0.1 对称初等变换与矩阵合同

回顾引理??中的对称初等变换.

命题 0.1

设 $\mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是分块对角矩阵, 其中 A_i 都是对称矩阵, 求证:$\mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 正交相似于 $\mathrm{diag}\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}\}$, 其中 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的一个排列.

证明 对换分块对角矩阵的第 i, j 分块行, 再对换第 i, j 分块列, 这是一个正交变换, 变换的结果是将第 (i, i) 分块和第 (j, j) 分块对换了位置. 又任意一个排列都可以通过若干次对换来实现, 因此两个分块对角矩阵 diag { A_1,A_2,$\cdots$,A_m } 和 diag { A_{i_1},A_{i_2},$\cdots$,A_{i_m}} 正交相似. □

命题 0.2

求证:n 阶实对称矩阵 A 是正定阵的充要条件是 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式的代数余子式以及第 n 个顺序主子式全大于零.

证明 将 A 的第 i 行和第 $n-i+1$ 行对换, 再将第 i 列和第 $n-i+1$ 列对换 $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 得到的矩阵记为 B, 则 B 和 A 合同. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则有

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

注意到 B 的 n 个顺序主子式按副对角线翻转 (顺/逆时针旋转 $180°$) 后就是 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式以及第 n 个顺序主子式, 又由命题??可知,B 的 n 个顺序主子式等于 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式的代数余子式以及第 n 个顺序主子式.(A 的第 k 个顺序主子式的代数余子式是划去前 k 行、k 列得到的矩阵再乘 $(-1)^{1+1+2+2+\cdots+k+k} = (-1)^{k(k-1)} = 1$)

故 A 是正定阵当且仅当 B 是正定阵, 这当且仅当 B 的 n 个顺序主子式全大于零, 这也当且仅当 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式的代数余子式以及第 n 个顺序主子式全大于零. □

命题 0.3

设有分块对称矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

假设 A_1 合同于 B_1,A_2 合同于 B_2, 求证:A 合同于分块对称矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}.$$

证明 设 C_1, C_2 为非异阵, 使得 $C_1'A_1C_1 = B_1$,$C_2'A_2C_2 = B_2$, 令

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix},$$

则 C 为非异阵, 使得 $C'AC = B$. □

命题 0.4

设分块实对称矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 用 $p(A), q(A)$ 分别表示 A 的正负惯性指数, 求证:

$$p(M) = p(A) + p(B), \quad q(M) = q(A) + q(B).$$

证明 由实对称矩阵的合同标准型可知,A 合同于 $\mathrm{diag}\{I_{p(A)}, -I_{q(A)}, O\}$,$B$ 合同于 $\mathrm{diag}\{I_{p(B)}, -I_{q(B)}, O\}$, 因此由命题 0.1和命题 0.3可知,$M = \mathrm{diag}\{A, B\}$ 合同于 $\mathrm{diag}\{I_{p(A)+p(B)}, -I_{q(A)+q(B)}, O\}$, 从而结论得证. □

命题 0.5 (正负惯性指数的降阶公式)

设分块实对称矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$, 其中 A, B 都可逆, 求证:

$$p(M) = p(A) + p(B - C'A^{-1}C) = p(B) + p(A - CB^{-1}C'),$$

$$q(M) = q(A) + q(B - C'A^{-1}C) = q(B) + q(A - CB^{-1}C').$$

其中 $p(X), q(X)$ 分别表示矩阵 X 的正惯性指数和负惯性指数.

证明 先将 M 的第一分块行左乘 $-C'A^{-1}$ 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 $(-C'A^{-1})' = -A^{-1}C$ 加到第二分块列上, 可得如下合同变换:

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & C \\ O & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix}.$$

另一种对称分块初等变换是, 先将 M 的第二分块行左乘 $-CB^{-1}$ 加到第一分块行上, 再将第二分块列右乘 $(-CB^{-1})' = -B^{-1}C'$ 加到第一分块列上, 可得合同变换:

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & O \\ C' & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 再由命题 0.4即得结论. □

命题 0.6

设 α 是 n 维实列向量且 $\alpha'\alpha = 1$, 证明: 矩阵 $I_n - 2\alpha\alpha'$ 的正惯性指数等于 $n-1$, 负惯性指数等于 1.

