

0.1 其他

定理 0.1

设 \mathbb{F} 是一个域, $m_i, a_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\gcd(m_i, m_j) \mid (a_i - a_j), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \pmod{m_i(x)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

即存在 $k_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) = k_i(x)m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \dots, n.$$



证明

□

例题 0.1 设 $A_1, A_2, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{K}), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_1), g(A_2), \dots, g(A_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1} = h(A_i)$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 都成立.

证明 证法一: 由命题??可知, 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 存在 $h_i \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i). \quad (1)$$

记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$. 考虑 $\gcd(n_i, n_j)(i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$, 设 $x_0 \in \mathbb{C}$ 是 $\gcd(n_i, n_j)$ 的根, 则 $(x - x_0) \mid n_i, n_j$, 即 x_0 是 A_i 和 A_j 的公共特征值. 由命题??和命题??可知, $h_i(x_0)$ 是 $h_i(A_i)$ 的特征值, $\frac{1}{g(x_0)}$ 是 $g^{-1}(A_i)$ 的特征值. 再由(1)式可知

$$g^{-1}(A_i) = h_i(A_i) \implies \frac{1}{g(x_0)} = h_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

于是

$$h_i(x_0) - h_j(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0)} = 0.$$

因此 $(x - x_0) \mid (h_i - h_j)$. 故在 \mathbb{C} 上就有 $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i - h_j)$. 又因为整除不随数域扩张而改变, 所以在 \mathbb{K} 上也有 $\gcd(n_i, n_j) \mid (h_i(x) - h_j(x))$. 于是由中国剩余定理的推广可知, 方程

$$h(x) \equiv h_i(x) \pmod{n_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

在 \mathbb{K} 上有解. 故存在 $h \in \mathbb{K}[x]$, 使得

$$h(A_i) = h_i(A_i) = g^{-1}(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

证法二: 记 A_i 的极小多项式为 $n_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, 由命题??可知

$$(n_i, g) = 1, i = 1, 2, \dots, m.$$

从而 $(n_1 n_2 \cdots n_m, g) = 1$. 因此存在 $h, k \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$h(x)g(x) + n_1(x)n_2(x) \cdots n_m(x)k(x) = 1.$$

从而

$$h(A_i) = g^{-1}(A_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

□

命题 0.1

设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 $A \sim \tilde{A}$, 其中 \tilde{A} 是主对角元都为 0 的上三角阵, 则 A 是幂零矩阵.



证明 由条件可知存在可逆阵 P , 使得 $A = P^{-1}\tilde{A}P$. 从而根据矩阵乘法易得

$$A^n = P^{-1}\tilde{A}^n P = O.$$

故 A 是幂零矩阵.

□

例题 0.2 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足

$$AB + A = BA + B.$$

证明:

$$(A - B)^n = 0.$$

证明 注意到

$$AB - BA = B - A.$$

由命题??知 A, B 可同时相似上三角化. 不妨设 A, B 都是上三角矩阵, 由上三角阵的性质可知 $AB - BA$ 也是上三角阵且主对角元都为 0. 再由上式可知 $A - B$ 是对角线全为 0 的上三角阵, 故由命题 0.1 知 $A - B$ 是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A - B)^n = 0.$$

□

例题 0.3 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A) \triangleq \{P^{-1}AP : P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ 是可逆矩阵}\}.$$

证明: $S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 A 在 \mathbb{C} 上一定可对角化.

证明 设 A 的极小多项式为 m , 特征多项式为 p , 则由知 m 无重根. 设 $A_k \in S(A), k = 1, 2, \dots$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \tilde{A}.$$

由定理??知

$$m(\tilde{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0,$$

$$|\lambda I - \tilde{A}| = \left| \lambda I - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda I - A| = |\lambda I - A| = p(\lambda).$$

因此 \tilde{A} 的特征多项式也是 p , \tilde{A} 极小多项式整除 m , 从而 \tilde{A} 极小多项式也无重根. 因此 \tilde{A} 和 A 有相同的特征值且可对角化, 故 $\tilde{A} \in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, A 在实数域 \mathbb{R} 上相似于下列分块对角矩阵:

$$\tilde{J} = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}(a_l, b_l)\},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$ 都是实数, b_1, \dots, b_l 都非零, 且 λ_j 都是 A 的实特征值, $a_j \pm ib_j$ 都是 A 的复特征值, $J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示以 λ_i 为特征值的通常意义下的 Jordan 块, 并且

$$c_j = -2a_j, d_j = a_j^2 + b_j^2, \quad R_j = \begin{pmatrix} 0 & -d_j \\ 1 & -c_j \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} R_j & C_2 & & \\ & R_j & C_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R_j & C_2 \\ & & & & R_j \end{pmatrix}.$$

对于 $J_{r_j}(\lambda_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{r_j}(\lambda_j) \sim \begin{pmatrix} \lambda_j & \frac{1}{n} & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{n} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \triangleq J_{r_j}^{(n)}(\lambda_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

对于 $\tilde{J}_{s_j}(a_j, b_j)$, 在实数域上, 我们有

$$J_{s_j}(a_j, b_j) \sim \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & & & \\ 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & & & \\ & & 0 & -d_j & & & \\ & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j & \frac{1}{n} \\ & & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} \triangleq J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j), \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是在实数域上, 就有

$$A \sim \tilde{J} \sim \text{diag}\{J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\} \triangleq \tilde{J}^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故 $\tilde{J}^{(n)} \in S(A)$. 因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$. 不难发现

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} 0 & -d_j & & & \\ 1 & -c_j & & & \\ & & 0 & -d_j & \\ & & 1 & -c_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 & -d_j \\ & & & & & 1 & -c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_j \end{pmatrix},$$

注意到 R_j 的极小多项式等于

$$x^2 + c_j x + d_j = (x - a_j)^2 + b_j^2 = (x - a_j - ib_j)(x - a_j + ib_j)$$

在复数域 \mathbb{C} 上无重根, 故 R_j 在复数域 \mathbb{C} 上可对角化, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{s_j}^{(n)}(a_j, b_j)$ 在复数域 \mathbb{C} 上也可对角化. 因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} = \text{diag}\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_1}^{(n)}(\lambda_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} J_{r_k}^{(n)}(\lambda_k), \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_1}^{(n)}(a_1, b_1), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}_{s_l}^{(n)}(a_l, b_l)\right\}$$

在复数域 \mathbb{C} 上可对角化. 又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)} \in S(A)$, 故 A 在复数域 \mathbb{C} 上相似于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{J}^{(n)}$. 因此 A 在复数域 \mathbb{C} 上可对角化. □

例题 0.4 设 $n \geq 2, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实对称矩阵, $v \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$. 证明:

$$\text{tr}(A^T A) \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} - \frac{1}{n-1} [\text{tr}(A)]^2.$$

证明 不妨设 A 为实对角矩阵, 即

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

现在再设 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

不妨设 λ_1 是 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^2} + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \geq 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \right) \geq 0 \\ \iff & \frac{1}{2n-2} \lambda_1^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0 \\ \iff & \lambda_1^2 + 2n \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

上述关于 λ_i 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2n & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

直接计算行列式得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & \lambda-2n & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & \lambda-2n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}]{\substack{(-1)r_1+r_i \\ i=2,3,\dots,n}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -2 \\ -\lambda-1 & \lambda-2n+2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda-1 & 0 & \cdots & \lambda-2n+2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{“爪”型行列式}} (\lambda-1)(\lambda-2n+2)^{n-1} - 2(n-1)(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-2} \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} [(\lambda-1)(\lambda-2n+2) - 2(n-1)(\lambda+1)] \\ & = (\lambda-2n+2)^{n-2} \lambda(\lambda-4n+3). \end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0, 4n-3, \underbrace{2n-2, 2n-2, \dots, 2n-2}_{n-2 \text{ 个}}. \quad (n \geq 2)$$


故矩阵的特征值全都大于等于 0. 于是矩阵半正定, 从而这个矩阵对应的二次型大于等于 0. 这就得到了不等式 (2). \square

命题 0.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^3$ 且 $\alpha \neq 0$. 若 $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ 满足

$$A\alpha = \beta, A\beta = -\gamma, A\gamma = \alpha - \beta \iff A\alpha = \beta, A\beta = \gamma, A\gamma = \alpha + \beta.$$

证明: α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性无关.

 **笔记** 由命题??可立得.

证明 若 α, β 在 \mathbb{Q} 上线性相关, 则存在 $k \in \mathbb{Q}$, 使得 $\beta = k\alpha$. 从而由条件可得

$$A\alpha = \beta = k\alpha \implies A\beta = kA\alpha = k^2\alpha = -\gamma \implies A\gamma = \alpha - \beta = (1-k)\alpha = -k^2A\alpha = -k^3\alpha.$$

于是就有 $(k^3 - k + 1)\alpha = 0$. 又 $\alpha \neq 0$, 故 $k^3 - k + 1 = 0$. 但这个方程没有有理根, 矛盾! 故 α, β 在 \mathbb{Q} 上线性无关.

若 α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性相关, 则存在 $a, b \in \mathbb{Q}$, 使得 $\gamma = a\alpha + b\beta$. 由条件可得

$$A\gamma = \alpha - \beta = aA\alpha + bA\beta = a\beta - b\gamma = a\beta - b(a\alpha + b\beta) = -ab\alpha + (a + b^2)\beta.$$

因此

$$ab = 1, \quad a + b^2 = -1 \implies a + \frac{1}{a^2} = -1 \implies a^3 - a^2 + 1 = 0,$$

而上式无有理根, 矛盾! 故 α, β, γ 在 \mathbb{Q} 上线性无关. □

例题 0.5 设 V 是 \mathbb{Q} 上 4 维空间, φ 是 V 上的线性变换. 若

$$\alpha_i \in V, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

且满足

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\neq 0, & \alpha_4 &\neq \alpha_1 + \alpha_2, & \varphi\alpha_1 &= \alpha_2, & \varphi\alpha_2 &= \alpha_3, \\ \varphi\alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \varphi\alpha_4 &= \alpha_5, & \varphi\alpha_5 &= \alpha_3 + \alpha_4. \end{aligned}$$

求 $\det \varphi$.

证明 由命题 0.2 或命题 ?? 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 若 $\alpha_4 \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 设 $\alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$. 由条件可得

$$\varphi\alpha_4 = \alpha_5 \implies \varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + (c+1)\alpha_3,$$

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi^2(a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3) = \varphi(c\alpha_1 + (a+c)\alpha_2 + b\alpha_3) = b\alpha_1 + (b+c)\alpha_2 + (a+c)\alpha_3.$$

从而

$$a = b, \quad b = b + c, \quad c + 1 = a + c \implies a = b = 1, \quad c = 0.$$

故 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ 与条件矛盾! 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 又因为 V 是 \mathbb{Q} 上 4 维空间, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 就是 V 的一组基. 从而

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

其中 $x, y, z, m \in \mathbb{Q}$. 由条件可知

$$\varphi^2\alpha_4 = \varphi\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

于是 $\varphi^2\alpha_4$ 的在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标就是


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} z + xm \\ x + z + ym \\ y + zm \\ m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解得 $(x, y, z, m)^T = (-1, 0, 1, 1)^T$ 或 $(1, 2, 1, -1)^T$. 故

$$\det \varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ 或 } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

□

例题 0.6 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且满足对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $|A^k + I_n| = 1$. 证明 A 是幂零矩阵.

