

## 0.1 级数一致收敛性判断

### 定理 0.1 (函数列一致收敛的柯西准则)

函数列  $\{f_n\}$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件是: 对任给正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $N$ , 使得当  $n, m > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

♡

**证明 必要性** 设  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ , 即对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

于是当  $n, m > N$ , 由 (2) 就有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**充分性** 若条件 (1) 成立, 由数列收敛的柯西准则,  $\{f_n\}$  在  $D$  上任一点都收敛, 记其极限函数为  $f(x), x \in D$ . 现固定 (1) 式中的  $n$ , 让  $m \rightarrow \infty$ , 于是当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

因此,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ .

□

### 定理 0.2

函数列  $\{f_n\}$  在区间  $D$  上一致收敛于  $f$  的充要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (3)$$

♡

**证明 必要性** 若  $f_n(x) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty), x \in D$ . 则对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在不依赖于  $x$  的正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in D.$$

由上确界的定义, 亦有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这就证得 (3) 式成立.

由假设, 对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

因为对一切  $x \in D$ , 总有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|,$$

故由 (4) 式得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f$ .

□

### 推论 0.1

函数列  $\{f_n\}$  在  $D$  上不一致收敛于  $f$  的充分且必要条件是: 存在  $\{x_n\} \subset D$ , 使得  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$  不收敛于 0.

♡

**定理 0.3 (一致收敛的柯西准则)**

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在某正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对一切  $x \in D$  和一切正整数  $p$ , 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

**推论 0.2**

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的必要条件是函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于零.

**定理 0.4**

函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛于  $S(x)$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

**定理 0.5 (A-D 判别法)**

若  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在定义域内满足下列两条件之一, 则其在定义域上一致收敛

(1)  $\{a_n(x)\}$  对于固定的  $x$  关于  $n$  单调, 且在定义域内一致有界;  $\sum_{i=1}^n b_n$  一致收敛. (Abel 判别法)

(2)  $\{a_n(x)\}$  对于固定的  $x$  关于  $n$  单调, 且一致趋于 0;  $\sum_{i=1}^n b_n$  一致有界. (Dirichlet 判别法)

**定理 0.6**

设函数列  $\{f_n\}$  在  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$  上一致收敛于  $f(x)$ , 且对每个  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  均存在且相等.



**证明** 先证  $\{a_n\}$  是收敛数列. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\{f_n\}$  一致收敛, 故有  $N$ , 当  $n > N$  时, 对任意正整数  $p$  和对一切  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , 有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad (5)$$

从而

$$|a_n - a_{n+p}| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$$

这样由柯西准则可知  $\{a_n\}$  是收敛数列.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . 再证  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

由于  $f_n(x)$  一致收敛于  $f(x)$  及  $a_n$  收敛于  $A$ , 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $N$ , 当  $n > N$  时, 对任意  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别取  $n = N + 1$ , 有

$$|f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_{N+1} - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{N+1}(x) = a_{N+1}$ , 故存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f_{N+1}(x) - a_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样, 当  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$


即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

□

### 定理 0.7 (连续性)

若函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数  $f$  在  $I$  上也连续.

♡

 **笔记** 由这个定理可知, 若各项为连续函数的函数列在区间  $I$  上其极限函数不连续, 则此函数列在区间  $I$  上不一致收敛.

**证明** 设  $x_0$  为  $I$  上任一点. 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ , 于是由定理 0.6 知  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  亦存在, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ , 因此  $f(x)$  在  $x_0$  上连续.

□

### 推论 0.3

若连续函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上内闭一致收敛于  $f$ , 则  $f$  在  $I$  上连续.

♡

### 定理 0.8 (可积性)

若函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (6)$$

♡

**证明** 设  $f$  为函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上的极限函数. 由定理 0.7,  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 从而  $f_n (n = 1, 2, \dots)$  与  $f$  在  $[a, b]$  上都可积.

因为在  $[a, b]$  上  $f_n \Rightarrow f (n \rightarrow \infty)$ , 故对任给正数  $\varepsilon$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in [a, b]$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再根据定积分的性质, 当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

这就证明了等式 (6).

