0.1 反常积分收敛抽象问题

命题 0.1

设 f 为 $[a,+\infty)$ 上的非负可积函数, 若存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

进而可得

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在.

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \to +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(y)\,\mathrm{d}y = +\infty$.

注 对于瑕积分也有类似的结论.

笔记 这个命题说明: 非负可积函数的反常积分的敛散性完全由其子列的变限积分决定.

证明 令 $g(x) = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负单调递增. 由单调收敛定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 从而由子列极限命题 (a) 可知

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

□

命题 0.2

若 $f \in R[a,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在且 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |f(x)| = 0$, 则 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在.

笔记 若已知 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则由 Heine 归结原则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在. 但是反过来, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 只是 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 的一个子列极限, 故 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 不一定存在. 还需要额外的条件才能使得 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

证明 对 $\forall x \geqslant a$, 一定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leqslant x < n+1$. 从而可得

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^n f(x)\mathrm{d}x + \int_n^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

并且

$$\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^x |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{y\geqslant n} |f(y)|\,. \tag{2}$$

对(2)式两边同时令 $x \to +\infty$, 则 $n \to +\infty$. 进而可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup_{y\geqslant n}|f(y)| = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)|\,.$$

由于此时 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 因此 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|f(x)| = 0.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x = 0$. 于是再对(1)式两边同时令 $x \to +\infty$, 则 $n \to +\infty$. 从而可得

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x + \lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 所以 $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 也存在.

□

命题 0.3 (积分收敛必有子列趋于 0)

(1) 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

(2) 设 $f\in R[0,+\infty)$, 且 $\int_0^\infty|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ln x_n f(x_n)=0$.

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限. 并且 (2) 中结论的 $x_n\ln x_n$ 可以换成任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足 $\int_a^\infty a_n\mathrm{d}x=+\infty$ 即可

证明

(1) 运用积分中值定理, 我们知道

$$\int_A^{A+1}f(x)\mathrm{d}x=f(\theta(A)),A+1>\theta(A)>A.$$

由 Cauchy 收敛准则, 我们知道

$$0=\lim_{A\to+\infty}\int_A^{A+1}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}f(\theta(A)),\ \lim_{A\to+\infty}\theta(A)=+\infty.$$

这就完成了证明.

(2) 若 $|f(x)|>\dfrac{1}{x\ln x},\forall x>e$, 则由 $\int_e^\infty\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\ln x=+\infty$ 可得 $\int_e^\infty|f(x)|\,\mathrm{d}x=+\infty$ 矛盾! 故存在 $x_1>e$ 使得 $|f(x_1)|\leqslant\dfrac{1}{x_1\ln x_1}$. 同样的, 如果 $|f(x)|>\dfrac{1}{2x\ln x},\forall x>x_1+1$, 同理可得矛盾! 因此必然存在 $x_2>x_1+1$ 使得 $|f(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{2x_2\ln x_2}$. 依次下去我们得到

$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{nx_n\ln x_n},n=1,2,\cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n\ln x_n\cdot|f(x_n)|=0.$$

□

命题 0.4

设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y$ 收敛, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x}=0.$$

笔记 本题不可直接洛必达. 这个命题是命题??的连续版本, 在那里我们先 abel 变换再 Stolz 定理, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

证明 记 $F(x)\triangleq\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{R-S 积分}}\int_0^x y\mathrm{d}F(y)=xF(x)-\int_0^x F(y)\mathrm{d}y.$$

由 $F\in C[0,+\infty)$, 利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y}{x}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}}\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y-\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y=0.$$

□

命题 0.5

(1) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $xf(x)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x f(x)=0$.

证明

(1) 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f, 从而

$$Af(A)\geqslant\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \frac{A}{2}f(A)\leqslant\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

进而

$$\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty,\quad \int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A)=0$.