 **笔记** 证明的想法类似于定理 ??.

注 实际上, 由知(6)式只需要对 $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ 成立, 就可以得到结论成立. 见例 0.7.

证明 事实上设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

实际上有

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (4)$$

展开(3)得

$$1 = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^k) = 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i^k \lambda_j^k + \dots + \lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_n^k. \quad (5)$$

将(4)中右边除 1 以外的每项看成 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$, 由(5)(3)得

$$y_1^k + y_2^k + \dots + y_{2^n-1}^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

由 Netwon 公式得 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$ 所有初等对称多项式为 0. 从而由 Vieta 定理知 $y_1, y_2, \dots, y_{2^n-1}$ 是多项式 $y^{2^n-1} = 0$ 的全部根. 这就给出了


$$y_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

因此由命题??知 A 是幂零矩阵. □

例题 0.7 设 A 是 3 阶复矩阵, 对 $k = 1, 2, \dots, 7$, 我们有

$$|I + A^k| = 1,$$

证明 A 是幂零矩阵, 并问 k 是否可只取 $1, 2, \dots, 6$.

 **笔记** 反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

证明 事实上, 设 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 是 A 的特征值, 那么

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1, k = 1, 2, \dots, 7.$$

于是我们有

$$(1 + \lambda_1^k)(1 + \lambda_2^k)(1 + \lambda_3^k) = 1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \lambda_1^k \lambda_3^k + \lambda_2^k \lambda_3^k + \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k = 0, k = 1, 2, \dots, 7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由 Netwon 公式他们是 $\lambda^7 = 0$ 的七个根 (类似例 0.6), 因此我们推出了

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$


这就说明了 A 幂零.

如果 k 只能取 $1, 2, 3 \dots, 6$, 反例可取

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{7}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{7}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{8\pi i}{7}} \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.8 设 f, g 是互素多项式且 A 是一个 n 阶矩阵, 证明 $f(A)g(A) = 0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n .

 **笔记** 这题也可以用 Jordan 标准型解决, 可以得到 $f(A), g(A)$ 的 0 特征值的个数即代数重数之和为 n , 从而 $n -$

$r(f(A)) + n - r(g(A)) = n$, 故结论得证.

证明 由裴蜀等式, 存在多项式 a, b 使得 $af + bg = 1$. 于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & a(A)f(A) + b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即 $f(A)g(A) = 0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n . □

例题 0.9 设 A 是 n 阶幂零矩阵, B 是 n 阶方阵满足 $AB = BA$ 且 $r(AB) = r(B)$, 证明 $B = 0$.

证明 由命题??知 $AB = BA$ 表明 $\text{Im } B$ 是 A 不变子空间. 于是可以考虑 $A|_{\text{Im } B}$, 显然 $\text{Im } A|_{\text{Im } B} = \text{Im } AB$. 由维数公式有

$$\dim \text{Im } B = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } AB = \dim \ker A|_{\text{Im } B} + \dim \text{Im } B,$$

即 $\ker A|_{\text{Im } B} = 0$. 现在 $A|_{\text{Im } B}$ 也是 $\text{Im } B$ 上的单射. 由推论??知 $A|_{\text{Im } B}$ 是双射. 又因为双射的复合还是双射, 所以 $(A|_{\text{Im } B})^n = A^n|_{\text{Im } B} = 0$ 也是双射. 从而可知 $\text{Im } B = 0$, 这就完成了证明. □

例题 0.10 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(AB - BA + I) = 1$, 证明

$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (7)$$

证明 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $AB - BA + I = \alpha\beta^T$, 于是我们有

$$n = \text{tr}(AB - BA + I) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = \text{tr}(\beta^T\alpha)$$

现在

$$\begin{aligned} \text{tr}((AB - BA)^2) &= \text{tr}(ABAB - AB^2A - BA^2B + BABA) \\ &= \text{tr}(ABAB - A^2B^2 - A^2B^2 + ABAB) \\ &= 2\text{tr}(ABAB - A^2B^2) = \text{tr}((\alpha\beta^T - I)^2) \end{aligned}$$

利用定理??, 我们有 $\alpha\beta^T$ 特征值为 $\beta^T\alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}$. 故 $(\alpha\beta^T - I)^2$ 特征值为 $(\beta^T\alpha - 1)^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}$. 于是


$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

例题 0.11 设 n 为奇数, 证明行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

不为 0.

 **笔记** 行列式 $\bmod p$ 技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

注 行列式左上角元素不变的原因: (1) 对行列式整体做 $\bmod 2$ 运算, 左上角元素无论变化还是不变都不影响行列式的值, 因为此时行列式是个对角阵, 其值只与对角元有关.

(2) 我们在有限域 \mathbb{Z}_w 上考虑行列式 D , 这样 $3 = 5 = \cdots = 1, 2 = 4 = \cdots = 0$, 因此无论各个元素的形式如何, 最终的结果是一样的, 都等于 1. 故 D 的值不可能是 0!

证明 我们将行列式 D 的元素 $\bmod 2$, 因为 $(n+1)^n$ 是偶数, 所以

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

这个行列式当然就是对角线之积 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n$ 还是奇数, 故 $D = 2k + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n \cdot n^2 \cdots n^n (k \in \mathbb{Z})$, 奇数加偶数当然还是奇数. 因此行列式 D 也是奇数, 所以 D 不为 0. 证毕!

□

例题 0.12 设 $n \geq 3$ 阶矩阵 $A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 3i, & i = j \\ 3i + 1, & i < j \\ 2 - 3j, & i > j \end{cases}$ 证明 $\det A$ 是 3 的倍数当且仅当 n 是奇数.

 **笔记** $\bmod p$ 技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

证明 我们在有限域 \mathbb{Z}_3 上考虑矩阵 A , 即

$$A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i < j \\ 2, & i > j \end{cases}$$

故 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (行列式 A 的计算可见命题??, 下面计算用的是大拆分法) 现在定义

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 & \cdots & x+1 \\ x+2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+1 \\ x+2 & \cdots & x+2 & x \end{vmatrix},$$

则显然 f 是关于 x 的一次函数且

$$f(-1) = (-1)^n, f(-2) = (-2)^n \Rightarrow f(x) = ((-1)^n - (-2)^n)(x+1) + (-1)^n.$$

现在

$$|A| = f(0) = 2(-1)^n - (-2)^n = \begin{cases} 2 - 4^m, & n = 2m \\ -2 + 2^{2m-1}, & n = 2m-1 \end{cases},$$

注意到

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^m \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2 - 4^m \equiv 1 \pmod{3},$$

以及

$$4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2m-2} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2(2^{2m-2} - 1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow -2 + 2^{2m-1} \equiv 0 \pmod{3},$$

这就完成了证明.

□

例题 0.13 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2025 \times 2025}$ 满足

$$a_{ii} = i^3 + 3i^2 + 2i, \quad a_{ij} = \begin{cases} 3(i-j) + 1, & i < j \\ 3(i+j) + 2, & i > j \end{cases}.$$

证明: $3 \mid \det A$.

证明 在有限域 \mathbb{Z}_3 上考虑. 注意到

$$i^3 + 3i^2 + 2i = i(i+1)(i+2) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

故

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

记 $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$, $|A(t)| = |A + t\alpha\alpha^T|$, 则

$$|A(t)| = |A| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

其中 A_{ij} 为 A 的 (i, j) 元的代数余子式. 从而

$$\begin{aligned} |A| - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} &= |A(-1)| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 = 2; \\ |A| - 2 \sum_{i,j=1}^n A_{ij} &= |A(-2)| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2^{2025} = 1^{2025} = 1. \end{aligned}$$

于是 $|A| = 2 \times 2 - 1 = 3 = 0$. 故 $3 \mid \det A$.

□

例题 0.14 设 A, B 为正定矩阵, 证明关于 X 的矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解, 且解也为正定矩阵.

证明 考虑映射 $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, X \mapsto AX + XA$. 由推论??知 A 特征值为正, $-A$ 特征值为负. 于是由命题??, 我们知道 $AX = X(-A)$ 只有 0 解, 即 $\ker T = \{0\}$. 因此 T 为单射, 从而由推论??知 T 也是满射. 故矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 X . 此外

$$A^T X^T + X^T A^T = B^T \implies AX^T + X^T A = B,$$

故解 X 是实对称的. 设 $X\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$. 我们有

$$2\lambda\alpha^T A\alpha = \alpha^T AX\alpha + \alpha^T XA\alpha = \alpha^T B\alpha > 0 \implies \lambda = \frac{\alpha^T B\alpha}{2\alpha^T A\alpha} > 0,$$

从而由推论??知 X 是正定矩阵. □

例题 0.15 设 \mathbb{F} 是一数域且 $AB = BA$. 设方程组 $ABX = 0, AX = 0, BX = 0$ 的解空间分别是 V, V_1, V_2 . 证明 $V = V_1 \oplus V_2$ 的充要条件是存在 $C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $CA + DB = I_n$.

证明 初等变换得

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned} \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } CA + DB = I_n &\iff \exists C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}, \text{使得 } \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = I_n \\ &\iff \begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} X = I_n \text{ 在 } \mathbb{F}^{2n \times n} \text{ 有解} \iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T & I_n \end{pmatrix}\right) \\ &\iff r\left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}\right) = n \iff r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = n \iff AX = 0, BX = 0 \text{ 公共解只有 } 0 \text{ 解} \\ &\iff V_1 \cap V_2 = \{0\}. \end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道 $V_1 + V_2$ 是直和. 由 $AB = BA$ 我们知道 $V_1 \oplus V_2 \subset V \implies$ 于是

$$n - r(AB) \geq n - r(A) + n - r(B) \implies r(AB) \leq r(A) + r(B) - n.$$

由 Sylvester(西尔维斯特)不等式我们得

$$n - r(AB) = n - r(A) + n - r(B),$$

即 $V = V_1 \oplus V_2$. □

例题 0.16 在 n 维欧氏空间 V 中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 $n+1$ 个.

证明 先构造 $n+1$ 个两两夹角为钝角的单位向量. $n=1$ 是显然的, 假定对维数小于 n 为空间, 的确是存在的, 则对 n , 在 V 的一个 $n-1$ 维子空间中取 n 个两两夹角为钝角的向量, 记为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量 β . 待定 λ , 使得 $n+1$ 个不同向量

$$\alpha_1 - \lambda\beta, \alpha_2 - \lambda\beta, \dots, \alpha_n - \lambda\beta, \beta. \quad (8)$$

两两夹角为钝角. 从而现在我们有

$$\begin{aligned} (\alpha_i - \lambda\beta, \beta) &= -\lambda < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \iff \lambda > 0; \\ (\alpha_i - \lambda\beta, \alpha_j - \lambda\beta) &= (\alpha_i, \alpha_j) + \lambda^2 < 0, \forall 1 \leq i < j \leq n \iff \lambda^2 < \min_{1 \leq i < j \leq n} \{-(\alpha_i, \alpha_j)\}. \end{aligned}$$

于是这样的 λ 肯定存在. 又若 $\alpha_i - \lambda\beta = \beta$, 则 $\beta = \frac{\alpha_i}{1+\lambda} \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 矛盾! $\alpha_i - \lambda\beta = \alpha_j - \lambda\beta \iff \alpha_i = \alpha_j$, 这也是矛盾! 于是我们证明了 (8) 中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过 $n+1$ 个. $n=1$ 显然, 假定对维数小于 n 为空间, 的确成立, 在 n 时, 假定有 $n+2$ 个不同的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$ 两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i = \alpha_i - (\alpha_i, \alpha_{n+2})\alpha_{n+2}, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

注意到

$$\begin{aligned} (\beta_i, \alpha_{n+2}) &= 0, i = 1, 2, \dots, n+1; \\ (\beta_i, \beta_j) &= (\alpha_i, \alpha_j) - (\alpha_i, \alpha_{n+2})(\alpha_j, \alpha_{n+2}) < 0, 1 \leq i < j \leq n+1, \end{aligned}$$

我们有两个两两夹角为钝角的向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ 张成的空间至多是 $n-1$ 维, 由归纳假设, 他应该至多只有 n 个向量两两夹角为钝角, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明. \square

例题 0.17 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 t_1, t_2, \dots, t_{n+1} 使得

$$A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A, B 都是幂零矩阵.

