

0.1 矩阵与二次型

0.1.1 用矩阵方法来讨论二次型问题

引理 0.1

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则

$$f(x) = x'Ax + 2a\beta'x + a^2c = \begin{pmatrix} x' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}.$$

注 上述 $f(x)$ 仍是一个二次型, 只不过有 1 个变量恒为常数而已.

证明 由矩阵乘法易证. □

例题 0.1 设 A 是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: 函数 $f(x) = x'Ax + 2\beta'x + c$ 的极小值等于 $c - \beta'A^{-1}\beta$, 其中 $\beta = (b_1, \dots, b_n)'$, b_i 和 c 都是实数.

证明 注意到

$$f(x) = (x' \ 1) \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 A 可逆, 故可作如下对称分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -\beta'A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & c - \beta'A^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

由 $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ 可解出 $y = x + A^{-1}\beta$, 于是

$$f(x) = (y' \ 1) \begin{pmatrix} A & O \\ O & c - \beta'A^{-1}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = y'Ay + c - \beta'A^{-1}\beta \geq c - \beta'A^{-1}\beta.$$

因此, 当 $x = -A^{-1}\beta$ 时, $f(x)$ 取到极小值 $c - \beta'A^{-1}\beta$. □

命题 0.1

设实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^2$$

其中 a_{ij} 都是实数, 求证 f 是半正定型且 f 的秩等于下列矩阵的秩:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

证明 f 的半正定性由定义即得. 注意到 $f(x) = (Ax)'(Ax) = x'(A'A)x$, 故 f 的相伴矩阵为 $A'A$, 于是命题??(1) 可知, $r(f) = r(A'A) = r(A)$. □

0.1.2 用二次型方法来讨论矩阵问题

命题 0.2

设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 都是 n 阶正定实对称矩阵, 求证: A, B 的 Hadamard 乘积 $H = A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ 也是正定阵.

证明 因为 B 是正定阵, 故由命题??可知, 存在可逆实矩阵 C , 使得 $B = C'C$. 设 $C = (c_{ij})$, 则 $b_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj}$. 作二次型

$$\begin{aligned} f(x) = x' H x &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ij} (c_{ki} c_{kj}) \right) x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} (c_{ki} x_i) (c_{kj} x_j) \right) = \sum_{k=1}^n y_k' A y_k \end{aligned}$$

其中 $y_k = (c_{k1}x_1, c_{k2}x_2, \dots, c_{kn}x_n)'$. 因为 C 可逆, 所以当 $x \neq 0$ 时, 至少有一个 $y_k \neq 0$, 因此由 A 的正定性可得 $f(x) > 0$, 于是 f 是正定型, 从而 H 是正定阵. \square

例题 0.2 求下列实二次型的标准型:

1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \max\{i, j\} x_i x_j$;
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n |i - j| x_i x_j$.

解

1. f 的系数矩阵是 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \max\{i, j\}$. 由例题??可知, A 的第 k 个顺序主子式 $|A_k| = (-1)^{k-1}k(1 \leq k \leq n)$, 再由命题??可知, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2$.
2. f 的系数矩阵是 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i - j|$. 由于 $a_{11} = 0$, 故先做对称初等变换: 将 A 的第二行加到第一行上, 再将第二列加到第一列上, 得到的矩阵记为 $B = (b_{ij})$, 其中 $b_{11} = 2$, 即 $|B_1| = 2$. 由于第三类初等变换不改变行列式的值, 故由例题??可知, B 的第 k 个顺序主子式 $|B_k| = (-1)^{k-1}(k-1)2^{k-2}(2 \leq k \leq n)$, 再由命题??可知, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2$. \square

命题 0.3

设 A 是 n 阶可逆实对称矩阵, S 是 n 阶实反对称矩阵且 $AS = SA$, 求证: $A + S$ 是可逆矩阵.

证明 **证法一:** 对任一 n 维非零实列向量 α , 我们有

$$\begin{aligned} \alpha'(A + S)'(A + S)\alpha &= \alpha'(A'A + A'S + S'A + S'S)\alpha \\ &= \alpha'(A'A)\alpha + \alpha'(A'S + S'A)\alpha + \alpha'(S'S)\alpha \end{aligned}$$

由于 $A'S + S'A = AS - SA = O$, 故上式等于 $\alpha'(A'A)\alpha + \alpha'(S'S)\alpha$. 由命题??可知, $A'A$ 是正定阵, $S'S$ 是半正定阵, 所以上式总大于零, 即 $(A + S)'(A + S)$ 是正定阵, 于是 $|A + S|^2 > 0$, 从而 $A + S$ 是可逆矩阵.

证法二: 由于 $A + S = A(I_n + A^{-1}S)$, 故只要证明 $I_n + A^{-1}S$ 可逆即可. 由 $AS = SA$ 可知 $A^{-1}S = SA^{-1}$, 于是

$$(A^{-1}S)' = S'(A^{-1})' = S'(A')^{-1} = -SA^{-1} = -A^{-1}S$$

即 $A^{-1}S$ 是实反对称矩阵, 最后由命题??(2) 即得结论. \square