0.1 复数的几何表示

定义 0.1

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 惟一地确定,(x,y) 就称为复数 z 的实数对形式. 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y.z$ 的极坐标设为 (r,θ), 那么 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数, 故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 $\mathbb{C}$ 表示.

在复平面上, 从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 这种对应关系使复数的加 (减) 法与向量的加 (减) 法之间保持一致.

♣

注 容易知道, 由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2, 那么这个向量所表示的复数便是 z_2-z_1, 因而 $|z_2-z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地, 当一个向量的起点为原点时, 它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道, 前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的: 把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点, 以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形, 那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2; 以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 z_1-z_2(图 1). 现在再来看命题**??**(ii) 的不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, 它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

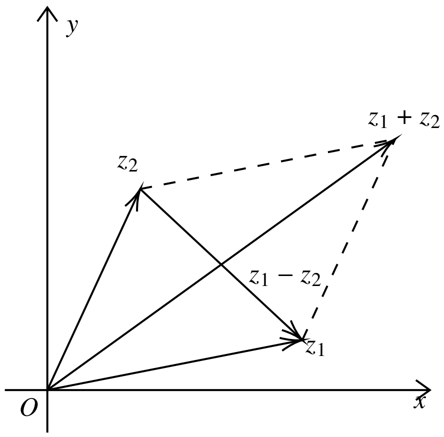

图 1

定义 0.2 (辐角)

设 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可写成极坐标形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \text{其中} r=|z|, \theta=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}.$$

称 θ 为复数 z 的**辐角**, 记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 显然

$$\mathrm{Arg}z=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}.$$

因此 z 的辐角有无穷多个. 但只有一个辐角在 $(-\pi,\pi]$ 中, 称这个辐角为 z 的**辐角主值**, 记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}.$$

注意 0 的辐角没有意义.

♣

注 设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}/\{0\}$, 注意到 $-\pi<\arg z\leqslant\pi, -\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$, 故 z 的主辐角与反正切 $\arctan\frac{y}{x}$ 的关系如下:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0, y\in\mathbb{R};\\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0;\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0;\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases}\quad (z\neq 0)$$

定理 0.1

设 z_1, z_2 是两个复数, 则

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$.

(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

(3) $\mathrm{Arg}\,(\alpha z)=\mathrm{Arg}z\,(\alpha>0),\quad \mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z\,(n\in\mathbb{N})$.

笔记 在 (1) 中, 第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说, 两个复数的乘积是这样一个复数, 它的模是两个复数的模的乘积, 它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看, 用复数 w 乘复数 z, 相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角, 再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地, 如果 w 是单位向量, 那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如, 已知 i 是单位向量, 它的辐角为 $\frac{\pi}{2}$, 因此 $\mathrm{i}z$ 就是把 z 按反时针方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

在 (2) 中, 第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示, 这一简单的事实在讨论某些几何问题时很有用.

证明 为了说明复数乘法的几何意义, 我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

(1) 注意到

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

(2) 由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

(3)

□

命题 0.1

(1) $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, 则

(i) $z_1\perp z_2\iff z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0\iff \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

(ii) $z_1\parallel z_2\iff\iff z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0\iff \mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

(2) 证明:$\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(3) 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $z_1 \neq z_2$, 证明:

(i) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开线段上, 当且仅当存在 $\lambda \in (0,1)$, 使得

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2;$$

(ii) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开圆弧上, 当且仅当存在 $\theta\ (0 < |\theta| < \pi)$, 使得

$$\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \theta.$$

(4) 证明: 三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 证明: 平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件为

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \tag{1}$$

证明

(1) (i) 证法一:注意到

$$z_1 \perp z_2 \Longleftrightarrow \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \pm \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \pm \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \mathrm{i}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{两端平方}} \frac{z_1^2}{z_2^2} = -\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = -\frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Longleftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0.$$

证法二: 由勾股定理知

$$z_1 \perp z_2 \iff |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0 \iff z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0.$$

(ii) 注意到

$$z_1 \mathbin{/\!/} z_2 \Longleftrightarrow \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \pm \pi \Longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \pm \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$$\xLeftrightarrow{\text{两端平方}} \frac{z_1^2}{z_2^2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Longleftrightarrow z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(z_1\overline{z_2}) = 0.$$

(2) $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似等价于

$$\begin{cases} \angle z_3 = \arg\left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \arg\left(\dfrac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}\right) = \angle w_3, \\ \dfrac{|z_1 - z_3|}{|w_1 - w_3|} = \dfrac{|z_2 - z_3|}{|w_2 - w_3|} \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{z_1 - z_3}{w_1 - w_3} = \frac{z_2 - z_3}{w_2 - w_3}$$

$$\Longleftrightarrow (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) = (z_2 - z_3)(w_1 - w_3).$$

又

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & w_1 - w_3 & 0 \\ z_2 - z_3 & w_2 - w_3 & 0 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & w_1 - w_3 \\ z_2 - z_3 & w_2 - w_3 \end{vmatrix} = (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) - (z_2 - z_3)(w_1 - w_3),$$

故

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (z_1 - z_3)(w_2 - w_3) = (z_2 - z_3)(w_1 - w_3).$$

因此结论得证.

