0.1 Jordan-Hölder 定理

定义 0.1

群 G 的两个次正规 (正规) 序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$
$$G = H_1 \supset H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s = \{1\}$$

称为**同构的**, 如果这两个序列的因子集 $\{G_i/G_{i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1\}$, $\{H_j/H_{j+1} \mid 1 \leqslant j \leqslant s-1\}$ 之间有一一对应关系, 并且对应的因子是同构的.

♣

注 显然, 若两个次正规 (正规) 序列同构, 则它们有相同的长度.

引理 0.1 (Zassenhaus 定理)

设 H, K 是群 G 的子群, 又 H^*, K^* 分别是 H, K 的正规子群, 则

$$H^*(H \cap K^*) \lhd H^*(H \cap K), \quad K^*(H^* \cap K) \lhd K^*(H \cap K),$$
$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K).$$

$$(H \cap K^*)H^* \lhd (H \cap K)H^*, \quad (H^* \cap K)K^* \lhd (H \cap K)K^*,$$
$$(H \cap K)H^*/(H \cap K^*)H^* \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K) \cong (H \cap K)K^*/(H^* \cap K)K^*.$$

♡

证明 因为 H^* 是 H 的正规子群, $H \cap K, H \cap K^*$ 都是 H 的子群, 故由定理**????**知 $H^*(H \cap K), H^*(H \cap K^*)$ 都是 H 的子群. 同样 $K^*(H \cap K), K^*(H^* \cap K)$ 都是 K 的子群, 而且 $H^*(H \cap K^*) \subseteq H^*(H \cap K)$, $K^*(H^* \cap K) \subseteq K^*(H \cap K)$. 对 $\forall a \in H^* \cap K, b \in H \cap K^*, x \in H \cap K$, 有

$$xax^{-1} \in H^* \cap K, \quad xbx^{-1} \in H \cap K^*.$$

故 $H^* \cap K, H \cap K^* \lhd H \cap K$. 再由推论**????**知 $(H \cap K^*)(H^* \cap K) = L$ 也是 $H \cap K$ 的正规子群.

作 $H^*(H \cap K)$ 到 $(H \cap K)/L$ 上的映射 ϕ,

$$\phi(hx) = xL, \quad \forall h \in H^*, x \in H \cap K.$$

若 $h_1x_1 = h_2x_2 (h_i \in H^*, x_i \in H \cap K, i = 1, 2)$, 则

$$h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L \Longrightarrow x_2L = x_1L,$$

因而 $\phi(h_1x_1) = \phi(h_2x_2)$, 故 ϕ 是良定义的.

再证明 ϕ 是同态, 由于 $H^* \lhd H, x_1h_2x_1^{-1} \in H^*$, 故

$$\phi((h_1x_1)(h_2x_2)) = \phi(h_1(x_1h_2x_1^{-1})x_1x_2) = x_1x_2L = (x_1L) \cdot (x_2L) = \phi(h_1x_1) \cdot \phi(h_2x_2),$$

故 ϕ 是 $H^*(H \cap K)$ 到 $H \cap K/L$ 上的同态, 显然 ϕ 还是满同态. 注意到

$$hx \in \ker\phi \iff \phi(hx) = xL = L \iff x \in L \iff hx \in H^*L = H^*(H^* \cap K)(H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*),$$

故 $\ker\phi = H^*(H \cap K^*)$. 因而由群的同态基本定理**??**得

$$H^*(H \cap K^*) \lhd H^*(H \cap K),$$
$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K).$$

同理可得

$$K^*(H^* \cap K) \lhd K^*(H \cap K),$$
$$K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K) \cong (H \cap K)/(H \cap K^*)(H^* \cap K).$$

故

$$H^*(H\cap K)/H^*(H\cap K^*)\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K)\cong K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K).$$

综上, 同理可得

$$(H\cap K^*)H^*\lhd (H\cap K)H^*,\quad (H^*\cap K)K^*\lhd (H\cap K)K^*,$$
$$(H\cap K)H^*/(H\cap K^*)H^*\cong (H\cap K)/(H\cap K^*)(H^*\cap K)\cong (H\cap K)K^*/(H^*\cap K)K^*.$$

□

定理 0.1 (Schreier 定理)

群 G 的两个次正规 (正规) 序列有同构的加细.

