

0.1 映射

定义 0.1 (映射)

设 A, B 为非空集, 若存在对应法则 f , 使得对每个 $x \in A$ 都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应, 则称对应法则 f 为从 A 到 B 的映射. 记为 $f : A \rightarrow B$, 其表达形式为 $y = f(x), x \in A$.

A 称为 f 的定义域, 记为 $D(f)$. B 称为 f 的陪域. A 在 f 下的象称为 f 的值域, 记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

集合 $B_0 \subseteq B$ 在 f 下的原象, 记为 $f^{-1}(B_0)$, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$



注 关于映射的定义, 我们作以下几点说明:

(1) f 的一个像可以存在多个原像; 但对每一个 $x \in A$, 只能有唯一的 $y \in B$ 与它对应, 因此今后如果构造映射 $f : A \rightarrow B$, 就必须先验证其良定义性, 即 $\forall x_1 = x_2 \in A$, 则 $f(x_1) = f(x_2) \in B$. 也即定义域中的每个元素只能有一个像.

(2) $f(A) \subseteq B$, 不一定有 $f(A) = B$;

(3) 映射是由定义域和对应法则共同确定的, 但对应法则的表达形式可能不唯一. 例如

$$y = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{和} \quad y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

(4) 值域中的元可以是集合. 例如 $A = \mathbb{N}, B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \phi(n) = B_n$;

(5) 定义域中的元也可以是集合. 例如 A 可列, $\mathcal{D} \subseteq 2^A$, 定义 $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为

$$\phi(A_0) = A_0 \text{ 中元素个数}, \quad A_0 \in \mathcal{D}.$$

定义 0.2 (单射、满射和双射)

设 $f : A \rightarrow B$, 则

1. 若 B 中每个元素最多只有一个原像, 即对 $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ 所含元素个数为 0 或 1, 则称 f 为单射或一一映射或一一的.
2. 若 $f(A) = B$, 即 $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 亦即 $f^{-1}(y) = \emptyset, \forall y \in B$, 则称 f 为满射或映上的.
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射或一一对应.



定义 0.3 (逆映射)

设 $f : A \rightarrow B$ 为一一映射, 则对每个 $y \in B$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 满足 $y = f(x)$. 定义 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 为 $f^{-1}(y) = x$, 则称 f^{-1} 为 f 的逆映射. 自然 f 也是 f^{-1} 的逆映射, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$.



笔记 由逆映射的定义可直接得到

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B.$$

公理 0.1 (选择公理 (AC))

设 \mathcal{F} 是一个非空集合族, 且 \mathcal{F} 中的每个元素都是非空集合. 那么存在一个函数

$$f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

使得对任意 $A \in \mathcal{F}$, 有 $f(A) \in A$. 这样的函数 f 称为选择函数 (choice function).



定理 0.1

设 $f : A \rightarrow B$, 其中 $A, B \neq \emptyset$, 则

(1) f 为单射的充要条件是满足下列条件之一.

- (i) $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A$.
- (ii) $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A$.
- (iii) $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$.
- (iv) 存在 $g : B \rightarrow A$, 使得 $gf = \text{id}_A$.

(2) f 为满射的充要条件是满足下列条件之一.

- (i) $f(A) = B$.
- (ii) 存在 $g : B \rightarrow A$, 使得 $fg = \text{id}_B$.

(3) f 为双射的充要条件是存在 $g : B \rightarrow A$, 使得

$$gf = \text{id}_A, fg = \text{id}_B.$$

此时必有 $g = f^{-1}$. 即有两个交换图, 如图 1 所示.

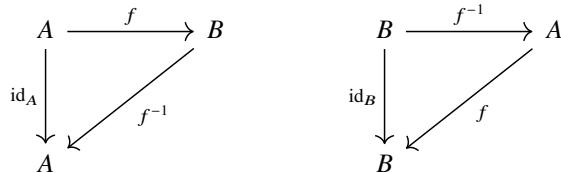
**笔记**

图 1

证明**定义 0.4 (映射的乘积)**

设映射 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, 定义 $g \circ f : A \rightarrow C$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

称为 g 与 f 的复合映射或乘积. $g \circ f$ 也常简记为 gf .

**定理 0.2 (映射的乘法满足结合律)**

若有 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$, 则有

$$h(gf) = (hg)f.$$

**笔记**

由映射的乘法满足结合律可知在多个映射相乘时, 可以不加括号. 特别地, $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 均可简记作 hgf .

证明 事实上, 对 $\forall x \in A$ 有

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) = (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x).$$

**定义 0.5**

设映射 $f : A \rightarrow B, A_0 \subseteq A$, 定义映射 $i : A_0 \rightarrow A$ 满足

$$i(x) = x, \quad \forall x \in A_0.$$

称 i 为 A_0 到 A 中的嵌入映射. 自然, 嵌入映射是单射.