(3) (i) z 位于 z_1 和 z_2 为端点的开线段上等价于 $z - z_1$ 和 $z_2 - z$ 两个非零向量共线, 也等价于

$$\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \text{s.t. } z - z_1 = k(z_2 - z), \text{即} z = \frac{1}{1+k} z_1 + \frac{k}{1+k} z_2.$$

令 $\lambda = \dfrac{1}{1+k} \in (0,1)$, 则上式等价于

$$\exists \lambda \in (0,1),\ \text{s.t. } z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2.$$

反之, 则令 $k = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii)

(4)

(5) 从图 2可以看出,z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件是向量 $z_1 - z_3$ 和 $z_1 - z_4$ 的夹角等于向量 $z_2 - z_3$ 和 $z_2 - z_4$ 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 此时由命题 0.1(1)立得. 即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pm\pi.$$

这说明复数 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ 在实轴上, 因而等式(1)成立.

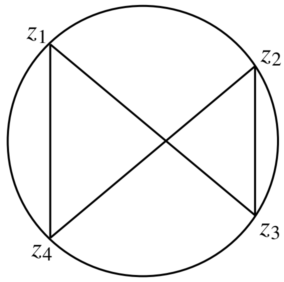

图 2

□

例题 0.1 在图 3的三角形中,$AB = AC$,$PQ = RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN \perp BC$.

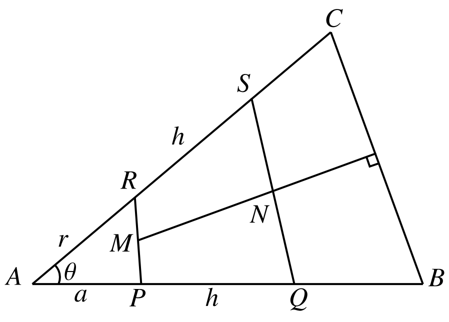

图 3

证明 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴, 那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 记 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点, 所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M : \frac{1}{2}(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

$$N:\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}].$$

若记 $z_1=\overrightarrow{MN}$, 则

$$z_1=\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]-\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b, 因为 $AB=AC$, 所以 C 的坐标为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若记 $z_2=\overrightarrow{BC}$, 则

$$z_2=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-b=b(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1).$$

现在

$$z_1\bar{z}_2=\frac{h}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1)=\frac{bh}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=-\mathrm{i}bh\sin\theta,$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 所以由命题 0.1(1)可知 z_1 垂直 z_2, 即 $MN\perp BC$.

□

定理 0.2 (De Moivre 公式)

对任意整数 n, 都有 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

证明 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\cdots,z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$ 是给定的 n 个复数, 容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n=r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$

特别当 $z_1=\cdots=z_n$ 都是单位向量时, 就有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

其实, 对于负整数, 上面的公式也成立:

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-n}=\frac{1}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta}=\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta=\cos(-n)\theta+\mathrm{i}\sin(-n)\theta.$$

□

命题 0.2

设 w 是一个复数, 则满足方程 $z^n=w$ 的复数根有 n 个, 即

$$z=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

注 这 n 个复数恰好是以原点为中心、$\sqrt[n]{|w|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点. 当 $w=1$ 时, 若记 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则 $\sqrt[n]{1}$ 的 n 个值为

$$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},$$

称为 n 个单位根. 如果用 $\sqrt[n]{w}$ 记 w 的任一 n 次根, 那么 w 的 n 个 n 次根又可表示为

$$\sqrt[n]{w},\ \sqrt[n]{w}\omega,\cdots,\ \sqrt[n]{w}\omega^{n-1}.$$

证明 现在设 $w=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 是给定的, 要求的 $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 由 De Moivre 公式,$z^n=w$ 等价于

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\Longleftrightarrow\begin{cases}\rho^n\cos n\varphi=r\cos\theta\\ \rho^n\sin n\varphi=r\sin\theta\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\rho^n=r\\ \cos n\varphi=\cos\theta\\ \sin n\varphi=\sin\theta\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ n\varphi=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

故方程 $z^n = w$ 的根为

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

对 $\forall k \geq n$, 都存在 $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$, 使 $k = p_k n + q_k$. 于是

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2q_k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2q_k\pi}{n}\right).$$

又注意到 $\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, n-1$ 互不相同, 故方程 $z^n = w$ 的根只有 n 个, 即

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

$\square$