0.1 其他

定理 0.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个域,$m_i,a_i\in\mathbb{F}[x],i=1,2,\cdots,n$, 且 $\gcd\left(m_i,m_j\right)\mid\left(a_i-a_j\right),i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 则存在 $f\in\mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x)\equiv a_i(x)\pmod{m_i(x)},i=1,2,\cdots,n,$$

即存在 $k_i\in\mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x)=k_i(x)m_i(x)+a_i(x),i=1,2,\cdots,n.$$

证明

□

例题 0.1 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m\in M_n(\mathbb{K})$,$g(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_1),g(\boldsymbol{A}_2),\cdots,g(\boldsymbol{A}_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_i)^{-1}=h(\boldsymbol{A}_i)$ 对所有的 $1\leqslant i\leqslant m$ 都成立.

证明 证法一:由命题**??**可知, 对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, 存在 $h_i\in\mathbb{K}[x]$, 使得

$$g^{-1}(A_i)=h_i(A_i). \tag{1}$$

记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i=1,2,\cdots,m$. 考虑 $\gcd(n_i,n_j)(i,j\in\{1,2,\cdots,m\})$, 设 $x_0\in\mathbb{C}$ 是 $\gcd(n_i,n_j)$ 的根, 则 $(x-x_0)|n_i,n_j$, 即 x_0 是 A_i 和 A_j 的公共特征值. 由命题**??**和命题**??**可知,$h_i(x_0)$ 是 $h_i(A_i)$ 的特征值,$\dfrac{1}{g(x_0)}$ 是 $g^{-1}(A_i)$ 的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i)=h_i(A_i)\Longrightarrow\frac{1}{g(x_0)}=h_i(x_0),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

于是

$$h_i(x_0)-h_j(x_0)=\frac{1}{g(x_0)}-\frac{1}{g(x_0)}=0.$$

因此 $(x-x_0)|(h_i-h_j)$. 故在 $\mathbb{C}$ 上就有 $\gcd(n_i,n_j)|(h_i-h_j)$. 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在 $\mathbb{K}$ 上也有 $\gcd(n_i,n_j)|(h_i(x)-h_j(x))$. 于是由中国剩余定理的推广可知, 方程

$$h(x)\equiv h_i(x)\pmod{n_i(x)},\quad i=1,2,\cdots,m$$

在 $\mathbb{K}$ 上有解. 故存在 $h\in\mathbb{K}[x]$, 使得

$$h(A_i)=h_i(A_i)=g^{-1}(A_i),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

证法二:记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x)$,$i=1,2,\cdots,m$, 由命题**??**可知

$$(n_i,g)=1,i=1,2,\cdots,m.$$

从而 $(n_1n_2\cdots n_m,g)=1$. 因此存在 $h,k\in\mathbb{F}[x]$, 使得

$$h\left(x\right)g\left(x\right)+n_1\left(x\right)n_2\left(x\right)\cdots n_m\left(x\right)k\left(x\right)=1.$$

从而

$$h\left(A_i\right)=g^{-1}\left(A_i\right),i=1,2,\cdots,m.$$

□

命题 0.1

设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A\sim\widetilde{A}$, 其中 $\widetilde{A}$ 是主对角元都为 0 的上三角阵, 则 A 是幂零矩阵.

证明 由条件可知存在可逆阵 P, 使得 $A=P^{-1}\widetilde{A}P$. 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n=P^{-1}\widetilde{A}^nP=O.$$

故 A 是幂零矩阵.

□

例题 0.2 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$AB + A = BA + B.$$

证明:

$$(A - B)^n = 0.$$

证明 注意到

$$AB - BA = B - A.$$

由命题??知 A, B 可同时相似上三角化. 不妨设 A, B 都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知 $AB - BA$ 也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知 $A - B$ 是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1知 $A - B$ 是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A - B)^n = 0.$$

□

例题 0.3 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A) \triangleq \{P^{-1}AP : P \in \mathbb{R}^{n\times n}\text{是可逆矩阵}\}.$$

证明: $S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 A 在 $\mathbb{C}$ 上一定可对角化.
证明 设 A 的极小多项式为 m, 特征多项式为 p, 则由知 m 无重根. 设 $A_k \in S(A), k = 1, 2, \cdots$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A}) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0,$$

$$\left|\lambda I - \tilde{A}\right| = \left|\lambda I - \lim_{k\to\infty} A_k\right| = \lim_{k\to\infty} |\lambda I - A_k| = \lim_{k\to\infty} |\lambda I - A| = |\lambda I - A| = p(\lambda).$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征多项式也是 p,$\tilde{A}$ 极小多项式整除 m, 从而 $\tilde{A}$ 极小多项式也无重根. 因此 $\tilde{A}$ 和 A 有相同的特征值且可对角化, 故 $\tilde{A} \in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知,A 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于下列分块对角矩阵:

$$\widetilde{J} = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k), \widetilde{J}_{s_1}(a_1, b_1), \cdots, \widetilde{J}_{s_l}(a_l, b_l)\},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, a_1, b_1, \cdots, a_l, b_l$ 都是实数,$b_1, \cdots, b_l$ 都非零, 且 λ_j 都是 A 的实特征值,$a_j \pm \mathrm{i}b_j$ 都是 A 的复特征值,$J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示以 λ_i 为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j = -2a_j, d_j = a_j^2 + b_j^2, \quad R_j = \begin{pmatrix} 0 & -d_j \\ 1 & -c_j \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_{s_j}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} R_j & C_2 & & & \\ & R_j & C_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R_j & C_2 \\ & & & & R_j \end{pmatrix}.$$

对于 $J_{r_j}(\lambda_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}(\lambda_j) \sim \begin{pmatrix} \lambda_j & \frac{1}{n} & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{n} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

对于 $\widetilde{J}_{s_j}(a_j,b_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}\left(a_j,b_j\right)\sim\begin{pmatrix}0 & -d_j & & & & & & & \\ 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & & & \\ & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & -d_j & & \\ & & & & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & \\ & & & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & & & 1 & -c_j\end{pmatrix}\triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j,b_j),\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A\sim\widetilde{J}\sim\operatorname{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}\triangleq\widetilde{J}^{(n)},\forall n\in\mathbb{N}.$$

故 $\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$. 因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$. 不难发现

$$\lim_{n\to+\infty}J_{r_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}\lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j\end{pmatrix},$$

$$\lim_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)=\begin{pmatrix}0 & -d_j & & & & & \\ 1 & -c_j & & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & \\ & & 1 & -c_j & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_j & & & \\ & R_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_j\end{pmatrix},$$

注意到 R_j 的极小多项式等于

$$x^2+c_jx+d_j=(x-a_j)^2+b_j^2=\left(x-a_j-\mathrm{i}b_j\right)\left(x-a_j+\mathrm{i}b_j\right)$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上无重根, 故 R_j 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_{s_j}^{(n)}\left(a_j,b_j\right)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上也可对角化. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}=\operatorname{diag}\{\lim_{n\to+\infty}J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k),\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1,b_1),\cdots,\lim_{n\to+\infty}\widetilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l,b_l)\}$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}\in S(A)$, 故 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{J}^{(n)}$. 因此 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化.

□

例题 0.4 设 $n\geqslant 2, A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称矩阵, $v\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$. 证明:

$$\operatorname{tr}(A^TA)\geqslant\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2}-\frac{1}{n-1}[\operatorname{tr}(A)]^2.$$

证明 不妨设 A 为实对角矩阵, 即

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n.$$

现在再设 $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\geqslant\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^nv_i^2}-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2.$$

不妨设 λ_1 是 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n v_i^2} + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 \geqslant 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j\right) \geqslant 0\\
\Longleftrightarrow &\frac{1}{2n-2}\lambda_1^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + \frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j \geqslant 0\\
\Longleftrightarrow &\lambda_1^2 + 2n\sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + 4\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j \geqslant 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

上述关于 λ_i 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2n & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2\\ -2 & \lambda-2n & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -2 & -2 & \cdots & \lambda-2n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2\\ -\lambda-1 & \lambda-2n+2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\lambda-1 & 0 & \cdots & \lambda-2n+2 \end{vmatrix}\\
&\xlongequal{\text{“爪”型行列式}} (\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1} - 2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2}\\
&= (\lambda-2n+2)^{n-2}\left[(\lambda-1)(\lambda-2n+2) - 2(n-1)(\lambda+1)\right]\\
&= (\lambda-2n+2)^{n-2}\lambda(\lambda-4n+3).
\end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0, 4n-3, \underbrace{2n-2, 2n-2, \cdots, 2n-2}_{n-2\text{个}}. \quad (n\geqslant 2)$$

故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2). □

例题 0.5 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且满足对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $|A^k+I_n|=1$. 证明 A 是幂零矩阵.

笔记 证明的想法类似于定理??.

注 实际上, 由知(6)式只需要对 $k=1,2,\cdots,2^n-1$ 成立, 就可以得到结论成立. 见例题 0.6.

证明 事实上设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^n (1+\lambda_j^k) = 1, \forall k\in\mathbb{N}. \qquad (3)$$

实际上有

$$1 = \prod_{j=1}^n (1+\lambda_j) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j + \cdots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \qquad (4)$$

展开(3)得

$$1=\prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j^k)=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i^k\lambda_j^k+\cdots+\lambda_1^k\lambda_2^k\cdots\lambda_n^k. \tag{5}$$

将(4)中右边除 1 以外的每项看成 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$, 由(5)(3)得

$$y_1^k+y_2^k+\cdots+y_{2^n-1}^k=0,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

由 Netwon 公式得 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 所有初等对称多项式为 0. 从而由 Vieta 定理知 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 是多项式 $y^{2^n-1}=0$ 的全部根. 这就给出了

$$y_i=0,i=1,2,\cdots,2^n-1\Rightarrow\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,n,$$

因此由命题**??**知 A 是幂零矩阵.

□

例题 0.6 设 A 是 3 阶复矩阵, 对 $k=1,2,\cdots,7$, 我们有

$$|I+A^k|=1,$$

证明 A 是幂零矩阵, 并问 k 是否可只取 $1,2,\cdots,6$.

笔记 反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

证明 事实上, 设 $\lambda_i,i=1,2,3$ 是 A 的特征值, 那么

$$(1+\lambda_1^k)(1+\lambda_2^k)(1+\lambda_3^k)=1,k=1,2,\cdots,7.$$

于是我们有

$$(1+\lambda_1^k)(1+\lambda_2^k)(1+\lambda_3^k)=1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k=0,k=1,2,\cdots,7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由 Netwon 公式他们是 $\lambda^7=0$ 的七个根 (类似例题 0.5), 因此我们推出了

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

这就说明了 A 幂零.

如果 k 只能取 $1,2,3\cdots,6$, 反例可取

$$A=\begin{pmatrix}e^{\frac{2\pi i}{7}}&0&0\\0&e^{\frac{4\pi i}{7}}&0\\0&0&e^{\frac{8\pi i}{7}}\end{pmatrix}.$$

□

例题 0.7 设 f,g 是互素多项式且 A 是一个 n 阶矩阵, 证明 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n.

笔记 这题也可以用 Jordan 标准型解决, 可以得到 $f(A),g(A)$ 的 0 特征值的个数即代数重数之和为 n, 从而 $n-r(f(A))+n-r(g(A))=n$, 故结论得证.

证明 由裴蜀等式, 存在多项式 a,b 使得 $af+bg=1$. 于是

$$\begin{pmatrix}f(A)&0\\0&g(A)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}f(A)&b(A)g(A)\\0&g(A)\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}f(A)&a(A)f(A)+b(A)g(A)\\0&g(A)\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

即 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n.

□

例题 0.8 设 A 是 n 阶幂零矩阵,B 是 n 阶方阵满足 $AB=BA$ 且 $r(AB)=r(B)$, 证明 $B=0$.