证明 定义 $p(\lambda, \mu) \triangleq |\lambda I - A - \mu B|$. 由 $A + t_i B, i = 1, 2, \dots, n+1$ 都是幂零矩阵及命题??得

$$p(\lambda, t_i) = \lambda^n, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

对固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 注意到不超过 n 次的多项式 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n$ 有 $n+1$ 个不同实根 t_1, t_2, \dots, t_{n+1} , 于是 $p(\lambda, \mu) - \lambda^n \equiv 0$, 即

$$|\lambda I - A - \mu B| = \lambda^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

让 $\mu = 0$ 得 $|\lambda I - A| = \lambda^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, 即 A 是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n \left| \frac{\lambda}{\mu} I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n, \forall \mu > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

把 λ 用 $\mu\lambda$ 替换得

$$\left| \lambda I - \frac{A}{\mu} - B \right| = \lambda^n.$$

让 $\mu \rightarrow +\infty$ 得 $|\lambda I - B| = \lambda^n$, 即 B 也是幂零矩阵. \square

例题 0.18 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $A - E$ 幂零且对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = B A^k$, 证明: $AB = BA$.

证明 由 $A - E$ 幂零可知 A 的特征值为 1, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(1) & & & \\ & J_{n_2}(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$. 由命题??(1) 可知

$$f(J_{n_i}^k(1)) = J_{n_i}(1), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

这里 $J_{n_i}(1)$ 是 n_i 阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 于是由 $A^k B = B A^k$ 及(9)式得, 对 $\forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都有

$$J_{n_i}^k(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}^k(1) \implies f(J_{n_i}^k(1)) B_{ij} = B_{ij} f(J_{n_j}^k(1)) \implies J_{n_i}(1) B_{ij} = B_{ij} J_{n_j}(1),$$

故 $AB = BA$. \square

例题 0.19 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 A 的不同特征值模长互不相同且 $r(A) = r(A^2)$. 若对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $A^k B = B A^k$, 证明 $AB = BA$.

证明 由 $r(A) = r(A^2)$ 及定理??知, A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 1 阶 Jordan 块的个数有

$$r(A^2) + r(A^0) - 2r(A) = n - r(A).$$

因为 $n - r(A)$ 就是 0 特征值的几何重数, 即 A 的 Jordan 标准型中 0 特征值对应的 Jordan 块只有 $n - r(A)$ 个, 所以 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的. 因此可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

其中 C 是 A 的所有非零特征值对应的 Jordan 块组成的分块对角阵. 由条件可得

$$A^k B = B A^k \iff \begin{pmatrix} C^k B_1 & C^k B_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C^k & O \\ B_3 C^k & O \end{pmatrix}.$$

从而 $B_2 = B_3 = O, C^k B_1 = B_1 C^k$, 即

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}, \quad C^k B_1 = B_1 C^k.$$

于是

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} CB_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 C & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff CB_1 = B_1 C.$$

因此只需证 $CB_1 = B_1 C$. 现设

$$C = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \quad B_1 = (B_{ij}),$$

这里 J_{λ_i} 是属于 A 的特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵, λ_i 互不相同. 从而我们有

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ij} = B_{ij} J_{\lambda_j}^k, \quad \forall i, j \in [1, s] \cap \mathbb{N}. \quad (10)$$

由条件知 λ_i 的模长互不相同, 从而 $\lambda_i^k \neq \lambda_j^k, \forall i \neq j$. 于是由命题??可知 $J_{\lambda_i}^k X = X J_{\lambda_j}^k, \forall i \neq j$ 只有零解. 因此再结合(10)式知 $B_{ij} = O, \forall i \neq j$. 故

$$C^k B_1 = B_1 C^k \iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

由命题??(2) 知, 对 $\forall i \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 都存在次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式 f , 使得

$$f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) = \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}.$$

进而

$$\begin{aligned} C^k B_1 = B_1 C^k &\iff J_{\lambda_i}^k B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i}^k \iff \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} \left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \\ &\iff f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) B_{ii} = B_{ii} f\left(\frac{J_{\lambda_i}^k}{\lambda_i^k}\right) \iff \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} \frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i} \iff J_{\lambda_i} B_{ii} = B_{ii} J_{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

因此 $CB_1 = B_1 C$, 从而结论得证. □

例题 0.20 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$ 且 A, u, v 元素都是正数并满足 $Au = v, Av = u$. 证明: $u = v$.

证明 记 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T, t^* \triangleq \min \left\{ \frac{u_i}{v_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}, \tau \triangleq u - t^*v = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$, 则 τ 元素非负.

设 $u_{i'} = t^*v_{i'}$, 则 $\tau_{i'} = 0$. 于是

$$A\tau = Au - t^*Av = v - t^*v,$$

$$A^2\tau = Av - t^*Av = u - t^*v = \tau.$$

设 $A^2 = (a_{ij})$, 则由 $A^2\tau = \tau$ 可得

$$\sum_{j=1}^n a_{i'j} \tau_j = \tau_{i'} = 0.$$

再结合 A^2 是正数, τ 元素都非负可知

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0 \implies u = t^*v.$$

从而由条件可得

$$v = Au = t^*Av = t^*u = (t^*)^2v \implies t^{*2} = 1 \implies u = v.$$

□

例题 0.21 设 $n, m \in \mathbb{N}$, 设 $n \geq 1$ 次不可约多项式 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 的 n 个根是实数且成等差数列, 证明: $n \leq 2$.

证明 设 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 等差数列 $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 且 d 为公差. 反证, 设 $n \geq 3$, 则只需证此时 f 在 \mathbb{Q} 上可约, 即上述部分一次因式乘积为有理多项式. 下证 $(x-x_1)(x-x_n) \in \mathbb{Q}[x]$, 即证 $x_1+x_n, x_1x_n \in \mathbb{Q}$. 由 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 知 $f(x)$ 的常数项为有理数, 即

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2} \in \mathbb{Q} \implies x_1 + x_n \in \mathbb{Q}.$$

注意到

$$x_1x_n = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (x_n - x_1)^2}{4} = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (n-1)^2d^2}{4},$$

故只须证的 $d^2 \in \mathbb{Q}$. 由 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 和 Vieta 定理知

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \in \mathbb{Q}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_{n-k+1}^2 \right] = \sum_{k=1}^n \frac{[(x_k + x_{n-k+1})^2 + (x_k - x_{n-k+1})^2]}{4} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[(x_1 + x_n)^2 + (n-2k+1)^2d^2]}{4} \triangleq q \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

从而

$$d^2 = \frac{4q - \sum_{k=1}^n (x_1 + x_n)^2}{\sum_{k=1}^n (n-2k+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

故 $x_1x_n \in \mathbb{Q}$, 进而 $(x-x_1)(x-x_n) \in \mathbb{Q}[x]$, 此时 $(x-x_1)(x-x_n) \mid f(x)$, 故此时 f 在 \mathbb{Q} 上可约, 矛盾!

□

例题 0.22 设 $n \geq 2$ 为一个正整数, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为两个 n 阶实矩阵, 已知 $A^2 = -I_n$ (I_n 为 n 阶单位矩阵), 且 $AB = BA$, 证明: B 的行列式 $\det(B) \geq 0$.

证明 证法一: 由 $A^2 = -I_n$ 和 $x^2 + 1$ 不可约知 A 的极小多项式为 $x^2 + 1$, 从而 A 的特征值只有 $\pm i$, 于是 $|A| = 1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2 + 1)^{\frac{n}{2}}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & & \\ & R & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A = J, B = (B_{ij})$ 为相应分块矩阵, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. 由 $AB = BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} RB_{11} + B_{21} & * & \cdots & * & * \\ RB_{21} + B_{31} & RB_{22} + B_{32} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ RB_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2}-1,2} + B_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & * \\ RB_{\frac{n}{2},1} & RB_{\frac{n}{2},2} & \cdots & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} & RB_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}R & * & \cdots & * & * \\ B_{21}R & B_{21} + B_{22}R & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{\frac{n}{2}-1,1}R & B_{\frac{n}{2}-1,1} + B_{\frac{n}{2}-1,2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}R & * \\ B_{\frac{n}{2},1}R & B_{\frac{n}{2},1} + B_{\frac{n}{2},2}R & \cdots & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}R & B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} + B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}R \end{pmatrix} \quad (11)$$

比较第一列和最后一行元素得

$$RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R,$$

$$RB_{i1} + B_{i+1,1} = B_{i1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

$$RB_{\frac{n}{2},i+1} = B_{\frac{n}{2},i} + B_{\frac{n}{2},i+1}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

于是

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1}R - RB_{\frac{n}{2}-1,1} = RB_{\frac{n}{2},2} - B_{\frac{n}{2},2}R.$$

又因为 $R^2 = -I_2$ 且 R 可逆, 所以

$$\begin{aligned} RB_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},1}R &\iff RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = -B_{\frac{n}{2}-1,1} - RB_{\frac{n}{2}-1,1}R \\ &\implies RB_{\frac{n}{2},1} = RB_{\frac{n}{2}-1,1}R + B_{\frac{n}{2}-1,1} = O \implies B_{\frac{n}{2},1} = O. \end{aligned}$$

因此 $B_{\frac{n}{2}-1,1}R = RB_{\frac{n}{2}-1,1}$, $RB_{\frac{n}{2},2} = B_{\frac{n}{2},2}R$, 同理可得 $B_{\frac{n}{2}-1,1} = B_{\frac{n}{2},2} = O$. 依此类推可得

$$B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2}-1,1} = \cdots = B_{21} = O, \quad B_{\frac{n}{2},1} = B_{\frac{n}{2},2} = \cdots = B_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} = O, \quad RB_{11} = B_{11}R.$$

再比较(11)式第2列和倒数第2行主对角线以下元素, 同理可得

$$B_{\frac{n}{2}-1,i} = O, \quad i = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 2,$$

$$B_{i,2} = O, \quad i = 3, 4, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$RB_{22} = B_{22}R.$$

依此类推最终可得 $B_{ij} = O, i > j$, 即 B 为分块上三角阵, 并且

$$RB_{ii} = B_{ii}R, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}. \quad (12)$$

对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, 设 $B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 则由(12)式得

$$RB_{ii} = B_{ii}R \iff \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \implies a = d, c = -b.$$

从而

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \implies |B_{ii}| = a^2 + b^2 \geq 0.$$

因此 $|B| = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} |B_{ii}| \geq 0$.

