# 第一章 积分不等式

## 1.1 著名积分不等式

**定理 1.1 (Young 不等式初等形式)**

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty),(p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty),\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 $x_i,i=1,2,\cdots,n$ 相等.

**笔记** 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a,b\geq 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$ 有 $ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

**证明** 不妨设 $x_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出. □

**定义 1.1**

(1) $d\mu=g(x)dx$, 这里 $g$ 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E\subset\mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu=\sum\limits_{n\in E} f(n)$.

**定理 1.2 (Cauchy 不等式)**

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

**证明** 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu=0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu\neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu\neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu=\int_E |g(x)|^2 d\mu=1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用 Young 不等式可得

$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leqslant \int_E \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}d\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 $c_1,c_2$, 使得 $c_1f(x)+c_2g(x)=0$. □

**定理 1.3 (Jensen 不等式积分形式)**

设 $\varphi$ 是下凸函数且 $p(x)\geqslant 0,\ \int_a^b p(x)dx>0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \tag{1.1}$$

笔记 1. 类似的对上凸函数, 不等式(??)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 $C^2$ 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

证明 为书写简便, 我们记 $d\mu=\frac{p(x)}{\int_a^b p(y)dy}dx$, 那么有 $\int_a^b 1d\mu=1$. 于是我们记 $x_0=\int_a^b f(x)d\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0),$$

就有

$$\int_a^b\varphi(f(x))d\mu\geqslant\int_a^b[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(f(x)-x_0)]d\mu=\varphi(x_0)=\varphi\left(\int_a^b f(x)d\mu\right),$$

这就完成了证明. □

**例题 1.1** 对连续正值函数 $f$, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx.$$

证明 令 $d\mu=\frac{1}{b-a}dx$, 则 $\int_a^b d\mu=1$, 再令 $x_0\triangleq\int_a^b f(x)d\mu>0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x\leqslant\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0),\forall x>0.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b\ln f(x)d\mu&\leqslant\int_a^b\ln x_0d\mu+\frac{1}{x_0}\int_a^b(f(x)-x_0)d\mu\\&=\ln x_0+\frac{1}{x_0}\left(\int_a^b f(x)d\mu-x_0\int_a^b d\mu\right)\\&=\ln x_0=\ln\int_a^b f(x)d\mu.\end{aligned}$$

故结论得证. □

## 1.2 重积分方法

**定理 1.4 (Chebeshev 不等式积分形式)**

设 $p\in R[a,b]$ 且非负,$f,g$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right)\leq\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right),f,g\text{单调性相同}$$

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right)\geq\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right),f,g\text{单调性相反}$$

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

注 证法二中的 $d\mu$ 应该看作测度.

**证明** 证法一:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right)-\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right)\\
&=\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)dy\right)-\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)dy\right)\\
&=\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]dxdy\\
&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{[a,b]^2} p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]dxdy\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2} p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]dxdy,
\end{aligned}$$

故结论得证.

证法二: 令 $\frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mu$, 则 $\int_a^b \mathrm{d}\mu=\int_a^b \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=1$. 于是原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(x)d\mu-\int_a^b f(x)g(x)d\mu\\
&=\int_a^b f(x)d\mu\int_a^b g(y)d\mu-\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)]g(y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\int_a^b\int_a^b [f(y)-f(x)]g(x)d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]
\end{aligned}$$

故结论得证. □

**例题 1.2** 设 $f\in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

**证明**

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

原不等式等价于

$$\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)\geqslant\left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right).$$

令 $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)dx}dx=d\mu$, 则上式等价于

$$\int_0^1 f(x)d\mu\int_0^1 xd\mu\geqslant\int_0^1 xf(x)d\mu.$$

上式由 Chebeshev 不等式积分形式可直接得到. □

**命题 1.1 (反向切比雪夫不等式)**

设 $f,g\in R[a,b]$ 且 $m_1\le f(x)\le M_1, m_2\le g(x)\le M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right|\le\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.$$

注 不妨设 $a=0,b=1$ 的原因: 假设当 $a=0,b=1$ 时,

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}$$

成立. 则对一般的 $[a,b]$, 原不等式等价于

$$\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(a+(b-a)x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}. \tag{1.2}$$

又注意到 $f(a+(b-a)x),g(a+(b-a)x)\in R[0,1]$, 且 $f(x)\in[m_1,M_1],g(x)\in[m_2,M_2]$. 故由假设可知(**??**)式成立. 因此不妨设也成立.

笔记 积累本题的想法.

