

0.1 逼近方法

0.1.1 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在 $[a, b]$ 上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设 $[a, b] = [0, 1]$.

定义 0.1 (一维 Bernstein 多项式)

设 $f \in C[0, 1], n \in \mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

设 $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$, 定义 f 的 **Bernstein 多项式** 为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$



注 $[a, b]$ 区间上的 Bernstein 多项式可由 $[0, 1]$ 区间上的 Bernstein 多项式换元得到.

设 $f \in C[a, b], n \in \mathbb{N}_0$, 令 $x = (b-a)y + a, \forall x \in [a, b]$, 则 $y \in [0, 1]$, 并且

$$y = \frac{x-a}{b-a}, 1-y = \frac{b-x}{b-a}.$$

再令 $g(y) = f((b-a)y + a)$, 则由 $f \in C[a, b]$ 可知 $g \in C[0, 1]$. 于是 g 在 $[0, 1]$ 区间上的 Bernstein 多项式为

$$B_n(g, y) \triangleq \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k y^k (1-y)^{n-k}.$$

故 $[a, b]$ 区间上 f 的 Bernstein 多项式可定义为

$$B_n(f, x) \triangleq \sum_{k=0}^n f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

引理 0.1

1. $B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C.$
2. $B_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x.$
3. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0.$
4. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$



证明

1. 由二项式定理可得 $B_n(C, x) = C \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C(x+1-x)^n = C.$
2. $B_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$ 由幂级数可逐项求导得

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k\right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k = n y (1+y)^{n-1}.$$

故

$$\begin{aligned} B_n(x, x) &= \frac{(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left(1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-1} \\ &= \frac{(1-x)^n}{n} \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n-1} = x. \end{aligned}$$

3. 由 2 的结论可直接得到.

4. 首先, 展开得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= (1-x)^n \sum_{k=0}^n \left(x^2 - \frac{2xk}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k. \end{aligned} \quad (1)$$

接着, 计算 $\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k$ 和 $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k$. 由幂级数可逐项求导得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k C_n^k y^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k \right)' = [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}. \\ \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k y^k &= y \left[\left(\sum_{k=0}^n k C_n^k y^k \right)' \right] = y \left[\left(y \left(\sum_{k=0}^n C_n^k y^k \right)' \right)' \right] \\ &= y [(y((1+y)^n)')'] = y [(ny(1+y)^{n-1})'] \\ &= y [n(1+y)^{n-1} + n(n-1)y(1+y)^{n-2}] \\ &= ny(1+y)^{n-2} [(1+y) + (n-1)y] \\ &= ny(1+y)^{n-2} (ny+1). \end{aligned}$$

令 $y = \frac{x}{1-x}$, 则由上式可得

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = n \left(\frac{x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-1} = \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n-1} = \frac{nx}{(1-x)^n}.$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = n \left(\frac{x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{x}{1-x} \right)^{n-2} \left(\frac{nx}{1-x} + 1 \right) = \frac{nx}{1-x} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n-2} \frac{(n-1)x+1}{1-x} = \frac{nx[(n-1)x+1]}{(1-x)^n}.$$

将上式代入(1)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k + \frac{(1-x)^n}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \\ &= x^2 - \frac{2x(1-x)^n}{n} \cdot \frac{nx}{(1-x)^n} + \frac{(1-x)^n}{n^2} \cdot \frac{nx[(n-1)x+1]}{(1-x)^n} \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2+x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

□

定理 0.1 (Bernstein 多项式的性质)

(1) 设 $\varphi(x) = n \left[f \left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n} \right) - f \left(\frac{n-1}{n}x \right) \right]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 则有

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x), n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(2) 若 f 递增或者递减, 则 $B_n(f, x), n \in \mathbb{N}_0$ 也递增或者递减.

(3) 若 f 是 $[0, 1]$ 的凸或者凹函数, 则对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 都有 $B_n(f, x)$ 是 $[0, 1]$ 的凸或者凹函数.

