0.1 函数构造类

0.1.1 单中值点问题 (一阶构造类)

例题 0.1

1. 设 $f\in C[0,2]\cap D(0,2)$ 满足 $f(0)=f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$. 则存在 $\xi\in(0,2)$ 使得
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
2. 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$, $f(0)=0$, 证明: 存在 $u\in(0,1)$, 使得
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$
3. 设 $f\in C[-1,2]\cap D(-1,2)$ 且有 $f(-1)=f(2)=-\dfrac{1}{2}$, $f(\dfrac{1}{2})=1$. 证明对任何实数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 都存在 $\xi\in(-1,2)$, 使得
$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

笔记 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

注

1. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\dfrac{2x-y}{x}$, 解得 $y=\dfrac{c}{x}+x$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=x(y-x)$, 常数变易得构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$.
2. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\dfrac{xy}{1-x}$, 解得 $y=\dfrac{ce^{-x}}{x-1}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=e^x(x-1)y$, 常数变易得构造函数 $c(x)=e^x(x-1)f(x)$.
3. **Step1** 考虑微分方程 $y'=\lambda\left[y-\dfrac{x}{2}\right]+\dfrac{1}{2}$, 解得 $y=ce^{\lambda x}+\dfrac{x}{2}$.
   Step2 分离常数 c 得 $c=\dfrac{y-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$, 常数变易得构造函数 $c(x)=\dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$.

证明

1. 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$ 及 $f\in C[0,2]$ 可知
$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=5\lim_{x\to1}(x-1)+2=2.$$
从而
$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5.$$
构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$, 我们求导得
$$c'(x)=f(x)-2x+xf'(x).\tag{1}$$
注意到
$$c(0)=0,c(1)=1,c(2)=-4.$$
于是由 Lagrange 中值定理得 $\alpha\in(0,1),\beta\in(1,2)$, 使得
$$c'(\alpha)=\frac{c(1)-c(0)}{1-0}=1,c'(\beta)=\frac{c(1)-c(2)}{1-2}=-5.$$
由导数介值定理知存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $c'(\xi)=0$. 由(1)知
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
这就完成了证明.
2. 构造 $c(x)=e^x(x-1)f(x)$, 则 $c(0)=c(1)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $u\in(0,1)$, 使得 $c'(u)=0$, 这恰好是
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$

3. 构造 $c(x)=\dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$. 注意到

$$c(-1)=0,c(2)=-\frac{3}{2e^{2\lambda}},c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

由零点定理知存在 $\theta\in(\frac{1}{2},2)$, 使得 $c(\theta)=0$. 再由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(-1,\theta)\subset(-1,2)$, 使 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

□

例题 0.2 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)>0,f(1)>0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

注 虽然本题直接考虑微分方程:$y'+3y^2=0$ 解出 y, 然后常数变易也不难得到构造函数. 但是下述证明的方法旨在介绍一种新的解决这类问题的方法.

笔记 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是要把部分 f 视为已知函数来构造, 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数. 考虑 $y'+3f^2y=0$. 解得 $y=ce^{-\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$, 分离变量得构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$.

证明 证法一: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0)>0,f(1)>0$, 我们知道 $f(x)>0,\forall x\in[0,\theta)\cup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$, 这就是一个矛盾! 于是存在 $\theta_1\neq\theta_2$, 使得 $f(\theta_1)=f(\theta_2)=0$. 现在就有 $c(\theta_1)=c(\theta_2)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

证法二: 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}[f'(x)+3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

从而 $c(\theta)=0$. 因为 $f(0),f(1)>0$, 所以 $c(0),c(1)>0$. 又由 $c\in C[0,1]$, 故 $c(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取到最大、最小值. 由于 $c(\theta)=0<c(0),c(1)$, 因此 $c(x)$ 只能在 $(0,1)$ 上可取到最小值, 即存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c(\xi)\leqslant c(x),\forall x\in[0,1]$. 由费马引理可知 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

□

例题 0.3 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$f'(\xi)=\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 核心想法: **分部积分转移导数, 但是需要控制非积分部分为零.**