证法二: 由 $A^2 = -I_n$ 和 $x^2 + 1$ 不可约知 A 的极小多项式为 $x^2 + 1$, 从而 A 的特征值只有 $\pm i$, 于是 $|A| = 1$, 且 n 为偶数. 进而 A 的特征多项式为 $(x^2 + 1)^r$, 其中 $r = \frac{n}{2}$. 由实数域上的广义 Jordan 标准型知, 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & R & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & R & I_2 \\ & & & & R \end{pmatrix}, \text{ 其中 } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又注意到实矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$ 的特征多项式也为 $(x^2 + 1)^r$, 进而由实数域上的广义 Jordan 标准型知, C 在实数域上也相似于 J . 因此 A 在实数域上相似于实矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & E_r \\ -E_r & O \end{pmatrix}$, 从而存在可逆矩阵 P , 满足 $A = P^{-1}CP$. 由于命题和结论在实数域上的相似下保持不变, 故可不妨设 $A = C, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 其中 B_1 为 r 阶矩阵, 由 $AB = BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ -B_1 & -B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 & B_4 \\ -B_4 & B_3 \end{pmatrix},$$

此时 $B_3 = -B_2, B_1 = B_4$, 从而

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & B_2 + iB_1 \\ -B_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 - iB_2 & O \\ -B_2 & B_1 + iB_2 \end{vmatrix} \\ &= |B_1 - iB_2| |B_1 + iB_2| = |B_1 - iB_2| \overline{|B_1 - iB_2|} \geq 0. \end{aligned}$$

□

例题 0.23 设 σ 为 n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. $\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: v_1, \dots, v_{n+1} , 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证明 (1) \Rightarrow (2): 记

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T,$$

$e = e_1 + \dots + e_n$. 由 σ 是纯量变换知上述 $n+1$ 个向量都是其特征向量. 任取其中 n 个向量, 因为 e_1, \dots, e_n 显然是线性无关的, 所以可不妨设这 n 个向量为 $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e, e_{i+1}, \dots, e_n\}$, 于是

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + \dots + a_{i-1} e_{i-1} + a_i e + a_{i+1} e_{i+1} + \dots + a_n e_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_i \\ \vdots \\ a_{i-1} + a_i \\ a_i \\ a_{i+1} + a_i \\ \vdots \\ a_n + a_i \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_{i-1} = a_i = a_{i+1} = \dots = a_n = 0. \end{aligned}$$

故 $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e, e_{i+1}, \dots, e_n\}$ 线性无关.

(2) \Rightarrow (1): 假设这 $n+1$ 个向量分别属于 $k (k \leq n+1)$ 个不同特征值的特征子空间 V_1, \dots, V_k 中. 不妨设

$$1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = k, \quad t_i \in \mathbb{N};$$

$$v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i} \in V_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

显然 V_i 中至多含有 n 个 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ 中向量. 任取 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \setminus \{v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}\}$ 中 $n - (t_i - t_{i-1} + 1)$ 个向量, 则由假设可知 $v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}$ 和这 $n - (t_i - t_{i-1} + 1)$ 个向量组成的向量组线性无关, 进而 $v_{t_{i-1}}, \dots, v_{t_i}$ 也线性无关. 又因

为属于不同特征值的特征向量必线性无关, 所以由 $\{v_{i_{i-1}}, \dots, v_{i_i}\}, i = 1, 2, \dots, k$ 组成的向量组 $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ 也线性无关, 这与 \mathbb{C}^n 中至多只有 n 个线性无关向量矛盾! 因此这个 $n+1$ 个向量都属于同一个特征子空间, 由于其中任意 n 个向量线性无关, 故这个特征子空间就是全空间, 即 σ 是纯量变换. \square

例题 0.24 设 A, B 为 n 阶实方阵, 证明: $r \left(\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} \right) = 2r(A)$.

证明 由矩阵秩的基本公式和命题??可知 $r(A) = r(A^T A) \leq r(A^T A BA) = r((A^T B) A) \leq r(A)$. 从而 $r(A^T A) = r(A^T A BA)$, 于是 $A^T A X = BA$ 存在非零解 X_0 . 故

$$\begin{pmatrix} E & -X_0 \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BA - A^T A X_0 \\ O & A^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix}.$$

因此

$$r \left(\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} \right) = 2r(A).$$

\square

例题 0.25 设 \mathbb{F} 是一个数域, $A, B, M \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 满足 $AM = MB$ 且 A, B 有相同的特征多项式, 证明: 对任何 $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 都有

$$\det(A - MX) = \det(B - XM).$$

证明 设有理数列 $t_n \rightarrow 0$, 使得 $A_n = t_n E + A, B_n = t_n E + B$ 可逆. 因为 A, B 有相同特征多项式, 所以 A_n, B_n 也有相同的特征多项式, 且 $A_n M = M B_n$. 从而 $|A_n| = |B_n| \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是由降价公式可得

$$\begin{aligned} |A_n - MX| &= |A_n| |E - X A_n^{-1} M| = |A_n| |E - X M B_n^{-1}| \\ &= |E - X M B_n^{-1}| |B_n| = |B_n - XM|. \end{aligned}$$

因为上式两边都是关于 t_n 的连续函数, 所以令 $n \rightarrow \infty$ 得 $|A - MX| = |B - XM|$. \square

例题 0.26 设 \mathbb{F} 为数域且 $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 证明同构

$$\text{Ker}(A + B - ACB) \cong \text{Ker}(A + B - BCA). \quad (13)$$

证明 证法一: 注意到初等变换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A + B - BCA \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & A + B - BCA \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -E & A \\ -E + BC & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E - AC & A \\ -E & B \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} AC - E & A \\ E & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & B \\ AC - E & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & B + A - ACB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B + A - ACB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是我们证明了 $\text{rank}(A + B - ACB) = \text{rank}(A + B - BCA)$, 这恰好由维数公式是(13).

证法二: 不妨设 $A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 否则用可逆矩阵 $P, Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, 然后用 PAQ 代替 A, PBQ 代替 $B, Q^{-1}CP^{-1}$ 代替 C . 我们对应分块

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_r & C_2 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} (A + B - ACB) &= E_n + \begin{pmatrix} E_r - C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 - E_{n-r} \end{pmatrix}, \\ (A + B - BCA) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ C_3 & E_{n-r} \end{pmatrix} &= E_n + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 - E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r - C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用可逆矩阵乘矩阵不改变矩阵的秩和推论??知 $\text{rank}(A+B-ACB) = \text{rank}(A+B-BCA)$, 这恰好由维数公式是(13).

□

例题 0.27 设 a_1, a_2, a_3 为满足 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ 的一组实数, b_1, b_2 为满足 $b_1^2 + b_2^2 = 1$ 的一组实数. 又设 M_1 为 5×3 矩阵, 其每一行都为 a_1, a_2, a_3 的一个排列; M_2 是 5×2 矩阵, 其每一行都为 b_1, b_2 的一个排列. 令 $M = (M_1, M_2)$, 它为 5×5 矩阵. 证明:

- (1) $(\text{tr} M)^2 \leq (5 + 2\sqrt{6}) \text{rank} M$;
- (2) M 必有绝对值小于或等于 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的实特征值 λ .

证明

- (1) 由 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, b_1^2 + b_2^2 = 1$ 知 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \leq 1$. 从而

$$(\text{tr} M)^2 \leq 5^2 = 25.$$

且有均值不等式可得

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq 3\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}} = \sqrt{3}, \quad b_1 + b_2 \leq 2\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} = \sqrt{2}. \quad (14)$$

当 $r(M) \geq 3$ 时, 就有

$$(\text{tr} M)^2 \leq 25 < (5 + 2\sqrt{6}) \cdot 3 \leq (5 + 2\sqrt{6}) r(M)$$

恒成立. 故只需考虑 $r(M) = 1, 2$ 的情形. 当 $r(M) = 1$ 时, 不妨设

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

则由(14)式可得

$$(\text{tr} M)^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2)^2 \leq (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{6}.$$

当 $r(M) = 2$ 时, 不妨设

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

其中 $a_3 = \max_{i=1,2,3} a_i, b_2 = \max_{i=1,2} b_i$. 否则, $\text{tr} M$ 都没有上述矩阵的迹大. 则

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_3 &\leq 3\sqrt{\frac{a_1^2 + 2a_3^2}{3}} = \sqrt{3}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_3^2 - a_2^2} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_3^2 - a_2^2} = \sqrt{3}\sqrt{1 + a_3^2 - a_2^2} \\ &\leq \sqrt{6}. \end{aligned}$$

于是

$$(\text{tr} M)^2 = (a_1 + 2a_3 + 2b_2)^2 \leq (\sqrt{6} + 2)^2 = (5 + 2\sqrt{6}) r(M).$$

综上, 我们有

$$(\text{tr} M)^2 \leq (5 + 2\sqrt{6}) r(M).$$

(2) 注意到

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 $(a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2)$ 是 M 的一个特征值, 并且由(14)式可得

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

□

例题 0.28 设 $A \in M_2(\mathbf{R})$ 是行列式为 d 的可逆矩阵, 且满足 $\det(A + dA^*) = 0$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵. 求 $\det(A - dA^*)$.

证明 设 $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$. 由 A 可逆知 $d = |A^*| = |A| = xw - yz \neq 0$. 从而

$$\begin{aligned} |A + dA^*| &= \begin{vmatrix} x + dw & (1-d)y \\ (1-d)z & w + dx \end{vmatrix} = (x + dw)(dx + w) - (1-d)^2 yz = 0 \\ &\iff (1+d^2)xw + d(x^2 + w^2) = (1-d)^2 yz \\ &\iff d(x^2 + w^2) = (1-d)^2 yz - (1+d^2)xw. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |A - dA^*| &= \begin{vmatrix} x - dw & (1+d)y \\ (1+d)z & w - dx \end{vmatrix} = (x - dw)(w - dx) - (1+d)^2 yz \\ &= (1+d^2)xw - d(x^2 + w^2) - (d^2 yz + 2dyz + yz) \\ &= (1+d^2)(xw - yz) - (1-d)^2 yz + (1+d^2)xw - 2dyz \\ &= (1+d^2)(xw - yz) + (1+d^2)(xw - yz) \\ &= 2(1+d^2)d. \end{aligned}$$

□


命题 0.3

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. 若 A, B 的极小多项式分别是

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2), f_B(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2),$$

证明 A, B 至少有一个维数 1 或者 2 的公共不变子空间.

◆

 **笔记 构造思路:** 我希望找到 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 使得线性方程组

$$\begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} x = 0 \quad (15)$$

有非零解 α . 从而 $\text{span}(\alpha, A\alpha)$ 就是 A 和 B 的一个维数为 1 或 2 的公共不变子空间. 而(15)式有非零解等价于

$$r \begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} < n. \text{ 故现在只需找到 } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ 使得 } r \begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} < n.$$

我们的想法是: 用第一行分块阵将第二行分块消掉, 因此需要第二行分块阵是第一行分块阵的倍数. 然后是第一行分块的秩小于 n , 即不满秩. 注意到取 $a = 1, b$ 为 $B - A$ 的特征值, 则 $|B - A - bE| = 0 \iff r(B - A - bE) < n$. 由条件可设 B 的极小多项式 $f_B(x) = x^2 + kx + r$. 由 Cayley-Hamilton 定理知 $B^2 + kB + rE = O \iff kB = -(1+r)E$. 于是待定 $c, d \in \mathbb{C}$, 使得

$$BA - cA - dE - (B - A - bE)A = k(B - A - bE) \iff (b - c)A + (1 - d)E = -(1 + r + kb)E - kA.$$

只要取 $c = kb + b + r + 1, d = k + 1$ 就有上式成立. 从而(15)式成立.

