0.1 Weierstrass 定理

定义 0.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1}$$

为一个复数项级数. 级数 (1) 称为是收敛的, 如果它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 收敛. 如果 $\{S_n\}$ 的极限为 S, 就说级数 (1) 的和为 S, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

♣

定理 0.1

设 $\alpha_n = a_n + \mathrm{i}b_n (n = 1, 2, \cdots)$,$a_n$ 及 b_n 为实数, 则复级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

收敛于 $s = a + \mathrm{i}b (a, b$ 为实数$)$ 的充要条件为: 实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别收敛于 a 及 b.

♡

证明 设 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, 则

$$s_n = A_n + \mathrm{i}B_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由定理**??**知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + \mathrm{i}b$$

的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = a \text{ 及 } \lim_{n\to\infty} B_n = b.$$

□

定理 0.2 (Cauchy 收敛准则)

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立.

♡

证明 由数列的 Cauchy 收敛准则立得.

□

推论 0.1

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数,$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

♡

定义 0.2

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列复数, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

命题 0.1

绝对收敛的级数一定收敛. 反过来当然不成立.

证明 由级数收敛的 Cauchy 收敛准则立得.

□

定义 0.3

设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的一个点集,$f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的一个函数列, 如果对于每一个 $z \in E$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{2}$$

收敛到 $f(z)$, 就说级数 (2) 在 E 上收敛, 其和函数为 f, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$.

定义 0.4

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是定义在点集 E 上的级数, 我们说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

对所有 $z \in E$ 成立, 这里,$S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ 是级数的部分和.

定理 0.3

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \tag{3}$$

对所有 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 那么按定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

在 E 上成立, 这里,p 是任意自然数. 因而

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| = |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leqslant |S_{n+p}(z) - f(z)| + |S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

在 E 上成立, 这就是不等式(3).

反之, 如果不等式(3) 对任意自然数 p 在 E 上成立, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上收敛, 设其和为 $f(z)$. 在不等式

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

中令 $p \to \infty$, 即得

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant \varepsilon.$$

按定义,$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$.

□

定理 0.4 (Weierstrass 一致收敛判别法)

设 $f_n : E \to \mathbb{C}$ 是定义在 E 上的函数列, 且在 E 上满足

$$|f_n(z)| \leqslant a_n, n = 1, 2, \cdots .$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意 $z \in E$ 及任意自然数 p 成立. 故由定理 0.3知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

□

定理 0.5

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都是 E 上的连续函数, 那么 f 也是 E 上的连续函数.

证明 任取 $a \in E$, 只要证明 f 在 a 处连续就可以了. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对所有 $z \in E$ 成立. 取定 $n_0 > N$, 则因 $S_{n_0}(z) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k(z)$ 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $z \in E \cap B(a, \delta)$ 时, 有

$$|S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $z \in E \cap B(z_0, \delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &\leqslant |f(z) - S_{n_0}(z)| + |S_{n_0}(z) - S_{n_0}(a)| + |S_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 f 在 a 处连续.

□

定理 0.6

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 如果每个 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都在 γ 上连续, 那么

$$\int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z. \tag{4}$$

注 这个定理实际上证明了在上述的条件下, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 可以沿 γ 逐项积分.

证明 由定理 0.5,f 在 γ 上连续. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon$$

对任意 $z \in \gamma$ 成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 由长大不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma} f_k(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right) \mathrm{d}z\right| < \varepsilon|\gamma|.$$

因而等式(4)成立.

□

定义 0.5

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 的任意紧子集上一致收敛, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中**内闭一致收敛**.

♣

注 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 上内闭一致收敛, 那么它在 D 中的每一点都收敛, 但不一定一致收敛. 例如, 级数 $1 + \sum_{k=1}^{\infty}(z^k - z^{k-1})$, 它的部分和

$$S_{n+1}(z) = 1 + (z-1) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) = z^n,$$

显然它在单位圆盘中是内闭一致收敛的, 但不一致收敛.

命题 0.2

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中一致收敛, 那么它一定内闭一致收敛.

♠

笔记 由此可知, 内闭一致收敛比一致收敛要求低.

证明 证明是显然的.

□

定义 0.6

设 $D, G \subseteq \mathbb{C}$, 如果 D 的子集 G 满足

(i) $\overline{G} \subseteq D$;

(ii) $\overline{G}$ 是紧的,

就说 G **相对于** D **是紧的**, 记为 $G \subset\subset D$.

♣

引理 0.1

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域,K 是 D 中的紧子集, 且包含在相对于 D 是紧的开集 G 中, 即 $K \subset G \subset\subset D$, 那么对任意 $f \in H(D)$, 均有

$$\sup\{|f^{(k)}(z)| : z \in K\} \leqslant C \sup\{|f(z)| : z \in G\}, \tag{5}$$

这里,k 是任意自然数,C 是与 k, K, G 有关的常数.

