

0.1 矩阵的迹

命题 0.1 (矩阵迹的性质)

设 A, B 是 n 阶矩阵, 则有:

1. (线性) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$;
2. (对称性) $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$;
3. (交换性) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

证明 根据矩阵迹的定义及矩阵乘法的定义容易验证. □

命题 0.2 (矩阵迹的刻画)

设 K 为数域, $f: M_n(K) \rightarrow K$ 为一个映射, 且满足

- (1) $\forall A, B \in M_n(K), f(A+B) = f(A) + f(B)$;
- (2) $\forall k \in K, A \in M_n(K), f(kA) = kf(A)$;
- (3) $\forall A, B \in M_n(K), f(AB) = f(BA)$;
- (4) $f(I_n) = n$.

求证: f 就是迹映射, 即 $f(A) = \text{tr}(A)$ 对一切 \mathbb{F} 上 n 阶矩阵 A 成立.

笔记 这个命题给出了迹的刻画, 它告诉我们迹函数由线性、交换性和正规性 (即单位矩阵处的取值为其阶数) 唯一决定.

证明 设 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵. 由 (1) 和 (4), 有

$$n = f(I_n) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn}).$$

又由 (3), 有

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj}),$$

所以 $f(E_{ii}) = 1 (1 \leq i \leq n)$. 另一方面, 若 $i \neq j$, 则

$$f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(O) = f(0 \cdot I_n) = 0 \cdot f(I_n) = 0.$$

设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 则

$$f(A) = f\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A).$$

例题 0.1 求证: 不存在 n 阶矩阵 A, B , 使得 $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$.

证明 用反证法证明. 若存在 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $AB - BA = kI_n (k \neq 0)$, 则

$$kn = \text{tr}(kI_n) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

矛盾. □

命题 0.3

设 A 是 n 阶矩阵, P 是同阶可逆阵, 求证: $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$, 即相似矩阵具有相同的迹.

证明 因为 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 故 $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$. □

命题 0.4

1. 设 n 阶实矩阵 A 适合 $A' = -A$, 如果存在同阶实矩阵 B , 使得 $AB = B$, 则 $B = O$;
2. 设 n 阶复矩阵 A 适合 $\overline{A}' = -A$, 如果存在同阶复矩阵 B , 使得 $AB = B$, 则 $B = O$.

证明

1. 在等式 $AB = B$ 两边同时左乘 B' 可得

$$B'AB = B'B.$$

上式两边同时转置并注意到 $A' = -A$, 可得

$$B'B = (B'B)' = (B'AB)' = B'A'B = -B'AB = -B'B,$$

从而有 $B'B = O$. 两边同时取迹, 由零矩阵的充要条件可得 $B = O$.

2. 证明与 1 类似.

□

命题 0.5

1. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则 $\text{tr}(AA') \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = O$.
 2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则 $\text{tr}(A\bar{A}') \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = O$.

◆

证明 1. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(AA') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, 即 $A = O$.

2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 复矩阵, 则通过计算可得

$$\text{tr}(A\bar{A}') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0,$$

等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, 即 $A = O$.

□

命题 0.6

设 A 为 n 阶实矩阵, 求证: $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(AA')$, 等号成立当且仅当 A 是对称阵.

◆

证明 根据命题 0.5, 再由迹的线性、对称性、交换性和正定性可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{tr}((A - A')(A - A')') \\ &= \text{tr}((A - A')(A' - A)) = \text{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) \\ &= 2\text{tr}(AA') - 2\text{tr}(A^2), \end{aligned}$$

故要证的不等式成立. 若上述不等式的等号成立, 则由迹的正定性可知 $A - A' = O$, 即 A 为对称阵. 若已知 A 为对称阵, 则 $\text{tr}(AA') = \text{tr}(A^2)$ 显然成立.

□

例题 0.2 设 A_1, A_2, \dots, A_k 是实对称阵且 $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2 = O$, 证明: 每个 $A_i = O$.

证明 对题设中的等式两边同时取迹, 可得

$$0 = \text{tr}(O) = \text{tr}(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2) = \text{tr}(A_1A_1') + \text{tr}(A_2A_2') + \dots + \text{tr}(A_kA_k').$$

又由于 $\text{tr}(A_iA_i') \geq 0$, 从而只可能是 $\text{tr}(A_iA_i') = 0 (1 \leq i \leq k)$, 再次由零矩阵的充要条件可得 $A_i = O (1 \leq i \leq k)$.

□

命题 0.7

设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 使得 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA)$ 对任意 n 阶矩阵 C 成立, 求证: $AB = BA$.

◆

注 根据矩阵迹的性质不能得到 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$, 只能得到 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$.

证明 设 $AB = (d_{ij}), BA = (e_{ij})$, 令 $C = E_{kl} (1 \leq k, l \leq n)$, 则

$$\text{tr}(ABC) = d_{lk}, \text{tr}(CBA) = e_{lk},$$

因此 $d_{lk} = e_{lk} (1 \leq k, l \leq n)$, 即有 $AB = BA$.

□

注 若 A, B 是实(复)矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得 $\text{tr}((AB - BA)C) = 0$, 令 C 为 $AB - BA$ 的转置(共轭转置), 再由零矩阵的充要条件即得结论.

例题 0.3 若 n 阶实方阵 A 满足 $AA' = I_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 A, B 满足 $A^2 = cAB + B^2$, 其中 c 是非零常数.

证明 用反证法, 设存在 n 阶正交阵 A, B , 使得 $A^2 = cAB + B^2 (c \neq 0)$. 在等式两边同时左乘 A' , 右乘 B' , 可得 $AB' = cI_n + A'B$, 从而 $cI_n = A'B - AB'$. 两边同时取迹, 可得 $0 \neq nc = \text{tr}(cI_n) = \text{tr}(A'B) - \text{tr}(AB') = \text{tr}((A'B)') - \text{tr}(AB') = \text{tr}(B'A) - \text{tr}(AB') = 0$, 矛盾. \square

例题 0.4 设 A, B 为 n 阶实对称阵, 证明: $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2B^2)$, 并求等号成立的充要条件.

证明 **证法一:** 由命题 0.6, 再结合 A, B 的对称性可得

$$\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}((AB)(AB)') = \text{tr}(ABBA) = \text{tr}(A^2B^2).$$

等号成立当且仅当 AB 也为实对称矩阵, 即 $AB = B'A' = BA$.

证法二: 证法 2 设 P 为正交矩阵, 使得 $P'AP = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 注意到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $A \mapsto P'AP, B \mapsto P'BP$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 A 为正交相似标准型 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 设 $B = (b_{ij})$, 则经计算可知

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2B^2) - \text{tr}((AB)^2) &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^2 b_{ij}^2 - \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j b_{ij}^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i \lambda_j) b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 b_{ij}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$, 这也当且仅当 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 即当且仅当 $AB = BA$ 成立. \square