证明 由命题**??**知 $AB=BA$ 表明 $\mathrm{Im}\,B$ 是 A 不变子空间. 于是可以考虑 $A|_{\mathrm{Im}\,B}$, 显然 $\mathrm{Im}A\,|_{\mathrm{Im}B}=\mathrm{Im}AB$. 由维数公式有

$$\dim\mathrm{Im}\,B=\dim\ker A|_{\mathrm{Im}\,B}+\dim\mathrm{Im}\,AB=\dim\ker A|_{\mathrm{Im}\,B}+\dim\mathrm{Im}\,B,$$

即 $\ker A|_{\mathrm{Im}\,B}=0$. 现在 $A|_{\mathrm{Im}\,B}$ 也是 $\mathrm{Im}\,B$ 上的单射. 由推论**??**知 $A|_{\mathrm{Im}\,B}$ 是双射. 又因为双射的复合还是双射, 所以 $(A|_{\mathrm{Im}\,B})^n=A^n|_{\mathrm{Im}\,B}=0$ 也是双射. 从而可知 $\mathrm{Im}\,B=0$, 这就完成了证明.

□

例题 0.9 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(AB-BA+I)=1$, 证明

$$\mathrm{tr}(ABAB)-\mathrm{tr}(A^2B^2)=\frac{n(n-1)}{2}. \tag{7}$$

证明 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 使得 $AB-BA+I=\alpha\beta^T$, 于是我们有

$$n=\mathrm{tr}(AB-BA+I)=\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)=\mathrm{tr}(\beta^T\alpha)$$

现在

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left((AB-BA)^2\right)&=\mathrm{tr}(ABAB-AB^2A-BA^2B+BABA)\\
&=\mathrm{tr}(ABAB-A^2B^2-A^2B^2+ABAB)\\
&=2\mathrm{tr}(ABAB-A^2B^2)=\mathrm{tr}\left((\alpha\beta^T-I)^2\right)
\end{aligned}
$$

利用定理**??**, 我们有 $\alpha\beta^T$ 特征值为 $\beta^T\alpha,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1}$. 故 $(\alpha\beta^T-I)^2$ 特征值为 $(\beta^T\alpha-1)^2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1}$. 于是

$$\mathrm{tr}(ABAB)-\mathrm{tr}(A^2B^2)=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

□

例题 0.10 设 n 为奇数, 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

不为 0.

笔记 行列式 mod$p$ 技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

注 行列式左上角元素不变的原因:(1) 对行列式整体做 mod2 运算, 左上角元素无论变化还是不变都不影响行列式的值, 因为此时行列式是个对角阵, 其值只与对角元有关.

(2) 我们在有限域 $\mathbb{Z}_w$ 上考虑行列式 D, 这样 $3=5=\cdots=1, 2=4=\cdots=0$, 因此无论各个元素的形式如何, 最终的结果是一样的, 都等于 1. 故 D 的值不可能是 0!

证明 我们将行列式 D 的元素 mod2, 因为 $(n+1)^n$ 是偶数, 所以

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0\\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

这个行列式当然就是对角线之积 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n\cdot n^2\cdots n^n$ 还是奇数, 故 $D=2k+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n\cdot n^2\cdots n^n(k\in\mathbb{Z})$, 奇数加偶数当然还是奇数. 因此行列式 D 也是奇数, 所以 D 不为 0. 证毕!

□

例题 0.11 设 $n\geqslant 3$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$,$a_{ij}=\begin{cases}3i, & i=j\\ 3i+1, & i<j\\ 2-3j, & i>j\end{cases}$ 证明 $\det A$ 是 3 的倍数当且仅当 n 是奇数.

笔记 mod$p$ 技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

证明 我们在有限域 $\mathbb{Z}_3$ 上考虑矩阵 A, 即

$$A=(a_{ij}),a_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i<j\\ 2, & i>j\end{cases},$$

故 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 2 & \cdots & 2 & 0\end{pmatrix}$.(行列式 A 的计算可见命题**??**, 下面计算用的是大拆分法) 现在定义

$$f(x)=\begin{vmatrix}x & x+1 & \cdots & x+1\\ x+2 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & x+1\\ x+2 & \cdots & x+2 & x\end{vmatrix},$$

则显然 f 是关于 x 的一次函数且

$$f(-1)=(-1)^n,f(-2)=(-2)^n\Rightarrow f(x)=((-1)^n-(-2)^n)(x+1)+(-1)^n.$$

现在

$$|A|=f(0)=2(-1)^n-(-2)^n=\begin{cases}2-4^m, & n=2m\\ -2+2^{2m-1}, & n=2m-1\end{cases},$$

注意到

$$4\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)\Rightarrow 4^m\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2-4^m\equiv 1\ (\mathrm{mod}3),$$

以及

$$4\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2^{2m-2}\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2(2^{2m-2}-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}3)\Rightarrow -2+2^{2m-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}3),$$

这就完成了证明.

□

例题 0.12 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{2025\times 2025}$ 满足

$$a_{ii}=i^3+3i^2+2i,\ a_{ij}=\begin{cases}3(i-j)+1, & i<j\\ 3(i+j)+2, & i>j\end{cases}.$$

证明:3 | det A.

证明 在有限域 $\mathbb{Z}_3$ 上考虑. 注意到

$$i^3+3i^2+2i=i(i+1)(i+2)=0,\ \forall i\in\mathbb{N}.$$

故

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\2&0&1&\cdots&1&1\\2&2&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&2&2&\cdots&0&1\\2&2&2&\cdots&2&0\end{vmatrix},$$

记 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$,$|A(t)|=|A+t\alpha\alpha^T|$, 则

$$|A(t)|=|A|+t\sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

其中 A_{ij} 为 A 的 (i,j) 元的代数余子式. 从而

$$|A|-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=|A(-1)|=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\1&-1&0&\cdots&0&0\\1&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1&0\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}=-1=2;$$

$$|A|-2\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=|A(-2)|=\begin{vmatrix}-2&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&-2&-1&\cdots&-1&-1\\0&0&-2&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-2&-1\\0&0&0&\cdots&0&-2\end{vmatrix}=-2^{2025}=1^{2025}=1.$$

于是 $|A|=2\times 2-1=3=0$. 故 3| det A.

□

例题 0.13 设 A,B 为正定矩阵, 证明关于 X 的矩阵方程 $AX+XA=B$ 有唯一解, 且解也为正定矩阵.

证明 考虑映射 $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}, X\mapsto AX+XA$. 由推论**??**知 A 特征值为正, $-A$ 特征值为负. 于是由命题**??**, 我们知道 $AX=X(-A)$ 只有 0 解, 即 $\ker T=\{0\}$. 因此 T 为单射, 从而由推论**??**知 T 也是满射. 故矩阵方程 $AX+XA=B$ 有唯一解 X. 此外

$$A^TX^T+X^TA^T=B^T\implies AX^T+X^TA=B,$$

故解 X 是实对称的. 设 $X\alpha=\lambda\alpha,\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\lambda\in\mathbb{R}$. 我们有

$$2\lambda\alpha^TA\alpha=\alpha^TAX\alpha+\alpha^TXA\alpha=\alpha^TB\alpha>0\implies\lambda=\frac{\alpha^TB\alpha}{2\alpha^TA\alpha}>0,$$

从而由推论**??**知 X 是正定矩阵.

□

例题 0.14 设 $\mathbb{F}$ 是一数域且 $AB = BA$. 设方程组 $ABX = 0, AX = 0, BX = 0$ 的解空间分别是 V, V_1, V_2. 证明 $V = V_1 \oplus V_2$ 的充要条件是存在 $C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $CA + DB = I_n$.

证明 初等变换得

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned}
&\exists C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}, \text{使得} CA + DB = I_n \iff \exists C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}, \text{使得} \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = I_n \\
&\iff \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} X = I_n \text{在} \mathbb{F}^{2n\times n} \text{有解} \iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix}\right) \\
&\iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = n \iff r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = n \iff AX = 0, BX = 0 \text{公共解只有} 0 \text{解} \\
&\iff V_1 \bigcap V_2 = \{0\}.
\end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道 $V_1 + V_2$ 是直和. 由 $AB = BA$ 我们知道 $V_1 \oplus V_2 \subset V \Rightarrow$, 于是

$$n - r(AB) \geqslant n - r(A) + n - r(B) \Rightarrow r(AB) \leqslant r(A) + r(B) - n.$$

由 Sylvester(西尔维斯特) 不等式我们得

$$n - r(AB) = n - r(A) + n - r(B),$$

即 $V = V_1 \oplus V_2$.

□

例题 0.15 在 n 维欧式空间 V 中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 $n+1$ 个.

证明 先构造 $n+1$ 个两两夹角为钝角的单位向量. $n = 1$ 是显然的, 假定对维数小于 n 为空间, 的确是存在的, 则对 n, 在 V 的一个 $n-1$ 维子空间中取 n 个两两夹角为钝角的向量, 记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量 β. 待定 λ, 使得 $n+1$ 个不同向量

$$\alpha_1 - \lambda\beta, \alpha_2 - \lambda\beta, \cdots, \alpha_n - \lambda\beta, \beta. \tag{8}$$

两两夹角为钝角. 从而现在我们有

$$\begin{aligned}
&(\alpha_i - \lambda\beta, \beta) = -\lambda < 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \lambda > 0; \\
&(\alpha_i - \lambda\beta, \alpha_j - \lambda\beta) = (\alpha_i, \alpha_j) + \lambda^2 < 0, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant n \Leftrightarrow \lambda^2 < \min_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{-(\alpha_i, \alpha_j)\}.
\end{aligned}$$

于是这样的 λ 肯定存在. 又若 $\alpha_i - \lambda\beta = \beta$, 则 $\beta = \dfrac{\alpha_i}{1+\lambda} \in \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 矛盾! $\alpha_i - \lambda\beta = \alpha_j - \lambda\beta \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j$, 这也是矛盾! 于是我们证明了 (8) 中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过 $n+1$ 个. $n = 1$ 显然, 假定对维数小于 n 为空间, 的确成立, 在 n 时, 假定有 $n+2$ 个不同的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+2}$ 两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i = \alpha_i - (\alpha_i, \alpha_{n+2})\alpha_{n+2}, i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&(\beta_i, \alpha_{n+2}) = 0, i = 1, 2, \cdots, n+1; \\
&(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i, \alpha_j) - (\alpha_i, \alpha_{n+2})(\alpha_j, \alpha_{n+2}) < 0, 1 \leqslant i < j \leqslant n+1,
\end{aligned}$$

我们有两两夹角为钝角的向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}$ 张成的空间至多是 $n-1$ 维, 由归纳假设, 他应该至多只有 n 个向量两两夹角为钝角, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明.

□

例题 0.16 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ 使得

$$A + t_i B, i = 1, 2, \cdots, n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A, B 都是幂零矩阵.

证明 定义 $p(\lambda, \mu) \triangleq |\lambda I - A - \mu B|$. 由 $A + t_i B, i = 1, 2, \cdots, n+1$ 都是幂零矩阵及命题??得

$$p(\lambda, t_i) = \lambda^n, i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

对固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 注意到不超过 n 次的多项式 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n$ 有 $n+1$ 个不同实根 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$, 于是 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n \equiv 0$, 即

$$|\lambda I - A - \mu B| = \lambda^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

让 $\mu = 0$ 得 $|\lambda I - A| = \lambda^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, 即 A 是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n \left| \frac{\lambda}{\mu} I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n, \ \forall \mu > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

把 λ 用 $\mu\lambda$ 替换得

$$\left| \lambda I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n.$$

让 $\mu \to +\infty$ 得 $|\lambda I - B| = \lambda^n$, 即 B 也是幂零矩阵.

□

例题 0.17 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A - E$ 幂零且对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = BA^k$, 证明: $AB = BA$.