♡

笔记 这个引理告诉我们,$f^{(k)}$(k 是任意自然数) 在紧集 K 上的上确界可用 f 在 K 的邻域 G 上的上确界来控制.

证明 由定理??,$\rho = d(K, \partial G) > 0$. 所以, 以 K 中任意点 a 为中心、ρ 为半径的圆盘都包含在 G 中. 对圆盘 $B(a,\rho)$ 用 Cauchy 不等式, 得

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in B(a,\rho)\} \leqslant \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in G\}.$$

对 K 中的 a 取上确界, 即得不等式(5).

□

定理 0.7 (Weierstrass(魏尔斯特拉斯) 定理)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果

(i) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$,

那么

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$\sum\limits_{m=1}^{n} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

笔记 从 Weierstrass 定理我们看到, 由全纯函数构成的级数只要在区域中内闭一致收敛, 它的和函数就一定是区域中的全纯函数, 而且可以逐项求导任意次. 这样的结果在实变函数中当然不成立.

证明 任取 $z_0 \in D$, 只要证明 f 在 z_0 的一个邻域中全纯就行了. 选取 $r > 0$, 使得 $\overline{B(z_0, r)} \subset D$, 由定理 0.5,$f$ 在 $B(z_0, r)$ 中连续. 在 $B(z_0, r)$ 中任取一可求长闭曲线 γ, 由定理 0.6和 Cauchy 积分定理, 得

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由 Morera 定理知 f 在 $B(z_0, r)$ 中全纯, 再由 z_0 的任意性知 f 在 D 中全纯.

为了证明第二个结论, 任取 D 中的紧子集 K, 记 $\rho = d(K, \partial D) > 0$. 令

$$G = \bigcup \left\{ B\left(z, \frac{\rho}{2}\right) : z \in K \right\},$$

则 $K \subset G \subset\subset D$. 由于 $\overline{G}$ 是紧集, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $f(z)$. 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 对 $\overline{G}$ 上所有的 z 成立, 这里,$S_n(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(z)$. 于是由引理 0.1, 对任意的自然数 k, 有

$$\sup\{|S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| : z \in K\} \leqslant C \sup\{|S_n(z) - f(z)| : z \in G\} \leqslant C\varepsilon,$$

这就证明了 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 由于 K 是 D 的任意紧子集, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{n} f_m^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

□

推论 0.2

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的区域, 如果

(i) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$;

(ii) $f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$,

那么

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

证明 令 $f_0(z) \equiv 0, g_n(z) = f_n(z) - f_{n-1}(z) (n = 1, 2, \cdots)$, 则由 $f_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$ 可得 $g_n \in H(D), n = 1, 2, \cdots$.

并且

$$\sum_{m=1}^{n} g_m(z) = \sum_{m=1}^{n} \left[f_m(z) - f_{m-1}(z)\right] = f_n(z).$$

于是由条件 (ii) 知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} g_m(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$. 从而由Weierstrass 定理可得

(i) $f \in H(D)$;

(ii) 对任意自然数 k,$\sum\limits_{m=1}^{n} g_m^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

又因为

$$\sum_{m=1}^{n} g_m^{(k)}(z) = \left(\sum_{m=1}^{n} g_m(z)\right)^{(k)} = f_n^{(k)}(z),$$

所以对任意自然数 k,$f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

□

例题 0.1 研究函数 $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$.

解 因为 $n^z = \mathrm{e}^{z\ln n}$, 若记 $z = x + \mathrm{i}y$, 则

$$|n^z| = |\mathrm{e}^{x\ln n} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\ln n}| = n^x.$$

当 $\mathrm{Re}z = x \geqslant x_0 > 1$ 时,$\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{x_0}}$, 故由Weierstrass 一致收敛判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ 在 $\mathrm{Re}z > 1$ 中一致收敛, 从而内闭一致收敛. 由 Weierstrass 定理,ζ 是半平面 $\mathrm{Re}z > 1$ 上的全纯函数.

□

定义 0.7

设 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是区域 D 内的解析函数族. 如果从 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 满足下列两个条件之一:

(1) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内内闭一致收敛.

(2) $f_{n_k}(z)(k = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内内闭一致趋于 $+\infty$,

则称此函数族 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内是**正规的**.

♣

引理 0.2

设复函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内解析, 在 D 内内闭一致有界, 并且在 D 的一个稠密子集 Ω 上收敛, 则序列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛.

♡

证明 设 Π 是 D 内任一有界闭集,ρ 为 Π 到 D 的边界之距离, 即 $\rho = \rho(\Pi, \partial D)$. 又设 $E = \left\{z \mid \rho(z, \Pi) \leqslant \dfrac{\rho}{2}\right\}$, 显然 E 是闭集且 $\Pi \subset E \subset D$.

