0.1 导数的几何意义

命题 0.1

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z=\gamma(t),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

设 $\gamma(a)=z_0$, 且 $\gamma'(a)\neq 0$. 设 $w=f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ, 它的方程为

$$w=\sigma(t)=f(\gamma(t)),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

则 σ 在 $w_0=f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a)=\mathrm{Arg}f'(z_0)+\mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

或者写为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a)-\mathrm{Arg}\gamma'(a)=\mathrm{Arg}f'(z_0). \tag{1}$$

$\mathrm{Arg}f'(z_0)$ 就称为映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 处的**转动角**.

笔记 这说明像曲线 σ 在 w_0 处的切线与正实轴的夹角与原曲线 γ 在 z_0 处的切线与正实轴的夹角之差总是 $\mathrm{Arg}f'(z_0)$, 而与曲线 γ 无关.

证明 由定义**??**可知,γ 在点 z_0 处的切线与正实轴的夹角为 $\mathrm{Arg}\gamma'(a)$. 由于 $\sigma'(a)=f'(\gamma(a))\gamma'(a)=f'(z_0)\gamma'(a)\neq 0$, 所以再结合定理**??**(1) 可得 σ 在 $w_0=f(z_0)$ 处的切线与正实轴的夹角为

$$\mathrm{Arg}\sigma'(a)=\mathrm{Arg}f'(z_0)+\mathrm{Arg}\gamma'(a),$$

□

定义 0.1

若 $w=f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 并且在 z_0 处满足: 过 z_0 的任意两条曲线 C_1,C_2 经映射后得到的曲线 Γ_1,Γ_2, 其夹角 (包括大小和方向) 与原曲线 C_1,C_2 的夹角相等. 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**保角点**, 也称 f 在 z_0 点是**保角的**. 若 $f(z)$ 在 D 内所有点都是保角的, 则称 $f(z)$ 是 D 上的**保角变换**.

注 夹角的“方向”指从曲线 C_1 到 C_2 的旋转方向, 与映射后从 Γ_1 到 Γ_2 的旋转方向一致, 即保持“定向”.

定理 0.1

全纯函数在其导数不为零的点处是保角的.

证明 如果过 z_0 点作两条光滑曲线 γ_1,γ_2, 它们的方程分别为

$$z=\gamma_1(t),\ a\leqslant t\leqslant b \text{和} z=\gamma_2(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

且 $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)=z_0$(图 1(a)). 映射 $w=f(z)$ 把它们分别映为过 w_0 点的两条光滑曲线 σ_1 和 σ_2(图 1(b)), 它们的方程分别为

$$w=\sigma_1(t)=f(\gamma_1(t)),\ a\leqslant t\leqslant b \text{和} w=\sigma_2(t)=f(\gamma_2(t)),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

由 (1)式可得

$$\mathrm{Arg}\sigma_1'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(a)=\mathrm{Arg}f'(z_0)=\mathrm{Arg}\sigma_2'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_2'(a),$$

即

$$\mathrm{Arg}\sigma_2'(a)-\mathrm{Arg}\sigma_1'(a)=\mathrm{Arg}\gamma_2'(a)-\mathrm{Arg}\gamma_1'(a). \tag{2}$$

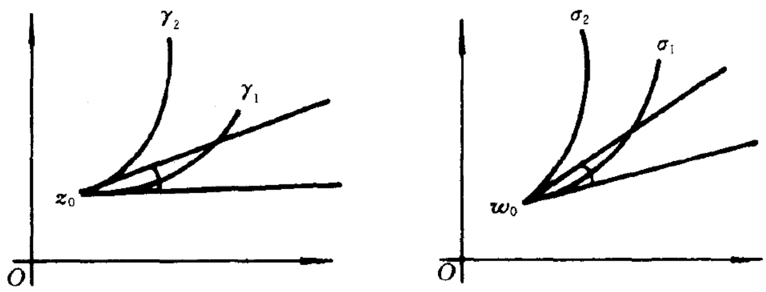

图 1

上式左端是曲线 σ_1 和 σ_2 在 w_0 处的夹角 (两条曲线在某点的夹角定义为这两条曲线在该点的切线的夹角), 右端是曲线 γ_1 和 γ_2 在 z_0 处的夹角.(2)式说明, 如果 $f'(z_0) \neq 0$, 那么在映射 $w = f(z)$ 的作用下, 过 z_0 点的任意两条光滑曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的. □

推论 0.1

设 $w = f(z)$ 是定义域为 D 的复变函数, 则 f 在 z_0 上是保角的的充要条件是 $f(z)$ 在 D 上全纯且 $f'(z_0) \neq 0$. ♡

证明 由定理 0.1立得. □

定义 0.2 (伸缩率)

过 z_0 作一条光滑曲线 γ, 它的方程为

$$z = \gamma(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

设 $\gamma(a) = z_0$, 且 $\gamma'(a) \neq 0$. 设 $w = f(z)$ 把曲线 γ 映为 σ(图 2), 它的方程为

$$w = \sigma(t) = f(\gamma(t)),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的**伸缩率**. ♣

笔记 由于

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0),$$

所以, 当 z 沿着 γ 趋于 z_0 时, 有

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = \lim_{z\to z_0} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} = |f'(z_0)|.$$

这说明像点之间的距离与原像之间的距离之比只与 z_0 有关, 而与曲线 γ 无关.

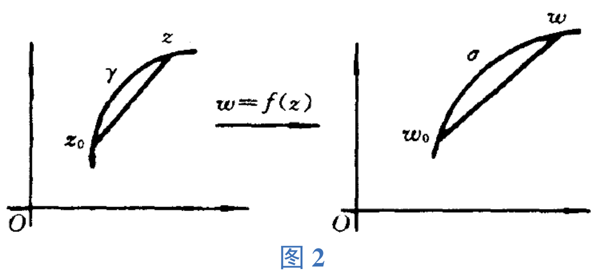

图 2