

0.1 环与域

定义 0.1 (环)

若在非空集合 R 中定义了加法和乘法两种二元运算，并满足下列条件：

- (1) R 对加法为 Abel 群；
- (2) R 对乘法为半群；
- (3) 加法与乘法间有分配律，即 $\forall a, b, c \in R$,

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca,$$

则称 R 是一个环。也记为 $(R, +, \cdot)$ 。



例题 0.1

- (1) \mathbb{Z} 对加法与乘法是环，称为整数环。
- (2) 数域 P 上的 n 元多项式集合 $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 对多项式的加法和乘法是环，称为 P 上的 n 元多项式环。
- (3) $R^{n \times n}$ 表示以环 R 中元素为矩阵元的 n 阶方阵的集合，即 $\alpha \in R^{n \times n}$ 可写成

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R.$$

记 $a_{ij} = \text{ent}_{ij}(\alpha)$ 。由下面的两个关系：

- (i) $\text{ent}_{ij}(\alpha + \beta) = \text{ent}_{ij}(\alpha) + \text{ent}_{ij}(\beta)$;
- (ii) $\text{ent}_{ij}(\alpha\beta) = \sum_{k=1}^n \text{ent}_{ik}(\alpha)\text{ent}_{kj}(\beta)$

定义的 $R^{n \times n}$ 加法与乘法使其成为一个环，称为 R 上的 n 阶方阵环。

- (4) 设 $C([a, b])$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的集合，它对函数的加法与乘法是一个环，称为 $[a, b]$ 上的连续函数环。
- (5) 设 A 是一个 Abel 群， A 的运算是加法。在 A 中定义乘法运算为 $ab = 0 (\forall a, b \in A)$ ，则 A 为一环，这种环称为零环。

注 (5) 说明，任何 Abel 群均可作为零环的加法群，但是并非所有 Abel 群都可成为非零环的加法群。

证明



定理 0.1 (环的基本性质)

- (1) 在环 R 中可定义任何整数的倍数及正整数次乘幂，并且满足

- (i) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, a, b \in R$,

$$(m+n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na),$$

$$m(a+b) = ma + mb;$$

$$(ii) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{N}, a \in R;$$

$$(iii) \quad \text{若 } a, b \in R \text{ 且 } ab = ba, \text{ 则 } (ab)^m = a^m b^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

- (2) 由分配律成立有

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j.$$

(3) $\forall a, b \in R$ 有 $a0 = 0a = 0, (-a)b = a(-b) = -ab, (-a)(-b) = ab$.



证明

(1)

(2)

(3) 事实上, 由 $a \cdot 0 + ab = a(0 + b) = ab$ 知 $a \cdot 0 = 0$. 同样 $0 \cdot a = 0, a(-b) = a(-b) + ab + (-ab) = -ab$. 最后 $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$.



定义 0.2

1. **交换环:** 乘法是交换半群的环.
2. **幺环:** 乘法是幺半群的环, 通常记幺元为 1.
3. **交换幺环:** 乘法是交换幺半群的环.
4. **无零因子环:** 任意两个非零元的积不为零的环.
5. 设 R 是环. $a, b \in R$ 且 $a \neq 0, b \neq 0$. 若 $ab = 0$, 则称 a 是 R 的一个左零因子, b 是 R 的一个右零因子, 都简称为零因子. 有时为方便也将 0 称为零因子.
6. **整环:** 无零因子的幺环. 即若 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则 $ab \neq 0$. 也即若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.
7. **体:** 非零元素集合对乘法构成群的环, 即非零元素都可逆的幺环.
8. **域:** 交换的体, 即非零元素集合对乘法为 Abel 群的环.



笔记 当 $n > 1$ 时, R 上的 n 阶方阵环 $R^{n \times n}$ 就不是无零因子环.

注 有些书上这样定义除环、体和域:

除环: 非零元素集合对乘法构成群的环, 即非零元素都可逆的幺环.

体: 不可交换的除环.

域: 交换的除环.

实际上, 这样定义的除环就是我们上面定义的体, 而体的定义中多了一个不可交换, 域的定义则没有变化.

