

0.1 集合及其运算

定义 0.1 (集合)

具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为**集合** (或**集**), 通常用大写字母如 A, B, C 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的**元素** (或**元**).

若 a 是集合 A 的元素, 则称 a **属于** A , 记为 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a **不属于** A , 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 \emptyset .

我们用 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集 (不包含 0)、有理数集和实数集. 特别地, 我们用 \mathbb{N}_0 表示 $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

注 集合的表示方法:

(1) 列举法——列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 3, \dots, 2n-1\}.$$

(2) 描述法—— $A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}$. 例如

$$\ker f = \{x : f(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

定义 0.2

若集合 A 和 B 具有完全相同的元素, 则称 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

若 A 中的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$.

集合 A 的所有子集的全体, 称为 A 的**幂集**, 记为 2^A 或 $\mathcal{P}(A)$.

注 $A = B \iff A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$.

由 n 个元素形成的集合 E 的幂集 $\mathcal{P}(E)$ 共有 2^n 个元素.

定义 0.3

设 $\forall \alpha \in \Gamma, A_\alpha$ 都是集合, 则 $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 称为**集族**或**集合族**, 称 Γ 为**指标集**, α 为**指标**. 特别地, 当 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时, 集族称为**集列**或**集合列**, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{A_n\}$.

定义 0.4

设有集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 我们定义其并集与交集如下:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, \text{ s.t. } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

设 A, B 为两个集合, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B **互不相交**.

定义 0.5

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**, 记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$.

在上述定义中, 当 $B \subset A$ 时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**.

通常, 在我们讨论问题的范围内, 所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集, 我们称 X 为**全集**. 此时, 集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的**补集**或**余集**, 并记为 B^c 或 $\mathcal{C}B$, 即

$$B^c = X \setminus B.$$

今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集.

于是 B^c 也记为

$$B^c = \{x \in X : x \notin B\}.$$

定义 0.6 (笛卡尔积/直积集)

设 $n \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^n$ 为集族, 称

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔积, 记为 $A_1 \times \dots \times A_n$.

若 $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$, 则 $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ 当且仅当 $x_i = x'_i, i = 1, 2, \dots, n$.

特别地, 记 $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_1}_{n \text{ 个}} = A_1^n$.

定理 0.1 (集合的运算及性质)

设 A, B 是两个集合, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为一集族, 则

(1) **广义交换律和结合律**: 当一个集合族被分解 (以任何方式) 为许多子集合族时, 那么先作子集合族中各集合的并集, 然后再作各并集的并集, 仍然得到原集合族的并, 而且作并集时与原有的顺序无关. 当然, 对于交的运算也是如此.

$$(2) A \cup A = A, A \cap A = A.$$

$$(3) A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(4) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

$$(5) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(6) A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset,$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha), \quad A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_\alpha).$$

$$(7) X^c = \emptyset, \emptyset^c = X.$$

$$(8) A \setminus B = A \cap B^c.$$

$$(9) \text{ 若 } A \supseteq B, \text{ 则 } A^c \subseteq B^c; \text{ 若 } A \cap B = \emptyset, \text{ 则 } A \subseteq B^c.$$

$$(10) A \setminus B^c = B \setminus A^c.$$

$$(11) \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

$$(12) \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha.$$

证明

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

$$(10) x \in A \setminus B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \notin B^c \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \iff x \in B \text{ 且 } x \notin A^c \iff x \in B \setminus A^c.$$

$$(11) \text{ 对 } \forall x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha, \text{ 存在 } \alpha_x \in \Gamma, \text{ 使 } x \in A_{\alpha_x}, \text{ 并且 } x \notin B_{\alpha_x}, \forall \alpha \in \Gamma. \text{ 从而 } x \in A_{\alpha_x} \setminus B_{\alpha_x} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

$$\text{故 } \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \setminus B_\alpha).$$

(12) 对 $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \cap B_\alpha)$, 都存在 $\alpha_x \in \Gamma$, 使得 $x \in A_{\alpha_x} \cap B_{\alpha_x}$. 于是 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$, 即 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$. 故 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A_\alpha \cap B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \cap \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$.

□

定理 0.2 (De Morgan 定律)

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为一族集, 则

$$(i) \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c; \quad (ii) \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c.$$

♡


证明 (i) 设 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha$, 即 $\forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$, 因此, $\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c \subset \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$. 因此, $\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$.
(ii) 类似可证.