证明 由 $A - E$ 幂零可知 A 的特征值为 1, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(1) & & & \\ & J_{n_2}(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$. 由命题??(1) 可知

$$f\left(J_{n_i}^k(1)\right) = J_{n_i}(1), \quad i = 1, 2, \cdots, s. \tag{9}$$

这里 $J_{n_i}(1)$ 是 n_i 阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 于是由 $A^k B = BA^k$ 及(9)式得, 对 $\forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$J_{n_i}^k(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}^k(1) \Longrightarrow f\left(J_{n_i}^k(1)\right) B_{ij} = B_{ij} f\left(J_{n_j}^k(1)\right) \Longrightarrow J_{n_i}(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}(1),$$

故 $AB = BA$.

□

例题 0.18 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 A 的不同特征值模长互不相同且 $r(A) = r(A^2)$. 若对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = BA^k$, 证明 $AB = BA$.

证明 由 $r(A) = r(A^2)$ 及定理??知,A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 1 阶 Jordan 块的个数有

$$r(A^2) + r(A^0) - 2r(A) = n - r(A).$$

因为 $n - r(A)$ 就是 0 特征值的几何重数, 即 A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 Jordan 块只有 $n - r(A)$ 个, 所以 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的. 因此可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

其中 C 是 A 的所有非零特征值对应的 Jordan 块组成的分块对角阵. 由条件可得

$$A^k B = BA^k \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} C^k B_1 & C^k B_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C^k & O \\ B_3 C^k & O \end{pmatrix}.$$

从而 $B_2 = B_3 = O, C^k B_1 = B_1 C^k$, 即

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}, \quad C^k B_1 = B_1 C^k.$$

于是

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} CB_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff CB_1 = B_1 C.$$

因此只需证 $CB_1 = B_1 C$. 现设

$$C = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \quad B_1 = (B_{ij}),$$

这里 J_{λ_i} 是属于 A 的特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵,λ_i 互不相同. 从而我们有

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ij} = B_{ij} J_{\lambda_j}^k, \quad \forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}. \tag{10}$$

由条件知 λ_i 的模长互不相同, 从而 $\lambda_i^k \neq \lambda_j^k, \forall i \neq j$. 于是由命题**??**可知 $J_{\lambda_i}^k X = X J_{\lambda_j}^k, \forall i \neq j$ 只有零解. 因此再结合(10)式知 $B_{ij} = O, \forall i \neq j$. 故

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

由命题**??**(2) 知, 对 $\forall i \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都存在次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式 f, 使得

$$f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) = \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}.$$

进而

$$\begin{aligned} C^k B_1 = B_1 C^k &\iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k \iff \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \\ &\iff f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \iff \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} \iff J_{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \cdots, s. \end{aligned}$$

因此 $CB_1 = B_1 C$, 从而结论得证.

□

例题 0.19 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$ 且 A, u, v 元素都是正数并满足 $Au = v, Av = u$. 证明: $u = v$.

证明 记 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T, t^* \triangleq \min\left\{\frac{u_i}{v_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\}, \tau \triangleq u - t^* v = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)^T$, 则 τ 元素非负.

设 $u_{i'} = t^* v_{i'}$, 则 $\tau_{i'} = 0$. 于是

$$A\tau = Au - t^* Av = v - t^* v,$$

$$A^2 \tau = Av - t^* Av = u - t^* v = \tau.$$

设 $A^2 = (a_{ij})$, 则由 $A^2 \tau = \tau$ 可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i'j} \tau_j = \tau_{i'} = 0.$$

再结合 A^2 是正数,τ 元素都非负可知

$$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n = 0 \Longrightarrow u = t^* v.$$

从而由条件可得

$$v = Au = t^* Av = t^* u = (t^*)^2 v \Longrightarrow t^{*2} = 1 \Longrightarrow u = v.$$

□

例题 0.20 设 $n,m\in\mathbb{N}$, 设 $n\geqslant 1$ 次不可约多项式 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 的 n 个根是实数且成等差数列, 证明: $n\leqslant 2$.

证明 设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 等差数列 $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ 且 d 为公差. 反证, 设 $n\geqslant 3$, 则只需证此时 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 即上述部分一次因式乘积为有理多项式. 下证 $(x-x_1)(x-x_n)\in\mathbb{Q}[x]$, 即证 $x_1+x_n,x_1x_n\in\mathbb{Q}$. 由 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 知 $f(x)$ 的常数项为有理数, 即

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{(x_1+x_n)n}{2}\in\mathbb{Q}\Longrightarrow x_1+x_n\in\mathbb{Q}.$$

注意到

$$x_1x_n=\frac{(x_1+x_n)^2-(x_n-x_1)^2}{4}=\frac{(x_1+x_n)^2-(n-1)^2d^2}{4},$$

故只须证的 $d^2\in\mathbb{Q}$. 由 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 和 Vieta 定理知

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}x_ix_j\in\mathbb{Q}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}x_k^2&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}x_{n-k+1}^2\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[(x_k+x_{n-k+1})^2+(x_k-x_{n-k+1})^2\right]}{4}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[(x_1+x_n)^2+(n-2k+1)^2d^2\right]}{4}\triangleq q\in\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

从而

$$d^2=\frac{4q-\sum\limits_{k=1}^{n}(x_1+x_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(n-2k+1)^2}\in\mathbb{Q}.$$

故 $x_1x_n\in\mathbb{Q}$, 进而 $(x-x_1)(x-x_n)\in\mathbb{Q}[x]$, 此时 $(x-x_1)(x-x_n)\mid f(x)$, 故此时 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 矛盾!

□

例题 0.21 设 $n\geqslant 2$ 为一个正整数, $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为两个 n 阶实矩阵, 已知 $A^2=-I_n$ (I_n 为 n 阶单位矩阵), 且 $AB=BA$, 证明: B 的行列式 $\det(B)\geqslant 0$.

证明 证法一: 由 $A^2=-I_n$ 和 x^2+1 不可约知 A 的极小多项式为 x^2+1, 从而 A 的特征值只有 $\pm\mathrm{i}$, 于是 $|A|=1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2+1)^{\frac{n}{2}}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}R&I_2&&&\\&R&I_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&R&I_2\\&&&&R\end{pmatrix}, \text{其中} R=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A=J,B=(B_{ij})$ 为相应分块矩阵,$B_{ij}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. 由 $AB=BA$ 可得

$$\begin{pmatrix}RB_{11}+B_{21}&*&\cdots&*&*\\RB_{21}+B_{31}&RB_{22}+B_{32}&\cdots&*&*\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\RB_{\frac{n}{2}-1,1}+B_{\frac{n}{2},1}&RB_{\frac{n}{2}-1,2}+B_{\frac{n}{2},2}&\cdots&RB_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}+B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}&*\\RB_{\frac{n}{2},1}&RB_{\frac{n}{2},2}&\cdots&RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}&RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11}R & * & \cdots & * & * \\ B_{21}R & B_{21}+B_{22}R & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{\frac{n}{2}-1,1}R & B_{\frac{n}{2}-1,1}+B_{\frac{n}{2}-1,2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2}+B_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}R & * \\ B_{\frac{n}{2},1}R & B_{\frac{n}{2},1}+B_{\frac{n}{2},2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2}+B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}R & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}+B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}R \end{pmatrix} \tag{11}$$

比较第一列和最后一行元素得

$$RB_{\frac{n}{2},1}=B_{\frac{n}{2},1}R,$$

$$RB_{i1}+B_{i+1,1}=B_{i1}R,\quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1.$$

$$RB_{\frac{n}{2},i+1}=B_{\frac{n}{2},i}+B_{\frac{n}{2},i+1}R,\quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1.$$

于是

$$B_{\frac{n}{2},1}=B_{\frac{n}{2}-1,1}R-RB_{\frac{n}{2}-1,1}=RB_{\frac{n}{2},2}-B_{\frac{n}{2},2}R.$$

又因为 $R^2=-I_2$ 且 R 可逆, 所以对上式两边同乘 R 可得

$$RB_{\frac{n}{2},1}=B_{\frac{n}{2},1}R \Longleftrightarrow RB_{\frac{n}{2}-1,1}R+B_{\frac{n}{2}-1,1}=-B_{\frac{n}{2}-1,1}-RB_{\frac{n}{2}-1,1}R$$

$$\Longrightarrow RB_{\frac{n}{2},1}=RB_{\frac{n}{2}-1,1}R+B_{\frac{n}{2}-1,1}=O \Longrightarrow B_{\frac{n}{2},1}=O.$$

因此 $B_{\frac{n}{2}-1,1}R=RB_{\frac{n}{2}-1,1}$,$RB_{\frac{n}{2},2}=B_{\frac{n}{2},2}R$, 同理可得 $B_{\frac{n}{2}-1,1}=B_{\frac{n}{2},2}=O$. 依此类推可得

$$B_{\frac{n}{2},1}=B_{\frac{n}{2}-1,1}=\cdots=B_{21}=O,\quad B_{\frac{n}{2},1}=B_{\frac{n}{2},2}=\cdots=B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}=O,\quad RB_{11}=B_{11}R.$$

再比较(11)式第 2 列和倒数第 2 行主对角线以下元素, 同理可得

$$B_{\frac{n}{2}-1,i}=O,\quad i=2,3,\cdots,\frac{n}{2}-2,$$

$$B_{i,2}=O,\quad i=3,4,\cdots,\frac{n}{2}-1,$$

$$RB_{22}=B_{22}R.$$

依此类推最终可得 $B_{ij}=O,i>j$, 即 B 为分块上三角阵, 并且

$$RB_{ii}=B_{ii}R,\quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}. \tag{12}$$

对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}\}$, 设 $B_{ii}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$, 则由(12)式得

$$RB_{ii}=B_{ii}R \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \Longrightarrow a=d, c=-b.$$

从而

$$B_{ii}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |B_{ii}|=a^2+b^2\geqslant 0.$$

因此 $|B|=\prod\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}}|B_{ii}|\geqslant 0$.

证法二:由 $A^2=-I_n$ 和 x^2+1 不可约知 A 的极小多项式为 x^2+1, 从而 A 的特征值只有 $\pm\mathrm{i}$, 于是 $|A|=1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2+1)^r$, 其中 $r=\frac{n}{2}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} R & I_2 & & & \\ & R & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix},\text{其中}R=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又注意到实矩阵 $C=\begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$ 的特征多项式也为 $(x^2+1)^r$, 进而由实数域上的广义 Jordan 标准型知,C 在实数域上也相似于 J. 因此 A 在实数域上相似于实矩阵 $C=\begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$, 从而存在可逆矩阵 P, 满足 $A=P^{-1}CP$. 由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A=C$,$B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 其中 B_1 为 r 阶矩阵, 由 $AB=BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ -B_1 & -B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B_2 & B_4 \\ -B_4 & B_3 \end{pmatrix},$$

此时 $B_3=-B_2$,$B_1=B_4$, 从而

$$\begin{aligned} |B|&=\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1-\mathrm{i}B_2 & B_2+\mathrm{i}B_1 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1-\mathrm{i}B_2 & O \\ -B_2 & B_1+\mathrm{i}B_2 \end{vmatrix} \\ &=|B_1-\mathrm{i}B_2|\,|B_1+\mathrm{i}B_2|=|B_1-\mathrm{i}B_2|\,|\overline{B_1-\mathrm{i}B_2}|\geqslant 0. \end{aligned}$$

□

例题 0.22 设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换.$\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma=k\mathbf{1},k\in\mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1,\dots,v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2): 记

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T,$$

$e=e_1+\cdots+e_n$. 由 σ 是纯量变换知上述 $n+1$ 个向量都是其特征向量. 任取其中 n 个向量, 因为 $e_1,\cdots,e_n$ 显然是线性无关的, 所以可不妨设这 n 个向量为 $\{e_1,\cdots,e_{i-1},e,e_{i+1},\cdots,e_n\}$, 于是

$$\begin{aligned} &a_1e_1+\cdots+a_{i-1}e_{i-1}+a_ie+a_{i+1}e_{i+1}+\cdots+a_ne_n=0 \\ \Longleftrightarrow&\begin{pmatrix} a_1+a_i \\ \vdots \\ a_{i-1}+a_i \\ a_i \\ a_{i+1}+a_i \\ \vdots \\ a_n+a_i \end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow a_1=\cdots=a_{i-1}=a_i=a_{i+1}=\cdots=a_n=0. \end{aligned}$$

故 $\{e_1,\cdots,e_{i-1},e,e_{i+1},\cdots,e_n\}$ 线性无关.