注 $\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(6x^2-6x)'f(x)\mathrm{d}x$ 的原因: 我们希望利用分部积分后能够直接转移导数而没有多余部分, 因此我们待定 $\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)\mathrm{d}x$, 即 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 分部积分得到

$$\int_0^1(12x-6)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)'f(x)\mathrm{d}x=(ax^2+bx+c)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(ax^2+bx+c)f'(x)\mathrm{d}x.$$

我们希望 $(ax^2+bx+c)f(x)\Big|_0^1 = (a+b+c)f(1) - cf(0) = 0$, 即希望 $x=0,1$ 恰好是 ax^2+bx+c 的根, 并且 $12x-6=(ax^2+bx+c)'$. 从而

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=0 \\ 2a=12 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-6 \\ c=0 \end{cases}.$$

由此可知, 满足我们期望的二次函数只有 $6x^2-6x$, 即 $\int_0^1 (12x-6)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (6x^2-6x)'f(x)\mathrm{d}x$.

证明

$$\begin{aligned}\int_0^1 (12x-6)\,f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(6x^2-6x\right)'\,f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} -\int_0^1 \left(6x^2-6x\right)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}} f'(\xi)\int_0^1 \left(6x-6x^2\right)\mathrm{d}x = f'(\xi)\,,\xi\in[0,1]\,.\end{aligned}$$

□

例题 0.4

1. 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}]$, $f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi).$$

注

1. 考虑微分方程 $y''=\dfrac{2y'}{1-x}$, 解得 $y'=\dfrac{c}{(1-x)^2}$, 常数变易得到构造函数 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$.
2. 虽然我们可以通过解微分方程得到构造函数, 但是也不要忘记直接猜测构造函数的想法. 当需要考虑的微分方程比较难解时, 就只能猜测构造函数.
   考虑微分方程:$y''=2yy'$, 解得 $y'=y^2+c$, 得到构造函数 $c(x)=f'(x)-f^2(x)$. 但是根据这个构造函数结合已知条件再利用中值定理无法得到结论.($f(\frac{\pi}{4})=1$ 用不了) 因此需要构造更加具体的函数才行.
   然而原问题等价于利用 Rolle 中值定理找一个中值点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c'(\xi)=0$. 但由条件只能得到 $c(0)=1$,$c(\frac{\pi}{4})$ 无法确定. 因此我们希望还能找一个点 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1$.
   将这个看作一个新的中值问题, 即已知设 $f\in D^2[0,\frac{\pi}{4}]$, $f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$, 证明: 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得
$$c(x_0)=f'(x_0)-f^2(x_0)=1.$$
   考虑微分方程:$y'-y^2=1$, 解得 $\arctan y=x+C$, 常数变易得到新的构造函数 $g(x)=\arctan f(x)-x$. 由条件可知 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0$, 从而由 Rolle 中值定理可知, 存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-f^2(x_0)=1$. 从而找到了满足我们需求的中值点 x_0, 故结论得证.(具体证明见下述证明)

证明

1. 令 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$, 则 $c'(x)=2(x-1)f'(x)+(1-x)^2f''(x)$. 由 $f(0)=f(1)$ 及 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 从而 $c(1)=c(\xi)=0$, 再根据 Rolle 中值定理可得, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得
$$c'(\eta)=0 \Leftrightarrow f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 令 $c(x)=f'(x)-f^2(x), g(x)=\arctan f(x)-x$, 则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f^2(x)-1}{1+f^2(x)}$. 进而由条件可得 $g(0)=g(\frac{\pi}{4})=0, g'(0)=0$. 于是由 Rolle 中值定理可知, 存在 $a\in(0,\frac{\pi}{4})$, 使得 $g'(a)=0$, 即 $f'(a)=f^2(a)+1$. 从而 $c(a)=$

$1, c(0) = f'(0) - f^2(0) = 1$, 故再由 Rolle 中值定理可得, 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, 使得

$$c(1) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi).$$

□

0.1.2 多中值点问题

例题 0.5 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

笔记 核心想法: 插入一个点 c, 将两个中值点问题转换为如何确定这单个插入点 c 的问题.

