right);$$

$$(4)|R(x)| \le \frac{\left|f^{(3)}(1)\right|}{3!} \approx 0.011.$$

练习 1.24 若函数 f 在某点 x_0 的任意阶 $Taylor$ 多项式均恒等于 0, 是否可推出 $f(x) \equiv 0$?(参考例题 6.2.4 的结论.

解 不能, 反例 (详细见谢惠民上册 P169-170 例题 6.2.4):

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}, f^{(n)}(0) = 0$$



练习 1.25 设 f 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数,$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_4$, 且存在常数 $C \ge 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $x \in [-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)| \le n!C^n$. 证明:$f(x) \equiv 0$.

证明 若 $C < 1$, 则 $\forall x \in [-1,1]$, 由 $Taylor$ 定理可知, 存在 $\theta_1 \in (0,1)$, 使得

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + \frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant C^{n+1}$$

上式对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都成立, 令 $n \to +\infty$, 则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [-1,1]$.

若 $C \ge 1$, 则对 $\forall x \in (-\frac{1}{2C}, \frac{1}{2C}), \forall k \in \mathbb{N}$, 根据 $Taylor$ 定理可知, 存在 $\theta_2 \in (0,1)$, 使得

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sum_{i=k}^{n+k}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + \frac{f^{(n+k)}(\theta_2 x)}{(n+k)!}x^{n+k}\right| = \left|\frac{f^{(n+k)}(\theta_2 x)}{(n+k)!}x^{n+k}\right| \leqslant C^{n+k}\frac{1}{(2C)^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+k}}$$

上式对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 令 $n \to +\infty$, 则 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall x \in (-\frac{1}{2C}, \frac{1}{2C}), \forall k \in \mathbb{N}$. 根据 $f^{(k)}$ 的连续性可知,$f^{(k)}(-\frac{1}{2C}) = f^{(k)}(\frac{1}{2C}) = 0$. 故 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall x \in [-\frac{1}{2C}, \frac{1}{2C}], \forall k \in \mathbb{N}$.

构造数集

$$A = \left\{\alpha \in [-1,0) \,|\, f^{(n)}(x) \equiv 0, \forall x \in [\alpha,0], \forall n \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{\beta \in (0,1] \,|\, f^{(n)}(x) \equiv 0, \forall x \in [0,\beta], \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

显然数集 A,B 有界. 根据已证结论可知,$-\frac{1}{2C} \in A, \frac{1}{2C} \in B$, 故 $A,B \neq \varnothing$. 由确界存在定理可知, 数集 A,B 都存在上、下确界. 设 $a = inf\ A, b = sup\ B$, 则根据已证结论可知,$-1 \le a < b \le 1$.

我们断言 $a \in A, b \in B$, 先证 $b \in B$. 由 $b = sup\ B$ 可知, 对 $\forall 0 < \beta_1 < b$, 都存在 $\beta_1 < \beta_0 < b$, 使得 $\beta_0 \in B$. 再根据数集 B 的定义可知,$\beta_1 \in B$. 从而对 $\forall 0 < \beta_1 < b$, 都有 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall x \in [0,\beta_1], \forall k \in \mathbb{N}$. 于是对 $\forall x \in (0,b)$, 都有 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

进而, 由 $f^{(k)}(x), \forall k \in \mathbb{N}$ 的连续性可知

$$f^{(k)}(b) = \lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

因此,$\forall x \in (0, b]$, 都有 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall k \in \mathbb{N}$. 故 $b \in B$, 同理可证 $a \in A$.

我们再断言必有 $a = -1, b = 1$. 先证 $b = 1$. 若 $b < 1$, 取 $\delta = \min\left\{\frac{1}{2C}, 1 - b\right\}$, 则 $\forall x \in [b, b + \delta], \forall k \in \mathbb{N}$, 根据 *Taylor* 定理可知, 存在 $\theta_0 \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{i=k}^{n+k} \frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i + \frac{f^{(n+k)}(b + \theta_0(x-b))}{(n+k)!}(x-b)^{n+k}\right| \\
&= \left|\frac{f^{(n+k)}(b + \theta_0(x-b))}{(n+k)!}(x-b)^{n+k}\right| \\
&\leqslant C^{n+k}\delta^{n+k} \leqslant C^{n+k}\frac{1}{(2C)^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+k}}
\end{aligned}$$

上式对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 令 $n \to +\infty$, 则 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall x \in [b, b + \delta]$. 又因为我们已经证得对 $\forall x \in (0, b]$, 都有 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall k \in \mathbb{N}$, 所以对 $\forall x \in (0, b+\delta]$, 都有 $f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall k \in \mathbb{N}$. 故 $b+\delta \in B$, 这与 $b = sup\ B$ 矛盾. 因此,$b = 1$. 类似可证 $a = -1$. 从而根据数集 A, B 的定义可知

$$f^{(k)}(x) \equiv 0, \forall x \in [-1, 1], \forall k \in \mathbb{N}$$

综上可知,$f(x) \equiv 0, x \in (-1, 1)$.

练习 1.26 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得成立

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

笔记 已知插值点条件:$f(a), f(b), f'(a) = f'(b) = 0$. 由插值定理可知, 插值多项式为 3 次, 余项为 4 阶导数. 但题目条件只有 f 二阶可微, 微分条件不够, 因此, 需要分段插值 (靠近哪边就在哪边插值). 又因为没有其它约束条件, 所以需要找一个公共点能同时在两边都能插值并且能据此推出结论.(显然这个公共点为 $\frac{a+b}{2}$)

注 f 关于同一个插值点的不同阶导数运用插值定理得到的多项式实际上就是 f 在该点的 *Taylor* 展开公式, 因此 *Taylor* 定理实际上就是插值定理的一个特例.