(4) 设 $f \in C^k[0, 1], k \in \mathbb{N}_0$, 则关于 $x \in [0, 1]$, 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} B'_n(f, x) = f'(x), \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x). \quad (3)$$



注 性质 (4) 对任意光滑的情况并不成立!

即当 $f \in C^\infty[0, 1]$ 时, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(f, x) = f^{(k)}(x)$ 不成立!

也即当 $f \in C^\infty[0, 1]$ 时, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在一个 N (与 k 无关, 公共的 N), 使得 $\forall n > N$, 都有 $B_n^{(k)}(f, x) \not\Rightarrow f^{(k)}(x)$ 不成立!

证明

(1) 对 $n \geq 1$, 直接计算得

$$\begin{aligned} B'_n(f, x) &= \left[\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right]' \\ &= \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[n f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} - n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= B_{n-1}(\varphi, x), \end{aligned}$$

这就给出了式(2).

(2) 如果 f 递增, 那么就有 $\varphi \geq 0$, 则由(2)知 $B'_n(f, x) = B_{n-1}(\varphi, x) \geq 0$, 故 $B_n(f, x)$ 递增. 类似可得递减.

(3) 如果 f 下凸, 对 $n=1$ 的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设 $n \geq 2$. 注意继续由(2)知

$$B''_n(f, x) = B'_{n-1}(\varphi, x) = B_{n-2}(\psi, x), \psi(x) = (n-1) \left[\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right) \right],$$

从而由 f 的下凸性可得

$$\begin{aligned} B_{n-2}(\psi, x) &= \sum_{j=0}^{n-2} \psi\left(\frac{j}{n-2}\right) C_{n-2}^j x^j (1-x)^{n-2-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right) - \varphi\left(\frac{j}{n-1}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{j+2}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{j+1}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&= 2n \sum_{j=0}^{n-2} \left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right) + f\left(\frac{j}{n}\right)}{2} - f\left(\frac{\frac{j+2}{n} + \frac{j}{n}}{2}\right) \right] \frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!} (1-x)^{n-2-j} x^j \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

这就证明了 $B_n(f, x)$ 下凸. 类似的可讨论上凸情况.

(4) **Step1** 我们证明 $k=0$ 时命题成立. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x-y| \leq \delta$, 就有

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
|B_n(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta} \left| \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \left| \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2 \sup |f| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{\text{类似 Chebeshev 不等式的证明}}{\leq} \varepsilon \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\stackrel{\text{引理 0.1}}{=} \varepsilon + \frac{2 \sup |f|}{n \delta^2} x(1-x),
\end{aligned}$$

于是从上式立得

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\sup |f|}{2n\delta^2}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f, x) - f(x)| = 0.$$

故我们得到了 $k=0$ 时, 式(3)成立.

Step2 (*) 我们定义

$$T_n f(x) = n \left[f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right], n \in \mathbb{N}.$$

$$B'_n(f, x) = B_{n-1}(T_n f, x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1} \cdots T_n f(x) = (n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right), \forall j \in \mathbb{N}.$$

事实上, 当 $j=1$, 由(2)可知命题显然成立, 假设命题对 $j \in \mathbb{N}$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
&T_{n-j} \cdots T_n f(x) \\
&= T_{n-j} \left((n-j+1) \cdots (n-1)n \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k T_{n-j} \left(f \left(\frac{n-j}{n}x + \frac{k}{n} \right) \right) \\
&= \frac{n!(n-j)}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k \left[f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right) \right] \\
&= \frac{n!(-1)^j \left[f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n} \right) - f \left(\frac{n-j-1}{n}x \right) \right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k+1}{n} \right) \\
&\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right) \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right) \\
&\quad - \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+j} C_j^k f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{n!(-1)^j \left[f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n} \right) - f \left(\frac{n-j-1}{n}x \right) \right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{j+1}{n} \right) - \frac{n!}{(n-j-1)!} (-1)^j f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{1}{n} \right) \\
&\quad + \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1+j} (C_j^{k-1} + C_j^k) f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{n!}{(n-j-1)!} \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+1+j} C_{j+1}^k f \left(\frac{n-j-1}{n}x + \frac{k}{n} \right).
\end{aligned}$$

因此我们证明了对 $j+1$, 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有 $j \in \mathbb{N}$, 命题都成立.

