0.1 曲线和区域

定义 0.1 (连续曲线)

所谓**连续曲线**, 是指定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一个复值连续函数 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, 写为

$$z=\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

这里 $x(t)$,$y(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

如果用 γ^* 记 γ 的像点所成的集合:

$$\gamma^*=\{\gamma(t):a\leqslant t\leqslant b\},$$

那么 γ^* 是 $\mathbb{C}$ 上的紧集. 曲线 γ 的方向就是参数 t 增加的方向, 在这个意义下,$\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 分别称为 γ 的**起点**和**终点**.

如果 $\gamma(a)=\gamma(b)$, 即起点和终点重合, 就称 γ 为**闭曲线**.

如果曲线 γ 仅当 $t_1=t_2$ 时才有 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**.

如果只有当 $t_1=a$,$t_2=b$ 时才有 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, 就称 γ 为**简单闭曲线**或 **Jordan 闭曲线**, 或简称**围道**.

沿着一条简单闭曲线 C 有两个相反的方向, 其中一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时,C 的内部一直在 C 的左方, 称为**正方向**; 另一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时,C 的外部一直在 C 的左方, 称为**负方向** (见图 1). 记曲线 C 的负方向曲线为 C^- 或 $-C$.

♣

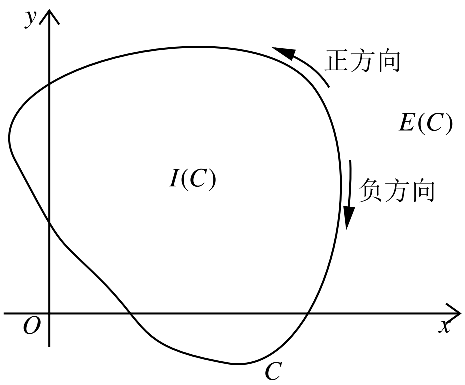

图 1

定义 0.2

设区域 D 的边界 L 由一条或几条光滑曲线所组成. 边界曲线的**正方向**规定为: 当人沿边界行走时, 区域 D 总在他的左边, 如图 2所示. 与上述规定的方向相反的方向称为**负方向**. 记区域 D 的边界 L 的负方向曲线为 L^- 或 $-L$.

♣

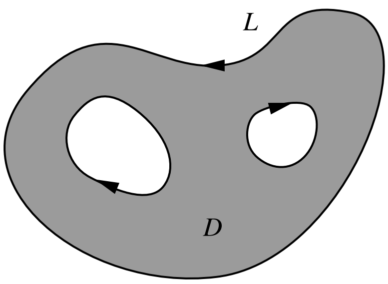

图 2

定义 0.3

设 $z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是复平面内一条曲线. 对区间 $[a,b]$ 作分割 $T: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 得到以 $z_k=\gamma(t_k)(k=0,1,\cdots,n)$ 为顶点的折线 P, 那么 P 的长度为

$$|P|=\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

如果不论如何分割区间 $[a,b]$, 所得折线的长度都是有界的, 就称曲线 γ 是**可求长的**,γ 的长度定义为 $|P|$ 的上确界, 即

$$\sup_{T}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

如果 $\gamma'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$ 存在, 且 $\gamma'(t)\neq 0$, 那么 γ 在每一点都有切线,$\gamma'(t)$ 就是曲线 γ 在 $\gamma(t)$ 处的切向量, 它与正实轴的夹角为 $\operatorname{Arg}\gamma'(t)$. 如果 $\gamma'(t)$ 是连续函数, 那么 γ 的切线随 t 而连续变动, 这时称 γ 为**光滑曲线**. 在这种情况下,γ 的长度为

$$\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=\int_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

曲线 γ 称为**逐段光滑的**, 如果存在 $t_0,t_1,\cdots,t_n$, 使得 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,γ 在每个参数区间 $[t_{j-1},t_j]$ 上是光滑的, 在每个分点 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 处 γ 的左右导数存在. ♣

定义 0.4

平面点集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 称为是**连通的**, 如果对任意两个不相交的非空集 E_1 和 E_2, 满足

$$E=E_1\cup E_2,$$

那么 E_1 必含有 E_2 的极限点, 或者 E_2 必含有 E_1 的极限点. 也就是说,$E_1\cap\overline{E_2}$ 和 $\overline{E_1}\cap E_2$ 至少有一个非空. ♣

命题 0.1

$\mathbb{C}$ 中的开集 E 是连通的充分必要条件是 E 不能表示为两个不相交的非空开集的并. ♠

证明 设开集 E 是连通的, 如果存在不相交的非空开集 E_1 和 E_2, 使得 $E=E_1\cup E_2$. 由于 E_1 中的点都是 E_1 的内点,E_2 中的点都是 E_2 的内点, 因此 E_1 中没有 E_2 的极限点,E_2 中也没有 E_1 的极限点, 这与 E 的连通性相矛盾. 这就证明了条件的必要性. 反之, 如果开集 E 是不连通的, 则必存在不相交的非空集 E_1 和 E_2, 使得 $E=E_1\cup E_2$, 且 E_1 中无 E_2 的极限点,E_2 中无 E_1 的极限点. 由此可见,E_1 和 E_2 均为开集. 这就证明了条件的充分性.