证明 证法一: 根据带 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 定理, 将 $f(x)$ 在 a, b 点处分别展开并代入 $x = \frac{a+b}{2}$ 可知, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$, 使得

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

两式相减可得

$$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b) - f(a)] = \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \leqslant \frac{|f''(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|}{2} \leqslant \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

取 $\xi = \xi_i$, 其中 $|f''(\xi_i)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, 则有

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

证法二 (插值定理和 **K** 值法): 根据插值定理,$f(x)$ 分别代入插值点 $f(a), f'(a) = 0$ 和 $f(b), f'(b) = 0$, 并代入 $x = \frac{a+b}{2}$ 可知, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$, 使得

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

两式相减可得

$$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b) - f(a)] = \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \leqslant \frac{|f''(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|}{2} \leqslant \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

取 $\xi=\xi_i$, 其中 $|f''(\xi_i)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$, 则有

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

练习 1.27 (1) 设 f 在 (a,b) 上可微. 试问对每个点 $\xi\in(a,b)$, 是否一定存在两个点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$$

(2) 设 f 在 (a,b) 上可微, 且在某点 $\xi\in(a,b)$ 处有 $f''(\xi)>0$. 证明: 存在两个点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得成立

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$$

笔记 思路分析: (2) 中要证结论等价于: 存在两个点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得成立

$$\begin{aligned}
&f'(\xi)(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)\\
\Leftrightarrow\ &f(\xi)(x_2-\xi)-f'(\xi)(x_1-\xi)=f(x_2)-f(x_1)\\
\Leftrightarrow\ &f(x_1)-f'(\xi)(x_1-\xi)=f(x_2)-f'(\xi)(x_2-\xi)
\end{aligned}$$

根据题目条件和 *Taylor* 定理, 我们构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)-\varepsilon=f(x)-f'(\xi)(x-\xi)-f(\xi)-\varepsilon$, 则原结论等价于证明: 存在两个点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得成立 $GF(x_1)=F(x_2)=C$, 其中 C 某一常数. 再根据介值定理或零点存在定理找到符合条件的 x_1,x_2 即可.

证明 (1) 不一定, 反例: $f(x)=x^3$ 在 $(-1,1)$. 对 $\xi=0,\forall x_1,x_2\in(-1,1)$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}>0=f'(\xi)$$

(2) 因为 $f''(x)>0$, 根据导数定义和极限的局部保号性可知, 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in(\xi-\delta,\xi)$, 有 $f'(x)<f'(\xi)$. 以及 $\forall y\in(\xi,\xi+\delta)$, 有 $f'(x)>f'(\xi)$. 在 $(\xi-\delta,\xi)$ 和 $(\xi,\xi+\delta)$ 中任取固定点 x_1 和 y_1. 由 Taylor 定理, 分别将 $f(x_1)$ 和 $f(y_1)$ 在点 ξ 处展开, 从而存在 $x_0\in(x_1,\xi),y_0\in(\xi,y_1)$, 使得

$$\begin{aligned}
f(x_1)&=f(\xi)+f'(x_0)(x_1-\xi)\\
f(y_1)&=f(\xi)+f'(y_0)(y_1-\xi)
\end{aligned}$$

令 $g(x)=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$, 则

$$\begin{aligned}
f(x_1)-g(x_1)&=[f'(x_0)-f'(\xi)](x_1-\xi)>0\\
f(x_2)-g(x_2)&=[f'(y_0)-f'(\xi)](y_1-\xi)>0
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon=\min\{\frac{f(x_1)-g(x_1)}{2},\frac{f(y_1)-g(y_1)}{2}\}$, 令 $F(x)=f(x)-g(x)-\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}
F(x_1)&\geqslant\frac{f(x_1)-g(x_1)}{2}>0\\
F(y_1)&\geqslant\frac{f(y_1)-g(y_1)}{2}>0\\
F(\xi)&=f(\xi)-\varepsilon=-\varepsilon<0
\end{aligned}$$

根据零点存在定理可知, 存在 $x_3\in(x_1,\xi),y_3\in(\xi,y_1)$, 使得

$$F(x_3)=F(y_3)=0$$

故

$$\begin{aligned}
&f(x_3)-g(x_3)=f(y_3)-g(y_3)\\
\Rightarrow\ &f(x_3)-f(\xi)(x_3-\xi)=f(y_3)-f'(\xi)(y_3-\xi)\\
\Rightarrow\ &\frac{f(x_3)-f(y_3)}{x_3-y_3}=f'(\xi)
\end{aligned}$$

注 用类似的方法可证当 $f''(\xi)<0$ 时命题也是成立的.

练习 1.28 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且 $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0$. 证明: 在 $x\geq a$ 时 $f'(x)\geq 0$.

证明 (反证法) 假设存在 $x_0 \in [a,+\infty)$, 使得 $f'(x_0) < 0$. 则对 $\forall x > x_0$, 都有 $f(x) < f(x_0)$. 根据 *Taylor* 定理可知, 对 $\forall x > x_1$, 都存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

任取 $x > x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, 则由上式可知

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < 0$$

这与 $\forall x \in [a,+\infty)$, 有 $f(x) \geq 0$ 矛盾.

练习 1.29 设 f 在 $(-1,1)$ 上 $n+1$ 阶可微,$f^{(n+1)}(0) \neq 0$,$n \in \mathbb{N}_+$, 在 $0 < |x| < 1$ 上有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \text{其中} 0 < \theta < 1$$

证明:$\lim\limits_{\theta \to 0} \theta = \dfrac{1}{n+1}$.