(2) $\Longrightarrow$ (1): 假设这 $n+1$ 个向量分别属于 $k(k\leqslant n+1)$ 个不同特征值的特征子空间 $V_1,\cdots,V_k$ 中. 不妨设

$$1=t_0<t_1<\cdots<t_k=k,\quad t_i\in\mathbb{N};$$

$$v_{t_{i-1}},\cdots,v_{t_i}\in V_i,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

显然 V_i 中至多含有 n 个 $\{v_1,\cdots,v_{n+1}\}$ 中向量. 任取 $\{v_1,\cdots,v_{n+1}\}\setminus\{v_{t_{i-1}},\cdots,v_{t_i}\}$ 中 $n-(t_i-t_{i-1}+1)$ 个向量, 则由假设可知 $v_{t_{i-1}},\cdots,v_{t_i}$ 和这 $n-(t_i-t_{i-1}+1)$ 个向量组成的向量组线性无关, 进而 $v_{t_{i-1}},\cdots,v_{t_i}$ 也线性无关. 又因

为属于不同特征值的特征向量必线性无关, 所以由 $\{v_{t_{i-1}},\cdots,v_{t_i}\}, i=1,2,\cdots,k$ 组成的向量组 $\{v_1,\cdots,v_{n+1}\}$ 也线性无关, 这与 $\mathbb{C}^n$ 中至多只有 n 个线性无关向量矛盾! 因此这个 $n+1$ 个向量都属于同一个特征子空间, 由于其中任意 n 个向量线性无关, 故这个特征子空间就是全空间, 即 σ 是纯量变换.

□

例题 0.23 设 A,B 为 n 阶实方阵, 证明: $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix} = 2r(A)$.

证明 由矩阵秩的基本公式和命题??可知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\left(A^TA\right)\leqslant \mathrm{r}\left(A^TA\ BA\right)=\mathrm{r}\left(\left(A^T\ B\right)A\right)\leqslant \mathrm{r}(A)$. 从而 $\mathrm{r}\left(A^TA\right)=\mathrm{r}\left(A^TA\ BA\right)$, 于是 $A^TAX=BA$ 存在非零解 X_0. 故

$$\begin{pmatrix} E & -X_0 \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & BA-A^TAX_0 \\ O & A^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix}=2\mathrm{r}(A).$$

□

例题 0.24 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域,$A,B,M\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $AM=MB$ 且 A,B 有相同的特征多项式, 证明: 对任何 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 都有

$$\det(A-MX)=\det(B-XM).$$

证明 设有理数列 $t_n\to 0$, 使得 $A_n=t_nE+A$,$B_n=t_nE+B$ 可逆. 因为 A,B 有相同特征多项式, 所以 A_n,B_n 也有相同的特征多项式, 且 $A_nM=MB_n$. 从而 $|A_n|=|B_n|\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}$. 于是由降价公式可得

$$\begin{aligned}|A_n-MX|&=|A_n||E-XA_n^{-1}M|=|A_n||E-XMB_n^{-1}|\\&=|E-MXB_n^{-1}||B_n|=|B_n-XM|.\end{aligned}$$

因为上式两边都是关于 t_n 的连续函数, 所以令 $n\to\infty$ 得 $|A-MX|=|B-XM|$.

□

例题 0.25 设 $\mathbb{F}$ 为数域且 $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 证明同构

$$\mathrm{Ker}(A+B-ACB)\cong\mathrm{Ker}(A+B-BCA). \tag{13}$$

证明 证法一: 注意到初等变换

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A+B-BCA \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & A+B-BCA \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -E & A \\ -E+BC & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E-AC & A \\ -E & B \end{pmatrix}\\ \to&\begin{pmatrix} AC-E & A \\ E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & B \\ AC-E & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & B+A-ACB \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B+A-ACB \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是我们证明了 $\mathrm{rank}(A+B-ACB)=\mathrm{rank}(A+B-BCA)$, 这恰好由维数公式是(13).

证法二:不妨设 $A=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 否则用可逆矩阵 $P,Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$, 然后用 PAQ 代替 A,PBQ 代替 B,$Q^{-1}CP^{-1}$ 代替 C. 我们对应分块

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

注意到恒等式

$$\begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}(A+B-ACB)=E_n+\begin{pmatrix} E_r-C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4-E_{n-r} \end{pmatrix},$$

$$(A+B-BCA)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ C_3 & E_{n-r} \end{pmatrix}=E_n+\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4-E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r-C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

利用可逆矩阵乘矩阵不改变矩阵的秩和推论??知 $\operatorname{rank}(A+B-ACB)=\operatorname{rank}(A+B-BCA)$, 这恰好由维数公式是(13).

□

例题 0.26 设 a_1,a_2,a_3 为满足 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ 的一组实数,b_1,b_2 为满足 $b_1^2+b_2^2=1$ 的一组实数. 又设 M_1 为 5×3 矩阵, 其每一行都为 a_1,a_2,a_3 的一个排列;M_2 是 5×2 矩阵, 其每一行都为 b_1,b_2 的一个排列. 令 $M=(M_1,M_2)$, 它为 5×5 矩阵. 证明:

(1) $(\operatorname{tr}M)^2\leqslant(5+2\sqrt{6})\operatorname{rank}M$;

(2) M 必有绝对值小于或等于 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的实特征值 λ.

证明

(1) 由 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$,$b_1^2+b_2^2=1$ 知 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2\leqslant1$. 从而

$$(\operatorname{tr}M)^2\leqslant5^2=25.$$

且有均值不等式可得

$$a_1+a_2+a_3\leqslant3\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}=\sqrt{3},\quad b_1+b_2\leqslant2\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{2}}=\sqrt{2}. \tag{14}$$

当 $\mathrm{r}(M)\geqslant3$ 时, 就有

$$(\operatorname{tr}M)^2\leqslant25<\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot3\leqslant\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M)$$

恒成立. 故只需考虑 $\mathrm{r}(M)=1,2$ 的情形. 当 $\mathrm{r}(M)=1$ 时, 不妨设

$$M=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\end{pmatrix},$$

则由(14)式可得

$$(\operatorname{tr}M)^2=(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)^2\leqslant\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+4\sqrt{6}.$$

当 $\mathrm{r}(M)=2$ 时, 不妨设

$$M=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_3&a_2&b_2&b_1\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\\a_1&a_3&a_2&b_2&b_1\\a_1&a_2&a_3&b_1&b_2\end{pmatrix},$$

其中 $a_3=\max\limits_{i=1,2,3}a_i$,$b_2=\max\limits_{i=1,2}b_i$. 否则,tr$M$ 都没有上述矩阵的迹大. 则

$$\begin{aligned}a_1+2a_3&\leqslant3\sqrt{\frac{a_1^2+2a_3^2}{3}}=\sqrt{3}\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+a_3^2-a_2^2}\\&=\sqrt{3}\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+a_3^2-a_2^2}=\sqrt{3}\sqrt{1+a_3^2-a_2^2}\\&\leqslant\sqrt{6}.\end{aligned}$$

于是

$$(\operatorname{tr}M)^2=(a_1+2a_3+2b_2)^2\leqslant\left(\sqrt{6}+2\right)^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M).$$

综上, 我们有

$$(\operatorname{tr}M)^2\leqslant\left(5+2\sqrt{6}\right)\mathrm{r}(M).$$

(2) 注意到

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

故 $(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2)$ 是 M 的一个特征值, 并且由(14)式可得

$$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2\leqslant\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

□

例题 0.27 设 $A\in M_2(\mathbb{R})$ 是行列式为 d 的可逆矩阵, 且满足 $\det(A+dA^*)=0$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵. 求 $\det(A-dA^*)$.

证明 设 $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$, 则 $A^*=\begin{pmatrix}w&-y\\-z&x\end{pmatrix}$. 由 A 可逆知 $d=|A^*|=|A|=xw-yz\neq 0$. 从而

$$\begin{aligned}|A+dA^*|=\begin{vmatrix}x+dw&(1-d)y\\(1-d)z&w+dx\end{vmatrix}&=(x+dw)(dx+w)-(1-d)^2yz=0\\&\Longleftrightarrow(1+d^2)xw+d(x^2+w^2)=(1-d)^2yz\\&\Longleftrightarrow d(x^2+w^2)=(1-d)^2yz-(1+d^2)xw.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|A-dA^*|=\begin{vmatrix}x-dw&(1+d)y\\(1+d)z&w-dx\end{vmatrix}&=(x-dw)(w-dx)-(1+d)^2yz\\&=(1+d^2)xw-d(x^2+w^2)-(d^2yz+2dyz+yz)\\&=(1+d^2)(xw-yz)-(1-d)^2yz+(1+d^2)xw-2dyz\\&=(1+d^2)(xw-yz)+(1+d^2)(xw-yz)\\&=2(1+d^2)d.\end{aligned}$$

□

命题 0.2

设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$. 若 A,B 的极小多项式分别是

$$f_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2),f_B(x)=(x-\mu_1)(x-\mu_2),$$

证明 A,B 至少有一个维数 1 或者 2 的公共不变子空间.

笔记 **构造思路**: 我希望找到 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ 使得线性方程组

$$\begin{pmatrix}B-aA-bE\\BA-cA-dE\end{pmatrix}x=0\tag{15}$$

有非零解 α. 从而 $\operatorname{span}(\alpha,A\alpha)$ 就是 A 和 B 的一个维数为 1 或 2 的公共不变子空间. 而(15)式有非零解等价于 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}B-aA-bE\\BA-cA-dE\end{pmatrix}<n$. 故现在只需找到 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ 使得 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}B-aA-bE\\BA-cA-dE\end{pmatrix}<n$.

我们的想法是: 用第一行分块阵将第二行分块消掉, 因此需要第二行分块阵是第一行分块阵的倍数. 然后是第一行分块的秩小于 n, 即不满秩. 注意到取 $a=1,b$ 为 $B-A$ 的特征值, 则 $|B-A-bE|=0\Longleftrightarrow\mathrm{r}(B-A-bE)<n$. 由条件可设 B 的极小多项式 $f_B(x)=x^2+kx+r$. 由 Cayley-Hamilton 定理知 $B^2+kB+rE=O\Longleftrightarrow kB=-(1+r)E$. 于是待定 $c,d\in\mathbb{C}$, 使得

$$BA-cA-dE-(B-A-bE)A=k(B-A-bE)\Longleftrightarrow(b-c)A+(1-d)E=-(1+r+kb)E-kA.$$

只要取 $c=kb+b+r+1, d=k+1$ 就有上式成立. 从而(15)式成立.

证明 由条件可设 $f_B(x)=x^2+kx+r$, 则 $B^2+kB+rE=O \Longleftrightarrow kB=-(1+r)E$. 取 b 为 $B-A$ 的一个特征值, $c=kb+b+r+1, d=k+1$. 于是

$$BA-cA-dE-(B-A-bE)A=k(B-A-bE),$$

$|B-A-bE|=0 \Longleftrightarrow \mathrm{r}(B-A-bE)<n$. 考虑如下分块矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} B-aA-bE \\ BA-cA-dE \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B-A-bE \\ k(B-A-bE) \end{pmatrix} \xrightarrow{-kr_1+r_2} \begin{pmatrix} B-A-bE \\ O \end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} B-aA-bE \\ BA-cA-dE \end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} B-A-bE \\ O \end{pmatrix}=\mathrm{r}(B-A-bE)<n.$$

因此线性方程组

$$\begin{pmatrix} B-aA-bE \\ BA-cA-dE \end{pmatrix}x=0$$

有非零解 α. 考虑 $\mathrm{span}(\alpha, A\alpha)$. 显然 $\mathrm{span}(\alpha, A\alpha)$ 是 $A-$ 不变子空间. 并且由上式可得

$$B\alpha=aA\alpha+b\alpha\in\mathrm{span}(\alpha,A\alpha);\quad B(A\alpha)=cA\alpha+d\alpha\in\mathrm{span}(\alpha,A\alpha).$$

所以 $\mathrm{span}(\alpha, A\alpha)$ 也是 $B-$ 不变子空间. 又 $\mathrm{span}(\alpha, A\alpha)$ 是由两个非零向量生成的, 故维数显然等于 1 或 2.

