## 0.1 复系数多项式

**定理 0.1 (代数基本定理)**

次数大于零的复数域上的一元多项式至少有一个复数根。

**证明** 设复数域上的 $n$ 次多项式为

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0 \tag{1}$$

首先证明，必存在一个复数 $z_0$，使对一切复数 $z$，有

$$|f(z)|\geq|f(z_0)|$$

令 $z=x+iy$，其中 $x,y$ 是实变量。展开 $f(x+iy)$ 并分开实部和虚部，则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

其中 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 为实系数二元多项式函数。又

$$|f(z)|=\sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}$$

是一个二元连续函数，但

$$\begin{aligned}|f(z)|&=|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geq|a_nz^n|-|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geq|z|^n\left(|a_n|-\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|-\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right),\end{aligned}$$

因此当 $|z|\to\infty$ 时，$|f(z)|\to\infty$。于是必存在一个实常数 $R$，当 $|z|\geq R$ 时，$|f(z)|$ 充分大，因此 $|f(z)|$ 的最小值必含于圆圈 $|z|\leq R$ 中。但这是平面上的一个闭区域，因此必存在 $z_0$ 使 $|f(z_0)|$ 为最小。

接下来要证明 $f(z_0)=0$。用反证法，即若 $f(z_0)\neq0$，则必可找到 $z_1$，使 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$，这样就与 $|f(z_0)|$ 是最小值相矛盾。将 $z=z_0+h$ 代入 (**??**)式便可得到一个关于 $h$ 的 $n$ 次多项式：

$$f(z_0+h)=b_nh^n+b_{n-1}h^{n-1}+\cdots+b_1h+b_0. \tag{2}$$

当 $h=0$ 时，$f(z_0)=b_0$，由假设 $f(z_0)\neq0$，故

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=\frac{b_n}{f(z_0)}h^n+\frac{b_{n-1}}{f(z_0)}h^{n-1}+\cdots+\frac{b_1}{f(z_0)}h+1$$

$b_1,b_2,\ldots,b_n$ 中有些可能为零，但绝不全为零。设 $b_k$ 是第一个不为零的复数，则

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\cdots+c_nh^n \tag{3}$$

其中 $c_j=\frac{b_j}{f(z_0)}$。令 $d=\sqrt[k]{\frac{1}{|c_k|}}$，$h=ed$ 代入(**??**)式得

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1-e^k+e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}e+\cdots)$$

取充分小的正实数 $e$（至少小于 1），使

$$e(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)<\frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right|&\leq|1-e^k|+|e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}e+\cdots)|\\&\leq1-e^k+e^{k+1}(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)\\&<1-e^k+\frac{1}{2}e^k\\&=1-\frac{1}{2}e^k<1\end{aligned}$$

将这样的 $e$ 代入 $h = ed$，得

$$|f(z_0 + ed)| < |f(z_0)|$$

这就推出了矛盾。

**推论 0.1**

1. 复数域上的一元 $n$ 次多项式恰有 $n$ 个复根（包括重根）。
2. 复数域上的不可约多项式都是一次多项式。
3. 复数域上的一元 $n$ 次多项式必可分解为一次因式的乘积。

**定理 0.2 (Vieta 定理)**

若数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 $n$ 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},\\
&\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned}$$

**证明** $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，将这个式子的右边展开与 $f(x)$ 比较系数即得结论。

**例题 0.1**

(1) 设三次方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的 3 个根成等差数列，求证：

$$2p^3 - 9pq + 27r = 0$$

(2) 设三次方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ $(r \neq 0)$ 的 3 个根成等比数列，求证：

$$rp^3 = q^3$$

(3) 设多项式 $x^3 + 3x^2 + mx + n$ 的 3 个根成等差数列，多项式 $x^3 - (m-2)x^2 + (n-3)x + 8$ 的 3 个根成等比数列，求 $m$ 和 $n$。

**证明**

(1) 设方程的 3 个根为 $c-d, c, c+d$，则由 Vieta 定理可得

$$\begin{cases} 3c = -p,\\ 3c^2 - d^2 = q,\\ c(c^2-d^2) = -r \end{cases}$$

由此可得 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$

(2) 设方程的 3 个根为 $\frac{c}{d}, c, cd$，则由 Vieta 定理可得

$$\begin{cases} \frac{c}{d} + c + cd = -p,\\ \frac{c^2}{d} + c^2 + c^2d = q,\\ \frac{c^3}{d} = -r \end{cases}$$

由此可得 $rp^3 = q^3$

(3) 由 (1)(2) 可知，$m, n$ 应满足如下关系：

$$\begin{cases} m = n+2,\\ -8(m-2)^3 = (n-3)^3 \end{cases}$$

若 $n-3=-2(m-2)$，则可联立求得 $m=3,n=1$。

若 $n-3=-2\omega(m-2)$，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则可联立求得 $m=2-\sqrt{3}i,n=-\sqrt{3}i$。

若 $n-3=-2\omega^2(m-2)$，则可联立求得 $m=2+\sqrt{3}i,n=\sqrt{3}i$

**例题 0.2** 设 $x_1,x_2,x_3$ 是三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0\ (r\neq 0)$ 的 3 个根，求这 3 个根倒数的平方和。

**证明** 由 Vieta 定理可得

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}$$

**例题 0.3** 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根为 $x_1,x_2,x_3$，求一个三次方程使其根为 $x_1^3,x_2^3,x_3^3$。

**笔记** 利用代数恒等式:$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ac)+3abc$ 得到

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3.$$

$$x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^3-3x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1^3x_3^3x_2^3x_3^3.$$

即可由 Vieta 定理得到结果.

**证明** 由 Vieta 定理经计算可得

$$\begin{cases} x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p^3+3pq-3r, \\ x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=q^3-3pqr+3r^2, \\ x_1^3x_2^3x_3^3=-r^3 \end{cases}$$

因此，以 $x_1^3,x_2^3,x_3^3$ 为根的三次方程为

$$x^3+(p^3-3pq+3r)x^2+(q^3-3pqr+3r^2)x+r^3=0$$

**例题 0.4** 设多项式 $x^3+px^2+qx+r$ 的 3 个根都是实数，求证：$p^2\geq 3q$。

**证明** 设多项式的 3 个根为 $x_1,x_2,x_3$，由已知条件可知：

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2\geq 0$$

用 Vieta 定理可计算出

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2&=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)\\&=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=2(p^2-3q).\end{aligned}$$

因此结论为真。

**例题 0.5** 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 $n$ 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 皆不等于零，求以 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$ 为根的多项式。

**证明** 令

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

则

$$x^ng\left(\frac{1}{x_i}\right)=a_0+a_1x_i+\cdots+a_{n-1}x_i^{n-1}+a_nx_i^n=f(x_i)=0$$

因为 $x_i\neq 0$，故 $g\left(\frac{1}{x_i}\right)=0$，即 $g(x)$ 的根为 $f(x)$ 根之倒数。

**例题 0.6** 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的可约多项式，求证：多项式 $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $\mathbb{F}$ 上也可约。

**证明** 设 $f(x)=p(x)q(x)$，其中 $\deg p(x)=m,\deg q(x)=n-m,0<m<n$，则

$$g(x)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=x^np\left(\frac{1}{x}\right)q\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x^mp\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x^{n-m}q\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

因此 $g(x)$ 也可约.