Step3 (*) 我们证明一个中值定理的结果. 由 Hermite 插值定理, 对 $x \in [0, 1]$, 存在 $\theta \in [0, 1]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(x - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left(x - \frac{s+i}{n} \right).$$

特别的存在 $\theta \in [\frac{i}{n}, \frac{i+j}{n}]$, 使得

$$\begin{aligned}
f \left(\frac{i}{n} \right) &= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n})}{(\frac{k+i}{n} - \frac{s+i}{n})} \cdot f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{f^{(j)}(\theta)}{j!} \prod_{s=1}^j \left(\frac{i}{n} - \frac{s+i}{n} \right) \\
&= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{(-\frac{s}{n})}{(\frac{k-s}{n})} \cdot f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j \prod_{s \neq k} \frac{s}{s-k} \cdot f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j \frac{j!}{k(j-k)!(k-1)!} (-1)^{k-1} f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j} \\
&= \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} C_j^k f \left(\frac{k+i}{n} \right) + \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j},
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k f \left(\frac{k+i}{n} \right) = \frac{(-1)^j f^{(j)}(\theta)}{n^j}.$$

Step4 (*) 注意到

$$B_n^{(j)}(f, x) = B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x), 1 \leq j \leq k, n > k.$$

于是运用 **Step3**, 我们有

$$\begin{aligned} |B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - B_{n-j}(T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f, x)| \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - T_{n-j+1} \cdots T_{n-1} T_n f\left(\frac{i}{n-j}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^j (-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{k+i}{n}\right)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &= |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - \frac{n! f^{(j)}(\theta)}{(n-j)! n^j}| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\leq |B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-j} |f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right) - f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-j} \left| 1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right| \cdot |f^{(j)}(\theta)| C_{n-j}^i x^i (1-x)^{n-j-i}. \end{aligned}$$

Step5 (*) Step1 告诉我们关于 $x \in [0, 1]$, 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f^{(j)}, x) = f^{(j)}(x), j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

同时注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right) = 0,$$

以及

$$\left| \frac{i}{n} - \frac{i}{n-j} \right| = \frac{ji}{n(n-j)} \leq \frac{j}{n}, \left| \frac{i+j}{n} - \frac{i}{n-j} \right| \leq \frac{2j}{n}, \forall n > j.$$

我们同时假设

$$M_j \triangleq \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(j)}(x)|, j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

并注意到 $f^{(j)}$ 是一致连续的. 现在对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$, 使得

$$|B_{n-j}(f^{(j)}, x) - f^{(j)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [0, 1],$$

$$\left| 1 - \frac{n!}{(n-j)! n^j} \right| < \frac{\varepsilon}{3M_j}, \forall n > N,$$

$$|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall |x - y| < \delta, x, y \in [0, 1].$$

因此当正整数 $n > \max \left\{ \frac{2j}{\delta}, j, N \right\}$, 利用 **Step4**, 我们有

$$|B_n^{(j)}(f, x) - f^{(j)}(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b],$$

这就完成了证明. □

命题 0.1

设 $f \in C[0, 1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

证明

$$f(x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

注 $p_n(x)$ 的良好定义性可由 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 得到. 实际上, 我们这里取的 $p_n(x)$ 就是 g 的 Bernstein 多项式 $B_n(g, x)$.