□

### 定理 0.9 (可微性)

设  $\{f_n\}$  为定义在  $[a, b]$  上的函数列, 若  $x_0 \in [a, b]$  为  $\{f_n\}$  的收敛点,  $\{f_n\}$  的每一项在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $\{f'_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x). \quad (7)$$

♡

**证明** 设  $f_n(x_0) \rightarrow A (n \rightarrow \infty), f'_n \Rightarrow g (n \rightarrow \infty), x \in [a, b]$ . 我们要证明函数列  $\{f_n\}$  在区间  $[a, b]$  上收敛, 且其极限

函数的导数存在且等于  $g$ .

由定理条件, 对任一  $x \in [a, b]$ , 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 右边第一项极限为  $A$ , 第二项极限为  $\int_{x_0}^x g(t) dt$  (定理 0.8), 所以左边极限存在, 记为  $f$ , 则有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

其中  $f(x_0) = A$ . 由  $g$  的连续性 & 微积分学基本定理推得

$$f' = g.$$


这就证明了等式 (7).

□

#### 定理 0.10 (连续性)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在  $[a, b]$  上也连续.

♡

 **笔记** 这个定理指出: 在一致收敛条件下, (无限项) 求和运算与求极限运算可以交换顺序, 即

$$\sum \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum u_n(x) \right).$$

#### 定理 0.11 (逐项求积)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项  $u_n(x)$  都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

♡

#### 定理 0.12 (逐项求导)

若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上每一项都有连续的导函数,  $x_0 \in [a, b]$  为  $\sum u_n(x)$  的收敛点, 且  $\sum u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\sum \left( \frac{d}{dx} u_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum u_n(x) \right).$$

♡

**例题 0.1** 判断下列级数在指定区间一致收敛性:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}, [0, +\infty);$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}, [-a, a], a > 0;$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right), [-1, 1];$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}, [0, +\infty);$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right), (0, +\infty);$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3 x^2}, (0, +\infty);$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{x}{n^2+x^2} \right)^2, [0, +\infty).$

注 第 4 问可以通过裂项算出级数的和函数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\ &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \right] \\ &= \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.\end{aligned}$$

但  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$  的一致收敛性不好判断 (这个方法比较复杂), 因此我们不采取这个方法.

证明

1. 显然  $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$  以及对每一个  $x \in [0, +\infty)$  都有  $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$  单调递减. 又

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

2. 显然  $\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \right| \leq 2$  以及对每一个  $x \in [-a, a]$  都有  $\frac{n+x^2}{n^2}$  单调递减. 又

$$\frac{n+x^2}{n^2} \leq \frac{n+a^2}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

我们由一致收敛的 **A-D** 判别法有  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$  在  $[-a, a]$  一致收敛.

3. 注意到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{x^m}{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} = 0,$$

我们有  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right)$  在  $[-1, 1]$  一致收敛.

4. 一方面, 对  $x \in [1, +\infty), n \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall x \in [1, +\infty).$$

另外一方面, 对  $n \geq 2, x \in [0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})} &\leq \frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})} \\ &\leq \frac{x^{2n}}{\underbrace{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}_n} \leq \frac{x^{2n}}{C_n^2 x^{2n}} = \frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

即由 Weierstrass 判别法和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} < \infty,$$

我们知道原级数一致收敛.

5. 首先

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left( \sqrt{\frac{x}{n}} \right) \right| \leq \sqrt{\frac{x}{n}}, \forall x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

然后

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{\sqrt{x}(3-nx^2)}{2n(1+x^2n)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \frac{x}{1+nx^2} \Big|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{x}{1+nx^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}} < +\infty.$$

这就证明了  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$  在  $(0, +\infty)$  一致收敛.

6. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}} \leq \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{\sin^2 x}{2x^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}$  在  $(0, +\infty)$  一致收敛.