证明 根据题设可知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \text{其中} 0 < \theta < 1$$

从而

$$\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{n!}{x^{n+1}}\left[f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} - \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right] \tag{1.16}$$

由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式可知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

将其代入(1.16)式得

$$\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{n!}{x^{n+1}}\left[\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)\right] = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} + \frac{n! \cdot o\left(x^{n+1}\right)}{x^{n+1}}$$

两边同时令 $x \to 0$, 再结合导数定义可得

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) \cdot \lim_{x\to 0}\theta = \lim_{x\to 0}\theta \cdot \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{\theta x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} + \frac{n! \cdot o\left(x^{n+1}\right)}{x^{n+1}}\right] = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \end{aligned}$$

又由于 $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$.

练习 1.30 证明: 在 $|x| \leq 1$ 时存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $arcsinx = \dfrac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$, 且有 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

证明 由 *Lagrange* 中值定理可得, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$\arcsin x - \arcsin 0 = \frac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$$

由上式解得

$$\theta = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2}}{x}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2}}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\arcsin^2 x-x^2}}{x\arcsin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^2-x^2}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt3}\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt3}$.

✍ **练习 1.31** 设 f 在 $O_\delta(x_0)$ 上 n 阶可微, 且 $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq0$.

证明: 当 $0<|h|<\delta$ 时, 成立 $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),0<\theta<1$, 且成立 $\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

证明 由 *Lagrange* 中值定理可得, 当 $0<|h|<\delta$ 时, 成立

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),0<\theta<1$$

由带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式分别将 $f(x_0+h),f'(x_0+\theta h)$ 在 x_0 处展开得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$$

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o\left(h^{n-1}\right)$$

对比上面两等式可得

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}h^n\left(\theta^{n-1}-\frac1n\right)=o\left(h^n\right)$$

$$\Rightarrow\theta^{n-1}=\frac{(n-1)!}{f^{(n)}(x_0)}\cdot\frac{o\left(h^n\right)}{h^n}+\frac1n$$

上式两边同时令 $h\to0$, 得 $\lim\limits_{h\to0}\theta^{n-1}=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{(n-1)!}{f^{(n)}(x_0)}\cdot\dfrac{o\left(h^n\right)}{h^n}+\dfrac1n\right]=\dfrac1n$, 故 $\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

✍ **练习 1.32** 设有 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$a_1-\frac13a_2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$$

证明: 方程 $a_1\cos x+a_2\cos3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中至少有一个根.

证明 令 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2}{3}\sin3x+\cdots+\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$, 则

$$f(0)=0=a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

根据 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\xi)=0$. 故原方程 $a_1\cos x+a_2\cos3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中至少有一个根.

✍ **练习 1.33** 设 $c\neq0$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+c=0$ 至少有两个根不是实根.

证明 (反证法) 假设原方程至多只有一个根不是实根, 则由虚根的成对定理可知, 原方程不存在虚根, 即原方程的 5 个根均为实根. 再由 *Vieta* 定理可知,a,b,c 都是实数. 令 $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+c$, 下面分情况讨论:

(i) 若 $f(x)$ 有 5 个不同的实根, 则由 *Rolle* 中值定理可知,$f'(x)$ 存在 4 个互异的实根. 而 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$. 显然 0 是 $f'(x)$ 的二重根, 这与 $f'(x)$ 存在 4 个互异的实根矛盾.

(ii) 若 $f(x)$ 只含有二重根不含三重根, 则

① 当 $f(x)$ 只含有一个二重根时, 不妨设 $f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, 其中 x_1,x_2,x_3,x_4 两两互异. 则 x_1 一定是 $f'(x)$ 的一个实根. 又因为 $f(0)=c\neq0$, 所以 $x_1,x_2,x_3,x_4\neq0$. 于是 x_1 为 $f'(x)$ 的一个非零实根. 又由 *Rolle* 中值定理可知,$f'(x)$ 存在 3 个互异的实根且都不等于 x_1. 从而 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个. 而由 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$ 可知,$f'(x)$ 最多只含有 2 个非零实根. 这与 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个矛盾.

② 当 $f(x)$ 含有两个二重根时, 不妨设 $f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)$, 其中 x_1,x_2,x_3 两两互异. 则 x_1,x_2

一定是 $f'(x)$ 的两个实根. 又因为 $f(0)=c\neq 0$, 所以 $x_1,x_2,x_3\neq 0$. 于是 x_1,x_2 为 $f'(x)$ 的两个非零实根. 又由 *Rolle* 中值定理可知,$f'(x)$ 存在 2 个互异的实根且都不等于 x_1,x_2 从而 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个. 而由 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$ 可知,$f'(x)$ 最多只含有 2 个非零实根. 这与 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个矛盾.

(iii) 若 $f(x)$ 含有三重根但不含四重根, 则

① 当 $f(x)$ 含有一个三重根和一个二重根时, 不妨设 $f(x)=(x-x_1)^3(x-x_2)^2$, 其中 x_1,x_2 两两互异. 则由 $f(0)=c\neq 0$ 可知,$x_1,x_2\neq 0$. 从而 x_1 是 $f'(x)$ 的非零二重实根,x_2 是 $f'(x)$ 的非零一重实根. 而由 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$ 可知,$f'(x)$ 最多只含有 2 个非零实根. 这与 $f'(x)$ 含有 3 个非零实根矛盾.

② 当 $f(x)$ 只含有一个三重根时, 不妨设 $f(x)=(x-x_1)^3(x-x_2)(x-x_3)$, 其中 x_1,x_2,x_3 两两互异. 则 x_1 一定是 $f'(x)$ 的一个实根. 又因为 $f(0)=c\neq 0$, 所以 $x_1,x_2,x_3\neq 0$. 于是 x_1 为 $f'(x)$ 的非零二重实根. 又由 *Rolle* 中值定理可知,$f'(x)$ 存在 2 个互异的实根且都不等于 x_1. 从而 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个. 而由 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$ 可知,$f'(x)$ 最多只含有 2 个非零实根. 这与 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个矛盾.

