第一章 常用公式

1.1 常用 Taylor 级数

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$

2. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \cdots, x \in (-1, 1].$

3. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \cdots.$

4. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \cdots.$

5. $\tan x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4^n - 1)(2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

6. $\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{50521}{3628800}x^{10} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

7. $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1).$

8. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \cdots, x \in (-1, 1).$

9. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$

10. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots.$

11. $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n(4^n - 1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

12. $\operatorname{sech} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 - \frac{50521}{3628800}x^{10} + o(x^{11}), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

13. $\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 - \frac{63}{2816}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1).$

14. $\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} + o(x^{11}), x \in (-1, 1).$

15. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + \frac{1}{90}x^7 + \frac{31}{5760}x^8 - \frac{1}{5670}x^9 - \frac{2951}{3628800}x^{10} + o(x^{10}).$

16. $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{37}{120}x^5 + \frac{59}{240}x^6 + \frac{137}{720}x^7 + \frac{871}{5760}x^8 + \frac{41641}{3628800}x^9 + o(x^9).$

17. $e^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{17}{144}x^6 + \frac{13}{126}x^7 + \frac{629}{8064}x^8 + \frac{325}{4536}x^9 + o(x^9).$

18. $e^{\arctan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{29}{144}x^6 - \frac{1}{1008}x^7 - \frac{1249}{8064}x^8 - \frac{1163}{72576}x^9 + o(x^9).$

19. $\tan(\tan x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{181}{315}x^7 + \frac{59}{105}x^9 + \frac{3455}{6237}x^{11} + o(x^{11}).$

20. $\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + \frac{13}{2830}x^9 - \frac{47}{49896}x^{11} + o(x^{11})$.

21. $\tan(\sin x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 - \frac{73}{24192}x^9 + \frac{41897}{39916800}x^{11} + o(x^{11})$.

22. $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{846}x^7 - \frac{143}{3456}x^9 - \frac{968167}{39916800}x^{11} + o(x^{11})$.

23. $(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots, x\in(-1,1)$.

24. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \frac{2447e}{5760}x^4 - \frac{959e}{2304}x^5 + \frac{281343e}{580608}x^6 - \frac{67223e}{168885}x^7 + o(x^7)$.

25. $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{11}{120}x^5 + \frac{271}{720}x^6 + \frac{53}{2320}x^7 - \frac{4069}{13410}x^8 + o(x^8)$.

26. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 - \frac{3e}{16}x^3 + \frac{139e}{560}x^4 - \frac{899e}{11520}x^5 + \frac{29811e}{580608}x^6 - \frac{180617e}{580608}x^7 + o(x^7)$.

1.2 常用积分公式

1.2.1 不定积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\ (a>0)$.

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ (a>0)$. 3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a>0)$.

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C\ (a>0)$.

4. $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.

5. $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$;
$\int \csc x\mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$.

6. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right] + C\ (a>0)$;
$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right] + C\ (a>0)$.

7. $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C\ (ab\neq 0)$;
$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C\ (ab\neq 0)$.

8. $\int x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\sin nx + C\ (n\neq 0)$;
$\int x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx + C\ (n\neq 0)$.

9. 记 $I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x,\forall n,m\in\mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\quad(m\geqslant 2,n\geqslant 0);\\&=-\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)\quad(m\geqslant 0,n\geqslant 2).\end{aligned}$$

1.2.2 定积分

1. 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x,\forall n\in\mathbb{N}$, 则

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad \forall n\geqslant 2.$$

从而

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}I_0=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n为偶数\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}I_1=\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n为奇数\end{cases}.\tag{1.1}$$

2. 记 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x,\forall n,m\in\mathbb{N}$, 则

$$J(m,n)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),\quad\forall n,m\geqslant 2.$$

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2),\quad\forall n,m\geqslant 2.$$

从而

$$J(m,n)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & ,m,n不全为偶数\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,m,n全为偶数\end{cases}.\tag{1.2}$$

3.

注 公式(1.1)(1.2)通常称为“点火公式”.