又若映射 $f : A \rightarrow B$ 与映射 $g : A_0 \rightarrow B$ 满足 $gi = f$, 即

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A_0.$$

则称 g 为 f 在 A_0 上的限制, 记为 $g = f|_{A_0}$, 也称 f 为 g 在 A 上的延拓或开拓. 即图 2 为交换图.



笔记

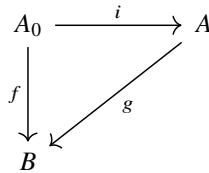


图 2

命题 0.1

设一列映射 $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$.

- (1) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是单射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是单射.
- (2) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是满射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是满射.
- (3) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是双射, 则 $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ 也是双射.
- (4) 若 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都是双射, 则 $(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \dots f_n^{-1}$.



证明

- (1)
- (2)
- (3)



命题 0.2 (映射的基本性质)

对于映射 $f : C \rightarrow D, A \subseteq C, B \subseteq D, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq C, \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq D$, 则下列事实成立:

- (i) 若 $A \subseteq B$, 则 $f(A) \subseteq f(B)$; 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq D$, 则 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
- (ii) $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha); f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(B_\alpha)$.
- (iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha); f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.
- (iv) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, 当且仅当 f 为满射时 “=” 成立;
- (v) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, 当且仅当 f 为单射时 “=” 成立.
- (vi) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.



笔记

(iv) 中第一条的直观理解是: B 中某些元素不一定有原像 (即 f 可能不是满射).

(iv) 中第二条的直观理解是: $C \setminus A$ 中的某些元素的像也可能在 $f(A)$ (即 f 可能不是单射).

证明 (i) 显然, (ii) 和 (v) 容易验证.

(iii) 只证明两个集合的情形. 注意到 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, 由 (i) 知

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

设 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则 $y \in f(A_1)$ 且 $y \in f(A_2)$, 故存在 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射, 则必有 $x_1 = x_2 = x$. 所以

$$x \in A_1 \cap A_2, \quad y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

故

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$, 则 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. 而

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

故 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. 矛盾.

(iv) (1) 设 $y \in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 故 $y = f(x) \in B$. 因此, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

设 $y \in B$, f 为满射, 则存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 故 $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, 于是 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$, 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是满射, 则 $f(A) \subsetneq B$. 由于 $f^{-1}(B) \subseteq A$, 故

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \subsetneq B$$

与 $B = f(f^{-1}(B))$ 矛盾.

(2) 设 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$, 故 $x \in f^{-1}(f(A))$. 因此, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

设 $x \in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x) \in f(A)$. 再由 f 是单射, 则必有 $x \in A$. 从而 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. 因此, “=” 成立.

反之, 假设 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 构造集合 $A = \{x_1\}$, 则 $f(A) = \{f(x_1)\}$. 故 $\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(f(A))$, 从而 $A \neq f^{-1}(f(A))$. 矛盾.

□

命题 0.3 (单调映射的不动点)

设 X 是一个非空集合, 且有 $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. 若对 $\mathcal{P}(X)$ 中满足 $A \subseteq B$ 的任意 A, B , 必有 $f(A) \subseteq f(B)$, 则存在 $T \in \mathcal{P}(X)$, 使得 $f(T) = T$.

◆

证明 作集合 S, T :

$$S = \{A : A \in \mathcal{P}(X) \text{ 且 } A \subseteq f(A)\}, \quad T = \bigcup_{A \in S} A (\in \mathcal{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上, 因为由 $A \in S$ 可知 $A \subseteq f(A)$, 从而由 $A \subseteq T$ 可得 $f(A) \subseteq f(T)$. 根据 $A \in S$ 推出 $A \subseteq f(T)$, 这就导致

$$\bigcup_{A \in S} A \subseteq f(T), \quad T \subseteq f(T).$$

另一方面, 又从 $T \subseteq f(T)$ 可知 $f(T) \subseteq f(f(T))$. 这说明 $f(T) \in S$, 我们又有 $f(T) \subseteq T$.

□

定义 0.6 (特征函数 (示性函数))

集合 E 的特征函数 (示性函数) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

◆

笔记 特征函数 χ_E 在一定意义上反映出集合 E 本身的特征, 可以通过它来表示各种集合关系.

命题 0.4 (特征函数的基本性质)

- (1) $A = B \iff \chi_A(x) = \chi_B(x);$
- (2) $A \subseteq B \iff \chi_A(x) \leq \chi_B(x);$
- (3) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (4) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) \setminus \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$
- (5) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)[1 \setminus \chi_B(x)];$
- (6) $\chi_{A \Delta B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|.$

**证明**

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)

□