(iv) 若 $f(x)$ 含有四重根, 则

不妨设 $f(x)=(x-x_1)^4(x-x_2)$, 则由 $f(0)=c\neq 0$ 可知,$x_1,x_2\neq 0$. 从而 x_1 是 $f'(x)$ 的非零三重实根. 而由 $f'(x)=x^2(5x^2+4ax+3b)$ 可知,$f'(x)$ 最多只含有 2 个非零实根. 这与 $f'(x)$ 的非零实根至少有 3 个矛盾.

综上可知, 原方程至少有两个根不是实根.

练习 1.34 设 $a\neq 0$, 证明: 方程 $x^{2n}+a^{2n}=(x+a)^{2n}$ 只有一个实根 $x=0$.

证明 不妨设 $a=1$, 否则用 ax 代替 x.

当 $x>0$ 时, 我们有

$$(x+1)^{2n}=x(x+1)^{2n-1}+(x+1)^{2n-1}>x\cdot x^{2n-1}+1^{2n-1}=x^{2n}+1$$

当 $x<0$ 时, 我们有

$$(x+1)^{2n}=x(x+1)^{2n-1}+(x+1)^{2n-1}<x\cdot x^{2n-1}+1^{2n-1}=x^{2n}+1$$

而当 $x=0$ 时, 方程两边相等. 因此, 方程只有一个实根 $x=0$.

练习 1.35 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且满足条件

$$f(a)f(b)>0,f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$$

证明: 对每个实数 k, 在 (a,b) 内存在点 ξ, 使成立 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

证明 对每个实数 k, 设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$, 则由题目条件可知,$F\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 并且

$$F(a)F(b)>0,F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$$

由零点存在定理可知, 存在 $\eta_1\in(a,\dfrac{a+b}{2}),\eta_2\in(\dfrac{a+b}{2},b)$, 使得

$$F(\eta_1)=f(\eta_2)=0$$

再由 *Rolle* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$, 使得

$$F'(\xi)=\frac{f'(\xi)-kf(\xi)}{e^{k\xi}}$$

故对每个实数 k, 在 (a,b) 内存在点 ξ, 使成立 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

练习 1.36 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_ix}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为互异实数,$c_1,\cdots,c_n$ 不同时为 0. 证明 f 的零点个数小于 n.

证明 数学归纳法: 当 $n=1$ 时,$f(x)=c_0e^{\lambda_0x}$, 其中 $c_0\neq 0$. 此时,f 的零点个数小于 1, 故结论对 $n=1$ 成立.

假设结论已对 $n-1$ 成立, 考虑 n 的情形.

设 $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_ix}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为互异实数,$c_1,\cdots,c_n$ 不同时为 0. 再设 $g(x)=f(x)e^{-\lambda_nx}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}c_ie^{\lambda_ix}+c_n$, 则 $g(x)$ 和 $f(x)$ 有相同的零点集. 假设 $f(x)$ 有 n 个不同的零点, 则 $g(x)$ 也有 n 个不同的零点. 根据 *Rolle* 中值定理可知,$g'(x)$ 有 $n-1$ 个不同的零点. 但 $g'(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}c_i(\lambda_i-\lambda_n)e^{\lambda_ix}$, 而且 $\lambda_1-\lambda_n,\lambda_2-\lambda_n,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_n$ 是 $n-1$

个两两互异的非零实数, 由此又可得,$c_1(\lambda_1-\lambda_n), c_2(\lambda_2-\lambda_n), \cdots, n-1(\lambda_{n-1}-\lambda_n)$ 不同时为零. 故根据归纳假设可知,$g'(x)$ 的零点个数小于 $n-1$. 这与 $g(x)$ 也有 n 个不同的零点矛盾. 所以假设不成立, 从而 $f(x)$ 的零点个数小于 n, 即结论对 n 成立. 由数学归纳法知, 原结论成立.

练习 1.37 (1) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微,$f(0)=0, f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立
$$2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$
(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微,$f(0)=0, f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 证明: 对每个 $\alpha\neq 0$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立
$$|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

笔记 由 $f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 可以自然想到
$$\begin{aligned}&|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\\ \Leftrightarrow\ &|\alpha| f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)\\ \Leftrightarrow\ &|\alpha| f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0\end{aligned}$$
因此, 我们容易想到构造辅助函数 $F(x)=[f(x)]^{|\alpha|}f(1-x)$. 从而
$$\begin{aligned}F'(x)&=|\alpha|[f(x)]^{|\alpha|-1}f'(x)f(1-x)-[f(x)]^{|\alpha|}f'(1-x)\\ &=[f(x)]^{|\alpha|-1}[|\alpha| f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)]\\ &=[f(x)]^{|\alpha|}f(1-x)\left[|\alpha|\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}\right]\end{aligned}$$
就是我们想要的形式. 再利用 *Rolle* 中值定理就能得到证明.

证明 (1) 是 (2) 的特殊情形, 我们只证 (2).