证明 由条件可知, 对任意实系数多项式 $p(x)$, 都有

$$\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0, \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

对 $\forall g \in C[0, 1]$, 取 $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $p_n(x) \Rightarrow g(x)$, 则

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)p_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_n(x)dx = 0.$$

于是

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0, \forall g \in C[a, b].$$

再取 $g = f$, 则由上式可得

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

□

例题 0.1 设 $f \in C[0, \pi]$ 满足: 对 $n = 0, 1, 2, \dots$, 有 $\int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = 0$. 求证: $f(x) \equiv 0$.

证明 由定理??可知, $\cos^n x$ 可表示为 $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ 的线性组合. 于是由条件, 对于 $n = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$\int_0^\pi f(x) (\cos^n x - \cos^{n+2} x) \, dx = 0.$$

作变换 $x = \arccos t$ 得

$$\int_{-1}^1 f(\arccos t) \sqrt{1-t^2} t^n \, dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

根据 **命题 0.1** 可知 $f(\arccos t) \sqrt{1-t^2} \equiv 0 (t \in [-1, 1])$. 因而 $f(x) \equiv 0$.

□

注 这里在积分中考虑 $(\cos^n x - \cos^{n+2} x)$ 是为了防止变换后分母上出现 $\sqrt{1-t^2}$, 从而避免讨论无界函数的积分.

定理 0.2

设 $f(x) \in C^k[a, b]$, 这里 $a < b, a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b], s = 0, 1, 2, \dots, k.$$

♡

注 $q(x)$ 的良好定义性可由 $f^{(k)}$ 的连续性和 **Bernstein 多项式的性质 (4)** 直接得到. 实际上, $q(x) = B(f^{(k)}, x)$.

证明 由带积分型余项的 Taylor 公式可知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $q \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$|q(x) - f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (4)$$

设

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} q(t) dt,$$

则对 p 求导可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$p^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} q(t) dt. \quad (5)$$

由带积分型余项的 Taylor 公式可知, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$f^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{f^{(j+s)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} f^{(k)}(t) dt. \quad (6)$$

于是利用(4)(5)(6)式可得, 对 $\forall s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$|f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x)| = \left| \frac{1}{(k-s-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-s-1} [f^{(k)}(t) - q(t)] dt \right| \leq \frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!}, \forall x \in [a, b].$$

故结论得证. \square

例题 0.2 设多项式列 $p_n, n = 1, 2, \dots$ 在 \mathbb{R} 一致收敛到 f , 证明 f 为多项式.

证明 由条件可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$|p_m(x) - p_n(x)| \leq 1, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}.$$

由于有界的多项式函数一定是常值函数, 因此 $p_m(x) - p_n(x) = C, \forall m > n \geq N, x \in \mathbb{R}$. 其中 C 是一个常数. 故

$$p_n(x) = p_N(x) + c_n, \forall n \geq N, x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

其中 $\{c_n\}$ 是一个常数列. 从而任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n(x_0) - p_N(x_0)] = f(x_0) - p_N(x_0).$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 存在. 于是由 x_0 的任意性可得

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f(x) - p_N(x), x \in \mathbb{R}.$$

即 $f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$. 因此结论得证. 或者对(7)式两边同时令 $n \rightarrow \infty$, 也能得到

$$f(x) = p_N(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

\square

0.1.2 可积函数的逼近

定理 0.3 (可积被连续函数逼近)

(1) 设 $f \in R[a, b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C[a, b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

(2) 设 $f \in R[a, b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - P(x)| dx < \varepsilon.$$

(3) 设 $f \in R[a, b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(a, b)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

这里 $g \in C_c(a, b)$ 表示 g 是有含于 (a, b) 的紧支撑的连续函数.

(4) 设 $p \geq 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

这里 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 表示 g 是有含于 \mathbb{R} 的紧支撑的连续函数. \heartsuit

 **笔记** 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

证明

(1) 对任何 $\varepsilon > 0$, 因为 $f \in R[a, b]$, 所以存在一个划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon, w_i(f) \text{ 表示 } f \text{ 在 } [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n \text{ 的振幅.}$$

构造 $[a, b]$ 上的连续函数 (分段线性函数) g 使得它的图像就是连接各点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 的折线, 即

$$g(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}f(x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

不难发现 $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x_{i-1})| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n w_i(f) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{3}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

这就完成了证明.