证明 设群 G 有次正规 (正规) 序列

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_r=\{1\},\tag{1}$$
$$G=H_1\supseteq H_2\supseteq\cdots\supseteq H_s=\{1\}.\tag{2}$$

令

$$\begin{aligned}
&G_{i,k}=(G_i\cap H_k)G_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1,1\leqslant k\leqslant s,\\
&G_{r,s}=\{1\},\\
&H_{i,k}=(H_i\cap G_k)H_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant s-1,1\leqslant k\leqslant r,\\
&H_{s,r}=\{1\}.
\end{aligned}$$

由 $G_{k+1}\lhd G_k(1\leqslant k\leqslant r-1), H_{k+1}\lhd H_k(1\leqslant k\leqslant s-1)$ 及Zassenhaus 定理可得

$$\begin{aligned}
G_{i,k+1}\lhd G_{i,k},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1,1\leqslant k\leqslant s-1,\\
H_{i,k+1}\lhd H_{i,k},\quad 1\leqslant i\leqslant s-1,1\leqslant k\leqslant r-1.
\end{aligned}$$

从而

$$G_{i+1,1}=(G_{i+1}\cap G)G_{i+2}=G_{i+1}=(G_i\cap H_s)G_{i+1}=G_{i,s}\lhd G_{i,s-1},\ 1\leqslant i\leqslant r-1,$$
$$H_{i+1,1}=(H_{i+1}\cap G)H_{i+2}=H_{i+1}=(H_i\cap G_r)H_{i+1}=H_{i,r}\lhd H_{i,r-1},\ 1\leqslant i\leqslant s-1.$$

又若序列(1), 序列(2)都是正规序列, 即 $G_i,H_j(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant r)$ 均为 G 的正规子群, 则由命题**????**知 $G_{i,k},H_{j,k}$ 也是 G 的正规子群. 这样, 即得序列(1), 序列(2)的加细的次正规 (正规) 序列

$$\begin{aligned}
G=G_{1,1}&\supseteq G_{1,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{1,s-1}\\
&\supseteq G_{2,1}\supseteq G_{2,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{2,s-1}\\
&\supseteq\cdots\\
&\supseteq G_{r-1,1}\supseteq G_{r-1,2}\supseteq\cdots\supseteq G_{r-1,s-1}\supseteq G_{r,s}=\{1\},
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
G=H_{1,1}&\supseteq H_{1,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{1,r-1}\\
&\supseteq H_{2,1}\supseteq H_{2,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{2,r-1}\\
&\supseteq\cdots\\
&\supseteq H_{s-1,1}\supseteq H_{s-1,2}\supseteq\cdots\supseteq H_{s-1,r-1}\supseteq H_{s,r}=\{1\}.
\end{aligned}\tag{4}$$

由Zassenhaus 定理有

$$\frac{G_{i,k}}{G_{i,k+1}}=\frac{(G_i\cap H_k)G_{i+1}}{(G_i\cap H_{k+1})G_{i+1}}\cong\frac{(G_i\cap H_k)H_{k+1}}{(G_{i+1}\cap H_k)H_{k+1}}=\frac{H_{k,i}}{H_{k,i+1}},$$
$$H_{s-1,r-1}=H_{s-1}\cap G_{r-1}=G_{r-1,s-1}$$

故序列(3), (4)是 G 的同构的次正规 (正规) 序列.

□

定义 0.2

1. 群 G 的次正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$$

的因子 $G_i/G_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ 如果都是单群, 那么称此序列为 G 的**合成序列**.

2. 群 G 的次正规序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$$

的因子 $G_i/G_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ 如果都是单群, 那么称此序列为 G 的**主序列**.

♣

注 显然群 G 的主序列必是合成序列.

命题 0.1

若 $G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}$ 为 G 的合成序列, 则 G_{i+1} 是 G_i 的极大正规子群.

♠

证明

□

例题 0.1 设 $G = \langle a \rangle$ 为 15 阶循环群, 则

$$G \supseteq \langle a^3 \rangle \supseteq \{1\},$$
$$G \supseteq \langle a^5 \rangle \supseteq \{1\}$$

是两个同构的正规序列. 并且这两个序列都是 G 的主序列, 也是合成序列.

证明

□

例题 0.2 设 $n \geqslant 5$, 则 $S_n \supseteq A_n \supseteq \{1\}$ 是 S_n 的主序列, 也是 S_n 的合成序列.