证明 由条件可设 $f_B(x) = x^2 + kx + r$, 则 $B^2 + kB + rE = O \iff kB = -(1+r)E$. 取 b 为 $B - A$ 的一个特征值, $c = kb + b + r + 1, d = k + 1$. 于是

$$BA - cA - dE - (B - A - bE)A = k(B - A - bE),$$

$|B - A - bE| = 0 \iff r(B - A - bE) < n$. 考虑如下分块矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - A - bE \\ k(B - A - bE) \end{pmatrix} \xrightarrow{-kr_1+r_2} \begin{pmatrix} B - A - bE \\ O \end{pmatrix}.$$

于是

$$r \begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B - A - bE \\ O \end{pmatrix} = r(B - A - bE) < n.$$

因此线性方程组

$$\begin{pmatrix} B - aA - bE \\ BA - cA - dE \end{pmatrix} x = 0$$

有非零解 α . 考虑 $\text{span}(\alpha, A\alpha)$. 显然 $\text{span}(\alpha, A\alpha)$ 是 A -不变子空间. 并且由上式可得

$$B\alpha = aA\alpha + b\alpha \in \text{span}(\alpha, A\alpha); \quad B(A\alpha) = cA\alpha + d\alpha \in \text{span}(\alpha, A\alpha).$$

所以 $\text{span}(\alpha, A\alpha)$ 也是 B -不变子空间. 又 $\text{span}(\alpha, A\alpha)$ 是由两个非零向量生成的, 故维数显然等于 1 或 2. □

例题 0.29 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, 其中 \mathcal{E} 为恒等变换. 证明:

- (1) 若 n 为奇数, 则 \mathcal{A}, \mathcal{B} 有公共的特征向量;
- (2) 若 n 为偶数, 则存在一子空间 W 同时是 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 的不变子空间, 且 $\dim W = 1$ 或 2.

证明

- (1) 由条件可知, \mathcal{A}, \mathcal{B} 适合 $x^2 - 1$. 显然 $x^2 - 1$ 无重根. 从而 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的极小多项式也无重根, 进而 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都可对角化, 并且特征值只可能有 ± 1 . 于是

$$V = V_1^{\mathcal{A}} \oplus V_{-1}^{\mathcal{A}} = V_1^{\mathcal{B}} \oplus V_{-1}^{\mathcal{B}},$$

其中 $V_1^{\mathcal{A}}, V_{-1}^{\mathcal{B}}$ 分别为 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的特征值 1 的特征子空间, $V_{-1}^{\mathcal{A}}, V_{-1}^{\mathcal{B}}$ 分别为 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的特征值 -1 的特征子空间. 从而

$$n = \dim \mathbb{C}^n = \dim V_1^{\mathcal{A}} + \dim V_{-1}^{\mathcal{A}} = \dim V_1^{\mathcal{B}} + \dim V_{-1}^{\mathcal{B}}.$$

又因为 n 为奇数, 所以存在 $i, j \in \{1, -1\}$, 使得

$$\dim V_i^{\mathcal{A}}, \dim V_j^{\mathcal{B}} > \frac{n}{2}.$$

因此由维数公式可得

$$\dim V_i^{\mathcal{A}} \cap V_j^{\mathcal{B}} = \dim V_i^{\mathcal{A}} + \dim V_j^{\mathcal{B}} - \dim (V_i^{\mathcal{A}} + V_j^{\mathcal{B}}) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - n = 0.$$

故 $V_i^{\mathcal{A}} \cap V_j^{\mathcal{B}} \neq \{0\}$. 任取 $\alpha \in V_i^{\mathcal{A}} \cap V_j^{\mathcal{B}}$, 则 α 就是 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的公共特征向量.

- (2) 当 \mathcal{A}, \mathcal{B} 中至少有一个为纯量变换时, 不妨设 \mathcal{A} 为纯量变换, 则全空间 \mathbb{C}^n 都是 \mathcal{A} -不变子空间. 任取 \mathcal{B} 的一个特征向量 α , 则 $\text{span}\{\alpha\}$ 就是 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的公共不变子空间, 且维数为 1.

当 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都不是纯量变换时, 则 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都不适合 $x \pm 1$, 故此时 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的极小多项式都是 $x^2 - 1$. 于是由命题 0.3 立得. □

例题 0.30 设 n 阶方阵 A, B 满足 $A^3 = O, B = (I + A)^3$ (I 为单位方阵), 求一多项式 $f(x)$, 使得 $f(B) = A$.

证明 由条件知

$$B = (I + A)^3 = I + 3A + 3A^2 \implies 3A^2 = B - 3A - I.$$

于是

$$\begin{aligned} B^2 &= (I + 3A + 3A^2)^2 = I + 6A + 15A^2 \\ &= I + 6A + 5(B - 3A - I) \\ &= 5B - 9A - 4I. \end{aligned}$$

从而

$$A = \frac{-B^2 + 5B - 4I}{9}.$$

故取 $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 4}{9}$ 即可.

□

例题 0.31 设 A, B 为 n 阶矩阵, A_i 为 A 的第 i 列, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 B 的特征值. 证明:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, BA_i, \dots, A_n) &= \det A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A_1, \dots, BA_i, \dots, BA_j, \dots, A_n) &= \det A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \det(A_1, \dots, BA_i, \dots, BA_j, \dots, BA_k, \dots, A_n) &= \det A \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \\ &\vdots \\ \det(BA_1, BA_2, \dots, BA_n) &= \det A \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

证明 设 B 的特征多项式为

$$f_B(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

其中

$$a_1 = -\sum_{i=1}^n \lambda_i, a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \dots, a_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

注意到

$$A(xI + B) = xA + BA = (xA_1 + BA_1, \dots, xA_n + BA_n),$$

并且

$$|A(xI + B)| = (-1)^n |A| \cdot |xI - B| = |A| \cdot (-1)^n f_B(-x) = |A| [x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n]. \quad (16)$$

又由行列式的基本性质, 按列拆分可得

$$|xA_1 + BA_1, \dots, xA_n + BA_n| = |A| [x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, BA_i, \dots, A_n) + \cdots + \det(BA_1, BA_2, \dots, BA_n)]. \quad (17)$$

比较(16)和(17)式各项系数即得结论.

□

例题 0.32 n 维欧氏空间 V 中 s 个向量 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, s$ 满足

$$\sum_{i=1}^s c_i \alpha_i = 0, c_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0.$$

证明: 存在 $\alpha \in V$, 使得 $(\alpha, \alpha_i) > 0, i = 1, 2, \dots, s$.

证明 考虑 $f(t_1, t_2, \dots, t_s) = \|t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 + \cdots + t_s \alpha_s\|_{\mathbb{R}^n}^2$ 是紧集

$$K = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s : \sum_{i=1}^s t_i = 1, t_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

上的连续函数, 故存在 $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_s^0) \in \mathbb{R}^s$ 使得 f 在 $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_s^0) \in \mathbb{R}^s$ 上达到 f 在 K 上的最小值. 因为条件, 我

们知道 f 在 K 上的最小值为正数. 下证 $\alpha = \sum_{i=1}^s t_i^0 \alpha_i \neq 0$ 为所求.

事实上, 对 $i = 1, 2, \dots, n$, 我们有

$$\|(1-t)\alpha + t\alpha_i\|^2 \geq \|\alpha\|^2, \forall t \in [0, 1].$$

展开计算就有

$$(t^2 - 2t)(\alpha, \alpha) + 2t(1-t)(\alpha, \alpha_i) + t^2(\alpha_i, \alpha_i) \geq 0, \forall t \in [0, 1],$$

即

$$(t-2)(\alpha, \alpha) + 2(1-t)(\alpha, \alpha_i) + t(\alpha_i, \alpha_i) \geq 0, \forall t \in [0, 1].$$

让 $t \rightarrow 0^+$ 就有

$$(\alpha, \alpha_i) \geq (\alpha, \alpha) > 0,$$

这就证明了 $(\alpha, \alpha_i) > 0, i = 1, 2, \dots, s$.

□

例题 0.33 设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$ 为 r 个互不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即 $\forall M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$). 证明

$$\sum_{i=1}^r W_i = O \text{ 当且仅当 } \sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0.$$

证明 必要性是显然的, 下证充分性. 首先, 对于可逆矩阵 $W_i \in \Gamma$, 有 $W_i W_1, \dots, W_i W_r$ 各不相同. 故有

$$W_i \Gamma \equiv \{W_i W_1, W_i W_2, \dots, W_i W_r\} = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$$

即 $W_i \Gamma = \Gamma, \forall W_i \in \Gamma$. 记 $S = \sum_{i=1}^r W_i$, 则 $W_i S = S, \forall W_i \in \Gamma$. 进而

$$S^2 = \sum_{i=1}^r W_i \sum_{j=1}^r W_j = \sum_{i=1}^r W_i S = \sum_{i=1}^r S = rS,$$

即 $S^2 - rS = 0$. 若 λ 为 S 的特征值, 则 $\lambda^2 - r\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$ 或 r . 结合条件 $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$ 知, S 的特征值只能为 0. 因此有 $S - rI$ 可逆. 再次注意到 $S(S - rI) = S^2 - rS = 0$, 此时右乘 $(S - rI)^{-1}$, 即得 $S = 0$. 证毕.

□

例题 0.34 设 $f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \dots + a_{in}x^n (i = 0, 1, \dots, n)$. 并且 $a_{ij} \in \mathbb{Z}, i, j = 0, 1, \dots, n$. 记 $A = (a_{ij})$ 是 $n+1$ 阶矩阵, 证明:

- (1) 对于任意的整数 k , 有 $(f_0(k), f_1(k), \dots, f_n(k)) \mid \det(A)$.
- (2) 存在 $n+1$ 阶整数矩阵 B 使得 $AB = I_{n+1}$ 的充要条件是存在 $n+1$ 个互不相同的整数 b_0, b_1, \dots, b_n 使得 $n+1$ 阶方阵 $(f_i(b_j))$ 使得 $|\det(f_i(b_j))| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$.

证明

- (1) 对 $\forall k \in \mathbb{Z}$, 设 $d = (f_0(k), \dots, f_n(k)), f_i(k) = c_i d$, 则 $c_i \in \mathbb{Z}$. 由行列式的基本性质可知

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_0(k) & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ f_1(k) & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(k) & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第一列展开}} \sum_{i=0}^n f_i(k) A_{i0} = d \sum_{i=0}^n c_i A_{i0},$$

其中 A_{ij} 表示 A 的 (i, j) 元的代数余子式. 因为 $A \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$, 所以 $A_{ij} \in \mathbb{Z}$. 又 $c_i \in \mathbb{Z}$, 故 $d \mid \det(A)$.

(2) 充分性: 注意到

$$\begin{aligned}\det(f_i(b_j)) &= \begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(b_0) & f_n(b_1) & \cdots & f_n(b_n) \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix} \\ &= |A| \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i),\end{aligned}$$

故由 $|\det(f_i(b_j))| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$ 知 $|A| = \pm 1$, 因此 A 可逆, 从而存在 A^{-1} 使得 $AA^{-1} = I_{n+1}$. 又因为

$A \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$, 所以 $A^* \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$, 故 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \pm A^* \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$. 因此取 $B = A^{-1}$, 则 $AB = I_{n+1}$ 且 $B \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$.