(2) 不妨设 xf 递减, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是

$$\frac{1}{2}A\ln Af(A)=Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A^{A^2}\frac{xf(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant Af(A)\int_A^{A^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=A\ln Af(A).$$

从而

$$\int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant A\ln Af(A)\leqslant 2\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

又由 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的 Cauchy 收敛准则可知

$$\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.\quad \int_A^{A^2} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0, A\to+\infty.$$

故由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty} A\ln Af(A)=0$.

□

命题 0.6

若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

笔记 本题也有导数版本见命题**??**.

证明 反证, 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 则可不妨设存在 $c>0$,,$x_n\to+\infty$, 使得

$$f(x_n)\geqslant c>0.$$

由 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知, 存在 $\delta>0$, 使 $\forall n\in\mathbb{N}$, 都有

$$|f(x)-f(x_n)|<\frac{c}{2}\Longrightarrow f(x)>f(x_n)-\frac{c}{2}\geqslant\frac{c}{2},\quad \forall x\in(x_n,x_n+\delta)>0.$$

于是

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_n+\delta}\frac{c}{2}\mathrm{d}x=\frac{c\delta}{2},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

这与 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ 的 Cauchy 收敛准则矛盾！

□

例题 0.1 设 $f \in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

证明 若存在 $a>0$, 使得 $f'(a)=0$, 则由 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减可得

$$f'(x) = 0, \quad \forall x > a.$$

此时结论显然成立.

若 $f' \neq 0, \forall x \in (0,+\infty)$, 则由导数介值性可知,$f'$ 在 $(0,+\infty)$ 上要么恒大于零, 要么恒小于零. 于是不妨设 $f' > 0, \forall x \in (0,+\infty)$, 故此时 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增. 并且此时 $f' = |f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减, 故此时 f' 在 $(0,+\infty)$ 内闭 Riemann 可积. 从而由微积分基本定理可知

$$\int_1^x f'(y)\,\mathrm{d}y = f(x) - f(1).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛. 于是由命题 0.5(1)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

□

例题 0.2 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x f'(x) = 0.$$

证明 由 xf' 单调可知,$g(x) \triangleq xf'$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积. 从而 $f' = \frac{g(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上也内闭 Riemann 可积. 不妨设 xf' 单调递增, 由单调有界定理可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$ 存在或 $+\infty$. 由 f 有界可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) > 0$, 则存在 $C>0$, 使得

$$xf'(x) > C \Rightarrow f'(x) > \frac{C}{x}, \quad x \in (\max\{a,0\},+\infty). \tag{3}$$

对 (3) 式两边同时积分得到

$$f(x) > \int_a^x \frac{c}{t}\,\mathrm{d}t = c\ln|x| - c\ln a.$$

令 $x \to +\infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 这与 f 有界矛盾！于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \leqslant 0$ 可知存在 $X > \max\{a,0\}$, 使得

$$xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x) \leqslant 0, \quad x \in (X,+\infty).$$

故 f 在 $(X,+\infty)$ 上递减. 又因为 f 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 根据微积分基本定理可得

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

令 $x \to +\infty$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可得 $\int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 又 $xf'(x)$ 单调, 于是由命题 0.5(2)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x f'(x) = 0$.

□

例题 0.3 设 $f \in D[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 且f' 严格递增, 证明 $\int_0^{\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由命题**??**和命题**??**可知,$f' \in C[a,+\infty)$. 又由命题**??**可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 故存在 $X>0$, 使得 f', f 在 $[X,+\infty)$ 上恒正, 且 f 在 $[X,+\infty)$ 上严格单调递增. 从而由反函数存在定理可知,f 存在严格单调递增的反函数

$$g : [f(X),+\infty) \longrightarrow [X,+\infty).$$

于是令 $x = g(y)$, 则

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

又由反函数求导定理可知 $g'(y)f'(g(y)) = 1$, 并且 $f(g(y)) = y$, 故上式可化为

$$\int_X^{+\infty} \sin f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(X)}^{+\infty} \sin y g'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f(X)}^{+\infty} \frac{\sin y}{f'(g(y))}\mathrm{d}y.$$

因为 f', g 都严格递增趋于 $+\infty$, 所以 $\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 严格递增趋于 0. 又注意到

$$\left|\int_{f(X)}^{A} \sin y \mathrm{d}y\right| \leqslant 2, \forall A \geqslant f(X).$$

故由 Dirchlet 判别法可知 $\int_0^{\infty} \sin f(x) \mathrm{d}x$ 收敛.