7. 因为

$$\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)' = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2},$$


于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)^2 < \infty,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

□

**例题 0.2** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  是否一致收敛.

 **笔记** 连续函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  一致收敛, 则在  $\bar{I}$  也一致收敛, 这是因为有等式

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{x \in \bar{I}} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Im \left( \frac{e^{inx}}{n} \right) = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \Im(-\ln(1-e^{ix})) = -\arg(1-e^{ix}) \\ &= -\arg(1-\cos x - i \sin x) = -\arctan \frac{-\sin x}{1-\cos x} = \arctan \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \arctan \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \tan \frac{x}{2} = \frac{\pi-x}{2}, \end{aligned}$$

然后对  $\frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi)$  做奇延拓之后在  $[-\pi, \pi]$  展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi).$$

这个级数结果应当记忆. 注意到上述和函数与  $x$  有关, 故原级数一定不一致收敛, 下面将证明严格化.

**证明** 对  $\frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi)$  做奇延拓之后在  $[-\pi, \pi]$  展开为傅立叶级数, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, \pi).$$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  一致收敛, 则在  $[0, \frac{\pi}{2})$  也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot 0)}{n} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

这就和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $x=0$  应该连续矛盾! 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  不一致收敛.

□

**例题 0.3** 设  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 令

$$f_n(x) = n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right], n = 1, 2, \dots$$

试证明对任给区间  $[a, b]$  都有  $f_n(x)$  一致收敛到  $f'(x)$ .

**证明** 由 Cantor 定理及  $f \in C^1(\mathbb{R})$  可知  $f'$  内闭一致连续性, 于是对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $x \in [a, b], t \in [0, \delta]$ , 我们有

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq \varepsilon.$$

当  $n > \frac{1}{\delta}$ , 我们对任何  $x \in [a, b]$  有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f'(x)| &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(y) - f'(x) dy \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(y) - f'(x)| dy = n \int_0^{\frac{1}{n}} |f'(x+t) - f'(x)| dt \\ &\leq \varepsilon n \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dt = \varepsilon, \end{aligned}$$

这就证明了  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  一致收敛到  $f'(x)$ .

□

**例题 0.4** 讨论下列函数在给定区间可微性.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}, (0, +\infty);$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, (-\infty, +\infty);$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), (-\infty, +\infty);$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x, \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$

**证明**

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$  显然收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 \pi x})' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}.$$

对任何  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ , 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |-n^2 \pi e^{-n^2 \pi x}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi e^{-n^2 \pi a} < \infty,$$

即内闭一致收敛, 因此由定理 0.12 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$  在  $(0, +\infty)$  可微.

2. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$  在  $(-\infty, +\infty)$  可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}.$$

注意到

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \right| \leq 1, \left| \frac{1}{n + x^2} \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

以及对任何  $x \in \mathbb{R}$  都有  $\frac{1}{n + x^2}$  递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 可微.}$$

4. 显然  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$  在  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在任何  $[a, b] \subset \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  一致收敛.

显然存在  $c_{a,b} \in (0, 1)$  使得

$$|\tan x| \leq c_{a,b}, \forall x \in [a, b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} c_{a,b}^{n-1} < \infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{n} \tan^{n-1} x (\tan^2 x + 1)$$

在  $[a, b]$  一致收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan^n x$  在  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  可微.

□

**例题 0.5** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$  在  $[0, \lambda], \lambda > 0$  的一致收敛性.

**证明** 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \left[ \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right], n = 2, 3, \dots$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^m \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$



现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

于是由级数和函数不连续知其  $[0, \lambda], \lambda > 0$  不一致收敛.

□

**例题 0.6** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, b]$  和  $[0, +\infty)$  的一致收敛性.

**证明** 首先注意到

$$\left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]' = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0,$$

我们有

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n &= e^b \left[ 1 - e^{n \ln(1 + \frac{b}{n}) - b} \right] = e^b \left[ 1 - e^{n \left[ \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - b} \right] \\ &= e^b \left[ 1 - e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} \right] = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

(实际上我们可以写出具体的等价量  $e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \sim \frac{e^b b^2}{2n}, n \rightarrow \infty$ ) 于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^b - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \right] < \infty.$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, b]$  一致收敛. 注意到

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right] \right| = +\infty,$$

我们知道  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right]$  在  $[0, +\infty)$  不一致收敛.