必要性: 由 $AB = I_{n+1}$ 且 $A, B \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}$ 知

$$|A||B| = 1 \implies |A| = \pm 1.$$

任取 $n+1$ 个互不相同的整数 b_0, b_1, \dots, b_n , 则

$$\begin{aligned}\det(f_i(b_j)) &= \begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(b_0) & f_n(b_1) & \cdots & f_n(b_n) \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix} \\ &= \pm \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).\end{aligned}$$

$$\text{故 } |\det(f_i(b_j))| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).$$

□

例题 0.35 设整数 $n \geq 2$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是对称的且满足

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$, 设 $A_k \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ 是 A 删去第 k 行第 k 列之后得到的子矩阵. 证明

$$\det A_k, k = 1, 2, \dots, n$$

是相等的.

注 回顾命题??.

证明 记 $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$, 则由条件知

$$A^T \alpha = O, \quad (18)$$

故 $|A| = |A^T| = 0$. 因此 $r(A) < n$. 若 $r(A) \leq n-2$, 则 $A^* = O$, 此时 $\det A_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$. 下设 $r(A) = n-1$. 此时 $\dim \ker A = 1$, 再结合(18)式知 $Ax = O$ 的解都形如 $k\alpha, k \in \mathbb{C}$. 又注意到

$$A \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = O, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

其中 A_{ij} 为 A 的 (i, j) 元的代数余子式. 故

$$\begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = k\alpha \implies A_{i1} = A_{i2} = \cdots = A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

又因为 A 是对称阵, 所以 A^* 也是对称阵, 再结合上式可知 A^* 的元素全相同. 因此 $\det A_k = A_{kk}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 都相等.

□

例题 0.36 设 Q 为 n 阶对称正定矩阵, P 为 m 阶实对称正定矩阵, B 为 $n \times m$ 实矩阵, 则

$$0 \leq |B^T(Q + BPB^T)^{-1}B| < \frac{1}{|P|}.$$

证明 由条件可知 $P = P^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}$, $Q = Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}$. 记 $A = (Q^{\frac{1}{2}})^{-1}BP^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq |B^T(Q + BPB^T)^{-1}B| < \frac{1}{|P|} \\ \iff 0 &\leq \left| P^{\frac{1}{2}} \left| B^T (Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}} + BP^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}B^T)^{-1}B \right| P^{\frac{1}{2}} \right| < 1 \\ \iff 0 &\leq \left| P^{\frac{1}{2}}B^T(Q^{\frac{1}{2}})^{-1} \left(I_n + (Q^{\frac{1}{2}})^{-1}BP^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}B^T(Q^{\frac{1}{2}})^{-1} \right)^{-1} (Q^{\frac{1}{2}})^{-1}BP^{\frac{1}{2}} \right| < 1 \\ \iff 0 &\leq \left| A^T(I_n + AA^T)^{-1}A \right| < 1. \end{aligned}$$

由降阶公式可得

$$\left| \lambda I_m - A^T(I_n + AA^T)^{-1}A \right| = \lambda^m \left| I_n - A(\lambda I_m)^{-1}A^T(I_n + AA^T)^{-1} \right| = \lambda^{m-n} \left| \lambda I_n - AA^T(I_n + AA^T)^{-1} \right|.$$

故 $A^T(I_n + AA^T)^{-1}A$ 的非零特征值与 $AA^T(I_n + AA^T)^{-1}$ 相同. 由命题??知 AA^T 是半正定阵, 任取 AA^T 的特征值 λ , 则 $\lambda \geq 0$. 再由矩阵的逆可以用其多项式表示以及命题??和命题??知 $AA^T(I_n + AA^T)^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} \in [0, 1).$$

因此 $A^T(I_n + AA^T)^{-1}A$ 的特征值也都属于 $[0, 1)$. 又因为矩阵行列式为其全体特征值乘积, 所以

$$0 \leq |A^T(I_n + AA^T)^{-1}A| < 1.$$

结论得证.

□

例题 0.37 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证:

- (1) 若 A 正定, 则对任意的 $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, 有 $0 \leq |B'(A + BB')^{-1}B| < 1$, 并且左边等号成立的充要条件是 $r(B) < m$;
- (2) 若 A 半正定, 则存在 $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, 使得 $A + BB'$ 正定且 $|B'(A + BB')^{-1}B| = 1$ 的充要条件是 $r(A) = n - m$.

证明

- (1) **证法一:** 因为 B 是实矩阵, 所以 BB' 半正定. 又 A 正定, 故 $A + BB'$ 也正定. 由命题??知存在可逆阵 C , 使得 $A + BB' = C'C$, 进而

$$B'(A + BB')^{-1}B = (CB')'CB,$$

其中 CB 是实矩阵. 故由命题??知 $B'(A + BB')^{-1}B$ 是半正定阵. 设 λ 为 $B'(A + BB')^{-1}B$ 的特征值, 则 $\lambda \geq 0$. 考虑如下正定矩阵的初等合同变换

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \xrightarrow{B \cdot r_2 + r_1, B' \cdot j_2 + j_1} \begin{pmatrix} A + BB' & B \\ B' & I_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -B'(A + BB')^{-1} \cdot r_1 + r_2 \\ -B'(A + BB')^{-1} \cdot j_1 + j_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} A + BB' & O \\ O & I_m - B'(A + BB')^{-1}B \end{pmatrix}$$

由命题知 $I_m - B'(A + BB')^{-1}B$ 也是正定阵. 于是 $I_m - B'(A + BB')^{-1}B$ 的特征值为

$$1 - \lambda > 0 \implies \lambda < 1.$$

因此 $\lambda \in [0, 1)$. 又因为矩阵的行列式等于全体特征值的乘积, 所以

$$0 \leq |B'(A + BB')^{-1}B| < 1.$$

由命题??知上式等号成立的充要条件是 $r(B) < m$.

证法二 (类似例题 0.36): 由 A 正定知 $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, 记 $C = (A^{\frac{1}{2}})^{-1}B$, 则

$$\begin{aligned} 0 \leq |B'(A + BB')^{-1}B| < 1 &\iff 0 \leq |B'(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + BB')^{-1}B| < 1 \\ &\iff 0 \leq |B'(A^{\frac{1}{2}})^{-1}(I_n + (A^{\frac{1}{2}})^{-1}BB'(A^{\frac{1}{2}})^{-1})^{-1}(A^{\frac{1}{2}})^{-1}B| < 1 \\ &\iff 0 \leq |C'(I_n + CC')^{-1}C| < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

由降阶公式可得

$$\begin{aligned} |\lambda I_m - C^T(I_n + CC')^{-1}C| &= \lambda^m |I_n - C(\lambda I_m)^{-1}C'(I_n + CC')^{-1}| \\ &= \lambda^{m-n} |\lambda I_n - CC'(I_n + CC')^{-1}|. \end{aligned}$$

故 $C^T(I_n + CC')^{-1}C$ 的非零特征值与 $CC'(I_n + CC')^{-1}$ 相同. 设 CC' 的特征值为 λ , 则由命题??知 CC' 半正定, 故 $\lambda \geq 0$. 再由矩阵的逆可以用其多项式表示以及命题??和命题??知 $CC'(I_n + CC')^{-1}$ 的特征值为

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} \in [0, 1).$$

因此 $C^T(I_n + CC')^{-1}C$ 的特征值也都属于 $[0, 1)$. 又因为矩阵的行列式等于其全体特征值的乘积, 所以

$$0 \leq |C'(I_n + CC')^{-1}C| < 1.$$

由(19)式知

$$0 \leq |B'(A + BB')^{-1}B| < 1.$$

又由 A 正定和命题??知 $A + BB'$ 也正定, 故由命题??知上式等号成立的充要条件是 $r(B) < m$.

(2) 必要性: 由于 $A + BB'$ 正定, 故由命题??知存在可逆阵 C , 使得 $A + BB' = C'C$, 进而

$$B'(A + BB')^{-1}B = (CB)'CB,$$

其中 CB 是实矩阵. 故由命题??知 $B'(A + BB')^{-1}B$ 是半正定阵. 设 λ 为 $B'(A + BB')^{-1}B$ 的特征值, 则 $\lambda \geq 0$. 考虑如下半正定矩阵的初等合同变换

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \xrightarrow{B \cdot r_2 + r_1 \atop B' \cdot j_2 + j_1} \begin{pmatrix} A + BB' & B \\ B' & I_m \end{pmatrix} \xrightarrow{-B'(A + BB')^{-1} \cdot r_1 + r_2 \atop -B'(A + BB')^{-1} \cdot j_1 + j_2} \begin{pmatrix} A + BB' & O \\ O & I_m - B'(A + BB')^{-1}B \end{pmatrix}. \quad (20)$$

由命题知 $I_m - B'(A + BB')^{-1}B$ 也是半正定阵. 于是 $I_m - B'(A + BB')^{-1}B$ 的特征值为

$$1 - \lambda \geq 0 \implies \lambda \leq 1.$$

因此 $\lambda \in [0, 1]$. 又因为 $|B'(A + BB')^{-1}B| = 1$, 所以 $\lambda = 1$, 即 $B'(A + BB')^{-1}B$ 的特征值全为 1. 又由 $B'(A + BB')^{-1}B$ 是半正定阵知, $B'(A + BB')^{-1}B$ 可对角化, 故 $B'(A + BB')^{-1}B = I_m$. 再利用(20)式和 $A + BB'$ 正定知

$$r(A) + m = r(A + BB') = n \implies r(A) = n - m.$$

充分性: 由 $r(A) = n - m$ 和 A 半正定知, 存在 n 阶正交矩阵 C , 使得

$$A = C \begin{pmatrix} I_{n-m} & O \\ O & O \end{pmatrix} C'.$$

取 $B = C \begin{pmatrix} O \\ I_m \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, 则

$$A + BB' = C \begin{pmatrix} I_{n-m} & O \\ O & O \end{pmatrix} C' + C \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_m \end{pmatrix} C' = CC',$$

从而由命题??知 $A + BB'$ 正定. 并且

$$\begin{aligned} |B'(A + BB')^{-1}B| &= \left| (O \quad I_m) C' (CC')^{-1} C \begin{pmatrix} O \\ I_m \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| (O \quad I_m) \begin{pmatrix} O \\ I_m \end{pmatrix} \right| = |I_m| = 1. \end{aligned}$$

□

例题 0.38 对于二阶矩阵 $A, B_1, B_2, B_3, B_4, A \neq O$, 若

$$\det(A + B_i) = \det(A) + \det(B_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

证明: 矩阵 B_1, B_2, B_3, B_4 线性相关.