证明 不妨设 $a=0,b=1$, 则记 $A=\int_0^1 f(x)dx,B=\int_0^1 g(x)dx$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right|^2&=\left|\int_0^1(f(x)-A)(g(x)-B)dx\right|^2\\&\overset{Cauchy\text{不等式}}{\leq}\int_0^1|f(x)-A|^2dx\cdot\int_0^1|g(x)-B|^2dx\\&=\left(\int_0^1|f(x)|^2dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1|g(x)|^2dx-\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1(M_1-f)(f-m_1)dx=M_1A+m_1A-M_1m_1-\int_0^1|f(x)|^2dx,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2&=\int_0^1|f(x)|^2dx-A^2\\&=(M_1-A)(A-m_1)-\int_0^1(M_1-f)(f-m_1)dx\\&\leq(M_1-A)(A-m_1)\leq\frac{(M_1-m_1)^2}{4}.\end{aligned}$$

最后一个不等号可由均值不等式或看出二次函数取最值得到. 类似的有

$$\int_0^1|g(x)|^2dx-\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\leq\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right|^2\leq\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\frac{(M_2-m_2)^2}{4},$$

即原不等式成立. □

**例题 1.3** 设 $f\in C[a,b]$ 且

$$0\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos xdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin xdx\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2. \tag{1.3}$$

注 由 Taylor 公式可得不等式:

$$\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1.4}$$

证明 一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\cos xdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin xdx\right)^2=\int_a^b f(x)\cos xdx\int_a^b f(y)\cos ydy+\int_a^b f(x)\sin xdx\int_a^b f(y)\sin ydy$$

$$= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[\cos x\cos y + \sin x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\cos y\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)dxdy.$$

于是不等式(**??**)变为

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]dxdy \leqslant \frac{M^2(b-a)^4}{12}. \tag{1.5}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]dxdy \overset{(??)}{\leqslant} M^2 \iint_{[a,b]^2} \frac{(x-y)^2}{2}dxdy = \frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这就得到了不等式(**??**). □

## 1.3 直接求导法

**例题 1.4**

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, 证明

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)dx,$$

并判断取等条件.

2. 设 $f$ 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \lambda$, $\lambda > 0$ 为常数, 证明

$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^m \geqslant \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)dx, \tag{1.6}$$

并判断取等条件.

**证明** 因为第一题是第二题的特例了, 所以我们只证第二题. 定义

$$g(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^m - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)dt.$$

求导得

$$\begin{aligned} g'(x) &= mf(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x) \\ &= mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x)\right]. \end{aligned}$$

令 $h(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}$, 则

$$h'(x) = \left[\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]' = f(x) - \frac{f(x)f'(x)}{\lambda} = \frac{f(x)}{\lambda}[\lambda - f'(x)] \geqslant 0,$$

从而 $h(x) \geq h(0) = 0$. 进而

$$h^{m-1}(x) \geqslant \left(\int_0^x f(t)dt\right)^{m-1} - \frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x) \geqslant 0.$$

于是我们有

$$g'(x) \geqslant g'(0) = 0,$$

从而 $g$ 递增且

$$g(a) \geqslant g(0) = 0,$$

这就是不等式(??). 要使得等号成立, 我们需要 $g$ 为常数, 因此需要 $g' \equiv 0$, 故需要 $f \equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2\lambda} \equiv 0,$$

令 $y = \int_0^x f(t)dt$, 则上式等价于

$$y - \frac{(y')^2}{2\lambda} = 0$$

从而解上述微分方程得到取等条件是

$$f(x) = 0\text{或者}f(x) = \lambda x.$$

□

**例题 1.5** 设 $f, g \in C[a,b]$ 使得 $f$ 递增且 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \int_{b-\int_a^b g(t)dt}^b f(x)dx. \tag{1.7}$$

**证明** 考虑

$$h(y) = \int_a^{a+\int_a^y g(t)dt} f(x)dx - \int_a^y f(x)g(x)dx.$$

则利用

$$a + \int_a^y g(x)dx \leqslant a + \int_a^y 1dx = y,$$

再结合 $f$ 递增, 我们有

$$h'(y) = g(y)f\left(a + \int_a^y g(t)dt\right) - f(y)g(y) \leqslant 0 \to h(b) \leqslant h(a) = 0,$$

故不等式(??)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(??). □

## 1.4 凸性相关题型

**例题 1.6** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数. 证明对任何 $x \in (a,b)$, 都有

$$f(x) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)dy. \tag{1.8}$$

特别的, 若 $f \in C[a,b]$, 则对 $x = a, b$, 也有(??)式成立.