例题 0.3 序列 $S_4 \supseteq A_4 \supseteq K_4 \supseteq \langle (12)(34) \rangle \supseteq \{1\}$ 是 S_4 的合成序列, 但不是 S_4 的主序列.

证明

□

例题 0.4 无限循环群 $G = \langle a \rangle$ 无合成序列.

证明 事实上, 若 G 有合成序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{r-1} \supseteq G_r = \{1\},$$

则 $G_{r-1}/G_r = G_{r-1} = \langle a^k \rangle$ 为单群, 但 $\langle a^k \rangle$ 是无限循环群, 而由命题**??**知无限循环群非单群, 矛盾!

□

定理 0.2 (Jordan-Hölder 定理)

若群 G 有合成 (主) 序列, 则 G 的任两个合成 (主) 序列是同构的.

♡

注 这个定理表明: **任意群的合成 (主) 序列的因子在同构意义下唯一.**

证明 设 G 有两合成 (主) 序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\}, \tag{5}$$
$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_s = \{1\}. \tag{6}$$

由于 $G_i/G_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant r-1), H_j/H_{j+1}(1 \leqslant i \leqslant s-1)$ 都是单群, 因而序列(5)和序列(6)都不可能再加细. 否则, 存在 $k_1 \in \{1, 2, \cdots, r\}, k_2 \in \{1, 2, \cdots, s\}$ 以及群 K_1, K_2, 使得

$$G_{k_1+1} \subset K_1 \subset G_{k_1}, \quad H_{k_2+1} \subset K_2 \subset H_{k_2}; \tag{7}$$
$$G_{k_1+1} \lhd K_1 \lhd G_{k_1}, \quad H_{k_2+1} \lhd K_2 \lhd H_{k_2}.$$

由推论????知

$$K_1/G_{k_1+1} \lhd G_{k_1}/G_{k_1+1}, \quad K_2/G_{k_2+1} \lhd H_{k_2}/H_{k_2+1}.$$

又因为 $G_{k_1}/G_{k_1+1}, H_{k_2}/H_{k_2+1}$ 都是单群, 所以

$$K_1/G_{k_1+1} = G_{k_1+1}\text{或}G_{k_1}/G_{k_1+1}, \quad K_2/H_{k_2+1} = H_{k_2+1}\text{或}H_{k_2}/H_{k_2+1}.$$

即

$$K_1 = G_{k_1+1}\text{或}G_{k_1}, \quad K_2 = H_{k_2+1}\text{或}H_{k_2}.$$

这与(7)式矛盾!

另外, 由Schreier 定理知序列(5)和序列(6)可加细为同构的次正规 (正规) 序列, 分别记为序列 S 和序列 T, 则序列 S 与序列 T 同构. 而已经证明序列(5)和序列(6)不可加细, 故序列 S 等于序列(5), 序列 T 等于序列(6). 因而序列(5)和序列(6)必然同构.

□

定义 0.3

设 G 是群, Ω 为一集合, 如果有 $\Omega \times G$ 到 G 的映射 $(\sigma, a) \to \sigma(a)(\forall \sigma \in \Omega, a \in G)$ 满足

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \ \forall \sigma \in \Omega, \ a, b \in G,$$

那么称 G 为**带算子集 Ω 的群**, 简称 **Ω 群**. Ω 的元素称为 G 的**算子**.

♣

注 事实上, 由 Ω 群的定义又知 Ω 中每个元素 σ 都是群 G 的自同态.

例题 0.5 设 G 是 Abel 群, 运算为加法, 则 G 是一个 $\mathbb{Z}$ 群.

证明 事实上, $(n, a) \to na(n \in \mathbb{Z}, a \in G)$ 为 $\mathbb{Z} \times G$ 到 G 的映射. 并且

$$n(a+b) = n \cdot (a+b) = na + nb = n(a) + n(b), \ \forall n \in \mathbb{Z}, a, b \in G.$$

□

例题 0.6 设 M 是环 R 上的左模, 则 M 是 R 群. 特别地, 域 F 上的线性空间可看成 F 群.

证明 事实上, $R \times M$ 到 M 的映射为 $(a, x) \to ax(a \in R, \ x \in M)$.

□

定义 0.4

设 G 为 Ω 群, H 是 G 的子群, 且满足

$$\sigma(H) \subseteq H, \ \forall \sigma \in \Omega,$$

则称为 H 为 G 的 **Ω 子群**. 又若 $H \lhd G$, 即 $H \subseteq G$ 且 $H \lhd G$, 则称 H 为 G 的 **Ω 正规子群**.