定义 0.3

1. 设 R 是一个环, 非空子集 R_1 对 R 的加法与乘法也构成环, 则称 R_1 为 R 的子环.
2. 设 R 是一个体, 若非空子集 R_1 对 R 中的加法和乘法也构成体且 $R_1 \subseteq R$, 则称 R_1 是 R 的子体.
3. 设 R 是一个域, 若非空子集 R_1 对 R 中的加法和乘法也构成域且 $R_1 \subseteq R$, 则称 R_1 是 R 的子域.

若 R 是域 F 的子域, 则称 F 是 R 的扩域.



定理 0.2

设 R 是一个环, S 是 R 的一个非空子集, 则 S 是 R 的子环的充分必要条件是满足下面任何一个条件:

- (1) S 是 R 的加法子群; 且 S 关于 R 的乘法封闭, 即对 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$.
- (2) 对 $\forall a, b \in S$, 有 $a - b \in S$; 且对 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$.



注 这就是说, 环 R 的子环 S 是 R 的关于减法与乘法封闭的非空子集.

证明

(1) **必要性:** 因为 S 是环, 由环的定义知 S 是 R 的加法子群; 且 S 关于 R 的乘法封闭.

充分性: 设 S 是 R 的加法子群, S 关于 R 的乘法封闭, 则 S 对加法和乘法都封闭. 又因为 R 对加法构成 Abel 群, 对乘法构成半群, 乘法对加法满足分配律, 而 $S \subseteq R$, 且 S 的运算就是 R 的运算, 所以 S 也对加法构成 Abel 群, 对乘法构成半群, 乘法对加法满足分配律. 因此 S 是 R 的子环.

(2) 由定理????知 S 是 R 的加法子群的充要条件是对 $\forall a, b \in S$, 有 $a - b \in S$. 再由结论 (1) 知 (2) 就是 S 是 R 的子环的充要条件.

□

定理 0.3

设 R 为环, 则

$$C(R) = \{r \in R \mid rs = sr, \forall s \in R\}$$

为 R 的一个子环. 这个子环称为 R 的中心 (center).

♡

证明 对任意 $x \in R$, 有 $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, 所以 $0 \in C(R)$. 从而 $C(R)$ 是 R 的一个非空子集.

对任意 $a, b \in C(R), x \in R$, 有

$$(a - b)x = ax - bx = xa - xb = x(a - b),$$

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab),$$

所以 $a - b, ab \in C(R)$. 从而由**定理 0.2(2)**知 $C(R)$ 为 R 的子环.

□

命题 0.1

- (1) 一切数域 P 都是环, 也都是域, 因而也是体.
- (2) 体一定是整环, 进而域也一定是整环.
- (3) 若 R 是一个环, 则 R 的任意子环的交也是 R 的子环.
- (4) 若 R 是一个体, 则 R 的任意子体的交也是 R 的子体.
- (5) 若 R 是一个域, 则 R 的任意子体的交也是 R 的子域.

◆

证明

(1)

(2) 设 R 是一个体, $a, b \in R$ 且 $ab = 0$. 若 $a \neq 0$, 则 $b = a^{-1}(ab) = 0$; 若 $b \neq 0$, 则 $a = (ab)b^{-1} = 0$. 故 R 是整环.

(3) 设 $\{R_i \mid i \in I\}$ 为环 R 的一簇子环, 对任意的 $x, y \in \bigcap_{i \in I} R_i$, 有 $x, y \in R_i (i \in I)$, 于是

$$x - y, xy \in R_i, \forall i \in I.$$

因此

$$x - y, xy \in \bigcap_{i \in I} R_i.$$

所以 $\bigcap_{i \in I} R_i$ 是 R 的子环.

(4)

(5)

□

命题 0.2

- (1) 环 R 为整环的充要条件是 R 的非零元素集合 $R^* = R \setminus \{0\}$ 是乘法幺半群 R 的子幺半群.