(2) 根据第 1 问可知, 存在 $g \in C[a, b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 **定理 0.2** 可知, 存在多项式 $P(x)$ 使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - P(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - P(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) 对任何 $\varepsilon \in (0, 1)$, 由第 1 问可知, 存在 $g \in C[a, b]$ 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取充分小的 $\delta > 0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{16}.$$

再取 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

(a): $0 \leq h(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b): $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a + \delta) \cup (b - \delta, +\infty)$;

(c): $h(x) = 1, \forall x \in [a + 2\delta, b - 2\delta]$.

于是取 $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a, b)$, 由第 1 问可知 $\sup_{x \in [a, b]} |g| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$, 从而 $\sup_{x \in [a, b]} |g_1| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f|$. 从而

$$\int_a^b |f(x) - g_1(x)| dx = \int_a^b |f(x) - g(x)h(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - h(x)g(x)|dx \\
&\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x) - g(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)|dx \\
&\leq \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_a^b |f(x) - g(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)|dx \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x) - h(x)g(x)|dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x) - h(x)g(x)|dx \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{4} + 2 \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|dx + 2 \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|dx \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

(4) 证明的想法和第3问类似. 由条件可知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得

$$\int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx = \int_X^\infty |f(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

因为 f 在 $[-X, X]$ 黎曼可积, 所以由第2问, 存在 $g \in C_c(-X, X)$ 使得

$$\int_{-X}^X |f(x) - g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{1 + \sup_{[-X, X]} |2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X, X]} |g| \leq \sup_{[-X, X]} |f|,$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty |f(x) - g(x)|^p dx &= \int_{|x| \geq X} |f(x)|^p dx + \int_{-X}^X |f(x) - g(x)|^p dx \\
&\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} |f - g|^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)|dx \\
&\leq \varepsilon + \sup_{[-X, X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^X |f(x) - g(x)|dx \\
&< \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例题 0.3 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值为 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$,

$$\left| \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx \right| < \varepsilon.$$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由可积函数可被分段线性函数逼近知, 存在一个划分

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{8}, \quad (8)$$

使得

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

其中 $h(x)$ 为分段线性函数, 定义为

$$h(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

记

$$x'_i = x_i - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}), \quad (10)$$

并取

$$g(x) \triangleq \begin{cases} 0, & x \in [x_{i-1}, x'_i], \\ 1, & x \in [x'_i, x_i]. \end{cases}$$

显然 $g \in R[0, 1]$, 从而对 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$, 都存在 $n_1, n_2 \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$, 使得

$$\alpha \in [x_{n_1-1}, x_{n_1}], \quad \beta \in [x_{n_2}, x_{n_2+1}].$$

于是利用 (8)(10) 式可得

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} [h(x) - g(x)] dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{x_{n_1}} h(x) dx - \int_{\alpha}^{x_{n_1}} g(x) dx + \int_{x_{n_2}}^{\beta} h(x) dx - \int_{x_{n_2}}^{\beta} g(x) dx + \sum_{i=n_1}^{n_2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} h(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \right] \right| \\ &\leq \left| 2(x_{n_1} - \alpha) + 2(\beta - x_{n_2}) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) - (x_i - x'_i) \right] \right| \\ &\leq 2(x_{n_1} - x_{n_1-1}) + 2(x_{n_2+1} - x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

故再由 (9) 式可得

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx + \left| \int_{\alpha}^{\beta} [h(x) - g(x)] dx \right| < \varepsilon.$$

□

例题 0.4 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的凹函数, 且 $f(1) = 1$. 求证:

(1)


$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}, \quad (11)$$

(2)

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx. \quad (12)$$

注 若取 $f(x) = x$, 则式 (12) 成为等式, 因而 (12) 式中的系数 $\frac{2}{3}$ 是最佳的.