证明 设 V 是由全体 4 阶矩阵构成的线性空间. 反证, 假设 B_1, B_2, B_3, B_4 线性无关, 则其构成 V 的一组基. 从而存在一组不全为 0 的数 c_1, c_2, c_3, c_4 , 使得

$$A = c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 + c_4 B_4.$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} b_1^i & b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

则

$$a_j = \sum_{i=1}^4 c_i b_j^i, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

根据条件, 将行列式按列拆分可得

$$|A + B_i| = \begin{vmatrix} a_1 + b_1^i & a_2 + b_2^i \\ a_3 + b_3^i & a_4 + b_4^i \end{vmatrix} = |A| + |B_i| + \begin{vmatrix} a_1 & b_2^i \\ a_3 & b_4^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^i & a_2 \\ b_3^i & a_4 \end{vmatrix} = |A| + |B_i|.$$

进而

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2^i \\ a_3 & b_4^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^i & a_2 \\ b_3^i & a_4 \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

于是

$$0 = \sum_{i=1}^4 c_i \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2^i \\ a_3 & b_4^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^i & a_2 \\ b_3^i & a_4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & \sum_{i=1}^4 c_i b_2^i \\ a_3 & \sum_{i=1}^4 c_i b_4^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 c_i b_1^i & a_2 \\ \sum_{i=1}^4 c_i b_3^i & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2|A|.$$

故 $|A| = 0$. 又因为 $A \neq O$, 所以 $r(A) = 1$. 因此 A 的 0 特征值的几何重数为 1, 故 A 的 Jordan 标准型只有两种, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意条件和结论在同一个相似变换下保持不变, 故可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 时, 由条件可得

$$|A + B_i| = |A| + |B_i| = |B_i| \iff \begin{vmatrix} 1+b_1^i & b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^i & b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} 1 & b_2^i \\ 0 & b_4^i \end{vmatrix} = 0 \iff b_4^i = 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

从而 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 就不可能由 B_1, B_2, B_3, B_4 线性表出, 但 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$, 这与 B_1, B_2, B_3, B_4 是 V 的一组基矛盾! (ii) 当 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 时, 由条件可得

$$|A + B_i| = |A| + |B_i| = |B_i| \iff \begin{vmatrix} b_1^i & 1+b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^i & b_2^i \\ b_3^i & b_4^i \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} b_1^i & 1 \\ b_3^i & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff b_3^i = 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

从而 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 就不可能由 B_1, B_2, B_3, B_4 线性表出, 但 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V$, 这与 B_1, B_2, B_3, B_4 是 V 的一组基矛盾!

□

例题 0.39 设 α, β, γ 是欧氏空间 \mathbb{R}^n 中三个非零向量, 已知它们两两正交. 记矩阵 $A = \alpha\beta' + \beta\gamma' + \gamma\alpha'$.

- (1) 证明: $\text{rank}(A) = 3$.
- (2) A 是否可以相似对角化? 请证明你的结论.

证明

- (1) 记 $B = (\alpha, \beta, \gamma)$, 则由条件可知 $r(B) = 3$. 由 Sylvester 不等式知

$$3 = r(B) \geq r(A) = r(BB^T) \geq r(B) + r(B^T) - 3 = 3.$$

故 $r(A) = 3$.

- (2) 注意到

$$A\alpha = |\alpha|^2\gamma, \quad A\beta = |\beta|^2\alpha, \quad A\gamma = |\gamma|^2\beta.$$

将 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 扩充为 \mathbb{R}^n 的一组基 \mathcal{H} , 设 A 在基 \mathcal{H} 下的表示阵为

$$\begin{pmatrix} M & N \\ O & P \end{pmatrix},$$

其中 $M = \begin{pmatrix} 0 & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\gamma|^2 \\ |\alpha|^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 显然 M 可逆, 从而可做实数域上的分块初等变换得

$$\begin{pmatrix} M & N \\ O & P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M & O \\ O & P \end{pmatrix}.$$

又由 (1) 知 $r(A) = 3$, 因此

$$3 = r(A) = r \begin{pmatrix} M & O \\ O & P \end{pmatrix} = r(M) + r(P) = 3 + r(P) \implies P = O.$$

故 A 在实数域上相似于

$$\begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

注意到 M 的特征多项式为 $\lambda^3 - |\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2$, 从而 M 有三个互不相同的特征值, 其中两个为复数. 故 M 在复数域上可对角化, 在实数域上不可对角化. 因此 A 在复数域上可对角化, 但在实数域上不可对角化.

□

命题 0.4

设 A 为 n 阶奇异阵, 且 $r(A) = r(A^2)$, 则存在可逆阵 M , 使得

$$A \sim \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

◆

证明 设 A 的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k) \\ & & & J_{r_0}(0) \end{pmatrix},$$

其中 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 表示属于特征值 λ_i 的 r_i 阶根子空间块. 因为 A 不可逆, 所以 $r_0 > 0$. 从而

$$A^2 \sim J^2 = \begin{pmatrix} J_{r_1}^2(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}^2(\lambda_k) \\ & & & J_{r_0}^2(0) \end{pmatrix}.$$

注意到

$$r(A) = r(J) = r(J_{r_0}(0)) + \sum_{i=1}^k r(J_{r_i}(\lambda_i)),$$

$$r(A^2) = r(J^2) = r(J_{r_0}^2(0)) + \sum_{i=1}^k r(J_{r_i}^2(\lambda_i)).$$

若 $J_{r_0}(0) \neq O$, 则 $r(J_{r_0}^2(0)) < r(J_{r_0}(0))$. 从而 $r(A^2) < r(A)$ 矛盾! 故 $J_{r_0}(0) = O$. 记

$$M = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

于是

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k) \\ & & & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

□

例题 0.40 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $r(A) = r(B)$, 证明: $A^2B = A$ 的充要条件是 $B^2A = B$.

证明 当 A 或 B 可逆时, 结论显然成立. 下设 A, B 均不可逆.

必要性: 注意到

$$r(A^2) \leq r(A) = r(A^2B) \leq r(A^2),$$

故 $r(A) = r(A^2)$. 因此由命题 0.4 可知, 存在可逆阵 M , 使得

$$A \sim \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因为条件和结论在相似变换下不变, 所以不妨设

$$A = \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

由 $A^2B = A$ 可得

$$\begin{pmatrix} M^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} M(MB_1 - I) & M^2B_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

再结合 M 可逆知 $B_2 = O, B_1 = M^{-1}$, 故 $B = \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned} B^2A = B &\iff \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} O & O \\ B_4B_3M & -B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &\iff B_4 = O. \end{aligned} \quad (21)$$

又 $r(A) = r(B)$, 故由矩阵秩的基本公式知

$$r(A) = r(B) = r\left(\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\right) \geq r(M^{-1}) + r(B_4) = r(A) + r(B_4).$$

从而 $r(B_4) = 0$, 进而 $B_4 = O$. 再由 (21) 知必要性成立.

充分性: 注意到

$$r(B^2) \leq r(B) = r(B^2A) \leq r(B^2),$$

故 $r(B) = r(B^2)$. 因此由命题 0.4 可知, 存在可逆阵 M , 使得

$$B \sim \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因为条件和结论在相似变换下不变, 所以不妨设

$$B = \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

由 $B^2A = B$ 可得

$$\begin{pmatrix} M^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} M(MA_1 - I) & M^2A_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

再结合 M 可逆知 $A_2 = O, A_1 = M^{-1}$, 故 $A = \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$. 于是


$$\begin{aligned} A^2B = A &\iff \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} M & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} O & O \\ A_4A_3M & -A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &\iff A_4 = O. \end{aligned} \quad (22)$$

又 $r(A) = r(B)$, 故由矩阵秩的基本公式知

$$r(A) = r(B) = r\left(\begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\right) \geq r(M^{-1}) + r(A_4) = r(A) + r(A_4).$$

从而 $r(A_4) = 0$, 进而 $A_4 = O$. 再由 (22) 知充分性成立. □

例题 0.41 证明: 一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 且符号差为 0, 或者它的秩等于 1.

 **笔记** 根据必要性条件, 不能直接由 $X^TAX = (X^T\alpha)(\beta^TX) = X^T(\alpha\beta^T)X$ 推出 $A = \alpha\beta^T$, 因为 $\alpha\beta^T$ 不一定是对称阵.

不过我们可以根据多项式的可交换性, 将右式中矩阵转变成对称阵, 具体操作见下述必要性证明.

本题关键就是注意到必要性条件等价于

$$A = \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2}.$$

然后验证即可.

证明 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

充分性: 若 $r(A) = 1$, 则存在非零实向量 α, β , 使得

$$A = \alpha\beta^T \implies X^T A X = X^T (\alpha\beta^T) X = (X^T \alpha)(\beta^T X).$$

若 $r(A) = 2$ 且 A 的符号差为 0, 注意到条件和结论在相似变换下不改变, 故不妨设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

此时

$$X^T A X = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

必要性: 设 $0 \neq \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 且满足 $X^T A X = (X^T \alpha)(\beta^T X)$, 则

$$X^T A X = (X^T \alpha)(\beta^T X) = X^T (\alpha\beta^T) X,$$

$$X^T A X = (X^T \beta)(\alpha^T X) = X^T (\beta\alpha^T) X,$$

故

$$X^T A X = \frac{X^T A X + X^T A X}{2} = \frac{X^T (\alpha\beta^T) X + X^T (\beta\alpha^T) X}{2} = X^T \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2} X.$$

注意到 $\frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2}$ 是实对称阵, 故由上式可得

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是由降阶公式可得

$$\begin{aligned} |\lambda I_n - A| &= \lambda^{n-2} \left| \lambda I_2 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \right| = \lambda^{n-2} \left| \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{2} & -\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{2} \\ \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{2} & \lambda - \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{2} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{4} \lambda^{n-2} \left(4\lambda^2 - 4\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \right). \end{aligned}$$

当 α 与 β 线性相关时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

于是

$$|\lambda I_n - A| = \lambda^{n-2} \left(\lambda^2 - \lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) = \lambda^{n-1} \left(\lambda - \sum_{i=1}^n a_i b_i \right).$$

注意到 $\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq 0$, 否则 $(\alpha, \beta) = 0$, 即 α, β 正交, 因此 α 与 β 线性无关, 矛盾! 故此时 A 只有一个非零特征值, 从而 $r(A) = 1$.

当 α 与 β 线性无关时, 同理由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

于是

$$|\lambda I_n - A| = \frac{1}{4} \lambda^{n-2} \left(4\lambda^2 - 4\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \right).$$

此时 A 必有两个特征值 λ_1, λ_2 满足

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}{4} < 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \text{ 且异号}.$$

故 A 只有两个异号的非零特征值. 又 A 是实对称阵, 故 A 必可对角化, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

此时 $r(A) = 2$ 且 A 的符号差为 0.

□

例题 0.42 已知 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 是有限维线性空间上的三个线性变换, 证明: $\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{A}$ 核空间是同构的.

证明 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 都是 n 维线性空间上的线性变换, 并且在同一组基下的表示矩阵分别为 A, B, C . 注意到

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ E - AC & A \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1 \cdot B + j_2} \begin{pmatrix} E & O \\ E - AC & A + B - ACB \end{pmatrix} \xrightarrow{-(E-AC) \cdot r_1 + r_2} \begin{pmatrix} E & O \\ O & A + B - ACB \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ E - AC & A \end{pmatrix} \xrightarrow{j_2 \cdot C + j_1} \begin{pmatrix} E - BC & -B \\ E & A \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1 \cdot (-A) + j_2} \begin{pmatrix} E - BC & -A - B + BCA \\ E & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-(E-BC) \cdot r_2 + r_1 \\ (-1) \cdot j_2}} \begin{pmatrix} O & A + B - BCA \\ E & O \end{pmatrix}.$$

故

$$r \begin{pmatrix} E & -B \\ E - AC & A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} E & O \\ O & A + B - ACB \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & A + B - BCA \\ E & O \end{pmatrix},$$

进而

$$r(A + B - ACB) = r(A + B - BCA) \iff \dim \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}) = \dim \text{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{A}).$$

□

例题 0.43 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, E 为单位矩阵. 求证 $A^4 = E$ 当且仅当 $\text{rank}(E - A) + \text{rank}(E + A + A^2 + A^3) = n$.