当 R 是整环时, 有 $R^* = R \setminus \{0\}$ 对乘法构成幺半群且消去律成立, 即

$$ax = bx (\text{或 } xa = xb), \text{ 则 } a = b, \forall a, b, x \in R^*.$$

- (2) 若 R 是整环且 $\prod_{i=1}^k a_i = 0, a_i \in R$, 则存在 $i_0 \in [1, k] \cap \mathbb{N}$, 使 $a_{i_0} = 0$.

◆

证明

(1)

- (2) 因为 R 是整环且 $R^* \subseteq R$, 所以 R 对乘法构成幺半群. 设 $a, b, x \in R^*$ 且 $ax = bx$, 则 $(a - b)x = 0$. 由于 R 是整环且 $x \neq 0$, 故 $a - b = 0$, 即 $a = b$. $xa = xb$ 的情况同理可证.
- (3) 由整环定义易得.

□

命题 0.3

设 p 是一个素数, 则 $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, \overline{p-1}\}$ 是只含 p 个元素的域且非数域.

◆

证明 由 p 是一个素数易知 \mathbb{Z} 中关系 $a \equiv b \pmod{p}$ 对加法及乘法都是同余关系, 因而在 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中有加法运算, 使 \mathbb{Z}_p 为 Abel 群, 而且在 \mathbb{Z}_p 中有乘法运算, 使 \mathbb{Z}_p 为交换幺半群. $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, \overline{p-1}\}$. 又 $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_p$ 有

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c},$$

即分配律成立. 故 \mathbb{Z}_p 是交换幺环. 又对 $a \in \mathbb{N}, a < p$, 由 p 为素数知有 $m, n \in \mathbb{Z}$, 使 $ma + np = 1$, 因而 $\bar{m} \cdot \bar{a} = \bar{1}$, 即 \mathbb{Z}_p 中每个非零元素可逆, 因而 \mathbb{Z}_p 是只含 p 个元素的域且非数域.

□

定理 0.4

设 \mathbb{C} 为复数域. 考虑 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ 中子集

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

证明 H 是体, 称 H 为 \mathbb{R} 上的四元数体.

♡

证明 容易验证 H 对矩阵的加法为 Abel 群. 又对 $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ 有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}\delta \end{pmatrix} \in H,$$

故 H 对矩阵乘法为幺半群. 显然加法与乘法间有分配律, 故 H 为幺环. 又若

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0,$$

则

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} > 0.$$

此时有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in H,$$

即 $H^* = H \setminus \{0\}$ 为群, 因而 H 是体. 又 H 中有元素

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $AB \neq BA$, 故 H 是体, 但不是域.

□

命题 0.4

设 \mathbf{H} 为四元数体, 令

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \\ \mathbf{1}^2 &= \mathbf{1}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

并且有下面结论:

(1) $\forall \alpha \in \mathbf{H}$, 存在唯一的一组 $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, 使得 $\alpha = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. 进而

$$\mathbf{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

(2) \mathbf{H} 的变换 σ :

$$\sigma(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

是 \mathbf{H} 的一个对合.



注 我们一般省略不写 $\mathbf{1}$, 即将 $a\mathbf{1}$ 简写成 a .

证明

(1) 根据定理 0.4, $\alpha \in \mathbf{H}$ 有 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 使得

$$\alpha = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{-1} & c + d\sqrt{-1} \\ -c + d\sqrt{-1} & a - b\sqrt{-1} \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

由

$$\begin{pmatrix} a + b\sqrt{-1} & c + d\sqrt{-1} \\ -c + d\sqrt{-1} & a - b\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\sqrt{-1} & c_1 + d_1\sqrt{-1} \\ -c_1 + d_1\sqrt{-1} & a_1 - b_1\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

知当且仅当 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$ 结论 (1) 成立.

(2) 再设 $\beta = a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}, a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$, 则

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{H}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha\beta) &= \sigma((a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})) \\ &= \sigma((aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1)\mathbf{1} + (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)\mathbf{i} + (ac_1 + ca_1 + db_1 - bd_1)\mathbf{j} + (ad_1 + da_1 + bc_1 - cb_1)\mathbf{k}) \\ &= (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1)\mathbf{1} - (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)\mathbf{i} - (ac_1 + ca_1 + db_1 - bd_1)\mathbf{j} - (ad_1 + da_1 + bc_1 - cb_1)\mathbf{k} \\ &= (a_1\mathbf{1} - b_1\mathbf{i} - c_1\mathbf{j} - d_1\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = \sigma(\beta)\sigma(\alpha). \end{aligned}$$

因此 σ 是 \mathbf{H} 的反自同构. 又因

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \alpha,$$

故 σ 是对合.