1.3 常用初等不等式

命题 1.1 (常用不等式)

(1) $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}},x>0.$

(2) $\ln x<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}},x>0.$

(3) $e^x+e^y-2<e^{x+y}-1,\forall x,y>0.$

证明

(1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x}},x\geqslant 0$, 则

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x}-x-2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1+x-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}<0,\forall x>0.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减, 又 $f\in C[0,+\infty)$, 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 上也严格单调递减. 从而

$$f(x)\leqslant f(0)=0,\forall x>0.$$

即 $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}},x>0.$

(2)

(3) 注意到

$$(e^x-1)(x^y-1)>0, \forall x,y>0,$$

故

$$e^x+e^y<e^{x+y}+1 \Longrightarrow e^x+e^y-2<e^{x+y}-1, \forall x,y>0.$$

□

1.4 重要不等式

定理 1.1 (Cauchy 不等式)

对任何 $n\in\mathbb{N},(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2. \tag{1.3}$$

且等号成立条件为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

♡

证明 (i) 当 b_i 全为零时,(1.3)式左右两边均为零, 结论显然成立.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 注意到 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}$. 等价于

$$t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

根据一元二次方程根的存在性定理, 可知 $\Delta=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0.$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$. 下证(1.3)式等号成立的充要条件.

若(1.3)式等号成立, 则

(i) 当 b_i 全为零时, 因为零向量与任意向量均线性相关, 所以此时 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

(ii) 当 b_i 不全为零时, 此时我们有 $\Delta=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=0$. 根据一元二次方程根的存在性定理, 可知存在 $t_0\in\mathbb{R}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2t_0\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0.$$

于是 $a_i+t_0b_i=0,i=1,2,\cdots,n$. 即 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关.

反之, 若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lambda a_i+\mu b_i=0, i=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $\lambda\neq 0$, 则 $a_i=-\frac{\mu}{\lambda}b_i,i=1,2,\cdots,n$. 从而当 $t=\frac{\mu}{\lambda}$ 时, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=0$.

即一元二次方程 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)\right)^2=t_0^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2+2t_0\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=0$ 有实根 $\frac{\mu}{\lambda}$.

因此 $\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$. 即(1.3)式等号成立. □

例题 1.1 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$$

证明 对 $\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 由Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2=n^2.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},\forall n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$ □

例题 1.2 求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 在定义域内的最大值和最小值.

笔记 首先我们猜测定义域的端点处可能存在最值, 然后我们通过简单的放缩就能得到 $y(0)$ 就是最小值. 再利用Cauchy 不等式我们可以得到函数的最大值. 构造 Cauchy 不等式的思路是: 利用待定系数法构造相应的 Cauchy 不等式. 具体步骤如下:

设 $A,B,C>0$, 则由 *Cauchy* 不等式可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax+27A}+\frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt{13B-Bx}+\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{Cx}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)[(A+C-B)x+27A+13B]$$

并且当且仅当 $\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}$ 时, 等号成立.

令 $A+C-B=0$(因为要求解 y 的最大值, 我们需要将 y 放大成一个不含 x 的常数), 从而与上式联立得到方程组

$$\begin{cases}\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax+27A}=\sqrt{B}\cdot\sqrt{13B-Bx}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{Cx}\\A+C-B=0\end{cases}$$

解得:$A=1,B=3,C=2,x=9$.

从而得到我们需要构造的 *Cauchy* 不等式为

$$\left(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}\right)^2\leqslant\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)(x+27+39-3x+2x)$$

并且当且仅当 $\sqrt{x+27}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{39-3x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x}$, 即 $x=9$ 时, 等号成立.

解 由题可知, 函数 y 的定义域就是:$0\leqslant x\leqslant 13$. 而

$$\begin{aligned}y(x)&=\sqrt{x+27}+\sqrt{[\sqrt{13-x}+\sqrt{x}]^2}\\&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\\&\geqslant\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}=y(0)\end{aligned}$$

于是 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$. 由 *Cauchy* 不等式可得

$$\begin{aligned}y^2(x)&=(\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2\\&=(\sqrt{x+27}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{39-3x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x})^2\\&\leqslant(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})(x+27+39-3x+2x)\\&=121=y^2(9)\end{aligned}$$

即 $y(x) \leqslant y(9) = 11$. 并且当且仅当 $\sqrt{x+27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{39-3x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x}$, 即 $x = 9$ 时, 等号成立. 故 y 的最大值为 11.
□

定理 1.2 (均值不等式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, & r = 0 \end{cases} . \tag{1.4}$$

其中若 $r_1 \neq r_2$, 则 $f(r_1) = f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

笔记 均值不等式最重要的特例是下面的均值不等式常用形式.