♣

命题 0.2

左 R 模 M 可看成 R 群, 其 R 子群 M_1 就是 M 的子模, 特别是一个环 R, 即可看成左 R 模, 因而也可看成 R 模. 这时, R 子群为 R 的左理想, 环 R 也可看成右 R 模、R 群, 这时 R 子群为右理想, 环 R 也可看成 R 双模, 相应的 R 子群为 R 的理想.

♠

注 这个命题表明: 环与模都是特殊的 Ω 群.

证明

□

例题 0.7 设 G 是群, 若 $\Omega = \mathrm{Int}G$(G 的内自同构的集合), 则 G 的 Ω 子群就是 G 的正规子群.

证明

□

定义 0.5

设 G 是群.

1. 若 $\Omega = \mathrm{Aut}G$(G 的自同构的集合), 则 G 的 Ω 子群称为 G 的**特征子群**;
2. 若 $\Omega = \mathrm{End}G$(G 的自同态的集合), 则 G 的 Ω 子群称为 G 的**完全不变子群**.

♣

定理 0.3

设 H 是 Ω 群 G 的 Ω 正规子群, π 为 G 到 G/H 的自然同态, 则 $\Omega \times G/H$ 到 G/H 上的映射 $(\sigma, \pi(a)) \to \pi(\sigma(a))(\sigma \in \Omega, \pi(a) \in G/H)$ 使得 G/H 也是 Ω 群, 称为 G 对 H 的 **Ω 商群**.

♡

证明 若 $(\sigma, \pi(a)) = (\sigma', \pi(b)) \in \Omega \times G/H$, 则 $\sigma = \sigma', \pi(a) = \pi(b)(a, b \in G)$, 于是 $ab^{-1} \in H$, 从而有 $\sigma(a)\sigma'(b)^{-1} = \sigma(a)\sigma(b)^{-1} = \sigma(ab^{-1}) \in H$, 故 $\pi(\sigma(a)) = \pi(\sigma'(b))$. 故 $\Omega \times G/H$ 到 G/H 的映射 $(\sigma, \pi(a)) \to \pi(\sigma(a))$ 是良定义的.

又 $\forall a, b \in G, \sigma \in \Omega$ 有

$$\begin{aligned} \sigma(\pi(a)\pi(b)) &= \sigma(\pi(ab)) = \pi(\sigma(ab)) = \pi(\sigma(a)\sigma(b)) \\ &= \pi(\sigma(a))\pi(\sigma(b)) = \sigma(\pi(a))\sigma(\pi(b)), \end{aligned}$$

于是 G/H 是 Ω 群.

□

定义 0.6

设 G, G_1 都是 Ω 群, ϕ 是群 G 到群 G_1 的同态且满足 $\phi\sigma = \sigma\phi(\forall \sigma \in \Omega)$, 则称 ϕ 是 **Ω 同态**. 若 ϕ 还是群的同构, 则称 ϕ 是 **Ω 同构**.

♣

注 与通常的群的同态基本定理一样, 可证 Ω 群的同态基本定理及其他一些定理, 如 Zassenhaus 引理. 同样, 也可以引入 Ω 群的次正规 (正规) 序列、合成序列和主序列等概念, 并能证明 Schreier 定理与 Jordan-Hölder 定理. 由于环与模均可看成特殊的 Ω 群, 因而就可将 Jordan-Hölder 定理用于环与模的研究.

命题 0.3

若 H 为 Ω 群 G 的 Ω 正规子群, 则 G 到 G/H 的自然同态 π 是 Ω 同态.

♠

证明

□

定义 0.7

R 模 M 的有限子模序列

$$M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_r = 0$$

满足 $M_i/M_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, r-1)$ 为单模, 则该序列称为 M 的一个**合成序列**, M_i/M_{i+1} 称为**合成因子**.

♣

定理 0.4 (模的 Jordan-Hölder 定理)

若 R 模 M 有合成序列, 则 M 的任两合成序列是同构的, 即它们的合成因子在同构意义下唯一.

♡

注 若将 M 看成带算子集 R 的 R 群, 则这个定理就是群的 Jordan-Hölder 定理的特殊情形. 与群的 Jordan-Hölder 定理同样证明.

证明

□