0.1 分式域

定义 0.1 (分式域)

若交换整环 R 是域 F 的子环且 $\forall a \in F, \exists b, c \in R$ 且 $c \neq 0$, 使得
$$a = bc^{-1}, 其中c^{-1}是c在域F中的乘法逆元,$$
则称 F 为 R 的**分式域**, 记为 $F = \operatorname{Frac}(R)$.

♣

定理 0.1

设 R 为交换整环, 则 R 的分式域一定存在.

♡

注 关于 R 的条件可放宽为 R 是无零因子交换环, 即 R 中不必有幺元.

证明 令 $R^* = R \setminus \{0\}$, 在集合 $R \times R^*$ 中定义加法与乘法,$\forall (a, b), (c, d) \in R \times R^*$,
$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd), \tag{1}$$
$$(a, b)(c, d) = (ac, bd). \tag{2}$$

易验证 $R \times R^*$ 对上述加法与乘法都是交换幺半群, 它们的零元素及幺元分别为 $(0, 1)$,$(1, 1)$. 在 $R \times R^*$ 中定义一个关系 “$\sim$”,
$$(a, b) \sim (c, d), \quad 若 ad = bc.$$

先证明关系 $\sim$ 是等价关系. 事实上, 由 $ab = ab$ 知 $(a, b) \sim (a, b)$. 又若 $(a, b) \sim (c, d)$, 即 $ad = cb$, 因而 $(c, d) \sim (a, b)$. 最后, 假设 $(a, b) \sim (c, d)$,$(c, d) \sim (e, f)$, 则 $adf = bcf = bde$. 由 R 是交换整环,$d \neq 0$, 于是 $af = be$, 即 $(a, b) \sim (e, f)$.

其次证明关系 $\sim$ 对于 $R \times R^*$ 中的乘法是同余关系, 设
$$(a, b) \sim (c, d), \quad (e, f) \sim (g, h).$$
于是由式 (2) 知
$$(a, b)(e, f) = (ae, bf), \quad (c, d)(g, h) = (cg, dh),$$
而由 R 是交换整环可得 $(ae)(dh) = adeh = bcfg = (bf)(cg)$, 即有
$$(a, b)(e, f) \sim (c, d)(g, h).$$

再次证明关系 $\sim$ 对于 $R \times R^*$ 中的加法是同余关系. 设
$$(a, b) \sim (c, d), \quad (e, f) \sim (g, h),$$
则由式 (1) 知
$$(a, b) + (e, f) = (af + be, bf), \quad (c, d) + (g, h) = (ch + dg, dh).$$
这时由 R 是交换整环可得
$$(af + be)dh = adfh + bedh = bcfh + fgbd = (ch + dg)bf,$$
因而 $((a, b) + (e, f)) \sim ((c, d) + (g, h))$.

令 $F = R \times R^* / \sim$ 为商集合, 以 $\dfrac{a}{b}$ 表示 (a, b) 所在等价类. 于是由定理**??**, 在 F 中有加法与乘法运算如下:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$
再由定理**??**知 F 对加法与乘法都是交换幺半群. 零元素与幺元素为 $\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{1}$, 记 $0 = \dfrac{0}{1}, 1 = \dfrac{1}{1}$. 对 $\forall d \in R$, 由于 $0 \cdot d = 0 \cdot 1$, 故有 $(0, 1)$ 与 $(0, d)$ 等价, 即 $\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{d}$. 又由 $1 \cdot d = 1 \cdot d$ 知 $\dfrac{1}{1} = \dfrac{d}{d} = 1$.

由
$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab-ab}{b^2}=\frac{0}{b^2}=0$$
知 F 对加法为交换群.

又若 $\frac{a}{b}\neq 0$, 即 $a\neq 0$, 则 $(b,a)\in R\times R^*$, 即 $\frac{b}{a}\in F$. 这时
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1,$$
故 $F^*=F\setminus\{0\}$ 对乘法为交换群且 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$. 又由
$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{f}{e}&=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{f}{e}=\frac{adf+bcf}{bde}\\&=\frac{adef+bcef}{bdee}=\frac{af}{be}+\frac{cf}{de}\\&=\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}+\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}.\end{aligned}$$
知 F 中加法与乘法间分配律成立, 故 F 为域.