定理 1.3 (均值不等式常用形式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

例题 1.3 设 $f(x) = 4x(x-1)^2, x \in (0,1)$, 求 f 的最大值.

解 由均值不等式常用形式可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x(x-1)^2 = 2 \cdot 2x(1-x)(1-x) \\ &= 2 \cdot \left[\sqrt[3]{2x(1-x)(1-x)}\right]^3 \\ &\leqslant 2 \cdot \left[\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right]^3 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

并且当且仅当 $2x = 1-x$, 即 $x = \dfrac{1}{3}$ 时等号成立. □

定理 1.4 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant -1$ 且两两同号, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

证明 当 $n = 1$ 时, 我们有 $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$, 结论显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 结论成立. 则当 $n = k+1$ 时, 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\ &\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} \end{aligned}$$

故由数学归纳法可知, 结论成立. □

定理 1.5 (Bernoulli 不等式特殊形式)

设 $x \geqslant -1, n \geqslant 0$, 则

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

定理 1.6 (Jesen 不等式)

设 $\lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 则对下凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

对上凸函数 f, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

定理 1.7 (Young 不等式)

对任何 $a, b \geqslant 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ 有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.

笔记 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则我们称 p 与 q **共轭**.

注 这个 Young 不等式不等式和加权均值不等式等价.

证明 (i) 当 a, b 至少有一个为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 a, b 均不为零时, 我们有

$$\begin{aligned} & ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\ \Leftrightarrow & \ln a + \ln b \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \end{aligned}$$

由Jesen 不等式和 $f(x) = \ln x$ 函数的上凸性可知, 上述不等式成立. 等号成立的条件可由Jesen 不等式的等号成立条件直接得到. 故原结论也成立. □

定理 1.8 (Hold 不等式)

设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0, b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}.$$

证明 (i) 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为零时, 结论显然成立.

(ii) 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零时, 令

$$a_k' = \frac{a_k}{\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}}, b_k' = \frac{b_k}{\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

从而只需证明 $\sum_{k=1}^{n} a_k' b_k' \leqslant 1$. 由Young 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k' b_k' \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(a_k')^p}{p} + \frac{(b_k')^q}{q}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{p\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{b_k^p}{q\sum_{k=1}^{n} b_k^q}\right)$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{p\sum_{k=1}^{n} a_k^p}+\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^p}{q\sum_{k=1}^{n} b_k^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

故原结论成立. □

定理 1.9 (排序和不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}\leqslant\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j,1\leqslant i<j\leqslant n$ 或者 $b_i=b_j,1\leqslant i<j\leqslant n$.

笔记 简单记为倒序和 $\leqslant$ 乱序和 $\leqslant$ 同序和.

定理 1.10 (Chebeshev 不等式)

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{R},\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的一个排列, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{i=1}^{n} b_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

且等号成立的充要条件是 $a_i=a_j,1\leqslant i<j\leqslant n$ 或者 $b_i=b_j,1\leqslant i<j\leqslant n$.

1.5 基本组合学公式

定义 1.1

对 $\forall m\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$, 定义

$$\mathrm{C}_m^k=\binom{m}{k}\triangleq\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

特别地,$\mathrm{C}_m^0\triangleq 1$. 若 $m,k\in\mathbb{N}$, 则还有

$$\mathrm{C}_m^k=\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

定理 1.11 (二项式定理的推广)

$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)=\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}}\left(\prod_{i\in I} a_i\prod_{j\in\{1,2,\cdots,n\}-I} b_j\right).$$

证明 用数学归纳法证明即可. □

1.6 三角函数相关

1.6.1 三角函数

定理 1.12 (三角平方差公式)

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y) = \cos(y-x)\cos(y+x) = \cos^2 y - \cos^2 x.$

证明 首先, 我们有

$$\cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - \left(1 - \sin^2 y\right) = \sin^2 y - \sin^2 x.$$

接着, 我们有

$$\begin{aligned}
\sin(x-y)\sin(x+y) &= (\sin x\cos y - \cos x\sin y)(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \\
&= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y \\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y \\
&= \sin^2 x - \sin^2 y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(y-x)\cos(y+x) &= (\cos x\cos y + \sin x\sin y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \\
&= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y \\
&= \cos^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y) \\
&= \cos^2 x - \cos^2 y.
\end{aligned}$$

