## 0.1 Fourier 级数及基本性质

我们首先需要熟悉傅立叶级数的现代形式:

**定义 0.1**

设 $f$ 是周期 1 的的可积函数, 则定义 $f$ 的傅立叶系数为

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}dx, m \in \mathbb{Z}.$$

$f$ 的傅立叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)e^{2\pi imx}.$$

♣

注 定义 0.1中的傅立叶级数(**??**)不意味着收敛到 $f$ 或者收敛.

**定义 0.2**

对每个 $N \in \mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_N(x) = \sum_{|m|\leqslant N} e^{2\pi imx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N+1}[D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_N(x)] \\ &= \sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx} \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \end{aligned}$$

为 **Fejr 核**.

♣

注 定义 0.2中的等式关系都是等比数列求和和欧拉公式, 二重求和换序的应用. 我们略去证明

下面我们在高数框架下给出 Dirichlet 核和 Fejér 核, 为了形式上的统一, 我们定义

**定义 0.3**

对每个 $n \in \mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_0(x) = 1, D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, n = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

为 **Dirichlet 核**.

2. 我们称

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(x) = 1 + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx = \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 \tag{2}$$

为 **Fejr 核**.

♣

证明 证明的关键是如下结论

结论 [三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法] 三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法可以通过欧拉公式之后用等比数列求和公式或者乘 $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ 之后对分子和差化积得到.

1. 我们有

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2}\cos kx}{2\sin\frac{x}{2}}=1+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$
$$=1+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

我们证明了式(1)式.

2. 我们有

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x)=\frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(1+2\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right)=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\cos kx\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx\right)=1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx,$$

以及

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{j=0}^{n}\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x=-\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{j=0}^{n}[\cos(j+1)x-\cos jx]$$
$$=-\frac{\cos(n+1)x-1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}.$$

这就证明了(2)式.

□

**定理 0.1 (傅立叶部分和积分表达式)**

设 $f$ 是周期 $2\pi$ 的可积函数, 其傅立叶系数为 $a_n,b_n$. 记 $S_0(x)=\sigma_0(x)=\dfrac{a_0}{2}$ 以及

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x),n=1,2,\cdots.$$

则我们有

**Dirichlet** :

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

**Fejr** :

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(t)dt=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

笔记 根据经验, 取平均性质会更好一些, 因此 Fejér 是一个好核而 Dirichlet 核性质就相当糟糕, 在后面的证明中我们将充分感受到这一点.

证明 当 $n=0$, 这个定理显然成立. 当 $n>0$, 一方面, 我们有

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)dy+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\cos kxdy+\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\sin kxdy\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos k(y-x)dy\right) \\
&\xlongequal{\text{注意周期}2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)dy + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)2\cos kydy\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)dy.
\end{aligned}
$$

另外一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_j(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)F_n(y)dy.
\end{aligned}
$$

这就证明了这个定理. □

**定理 0.2 (Fourier 级数的逐项积分定理)**

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意 $c, x \in [-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

**定理 0.3 (Fourier 级数的逐项微分定理)**

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导. 进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 (注意:$f'(x)$ 在有限个点可能无定义, 但这并不影响其可积性). 则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项微分得到, 即

$$f'(x) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n\sin nx + b_n n\cos nx).$$

**推论 0.1**

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

**定理 0.4 (Bessel 不等式)**

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 这表示 Fourier 系数的平方组成了一个收敛的级数.

**定理 0.5 (Parseval 恒等式)**

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足恒等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**引理 0.1**

设 $f$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$. $a_n,b_n$ 为 $f$ 的 Fourier 系数,$a_n',b_n'$ 为 $f$ 的导函数 $f'$ 的 Fourier 系数, 证明

$$a_0'=0, a_n'=nb_n, b_n'=-na_n'(n=1,2,\cdots).$$

注 分部积分的条件, 需要 $f$ 的导函数 $f'$ 在积分区域上连续.

证明 由于 $f$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 因此 $f'\in C([-\pi,\pi])$. 又 $f(\pi)=f(-\pi)$, 故

$$\begin{aligned}
a_0'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\\
a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=nb_n(n=1,2,\cdots),\\
b_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-na_n(n=1,2,\cdots),
\end{aligned}$$

因此结论得证. □

**例题 0.1** 设 $f$ 以 $2\pi$ 为周期且具有二阶连续的导函数, 证明 $f$ 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f$.

证明 因为 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的具有二阶连续导数的函数, 故 $f(x)$,$f'(x)$ 可展开成傅里叶级数, 不妨设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad f'(x)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx).$$

先证 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛. 由引理 0.1可知

$$a_0'=0, a_n'=nb_n, b_n'=-nb_n(n=1,2,\cdots),$$

从而

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|b_n'|}{n}+\frac{|a_n'|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left[(b_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right].\tag{3}$$

又由Bessel 不等式可知

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]$ 收敛. 再结合 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛及(3)式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 进而 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛.
注意到

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|\leqslant\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|),\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

因此由 Weierstrass 判别法可知,$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 即 $f$ 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f$. □