


0.1 著名积分不等式

定理 0.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0, +\infty), (p_i)_{i=1}^n \subset (1, +\infty), \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

且等号成立条件为所有 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 相等.

 **笔记** 最常用的是 Young 不等式的二元情形:

对任何 $a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ 有 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

证明 不妨设 $x_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$. 本结果可以取对数用 Jensen 不等式证明, 即

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \ln x_i^{p_i} \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i} \right),$$

而最后一个等价之后就是 \ln 的上凸性结合 Jensen 不等式给出. □

定义 0.1

(1) $d\mu = g(x)dx$, 这里 g 是一个在区间上内闭黎曼可积的函数.

(2) 若 $E \subset \mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)d\mu = \sum_{n \in E} f(n)$.

定理 0.2 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)g(x)d\mu \right)^2 \leq \int_E |f(x)|^2 d\mu \int_E |g(x)|^2 d\mu.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1, c_2 , 使得 $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$. ♥

证明 只需证

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leq \sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu} \sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}.$$

当 $\int_E |f(x)|d\mu$ 或 $\int_E |g(x)|d\mu = 0$ 时, 不等式右边为 0, 结论显然成立.

当 $\int_E |f(x)|d\mu \neq 0$ 且 $\int_E |g(x)|d\mu \neq 0$ 时, 不妨设 $\int_E |f(x)|^2 d\mu = \int_E |g(x)|^2 d\mu = 1$, 否则, 用 $\frac{f(x)}{\sqrt{\int_E |f(x)|^2 d\mu}}$ 代

替 $f(x)$, $\frac{g(x)}{\sqrt{\int_E |g(x)|^2 d\mu}}$ 代替 $g(x)$ 即可. 利用 Young 不等式可得


$$\int_E |f(x)||g(x)|d\mu \leq \int_E \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} d\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

等号成立当且仅当存在不全为零的 c_1, c_2 , 使得 $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$. □

定理 0.3 (Jensen 不等式 (积分形式))

设 φ 是下凸函数且 $p(x) \geq 0, \int_a^b p(x)dx > 0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi \left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \right) \leq \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \quad (1)$$

 **笔记** 1. 类似的对上凸函数, 不等式(1)反号.

2. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到, 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近.

3. Jensen 不等式 (积分形式) 考试中不能直接使用, 需要证明.

证明 为书写简便, 我们记 $d\mu = \frac{p(x)}{\int_a^b p(y)dy} dx$, 那么有 $\int_a^b 1d\mu = 1$. 于是我们记 $x_0 = \int_a^b f(x)d\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

就有

$$\int_a^b \varphi(f(x))d\mu \geq \int_a^b [\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(f(x) - x_0)]d\mu = \varphi(x_0) = \varphi\left(\int_a^b f(x)d\mu\right),$$

这就完成了证明. □

例题 0.1 对连续正值函数 f , 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)dx.$$

证明 令 $d\mu = \frac{1}{b-a} dx$, 则 $\int_a^b d\mu = 1$, 再令 $x_0 \triangleq \int_a^b f(x)d\mu > 0$, 则由 $\ln x$ 的上凸性可知

$$\ln x \leq \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \forall x > 0.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln f(x)d\mu &\leq \int_a^b \ln x_0 d\mu + \frac{1}{x_0} \int_a^b (f(x) - x_0)d\mu \\ &= \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \left(\int_a^b f(x)d\mu - x_0 \int_a^b d\mu \right) \\ &= \ln x_0 = \ln \int_a^b f(x)d\mu. \end{aligned}$$

故结论得证. □

定理 0.4 (Hold 不等式)

设 V 是 \mathbb{R}^n 中有体积的有界集, f 和 g 都在 V 上可积, 又设 p, q 是满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正数, 且 $p > 1$, 则有

$$\int_V |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_V |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为同一个常数时取等 (若一个取零, 则另一个也取零).



注 这是最重要的基本结论了 (必须掌握), 很多需要“调幂次”的积分不等式, 都得用赫尔德不等式, 同时这也是用来证明很多定理或者题目的工具, 也包括下面两个, 对于 $p \in (0, 1)$ 的情况会有反向赫尔德不等式.