□

**例题 0.7** 对  $\alpha > 0$ , 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛性.

**证明** 注意到

$$(x^\alpha e^{-nx})' = (\alpha - nx)x^{\alpha-1} e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{n}.$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx} \leq \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当  $\alpha > 1$ , 我们由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$  知原级数在  $[0, +\infty)$  一致收敛.

当  $\alpha \in [0, 1)$ , 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$


如果原级数在  $[0, +\infty)$  一致收敛, 那么上述和函数在  $x = 0$  应该连续. 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} \neq 0,$$

故原级数在  $[0, +\infty)$  不一致收敛.

□

**例题 0.8** 求  $\alpha$  的范围, 使得  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  一致收敛.

 **笔记** 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha = +\infty$$

时一定有  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对  $x$  赋值往往能实现这一点.

**证明** 当  $\alpha > 1$ , 首先由

$$\left[\left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha\right]' = \left(x - \frac{1}{n}\right)^{n-1} (1-x)^{\alpha-1} \left[n + \frac{\alpha}{n} - (n+\alpha)x\right] = 0 \Rightarrow x = \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha} \text{ 为函数列通项最大值点.}$$

知

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha &= \left(\frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{n + \frac{\alpha}{n}}{n + \alpha}\right)^\alpha = \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \left(\frac{\alpha n - \alpha}{n^2 + \alpha n}\right)^\alpha \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n = \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(1+\alpha)n^2}{n^3 + \alpha n^2}\right)^n \\ &\sim \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} e^{-\frac{(1+\alpha)n^3}{n^3 + \alpha n^2}} \sim \frac{e^{-(1+\alpha)} \alpha^\alpha}{n^\alpha}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故由 Weierstrass 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  一致收敛.

当  $\alpha \leq 0$ , 原级数在  $x = 1$  时通项极限不等于 0, 故此时级数在  $x = 1$  时发散.

当  $0 < \alpha \leq 1$ , 当  $N \rightarrow +\infty$ , 取  $x = n + \frac{\alpha}{n}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha &\geq \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha} - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha = \sum_{n=N}^{2N-1} \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^n \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(1 - \frac{N + \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \geq N \left(\frac{N^2 - N}{(N + \alpha)N}\right)^{2N-1} \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha}{N}}{N + \alpha}\right)^\alpha \\ &\sim N e^{-\frac{(1+\alpha)(2N-1)}{N+\alpha}} \cdot \frac{\alpha^\alpha}{N^\alpha} \sim \frac{\alpha^\alpha e^{-2(1+\alpha)}}{N^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^n (1-x)^\alpha$  在  $x \in [0, 1]$  不一致收敛.

□

**例题 0.9** 设  $f_1 \in C[a, b], x_0 \in [a, b]$ . 考虑函数列

$$f_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

讨论  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  一致收敛性.

 **笔记** 注意到

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \leq M &\Rightarrow |f_2(x)| \leq \int_{x_0}^x M dx = M |x - x_0| \\ \Rightarrow |f_3(x)| &\leq \int_{x_0}^x M |x - x_0| dx = \frac{M}{2} |x - x_0|^2 \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

于是就有下述归纳.

**注** 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 因此我们放缩时在积分号外面再加了一个绝对值 (当然也可以分类讨论).

**证明** 设  $M \triangleq \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x)|$ , 我们归纳证明

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1}. \quad (8)$$

现在(8)对  $n=1$  已经成立. 假设  $n$  时成立, 我们对  $x_0 \in [a, b]$  有

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x f_n(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_n(t)| dt \right| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_{x_0}^x |x - x_0|^{n-1} dx = \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

现在由数学归纳法知对一切  $n \in \mathbb{N}$  都有(8)成立, 故

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1} \leq \frac{M}{(n-1)!} \max \{ |b - x_0|^{n-1}, |x_0 - a|^{n-1} \},$$


即  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  一致收敛到 0.