定义 0.4

若 R_1 为环 R 的子环, 并且 R_1 还满足 $RR_1 \subseteq R_1$ (或 $R_1R \subseteq R_1$), 则称 R_1 为 R 的左理想(或右理想). 若环 R 的非空子集 I 既是左理想又是右理想, 也即 $RR_1R \subseteq R_1$, 则称 I 为 R 的双边理想, 简称理想.

若 P 是环 R 的理想且 $P \neq R$, 则称 P 是 R 的真理想.

$\{0\}$ 与 R 都是 R 的理想, 称为 **平凡理想**.



注 在交换环中, 左理想、右理想与理想这三个概念是一致的.

定理 0.5

设 R 是一个环, I 是 R 的一个非空子集, 则 I 是 R 的理想的充分必要条件是 I 同时满足下列两个条件

- (1) 对 $\forall r_1, r_2 \in I$, 有 $r_1 - r_2 \in I$.
- (2) 对 $\forall r \in I, s \in R$, 则 $rs, sr \in I$.



证明 由定理 0.2 和理想的定义立得. □

定义 0.5

设 R 为环, I, J 都是 R 的理想, 集合

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\} \quad \text{与} \quad I \cap J$$

分别称为理想 I 与 J 的和与交.



定理 0.6

- (1) 一个环中有限多个理想的和还是理想.
- (2) 一个环中任意多个理想之交还是理想.
- (3) 若 A 是环 R 的理想, B 是环 R 的子环且 $B \supseteq A$, 则 A 也是环 B 的理想.
- (4) 若 A 是环 R 的非空子集, 则所有包含 A 的理想之交仍是一个包含 A 的理想, 称为由 A 生成的理想, 记为 $\langle A \rangle$.



证明

- (1) 设 I_1, I_2, \dots, I_m 为环 R 的理想, 令

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_m = \{a_1 + a_2 + \dots + a_m \mid a_i \in I_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

对任意的 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, y = y_1 + y_2 + \dots + y_m \in I$ ($x_i, y_i \in I_i$), $r \in R$, 有 $x_i - y_i \in I_i, rx_i, x_ir \in I_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 从而

$$x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_m - y_m) \in I,$$

$$rx = rx_1 + rx_2 + \dots + rx_m \in I,$$

$$xr = x_1r + x_2r + \dots + x_mr \in I,$$

所以 I 为 R 的理想.

- (2) 设 $\{I_i \mid i \in J\}$ 为环 R 的一族理想 (其中 J 为指标集), 令

$$I = \bigcap_{i \in J} I_i.$$

对任意的 $x, y \in I, r \in R$, 有 $x, y \in I_i$, 于是 $x - y \in I_i, rx, xr \in I_i$ ($i \in J$), 从而

$$x - y \in I, rx, xr \in I,$$

所以 I 为 R 的理想.

- (3)

- (4)



定理 0.7

设 R_1, R_2, \dots, R_n 为 n 个环. 令

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

对任意的 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R$, 规定

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n),$$

则 R 关于上面所定义的加法与乘法构成一个环. 这个环称为环 R_1, R_2, \dots, R_n 的直和 (direct sum). 并且

- (1) R 有单位元的充分必要条件是每个 R_i 都有单位元.
- (2) R 是交换环的充分必要条件是每个 R_i 都是交换环.

**证明****定义 0.6**

设 R 是一个环, 对于 $a \in R$, 我们定义 $\langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle$ 为由 a 生成的主理想.

对于 $a_1, \dots, a_n \in R$, 我们定义

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle.$$

为由 a_1, a_2, \dots, a_n 有限生成的理想. 一般地, 若一个理想能被有限个元素生成, 我们就称其为有限生成的理想.