证明 构造分块对称矩阵 $M = \begin{pmatrix} I_n & \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\alpha' & 1 \end{pmatrix}$, 由正负惯性指数的降阶公式可知,$I_n - 2\alpha\alpha'$ 的正惯性指数等于 $n-1$, 负惯性指数等于 1. □

命题 0.7

求 $n(n \geqslant 2)$ 阶实对称矩阵 A 的正负惯性指数, 其中 a_i 均为实数:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 + 1 & \cdots & a_1a_n + 1 \\ a_2a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 + 1 & a_na_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

证明 构造分块对称矩阵

$$M = \begin{pmatrix} -I_n & B \\ B' & -I_2 \end{pmatrix}, \text{其中} B' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

又注意到 $A = -I_n - B(-I_2)^{-1}B'$, 则由打洞原理可知

$$|A| = \left|-I_n - B(-I_2)^{-1}B'\right| = |M| = (-1)^n \left|-I_2 - B'(-I_n)^{-1}B\right| = (-1)^n \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n - 1 \end{vmatrix}.$$

令 $C \triangleq -I_2 - B'(-I_n)^{-1}B = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & n-1 \end{pmatrix}$, 注意到

$$|C| = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 1\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2, \quad |C| = (-1)^n|A|.$$

从而 C 经过对称初等变换可得

$$C = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & n-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n-1} r_2 + r_1} \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - 1\right) - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{n-1} & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n-1} j_2 + j_1} \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - 1\right) - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{n-1} & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|C|}{n-1} & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

故当 $|C| > 0$ 时,$p(C) = 2,q(C) = 0$; 当 $|C| = 0$ 时,$p(C) = 1,q(C) = 0$; 当 $|C| < 0$ 时,$p(C) = 1,q(C) = 1$. 再由正负惯性指数的降阶公式可知

$$p\,(M) = p\,(-I_2) + p\,\left(-I_n - B(-I_2)^{-1}B\prime\right) = p\,(-I_n) + p\,(-I_2 - B\prime(-I_n)\,B) \Leftrightarrow p\,(A) = p\,(C)\,,$$
$$q\,(M) = q\,(-I_2) + q\,\left(-I_n - B(-I_2)^{-1}B\prime\right) = q\,(-I_n) + q\,(-I_2 - B\prime(-I_n)\,B) \Leftrightarrow q\,(A) = q\,(C)\,.$$

因此当 $(-1)^n|A| = |C| > 0$ 时,$p(A) = 2,q(A) = n-2$; 当 $|A| = |C| = 0$ 时,$p(A) = 1,q(A) = n-2$; 当 $(-1)^n|A| = |C| < 0$ 时,$p(A) = 1,q(A) = n-1$. □

例题 0.1 设 A 是 n 阶可逆实矩阵,$B = \begin{pmatrix} O & A \\ A' & O \end{pmatrix}$, 求 B 的正负惯性指数.

证明 将 B 的第一分块行左乘 A^{-1}, 再将第一分块列右乘 $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, 于是 B 合同于 $C = \begin{pmatrix} O & I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$. 将 C 的第二分块行加到第一分块行上, 再将第二分块列加到第一分块列上, 于是 C 合同于 $D = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$. 将 D 的第一分块行左乘 $-\frac{1}{2}I_n$ 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 $-\frac{1}{2}I_n$ 加到第二分块列上, 于是 D 合同于 $\begin{pmatrix} 2I_n & O \\ O & -\frac{1}{2}I_n \end{pmatrix}$, 因此 B 的正负惯性指数都等于 n. □

命题 0.8

设 A 是 n 阶正定实对称矩阵, 求证:$B = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$ 是半正定阵.

证明 将 B 的第一分块行左乘 A^{-1} 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 A^{-1} 加到第二分块列上, 于是 B 合同于 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 这是一个半正定矩阵. □