设 $F(x)=[f(x)]^{|\alpha|}f(1-x)$, 则由 $f(0)=0$ 可知,$F(0)=F(1)=0$. 又 $f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 从而
$$\begin{aligned}F'(x)&=|\alpha|[f(x)]^{|\alpha|-1}f'(x)f(1-x)-[f(x)]^{|\alpha|}f'(1-x)\\ &=[f(x)]^{|\alpha|-1}[|\alpha| f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)]\\ &=[f(x)]^{|\alpha|}f(1-x)\left[|\alpha|\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}\right]\end{aligned}$$
根据 *Rolle* 中值定理可得,$\exists\xi\in(0,1)$ $s.t.$ $F'(\xi)=0$. 再结合 $f(\xi), f'(1-\xi)\neq 0$, 可知
$$|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

练习 1.38 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 但不是线性函数, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使成立
$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\eta).$$

结论 若已知 $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 则我们有一个**解决中值问题常用的辅助函数**:
$$\boldsymbol{F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$
即用 $f(x)$ 减去其在区间 $[a,b]$ 上的两个端点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 连线所构成的线性函数.

且 $F(x)$ 具有如下基本性质:

1.$F\in C[a,b]\cap D(a,b)$;

2.$F(a)=F(b)=0$;

3.$F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

笔记 利用上述辅助函数, 原命题等价于证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)>0, F'(\eta)<0$. 这种一阶导数问题我们联想到 *Lagrange* 中值定理, 但是如果只使用 $F(x)$ 的两个端点 a,b, 结合 *Lagrange* 中值定理, 我们最多只能得到一个使得 $F(x)$ 函数值为 0 的中值点, 得不到原命题. 因此, 我们需要在 (a,b) 内再找一点 x_0, 并且 $F(x_0)\neq 0$, 否则得不到原命题的不等号. 又因为 $f(x)$ 不是线性函数, 所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为 0. 从而一定存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $F(x_0)\neq 0$. 再分别在 $(a,x_0),(x_0,b)$ 上使用 *Lagrange* 中值定理即可得到原命题.

证明 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则 $F(a)=F(b)=0$.

又由 $f(x)$ 不是线性函数可知,$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零. 从而一定存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $F(x_0)\neq 0$.

不妨设 $F(x_0)>0$, 则由 *Lagrange* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(a,x_0),\eta\in(x_0,b)$, 使得

$$F'(\xi)=\frac{F(x_0)-F(a)}{x_0-a}=\frac{F(x_0)}{x_0-a}>0$$
$$F'(\eta)=\frac{F(x_0)-F(b)}{x_0-b}=\frac{F(x_0)}{x_0-b}<0$$

再结合 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 可得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\eta).$$

练习 1.39 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微,$f(a)=f(b)=0$, 且在某点 $c\in(a,b)$ 处有 $f(c)>0$.

证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

证明 根据 *Lagrange* 中值定理可知, 存在 $x_1\in(a,c),x_2\in(c,b)$, 使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0$$
$$f'(x_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(c)}{c-b}<0$$

又因为 $f\in D[a.b]$, 所以对 $f'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上使用 *Lagrange* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(x_1)-f'(x_2)}{x_1-x_2}<0.$$

练习 1.40 解决以下问题:

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可微, 且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明: 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上五阶可微, 且有 $f(1/3)=f(2/3)=f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, 证明: 对每个 $x\in[0,1]$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 证明: 对每个 $c\in(a,b)$, 有 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

笔记 K 值法 (待定常数法) 的典型应用.

证明 (1)

(2)

(3)

(4)

练习 1.41 设 $0<a<b$,f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明 证法一 (利用 *Cauchy* 中值定理): 由 *Cauchy* 中值定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

故结论得证.

笔记 令 $k=\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

Step1: 考虑微分方程 $y-xy'=k$, 利用一阶线性微分方程常数变易法解得 $y=k+cx$.

Step2: 分离常数 $c=\frac{y-k}{x}$, 常数变易得构造函数 $c(x)=\frac{f(x)-k}{x}$.

证法二 (解微分方程构造辅助函数): 令 $k=\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$, 构造辅助函数 $F(x)=\frac{f(x)-k}{x}$, 则 $F(a)=F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 由 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)+k}{x^2}=0.$$

从而

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=k=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

练习 1.42 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上 n 次可微, 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n)\end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

证明 记 $\lambda=\frac{n!}{\prod_{i>j}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n)\end{vmatrix}$, 并构造函数

$$g(t)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & t^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(t)\end{vmatrix}-\frac{\lambda}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1}).$$

则 $g(x_0)=g(x_1)=\cdots=g(x_n)=0$. 反复利用 *Rolle* 中值定理可得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g^{(n)}(t)=0$.

又由于

$$g^{(n)}(t)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1^{(n)} \\ x_0 & x_1 & \cdots & (t)^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & \left(t^{n-1}\right)^{(n)} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f^{(n)}(t)\end{vmatrix}-\lambda\prod_{i>j}(x_i-x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ x_0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & 0 \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f^{(n)}(t)\end{vmatrix}-\lambda\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

$$=f^{(n)}(t)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}-\lambda\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

故 $g^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&\cdots&x_{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_0^{n-1}&x_1^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}-\lambda\prod_{i>j}(x_i-x_j)=0.$. 即

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_0^{n-1}&x_1^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\\f(x_0)&f(x_1)&\cdots&f(x_n)\end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

✍ **练习 1.43** 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$, 证明:$f$ 在 $[a,+\infty)$ 上非一致连续.

证明 证法一: 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 则对 $\forall N>0,\exists X>0$, 使得当 $a>X$ 时, 有 $f'(a)>\max\{N,1\}$.

从而由 *Lagrange* 中值定理可知,$\exists\xi\in(a,a+1)$, 使得

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f'(\xi)>N.$$

$$\text{且}f(a+1)-f(a)=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f'(\xi)>1.$$

根据一致连续的充要条件可知,f 在 $[a,+\infty)$ 上非一致连续.

证法二 (反证): 假设 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists h>0$, 使得当 $x,y\in[a,+\infty)$ 且 $|x-y|<h$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 固定 ε,h. 从而对 $\forall x_0\in[a,+\infty)$, 我们有 $|f(x_0)-f(x_0+h)|<\varepsilon$.