注 (13) 式实际上就是凹函数的割线放缩, 用凹函数的定义表示了而已.

 **笔记** 构造 f_{δ} 的想法就是将端点与其邻域内一点连接, 其余点的值不变, 使得 $f_{\delta} \in C[0, 1]$. 但后续分部积分需要 f_{δ} 二阶连续可微, 于是再用 Bernstein 多项式 $B(f_{\delta}, n)$ 逼近 f_{δ} , 从而 $B(f_{\delta}, n) \rightrightarrows f_{\delta}$, 并且 Bernstein 多项式 $B(f_{\delta}, n)$ 任意阶连续可微, 端点值不变. 但是注意此时不一定有 $B^k(f_{\delta}, n) \rightrightarrows f_{\delta}^k$, 因为 f_{δ} 不可导!

证明 (1) 由定理??知, 凹函数在定义域内部是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改 f 在 0 的值为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 这不改变积分的值, 此时 f 在 0 处连续, 故可不妨设 $f \in C[0, 1]$. 对于给定的 $\delta \in (0, 1)$ 以及 $x \in (\delta, 1)$, 有

$$x = \frac{1-x}{1-\delta} \delta + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) \cdot 1.$$

因为 f 是凹函数, 有

$$f(x) \geq \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta) + \left(1 - \frac{1-x}{1-\delta}\right) f(1). \quad (13)$$

由上式和条件 $f(1) = 1$, 得 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq 1$. 若 f 在 1 处不连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > 1$. 可取 δ 充分靠近 1, 使得在 $(\delta, 1)$ 上 $f(x) > 1$. 令

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \delta, \\ \frac{x-\delta}{1-\delta} \cdot 1 + \frac{1-x}{1-\delta} f(\delta), & \delta < x \leq 1, \end{cases}$$

则 f_{δ} 是 $[0, 1]$ 上连续的凹函数且 $f_{\delta}(1) = 1$, $f_{\delta}(x) \leq f(x)$. 由此可知, 只需对连续的凹函数证明式 (11). 又由于连续函数的 Bernstein 多项式在两个端点插值、保持凸性且一致收敛到该连续函数, 只需对有二阶连续导数的凹函

数来证明式 (11). 因此, 不妨设 $f \in C^2[0, 1]$.

解法一: 设 a, b 是两个待定常数, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 (ax + b)f(x) dx + \frac{a}{2} + ab + b^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)f(x) dx &= \left[\left(\frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f'(x) dx = \frac{1}{2}a + b - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}a + b - \left[\left(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f'(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} \right) f''(x) dx. \end{aligned}$$

取 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$, 则有

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 (x-1)x^2 f''(x) dx.$$

由于 f 是凹函数, 有 $f''(x) \leq 0$. 因而

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

将此代入式 (14), 可得式 (11).

解法二: 设 a, b 是两个待定常数, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 (ax + b)f(x) dx \right)^2 \\ \iff \left(\frac{a}{2} + ab + b^2 \right) \int_0^1 f^2(x) dx &\geq \left(\int_0^1 (ax + b)f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)f(x) dx &= \frac{a}{2} + b - \int_0^1 \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right) f'(x) dx \\ &= \frac{a}{2} + b - \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} \right) f'(1) + \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 (ax + 3b) f''(x) dx. \end{aligned}$$

由 $\begin{cases} \frac{a}{6} + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + b = \frac{1}{4} \end{cases}$ 解得 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$. 于是取 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$, 代入上式得

$$\int_0^1 (ax + b)f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx.$$

由 f 是 $[0, 1]$ 上的凹函数可知, $f''(x) \leq 0$. 从而

$$\int_0^1 (ax + b)f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 (x-1) f''(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

再代入(15)即得

$$\frac{1}{4} \int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\frac{1}{4} \right)^2 \implies \int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

