0.1 求和符号

定义 0.1 (空和 (Empty sum))

$$\sum_{i=b+1}^{b} f(i) \triangleq 0, b \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

定理 0.1 (关于求和号下限大于上限的计算)

$$\sum_{i=a}^{c} f(i) \equiv -\sum_{i=c+1}^{a-1} f(i), a, c \in \mathbb{Z} \text{且} a > c. \tag{2}$$

笔记 上述空和的定义与关于求和号下限大于上限的计算定理都来自论文:Interpreting the summation notation when the lower limit is greater than the upper limit(Kunle Adegoke).

定理 0.2 (求和号基本性质)

1. (**倒序求和**) 当 n 为非负整数时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

笔记

1. 看到求和号内部有两个变量, 都可以尝试一下将其转化为倒序求和的形式.

0.1.1 求和号交换顺序

定理 0.3 (基本结论)

1. 当 n, m 均为非负整数时, 有

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

2. 当 n, m 均为非负整数,$p \le n, q \le m$ 且 $p, q \in \mathbb{N}_+$ 时, 有

$$\sum_{\substack{p \le i \le n \\ q \le j \le m}} a_{ij} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{j=q}^{m} \sum_{i=p}^{n} a_{ij}.$$

3. 当 n 为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

4. 当 n 为非负整数时, 有

$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

5. 当 n 为非负整数时, 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

6. 当 n 为非负整数时, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \geqslant 0, \forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j.$$

笔记 如果上述命题第 1 条中的 n 或 m 取到无穷, 第 2 条中的 n 取到无穷, 则求和号不能直接交换顺序. 此时, 往往要添加一个条件, 相应的交换和号的结论才能成立. 比如, 著名的 *Fubini* 定理 (见关于无限和的 Fubinin 定理).

证明 1. 利用矩阵证明该结论.

设一个 m 行 n 列的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵 A 的第 i 行的和记为

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (i = 1, 2, \cdots, n).$$

矩阵 A 的第 j 列的和记为

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, (j = 1, 2, \cdots, m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和 $r_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 求和也等于所有列和 $c_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 即

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} c_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij}.$$

2. 同理利用矩阵证明该结论.

设一个 m 行 n 列的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{pq} & a_{p,q+1} & \cdots & a_{pm} \\ a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{p+1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nq} & a_{n,q+1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

则矩阵 A 的第 i 行的和记为

$$r_i = \sum_{j=q}^{m} a_{ij} \, (i = p, p+1, \cdots, n).$$

矩阵 A 的第 j 列的和记为

$$c_j = \sum_{i=p}^{n} a_{ij} \, (j = q, q+1, \cdots, m).$$

易知, 矩阵所有元素的和等于所有行和 $r_i, i=p,p+1,\cdots,n$ 求和也等于所有列和 $c_j, j=q,q+1,\cdots,m$ 求和, 即

$$\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}} a_{ij}=\sum_{i=p}^{n} r_i=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij},$$

$$\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}} a_{ij}=\sum_{j=q}^{m} c_j=\sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n} a_{ij}.$$

故

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij}=\sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n} a_{ij}=\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le n}} a_{ij}.$$

3. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\chi_{i\le j}(i)\xlongequal{1.\text{的结论}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\chi_{i\le j}(i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

4. 根据 (1) 的结论可得

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\chi_{i<j}(i)\xlongequal{1.\text{的结论}}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}\chi_{i<j}(i)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.$$

5. 结论是显然的.

6. 结论是显然的. □

注 设 X 是全集, 对任意集合 $A\subset X$, 把函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}.$$

称为集合 A 的示性函数.

例题 0.1 计算

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}.$$

解 令 $I=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}$, 则

$$\begin{aligned}
I&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}\xlongequal[(\text{轮换换元})]{\text{将}i\text{换成}j,\text{换成}i}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{2^{i+j}(i+j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^{i+j}(i+j)}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{2^{i+j}(i+j)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]^2.
\end{aligned}$$

□

例题 0.2 记

$$T=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3: a,b,c\text{可以构成某个三角形的三边长}\right\}.$$

证明:

$$\sum_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}=\sum_{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\text{且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}}.$$

笔记 核心想法: 两个集合间可以建立一一映射.