于是由 *Lagrange* 中值定理可知,$\exists\xi\in(x_0,x_0+h)$, 使得

$$|f'(\xi)|=|\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}|<\frac{\varepsilon}{h}$$

即 $-\frac{\varepsilon}{h}\leqslant f'(\xi)\leqslant\frac{\varepsilon}{h}$. 令 $x_0\to+\infty$, 此时 $\xi\to+\infty$. 则有 $-\frac{\varepsilon}{h}\leqslant\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)\leqslant\frac{\varepsilon}{h}$. 这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$ 矛盾.

✍ **练习 1.44** 设 f 在 $(0,a]$ 上可微, 又存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明:$f$ 在 $(0,a]$ 上一致连续.

证明 根据条件可设 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)=l<\infty$. 对 $\forall x,y\in(0,a]$ 且 $x\neq y$. 由 *Cauchy* 中值定理可知,$\exists\xi\in(x,y)$, 使得 $2\sqrt{\xi}f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

令 $x,y\to0^+$, 此时 $\xi\to0^+$. 则有 $\lim\limits_{\substack{x,y\to0^+\\x\neq y}}\dfrac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=2\lim\limits_{\xi\to0^+}\sqrt{\xi}f'(\xi)=2l$.

从而 $\lim\limits_{\substack{x,y\to0^+\\x\neq y}}|f(x)-f(y)|=2l\lim\limits_{\substack{x,y\to0^+\\x\neq y}}|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=0$. 由 *Cauchy* 收敛准则, 可知 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在. 根据Cantor 定理在开区间上的推广可知 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续.

✍ **练习 1.45** 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 故根据 *L'Hospital* 法则则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

✍ **练习 1.46** 对分别满足以下两个条件的 f, 设已知 $f(1)=1$, 求 $f(2)$:

(1) $xf'(x)+f(x)=0,\forall x>0$,

(2) $xf'(x)-f(x)=0,\forall x>0$.

证明 (1) 令 $g(x)=xf(x)$, 则 $g'(x)=xf\prime(x)+f(x)=0,\forall x>0$.

从而 $g'(x)=0,\forall x>0$. 于是 $xf(x)=g(x)\equiv C$. 因此 $f(x)=\dfrac{C}{x}$.

再将 $f(1)=1$ 代入, 可得 $C=1$. 故 $f(2)=\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0,\forall x>0$.

从而 $g'(x)=0,\forall x>0$. 于是 $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)\equiv C$. 因此 $f(x)=Cx$.

再将 $f(1)=1$ 代入, 可得 $C=1$. 故 $f(2)=2C=2$.

练习 1.47 设当 $x\in[0,a]$ 时有 $|f''(x)|\leqslant M$. 又已知 f 在 $(0,a)$ 中取到最大值. 证明: $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

证明 根据已知条件可设 $f(x_0)=\max\limits_{x\in(0,a)}f(x),x_0\in(0,a)$. 则 $f'(x_0)=0$.

根据 $Taylor$ 中值定理, 可知存在 $\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,a)$, 使得

$$f'(0)=f'(x_0)+f''(\xi)(-x_0)=-f''(\xi)x_0, f'(a)=f'(x_0)+f''(\eta)(a-x_0)=f''(\eta)(a-x_0).$$

于是

$$|f'(0)|+|f'(a)|=|f''(\xi)x_0|+|f''(\eta)(a-x_0)|\leqslant Mx_0+M(a-x_0)=Ma.$$

得证.

练习 1.48 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上无限次可微,$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}$, 计算 $f^{(k)}(0),\forall k\in\mathbb{N}_+$.

笔记 证法一思路:根据函数的光滑性直接将其两边在 $x=0$ 处 $Taylor$ 展开再比较系数就可以直接得到结果.

证法二思路:由 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ 可以想到 $f(x)$ 的形式可能与 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 类似. 而我们根据 f 的连续性再结合导数定义不难得到 $f(0)=1,f'(0)=\left.(\dfrac{1}{1+x^2})'\right|_{x=0}=0$, 于是我们猜想 $f^{(k)}(0)=\left.(\dfrac{1}{1+x^2})^{(k)}\right|_{x=0}$, 因此我们构造辅助函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{1+x^2}$. 只需要证明 $g^{(k)}(0)=0,\forall k\in\mathbb{N}_+$ 即可. 又因为 $g^{(k)}(0)=0$ 要对任意正整数 k 都成立, 所以自然想到使用数学归纳法, 再利用反证法结合 $Taylor$ 中值定理就能得到证明.

(证明类似问题的想法: 先根据已知的函数点列猜想函数在这些点附近的具体形式, 再尝试证明函数在这些点附近的函数值 (导数值) 与我们猜想的具体函数的函数值 (导数值) 相等. 证明方式就是利用两者作差构造辅助函数, 然后只需证明辅助函数在这些点附近的函数值 (导数值) 为 0 即可)

注 本题的条件可以削弱为对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $f^{(k)}(0)$ 存在. 结论也成立.

证明 证法一:由于 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 因此根据 $Taylor$ 中值定理分别将 $f(x),\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $\dfrac{1}{n}$ 处展开可得

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots$$
$$\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{n^{2m}}+\cdots$$

其中 $k,m\in\mathbb{N}_+$. 又因为 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}$, 所以比较上面两式系数, 可得 $f^{(k)}(0)=\begin{cases}k!, & k\ mod\ 4=0\\ 0, & k\text{为奇数}\\ -k!, & k\ mod\ 4=2\end{cases}=k!\cos\dfrac{k\pi}{2}$.