故结论得证. □

定理 1.13

1.
$$\sin(n\theta) = \sum_{\substack{r=0 \\ 2r+1\le n}} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos^{n-2r-1}(\theta)\sin^{2r+1}(\theta).$$

2.
$$\cos(n\theta) = \sum_{\substack{r=0 \\ 2r\le n}} (-1)^r \binom{n}{2r} \cos^{n-2r}(\theta)\sin^{2r}(\theta).$$

3.
$$\tan(n\theta) = \frac{\sum\limits_{\substack{r=0 \\ 2r+1\le n}} (-1)^r \binom{n}{2r+1}\tan^{2r+1}(\theta)}{\sum\limits_{\substack{r=0 \\ 2r\le n}} (-1)^r \binom{n}{2r}\tan^{2r}(\theta)}.$$

4.
$$\cos^n\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{\substack{r=0 \\ 2r<n}} \dbinom{n}{2r} \cos\left((n-2r)\theta\right) + \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{\substack{r=0 \\ 2r<n}} \dbinom{n}{2r} \cos\left((n-2r)\theta\right), & n\text{为奇数} \end{cases}.$$

5.

$$\sin^n\theta=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\sum\limits_{\substack{r=0\\2r<n}}(-1)^r\dbinom{n}{2r}\sin\left((n-2r)\theta\right), & n\text{为偶数}\\ \dfrac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}{2^{n-1}}\sum\limits_{\substack{r=0\\2r<n}}(-1)^r\dbinom{n}{2r}\cos\left((n-2r)\theta\right)+\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{n}{2}}, & n\text{为奇数}\end{cases}.$$

笔记 上述结论 4 表明: $\cos^n x$ 可以表示为 $1,\cos x,\cdots,\cos nx$ 的线性组合.

证明 具体证明见Expansions of sin(nx) and cos(nx).

□

1.6.2 反三角函数

定理 1.14 (常用反三角函数性质)

1. $$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) & ,xy<0\text{或}x^2+y^2\leqslant 1\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x>0,y>0,x^2+y^2>1\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x<0,y<0,x^2+y^2>1\end{cases}.$$

2. $$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right) & ,xy\geqslant 0\text{或}x^2+y^2\leqslant 1\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x>0,y<0,x^2+y^2>1\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right) & ,x<0,y>0,x^2+y^2>1\end{cases}.$$

3. $$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x+y\geqslant 0\\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x+y<0\end{cases}.$$

4. $$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x\geqslant y\\ \arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & ,x<y\end{cases}.$$

5. $$\arctan x+\arctan y=\begin{cases}\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} & ,xy<1\\ \pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy},x>0 & ,xy>1\\ -\pi+\arctan\dfrac{x+y}{1-xy},x<0 & ,xy>1\end{cases}.$$

6. $$\arctan x-\arctan y=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,xy>-1\\ \pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,x>0,xy<-1\\ -\pi+\arctan\dfrac{x-y}{1+xy} & ,x<0,xy<-1\end{cases}.$$

7. $$2\arcsin x=\begin{cases}\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,|x|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1\\ -\pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) & ,-1\leqslant x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$$

8. $$2\arccos x=\begin{cases}\arccos\left(2x^2-1\right) & ,0\leqslant x\leqslant 1\\ 2\pi-\arccos\left(2x^2-1\right) & ,-1\leqslant x<0\end{cases}.$$

9. $2\arctan x=\begin{cases}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ \pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & ,|x|>1\\ -\pi+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} & ,x<-1\end{cases}.$

10. $\cos(n\arccos x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}\,(n\geqslant 1).$

证明

□

命题 1.2

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0\end{cases}.$$

证明 令 $f(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1}(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

故 $f(x)$ 为常函数, 于是就有 $f(x)=f(1)=\dfrac{\pi}{2},\forall x>0\,;f(x)=f(-1)=-\dfrac{\pi}{2},\forall x<0.$ □

1.6.3 双曲三角函数

命题 1.3

(1) $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1,$

(2) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\geqslant x.$

证明 可以分别利用均值不等式和求导进行证明. □

命题 1.4

1. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$
2. $\cosh(2x)=2\cosh^2 x-1=1-2\sinh^2 x.$
3. $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x.$

证明

□