0.1 线性同构和几何问题代数化

我们有一类特别重要的线性同构. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基并固定次序. 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$, 则映射 $\eta:V\to\mathbb{K}^n$ 定义为:$\eta(\boldsymbol{\alpha})=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)'$, 即 η 将 V 中的向量映射到它在给定基下的坐标向量. 容易验证 $\eta:V\to\mathbb{K}^n$ 是一个线性同构. 因此, 通过这个线性同构, 我们可将抽象的线性空间 V 和具体的列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 等同起来.

定理 0.1

(1) 同构关系是一种等价关系;

(2) 线性同构不仅将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组, 而且将线性无关的向量组映射为线性无关的向量组;

(3) 同一个数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

♡

证明

□

定理 0.2

定理假设和记号同上, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中向量, 它们在给定基下的坐标向量记为 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$, 则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性无关.

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ 可以用 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性表示, 并且线性表示的系数不变. 即

$$\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m\Leftrightarrow\widetilde{\boldsymbol{\beta}}=c_1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+c_2\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+c_m\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m.$$

(3) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组的充要条件是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_1},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_2},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{i_r}$ 是向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的极大无关组. 特别地, 我们有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_m).$$

♡

笔记 由上述定理, 我们可以将抽象线性空间 V 中向量组线性关系的判定和秩的计算, 转化为具体列向量空间 $\mathbb{K}^n$ 中由它们的坐标向量构成的列向量组线性关系的判定和秩的计算. 由于后者通常可以通过矩阵的方法来处理, 故上述过程被称为 “几何问题代数化” .

证明 将定理 0.1运用到线性同构 η上就能得到证明. □

命题 0.1

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是向量空间 V 中的向量, 且满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{1k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{2k}\boldsymbol{\alpha}_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_m=c_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{mk}\boldsymbol{\alpha}_k.\end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times k}$, 则

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=k$, 则这两组向量等价.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩不超过 r.

♠

证明

(1) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(1\leqslant i\leqslant k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j(1\leqslant$

$j \leqslant m$), 则

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_1 = c_{11}\widetilde{\alpha}_1 + c_{12}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{1k}\widetilde{\alpha}_k, \\ \widetilde{\beta}_2 = c_{21}\widetilde{\alpha}_1 + c_{22}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{2k}\widetilde{\alpha}_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{\beta}_m = c_{m1}\widetilde{\alpha}_1 + c_{m2}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{mk}\widetilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m) = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k)\boldsymbol{C}'.$$

因为 $\boldsymbol{C}'$ 是一个行满秩 $k \times m$ 矩阵, 故由行满秩矩阵性质可知, 存在 $m \times k$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_k$, 于是

$$(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m)\boldsymbol{T} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k).$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 可用 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 来线性表示, 于是这两组向量等价.

(2) 在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 假设在这组基下 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量是 $\widetilde{\alpha}_i(1 \leqslant i \leqslant k)$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 的坐标向量是 $\widetilde{\beta}_j(1 \leqslant j \leqslant m)$, 则

$$\begin{cases} \widetilde{\beta}_1 = c_{11}\widetilde{\alpha}_1 + c_{12}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{1k}\widetilde{\alpha}_k, \\ \widetilde{\beta}_2 = c_{21}\widetilde{\alpha}_1 + c_{22}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{2k}\widetilde{\alpha}_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{\beta}_m = c_{m1}\widetilde{\alpha}_1 + c_{m2}\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + c_{mk}\widetilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m) = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k)\boldsymbol{C}'.$$

由于两个矩阵乘积的秩不超过每个矩阵的秩, 因此

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\right) = \mathrm{r}\left(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_m\right) = \mathrm{r}\left(\left(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \cdots, \widetilde{\alpha}_k\right)\boldsymbol{C}'\right) \leqslant \mathrm{r}\left(\boldsymbol{C}'\right) = \mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = r.$$

□

命题 0.2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 中的 m 个向量, 且已知它们的秩等于 r. 求证: 全体满足 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$ 的列向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)'(x_i \in \mathbb{F})$ 构成数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.

证明 在 V 中引进基以后, 记 $\widetilde{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标向量, 则 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$ 等价于 $x_1\widetilde{\alpha}_1+x_2\widetilde{\alpha}_2+\cdots+x_m\widetilde{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$. 而后者是一个齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩等于 r(将 x_i 视为未知数), 故其解构成 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间. □

例题 0.1 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 问:$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n\}$ 是否也是 V 的基?

笔记 利用定理 0.2即可.

解 将 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n\}$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是满秩阵, 于是 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n\}$ 也是 V 的一组基. □

例题 0.2 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}(s > 1)$ 是线性空间 V 的一组基, 设 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$. 讨论向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

笔记 利用定理 0.2即可.

解 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

经计算可得 $|\boldsymbol{A}|=1+(-1)^{s+1}$. 因此当 s 为偶数时,$|\boldsymbol{A}|=0$, 从而向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关; 当 s 为奇数时,$|\boldsymbol{A}|=2$, 从而向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关. □

例题 0.3 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+4\boldsymbol{e}_4,\\\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+10\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4,\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.

笔记 利用定理 0.2即可.

解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列和第三列是坐标向量组的极大无关组, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组. □

例题 0.4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的数,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1+a_1\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_1^{n-1}\boldsymbol{e}_n,\\\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_2^{n-1}\boldsymbol{e}_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{e}_1+a_n\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n^{n-1}\boldsymbol{e}_n,\end{cases}$$

求证:$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 也是 V 的一组基.

笔记 利用定理 0.2即可.

证明 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 对应的坐标向量拼成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

显然,$|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 是满秩阵, 从而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 也是 V 的一组基. □