证法二:设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $g\in C^\infty(\mathbb{R})$, 且 $g(\dfrac{1}{n})=0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 因此当 $k=1$ 时, 有 $g(0)=\lim\limits_{n\to\infty}g(\dfrac{1}{n})=0$. (数学归纳法) 假设 $g(0)$,$g'(0)$,$\cdots$,$g^{(k-1)}(0)=0$, 考虑 $g^{(k)}(0)$,(反证) 假设 $g^{(k)}(0)=c\neq0$.

则由 $Taylor$ 中值定理, 可知对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有

$$g(x)=\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^{k+1})=\frac{c}{k!}x^k+o(x^{k+1}).$$

于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{c}{k!}+o(x))=\dfrac{c}{k!}\neq0$. 进而由 $Heine$ 归结原理, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^kg(\dfrac{1}{n})=\dfrac{c}{k!}\neq0$. 但是对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $g(\dfrac{1}{n})=0$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^kg(\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ 矛盾. 故 $g^{(k)}(0)=0$. 因此由数学归纳法, 可知 $g^{(k)}(0)=0,\forall k\in\mathbb{N}_+$.

由此可得,$f^{(k)}(0)=\left.(\dfrac{1}{1+x^2})^{(k)}\right|_{x=0}=k!\cos\dfrac{k\pi}{2},\forall k\in\mathbb{N}_+$.

练习 1.49 证明: 方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

笔记 证法二中倒代换的目的是使得作变换后多项式的系数与 x 的次数相匹配.(原方程左式各项的系数与 x 的次数顺序相互颠倒)

证法三中的均值不等式放缩是: $x^{2k-2}+x^{2k}\geq2\sqrt{x^{4k-2}}=2x^{2k-1}$. (分项放缩是指将原方程左式的正系数项和负系数项分开, 再比较两者之间的大小)

证法四中的凑平方技巧需要积累.

证明 证法一 (错位相减求和):设 $p(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1$. 则当 $x\leq 0$ 时, 显然有 $p(x)>0$. 当 $x>0$ 时, 我们有

$$p(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1, xp(x)=x^{2n+1}-2x^{2n}+3x^{2n-1}-\cdots-2nx^2+(2n+1)x.$$

上面两式相加, 可得

$$(1+x)p(x)=x^{2n+1}-x^{2n}+x^{2n-1}-\cdots-x^2+x+2n+1=\frac{x(1+x^{2n+1})}{1+x}+2n+1.$$

从而

$$p(x)=\frac{x(1+x^{2n+1})}{(1+x)^2}+\frac{2n+1}{1+x}>0.$$

综上所述, 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $p(x)>0$. 故方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

证法二 (倒代换):: 设 $p(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1$. 则当 $x\leq 0$ 时, 显然有 $p(x)>0$. 因此原方程无非正实根.

当 $x>0$ 时, 令 $x=\frac{1}{y}$, 即 $y=\frac{1}{x}>0$. 将其代入原方程, 可得

$$(2n+1)y^{2n}-2ny^{2n-1}+(2n-1)y^{2n-2}-\cdots-2y+1=0.$$

令 $f(y)=y^{2n+1}-y^{2n}+y^{2n-1}-\cdots-y^2+y=\frac{y(1+y^{2n+1})}{1+y}$,$y>0$. 又因为 $f'(y)=(2n+1)y^{2n}-2ny^{2n-1}+(2n-1)y^{2n-2}-\cdots-2y+1$,$y>0$. 所以原方程无正实根等价于 $f'(y)=\frac{d}{dy}\frac{y(1+y^{2n+1})}{1+y}=\frac{1+(2n+2)y^{2n+1}+(2n+1)y^{2n+2}}{(1+y)^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点.

而对 $\forall y>0$, 都有 $f'(y)=\frac{1+(2n+2)y^{2n+1}+(2n+1)y^{2n+2}}{(1+y)^2}>0$. 故 $f'(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点. 因此原方程无正实根.

综上所述, 方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

证法三 (分项放缩):注意到

$$\begin{aligned}
&2x^{2n-1}+4x^{2n-3}+\ldots+2nx=\sum_{k=1}^{n}2(n+1-k)x^{2k-1}\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(x^{2k-2}+x^{2k}\right)=n+\sum_{k=2}^{n}(n+1-k)x^{2k-2}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)x^{2k}\\
&=n+\sum_{k=1}^{n}(n-k)x^{2k}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)x^{2k}=n+\sum_{k=1}^{n}\left[(n+1-k)+(n-k)\right]x^{2k}\\
&\leqslant 2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2n+1-2k)x^{2k}=2n+1+(2n-1)x^2+\ldots+x^{2n}.
\end{aligned}$$

故 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1>0$. 因此方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

证法四 (凑平方):注意到

$$\begin{aligned}
&x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1\\
&=(0+1)x^{2n}-2x^{2n-1}+(1+2)x^{2n-2}-\cdots+((n-1)+n)x^2-2nx+(n+(n+1))\\
&=\left(x^n-x^{n-1}\right)^2+2\left(x^{n-1}-x^{n-2}\right)^2+\cdots+n(x-1)^2+(n+1)\geqslant n+1>0.
\end{aligned}$$

因此方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.(并且当且仅当 $x=1$ 时方程左边取到最小值 $n+1$).

练习 1.50 设 f 在 $[a,b]$ 上可微,$f'(a)=f'(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

笔记 (1) 本题辅助函数 $g(x)$ 的构造是通过解微分方程, 再常数变易得到的, 解出来的函数实际上是 $C(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

显然 $C(x)$ 在 $x=a$ 处不连续可微, 因此我们需要构造分段函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leq b\\ f'(a), & x=a\end{cases}$, 这样才能使其满足在 $[a,b]$ 上连续可微.