(2) 设 $c \in (0, 1)$ 是待定系数, 则 $g(x) = \frac{f(x) - c}{1 - c}$ 仍是 $[0, 1]$ 上的凹函数且 $g(1) = 1$. 由式 (11) 有

$$\int_0^1 g^2(x) dx \geq \frac{1}{4},$$

即

$$\int_0^1 f^2(x) dx - 2c \int_0^1 f(x) dx + c^2 \geq \frac{1}{4}(1 - c)^2.$$

取 $c = \frac{1}{3}$, 则 $c^2 = \frac{1}{4}(1-c)^2$. 于是

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) dx.$$

□

引理 0.2

二元函数 $K(x, t)$ 定义为

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

(1) 对 $\forall p \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\int_0^1 K^p(x, t) dx = \frac{t^p (1-t)^p}{p+1}, \quad \int_0^1 K^p(x, t) dt = \frac{x^p (1-x)^p}{p+1}.$$

(2) 设 $f \in C^2[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 则

$$f(x) = \int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

♡

证明

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 K^p(x, t) dx &= \int_0^t x^p (1-t)^p dx + \int_t^1 t^p (1-x)^p dx \\ &= \frac{t^{p+1} (1-t)^p}{p+1} + \frac{t^p (1-t)^{p+1}}{p+1} \\ &= \frac{t^p (1-t)^p}{p+1}. \\ \int_0^1 K^p(x, t) dt &= \int_0^x t^p (1-x)^p dt + \int_x^1 x^p (1-t)^p dt \\ &= \frac{x^{p+1} (1-x)^p}{p+1} + \frac{x^p (1-x)^{p+1}}{p+1} \\ &= \frac{x^p (1-x)^p}{p+1}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt &= \int_0^x K(x, t)(-f''(t)) dt + \int_x^1 K(x, t)(-f''(t)) dt \\ &= \int_0^x t(1-x)(-f''(t)) dt + \int_x^1 x(1-t)(-f''(t)) dt \\ &= -x(1-x)f'(x) + \int_0^x (1-x)f'(t) dt + x(1-x)f'(x) - \int_x^1 xf'(t) dt \\ &= \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x xf'(t) dt - \int_x^1 xf'(t) dt \\ &= f(x) - x \int_0^1 f'(t) dt \\ &= f(x) - x[f(1) - f(0)] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

定理 0.4 (Favard 不等式)

若 f 是区间 $[0, 1]$ 上的非负凹函数, 则有对 $p \geq 1$,

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$



注 (1) 可以用连续函数的积分来逼近可积函数的积分;

(2) 对 $[0, 1]$ 上的凸或凹的连续函数 f , 可以用 Bernstein 多项式列 $B_n(f; x)$ 一致逼近 f , 且 $B_n(f; x)$ 与 f 有相同的凸性或凹性, 而且 $B_n(f; x)$ 在两个端点与 f 的值相同;

(3) 当 f 二阶连续可导且在两个端点 0 和 1 取零值时, f 可表示为

$$\int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt.$$

证明 由定理??知, 凹函数在内点是连续的, 且在两个端点的单边极限存在, 修改 f 在 0 的值为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 在 1 的值为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 这不改变积分的值, 此时 f 在 $0, 1$ 处连续, 故可不妨设 $f \in C[0, 1]$. 选充分小的 $\delta > 0$, 并修改 f 在 $[0, \delta]$ 和 $[1 - \delta, 1]$ 上的值, 使得修改后的函数是在 $[0, 1]$ 的连续凹函数, 且在 $0, 1$ 取零值:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{f(\delta)}{\delta}x, & x \in [0, \delta), \\ f(x), & x \in [\delta, 1 - \delta), \\ \frac{f(1 - \delta)}{\delta}(1 - x), & x \in [1 - \delta, 1]. \end{cases}$$

易知

$$\int_0^1 f_\delta(x) dx = \frac{\delta[f(\delta) + f(1 - \delta)]}{2} + \int_\delta^{1-\delta} f(x) dx.$$