□

例题 0.4

(1) 设 f 内闭可积且 $f(x)>0, x_0>0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+x_0)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty) \bigcup \{+\infty\}$$

我们就有

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 是 } \begin{cases} \text{收敛}, & \ell<1 \\ \text{发散}, & \ell>1 \end{cases}.$$

(2) 设 $f>0$ 内闭可积, 若有常数 $k>1$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = \ell \in [0,+\infty) \bigcup \{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \text{是} \begin{cases} \text{收敛}, & \ell<\frac{1}{k} \\ \text{发散}, & \ell>\frac{1}{k} \end{cases}.$$

(3) 设 $f>0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p,$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \begin{cases} \text{收敛}, & -\infty \leqslant p < -1 \\ \text{发散}, & -1<p\leqslant+\infty \end{cases}.$$

注 第 (1) 题中当 $\ell=1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (2) 题中当 $\ell=\dfrac{1}{k}$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题中当 $p=1$ 时无法判断反常积分的敛散性!

第 (3) 题的条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=p$ 可改为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)}=p$. 因为由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = p.$$

注 上述例题第 (3) 题的证明中, 令 $\varepsilon\to0$, 并不能得到

$$\frac{1}{x^{-p}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{-p}}, \forall x>X.$$

因为 X 是与 ε 有关的. 因此只有固定 ε 时, 才有 $\dfrac{1}{x^{-p+\varepsilon}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{-p-\varepsilon}}, \forall x>X$ 成立. 故再利用比较判别法式, 不能令 $\varepsilon\to0$.

证明

(1) 由 $f>0$ 和命题 0.1可知

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_a^{a+mx_0} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由题设可知, 存在 $X>a$, 使得

$$\ell-\varepsilon \leqslant \frac{f(x_0+x)}{f(x)} \leqslant \ell+\varepsilon, \forall x \geqslant X.$$

从而当 $n>\dfrac{X-a}{x_0}$ 时, 就有 $a+nx_0>X$, 进而

$$a_{n+1}=\int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0}f(x+x_0)\,\mathrm{d}x\in[(\ell-\varepsilon)a_n,(\ell+\varepsilon)a_n],$$

故

$$\ell-\varepsilon\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\ell+\varepsilon,\forall n>\frac{X-a}{x_0}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, 再由比值判别法得证.

(2) 根据题设, 令 $x=e^t$, 任取 $c>0$, 再令 $g(x)=f(x)e^x$, 则

$$\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\ln c}^\infty f\left(e^t\right)e^t\mathrm{d}t=\int_{\ln c}^\infty g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(t+\ln k)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(e^{t+\ln k}\right)e^{t+\ln k}}{f\left(e^t\right)e^t}=k\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(ke^t\right)}{f\left(e^t\right)e^t}=k\ell.$$

于是由 (1) 可知结论成立.

(3) 只讨论 $p\in\mathbb{R}$ 的情况, 其余 $p=\pm\infty$ 情况类似. 由题意可知,$\forall\varepsilon>0$, 存在$X>e$, 使得当$x>X$时, 有

$$p-\varepsilon\leqslant\frac{\ln f(x)}{\ln x}\leqslant p+\varepsilon\Longleftrightarrow x^{p-\varepsilon}\leqslant f(x)\leqslant x^{p+\varepsilon}.$$

于是

$$\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^{-p-\varepsilon}},\forall x>X.$$

再由比较判别法即得结论. 当 $p<-1$ 也就即 $-p>1$ 时, 取 $\varepsilon=\dfrac{-p-1}{2}$, 则由上式知, 存在 $X_1>e$, 使得

$$f(x)\leqslant\frac{1}{x^{-p-\varepsilon}},\forall x>X_1.$$

注意到此时 $-p-\varepsilon>1$, 故 $\displaystyle\int_{X_1}^\infty\frac{1}{x^{-p-\varepsilon}}\mathrm{d}x<+\infty$. 由比较判别法知 $\displaystyle\int_{X_1}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$. 因此 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$.