记 $R_1\triangleq\left\{\frac{a}{1}:a\in R\right\}$, 则
$$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1},\quad \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1},$$
故 R_1 是 F 的子环. 由于 $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}$ 当且仅当 $a=b$, 故 $\frac{a}{1}\to a$ 是 R_1 到 R 上的一个良定义的映射, 不难验证其也是同构映射, 因此可将 R 作为 F 的子环. 而对 F 中任一元素 $\frac{a}{b}$ 有
$$\frac{a}{b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{1}\cdot\left(\frac{b}{1}\right)^{-1},$$
故 F 是 R 的分式域. 综上可知
$$F=R\times R^*/\sim=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in R,b\in R^*\right\}$$
是 R 的分式域.

□

定理 0.2

交换整环 R 的分式域 F 是以 R 为子环的最小体, 进而 F 是以 R 为子环的最小域, 因而 R 的分式域唯一.

注 关于 R 的条件可放宽为 R 是无零因子交换环, 即 R 中不必有幺元.

证明 设 F' 是体且以 R 为子环, 则 F' 中子集
$$F_1=\{ab^{-1}\mid a,b\in R,b\neq 0\}$$
是 F' 的子体, 事实上, 对 $\forall ab^{-1},cd^{-1}\in F_1$, 有
$$ab^{-1}+cd^{-1}=(ad+cd)(bd)^{-1},\quad -(ab^{-1})=(-a)b^{-1},$$
故 F_1 对加法为 F' 的子群. 又若 $ab^{-1},cd^{-1}\in F_1\setminus\{0\}$, 则
$$(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}=(ad)(bc)^{-1},$$
故 $F_1\setminus\{0\}$ 对乘法为 $F'\setminus\{0\}$ 的子群, 因此 F_1 是 F' 的子体. 由定理 0.1知, 记 $\frac{a}{b}\triangleq\{(c,d)\in R\times R^*\mid ad=bc\}$, 则 R 的一个分式域为
$$F=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in R,b\in R^*\right\}.$$
又 $\frac{a}{b}\to ab^{-1}$ 是 R 的分式域 F 到 F_1 上的同构, 故可将 F 与 F_1 等同, 因而 $F\subseteq F'$.

再设 M 是以 R 为子环的域, 则 M 也是体, 从而 $F\subseteq M$. 故 F 是以 R 为子环的最小域. 因而 R 的分式域唯一, 否则与 F 是以 R 为子环的最小域矛盾!

□

推论 0.1

设 R_1, R_2 都是交换整环,F_1, F_2 分别是 R_1, R_2 的分式域, 则 $R_1 \cong R_2 \iff F_1 \cong F_2$.

证明

□

推论 0.2

设 R 为交换整环,$R^* = R \setminus \{0\}$, 则在 $R \times R^*$ 中定义一个关系“$\sim$”

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ 若} ad = bc.$$

则 $\sim$ 是同余关系. 以 $\frac{a}{b}$ 表示 (a, b) 所在等价类, 即

$$\frac{a}{b} = \{(c, d) \in R \times R^* \mid (a, b) \sim (c, d)\} = \{(c, d) \in R \times R^* \mid ad = bc\}.$$

则

$$F = R \times R^* / \sim = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in R, b \in R^* \right\}$$

是 R 的分式域, 也是以 R 为子环的最小域, 进而 F 就是 R 的唯一分式域. 并且记 $a = \frac{a}{1}, \forall a \in R$. 其中 F 的加法和乘法分别定义为

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F.$$

进而 $\frac{a}{b}$ 加法和乘法逆元分别为

$$-\frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}.$$

证明 由定理 0.1和定理 0.2立得.

□

例题 0.1 设 $\mathbb{P}$ 是任一数域, 设 $\mathbb{P}[x]$ 的分式域为 $\mathbb{P}(x)$, 则

$$\mathbb{P}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x], g(x) \neq 0 \right\}.$$

证明

□

命题 0.1

设 m 是非零整数, 则 $m\mathbb{Z}$ 的分式域为 $\mathbb{Q}$.

证明

□