**定理 0.8**

- (1) 若 R 是环, $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, 则

$$\langle a \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i a y_i + x a + a y + k a \mid x_i, y_i, x, y \in R, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} a_i y_{ij} + \sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n k_i a_i \mid x_{ij}, y_{ij}, x_i, y_i \in R, n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

进而, 显然有 $\langle 1 \rangle = R$. 若还有 I 是 R 的理想且 $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$, 则 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \subseteq I$.

- (2) 若 R 是幺环, $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, 则

$$\langle a \rangle = RaR \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a y_i \mid m \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in R \right\},$$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = Ra_1R + \dots + Ra_nR = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \mid s_i \in Ra_iR \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} a_i y_{ij} \mid m_i \in \mathbb{N}, x_{ij}, y_{ij} \in R \right\}.$$

进而, 显然有 $\langle 1 \rangle = R$. 若还有 I 是 R 的理想且 $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$, 则 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \subseteq I$.

- (3) 若 R 是交换幺环, $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, 则

$$\langle a \rangle = aR = Ra = \{xa \mid x \in R\} = \{ax \mid x \in R\},$$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = Ra_1 + \dots + Ra_n = a_1R + \dots + a_nR = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i r_i \mid r_i \in R \right\}.$$

再设 U 是 R 中所有可逆元素构成的集合, 则当且仅当 $u \in U$ 时, 有 $\langle u \rangle = uR = R$.

若还有 I 是 R 的理想且 $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$, 则 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \subseteq I$.

**证明**

- (1) 只须证明第二个等式. 利用定理 0.5 容易验证.

(2) 只须证明第二个等式. 设 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_2} r_{ij} a_i s_{ij} \in Ra_1 R + \cdots + Ra_n R$, 记 $x_{i,m_1+j} = -r_{ij}, y_{i,m_1+j} = s_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_2$), 则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_2} r_{ij} a_i s_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{m_2} (-r_{ij}) a_i s_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{m_2} x_{i,m_1+j} a_i y_{i,m_1+j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1+m_2} x_{ij} a_i y_{ij} \in Ra_1 R + \cdots + Ra_n R. \end{aligned}$$

对 $\forall r \in R$, 都有

$$\begin{aligned} & r \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} (rx_{ij}) a_i y_{ij} \in Ra_1 R + \cdots + Ra_n R, \\ & \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i y_{ij} \right) r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_1} x_{ij} a_i (y_{ij} r) \in Ra_1 R + \cdots + Ra_n R, \end{aligned}$$

因此由定理 0.5 知 $Ra_1 R + \cdots + Ra_n R$ 是 R 的理想, 且显然有 $Ra_1 R + \cdots + Ra_n R \supseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. 故 $Ra_1 R + \cdots + Ra_n R \supseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

又设 I 也是 R 的理想且包含 a_1, \dots, a_n , 则由理想的定义和加法的封闭性知

$$I \supseteq Ra_1 R + \cdots + Ra_n R.$$

故 $Ra_1 R + \cdots + Ra_n R \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. 综上可得 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = Ra_1 R + \cdots + Ra_n R$.

(3) 只须证明第二个等式. 设 $r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n, s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n \in Ra_1 + \cdots + Ra_n$ ($r_i, s_i \in R$), 我们有

$$(r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n) - (s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n) = (r_1 - s_1) a_1 + \cdots + (r_n - s_n) a_n \in Ra_1 + \cdots + Ra_n.$$

对 $\forall r \in R$, 由 R 是交换幺环可得

$$r(r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n) = (r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n)r = rr_1 a_1 + \cdots + rr_n a_n \in Ra_1 + \cdots + Ra_n,$$

因此由定理 0.5 知 $Ra_1 + \cdots + Ra_n$ 是 R 的理想, 而且显然包含 a_1, \dots, a_n . 故 $Ra_1 + \cdots + Ra_n \supseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

设 I 是一个包含了 a_1, \dots, a_n 的理想, 那么根据理想的定义和加法的封闭性, 有

$$I \supseteq Ra_1 + \cdots + Ra_n.$$

故 $Ra_1 + \cdots + Ra_n \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. 综上可得 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = Ra_1 + \cdots + Ra_n$.