证明 不妨设 $f, g \geq 0$, 否则用 $|f|, |g|$ 代替 f, g . 由 Young 不等式可知

$$f(x)g(x) \leq \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}.$$

由于 f, g 在 V 上都可积, 故可不妨设 $\int_V f^p(x)dx = \int_V g^q(x)dx = 1$, 否则用 $\frac{f}{(\int_V f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}}, \frac{g}{(\int_V g^q(x)dx)^{\frac{1}{q}}}$ 代替 f, g . 从而

$$\int_V f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{p} \int_V f^p(x)dx + \frac{1}{q} \int_V g^q(x)dx = 1 = \left(\int_V f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

如果上述不等式等号成立, 那么

$$f(x)g(x) \leq \frac{f^p(x)}{p} + \frac{g^q(x)}{q}$$

在 V 上几乎处处取等. 根据 Young 不等式的取等条件可知, 此即 $\frac{f^p(x)}{g^q(x)}$ 几乎处处为一个常数 (若一个取零, 则另一个也取零). \square

定理 0.5 (Minkowski 不等式)

若 f 是 $[a, b] \times [c, d]$ 上的非负连续函数, 则对 $p \geq 1$ 有 (若 $p \in (0, 1)$ 则不等式反向)

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$



笔记 证明的核心就一句话: 拆一个幂次出来, 然后换序, 再用赫尔德不等式.

注 注意观察, 积分顺序变了, 另外, 可以简单的记为“绝对值不等式”, 就像直觉那样, 先取绝对值再算积分要大 (先算积分再取绝对值要小), 用 p 范数来写会好记并且清晰:

$$\left\| \int_c^d f(x, y) dy \right\|_p \leq \int_c^d \|f(x, y)\|_p dy.$$

对于 $p \in (0, 1)$ 的情形, 证明方法是完全类似的, 只需要运用反向赫尔德不等式.

证明 假设 $p \geq 1$, 记 $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 换序并利用赫尔德不等式有

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy \cdot \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^{p-1} dx \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) g^{p-1}(x) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) g^{p-1}(x) dx dy \\ &\leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g^{q(p-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\ &= \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{\frac{1}{p}} dy. \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 进而 $q(p-1) = p$. 两边约掉 $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx$ 就有

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

\square

定理 0.6 (Hardy 不等式)

设 $p > 1$ 或 $p < 0$, $f(x)$ 恒正且连续, 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

\square

注 这个不等式及其离散形式经常会考, 证明的方法就是分部积分然后赫尔德 (连续版), 或者作差 (离散版) 然后求和再赫尔德, 结构是类似的, 系数也是最佳的, 不过并不能找到一个函数使得刚刚好取等, 只能是逼近取等, 另外 $p < 0$ 的情况证明完全类似, 利用反向赫尔德即可.

证明 假设 $p > 1$, 对任意 $M > 0$, 利用分部积分和赫尔德不等式有

$$\begin{aligned} \int_0^M \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx &= -\frac{1}{p-1} \int_0^M F^p(x) d \frac{1}{x^{p-1}} = -\frac{1}{p-1} \left(\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} \Big|_0^M - \int_0^M \frac{1}{x^{p-1}} dF^p(x) \right) \\ &= -\frac{1}{p-1} \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_0^M \frac{F^{p-1}(x)f(x)}{x^{p-1}} dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^M \left(\frac{F(x)}{x} \right)^{p-1} f(x) dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^M \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^M f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

其中利用了

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \left(\frac{F(x)}{x} \right)^{p-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

所以

$$\frac{F^p(x)}{x^{p-1}} \Big|_0^M = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F^p(x)}{x^{p-1}} = \frac{F^p(M)}{M^{p-1}}.$$

现在约掉相同的部分, 再令 $M \rightarrow \infty$ 就有

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

□

推论 0.1 (离散版 Hardy 不等式)

设数列 a_n 非负, 对任意 $p > 1$ 或者 $p < 0$, 都有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

♡

注 如果 $p < 0$, 则同样使用反向赫尔德不等式即可完成

证明 记 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 不妨设 $p > 1$, 利用均值不等式或者 Young 不等式容易证明

$$\frac{S_k^p}{k^p} - \frac{p}{p-1} \frac{S_k^{p-1}}{k^{p-1}} a_k \leq \frac{1}{p-1} \left((k-1) \frac{S_{k-1}^p}{(k-1)^p} - k \frac{S_k^p}{k^p} \right)$$

求和有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^{p-1} a_k.$$

效果上就和前面分部积分完全一样, 然后再用赫尔德不等式即可.

□