

## 0.1 伴随矩阵

### 定义 0.1 (伴随矩阵定义)

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 若

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式. 则称  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵.

### 定理 0.1

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

- (i)  $AA^* = A^*A = |A|I_n$ .
- (ii) 当  $A$  可逆时, 有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$ .

**证明** 由伴随矩阵的定义不难证明. □

### 命题 0.1

设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 满足  $A^m = I_n$ , 则  $(A^*)^m = I_n$ . ▲

**证明** 由  $A^m = I_n$  得  $|A|^m = 1 \neq 0$ , 于是矩阵  $A$  可逆. 又  $A^* = |A|A^{-1}$ , 故  $(A^*)^m = |A|^m(A^{-1})^m = (A^m)^{-1} = I_n$ . □

### 定理 0.2 (矩阵乘积的伴随)

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则  $(AB)^* = B^*A^*$ . ♥

**证明** 证法一 (Cauchy-Binet 公式推论): 设  $C = AB$ . 记  $M_{ij}, N_{ij}, P_{ij}$  分别是  $A, B, C$  中第  $(i, j)$  元素的余子式,  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  分别是  $A, B, C$  中第  $(i, j)$  元素的代数余子式. 注意到

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

$B^*A^*$  的第  $(i, j)$  元素为  $\sum_{k=1}^n B_{ki}A_{jk}$ . 而  $C^*$  的第  $(i, j)$  元素就是  $C_{ji} = (-1)^{j+i}P_{ji}$ .

由 Cauchy-Binet 公式推论可得

$$\begin{aligned} C_{ji} &= (-1)^{j+i}P_{ji} = (-1)^{j+i} \sum_{k=1}^n M_{jk}N_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{i+k}N_{ki} = \sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki} \end{aligned}$$

故结论成立.

证法二 (摄动法): 若  $A, B$  均为非异阵, 则  $A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$ , 从而

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*.$$

由命题??, 可知对于一般的方阵  $A, B$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  与  $t_k I_n + B$  均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_k I_n + A)(t_k I_n + B))^* = (t_k I_n + B)^*(t_k I_n + A)^*.$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $(AB)^* = B^* A^*$  成立. □

### 定理 0.3 (伴随矩阵的秩)

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

$$\text{rank} A^* = \begin{cases} n, & \text{rank} A = n, \\ 1, & \text{rank} A = n - 1, \\ 0, & \text{rank} A < n - 1. \end{cases}$$

**证明** 当  $\text{rank} A = n$  时, 则  $|A| \neq 0, A$  可逆, 又  $AA^* = A^*A = |A|I_n$ , 两边同时取行列式, 可得  $|A^*| \cdot |A| = |A^*A| = ||A|I_n| = |A|^n$ , 于是  $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$ . 所以  $\text{rank} A^* = n$ .

当  $\text{rank} A = n - 1$  时,  $A$  至少存在一个  $n - 1$  阶子式不等于 0, 故  $A^* \neq 0$ , 即  $\text{rank} A^* \geq 1$ ; 由  $\text{rank} A < n$  知  $|A| = 0$ , 从而  $AA^* = |A|E = 0$ , 故由定理??可知  $\text{rank} A^* \leq n - \text{rank} A = 1$ , 于是  $\text{rank} A^* = 1$ . (另证: 若  $A$  的秩等于  $n - 1$ , 则由命题??可知  $A^*$  的  $n$  个列向量都成比例且至少有一列不为零, 故  $A^*$  的秩等于 1.)

当  $\text{rank} A < n - 1$  时,  $A$  的所有  $n - 1$  阶子式均等于 0, 即  $A^* = 0$ , 故  $\text{rank} A^* = 0$ . □

### 命题 0.2 (伴随矩阵的性质)

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $n \geq 2$ , 则

1.  $(A^T)^* = (A^*)^T$ .
2.  $(kA)^* = k^{n-1}A^*, k$  为常数.
3. 若  $A$  为可逆阵, 则  $A^*$  也可逆, 并且  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
4.  $(A^m)^* = (A^*)^m, m$  为正整数.
5. 若  $A$  可逆, 则  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .
6.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ .

**证明**

1. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
2. 由伴随矩阵的定义及行列式的性质即得.
3. 由定理 0.2 可知  $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I_n^* = I_n$ . 从而  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
4. 多次利用定理 0.2 即得.
5. **证法一:** 当  $A$  可逆时, 有  $A^* = |A|A^{-1}$ , 从而  $|A^*| = |A|^{n-1}$ ; 当  $A$  不可逆时, 有  $\text{rank} A < n$ , 由定理 0.3 知  $\text{rank} A^* < n$ . 于是  $|A^*| = |A| = 0$ , 故  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .  
**证法二:** 若  $A$  是非异阵, 有  $A^* = |A|A^{-1}$ , 从而  $|A^*| = |A|^{n-1}$ . 对于一般的方阵  $A$ , 由命题??可知, 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$|(t_k I_n + A)^*| = |t_k I_n + A|^{n-1}.$$

注意到上式两边均为行列式的幂次, 其值都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限 (上式两边都是关于  $t_k$  的多项式函数), 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $|A^*| = |A|^{n-1}$  成立.

6. **证法一:** 当  $A$  可逆时,  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ , 从而由伴随矩阵的性质 5. 得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A.$$

当  $A$  不可逆时, 则  $|A| = 0$ , 且由定理 0.3 及  $n \geq 2$  知  $\text{rank} A^* \leq 1 < n - 1$ , 从而  $\text{rank}(A^*)^* = 0$ , 即  $(A^*)^* = 0$ , 因此  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ .

证法二: 若  $A$  是非异阵,  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ , 从而由伴随矩阵的性质 5. 得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A.$$

对于一般的方阵  $A$ , 由命题 ?? 可知, 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + A$  为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$((t_k I_n + A)^*)^* = |t_k I_n + A|^{n-2}(t_k I_n + A).$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式 (上式两边的矩阵每个元素都是关于  $t_k$  的多项式函数), 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$  成立.

□

### 命题 0.3 (伴随矩阵的继承性)

1. 对角矩阵的伴随矩阵是对角矩阵;
2. 对称矩阵的伴随矩阵是对称矩阵;
3. 上(下)三角矩阵的伴随矩阵是上(下)三角矩阵;
4. 可逆矩阵的伴随矩阵是可逆;
5. 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵;
6. 半正定(正定)矩阵的伴随矩阵是半正定(正定)矩阵;
7. 可对角化矩阵的伴随矩阵是可对角化矩阵.

▲

**证明** 设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ ,  $n \geq 2$ .

1. 若  $A$  为对角矩阵, 则  $a_{ij} = 0 (i \neq j)$ , 从而  $i \neq j$  时,  $M_{ij}$  是对角行列式, 且主对角元必有零, 即  $M_{ij} = 0$ , 故  $A_{ij} = 0$ , 于是  $A^*$  为对角矩阵.
2. 若  $A$  为对称矩阵, 则  $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 因此  $i, j = 1, 2, \dots, n$  时,  $M_{ij}$  是对称行列式, 从而  $A_{ij} = A_{ji}$ , 即  $A^*$  为对称矩阵.
3. 若  $A$  为上三角矩阵, 则  $1 \leq j < i \leq n$  时,  $a_{ij} = 0$ , 所以  $1 \leq i < j \leq n$  时,  $M_{ij}$  是上三角行列式, 且主对角元必有零, 即  $M_{ij} = 0$ , 从而  $A_{ij} = 0$ , 所以  $A^*$  为上三角矩阵. 同理可证: 下三角矩阵的伴随矩阵是下三角矩阵.
4. 由  $|A| \neq 0$  和  $A^* = |A|A^{-1}$  即知.
5. 因为  $A$  为正交矩阵等价于  $A^{-1} = A^T$ , 所以  $|A|^{-1} = |A|$ . 从而由定理 0.1(ii), 有

$$(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A = (|A|A^T)^T = (A^*)^T,$$

故  $A^*$  为正交矩阵.

6. 由于  $A$  为半正定矩阵等价于存在实矩阵  $C$ , 使得  $A = C^T C$ , 因此由定理 0.2 和伴随矩阵的性质 1., 有

$$A^* = (C^T C)^* = C^*(C^T)^* = C^*(C^*)^T,$$

于是  $A^*$  为半正定矩阵. 当  $A$  为正定矩阵时, 同理可证  $A^*$  为正定矩阵.