若 $u \in U$, 设 $r \in R$, 则 $r = u(u^{-1}r) \in uR$, 故 $R \subseteq uR$. 又显然有 $uR \subseteq R$, 故 $uR = R$.

若 $uR = R$, 则由 $1 \in R$ 知存在 $r \in R$, 使 $ur = 1$, 又 R 可交换, 故 $r = u^{-1}$, 即 $u \in U$.

□

定理 0.9

设 I 为环 R 的子环. 在 R 中定义关系 “ \sim ”,

$$a \sim b, \quad a + (-b) = a - b \in I,$$

则关系 “ \sim ” 对加法为同余关系. a 所在的等价类为 $a + I$. 关系 “ \sim ” 对乘法也为同余关系的充分必要条件是 I 为 R 的理想.

若 I 为理想, 则将 R 对等价关系 I 的商集合记为 $R/\sim = R/I$, 并且 $R/\sim = R/I$ 中可定义加法、乘法为

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad \forall a, b \in R, \tag{1}$$

$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I, \quad \forall a, b \in R. \tag{2}$$

R/I 对这种加法与乘法也构成环, 称为 R 对 I 的商环.



证明 因 R 对加法为 Abel 群, 故 R 的加法子群 I 为正规子群. 由定理?? 知 “ \sim ” 对 R 的加法为同余关系, 再由命题?? 知在 R/I 中有加法运算(1)且为 Abel 群.

现设 “ \sim ” 对乘法也是同余关系. 对 $\forall a \in I, b \in R$ 有 $a \sim 0, b \sim b$, 因而 $ab \sim 0, ba \sim 0$, 故 $ab, ba \in I$, 因而 I 为 R 的理想.

反之, 设 I 是 R 的理想, $a, b, c, d \in R$ 且 $a \sim b, c \sim d$, 即 $a - b, c - d \in I$. 此时有 $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + (a - b)d \in I$, 即 $ac \sim bd$, 故 “ \sim ” 对乘法也是同余关系.

当 I 为理想时, 在 R/I 中可定义乘法如式(2)且对 $\forall a, b, c \in R$ 有

$$\begin{aligned} ((a + I)(b + I))(c + I) &= (ab + I)(c + I) = (ab)c + I = a(bc) + I \\ &= (a + I)((b + I)(c + I)), \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} ((a + I) + (b + I))(c + I) &= ((a + b) + I)(c + I) = (a + b)c + I \\ &= (ac + bc) + I = (ac + I) + (bc + I) \\ &= (a + I)(c + I) + (b + I)(c + I). \end{aligned}$$

类似有

$$(a + I)((b + I) + (c + I)) = (a + I)(b + I) + (a + I)(c + I),$$

即 R/I 为半群, 且对加法乘法的分配律成立. 故 R/I 是一个环.



推论 0.1

若 R 为交换环, I 为 R 的理想, 则 R/I 也是交换环.



证明



推论 0.2

若 R 为幺环, I 为 R 的理想, 则 R/I 也是幺环且 $1 + I$ 为幺元.



证明



例题 0.2 从定理 0.9 知 $m\mathbb{Z}$ 为 \mathbb{Z} 的理想, 故 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 对剩余类 $(\text{mod } m)$ 的加法与乘法是一个环.

当 p 为素数时, \mathbb{Z}_p 为域.

若 m 是合数, 即 $m = m_1 m_2$ ($m_i \in \mathbb{Z}, |m_i| > 1, i = 1, 2$), 则 \mathbb{Z}_m 有零因子 $\overline{m_1}, \overline{m_2}$.

例题 0.3 设 R 是一个环. 考虑 $R^{n \times n}$ 中子集

$$A = \{\alpha \mid \alpha \in R^{n \times n}, j \neq 1 \text{ 时, } \text{col}_j \alpha = 0\},$$

$$B = \{\alpha \mid \alpha \in R^{n \times n}, i \neq 1 \text{ 时, } \text{row}_i \alpha = 0\},$$

则 A, B 分别为 $R^{n \times n}$ 的左理想与右理想. 当 $n \geq 2$ 时, 一般来说, A, B 都不是双边理想.