证明 注意到 $x-1$ 和 $1+x+x^2+x^3$ 在 \mathbb{R} 上互素, 故存在 $f, g \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$(x-1)f(x) + g(x)(1+x+x^2+x^3) = 1.$$

于是对如下分块矩阵做初等分块变换得

$$\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[j_1 \cdot f(A)+j_2]{g(A) \cdot r_2+r_1} \begin{pmatrix} E-A & E \\ O & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{j_2 \cdot (-E+A)+j_1} \begin{pmatrix} O & E \\ A^4-E & E+A+A^2+A^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[j_1 \longleftrightarrow j_2]{-(E+A+A^2+A^3) \cdot r_1+r_2} \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 $\text{rank}(E-A) + \text{rank}(E+A+A^2+A^3) = n$.

□

例题 0.44 设 2025 阶方阵 A 的对角线元素都是 0, 其它元素均为 1 或 -1, 已知 A 的每一行所有元素相加都是 0. 请判断 A 的秩, 并说明理由.

证明 首先注意到

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies |A| = 0 \implies r(A) < 2025.$$

在 \mathbb{Z}_2 上考虑, 则 A 的 $(2, 1)$ 元的余子式为

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = -1 = 1.$$

故 $A_{21} \equiv 1 \pmod{2}$. 因此 $A_{21} \neq 0$, 即 A 存在一个 2024 阶满秩子阵. 故 $r(A) = 2024$.

□

例题 0.45 设 A 为 $n(n \geq 3)$ 阶实可逆矩阵, 且 A^k 相似于 A 对 $k = 1, 2, \dots, n! - 1, n!$ 成立, 证明: 对一切正整数 k 皆有 A^k 相似于 A .

证明 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个互异的特征值, 则 A^k 的全体特征值为

$$\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k, \quad k = 1, 2, \dots, n!.$$

因为 $A^k \sim A$, 所以 $\lambda_i^k (k = 1, 2, \dots, n!)$ 都是 A 的特征值, 进而

$$\lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{s+1}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

都是 A 的特征值. 但 A 只有 s 个互异的特征值, 故存在 $1 \leq q_i < p_i \leq s+1$, 使得

$$\lambda_i^{p_i} = \lambda_i^{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

由 A 可逆知 $\lambda_i \neq 0$, 故记 $m_i = p_i - q_i \in [1, s] \cap \mathbb{N}$, 则

$$\lambda_i^{m_i} = \lambda_i^{p_i - q_i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

再记 $m = [m_1, \dots, m_s]$ (最小公倍数), 则 $m \in [1, s!] \cap \mathbb{N}$, 并且

$$\lambda_i^m = 1, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

因此 A^m 的特征值全为 1. 又因为 $m \in [1, s!] \cap \mathbb{N}$, 所以 $m \in [1, n!] \cap \mathbb{N}$. 于是由条件知 $A^m \sim A$, 故 A 的特征值也全

为 1. 从而可设

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(1) & & \\ & J_{r_2}(1) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{r_l}(1) \end{pmatrix},$$

$$J_{r_i}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

于是对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$A^k \sim J^k = \begin{pmatrix} J_{r_1}^k(1) & & \\ & J_{r_2}^k(1) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{r_l}^k(1) \end{pmatrix},$$

$$J_{r_i}^k(1) = \begin{pmatrix} 1 & k & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

故只需证 $J_{r_i}(1) \sim J_{r_i}^k(1), i = 1, 2, \dots, l$.

注意到 $\lambda I - J_{r_i}^k(1)$ 的 r_i 阶行列式因子为 $(\lambda - 1)^{r_i}$, $\lambda I - J_{r_i}^k(1)$ 的前 $n-1$ 行, 后 $n-1$ 列构成的子式为 k^{r_i-1} , 故 $\lambda I - J_{r_i}^k(1)$ 的 r_i-1 阶行列式因子为 1, 进而 $\lambda I - J_{r_i}^k(1)$ 的行列式因子组为 $1, \dots, 1, (\lambda - 1)^{r_i}$, 因此 $\lambda I - J_{r_i}^k(1)$ 的不变因子组也为 $1, \dots, 1, (\lambda - 1)^{r_i}$. 而 $\lambda I - J_{r_i}(1)$ 的不变因子组也为 $1, \dots, 1, (\lambda - 1)^{r_i}$. 故 $J_{r_i}(1) \sim J_{r_i}^k(1)$. □

例题 0.46 设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx (x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

证明 由条件及降秩公式可知

$$r(I - A^{-1}B) = r(A - B) = 2020 - 3 = 2017.$$

因此 $A^{-1}B$ 的特征值 1 的几何重数为 3. 由 A, B 为正交阵知 $A^{-1}B$ 也是正交矩阵, 进而也是复正规矩阵, 从而 $A^{-1}B$ 酉相似于对角矩阵. 故 $A^{-1}B$ 的特征值的几何重数与代数重数相等. 由定理??知 $A^{-1}B$ 的实特征值只有 ± 1 , 复特征值的模长都为 1, 又因为复特征值成对出现, 所以 $A^{-1}B$ 的特征值 -1 的代数重数必是奇数. 由于矩阵行列式等于其所有特征值的乘积, 故

$$|A||B| = |A^{-1}B| = -1 \implies |A| \neq |B|.$$

因此 A, B 不可能相似. □

例题 0.47 称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k , 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

证明 设 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 其中 $n = 2020$. 则由条件可知, 对 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都存在 $g_k, h_k \in \mathbb{C}[x]$, 使得

$$f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x).$$

对 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 不妨设

$$g_k(x) = \prod_{r=1}^s (x - x_{i_r}), \quad h_k(x) = \prod_{r=1}^l (x - x_{j_r}),$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_{s_k}, j_1, j_2, \dots, j_{l_k} \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ 且 $l_k + s_k = n - 1$. 由于 g_k, h_k 的第二项系数相同, 再由 Vieta 定理可得关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组如下

$$\sum_{r=1}^{s_k} x_{i_r} = \sum_{r=1}^{l_k} x_{j_r} \implies \sum_{r=1}^{s_k} x_{i_r} - \sum_{r=1}^{l_k} x_{j_r} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (23)$$

上述线性方程组的系数矩阵 A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ij} \in \{-1, 1\}, i \neq j$. 把 A 视为 \mathbb{Z}_2 上的矩阵, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2019 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = 2019 = 1.$$

故 $|A| \equiv 1 \pmod{2}$, 因此 $|A|$ 为奇数, 从而 $|A| \neq 0$. 于是线性方程组(23)只有零解, 即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. 故 $f(x) = x^{2020}$.

□

例题 0.48 已知 A, B 分别为 $n \times r, r \times n$ 矩阵, 其中 $r < n$, 记 $AB = C, BA = D$, 若 $r(C) = r$, 证明

$$m_1(x) = xm_2(x).$$

其中 $m_1(x), m_2(x)$ 分别为 C, D 的最小多项式.

证明 **证法一:** 由 $r(AB) = r$ 且 A 为 $n \times r$ 矩阵, B 为 $r \times n$ 矩阵知

$$r = r(AB) \leq r(A), \quad r(B) \leq r \implies r(A) = r(B) = r.$$

故 A 为列满秩矩阵, B 为行满秩矩阵. 从而存在 $r \times n$ 行满秩矩阵 P 和 $n \times r$ 列满秩矩阵 Q , 使得

$$PA = BQ = I_r.$$

由 Sylvester 不等式和矩阵秩基本不等式知

$$r = r(B) + r(A) - r \leq r(BA) \leq r(A) = r \implies r(BA) = r.$$

于是对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有

$$AB(AB)^k = ABA(AB)^{k-1}B = A(BA)^k B,$$

$$(BA)^k = PA(BA)^k BQ = PAB(AB)^k Q.$$

故

$$ABm_2(AB) = Am_2(BA)B = 0,$$

$$m_1(BA) = PABm_1(AB)Q = 0.$$

因此 $xm_2(x)$ 是 AB 的零化多项式, $m_1(x)$ 是 BA 的零化多项式. 从而

$$m_1(x) \mid xm_2(x), \quad m_2(x) \mid m_1(x).$$

又 $m_1(x), m_2(x)$ 都是首一多项式, 故存在首一多项式 $p(x), q(x)$, 使得

$$xm_2(x) = p(x)m_1(x), \quad m_2(x) = q(x)m_1(x). \quad (24)$$

进而

$$xm_2(x) = p(x)m_1(x) = p(x)q(x)m_1(x) \implies (x - p(x)q(x))m_1(x) = 0.$$

又 $m_1(x) \neq 0$, 故 $x = p(x)q(x)$. 再结合 $p(x), q(x)$ 都首一知

$$\text{要么 } p(x) = 1, q(x) = x, \text{ 要么 } p(x) = x, q(x) = 1.$$

若 $p(x) = x, q(x) = 1$. 则由(24)式知 $m_1(x) = m_2(x)$. 但是, 因为 $r(AB) = r < n, r(BA) = r$, 所以 AB 不可逆, BA 可逆. 因此 0 是 AB 的特征值, 不是 BA 的特征值. 故 $m_1(0) = 0 \neq m_2(0)$, 这与 $m_1(x) = m_2(x)$ 矛盾! 因此 $p(x) = 1, q(x) = x$. 再由(24)式可知 $m_1(x) = xm_2(x)$.

证法二: 由 $r(AB) = r$ 且 A 为 $n \times r$ 矩阵, B 为 $r \times n$ 矩阵知

$$r = r(AB) \leq r(A), \quad r(B) \leq r \implies r(A) = r(B) = r.$$

故 A 为列满秩矩阵, B 为行满秩矩阵. 从而存在 $r \times n$ 行满秩矩阵 P 和 $n \times r$ 列满秩矩阵 Q , 使得

$$PA = BQ = I_r. \quad (25)$$

不妨设

$$AB \sim \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_{r_1}(0) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{r_s}(0) \end{pmatrix}, \quad BA \sim \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & J_{t_1}(0) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{t_l}(0) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

其中 J_1, J_2 分别为 AB, BA 的所有非零特征值的 Jordan 块构成的分块对角阵, r_s, t_l 分别为 AB, BA 的 0 特征值的 Jordan 块中最大块的阶数. 由降阶公式知

$$|\lambda I - AB| = \lambda^{n-r} |\lambda I - BA|.$$

从而 AB, BA 的非零特征值的代数重数相同. 于是 J_1, J_2 的阶数相同, 都记为 k . 由(25)(26)式可得

$$k = r((AB)^{r_s}) = r(A(BA)^{r_s-1}B) \leq r((BA)^{r_s-1}),$$

$$k = r((BA)^{t_l}) = r(PA(BA)^{t_l}BQ) \leq r(A(BA)^{t_l}B) = r((AB)^{t_l+1}).$$

因此

$$k \leq r((BA)^{r_s-1}) \implies r_s - 1 \geq t_l \implies r_s - t_l \geq 1,$$

$$k \leq r((AB)^{t_l+1}) \implies t_l + 1 \geq r_s \implies r_s - t_l \leq 1.$$

故 $r_s - t_l = 1$. 由命题??知, r_s, t_l 分别为 $m_1(x), m_2(x)$ 中 x 的幂次. 又由定理??知 AB, BA 非零 Jordan 块相同, 故再由命题??知 $m_1(x), m_2(x)$ 的因子除 x 外全相同. 因此 $m_1(x) = xm_2(x)$. □

例题 0.49 给定 n 阶实矩阵 A , 设 $A^T A$ 的特征值是 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$, 且

$$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0,$$

证明

$$|E_n - A| \geq (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_n).$$

证明

□

例题 0.50

证明



例题 0.51

证明



例题 0.52

证明



例题 0.53

证明



例题 0.54

证明