□

定义 0.7 (对称差集)

设 A, B 为两个集合, 称集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**, 记为 $A \Delta B$.

♣

 **笔记** 对称差集是由既属于 A, B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合.

定理 0.3 (集合对称差的性质)

- (i) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (ii) $A \Delta \emptyset = A, A \Delta A = \emptyset, A \Delta A^c = X, A \Delta X = A^c$.
- (iii) $A \Delta B = B \Delta A$.
- (iv) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- (v) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
- (vi) $A^c \Delta B^c = A \Delta B; A = A \Delta B$ 当且仅当 $B = \emptyset$.
- (vii) 对任意的集合 A 与 B , 存在唯一的集合 E , 使得 $E \Delta A = B$ (实际上 $E = B \Delta A$).

♡

证明

(i) 由对称差集的定义及定理 0.1(6) 可得

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

(vii)

□

定义 0.8 (递增、递减集合列)

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**, 此时称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$; 若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 此时称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.

命题 0.1

1. 当 $\{A_k\}$ 为递减集合列时, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.

2. 当 $\{A_k\}$ 为递增集合列时, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k (\forall N \in \mathbb{N})$.

证明

1. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递减集合列可得

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{N-1} \supset A_k, \forall k = N, N+1, \cdots.$$

因此 $\bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$.

2. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 一方面, 由 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. 另一方面, 由 $\{A_k\}$ 为递增集合列可得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{N-1} \subset A_N.$$

因此 $\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \subset A_N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, 故再根据 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ 可知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$.

□

定义 0.9 (上、下极限集)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$. 我们称

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**, 简称为**上限集**, 记为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地, 称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**, 简称为**下限集**, 记为

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

若上、下限集相等, 则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.

命题 0.2

设 $\{A_k\}$ 是一个集合列, 我们有

1. 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

2. 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

证明

1. 由于 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 故

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

2. 由于 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 故

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = A_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

又由命题 0.1 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

□

命题 0.3 (上、下极限集的性质)

设 $\{A_k\}$ 是一集合列, E 是一个集合则

$$(i) E \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \varliminf_{k \rightarrow \infty} (E \setminus A_k); \quad (ii) E \setminus \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (E \setminus A_k).$$

▲

证明

□

定理 0.4

若 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

$$(i) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_k\} = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \geq j \text{ 且 } k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_k\}$$

$$(ii) \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x : \text{除有限个 } A_k \text{ 外, 都含有 } x\} = \{x : \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j_0 \text{ 且 } k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

并且我们有

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k \supset \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

♡

证明 (i) 设 $x \in \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1 + 1$, 有 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \dots$, 且 $x \in A_{n_k}, \forall k$. 因此 x 属于无穷多个 A_n .

反之, 若 x 属于无穷多个 A_n , 不妨设 $x \in A_{n_k}, k=1, 2, \dots$, 且 $n_1 < n_2 < \dots$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$.

(ii) 若 $x \in \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$, 则存在自然数 j_0 , 使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

从而当 $k \geq j_0$ 时, 有 $x \in A_k$. 自然除了 A_1, \dots, A_{j_0-1} 这有限个集合外, 其他 $A_k (k \geq j_0)$ 都含有 x .

反之, 若除有限个 A_k 外, 都含有 x , 则存在自然数 j_0 , 当 $k \geq j_0$ 时, 有 $x \in A_k$, 从而得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

由此可知 $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$.

由 (i)(ii) 可知, $\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所形成的; $\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k \supset \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

□

例题 0.1 设 $A_{2n+1} = [0, 2 - 1/(2n+1)], n=0, 1, 2, \dots, A_{2n} = [0, 1 + 1/2n], n=1, 2, \dots$, 求 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 与 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解 注意到

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 2)$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ (与 x 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

即当 $n \geq n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}, x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) x 不能“除有限个 A_n 外, 都含有 x ”, 即 $x \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$; (ii) “ x 属于无穷多个 A_n ”, 故 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. 因此, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1], \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2)$.

□

例题 0.2 设 $f_n(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

注 由于收敛点集是不收敛点集的余集, 由**De Morgan 定律**, 所有 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的点 x 构成的集合 C 可表示为

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

证明 若 $x \in D$, 则 “ $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ ”, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \geq k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1 知,

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 ε_0 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

□