□

例题 0.28 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}^2=\mathscr{B}^2=\mathscr{E}$, 其中 $\mathscr{E}$ 为恒等变换. 证明:

(1) 若 n 为奇数, 则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 有公共的特征向量;

(2) 若 n 为偶数, 则存在一子空间 W 同时是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的不变子空间, 且 $\dim W=1$ 或 2.

证明

(1) 由条件可知, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 适合 x^2-1. 显然 x^2-1 无重根. 从而 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的极小多项式也无重根, 进而 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都可对角化, 并且特征值只可能有 ±1. 于是

$$V=V_1^{\mathscr{A}}\oplus V_{-1}^{\mathscr{A}}=V_1^{\mathscr{B}}\oplus V_{-1}^{\mathscr{B}},$$

其中 $V_1^{\mathscr{A}},V_1^{\mathscr{B}}$ 分别为 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的特征值 1 的特征子空间, $V_{-1}^{\mathscr{A}},V_{-1}^{\mathscr{B}}$ 分别为 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的特征值 -1 的特征子空间. 从而

$$n=\dim\mathbb{C}^n=\dim V_1^{\mathscr{A}}+\dim V_{-1}^{\mathscr{A}}=\dim V_1^{\mathscr{B}}+\dim V_{-1}^{\mathscr{B}}.$$

又因为 n 为奇数, 所以存在 $i,j\in\{1,-1\}$, 使得

$$\dim V_i^{\mathscr{A}},\ \dim V_j^{\mathscr{B}}>\frac{n}{2}.$$

因此由维数公式可得

$$\dim V_i^{\mathscr{A}}\cap V_j^{\mathscr{B}}=\dim V_i^{\mathscr{A}}+\dim V_j^{\mathscr{B}}-\dim\left(V_i^{\mathscr{A}}+V_j^{\mathscr{B}}\right)>\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-n=0.$$

故 $V_i^{\mathscr{A}}\cap V_j^{\mathscr{B}}\neq\{0\}$. 任取 $\alpha\in V_i^{\mathscr{A}}\cap V_j^{\mathscr{B}}$, 则 α 就是 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的公共特征向量.

(2) 当 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 中至少有一个为纯量变换时, 不妨设 $\mathscr{A}$ 为纯量变换, 则全空间 $\mathbb{C}^n$ 都是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间. 任取 $\mathscr{B}$ 的一个特征向量 α, 则 $\mathrm{span}\{\alpha\}$ 就是 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的公共不变子空间, 且维数为 1.

当 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都不是纯量变换时, 则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都不适合 $x\pm1$, 故此时 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的极小多项式都是 x^2-1. 于是由命题 0.2立得.

□

例题 0.29 设 n 阶方阵 A,B 满足 $A^3=O, B=(I+A)^3$(I 为单位方阵), 求一多项式 $f(x)$, 使得 $f(B)=A$.

证明 由条件知

$$B=(I+A)^3=I+3A+3A^2\Longrightarrow 3A^2=B-3A-I.$$

于是

$$\begin{aligned}B^2 &= (I+3A+3A^2)^2 = I+6A+15A^2\\ &= I+6A+5(B-3A-I)\\ &= 5B-9A-4I.\end{aligned}$$

从而

$$A=\frac{-B^2+5B-4I}{9}.$$

故取 $f(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{9}$ 即可.

□

例题 0.30 设 A,B 为 n 阶矩阵,A_i 为 A 的第 i 列,$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 B 的特征值. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\det(A_1,\cdots,BA_i,\cdots,A_n)=\det A\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j,$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}\det\left(A_1,\cdots,BA_i,\cdots,BA_j,\cdots,A_n\right)=\det A\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j,$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n}\det\left(A_1,\cdots,BA_i,\cdots,BA_j,\cdots,BA_k,\cdots,A_n\right)=\det A\sum_{1\le i<j<k\le n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k,$$

$$\vdots$$

$$\det(BA_1,BA_2,\cdots,BA_n)=\det A\cdot\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 设 B 的特征多项式为

$$f_B(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中

$$a_1=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\ a_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j,\ \cdots,\ a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

注意到

$$A(xI+B)=xA+BA=(xA_1+BA_1,\cdots,xA_n+BA_n),$$

并且

$$|A(xI+B)|=(-1)^n|A||-xI-B|=|A|\cdot(-1)^nf_B(-x)=|A|\left[x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n\right].\tag{16}$$

又由行列式的基本性质,按列拆分可得

$$|xA_1+BA_1,\cdots,xA_n+BA_n|=|A|x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\det(A_1,\cdots,BA_i,\cdots,A_n)+\cdots+\det(BA_1,BA_2,\cdots,BA_n).\tag{17}$$

比较(16)和(17)式各项系数即得结论.

□

例题 0.31 n 维欧式空间 V 中 s 个向量 $\alpha_i,i=1,2,\cdots,s$ 满足

$$\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i=0,c_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,s\Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_s=0.$$

证明: 存在 $\alpha\in V$, 使得 $(\alpha,\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,s$.

证明 考虑 $f(t_1,t_2,\cdots,t_s)=\|t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s\|_{\mathbb{R}^n}^2$ 是紧集

$$K=\left\{(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in\mathbb{R}^s:\sum_{i=1}^{s}t_i=1,t_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,s\right\}$$

上的连续函数, 故存在 $(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0)\in\mathbb{R}^s$ 使得 f 在 $(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0)\in\mathbb{R}^s$ 上达到 f 在 K 上的最小值. 因为条件, 我

们知道 f 在 K 上的最小值为正数. 下证 $\alpha=\sum_{i=1}^{s}t_i^0\alpha_i\neq 0$ 为所求.

事实上, 对 $i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\|(1-t)\alpha+t\alpha_i\|^2\geqslant\|\alpha\|^2,\forall t\in[0,1].$$

展开计算就有

$$(t^2-2t)(\alpha,\alpha)+2t(1-t)(\alpha,\alpha_i)+t^2(\alpha_i,\alpha_i)\geqslant 0,\forall t\in[0,1],$$

即

$$(t-2)(\alpha,\alpha)+2(1-t)(\alpha,\alpha_i)+t(\alpha_i,\alpha_i)\geqslant 0,\forall t\in[0,1].$$

让 $t\to 0^+$ 就有

$$(\alpha,\alpha_i)\geqslant(\alpha,\alpha)>0,$$

这就证明了 $(\alpha,\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,s.$

□

例题 0.32 设 $\mathit{\Gamma}=\{\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_r\}$ 为 r 个互不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即 $\forall\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\in\mathit{\Gamma}$, 有 $\boldsymbol{MN}\in\mathit{\Gamma}$). 证明

$$\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{O}\ \text{当且仅当}\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\boldsymbol{W}_i)=0.$$

证明 必要性是显然的, 下证充分性. 首先, 对于可逆矩阵 $W_i\in\mathit{\Gamma}$, 有 $W_iW_1,\ldots,W_iW_r$ 各不相同. 故有

$$W_i\mathit{\Gamma}\equiv\{W_iW_1,W_iW_2,\ldots,W_iW_r\}=\{W_1,W_2,\ldots,W_r\}$$

即 $W_i\mathit{\Gamma}=\mathit{\Gamma},\forall W\in\mathit{\Gamma}$. 记 $S=\sum_{i=1}^{r}W_i$, 则 $W_iS=S,\forall W_i\in\mathit{\Gamma}$. 进而

$$S^2=\sum_{i=1}^{r}W_i\sum_{j=1}^{r}W_j=\sum_{i=1}^{r}W_iS=\sum_{i=1}^{r}S=rS,$$

即 $S^2-rS=0$. 若 λ 为 S 的特征值, 则 $\lambda^2-r\lambda=0$, 即 $\lambda=0$ 或 r. 结合条件 $\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(W_i)=0$ 知, S 的特征值只能为 0. 因此有 $S-rI$ 可逆. 再次注意到 $S(S-rI)=S^2-rS=0$, 此时右乘 $(S-rI)^{-1}$, 即得 $S=0$. 证毕.

□

例题 0.33 设 $f_i(x)=a_{i0}+a_{i1}x+a_{i2}x^2+\cdots+a_{in}x^n(i=0,1,\cdots,n)$. 并且 $a_{ij}\in\mathbb{Z},i,j=0,1,\cdots,n$. 记 $A=(a_{ij})$ 是 $n+1$ 阶矩阵, 证明:

(1) 对于任意的整数 k, 有 $(f_0(k),f_1(k),\cdots,f_n(k))\mid\det(A)$.

(2) 存在 $n+1$ 阶整数矩阵 B 使得 $AB=I_{n+1}$ 的充要条件是存在 $n+1$ 个互不相同的整数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 使得 $n+1$ 阶方阵 $(f_i(b_j))$ 使得 $|\det(f_i(b_j))|=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)$.

证明

(1) 对 $\forall k\in\mathbb{Z}$, 设 $d=(f_0(k),\cdots,f_n(k)),f_i(k)=c_id$, 则 $c_i\in\mathbb{Z}$. 由行列式的基本性质可知

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{00}&a_{01}&\cdots&a_{0n}\\a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n0}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f_0(k)&a_{01}&\cdots&a_{0n}\\f_1(k)&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_n(k)&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}\sum_{i=0}^{n}f_i(k)A_{i0}=d\sum_{i=0}^{n}c_iA_{i0},$$

其中 A_{ij} 表示 A 的 (i,j) 元的代数余子式. 因为 $A\in\mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$, 所以 $A_{ij}\in\mathbb{Z}$. 又 $c_i\in\mathbb{Z}$, 故 $d\mid\det(A)$.

(2) **充分性**: 注意到

$$\det(f_i(b_j)) = \begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(b_0) & f_n(b_1) & \cdots & f_n(b_n) \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix}$$
$$= |A| \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i),$$

故由 $|\det(f_i(b_j))| = \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i)$ 知 $|A| = \pm 1$, 因此 A 可逆, 从而存在 A^{-1} 使得 $AA^{-1} = I_{n+1}$. 又因为 $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$, 所以 $A^* \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$, 故 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \pm A^* \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$. 因此取 $B = A^{-1}$, 则 $AB = I_{n+1}$ 且 $B \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$.

必要性: 由 $AB = I_{n+1}$ 且 $A, B \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$ 知

$$|A||B| = 1 \Longrightarrow |A| = \pm 1.$$

任取 $n+1$ 个互不相同的整数 $b_0, b_1, \cdots, b_n$, 则

$$\det(f_i(b_j)) = \begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(b_0) & f_n(b_1) & \cdots & f_n(b_n) \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix}$$
$$= \pm \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i).$$

故 $|\det(f_i(b_j))| = \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i)$.

□

例题 0.34 设整数 $n \geqslant 2, A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对称的且满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0, j = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$, 设 $A_k \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 是 A 删去第 k 行第 k 列之后得到的子矩阵. 证明

$$\det A_k, k = 1, 2, \cdots, n$$

是相等的.

注 回顾命题**??**.