由条件知, 序列 $\{f_n(z)\}$ 在 E 上一致有界, 即在 E 上 $|f_n(z)| \leqslant M$. 设点 $z_1, z_2 \in \Pi$ 且 $|z_1 - z_2| < \dfrac{\rho}{4}$; 用 $\Gamma = \{\xi : |\xi - z_1| = \dfrac{\rho}{2}\}$. 显然 Γ 的内部包含在 E 中. 由 Cauchy 积分公式得到

$$\begin{aligned} |f_n(z_1) - f_n(z_2)| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_2}\mathrm{d}\xi\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}|z_1 - z_2| \left|\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}\mathrm{d}\xi\right|. \end{aligned}$$

因为当 $\xi \in \Gamma$ 时, 有

$$|\xi - z_2| = |(\xi - z_1) - (z_2 - z_1)| \geqslant |\xi - z_1| - |z_1 - z_2| \geqslant \frac{\rho}{4}.$$

所以

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho}{4}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho}{2}\cdot|z_1-z_2| = \frac{4M}{\rho}|z_1-z_2|.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left(\frac{\rho}{4},\frac{\rho\varepsilon}{4M}\right)$, 则当 $z_1,z_2\in\Pi$ 且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时, 对任意的 n, 有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon. \tag{6}$$

在 z 平面上作边平行于坐标轴的正方形网格, 使其边长为 $\frac{\delta}{2}$. 因为 Π 是有界闭集, 所以含有 Π 的点的网格仅有限个, 记为 $\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_\mu$. 在每个 Π_k 上任取两点 z_1,z_2, 则

$$|z_1-z_2|<\sqrt{2}\cdot\frac{\delta}{2}<\delta.$$

由于 Ω 是 D 的稠密子集, 在每个 Π_k 内必有 Ω 的一点 z_k, 序列 $\{f_n(z)\}$ 在 z_k 是收敛的. 因此由 Cauchy 收敛准则知, 存在正整数 N_k, 使得当 $m,n>N_k$ 时, 有

$$|f_n(z_k)-f_m(z_k)|<\varepsilon.$$

令 $N=\max\left\{N_1,N_2,\cdots,N_\mu\right\}$, 则当 $m,n>N$ 时, 有

$$|f_n(z_k)-f_m(z_k)|<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,\mu.$$

现在设 z 是 Π 上任意一点, 它必属于某个 Π_k 内. 由(6), 对任意的 m,n, 有

$$|f_n(z)-f_n(z_k)|<\varepsilon,\quad |f_m(z)-f_m(z_k)|<\varepsilon.$$

于是当 $m,n>N$ 时, 有

$$|f_n(z)-f_m(z)|\leqslant|f_n(z)-f_n(z_k)|+|f_n(z_k)-f_m(z_k)|+|f_m(z_k)-f_m(z)|<3\varepsilon.$$

由于 N 只与 ε 有关, 而与 z 无关, 所以 $\{f_n(z)\}$ 在 Π 上一致收敛, 故 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛.

□

定理 0.8 (Montel(蒙泰尔) 定理)

设复函数序列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区域 D 内解析, 并且在 D 内内闭一致有界, 则 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 存在子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛, 并且这个子序列的极限函数在区域 D 内解析.

♡

证明 设 Ω 是区域 D 内所有有理点 (即实部和虚部都是有理数的点) 构成的点集, 则 Ω 在区域 D 内是稠密的. 因为 Ω 是可列集, 可记 $\Omega=\{z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$. 由于 $\{f_n(z)\}$ 在 $z=z_1$ 有界, 故有 $\{f_n(z)\}$ 的子序列 $\{f_{n,1}(z)\}$, 使得 $\{f_{n,1}(z_1)\}$ 收敛. 同样的理由,$\{f_{n,1}(z)\}$ 有子序列 $\{f_{n,2}(z)\}$ 使得 $\{f_{n,2}(z_2)\}$ 收敛. 以此类推,$\{f_{n,k}(z)\}$ 有子序列 $\{f_{n,k+1}(z)\}$ 使得 $\{f_{n,k+1}(z_{k+1})\}$ 收敛. 于是得到下面的一串函数序列:

$$\begin{array}{cccc}
f_{1,1}(z) & f_{2,1}(z) & f_{3,1}(z) & \cdots \\
f_{1,2}(z) & f_{2,2}(z) & f_{3,2}(z) & \cdots \\
f_{1,3}(z) & f_{2,3}(z) & f_{3,3}(z) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
f_{1,n}(z) & f_{2,n}(z) & f_{3,n}(z) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

其中后一行序列是前一行序列的子序列, 并且第 k 行序列在 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 收敛. 我们取对角线序列 $\{f_{n,n}(z)\}$, 则它在 Ω 上收敛. 于是由引理 0.2知, 序列 $\{f_{n,n}(z)\}$ 在 D 内内闭一致收敛. 由推论 0.2知, 这个子序列 $\{f_{n,n}(z)\}$ 在区域 D 内解析.

□