注 思路分析: 待定 $c \in (0,1)$, 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0,c), \mu \in (c,1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

需要

$$2 = f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c}\left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1}\right],$$

只需找到一个 $c \in (0,1)$ 使得上式成立. 但是直接考虑上式比较困难, 我们希望能找到一个特殊的 c 从而将上式化简. 因此待定 k, 我们希望 $f(c)$ 同时满足 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = k$(这里期望 $f(c)$ 满足 $\frac{f(c)}{c} = k$ 也可以), 从而上式就转化为

$$2 = \frac{kc - k + 1}{c} \cdot (k + 1) \Leftrightarrow \left(k^2 + k - 2\right)c - \left(k^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)\left[(k + 2)c - k - 1\right] = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{或} k = \frac{1 - 2c}{c - 1}.$$

若取 $k = 1$, 则我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = 1$, 即 $f(c) = c$. 此时令 $g(x) = f(x) - x$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 但是由条件可知 $g(0) = g(1) = 0$, 无法用中值定理直接找出 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = 1$ 不能找到满足我们的需求的 c.

若取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 则我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $\frac{f(c) - 1}{c - 1} = \frac{1 - 2c}{c - 1}$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 此时令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则现在我们只需找到一个 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$ 即可. 由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$. 故取 $k = \frac{1 - 2c}{c - 1}$ 能找到满足我们的需求的 c, 进而就确定了满足题目要求的 λ 和 μ.

证明 令 $g(x) = f(x) + 2x - 2$, 则由条件可知 $g(0) = -2, g(1) = 1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = 2 - 2c$. 运用 Lagrange 中值定理, 我们知道存在 $\lambda \in (0,c), \mu \in (c,1)$, 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}, f'(\mu) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = \frac{f(c) - 1}{c - 1}.$$

再结合 $f(c) = 2 - 2c$ 可得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c}\left[1 + \frac{f(c) - 1}{c - 1}\right] = 2.$$

故结论得证. □

例题 0.6 设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 正实数满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1.$$

笔记 核心想法: 插入 $n - 1$ 个点 y_i, 将 n 个中值点问题转换为如何确定这些插入点 y_i 的问题.

注 思路分析: 证明的想法就是插入 $n - 1$ 个点 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = 1$ 之后用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, x_i \in (y_{i-1}, y_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是需要满足

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

而为了得到(2), 我们只需反复用介值定理即可. 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$.

证明 由条件可知 $0=f(0)<\lambda_1<f(1)=1$, 从而由连续函数介值定理可得, 存在 $y_1\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)=\lambda_1$. 进而 $\lambda_1=f(y_1)<\lambda_1+\lambda_2<f(1)=1$, 于是再由连续函数介值定理可得, 存在 $y_2\in(y_1,1)$, 使得 $f(y_2)=\lambda_1+\lambda_2$. 以此类推, 反复利用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$. 再利用 Lagrange 定理得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, x_i\in(y_{i-1},y_i), i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

故结论得证. □

0.1.3 只能猜的类型

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.

例题 0.7 设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$ 且 $f(0)=0$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$, 证明对任何 $\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

注 注意到

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\Leftrightarrow \alpha f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0.$$

因此想到构造函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$.

笔记 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 的原因: 如果 $f(x)<0$, 则 $f^{\alpha}(x)$ 可能无意义.

由 $f\in C[0,1]$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$ 可知,$f(x)$ 在 $(0,1]$ 要么恒大于零, 要么恒小于零. 否则由零点存在定理得到矛盾! 假设结论对 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$ 成立, 则当 $f(x)<0,\forall x\in(0,1]$ 时, 令 $F(x)=-f(x)>0,\forall x\in(0,1]$, 则 $F(0)=0$. 从而由假设可知, 对 $\forall\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\alpha\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)}\Leftrightarrow\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

故不妨设成立.

证明 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,1]$. 对 $\forall\alpha>0$, 令 $g(x)=f^{\alpha}(x)f(1-x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$. 从而由 Rolle 中值定理可

知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$g'(\xi)=0 \Rightarrow g'(\xi)=\alpha f^{\alpha-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^{\alpha}(\xi)f'(1-\xi) \Rightarrow \alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□