□

**例题 0.10** 设  $[0, 1]$  上的连续函数列  $\{f_n\}$  满足  $f_n \geq 0$ , 且

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + f_n(t)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明:  $\{f_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛, 并求出极限函数

 **笔记** 极限函数的求法: 设  $\{f_n\}$  的极限函数为  $f$ , 则对条件等式两边同时求导并令  $n \rightarrow \infty$  得

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f(x)} \implies f(x) = \sqrt{2x+1} - 1.$$

**证明** 记  $f(x) = \sqrt{2x+1} - 1$ , 则

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + f(t)}.$$

由  $f_1 \in C[0, 1]$  知, 存在  $M > 0$ , 使得

$$|f_1(x) - f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0, 1].$$

假设  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{Mx^{n-1}}{n!}, \forall x \in [0, 1]$ . 则

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f(x)| &\leq \int_0^x \left| \frac{1}{1 + f_n(t)} - \frac{1}{1 + f(t)} \right| dt \\ &= \int_0^x \frac{|f_n(t) - f(t)|}{(1 + f_n(t))(1 + f(t))} dt \leq \int_0^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_0^x \frac{Mt^{n-1}}{n!} dt = \frac{Mx^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

故由数学归纳法知

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{Mx^{n-1}}{n!} \leq \frac{M}{n!}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n!} = 0.$$

故  $\{f_n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛到  $f(x) = \sqrt{2x+1} - 1$ .

□

**例题 0.11**

1. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是收敛的正项级数, 令  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\sin nx|$ , 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足 Lipschitz 条件, 即存在

常数  $L > 0$ , 使对任意实数  $x, y$ , 都有  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$  收敛.

2. 设  $b_n \geq 0$ , 且  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛, 证明  $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$  的充要条件为  $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$  收敛.

注 第 2 问中不能与第 1 问一样直接得到

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \geq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^m b_n \sin nx,$$

这个放缩是错误的. 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  不是正项级数, 第 1 问中有绝对值, 从而是正项级数才能这样放缩.

证明

1. 注意到  $\frac{\sin x}{x}$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 故对  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left|\sin \frac{n}{m}\right|}{\frac{1}{m}} \geq \sum_{n=1}^m na_n \frac{\left|\sin \frac{n}{m}\right|}{\frac{n}{m}} \\ &= \sum_{n=1}^m na_n \frac{\sin \frac{n}{m}}{\frac{n}{m}} \geq \sum_{n=1}^m na_n \frac{\sin 1}{1} \\ &= \sin 1 \sum_{n=1}^m na_n. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^m na_n \leq \frac{1}{\sin 1} m f\left(\frac{1}{m}\right), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

因为  $f$  在  $\mathbb{R}$  上满足 Lipschitz 条件且  $f(0) = 0$ , 所以

$$\sum_{n=1}^m na_n \leq \frac{1}{\sin 1} m \cdot L \cdot \frac{1}{m} = \frac{L}{\sin 1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

令  $m \rightarrow +\infty$  得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq \frac{L}{\sin 1} < +\infty.$$

2. 由条件和函数项级数连续性定理可知  $\phi(x) \in C(\mathbb{R})$ .

充分性: 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$  收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n < +\infty.$$

故由函数项级数逐项求导定理知

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx.$$

由函数项级数连续性定理知  $\phi'(x) \in C(\mathbb{R})$ . 因此  $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .

必要性: 任取  $x > 0$ , 由函数项级数逐项求积定理知

$$\frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(1 - \cos nx)}{n} \geq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^m \frac{b_n(1 - \cos nx)}{n}, \quad \forall m \geq 1.$$

上式中令  $x \rightarrow 0^+$  再结合 L'Hospital 法则得到

$$\frac{1}{2} \phi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^2} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^m \frac{b_n(1 - \cos nx)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m nb_n.$$

因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n$  收敛.

□