当 $p\geqslant-1$ 也即 $-p\leqslant1$ 时, 取 $\varepsilon=\dfrac{p+1}{2}$, 则由上式知, 存在 $X_2>e$, 使得

$$f(x)\geqslant\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}},\forall x>X_2.$$

注意到此时 $-p+\varepsilon\leqslant1$, 故 $\displaystyle\int_{X_1}^\infty\frac{1}{x^{-p+\varepsilon}}\mathrm{d}x=+\infty$. 由比较判别法知 $\displaystyle\int_{X_1}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$. 因此 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$. □

例题 0.5 若 $f\in C^1[0,+\infty)$ 且 $f(0)>0, f'(x)>0$. 若 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x<\infty$, 证明 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<\infty$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 由条件可知 $f(x)$ 严格递增且恒正, 从而 $f(+\infty)\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, 进而

$$\frac{1}{f(+\infty)}\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left|\frac{1}{f(x)+f'(x)}-\frac{1}{f(x)}\right|\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\frac{f'(x)}{f(x)\left[f(x)+f'(x)\right]}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\frac{1}{f^2(x)}\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(+\infty)}<+\infty.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{f(x)}\leqslant\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)+f'(x)}\right|+\frac{1}{f(x)+f'(x)}.$$

又 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x<+\infty$, 故 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<\infty$.

□

例题 0.6 设非负函数 $f\in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$, 证明 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

笔记 利用拟合法的想法证明反常积分收敛.

证明 证法一:$\forall a<b$, 注意到 $1-x\leqslant e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$. 从而对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\int_a^b\left(1-\frac{|x|}{k}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M.$$

于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{k}\int_a^b|x|f(x)\,\mathrm{d}x+M.$$

令 $k\to+\infty$ 得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$. 再由 a,b 的任意性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$.

证法二:由Fatou 引理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varliminf_{k\to+\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M.$$

□

例题 0.7 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f'(x)|\leqslant M,\forall x\geqslant 0,\int_0^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证明 由条件可得

$$\int_0^{+\infty}\left|f^2(x)f'(x)\right|\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty}f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}f^3(x)-f^3(0)<\infty.$$

从而 $\lim_{x\to+\infty}f^3(x)$ 存在. 由 $\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$ 及命题 0.3(1)可知, 存在 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to+\infty$, 使得 $f^2(x_n)\to 0$. 故 $\lim_{x\to+\infty}f^3(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f^2(x_n)\right]^{\frac{3}{2}}=0$, 因此 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

□

例题 0.8 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 且

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty,\int_0^{\infty}|f''(x)|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

证明 $\int_0^{\infty}|f'(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$.

证明 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{+\infty}|f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}<+\infty.$$

故 $\int_0^{+\infty}|f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 利用分部积分得

$$\int_0^x|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y=f(x)f'(x)-f(0)f'(0)-\int_0^x f(y)f''(y)\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

由命题 0.1可知, 只须找一个 $x_n\to+\infty$, 使 $f(x_n)f'(x_n)$ 极限存在即可.

由于 $\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty$, 故由命题 0.3(1)可知存在 $a_n\to+\infty$, 使得 $\lim_{n\to\infty}|f(a_n)|^2=0$, 从而 $\varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|^2\neq+\infty$.

于是再由命题**??**可知, 存在 $x_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f^2(x_n)]' = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} 2f(x_n)f'(x_n) = 0.$$

从而由命题 0.1及(4)式可知结论成立.

$\square$