证明 记 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$, 则由条件知

$$A^T \alpha = O, \tag{18}$$

故 $|A| = |A^T| = 0$. 因此 $\mathrm{r}(A) < n$. 若 $\mathrm{r}(A) \leqslant n-2$, 则 $A^* = O$, 此时 $\det A_k = 0, k = 1, 2, \cdots, n$. 下设 $\mathrm{r}(A) = n-1$. 此时 $\dim\ker A = 1$, 再结合(18)式知 $Ax = O$ 的解都形如 $k\alpha, k \in \mathbb{C}$. 又注意到

$$A \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = O, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中 A_{ij} 为 A 的 (i,j) 元的代数余子式. 故

$$\begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = k\alpha \Longrightarrow A_{i1} = A_{i2} = \cdots = A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

又因为 A 是对称阵, 所以 A^* 也是对称阵, 再结合上式可知 A^* 的元素全相同. 因此 $\det A_k = A_{kk}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$ 都相等.

□

例题 0.35 设 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶对称正定矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 m 阶实对称正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 实矩阵, 则

$$0 \leqslant |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}| < \frac{1}{|\boldsymbol{P}|}.$$

证明 由条件可知 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}$. 记 $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}| < \frac{1}{|\boldsymbol{P}|} \\
\Longleftrightarrow\ & 0 \leqslant \left|\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\right| \left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right| \left|\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\right| < 1 \\
\Longleftrightarrow\ & 0 \leqslant \left|\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}_n + \left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\right| < 1 \\
\Longleftrightarrow\ & 0 \leqslant \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\right| < 1.
\end{aligned}$$

由降阶公式可得

$$\left|\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right| = \lambda^m\left|\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{I}_m)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right|.$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$ 的非零特征值与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ 相同. 由命题**??**知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是半正定阵, 任取 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值 λ, 则 $\lambda \geqslant 0$. 再由矩阵的逆可以用其多项式表示以及命题**??**和命题**??**知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} \in [0, 1).$$

因此 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征值也都属于 $[0, 1)$. 又因为矩阵行列式为其全体特征值乘积, 所以

$$0 \leqslant \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\right| < 1.$$

结论得证.

□

例题 0.36 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 求证:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则对任意的 $\boldsymbol{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, 有 $0 \leqslant |\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}| < 1$, 并且左边等号成立的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) < m$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 则存在 $\boldsymbol{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, 使得 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定且 $|\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}| = 1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - m$.

证明

(1) 证法一:因为 $\boldsymbol{B}$ 是实矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 半正定. 又 $\boldsymbol{A}$ 正定, 故 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 也正定. 由命题**??**知存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 进而

$$\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{C}\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 是实矩阵. 故由命题**??**知 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 是半正定阵. 设 λ 为 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值, 则 $\lambda \geqslant 0$. 考虑如下正定矩阵的初等合同变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{B}'\cdot j_2 + j_1]{\boldsymbol{B}\cdot r_2 + r_1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[-\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\cdot j_1 + j_2]{-\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\cdot r_1 + r_2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

由命题知 $\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 也是正定阵. 于是 $\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$1-\lambda>0\Longrightarrow\lambda<1.$$

因此 $\lambda\in[0,1)$. 又因为矩阵的行列式等于全体特征值的乘积, 所以

$$0\leqslant\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1.$$

由命题??知上式等号成立的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<m$.

证法二 (类似例题 0.35):由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$, 记 $\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$, 则

$$\begin{aligned}0\leqslant\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1&\Longleftrightarrow0\leqslant\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1\\&\Longleftrightarrow0\leqslant\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}_n+\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1\\&\Longleftrightarrow0\leqslant\left|\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}\right|<1.\end{aligned}\tag{19}$$

由降阶公式可得

$$\begin{aligned}\left|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}\right|&=\lambda^m\left|\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{C}\left(\lambda\boldsymbol{I}_m\right)^{-1}\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\right|\\&=\lambda^{m-n}\left|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\right|.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}$ 的非零特征值与 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}$ 相同. 设 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ 的特征值为 λ, 则由命题??知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ 半正定, 故 $\lambda\geqslant0$. 再由矩阵的逆可以用其多项式表示以及命题??和命题??知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\in[0,1).$$

因此 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}$ 的特征值也都属于 $[0,1)$. 又因为矩阵的行列式等于其全体特征值的乘积, 所以

$$0\leqslant\left|\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}\right|<1.$$

由(19)式知

$$0\leqslant\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|<1.$$

又由 $\boldsymbol{A}$ 正定和命题??知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 也正定, 故由命题??知上式等号成立的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<m$.

(2) **必要性**: 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定, 故由命题??知存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 进而

$$\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{C}\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 是实矩阵. 故由命题??知 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 是半正定阵. 设 λ 为 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值, 则 $\lambda\geqslant0$. 考虑如下半正定矩阵的初等合同变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{B}'\cdot j_2+j_1]{\boldsymbol{B}\cdot r_2+r_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}'&\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\xrightarrow[-\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\cdot j_1+j_2]{-\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\cdot r_1+r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.\tag{20}$$

由命题知 $\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 也是半正定阵. 于是 $\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$1-\lambda\geqslant0\Longrightarrow\lambda\leqslant1.$$

因此 $\lambda\in[0,1]$. 又因为 $\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right|=1$, 所以 $\lambda=1$, 即 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值全为 1. 又由 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 是半正定阵知,$\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ 可对角化, 故 $\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_m$. 再利用(20)式和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+m=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\right)=n\Longrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m.$$

充分性: 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$ 和 $\boldsymbol{A}$ 半正定知, 存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-m}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{C}'.$$

取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\in \boldsymbol{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-m} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}',$$

从而由命题??知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定. 并且

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{B}'\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\prime\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right| &= \left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\right| = |\boldsymbol{I}_m| = 1.\end{aligned}$$

□

例题 0.37 对于二阶矩阵 $A,B_1,B_2,B_3,B_4,A\neq O$, 若

$$\det(A+B_i)=\det(A)+\det(B_i),\ i=1,2,3,4.$$

证明: 矩阵 B_1,B_2,B_3,B_4 线性相关.

证明 设 V 是由全体 4 阶矩阵构成的线性空间. 反证, 假设 B_1,B_2,B_3,B_4 线性无关, 则其构成 V 的一组基. 从而存在一组不全为 0 的数 c_1,c_2,c_3,c_4, 使得

$$A=c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3+c_4B_4.$$

记

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix}b_1^i & b_2^i\\ b_3^i & b_4^i\end{pmatrix},\quad i=1,2,3,4.$$

则

$$a_j=\sum_{i=1}^{4}c_ib_j^i,\quad j=1,2,3,4.$$

根据条件, 将行列式按列拆分可得

$$|A+B_i|=\begin{vmatrix}a_1+b_1^i & a_2+b_2^i\\ a_3+b_3^i & a_4+b_4^i\end{vmatrix}=|A|+|B_i|+\begin{vmatrix}a_1 & b_2^i\\ a_3 & b_4^i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1^i & a_2\\ b_3^i & a_4\end{vmatrix}=|A|+|B_i|.$$

进而

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_2^i\\ a_3 & b_4^i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1^i & a_2\\ b_3^i & a_4\end{vmatrix}=0,\quad i=1,2,3,4.$$

于是

$$0=\sum_{i=1}^{4}c_i\left(\begin{vmatrix}a_1 & b_2^i\\ a_3 & b_4^i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1^i & a_2\\ b_3^i & a_4\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & \sum\limits_{i=1}^{4}c_ib_2^i\\ a_3 & \sum\limits_{i=1}^{4}c_ib_4^i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{4}c_ib_1^i & a_2\\ \sum\limits_{i=1}^{4}c_ib_3^i & a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{vmatrix}=2|A|.$$

故 $|A|=0$. 又因为 $A\neq O$, 所以 $\mathrm{r}(A)=1$. 因此 A 的 0 特征值的几何重数为 1, 故 A 的 Jordan 标准型只有两种, 即

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

注意条件和结论在同一个相似变换下保持不变, 故可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(i) 当 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 时, 由条件可得

$$|A+B_i|=|A|+|B_i|=|B_i|\iff\begin{vmatrix}1+b_1^i&b_2^i\\b_3^i&b_4^i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1^i&b_2^i\\b_3^i&b_4^i\end{vmatrix}\iff\begin{vmatrix}1&b_2^i\\0&b_4^i\end{vmatrix}=0\iff b_4^i=0,i=1,2,3,4.$$

从而 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 就不可能由 B_1,B_2,B_3,B_4 线性表出, 但 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in V$, 这与 B_1,B_2,B_3,B_4 是 V 的一组基矛盾! (ii) 当 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 时, 由条件可得

$$|A+B_i|=|A|+|B_i|=|B_i|\iff\begin{vmatrix}b_1^i&1+b_2^i\\b_3^i&b_4^i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1^i&b_2^i\\b_3^i&b_4^i\end{vmatrix}\iff\begin{vmatrix}b_1^i&1\\b_3^i&0\end{vmatrix}=0\iff b_3^i=0,i=1,2,3,4.$$

从而 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 就不可能由 B_1,B_2,B_3,B_4 线性表出, 但 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in V$, 这与 B_1,B_2,B_3,B_4 是 V 的一组基矛盾!

□

例题 0.38 设 α,β,γ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中三个非零向量, 已知它们两两正交. 记矩阵 $A=\alpha\beta'+\beta\gamma'+\gamma\alpha'$.

(1) 证明: $\operatorname{rank}(A)=3$.

(2) A 是否可以相似对角化？请证明你的结论.

证明

(1) 记 $B=(\alpha,\beta,\gamma)$, 则由条件可知 $\mathrm{r}(B)=3$. 由 Sylvester 不等式知

$$3=\mathrm{r}(B)\geqslant\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(BB^T)\geqslant\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(B^T)-3=3.$$

故 $\mathrm{r}(A)=3$.

(2) 注意到

$$A\alpha=|\alpha|^2\gamma,\quad A\beta=|\beta|^2\alpha,\quad A\gamma=|\gamma|^2\beta.$$

将 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\mathscr{H}$, 设 A 在基 $\mathscr{H}$ 下的表示阵为

$$\begin{pmatrix}M&N\\O&P\end{pmatrix},$$

其中 $M=\begin{pmatrix}0&|\beta|^2&0\\0&0&|\gamma|^2\\|\alpha|^2&0&0\end{pmatrix}$. 显然 M 可逆, 从而可做实数域上的分块初等变换得

$$\begin{pmatrix}M&N\\O&P\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}M&O\\O&P\end{pmatrix}.$$

又由 (1) 知 $\mathrm{r}(A)=3$, 因此

$$3=\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}M&O\\O&P\end{pmatrix}=\mathrm{r}(M)+\mathrm{r}(P)=3+\mathrm{r}(P)\Longrightarrow P=O.$$

故 A 在实数域上相似于

$$\begin{pmatrix}M&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

注意到 M 的特征多项式为 $\lambda^3-|\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2$, 从而 M 有三个互不相同的特征值, 其中两个为复数. 故 M 在复数域上可对角化, 在实数域上不可对角化. 因此 A 在复数域上可对角化, 但在实数域上不可对角化.

□

命题 0.3

设 A 为 n 阶奇异阵, 且 $r(A)=r(A^2)$, 则存在可逆阵 M, 使得

$$A\sim\begin{pmatrix}M&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

证明 设 A 的 Jordan 标准型为

$$J=\begin{pmatrix}J_{r_1}(\lambda_1)&&&\\&\ddots&&\\&&J_{r_k}(\lambda_k)&\\&&&J_{r_0}(0)\end{pmatrix},$$

其中 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示属于特征值 λ_i 的 r_i 阶根子空间块. 因为 A 不可逆, 所以 $r_0>0$. 从而

$$A^2\sim J^2=\begin{pmatrix}J_{r_1}^2(\lambda_1)&&&\\&\ddots&&\\&&J_{r_k}^2(\lambda_k)&\\&&&J_{r_0}^2(0)\end{pmatrix}.$$

注意到

$$r(A)=r(J)=r(J_{r_0}(0))+\sum_{i=1}^{k}r(J_{r_i}(\lambda_i)),$$

$$r(A^2)=r(J^2)=r(J_{r_0}^2(0))+\sum_{i=1}^{k}r(J_{r_i}^2(\lambda_i)).$$

若 $J_{r_0}(0)\neq O$, 则 $r(J_{r_0}^2(0))<r(J_{r_0}(0))$. 从而 $r(A^2)<r(A)$ 矛盾! 故 $J_{r_0}(0)=O$. 记

$$M=\begin{pmatrix}J_{r_1}(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_{r_k}(\lambda_k)\end{pmatrix},$$

于是

$$A\sim J=\begin{pmatrix}J_{r_1}(\lambda_1)&&&\\&\ddots&&\\&&J_{r_k}(\lambda_k)&\\&&&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

□

例题 0.39 设 A,B 为 n 阶矩阵, 且 $r(A)=r(B)$, 证明:$A^2B=A$ 的充要条件是 $B^2A=B$.

