0.1 可测集与测度

定义 0.1 (可测集)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为 **Lebesgue 可测集** (或 **m^*-可测集**) 或 E **可测**, 简称为**可测集**, 其中 T 称为**试验集** (这一定义可测集的等式也称为 **Carathéodory 条件**). 可测集的全体称为**可测集类**, 简记为 $\mathscr{M}$.

定理 0.1 (集合可测的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $E \in \mathscr{M}$ 的充要条件是对任一点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(T) < +\infty$, 都有

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{1}$$

成立.

注 往后经常利用这个定理的充分性来证明一个集合可测. 但这个定理的必要性要弱于可测集的定义.

证明 必要性由可测集的定义立得. 下证充分性. 由外测度的次可加性可得

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \mathbb{R}^n\right) = m^*\left(T \cap (E \cup E^c)\right) = m^*\left((T \cap E) \cap (T \cup E^c)\right) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

总是成立的. 又因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (1) 式总成立, 故对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

即 $E \in \mathscr{M}$. □

定义 0.2 (零测集)

外测度为零的点集称为**零测集**.

注 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集. 从而根据外测度的次可加性知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集.

命题 0.1

1. 零测集的任一子集是零测集.
2. 零测集一定可测, 即若 $m^*(E) = 0$, 则 $E \in \mathscr{M}$.

证明

1. 由外测度的单调性立得.
2. 事实上, 此时我们有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T).$$

□

命题 0.2

若 $E_1 \subset S$, $E_2 \subset S^c$, $S \in \mathscr{M}$, 则有

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

注 这个命题表明: 当两个集合由一个可测集分离开时, 其外测度就有可加性.

证明 事实上, 此时取试验集 $T = E_1 \cup E_2$, 从 S 是可测集的定义得

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap S) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap S^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

□

推论 0.1

当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时, 对任一集合 T 有

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

证明 注意到 $T \cap E_1 \in E_1, T \cap E_2 \in E_1^c$, 而 $E_1 \in \mathscr{M}$, 故由命题 0.2可知

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*((T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

□

定理 0.2 (可测集的性质)

(1) $\varnothing \in \mathscr{M}$.

(2) 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $E^c \in \mathscr{M}$.

(3) 若 $E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$, 则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 以及 $E_1 \setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$. (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(4) 若 $E_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则其并集也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i),$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性 (或称为 $\sigma-$ 可加性).

证明

(1) 显然成立.

(2) 注意到 $(E^c)^c = E$, 从定义可立即得出结论.

(3) 对于任一集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 根据集合分解 (参阅图 1) 与外测度的次可加性, 我们有

$$\begin{aligned}
m^*(T) &\le m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\
&= m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
&\le m^*((T \cap E_1) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1) \cap E_2^c) \\
&\quad + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c).
\end{aligned}$$

又由 E_1, E_2 的可测性知, 上式右端就是

$$m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c) = m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T) = m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

也就是说 $E_1 \cup E_2$ 是可测集.

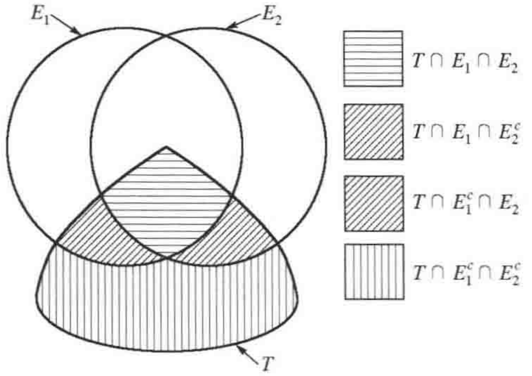

图 1

为证 $E_1 \cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ 即可. 又由 $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ 可知, $E_1 \setminus E_2$ 是可测集.

(4) 首先, 设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 皆互不相交, 并令

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由 (3) 知每个 S_k 都是可测集, 从而对任一集 T, 我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(T \cap S_k) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T \cap E_i)\right) + m^*(T \cap S_k^c) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S_k^c). \end{aligned}$$

由于 $T \cap S_k^c \supset T \cap S^c$, 可知

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

令 $k \to \infty$, 就有

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c).$$

由此可得

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c).$$

这说明 $S \in \mathscr{M}$.

此外, 在公式

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*(T \cap S^c)$$

中以 $T \cap S$ 替换 T, 则又可得

$$m^*(T \cap S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

但反向不等式总是成立的, 因而实际上有

$$m^*(T \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i).$$

在这里再取 T 为全空间 $\mathbb{R}^n$, 就可证明可数可加性质:

$$m^*(S) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

其次, 对于一般的可测集列 $\{E_i\}$, 我们令

$$S_1 = E_1, \quad S_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right), \quad k \geq 2,$$

则 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 而由 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ 可知, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集.

□

推论 0.2

$\mathscr{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数.

证明 由可测集的性质 (1)(2)(4)立得. □

命题 0.3

证明:Cantor 集 C 是可测的, 并且 $m(C) = 0$.

证明 开区间是可测的. 由开集构造定理, 我们知道 $\mathbb{R}$ 中的开集是开区间的可数并, 因此也可测. 因此, 闭集也是可测的. 显然, 每个 C_n 都是闭集. 并且

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

于是 C 也是闭集. 因此 C 是可测的.

下面, 我们用两种方法计算康托集的测度.

法一:根据我们的构造, C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 $1/3$ 的 C_n 的测度. 换言之,

$$m(C_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) m(C_n) = \frac{2}{3} m(C_n)$$

递归地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0) = 1 < \infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理,

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

此即得证.

法二:设 $n \geq 2$. C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间, 每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$. 因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

因此

$$m(C) = 1 - 1 = 0.$$

□

命题 0.4

$\mathscr{M}$ 的基数是 2^c.

证明 由命题 0.3可知 Cantor 集是零测集, 不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 2^c, 但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 2^c, 于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 2^c. □

定义 0.3 (Lebesgue 测度)

对于可测集 E, 其外测度称为**测度**, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

定义 0.4 (测度)

设 X 是非空集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集合函数, 且满足:

(i) $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$ $(E \in \mathscr{A})$;

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$;

(iii) μ 在 $\mathscr{A}$ 上是可数可加的,

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) **测度**. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) **可测集**, 有序组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 称为**测度空间**.

注 由推论 0.2可知 $\mathscr{M}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数, 故本节所建立的测度空间就是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{M}, m)$.