**注** **Step2** 中的 $g(x)$ 的构造可以类比 Lagrange 中值定理的构造函数 (关键是这个构造函数的几何直观).

**笔记** 这种只考虑函数端点函数值同为 0 的情形, 再通过构造 $g(x) = f(x) - p(x)$(其中 $p(x)$ 是 $f$ 过两个端点的直线), 将其推广到一般情况的想法很重要!

**证明** 由开集上的凸函数必连续可知, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由凸函数单调性的刻画, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f \in C[a,b]$. 不妨设 $a = 0, b = 1$, 否则用 $f(a+(b-a)x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

**Step1** 当

$$f(a) = f(b) = 0, x_0\text{是}f(x)\text{最大值点}, x_0 \in (a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上放缩得不等式

$$\begin{cases} f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0}x, & x \in [0, x_0] \\ f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{x_0 - 1}(x-1), & x \in [x_0, 1] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0} x dx + \int_{x_0}^1 \frac{f(x_0)}{x_0 - 1}(x-1)dx = \frac{1}{2} f(x_0),$$

这就相当于得到了不等式(**??**).

当 $x_0 = a$或$b$ 时, 由 $f(a) = f(b) = 0$ 且 $f$ 非负可知, 此时 $f(x) \equiv 0$ 结论显然成立.

**Step2** 一般情况可设

$$g(x) = f(x) - \left[f(1) - f(0)\right] x - f(0),$$

从而 $g(0) = g(1) = 0$, 于是 $g$ 就满足 **Step1** 中的条件. 因此由(**??**)知

$$g(x) \leqslant 2\int_0^1 g(y)\,dy, \forall x \in [0,1]. \tag{1.9}$$

于是利用(**??**)知

$$f(x) - \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] \leqslant 2\int_0^1 f(y)\,dy - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right] dy, \forall x \in [0,1].$$

从而

$$f(x) - 2\int_0^1 f(y)\,dy \leqslant \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right] dy, \forall x \in [0,1].$$

注意到对 $\forall x \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] - 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))y + f(0)\right] dy \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right] x + f(0) \leqslant 2\int_0^1 \left[(f(1) - f(0))x + f(0)\right] dx \\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right] x + f(0) \leqslant f(1) + f(0) \\
\Leftrightarrow\ &\left[f(1) - f(0)\right] x \leqslant f(1) \\
\Leftrightarrow\ &f(1)(1-x) + f(0)x \geqslant 0
\end{aligned}$$

上述最后一个不等式可由 $x \in [0,1], f(1), f(0) \geq 0$ 直接得到. 于是我们完成了证明. □

## 1.5 数值比较类

**例题 1.7** 证明如下积分不等式:

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

**笔记** 此类问题都是考虑分母更小的时候正的更多, 通过换元把负的区间转化到正的同一个区间.

**证明**

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx &\xlongequal{x=\sqrt{y}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{2\sqrt{y+\pi}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin y \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y+\pi}}\right) dy > 0.
\end{aligned}$$

2.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}\mathrm{d}y+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(-y)}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin y\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\right]\mathrm{d}y>0.$$

3. 本题稍有不同, 注意到
$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin y}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin y)dy,\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\cos y}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos y)dy.$$
现在利用 $\sin x<x,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 可得不等式链 $\cos\sin x>\cos x>\sin\cos x,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 于是
$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx>\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$
□

**定理 1.5 (Jordan 不等式)**

$sinx\geqslant\frac{2}{\pi}x,\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

**证明** 利用 $\sin x$ 的上凸性及割线放缩可得
$$\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x},\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$
□

**例题 1.8** 证明如下积分不等式

1. $\frac{\pi}{6}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.
2. $\int_0^{\pi}e^{\sin^2x}dx\geqslant\sqrt{e}\pi$.
3. $\frac{\pi}{2}e^{-R}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi(1-e^{-R})}{2R},R>0$.
4. $\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x>\frac{2}{\pi}\ln(n+1),n\geqslant 2$.

**注** $(2n)!!=2^n\cdot n!$.

**证明**

1.
$$\frac{\pi}{6}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2.
$$\int_0^{\pi}e^{\sin^2x}dx=\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\right]=\pi\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\,(n!)^2}\right]$$
$$\overset{(2n-1)!!\geqslant n!}{\geqslant}\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}=\sqrt{e}\pi.$$

3.
$$\frac{\pi}{2}e^{-R}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx\overset{Jordan不等式}{<}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R}{\pi}x}dx=\frac{\pi(1-e^{-R})}{2R},R>0.$$

4.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x \xlongequal{x=k\pi+y} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin y|}{k\pi + y} \mathrm{d}y \\
&> \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin y|}{(k+1)\pi} \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
&> \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(k+2) - \ln(k+1)] \\
&= \frac{2}{\pi} \ln(n+1).
\end{aligned}
$$

还可以使用积分放缩法处理 $\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, 如下所示:

$$
\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \ln(n+1).
$$

□

## 1.6