□

定理 0.1

平面上的非空开集 $E\subseteq\mathbb{C}$ 是连通的充分必要条件是:E 中任意两点可用位于 E 中的折线连接起来. ♡

证明 先证必要性. 设 E 是平面上一个非空的连通的开集, 任取 $a\in E$, 定义 E 的子集 E_1,E_2 如下:

$$E_1=\{z\in E: z\text{ 和}a\text{ 可用位于}E\text{ 中的折线连接}\},$$

$$E_2=\{z\in E: z\text{ 和}a\text{ 不能用位于}E\text{ 中的折线连接}\}.$$

显然,$E=E_1\cup E_2$, 而且 $E_1\cap E_2=\varnothing$. 现在证明 E_1 和 E_2 都是开集. 任取 $z_0\in E_1$, 因 E 是开集, 故必有 z_0 的邻域 $B(z_0,\delta)\subset E$. 这一邻域中的所有点当然可用一条线段与 z_0 相连, 因而可用位于 E 中的折线与 a 相连, 即 $B(z_0,\delta)\subset E_1$, 所以 E_1 是开集. 再任取 $z_0'\in E_2$, 则必有 z_0' 的邻域 $B(z_0',\delta')\subset E$, 如果此邻域中有一点能用一条折线与 a 点相连, 那么 z_0' 能用线段与该点相连, 因而 z_0' 能用折线与 a 点相连, 这与 z_0' 的定义矛盾. 因而 $B(z_0',\delta')\subset E_2$, 即 E_2 也是开集. 由 E 的连通性知道,E_1,E_2 中必有一个是空集. 由于 $a\in E_1$, 故 E_2 是空集. 因而 E 中所有点都能用折线与 a 相连, 而 E 中任意两点可以用经过 a 的折线相连, 这就证明了必要性.

再证条件的充分性. 如果存在两个不相交的非空开集 E_1,E_2, 使得 $E=E_1\cup E_2$. 任取 $z_1\in E_1$,$z_2\in E_2$, 由假定,

这两点可用 E 中的折线连接, 因而折线中必有一条线段把 E_1 中的一点与 E_2 中的一点连接起来. 不妨设这条线段连接的就是 z_1 和 z_2, 该线段的参数表示为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

其中,$t \in [0,1]$. 令设

$$T_1 = \{t \in (0,1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_1\},$$

$$T_2 = \{t \in (0,1) : z_1 + t(z_2 - z_1) \in E_2\}.$$

则 T_1,T_2 是非空的不相交的开集, 而且 $T_1 \cup T_2 = (0,1)$, 这与区间的连通性相矛盾.

□

定义 0.5 (区域)

非空的连通开集称为**区域**. 若 E, D 都是区域且 $E \subseteq D$, 则称 E 是 D 的**子区域**.
区域 D 并上它的边界 ∂D 称为**闭域**, 记为 $\overline{D} = D \cup \partial D$.

♣

笔记 从定理 0.1知道, 区域中任意两点必可用位于区域中的折线连接起来.

从几何上来看, 一个区域就是平面上连成一片的开集. 例如, 单位圆的内部、上半平面、下半平面等都是区域的例子.

定理 0.2 (Jordan 定理)

复平面内任一简单闭曲线 C 将 z 平面惟一地分成 $C, I(C)$ 及 $E(C)$ 三个点集, 即 $\mathbb{C} = C \cup I(C) \cup E(C)$. 它们具有如下性质:

(1) 彼此不交.
(2) $I(C)$ 是一个有界区域, 称为 C 的**内部**.
(3) $E(C)$ 是一个无界区域, 称为 C 的**外部**.
(4) C 是 $I(C), E(C)$ 的共同边界. 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$, 另一个端点属于 $E(C)$, 则 P 必与 C 有交点.

♡

笔记 单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$ 和圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 都是区域, 但它们从函数论的角度来看有很大的差别, 原因是前者是单连通的, 而后者则不是.

证明

□

定义 0.6

区域 D 称为是**单连通区域**, 如果 D 内任意简单闭曲线的内部仍在 D 内. 不是单连通的区域称为是**多连通区域**.
所含不止一个点的闭集 E, 如果不能划分为两个无公共点的非空闭集, 则称 E 为**连续点集**. 空集与所含只有一个点的集, 称为**退化连续点集**.
若区域 D 的边界是互不相交的两个、三个 $\cdots\cdots n$ 个连续点集, 则分别称 D 为**二连通、三连通** $\cdots\cdots n$ **连通的区域**.

♣

注 简单闭曲线中也可以有退化成一条简单曲线或一点的, 即一条简单曲线或一点也是简单闭曲线.

笔记 显然在简单闭曲线 C 的内部 $I(C)$ 无论怎样画简单闭曲线 Γ, 都有 Γ 的内部 $I(\Gamma)$ 必全含于 $I(C)$.

例题 0.1 单位圆盘是单连通的, 圆环 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 是二连通的, 除去圆心的单位圆盘也是二连通的, 除去圆心和线段 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 的单位圆盘则是一个三连通区域.