证明 当 A 或 B 可逆时, 结论显然成立. 下设 A,B 均不可逆.

必要性: 注意到

$$\mathrm{r}(A^2)\leqslant\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^2B)\leqslant\mathrm{r}(A^2),$$

故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^2)$. 因此由命题 0.3可知, 存在可逆阵 M, 使得

$$A\sim\begin{pmatrix}M&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

因为条件和结论在相似变换下不变, 所以不妨设

$$A=\begin{pmatrix}M&O\\O&O\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}.$$

由 $A^2B=A$ 可得

$$\begin{pmatrix} M^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} M(MB_1-I) & M^2B_2 \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

再结合 M 可逆知 $B_2=O,B_1=M^{-1}$, 故 $B=\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned} B^2A=B &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} O & O \\ B_4B_3M & -B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow B_4=O. \end{aligned} \tag{21}$$

又 $r(A)=r(B)$, 故由矩阵秩的基本公式知

$$r(A)=r(B)=r\left(\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right)\geqslant r(M^{-1})+r(B_4)=r(A)+r(B_4).$$

从而 $r(B_4)=0$, 进而 $B_4=O$. 再由 (21) 知必要性成立.

充分性: 注意到

$$\mathrm{r}(B^2)\leqslant \mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B^2A)\leqslant \mathrm{r}(B^2),$$

故 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B^2)$. 因此由命题 0.3可知, 存在可逆阵 M, 使得

$$B\sim\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因为条件和结论在相似变换下不变, 所以不妨设

$$B=\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

由 $B^2A=B$ 可得

$$\begin{pmatrix} M^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} M(MA_1-I) & M^2A_2 \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

再结合 M 可逆知 $A_2=O,A_1=M^{-1}$, 故 $A=\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned} A^2B=A &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} O & O \\ A_4A_3M & -A_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow A_4=O. \end{aligned} \tag{22}$$

又 $r(A)=r(B)$, 故由矩阵秩的基本公式知

$$r(A)=r(B)=r\left(\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\right)\geqslant r(M^{-1})+r(A_4)=r(A)+r(A_4).$$

从而 $r(A_4)=0$, 进而 $A_4=O$. 再由 (22) 知充分性成立.

□

例题 0.40 证明: 一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 且符号差为 0, 或者它的秩等于 1.

笔记 根据必要性条件, 不能直接由 $X^TAX=(X^T\alpha)(\beta^TX)=X^T(\alpha\beta^T)X$ 推出 $A=\alpha\beta^T$, 因为 $\alpha\beta^T$ 不一定是对称阵.

不过我们可以根据多项式的可交换性, 将右式中矩阵转变成对称阵, 具体操作见下述必要性证明.

本题关键就是注意到必要性条件等价于

$$A = \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2}.$$

然后验证即可.

证明 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

充分性: 若 $r(A) = 1$, 则存在非零实向量 α, β, 使得

$$A = \alpha\beta^T \Longrightarrow X^T AX = X^T(\alpha\beta^T)X = (X^T\alpha)(\beta^T X).$$

若 $r(A) = 2$ 且 A 的符号差为 0, 注意到条件和结论在相似变换下不改变, 故不妨设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

此时

$$X^T AX = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

必要性: 设 $0 \neq \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 且满足 $X^T AX = (X^T\alpha)(\beta^T X)$, 则

$$X^T AX = (X^T\alpha)(\beta^T X) = X^T(\alpha\beta^T)X,$$
$$X^T AX = (X^T\beta)(\alpha^T X) = X^T(\beta\alpha^T)X,$$

故

$$X^T AX = \frac{X^T AX + X^T AX}{2} = \frac{X^T(\alpha\beta^T)X + X^T(\beta\alpha^T)X}{2} = X^T\frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2}X.$$

注意到 $\dfrac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2}$ 是实对称阵, 故由上式可得

$$A = \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

于是由降阶公式可得

$$|\lambda I_n - A| = \lambda^{n-2}\left|\lambda I_2 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}\right| = \lambda^{n-2}\left|\begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i}{2} & -\frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}{2} \\ -\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}{2} & \lambda - \frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i}{2} \end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{4}\lambda^{n-2}\left(4\lambda^2 - 4\lambda\sum_{i=1}^n a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\right).$$

当 α 与 β 线性相关时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

于是

$$|\lambda I_n - A| = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right).$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \neq 0$, 否则 $(\alpha,\beta)=0$, 即 α,β 正交, 因此 α 与 β 线性无关, 矛盾! 故此时 A 只有一个非零特征值, 从而 $r(A)=1$.

当 α 与 β 线性无关时, 同理由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

于是

$$|\lambda I_n - A| = \frac{1}{4}\lambda^{n-2}\left(4\lambda^2 - 4\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\right).$$

此时 A 必有两个特征值 λ_1,λ_2 满足

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{4} < 0 \Longrightarrow \lambda_1,\lambda_2 \neq 0 \text{且异号}.$$

故 A 只有两个异号的非零特征值. 又 A 是实对称阵, 故 A 必可对角化, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

此时 $r(A)=2$ 且 A 的符号差为 0.

□

例题 0.41 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$E$ 为单位矩阵. 求证 $A^4=E$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(E-A)+\operatorname{rank}\left(E+A+A^2+A^3\right)=n$.

证明 注意到 $x-1$ 和 $1+x+x^2+x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上互素, 故存在 $f,g\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$(x-1)f(x)+g(x)(1+x+x^2+x^3)=1.$$

于是对如下分块矩阵做初等分块变换得

$$\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[g(A)\cdot r_2+r_1]{j_1\cdot f(A)+j_2} \begin{pmatrix} E-A & E \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{j_2\cdot(-E+A)+j_1} \begin{pmatrix} O & E \\ A^4-E & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[j_1\longleftrightarrow j_2]{-(E+A+A^2+A^3)\cdot r_1+r_2} \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(E-A)+\operatorname{rank}(E+A+A^2+A^3)=n$.

□

例题 0.42 设 2025 阶方阵 A 的对角线元素都是 0, 其它元素均为 1 或 -1, 已知 A 的每一行所有元素相加都是 0. 请判断 A 的秩, 并说明理由.

证明 首先注意到

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0\Longrightarrow |A|=0\Longrightarrow r(A)<2025.$$

在 $\mathbb{Z}_2$ 上考虑, 则 A 的 $(2,1)$ 元的余子式为

$$A_{21}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=-1=1.$$

故 $A_{21}\equiv 1 \pmod 2$. 因此 $A_{21}\neq 0$, 即 A 存在一个 2024 阶满秩子阵. 故 $r(A)=2024$.

□

例题 0.43 设 A 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶实可逆矩阵, 且 A^k 相似于 A 对 $k=1,2,\cdots,n!-1,n!$ 成立, 证明: 对一切正整数 k 皆有 A^k 相似于 A.

证明 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的 s 个互异的特征值, 则 A^k 的全体特征值为

$$\lambda_1^k,\cdots,\lambda_s^k,\quad k=1,2,\cdots,n!.$$

因为 $A^k\sim A$, 所以 $\lambda_i^k\ (k=1,2,\cdots,n!)$ 都是 A 的特征值, 进而

$$\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{s+1},\quad i=1,2,\cdots,s$$

都是 A 的特征值. 但 A 只有 s 个互异的特征值, 故存在 $1\leqslant q_i<p_i\leqslant s+1$, 使得

$$\lambda_i^{p_i}=\lambda_i^{q_i},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

由 A 可逆知 $\lambda_i\neq 0$, 故记 $m_i=p_i-q_i\in[1,s]\cap\mathbb{N}$, 则

$$\lambda_i^{m_i}=\lambda_i^{p_i-q_i}=1,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

再记 $m=[m_1,\cdots,m_s]$(最小公倍数), 则 $m\in[1,s!]\cap\mathbb{N}$, 并且

$$\lambda_i^m=1,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

因此 A^m 的特征值全为 1. 又因为 $m\in[1,s!]\cap\mathbb{N}$, 所以 $m\in[1,n!]\cap\mathbb{N}$. 于是由条件知 $A^m\sim A$, 故 A 的特征值也全为 1. 从而可设

$$A\sim J=\begin{pmatrix}J_{r_1}(1)&&&\\&J_{r_2}(1)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{r_l}(1)\end{pmatrix},$$

$$J_{r_i}(1)=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,l.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$A^k\sim J^k=\begin{pmatrix}J_{r_1}^k(1)&&&\\&J_{r_2}^k(1)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{r_l}^k(1)\end{pmatrix},$$

$$J_{r_i}^k(1)=\begin{pmatrix}1 & k & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k \\ & & & 1\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,l.$$

故只需证 $J_{r_i}(1)\sim J_{r_i}^k(1), i=1,2,\cdots,l$.

注意到 $\lambda I-J_{r_i}^k(1)$ 的 r_i 阶行列式因子为 $(\lambda-1)^{r_i}$,$\lambda I-J_{r_i}^k(1)$ 的前 $n-1$ 行, 后 $n-1$ 列构成的子式为 k^{r_i-1}, 故 $\lambda I-J_{r_i}^k(1)$ 的 r_i-1 阶行列式因子为 1, 进而 $\lambda I-J_{r_i}^k(1)$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$, 因此 $\lambda I-J_{r_i}^k(1)$ 的不变因子组也为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$. 而 $\lambda I-J_{r_i}(1)$ 的不变因子组也为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$. 故 $J_{r_i}(1)\sim J_{r_i}^k(1)$.

□

例题 0.44 设 A,B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=Bx(x\in\mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A,B 是否可能相似? 证明你的结论.

证明 由条件及降秩公式可知

$$r(I-A^{-1}B)=r(A-B)=2020-3=2017.$$

因此 $A^{-1}B$ 的特征值 1 的几何重数为 3. 由 A,B 为正交阵知 $A^{-1}B$ 也是正交矩阵, 进而也是复正规矩阵, 从而 $A^{-1}B$ 酉相似于对角矩阵. 故 $A^{-1}B$ 的特征值的几何重数与代数重数相等. 由定理**??**知 $A^{-1}B$ 的实特征值只有 ±1, 复特征值的模长都为 1, 又因为复特征值成对出现, 所以 $A^{-1}B$ 的特征值 -1 的代数重数必是奇数. 由于矩阵行列式等于其所有特征值的乘积, 故

$$|A||B|=|A^{-1}B|=-1\implies |A|\neq|B|.$$

因此 A,B 不可能相似.

□

例题 0.45 称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

证明 设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 其中 $n=2020$. 则由条件可知, 对 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 都存在 $g_k,h_k\in\mathbb{C}[x]$, 使得

$$f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x).$$

对 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 不妨设

$$g_k(x)=\prod_{r=1}^{s}(x-x_{i_r}),\quad h_k(x)=\prod_{r=1}^{l}(x-x_{j_r}),$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{s_k},j_1,j_2,\cdots,j_{l_k}\in\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{k\}$ 且 $l_k+s_k=n-1$. 由于 g_k,h_k 的第二项系数相同, 再由 Vieta 定理可得关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组如下

$$\sum_{r=1}^{s_k}x_{i_r}=\sum_{r=1}^{l_k}x_{j_r}\Longrightarrow\sum_{r=1}^{s_k}x_{i_r}-\sum_{r=1}^{l_k}x_{j_r}=0,\quad \forall k\in\{1,2,\cdots,n\}. \tag{23}$$

上述线性方程组的系数矩阵 A 的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

其中 $a_{ij}\in\{-1,1\},i\neq j$. 把 A 视为 $\mathbb{Z}_2$ 上的矩阵, 则

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2019&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=2019=1.$$

故 $|A|\equiv 1\pmod 2$, 因此 $|A|$ 为奇数, 从而 $|A|\neq 0$. 于是线性方程组(23)只有零解, 即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. 故 $f(x)=x^{2020}$.