7. 若  $A$  可对角化, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P \Lambda P^T$ , 其中  $\Lambda$  为对角矩阵, 从而由定理 0.2 和伴随矩阵的性质 1., 有

$$A^* = (P^T)^* \Lambda^* P^* = (P^*)^T \Lambda^* P^*,$$

再根据伴随矩阵的继承性 1. 和伴随矩阵的性质 3., 知  $\Lambda^*$  为对角矩阵,  $P^*$  为可逆矩阵, 故  $A^*$  可对角化.

□

**命题 0.4 (分块矩阵的伴随矩阵)**

设  $A$  为  $m$  阶矩阵,  $B$  为  $n$  阶矩阵, 分块对角阵  $C$  为

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

则分块对角阵  $C$  的伴随矩阵为:

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

◆

**证明 证法一:** 设  $A = (a_{ij})_{m \times m}$ , 元素  $a_{ij}$  的余子式和代数余子式分别记为  $M_{ij}$  和  $A_{ij}$ ;  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , 元素  $b_{ij}$  的余子式和代数余子式分别记为  $N_{ij}$  和  $B_{ij}$ . 利用 Laplace 定理可以容易地计算出: 当  $1 \leq i, j \leq m$  时,  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式为  $(-1)^{i+j} M_{ij} |B| = |B| A_{ij}$ ; 当  $m+1 \leq i, j \leq m+n$  时, 由 Laplace 定理, 可知  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式为  $(-1)^{i+j} N_{i-m, j-m} |A| = |A| B_{i-m, j-m}$ ; 当  $i, j$  属于其他范围时, 由 Laplace 定理, 当  $1 \leq i \leq m, m \leq j \leq m+n$  时, 将其按前  $m$  列展开, 当  $m \leq i \leq m+n, 1 \leq j \leq m$  时, 将其按前  $m$  行展开, 可得  $C$  的第  $(i, j)$  元素的代数余子式等于零. 因此我们有

$$C^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

**证法二:** 若  $A, B$  均为非异阵, 则

$$C^* = |C| C^{-1} = |A| |B| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B| |A| A^{-1} & O \\ O & |A| |B| B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

对于一般的方阵  $A, B$ , 由命题??可知, 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_m + A$  与  $t_k I_n + B$  均为非异阵. 由非异阵情形的证明可得

$$\begin{pmatrix} t_k I_m + A & O \\ O & t_k I_n + B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |t_k I_n + B| (t_k I_m + A)^* & O \\ O & |t_k I_m + A| (t_k I_n + B)^* \end{pmatrix}.$$

注意到上式两边均为  $m+n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$  成立. □

**例题 0.1** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB = BA$ , 证明:  $AB^* = B^*A$ .

**证明** 若  $B$  为非异阵, 则由  $AB = BA$  可得  $AB^{-1} = B^{-1}A$ . 又  $B^* = |B|B^{-1}$ , 于是  $AB^* = B^*A$  成立. 对于一般的方阵  $B$ , 可取到一列有理数  $t_k \rightarrow 0$ , 使得  $t_k I_n + B$  为非异阵, 此时  $A(t_k I_n + B) = (t_k I_n + B)A$  仍然成立. 由非异阵情形的证明可得

$$A(t_k I_n + B)^* = (t_k I_n + B)^* A.$$

注意到上式两边均为  $n$  阶方阵, 其元素都是  $t_k$  的多项式, 从而关于  $t_k$  连续. 上式两边同时取极限, 令  $t_k \rightarrow 0$ , 即有  $AB^* = B^*A$  成立. □

**例题 0.2** 设  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

求  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ .

解 解法一: 显然  $|A| = 2$ , 用初等变换不难求出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$A^* = 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

将  $A^*$  的所有元素加起来, 可得  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1$ .

解法二: 由命题??可得

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1.$$

于是  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1$ .

解法三: 由大拆分法可得  $|A(-1)| = |A| - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ , 且

$$|A(-1)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

故  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = |A(-1)| - |A|$ .

解法四: 由例题??可得

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

□