(2)(实际上(1.17)式的化简利用的是分式不等式的变形技巧) (1.17)式的化简证明:

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ \Leftrightarrow\ & [f(x)-f(a)](b-a)<[f(b)-f(a)](x-a)\\ \Leftrightarrow\ & [f(x)-f(a)](b-x+x-a)<[f(b)-f(a)](x-a)\\ \Leftrightarrow\ & [f(x)-f(a)](b-x)+[f(x)-f(a)](x-a)<[f(b)-f(a)](x-a)\\ \Leftrightarrow\ & [f(x)-f(a)](b-x)<[f(b)-f(a)+f(a)-f(x)](x-a)\\ \Leftrightarrow\ & [f(x)-f(a)](b-x)<[f(b)-f(x)](x-a)\\ \Leftrightarrow\ & \frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\end{aligned}$$

(1.17)式的目的就是凑出含有 $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ 的式子, 这样令 $x\to b^-$ 就可以得到 $f'(b)$. 就能进一步利用题目中的 $f'(a)=f'(b)$ 条件.

注 (1.17)式的化简也可以利用一个小技巧: 如果 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}>0$, 那么 $\dfrac{a-c}{b-d}>\dfrac{a}{b}$.

证: 设 $a=bm,c=dn$, 由假设 $m>n$, 则

$$\frac{a-c}{b-d}-\frac{a}{b}=\frac{bm-dn}{b-d}-m=\frac{d(m-n)}{b-d}>0.$$

故 $\dfrac{a-c}{b-d}>\dfrac{a}{b}$.

只要取对应的 a,b,c,d 就可得到(1.17)式.

证明 设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leq b\\ f'(a), & x=a\end{cases}$, 则 $g\in D[a,b]$.(反证) 假设 $g'(x)$ 在 (a,b) 无零点, 不妨设其恒正. 则由 $g(x)$ 的连续性可知,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增. 从而对 $\forall x\in(a,b)$, 就有

$$g(x)<g(b)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{1.17}$$

令 $x\to b^-$, 则有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq(b-a)f'(b)$. 于是就有

$$g(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'(b)=f'(a)=g(a).$$

这与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增矛盾. 故假设不成立. 因此一定存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$. 由于

$$g'(x)=\frac{(x-a)f'(x)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}.$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

结论 关于中值问题的一些总结

(1) 满足各种中值定理条件的中值问题:

1. 如果题目中需要证明的等式中不止一个部分含有所求中值点 ξ(例如本题), 那么证明这个问题的想法第一步一般都是先解微分方程, 再常数变易构造辅助函数 (注意: 这样构造出来的函数需要保证其可微性, 即可能需要在求解出来的函数的间断点处补充定义, 进而保证其可微性. 例如本题), 再根据构造的辅助函数进行证明. 后续可能的证明思路一般有两种:(i) 若已知某些点处的原函数值相同, 则直接用中值定理进行证明;(ii) 若不知道两个点及以上的原函数的值相同, 则可以通过分析函数性态找到中值点.(这里可能需要反证, 也可能分析函数性态后利用中值定理找到中值点)

2. 如果题目中需要证明的等式中只有最高阶导数部分含有中值点 (例如,$f(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$), 那么第一步一般都是利用 K 值法构造辅助函数, 再根据构造的辅助函数进行证明.

(2) 不满足各种中值定理条件的中值问题: 若题目条件满足推论1.3的条件, 则一般先构造出推论1.3中的辅助函数, 再使用反证法进行证明.

练习 1.51 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 又有 $c \in (a,b)$ 使成立 $f'(c)=0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

证明 证法一 (分析函数性态反证): 令 $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 则 $g \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 且 $g(a)=0$.

(反证) 假设 $g'(x)$ 在 (a,b) 上无零点, 则 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立. 不妨设 $g'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立, 则 $g(x)$ 在 (a,b) 上严格递增. 再结合 $g \in C[a,b]$, 可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增.

于是 $\dfrac{f(c)-f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}} = g(c) > g(a) = 0$. 又由 $g'(x) = \dfrac{f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 再结合 $f'(c)=0,c \in (a,b)$ 可知

$$g'(c) = \frac{-\frac{f(c)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{f(c)-f(a)}{e^{\frac{c}{b-a}}} = -\frac{1}{b-a} g(c) < 0.$$

这与 $g'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立矛盾. 故 $g'(x)$ 在 (a,b) 上至少存在一个零点. 即存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$g'(\xi) = \frac{f'(\xi) - \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{\xi}{b-a}}} = 0.$$

因此 $f'(\xi) - \dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

证法二 (利用中值定理正向证明):设 $g(x) = e^{-\frac{x}{b-a}}(f(x)-f(a))$, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 且 $g(a)=0,g(c)g'(c)<0$. 由拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi_0 \in (a,c)$, 使得

$$g'(\xi_0) = \frac{g(c)-g(a)}{c-a} = \frac{g(c)}{c-a}.$$

此时有 $g'(\xi_0)g'(c)<0$. 根据导函数的介值性, 存在 $\xi \in (\xi_0, c) \subset (a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$. 又由于

$$g'(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} \left(f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a} \right).$$

故 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

练习 1.52 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微,$f(a)=0,f(x)>0,\forall x \in [a,b]$, 证明: 对每个 $\alpha>0$, 存在 $x_1,x_2 \in (a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \alpha \frac{f'(x_2)}{f(x_2)}.$$

证明

练习 1.53

证明

练习 1.54

证明

练习 1.55

证明

练习 1.56

证明

练习 1.57

证明

练习 1.58

证明

练习 1.59

证明

练习 1.60

证明

✍ **练习 1.61**

证明

✍ **练习 1.62**

证明