结论 若 $x, y, z \in \mathbb{N}_{+}, x, y, z$ 具有相同奇偶性的充要条件为

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c, \text{其中} a, b, \in \mathbb{N}_{+}.$$

证明 必要性显然. 下面证明充分性. 假设 x, y, z 具有不同的奇偶性, 则不妨设 x, z 为奇数,y 为偶数. 从而 $x + y$ 一定为奇数, 这与 $x + y = 2a$ 矛盾. 故 x, y, z 具有相同奇偶性. □

证明 设 $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b, c$ 可以构成某个三角形的三边长$\}$.

$$\sum_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c} = \sum_{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 \text{ 且有相同的奇偶性}} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}.$$

记 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x, y, z$ 有相同的奇偶性$\}$, 则对 $\forall (x, y, z) \in S$, 取 $a = \dfrac{x+y}{2}, b = \dfrac{y+z}{2}, c = \dfrac{z+x}{2}$. 此时我们有

$$a + b = \frac{x + 2y + z}{2} > \frac{z + x}{2} = c,$$
$$b + c = \frac{x + y + 2z}{2} > \frac{x + y}{2} = a,$$
$$a + c = \frac{2x + y + z}{2} > \frac{y + z}{2} = b.$$

从而 a, b, c 可以构成某个三角形的三边长, 即此时 $(a, b, c) = (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y+z}{2}, \dfrac{z+x}{2}) \in T$.

于是我们可以构造映射

$$\tau : S \to T, (x, y, z) \mapsto (a, b, c) = (\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}).$$

反之, 对 $\forall (a, b, c) \in T$, 取 $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$. 此时我们有

$$x + y = 2a, y + z = 2b, x + z = 2c.$$

从而 x, y, z 具有相同的奇偶性, 即此时 $(x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a) \in S$.

于是我们可以构造映射

$$\tau' : T \to S, (a, b, c) \mapsto (x, y, z) = (a + c - b, a + b - c, b + c - a).$$

因此对 $\forall (x, y, z) \in S$, 都有 $\tau\tau'(x, y, z) = \tau'\tau(x, y, z) = (x, y, z)$. 即 $\tau\tau' = I$. 故映射 τ 存在逆映射 τ'. 从而映射 τ 是双射.

因此集合 S 中的每一个元素都能在集合 T 中找到与之一一对应的元素. 于是两和式 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ 和 $\sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$ 的项数一定相同. 并且任取 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$ 中 (x, y, z) 所对应的一项 $A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$, $\sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$ 中一定存在与之一一对应的 $\tau(x, y, z)$ 所对应的一项 $A_{\tau(x,y,z)}$. 而 $\tau(x, y, z) = (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y+z}{2}, \dfrac{z+x}{2})$, 因此 $A_{\tau(x,y,z)} = A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}}$. 故 $\sum\limits_{(x,y,z)\in S} A_{\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}} = \sum\limits_{(a,b,c)\in T} A_{a,b,c}$. □

注 上述证明中逆映射的构造可以通过联立方程 $a = \dfrac{x+y}{2}, b = \dfrac{y+z}{2}, c = \dfrac{z+x}{2}$ 解出 $x = a + c - b, y = a + b - c, z = b + c - a$ 得到.

定理 0.4 (关于无限和的 Fubinin 定理)

设 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是一个使得 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n, m)$ 绝对收敛的函数. 那么

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n, m).$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} f(n, m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m).$$

笔记 这个命题是关于求和号换序的基本结论的推广.
证明

□

例题 0.3 (PutnamA3) 已知 $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$ 是实数, 且 $0 < x < 1$, 并且满足

$$\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1}{1-x^2}+\cdots+\frac{a_n}{1-x^{n+1}}=0.$$

证明: 存在一个 $0 < y < 1$, 使得

$$a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n=0.$$

证明 由题意可知, 将 $\frac{1}{1-x^{k+1}}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 根据幂级数展开可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}a_kx^{(k+1)i}.$$