因而

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^1 f_\delta(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

因此只需对 $[0, 1]$ 上满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的连续凹函数证明. 又因为 f 的 Bernstein 多项式

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 f , 且 $B_n(f; x)$ 仍是在两个端点取零值的凹函数. 因此只需对有二阶连续导数的函数证明. 此时有 $f''(x) \leq 0$. 由 $f(0) = 0$, 得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = xf'(x) - \int_0^x tf''(t) dt.$$

再由 $f(1) = 0$, 可得

$$f'(1) = \int_0^1 tf''(t) dt,$$

由定理 0.2(2) 可知

$$\begin{aligned} f(x) &= x(f'(x) - f'(1)) + xf'(1) - \int_0^x tf''(t) dt \\ &= -x \int_x^1 f''(t) dt + x \int_0^1 tf''(t) dt - \int_0^x tf''(t) dt \\ &= - \int_0^1 K(x, t) f''(t) dt, \end{aligned}$$

其中二元函数 $K(x, t)$ 定义为

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

由 f 是凹函数可知 $f'' \leq 0$. 于是由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)(-f''(t)) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 K^p(x, t)(-f''(t))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\stackrel{\text{定理 0.2(1)}}{=} \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t)|f''(t)| dt \\ &= -\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 t(1-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= -\int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)f''(t) dt \right) dx \\ &= -\int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)f''(t) dx \right) dt \\ &\stackrel{\text{定理 0.2(1)}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 t(1-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x) dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^p.$$


□

引理 0.3

证明: 若 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A+B+C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

♡

 **笔记** 利用齐次化方法证明齐次不等式的应用.

证明 令

$$S \triangleq \{(A, B, C) \mid |A|^p + |B|^p + |C|^p = 1\},$$

则 S 是 \mathbb{R}^3 上的有界闭集, 从而 S 是紧集. 于是 $|A+B+C|^p$ 可以看作紧集 S 上关于 (A, B, C) 的连续函数, 故一定存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A+B+C|^p \leq C_p, \forall (A, B, C) \in S. \quad (16)$$

对 $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, 固定 A, B, C , 不妨设 A, B, C 不全为零, 否则不等式显然成立. 令

$$L = \frac{1}{\sqrt[p]{|A|^p + |B|^p + |C|^p}},$$

考虑 (LA, LB, LC) , 则此时

$$|LA|^p + |LB|^p + |LC|^p = 1.$$

因此 $(LA, LB, LC) \in S$. 从而由(16)式可知

$$|LA+LB+LC|^p \leq C_p.$$

于是

$$|A+B+C|^p \leq \frac{C_p}{L^p} = C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故结论得证.

□

定理 0.5 (积分的绝对连续性)

设 $p \geq 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \quad (17)$$



笔记 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行.

证明 Step1: 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$ 时, 则存在 $X > 0$, 使得

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X.$$

从而当 $h \in (-1, 1)$ 时, 就有

$$f(x) = 0, \forall |x| \geq X+1.$$

又因为 $f \in C[-X-1, X+1]$, 所以由 Cantor 定理可知 f 在 $[-X-1, X+1]$ 上一致连续. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| \leq X+1} |f(x+h) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{|x| \leq X+1} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Step2: 对一般的 f , 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 **定理 0.3(3)** 可知, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h) + g(x+h) - g(x) + g(x) - f(x)|^p dx$$

利用齐次化方法得到 **引理 0.3**, 从而可知若 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则存在 $C_p > 0$, 使得

$$|A + B + C|^p \leq C_p(|A|^p + |B|^p + |C|^p).$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &\leq C_p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right) \\ &\stackrel{\text{换元}}{=} 2C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^p dx + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx \\ &\leq 2\varepsilon C_p + C_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (18)$$

由 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 结合 **Step1** 可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx = 0. \quad (19)$$

于是由(18)(19)式可得

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq 2\varepsilon C_p.$$

再由 ε 的任意性得证. □