□

例题 0.46 已知 A,B 分别为 $n\times r,r\times n$ 矩阵, 其中 $r<n$, 记 $AB=C,BA=D$, 若 $r(C)=r$, 证明

$$m_1(x)=xm_2(x).$$

其中 $m_1(x),m_2(x)$ 分别为 C,D 的最小多项式.

证明 证法一:由 $r(AB)=r$ 且 A 为 $n\times r$ 矩阵,B 为 $r\times n$ 矩阵知

$$r=r(AB)\leqslant r(A),\ r(B)\leqslant r\Longrightarrow r(A)=r(B)=r.$$

故 A 为列满秩矩阵,B 为行满秩矩阵. 从而存在 $r\times n$ 行满秩矩阵 P 和 $n\times r$ 列满秩矩阵 Q, 使得

$$PA=BQ=I_r.$$

由 Sylvester 不等式和矩阵秩基本不等式知

$$r=r(B)+r(A)-r\leqslant r(BA)\leqslant r(A)=r\Longrightarrow r(BA)=r.$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 都有

$$AB(AB)^k=ABA(AB)^{k-1}B=A(BA)^kB,$$

$$(BA)^k=PA(BA)^kBQ=PAB(AB)^kQ.$$

故

$$ABm_2(AB)=Am_2(BA)B=0,$$

$$m_1(BA)=PABm_1(AB)Q=0.$$

因此 $xm_2(x)$ 是 AB 的零化多项式,$m_1(x)$ 是 BA 的零化多项式. 从而

$$m_1(x)\mid xm_2(x),\quad m_2(x)\mid m_1(x).$$

又 $m_1(x),m_2(x)$ 都是首一多项式, 故存在首一多项式 $p(x),q(x)$, 使得

$$xm_2(x)=p(x)m_1(x),\quad m_2(x)=q(x)m_1(x).\tag{24}$$

进而

$$xm_2(x)=p(x)m_1(x)=p(x)q(x)m_1(x)\Longrightarrow(x-p(x)q(x))m_1(x)=0.$$

又 $m_1(x)\neq 0$, 故 $x=p(x)q(x)$. 再结合 $p(x),q(x)$ 都首一知

$$\text{要么}p(x)=1,q(x)=x,\text{要么}p(x)=x,q(x)=1.$$

若 $p(x)=x,q(x)=1$. 则由(24)式知 $m_1(x)=m_2(x)$. 但是, 因为 $r(AB)=r<n,r(BA)=r$, 所以 AB 不可逆,BA 可逆. 因此 0 是 AB 的特征值, 不是 BA 的特征值. 故 $m_1(0)=0\neq m_2(0)$, 这与 $m_1(x)=m_2(x)$ 矛盾! 因此 $p(x)=1,q(x)=x$. 再由(24)式可知 $m_1(x)=xm_2(x)$.

证法二:由 $r(AB)=r$ 且 A 为 $n\times r$ 矩阵,B 为 $r\times n$ 矩阵知

$$r=r(AB)\leqslant r(A),\ r(B)\leqslant r\Longrightarrow r(A)=r(B)=r.$$

故 A 为列满秩矩阵,B 为行满秩矩阵. 从而存在 $r\times n$ 行满秩矩阵 P 和 $n\times r$ 列满秩矩阵 Q, 使得

$$PA = BQ = I_r. \tag{25}$$

不妨设

$$AB \sim \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_{r_1}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_s}(0) \end{pmatrix},\quad BA \sim \begin{pmatrix} J_2 & & & \\ & J_{t_1}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{t_l}(0) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

其中 J_1,J_2 分别为 AB,BA 的所有非零特征值的 Jordan 块构成的分块对角阵,r_s,t_l 分别为 AB,BA 的 0 特征值的 Jordan 块中最大块的阶数. 由降阶公式知

$$|\lambda I - AB| = \lambda^{n-r}\,|\lambda I - BA|\,.$$

从而 AB,BA 的非零特征值的代数重数相同. 于是 J_1,J_2 的阶数相同, 都记为 k. 由(25)(26)式可得

$$k = r\left((AB)^{r_s}\right) = r\left(A\,(BA)^{r_s-1}\,B\right) \leqslant r\left((BA)^{r_s-1}\right),$$

$$k = r\left((BA)^{t_l}\right) = r\left(PA\,(BA)^{t_l}\,BQ\right) \leqslant r\left(A\,(BA)^{t_l}\,B\right) = r\left((AB)^{t_l+1}\right).$$

因此

$$k \leqslant r\left((BA)^{r_s-1}\right) \Longrightarrow r_s - 1 \geqslant t_l \Longrightarrow r_s - t_l \geqslant 1,$$

$$k \leqslant r\left((AB)^{t_l+1}\right) \Longrightarrow t_l + 1 \geqslant r_s \Longrightarrow r_s - t_l \leqslant 1.$$

故 $r_s - t_l = 1$. 由命题**??**知,r_s,t_l 分别为 $m_1(x),m_2(x)$ 中 x 的幂次. 又由定理**??**知 AB,BA 非零 Jordan 块相同, 故再由命题**??**知 $m_1(x),m_2(x)$ 的因子除 x 外全相同. 因此 $m_1(x) = xm_2(x)$.

□

例题 0.47 设 m 为给定的正整数, 证明: 对任意的正整数 n,l, 存在 m 阶实方阵 X, 使得

$$X^n + X^l = I_m + \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 记 $f(x) = x^n + x^l$,

$$B = I_m + \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & m \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

将 Jordan 块 $J_m(1)$ 代入 $f(x)$ 中, 经计算可得

$$f(J_m(1)) = \begin{pmatrix} 2 & n+l & \cdots & * \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n+l \\ & & & 2 \end{pmatrix},$$

这是一个上三角矩阵, 且主对角元全为 2, 上次对角元全为 $n+l$. 从而 $f(J_m(1))$ 的特征值全为 2, 其几何重数为

$$m - r(f(J_m(1)) - 2I_m) = m - (m-1) = 1.$$

因此,$f(J_m(1))$ 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块 $J_m(2)$, 即 $f(J_m(1)) \sim J_m(2)$.

另一方面, 矩阵 B 也是一个上三角矩阵, 主对角元 2, 上次对角元全为 2, 从而 B 的特征值也全为 2, 其几何重

数为

$$m - r(B - 2I_m) = m - (m-1) = 1.$$

因此,B 的 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块 $J_m(2)$, 即 $B \sim J_m(2)$. 综上,$f(J_m(1)) \sim B$. 由于矩阵的相似在基域扩张下不改变, 故 $f(J_m(1))$ 和 B 在实数域上相似, 即存在可逆实矩阵 P, 使得

$$B = P^{-1} f(J_m(1)) P = f(P^{-1} J_m(1) P).$$

令 $X = P^{-1} J_m(1) P$, 则 $X \in \mathbb{R}^{m\times m}$, 且满足

$$X^n + X^l = f(X) = B.$$

□

例题 0.48 设 V 是 n 维复线性空间,$n \geqslant 2$,A, B 是 V 的线性变换, 假设 A 可对角化,B 是幂零变换, 且 $AB = BA$. 证明:B 与 $A + B$ 的最小多项式的次数相等当且仅当 A 为数乘变换.

笔记 实际上, 必要性也可以用代数语言证明, 即不妨设 A 是对角阵, 由 A, B 可交换知 B 此时就是对应的分块准对角阵 (对应 A 的根子空间块), 后续证明类似.

证明 **必要性**: 设 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 由 A 可对角化知,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

其中 V_i 为 A 的特征值 λ_i 的特征子空间. 注意到 $B|_{V_i}$ 仍是幂零变换, 记

$$k_i = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid (B|_{V_i})^k = O\right\}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 B 的极小多项式为 $x^{\max\{k_1, \cdots, k_n\}}$. 又

$$(A + B)|_{V_i} = \lambda_i I + B|_{V_i}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

故 $(A + B)|_{V_i}$ 的极小多项式为 $(x - \lambda_i)^{k_i}$. 从而 $A + B$ 的极小多项式为

$$\left[(x - \lambda_1)^{k_1}, (x - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (x - \lambda_n)^{k_n}\right].$$

若 A 不是数乘变换, 则 A 至少存在两个不同的特征值, 不妨设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则此时 $A + B$ 的极小多项式为

$$\deg\left[(x - \lambda_1)^{k_1}, (x - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (x - \lambda_n)^{k_n}\right] \geqslant k_1 + k_2 > \max\left\{k_1, \cdots, k_n\right\}.$$

而由 B 与 $A + B$ 的极小多项式次数相等知

$$\deg\left[(x - \lambda_1)^{k_1}, (x - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (x - \lambda_n)^{k_n}\right] = \max\left\{k_1, \cdots, k_n\right\},$$

矛盾! 故 A 的特征值全都相同, 即 A 为数乘变换.

充分性: 设 $A = aI$, $k = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid B^k = O\right\}$, 则 B 的极小多项式为 x^k. 注意到 $A + B = aI + B$ 的极小多项式为 $(x - a)^k$, 故 $\deg x^k = \deg(x - a)^k$.

□

例题 0.49 设 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶复矩阵, V 是复数域上所有 2 级对称矩阵构成的线性空间, 定义 V 上的线性变换 φ 为 $\varphi(X) = M'XM$, $X \in V$. 证明: M 可对角化的充要条件是 φ 可对角化.

证明 取 V 的一组基

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

必要性: 设 M 可对角化, 则可不妨设 $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, 从而

$$\varphi(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & ad \end{pmatrix}.$$

故 φ 可对角化.

充分性: 假设 M 不可对角化, 则 M 相似于其 Jordan 标准型, 从而可不妨设 $M=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 再设 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_3\\ x_3 & x_2\end{pmatrix}$.
于是

$$\varphi(X)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_3\\ x_3 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2x_1 & \lambda x_1+\lambda^2x_3\\ \lambda x_1+\lambda^2x_3 & x_1+2\lambda x_3+\lambda^2x_2\end{pmatrix}.$$

因此 $X,\varphi(X)$ 在基 (E_1,E_2,E_3) 下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda^2x_1\\ x_1+2\lambda x_3+\lambda^2x_2\\ \lambda x_1+\lambda^2x_3\end{pmatrix}.$$

记 φ 在基 (E_1,E_2,E_3) 下的表示矩阵为 A, 则

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2x_1\\ x_1+2\lambda x_3+\lambda^2x_2\\ \lambda x_1+\lambda^2x_3\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 2\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

注意到 A 的特征多项式为 $(x-\lambda^2)^3$, 又

$$r(\lambda^2I-A)=r\begin{pmatrix}0 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2\lambda & 0\end{pmatrix}=1\text{或}2.$$

故 A 的特征值 λ^2 的几何重数为 1 或 2, 一定不等于其代数重数. 因此 A 不可对角化, 这与 A 可对角化矛盾!

□

例题 0.50

证明

□

例题 0.51

证明

□

命题 0.4 (复矩阵行列式模长平方等于其实化后实矩阵的行列式)

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间,$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换,$\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵记为 A_C.V 关于向量加法以及实数的数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维线性空间, 记为 V_R,$\mathcal{A}$ 也为 V_R 的一个线性变换, 设 $\mathcal{A}$ 在 V_R 的某组基下的矩阵记为 A_R, 证明:$|A_R|=|\det A_C|^2$.

证明

□