又因为 $0 < x < 1$, 所以几何级数 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}$ 是绝对收敛的. 从而有限个绝对收敛的级数的线性组合 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\sum\limits_{i=0}^{+\infty}x^{(k+1)i}$ 也是绝对收敛的. 于是根据关于无限和的 Fubinin 定理可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}a_kx^{(k+1)i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kx^{(k+1)i}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\sum_{k=0}^{n}a_kx^{ki}.$$

设 $f(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n=0, y\in(0,1)$, 则 $f\in\mathbb{C}(0,1)$. 假设对任意的 $y\in(0,1)$, 有 $f(y)\neq 0$. 则 f 要么恒为正数, 要么恒为负数. 否则, 存在 $y_1, y_2\in(0,1)$, 使得 $f(y_1)>0, f(y_2)<0$. 那么由连续函数介值定理可知, 一定存在 $y_0\in(0,1)$, 使得 $f(y_0)=0$. 这与假设矛盾. 因此不失一般性, 我们假设 $f(y)>0, \forall y\in(0,1)$. 又由 $0<x<1$ 可知,$x^i\in(0,1)$. 从而

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-x^{k+1}}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\sum_{k=0}^{n}a_kx^{ki}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^if\left(x^i\right)>0.$$

这与题设矛盾. 故原结论成立. □

0.1.2 裂项求和

定理 0.5 (基本结论)

(1) 当 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\le b$ 时, 有

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n+1)\right]=f(a)-f(b+1);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n+1)-f(n)\right]=f(b+1)-f(a);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n-1)\right]=f(b)-f(a-1);$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n-1)-f(n)\right]=f(a-1)-f(b).$$

(2) 当 $a,b,m\in\mathbb{Z}$ 且 $a\le b$ 时, 有

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n+m)-f(n)\right]=\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n); \tag{3}$$

$$\sum_{n=a}^{b}\left[f(n)-f(n+m)\right]=\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)-\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n). \tag{4}$$

证明 (1) 将求和展开后很容易得到证明.

(2) 因为 (2) 中上下两个式子(3)(4)互为相反数, 所以我们只证明(3)即可.

当 $m \geq 0$ 时, 若 $m \leq b-a$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]\\
&=f(a+m)+\cdots+f(b)+f(b+1)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(a+m-1)-f(a+m)-\cdots-f(b)\\
&=f(b+1)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(a+m-1)\\
&=\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)
\end{aligned}$$

若 $m > b-a$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)\\
&=f(b+1)+\cdots+f(a+m-1)+f(a+m)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(b)-f(b+1)-\cdots-f(a+m-1)\\
&=f(a+m)+\cdots+f(b+m)-f(a)-\cdots-f(b)\\
&=\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]
\end{aligned}$$

综上, 当 $m \geq 0$ 时, 有 $\sum\limits_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]=\sum\limits_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum\limits_{n=a}^{a+m-1}f(n)$.

当 $m<0$ 时, 我们有 $-m>0$, 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b}[f(n+m)-f(n)]&=\sum_{n=a+m}^{b+m}[f(n)-f(n-m)]=-\sum_{n=a+m}^{b+m}[f(n-m)-f(n)]\\
&=-\left(\sum_{n=b+m+1}^{b+m-m}f(n)-\sum_{n=a+m}^{a+m-m-1}f(n)\right)=\sum_{n=a+m}^{a-1}f(n)-\sum_{n=b+m+1}^{b}f(n)\\
&\xlongequal{\text{求和号下限大于上限}}\sum_{n=b+1}^{b+m}f(n)-\sum_{n=a}^{a+m-1}f(n)
\end{aligned}$$

综上所述, 结论得证. □

例题 0.4 1. 对 $m \in \mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\sin n^2 \cdot \sin n\right)$. 2. 对 $n, m \in \mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}$.

解 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\left(\sin n^2\cdot\sin n\right)&\xlongequal{\text{积化和差公式}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left[\cos\left(n^2+n\right)-\cos\left(n^2-n\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left[\cos\left(n(n+1)\right)-\cos\left(n(n-1)\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(m(m+1)\right)-1\right]
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)\\
&=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+m}\right)
\end{aligned}$$

□